UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ADMINISTRACION DE RIESGO DE MERCADO CON PRODUCTOS DERIVADOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

A C T U A R I O

P R E S E N T A

GERMAN VALLE TRUJILLO

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

DIRECTOR DE TESIS: DR. FRANCISCO VENEGAS MARTINEZ

DIVISION DE ESTUDIOS PROFESIONALES

2005

m. 339776

FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION ESCOLAR

Universidad Nacional Autónoma de México
UNAM

Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.

NOMBRE: Germán Valle Trujillo

FECHA: 07-ene-05

FIRMA:

VNIVERSDAD NACIONAL
AVPNºMA DE
MEXICO

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

Administración de Riesgo de Mercado con Productos Derivados

realizado por Germán Valle Trujillo

con número de cuenta 9219940-8 , quien cubrió los créditos de la carrera de:

Actuaría

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Dr. Francisco Venegas Martínez	
Propietario	M. en I.O. María del Carmen Hernández Ayuso	
Propietario	M. en C. Beatríz Eugenia Rodríguez Fernández	
Suplente	Dr. Alejandro Alvarado García	
Suplente	Dra. Adriana Ortíz Rodríguez	Adriana

Consejo Departamental de Matemáticas

Act. Jaime Vázquez Alamilla

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMATICAS

Agradecimientos

Agradezco al Dr. Francisco Venegas por su apoyo, no sólo por la realización de esta tesis sino también por los tiempos en el Tec y en la Anáhuac.

Gracias también al Dr. Alejandro Alvarado y a la Dra. Adriana Ortiz que me dieron su ayuda cuando la necesitaba. En verdad un par de seres humanos maravillosos.

Por supuesto, Papá, Mamá, gracias. Finalmente Papá!, finalmente. Espero que esto sirva para que por lo menos tengas un par de semanas de buen sueño.

A todos mis amigos, que mejor ni los nombro por que seguro se me olvida alguno. Pero en verdad a todos les quiero mucho, los del Tec, los de la Anáhuac y los de la U.N.A.M. Realmente no se como hice para rodearme de gente tan valiosa.

Finalmente, agradezco muy en especial y con muchísimo cariño a Beti y a Carmen. Gracias Beti, gracias Carmen, cualquier cosa que pueda decirles seguro se queda corta.

Introducción

La valuación de activos derivados es un problema que ya ha cumplido una buena cantidad de años. La referencia mas antigua que se recuerda se remonta al ahora célebre trabajo de Louis Bachelier de 1903 en el cual se propone un modelo continuo para la valuación de opciones. Después de caer en el olvido el trabajo de Bachelier fué retomado por diversos investigadores hasta que en 1973 Black y Scholes dieron a conocer el modelo de valución que hoy en día conocemos.

En esta tesis estudiaremos el modelo de Black y Scholes desde varios puntos de vista, para lo cual se desarrollarán varios modelos que ataquen el problema, usando diferentes herramientas y proponiendo distintos métodos de solución. Aunque son varios los modelos que se exhiben, la estructura de la tesis busca respetar una idea fundamental. Se buscó que cada modelo que se presentara se percibiera como una consecuencia del anterior. Por esta razón empezamos presentando el modelo de valuación mas simple posible y paso a paso vamos complicando los supuestos y construyendo modelos cada vez mas complicados. Con esto se espera obtener un mejor entendimiento de cada uno de los modelos.

En el primer capítulo se establece la terminología necesaria para poder construir nuestros modelos. La idea es que no sea un capítulo muy técnico, simplemente se busca cierta familiaridad con los productos derivados, elemento de estudio fundamental de este trabajo. Se presentan varias de sus propiedades y se explican algunas de las formas de clasificarlos, de acuerdo con las reglas que siguen. Se discute además la paridad Put–Call, resultado muy fácil de obtener pero muy importante en la valuación de opciones.

Los modelos propuestos se pueden calsificar de varias formas, sin embargo en esta tesis se reconocen dos tipos fundamentales; modelos discretos y modelos continuos. Esta clasificación da origen a los dos capítulos restantes.

En el segundo capítulo, se desarrollan los modelos discretos. El objetivo de este capítulo es muy importante para el resto de la tesis, pues es aqui donde se explican y resuelven (al menos en tiempo discreto), los problemas económicos subyacentes a la valuación de activos derivados. De algún modo es el capítulo mas importante de la tesis, pues es el que trata con mayor rigurosidad y detalle el problema de valuación. Esto tiene una razón. En los modelos continuos es mucho más difícil demostrar rigurosamente los resultados que dan solidez a los modelos de valuación. En el caso discreto aún es posible dar demostraciones formales sin usar elementos técnicos excesivamente sofisticados. Elementos que por mucho, excederían el nivel de una tesis de licenciatura. La esperanza es que cuando se traten los modelos en tiempo continuo ya se tenga una sensibilidad bien desarrollada con respecto a los elementos necesarios para construir un modelo coherente con un mercado en equilibrio

En el tercer y último capítulo nos concentramos en los modelos continuos. En este caso, como ya se mencionó, no nos preocuparemos mucho por discutir a profundidad los problemas económicos subyacentes al problema de valuación. En su lugar, nos preocuparemos por describir las herramientas técnicas indispensables para valuar derivados a tiempo continuo. Específicamente; daremos algunas nociones de cálculo estocástico, se ofrecerá un construcción de la integral estocástica y del lema de Itô. Cabe señalar que aunque se destina un espacio considerable a estos temas, no se puede considerar que su tratamiento sea riguroso y exhaustivo. Con estas herramientas se da una construcción de la ecuación diferencial de Black y Scholes y a partir de esta se deduce la fórmula de Black y Scholes. En la última sección del capítulo se discute brevemente la valución neutral al riesgo en tiempo continuo. Es aqui donde de algún modo se terminan de fundir en una misma idea los modelos discretos y continuos, también en este caso se da la discusión de un modo un tanto informal. Ojalá que esta estructura resulte lo suficientemente clara para poder entender los modelos expuestos.

Contenido

Capítulo 1

Conceptos Básicos

El propósito de esta tesis es explorar algunos de los modelos más populares en la teoría de las finanzas matemáticas para la valuación y cobertura de activos derivados. El objetivo esencial es estudiar el conocido modelo Black–Scholes, y algunas pequeñas variantes del mismo. Para lograr este objetivo se propone seguir un camino de dificultad creciente. Comenzaremos discutiendo los modelos discretos más simples y caminaremos hasta poder explicar los modelos contínuos más complicados. Así, se espera que al final se tenga una visión clara, no sólo del modelo Black–Scholes, si no también de los conceptos económicos que lo fundamentan.

La importancia de los productos derivados el día de hoy luce evidente, si bien el mercado organizado de nuestro país (MEXDER) es aún pequeño e incipiente, el uso cada vez mayor de estos intrumentos en México y en el mundo, valida de sobra los grandes esfuerzos que se han hecho en los últimos treinta años para su estudio. Cabe recordar que apenas en el año de 1973 abrió sus puertas por vez primera el Chicago Board Options Exchange (CBOE), primer mercado organizado de derivados en el mundo, en este mismo año Fisher Black y Myron Scholes dieron a conocer su trabajo, el cual es por hoy una de las piedras fundamentales de las finanzas matemáticas.

A mi jucio, el enorme éxito de los mercados de derivados se fundamenta en la gran flexibilidad que estos otorgan a los inversionistas. A través de los productos derivados los inversionistas tienen acceso a instrumentos financieros hechos prácticamente a la medida, en esta tesis estudiaremos los más elementales.

1.1. Opciones

Empecemos por el principio y demos una respuesta a la pregunta más elemental, ¿que es un producto derivado?, un **producto derivado** es un instrumento financiero cuyo precio esta en función de una variable subyacente(conocida tradicionalmente como "el subyacente"). Esta bien... reconozcamos que esta definición se compromete a poco, sin embargo, esta falta de compromiso tiene un propósito, la definición deja la puerta abierta a un gran número de posibilidades. Bajo esta definición caben todo tipo de instrumentos, desde cosas tan conocidas como un bono (podemos considerar que su subyacente es la tasa de interés), hasta productos tan exóticos como las notas estructuradas [1]. En el mercado existen derivados realmente extraños, en algunos casos pueden ser instrumentos diseñados a la medida de las necesidades de los inversionistas o bien, tener subyacentes tan peculiares como el clima. Dentro de toda esta fauna financiera, quizás el derivado más simple es el forward (contrato adelantado o a plazo), éste es un instrumento a través del cual dos inversionistas pactan la compra-venta de un activo subyacente en una fecha futura a un precio determinado de antemano. Es decir una de las partes del contrato se compromete a comprar el activo en la fecha establecida al precio que se fijó, y la otra se obliga a vender el activo a su contraparte respetando las condiciones del contrato. Otro ejemplo de producto derivado son las opciones financieras, los contratos de opciones otorgan a los compradores el *derecho* de comprar o vender un activo subyacente en una fecha futura a un precio establecido de antemano, por su parte el vendedor del contrato, contrae el compromiso de vender o comprar el activo en los términos que el contrato establezca. Es importante hacer notar que la opción otorga a su tenedor el derecho y no la obligación de vender o comprar el activo subyacente, este derecho lo obtiene a través del pago de una prima, gran parte de este trabajo se concentra en estudiar la forma de determinar el costo de esta prima. Cuando el derecho que se obtiene es el de comprar el subyacente se dice que la opción es una opción tipo *Call* (opción de compra), por el contrario si el derecho es de vender el subyacente entonces se dice que la opción es una opción tipo *Put* (opción de venta). Resumiendo; al negociar una opción listada en un mercado organizado, se deben especificar los siguientes elementos:

- Tipo de opción.- opción de compra (Call)o de venta (Put).

[1] No me pidan dar una definición precisa de lo que es una nota estructurada, digamos solamente que estas son una "especie"de bonos. Basta con encontrar un inversionista con la suficiente creatividad, para que se ponga en duda la validez de cualquier definición.

- Activo subyacente.- El activo que se vende o se compra.

- Cantidad del activo subyacente.- es el número de unidades del bien subyacente que se negocia, por ejemplo en el caso de las acciones, el contrato se suele negociar por lotes. En algunas ocasiones además de especificar la cantidad del bien subyacente, también es necesario acordar la calidad del mismo, tal como sucede con los granos o el petróleo.

- Fecha de vencimiento.- es la fecha en que se vence el contrato. Las fechas de vencimiento se fijan de acuerdo con el calendario trimestral, de tal manera que existen vencimientos cada tres meses, siendo doce meses el máximo vencimiento.

- Precio de ejercicio.- es el precio al que se podrá ejercer el contrato, es decir, el precio al que se podrá comprar o vender el activo subyacente.

Estas condiciones pueden ser más relajadas si las opciones son negociadas fuera del mercado o en un mercado sobre mostrador (OTC – Over the Counter), los instrumentos negociados suelen ser diseñados "a la medida", sin embargo en estos casos se pierden dos de los atributos principales de los mercados organizados: liquidez y bajo riesgo de crédito.

Ya se clasificaron las opciones como opciones de venta u opciones de compra, otra forma de clasificarlas se relaciona con la fecha de vencimiento, existen opciones que sólo pueden ser ejercidas en la fecha de vencimiento, en este caso se dice que la opción es una opción *Europea*, pero si es posible ejercer la opción en cualquier momento anterior a la fecha de vencimiento entonces la opción es una opción *Americana*. Es claro que las opciones que se han descrito hasta el momento son contratos muy simples, de hecho se pueden negociar instrumentos bastante más complicados que tengan por ejemplo, una regla más elaborada para la determinación del precio de ejercicio u opciones híbridas entre opciones americanas y europeas, como son las opciones bermuda que pueden ser ejercidas antes de la fecha de vencimiento pero sólo en fechas específicas. Tomando en cuenta esto las opciones que hemos descrito suelen ser llamadas opciones vainilla (plain vanila options) y son las más sencillas de todas. Sin embargo, aún cuando sean las más sencillas, también son las más importantes puesto que la gran mayoría de los instrumentos derivados más complejos pueden ser analizados como combinaciones de forwards y opciones vainilla.

1.2. Valor de una opción.

Sabemos que una opción americana puede ser ejercida en cualquier momento anterior a la fecha de vencimiento, esto nos conduce a preguntarnos por la ganancia que obtendríamos como consecuencia de su ejercicio. Por otro lado aún cuando sabemos que una opción europea puede ser ejercida sólo en la fecha de vencimiento, también es importante preguntarnos por la ganancia que se obtendrá si se tuviera la posibilidad de ejercer en algún momento antes o en la fecha de vencimiento. Para responder esta pregunta, supongamos que el día de emisión de la opción es el tiempo cero, y denotaremos al tiempo de vencimiento como T. El problema se traduce entonces a preguntarnos por la ganancia que conseguiríamos de tener la posibilidad de ejercer la opción en algún momento $t \in [0, T]$. Si llamamos S_t al precio del subyacente en el tiempo t y a su vez denotamos al precio de ejercicio como K, entonces es claro que si la opción es una opción tipo Call, ésta sería ejercida siempre y cuando $S_t > K$, en cuyo caso se obtendría una ganancia igual a $S_t - K$ en otro caso la opción no aportaría ganancia alguna. Formalmente; si tenemos la posibilidad de ejercer la opción en algún momento $t \in [0, T]$, tendremos una ganacia de

$$(S_t - K)_+ = \max(S_t - K, 0)$$

Análogamente, se tiene que una opción put se ejerce siempre y cuando el precio del subyacente esté por debajo del precio de ejercicio. En tal caso estaríamos vendiendo el activo subyacente a un precio K superior al precio de mercado S_t. De esto último se tiene que la ganancia obtenida de ejercer la opción sería igual a

$$(K - S_t)_+ = \max(K - S_t, 0)$$

Para todo lo anterior existe una terminología en la jerga financiera. En el caso de una opción tipo call, cuando el precio de mercado del subyacente es tal que $S_t > K$, entonces la opción se ejercería, en tal caso se dice que la opción está *dentro del dinero* (in the money), si por el contrario, el precio de mercado de la opción no permite su ejercicio entonces $S_t < K$, y se dice que la opción está *fuera del dinero* (out of the money), por último, si $S_t = K$ entonces decimos que la opción está *en el dinero* (at the money). Observemos que una opción europea que este dentro del dinero debe ser por fuerza más cara que una opción fuera del dinero, ya que es más probable que se ejerza al tiempo de ejercicio.

La útltima reflexión nos lleva a una nueva discusión; si tenemos una opción call europea vainilla, sabemos que al tiempo de vencimiento ésta reportará una ganancia igual $(S_T - K)_+$, que en caso de que $S_T > K$, esta ganancia será positiva. Esto debe tener un costo en el tiempo t. En otras palabras; el derecho que una opción otorga tiene un precio en cada momento $t \in [0, T]$, como ya se mencionó, este problema ocupará la atención de gran parte de esta tesis.

El tenedor de la opción siempre tiene el derecho y no la obligación de comprar el activo subyacente en la fecha de ejercicio (en el caso de un call europeo), y este derecho lo obtiene mediante el pago de una prima. Ahora bien, en el peor de los casos la mayor de las pérdidas que sufre el tenedor es igual al valor de la prima. Sin embargo, el riesgo que toma el emisor es mucho mayor, el emisor de la opción tiene un potencial de pérdida ilimitado en el caso del call, en el caso del put la pérdida está acotada por el precio de ejercicio. Al tiempo de vencimiento, si la opción es ejercida, el emisor recibirá un monto K por el activo subyacente y él debe entregar el activo asumiendo la pérdida. Debido a esta posibilidad de pérdida, es muy importante que el emisor encuentre una estrategia que *cubra* su posición, es decir necesita tener a la mano algún portafolio, armado de tal forma que en la fecha de vencimiento le garantice contar con la cantidad $(S_T - K)_+$ en el caso del call y $(K - S_T)_+$ en el caso del put, de manera que sea capaz de cumplir sus obligaciones en la fecha de vencimiento, este es el problema de cobertura y está íntimamente ligado al problema de valuación, el encontrar un portafolio que replique el valor de una opción es la estrategia tradicional para encontrar el valor de la misma.

1.3. Arbitraje y paridad Put-Call.

Ya se mencionó que la estrategia a seguir para encontrar el precio de una opción es encontrar un portafolio que replique el comportamiento de la opción, si se consigue esto, el precio del portafolio debe ser, por fuerza igual al precio de la opción en otro caso, habríamos encontrado una estrategia de arbitraje.

Una estrategia de arbitraje esta definida comunmente como la posibilidad de "hacer dinero sin dinero" es decir, una estrategia de arbitraje es aquella en la cual existe la posibilidad de obtener una ganancia libre de riesgo sin la necesidad de invertir un solo centavo(más tarde se dará una definición más precisa de arbitraje), si somos capaces de encontrar una oportunidad de estas, podríamos obtener ganancias muy importantes (bajo ciertos supuestos, estas podrían ser arbitrariamente grandes), en los mercados de valores suelen ocurrir situaciones de este estilo, sin embargo se supone que en cuanto el mercado las ubica, los precios se nivelan de tal forma que se elimina la posibilidad de arbitraje.

El concepto de arbitraje es sumamente importante en la teoría de finanzas matemáticas, en general todas las estrategias que seguiremos para encontrar el valor de un instrumento se fundamentan en encontrar portafolios que cubran las obligaciones contraídas por el producto derivado y que a su vez eliminen toda posibilidad de arbitraje. Para ello se darán condiciones que lo garanticen.

Argumentos de no arbitraje nos conducen a una de las relaciones más importantes en la valuación de opciones europeas y que nos permitirá trabajar exclusivamente con opciones europeas de compra. La realción a que nos referimos es la bien conocida paridad Put-Call (Put-Call parity) esta relación afirma que si C_t es el precio de una opción tipo call al tiempo t con precio de ejercicio K y P_t es el precio al tiempo t de una opción tipo put con el mismo precio de ejercicio K, entonces

$$C_t - P_t = S_t - Ke^{-r(T-t)}$$

Para probar la igualdad anterior supongamos que

$$C_t - P_t > S_t - Ke^{-r(T-t)}$$

esto implica que

$$K > e^{r(T-t)}(C_t - P_t - S_t)$$

Ahora bien, ¿para que nos sirve la observación anterior?, si esta relación se cumple será posible que encontremos una estrategia que nos permita obtener una ganancia libre riesgo sin invertir dinero alguno. Para ello supongamos que vendemos un Call con precio de ejercicio K y que compramos un Put con el mismo precio de ejercicio además de una acción del subyacente, esta combinación nos da una posición neta de

$$C_t - P_t - S_t$$

la cual puede ser positiva o negativa, en el primer caso invertimos nuestra posición a la tasa libre de riesgo r, en otro caso pedimos prestada la misma cantidad a la tasa libre de riesgo r. Al tiempo de vencimiento si el precio del subyacente es tal que $S_T > K$ entonces la opción call será ejercida y deberemos entregar la acción que compramos por un precio K, el put simplemente deja de existir, por otro lado, si $S_T < K$ entonces el call no se ejerce y nosotros ejercemos el put vendiendo nuestra acción al precio K en cualquiera de los casos el ejercicio de las opciones nos da como resultado

$$(S_T - K)_+ - (K - S_T)_+ = K$$

de aqui, incluyendo la cantidad que se invirtió (o se pidió prestado) en el mercado de dinero tendremos una posición neta final de

$$K - e^{r(T-t)}(C_t - P_t - S_t) > 0$$

mediante esta estrategia hemos encontrado una oportunidad de arbitraje, al tiempo T tenemos el dinero suficiente para pagar nuestras obligaciones y a su vez tenemos una ganancia igual a la diferencia anterior y notemos que en ningún momento hubo necesidad invertir dinero propio. En el caso de que $C_t - P_t < S_t - Ke^{-r(T-t)}$ podemos encontrar una estrategia similar que nos garantice una oportunidad de arbitraje. De este modo, podemos concluir la validez de la paridad Put–Call.

La importancia de la paridad Put-Call salta a la vista; si obtenemos el precio de una opción Call automáticamente tenemos el precio de la opción Put sobre el mismo subyacente y con el mismo precio de ejercicio, esto nos permite trabajar exclusivamente con opciones europeas tipo call.

1.4. Especulación.

Las opciones tradicionalmente se conciben como un seguro que nos cubre del riesgo de mercado, el ejemplo más popular de ello se da con el caso de las divisas. Supongamos que un importador tiene la necesidad de hacer una compra en dólares en alguna fecha futura, en el momento en que debe de pagar su adeudo el precio del dólar puede haber subido de tal forma que los costos en que incurre el importador sean demasiado elevados y ocasionen que el negocio ya no sea atractivo. Para evitar este riesgo, el importador puede optar por comprar un contrato de opciones sobre divisas de modo que le asegure el precio del dólar para el momento en que debe realizar el pago. A través de este procedimiento, elimina por completo el riesgo de mercado a un costo relativamente bajo: el monto de la prima.

Ahora bien, las opciones no sólo pueden ser usadas para cubrir riesgos, la especulación es otro de sus usos, sin embargo aunque en este caso se pueden obtener rendimientos muy atractivos, también las pérdidas pueden resultar muy fuertes. El siguiente ejemplo nos muestra la manera en que una opción puede ser utilizada para especular.

Supongamos que al día de hoy tenemos una acción que vale \$50 y supongamos que en tres meses esta acción sube a \$75, en total tendremos un rendimiento de

$$\frac{75-50}{50} \times 100 = 50\,\%$$

ahora, supongamos que tenemos la posibilidad de comprar un call europeo a un precio de \$5 con una fecha de vencimiento a tres meses y precio de ejercicio de \$65, dado que el precio de la acción subió a \$75 nos conviene ejercer la opción, por tanto compramos una acción con valor de \$75 a un precio de \$65, bajo este esquema obtenemos un rendimiento de

$$\frac{75-65-5}{5} \times 100 = 100\,\%$$

con estos argumentos es claro lo atractivo que puede resultar una inversión de este estilo, sin embargo aunque los rendimientos pueden ser muy altos las pérdidas también pueden serlo. En caso de que no se hubieran dado las condiciones para ejercer la opción hubieramos perdido el 100 % de lo invertido.

1.5. Cotas.

La posibilidad de acotar un problema siempre nos llevará a conclusiones útiles respecto al mismo. En esta sección se exponen algunas cotas sobre los precios de las opciones, basándonos únicamente en argumentos de no arbitraje.

Denotemos por C_A y C_E a los precios de un call americano y uno europeo respectivamente y análogamente P_A y P_E los precios de un put americano y uno europeo. Pensando en los derechos que otorgan las opciones americanas y las europeas resulta natural que el precio de una opción americana sea mayor que el precio de una europea dado que la opción americana otorga el derecho adicional de poder ser ejercida en fechas anteriores a la de vencimiento. Esto se puede verificar a través de un argumento de no arbitraje; si el precio de la opción europea es mayor que la americana entonces podemos emitir una opción europea y comprar una americana al tiempo de vencimiento hacemos frente a nuestras obligaciones con las ganancias de la opcióna americana y obtenemos una ganancia extra resultado de la diferencia de precios $C_E - C_A$ invertida a la tasa libre de riesgo. De forma que $C_A \geq C_E \geq 0$. Además, el precio de ambas debe ser menor que el precio de mercado del subyacente, de otro modo las opciones no tendrían ningún sentido. En este caso el arbitraje es obvio pues al inicio de la vigencia del contrato podemos emitir la opción y comprar el activo, de modo que quedamos perfectamente cubiertos y obtenemos una ganancia inmediata.

Ahora bien, la paridad Put-Call nos garantiza que $C_E - P_E = S_t - e^{-r(T-t)}K$ y como $P_E \geq 0$ entonces $C_E \geq S_t - e^{-r(T-t)}K$ esto nos conduce a la serie de desigualdades.

$$C_A \geq C_E \geq S_t - e^{-r(T-t)}K \geq S_t - K$$

La ecuación anterior nos asegura que el precio de la opción es al menos igual a la ganancia derivada de ejercer la opción inmediatamente, esto nos hace concluir que no es conveniente ejercer inmediatamente la opción. Como esta conclusión es válida para todo tiempo $t < T$, se concluye que en el caso de una opción call americana que no paga dividendos tampoco conviene ejercerla antes del tiempo de expiración por lo tanto $C_A = C_E$. Esto no sucede así para las opciones put.

Capítulo 2

Modelos Discretos

En 1973 Black y Scholes dieron a conocer su modelo de valuación de opciones, los modelos discretos vinieron después (no fue sino hasta 1979 que apareció el modelo binomial de Cox–Ross–Rubinstein), así que si deseara ser historicamente correcto, debería exponer primero los modelos continuos. Sin embargo de no ser por este orden cronológico, no veo ninguna dificultad para exponer primero los modelos discretos. De hecho el objetivo de este capítulo es presentar los modelos discretos como un preludio a los modelos contínuos, es decir, los modelos contínuos se desarrollarán como si estos fueran consecuencia natural del desarrollo de los modelos discretos.

Aunque matemáticamente lo modelos discretos son menos sofisticados que los contínuos, los modelos discretos tienen atributos muy valiosos. Son más accesibles desde el punto de vista técnico, lo cual nos permite usar herramientas menos complejas para su comprensión. Numéricamente nos proporcionan métodos muy útiles para la valuación de activos contingentes. Y lo que es más importante, los problemas económicos subyacentes a la valuación de activos contingentes se resuelven con mayor facilidad y se entienden mejor si los atacamos en el caso discreto.

2.1. Las reglas del juego

Todo modelo requiere de supuestos, es imposible modelar un determinado fenómeno y que tomemos en cuenta y controlemos absolutamente todas las variables. Al desarrollar un modelo es indispensable hacer una serie de simplificaciones que permitan estudiar el fenómeno, teniendo cuidado de que tales simplificaciones no sean demasiado restrictivas. Los modelos que aqui se estudian no son la excepción, así que comenzamos estableciendo las reglas del juego.

- No existe fricción en el mercado. Es decir supondremos que no existen costos de transacción ni comisiones, en ocasiones estos costos pueden cambiar las decisiones de los inversionistas. En los modelos que aqui se exponen se supone que no existen dichos costos.

- Los inversionistas son "tomadores de precios". Esto quiere decir que ningún inversionista tiene la posibilidad de afectar por si solo los precios de un activo.

- No existe información privilegiada. Todos los inversionistas tienen acceso a la misma información.

- Los activos son perfectamente divisibles. En otras palabras, cada inversionista puede tomar posiciones en el mercado que no necesariamente impliquen un número entero de contratos.

- Todos lo inversionistas pueden prestar o pedir prestadas cantidades ilimitadas de efectivo y las tasas a las que se presta son iguales a las que se pagan cuando se pide prestado. A veces este supuesto se justifica argumentando que cuando se piden prestadas o se prestan cantidades de efectivo muy fuertes, el diferencial de tasas (el spread de tasas) no es muy amplio.

- También se supondrá que existe la posibilidad de vender en corto cualquier instrumento y sin costo alguno. Además, los mercados gozan de completa liquidez, es decir, se puede vender o comprar cualquier instrumento en cualquier momento y en cualquier monto.

Tal como se dijo, todos los supuestos anteriores son limitantes de los modelos que se exponen en esta tesis, existen numerosos modelos que relajan varias de estas limitantes, sin embargo en este trabajo estos supuestos estarán presentes en la mayoría de los modelos desarrollados.

2.2. La ley de los grandes números vs no arbitraje

Supongamos que alguien nos ofrece un juego, unos nobles y tradicionales volados, siempre tan útiles en la probabilidad. Si la moneda es justa tendremos un medio de probabilidad de ganar el juego, o mejor dicho, si jugamos a los volados con una moneda justa esperamos ganar la partida aproximadamente la mitad de las veces, a decir verdad sería muy probable ganar o perder de forma consecutiva varios de los primeros volados, pero a medida que sigamos jugando lo lógico y natural es que ganemos al rededor de la mitad de las partidas, poco probable es que ganemos o perdamos indefinidamente.

Pero si vamos a jugar vamos poniendo el juego un poco más interesante y pongamos dinero de por medio. Supongamos que siempre que jugamos apostamos al sol, es decir si sale sol nuestro oponente nos paga un peso, si sale águila no nos paga nada y nos quedamos con los bolsillos vacíos. La pregunta sería entonces, ¿Cuanto debemos pagar por entrar a este juego?. Analicemos un poco nuestras posibilidades, si jugamos una vez puede ser que perdamos nuestra inversión o bien que ganemos el peso prometido. Si perdemos no volvemos a ver más nuestra inversión y eso es todo, si ganamos, tendremos en la bolsa un peso menos la cantidad pagada para entrar al juego, es claro entonces que el pago para entrar al juego no puede ser más de un peso, sería tonto pagar un peso o más. El costo entonces debe ser menor a un peso, pero ¿cuanto?. Veamos, si seguimos jugando a los volados una y otra vez y la moneda es justa, a medida que sigamos jugando, la ley de los grandes números nos dice que, aproximadamente la mitad de las veces ganaremos. Es decir la mitad de las veces ganaremos el peso y la mitad de las veces habremos perdido la inversión. Al final del día, esperamos ganar unos cincuenta centavos: $\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 = 0{,}5$ (menos el costo del juego por supuesto), al menos eso es lo que nos sugiere la ley de los grandes números. Luego entonces, parece justo pagar cincuenta centavos por entrar al juego. Si pagamos más la ley de los grandes números esta en nuestra contra, puesto que en el largo plazo solo ganaremos cincuenta centavos, evidentemente esto no nos conviene, si pagamos menos entonces la suerte está a nuestro favor y en el largo plazo seguro ganaremos más de lo que invertimos, es momento de apostar cuanto tengamos, y jugar, la ganancia es segura. Evidentemente esto es bueno para nosostros pero seguramente nuestro oponente no estará tan contento. El pago de cincuenta centavos parece justo. ¿Que logramos con esto? bueno, en el largo plazo no habremos ganado ni perdido nada, nuestro oponente tampoco, estamos a mano. En conslusión: tal parece que el precio justo para el juego es aquel que nos garantice que la pérdida o ganancia será de cero para ambas partes, es decir los cincuenta centavos.

Hemos acordado que pagar menos de cincuenta centavos sería una gran oportunidad para nosotros pero una locura para nuestro oponente, estaríamos en condiciones de apostar tanto como queramos, endeudarnos si es necesario para aprovechar tan buena oportunidad. Pero,... ¿que pasa si en lugar de jugar una y otra vez, sólo podemos jugar una vez? que tal si pagamos menos de los cincuenta centavos y además recibimos grandes sumas de dinero si ganamos, pero en esta ocasión todo nos lo jugamos a un solo volado. ¿Sería igualmente razonable empeñar todo nuestro patrimonio y más, a un solo volado?

Bueno, pues esto es justamente lo que sucede en el mercado, si compramos un instrumento derivado tenemos una sola oportunidad para jugar. ¿Como encontramos entonces el precio de un producto derivado?

Podemos empezar por analizar lo que sucedería con el más simple de los instrumentos derivados; el forward. El día de hoy pactamos un precio K para el bien subyacente y al tiempo de vencimieto T se intercambia a este precio, sin importar cual sea el precio de mercado del subyacente en ese momento. Denotemos con S_t el precio del subyacente al tiempo t y por el momento supongamos que para el tiempo T el activo subyacente puede tomar sólo uno de dos valores:

$$S_T = \begin{cases} uS_0, & \text{si el precio sube.} \\ dS_0, & \text{si el precio baja.} \end{cases}$$

Si nosotros vendimos el forward, entonces al tiempo T tendremos que entregar el activo, con un valor de S_T y recibiremos a cambio el precio pactado K. Al tiempo T habremos incurrido en una pérdida o una ganancia de $S_T - K$ según sea el signo de la diferencia. De cualquier forma, al día de hoy, sólo conocemos el valor esperado de esta cantidad $\mathbb{E}[S_T - K]$. Como se discutió en el caso de los volados, para que el juego sea justo esta esperanza debe valer cero, es decir debemos encontrar un valor para K de tal modo que la esperanza anterior valga cero, o mejor dicho el valor descontado de la esperanza anterior sea cero, si es que tomamos en cuenta el valor del dinero en el tiempo. Así pues, si existe un mercado de dinero con tasa libre de riesgo r, buscamos K de forma que

$$e^{-rT}\mathbb{E}[S_T - K] = 0$$

suponiendo que la probabilidad de baja es igual a la de alza, se tiene entonces que

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}uS_0 + \frac{1}{2}dS_0 \\ &= \mathbb{E}[S_T] \end{aligned}$$

¿Es esto razonable? Tal como ocurría en el caso de los volados esto tiene sentido si pudiésemos jugar una y otra vez, pero en este caso sólo tenemos una oportunidad, en una sola partida nos jugamos todo, por ello debemos ser más cuidadosos para asignar precios.

¿Como encontramos el precio justo entonces?. Enfoquemos el problema de otra forma. De cualquier modo queremos asegurarnos de que el precio sea justo, que ninguna de las partes obtenga ganancias extrordinarias. Pensemos entonces en una alternativa que nos permita cumplir nuestras obligaciones de la mejor forma posible. Si nosotros tenemos que entregar el activo subyacente podríamos comprarlo el día de hoy y conservarlo hasta el día de vencimiento del contrato al tiempo T, lo entregamos y recibimos K a cambio, quedamos *cubiertos*. Si no queremos perder dinero, ¿cual será el valor de K en este caso?. Si compramos el activo el día de hoy podemos pedir prestado S_0 para realizar la compra, con esto seremos capaces de entregar el subyacente oportunamente en el tiempo T, sin embargo también tendremos que pagar el préstamo, es decir, para cumplir con nuestras obligaciones debermos entregar el activo y pagar S_0e^{rT} para saldar el préstamo. Por otro lado ya tenemos el activo que debemos entregar y además, al momento de entregarlo nos pagan K, si no queremos salir perdiendo, K debe ser suficiente para cubrir el préstamo, es decir

$$K = S_0e^{rT}$$

Hemos encontrado otro valor para K, la pregunta ahora es si este nuevo valor es mejor que el que encontramos a través de la ley de los grandes números o no. Bueno, no solo es mejor, de hecho hemos demostrado que si no queremos perder dinero u ocasionar ganancias extraordinarias este es "el"precio adecuado. Para ver esto claramente supongamos que $K > S_0e^{rT}$, como ya vimos si pedimos prestado S_0 el día de hoy y compramos el activo subyacente podremos cumplir con el contrato forward y además pagar el préstamo y aún tendremos una ganancia de $K - S_0e^{rt} > 0$. ¡Hemos obtenido una ganancia libre de riesgo y sin poner un solo centavo de nuestra bolsa! en definitiva esto no es aceptable desde el punto de vista económico, aunque sea muy atractivo para nosotros, si recordamos los supuestos iniciales, recordaremos que nos podemos endeudar tanto como queramos y que el mercado es completamente líquido, de este modo, si repetimos esta operación con tantos contratos forward como queramos las ganancias que podemos obtener serían arbitrariamente grandes, definitivamente ¡buen negocio¡.¿Que pasa si $K < S_0e^{rT}$? en este caso la estrategia es la opuesta, pero de cualquier forma nos conduce a ganancias infinitas. En este caso podemos entrar al forward con la posición larga, al tiempo T deberemos pagar K por el activo subyacente. Si al día de hoy vendemos en corto el activo obtenemos S_0 e inmediatamente lo invertimos a la tasa r. Al tiempo T tendremos S_0e^{rT} en la bolsa, más que suficiente para pagar el activo subyacente al precio K y cumplir con el contrato forward. Al expirar el contrato forward nos entregan el activo y lo devolvemos, saldando así la venta en corto y obteniendo una ganancia completamente libre de riesgo $S_0e^{rT} - K$, de nuevo un excelente negocio para nosotros pero inaceptable desde el punto de vista económico, por tanto para evitar ganancias extraordinarias la única posibilidad que nos queda es que $K = S_0e^{rT}$. En cualquiera de los casos hemos encontrado una estrategia de **arbitraje**, una estrategia que nos garantiza una ganancia sin arriesgar un solo centavo, más tarde se dará una definición precisa de estrategia de arbitraje y estudiaremos a detalle la forma de evitarlas, toda la teoría que se desarrollará se concentra en eliminarlas.

En conclusión, sólo el precio K (en este caso mejor conocido como precio forward)[1] obtenido a través de la eliminación de estrategias de arbitraje resulta razonable desde el punto de vista económico.

Después de todo, ¿que fué lo que hicimos? primero observemos el precio forward obtenido, en nada tiene que ver con la distribución del precio del activo subyacente. ¿Se equivoca entonces la ley de los grandes números?, no, simplemente nos provee una información distinta, si K llega a ser igual a $\mathbb{E}[S_T]$ será tan solo una extraordinaria coincidencia. ¿Que podemos concluir entonces si es que $\mathbb{E}[S_T] > K$ o si $\mathbb{E}[S_T] < K$?, pues en el primer caso sólo podemos concluir que según nuestras expectativas el precio del activo subyacente tenderá a subir, o al menos esperamos que quede por encima de K, obviamente en el segundo caso esperamos que K quede por arriba del precio del subyacente al tiempo T. Sin embargo estas son sólo nuestras expectativas, otro inversionista puede pensar diferente y asignar distintas probabilidades a los movimientos del precio del subyacente, nosotros asignamos un medio a la probabilidad de alza y un medio a la probabilidad de baja, las percepciones que otro inversionista tenga del mercado pueden ser completamente distintas, de algún modo esto es lo que da liquidez al mercado.

En segundo lugar, veamos que para encontrar el precio justo para K realmente lo que hicimos fue *replicar* el forward, si nosostros somos responsables de entregar el activo subyacente al tiempo T entonces en ese momento tendremos una pérdida o ganancia exactamente igual a $K - S_T$, si S_T es mayor que K habremos perdido, pues habremos comprado muy caro el subyacente, en otro caso habremos obtenido una ganancia. ¿Que fue lo que hicimos para replicar el forward?. Por un lado compramos el activo el día de hoy y por otro pedimos prestado S_0 ¿cuanto vale este portafolio en el tiempo T?. El activo evidentemente S_T, el efectivo que pedimos prestado $-S_0e^{rT}$, en total el portafolio vale $S_T - S_0e^{rT}$, si hemos calculado el precio forward correctamente el portafolio valdrá $S_T - K$, como el forward vale precisamente $K - S_T$, sin importar cuanto valga el subyacente, nosotros habremos eliminado cualquier posibilidad de pérdida o ganancia, hemos replicado el forward, bueno no exactamente, realmente lo que hicimos fue cubrir nuestra posición para evitar cualquier pérdida para ello hemos replicado el forward en la posición contraria

[1] En el caso de los forwards es importante notar la diferencia entre precio forward K, y el valor del forward $S_t - Ke^{-r(T-t)}$ al tiempo t. ($S_0 - Ke^{-rT} = 0$ en el tiempo 0)

a la que tenemos, hemos replicado el pago que obtendría nuestra contraparte, para replicarlo desde nuestra posición debemos adoptar la segunda estrategia que discutimos anteriormente, vendemos en corto el subyacente y el efectivo lo invertimos a la tasa r, de este modo, al tiempo T nuestro portafolio vale $K - S_T$ si es que el precio forward esta correctamente calculado, lo cual es exactamente igual al pago que nos ofrece el forward. Para que no existan ganancias extraordinarias este portafolio y el forward deben tener el mismo valor el día de hoy y claramente este portafolio el día de hoy vale cero, lo mismo que el forward, (¡cuidado! hablamos del valor del forward, no del precio forward K), por tanto el día de hoy $S_0 - Ke^{-rT} = 0 \quad \Rightarrow \quad K = S_0 e^{rT}$, con esta estrategia hemos podido encontrar un precio libre de arbitraje para K y por consecuencia para el valor del forward, pero no sólo eso, también hemos conseguido una forma de cubrirnos, dicho de otro modo, hemos encontrado un portafolio que replica el derivado, de modo que al venderlo[2] evitamos cualquier pérdida.

Resumiendo; la idea que seguimos para encontrar el precio forward fue replicar el valor del forward, si encontramos un portafolio que pague el día T exactamente lo mismo que el forward, forzosamente deben valer lo mismo al día de hoy. Esa será la estrategia a seguir para valuar instrumentos derivados más complejos, para el forward fue fácil ¿será igual de fácil para las opciones? al menos en el caso discreto si lo es, habrá que ser un poco más cuidadosos con lo que definimos como arbitraje y la manera de evitarlo, pero aún en el caso contínuo, el objetivo será evitar las posibilidades de arbitraje y encontrar portafolios replicantes.

Apenas empezamos, pero ya se ha hecho un primer intento de entender el problema. En las siguiente secciones se comenzará el análisis de las opciones europeas vainilla, principal objeto de estudio de esta tesis, se empezará de forma muy intuitiva y poco a poco se irá complicando y formalizando.

2.3. Modelo Binomial (Primera Parte)

El modelo binomial fue propuesto en 1979 por Cox, Ross y Rubinstein, y en muchos libros este es el nombre que se le da: modelo de Cox–Ross–Rubinstein. Tal como lo dice el nombre de su artículo, el modelo binomial es un acercamiento simple, pero muy poderoso a la valuación de derivados. En esta primera parte se usa la versión más simple del modelo, el modelo de un solo periodo.

[2]Realmente no se trata de vender el portafolio replicante, si no de tomar las posiciones contrarias a las involucradas en este portafolio replica.

En la sección anterior se discutió ampliamente la valuación de un forward y se explicó la forma de replicarlo, dijimos también que esta será la estrategia a seguir para valuar instrumentos derivados más complejos. La pregunta inmediata es entonces, ¿será tan fácil encontrar el portafolio replicante para una opción, tal como lo fué para el forward? esta sección intenta dar una primera respuesta a esta pregunta.

El objetivo que buscamos ahora es dar precio a una opción de compra, europea vainilla y las herramientas con que contamos son pocas, veremos entonces hasta donde podemos llegar con ellas. La primera idea sería repetir lo que hicimos con el forward para poder cumplir con el contrato, trataremos de replicar la opción.

Primero acordemos algunas cosas, ahora K no es más el precio forward, ahora es el precio de ejercicio (strike price), y es el precio al que pactamos intercambiar el bien subyacente al tiempo T de expiración del contrato, al igual que en el forward, S_t es el precio del subyacente en el tiempo t, en el caso del forward no se especificó, pero es obvio que $t \in [0, T]$. Repasemos un poco el pago de la opción: dado que una opción de compra nos otorga el derecho pero no la obligación de comprar el subyacente al tiempo T, evidentemente esta se ejercerá sólo si $S_T > K$, en cuyo caso la ganancia o valor de la opción en T será $S_T - K$, si $S_T < K$ la opción no es ejercida y por tanto en la fecha de vencimieto vale cero. Si llamamos $H(S_T)$ a la función de pago de la opción en su vencimiento, entonces

$$H(S_T) = (S_T - K)_+ = \begin{cases} S_T - K, & \text{si } S_T - K > 0 \\ 0, & \text{si } S_T - K < 0 \end{cases}$$

es claro que para el caso del put $H(S_T) = (K - S_T)_+$.

Hagamos entonces un primer intento de replicar la opción. Empecemos por tratar de repetir lo hecho con el forward, en su momento intentamos buscar una forma de cubrirnos. Supongamos que nosostros vendimos la opción, en jerga financiera nosostros tenemos la posición corta en la opción, buscamos entonces un portafolio que nos asegure cumplir con nuestras obligaciones al día de vencimiento sin perder dinero alguno.

Veamos hasta donde podemos llegar siguiendo el mismo razonamiento que nos condujo a valuar el forward. Compramos el activo subyacente el día de hoy y lo conservamos hasta la expiración de la opción. ¿Que logramos con esto?, si el precio del subyacente es tal que $S_T > K$ entonces nos ejercerán la opción, debemos entregar el subyacente y a cambio nos pagan K ¡buenas noticias! tenemos en la mano el subyacente y por tanto no tenemos ningún problema para entregarlo, sin embargo hemos incurrido en una pérdida igual a $S_T - K$, y puede ser aún peor si es que en un principio nos endeudamos para comprar el activo subyacente, en este caso, además de la pérdida ocasionada por la opción tendremos también que pagar el préstamo. Si en un inicio vendimos la opción por C_0, e invertimos esta cantidad a la tasa libre de riesgo r entonces nos gustaría que esta cantidad fuera suficiente para pagar nuestra pérdida, es decir nos gustaría que $C_0 e^{rT} = S_T - K + S_0 e^{rT}$, esto se ve bastante extraño, de hecho nuestro "precio"depende de S_T, el precio del subyacente en T, el cual al día de hoy es completamente desconocido para nosostros, ¿nos sirve este "precio"de algo?, la respuesta es un rotundo no. Al final, tal parece que las noticias no eran tan buenas.

¿Que pasa si $S_T < K$? en este caso la opción no será ejercida, y no tenemos que entregar nada, tampoco nos pagan nada. Hasta ahora más o menos buenas noticias. Si en un principio nos endeudamos para comprar el subyacente, entonces tendremos que pagar el préstamo, y lo único que tenemos para pagarlo es la bien subyacente mismo y lo que hayamos ganado por la venta de la opción más los intereses. Si deseamos eliminar cualquier posibilidad de pérdida entonces necesitamos que $C_0 e^{rT} + S_T = S_0 e^{rT}$ de nuevo, si tratamos de deducir un "precio"de aqui, éste estaría en función de S_T lo cual como dijimos, el día de hoy es completamente desconocido para nosotros. Este "precio", tampoco nos sirve. ¿Significa esto que no podemos replicar la opción?. No es así, simplemente necesitamos buscar otra forma de construir el portafolio replica.

En nuestro primer intento de replicar una opción conviene empezar con un modelo muy simple y el que hemos elegido es el modelo binomial de un solo periodo. Primero tenemos que establecer las reglas del modelo, vamos a suponer que solo existe un periodo, es decir el mundo comienza el día de hoy y se acaba el "día de mañana", cualquier cosa que el día de mañana signifique, esto puede ser dentro de un día, dentro de una hora, de un segundo o de lo que sea. De manera formal, solo podemos negociar en dos fechas, al tiempo 0 (el día de hoy) y al tiempo T (el "día de mañana") así si nos referimos al valor del subyacente al tiempo t entonces $t = 0, T$. El siguiente supuesto es igualmente importante y ya se hizo en el caso de los forwards, sólo que entonces no tuvo mayor importancia. Supondremos que el precio del subyacente vale S_0 al día de hoy y que mañana, al tiempo T, puede tomar solamente uno de dos valores posibles, S_u si sufre una alza o S_d si sufre una baja. El modelo que usaremos será multiplicativo es decir S_T es de tal forma que

$$S_T = \begin{cases} S_u = uS_0, & \text{si el precio sube} \\ S_d = dS_0, & \text{si el precio baja} \end{cases}$$

donde u y d son un par de constantes. Tradicionalmente lo anterior se representa gráficamente a través de un *árbol binomial*[3] en este caso de una sola rama.

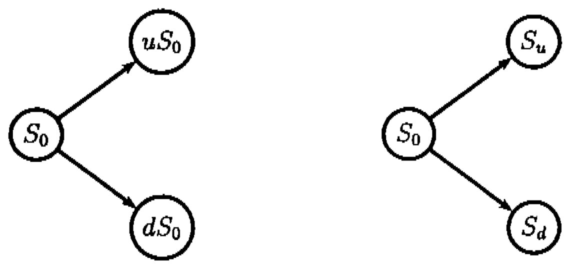

Figura 2.1: Arbol Binomial.

Además, si S_u y S_d representan una alza y una baja, es lógico suponer que

$$0 < d < 1 < u$$

la condición de positividad también tiene mucho sentido, si esto no ocurriera quiere decir que en un momento dado podrían existir precios negativos, esto claramente no es razonable.

Si además suponemos, como lo hemos hecho ya, que también existe un mercado de dinero, en el cual podemos invertir y pedir prestado a una tasa libre de riesgo r, entonces tendríamos que pedir aún más, tendríamos que pedir que

$$0 < d < 1 + r < u$$

esto, como es de esperarse tiene no sólo una explicación basada en el sentido común, tiene porsupuesto una explicación basada en arbitraje. Si la condición anterior no se dá entonces podemos encontrar una estrategia de arbitraje. Para verficar esto supongamos primero que $0 < d < u < 1 + r$, en este

[3]En este caso la gráfica resultante efectivamente es un árbol en el sentido de la teoría de gráficas. Más tarde veremos los llamados árboles binomiales recombinantes los cuales no son árboles en el sentido de la teoría de gráficas, para evitar este problema algunos autores les llaman retículas en lugar de árboles. Aquí se cometerá un ligero abuso y se continuará llamándolos árboles.

caso podemos vender en corto el activo subyacente el día de hoy y obtener S_0 inmediatamente, si invertimos esta cantidad a la tasa libre de riesgo, al tiempo T tendremos en la bolsa $S_0(1+r) > uS_0 > dS_0$, por tanto estaríamos en condiciones de devolver la acción ganando además un excedente de forma segura y sin invertir un solo peso de nuestra bolsa, hemos encontrado una estrategia de arbitraje. Si lo que ocurre es que $0 < 1+r < d < u$, la estrategia a seguir es la siguiente: nos endeudamos a la tasa libre de riesgo y con lo obtenido compramos el subyacente el día de hoy, un periodo después tendremos que pagar $S_0(1+r)$, pero el activo vale ahora S_T que en cualquier caso es mayor que nuestra deuda, por lo tanto podemos cumplir nuestros compromisos y ganamos un excedente libre de riesgo, nuevamente sin invertir un solo peso. Notemos además que es necesario que las desigualdades sean estrictas, pues basta con que se de alguna igualdad para obtener arbitraje.

Por último observemos un detalle quizás un tanto trivial, el suponer que existe un mercado de dinero en el cual se puede invertir o pedir prestado a una tasa libre de riesgo r significa que en el mercado además de tener el bien subyacente para invertir, tenemos un bono, que es el que nos paga la tasa libre de riesgo, así es que si queremos invertir a la tasa r, lo único que tenemos que hacer es comprar las unidades necesarias del bono, por el contrario, si lo que desamos es pedir prestado entonces emitimos el bono. Observemos que aunque por lo general el invertir o pedir prestado significa invertir en un bono, en realidad este instrumento se comporta más como una cuenta bancaria que como un bono.

Ahora si, una vez impuestas las bases de nuestro modelo, regresamos a la pregunta inicial ¿como podemos replicar la opción?. La idea es la siguiente: aún cuando no sepamos el precio de la opción supongamos que la vendemos al precio C_0, éste es el precio que deseamos determinar. Con el dinero obtenido compramos el bien subyacente, ¿cuantas unidades?, ya vimos que comprar una unidad por cada contrato de opciones no necesariamente funciona, por tanto compraremos una cantidad aún desconocida Δ_0. Hasta el momento el valor neto de nuestra posición en efectivo es

$$C_0 - \Delta_0 S_0$$

dado que hemos vendido el call y comprado el subyacente. Esta cantidad puede ser positiva o negativa, no lo sabemos, pero si ésta es positiva, quiere decir que el efectivo obtenido por la venta de la opción fue más que suficiente para comprar las Δ_0 unidades del activo subyacente. Evidentemente no dejaremos este excedente debajo del colchón, por lo tanto lo invertimos a la tasa libre de riesgo. En el caso de que la diferencia fuera negativa, entonces el efectivo procedente de la venta de la opción no fué suficiente para comprar las Δ_0 unidades del bien subyacente, y por tanto es necesario endeudarse a la tasa libre de riesgo por un monto exactamente igual a esta diferencia.

Si tomamos al tiempo transcurrido hasta el tiempo T como una unidad de tiempo, entonces al término de este periodo nuestro portafolio valdrá

$$\Delta_0 S_T + (C_0 - \Delta_0 S_0)(1+r)$$

Ahora bien, no olvidemos nuestro objetivo; lo que deseamos es replicar la opción, deseamos encontrar un portafolio tal que el día de mañana nos pague exactamente lo mismo que la opción, sin importar lo que suceda. Para lograrlo llamemos C_u al valor de la opción si es que el precio del subyacente sube, y C_d si es que el precio del subyacente baja. Así pues, lo que deseamos es que nuestro portafolio valga C_u cuando el subyacente suba y valga C_d si el subyacente baja. Si esto sucede, por fuerza el valor del portafolio y el de la opción el día de hoy deben ser iguales, de otro modo encontraríamos posibilidades de arbitraje. Si usamos las propiedades impuestas al valor S_T del subyacente en el tiempo T por el modelo binomial, podemos traducir nuestro objetivo a las siguientes ecuaciones.

$$\begin{aligned} C_u &= \Delta_0 u S_0 + (C_0 - \Delta_0 S_0)(1+r) \\ C_d &= \Delta_0 d S_0 + (C_0 - \Delta_0 S_0)(1+r) \end{aligned}$$

Lo único que hemos hecho es sustituir el valor de S_T en el caso de alza y baja de acuerdo a lo establecido por el modelo binomial. Queda claro que si se cumplen las ecuaciones anteriores entonces habremos logrado replicar la opción. Notemos además que tanto C_u como C_d son conocidas, están determinadas por la función de pago $H(S_T)$, y conocemos los valores que puede tomar S_T. De hecho las únicas variables desconocidas son C_0 y Δ_0, ¡estas si son buenas noticias! pues tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Lo único que tenemos que hacer para encontrar el valor C_0 de la opción al día de hoy, es resolver el sistema.
Restando la segunda ecuación de la primera se obtiene

$$C_u - C_d = \Delta_0(uS_0 - dS_0) \qquad \Rightarrow \qquad \Delta_0 = \frac{C_u - C_d}{(u-d)\,S_0},$$

sustituyendo el valor de Δ_0 en cualquiera de las dos ecuaciones encontramos el valor C_0 de la opción al tiempo 0:

$$C_0 = \frac{1}{1+r}\left\{\frac{(1+r)-d}{u-d}C_u + \frac{u-(1+r)}{u-d}C_d\right\}$$

¡Finalmente hemos encontrado el precio de la opción!, sin embargo, la historia aún no termina, aún hay más conclusiones que se pueden obtener de este modelo. Primero, observemos que efectivamente encontramos un portafolio replicante, invertimos Δ_0 en el activo subyacente y $C_0 - \Delta_0 S_0$ en el bono, estas posiciones nos garantizan que el portafolio valdrá exactamente lo mismo que la opción en el momento de su expiración, con ese fin se construyó el modelo. Δ_0 es la número mágico, es el número de unidades del activo subyacente necesarios para replicar la opción, pero como hemos visto anteriormente, no solo hemos logrado valuar la opción, si "vendemos"el portafolio replicante también habremos cubierto la opción perfectamente.

Para resolver el problema usamos dos variables nuevas, C_u y C_d, de hecho estos son los dos posibles valores de la opción al tiempo T. Claramente, el valor de la opción en su vencimiento está en función de S_T. Si llamamos C_T al precio de la opción al tiempo T, entonces $C_T(S_u) = C_u$ y $C_T(S_d) = C_d$, considerando esto, podemos escribir Δ_0 como

$$\Delta_0 = \frac{C_T(S_u) - C_T(S_d)}{S_u - S_d}$$

si hacemos $S_u - S_d = \delta S$, entonces

$$\Delta_0 = \frac{C_T(S_d + \delta S) - C_T(S_d)}{\delta S}$$

A medida que $\delta S \to 0$, Δ_0 tenderá a la derivada de la opción con respecto a S el precio del subyacente. Por ahora este resultado sólo se recomienda mantenerlo en la memoria, más tarde se ahondará al respecto.

Regresemos al precio de la opción, y veamos que

$$\frac{(1+r)-d}{u-d} + \frac{u-(1+r)}{u-d} = 1$$

además tuvimos el cuidado de hacer notar que $0 < d < 1 + r < u$ por tanto

$$\frac{(1+r)-d}{u-d} > 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{u-(1+r)}{u-d} > 0$$

y por supuesto ambos cocientes están bien definidos. Si hacemos

$$\tilde{p} = \frac{(1+r)-d}{u-d} \qquad \text{y} \qquad 1 - \tilde{p} = \frac{u-(1+r)}{u-d}$$

podemos reescribir el precio de la opción como

$$C_0 = \frac{1}{1+r}\left\{\tilde{p}C_u + (1-\tilde{p})\,C_d\right\}$$

dadas las propiedades de $\tilde{p}$, tenemos que $\widetilde{\mathbb{P}} = (\tilde{p}, 1 - \tilde{p})$ cumple las condiciones de una medida de probabilidad, por lo tanto podemos escribir C_0 como

$$C_0 = \frac{1}{1+r}\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}[C_T]$$

es decir, C_0 es igual al valor presente de la esperanza bajo $\tilde{\mathbb{P}}$ del pago C_T de la opción al tiempo T. Por ahora esto no pasa de ser una simple curiosidad, más tarde veremos lo crucial de este hecho. Pero antes de concluir esta reflexión observemos que la probabilidad $\widetilde{\mathbb{P}}$ **nada** tiene que ver con la probabilidad de que S_T tome el valor S_u o S_d, de hecho ni siquiera hemos tomado en cuenta esta probabilidad, el precio de la opción **no** depende de ella, el precio ha sido obtenido por completo a través de argumentos de no arbitraje, en ningún momento hemos considerado nuestras expectativas de alza o baja de los precios del subyacente, en este sentido la probabilidad $\widetilde{\mathbb{P}}$, no representa las expectativas de inversionista alguno[4], mantengamos este hecho bien claro y disponible en la memoria, pues es otro de los fundamentos en la valuación de activos contingentes (derivados o activos contingentes, se usarán como términos equivalentes).

Por útlimo, antes de dejar esta sección hagamos un pequeño ejercicio. Cuando discutíamos el problema del forward usamos tasas de interés continuas, en el caso que acabamos de analizar usamos tasas discretas, esto no tiene la menor importancia, si tomamos tasas continuas en lugar de discretas, simplemente la probabilidad $\widetilde{\mathbb{P}}$ cambia a

$$\widetilde{p} = \frac{e^{rT} - d}{u - d} \qquad \text{y} \qquad 1 - \widetilde{p} = \frac{u - e^{rT}}{u - d}$$

recordemos ahora que al momento de calcular el precio forward K lo primero que intentamos fue usar la ley de los grandes números y usar las probabilidades de alza y baja para calcular K, bueno somos necios y volvemos a lo mismo, sólo que en este caso no usaremos las probabilidades "reales", en este caso usaremos $\widetilde{\mathbb{P}}$, y calculamos:

$$\begin{aligned} K &= \tilde{p}uS_0 + (1 - \tilde{p})\,dS_0 \\ &= \frac{e^{rT} - d}{u - d}uS_0 + \frac{u - e^{rT}}{u - d}dS_0 \\ &= e^{rT}S_0 \end{aligned}$$

[4]más tarde veremos que esta es la probabilidad neutral al riesgo y la definiremos correctamente, por el momento basta con que notemos que esta probabilidad, **definitivamente no** representa las expectativas de inversionista alguno.

¡eeeh...! ¿que pasó?, tal parece que al final de cuentas no estabamos tan mal tomando la esperanza del precio del subyacente, simplemente necesitabamos la probabilidad adecuada. ¿Se podrá hacer halgo similar con derivados más complicados?. Todo con calma, vamos poco a poco. Tomando en cuenta esta última observación notemos que al momento de encontrar el valor C_0, **jamás** utilizamos la forma funcional de $H(S_T)$, esto significa que el precio funciona para cualquier tipo de derivado, no importa que tan compleja sea su función de pago $H(S_T)$, no sólo funciona con la simple funcioncita $H(S_T) = (S_T - K)_+$, podemos usar el modelo binomial para valuar derivados con funciones más complicadas, siempre y cuando el derivado sea de tipo europeo[5], la función de pago solo tiene como límite la imaginación de los inversionistas[6]. En verdad que el modelo binomial es simple, ¡pero vaya que tiene potencia!, se antoja complicarlo para ver hasta donde podemos llevarlo, esto lo haremos posteriormente.

Hasta aqui la primera parte del modelo binomial, posteriormente regresaremos a él, por lo pronto trataremos de desarrollar sobre una base más formal el caso de modelos de un solo periodo.

2.4. El modelo de un solo periodo

En las secciones anteriores se encontraron resultados muy interesantes, se usaron de manera muy intuitiva algunos hechos importantes para la valuación de derivados y finalmente se llegó a un primer precio para las opciones europeas. En esta sección se presenta el modelo general de un sólo periodo, por supuesto a tiempo discreto. El modelo binomial cabe en esta cajita y por tanto en esta sección se darán las bases formales del mismo y aún más. De hecho lo que se darán son las bases económicas que dan robustez a nuestros modelos discretos. La gran mayoría de los hechos que aqui se discuten se pueden generalizar con cierta facilidad para el caso continuo, en su momento esto nos permitirá compreder con mayor facilidad estos modelos, de hecho el problema económico subyacente a la valuación de derivados se puede dar por resuelto en el caso discreto, en el momento que pasemos al caso continuo simplemente necesitaremos de herramientas más complicadas para encontrar un precio, sin embargo desde el punto de vista económico ya no será necesario introducir nuevos conceptos.

La estrategia que hemos seleccionado para valuar derivados es la de re-

[5] De hecho también puede ser usado para opciones americanas, solo se necesitan pequeñas modificaciones y un poco de más cuidado.

[6] ¡Y vaya que la tienen!

plicarlos, buscamos construir un portafolio que nos garantice el mismo pago que el derivado en todo momento, en esta sección se muestran las propiedades que desearíamos que existieran en el mercado para que esta estrategia de valuación tenga sentido económico, así que hasta cierto punto el modelo que aqui estudiaremos es más un modelo de equilibrio del mercado que un modelo de valuación, sin embargo los precios que asignemos a los derivados deberán cumplir con todas las condiciones que garanticen tal equilibrio, de acuerdo con el modelo que se propone.

2.4.1. Los supuestos del modelo

Comencemos con los supuestos del modelo. El primero tiene que ver con el tiempo; sólo se puede negociar en dos fechas, el tiempo 0 y el tiempo T. Es decir el único periodo que consideramos es el que transcurre entre 0 y T. Se puede considerar a T como el tiempo 1, en nuestro caso hemos usado siempre T pues es la fecha reservada para la expiración del activo contingente.

El segundo supuesto tiene que ver con la aleatoriedad del mercado. Supondremos que existe un espacio muestral finito

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_M\}.$$

Cada ω_i se puede considerar como un estado de la naturaleza, este estado es desconocido el día de hoy, pero al tiempo T es conocido para todos los inversionistas. En el modelo binomial este espacio era de sólo dos elementos, en uno de ellos el único activo riesgoso (además del derivado) del mercado sufría una baja y en el otro una alza. Aqui permitiremos un número finito de estados, quizás mayor a dos.

Para completar el espacio de probabilidad necesitamos añadir una σ-álgebra y una medida de probabilidad. Podemos suponer que la σ-álgebra es 2^Ω, aún no nos preocupa darle propiedades específicas, por el momento sólo nos interesa pensar en ella para poder definir correctamente una medida de probabilidad P. Lo único que le exigimos a esta medida de probabilidad es que $P(\omega) > 0 \quad \forall \quad \omega \in \Omega$. Este pequeño detallito es importante conservarlo en la memoria.
Esta medida se puede concebir como la medida "objetiva"del mercado.

Suponemos que existe un mercado de dinero donde podemos prestar y pedir prestado a una tasa libre de riesgo r. Para cubrir nuestras necesidades en este mercado compramos o vendemos un bono que paga la tasa libre de riesgo. Aunque la tasa se puede considerar aleatoria, nosotros supondremos que es determinística.

En el modelo binomial sólo teníamos tres activos, el bono, el bien subyacente y la opción. Ahora supondremos que existen $N+1$ activos en el mercado y que definen un proceso de precios[7] $\mathbf{S} = \{\mathbf{S}_t(\omega) : t = 0, T \text{ y } \omega \in \Omega\}$ con $\mathbf{S}_t(\omega) = (S_0(\omega,t), S_1(\omega,t), \ldots, S_N(\omega,t))$ tradicionalmente se toma al precio $S_0(\omega,t)$, como el precio del bono en el tiempo t. Este precio es determinístico en todo momento, en este sentido realmente no depende de ω, aún más, dada esta característica conocemos su precio en cualquier momento, en el tiempo 0 $S_0(0) = 1$ y en el tiempo T, $S_0(T) = 1 + r$. Será útil definir la variable $\beta_t = 1/S_0(t)$, esta variable es mejor conocida como el factor de descuento.

Los N activos restantes son activos riesgosos, entre ellos tenemos a las acciones a las opciones y a cualquier otro bicho raro que se nos ocurra cuyo precio al tiempo T sea desconocido.
Todo lo que discutiremos en esta sección estará construido sobre esta base.

2.4.2. Arbitraje

Ya hemos usado en innumerables ocasiones la palabrita, una y otra vez hemos hablado de lo importante que resulta eliminar cualquier posibilidad de arbitraje y hasta el momento lo más cercano a una definición formal de arbitraje la hemos dado cuando dijimos que al evitar el arbitraje evitabamos la posibilidad de hacer ganancias extraordinarias, ganancias obtenidas sin invertir, ni arriesgar dinero alguno. Bueno llegó el momento de definir arbitraje correctamente, lo haremos en esta sección, aunque tendremos que ir construyendo y justificando la importancia de esta definición poco a poco.

En términos muy generales concebimos la posibilidad de arbitraje como una posibilidad de ganar dinero sin arriesgar nuestro patrimonio, se suele decir que hacer arbitraje es "hacer dinero sin dinero", esto nos puede paracer verdaderamente absurdo en términos económicos.[8].

La pregunta precisa sería entonces ¿qua tan absurda puede ser una oportunidad de arbitraje?. Bueno ¿que tan absurdo suena el que nos regalen dinero?, esto parece suficientemente absurdo como para que empecemos desde aqui. Ahora bien, en finanzas, ¿que significa que nos regalen dinero? no pensemos que es tan absurdo como el que venga alguien y nos lo entregue en

[7] En realidad quizá aún le queda grande el nombre de proceso, puesto que es aleatorio solo en el tiempo T, el día de hoy los precios son conocidos.

[8] Aun que en la vida real estas posibilidades ocurren todo el tiempo, de hecho el objetivo de muchos inversionistas consiste en detectar este tipo de posibilidades, para sacar provecho de estos desequilibrios del mercado.

propia mano, hay que tener un poco de creatividad para encontrar una posibilidad de estas y en general se derivan de una valuación incorrecta de uno o más de los activos presentes en el mercado.

Supongamos que al tiempo T el i-ésimo activo riesgoso vale D y el j-ésimo activo riesgoso vale $2D$, no conocemos el valor que puede tomar D, de hecho esta es una variable aleatoria, sin embargo el supuesto es que esta relación se cumple para toda ω. ¿Que pasa si el día de hoy $S_j(0) > 2S_i(0)$? (por comodidad se omite la dependencia de ω en el tiempo 0, de hecho el precio es conocido en este momento). Si vendemos en corto el activo j el día de hoy y compramos dos unidades del activo i, al tiempo cero obtenemos una ganancia inmediata igual a $S_j(0) - 2S_i(0) > 0$, como al tiempo T, el valor del activo i es D, el de j es $2D$ y tenemos dos unidades del activo i, al tiempo T podemos pagar la venta en corto sin dificultades. En resumen, el día de hoy hicimos una ganancia inmediata de $S_j(0) - 2S_i(0) > 0$ y además hemos eliminamos cualquier posibilidad de pérdida el día de mañana. ¿Es esto o no conseguir dinero gratis?.

La idea anterior se puede extender a portafolios completos, si consideramos un par de activos que en T valen D_1 y D_2, y el día de hoy valen P_1 y P_2 entonces un portafolio que pague al tiempo T, $D_1 + D_2$, al día de hoy debe valer $P_1 + P_2$, si el precio de este portafolio al tiempo cero fuera distinto podríamos encontrar una ganancia inmediata eliminando al mismo tiempo cualquier posibilidad de pérdida al tiempo T.

En conclusión; para que los precios de los activos en el mercado tengan sentido, la valuación de los portafolios debe ser lineal. Si esto ocurre, entonces se dice que se cumple la *ley de un solo precio*. Para definir este hecho con precisión es necesario definir dos conceptos. Una ***estrategia de inversión*** ϕ es un vector $(\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_N)$ que describe el portafolio que un inversionista mantiene entre el tiempo 0 y el tiempo T, es decir ϕ_i es la cantidad que el inversionista tiene invertida en el activo i, en particular ϕ_0 es la cantidad invertida en el activo libre de riesgo. Cuando veamos los modelos multiperiodo esta definición se formalizará un poco más. Si ya tenemos un portafolio, definimos un proceso de precios para el portafolio, el proceso $V = \{V_t(\omega), t = 0, T \text{ y } \omega \in \Omega\}$, describe el valor del portafolio al tiempo t. $V_t(\omega)$ es entonces:

$$V_t(\omega) = \phi_0 S_0(\omega, t) + \sum_{i=1}^{N} \phi_i S_i(\omega, t) = \boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{S}_t(\omega)$$

Además del proceso de precios para el portafolio, podemos definir un proceso de ganancias G

$$G(\omega) = V_T(\omega) - V_0$$

Recordando que $S_0(0) = 1$ y $S_0(T) = 1 + r$ y considerando la caracterización del proceso V podemos escribir el proceso de ganancias como

$$G(\omega) = \phi_0 r + \sum_{i=1}^{N} \phi_i \Delta S_i$$

donde $\Delta S_i = S_i(\omega, T) - S_i(\omega, 0)$. Esta última igualdad es muy importante, puesto que se da por hecho que cualquier cambio de valor en el portafolio depende únicamente de los cambios de valor en los activos que lo componen y no debido a la adición de capital externo.

Considerando el valor del dinero en el tiempo definimos el proceso de precios descontados $\hat{\mathbf{S}} = \{\hat{\mathbf{S}}_t(\omega) : t = 0, T \text{ y } \omega \in \Omega\}$ haciendo

$$\hat{S}_i(\omega, t) = \beta_t S_i(\omega, t)$$

dicho de otro modo, hemos hecho constante al precio del bono, en este sentido se dice que el bono es el numerario. Con este proceso de precios podemos escribir el proceso de precios descontados del portafolio y el proceso descontado de ganancias como

$$\hat{V}_t(\omega) = \phi_0 \hat{S}_0(\omega, t) + \sum_{i=1}^{N} \phi_i \hat{S}_i(\omega, t)$$

y

$$\hat{G}(\omega) = \hat{V}_T(\omega) - \hat{V}_0$$

tomando en cuenta la definición de $\hat{S}_i(\omega, t)$ podemos reescribir $\hat{V}_t$ como

$$\begin{aligned} \hat{V}_t(\omega) &= \phi_0 + \sum_{i=1}^{N} \phi_i \hat{S}_i(\omega, t) \\ &= V_t(\omega) \beta_t \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\hat{G}(\omega) = \sum_{i=1}^{N} \phi_i \Delta \hat{S}_i$$

donde $\Delta \hat{S}_i = \hat{S}_i(\omega, T) - \hat{S}_i(\omega, 0)$.

Con estos elementos a la mano podemos deteminar con precisión en que momento se cumple la ley de un solo precio.

DEFINICIÓN 2.1 (LEY DE UN SOLO PRECIO)
Se dice que la ley de un solo precio se cumple si no existen dos estrategias ϕ y $\phi^\star$ tales que

$$V_T(\omega) = V_T^\star(\omega) \ \ para\ todo\ \omega \in \Omega\ \ y\ V_0 > V_0^\star.$$

Dicho de otro modo, si se cumple la ley de un solo precio entonces no existe ambigüedad con respecto al precio que debe tomar un activo al tiempo 0. Si somos observadores, habremos notado que al tratar de replicar un derivado para encontrar su precio, lo único que hemos hecho es hacer valer la ley de un solo precio. Sin embargo las inconsistencias que se pueden presentar en el mercado, pueden ser menos evidentes que la sola violación de la ley de un solo precio, esto nos obliga a ser desconfiados y a tratar de encontrar condiciones que nos aseguren la ausencia de tales inconsistencias del mercado.

Cuando se viola la ley de un solo precio, podemos encontrar un par de portafolios que nos aseguran el mismo pago al tiempo T pero que el día de hoy tienen un valor distinto.

Pensemos ahora al revés, ¿que pasa si el día de hoy tenemos dos portafolios que valen lo mismo, pero con seguridad uno de ellos vale más al tiempo T? evidentemente esto tampoco tiene sentido. Este tipo de estrategias por supuesto que tienen nombre.

DEFINICIÓN 2.2 (ESTRATEGIA DOMINANTE)
Se dice que ϕ es una estrategia dominante si existe una estrategia $\phi^\star$ tal que

$$V_0 = V_0^\star \ \ y\ V_T(\omega) > V_T^\star(\omega) \ \ para\ todo\ \omega \in \Omega.$$

En este caso se dice que la estrategia ϕ domina a la estrategia $\phi^\star$.

Cuando se viola la ley de un solo precio podemos obtener una ganancia inmediata eliminando la posibilidad de pérdida en el futuro, en el caso de las estrategias dominantes, siguiendo argumentos similares a los de la ley de un solo precio, podemos obtener una ganancia segura en el futuro sin invertir un solo peso hoy, claramente eso no tiene sentido. A primera vista, parece que evitar las estrategias dominantes nos garantiza cumplir con la ley de un solo precio y viceversa, desgraciadamente esto no es así. La siguiente proposición nos muestra la relación que existe entre la ley de un solo precio y las estrategias dominantes.

PROPOSICIÓN 2.1
Si no existen estrategias dominantes entonces la ley de un solo precio se cumple.

PRUEBA.

A decir veradad lo que se probará es que si se viola la ley de un solo precio entonces existen estartegias dominantes. Esto es suficiente para probar la proposición.

Si la ley de un solo precio falla, podemos encontrar un par de estrategias ϕ' y ϕ'' tales que

$$V_0' > V_0'' \quad \text{y} \quad V_T'(\omega) = V_T''(\omega) \ \ \forall\omega \in \Omega$$

por la linealidad en la definición del proceso de precios de un portafolio y dado que $\beta_t > 0$, la condición anterior se cumple sí y sólo si

$$\hat{V}_0' > \hat{V}_0'' \quad \text{y} \quad \hat{V}_T'(\omega) = \hat{V}_T''(\omega) \ \ \forall\omega \in \Omega$$

lo cual implica que

$$\hat{G}'(\omega) < \hat{G}''(\omega) \quad \forall\omega \in \Omega$$

si definimos la estrategia ϕ como $\phi_i = \phi_i'' - \phi_i'$ para $i = 1, \ldots, N$ entonces $\hat{G}(\omega) > 0 \quad \forall\omega \in \Omega$. Si además hacemos

$$\phi_0 = -\sum_{i=1}^{N} \phi_i \hat{S}_i(\omega, 0)$$

entonces $\hat{V}_0 = 0$ (observemos que en la igualdad anterior la dependencia de ω, se puede ignorar pues al tiempo 0 los precios son conocidos.). Por lo tanto tenemos que

$$\hat{V}_0 = 0 \quad \text{y} \quad \hat{V}_T(\omega) = \hat{V}_0 + \hat{G}(\omega) > 0 \ \ \forall\omega \in \Omega$$

lo cual implica que

$$V_0 = 0 \quad \text{y} \quad V_T(\omega) > 0 \ \ \forall\omega \in \Omega$$

Es decir ϕ es una estrategia dominante, pues domina a la estrategia que consiste en no hacer nada. □

Desgraciadamente si la ley de un solo precio se cumple no podemos asegurar la ausencia de estrategias dominantes. El siguiente ejemplo nos da una muestra de esto.

EJEMPLO 2.1

Supongamos que tenemos un mercado con $N = 2$ y $M = 3$ donde la tasa libre de riesgo r es $\frac{1}{2}$, $S_1(0) = 10$, $S_2(0) = 8$ y los activos riesgosos pueden *tomar los siguientes valores al tiempo T dependiendo de los distintos estados de la naturaleza*

ω_i	$S_1(\omega_i, T)$	$S_2(\omega_i, T)$
ω_1	*12*	*10*
ω_2	*8*	*7*
ω_3	*7*	*5*

con estos valores podemos escribir el valor del portafolio al tiempo T, en los distintos estados de la naturaleza como

$$V_T(\omega_1)=\frac{3}{2}\phi_0+12\phi_1+10\phi_2$$
$$V_T(\omega_2)=\frac{3}{2}\phi_0+8\ \phi_1+7\ \phi_2$$
$$V_T(\omega_3)=\frac{3}{2}\phi_0+7\ \phi_1+5\ \phi_2$$

Dados estos precios resulta claro que para cualquier vector $V_T = (V_T(\omega_1), V_T(\omega_2), V_T(\omega_3))$, el sistema anterior tiene solución única, por lo tanto la ley de un solo precio se cumple. Sin embargo si hacemos $(\phi_0, \phi_1, \phi_2) = (10, -5, 5)$, entonces $V_0 = 0$ pero $V_T = (5, 10, 5)$, es decir para la estrategia ϕ propuesta se tiene que

$$V_0(\phi) = 0 \quad \textit{pero} \quad V_T(\phi) > 0 \ \ \forall \omega \in \Omega.$$

Por lo tanto la estrategia ϕ es una estrategia dominante, pues domina a la estrategia que consiste en no invertir en nada. En conclusión; en este mercado se cumple la ley de un solo precio aunque existen estrategias dominantes. □

Hasta el momento hemos demostrado que la ausencia de estrategias dominantes garantiza el cumplimiento de la ley de un solo precio, el recíproco no necesariamente se cumple, el ejemplo anterior es una muestra de ello, en este sentido se puede decir que el exigir la ausencia de estrategias dominantes es más restrictivo que pedir el cumplimiento de la ley de un solo precio. El siguiente paso es encontrar condiciones que nos aseguren un mercado libre de estrategias dominantes, para lograr esto, es conveniente dar caracterizaciones equivalentes de un mercado con estrategias dominantes.

Proposición 2.2
Existen estrategias dominantes sí y sólo si existe una estrategia tal que $V_0 = 0$ y $V_T(\omega) > 0 \quad \forall \omega \in \Omega$.

PRUEBA.
Sabemos que, si la estrategia ϕ' domina a la estrategia ϕ'', entonces $V_0' = V_0''$ pero $V_T'(\omega) > V_T''(\omega) \quad \forall\omega \in \Omega$, si definimos una nueva estrategia ϕ como $\phi_i = \phi_i' - \phi_i'' \ \ \forall i = 0, \ldots, N$, entonces por la linealidad en la definición de los portafolios $V_0 = V_0' - V_0'' = 0$ pero $V_T(\omega) = V_T'(\omega) - V_T''(\omega) > 0 \ \ \forall\omega \in \Omega$. Por lo tanto, con la estrategia ϕ, $V_0 = 0$ y $V_T(\omega) > 0 \ \ \forall\omega \in \Omega$.

La demostración del regreso es inmediata pues si existe una estrategia ϕ tal que $V_0 = 0$ y $V_T(\omega) > 0 \ \ \forall\omega \in \Omega$ entonces ϕ domina a la estrategia que consiste en no invertir en activo alguno. Este argumento ya se había usado en el ejemplo 2.1. □

La proposición 2.1 nos da una idea de lo absurdo de la presencia de las estrategias dominantes en el mercado, una persona que no invierte un solo centavo no debería tener una forma segura de terminar con una ganacia positiva.

Las estrategias dominantes pueden ser aún más absurdas, la siguiente proposición nos da muestra de esto.

PROPOSICIÓN 2.3
Existen estrategias dominantes sí y sólo si existe una estrategia tal que $V_0 < 0$ *pero* $V_T(\omega) \geq 0 \ \ \forall\omega \in \Omega$.

PRUEBA.
Si existen estrategias dominantes sabemos por la proposición 2.2 que existe una estrategia ϕ tal que $V_0 = 0$ y $V_T(\omega) > 0 \quad \forall\omega \in \Omega$, como $\beta_t > 0$, esto sucede sí y sólo si $\hat{V}_0 = 0$ y $\hat{V}_T(\omega) > 0 \ \ \forall\omega \in \Omega$, esto implica que $\hat{G}(\omega) > 0 \ \ \forall\omega \in \Omega$. Si ahora definimos la estrategia ϕ' como $\phi_i' = \phi_i$ para $i = 1, \ldots, N$ y hacemos

$$\phi_0' = \sum_{i=1}^{N} \phi_i \hat{S}_i(0) - \delta$$

donde

$$\delta = \min_{\omega\in\Omega} \hat{G}(\omega) > 0$$

con esta estrategia

$$\hat{V}_0' = -\delta < 0$$

notemos además que

$$\hat{G}(\omega) = \hat{G}'(\omega) \quad \forall\omega \in \Omega$$

y dada la definición de δ se tiene que

$$\hat{V}'_T(\omega) = \hat{V}'_0 + \hat{G}'(\omega) \geq 0 \quad \forall\omega \in \Omega$$

por lo tanto con la estrategia ϕ'

$$V'_0 < 0 \quad \text{y} \quad V'_T(\omega) \geq 0 \;\; \forall\omega \in \Omega$$

Para demostrar el regreso supongamos que ϕ es una estrategia tal que $V_0 < 0$ y $V'_T(\omega) \geq 0 \;\; \forall\omega \in \Omega$, si ahora hacemos $\phi'_i = \phi_i$ para $i = 1, \ldots, N$ y hacemos

$$\phi'_0 = -\sum_{i=1}^{N} \phi_i \hat{S}(0)$$

entonces $V'_0 = 0$. Por otro lado se tiene también que

$$\hat{G}'(\omega) = \hat{G}(\omega) > 0 \;\; \forall\omega \in \Omega$$

por lo tanto

$$V'_T(\omega) = V'_0 + \hat{G}'(\omega) > 0 \;\; \forall\omega \in \Omega$$

es decir, con la estrategia ϕ' se concluye que

$$V_0 = 0 \quad \text{y} \quad V'_T(\omega) > 0 \;\; \forall\omega \in \Omega$$

por lo tanto existen estrategias dominantes. □

Es decir, en un mercado con estrategias dominantes podemos empezar con una riqueza negativa y con seguridad, terminar con un riqueza no negativa. En realidad lo que podemos hacer es una ganancia inmediata cubriendo toda obligación en el futuro. Definitivamente esto es un desequilibrio del mercado, estos desequilibrios estan intimamente relacionados con valuaciones incorrectas de los activos, si deseamos valuar derivados debemos hacerlo en mercados libres de estrategias dominantes.

Medidas de valuación lineal.

Tanto la violación de la ley de un solo precio como la existencia de estrategias dominantes son situaciones de desequilibrio en los mercados y si deseamos asignar precios coherentes a los activos contingentes, es necesario que esto se realice en un mercado en equilibrio. Para que los precios que asignamos a nuestros activos contingentes conserven el equilibrio dentro de los mercados, es necesario que estos cumplan con la ley de un solo precio y que no induzcan estratregias dominantes, desgraciadamente el solo cumplimiento de la ley de un solo precio no garantiza la ausencia de estrategias dominantes, sin embargo la proposición 2.1 nos asegura que lo contrario si se dá, es decir si no existen estrategias dominantes entonces la ley de un solo precio se cumple, es lógico entonces que nuestros esfuerzos se concentren en encontrar la forma de garantizar la ausencia de estrategias dominantes.

Las condiciones que nos aseguran la ausencia de estrategias dominantes se presentarán en la proposcicón 2.4. La demostración es trivial usando programación lineal y en particular si se conoce el teorema fundamental de dualidad[9]. La parte interesante de la proposición consiste en el planteamiento de un problema de programación lineal y su dual. Estos problemas y su solución nos proporcionarán de forma muy natural las condciones que eliminan toda posibilidad de estrategia dominante. La discusión que se plantea a continuación tiene como objetivo el planteamiento de estos problemas.

Quizás la mejor manera de encontrar las condiciones que nos garanticen la ausencia de estrategias dominantes sea tratando de encontrar una de ellas. Si encontramos un método que nos exhiba estrategias dominantes, quizás podamos ubicar en que casos, este método es incapaz de mostrar estrategias dominantes.

¿Como podemos encontrar estrategias dominantes? Observemos la proposición 2.3, ésta nos dice que existen estrategias dominantes sí y sólo si podemos encontrar una estrategia ϕ tal que $V_0 < 0$ y $V_T(\omega_i) \geq 0 \quad \forall \omega_i \in \Omega$, esto por supuesto que también es válido si utilizamos precios descontados, es decir lo único que tenemos que hacer es encontrar una estrategia tal que $\hat{V}_T(\omega_i) \geq 0 \quad \forall \omega_i \in \Omega$ y que a su vez $\hat{V}_0 < 0$, la primera restricción se puede expresar usando la siguiente matriz.

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \hat{S}_1(\omega_1, T) & \cdots & \hat{S}_1(\omega_M, T) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{S}_N(\omega_1, T) & \cdots & \hat{S}_N(\omega_M, T) \end{pmatrix}$$

si $\phi = (\phi_0, \ldots, \phi_N)$ es una estrategia tal que $\hat{V}_T(\omega_i) \geq 0 \quad \forall \omega_i \in \Omega$, entonces esto es equivalente a

$$\phi \mathbf{Z} \geq 0$$

[9]Uno de los textos más sobresalientes en el tema es el libro de Bazaraa

si además $\mathbf{z}$ es el vector de precios descontados el día de hoy tenemos que

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ \hat{S}_1(0) \\ \vdots \\ \hat{S}_N(0) \end{pmatrix}$$

buscamos entonces una estrategia ϕ tal que $\phi\mathbf{z} < 0$ y $\phi\mathbf{Z} \geq 0$ ¿como podemos encontrar una estrategia de este estilo?, bueno si vamos a encontrarla busquemos la mejor que podamos, es decir ¿por que no buscamos la de menor costo?, la estrategia ϕ que resuelva la el siguiente problema de programación lineal

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & \phi\mathbf{z} \\ s.a. & \phi\mathbf{Z} \geq 0 \end{array} \tag{P}$$

Es claro que si el valor óptimo del problema anterior es negativo entonces habremos encontrado una estrategia dominante, pero si el mínimo de la función objetivo es mayor o igual a cero entonces no es posible encontrar estrategias dominantes, parece que finalmente hemos encontrado la condición que buscabamos, sin embargo estamos sujetos a la solución de un problema de programación lineal, tenemos entonces que encontrar en que casos la solución de este problema nos arroja un valor óptimo no negativo, para ello quizás sea de utilidad analizar lo que sucede con el dual del problema de programación lineal anterior, este se escribe como

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & (0,\ldots,0)\,\boldsymbol{\pi} \\ s.a. & \mathbf{Z}\boldsymbol{\pi} = \mathbf{z} \\ & \boldsymbol{\pi} \geq 0 \end{array} \tag{D}$$

¿Que conclusiones obtenemos del dual?, primero veamos que si éste tiene solución, forzosamente nos da un valor óptimo de cero estas son excelentes noticias pues si esto sucede entonces el valor óptimo del primal también es cero, es decir si el dual tiene solución entonces no existen estrategias dominantes! Tenemos que analizar que tipo de soluciones tiene el problema dual. Si escribimos el sistema de ecuaciones corrrespondiente a las restricciones se tiene lo siguiente

$$\begin{array}{rcl} \pi_1 + \ldots + \quad\quad\quad\quad \pi_M &=& 1 \\ \hat{S}_1(\omega_1,T)\pi_1 + \ldots + \hat{S}_1(\omega_M,T)\,\pi_M &=& \hat{S}_1(0) \\ \vdots \quad\quad \ddots \quad\quad\quad & & \vdots \\ \hat{S}_N(\omega_1,T)\pi_1 + \ldots + \hat{S}_N(\omega_M,T)\pi_M &=& \hat{S}_N(0) \end{array}$$

Si consideramos la última ecuación y recordamos que $\pi \geq 0$, podemos interpretar al vector π como una probabilidad. Ahora, si consideramos las primeras N ecuaciones se tiene que en general

$$\hat{S}_j(0) = \sum_{i=1}^{M} \pi_i \hat{S}_j(\omega_i, T) \qquad j = 0, 1, \ldots, N$$

si recordamos que el vector π puede ser interpretado como una probabilidad podemos escribir el resultado anterior como

$$\hat{S}_j(0) = \mathbb{E}_\pi \left[\hat{S}_j(T)\right] \qquad j = 0, 1, \ldots, N$$

en resumen, una solución π del problema dual tiene que cumplir con las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} \pi_1 + \ldots + \pi_M &= 1 & \\ \pi_i &\geq 0 & i = 1, \ldots, M \\ \hat{S}_j(0) &= \mathbb{E}_\pi \left[\hat{S}_j(T)\right] & j = 0, 1, \ldots, N \end{aligned}$$

en conclusión; si encontramos un vector $\pi = (\pi_1, \ldots \pi_M)$ que cumpla las restricciones anteriores entonces el problema **(D)** tiene solución y su valor óptimo es igual a cero, esto implica que el problema **(P)** también tiene solución y su valor óptimo también es cero, por lo tanto si existe el vector π podemos estar seguros de que no existen estrategias dominantes, a un vector del estilo de π se le conoce como *medida de valuación lineal.*

Finalmente, podemos asegurar que la existencia de una medida de valución lineal nos garantiza la ausencia de estrategias dominantes, y por consecuencia el cumplimiento de la ley de un solo precio. Esto lo resumimos en la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 2.4
Existe una medida de valuación lineal sí y sólo si no existen estrategias dominantes.

PRUEBA. Argumentos de programación lineal, específicamente el teorema fundametal de dualidad nos asegura que la existencia de una solución al problema **(D)** implica la ausencia de estrategias dominantes y la existencia de una solución al problema **(P)** implica la existencia de una medida de valuación lineal. □

Ya hemos visto que la existencia de medidas lineales de valuación nos garantiza la ausencia de estrategias dominantes y por consecuencia, el cumplimiento de la ley de un solo precio, esto por si mismo es ya un gran avance, sin embargo, podemos ir un poquito más lejos y encontrar una interpretación económica a esta medida de valuación lineal. Supongamos por el momento que en el mercado existen solo tres activos, el bono que paga la tasa libre de riesgo, una opción europea vainilla y la acción subyacente de la opción, adicionalmente supongamos que al tiempo T sólo puede ocurrir uno de dos posibles estados de la naturaleza, dicho de otro modo, supondremos que el espacio muestral es $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$.

Aún cuando nuestro mercado es pequeñito y sólo tenemos tres activos, podemos formar portafolios, a partir de estos portafolios podemos crear nuevos activos que nos otorguen en el tiempo T pagos muy distintos a los que nos otorgan nuestros tres activos iniciales. En nuestro caso nos interesa construir un par de activos muy particulares, deseamos construir un activo que valga ψ_1 el día de hoy y que pague exactamente \$1 al tiempo T sí y sólo si ocurre el estado ω_1, si ocurre el estado ω_2 no paga nada. También deseamos construir un activo con precio ψ_2 el día de hoy y que pague \$1 al tiempo T sí y sólo si ocurre el estado ω_2 y que no pague nada si lo que ocurre es el estado ω_1. A los precios ψ_1 y ψ_2 se les llama *precios de estado*. Realmente no nos preocupa mucho la construcción de estos activos, lo que realmente nos interesa es simplemente que estos existan, si este es el caso podremos dar un paso más en nuestro modelo.

Si existen este tipo de activos (o pueden ser construidos), seremos capaces de expresar el precio de los demás activos en términos de los precios de estado, para verificar esto simplifiquemos por el momento nuestra notación y supongamos que el precio de la acción al tiempo T es $S_T(\omega_i)$ en el estado ω_i, y por consiguiente supongamos que el precio de la opción al tiempo T es $C_T(\omega_i)$ en el estado ω_i, evidentemente si el precio del bono el día de hoy es de \$1, al tiempo T valdrá $1 + r$ en cualquiera de los estados, el precio de la acción al tiempo cero lo denotamos con S_0 y el de la opción con C_0. ¿Como podemos expresar el precio de estos activos en términos de los precios de estado?, bueno pues hagamos lo que siempre hemos hecho, tomemos la acción y tratemos de replicarla, si compramos $S_T(\omega_1)$ unidades del primer activo de estado y compramos $S_T(\omega_2)$ unidades del segundo activo de estado, entonces al día de hoy nuestro portafolio valdrá

$$\psi_1 S_T(\omega_1) + \psi_2 S_T(\omega_2)$$

dadas las propiedades de nuestros activos de estado, si al tiempo T ocurre el estado ω_1 nuestro portafolio valdrá $S_T(\omega_1)$, si lo que ocurre es el estado

ω_2 entonces nuestro portafolio valdrá $S_T(\omega_2)$, es decir al tiempo T nuestro portafolio vale exactamente lo mismo que nuestra acción, no importa que estado de la naturaleza ocurra. Si no queremos violar la ley de un solo precio, el precio de nuestro portafolio debe ser igual al precio de la acción, es decir si no queremos violar la ley de un solo precio es necesario que

$$S_0 = \psi_1 S_T(\omega_1) + \psi_2 S_t(\omega_2)$$

razonando de forma análoga con la opción y con el bono, podemos llegar a restricciones similares para cada instrumento, de modo que los precios de nuestros activos deben cumplir las siguientes ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 1+r & 1+r \\ S_T(\omega_1) & S_T(\omega_2) \\ C_T(\omega_1) & C_T(\omega_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ S_0 \\ C_0 \end{bmatrix}$$

el sistema anterior nos sugiere una conclusión muy importante para el problema que deseamos resolver, si conocemos el precio de la acción el día de hoy y conocemos los posibles valores de la acción y de la opción el día de mañana, podemos calcular el precio de la opción facilmente si encontramos la solución del sistema

$$\begin{bmatrix} 1+r & 1+r \\ S_T(\omega_1) & S_T(\omega_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ S_0 \end{bmatrix}$$

si la solución es única, entonces no existirá ambigüedad alguna respecto al precio de la opción y tendríamos que $C_0 = \psi_1 C_T(\omega_1) + \psi_2 C_T(\omega_2)$. En el caso del modelo binomial, resolver un sistema de este estilo fue exactamente lo que hicimos y fuimos capaces de asignar un precio único a la opción.

Al construir los precios de los activos a través de los precios de estado nos resulta claro ver que se cumple la ley de un solo precio, sin embargo no resulta tan claro que este camino nos conduzca a eliminar las estrategias dominantes.

Notemos que el invertir en un portafolio constituido por una unidad del activo de estado uno y una unidad del activo de estado dos es equivalente a invertir en el activo libre de riesgo, esto es de esperarse pues sin importar lo que ocurra, nosotros invertimos $\psi_1 + \psi_2$ el día de hoy y recibimos \$1 el día de mañana con toda seguridad. Esto es equivalente a invertir $\frac{1}{1+r}$ en el activo libre de riesgo, es decir para evitar todo tipo de inconsistencias es necesario que

$$\psi_1 + \psi_2 = \frac{1}{1+r}$$

esto ya se tenía desde que se planteó el primer sistema de ecuaciones para los precios de los activos en el mercado. Podemos concluir que

$$(1+r)\,\psi_1 + (1+r)\,\psi_2 = 1$$

de nuevo, si deseamos evitar todo tipo de inconsistencias es necesario pedir también que $\psi_1 > 0$ y $\psi_2 > 0$, considerando esto podemos definir

$$\begin{aligned} \pi_1 &= (1+r)\,\psi_1 \\ \pi_2 &= (1+r)\,\psi_2 \end{aligned}$$

tenemos entonces que

$$\begin{aligned} \pi_1 &\geq 0 \\ \pi_2 &\geq 0 \\ &\text{y} \\ \pi_1 + \pi_2 &= 1 \end{aligned}$$

podemos ver entonces a $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2)$, como una medida de probabilidad. Podemos reescribir el sistema

$$\begin{aligned} \psi_1 S_T(\omega_1) + \psi_2 S_T(\omega_2) &= S_0 \\ \psi_1 C_T(\omega_1) + \psi_2 C_T(\omega_2) &= C_0 \end{aligned}$$

como

$$\begin{aligned} S_0 &= \frac{1}{1+r}\left[\pi_1 S_T(\omega_1) + \pi_2 S_T(\omega_2)\right] \\ C_0 &= \frac{1}{1+r}\left[\pi_1 C_T(\omega_1) + \pi_2 C_T(\omega_2)\right] \end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned} S_0 &= \frac{1}{1+r}\mathbb{E}_\pi\left[S_T\right] \\ C_0 &= \frac{1}{1+r}\mathbb{E}_\pi\left[C_T\right] \end{aligned}$$

la segunda ecuación ya la conocemos, en el modelo binomial se obtuvo una expresión similar para el precio de la opción, sólo que en el modelo binomial se encontró la probabilidad π, replicando la opción[10]. La primera ecuación también la conocemos, si hacemos un recuento notaremos que π cumple con todos los requisitos para ser medida de valuación lineal, sólo que en este caso surgió a partir de los precios de estado como $\pi_i = (1+r)\,\psi_i$

Con estas ideas en la mano podemos retomar nuestra notación e incorporar los precios de estado. Sabemos que si no existen estrategias dominantes entonces podemos encontrar una medida de valuación lineal tal que

$$\begin{aligned} \pi_1 + \ldots + \pi_M &= 1 && \\ \pi_i &\geq 0 && i = 1, \ldots, M \\ \hat{S}_j(0) &= \sum_{i=1}^{M} \pi_i \hat{S}_j(\omega_i, T) && j = 0, 1, \ldots, N \end{aligned}$$

en este caso tenemos que $\pi_i = (1/\beta_t)\,\psi_i$ por tanto la última restricción se reescribe como

$$S_j(0) = \sum_{i=1}^{M} \psi_i S_j(\omega_i, T) \qquad j = 0, 1, \ldots, N$$

en general podemos encontrar el precio de cualquier portafolio en términos de los precios de estado como

$$V_j(0) = \sum_{i=1}^{M} \psi_i V_j(\omega_i, T) \qquad i = 0, 1, \ldots, N$$

y podemos reexpresar todas las condiciones para medidas lineales de valuación en términos de los precios de estado como

$$\begin{aligned} \psi_1 + \ldots + \psi_M &= \frac{1}{\beta_t} && \\ \psi_i &\geq 0 && i = 1, \ldots, M \\ S_j(0) &= \sum_{i=1}^{M} \psi_i S_j(\omega_i, T) && j = 0, 1, \ldots, N \end{aligned}$$

con esto quizás se entienda un poco mejor el vínculo con el problema de valuación.

[10]La primera ecuación también se puede verificar en el contexto del modelo binomial, basta con sustituir la probabilidad obtenida en este modelo en la ecuación $S_0 = \frac{1}{1+r}\mathbb{E}_\pi[S_T]$.

Arbitraje y probabilidades neutrales al riesgo.

Hemos hablado una y otra vez de la ley de un solo precio y de estrategias dominantes, sin embargo hasta el momento no hemos hablado de **arbitraje**, ¿por que entonces hemos llamado esta sección "Arbitraje"?, las estrategias de arbitraje son bastante más sutiles que las estrategias dominantes, debemos decir que una estrategia dominante es una estrategia de arbitraje pero no necesariamente una estrategia de arbitraje es una estrategia dominante, de algún modo una estrategia de arbitraje es aún más restrictiva que una estrategia dominante.

Si es cierto lo que acabamos de decir, la eliminación de estrategias de arbitraje eliminará también a las estrategias dominantes y nos asegurará el cumplimiento de la ley de un solo precio, pero entonces ¡¿Que son las estrategias de arbitraje?!

Antes de dar una definición formal de estrategia de arbitraje vamos a discutir algunos detallitos que se nos han escapado. Cuando desarrollamos nuestro modelito del mercado con tres activos, supusimos la existencia de activos de estado y en su momento supusimos que los precios de estos activos eran positivos, no cero ni mucho menos menores que cero, los supusimos positivos y el argumento para ello fue la conservación del equilibrio del mercado. Observemos que precios de estado iguales a cero no tienen sentido, de hecho estaríamos afirmando que existe un activo que vale cero hoy (o menos) y que con seguridad el día de mañana valdrá \$1. Claramente esto no tiene sentido desde el punto de vista económico puesto que esto sería una estrategia dominante!. Si usaramos estos precios de estado para asegurar la ausencia de estrategias dominantes estaríamos usando un portafolio dominante para eliminar las propias estrategias dominantes, esto claramente no tiene sentido. Sin embargo esto tiene una interpretación adicional, si existe un precio de estado ψ_i igual a cero entonces la correspondiente probabilidad π_i es igual a cero también, en el contexto de la proposición 2.4, esto no causa problema alguno, puesto que en el problema de programación lineal **(D)**, lo único qu exigimos fué que $\boldsymbol{\pi} \geq 0$. Esto quiere decir que podemos garantizar la ausencia de estrategias dominantes aún cuando alguna entrada del vector $\boldsymbol{\pi}$ sea igual a cero, ¿por que entonces nos causa esto tanto problema?

Para entender el problema con claridad, a continuación se da una definición precisa de arbitraje.

Definición 2.3 (Estrategia de arbitraje.)
Una estrategia $\boldsymbol{\phi}$ es una estrategia de arbitraje si

- $V_0 = 0$
- $V_T(\omega) \geq 0 \quad \forall \omega \in \Omega$
- $\mathbb{E}[V_T] > 0$

Hay que tener cuidado con la definición anterior. Recordemos que cuando establecimos los supuestos básicos del modelo discreto se asumió que los precios de los activos vivían en un espacio de probabilidad con espacio muestral finito y con una medida de probabilidad $\mathbb{P}$ tal que $\mathbb{P}(\omega) > 0\ \forall \omega \in \Omega$, el valor esperado del portafolio en la definición de arbitraje considera a $\mathbb{P}$ como la medida de probabilidad y no a la medida lineal de valuación.

¿En que se diferencían una estrategia dominante y una estrategia de arbitraje?. Se parecen mucho pero **no** son lo mismo, en el caso de las estrategias dominantes si empezabamos con $V_0 = 0$ con seguridad $V_T(\omega) > 0 \quad \forall \omega \in \Omega$. Si lo que tenemos es una estrategia de arbitraje entonces pueden existir estados de la naturaleza para los cuales $V_T(\omega) = 0$ y pueden existir también estados de la naturaleza donde $V_T(\omega) > 0$, sin embargo esto último no se da con seguridad, en eso se diferencían de las estrategias dominantes, sin embargo aún cuando empezamos con una riqueza igual a cero, tenemos una probabilidad positiva de terminar con una riqueza positiva, esto tampoco tiene sentido económico, veámoslo así, supongamos que alguien nos regala un boleto de lotería, claramente esto no tuvo costo alguno para nosotros, sin embargo tenemos una probabilidad positiva de ganarnos el premio mayor, pero quien cuernos nos va a regalar algo en el mercado! eso no tiene sentido.

Pero entonces ¿que pasa con las medidas lineales de valuación?, aún no respondemos a la inquietud de que alguna π_i fuera igual a cero, ¿por que tanta preocupación por ello?. Con anterioridad mencionamos que una estrategia dominante es una estrategia de arbitraje, pero una estrategia de arbitraje no necesariamente es una estrategia dominante. Esto se resume en la siguiente proposición y en el ejemplo 2.2.

PROPOSICIÓN 2.5
Si existen estrategias dominantes entonces exiten estrategias de arbitraje.

PRUEBA. Es resultado directo de la proposición 2.2

□

Esta proposición nos asegura que si no existen estrategias de arbitraje entonces no existen estrategias dominantes, por lo tanto nuestro propósito en lo sucesivo será encontrar condiciones que nos garanticen la ausencia de estrategias de arbitraje.

Como ya hemos dicho, una estrategia de arbitraje no necesariamente es una estrategia dominante, esto no nos permite conformarnos con la eliminación de las estrategias dominantes, el siguiente es un ejemplo de estrategia de arbitraje pero no dominante.

EJEMPLO 2.2
Supongamos que tenemos un mercado con $N = 2$ y $M = 3$ donde la tasa libre de riesgo r es $\frac{1}{2}$, $S_1(0) = 10$, $S_2(0) = 8$ y los activos riesgosos pueden tomar los siguientes valores al tiempo T dependiendo de los distintos estados de la naturaleza

ω_i	$S_1(\omega_i, T)$	$S_2(\omega_i, T)$
ω_1	*12*	*10*
ω_2	*9*	*8*
ω_3	*15*	*12*

con estos valores podemos escribir el valor del portafolio al tiempo T, en los distintos estados de la naturaleza como

$$\begin{aligned} V_T(\omega_1) &= \frac{3}{2}\phi_0 + 12\phi_1 + 10\phi_2 \\ V_T(\omega_2) &= \frac{3}{2}\phi_0 + 9\ \phi_1 + 8\ \phi_2 \\ V_T(\omega_3) &= \frac{3}{2}\phi_0 + 15\phi_1 + 12\phi_2 \end{aligned}$$

si hacemos $(\phi_0, \phi_1, \phi_2) = (10, -5, 5)$, entonces $V_0 = 0$ y $V_T = (5, 10, 0)$, si recordamos que $\mathbb{P}(\omega) > 0$ para toda $\omega \in \Omega$, con la estrategia $\boldsymbol{\phi}$ propuesta se tiene que

$$\begin{aligned} V_0(\boldsymbol{\phi}) &= 0 \\ V_T(\omega) &\geq 0 \qquad \forall\, \omega \in \Omega \\ \mathbb{E}\left[V_T(\boldsymbol{\phi})\right] &> 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto la estrategia $\boldsymbol{\phi}$ es una estrategia de arbitraje, sin embargo si $\boldsymbol{\pi} = (0, 0, 1)$, entonces

$$\begin{aligned} \pi_i &\geq 0 \qquad\qquad i = 1, 2, 3 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 &= 1 \end{aligned}$$

$$\hat{S}_j(0) \;=\; \sum_{i=1}^{3} \pi_i \hat{S}_j(\omega_i, T) \quad j = 0, 1, 2$$

es decir, $\boldsymbol{\pi}$ es una medida lineal de valuación, por lo tanto **no** *existen estrategias dominantes.* □

Analicemos un poco el ejemplo anterior, si encontramos una estrategia de arbitraje entonces con esta estrategia nuestro portafolio vale cero al día de hoy y mañana valdrá cero o si tenemos suerte algo mayor que cero, pero como $\mathbb{P}(\omega) > 0$ para todo $\omega \in \Omega$, entonces el valor esperado de nuestro portafolio es estrictamente mayor que cero. Esto no sucede así con la medida lineal de valuación $\boldsymbol{\pi}$, en este caso el valor esperado de nuestro portafolio si es cero, lo cual tiene más sentido desde el punto de vista económico; si empiezo con una riqueza de cero, lo lógico es que espere terminar con una riqueza de cero, sin embargo aunque esta probabilidad modifica el valor esperado de nuestro portafolio, de algún modo modifica nuestros supuestos básicos, puesto que $\boldsymbol{\pi}$ no necesariamente es mayor que cero en todo ω. De hecho se dice que una medida de probabilidad P_1 es equivalente a otra medida de probabilidad P_2 si para todo evento A, $P_1(A) = 0 \Leftrightarrow P_2(A) = 0$, en nuestro caso $\boldsymbol{\pi}$ es equivalente a $\mathbb{P}$ si $\pi(\omega) > 0$ para todo $\omega \in \Omega$. Es claro que en el caso de una estrategia de arbitraje $\boldsymbol{\pi}$ no es equivalente a $\mathbb{P}$, la intuición nos sugiere entonces que para evitar las estrategias de arbitraje no es suficiente con encontrar una medida de valuación lineal, es necesario que ésta sea equivalente a $\mathbb{P}$, osea es necesario que $\pi(\omega) > 0$ para todo $\omega \in \Omega$. Demostrar esto no es tan sencillo, más adelante lo haremos, por el momento probaremos una caracterización alternativa de estrategia de arbitraje.

Primero notemos que como $\beta_t > 0$ entonces una estrategia $\boldsymbol{\phi}$ es una estrategia de arbitraje si

- $\hat{V}_0 = 0$
- $\hat{V}_T \geq 0 \qquad \forall \omega \in \Omega$
- $\mathbb{E}\left[\hat{V}_T\right] > 0$

considerando esto último probamos la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 2.6
Existen estrategias de arbitraje sí y sólo si existe una estrategia $\boldsymbol{\phi}$ tal que.

- $\hat{G}(\omega) \geq 0 \qquad \forall \omega \in \Omega$
- $\mathbb{E}\left[\hat{G}\right] > 0$

PRUEBA. Si ϕ es una estrategia de arbitraje, entonces por la observación anterior se tiene que $\hat{G} = \hat{V}_T - \hat{V}_0 \geq 0$, del mismo modo, $\mathbb{E}\left[\hat{G}\right] = \mathbb{E}\left[\hat{V}_T - \hat{V}_0\right] > 0$.

Ahora supongamos que ϕ es una estrategia tal que $\hat{G}(\omega) \geq 0 \ \ \forall \omega \in \Omega$ y $\mathbb{E}\left[\hat{G}\right] > 0$, si definimos una nueva estrategia $\phi^\star$ como $\phi_i^\star = \phi_i$ para toda $i = 1, \ldots, N$ y

$$\phi_0^\star = -\sum_{i=1}^{N} \phi_i \hat{S}_i(0)$$

entonces $\hat{G} = \hat{G}^\star$ y $\hat{V}_0^\star = 0$, como $\hat{V}_T^\star = \hat{V}_0^\star + \hat{G}^\star = \hat{G}^\star$, entonces $\hat{V}_T^\star(\omega) \geq 0$ para toda $\omega \in \Omega$, con el mismo argumento se tiene que $\mathbb{E}\left[\hat{V}_T^\star\right] = \mathbb{E}[\hat{G}^\star] > 0$, por lo tanto $\phi^\star$ es una estrategia de arbitraje. □

Ya lo mencionamos, la intuición nos dice que para eliminar todo tipo de estrategias de arbitraje es necesario encontrar una medida de valuación lineal π tal que $\pi(\omega) > 0$ para toda $\omega \in \Omega$. Este tipo de medidas son tan importantes, que merecen un nombre especial, de hecho en lo sucesivo las mencionaremos una y otra vez.

DEFINICIÓN 2.4 (PROBABILIDAD NEUTRAL AL RIESGO.)
Una probabilidad π es una medida de probabilidad neutral al riesgo si

- $\pi(\omega) > 0 \quad \forall \omega \in \Omega$ *y*
- $\mathbb{E}_\pi\left[\Delta \hat{S}_i\right] = 0$

donde $\Delta \hat{S}_i = \hat{S}_i(\omega, T) - \hat{S}_i(0)$.

Notemos que la condición de que

$$\mathbb{E}_\pi\left[\Delta \hat{S}_i\right] = 0$$

es equivalente a decir que

$$\hat{S}_i(0) = \mathbb{E}_\pi\left[\hat{S}_i(T)\right]$$

la propiedad anterior ya la habíamos visto, al resolver el problema de programación lineal (D), surgió de manera natural, más tarde se discutirá el significado de esta igualdad con más detalle.

Las medidas de probabilidad neutrales al riesgo tienen una interpretación económica muy precisa, más adelante discutiremos su significado económico, por ahora sólo las consideraremos como la herramienta que nos garantiza el equilibrio en el mercado y que nos permite asignar precios justos a los activos contingentes.

Considerando la definición de medida de probabilidad neutral al riesgo, podemos decir que no existen estrategias de arbitraje sí y sólo si existe una medida de probabilidad neutral al riesgo. Antes de demostrar esta propiedad se tratará de explicar la idea de la demostración, para ello considérese la figura 2.2.

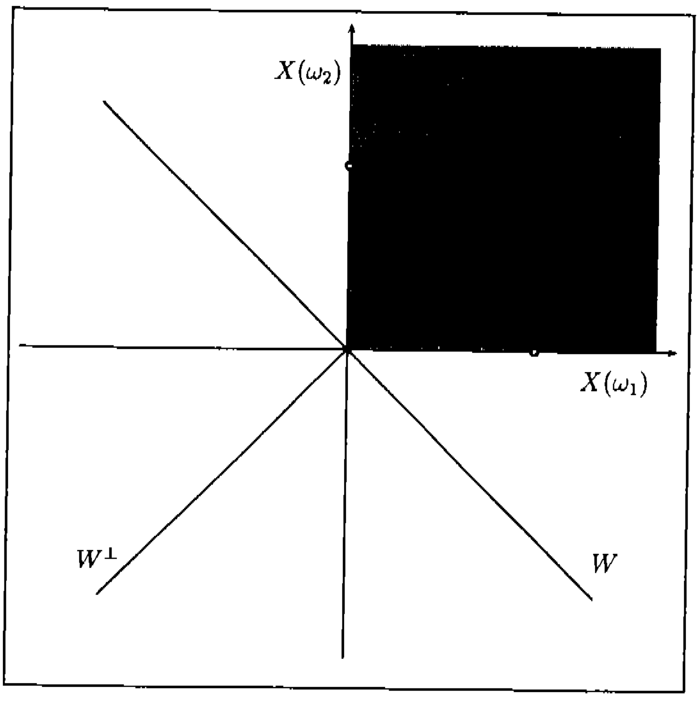

Figura 2.2: Medidas neutrales al riesgo.

Primero, definimos

$$W = \left\{ X \in \mathbb{R}^M : X = \hat{G} \text{ para alguna estrategia } \phi \right\}$$

podemos interpretar a W como un conjunto de variables aleatorias, de hecho tal como se definió W, $X \in W$ se puede tomar como el valor en el tiempo T de un portafolio que el día de hoy vale cero. Observemos, que W es un subespacio lineal de $\mathbb{R}^M$. En la figura anterior se muestra un ejemplo de W cuando $M = 2$.

Definimos además

$$A = \{X \in \mathbb{R}^M : X \geq 0, X \neq 0\}$$

A es simplemente la parte positiva del ortante no negativo de $\mathbb{R}^M$, hemos dejado fuera al origen. Si retomamos la proposición 2.6, es claro que no existirán estrategias de arbitraje sí y sólo si $W \cap A \neq \emptyset$

Definimos por otro lado el subespacio ortogonal a W como

$$W^\perp = \{Y \in \mathbb{R}^M : X \cdot Y = 0 \text{ para todo } X \in W\}$$

donde $X \cdot Y = X(\omega_1)Y(\omega_1) + \cdots + X(\omega_M)Y(\omega_M)$, denota el producto interior de X y Y. Veamos ahora la figura 2.2, al menos intuitivamente es claro que si $W \cap A = \emptyset$ entonces existe un rayo completo en $W^\perp$, tal que cada uno de sus elementos tiene componentes estrictamente positivas. En particular debe existir algún elemento en $W^\perp$ con componentes estrictamente positivas y que además suman uno, este elemento se puede considerar entonces como una medida de probabilidad. Es decir si definimos

$$P^+ = \{X \in A : X_1 + \cdots + X_M = 1, \quad X_1 > 0, X_2 > 0, \ldots, X_M > 0\}$$

la figura 2.2 sugiere que $W \cap A = \emptyset$ sí y sólo si $W^\perp \cap P^+ \neq \emptyset$

Como $\Delta\hat{S}_i \in W$ para todo i, entonces , todo elemento de $W^\perp \cap P^+$ es una medida neutral al riesgo. Por el contrario, si tenemos una medida neutral al riesgo $\boldsymbol{\pi}$, entonces para cada $\hat{G} \in W$

$$\mathbb{E}_\pi\left[\hat{G}\right] = \mathbb{E}_\pi\left[\sum_{i=1}^N \phi_i \Delta\hat{S}_i\right] = \sum_{i=1}^N \phi_i \mathbb{E}_\pi\left[\Delta\hat{S}_i\right] = 0$$

es decir $\boldsymbol{\pi} \in W^\perp \cap P^+$. Si denotamos con $\mathbf{M}$ al conjunto de todas las probabilidades neutrales al riesgo, se tiene que

$$\mathbb{M} = W^\perp \cap P^+$$

Finalmente, la figura 2.2 nos sugiere que $W \cap A = \emptyset$ sí y sólo si $\mathbb{M} \neq \emptyset$. Es decir no existen estrategias de arbitraje sí y sólo si $\mathbf{M} \neq \emptyset$, en la prueba de la siguiente proposición se formalizan todos estos argumentos.

PROPOSICIÓN 2.7
No existen estrategias de arbitraje sí y sólo si existen medidas de probabilidad neutrales al riesgo.

PRUEBA. Primero definimos el siguiente conjunto

$$A^+ = \{X \in A : \mathbb{E}[X] \geq 1\}$$

Si suponemos que no existe arbitraje entonces W y A^+ son disjuntos. Además A^+ es un subconjunto de $\mathbb{R}^M$ convexo y cerrado. El teorema de separación de convexos nos asegura que existe un $Y \in W^\perp$ tal que $X \cdot Y > 0$ para todo $X \in A^+$. Además, para cada $k = 1, \ldots, M$ podemos encontrar un vector $X \in A^+$ tal que su componente k-ésima es estrictamente positiva y el resto son cero, como $X \cdot Y > 0$ para todo $X \in A^+$, entonces podemos asegurar que todas las componentes de Y son estrictamente positivas. Si hacemos $\pi(\omega_k) = Y(\omega_k)/Y(\omega_1)+, \ldots, +Y(\omega_M)$ entonces es claro que $\boldsymbol{\pi}$ es una medida de probabilidad, pero además $\boldsymbol{\pi} \in W^\perp$. Como $\Delta\hat{S}_i \in W$ para toda $i = 1, \ldots, N$, entonces $\boldsymbol{\pi}$ es una medida de probabilidad neutral al riesgo.

Si ahora suponemos que existe una medida de probabilidad neutral al riesgo $\boldsymbol{\pi}$, entonces

$$\mathbb{E}_\pi\left[\hat{G}\right] = \mathbb{E}_\pi\left[\sum_{i=1}^{N} \phi_i \Delta\hat{S}_i\right] = \sum_{i=1}^{N} \phi_i \mathbb{E}_\pi\left[\Delta\hat{S}_i\right] = 0$$

para cualquier estrategia $\boldsymbol{\phi}$. Y como $\pi(\omega_k) > 0$ para toda k entonces, no podemos encontar ninguna estrategia tal que $\hat{G} \geq 0 \ \forall\omega \in \Omega$ y $\mathbb{E}\left[\hat{G}\right] > 0$, por lo tanto no existen estrategias de arbitraje.(Debe existir algún $\omega \in \Omega$ tal que $\hat{G}(\omega) < 0$) □

Aqui podríamos concluir esta sección, nuestro propósito era demostrar la proposición anterior y ya lo hemos hecho, para que nuestros modelos de valuación conserven el equilibrio en el mercado, deben estar fundamentados en argumentos de no arbitraje y esto esta íntimamente ligado a la existencia de probabilidades neutrales al riesgo. Sin embargo, antes de concluir surge una pregunta muy natural ¿porqué neutral al riesgo?, a principio de este capítulo se trato de explicar de forma muy intuitiva este concepto.

Se puede explicar fácilmente, una medida neutral al riesgo no tiene ninguna relación con las preferencias al riesgo de algún inversionista en particular. Si retomamos la definición de probabilidad neutral al riesgo tenemos que

$\boldsymbol{\pi}$ es neutral al riesgo sí y sólo si $\pi(\omega) > 0 \quad \forall\omega \in \Omega$ y $\hat{S}_i(0) = \mathbb{E}_\pi\left[\hat{S}_i(T)\right]$, si hacemos $\beta_t = \frac{1}{1+r}$, donde r es la tasa libre de riesgo, entonces $\boldsymbol{\pi}$ es una medida neutral al riesgo sí y sólo si $\pi(\omega) > 0$ para todo ω y

$$S_j(0) = \sum_{i=1}^{M} \pi(\omega_i)\frac{S_j(\omega_i, T)}{1+r}, \quad j = 1, \ldots, N$$

la igualdad anterior la podemos reordenar y obtenemos la siguiente

$$1 + r = \sum_{i=1}^{M} \pi(\omega_i)\frac{S_j(\omega_i, T)}{S_j(0)}, \quad j = 1, \ldots, N$$

notemos que $S_j(\omega_i, T)/S_j(0)$ es el rendimiento del j-ésimo activo, en el estado de la naturaleza i, tomando esto en cuenta, la igualdad anterior se puede interpretar como la esperanza bajo $\boldsymbol{\pi}$ del rendimiento del j-ésimo activo. Llegamos entonces a una importante conclusión, la esperanza bajo $\boldsymbol{\pi}$ de los rendimientos es igual para todos los activos y no sólo eso, esta esperanza es igual al rendimiento del activo libre de riesgo, en términos muy generales podemos decir que para que un inversionista averso al riesgo[11] decida invertir en un activo riesgoso, éste debe prometer un rendimiento superior a la tasa libre de riesgo, en general general todos los inversionistas suponen que todo activo riesgoso provee un premio al riesgo, es decir en todo activo riesgoso esperan un rendimiento excedente a la tasa libre de riesgo, bajo las probabilidades neutrales al riesgo esto no sucede así puesto que no consideran las preferencias de los inversionistas.

2.4.3. Mercados Completos

En la sección anterior se demostró que la existencia de medidas de probabilidad neutrales al riesgo aseguraban la ausencia de estrategias de arbitraje y se mencionó que la existencia de estas medidas esta estrechamente relacionada con la posibilidad de encontrar un precio de equilibrio para todo activo contingente, en general la idea es la siguiente; si tenemos un activo contingente que paga el día de mañana $X(\omega, T)$ en el estado de la naturaleza ω, entonces podemos construir un portafolio replicante que pague en T exactamente lo mismo que el activo contingente, es decir el valor $V_T(\omega)$ del portafolio en T debe ser igual al valor del activo contingente $X(\omega, T)$ en T,

[11] Para ver un tratamiento más extenso de aversión al riesgo se recomineda el libro de Huang y Litzenberger.

para todo $\omega \in \Omega$, si esto ocurre entonces el valor del portafolio hoy debe ser exactemente igual al precio del activo contingente, si no es así estaríamos violando la ley de un solo precio, pero si existen medidas de probabilidad neutrales al riesgo entonces no hay modo de violar la ley de un solo precio, en este caso el precio del activo contingente y el valor del portafolio al tiempo cero deben ser exactamente iguales. Aqui no acaba la historia, si consideramos cualquier medida neutral al riesgo π entonces para cualquier estrategia ϕ se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\pi\left[\hat{V}_T\right] &= \mathbb{E}_\pi\left[\hat{V}_0 + \hat{G}\right] \\
&= \hat{V}_0 + \mathbb{E}_\pi\left[\hat{G}\right] \\
&= V_0 + \mathbb{E}_\pi\left[\sum_{i=1}^{N} \phi_i \Delta \hat{S}_i\right] \\
&= V_0 + \sum_{i=1}^{N} \phi_i \mathbb{E}_\pi\left[\Delta \hat{S}_i\right] \\
&= V_0
\end{aligned}$$

la última igualdad es válida puesto que π es neutral al riesgo. ¿Que es lo que podemos concluir a partir de lo anterior?. Si π es una medida neutral al riesgo entonces *la esperanza bajo π del valor descontado de cualquier portafolio es igual a su valor hoy*, de acuerdo con la probabilidad neutral al riesgo, la mejor estimación para el precio del portafolio el día de mañana es su valor hoy, esto por si mismo es importante, pero lo es más si es que el portafolio replica algún activo contingente ¿por que? consideremos primero la siguiente definición

DEFINICIÓN 2.5 (ACTIVO REPLICABLE)
Se dice que un activo contingente X es replicable si existe una estrategia ϕ tal que $V_T(\omega) = X_T(\omega)$ para todo $\omega \in \Omega$

Esto lo hemos usado una y otra vez, pero en esta sección el concepto anterior será muy importante, merece entonces una definición a parte. Regresemos a nuestra discusión; si existe una medida neutral al riesgo π entonces la esperanza bajo π del valor descontado de cualquier portafolio es igual a su valor hoy y si además el portafolio replica algún activo contingente X, entonces hemos encontrado un un método muy importante de valuación; ya que el portafolio replica al activo contingente entonces podemos asegurar que

$$X_0 = \mathbb{E}_\pi\left[\hat{X}_T\right]$$

donde π es una medida neutral al riesgo. Es decir el precio del activo contingente es igual al valor esperado bajo alguna medida neutral al riesgo del valor descontado del activo al tiempo T. Esto ya lo hicimos en el modelo binomial solo que en ese caso el resultado fué solamente una forma cómoda de escribir el precio del derivado. Como de costumbre veremos en donde podemos encontrar problemas, para ello veamos el siguiente ejemplo

EJEMPLO 2.3
Supongamos un mercado en el cual existen sólo dos activos, el bono que paga la tasa libre de riesgo y una acción y tenemos además tres estados de la naturaleza. La siguiente tabla muestra la información pertinente

ω_i	$S_1(\omega_i, T)$
ω_1	*12*
ω_2	*6*
ω_3	*18*

la tasa libre de riesgo es $r = 1/2$ *y* $S_0 = 10$. *Primero veamos que en este mercado efectivamente existen medidas de probabilidad neutrales al riesgo, para encontrarlas basta con resolver el sistema*

$$\begin{aligned} \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 &= 1 \\ 8\pi_1 + 4\pi_2 + 12\pi_3 &= 10 \end{aligned}$$

la segunda ecuación es la esperanza bajo π *de los precios descontados. Si resolvemos el sistema anterior obtenemos la siguiente solución general*

$$(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = \left(\frac{3}{2} - 2\lambda, -\frac{1}{2} + \lambda, \lambda\right)$$

para cualquier $\lambda \in (1/2, 3/4)$ *obtenemos una medida neutral al riesgo. Supongamos ahora que tenemos un activo contingente* X *que tiene el siguiete perfil de pagos descontados.*

$$\begin{aligned} \hat{X}_T(\omega_1) &= 3 \\ \hat{X}_T(\omega_2) &= 9 \\ \hat{X}_T(\omega_3) &= 1 \end{aligned}$$

¿Cual es le precio de X*? podemos seguir el principio de valuación que expusimos anteriormente y encontrar el precio de* X *encontrando el valor esperado*

de sus flujos descontados es decir

$$X_0 = \left(\frac{3}{2} - 2\lambda\right)3 + \left(-\frac{1}{2} + \lambda\right)9 + \lambda \;=\; 4\lambda$$

Es decir el precio del activo X es igual a 4λ □

Analicemos lo que sucede en el ejemplo anterior; si tomamos una $\lambda \in (1/2, 3/4)$ obtenemos una medida neutral al riesgo, esto nos asegura la ausencia de estrategias de arbitraje, sin embargo en nuestro ejemplo el precio del activo contingente X es 4λ esto quiere decir que para cada $\lambda \in (1/2, 3/4)$ podemos asignar un precio distinto, el activo ¡no tiene precio único! esto quiere decir que si un inversionista intentara valuar el activo contingente con una λ y otro inversionista lo hiciera con una λ distinta, un tercer inversionista podría hacer arbitraje con los otros dos inversionistas, definitivamente esto ¡no tiene sentido!. Veamos que tan grave es el problema; podemos encontrar medidas de probabilidad neutrales al riesgo, lo cual nos asegura la ausencia de estrategias de arbitraje, entonces ¿por que podemos asignar precios distintos a X? ¿Que fué lo que hicimos mal? observemos que cuando desarrollamos este método de valuación supusimos que el activo contingente era replicable y en el ejemplo anterior jamás verificamos si el activo contingente lo era o no. La conjetura es entonces que este activo no es replicable, es decir no existe estrategia alguna que genere un portafolio que pague exactamente lo mismo que el activo contingente en el tiempo T. Esto nos lleva a la siguiente definición

DEFINICIÓN 2.6 (MERCADOS COMPLETOS)
Se dice que un mercado es completo si todo activo contingente es replicable.

La conjetura es entonces que nuestro mercado no es completo, una forma de verificar rápidamente esta conjetura es analizando la matriz de pagos de los activos en el mercado

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} S_0(T) & S_1(\omega_1, T) & \cdots & S_N(\omega_1, T) \\ S_0(T) & S_1(\omega_2, T) & \cdots & S_N(\omega_2, T) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_0(T) & S_1(\omega_M, T) & \cdots & S_N(\omega_M, T) \end{pmatrix}$$

Es claro que si tenemos un activo contingente X, entonces el sistema

$$\mathbf{A}\phi = X$$

tiene solución sí y sólo si $\mathbf{A}$ es de rango M, es decir si la matriz $\mathbf{A}$ tiene rango M podremos encontrar una estrategia ϕ que replique al activo X, en este caso el mercado es completo, observemos que en nuestro ejemplo la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 12 \\ \frac{3}{2} & 6 \\ \frac{3}{2} & 18 \end{pmatrix}$$

es de rango 2, sin embargo $M = 3$, esto nos indica que el mercado no es completo y por tanto debe existir un activo contingente X imposible de replicar, de hecho la matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 12 & 3 \\ \frac{3}{2} & 6 & 9 \\ \frac{3}{2} & 18 & 1 \end{pmatrix}$$

es de rango 3, esto nos hace concluir que el activo contingente X no es replicable y no tiene sentido usar las probabilidades neutrales al riesgo para valuar el derivado X, puesto que no encontraremos un precio único.

Ahora bien, si el mercado es completo entonces todo activo contingente es replicable es de esperarse que podamos valuar cualquier derivado a través de su portafolio replicante, si X es el activo y V es el portafolio replica, entonces

$$X_0 = V_0 = \mathbb{E}_\pi\left[\hat{V}_T\right] = \mathbb{E}_\pi\left[\hat{X}_T\right]$$

la igualdad anterior debe ser cierta para cualquier medida neutral al riesgo π, es decir la esperanza $\mathbb{E}_\pi\left[V_T\right]$ debe ser la misma para toda medida neutral al riesgo. Esto se resume en la siguiente proposición

Proposición 2.8

. *Un activo contingente X es replicable sí y sólo si $\mathbb{E}_\pi\left[\hat{X}_T\right]$ toma el mismo valor para toda medida π neutral al riesgo.*

Prueba. Retomemos la notación de la sección de arbitraje; suponemos que $\mathbb{M} \neq \emptyset$, donde $\mathbb{M}$ es el conjunto de probabilidades neutrales al riesgo. Si el activo contingente es replicable, entonces existe una estrategia ϕ tal que

$$\mathbb{E}_\pi\left[\hat{V}_T\right] = \mathbb{E}_\pi\left[\hat{X}_T\right]$$

entonces

$$V_0 = \mathbf{E}_\pi\left[\hat{X}_T\right]$$

para toda medida $\pi \in \mathbf{M}$. Esto es válido puesto que como sabemos, para toda medida neutral al riesgo

$$\mathbb{E}_\pi\left[\hat{V}_T\right] = \mathbb{E}_\pi\left[V_0 + \hat{G}\right] = V_0 + \mathbb{E}_\pi\left[\hat{G}\right] = V_0 + \sum_{i=1}^{N} \phi_i \mathbb{E}_\pi\left[\Delta \hat{S}_i\right] = V_0$$

Para demostrar el regreso demostraremos que si un activo contingente no es replicable entonces $\mathbb{E}_\pi\left[\hat{X}_T\right]$ no toma el mismo valor para toda $\pi \in \mathbf{M}$. Para demostrar esto consideremos de nuevo la matriz de pagos $\mathbf{A}$, si tomamos un activo contingente no replicable X, entonces no existe ninguna estrategia ϕ que resuelva el sistema

$$\mathbf{A}\phi = X$$

Usando el lema de Farka podemos asegurar que existe un vector φ que resuelve el problema

$$\varphi \mathbf{A} = 0, \qquad \varphi X > 0$$

Como $\pi(\omega) > 0$ para todo $\pi \in \mathbf{M}$ entonces existe un $\lambda > 0$ suficientemente pequeño de modo que para una medida $\tilde{\pi} \in \mathbf{M}$ arbitraria

$$\pi(\omega_i) = \tilde{\pi}(\omega_i) + \lambda \varphi(\omega_i) S_0(\omega_i, T) > 0, \qquad \forall i = 1, 2, \ldots, M$$

como $\varphi \mathbf{A} = 0$ entonces

$$\sum_{i=1}^{M} \varphi(\omega_i) S_j(\omega_i, T) = 0 \qquad \forall j = 0, 1, \ldots, N$$

esto implica que

$$\sum_{i=1}^{M} \pi(\omega_i) = 1$$

además

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\pi\left[\hat{S}_j(T)\right] &= \sum_{i=1}^{N} \pi(\omega_i) \hat{S}_j(\omega_i, T) \\
&= \sum_{i=1}^{M} \tilde{\pi}(\omega_i) \hat{S}_j(\omega_i, T) + \frac{\lambda}{1+r} \sum_{i=1}^{M} \varphi S_j(\omega_i, T) \\
&= \mathbb{E}_{\tilde{\pi}}\left[\hat{S}_j(T)\right]
\end{aligned}$$

pero como $\tilde{\pi}$ es medida neutral al riesgo entonces $\mathbb{E}_\pi\left[\hat{S}_j(T)\right] = \hat{S}_j(0)$, con esto concluimos que $\pi \in \mathbf{M}$. Lo único que falta por demostrar es que

$\mathbb{E}_{\tilde{\pi}}\left[\hat{X}\right] \neq \mathbb{E}_{\pi}\left[\hat{X}\right]$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\pi}\left[\hat{X}\right] &= \sum_{i=1}^{M} \pi(\omega_i)\hat{X}(\omega_i) \\
&= \sum_{i=1}^{M} \tilde{\pi}(\omega_i)\hat{X}(\omega_i) + \frac{\lambda}{1+r}\sum_{i=1}^{M}\varphi(\omega_i)X(\omega_i) \\
&= \mathbb{E}_{\tilde{\pi}}\left[\hat{X}\right] + \frac{\lambda}{1+r}\sum_{i=1}^{M}\varphi(\omega_i)X(\omega_i)
\end{aligned}$$

de esto último y recordando que $\varphi X > 0$ se tiene que $\mathbb{E}_{\tilde{\pi}}\left[\hat{X}\right] \neq \mathbb{E}_{\pi}\left[\hat{X}\right]$ $\square$

Es claro que si $\mathbb{M}$ consta de un solo elemento la proposición anterior se cumple de forma automática, la pregunta sería entonces, si el mercado es completo¿puede existir más de una medida neutral al riesgo? bueno pues aqui viene lo que deseabamos oír; efectivamente, si el mercado es completo la medida neutral al riesgo es única, la siguiente proposición formaliza este resultado

PROPOSICIÓN 2.9
El mercado es completo sí y sólo si existe una única medida de probabilidad neutral al riesgo.

PRUEBA. Si existe una única medida de probabilidad neutral al riesgo la proposición 2.8. nos asegura automáticamente la completez del mercado. Lo que tenemos que demostrar entonces es que si el mercado es completo entonces la medida neutral al riesgo es única.

Supongamos que el mercado es completo y que existen dos medidas neutrales al riesgo $\boldsymbol{\pi}$ y $\tilde{\boldsymbol{\pi}}$ tales que $\pi(\omega_i) \neq \tilde{\pi}(\omega_i)$, para alguna $i \in \{1, \ldots, M\}$. Si definimos el activo contingente X como

$$X(\omega) = \begin{cases} S_0(T), & \text{si } \omega = \omega_i \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

se tiene entonces que

$$\mathbb{E}_{\pi}\left[\hat{X}\right] = \pi(\omega_i) \neq \tilde{\pi}(\omega_i) = \mathbb{E}_{\tilde{\pi}}\left[\hat{X}\right]$$

Lo anterior contradice la proposición 2.8. puesto que habíamos supuesto que el mercado era completo y por lo tanto todo activo contingente es replicable.

□

Con esta última proposición damos por terminada la sección de modelos de un solo periodo, como se dijo desde un principio son modelos poco realistas y muy simplificados, sin embargo me atrevería a decir que la mayor parte de los problemas económicos ligados a la valuación de derivados quedan resueltos con estos modelos tan sencillos. Como veremos en las siguientes secciones el trabajo que hemos realizado hasta el momento nos facilitará de manera notable la comprensión de modelos más complicados.

2.5. Modelo Binomial (Segunda parte)

Tal como se dijo en la sección anterior, con los modelos de un solo periodo se resuelve la mayor parte de los problemas económicos ligados a la valuación de activos contingentes, sin embargo es necesario complicar un poco estos modelos con el fin de conseguir modelos un tanto más realistas.

En esta sección se presenta el modelo binomial multiperiodo, se pretende que éste sea la puerta de entrada a los modelos generales de más de un periodo y que nos facilite el entendimiento de estos modelos.

Los supuestos básicos del modelo binomial de más de un periodo son los mismos que los del modelo de un solo periodo, en el mercado existe un activo libre de riesgo que paga una tasa libre de riesgo r, tenemos un activo riesgoso y un activo contingente cuyo precio esta en función del activo riesgoso. La diferencia esencial es el número de periodos, es decir en este nuevo modelo podemos negociar en un número finito de fechas. En este modelo podremos hablar del precio de los activos en distintos tiempos t a lo largo de un horizonte de inversión, es decir en este caso tendremos precios y podremos negociar en cualquier tiempo $t \in \{0, 1, \ldots, T\}$. Tal como se hizo en el caso de un solo periodo asociamos el tiempo T con la fecha de expiración del activo contingente.

La existencia de más de un periodo de inversión modifica sustancialmente la dinámica de los precios de los activos, en los modelos de un solo periodo el precio de los activos era aleatorio sólo en el tiempo T, ahora tenemos toda una serie de fechas en las cuales los precios son desconocidos, sin embargo de acuerdo con los supuestos del modelo binomial, los precios no pueden variar mucho de un periodo a otro, al igual que en el modelo de un solo periodo los precios del activo riesgoso solo puden cambiar a uno de dos posibles valores al término de un periodo, es decir, podemos definir la dinámica del precio del activo riesgoso del siguiente modo

$$S_{t+1} = \begin{cases} uS_t, & \text{si el mercado sube} \\ dS_t, & \text{si el mercado baja} \end{cases}$$

Es claro que con esta definición el precio del activo al tiempo $t+1$ depende directamente del precio al tiempo t, en la siguiente figura se resume el precio de los activos en un modelo de dos periodos.

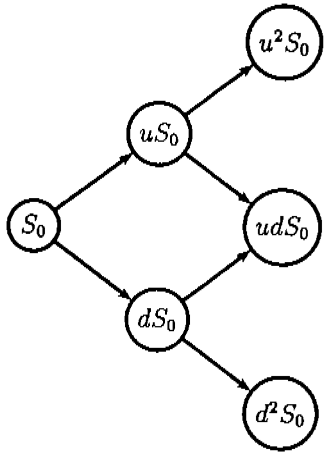

Figura 2.3: Arbol binomial recombinante.

De hecho lo precios se pueden definir en términos del proceso estocástico $\{\Gamma_i\}$ definido como

$$\Gamma_{t+1} = \frac{S_{t+1}}{S_t} \in \{u, d\}$$

para $t = 0, \ldots, T-1$. Así podemos escribir el precio del activo riesgoso al tiempo t como

$$S_t = S_0 \prod_{i=0}^{t} \Gamma_i$$

donde por conveniencia hacemos $\Gamma_0 = 1$. Para evitar estrategias de arbitraje de nuevo es necesario que $0 < d < 1+r < u$. Podemos manipular la expresión anterior y reescribir S_t como

$$S_t = S_0 \exp\left\{\sum_{i=0}^{t} \gamma_i\right\}$$

donde $\gamma_i = \ln(\Gamma_i)$. Más tarde retomaremos la expresión anterior y obtendremos conclusiones muy interesantes.

Ya tenemos todos los elementos necesarios para desarrollar nuestro modelo y la idea que seguiremos para ello es la misma que usamos en el modelo de un solo periodo, trataremos de replicar el derivado, la diferencia es que ahora el portafolio que replique el derivado puede cambiar en el tiempo puesto que podemos negociar en varias fechas antes del día de expiración.

Empecemos por reducir el problema a algo conocido; hemos supuesto que la fecha de expiración se da al tiempo T, si conocemos el precio que toma el bien subyacente al tiempo $T-1$, entonces el problema de encontrar el precio del derivado al tiempo $T-1$ se reduce al problema con un solo periodo. Efectivamente, en este caso podemos suponer que el precio del derivado es $C_T(S_T)$ al tiempo T y conocemos los precios al tiempo $T-1$ entonces podemos replicar el derivado encontrando Δ_{T-1} y Θ_{T-1} tales que

$$C_T(S_T) = \Delta_{T-1}S_T + \Theta_{T-1}(1+r)$$

Δ_{T-1} es el número de acciones a comprar del subyacente en el tiempo $T-1$ y Θ_{T-1} es la cantidad en efectivo a invertir en el activo libre de riesgo al tiempo $T-1$. Es claro que nuestro portafolio vale

$$V_{T-1} = \Delta_{T-1}S_{T-1} + \Theta_{T-1}$$

al tiempo $T-1$. Si efectivamente replica nuestro derivado entonces $V_{T-1} = C_{T-1}$. Aprovechando la dinámica de precios del activo riesgoso sabemos que el precio del derivado al tiempo T será $C_T(uS_{T-1})$ si es que el precio del subyacente sube y $C_T(dS_{T-1})$ si el precio del subyacente baja. Para obtener la Δ_{T-1} y la Θ_{T-1} apropiadas tenemos que resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}\Delta_{T-1}uS_{T-1}+\Theta_{T-1}(1+r) &= C_T(uS_{T-1})\\ \Delta_{T-1}dS_{T-1}+\Theta_{T-1}(1+r) &= C_T(dS_{T-1})\end{aligned}$$

la solución de este sistema es la siguiente

$$\begin{aligned}\Delta_{T-1} &= \frac{C_T(uS_{T-1}) - C_T(dS_{T-1})}{S_{T-1}(u-d)}\\ \Theta_{T-1} &= \frac{1}{1+r}\frac{uC_T(dS_{T-1}) - dC_T(uS_{T-1})}{u-d}\end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores en nuestro portafolio al tiempo $T-1$ encontramos el precio del derivado en $T-1$

$$\begin{aligned} C_{T-1} &= \frac{1}{1+r}\left\{\frac{(1+r)-d}{u-d}C_T\left(uS_{T-1}\right)+\frac{u-(1+r)}{u-d}C_T\left(dS_{T-1}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{1+r}\left\{p_\star C_T\left(uS_{T-1}\right)+\left(1-p_\star\right)C_T\left(dS_{T-1}\right)\right\} \end{aligned}$$

donde $p_\star = \frac{(1+r)-d}{u-d}$. Esto concuerda perfectamente con lo desarrollado en el modelo de un solo periodo, a decir verdad no hemos hecho nada nuevo, lo importante en este momento es notar que hemos hecho el supuesto de que conocíamos los precios en $T-1$, esto nos permitió llevar el problema al caso de un solo periodo. ¿Que pasa si estamos en $T-2$ y lo que conocemos son los precios de $T-2$? Bueno el caso es un poco más complicado, pero sólo un poco. Supongamos que el precio del subyacente al tiempo $T-2$ es S_{T-2}, ahora buscamos Δ_{T-2} y Θ_{T-2} tales que

$$C_{T-1}(S_{T-1}) = \Delta_{T-2}S_{T-1} + \Theta_{T-2}(1+r)$$

si de nuevo aprovechamos la dinámica de los precios del activo subyacente la igualdad anterior la descomponemos en dos ecuaciones

$$\begin{aligned} C_{T-1}(uS_{T-2}) &= \Delta_{T-2}uS_{T-2} + \Theta_{T-2}(1+r) \\ C_{T-1}(dS_{T-2}) &= \Delta_{T-2}dS_{T-2} + \Theta_{T-2}(1+r) \end{aligned}$$

la solución del sistema anterior ya la tenemos

$$\begin{aligned} \Delta_{T-2} &= \frac{C_{T-1}(uS_{T-2}) - C_{T-1}(dS_{T-2})}{S_{T-2}\,(u-d)} \\ \Theta_{T-2} &= \frac{1}{1+r}\frac{uC_{T-1}(dS_{T-2}) - dC_{T-1}(uS_{T-2})}{u-d} \end{aligned}$$

y de hecho podemos escribir el precio del derivado al tiempo $T-2$ como

$$C_{T-2} = \frac{1}{1+r}\left\{p_\star C_{T-1}\left(uS_{T-2}\right) + \left(1-p_\star\right)C_{T-1}\left(dS_{T-2}\right)\right\}$$

Notemos que la probabilidad $p_\star$ es exactamente la misma que encontramos en el periodo de $T-1$ a T y por supuesto es exactamente la misma que se encontró en el modelo de un solo periodo. Cuando encontramos el precio del derivado al tiempo $T-1$ se conocía perfectamente el valor de $C_T(uS_{T-1})$ y de $C_T(dS_{T-1})$ sin embargo en el tiempo $T-2$ el precio del derivado en $T-1$ es desconocido, sólo sabemos que puede tomar uno de dos posibles valores,

$C_{T-1}(uS_{T-2})$ o bien $C_{T-1}(dS_{T-2})$, este par de precios pueden ser determinados fácilmente, los encontramos anteriormente suponiendo que conocíamos el precio del subyacente al tiempo $T-1$. Si $S_{T-1} = uS_{T-2}$ entonces

$$C_{T-1}(uS_{T-2}) = \frac{1}{1+r}\left\{p_* C_T\left(u^2 S_{T-2}\right) + (1-p_*)\, C_T\left(udS_{T-2}\right)\right\}$$

y si $S_{T-1} = dS_{T-2}$

$$C_{T-1}(dS_{T-2}) = \frac{1}{1+r}\left\{p_* C_T\left(udS_{T-2}\right) + (1-p_*)\, C_T\left(d^2 S_{T-2}\right)\right\}$$

a cada uno de estos precios esta asociada una estrategia replicante, si $S_{T-1} = uS_{T-2}$

$$\begin{aligned}
\Delta_{T-1} &= \frac{C_T(u^2 S_{T-2}) - C_T(udS_{T-2})}{uS_{T-2}\,(u-d)} \\
\Theta_{T-1} &= \frac{1}{1+r}\frac{uC_T(udS_{T-2}) - dC_{T-1}(u^2 S_{T-2})}{u-d}
\end{aligned}$$

y si $S_{T-1} = dS_{T-2}$

$$\begin{aligned}
\Delta_{T-1} &= \frac{C_T(udS_{T-2}) - C_T(d^2 S_{T-2})}{dS_{T-2}\,(u-d)} \\
\Theta_{T-1} &= \frac{1}{1+r}\frac{uC_T(d^2 S_{T-2}) - dC_{T-1}(udS_{T-2})}{u-d}
\end{aligned}$$

Como vemos esta estrategia depende del valor que tome S_{T-1}, en este sentido, como S_{T-1} es desconocido al tiempo $T-2$, la estrategia replicante para el periodo $[T-1, T]$ es también aleatoria al tiempo $T-2$, de hecho la estrategia replicante definida sobre todo el periodo de inversión determina un proceso estocástico, sin embargo iremos conociendo todo lo que necesitamos de ella justo a tiempo para tomar decisiones, más tarde formalizaremos este concepto.

Sustituyendo el valor de $C_{T-1}(uS_{T-2})$ y de $C_{T-1}(uS_{T-2})$ en

$$C_{T-2}(S_{T-2})$$

obtenemos el precio del derivado en $T-2$

$$\begin{aligned} C_{T-2}(S_{T-2}) =& \frac{1}{1+r} \quad \{p_\star C_{T-1}(uS_{T-2}) + (1-p_\star) C_{T-1}(dS_{T-2})\} \\ =& \frac{1}{(1+r)^2} \{p_\star^2 C_T(u^2 S_{T-2}) + 2p_\star(1-p_\star) C_T(udS_{T-2}) \\ & + (1-p_\star)^2 C_T(d^2 S_{T-2})\} \\ =& \frac{1}{(1+r)^2} \quad \sum_{i=0}^{2} \binom{2}{i} p_\star^i (1-p_\star)^{2-i} C_T(u^i d^{2-i} S_{T-2}) \end{aligned}$$

Observemos que tanto el precio en $T-1$ como el precio en $T-2$ los podemos escribir como el valor descontado del valor esperado del precio del derivado en T. Sin embargo, no perdamos de vista que en ambos casos hemos supuesto que conocemos el precio del subyacente en un periodo específico, si conocemos el precio del subyacente en $T-1$ sabemos con certeza que el precio en T solo puede tomar uno de dos posibles valores; uS_{T-1} o dS_{T-1}, sin embargo si lo que conocemos es el precio en $T-2$, las posibilidades para el precio en T son tres u^2S_{T-2}, udS_{T-2} o d^2S_{T-2} e incluso el precio en $T-1$ es desconocido. Lo que quiero decir es que a medida que nos acercamos al tiempo de expiración T se va revelando cada vez más información acerca del precio S_T, en T conocemos con certeza el estado de la naturaleza que ocurrió. En cualquier cualquier otro momento anterior a T tenemos sólo parte de la historia. Para formalizar esto necesitamos definir los precios de los activos en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ que sea capaz de registrar la información que se va revelando con el tiempo, dicho de otro modo, necesitamos equipar a nuestro espacio de probabilidad con una filtración $\{\mathcal{F}_n : n \in [0, \ldots, T]\}$, donde $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T = 2^\Omega$ de modo que cada S_t sea $\mathcal{F}_t$–medible, quizás incluso podemos suponer que la filtración es la generada por el proceso de precios. De este modo podemos escribir el precio del derivado en $T-1$ y en $T-2$ como

$$C_{T-1} = \frac{1}{1+r}\mathbb{E}_{p_\star}[C_T | \mathcal{F}_{T-1}] \qquad \text{y} \qquad C_{T-2} = \frac{1}{(1+r)^2}\mathbb{E}_{p_\star}[C_T | \mathcal{F}_{T-2}]$$

respectivamente. Observemos además, que estas esperanzas se obtienen respecto a la medida de probabilidad $p_\star$, que tal como lo estamos intuyendo se trata de la medida neutral al riesgo. La necesidad de incluir una filtración en el modelo es nueva, en el caso del modelo de un solo periodo no era necesaria puesto que el precio era aleatorio sólo en el tiempo T.

Regresemos ahora a la estrategia replicante, cuando intentamos replicar el derivado en $T-1$ se buscó en $T-2$ un portafolio determinado por Δ_{T-2}

y Θ_{T-2} de modo que

$$C_{T-2} = \Delta_{T-2}S_{T-2} + \Theta_{T-2} \quad \text{y} \quad C_{T-1} = \Delta_{T-2}S_{T-1} + \Theta_{T-2}(1+r)$$

así mismo, para replicar el valor del derivado en T se buscó un portafolio apropiado, determinado por Δ_{T-1} y Θ_{T-1} de tal forma que

$$C_{T-1} = \Delta_{T-1}S_{T-1} + \Theta_{T-1} \quad \text{y} \quad C_T = \Delta_{T-1}S_T + \Theta_{T-1}(1+r)$$

Con esto tenemos dos expresiones para C_{T-1}, de modo que

$$\Delta_{T-2}S_{T-1} + \Theta_{T-2}(1+r) = \Delta_{T-1}S_{T-1} + \Theta_{T-1}$$

¿Que es lo que significa lo anterior? Simplemente que al tiempo $T-1$ "rebalanceamos"el portafolio, es decir el portafolio que tenemos en el periodo $[T-1,T]$ lo financiamos exclusivamente con lo obtenido por el portafolio en el periodo $[T-2,T-1]$, no se ha incluido capital adicional, si asi lo hicieramos realmente no estaríamos replicando el derivado. A este tipo de portafolios se les conoce como portafolios autofinanciables, más tarde se formalizará este concepto. Terminamos esta sección con la siguiente proposición

Proposición 2.10
El precio de un activo derivado (europeo) al tiempo $t = T-m$ en el modelo binomial esta dado por la fórmula.

$$C_{T-m} = \frac{1}{(1+r)^m}\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}p_\star^i(1-p_\star)^{m-i}C_T(u^i d^{m-i}S_{T-m}) \qquad \text{(B1)}$$

Prueba. La prueba se hará por inducción. Primero veamos que la proposición es válida para $m=1$ y $m=2$, esto ya fué probado. Ahora, supongamos que es válido para m y demostremos para $m+1$. Usando nuestros argumentos de portafolio replica, es fácil mostrar que

$$C_{T-m-1} = \frac{1}{1+r}\{p_\star C_{T-m}(uS_{T-m-1}) + (1-p_\star)C_{T-m}(dS_{T-m-1})\}$$

por hipótesis de inducción se sigue que

$$
\begin{aligned}
C_{T-m-1} = \frac{1}{(1+r)^{m+1}} & \left\{ \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} p_*^{i+1} (1-p_*)^{m-i} C_T(u^{i+1} d^{m-i} S_{T-m-1}) \right. \\
& \left. + \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} p_*^{i} (1-p_*)^{m+1-i} C_T(u^{i} d^{m+1-i} S_{T-m-1}) \right\} \\
= \frac{1}{(1+r)^{m+1}} & \left\{ \sum_{i=1}^{m+1} \binom{m}{i-1} p_*^{i} (1-p_*)^{m+1-i} C_T(u^{i} d^{m+1-i} S_{T-m-1}) \right. \\
& \left. + \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} p_*^{i} (1-p_*)^{m+1-i} C_T(u^{i} d^{m+1-i} S_{T-m-1}) \right\} \\
= \frac{1}{(1+r)^{m+1}} & \left\{ p_*^{m+1} C_T(u^{m+1} S_{T-m-1}) \right. \\
& + \sum_{i=1}^{m} \binom{m}{i-1} p_*^{i} (1-p_*)^{m+1-i} C_T(u^{i} d^{m+1-i} S_{T-m-1}) \\
& + \sum_{i=1}^{m} \binom{m}{i} p_*^{i} (1-p_*)^{m+1-i} C_T(u^{i} d^{m+1-i} S_{T-m-1}) \\
& \left. + (1-p_*)^{m+1} C_T(d^{m+1} S_{T-m-1}) \right\} \\
= \frac{1}{(1+r)^{m+1}} & \sum_{i=0}^{m+1} \binom{m+1}{i} p_*^{i} (1-p_*)^{m+1-i} C_T(u^{i} d^{m+1-i} S_{T-m-1})
\end{aligned}
$$

la última igualdad es válida puesto que $\binom{m}{i} + \binom{m}{i-1} = \binom{m+1}{i}$ □

2.6. Modelo Multiperiodo

En el modelo de un periodo fuimos capaces de desarrollar la mayor parte de los conceptos económicos necesarios para entender la valuación de los activos derivados. Sin embargo a pesar de su utilidad, nuestro modelo de un solo periodo resulta poco realista, en la vida real los precios de los activos cambian en cada instante, por lo tanto el precio del subyacente de un activo contingente tiene la posibilidad de cambiar muchas veces en el transcurso de la vida del derivado. Es necesario reflejar esta caracterísitica de alguna forma. El camino lógico es suponer que existe más de un periodo.

Tenemos entonces, un horizonte de inversión que finaliza en el tiempo T, pero a diferencia del modelo de un sólo periodo, el precio de los activos en el mercado puede cambiar a lo largo de este horizonte en fechas bien determinadas, así pues dividimos nuestro horizonte de inversión en n periodos, de tal forma que nuestro horizonte de inversión queda dividido en las fechas: $0 = t_0, t_1, \ldots, t_n = T$.

Por el momento conservaremos el supuesto de que nuestro espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ esta constituido por un espacio muestral Ω finito, $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$ y $P(A) > 0 \; \forall A \in \mathcal{F}$.

Uno de los elementos más importantes de los modelos multiperiodo ya lo describimos; los precios pueden cambiar en cada periodo, sin embargo no sólo esto puede ocurrir, por nuestro lado tenemos la posibilidad de renegociar nuestras posiciones en el mercado en cada pariodo. Esto es muy importante pues tenemos la posibilidad de reaccionar a los cambios de los precios.

Al tiempo T se puede considerar que tenemos toda la información necesaria para determinar el precio de cualquier instrumento derivado, en cualquier otro momento t_i anterior a T la información con la que contamos es insuficiente para determinar con certeza el valor del derivado al tiempo T, sin embargo a medida que nos aproximamos al tiempo de expiración la información es cada vez más completa, de tal forma que el precio del derivado se va modificando de acuerdo con la información disponible. Necesitamos por tanto una forma de registrar la información que se va revelando en cada periodo, esto lo logramos equipando nuestro espacio de probabilidad con una filtración $(\mathcal{F}_{t_i})_{0 \le i \le n}$

De nuevo, suponemos que tenemos $N + 1$ activos en el mercado que defienen el proceso de precios $\mathbf{S} = \{\mathbf{S}_{t_i} : i = 0, 1, \ldots, n\}$ con $\mathbf{S}_{t_i} = (S_0(t_i), S_1(t_i), \ldots, S_N(t_i))$, donde $S_j(t_i)$ es el precio del $j-$ésimo activo al tiempo t_i y supondremos que $S_j(t_i)$ es $\mathcal{F}_{t_i}-$medible. Es decir al tiempo t_i nos basta con la información contenida en la σ-álgebra $\mathcal{F}_{t_i}$ para conocer los precios hasta t_i.

Ahora bien, la estrategia que seguiremos para determinar el precio de los activos contingentes es la misma que usamos en el modelo de un solo periodo, intentaremos construir un portafolio replicante. Para copnstruir nuestro portafolio necesitamos una estrategia de inversión, en el modelo multiperiodo una estrategia de inversión es un proceso estocástico $\boldsymbol{\phi} = \{\boldsymbol{\phi}_{t_i} : i = 0, 1, \ldots, n\}$ con $\boldsymbol{\phi}_{t_i} = (\phi_0(t_i), \phi_1(t_i), \ldots, \phi_N(t_i))$ donde $\phi_j(t_i)$ es la cantidad invertida al tiempo t_i en el activo $j-$ésimo. Una propiedad muy importante de una estrategia de inversión es que es un proceso *predecible*, es decir para toda i, $\boldsymbol{\phi}_{t_i}$ es $\mathcal{F}_{t_{i-1}}-$medible, dicho de otro modo; la estrategia $\boldsymbol{\phi}$ efectivamente es estocástica, sin embargo conoceremos todo de ella justo en el momento adecuado, de hecho nosotros mismos la determinaremos en el momento preciso.

El valor de todo portafolio esta definido por el proceso estocástico definido por el producto interno

$$V_{t_i}(\phi) = \phi_{t_i} \cdot \mathbf{S}_{t_i}$$

Notemos que dado que ϕ es predecible y $\mathbf{S}$ es un proceso adaptado a la filtración, entonces el mismo proceso V_{t_i} es un proceso adaptado a la filtración.

Al igual que en el caso del modelo de un solo periodo podemos suponer que existe un mercado de dinero y que $S_0(t_i) > 0$ es el precio del activo libre de riesgo al tiempo t_i. Si este activo paga una tasa libre de riesgo r entonces $S_0(t_i) = S_0(t_0)(1+r)^{t_i}$, en este caso la tasa r es constante y determinística, en modelos más complicados se puede suponer que r es una función que depende del tiempo o bien que es estocástica. Definimos además el factor de descuento como $\beta_{t_i} = 1/S_0(t_i)$, con este factor obtenemos el proceso de precios descontados $\hat{\mathbf{S}}_{t_i} = \left(\hat{S}_0(t_i), \hat{S}_1(t_i), \ldots, \hat{S}_N(t_i)\right) = (1, \beta_{t_i} S_1(t_i), \ldots, \beta_{t_i} S_N(t_i))$. Por supuesto tenemos también el valor descontado de nuestro portafolio

$$\hat{V}_{t_i}(\phi) = \phi_{t_i} \cdot \hat{\mathbf{S}}_{t_i}$$

Para encontrar el precio de los activos contingentes intentaremos construir portafolios replica. Al igual que en el modelo de un solo periodo, si no existen estrategias de arbitraje podemos asegurar que el valor de un portafolio replicante al tiempo t debe ser igual al precio del activo contingente al tiempo t. Daremos pues las condiciones que nos aseguren la ausencia de estrategias de arbitraje, del mismo modo para poder valuar derivados tendremos que asegurar la completez del mercado.

Para valuar un activo contingente debemos conseguir un portafolio que lo replique, es decir que pague en todo momento exactamente lo mismo que paga el derivado(o bien que valga lo mismo), si ahora tenemos varios periodos de inversión podemos asignar un precio para el derivado en cada uno de estos periodos, suponiendo que en cada uno de ellos poseemos la información pertinente. Si en verdad deseamos replicar el derivado entonces tendremos que rebalancear nuestro portafolio en cada periodo, de modo que seamos capaces de reaccionar a la llegada de nueva información. En un principio podemos suponer que empezamos con una riqueza inicial, dicho de otro modo; al tiempo t_0 tenemos un portafolio $V_{t_0}(\phi) = \phi_{t_0} \cdot \mathbf{S}_{t_0}$, en este mismo momento reajustamos nuestro portafolio y hacemos $V_{t_0}(\phi) = \phi_{t_1} \cdot \mathbf{S}_{t_0}$, al término del primer periodo nuestro portafolio valdrá $V_{t_1}(\phi) = \phi_{t_1} \cdot \mathbf{S}_{t_1}$ y nuevamente rebalanceamos el portafolio de modo que $V_{t_1} = \phi_{t_2} \cdot \mathbf{S}_{t-1}$, en general al tiempo t_i tendremos el portafolio $V_{t_i} = \phi_{t_i} \cdot \mathbf{S}_{t_i}$ y reajustamos a $V_{t_i} = \phi_{t_{i+1}} \cdot \mathbf{S}_{t_i}$, como vemos la estrategia $\phi_{t_{i+1}}$ se define en el tiempo t_i, de acuerdo con la información que tenemos hasta el momento. Esta discusión nos conduce a la siguiente definición

DEFINICIÓN 2.7 (ESTRATEGIA AUTOFINANCIABLE)
Se dice que una estrategia ϕ es autofiananciable si para toda $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$

$$\phi_{t_i} \cdot \mathbf{S}_{t_i} = \phi_{t_{i+1}} \cdot \mathbf{S}_{t_i}$$

Este último concepto es completamente nuevo, en un modelo de un solo periodo no tiene mucho significado. Considerando esta definición, si seguimos una estrategia autofinanciable entonces

$$\begin{aligned} V_{t_i}(\phi) - V_{t_{i-1}}(\phi) &= \phi_{t_i} \cdot \mathbf{S}_{t_i} - \phi_{t_{i-1}} \cdot \mathbf{S}_{t_{i-1}} \\ &= \phi_{t_i} \cdot \mathbf{S}_{t_i} - \phi_{t_i} \cdot \mathbf{S}_{t_{i-1}} \\ &= \phi_{t_i} \cdot \left(\mathbf{S}_{t_i} - \mathbf{S}_{t_{i-1}}\right) \\ &= \phi_{t_i} \cdot \Delta\mathbf{S}_{t_i} \end{aligned}$$

donde $\Delta\mathbf{S}_{t_i} = \mathbf{S}_{t_i} - \mathbf{S}_{t_{i-1}}$. A partir del resultado anterior podemos afirmar que si seguimos una estrategia autofinanciable, el cambio en el valor de nuestro portafolio depende únicamente del cambio en los precios y no de la inclusión o consumo de capital externo, dicho de otro modo, en cada periodo lo único que hacemos es redistribuir el portafolio, en ningún caso se consume o se incluye capital adicional, esto es claro si retomamos la definición 2.6. y más aún considerando lo siguiente, si ϕ es autofinanciable, entonces

$$\begin{aligned} V_{t_i}(\phi) &= V_{t_i}(\phi) - V_{t_{i-1}}(\phi) + V_{t_{i-1}}(\phi) - V_{t_{i-2}}(\phi) + \ldots \\ &\quad + V_{t_1}(\phi) - V_{t_0}(\phi) + V_{t_0}(\phi) \\ &= V_{t_0}(\phi) + \sum_{k=1}^{i} \phi_{t_k} \cdot \Delta\mathbf{S}_{t_i} \end{aligned} \tag{2.1}$$

esta expresión se considera como una versión discreta de la integral estocástica. Un resultado similar se obtiene para el portafolio descontado si notamos que $\phi_{t_i} \cdot \mathbf{S}_{t_i} = \phi_{t_i} \cdot \mathbf{S}_{t_i}$ sí y sólo si $\phi_{t_i} \cdot \hat{\mathbf{S}}_{t_i} = \phi_{t_i} \cdot \hat{\mathbf{S}}_{t_i}$, si esto es así entonces

$$\hat{V}_{t_i}(\phi) = V_{t_0} + \sum_{k=1}^{i} \phi_{t_k} \Delta\hat{\mathbf{S}}_{t_i} \qquad (2,2)$$

donde $\Delta\hat{\mathbf{S}}_{t_i} = \beta_{t_i}\mathbf{S}_{t_i} - \beta_{t_{i-1}}\mathbf{S}_{t_{i-1}}$

Para nuestros fines es muy importante que el portafolio replicante sea autofinanciable, si en algún periodo usáramos capital externo para "replicar" el derivado, no podríamos asegurar que el precio de nuestro portafolio sea igual al del activo contingente.

Nuestro objetivo sigue siendo el mismo, intentamos valuar productos derivados construyendo portafolios replicantes en un mercado completo y libre de estrategias de arbitraje. Tenemos buenas noticias, el trabajo hecho en el modelo de un solo periodo resuelve nuestros problemas en su mayor parte, los conceptos que nos hacen falta en gran medida son sólo generalizaciones de lo que ya vimos. Como dijimos; necesitamos ente todo valuar instrumentos derivado en mercados libres de arbitraje esto nos obliga a dar una nueva definición de estrategia de arbitraje que se ajuste a las necesidades del modelo multiperiodo.

Definición 2.8 (Estrategia de arbitraje)
Se dice que una estrategia ϕ es una estrategia de arbitraje si

- $V_0 = 0$
- $V_T \geq 0$
- $\mathbb{E}[V_T] > 0$
- ϕ *es autofinanciable*

La definición es prácticamente la misma que se dió en el modelo de un solo periodo, la única diferencia es que en este caso necesitamos que la estrategia sea autofinanciable este concepto, como ya se mencionó, ni siquiera tiene sentido en el caso de un solo periodo, en el modelo multiperiodo hace perfecto sentido.

¿Como vamos a hacer para garantizar un mercado libre de arbitraje? en el modelo de un solo periodo se introdujo el concepto de probabilidad neutral al riesgo y se mostró que la existencia de una medida de este estilo nos aseguraba la ausencia de oportunidades de arbitraje, dentro de poco se mostrará un resultado similar para el caso de varios periodos. Hasta el momento lo que sabemos es que una medida neutral al riesgo necesita cumplir con dos propiedades, por un lado debe ser una medida equivalente a la medida de nuestro espacio de probabilidad, lo cual tanto en el caso del modelo de un solo periodo como en el de varios periodos equivale a decir que si $\boldsymbol{\pi}$ es una medida neutral el riesgo entonces basta que $\boldsymbol{\pi}(A) > 0$ para todo $A \in \mathcal{F}$

para que sea equivalente. Por otro lado era necesario que $\mathbf{E}_\pi\left[\Delta\hat{\mathbf{S}}\right] = 0$. La primera propiedad es exactamente la misma en ambos modelos, la segunda es prácticamente la misma sólo que ahora debemos ajustarla de modo que tome en cuenta la información con que se cuenta en cada periodo. La manera correcta de hacerlo es a través de esperanzas condicionales, esto se expone en la siguiente definición

DEFINICIÓN 2.9 (MEDIDA NEUTRAL AL RIESGO)
Una medida de probabilidad π es una medida neutral al riesgo si

- $\pi(A) > 0$ *para todo* $A \in \mathcal{F}$
- $\mathbb{E}_\pi\left[\Delta\hat{\mathbf{S}}_{t_i}\middle|\mathcal{F}_{t_{i-1}}\right] = 0 \quad i = 0, \ldots, n-1$

Como dijimos, la primera propiedad exije que la probabilidad neutral al riesgo sea una medida equivalente a la medida de nuestro espacio de probabilidad, las segunda nos conduce inmediatamente al siguiente resultado

$$\mathbb{E}_\pi\left[\hat{\mathbf{S}}_{t_i}\middle|\mathcal{F}_{t_{i-1}}\right] = \hat{\mathbf{S}}_{t_{i-1}} \quad i = 0, \ldots, n-1$$

es decir, bajo una probabilidad neutral el riesgo, los precios descontados son martingala.

Los elementos necesarios ya se han mencionado, al igual que en el modelo de un solo periodo la condicion que nos asegura tener un mercado libre de arbitraje es la existencia de una medida neutral al riesgo, más tarde lo mostraremos en términos del modelo multiperiodo, por ahora se mostrarán resultados generales que nos serán de utilidad.

PROPOSICIÓN 2.11
Si $(\phi_t)_{1\leq t\leq n}$ es predecible y $(M_t)_{1\leq t\leq n}$ es una martingala con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq n}$, entonces

$$\begin{aligned} V_0 &= \phi_0 M_0 \\ V_t &= V_0 + \sum_{i=1}^{t} \phi_i \Delta M_i \qquad t \geq 1 \end{aligned}$$

es martingala con respecto a $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq n}$. Donde $\Delta M_i = M_i - M_{i-1}$

PRUEBA

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[V_{t+1}-V_t\middle|\mathcal{F}_t\right] &= \mathbb{E}\left[\phi_{t+1}\Delta M_{t+1}\middle|\mathcal{F}_t\right]\\ &= \phi_{t+1}\mathbb{E}\left[M_{t+1}-M_t\middle|\mathcal{F}_t\right]\\ &= 0\end{aligned}$$

por lo tanto $\mathbb{E}\left[V_{t+1}\middle|\mathcal{F}_t\right]=V_t$ □

Al proceso (V_t) se le suele conocer como la transformada martingala de M_t por ϕ_t. Si π es una medida neutral al riesgo, entonces los precios descontados son martingala con respecto a π y la proposición 2,11 nos asegura que el valor descontado de un portafolio es martingala también. Más aún si definimos el proceso $(G_t)_{0\leq t\leq n}$ como

$$\begin{aligned}G_0 &= 0\\ G_t &= \sum_{i=1}^{t}\phi_i\Delta M_i \qquad t\geq 1\end{aligned}$$

con $(\phi_t)_{0\leq t\leq n}$ predecible y $(M_t)_{0\leq t\leq n}$ martingala, la misma proposición 2.11 nos asegura que $(G_t)_{0\leq t\leq n}$ es martingala. Esta propiedad se resume en la siguiente proposición

PROPOSICIÓN 2.12
Un proceso $(M_t)_{0\leq t\leq n}$ es martingala sí y sólo si para cualquier proceso predecible $(\phi_t)_{0\leq t\leq n}$

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=1}^{n}\phi_t\Delta M_t\right]=0$$

PRUEBA Si $(M_t)_{0\leq t\leq n}$ es martingala y $(\phi_t)_{0\leq t\leq n}$ es predecible, la proposición 2.11 nos asegura que

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=1}^{n}\phi_t\Delta M_t\right]=0$$

Para probar el regreso definimos el proceso $(\phi_t)_{0\leq t\leq n}$ como $\phi_t=0$ para $t\neq j+1$ y $\phi=\mathbf{1}_A$ para cualquier conjunto A que sea $\mathcal{F}_j$−medible. Tenemos entonces que ϕ es predecible y $\mathbb{E}\left[\sum_{t=1}^{n}\phi_t\Delta M_t\right]=0$ considerando la definición de ϕ se tiene que

$$\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_A\left(M_{j+1}-M_j\right)\right]=0$$

lo cual es equivalente a decir que $\mathbb{E}\left[M_{j+1}|\mathcal{F}_j\right] = M_j$, por lo tanto (M_t) es martingala. □

La proposicón 2.11 es más importante de lo que parecece a primera vista, esta proposición nos permite utilizar el principio de valuación que encontramos en el modelo de un solo periodo. Si somos capaces de replicar un derivado, su precio el al día de hoy debe coincidir con el valor del portafolio y la proposición 2.11, nos permite determinar el precio del derivado encontrando las esperanza de su valor descontado.

Aunque ya hemos encontrado consecuencias importantes de la proposición 2.11, aún no dicutimos la más importante, observemos que si tenemos una medida de riesgo neutro, entonces los precios descontados son martingala en este caso la proposición 2.11, nos asegura que el valor descontado de un portafolio también es martingala, esto tiene consecuencias muy importantes, con este resultado podemos demostrar fácilmente que si tenemos una medida neutral al riesgo entonces no existen oportunidades de arbitraje, esto se resume en la siguiente proposición

PROPOSICIÓN 2.13
Si existe una medida de probabilidad neutral al riesgo entonces no existen oportunidades de arbitraje.

PRUEBA. Primero notemos que como $\beta_{t_i} > 0$ para toda i entonces una estrategia ϕ es una estrategia de arbitraje sí y sólo si

- $\hat{V}_0 = 0$
- $\hat{V}_T \geq 0$
- $\mathbb{E}\left[\hat{V}_T\right] > 0$
- ϕ es autofinanciable

considerando esta caracterización de estrategia de arbitraje la demostración es fácil. Si π una medida neutral al riesgo, entonces para cualquier martingala $(M_t)_{0\leq t\leq n}$ con respecto a π se tiene que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\pi\left[M_t\right] &= \mathbb{E}_\pi\left[\mathbb{E}_\pi\left[M_t|\,\mathcal{F}_{t-1}\right]\right]\\ &= \mathbb{E}_\pi\left[M_{t-1}\right]\end{aligned}$$

es decir cualquier martingala con respecto a π tiene esperanza constante. Como π es una medida neutral al riesgo, para cualquier portafolio autofinanciable con $\hat{V}_0 = 0$ se tiene que

$$\mathbb{E}_\pi\left[\hat{V}_T\right] = \mathbb{E}_\pi\left[\hat{V}_0\right] = 0$$

y como $\pi(A) > 0$ para todo $A \in \mathcal{F}$ concluimos que $\hat{V}_T = 0$, esto nos asegura la ausencia de oportunidades de arbitraje. □

La propiedad 2.12 nos da la mitad del camino, los único que nos hace falta mostrar es que si no existen oportunidades de arbitraje entonces existen medidas de probabilidad neutrales al riesgo. La demostración de esta proposición es casi igual a la demostración de la proposición 2.7 que establecía el resultado equivalente para el modelo de un solo periodo.

PROPOSICIÓN 2.14
No existen estrategias de arbitraje sí y sólo si existe una medida de probabilidad neutral al riesgo.

La prueba de esta proposición se dará más tarde por ahora observemos que a partir de la ecuación 2.2 y la definición de estrategia de arbitraje se concluye fácilmente que una estrategia autofinanciable ϕ es una estrategia de arbitraje sí y sólo si

- $\hat{G}_T \geq 0$
- $\mathbb{E}\left[\hat{G}_T\right] > 0$

donde el proceso $(G_t)_{0\leq t\leq T}$ definido como $\hat{G}_t = \hat{V}_t - \hat{V}_0$ es el proceso de ganancias acumuladas.

Cada periodo del modelo multiperiodo puede ser tratado como un modelo de un solo periodo, esta propiedad nos conducirá a una conclusión muy útil. Si en algún periodo obtenemos una estrategia de arbitraje entonces todo el modelo tiene estrategias de arbitraje, dicho de otro modo, si alguno de los modelos de un solo periodo permite estrategias de arbitraje entonces el modelo multiperiodo admite estrategias de arbitraje. Para verificar esto veamos como podemos tratar cada periodo como modelo de un solo periodo. Supongamos que el periodo de interés es el periodo $[t_i, t_{i+1}]$, esto quiere decir que contamos con la información que nos proporciona la filtración hasta t_i, es decir, conocemos con seguridad el evento de la σ−álgebra $\mathcal{F}_{t_i}$ que ocurrió al tiempo t_i, esto cicunscribe las posibilidades para el siguiente periodo al evento de $\mathcal{F}_{t_i}$ que ocurrió.

Si en el periodo $[t_i, t_{i+1}]$ existe un evento $\mathcal{A} \in \mathcal{F}_{t_i}$ en el cual se encuentra una estrategia de arbitraje en el modelo de un solo periodo, podemos construir una estrategia de arbitraje para el modelo multiperiodo considerando esta estrategia de arbitraje para un solo periodo. Con estos supuestos podemos encontrar una estrategia $\tilde{\phi}$ tal que

$$\hat{V}_{t_i}\left(\tilde{\phi}\right) = 0 \qquad \text{y} \qquad \hat{G}_{t_{i+1}}\left(\tilde{\phi}\right) = \sum_{j=1}^{N} \tilde{\phi}_j \Delta \hat{S}_j(t_{i+1}) > 0$$

si sucede el evento $\mathcal{A}$. Definimos entonces una estrategia de arbitraje ϕ para el modelo multiperiodo como

$$\phi_j(t_k, \omega) = \begin{cases} \tilde{\phi}_j, & \text{si } t_k = t_i, \omega \in \mathcal{A}, j = 1, \dots, N \\ -\sum_{j=1}^{N} \tilde{\phi}_j \hat{S}_j(t_i) & \text{si } t_k = t_i, \omega \in \mathcal{A}, j = 0 \\ \sum_{j=1}^{N} \tilde{\phi}_j \Delta \hat{S}_j(t_{i+1}) & \text{si } t_k \geq t_{i+1}, \omega \in \mathcal{A}, j = 0 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

observemos que con la estrategia ϕ, el portafolio vale cero invariablemente antes de t_i, si ocurre el evento $\mathcal{A}$ sigue valiendo cero, pero en t_{i+1} es mayor que cero en $\mathcal{A}$, posteriormente asignamos nuestras ganancias al activo libre de riesgo, esto quiere decir que la estrategia ϕ es autofinanciable pero si además ocurre el evento $\mathcal{A}$, al tiempo T terminaremos con una riqueza positiva, por lo tanto ϕ es una estrategia de arbitraje para el modelo multiperiodo incluso en el caso en que el portafolio tome un valor menor a cero en $\mathcal{A}$ podemos encontrar una estrategia de arbitraje, simplemente tomamos la posición contraria al portafolio propouesto.

La siguiente prueba como veremos es prácticamente igual a la prueba de la proposición 2.7.

PRUEBA. (PROPOSICIÓN 2.14.)

Denotamos con W al conjunto de variables aleatorias $\hat{G}_T(\phi)$, donde

$$\hat{G}_T(\phi) = \hat{G}_{t_n}(\phi) = \sum_{j=1}^{n} (\phi_1(t_j)\Delta \hat{S}_1(t_j) + \cdots + \phi_N(t_j)\Delta \hat{S}_N(t_j))$$

es decir G_T es la ganancia acumulada hasta T, o bien el valor de un portafolio al tiempo T que vale cero al tiempo cero.

Si no existen oportunidades de arbitraje en el mercado entonces podemos asegurar que $G_T(\phi) = 0$ para todo proceso predecible ϕ. De hecho como ya se demostró inclusive para $t_i < T$ se puede asegurar que $G_{t_i}(\phi) = 0$ para toda estrategia ϕ, de otro modo encontraríamos una oportnidad de arbitraje.

Si A es el conjunto de variables aleatorias estrictamente positivas, la ausencia de arbitraje nos permite asegurar que W no se intersecta con A y por consecuencia, W no se intersecta con el conjunto $P = \{X \in A | \sum_\omega X(\omega) = 1\}$. El teorema de separación de convexos nos permite afirmar que existe un vector $(Y(\omega))_{\omega \in \Omega}$ tal que

$$\sum_\omega Y(\omega)X(\omega) > 0 \qquad \forall X \in P$$

y además para todo proceso predecible ϕ

$$\sum_\omega Y(\omega)\hat{G}_T(\phi)(\omega) = 0$$

de la primera condición se concluye que $Y(\omega) > 0$ para todo $\omega \in \Omega$, normalizando este vector podemos construir una medida de probabilidad

$$\pi(\{\omega\}) = \frac{Y(\omega)}{\sum_\omega Y(\omega)}$$

y como $Y(\omega) > 0$ para todo $\omega \in \Omega$, concluimos que π es equivalente a P. A partit de la segunda condición se sigue que

$$\mathbb{E}_\pi \left[\sum_{j=1}^{n} (\phi_1(t_j)\Delta\hat{S}_1(t_j) + \cdots + \phi_N(t_j)\Delta\hat{S}_N(t_j)) \right] = 0$$

a partir de esta última igualdad y la proposición 2.12 podemos asegurar que los precios descontados son martingala, por lo tanto π es una medida de probabilidad neutral al riesgo

□

Terminamos esta sección con algunos comentarios, primero; para poder valuar activos contingentes debemos hacerlo en un mercado completo, de otro modo no podemos encontrar ningun portafolio replicante para el derivado, la condición que nos asegura la completez del mercado es exactamente la misma que se expuso en el modelo de un solo periodo; la medida de probabilidad neutral al riesgo debe ser única.

Se puede dar una prueba alternativa de la proposición 2.14, uqe también resulta interesante. Si retomamos la idea de que el modelo multiperiodo esta constituido por varios modelo de un s0lo periodo, podemos enconteras medidas de probabilidad neutrales al rieso para cada uno de estos modelos de un solo periodo, con lo único que hay que tener cuidado es con la información que tenemos disponible en cada periodo, esta fué la forma de proceder en el modelo binomial multiperiodo, su supuso como conocidos los precios en un momento en el tiempo y se resolvió un modelo de un solo periodo, el resto sólo fue trabajo de "recortar y pegar", es decir multiplicamos las probabilidades obtenidas para cada periodo de forma adecuada y se obtuvo una probabilidada neutral al riesgo para el modelo multiperiodo. Esto nos provee de dos métodos para poder valuar, podemos ir asuponiendo que en cada periodo conocemos los precios y así encontrar el precio de forma recursiva, o bien podemos encontrar la medida nuetral al riesgo para el modelo multiperiodo y obtener el precio del derivado en un solo paso eso ya es a gusto y necesidad del "cliente".

2.7. Modelo Binomial (Tercera parte, Concluimos)

Esta sección es simplemente una conclusión al modelo binomial, se presenta más que nada por la búsqueda de completez. En esta sección se muestra la convergencia del modelo binomial a la fórmula de Black y Scholes, es por tanto la primera vez que la encontramos.

En la proposición 2.10 de la sección 2.5 se encontró una fórmula binomial para el precio de un activo derivado europeo en general, ahora supondremos que el activo contingente es una opción europea vainilla. De la ecuación (B1) teníamos que el precio de un derivado europeo al tiempo $T-m$ era

$$C_{T-m} = \frac{1}{(1+r)^m}\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}p_\star^i\,(1-p_\star)^{m-i}\,C_T(u^i d^{m-i}S_{T-m})$$

si el activo contingente es una opción europea vainilla entonces

$$C_T(u^i d^{m-i}S_{T-m}) = \left(u^i d^{m-i}S_{T-m} - K\right)^+$$

donde K es el precio de ejercicio de la opción. Con esta observación reescribimos la ecuación (B1) como

$$C_{T-m} = \frac{1}{(1+r)^m}\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}p_\star^i\,(1-p_\star)^{m-i}\left(u^i d^{m-i}S_{T-m} - K\right)^+$$

podemos simplificar la suma anterior utilizando la siguiente función

$$a_m(x) = \inf\left\{\,j \in \mathbb{N}\,|\; u^j d^{m-j}x > K\right\}$$

si $a = a_m(S_{T-m})$ entonces el precio de la opción al tiempo $T - m$ es igual a

$$\begin{aligned} C_{T-m} &= \frac{1}{(1+r)^m} \sum_{i=a}^{m} \binom{m}{i} p_*^i (1-p_*)^{m-i} \left(u^i d^{m-i} S_{T-m} - K\right) \\ &= \frac{1}{(1+r)^m} \sum_{i=a}^{m} \binom{m}{i} p_*^i (1-p_*)^{m-i} u^i d^{m-i} S_{T-m} \\ &\quad - \frac{1}{(1+r)^m} \sum_{i=a}^{m} \binom{m}{i} p_*^i (1-p_*)^{m-i} K \end{aligned}$$

No es difícil demostrar que $(\overline{p}, 1-\overline{p}) = \left(\frac{1}{1+r} p_* u, \frac{1}{1+r}(1-p_*) d\right)$ es una medida de probabilidad y además

$$\overline{p}^i (1-\overline{p})^{m-i} = \frac{1}{(1+r)^m} p_*^i (1-p_*)^{m-i} u^i d^{m-i}$$

con esta última igualdad podemos escribir el precio de la opción al tiempo $T - m$ como

$$C_{T-m} = S_{T-m} \sum_{i=a}^{m} \binom{m}{i} \overline{p}^i (1-\overline{p})^{m-i} - \frac{K}{(1+r)^m} \sum_{i=a}^{m} \binom{m}{i} p_*^i (1-p_*)^{m-i} \tag{B2}$$

esta es la versión binomial de la fórmula de Black y Scholes, lo único que nos hace falta es mostrar que (B2) efectivamente converge a la fórmula de Black y Scholes. Esto se muestra a continuación

Antes de mostrar la convergencia necesitamos establecer algunos supuestos que nos facilitarán la demostración. Deseamos encontrar el precio de la opción al tiempo t y en (B2) hemos supuesto que existen m periodos entre el tiempo t y la fecha de expiración T, cada uno de longitud Δ de modo que $m\Delta = T - t$. Si hacemos a Δ cada vez más pequeña, el número de periodos de inversión en el intervalo $[t, T]$ debe aumentar. Si en general dividimos el intervalo $[0, T]$ en n periodos lo que buscaremos es hacer tender n a infinito, de modo que los periodos de inversión sean cada vez más pequeños. Si definimos a Δ y a m en función de n tenemos entonces que

$$\Delta_n = \frac{T}{n} \qquad \text{y} \qquad m_n(t) = \frac{n(T-t)}{T} \quad \Rightarrow \quad m_n(t)\Delta_n = T - t \tag{2.2}$$

Por otro lado sabemos que los precios siguen un proceso multiplicativo, de tal forma que es posible obtener el precio en $t+1$ a partir del precio en t haciendo $S_{t+1} = S_t \Gamma_{t+1}$, donde $\Gamma_{t+1} \in \{u, d\}$, para garantizar la convergencia supondremos que

$$u_n = e^{\sigma\sqrt{\Delta_n}} \qquad \text{y} \qquad d_n = u_n^{-1}$$

Notemos por otro lado que la tasa libre de riesgo es efectiva al plazo Δ_n esto quiere decir que tendremos una tasa distinta en función de la longitud Δ_n del periodo. Si deseamos usar tasas continuas, debemos hacer

$$(1 + r_n) = e^{r\Delta_n} \tag{2.3}$$

usando las ecuaciones (2.2) y (2.3) se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} (1 + r_n)^{-m_n(t)} = \lim_{n\to\infty} e^{-r\Delta_n m_n(t)} = e^{-r(T-t)} \tag{2.4}$$

con esta selección de u_n y d_n y considerando interés continuo, escribimos la probabilidad neutral al riesgo del modelo binomial como

$$p_{\star,n} = \frac{e^{r\Delta_n} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta_n}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta_n}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta_n}}}$$

y haciendo un poco de cuentas se obtiene que

$$\lim_{n\to\infty} p_{\star,n} = \frac{1}{2} \tag{2.5}$$

Tenemos además que

$$\lim_{n\to\infty} \overline{p}_n = \lim_{n\to\infty} e^{-r\Delta_n} p_{\star,n} e^{\sigma\sqrt{\Delta_n}} = \frac{1}{2} \tag{2.6}$$

Finalmente antes de proceder a la demostración de la convergencia definimos $a_n(t)$ como

$$a_n(t) = \inf\left\{ j \in \mathbb{N} \middle| \, S_t u_n^j d_n^{m_n(t)-j} > K \right\}$$

La proposición que deseamos demostrar es la siguiente

PROPOSICIÓN 2.15

La siguiente convergencia es válida para cualquier $t \in [0, T]$

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ S_t \sum_{i=a}^{m_n(t)} \binom{m_n(t)}{i} \overline{p}_n^i \left(1 - \overline{p}_n\right)^{m_n(t)-i} \right.$$
$$\left. - \frac{K}{(1+r)^{m_n(t)}} \sum_{i=a}^{m_n(t)} \binom{m_n(t)}{i} p_{\star,n}^i \left(1 - p_{\star,n}\right)^{m_n(t)-i} \right\} = C_t \tag{2.7}$$

Donde

$$C_t = S_t N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2) \tag{B\&S}$$

y

$$
\begin{aligned}
d_1 &= \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\
d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T-t}
\end{aligned}
$$

PRUEBA. Consideremos la primera parte de la ecuación (2.7) y observemos que

$$
\mathbb{P}\left(a_n(t) \leq \tilde{\xi}_n \leq m_n(t)\right) = \sum_{i=a}^{m_n(t)} \binom{m_n(t)}{i} \overline{p}_n^i \left(1-\overline{p}_n\right)^{m_n(t)-i} \tag{2.8}
$$

donde $\tilde{\xi}_n$ es una variable aleatoria binomial con parámetros $m_n(t)$ y $\overline{p}_n$. Por lo tanto

$$
\mathbb{E}\left[\tilde{\xi}_n\right] = m_n(t)\overline{p}_n \qquad \text{y} \qquad \mathsf{Var}\left(\tilde{\xi}_n\right) = m_n(t)\overline{p}_n(1-\overline{p}_n)
$$

si normalizamos la variable $\tilde{\xi}$ se tiene que

$$
\mathbb{P}\left(a_n(t) \leq \tilde{\xi}_n \leq m_n(t)\right) = \mathbb{P}\left(\frac{a_n(t) - m_n(t)\overline{p}_n}{\sqrt{m_n(t)\overline{p}_n(1-\overline{p}_n)}} \leq \xi_n \leq \frac{m_n(t) - m_n(t)\overline{p}_n}{\sqrt{m_n(t)\overline{p}_n(1-\overline{p}_n)}}\right) \tag{2.9}
$$

donde

$$
\xi_n = \frac{\tilde{\xi}_n - m_n(t)\overline{p}_n}{\sqrt{m_n(t)\overline{p}_n(1-\overline{p}_n)}}
$$

lo que necesitamos demostrar es que la sucesión ξ_n tiende en distribución a una normal estándar. Para lograrlo escribimos

$$
\xi_n = \frac{\sum_{i=1}^{m_n(t)} \left(\eta_i - \overline{p}_n\right)}{\sqrt{m_n(t)\overline{p}_n(1-\overline{p}_n)}} \tag{2.10}
$$

donde $\eta_i, i = 1, \ldots, m_n(t)$ son variables aleatorias independientes bernoulli idénticamente distribuidas con parámetro $\overline{p}_n$. Si esto es así, entonces la función característica $\mu(z)$ de la variable $\tilde{\eta}_i = \eta - \overline{p}_i$ es

$$
\mu(z) = \overline{p}_n e^{(1-\overline{p}_n)z} + \left(1-\overline{p}_n\right)e^{-\overline{p}_n z}
$$

la expansión de Taylor de esta función nos de una expresión mucho más manejable, esto es; $\mu(z) = 1 - \overline{p}_n\left(1-\overline{p}_n\right)z^2/2 + o\left(z^2\right)$. Podemos usar la función $\mu(z)$ para calcular la función característica de ξ_n. Considerando la ecuación (2.10) calculamos la función característica $\zeta_n(z)$ de ξ_n como

$$\zeta_n(z) = \left\{\mu\left(\frac{z}{\sqrt{m_n(t)\overline{p}_n(1-\overline{p}_n)}}\right)\right\}^{m_n(t)} = \left\{1 - \frac{z^2}{2m_n(t)} + o\left(\frac{z^2}{m_n(t)}\right)\right\}^{m_n(t)}$$

de aqui se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} \zeta_n = e^{-z^2/2} \tag{2.11}$$

con esto se demuestra la convergencia en distribución. Por otro lado notemos que

$$a_n(t) = \frac{\ln(K/S_t) + m_n(t)\sigma\sqrt{\Delta_n}}{2\sigma\sqrt{\Delta_n}}$$

de aqui se sigue que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{a_n(t) - m_n(t)\overline{p}_n}{\sqrt{m_n(t)\overline{p}_n(1-\overline{p}_n)}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\ln(K/S_t)+m_n(t)\sigma\sqrt{\Delta_n}}{2\sigma\sqrt{\Delta_n}} - m_n(t)\overline{p}_n}{\sqrt{m_n(t)\overline{p}_n(1-\overline{p}_n)}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(K/S_t) + m_n(t)\sigma\sqrt{\Delta_n}(1-2\overline{p}_n)}{\sqrt{m_n(t)\overline{p}_n(1-\overline{p}_n)}} \end{aligned} \tag{2.12}$$

haciendo un poco de cuentas se puede verificar que

$$\lim_{n\to\infty} m_n(t)\sqrt{\Delta_n}(1-2\overline{p}_n) = -(T-t)\left(\frac{r}{\sigma} + \frac{\sigma}{2}\right) \tag{2.13}$$

considernado este límite evaluamos el límite en (2.12) como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(K/S_t) + m_n(t)\sigma\sqrt{\Delta_n}(1-2\overline{p}_n)}{\sqrt{m_n(t)\overline{p}_n(1-\overline{p}_n)}} = \frac{\ln(K/S_t) - \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \tag{2.14}$$

para terminar de evaluar el límite en (2.9) observemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{m_n(t) - m_n(t)\overline{p}_n}{\sqrt{m_n(t)\overline{p}_n(1-\overline{p}_n)}} = \lim_{n\to\infty} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{m_n(t)\overline{p}_n^{-1}(1-\overline{p}_n)} = \infty \tag{2.15}$$

A partir de las ecuaciones (2.11), (2.14) y (2.15) y usando las propiedades de la normal se concluye que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=a}^{m_n(t)} \binom{m_n(t)}{i} \overline{p}_n^i (1-\overline{p}_n)^{m_n(t)-i} = N(d_1) \tag{2.16}$$

de forma mu similar se obtiene que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=a}^{m_n(t)} \binom{m_n(t)}{i} p_{*,n}^{i} \left(1 - p_{*,n}\right)^{m_n(t)-i} = N\left(d_2\right) \tag{2.17}$$

con este par de límites y el límite en (2.4) queda demostrada la convergencia en (2.7) $\square$

Capítulo 3

Modelos Continuos

En el presente capítulo se ofrece una versión continua de los modelos de valuación de derivados. En esta ocasión el trabajo que tenemos que hacer es mucho menor en ciertos aspectos, puesto que en el caso discreto ya se han resuelto los problemas económicos propios de la valuación de derivados. Ahora el trabajo mas importante es de crácter matemático. Necesitamos herramientas más potentes para poder alcanzar nuestro objetivo.

El mismo carácter fuertemente técnico de muchos de los conceptos matemáticos que se emplearan, nos obligan a ser un tanto informales, puesto que un tratamiento preciso y riguroso excede el tamaño y nivel de una tesis de licenciatura. En lugar de proveer demostraciones formales o tratamientos detallados se dan, donde sea posible, una explicación un tanto intuitiva o bien se hace referencia a algún texto que ofrezca el material de forma adecuada.

3.1. Un modelo de precios.

Quizás lo más importante para comenzar el desarrollo de nuestros modelos continuos sea proponer un modelo apropiado para describir en tiempo continuo la dinámica de los precios de los activos. Esta sección tiene como objetivo proponer un modelo razonablemente bueno y para ello comenzaremos a partir de lugares conocidos.

En la última sección del capítulo 2 se demostró la convergencia del modelo binomial a la fórmula de Black y Scholes, esta convergencia se logró incluyendo en un horizonte de inversión un número cada vez mayor de períodos.

Quizás algo similar podamos hacer para encontrar un buen modelo continuo de precios. Partamos pues del modelo binomial y veamos hasta donde podemos llegar.

Del modelo binomial sabemos que el precio de un activo lo podemos expresar como

$$S_{t+1} = \Gamma_{t+1} S_t \tag{3.1}$$

donde $\Gamma_{t+1} \in \{u, d\}$ y $\Gamma_0 = 1$. Este modelo de precios lo podemos modificar ligeramente si consideramos un nuevo proceso $\{\gamma_i\}$ definido como $\gamma_i = \ln(\Gamma_i)$. En este caso se reescriben los precios en (3.1) como

$$S_{t+1} = S_t e^{\gamma_{t+1}} \tag{3.2}$$

considerando esta última ecuación podemos escribir el precio S_t como

$$S_t = S_0 \exp\left\{\sum_{1=0}^{t} \gamma_i\right\} \tag{3.3}$$

Todo esto ya lo habíamos desarrollado, sin embargo conviene repasarlo para tenerlo bien fresco en la memoria ya que este es el punto de partida para encontrar un modelo de precios en tiempo contínuo.

Para desarrollar nuestro modelo vamos a suponer por el momento que nuestro horizonte de inversión es del tiempo 0 hasta el tiempo 1, este lapso lo dividiremos en N periodos de tal forma que cada periodo sea de longitud $\Delta = 1/N$. Notemos que este supuesto no nos hace perder generalidad, sólo depende de que es lo que definamos como "tiempo 1". Este supuesto se hace sólo para simplificar un poco el desarrollo. Dada esta partición del intervalo $[0, 1]$ y considerando la ecuación (3.3) podemos escribir el rendimiento del activo hasta el tiempo 1 como $\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_N$. Si recordamos que las variables Γ_i son independientes e idénticamente distribuidas se concluye entonces que las variables γ_i también son independientes e idénticamente distribuidas, esto nos conduce al siguiente razonamiento; si denotamos con m al rendimiento esperado hasta el tiempo 1 y con σ a la desviación estándar del rendimiento hasta el tiempo 1 entonces para toda $n = 1, 2, \ldots, N$ se tiene que

$$\begin{aligned} m &= \mathbb{E}[\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_N] \\ &= \mathbb{E}[\gamma_1] + \mathbb{E}[\gamma_2] + \cdots + \mathbb{E}[\gamma_N] \\ &= N\mathbb{E}[\gamma_n] \end{aligned}$$

del mismo modo

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \mathsf{Var}[\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_N] \\ &= \mathsf{Var}[\gamma_1] + \mathsf{Var}[\gamma_2] + \cdots + \mathsf{Var}[\gamma_N] \\ &= N\mathsf{Var}[\gamma_n] \end{aligned}$$

esto quiere decir que para cada $n = 1, 2, \ldots, N$, la variable aleatoria γ_n tiene esperanza $\mathbb{E}[\gamma_n] = m\Delta$ y desviación estándar $\sqrt{\mathrm{Var}(\gamma_n)} = \sigma\sqrt{\Delta}$. Si suponemos que la probabilidad de alza y de baja es de 1/2 entonces, se tiene que

$$\gamma_n = \begin{cases} m\Delta + \sigma\sqrt{\Delta}, & \text{si el precio sube.} \\ m\Delta - \sigma\sqrt{\Delta}, & \text{si el precio baja.} \end{cases}$$

si introducimos la variable aleatoria

$$\xi_n = \begin{cases} +\sqrt{\Delta}, & \text{con probabilidad } \frac{1}{2} \\ -\sqrt{\Delta}, & \text{con probabilidad } \frac{1}{2} \end{cases}$$

reescribimos γ_n como $\gamma_n = m\Delta + \sigma\xi_n$, en este caso

$$\begin{aligned} S_{t+1} &= S_t \exp\{\gamma_{t+1}\} \\ &= S_t \exp\{m\Delta + \sigma\xi_{t+1}\} \end{aligned} \tag{3.4}$$

evaluando el precio en $t = n\Delta$ de forma recursiva se tiene que

$$\begin{aligned} S_t &= S_0 \exp\{\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_t\} \\ &= S_0 \exp\{mn\Delta + \sigma(\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n)\} \end{aligned} \tag{3.5}$$

finalmente para simplificar la expresión en (3.5) definimos el proceso w_n como

$$w_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n \tag{3.6}$$

con $w_0 = 0$. De este modo se tiene que

$$S_t = S_0 \exp\{mt + \sigma w_t\} \tag{3.7}$$

para obtener la versión continua de (3.7) aproximamos $\exp\{\gamma_i\}$ con un polinomio de Taylor de segundo grado de tal forma que

$$\frac{S_{t+1}}{S_t} = e^{\gamma_{t+1}} \approx 1 + \gamma_{t+1} + \frac{1}{2}\gamma_{t+1}^2 \tag{3.8}$$

por otro lado

$$\gamma_{t+1}^2 \approx \sigma^2\Delta \tag{3.9}$$

se eliminan los demás términos pues se consideran de magnitud despreciable. Sustituyendo (3.9) en (3.8) y retomando el valor de γ_{t+1} se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{S_{t+1}}{S_t} &\approx 1 + m\Delta + \sigma\xi_{t+1} + \frac{1}{2}\sigma^2\Delta \\ &= 1 + \left(m + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta + \sigma\xi_{t+1} \end{aligned} \tag{3.10}$$

considerando que $\xi_{t+1} = w_{t+1} - w_t$ y reordenando términos, reescribimos (3.10) como

$$S_{t+1} - S_t \approx \left(m + \frac{1}{2}\sigma^2\right) S_t\Delta + \sigma S_t \left(w_{t+1} - w_t\right) \tag{3.11}$$

La ecuación (3.11) ya está muy próxima a la dinámica que buscamos para los precios. El siguiente paso será encontrar el límite de la caminata aleatoria $w_t(N)$, cuando $N \to \infty$. Para lograrlo fijemos un t arbitrario y consideremos nuestra subdivisión inicial del intervalo $[0,1]$. En este caso teníamos N subintervalos de longitud $\Delta = 1/N$, si ahora trabajamos con el intervalo $[0,t]$ y conservamos la longitud de los subintervalos, ahora tendremos Nt_N subintervalos, donde t_N es el múltiplo de $1/N$ más próximo a t.

Notemos además que

$$\mathbb{E}\left[\gamma_i\right] = m\Delta \qquad \text{y} \qquad \mathsf{Var}\left[\gamma_i\right] = \sigma^2\Delta$$

y por lo tanto las variables aleatorias x_n definidas como

$$x_n = \frac{\gamma_n - m\Delta}{\sigma\sqrt{\Delta}}$$

son variables aleatorias con media cero y varianza uno. Manipulando las variables x_n se obtiene fácilmente que

$$x_n = \frac{m\Delta + \xi_n\sigma - m\Delta}{\sigma\sqrt{\Delta}} = \sqrt{N}\xi_n$$

con esta última expresión y la ecuación (3.6) escribimos w_N como

$$w_N = \sqrt{t_N}\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{Nt_N}}{\sqrt{Nt_N}} \tag{3.12}$$

como las variables x_n son independientes e idénticamente distribuidas con media cero y varianza uno el teorema del límite central nos asegura que

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{Nt_N}}{\sqrt{Nt_N}}$$

tiende en distribución a una variable aleatoria normal estándar. Este hecho junto con la ecuación (3.12) nos permite concluir que w_N tiende en distribución a una variable aleatoria W_N normal con media cero y varianza t. El proceso W_t propuesto es un movimiento browniano estándar, en la siguiente sección se definirá formalemente y se discutirán propiedades muy importantes para nuestros fines.

Con este último resultado podemos reescribir la ecuación (3.11) en su versión continua como

$$dS_t = \left(m + \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma dW(t) \tag{3.13}$$

donde como se vió $dW(t) \sim N(0, dt)$.

Finalmente, si retomamos la ecuación (3.7) podemos suponer que la solución de (3.11) está dada por el proceso

$$S_t = S_0 e^{mt + \sigma W(t)} \tag{3.14}$$

una pequeña variante de este modelo será la que usemos para valuar derivados.

3.2. Movimiento Browniano

En esta sección y en la 3.3 nos alejamos un tanto de la valuación de derivados y se discuten en cambio, conceptos mucho más generales, en la sección 3.3 se dará un desarrollo al menos decoroso de la integral estocástica y del lema de Itô, herramientas indispensables para valuar en tiempo continuo. Por ahora, en esta sección sólo presentaremos al protagonista de la historia y algunas de sus propiedades.

Toda la sección anterior se destino a dar una construcción informal a partir del modelo binomial del proceso de precios que usaremos en el modelo continuo, el producto que conseguimos fué el modelo que se muestra en la ecuación (3.14) en esta ecuación se establece que el precio S_t de un activo riesgoso dependen de una variable aleatoria W_t que se distribuye normal con media cero y varianza t, en este sentido se dice que los precios siguen un proceso *lognormal*. Esta sección se ocupa de estudiar el proceso W_t para proveer resultados indispensables en la construcción de la integral estocástica. Comencemos pues, por dar una definición de movimiento browniano.

Definición 3.1 (Movimiento Browniano Estándar)
Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espacio de probabilidad. Un proceso estocástico W_t es un movimiento browniano estándar si para toda $\omega \in \Omega$, W_t es una función continua para toda $t \geq 0$ y

- $W_0 = 0$

- *Es un proceso de incrementos independientes. Es decir, si* $0 < s < t < u < v$ *entonces*

$$W_t - W_s \qquad y \qquad W_v - W_u$$

son independientes.

- *Si* $0 < s < t$ *entonces* $W_t - W_s \sim N(0, t-s)$.

Para nuestros fines será necesario equipar nuestro espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ con una filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$, es decir una familia creciente de σ-álgebras, tales que si $s < t$ entonces $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ y $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ para toda $t \geq 0$. Esta filtración, tal como en el caso discreto nos servirá para describir la información que se va acumulando a medida que esta se revela en el mercado. Siendo el movimiento browniano la fuente de incertidumbre de nuestro modelo de precios, es lógico que la infromación que nos proporciona la filtración afecte directamente al movimiento browniano[1]. Así pues supondremos que el movimiento browniano W_t que usaremos es un proceso adaptado a la filtración, es decir para cada $t \geq 0$, W_t es $\mathcal{F}_t$-medible y por tanto basta con la información contenida en $\mathcal{F}_t$ para conocer el valor del browniano en t. Por otro lado, si consideramos el segundo punto de la definición de movimiento browniano entonces resulta lógico que también exijamos que si $0 \leq s < t$ entonces $W_t - W_s$ es independiente de $\mathcal{F}_u$ para toda $u \leq s$.

Con las condiciones que hemos impuesto sobre la filtración y el movimiento browniano, podemos probar algunas propiedades importantes que cumple W_t.

PROPOSICIÓN 3.1
Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0})$ *un espacio de probabilidad filtrado. Si* $\{W_t\}_{t\geq 0}$ *es un movimiento browninano estándar, entonces*

1. W_t *es martingala*
2. $W_t^2 - t$ *es martingala*
3. $\exp\left\{\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2} t\right\}$ *es martingala*

[1] De hecho se puede suponer que la filtración es la generada por el movimiento browniano más la clase de subconjuntos nulos de Ω, a esta filtración se la conoce como una filtración aumentada.

Prueba. Probar la primera afirmación es sencillo. Supongamos que $0 \leq s < t$, entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[W_t \mid \mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[W_t - W_s + W_s \mid \mathcal{F}_s\right] \\ &= \mathbb{E}\left[W_t - W_s \mid \mathcal{F}_s\right] + \mathbb{E}\left[W_s \mid \mathcal{F}_s\right] \\ &= \mathbb{E}\left[W_t - W_s\right] + W_s \\ &= W_s \end{aligned}$$

Notemos que en la tercera igualdad se ha usado la propiedad de incrementos independientes del meovimiento browniano y la suposición de que W_s es $\mathcal{F}_s$-medible. La cuarta igualdad viene de la distribución de los incrementos.Con esto queda demostrado el primer punto

Probar la segunda condición también es sencillo. Notemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[W_t^2 - t \mid \mathcal{F}_s\right] &= \mathbb{E}\left[(W_t - W_s)^2 + 2W_tW_s - W_s^2 - t \mid \mathcal{F}_s\right] \\ &= \mathbb{E}\left[(W_t - W_s)^2 \mid \mathcal{F}_s\right] + 2W_s\mathbb{E}\left[W_t \mid \mathcal{F}_s\right] - \mathbb{E}\left[W_s^2\right] - t \\ &= \mathbb{E}\left[(W_t - W_s)^2\right] + 2W_sW_s - W_s^2 - t \\ &= t - s + W_s^2 - t \\ &= W_s^2 - s \end{aligned}$$

Observemos que en la tercera igualdad se ha usado el hecho recién probado de que el movimiento browniano es martingala además de la independencia de incrementos, en la cuarta igualdad se aprovecho el hecho de que por definición $\mathbb{E}[(W_t - W_s)^2] = t - s$ Probar el tercer punto es muy similar a la demostración de los dos anteriores, esto es como sigue

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[e^{\sigma W_t - 1/2\sigma^2 t} \mid \mathcal{F}_s\right] &= e^{\sigma W_s - 1/2\sigma^2 t}\mathbb{E}\left[e^{\sigma(W_t - W_s)} \mid \mathcal{F}_s\right] \\ &= e^{\sigma W_s - 1/2\sigma^2 t}\mathbb{E}\left[e^{\sigma(W_t - W_s)}\right] \\ &= e^{\sigma W_s - 1/2\sigma^2 t}\mathbb{E}\left[e^{\sigma z\sqrt{t-s}}\right] \\ &= e^{\sigma W_s - 1/2\sigma^2 t}e^{1/2\sigma^2(t-s)} \\ &= e^{\sigma W_s - 1/2\sigma^2 s} \end{aligned}$$

Obsérvese que en la tercera igualdad se ha sustituido $W - t - W_s$ con $z\sqrt{t-s}$ donde z es una normal estándar. Con esta sustitución queda claro que en esta tercera ecuación la esperanza es la función generadora de momentos de una normal estándar evaluada en $\sigma\sqrt{t-s}$. Con esto termina la prueba de la proposición. □

Esta propiedad no parece tener gran utilidad por el momento, sin embargo veremos más tarde usaremos cada una de estas propiedades. La siguiente proposición se enuncia sin prueba, sin embargo una prueda de este resultado puede encontrase en el libro de Leo Breiman, en el de Sidney Resncik o en el de Karatzas y Shreve.

PROPOSICIÓN 3.2
Las trayectorias de un movimiento browniano son no diferenciables en cualquier punto casi donde sea.

Este resultado es muy importante y es causante de muchos de nuestros problemas técnicos. Es debido a esta propiedad que no podemos hablar de un cálculo diferencial estocástico, sólo se pueda desarrollar un cálculo integral estocástico, aunque notacionalmente se pude trabajar con diferenciales. El otro gran problema que nos encontraremos, causado por el movimiento browniano y que nos obligará a desarrollar una integral estocástica se describe a continuación

3.2.1. Variación Cuadrática

A pesar de ser una función continua, las trayectorias del movimiento browniano se comportan realmente mal en ciertos aspectos. En la proposición 3.2 ya se presentó uno de estos malos comportamientos, resulta que el movimiento browniano no es diferenciable en ningún punto, esto quiere decir que su comportamiento es terriblemente errático. Como consecuencia de este comportamiento errático, la variación cuadrática del movimiento browninano es distinta de cero. Este hecho hace que el calculo estocástico sea distinto del calculo ordinario.

Antes de investigar la variación cuadrática del movimiento browniano, se analizará lo que sucede con la variación de primer orden (o simplemente variación). Para esto considérese el intervalo $[0, T]$, el primer paso es definir una partición $\Pi = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$, de tal forma que

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = T$$

la distancia entre cada t_i no tiene por que ser uniforme, por tanto definimos la norma de la partición como la longitud del subintervalo más grande de la partición, esto es $||\Pi|| = \text{máx}_{i=0,1,\ldots,n-1}(t_i + 1 - t_i)$. Con estos elementos, definimos la variación de una función f como

$$V(f) = \lim_{||\Pi|| \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)| \tag{3.15}$$

este límite se obtiene incrementando el número de puntos en la partición, de tal modo que la logngitud del subintervalo más largo tiende a cero.

Si la función f es diferenciable, entonces la variación de f es acotada. Esto es fácil de demostrar si usamos el teorema del valor medio. Efectivamente; sabemos que si f es diferenciable en cada subintervalo $[t_{i+1}, t_i]$ entonces existe un punto t_i^* en este subintervalo tal que

$$f(t_{i+1}) - f(t_i) = f'(t_i^*)\,(t_{i+1} - t_i) \tag{3.16}$$

a aprtir de esta última relación y retomando la ecuación (3.15), escribimos la suma de la variación de f como

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)| &= \sum_{i=0}^{n-1} |f'(t_i^*)\,(t_{i+1} - t_i)| \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} |f'(t_i^*)|\,(t_{i+1} - t_i)\end{aligned} \tag{3.17}$$

lo que hemos obtenido en (3.17) es la suma de Riemann para $|f'(t)|$, por lo tanto

$$V(f) = \lim_{\|\Pi\|\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} |f'(t_i^*)|\,(t_{i+1} - t_i) = \int_0^T |f'(t)|\,dt \tag{3.18}$$

si observamos el desarrollo anterior vemos que no podemos usar el mismo argumento para calcular la variación del movimiento browniano, dado que el movimiento browniano no es diferenciable. De hecho el movimiento browniano es de variación no acotada.

El siguiente paso es analizar que es lo que sucede con la variación cuadrática, para esto considérese la siguiente definición

Definición 3.2
Sea f una función definida en $[0, T]$, la variación cuadrática de f hasta T es

$$< f, f >_T = \lim_{\|\Pi\|\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} [f\,(t_{i+1}) - f\,(t_i)]^2 \tag{3.19}$$

donde $\|\Pi\| = \max_{i=0,1,\dots,n-1}(t_i + 1 - t_i)$ *y* $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = T$.

De nuevo tomemos una función f con primera derivada continua, por el teorema del valor medio se tiene que

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1} [f(t_{i+1}) - f(t_i)]^2 &= \sum_{i=0}^{n-1} |f'(t_i^*)|^2\,(t_{i+1} - t_i)^2 \\ &\leq \|\Pi\| \sum_{i=0}^{n-1} |f'(t_i^*)|^2\,(t_{i+1} - t_i)\end{aligned}$$

tomando el límite se sigue que

$$\begin{aligned}
< f, f >_T &\leq \lim_{\|\Pi\| \to 0} \|\Pi\| \sum_{i=0}^{n-1} |f'(t_i^*)|^2 (t_{i+1} - t_i) \\
&= \lim_{\|\Pi\| \to 0} \|\Pi\| \cdot \lim_{\|\Pi\| \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} |f(t_i^*)|^2 (t_{i+1} - t_i) \\
&= 0 \cdot \int_0^T |f'(t_i^*)|^2 \, dt \\
&= 0
\end{aligned}$$

Notemos que en este caso $\int_0^T |f'(t_i^*)|^2 \, dt$ es finita, puesto que hemos supuesto que f' es continua, de otro modo no podríamos asegurar la última igualdad.

Si revisamos de nuevo la demostración anterior veremos que no es posible usar los mismos argumentos para enconrar la variación cuadrática del movimiento browniano. Un argumento fundamental en la demostración fué suponer que la función f es diferenciable. Esto no ocurre con el movimiento browniano. Sin embargo si buscamos otro tipo de convergencia seremos capaces de calcular la variación cuadrática del movimiento browniano. Esto se muestra en la siguiente proposición

PROPOSICIÓN 3.3
Sea W un movimiento browniano. Entonces $< W, W >_T = T$ para toda $t \geq 0$

De hecho lo que se demostrará es que esta la variación cuadrática de W converge a T en media cuadrática.

PRUEBA. Lo que necesitamos demostrar es que si definimos la partición $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$ y definimos a la norma de la partición como de costumbre, entonces

$$\lim_{\|\Pi\| \to 0} \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=0}^{n-1} (W(t_{i+1}) - W(t_i))^2 - T \right)^2 \right] = 0 \tag{3.20}$$

Para probarlo primero veamos que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{n-1}(W(t_{i+1})-W(t_i))^2\right] &= \sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{E}\left[(W(t_{i+1})-W(t_i))^2\right] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\mathsf{Var}\left[W(t_{i+1})-W(t_i)\right] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}(t_{i+1}-t_i) \\
&= T
\end{aligned}
$$

esto nos conduce a afirmar que

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[\left(\sum_{i=0}^{n-1}(W(t_{i+1})-W(t_i))^2-T\right)^2\right] &= \mathsf{Var}\left(\sum_{i=0}^{n-1}(W(t_{i+1})-W(t_i))^2\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\mathsf{Var}\left((W(t_{i+1})-W(t_i))^2\right)
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

obsérvese que en la segunda igualdad hemos usado la independencia de incrementos del movimiento browniano. Si recordemos que el cuarto momento de una variable aleatoria normal con media cero y varianza σ^2 es igual a $3\sigma^4$ entonces

$$
\begin{aligned}
\mathsf{Var}\left((W(t_{i+1})-W(t_i))^2\right) &= \mathbb{E}\left[(W(t_{i+1})-W(t_i))^4\right]-\mathbb{E}^2\left[(W(t_{i+1})-W(t_i))^2\right] \\
&= 3\,(t_{i+1}-t_i)^2-(t_{i+1}-t_i)^2 \\
&= 2\,(t_{i+1}-t_i)^2
\end{aligned}
$$

sustiuyendo en (3.21) se tiene que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=0}^{n-1}(W(t_{i+1})-W(t_i))^2-T\right)^2\right] &= 2\sum_{i=0}^{n-1}(t_{i+1}-t_i)^2 \\
&\leq 2\,\|\Pi\|\cdot\sum_{i=0}^{n-1}(t_{i+1}-t_i) \\
&= 2\,\|\Pi\|\cdot T
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

de aqui se obtiene fácilmente (3.20) haciendo $\|\Pi\|\to 0$. Con esto queda demostrada la propiedad □

En la demostración de la proposición (3.3) se mostró además que

$$\mathbb{E}\left[(W(t_{i+1}) - W(t_i))^2\right] = (t_{i+1} - t_i)$$

y que

$$\mathsf{Var}\left((W(t_{i+1}) - W(t_i))^2\right) = 2\,(t_{i+1} - t_i)^2$$

esto nos puede conducir a la conclusión de que si $(t_{i+1} - t_i)$ es pequeño, entonces $(t_{i+1} - t_i)^2$ es aún más pequeño y por lo tanto podríamos suponer que

$$(W(t_{i+1}) - W(t_i))^2 \approx t_{i+1} - t_i \tag{3.23}$$

la conclusión, obtenida (3.23) no carece del todo de sentido, sin embargo hay que ser muy cuidadosos en su interpretación. Aunque no se dará un argumento preciso del resultado, si podemos decir que la suposición que se hizo anteriormente realmente no es el camino para interpertar (3.23). De hecho veamos que si esto ocurre entonces

$$\frac{(W(t_{i+1}) - W(t_i))^2}{t_{i+1} - t_i} \approx 1$$

la parte izquierda de esta realción es el cuadrado de una variable aleatoria normal (sería una χ^2) y no tiene por que estar cerca de uno, no importa que tan pequeño sea $t_{i+1} - t_i$. De hecho es el cuadrado de la variable

$$Y_{i+1} = \frac{W(t_{i+1}) - W(t_i)}{\sqrt{t_{i+1} - t_i}}$$

esta variable es normal estándar y no depende de que tan pequeña sea la diferencia $t_{i+1} - t_i$. La interpretación debe ir entonces por otro lado, esto se facilitará si analizamos la siguiente relación

$$(W(t_{i+1}) - W(t_i))^2 = T\frac{Y_{i+1}^2}{n}$$

notemos que en este caso hemos seleccionado los puntos t_i de la partición de tal forma que $t_i = i\frac{T}{n}$ y por tanto $t_{i+1} - t_i = \frac{T}{n}$. En este sentido, al sumar el lado derecho la ley de los grandes números nos asegura que

$$\sum_{i=0} n - 1\frac{Y_{i+1}^2}{n}$$

tiende a la media común $\mathbb{E}\left[Y_{i+1}^2\right] = 1$ de las variables Y_{i+1}^2, y por tanto $\sum_{i=0}^{n-1} (W(t_{i+1}) - W(t_i))^2$ tiende a T. Es decir, sólo a partir de la ley de los grandes números se puede explicar (3.23). Realmente lo que se pude concluir es que el movimiento browniano acumula variación cuadrática a una tasa de uno por unidad de tiempo, esto se escribe informalmente como

$$dWdW = dt \tag{3.24}$$

Esto no sucede de la misma forma si consideramos incrementos determinísticos, de hecho se tiene que

$$\sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i)^2 \leq \|\Pi\| \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) = \|\Pi\| \cdot T$$

de aqui se sigue que

$$\lim_{\|\Pi\| \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i)^2 = 0 \tag{3.25}$$

esto lo expresamos diciendo que $dtdt = 0$.

La misma conclusión obtenemos si hacemos el mismo cálculo con incrementos cruzados, es decir

$$|(W(t_{i+1}) - W(t_i))\,(t_{i+1} - t_i)| \leq \max_{0 \leq k \leq n-1} |(W(t_{i+1}) - W(t_i))|\,(t_{i+1} - t_i)$$

por lo tanto

$$\left| \sum_{i=0}^{n-1} (W(t_{i+1}) - W(t_i))\,(t_{i+1} - t_i) \right| \leq \max_{0 \leq k \leq n-1} |(W(t_{i+1}) - W(t_i))|\,T$$

Como W es continua entonces $\max_{0 \leq k \leq n-1} |(W(t_{i+1}) - W(t_i))|$ tiende a cero si $\|\Pi\|$ tiende a cero, por lo tanto

$$\lim_{\|\Pi\| \to 0} \left| \sum_{i=0}^{n-1} (W(t_{i+1}) - W(t_i))\,(t_{i+1} - t_i) \right| = 0 \tag{3.26}$$

esto se escribe informalmente como $dWdt = dt$.

La proposición 3.3 y las ecuaciones (3.25) y (3.26) se resumen en la siguiente "tabla de multiplicar"

	dW	dt
dW	dt	0
dt	0	0

Tabla 3.1

Con esto parece que ya tenemos los elementos necesarios para construir la integral estocástica, lo cual haremos a continuación.

3.3. Integral estocástica.

Hasta el momento hemos propuesto un modelo de precios fundamentado en un movimiento browniano y discutimos varias propiedades del movimiento browniano que son fundamentales para entender la integral estocástica, misma que vamos a construir en esta sección. Sin embargo hasta el momento no hemos dado un argumento que nos explique la necesiadad de construirla para poder desarrollar un modelo continuo de valuación de activos derivados. La pregunta es entonces ¿por que necesitamos una integral estocástica?

Una de las conclusiones más importantes que obtuvimos en el capítulo anterior cuando discutíamos los modelo discretos de valuación fué que para valuar un derivado era necesario replicarlo. Esto se lograba mediante la construcción de un portafolio que replicara el valor del derivado en todo tiempo t_i. Si eramos capaces de construir un portafolio de este tipo entonces el portafolio y el derivado debían valer exactamente lo mismo en todo momento. Una de las condiciones más importantes que deben cumplir estos portafolios replicantes es que deben ser autofinanciables. De acuerdo con la definición 2.7 esto significa que si ϕ es una estrategia autofinanciable entonces

$$\phi_{t_i} \cdot S_{t_i} = \phi_{t_{i+1}} \cdot S_{t_i}$$

para toda t_i en el horizonte de inversión. Se demostró además que esto es equivalente a

$$V_{t_{i+1}}(\phi) - V_{t_i}(\phi) = \phi_{t_i} \cdot \Delta \mathrm{S}_{t_i} \tag{3.27}$$

o bien

$$V_{t_i}(\phi) = V_{t_0}(\phi) + \sum_{k=1}^{i} \phi_{t_k} \cdot \Delta \mathrm{S}_{t_i} \tag{3.28}$$

donde $V_{t_i}(\phi)$ es el valor del protafolio replicante en el tiempo t_i.

En tiempo continuo seguiremos la misma idea para valuar derivados, así que necesitamos una versión continua de la ecuiación (3.27) y (3.28) que describa la dinámica del portafolio replicante. Una forma lógica de hacer esto es con una ecuación del estilo

$$dV_t(\phi) = \phi \cdot dS_t \tag{3.29}$$

recordando la dinámica de precios que se propuso en (3.13) se reescribe 3.28 como

$$dV_t(\phi) = \phi \left(m + \frac{1}{2}\sigma^2\right) S_t dt + \phi\sigma S_t dW_t \tag{3.30}$$

con esta ecuación o la (3.29) conseguimos una versión continua de la ecuación (3.27), sin embargo recordemos que una expresión de este estilo es meramente notacional, pues realmente no podemos hablar de un cálculo diferencial estocástico. Por esta rezón escribimos (3.30) en su versión integral.

$$V_t(\phi) = V_0(\phi) + \int_0^t \phi\left(m + \frac{1}{2}\sigma^2\right) S_t dt + \int_0^t \phi\sigma S_t dW_t \tag{3.31}$$

esta es la versión continua de la ecuación (3.28) y

$$V_t(\phi) = V_0(\phi) + \int_0^t \phi \cdot dS_t \tag{3.32}$$

es la versión integral de (3.29). Si la idea es seguir la misma estrategia para valuar derivados, encontrar portafolios replicantes, será necesario resolver ecuaciones del estilo de la ecuación (3.31) y (3.32).

Esta es la razón por la cual tenemos que construir la integral estocástica, para dar sentido a expresiones como la (3.31) necesitamos construir una intergral del tipo

$$\int_0^T f(t)dW_t \tag{3.33}$$

Notemos que una integral de este estilo es semejante a la integral

$$\int_0^T f(t)dg_t \tag{3.34}$$

si g es diferenciable entonces podemos traducir la integral anterior a la integral de Lebesgue

$$\int_0^T f(t)g'(t)dt \tag{3.35}$$

pero sabemos que esto no es posible si g es un movimiento browniano pues éste no es diferenciable. La pregunta sería entonces ¿en que casos puedo definir la integral (3.34) en el sentido de Lebesgue o en el sentido de Riemann–Stieljes? Para responder esta pregunta considérese la siguiente definición.

Definición 3.3

Una función g definida en el intervalo $[0, T]$ es de variación acotada de orden p para algún $p > 0$ si

$$\lim_{\|\Pi|\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} |g(t_{i+1}) - g(t_i)|^p < \infty$$

donde $\|\Pi|$ es la norma de la partición $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$.

En la sección ya nos habíamos encontrado con este concepto para el caso $p = 1, 2$. La definición 3.3 extiende el concepto para cualquier $p > 0$.

Contando con esta definición se ofrece acontinuación, sin muestra, una condición suficiente para que una función f sea integrable conrespecto a una función g en el sentido de Riemann–Stieljes.

PROPOSICIÓN 3.4
La integral de Riemann–Stieljes $\int_0^T f(t)dg_t$ existe si se satisfacen las siguientes condiciones.

- *Las funciones f y g no tienen discontinuidades en el mismo punto $t \in [0, T]$*
- *La función f es de vriación acotada de orden p y la función g es de variación acotada de orden q para alguna $p > 0$ y $q > 0$ tales que $p^{-1} + q^{-1} > 1$*

El movimiento browniano es de variación acotada de orden p para $p > 2$ esto quiere decir que la integral (3.33) existe en el sentido de Riemann-Stieljes si f es de variación acotada (de orden 1). De hecho se pude demostrar que si f es diferenciable, con derivada acotada en $[0, T]$ entonces existe la integral en (3.33) en el sentido de Riemann–Stieljes. El problema lo encontremos cuando la función f no es de variación acotada. Este sería el caso por ejemplo de una integral, tan simple en apariencia como

$$\int_0^T W_t dW_t$$

No nos queda más remedio que buscar otra forma de definir una integral como la anterior.

3.3.1. Integral estocástica de funciones simples.

Comenzaremos dando una versión muy sencilla de la integral estocástica. Definiremos la integral estocástica para funciones simples.

DEFINICIÓN 3.4
Una función simple definida en un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0})$ es una función f del estilo

$$f_t(\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} \psi_i(\omega) \mathbf{1}_{(t_i, t_{i+1})}$$

donde $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$ y ψ_i es $\mathcal{F}_{t_i}$-medible y acotada.

Notemos que si f es simple, entonces esta definida a tramos. Toma en cada intervalo $(t_i, t_{i+1}]$ el mismo valor que toma el proceso $\psi_t(\omega)$ en algún tiempo t tal que $\psi_t(\omega)$ es $\mathcal{F}_{t_i}$-medible. Para nuestros fines supondremos que en el intervalo $(t_i, t_{i+1}]$ es igual al valor que toma $\psi_t(\omega)$ al tiempo t_i, es decir el valor que toma en el extremo izquierdo del intervalo.

Si esto es así, definimos la integral estocástica de f con $t_n \leq t \leq t_{n+1}$

$$I(t) = \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)\left[W(t_{i+1}) - W_{t_i}\right] + f(t_n)\left[W(t) - W(t_n)\right] \tag{3.36}$$

y escribimos

$$I(t) = \int_0^t f(u)dW_u$$

A continuación se prueban algunas propiedades de la integral estocástrica definida en (3.36)

PROPOSICIÓN 3.5
La integral estocástica definida en (3.36) es una martingala

PRUEBA. Consideremos $0 \leq s \leq t \leq T$. supondremos que s y t están en intervalos diferentes, de la partición Π, es decir supondremos que existen puntos t_ℓ y t_k tales que $s \in [t_\ell, t_{\ell+1})$ y $t \in [t_k, t_{k+1})$ y reescribimos

$$\begin{aligned} I(t) = &\sum_{i=0}^{\ell-1} f(t_i)\left[W(t_{i+1}) - W(t_i)\right] + f(t_\ell)\left[W(t_{\ell+1}) - W(t_\ell)\right] \\ &+ \sum_{i=\ell+1}^{k-1} f(t_i)\left[W(t_{i+1}) - W(t_i)\right] + f(t_k)\left[W(t) - W(t_k)\right] \end{aligned}$$

el objetivo es evaluar la esperanza $\mathbb{E}\left[I(t)|\, \mathcal{F}_s\right]$, para ello tomemos la primera suma

$$\mathbf{E}\left[\sum_{i=0}^{\ell-1} f(t_i)\left[W(t_{i+1}) - W(t_i)\right] \middle| \mathcal{F}_s\right] = \sum_{i=0}^{\ell-1} f(t_i)\left[W(t_{i+1}) - W(t_i)\right] \tag{3.37}$$

tomando el segundo término

$$\mathbf{E}\left[f(t_\ell)\left[W(t_{\ell+1}) - W(t_\ell)\right]|\, \mathcal{F}_s\right] = f(t_\ell)\left[W(s) - W(t_\ell)\right] \tag{3.38}$$

en esta última esperanza hemos utilizado la propiedad de que el movimiento browniano es martingala.

Con el tercer término se obtiene

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=\ell+1}^{k-1} f(t_i)\left[W(t_{i+1}) - W(t_i)\right]\middle| \mathcal{F}_s\right] = \sum_{i=\ell+1}^{k-1} f(t_i)\left[W(s) - W(s)\right] = 0 \tag{3.39}$$

y finalmente si tomamos el último término

$$\mathbb{E}\left[f(t_k)\left[W(t) - W(t_k)\right]\middle| \mathcal{F}_s\right] = f(t_k)\left[W(s) - W(s)\right] = 0 \tag{3.40}$$

Sumando las ecuaciones de 3.37 a 3.40 se obtiene que

$$\mathbb{E}\left[I(t)\middle| \mathcal{F}_s\right] = I(s)$$

□

Consecuencia inmediata de la proposición 3.5 es que si $I(t)$ es martingala e $I(0) = 0$, entonces $\mathbb{E}[I_(t)] = 0$, de este modo $\mathsf{Var}[I(t)] = \mathbb{E}[I^2(t)]$, esta esperanza se calcula en la siguiente proposición.

Proposición 3.6 (Isometría)
La integral estocástica definida en (3.36) satisface

$$\mathbb{E}\left[I^2(t)\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t f^2(u)du\right] \tag{3.41}$$

Prueba. Para simplificar las cosas, hacemos $\Delta W_i = W(t_{i+1}) - W(t_i)$ para $i = 1, 2, \ldots, n-1$ y $\Delta W_n = W(t) - W(t_n)$, tenemos entonces que

$$I(t) = \sum_{i=0}^{n} f(t_j)\Delta W_j$$

y por tanto

$$I^2(t) = \sum_{i=0}^{n} f^2(t_j)\Delta W_j^2 + 2\sum_{0\leq i\leq j\leq n} f(t_i)f(t_j)\Delta W_i \Delta W_j$$

Primeri probaremos que la esperanza del segundo término de la suma es cero, para ello vemos que si $i \leq j$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[f(t_i)f(t_j)\Delta W_i \Delta W_j\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[f(t_i)f(t_j)\Delta W_i \Delta W_j\middle| \mathcal{F}_j\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[f(t_i)f(t_j)\Delta W_i \mathbb{E}\left[\Delta W_j\middle| \mathcal{F}_j\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[f(t_i)f(t_j)\Delta W_i \mathbb{E}\left[\Delta W_j\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[f(t_i)f(t_j)\Delta W_i \cdot 0\right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

notemos que en segunda igualdad hemos usado el hecho de que $f(t_j)$ es $\mathcal{F}_j$-medible. Si ahora tomamos el primer sumando se obtiene

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[f^2(t_j)\Delta W_j^2\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[f^2(t_j)\Delta W_j^2 \mid \mathcal{F}_j\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[f^2(t_j)\mathbb{E}\left[\Delta W_j^2 \mid \mathcal{F}_j\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[f^2(t_j)\mathbb{E}\left[\Delta W_j^2\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[f^2(t_j)\left(t_{j+1}-t_j\right)\right]
\end{aligned}$$

Ahora observemos que dado que f es simple $f^2(t_j)\left(t_{j+1}-t_j\right) = \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(u)du$, lo mismo ocurre en el último intervalo $f^2(t_n)\left(t-t_n\right) = \int_{t_n}^{t} f(u)du$, de aqui se sigue que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[I^2(t)\right] &= \sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{E}\left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} f^2(u)du\right] + \mathbb{E}\left[\int_{t_n}^{t} f^2(u)du\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} f^2(u)du\right] + \mathbb{E}\left[\int_{t_n}^{t} f^2(u)du\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_{0}^{t_n} f^2(u)du\right] + \mathbb{E}\left[\int_{t_n}^{t} f^2(u)du\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_{0}^{t} f^2(u)du\right]
\end{aligned}$$

□

Antes de construir la integral estocástica calcularemos la variación cuadrática de la integral estocástica, esto lo hacemos en la siguiente proposición

PROPOSICIÓN 3.7
La variación cuadrática acumulada hasta el tiempo t de la integral estocástica es

$$< I(\cdot), I(\cdot) >_t = \int_0^t f^2(u)du \tag{3.42}$$

PRUEBA. Para probar este resultado calcularemos la variación cuadrática de la integral en uno de los subintervalos $[t_i, t_{i+1}]$ de la partición, donde $f(u)$ es constante. Con esta idea en mente, definimos una nueva partición Π^* en el intervalo $[t_i, t_{i+1}]$

$$t_i = s_0 < s_1 < \cdots < s_m = t_{i+1}$$

y consideramos

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{m-1}\left[I(s_{j+1})-I(s_j)\right]^2 &= \sum_{j=0}^{m-1}\left[f(t_i)\left(W(s_{i+1})-W(s_i)\right)\right]^2 \\ &= f^2(t_i)\sum_{j=0}^{m-1}\left[\left(W(s_{i+1})-W(s_i)\right)\right]^2\end{aligned} \tag{3.43}$$

sabemos entonces que a medida que la norma de la partición Π^* tiende a cero, la suma de la expresión anterior tiende a la variación cuadrática acumulada por el movimiento browniano en $[t_i, t_{i+1}]$, es decir, tiende a $t_{i+1} - t_i$. Con esto concluimos que a medida que la norma de la partición Π^* tiende a cero (3.43) tiende a

$$f^2(t_i)\left(t_{i+1}-t_i\right) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f^2(u)du$$

donde hemos usado de nuevo el hecho de que f es una función simple y por tanto toma el mismo valor en cada intervalo $[t_i, t_{i+1}]$. Finalmente sumando sobre todos los intervalos de la partición Π se obtiene el resultado. □

Observemos que la varianaza de la integral estocástica es un concepto diferente a la variación cuadrática. Se parecen mucho, sin embargo, la variación cuadrática depende de la trayectoria del movimiento browniano, mientras que la varianza es un valor esperado que toma en cuenta todas las posibles trayectorias.

Finalmente, podemos expresar notacionalemente la integral estocástica $I(t)$ en su forma diferencial como

$$dI = f(t)dW$$

retomando los resultados de la tabla 3.1, donde se establecen ciertas "reglas de multiplicación", encontrmos a través de un argumento muy barato aunque poco formal el mismo resultado que se obtuvo en la proposicón 3.7

$$dIdI = f(t)dWf(t)dW = f^2(t)dt$$

que traduciéndolo a su forma integral nos da exactamente el mismo resultado que la proposición 3,7. Esta resultado nos muestra que trabajar con diferenciales es mucho más sencillo aunque poco formal.

3.3.2. Integral estocástica para funciones generales.

La construcción de la integral estocástica para procesos generales es bastante más complicada que lo que hemos encontrado hasta el momento, por esta razón solo se exhibirá una explicación muy intuitiva y breve de la misma. Una referencia clásica en este tema es el libro de Karatzas y Shreve o el libro de Protter, entre otros.

Como de costumbre supondremos que vivimos en un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \{\mathcal{F}\}_{t\geq 0})$. Las funciones f para las que se definirá la integral estocástica deben cumplir un par de condiciones, tales condiciones se resumen exijiendo que estas funciones pertenezcan al conjunto $\mathcal{H}$ definido como

$$\mathcal{H} = \left\{ f(t), f(t) \text{ es un proceso adaptado y } \mathbb{E}\left[\int_0^T f^2(t)dt\right] < \infty \right\} \quad (3.44)$$

Para definir la integral $\int_0^T f(t)dW_t$ aproximaremos la función $f(t)$ a través de procesos simples $f_n(t)$, de tal forma que al definir una partición $0 < t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$ y hacer tender la norma de la pratición a cero, la aproximación por procesos simples sea cada vez mejor.

La convergencia que se propone se da en términos de la siguiente proposición

PROPOSICIÓN 3.8
Si $f \in \mathcal{H}$ entonces existe una sucesión $\{f_n(t)\}$ de procesos simples tal que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\int_0^T [f_n(t) - f(t)]^2\right] = 0$$

una demostración de esta propiedad se puede estudiar en el libro de Kloeden y Platen. Teniendo esta propiedad en cuenta definimos la integral estocástica como

$$\int_0^t f(u)dWu = \lim_{n\to 0} \int_0^t f_n(u)dW_u \quad (3.45)$$

Esta integral estocástica hereda todas las propiedades de la integral estocástica para funciones simples. Esto es

- *Continuidad* Como función de su límita superior de integración t las trayectorias de $I(t)$ son continuas
- *Adaptable* Para cada t, $I(t)$ es $\mathcal{F}_t$–medible.
- *Linealidad* Si $I(t) = \int_0^t f(u)dW_u$ y $J(t) = \int_0^t g(u)dW_u$, entonces $I(t) \pm J(t) = \int_0^t (f(u) \pm g(u))\, dW_u$, y además para cualquier constante c, $cI(t) = \int_0^t cf(u)dW_u$.

- *Martingala* $I(t)$ es martingala
- *Isometría* $\mathbb{E}\left[I^2(t)\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t f^2(u)du\right]$
- *Variación cuadrática* $< I, I >_t = \int_0^t f^2(u)du$

a continuación se presenta un ejemplo clásico de la integral estocástica. Por lo general no es fácil evaluar de forma explícita una integral estocástica, sin embargo en el siguiente ejemplo esto es posible sin mucho esfuerzo.

EJEMPLO 3.1
Se calculará la integral $\int_0^T W_t dW_t$. *Para lograrlo verifiquemos previamente la validez de la siguiente igualdad*

$$\begin{aligned}
a_n^2 &= a_0^2 + a_n^2 - a_0^2 \\
&= a_0^2 + \sum_{i=0}^{n-1}\left(a_{i+1}^2 - a_i^2\right) \\
&= a_0^2 + \sum_{i=0}^{n-1}\left(a_{i+1}^2 - a_i^2 + 2a_{i+1}a_i - 2a_{i+1}a_i + a_i^2 - a_i^2\right) \\
&= a_0^2 + 2\sum_{i=0}^{n-1} a_i\left(a_{i+1} - a_i\right) + \sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1} - a_i)^2
\end{aligned}$$

definimos una partición $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$ *y aproximamos* $W(t)$ *en cada subintervalo a través de la función simple* $f_n(t) = W(t_i)$ *para* $t \in (t_i, t_{i+1}]$. *Aplicamos la identida anterior a* $f_n(t)$ *y obtenemos*

$$W_n^2 = 2\sum_{i=0}^{n-1} W_i\left(W_{i+1} - W_i\right) + \sum_{i=0}^{n-1}(W_{i+1} - W_i)^2 \qquad (3.46)$$

en la expresión anterior hemos simplificado la notación haciendo $W_i = W(t_i)$ *además se ha usado el hecho de que* $W(0) = 0$. *Si encontramos el límite en media cuadrada de de (3.46) cuando la norma de la partición tiende a cero, se peude observar que el primer sumando tiende a*

$$\int_0^T W(s)dW_s$$

el segundo sumando tiende a la variación cuadrática de W_t, *esto nos conduce a la solución*

$$\begin{aligned}
W^2(t) &= 2\int_0^T W(s)dW_s + < W, W >_T \\
W^2(t) &= 2\int_0^T W(s)dW_s + T
\end{aligned} \qquad (3.47)$$

o bien

$$\int_0^T W(s)dW_s = \frac{1}{2}W^2(t) - \frac{1}{2}T \tag{3.48}$$

□

observemos la diferencia del resultado en (3.48) con lo que el cálculo ordinario estabelcería

$$\int_0^T g(u)dg(u) = \frac{1}{2}g^2(T)$$

la ecuación (3.47) es clara, el término adicional $\frac{1}{2}T$ proviene de la variación cuadrática de W_t.

3.4. Lema de Itô.

Se dice que el en cálculo estocástico el lema de Itô provee el equivalente de la regla de la cadena. En el cálculo ordinario es bien sabido que

$$\frac{d}{dt}f(x(t)) = f'(x(t))x'(t)$$

o bien en notación diferencial

$$df(x(t)) = f'(x(t))x'(t)dt \tag{3.49}$$

si f es función de un movimiento browniano de modo que $x(t) = W(t)$, no es posible definir la diferencial de f en los términos de la ecuación (3.49), en cambio, podemos escribir

$$df(W(t)) = f'(W(t))dW(t)$$

por supuesto que la ecuación anterior es tan imprecisa como o sería (3.49) si sustituyeramos $x'(t)$ con $W'(t)$, sin embargo toma mayor sentido si lo interpretamos en términos de lo que discutimos en la sección 3.2. De cualquier forma aún no contamos toda la historia pues la ecuación anterior no toma en cuenta el hecho de que la variación cuadrática de $W(t)$ es distinta de cero. Considerando este hecho debemos incluir un término adicional, tal como ocurrió en el ejemplo 3.1. Esto es

$$df(W(t)) = f'(W(t))dW(t) + \frac{1}{2}f''(W(t))dt \tag{3.50}$$

o bien de manera más formal

$$f(W(t)) - f(W(0)) = \int_0^t f'(W(u))dW(u) + \frac{1}{2}\int_0^t f''(W(u))du \tag{3.51}$$

La ecuación (3.51) es conocida como la fórmula de Itô y como se mencionó es el equivalente en cálculo estocástico, de la regla de la cadena.

PROPOSICIÓN 3.9 (LEMA DE ITÔ)
Sea $f(t,x)$ una función para la cual las derivadas parciales $f_t(x,t)$, $f_x(x,t)$ y $f_{xx}(x,t)$ estan definidas y son continuas y sea $W(t)$ un movimiento browninano. Entonces, para cada $T > 0$

$$\begin{aligned} f(T,W(T)) = f(0,W(0)) &+ \int_0^T f_t(t,W(t))dt \\ &+ \int_0^T f_x(t,W(t))dW_t + \frac{1}{2}\int_0^T f_{xx}(t,W(t))dt \end{aligned} \tag{3.52}$$

No se ofrece una prueba formal de este resultado, sin embargo si daremos algunas ideas que aclararan el significado del lema de Itô.

Consideremos la función $f(x) = \frac{1}{3}x^2$, en tal caso $f'(x) = x$, $f''(x) = 1$, derivadas de orden superior son todas iguales a cero. Esto nos permite escribir de forma exacta la función $f(x)$ de acuerdo con su expansión de Taylor como

$$f(x_{i+1}) - f(x_i) = f'(x_i)\,(x_{i+1} - x_i) + \frac{1}{2}f''(x_i)\,(x_{i+1} - x_i)^2 \tag{3.53}$$

El objetivo es verificar el lema de Itô para f. En este sentido definimos, de la forma acostumbrada, una partición Π del intervalo $[0,T]$. Escribiendo la diferencia $f(W(T)) - f(W(0))$ como una suma telescópica y usando la expansión de Taylor en (3.53) con $x_i = W(t_i)$, obtenemos

$$\begin{aligned} f(W(T)) - f(W(0)) &= \sum_{i=0}^{n-1} [f(W(t_{i+1})) - f(W(t_i))] \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} f'(W(t_i))\,[W(t_{i+1}) - W(t_i)] \\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} f''(W(t_i))\,[W(t_{i+1}) - W(t_i)]^2 \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} W(t_i)\,[W(t_{i+1}) - W(t_i)] \\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} [W(t_{i+1}) - W(t_i)]^2 \end{aligned}$$

Evaluando la expresión anterior en el límite tenemos que

$$\lim_{|\Pi|\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} W(t_i)\,[W(t_{i+1}) - W(t_i)] = \int_0^T W(t)dW_t$$

y

$$\lim_{|\Pi|\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} [W(t_{i+1}) - W(t_i)]^2 =< W, W >_T = T$$

por lo tanto

$$\frac{1}{2}W^2(T) = \int_0^T W(t)dW_t + \frac{1}{2}T$$

y observemos además que

$$\lim_{|\Pi|\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f'(W(t_i))\,[W(t_{i+1}) - W(t_i)] = \int_0^T f'(W(t))dW_t$$

y

$$\lim_{|\Pi|\to 0} \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} f''(W(t_i))\,[W(t_{i+1}) - W(t_i)]^2 = \int_0^T f''(W(t))dt$$

Esto es

$$\begin{aligned} f(W(T)) - f(W(0)) &= \int_0^T W(t)dW_t + \frac{1}{2}T \\ &= \int_0^T f'(W(t))dW_t + \frac{1}{2}\int_0^T f''(W(t))dt \end{aligned}$$

Con esto verificamos la fórmula de Itô para la función $\frac{1}{2}x^2$. Observemos que el resultado es perfectamente coincidente con lo obtenido en el ejemplo 3.1.

Podemos seguir la misma idea para verificar el lema de Itô para una función $f(t, W(t))$ cualquiera. Comenzamos pues, por escribir f en su expansión de Taylor.

$$\begin{aligned} f(t_{i+1}, x_{i+1}) - f(t_i, x_i) =& f_t(t_i, x_i)(t_{i+1} - t_i) + f_x(t_i, x_i)(x_{i+1} - x_i) \\ &+ \frac{1}{2}f_{tt}(t_i, x_i)(t_{i+1} - t_i)^2 + f_{tx}(t_i, x_i)(t_{i+1} - t_i)(x_{i+1} - x_i) \\ &+ \frac{1}{2}f_{xx}(t_i, x_i)(x_{i+1} - x_i)^2 + \text{términos de mayor orden} \end{aligned}$$

Si de nuevo, si expresamos $f(T, W(T)) - f(0, W(0))$ como suma telescópica y u samos su expansión de Taylor, tenemos que

$$
\begin{aligned}
f(T, W(T)) - f(0, W(0)) &= \sum_{i=0}^{n-1} [f(t_{i+1}, W_{i+1}) - f(t_i, W_i)] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} f_t(t_i, W_i)(t_{i+1} - t_i) + \sum_{i=0}^{n-1} f_x(t_i, W_i)(W_{i+1} - W_i) \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} f_{tt}(t_i, W_i)(t_{i+1} - t_i)^2 \\
&+ \sum_{i=0}^{n-1} f_{tx}(t_i, W_i)(t_{i+1} - t_i)(W_{i+1} - W_i) \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} f_{xx}(t_i, W_i)(W_{i+1} - W_i)^2
\end{aligned}
$$

Cuando hacemos $\|\Pi\|$, el primer sumando converge a

$$\int_0^T f_t(t, W_t)dt \tag{3.54}$$

el segundo término tiende a la integral estocástica

$$\int_0^T f_x(t, W_t)dW_t \tag{3.55}$$

el quinto término tiende a

$$\int_0^T f_{xx}(t, W_t)dt \tag{3.56}$$

Los términos tres y cuatro no contribuyen en nada, de hecho veamos que

$$
\begin{aligned}
\lim_{\|\Pi\| \to 0} \left| \sum_{i=0}^{n-1} f_{tt}(t_i, W_i)(t_{i+1} - t_i)^2 \right| &\leq \lim_{\|\Pi\| \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} |f_{tt}(t_i, W_i)| \, (t_{i+1} - t_i)^2 \\
&\leq \lim_{\|\Pi\| \to 0} \|\Pi\| \lim_{|\Pi| \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} |f_{tt}(t_i, W_i)| \, (t_{i+1} - t_i)^2 \\
&= 0 \cdot \int_0^T |f_{tt}(t, W_t)| \, dt \\
&= 0
\end{aligned}
$$

un argumento muy parecido nos asegura que el cuarto término tampoco contribuye en nada

$$
\begin{aligned}
\lim_{\|\Pi\|\to 0}\left|\sum_{i=0}^{n-1} f_{tx}\left(t_i, W_i\right)\left(t_{i+1}-t_i\right)\left(W_{i+1}-W_i\right)\right| & \\
\leq \lim_{\|\Pi\|\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\left|f_{tx}\left(t_i, W_i\right)\right|\left(t_{i+1}-t_i\right)\left|W_{i+1}-W_i\right| & \\
\leq \lim_{\|\Pi\|\to 0}\max_{0\leq k\leq n-1}\left|W_{k+1}-W_k\right| \lim_{\|\Pi\|\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\left|f_{tx}\left(t_i, W_i\right)\right|\left(t_{i+1}-t_i\right) & \\
= 0\cdot\int_0^T \left|f_{tx}(t, w_t)\right| dt = 0 &
\end{aligned}
$$

los términos de mayor orden se eliminan a través de argumentos similares, por esta razón se eliminaron del análisis. Finalmente; usando las ecuaciones (3.54), (3.55) y (3.56) se verifica el lema de Itô, es decir

$$
\begin{aligned}
f(T, W(T)) = f(0, W(0)) &+ \int_0^T f_t(t, W(t))dt \\
&+ \int_0^T f_x(t, W(t))dW_t + \frac{1}{2}\int_0^T f_{xx}(t, W(t))dt
\end{aligned}
$$

La fórmula de Itô pude escribirse en su notación diferencial

$$
\begin{aligned}
df(t, W_t) =& f_t(t, w_t)dt + f_x(t, W_t)dW_t \\
&+ \frac{1}{2}f_{tt}(t, W_t)dtdt + f_{xt}(t, W_t)dtdW + \frac{1}{2}f_{xx}(t, W_t)dWdW
\end{aligned} \tag{3.57}
$$

usando nustra tabla de multiplicar (tabla 3.1) reducimos la ecuación anterior a

$$
df(t, W_t) = f_t(t, w_t)dt + f_x(t, W_t)dW_t + \frac{1}{2}f_{xx}(t, W_t)dt \tag{3.58}
$$

esta última ecuación es la versión diferencial de la fórmula de Itô.

3.4.1. Lema de Itô para procesos de Itô

El proceso de precios que se propuso requiere de una versión un poco más general del lema de Itô. Con esta idea en mente, considérese la siguiente definición

Definición 3.5 (Proceso de Itô)
Sea $W(t)$, $t \geq 0$ un movimiento browniano y sea $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ la filtración asociada. Un proceso de Itô es un proceso estocástico de la forma

$$X(t) = X(0) + \int_0^t g(u)du + \int_0^t f(u)dW_u \tag{3.59}$$

donde $X(0)$ es determinística y $g(u)$ y $f(u)$ son procesos adaptados.

En este sentido, definimos la integral estocástica con respecto a $X(t)$ del siguiente modo

Definición 3.6
Sea $X(t)$ un proceso de Itô y sea $h(t)$ un proceso adaptado a la filtración. Definimos la integral de h respecto a X como

$$\int_0^t h(u)dX_u = \int_0^t h(u)g(u)du + \int_0^t h(u)f(u)dW_u \tag{3.60}$$

De la ecuación (3.13) vemos que el proceso de precios que se propuso es un proceso de Itô, por lo tanto resulta indispensable para nuestros fines, desarrollar una versión del lema de Itô que sirva para manipular expresiones de este tipo.

El primer paso para lograr este objetivo, es calcular la variación cuadrática de un proceso de Itô, esto se realiza a continuación

Proposición 3.10
La variación cuadrática de un proceso de Itô X_t definido como en (3.59) es

$$< X, X >_t = \int_0^t f^2(u)du \tag{3.61}$$

Prueba. Primero hacemos $I(t) = \int_0^t f(u)dW_u$ y $J(t) = \int_0^t g(u)du$. Ambos procesos son continuos con respecto a su límite superior de integración. Como de costumbre definimos una partición Π como $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$ y calculamos;

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1} [X(t_{i+1}) - X(t_i)]^2 =& \sum_{i=0}^{n-1} [I(t_{i+1}) - I(t_i)]^2 + \sum_{i=0}^{n-1} [J(t_{i+1}) - J(t_i)]^2 \\ &+ 2\sum_{i=0}^{n-1} [I(t_{i+1}) - I(t_i)]\,[J(t_{i+1}) - J(t_i)]\end{aligned}$$

Cuando $\|\Pi\| \to 0$ el primer término tiende a la variación cuadrática de $I(t)$. De acuerdo con la proposición 3.7 esto es $\int_0^t f^2(u)du$. Para evaluar el límite del segundo término, observemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n-1} [J(t_{i+1}) - J(t_i)]^2 &\leq \max_{0\leq k\leq n-1} |J(t_{k+1}) - J(k_i)| \sum_{i=0}^{n-1} |[J(t_{i+1}) - J(t_i)]| \\
&= \max_{0\leq k\leq n-1} |J(t_{k+1}) - J(k_i)| \sum_{i=0}^{n-1} \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} g(u)du \right| \\
&\leq \max_{0\leq k\leq n-1} |J(t_{k+1}) - J(k_i)| \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |g(u)|\, du \\
&\leq \max_{0\leq k\leq n-1} |J(t_{k+1}) - J(k_i)| \int_0^t |g(u)|\, du
\end{aligned}$$

como $J(t)$ es continua en su límite superior de integración, si hacemos $\|\Pi\| \to 0$ entonces

$$\max_{0\leq k\leq n-1} |J(t_{k+1}) - J(k_i)| \int_0^t |g(u)|\, du \longrightarrow 0$$

La prueba de que el tercer término tampoco aporta a la variación cuadrática de X es muy similar, en este caso tenemos que

$$\begin{aligned}
&2\sum_{i=0}^{n-1} [I(t_{i+1}) - I(t_i)]\, [J(t_{i+1}) - J(t_i)] \\
&\qquad \leq 2 \max_{0\leq k\leq n-1} |I(t_{k+1}) - I(t_k)| \sum_{i=0}^{n-1} |[J(t_{i+1}) - J(t_i)]| \\
&\qquad \leq 2 \max_{0\leq k\leq n-1} |I(t_{k+1}) - I(t_k)| \int_0^t |g(u)|\, du
\end{aligned}$$

de nuevo, como $I(t)$ es continua en su límite superior de integración entonces si $\|\Pi\| \to 0$

$$2 \max_{0\leq k\leq n-1} |I(t_{k+1}) - I(t_k)| \int_0^t |g(u)|\, du \longrightarrow 0$$

□

Esta proposición es fácil de obtener si escribimos (3.59) en su notación diferencial

$$dX_t = g(t)dt + f(t)dW_t \tag{3.62}$$

usando la tabla (3.1) se sigue que

$$\begin{aligned}
dXdX &= (g(t)dt + f(t)dW_t)\, (g(t)dt + f(t)dW_t) \\
&= g^2(t)dtdt + 2g(t)f(t)dtdW_t + f^2(t)dWdW \\
&= f^2(t)dt
\end{aligned}$$

Supongamos ahora que tenemos una **función** $h(t, X(t))$ que depende de un proceso de Itô $X(t)$. Para enunciar el lema de Itô aplicable a esta función procedemoe de la misma forma en que lo hicimos cuando se enuncio la proposicion (3.9). En este caso, la expansión de Taylor de la función $h(t, X(t))$ nos conduce a

$$\begin{aligned} h(T,X(T)) - h(0,X(0)) =& \sum_{i=0}^{n-1} [h(t_{i+1}, X_{i+1}) - h(t_i, X_i)] \\ =& \sum_{i=0}^{n-1} h_t(t_i, X_i)(t_{i+1} - t_i) + \sum_{i=0}^{n-1} h_x(t_i, X_i)(X_{i+1} - X_i) \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} h_{tt}(t_i, X_i)(t_{i+1} - t_i)^2 \\ &+ \sum_{i=0}^{n-1} h_{tx}(t_i, X_i)(t_{i+1} - t_i)(X_{i+1} - X_i) \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} h_{xx}(t_i, X_i)(X_{i+1} - X_i)^2 \end{aligned}$$

con argumentos similares a los usados en el caso cuanso $X = W$ se sigue que el primer sumando de la expresión anterior tiende a

$$\int_0^T h_t(t, X)dt$$

el segundo término tiende a

$$\int_0^T h_x(t, X)dX = \int_0^T h_x(t, X)g(t)dt + \int_0^T h_x(t, X)f(t)dW_t$$

el tercer y cuarto términos tienden a cero y el quinto sumando tiende a

$$\frac{1}{2}\int_0^T h_{xx}(t, X)d < X, X >_t = \frac{1}{2}\int_0^T h_{xx}(t, X)f^2(t)dt$$

esto es suficiente para enunciar el lema de Itô para procesos de Itô

PROPOSICIÓN 3.11 (LEMA DE ITÔ PARA PROCESOS DE ITÔ)
Sea $X(t)$, $t \geq 0$ un proceso de Itô y se $h(t, X)$ una función para la cual las derivadas $h_t(t, x)$, $h_x(t, x)$ y $h_{xx}(t, x)$ estan definidas y son continuas.

Entonces, para cada $T \geq 0$

$$\begin{aligned}
h(T, X(T)) =& h(0, X(0)) + \int_0^T h_t(t, X)dt + \int_0^T h_x(t, X)g(t)dt \\
&+ \int_0^T h_x(t, X)f(t)dW_t + \frac{1}{2}\int_0^T h_{xx}(t, X)f^2(t)dt \\
=& h(0, X(0)) + \int_0^T h_t(t, X) + h_x(t, X)g(t) + \frac{1}{2}h_{xx}(t, X)f^2(t)dt \\
&+ \int_0^T h_x(t, X)f(t)dW_t
\end{aligned} \tag{3.63}$$

Por lo general es más fácil trabajar con la notación diferencial, escribiendo la ecuación (3.63) en esta forma, se tiene que

$$\begin{aligned}
dh(t, X) =& h_t(t, X)dt + h_x(t, X)dX + \frac{1}{2}h_{xx}(t, X)dXdX \\
=& \left(h_t(t, X) + h_x(t, X)g(t) + \frac{1}{2}h_{xx}(t, X)f^2(t)\right) dt + h_x(t, X)f(t)dW
\end{aligned} \tag{3.64}$$

Con este resultado finalmente hemos construido las herramientas suficientes para desarrollar nuestro primer modelo de valuación. Este se describe en la siguiente sección

3.5. Ecuación de Black y Scholes

En esta sección se describe un camino para obtener la ecuación diferencial de Black y Scholes. Esta ecuación es útil para encontrar el precio de cualquier derivado europeo. En nuestro caso se establecerán condiciones finales y de frontera que resuelvan el problema de valuación de opciones europeas vainilla.

El primer paso para construir la ecuación de Black y Scholes es retomar nuestro modelo de precios. En las ecuaciones (3.13) y (3.14) se estableció la dinámimica que deben seguir los precios. Para construir nuestro modelo usaremos este par de ecuaciones realizando un pequeño e inofensivo cambio. Si hacemos $m = \mu - 1/2\sigma^2$, la ecuación (3.14) se reescribe como

$$S_t = S_0 \exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma W_t\right\} \tag{3.65}$$

donde $W_t \sim N(0, t)$.

Aplicando el lema de Itô a

$$f(t,W) = S_0 \exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right\}$$

se obtiene en primer lugar que

$$f_t = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)S_t \qquad f_x = \sigma S_t \qquad f_{xx} = \sigma^2 S_t$$

usando la ecuación (3.38) se sigue que

$$\begin{aligned} dS_t &= \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)S_t dt + \sigma S_t dW_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t dt \\ &= \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \end{aligned} \tag{3.66}$$

Este resultado es perfectamente congruente con lo obtenido en la ecuaciones (3.13) y (3.14).

El resto del modelo no es más que una adaptación de lo que hicimos en tiempo discreto. Por una parte necesitamos construir un portafolio con valor V_t al tiempo t que replique el derivado. Para lograrlo, al igual que en el el modelo binomial, será suficiente si armamos este portafolio el subyacente y un activo libre de riesgo que paga una tasa r. Incluiremos $\Delta(t)$ unidades del subyacente al tiempo t en el portafolio, el resto se invierte en la cuenta bancaria. Esto es, invertiremos $V(t) - \Delta(t)S_t$ en el activo libre ded riesgo. Esta cantidad puede ser negativa o positiva. En el primer caso habremos pedido prestado para poder construir el portafolio.

El diferencial de este portafolio en cada tiempo t depende del cambio en el precio del subyacente $\Delta(t)dS_t$ y el cambio en activo libre de riesgo $r\left(V(t) - \Delta(t)S_t\right)dt$ esto es

$$dV_t = \Delta(t)dS_t + r\left(V(t) - \Delta(t)S_t\right)dt \tag{3.67}$$

esta ecuación es equivalente a la ecución obtenida en el caso discreto cuando se trató de replicar el derivado. En el caso discreto se obtuvo la ecuación

$$V_{n+1} = \Delta_n S_{n+1} + (1+r)\left[V_n - \Delta_n S_n\right]$$

rearreglando términos se sigue que

$$V_{n+1} - V_n = \Delta_n\left(S_{n+1} - S_n\right) + r\left[V_n - \Delta_n S_n\right]$$

esta ecuación es el equivalente discreto de (3.67). Por otro lado, sustituyendo en (3.67) el valor obtenido en (3.66) para dS_t obtenemos

$$\begin{aligned} dV_t &= \Delta(t)\left(\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t\right) + r\left(V(t) - \Delta(t) S_t\right) dt \\ &= rV(t)dt + \Delta(t)(\mu - r)S_t dt + \Delta(t)\sigma S_t dW_t \end{aligned} \tag{3.68}$$

Llamemos $C_t = C(t, S_t)$ al precio al tiempo t del activo derivado que deseamos replicar. Si deseamos eliminar cualquier posibilidad de arbitraje entonces $C(t) = V(t)$ en todo tiempo $t \in [0, T]$. Y por supuesto $dC_t = dV_t$. Esto sugiere la necesidad de calcular el diferencial de C_t. Aplicando el lema de Itô, tal como se desarrollo en (3.64) se tiene que

$$\begin{aligned} dC_t &= C_t dt + C_x dS + \frac{1}{2} C_{xx} dS dS \\ &= C_t dt + C_x \mu S_t dt + \frac{1}{2} C_{xx} \sigma^2 S_t^2 dt + C_x \sigma S_t dW_t \\ &= \left(C_t + C_x \mu S_t + \frac{1}{2} C_{xx} \sigma^2 S_t^2\right) dt + C_x \sigma S_t dW_t \end{aligned} \tag{3.69}$$

igualando los términos de (3.68) y (3.69) y considerando la condición $V(t) = C(t)$ se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$C_t + C_x \mu S_t + \frac{1}{2} C_{xx} \sigma^2 S^2 = rC_t + \Delta(t)\mu S_t - \Delta(t) r S_t \tag{3.70}$$

$$C_x \sigma S_t = \Delta(t)\sigma S_t \tag{3.71}$$

de (3.71) se obtiene que $\Delta(t) = C_x$ sustituyendo este resultado en (3.70) se sigue que

$$\begin{aligned} & C_t + C_x \mu S_t + \frac{1}{2} C_{xx} \sigma^2 S^2 = rC_t + C_x \mu S_t - C_x r S_t \\ \Rightarrow \quad & C_t + C_x r S_t + \frac{1}{2} C_{xx} \sigma^2 S^2 - rC_t = 0 \end{aligned} \tag{3.72}$$

la ecuación anterior es la ecuación diferencial parcial de Black y Scholes. Observemos que para deducirla no fué necesario hacer mención de la naturaleza del derivado, por lo tanto es útil para valuar cualquier tipo de derivado europeo. Para encontrar el precio de una opción europea vainilla es necesario analizar sus características.

Recordemos que la función de pago de una opción europea vainilla esta determinada por la función $h(S_t) = \text{máx}(S_t - K, 0) = (S_t - K)_+$. De aqui se deducen un par de condiciones de frontera

$$C(0, t) = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{S_t \to \infty} C(S_t, t) = S_t$$

así mismo tenemos una condición final clara

$$C(S_T, T) = (S_T - K)_+$$

considerando estas condiciones finales y de frontera junbto con (3.72) se obtiene la ecuación de Black y Scholes para la valuación de una opción europea vainilla. En el siguiente cuadro se resume la ecuación de Black y Scholes, cambiando un poco la noteción por resultar más conveniente en lo sucesivo

Ecuación de Black-Scholes

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial S} r S_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 - rC = 0$$

$$C(0,t) = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{S_t \to \infty} C(S_t, t) = S_t \tag{3.74}$$

$$C(S_T, T) = (S_T - K)_+$$

La solución de esta ecuación debe coincidir con la fórmula de valuación obtenida en la sección (2.7) si en verdad describe la dinámica de la opción.

La estrategia que se usa para resolver la ecución (3.74) consiste en reducirla a la ecuación de calor. Realizar esta sustitución es un tanto tedioso pero no es difícil.

Para resolver la ecuación de Black y Scholes comencemos por suponer que existen funciones $f(\cdot)$ y $g(\cdot,\cdot)$ tales que

$$C(S_t, t) = f(t) g(u_1, u_2) \tag{3.75}$$

donde

$$u_1 = u_1(S,t) \qquad u_2 = u_2(S,t)$$

vemos entonces que

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} g + f\left[\frac{\partial g}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial t}\right]$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial S} &= f\frac{\partial g}{\partial S} \\ &= f\left[\frac{\partial g}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial S} + \frac{\partial g}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial S}\right]\end{aligned}$$

y además

$$\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = f\left[\frac{\partial^2 g}{\partial u_1^2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial S}\right)^2 + \frac{\partial^2 g}{\partial u_1 \partial u_2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial S}\right)\frac{\partial u_1}{\partial S} + \left(\frac{\partial g}{\partial u_1}\right)\frac{\partial^2 u_1}{\partial S^2}\right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 g}{\partial u_2^2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial S}\right)^2 + \frac{\partial^2 g}{\partial u_1 \partial u_2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial S}\right)\frac{\partial u_2}{\partial S} + \left(\frac{\partial g}{\partial u_2}\right)\frac{\partial^2 u_2}{\partial S^2}\right]$$

Sustituyendo en la ecuación de Black & Scholes se obtiene

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial t} g + f\left[\frac{\partial g}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial t}\right] \\
&+ \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 f\left[\frac{\partial^2 g}{\partial u_1^2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial S}\right)^2 + \frac{\partial^2 g}{\partial u_1 \partial u_2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial S}\right)\frac{\partial u_1}{\partial S} + \left(\frac{\partial g}{\partial u_1}\right)\frac{\partial^2 u_1}{\partial S^2}\right. \\
&\left. + \frac{\partial^2 g}{\partial u_2^2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial S}\right)^2 + \frac{\partial^2 g}{\partial u_1 \partial u_2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial S}\right)\frac{\partial u_2}{\partial S} + \left(\frac{\partial g}{\partial u_2}\right)\frac{\partial^2 u_2}{\partial S^2}\right] \\
&+ rSf\left[\frac{\partial g}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial S} + \frac{\partial g}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial S}\right] \\
&- fgr = 0
\end{aligned}$$

dividiendo la expresión anterior entre f obtenemos

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{f'}{f} - r\right) g + \left[\frac{\partial g}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial t}\right] \\
&+ \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \left[\frac{\partial^2 g}{\partial u_1^2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial S}\right)^2 + \frac{\partial^2 g}{\partial u_1 \partial u_2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial S}\right)\frac{\partial u_1}{\partial S} + \left(\frac{\partial g}{\partial u_1}\right)\frac{\partial^2 u_1}{\partial S^2}\right. \\
&\left. + \frac{\partial^2 g}{\partial u_2^2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial S}\right)^2 + \frac{\partial^2 g}{\partial u_1 \partial u_2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial S}\right)\frac{\partial u_2}{\partial S} + \left(\frac{\partial g}{\partial u_2}\right)\frac{\partial^2 u_2}{\partial S^2}\right] \\
&+ rS\left[\frac{\partial g}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial S} + \frac{\partial g}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial S}\right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

El primer término de la suma anterior lo podemos eliminar si encontramos una función f que cumpla

$$\frac{f'}{f} - r = 0 \qquad f(T) = 1$$

resolviendo la ecuación diferencial anterior se obtiene que

$$f = e^{-r(T-t)} \tag{3.76}$$

si además suponemos que

$$u_2 = u_2(t) = B\,(T-t)$$

reducimos la ecuación de forma notable y tenemos

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial g}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial g}{\partial u_2}B \\
&+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\left[\frac{\partial^2 g}{\partial u_1^2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial S}\right)^2 + \frac{\partial g}{\partial u_1}\frac{\partial^2 u_1}{\partial S^2}\right] \\
&+\frac{\partial g}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial S} \\
&=0
\end{aligned}$$

si hacemos $\frac{\partial g}{\partial u_2} = \frac{\partial^2 g}{\partial u_1^2}$ entonces

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial g}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 g}{\partial u_1^2}B \\
&+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\left[\frac{\partial^2 g}{\partial u_1^2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial S}\right)^2 + \frac{\partial g}{\partial u_1}\frac{\partial^2 u_1}{\partial S^2}\right] \\
&+rs\frac{\partial g}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial S} \\
&=0
\end{aligned}$$

lo anterior lo reescribimos como

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\left(\frac{\partial u_1}{\partial S}\right)^2 - B\right]\frac{\partial^2 g}{\partial u_1^2} \\
&+\frac{\partial g}{\partial u_1}\left[\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial S^2} + rs\frac{\partial u_1}{\partial S}\right] \\
&=0
\end{aligned} \tag{3.77}$$

si tomamos

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\left(\frac{\partial u_1}{\partial S}\right)^2 = B = A^2$$

eliminamos el primer término de la ecuación (3.77). Al imponer esta condición, se tiene que

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sigma S\frac{\partial u_1}{\partial S} = A$$

o bien

$$\frac{\partial u_1}{\partial S} = A\frac{\sqrt{2}}{\sigma S}$$

resolviendo la ecuación diferencial anterior se sigue que

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{\sqrt{2}A}{\sigma}\left(\ln(S) - \ln(K)\right) + D(t) \\ &= \frac{\sqrt{2}A}{\sigma}\ln\left(\frac{S}{K}\right) + D(t) \end{aligned}$$

notemos que $\ln(K)$ es tan solo una constente de integración. Además, se ha incluido una función $D(t)$ puesto que $u_1(S,t)$ es función del precio y del tiempo. Regresando a la ecuación (3.77) se tiene que

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = D'(t) \qquad \frac{\partial u_1}{\partial S} = \frac{A\sqrt{2}}{\sigma}\frac{1}{s} \qquad \frac{\partial^2 u_1}{\partial S^2} = -\frac{A\sqrt{2}}{\sigma}\frac{1}{S^2}$$

sustituiyendo en (3.77) podemos escribir

$$\begin{aligned} &D'(t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\left(-\frac{A\sqrt{2}}{\sigma}\frac{1}{S^2}\right) + rs\left(\frac{A\sqrt{2}}{\sigma}\frac{1}{s}\right) \\ =&D'(t) - \frac{1}{2}\sigma^2\frac{A\sqrt{2}}{\sigma} + r\frac{A\sqrt{2}}{\sigma} \\ =&0 \end{aligned}$$

de aqui se obtiene que

$$\begin{aligned} D'(t) &= \frac{1}{2}\sigma^2\frac{A\sqrt{2}}{\sigma} - r\frac{A\sqrt{2}}{\sigma} \\ &= -\frac{A\sqrt{2}}{\sigma}\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) \end{aligned}$$

integramos

$$\begin{aligned} & D(t) = \int_T^t -\frac{A\sqrt{2}}{\sigma}\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)ds \\ \Rightarrow\quad & D(t) = \frac{A\sqrt{2}}{\sigma}\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T - t) \end{aligned}$$

con esto se tiene que

$$u_1 = \frac{A\sqrt{2}}{\sigma}\left(\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right)$$

notemos además que

$$u_1(S_T,T) = \frac{A\sqrt{2}}{\sigma}\ln\left(\frac{S_T}{K}\right) \qquad \Rightarrow \qquad S_TT = Ke^{\frac{\sigma}{A\sqrt{2}}u_1(S,T)}$$

sustituyendo en C se sigue

$$\begin{aligned} C(S,T) &= f(T)g(u_1(S,T),u_2(S,T)) \\ &= g(u_1(S,T),0) \\ &= \text{máx}\,(S_T - K, 0) \\ &= \text{máx}\left(Ke^{\frac{\sigma}{A\sqrt{2}}u_1(S,T)} - K, 0\right) \\ &= K\,\text{máx}\left(e^{\frac{\sigma}{A\sqrt{2}}u_1(S,T)} - 1, 0\right) \end{aligned}$$

Pero,

$$\begin{aligned} & e^{\frac{\sigma}{A\sqrt{2}}u_1(S,T)} - 1 \geq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{u_1\sigma}{A\sqrt{2}} \geq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & u_1 \geq 0 \end{aligned}$$

podemos definir entonces

$$g_0(u_1) = g(u_1(S,T)) = \begin{cases} K\,\text{máx}\left(e^{\frac{\sigma}{A\sqrt{2}}u_1(S,T)} - 1, 0\right), & \text{si } u_1 \geq 0 \\ 0, & \text{si } u_1 < 0 \end{cases}$$

con esto hemos reducido el problema a resolver

$$\frac{\partial g}{\partial u_2} = \frac{\partial^2 g}{\partial u_1^2}$$

con $g(u_1,0) = g_0(u_1)$, $-\infty < u_1 < \infty$ $u_2 > 0$ es decir redujimos el problema a una ecuación de calor. Además se tiene que

$$u_1 = \frac{A\sqrt{2}}{\sigma}\left(\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right)$$

$$u_2 = A^2(T-t)$$

y

$$f(t) = e^{-r(T-t)}$$

la solución general de la ecuación de calor esta dada por

$$g(u_1, u_2) = \frac{1}{2\sqrt{\pi u_2}} \int_{-\infty}^{\infty} g_0(x) \exp\left\{-\frac{(x-u_1)^2}{4u_2}\right\} dx$$

si hacemos $y = \frac{x-u_1}{\sqrt{2u_2}}$ entonces $x = \sqrt{2u_2}y + u_1$ y la solución anterior se traduce a

$$\begin{aligned} g(u_1, u_2) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi u_2}} \int_{-\infty}^{\infty} g_0(\sqrt{2u_2}y + u_1) \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\} \sqrt{2u_2}dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g_0(\sqrt{2u_2}y + u_1) \exp\left\{-\frac{y^2}{2}\right\} dy \end{aligned}$$

si $y \leq -\frac{u_1}{\sqrt{2u_2}}$ entonces $g_0 = 0$ y veamos que

$$-\frac{u_1}{\sqrt{2u_2}} = -d_2$$

donde

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

sustituyendo este valor y las formas funcionales de g_0, u_1 y u_2 en la solución de la ecuación de calor se obtiene que

$$g(u_1, u_2) = e^{r(T-t)} S_t N(d_1) - KN(d_2) \tag{3.78}$$

donde $d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{T-t}$. Sustituyendo (3.76) y (3.78) en (3.75) concluimos que

$$C(S_t, t) = S_t N(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2) \tag{3.79}$$

Esta, tal como se vió en la sección 2.7 es la fórmula de Black y Scholes y da una expresión cerrada para el precio de una opción europea vainilla. Resumimos este resultado en el siguiente cuadro

Fórmula de Black-Scholes

$$C(S_t, t) = S_t N(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \tag{3.81}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

Con ayuda de la siguiente proposción se prueba que la fórmula de Black y Scholes es efectivamente solución de la ecuación de Black y Scholes.

PROPOSICIÓN 3.12
En el modelo de Black y Scholes

$$S_t N'(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N'(d_2) = 0 \tag{3.82}$$

PRUEBA.Primero notemos que

$$\begin{aligned} d_2^2 &= \left(d_1 - \sigma\sqrt{T-t}\right)^2 \\ &= d_1^2 - 2d_1\sigma\sqrt{T-t} + \sigma^2 (T-t) \end{aligned}$$

pero como

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

entonces

$$\begin{aligned} d_2^2 &= d_1^2 - 2\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) - 2r(T-t) - \sigma^2 (T-t) + \sigma^2 (T-t) \\ &= d_1^2 - 2\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) - 2r(T-t) \\ \Rightarrow \quad -\frac{1}{2}d_2^2 &= -\frac{1}{2}d_1^2 + \ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + r(T-t) \end{aligned}$$

Ahora

$$\begin{aligned} N'(d_2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}d_2^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}d_1^2} \frac{S_t}{K} e^{r(T-t)} \\ &= e^{r(T-t)} \frac{S_t}{K} N'(d_1) \end{aligned}$$

por lo tanto se tiene que

$$\begin{aligned} S_t N'(d_1) - e^{-r(T-t)} K N'(d_2) &= S_t N'(d_1) - e^{-r(T-t)} K e^{r(T-t)} \frac{S_t}{K} N'(d_1) \\ &= S_t N'(d_1) - S_t N'(d_1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

con esta proposicion en la mano ya podemos mostrar que la fórmula de Black–Scholes efectivamente cumple la ecuación de Black–Scholes.

PRUEBA. Para probar el resultado basta con encontrar las parciales de la ecuación de Black-Scholes y sustituirlas en la ecuación. Primero encontraremos

$$\frac{\partial C}{\partial S} = N(d_1) + S_t N'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial S} - Ke^{-r(T-t)}N'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial S}$$

pero como $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$ entonces

$$\begin{aligned}\frac{\partial d_1}{\partial S} &= \frac{\partial d_1}{\partial S}\\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\frac{1}{S_t}\end{aligned}$$

y por tanto

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial S} &= N(d_1) + \left(S_t N'(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N'(d_2)\right)\frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\frac{1}{S_t}\\ &= N(d_1)\end{aligned}$$

la última igualdad se justifica con el proposición 3.12 que probamos previamente. Si recordamos que la parcial de C respecto a S era la cantidad a invertir en el subyacente se tiene

$$\Delta = N(d_1)$$

con lo anterior, la segunda parcial de C respecto a S se calcula fácilmente

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} &= N'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial S}\\ &= N'(d_1)\frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\frac{1}{S_t}\end{aligned}$$

a esta última derivada se le suele llamar Γ por lo tanto

$$\Gamma = N'(d_1)\frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\frac{1}{S_t}$$

Por último necesitamos calcular la parcial de C con respecto de t:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = S_t N'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial t} - Ke^{-r(T-t)}N'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial t} - rKe^{-r(T-t)}N(d_2)$$

pero como $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$ entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\partial d_2}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(d_1 - \sigma\sqrt{T-t}\right) \\
&= \frac{\partial d_1}{\partial t} + \frac{\sigma}{2}\frac{1}{\sqrt{T-t}}
\end{aligned}$$

si sustituimos la igualdad anterior en la parcial se sigue que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C}{\partial t} =& S_t N'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial t} - Ke^{-r(T-t)}N'(d_2)\frac{\partial d_1}{\partial t} \\
&- Ke^{-r(T-t)}N'(d_2)\frac{\sigma}{2}\frac{1}{\sqrt{T-t}} - rKe^{-r(T-t)}N(d_2) \\
=& \left(S_t N'(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N'(d_2)\right)\frac{\partial d_1}{\partial t} \\
&- Ke^{-r(T-t)}N'(d_2)\frac{\sigma}{2}\frac{1}{\sqrt{T-t}} - rKe^{-r(T-t)}N(d_2) \\
=& - Ke^{-r(T-t)}\frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}}N'(d_2) - rKe^{-r(T-t)}N(d_2)
\end{aligned}$$

la última igualdad, de nuevo, se justifica a través del proposición 3.12. A esta última derivada se le suele llamar Θ por lo tanto

$$\Theta = -Ke^{-r(T-t)}\frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}}N'(d_2) - rKe^{-r(T-t)}N(d_2)$$

de hecho podemos escribir la ecuación de Black–Scholes como

$$\Theta + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\Gamma + rS\Delta - rC = 0$$

si sustituimos los valores que encontramos para Θ, Γ y Δ en la ecuación de Black–Scholes, se debe verificar la igualdad anterior. Sustituyamos

$$\begin{aligned}
\Theta + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\Gamma + rS\Delta - rC =& - Ke^{-r(T-t)}\frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}}N'(d_2) - rKe^{-r(T-t)}N(d_2) \\
&+ \frac{1}{2}N'(d_1)\frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\frac{1}{S_t}\sigma^2 S_t^2 + N(d_1)Sr \\
&- rS_t N(d_1) + rKe^{-(T-t)}N(d_2) \\
=& (SN'(d_1) - Ke^{-(T-t)}N'(d_2))\frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}} \\
=& 0
\end{aligned}$$

con lo que se demuestra el resultado. □

En el transcurso de la demostración anterior se mostraron varias de las "Griegas", derivadas que nos muestran la sensibilidad del precio de una opción con respecto a diferentes parámetros. En realidad las únicas griegas que nos hace falta encontrar son $\mathcal{V}$ y ρ comenzamos por calcular $\mathcal{V}$. Vega se define como la parcial del precio de la opción respecto a la volatilidad, calculamos entonces:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C}{\partial \sigma} &= S_t N'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - Ke^{-r(T-t)}N'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial \sigma} \\
&= S_t N'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - Ke^{-r(T-t)}N'(d_2)\left(\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - \sqrt{T-t}\right) \\
&= \left(S_t N'(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N'(d_2)\right)\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} + Ke^{-r(T-t)}N'(d_2)\sqrt{T-t} \\
&= \sqrt{T-t}Ke^{-r(T-t)}N'(d_2)
\end{aligned}$$

usando el proposición 3.12 se tiene que

$$S_t N'(d_1) = Ke^{-r(T-t)}N'(d_2)$$

damos entonces una expresión alternativa para $\mathcal{V}$

$$\mathcal{V} = \sqrt{T-t}Ke^{-r(T-t)}N'(d_2) = \sqrt{T-t}S_t N'(d_1)$$

La ρ se define como la parcial del precio de la opción con respecto a la tasa libre de riesgo, es decir

$$\frac{\partial C}{\partial r} = S_t N'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial r} - \left(-\left(T-t\right)Ke^{-r(T-t)}N\left(d_2\right) + Ke^{-r(T-t)}N'\left(d_2\right)\frac{\partial d_2}{\partial r}\right)$$

pero

$$\frac{\partial d_1}{\partial r} = \frac{\partial d_2}{\partial r} = \frac{\sqrt{T-t}}{\sigma}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C}{\partial r} &= \left(S_t N'(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N'\left(d_2\right)\right)\frac{\sqrt{T-t}}{\sigma} + \left(T-t\right)Ke^{-r(T-t)}N\left(d_2\right) \\
&= \left(T-t\right)Ke^{-r(T-t)}N\left(d_2\right)
\end{aligned}$$

El siguiente cuadro resume los resultados de las griegas.

Griegas

$$
\begin{aligned}
\Delta &= \frac{\partial C}{\partial S} = N(d_1) \\
\Gamma &= \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = N'(d_1)\frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\frac{1}{S_t} \\
\Theta &= \frac{\partial C}{\partial t} = -Ke^{-r(T-t)}\frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}}N'(d_2) - rKe^{-r(T-t)}N(d_2) \\
\mathcal{V} &= \frac{\partial C}{\partial \sigma} = \sqrt{T-t}Ke^{-r(T-t)}N'(d_2) = \sqrt{T-t}S_tN'(d_1) \\
\rho &= \frac{\partial C}{\partial r} = (T-t)\,Ke^{-r(T-t)}N\left(d_2\right)
\end{aligned}
\tag{3.84}
$$

El método de valuación que hemos descrito se fundamenta en la replicación de la opción. En este sentido, de acuerdo con lo que se discutió en el capítulo 2, lo único que hemos hecho es cumplir con la ley de un solo precio, sin embargo sabemos que lo que necesitamos para eliminar toda posibilidad de arbitraje, es encontrar una medida de valuación neutral al riesgo. En la siguiente sección se discute este problema, que como vimos en el segundo capitulo, nos provee también de un método de valuación.

3.6. Valuación neutral al riesgo

Sabemos que para poder valuar consistentemente debemos asegurarnos de la ausencia de posibilidades de arbitraje. En el caso discreto podíamos asegurar que no existían posibilidades de arbitraje si y sólo si existía una medida de probabilidad neutral al riesgo. En el caso continuo lo que podemos asegurar es que si existe una medida de probabilidad neutral al riesgo entonces no existen posibilidades de arbitraje. Sin embargo no podemos asegurar que la ausencia de posibilidades de arbitraje garantice la existencia de probabilidades neutrales al riesgo para asegurar esto se necesitan condiciones adicionales, sin embargo este resultado excede por mucho el nivel de una tesis de licenciatura y no se tratrá. Lo que si buscaremos será construir una medidad de probabilidad neutral al riesgo y la usaremos como herramienta de valuación.

Recordemos que si vivimos en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, una medidad de probabilidad neutral al riesgo es una medida de probabilidad

$\tilde{\mathbb{P}}$ equivalente a $\mathbb{P}$ tal que bajo esta medida, los precios descontados son martingala. Este es un problema ya que si usamos $\mathbb{P}$ veremos que de acuerdo con el modelo de precios que adoptamos, los precio descontados no son martingalas. En efecto sean $0 \leq t \leq T$, considerando nuestro modelo de precios tenemos

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[e^{-r(T-t)}S_T\middle|\,\mathcal{F}_t\right] &= e^{-r(T-t)}\mathbb{E}\left[S_t e^{\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)+\sigma(W_T-W_t)}\middle|\,\mathcal{F}_t\right]\\ &= e^{-r(T-t)}\mathbf{E}\left[S_t e^{\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)+\sigma(W_T-W_t)}\right]\\ &= S_t e^{(\mu-r)(T-t)}\end{aligned} \tag{3.85}$$

De la última ecuación vemos que los precios descontados serían martingala, usando la medida $\mathbb{P}$ sólo si $\mu = r$. Desafortundamente esto sólo sucede si es que tenemos mucha suerte.

Si r no es igual a μ entonces necesitamos buscar otra forma de asegurar que los precios descontados sean martingala. Los conceptos desarrollados en el capítulo 2 nos sugieren que esto se logra cambiando de medida. Encontrando una medida de probabildad neutral al riesgo.

La reflexión que haremos a continución es muyu poco formal, sin embargo nos dará una buena idea para lograr nuestro objetivo. Hace un momento se dijo que si $r = \mu$ entonces los precios son martingala, esta observación nos lleva a lo siguiente, que tal si forzamos a tener r en lugar de μ en nuestro modelo de precios. ¿Como logramos esto? Vamos a repetir el argumento usado en la ecuación (3.85), pero vamos a hacer un pequeño cambio

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[e^{-r(T-t)}S_T\middle|\,\mathcal{F}_t\right] &= e^{-r(T-t)}\mathbb{E}\left[S_t e^{\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)+\sigma(W_T-W_t)}\middle|\,\mathcal{F}_t\right]\\ &= e^{-r(T-t)}\mathbf{E}\left[S_t e^{\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)+\sigma(W_T-W_t)}\right]\\ &= e^{-r(T-t)}\mathbb{E}\left[S_t e^{\left(\mu+r-r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)+\sigma(W_T-W_t)}\right]\\ &= e^{-r(T-t)}\mathbb{E}\left[S_t e^{\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)+\sigma\left(W_T-W_t+\frac{\mu-r}{\sigma}(T-t)\right)}\right]\\ &= e^{-r(T-t)}\mathbf{E}\left[S_t e^{\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)+\sigma(W_T+\lambda T-W_t-\lambda t)}\right]\\ &= e^{-r(T-t)}\mathbb{E}\left[S_t e^{\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)+\sigma(B_T-B_t)}\right]\end{aligned} \tag{3.86}$$

En este desarrollo hemos definido $B_t = W_t + \lambda t$, donde

$$\lambda = \frac{\mu - r}{\sigma} \tag{3.87}$$

A esta λ se le conoce como el *premio al riesgo*. A esta λ se le puede dar un uso muy amplio, sin embargo aqui sólo la presentamos.

¿De que sirve la ecuación (3.87)? Si observamos no hemos hecho nada. El argumento que usamos en (3.86) logró sustituir μ por r sin embargo no podemos asegurar que los precios descontados sean martingala, pues B_t no es un movimiento browniano. La idea será entonces encontrar una medida de probabilidad $\tilde{P}$ equivalente a $\mathbb{P}$ bajo la cual B_t efectivamente sea movimiento browniano. Para esto definimos la variable aleatoria

$$Z = e^{-\lambda W_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t} \tag{3.88}$$

y definimos

$$\tilde{\mathbb{P}}(A) = \int_A Z(\omega) d\mathbb{P}(\omega) \tag{3.89}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \int_\Omega Z(\omega) d\mathbb{P} &= \mathbb{E}\left[Z\right] \\ &= \mathbb{E}\left[e^{-\lambda W_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t}\right] \\ &= e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 t} e^{\frac{1}{2}\lambda^2 t} = 1 \end{aligned} \tag{3.90}$$

Como $Z \geq 0$, podemos asegurar que $\tilde{\mathbb{P}}$ efectivamente es una medida de probabilidad. Pero lo importante es que bajo $\tilde{\mathbb{P}}$, B_t efectivamente es un movimiento browniano estándar;

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{P}}\left\{B_t \leq b\right\} &= \int_{\left\{\omega : B_(\omega) \leq b\right\}} Z(\omega) d\mathbb{P}\left(\omega\right) \\ &= \int_\Omega \mathbf{1}_{\left\{B_(\omega) \leq b\right\}} Z(\omega) d\mathbb{P}\left(\omega\right) \\ &= \int_\Omega \mathbf{1}_{\left\{W_(\omega) \leq b - \lambda t\right\}} Z(\omega) d\mathbb{P}\left(\omega\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{1}_{\{x \leq b - \lambda t\}} e^{-\lambda x - \frac{1}{2}\lambda^2 t} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{b - \lambda t} e^{-\frac{(x+\lambda t)^2}{2t}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{b} e^{-\frac{(y)^2}{2t}} dy \end{aligned}$$

esto muestra que B_t es normal estándar bajo la medida de probabilidad $\tilde{\mathbb{P}}$. La idea es entonces calcular la esperanza en (3.86) usando al medida $\tilde{\mathbb{P}}$.

Las ideas que acabamos de exponer se pueden poner sobre base formal a través de un par de teoremas, estos se presentan a continuación en la búsqueda de completez, sin embargo se establecen sin prueba. Una prueba de cada uno de ellos se puede estudiar en el libro de Karatzas y Shreve.

Para enunciar los dos teoremas consideremos antes la siguiente definición

DEFINICIÓN 3.7
Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ un espacio de probabilidad. Se dice que una medida de probabilidada $\mathcal{Q}$ en $(\Omega, \mathcal{F})$ es absolutamente continua relativa a $\mathcal{P}$ si

$$\forall A \in \mathcal{F} \quad \mathcal{P}(A) = 0 \Rightarrow \mathcal{Q}(A) = 0$$

se tiene entonces que

TEOREMA 3.1 (RADON-NIKODÝM)
$\mathcal{Q}$ es absolutamente continua relativa a $\mathcal{P}$ si y sólo si existe una variable aleatoria Z tal que $\mathbb{E}_{\mathcal{P}}[Z] = 1$ y

$$\mathcal{Q}(A) = \int_A Z(\omega) d\mathcal{P}(\omega)$$

Z se conoce como la densidad de $\mathcal{Q}$ reltiva a $\mathcal{P}$.

A Z usualmente se le conoce como la derivada de Radon-Nikodým de $\mathcal{Q}$ con respecto a $\mathcal{P}$, esto se entiende perfectamente en términos del teorema 3.1. Las probabilidades $\mathcal{Q}$ y $\mathcal{P}$ son equivalentes si cada una es absolutamente continua respecto a la otra.

Para nuestros fines de valución tan importante es el teorema 3.1 como el teorema que presentamos a continuación pues nos asegura que el proceso que definimos anteriormente como $B_t = W_t + \lambda t$ es un movimiento browniano estándar respecto a $\tilde{P}$.

TEOREMA 3.2 (GIRSANOV)
Sea $\{\theta\}_{0 \leq t \leq T}$ un proceso adaptado, que satisface $\int_t^T \theta_s^2 ds < \infty$ y tal que el proceso

$$L_t = \exp\left\{ -\int_0^t \theta_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2 ds \right\}$$

es una martingala. Entonces, bajo la probabilidad $\mathcal{Q}$ con densidad L_T relativa a $\mathcal{P}$, el proceso $B_t = W_t + \int_0^t \theta_s^2 ds$ es un movimiento browniano estándar.

Armados con este par de teoremas podemos afirmar que Z es la densidad de $\tilde{\mathbb{P}}$ con respecto a $\mathbb{P}$ y se cumple el teorema de girsanov para $\theta = \lambda$ constente.

En este sentido podemos repetir el argumento en (3.85) y obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}\left[e^{-r(T-t)}S_T \middle| \mathcal{F}_t\right] &= e^{-r(T-t)}\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}\left[S_t e^{\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)+\sigma(W_T-W_t)} \middle| \mathcal{F}_t\right] \\
&= e^{-r(T-t)}\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}\left[S_t e^{\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)+\sigma(W_T-W_t)}\right] \\
&= S_t
\end{aligned} \tag{3.91}$$

es decir, bajo $\tilde{\mathbb{P}}$ los precios descontados son martingala.

Si funciona bien para tiempo continuo todo lo que se construyo en los modelos discretos entonces podemos aplicar esta misma propiedada al precio de la opción europea, esto es

$$C_t = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}\left[C_T \middle| \mathcal{F}_t\right] \tag{3.92}$$

usando la función de pago de la opción calculamos su precio

$$\begin{aligned}
C_t &= \left[(S_T-K)_+ \middle| \mathcal{F}_t\right] \\
&= e^{-r(T-t)}\mathbb{E}\left[\left(S_t e^{(r-1/2\sigma^2)(T-t)+\sigma(W_T-W_t)} - K\right)_+\right] \\
&= e^{-r(T-t)}\int_0^\infty (s-K)_+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{T-t}} e^{-\frac{\left(\ln\left(\frac{s}{S_t}\right)-\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\right)\right)^2}{2\sigma^2(T-t)}}\frac{1}{s}ds
\end{aligned}$$

Notemos por otro lado que si $s \leq K$ entonces $(s-K)_+ = 0$ por lo tanto

$$\begin{aligned}
C_t =& e^{-r(T-t)}\int_K^\infty (s-K)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{T-t}} e^{-\frac{\left(\ln\left(\frac{s}{S_t}\right)-\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\right)\right)^2}{2\sigma^2(T-t)}}\frac{1}{s}ds \\
=& e^{-r(T-t)}\int_K^\infty s\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{T-t}} e^{-\frac{\left(\ln\left(\frac{s}{S_t}\right)-\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\right)\right)^2}{2\sigma^2(T-t)}}\frac{1}{s}ds \\
&- e^{-r(T-t)}\int_K^\infty K\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{T-t}} e^{-\frac{\left(\ln\left(\frac{s}{S_t}\right)-\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\right)\right)^2}{2\sigma^2(T-t)}}\frac{1}{s}ds
\end{aligned}$$

para calcular las dos integrales anteriores hacemos el siguiente cambio de variable, hacemos

$$z = \frac{\ln\left(\frac{s}{S_t}\right) - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

y observemos que

$$dz = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\frac{1}{s}$$

para modificar los limites de integración veamos que

$$
\begin{aligned}
& s \geq K \\
\Leftrightarrow \quad & z \geq \frac{\ln\left(\frac{K}{S_t}\right) - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 (T-t)\right)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\
& \geq -d_2
\end{aligned}
$$

donde por supuesto

$$
d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 (T-t)\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}
$$

finalmente, para volver al cálculo de la integral sustituimos el valor de s en el primer sumando, es decir hacemos

$$
s = S_t e^{\sigma\sqrt{T-t}\ z + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}
$$

reescribimos el valor de C_t como

$$
\begin{aligned}
C_t =& e^{-r(T-t)} \int_{-d_2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} S_t e^{\sigma\sqrt{T-t}\ z + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\
& - e^{-r(T-t)} K \int_{-d_2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\
=& S_t \int_{-d_2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\sigma\sqrt{T-t}\ z - \frac{1}{2}\sigma^2 (T-t)} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\
& - e^{-r(T-t)} K \int_{-d_2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\
=& S_t \int_{-d_2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2} + \sigma\sqrt{T-t}\ z - \frac{1}{2}\sigma^2 (T-t)} dz \\
& - e^{-r(T-t)} K \int_{-d_2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\
=& S_t \int_{-d_2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-\sigma\sqrt{T-t})^2}{2}} dz \\
& - e^{-r(T-t)} K \int_{-d_2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz
\end{aligned}
$$

si en el primer sumando hacemos la sustitución

$$
\xi = z - \sigma\sqrt{T-t}
$$

entonces

$$
d\xi = dz
$$

y si $z \geq -d_2$ entonces $\xi \geq -\left(d_2 + \sigma\sqrt{T-t}\right)$. Si además hacemos $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$ entonces

$$\begin{aligned} C_t =& S_t \int_{-d_1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\xi)^2}{2}} d\xi \\ &- e^{-r(T-t)} K \int_{-d_2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \end{aligned}$$

Notemos finalmente que en este caso ξ y z ambas son normales estándar, si además aprovechamos la simetría de la normal sabemos que si $X \sim N(0,1)$, entonces

$$\mathbf{P}(X \geq x) = \mathbb{P}(X \leq -x)$$

considerando esto podemos escribir el precio de la opción como

$$\begin{aligned} C_t =& S_t \int_{-\infty}^{d_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\xi)^2}{2}} d\xi \\ &- e^{-r(T-t)} K \int_{-\infty}^{d_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \end{aligned}$$

con esto hemos encontrado de nuevo la fórmula de Black y Scholes.

Conclusiones

Se considera que la teoría financiera moderna, basada en técnicas matemáticas, comenzó con lo trabajo de selección óptima de portafolios de Harry Markowitz[2], después vinieron trabajos sumamente importantes, como el de William Sharpe y su modelo CAPM. En este desarrollo de las finanzas modernas ocupan un lugar preponderante Robert Merton, Fisher Black y Myron Scholes con su modelo de valuación de opciones. La importancia de estos modelos se pone de manifiesto si consideramos que sus autores fueron premiados con el Nobel de economía por sus aportaciones.[3]

Cada uno de estos trabajos fueron revolucionarios en su tiempo y marcaron caminos a seguir en la investigación. Todos estos modelos siguen en uso en la actualidad aún cuando han sido superados en muchos sentidos. La sencillez de la fórmula de Black y Scholes ha hecho de este modelo una herramienta sumamente popular en el medio financiero, lo cual le ha permitido subsitir como el principal método de valuación de opciones.

En la tesis se presentaron varios modelos de valuación, modelos discretos y modelos continuos. En cada caso se obtuvo como resultado final, la fórmula de Black y Scholes. Sin embargo, además de conseguir este fin, se expusieron en el trayecto, tanto los conceptos económicos subyacentes al problema de valuación como las técnicas matemáticas ncesarias para la valuación de activos derivados.

Los modelos descritos, así como su forma de exposición, considero que sirven bien como un primer acercamiento al tema. Se hace esta afirmación entendiendo que los derivados que se estudiaron son los mas sencillos, sin

[2]Aunque el trabajo de Bachelier es anterior, éste permaneció olvidado durante años hasta que Paul Samuelson lo rescató.

[3]Excepto Fisher Black, quien falleció antes de recibir el Nobel

embargo los modelos utilizados también son el fundamento de los modelos usados en la valuación de instrumentos más complicados. Aunque existe una gran variedad de instrumentos que no pueden ser valuados usando la fórmula de Black y Scholes, también existen muchos derivados cuya fórmula de valuación se fundamenta sobre pequeñas variaciones de la fórmula para opciones europeas vainilla. Inclusive en los casos donde no se puede conseguir una fórmula cerrada, los métodos de valuación se apoyan en las ideas de Black y Scholes. Baste como ejemplo mencionar los métodos usados para valuar opciones americanas, aunque no es posible dar una fórmula cerrada, los métodos numéricos usados para valuarlas se fundamentan en elementos que se discutieron a lo largo de la tesis. Uno de estos métodos es una variación del modelo binomial, el cual fué descrito con detalle en el segundo capítulo. Otro método muy popular usa la ecuación diferencial de Black Scholes también construida en la tesis. Con las debidas condiciones iniciales y de frontera se resuelve numéricamente a través de algoritmos de diferencias finitas.

Las principales críticas del modelo de Black y Scholes se concentran en los supuestos de distribución de los precios. Aún no existe un modelo que resuelva satisfactoriamente este problema, entre las propuestas más estudiadas encontramos las que suponen que los rendimientos tienen volatilidad estocástica. Heston, Hull y White y Schroder por nombrar algunos investigadores, han aportados algunas ideas al respecto. En cualquiera de los casos las ideas se fundamentan en las planteadas por Black y Scholes. Espero que esta brevísima exposición sirva para percibir la importancia del tema desarrollado en la tesis. Los refinamientos del modelo y el estudio de modelos de valuación de instrumentos más complicados son temas dignos de otra tesis.

Bibliografía

[1] Bachelier, L. (1900). *Théorie de la spéculation*. Amm, Sci, Ecole Norm, Sup. pp 21-86.

[2] Baxter, M, Rennie, A. (1996). *Financial Calculus. An introduction to derivative pricing*. Cambridge University Press.

[3] Black, F, Scholes, M. (1973). *The pricing of options and corporate liabilities*. Journal of Political Economy. pp133-155.

[4] Breiman L. (1992). *Probability*. SIAM.

[5] Capiński, M, Zastawniak, T. (2003). *Mathematics for Finance. An Introduction to Financial Engineering*. Springer-Verlag.

[6] Cox, D.R. Miller, H.D. (1965). *The Theory of Stochastic Processes*. Chapman & Hall/CRC.

[7] Cox, J.C. Ross S.A. Rubinstein, M. (1979) *Options Pricing: A simplified Approach*. Journal of Financial Economics pp 229-263.

[8] Delbaen, F, Schachermayer, W. (1994). *A general version of the fundamental theorem of asset pricing*. Math, Ann. pp 463-520.

[9] Elliot, R.J. Kopp E.P. (1999). *Mathematics of Financial Markets*. Springer-Verlag.

[10] Farlow, S. (1982). *Partial Differential Equations for Scientists and Engieers*. Dover.

[11] Harrison, M.J. Kreps, D.M. (1979) *Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets*. Journal of Economic Theory. pp 381-408.

[12] Harrison, M.J. Pliska, S.R. (1981) *Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading*. Stochastic Processes and their Applications. pp 215-260.

[13] Harrison, M.J. Pliska, S.R. (1983) *A stochastic calculus model of continuous trading: complete markets.* Stochastic Processes and their Applications. pp 313-316.

[14] Heston, S.L. (1993). *A Closed Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bonds and Currency Options.* Review of Financial Studies. pp 327-343.

[15] Huang, C, Litzenberger, R. (1988). *Foundations for Financial Economics.* Prentice Hall.

[16] Hull, J. C. (2003). *Options, Futures, and Other Derivatives.* 5ed. Prentice Hall.

[17] Hull, J.C., White, A. (1987). *The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities.* Journal of Finance. pp 281-300.

[18] Jacod, J, Protter, P. (2000). *Probability Essentials* Springer-Verlag.

[19] Karatzas, I, Shreve, S. (1991). *Brownian Motion and Stochastic Calculus* 2ed. Springer-Verlag.

[20] Klebaner, F.C. (2001). *Introduction to Stochastic Calculus with Applications.* Imperial College Press.

[21] Kwok, Y. (1998). *Mathematical Models of Financial Derivatives.* Springer-Verlag.

[22] Lamberton, D, Lapeyre, B. (1996). *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance* Chapman&Hall/CRC.

[23] Luenberger, D.G. (1988). *Investment Science.* Oxford University Press.

[24] Markowitz, H.M. (1952). *Potfolio Selection.* Journal of Finance. pp 77-91.

[25] Merton, R.C.,(1973) *Theory of Rational option Pricing,* Bell Journal of Economics and Management Science. pp 125-144.

[26] Mikosch, T. (1998) *Elementary Stochastic Calculus with Finance in View.* World Scientific.

[27] Musiela, M, Rutkowski, M. (1998). *Martingale Methods in Financial Modelling.* Springer-Verlag.

[28] Neftci, S. N. (2000). *An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*. 2ed. Academic Press.

[29] Nielsen, L. T, (1999). *Pricing and Hedging of Derivative Securities*. Oxford University Press.

[30] Øksendal, B. (2000). *Stochastic Differential Equations*. Springer-Verlag.

[31] Pliska, S. R. (1998). *Introduction to Mathematical Finance. Discrete Models*. Blackwell Publishers.

[32] Protter, P, E. (2004). *Stochastic Integration and Differential Equations*. 2ed. Springer-Verlag.

[33] Sharpe, W.F. (1964). *Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk*. Journal of Finance. pp 425-442.

[34] Shreve, S,E. (2004). *Stochastic Calculus for Finance* II. *Continuous-Time Models*. Springer-Verlag

[35] Shroder, M. (1989). *Computing the Constant Elasticity of Variance Option Pricing Formula*. Journal of Finance. pp 211-218.

[36] Resnick, S.I. (2001). *A Probability Path*. Birkhäuser.

[37] Williams, D. (1991). *Probability with Martingales*. Cambridge University Press.

[38] Wilmott, P, Dewynne, J, Howison, S. (1993). *Option Pricing. Mathematical models and computation*. Oxford Financial Press.