



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

INTRODUCCION A LAS SERIES DE FOURIER
COMO SERIES DE TIEMPO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

A C T U A R I O

P R E S E N T A :

CESAR JOAQUIN ZAMBRANO RUIZ



FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

DIRECTORA DE TESIS: M. EN A.P. MARIA DEL PILAR ALONSO REYES

2005



FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION ESCOLAR



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**ESTA TESIS NO SALE
DE LA BIBLIOTECA**



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.
 NOMBRE: César Joaquín Zambrano Ruíz
 FECHA: 14- Diciembre - 2014
 FIRMA: [Signature]

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

Introducción a las series de Fourier como series de tiempo
 realizado por Zambrano Ruíz César Joaquín

con número de cuenta 09851087-8 , quien cubrió los créditos de la carrera de: Actuaría

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

- Director de Tesis Propietario M. en A.P. María del Pilar Alonso Reyes
- Propietario M. en C. José Antonio Flores Díaz
- Propietario Act. Jaime Vázquez Alamilla
- Suplente Dr. Luis Antonio Rincón Solís
- Suplente M. en C. María de Lourdes Guerrero Zarco

[Handwritten signatures of the listed members]

Consejo Departamental de Ciencias



Act. Jaime Vázquez Alamilla
FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL

A mi Marisol, mi esposa, el amor de mi vida, te dedico este trabajo y el esfuerzo para llevarlo a cabo, gracias por todo amorcito, te amo.
A mi hijita, Solecito, eres la bendición más grande que Dios nos dio a tu mamá y a mi.

Agradecimientos.

A Marisol, el amor de mi vida y mi esposa, por su paciencia, comprensión y apoyo durante la elaboración de esta tesis, pero sobretodo por su amor incondicional, gracias amor, te amo.

A mi mamá, Doris, por todo su apoyo, dedicación y su amor incondicional, gracias mami por toda tu entrega y todo lo que haz hecho por mi.

A mi tía Tita, por todo su apoyo, amor y comprensión, muchas gracias tía.

A mis abuelitos, Joaquín y Sofía, por ser como padres para mi, y por todo el apoyo y amor que he recibido por parte de ustedes, los quiero mucho.

A mi directora y asesora de tesis, pero más que eso, mi amiga, M. en A.P. María del Pilar Alonso Reyes, gracias por el tiempo y dedicación para hacer posible este trabajo, gracias por las recomendaciones y comentarios constructivos.

A mis sinodales, M. en C. José Antonio Díaz Flores, Act. Jaime Vázquez Alamilla, Dr. Luis Antonio Rincón Solís, M. en C. María de Lourdes Guerrero Zarco, gracias por su tiempo y recomendaciones.

Al Dr. Guilherme L. G. Borges, gracias por su amistad y todo el apoyo que he recibido por parte de usted, por su paciencia y comprensión.

Índice General.

Agradecimientos

Introducción.	III
1. Series de Fourier.	1
1.1. Ecuación de la conducción del calor en un estado en equilibrio.	1
1.2. Solución de la ecuación diferencial por productos.	2
1.3. Los coeficientes de Fourier.	9
1.4. El kernel de Poisson.	17
1.5. El teorema de Poisson.	19
1.6. Dos consecuencias del teorema de Poisson.	25
1.7. Unicidad de la solución del problema del calor.	27
1.8. Convergencia puntual de las series de Fourier.	29
1.9. Algunas aplicaciones del teorema de Poisson.	34
1.9.1. Aproximación uniforme.	34
1.9.2. Aproximación por mínimos cuadrados.	38
2. Búsqueda de periodicidad.	40
2.1. Enfoque al ajuste de una curva.	42
2.2. Estimación por mínimos cuadrados de la amplitud y la fase.	44
2.3. Estimación por mínimos cuadrados de la frecuencia.	51

II

2.4. Múltiples periodicidades.	53
2.5. Efecto del tiempo discreto: “Alias”.	57
2.6. Resultados estadísticos.	60
Notas.	64
3. Análisis espectral.	65
3.1. Suavizamiento: Filtración lineal.	65
3.2. Análisis de periodograma.	71
3.3. Análisis por segmentos de una serie. Suavizando el periodograma.	74
3.4. Cálculo de estimadores para autocovarianzas y pesos de rezago.	78
3.5. Representaciones alternativas del estimador espectral.	80
Notas.	86
Apéndice.	87
Comentarios Finales.	94
Bibliografía.	96

INTRODUCCIÓN.

El presente trabajo es una introducción a las series de Fourier vistas como series de tiempo, es decir, esto no pretende ser un estudio profundo de la teoría que hay detrás del análisis de Fourier, solamente abarca los temas de mayor relevancia y que se considera son suficientes para comprender el papel que juegan las series de Fourier dentro de un conjunto de datos observados a través del tiempo, en otras palabras se pretende mostrar una herramienta alternativa para el estudio de las series de tiempo.

La principal motivación del uso de esta herramienta se encuentra en el análisis de fenómenos físicos y/o biológicos, aquellos fenómenos que completan siempre un ciclo, es decir que terminan en el punto inicial de todo el proceso, por ejemplo, los Romanos tenían suficientes observaciones precisas del movimiento aparente del sol como para saber que un año está compuesto de aproximadamente 364.25 días, después se usaría este valor para construir el calendario Juliano. Es importante recalcar que en el proceso de desarrollo del análisis en este trabajo no involucra ningún tipo de estos fenómenos en particular para ser modelado a través del tiempo.

El trabajo está dividido en 3 partes (Capítulos) como sigue:

i) Series de Fourier (definición de una serie de Fourier): A partir de un problema muy conocido en la física se llegará a una definición de este tipo de series, dicho problema origina la llamada *Ecuación del calor*, que en este caso se obtendrá a partir de modelar la conducción del calor en un disco considerando un estado en

equilibrio o estable. Finalmente, se llegará a una solución particular de la ecuación del calor: la serie de Fourier; la técnica usada para resolverla es la conocida como “solución de una ecuación diferencial por productos”. En el transcurso del Capítulo se estudiarán resultados importantes como el Teorema de Poisson, el cual juega un papel muy importante en la búsqueda de la solución de la ecuación diferencial del calor.

ii). Búsqueda de periodicidad (estimación de los parámetros del modelo de la serie de Fourier como serie de tiempo): En este Capítulo se propone el modelo que se estudiará tomando en cuenta una serie trigonométrica para modelar un fenómeno en el tiempo, los parámetros que se consideran son la amplitud, la fase y la frecuencia. En un primer análisis, se efectuarán aproximaciones de los parámetros que miden la amplitud y la fase en la serie trigonométrica dejando fijo el valor de la frecuencia, en un segundo análisis se dará un panorama general de cómo sería la estimación de la frecuencia usando métodos numéricos, ya que una derivación analítica de dicho estimador sería imposible. Finalmente se verá de manera general, el comportamiento de los estimadores o aproximaciones de éstos (valores esperados y varianzas), es decir, se darán una lista de los principales resultados estadísticos encontrados.

iii) Análisis Espectral (periodograma): Finalmente en este capítulo se analizará la función conocida como el periodograma, sus principales propiedades y la manera de estudiarla para llegar al mejor modelo que sustente el comportamiento de los datos observados, es decir, trabajar sobre ellos de manera que se puedan encontrar patrones y suavizar las curvas que modelan el fenómeno. Se propondrán fórmulas para calcular las autocovarianzas de las observaciones.

Capítulo I.

Series de Fourier.

Introducción.

En este capítulo se discutirá un problema que conducirá a la definición de lo que se conoce como Series de Fourier. En términos físicos, se determinará la distribución de la temperatura dentro de un estado estable en un disco cuando las temperaturas en la frontera del disco son conocidas; la formulación matemática es conocida como el problema de *Dirichlet*. Partiendo desde el principio, se llegará a una solución de la forma $\sum a_n r^{|n|} e^{in\theta}$, conocida como una serie trigonométrica. El intento de verificar que esto puede ser realmente hecho para resolver el problema del calor, conducirá al teorema de Poisson, uno de los teoremas más importantes del análisis.

1.1 Ecuación de la conducción del calor en un estado en equilibrio.

El primer paso para resolver problemas relacionados con el calor es encontrar una ecuación diferencial que modele la situación. Como el estudio se enfoca a un disco, lo más natural sería trabajar con coordenadas polares. La temperatura en el punto con coordenadas (r, θ) es denotada por $u(r, \theta)$.

Para encontrar dicha ecuación, se considera cualquier sección de disco dada por (ver Figura 1.1):

$$0 < r_0 < r < r_1 \leq 1 \quad \theta_0 < \theta < \theta_1 \quad (1.1)$$

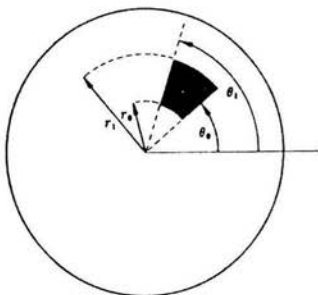


Figura 1.1. Obtención de la ecuación del calor en coordenadas polares.

Debido a que se está considerando un estado estable, la tasa a la cual el calor fluye dentro de esta sección debe ser cero; de otra manera la temperatura cambiaría al transcurrir el tiempo. Ahora, es un postulado básico de la conducción del calor que la tasa a la cual el calor cruza una curva C es proporcional a la integral sobre C de la derivada normal $\frac{\partial u}{\partial n}$ de la distribución de la temperatura. Aquí, $\frac{\partial u}{\partial n}$ es la derivada de u respecto a la longitud de arco sobre cualquier curva que sea perpendicular a C . Cuando C corresponde al lado $\theta = \theta_1$ de la porción dada en (1.1), se pueden tomar curvas perpendiculares dadas por $r = k$, con k constante. Entonces, debido a que la longitud de un arco circular es el producto del radio por su ángulo, la derivada normal sobre $\theta = \theta_1$ es:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dn} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(r, \theta_1 + h) - u(r, \theta_1)}{rh} \\ &= r^{-1} u_\theta(r, \theta_1) \end{aligned}$$

y la tasa a la cual el calor fluye dentro de la sección marcada en la Figura 1, sobre el límite $\theta = \theta_1$ es

$$k \int_{r_0}^{r_1} r^{-1} u_{\theta}(r, \theta_1) dr.$$

donde k es la conductividad. Agregando las expresiones correspondientes para los otros tres límites y estableciendo el flujo neto igual con cero, se tiene que:

$$\int_{r_0}^{r_1} r^{-1} [u_{\theta}(r, \theta_1) - u_{\theta}(r, \theta_0)] dr + \int_{\theta_0}^{\theta_1} [r_1 u_r(r_1, \theta) - r_0 u_r(r_0, \theta)] d\theta = 0.$$

Si se divide por $\theta_1 - \theta_0$ y se hace $\theta_1 \rightarrow \theta_0$, se obtiene:

$$\int_{r_0}^{r_1} r^{-1} u_{\theta\theta}(r, \theta_0) dr + r_1 u_r(r_1, \theta_0) - r_0 u_r(r_0, \theta_0) = 0.$$

(El primer término se debe a la regla de Leibnitz, y el segundo es por el teorema fundamental del Cálculo). Ahora, dividiendo por $r_1 - r_0$ y haciendo $r_1 \rightarrow r_0$, se tiene:

$$\frac{1}{r_0} u_{\theta\theta}(r_0, \theta_0) + (ru_r)_r(r_0, \theta_0) = 0.$$

Como r_0, θ_0 son las coordenadas de cualquier punto dentro del disco, excepto el

centro, finalmente se obtiene la ecuación

$$\frac{\partial(r\partial u/\partial r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \quad (r \neq 0) \quad (1.2)$$

Ésta es la forma polar de la *ecuación de Laplace*. Las soluciones para esta ecuación son conocidas como *funciones Armónicas*.

La ecuación (1.2) no prueba nada acerca de las distribuciones reales de la temperatura, pero si empieza con algunas suposiciones sobre la conexión entre el flujo del calor y las derivadas de la distribución de la temperatura. Los pasos principales de estas suposiciones (los que condujeron a la ecuación 1.2), son válidos desde el punto de vista matemático, pero no puede ser demostrado que éstos, en términos físicos, están debidamente justificados.

Ahora, debido a la peculiaridad cuando $r = 0$, la ecuación (1.2) no aplica en este caso, y esto conduce a la siguiente pregunta ¿Qué condiciones debieran considerarse en este punto?. Debido a que se pide que u tenga primeras derivadas parciales continuas en todos los demás puntos, una condición natural es que también debieran ser continuas en el origen. Sin embargo se pueden desarrollar algunas cosas interesantes pidiendo sólo que

$$u(r, \theta) \text{ sea continua para } 0 \leq r \leq 1 \quad (1.3)$$

Se observa otra característica interesante de las coordenadas polares es que $(r, \theta + 2\pi)$ representa el mismo punto que (r, θ) . Entonces, acorde con lo que se ha estado desarrollando hasta este momento y con 1.3, se pedirá además que

$$u(r, \theta + 2\pi) = u(r, \theta) \quad (1.4)$$

Es claro que, desde el punto de vista físico, (1.2), (1.3) y (1.4) por sí solos, no determinan una solución al problema del calor de manera única, pues cualquier constante u satisface todas estas condiciones y resuelve (1.2). Se agregarán algunas condiciones especificando la distribución de la temperatura en la frontera cuando $r = 1$:

$$u(1, \theta) = f(\theta) \quad (1.5)$$

De nuevo $f(\theta + 2\pi) = f(\theta)$.

Conviene ahora examinar la definición de una función periódica, debido a que este término se ha usado en (1.5).

Definición 1.1. (Funciones periódicas). Una función $f(t)$ es de periodo T si para todo t , se tiene que $f(T + t) = f(t)$. Donde $T \geq 0$. El mínimo valor de $T > 0$ para el cual se cumple lo anterior es llamado el periodo principal o el periodo fundamental o simplemente el periodo de f .

El problema ahora de encontrar una función que satisfaga las ecuaciones (1.2) a (1.5) para una f dada es llamado el *problema de Dirichlet*.

1.2 Solución de la ecuación diferencial por productos.

En el intento de satisfacer (1.2)-(1.5), primero se verán las soluciones para (1.2). La técnica usada, llamada el método de separación, reduce la ecuación diferencial parcial a ecuaciones diferenciales ordinarias conocidas, enfocando la atención temporalmente a funciones u de la forma

$$u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta).$$

Entonces, para $u = R\Theta$, la ecuación (1.2) se convierte en

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r}(rR'\Theta) + \frac{1}{r}R\Theta'' &= 0 \\ R'\Theta + r\Theta R'' + \frac{1}{r}R\Theta'' &= 0 \\ \frac{rR'\Theta + r^2\Theta R'' + R\Theta''}{r} &= 0 \\ r^2R''\Theta + rR'\Theta + R\Theta'' &= 0. \end{aligned}$$

Esta mezcla de dos ecuaciones diferenciales ordinarias puede ser reagrupada si se divide por $R\Theta$, obteniendo

$$\begin{aligned} \frac{r^2R''\Theta + rR'\Theta + R\Theta''}{R\Theta} &= 0 \\ \frac{r^2R''}{R} + \frac{rR'}{R} + \frac{\Theta''}{\Theta} &= 0 \\ \frac{r^2R''}{R} + \frac{rR'}{R} &= -\frac{\Theta''}{\Theta}. \end{aligned}$$

Ahora, la parte izquierda de la ecuación es, por su forma, independiente de θ , mientras que la parte derecha es independiente de r . Debido a que son iguales, ambas partes son independientes de r y de θ , esto es, constantes:

$$\frac{r^2 R''}{R} + \frac{r R'}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} = c.$$

Esto conduce a dos ecuaciones diferenciales ordinarias, una para R y otra para Θ . Considérese primero la ecuación obtenida en Θ , $\Theta'' + c\Theta = 0$. La forma de la solución general para esta ecuación depende del signo de c ; dicha solución está dada por

$$\Theta(\theta) = \begin{cases} A \exp(i\sqrt{c}\theta) + B \exp(-i\sqrt{c}\theta) & \text{si } c > 0 \\ A + B\theta & \text{si } c = 0 \\ A \exp(\sqrt{-c}\theta) + B \exp(-\sqrt{-c}\theta) & \text{si } c < 0. \end{cases}$$

De manera similar, la ecuación en R , $r^2 R'' + r R' - cR = 0$, tiene la solución

$$R(r) = \begin{cases} ar^{\sqrt{c}} + br^{-\sqrt{c}} & \text{si } c > 0 \\ a + b \log r & \text{si } c = 0 \\ ar^{i\sqrt{-c}} + br^{-i\sqrt{-c}} & \text{si } c < 0. \end{cases}$$

De esta manera, por ejemplo, $(A + B\theta)(a + b \log r)$ satisface la ecuación (1.2), y de manera general, el producto de cualquier $\Theta(\theta)$ y $R(r)$ con el mismo valor de c es una solución para (1.2). Hasta ahora, se ha puesto especial atención a (1.2), pero también son de interés las condiciones (1.3) y (1.4). Si se observa, la solución para $\Theta(\theta)$ cuando $c < 0$ es no acotada, a menos que $A = B = 0$, y por lo tanto no se obtiene

una solución no nula que satisfaga (1.4); para una función continua Θ de periodo 2π cuya cota es su máximo sobre el intervalo $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Similarmente, en el caso $c = 0$, se debe tomar $B = 0$ para poder satisfacer (1.4). La solución para Θ cuando $c > 0$ tiene periodo 2π precisamente cuando \sqrt{c} es un entero, es decir, cuando $c = n^2 \geq 0$. Así, aplicando (1.4) se restringe a la posibilidad $c = n^2, n = 0, 1, 2, \dots$. Ahora, aplicando la condición (1.3) a la solución para R con estos valores de c , se encuentra que $b = 0$ en todos los casos.

Finalmente, las soluciones producto restantes son:

$$u_n(r, \theta) = \begin{cases} Aa & \text{si } n = 0 \\ ar^n(Ae^{in\theta} + Be^{-in\theta}) & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

son las únicas soluciones $u = R\Theta$ que satisfacen (1.2), (1.3) y (1.4). Esto está bien, pero es claro que ninguna de estas soluciones es lo suficientemente flexible como para tener un amplio rango de alternativas para la función f en (1.5). Sin embargo, es fácil ver que si u_1, \dots, u_N son soluciones de (1.2), (1.3) y (1.4), también lo es $u = u_1 + \dots + u_N$. Así

$$A_0 + \sum_{n=1}^N r^n (A_n e^{in\theta} + B_n e^{-in\theta})$$

es también una solución de (1.2), (1.3) y (1.4). Cambiando los nombres de las constantes arbitrarias, la serie de arriba se puede reescribir de manera más simple:

$\sum_{-N}^N A_n r^{|n|} e^{in\theta}$. Cuando $r = 1$ se tiene que:

$$u(1, \theta) = \sum_{n=-N}^N A_n e^{i\theta n}.$$

Y como no hay límite en cuanto al tamaño de N , existe la posibilidad de considerar la serie anterior cuando N tiende a ∞ :

$$u(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n r^{|n|} e^{i\theta n} \quad (1.6)$$

la cual, al menos desde un punto de vista formal, toma el valor siguiente cuando $r = 1$:

$$u(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{i\theta n}. \quad (1.7)$$

Aún no se tiene una razón lógica para pensar que ésta es una solución “general”. Fourier formuló que los coeficientes en (1.7) pueden ser escogidos de tal manera que (1.7) sea cualquier función f escogida. Usando estos mismos coeficientes en (1.6) se obtiene una solución del problema de temperatura originalmente expuesto.

El problema de cómo representar a f mediante la serie (1.7) se considera en la siguiente sección, y después, la prueba de que la solución así obtenida satisface (1.2)-(1.5) será examinada.

1.3 Los coeficientes de Fourier.

Previo al desarrollo que se ha estado haciendo hasta la sección anterior, conviene revisar la siguiente definición que es de cierta utilidad para entender de mejor manera las series de Fourier.

Definición 1.2 (Continuidad por partes). Sea f definida sobre el intervalo $I = [a, b]$, se dice que f es continua por partes en I , si y sólo si:

i) Existe una partición de $I = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$ tal que f es continua en cada subintervalo $I_k = \{x : x_{k-1} < x < x_k\}$

y

ii) Existe el límite de f por la izquierda y por la derecha en cada uno de los puntos extremos x_0, x_1, \dots, x_n .

Ahora, el conjunto de todas las funciones f de periodo 2π y continuas por partes, se designará como $PC(2\pi)$.

Por la periodicidad de $f \in PC(2\pi)$ sólo es necesario analizar a f en un intervalo de longitud 2π ; así, se tiene que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_c^{c+2\pi} f(x) dx \quad \forall c \in \mathfrak{R}.$$

Ahora, si $f(\theta)$ es un función dada de periodo 2π : ¿pueden ser escogidos los coeficientes A_n en 1.7 de tal forma que $u(1, \theta) = f(\theta)$? esto es, tal que

$$f(\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_n e^{i\theta n} \quad (1.8).$$

y si es así, ¿cómo?.

En realidad, es más razonable ver primero cómo deberían ser escogidos estos

coeficientes, y después investigar si escogiéndolos de esta manera realmente funciona, se responderá a lo primero en esta sección.

Como punto de partida, recuérdese la manera de determinar los coeficientes a_n en las series de Taylor de una función $g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$. Es claro que en estas series a_0 se obtiene a partir de $g(0)$; y no es muy difícil ver que el camino para obtener a_1 es derivar una vez y evaluar en $x = 0$, es decir $a_1 = g'(0)$, y así, de esta manera, se encontrará que $n!a_n = g^{(n)}(0)$. De vuelta a la serie de exponenciales (1.8), no se ve de manera obvia cual es el valor para A_0 ; ciertamente no puede ser hallado mediante la sustitución de algún valor específico de θ como $\theta = 0$. Sin embargo, se observa que el valor promedio de $e^{i\theta n}$ sobre cualquier intervalo de longitud 2π es cero, excepto cuando $n = 0$. Así, de esta manera A_0 debería ser el vaor promedio del lado derecho de (1.8). Esto sugiere que las fórmulas para los demás coeficientes involucrarán integrales de f . Obsérvese que de (1.8):

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \sum_{-\infty}^{n=-1} A_n e^{in\theta} + A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{in\theta} \\ \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta &= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{-\infty}^{n=-1} A_n e^{in\theta} d(\theta) + \int_{-\pi}^{\pi} A_0 d\theta + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{in\theta} d\theta \\ \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta &= \sum_{-\infty}^{n=-1} A_n \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta} d(\theta) + 2\pi A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta} d\theta \end{aligned}$$

Ahora, obsérvese que $\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta} d(\theta) = 0$ por lo dicho anteriormente, además puede verse más fácilmente, si se usa la fórmula de Euler:

$$e^{in\theta} = \cos n\theta + isenn\theta$$

entonces, la integral sobre cualquier intervalo de tamaño 2π de $\cos n\theta + i \sin n\theta$ es cero, por lo tanto se tiene que:

$$2\pi A_0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta$$

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta.$$

De hecho, para cualquier N se puede calcular A_N multiplicando por un valor promedio no nulo, como sigue:

$$f(\theta)e^{-iN\theta} = \sum_{-\infty}^{\infty} A_n e^{i(n-N)\theta}$$

$$f(\theta)e^{-iN\theta} = \sum_{-\infty}^{N-1} A_n e^{i(n-N)\theta} + A_N + \sum_{n=N+1}^{\infty} A_n e^{i(n-N)\theta}$$

y llevando a cabo el mismo procedimiento y los mismos argumentos, se espera tener en general:

$$A_N = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-iN\theta} d\theta \quad (1.9)$$

Deduciendo estas fórmulas se ha recurrido esencialmente a la integración término a término en la serie infinita (1.8), lo cual puede o no ser válido. Sin embargo, este procedimiento parece ser bastante probable, tan probable que la fórmula obtenida en 1.9 se toma como la definición de los *coeficientes de Fourier de f*. Y ahora es posible dar una definición en forma de las series de fourier.

Definición 1.3. La serie $\sum_{-\infty}^{\infty} A_n e^{int}$ con A_n dada por (1.9), es llamada la serie de Fourier de f .

Como puede observarse, esta definición está dada en términos complejos, pero es posible que a partir de esta definición pueda obtenerse otra en términos no complejos, es decir, en términos reales, pero antes de llegar a dicha definición, se verá el siguiente teorema:

Teorema 1.1. Sea $f : I = [-\pi, \pi] \rightarrow \mathfrak{R}$ continua. Suponga que la serie

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) \quad (1.10)$$

converge uniformemente a f en I . Entonces

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos ntdt & n = 0, 1, 2, \dots \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{sen} ntdt & n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (1.11)$$

Demostración.

Previo a la demostración es útil hacer uso de las relaciones:

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\cos kx)^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} (\operatorname{sen} kx)^2 dx = \pi, \quad k \in \mathbb{N}.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} kx \sin nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx dx = 0, \quad k, n \in \mathbb{N}, k \neq n.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} kx \cos mx dx = 0, \quad k, m = 0, 1, 2, \dots$$

Las sumas parciales S_k de (1.10) se definen como:

$$S_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^k (a_m \cos mx + b_m \operatorname{sen} mx).$$

Como la sucesión $S_k(x)$ converge uniformemente a $f(x)$, se sigue entonces que $S_k(x) \cos nx$ converge uniformemente a $f(x) \cos nx$ cuando $k \rightarrow \infty$ para cada n fija.

La justificación de lo anterior es que como $S_k(x)$ converge uniformemente a $f(x)$, entonces, para cualquier $\varepsilon > 0$, se tiene que existe $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, tal que si $k > N(\varepsilon)$, con $k \in \mathbb{N}$, entonces:

$$|S_k(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [-\pi, \pi]$$

Y además

$$\begin{aligned} |S_k(x) \cos nx - f(x) \cos nx| &= |S_k(x) - f(x)| |\cos nx| \\ &\leq |S_k(x) - f(x)| |1| \\ &= |S_k(x) - f(x)| < \varepsilon \end{aligned}$$

y esta relación se cumple para cada n fija y para todo x en el intervalo $[-\pi, \pi]$, por ello se concluye que $S_k(x) \cos nx$ converge uniformemente a $f(x) \cos nx$ cuando $k \rightarrow \infty$ para cada n fija.

Por consiguiente, para cada n fija:

$$f(x) \cos nx = \frac{a_0}{2} \cos nx + \sum_{m=1}^k (a_m \cos mx \cos nx + b_m \operatorname{sen} mx \cos nx).$$

Como dicha serie converge uniformemente, es válido integrar término a término en dicha suma, por lo tanto:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{m=1}^{n-1} a_m \cos mx \cos nx \right) dx \\ &+ a_n \int_{-\pi}^{\pi} (\cos nx)^2 dx + \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{m=n+1}^{\infty} a_m \cos mx \cos nx \right) dx \\ &+ \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{m=1}^{\infty} b_m \operatorname{sen} mx \cos nx \right) dx \end{aligned}$$

Usando las relaciones descritas arriba e intercambiando sumas por integrales (es válido debido a la convergencia uniforme), se tiene que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = 0 + 0 + \pi a_n + 0 = \pi a_n$$

y, por lo tanto:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

El argumento y el procedimiento son análogos para $f(x)\text{sen}nx$, por lo que:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \text{sen}nx dx \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Definición 1.4. (*Coefficientes de Fourier, Serie de Fourier*). Si $f \in PC(2\pi)$, entonces, los coeficientes de Fourier de f son los números a_n y b_n dados en (1.11), y la serie trigonométrica (1.10) es llamada la serie de Fourier de f .

Cabe señalar que si f es cualquier función integrable, entonces los coeficientes de Fourier tal vez podrían ser calculados, sin embargo, no hay forma alguna de asegurar que la serie de Fourier convergerá a f si sólo se pide que f sea cualquier función integrable, y tomando en cuenta este hecho, para indicar la relación de la serie de Fourier (1.10) con la función f , con frecuencia se escribe:

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \text{sen}nx)$$

Existe una forma de recuperar la primera definición dada en (1.3), a partir de la definición (1.4), y es mediante la identidad de Euler, mencionada con anterioridad ($e^{i\theta} = \cos \theta + i \text{sen} \theta$).

Se obtiene la forma compleja

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_n e^{in\theta}$$

donde

$$A_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta$$

haciendo

$$A_0 = \frac{1}{2}a_0, \quad A_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad A_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

y de manera análoga

$$a_0 = 2A_0, \quad a_n = A_n + A_{-n}, \quad b_n = i(A_n - A_{-n}) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

1.4. El kernel de Poisson.

Sustituyendo en (1.6) los valores de A_n dados en (1.9), se obtiene la solución formal de las series de Fourier para (1.2)-(1.5):

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= \sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} r^{|n|} e^{in(\theta-t)} f(t) dt \end{aligned}$$

Ahora bien, para $r < 1$, la serie $\sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in(\theta-t)}$ converge uniformemente en t , así que si se integra término a término, se obtiene:

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} r^{|n|} e^{in(\theta-t)} f(t) dt.$$

Nuevamente, para $r < 1$, se obtiene, a partir de las series geométricas partiendo la suma en dos secciones, que:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{in(\theta-t)} &= \frac{1}{1 - re^{i(\theta-t)}} \quad y; \\ \sum_{n=-\infty}^{-1} r^{-n} e^{in(\theta-t)} &= \frac{re^{-i(\theta-t)}}{1 - re^{-i(\theta-t)}} \end{aligned}$$

Entonces, recobrando la suma original, se obtiene:

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2} f(t) dt \quad (r < 1) \quad (1.12)$$

Esta última integral es llamada la *integral de Poisson*. La función:

$$P(r, \phi) = \frac{1}{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos\phi+r^2} \quad (1.13)$$

es llamado el kernel de *Poisson*.

La fórmula (1.12) proporciona la solución formal u de una manera muy precisa y útil, al menos desde el punto de vista teórico. En la siguiente sección se analizará dicha forma para investigar que tanto esta solución formal satisface (1.5), para las

otras condiciones (1.2)-(1.4), no es muy difícil ver que (1.10) las satisface, siempre y cuando se asuma que f es continua.

1.5. El teorema de Poisson.

Antes de seguir con el procedimiento para llegar a los resultados deseados en esta sección, es necesario aclarar que no se demostrará la igualdad establecida en (1.7) tal cual está; de hecho (1.7) no siempre se cumple. La dificultad radica en que todas las operaciones involucradas con la serie (primordialmente la integración y diferenciación término a término) fueron válidas solamente cuando $r < 1$; ni siquiera se sabe si la serie para $u(r, \theta)$ converge cuando $r = 1$. La fórmula integral (1.12) también toma una forma bastante desconcertante cuando $r = 1$. Sin embargo, se puede demostrar que $u(r, \theta)$ converge a $f(\theta)$ cuando $r \rightarrow 1$, si $u(r, \theta)$ está dada por (1.12). Desde el punto de vista del problema del calor, esto es más relevante que decidir si (1.7) converge o no. Lo que en realidad se demostrará es lo siguiente

Teorema 1.2 (de Poisson) Si f es continua, de periodo 2π , y $u(r, \theta)$ está dada por (1.12), entonces $\lim_{r \rightarrow 1} u(r, \theta) = f(\theta)$, uniformemente en θ .

Junto con el resultado de verificar si (1.12) cumple con las condiciones establecidas en (1.2) a (1.4), este teorema muestra que la integral de Poisson proporciona una solución al problema expuesto por las ecuaciones (1.2) a (1.5).

Para entender el por qué

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_{-\pi}^{\pi} P(r, \theta - t) f(t) dt = f(\theta),$$

es muy útil esbozar la gráfica de $P(r, \phi)$, como función que depende de ϕ , para varios valores de r , por ejemplo $r = 0$, $r = \frac{1}{2}$, $r = \frac{3}{4}$, y así sucesivamente.

Se presentan ahora, algunos hechos sobresalientes de la gráfica de $P(r, \phi)$ como función de ϕ :

(i) $P(r, \phi)$ es par en ϕ , esto es, $P(r, -\phi) = P(r, \phi)$

(ii) El máximo de $P(r, \phi)$ ocurre cuando $\phi = 0$, y es $\frac{1+r}{2\pi(1-r)}$

(iii) $P(r, \phi)$ es monótona decreciente en $0 \leq \phi \leq \pi$, alcanzando un mínimo de $\frac{1-r}{2\pi(1+r)}$ en $\phi = \pi$; y por consiguiente $P > 0$.

(iv) $\int_{-\pi}^{\pi} P(r, \phi) d\phi = 1$.

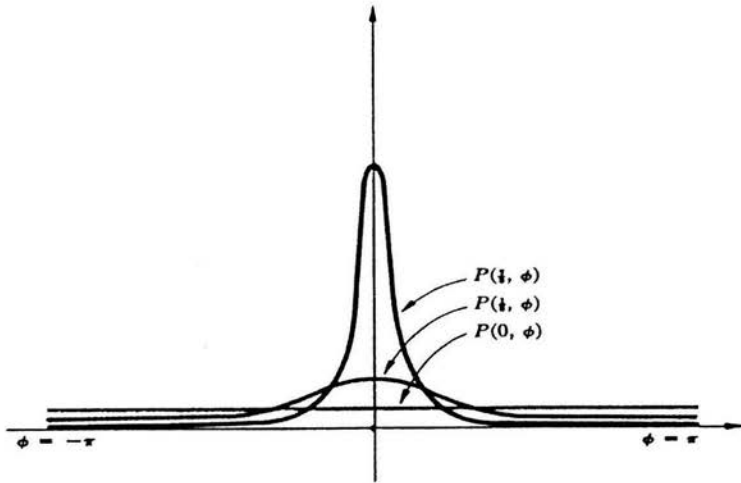


Figura 1.2. Gráficas de $P(r, \phi)$ para $r = 0$, $r = \frac{1}{2}$, $r = \frac{7}{8}$

Los esbozos están dados en la figura 1.2 para $P(0, \phi)$, $P(\frac{1}{2}, \phi)$ y $P(\frac{7}{8}, \phi)$. Ahora, supóngase que $f(t)$ tiene la gráfica mostrada en la Figura 1.3, y que se está valuando $u(r, 0)$. De acuerdo con (1.12) esto se haría multiplicando por $P(r, \theta - t)$, el cual tiene su máximo en $t = \theta$, y después integrando de $-\pi$ a π . En realidad, como P y f , ambas tienen periodo 2π en la variable t , se podría integrar también de $\theta - \pi$ a $\theta + \pi$; cualquiera que sea el camino, éste puede ser pensado como si se integrara una vez al rededor de la frontera del disco unitario (Figura 1.1)

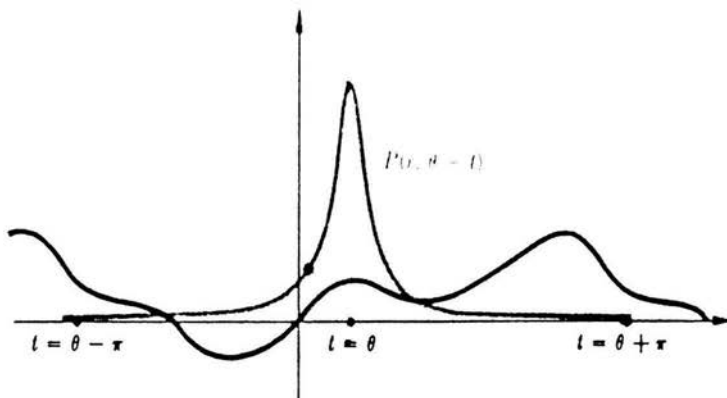


Figura 1.3. Ilustración de la integral de Poisson $\int_{-\pi}^{\pi} P(r, \theta - t) f(t) dt$.

A manera de observación: Supóngase que $g(t)$ tiene periodo 2π , entonces, para cualquier $a \in \mathfrak{R}$ se tiene que:

$$\int_{a-\pi}^{a+\pi} g(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} g(t) dt.$$

Pues bien, la integral

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= \int_{-\pi}^{\pi} P(r, \theta - t) f(t) dt \\ &= \int_{\theta-\pi}^{\theta+\pi} P(r, \theta - t) f(t) dt \end{aligned}$$

Puede ser pensada como un “promedio ponderado” de f . Si $r = 0$, entonces $P = \frac{1}{2\pi}$, y $u(0, \theta)$ es el “promedio usual” (esto es, el no ponderado) de la temperatura en la

frontera.

Un punto importante es que, si se observa, cuando r crece mientras θ permanece fijo, los valores de $f(t)$ cerca de $t = \theta$ tienen una ponderación más pesada, o son cargados mucho más, mientras que los otros valores son ponderados en menor grado (esto puede verse directamente de la gráfica en la Figura 1.3, ya que a medida que r crece, $P(r, \theta - t)$ se aproxima a su máximo).

Se hará ahora la demostración del teorema de Poisson.

Dado $\varepsilon > 0$, se debe encontrar $r_0 < 1$ tal que, para todo r en $r_0 < r < 1$, $|u(r, \theta) - f(\theta)| < \varepsilon$.

Por la propiedad (iv) del kernel de Poisson, se tiene que:

$$\begin{aligned} |u(r, \theta) - f(\theta)| &= \left| \int_{\theta-\pi}^{\theta+\pi} P(r, \theta - t)[f(t) - f(\theta)] dt \right| \\ &\leq \int_{\theta-\pi}^{\theta+\pi} P(r, \theta - t)|f(t) - f(\theta)| dt \end{aligned}$$

La desigualdad usa el hecho de que $P \geq 0$. Ahora, como f es continua, $|f(t) - f(\theta)|$ se puede hacer pequeño cuando está cerca de θ ; y debido a la naturaleza de $P(r, \theta - t)$, esta función se puede hacer pequeña tomando valores de r cercanos a 1, pero cuando t NO está cerca de θ . Esto sugiere dividir la integral en dos partes, usando estos dos efectos por separado.

Se tiene entonces, para cualquier número δ , con $0 < \delta < \pi$, que

$$\begin{aligned}
|u(r, \theta) - f(\theta)| &\leq \int_{\theta-\pi}^{\theta+\pi} P(r, \theta - t) |f(t) - f(\theta)| dt \\
&= \int_{|\theta-t| \leq \delta} P(r, \theta - t) |f(t) - f(\theta)| dt + \int_{\delta < |\theta-t| < \pi} P(r, \theta - t) |f(t) - f(\theta)| dt \\
&= I_1 + I_2
\end{aligned}$$

Donde I_1 es la integral sobre $|\theta - t| \leq \delta$, e I_2 la integral sobre $\delta < |\theta - t| < \pi$.

Como f es continua en $-2\pi \leq t \leq 2\pi$, es también uniformemente continua en ese intervalo, y se puede escoger la δ de arriba tal que $|f(t) - f(\theta)| < \frac{\varepsilon}{2}$ cada vez que $|\theta - t| \leq \delta$.

Entonces

$$I_1 \leq \int_{|\theta-t| \leq \delta} P(r, \theta - t) |f(t) - f(\theta)| dt < \frac{\varepsilon}{2} \int_{\theta-\pi}^{\theta+\pi} P(r, \theta - t) dt = \frac{\varepsilon}{2}.$$

La última igualdad es por la propiedad (iv) del kernel de Poisson, y por lo tanto se tiene que $I_1 < \frac{\varepsilon}{2}$.

Considerando I_2 :

$$I_2 < \frac{1}{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r \cos \delta + r^2} \int_{\delta < |\theta-t| < \pi} |f(t) - f(\theta)| dt.$$

La desigualdad anterior se debe a que

$$\max_{\delta < |\theta-t| < \pi} P(r, \theta - t) = \frac{1}{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r \cos \delta + r^2}$$

Ahora, para δ fijo entre 0 y π , se tiene que

$$\lim_{r \rightarrow 1} \frac{1-r^2}{1-2r \cos \delta + r^2} \int_{\delta < \theta - \delta < \pi} |f(t) - f(\theta)| dt = 0.$$

De tal manera que existe $r_0 < 1$ tal que cuando $r_0 < r < 1$ esta expresión es menor que $\frac{\epsilon}{2}$, haciendo que $I_2 < \frac{\epsilon}{2}$. Y finalmente, para $r_0 < r < 1$

$$|u(r, \theta) - f(\theta)| \leq I_1 + I_2 < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \quad q.e.d.$$

1.6. Dos consecuencias del teorema de Poisson.

Pareciera que la sección previa resuelve el problema de Dirichlet expuesto a través de (1.2) a (1.5), debido a que provee una solución precisa en la forma de una simple integral (relativo). Pero queda una pregunta ¿Existirán algunas otras soluciones?. Esto es considerado en la sección 1.7, pero la discusión se torna más fácil cuando se tiene conocimiento de las siguientes, importantes por cierto, consecuencias matemáticas del teorema de Poisson.

Teorema 1.3. Si f y g son funciones continuas de periodo 2π , y si ambas tienen los mismos coeficientes de Fourier, entonces $f = g$.

Demostración.

Por la hipótesis, se tiene que

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta) e^{-in\theta} d\theta$$

y, por el teorema de Poisson, la función

$$u(r, \theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n|} a_n e^{in\theta}$$

converge a $f(\theta)$ y a $g(\theta)$ cuando $r \rightarrow 1$ y por la unicidad del límite, $f(\theta) = g(\theta)$ *q.e.d.*

El siguiente corolario del teorema 1.3, es un resultado preliminar que establece algunas condiciones bajo las cuales la serie de Fourier de f en realidad converge a f .

Corolario. Si f es continua de periodo 2π y si la serie de Fourier de f converge uniformemente a alguna función g , entonces $f = g$.

Demostración.

Sean a_n los coeficientes de Fourier de f , así que $g = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta}$. Como la serie es uniformemente convergente por hipótesis, entonces se pueden calcular los coeficientes de Fourier b_m de g :

$$b_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-im} \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta = a_m$$

Esta última expresión, $\frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta$, es precisamente la que conducía al valor a_m , es por eso la validez de la última igualdad.

Entonces, la función g es la suma de series uniformemente convergentes; por lo

tanto, es continua, y se puede aplicar el teorema 1.3 para, finalmente, tener que $g = f$ *q.e.d.*

1.7. Unicidad de la solución del problema del calor.

Como se hizo notar en el principio de la sección anterior, es concebible el hecho de que tal vez pueden haber otras soluciones para (1.2)-(1.5); y es importante averiguar si las hay o no, para ello, habría que establecer más condiciones sobre u , y esto con el fin de determinar la distribución de la temperatura. Ahora, regresando a una parte del proceso de solución al kernel de Poisson pero desde un nuevo punto de vista y aplicando el teorema 1.3, se obtiene el siguiente resultado, llamado *el teorema de unicidad*.

Teorema 1.4. Si $f(\theta)$ es periódica y continua, y si $v(r, \theta)$ satisface (1.2) a (1.4), y además $v(r, \theta) \rightarrow f(\theta)$ uniformemente cuando $r \rightarrow 1$, entonces $v(r, \theta)$ es igual con la solución dada por el kernel de Poisson.

Demostración.

Para cada $r < 1$ fija, $v(r, \theta)$ tiene asociada su serie de Fourier $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n(r)e^{in\theta}$, con

$$a_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(r, \theta) e^{-in\theta} d\theta$$

Entonces, tomando en cuenta que $v(r, \theta)$ satisface (1.2) y derivando bajo la integral, se tiene que

$$\begin{aligned}(ra'_n)' &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial(v_r(r, \theta))}{\partial r} e^{-in\theta} d\theta \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{r} v_{\theta\theta}(r, \theta) e^{-in\theta} d\theta\end{aligned}$$

Integrando por partes y recordando que $v(r, \theta - \pi) = v(r, \theta + \pi)$, se tiene más allá que

$$\begin{aligned}(ra'_n)' &= \left[-\frac{1}{2\pi r} v_{\theta}(r, \theta) e^{-in\theta} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{in}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{r} v_{\theta} e^{-in\theta} d\theta \\ &= 0 - \frac{in}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{r} v_{\theta} e^{-in\theta} d\theta \quad (\text{integrando nuevamente por partes}) \\ &= \left[-\frac{in}{2\pi r} v(r, \theta) e^{-in\theta} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{n^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{r} v(r, \theta) e^{-in\theta} d\theta \\ &= \frac{n^2}{r} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(r, \theta) e^{-in\theta} d\theta \\ &= \frac{n^2}{r} a_n.\end{aligned}$$

De esta manera a_n satisface la ecuación diferencial $(ra'_n)' = \frac{n^2}{r} a_n$, lo cual conduce a la solución $a_n = A_n r^n + B_n r^{-n}$, para algunas constantes A_n y B_n ($n \neq 0$). Como $v(r, \theta)$ es acotada

$$\begin{aligned}|a_n(r)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(r, \theta) e^{-in\theta} d\theta \right| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |v(r, \theta)| |e^{-in\theta}| d\theta \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{máx}|v| d\theta = \frac{1}{\pi} 2\pi \text{máx}|v| = 2 \text{máx}|v| \\ \therefore |a_n(r)| &\leq 2 \text{máx}|v|.\end{aligned}$$

de tal forma que el coeficiente B_n debe ser cero y $a_n(r) = A_n r^n$ para A_n una constante. Similarmente $a_0(r) = A_0$ (para algún A_0). Se puede valuar A_n haciendo $r \rightarrow 1$ como sigue:

$$A_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(r, \theta) e^{-in\theta} d\theta$$

Así, cuando $r \rightarrow 1$, $v(r, \theta) \rightarrow f(\theta)$ uniformemente en θ , entonces la integral converge a $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta$ cuando $r \rightarrow 1$ y finalmente se encuentra que:

$$A_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta$$

Así, para cada $r < 1$ fija, la serie de Fourier de $v(r, \theta)$ es precisamente la serie para $u(r, \theta)$, la solución del problema del calor construida a partir del kernel de Poisson. Como esta serie converge uniformemente a $u(r, \theta)$, por el corolario del teorema 1.2 se tiene que $u(r, \theta) = v(r, \theta)$. Como un ejemplo de la aplicación de este resultado, se puede decir que la temperatura que hay en el centro del disco con una distribución uniforme, es el promedio de las temperaturas sobre la frontera del disco, debido a que:

$$u(0, \theta) = A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta$$

Y, finalmente, $u(r, \theta)$ es la única solución al problema del calor.

1.8. Convergencia puntual de las series de Fourier.

Desde un punto de vista matemático, el teorema de Poisson muestra que cualquier función continua $f(\theta)$ de periodo 2π puede ser recuperada a partir de sus series de Fourier $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta}$, si se le “inserta un factor de convergencia” $r^{|n|}$ en el n -ésimo término, y tomando el límite cuando $r \rightarrow 1^-$. En este sentido, al menos, la serie representa a f . Sin embargo, el camino más simple de una serie para ser asociada a una función f es que dicha serie converja a $f(\theta)$ para cada valor de θ . Desafortunadamente algunas funciones continuas y periódicas no son representadas

por su serie de Fourier en este camino. Pero si se asume un poco más que la mera continuidad, en una instancia derivabilidad, entonces la serie de Fourier de f si convergerá a f .

El primer resultado de esta naturaleza fue probado por Dirichlet, quien mostró en 1829 que si f es monótona por partes, entonces la serie de Fourier de f converge a f en todos los puntos donde f es continua. Se da en esta sección una versión ligeramente más simple del teorema de Dirichlet.

El análisis de la convergencia de la serie de Fourier es similar al de la serie para $u(r, \theta)$: se convierte la suma estimadora en una integral que involucra a f . La suma simétrica parcial S_N de la serie de Fourier de f está dada por:

$$S_N(\theta) = \sum_{n=-N}^N a_n e^{in\theta} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{n=-N}^N e^{in(\theta-t)} dt.$$

donde a_n es el n -ésimo coeficiente de Fourier de f . Así, el kernel relevante del punto de convergencia (correspondiente al kernel de Poisson usado anteriormente) es:

$$D_N = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^N e^{in\theta}$$

y el interés en este kernel radica en su comportamiento cuando $N \rightarrow \infty$. D_N es llamado el kernel de Dirichlet. Tres hechos relevantes del kernel de Dirichlet son:

(i) $D_N(\theta) = D_N(-\theta)$

(ii) $\int_{-\pi}^{\pi} D_N(\theta) d\theta = 1$ y;

$$(iii) D_N(\theta) = \frac{\text{sen}\left(N\theta + \frac{\theta}{2}\right)}{2\pi \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

La parte (iii) muestra que el kernel de Dirichlet carece de dos importantes características del de Poisson: es no positivo y no converge a cero cuando $\theta \neq 0$; por el contrario, oscila más y más rápidamente a medida que $N \rightarrow \infty$. Esta manera de oscilar es aprovechada por el siguiente resultado, llamado el lema de Riemann.

Lema. Si f es derivable por partes sobre el intervalo $a \leq \theta \leq b$, entonces

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^b f(\theta) \text{sen}(A\theta) d\theta = 0.$$

El asumir que f es derivable por partes no es esencial, pero permite una prueba más sencilla que cubre el caso de interés.

Demostración.

Sea $a_i < \theta < a_{i+1}$ [$i = 0, \dots, n$] los intervalos en los cuales f tiene derivada continua.

Entonces:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(\theta) \text{sen}(A\theta) d\theta &= \sum_{i=0}^n \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(\theta) \text{sen}(A\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{A} \sum_{i=0}^n [f(a_i +) \cos(Aa_i) - f(a_{i+1} -) \cos(Aa_{i+1})] \\ &\quad + \frac{1}{A} \sum_{i=0}^n \int_{a_i}^{a_{i+1}} f'(\theta) \cos(A\theta) d\theta. \end{aligned}$$

y esta última expresión tiende a cero cuando $A \rightarrow \infty$ *q.e.d.*

Esta prueba es muy sencilla, pero debe considerarse el porque la suavidad de f debería hacer más fácil de aprovechar y explotar el rápido incremento de las oscilaciones de f ; debiera tenerse en mente las gráficas de $f(\theta)\text{sen}A\theta$ para valores cada vez más grandes de A . De la misma manera, en la prueba del teorema 1.5 que a continuación se enuncia, se deberían visualizar las gráficas esbozadas en las figuras 1.3 y 1.4 ilustrando el teorema 1.2. El argumento es similar en muchos aspectos a ese teorema.

Teorema 1.5. Sea f una función periódica y derivable por partes. Entonces para cada punto θ , las sumas parciales simétricas

$$S_N = \sum_{n=-N}^N a_n e^{in\theta}$$

convergen a $\frac{1}{2}[f(\theta+) + f(\theta-)]$; y si f es continua en θ , entonces converge a $f(\theta)$.

Demostración.

Por las partes (i) y (ii) de las propiedades de D_N , se tiene que:

$$f(\theta \pm) = \int_0^\pi D_N(t) f(\theta \pm) dt$$

así que

$$\begin{aligned} S_N - \frac{1}{2}[f(\theta+) + f(\theta-)] &= \int_0^\pi D_N(t)[f(\theta+t) - f(\theta+)]dt \\ &\quad + \int_0^\pi D_N(t)[f(\theta-t) - f(\theta-)]dt. \end{aligned}$$

Estas dos últimas integrales son casi idénticas, bastará con mostrar que:

$$\int_0^{\pi} D_N(t)[f(\theta+t) - f(\theta+)]dt \rightarrow 0 \text{ cuando } N \rightarrow \infty. \quad (1.14)$$

Sea δ_0 cualquier número menor que π , tal que f tiene derivada continua f' para $\theta < t \leq \theta + \delta_0$. Entonces para $\delta \leq \delta_0$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} D_N(t)[f(\theta+t) - f(\theta+)]dt &= \int_0^{\delta} D_N(t)[f(\theta+t) - f(\theta+)]dt \\ &\quad + \int_{\delta}^{\pi} D_N(t)[f(\theta+t) - f(\theta+)]dt \\ &= I_1(\delta, N) + I_2(\delta, N) \end{aligned}$$

Entonces, si M es una cota superior para $|f'(t)|$ sobre $\theta < t \leq \theta + \delta_0$ se tiene que $|f(\theta+t) - f(\theta+)| \leq Mt$ para $0 < t \leq \delta_0 < \pi$, y

$$|I_1(\delta, N)| \leq \int_0^{\delta} Mt |D_N(t)| dt \leq \frac{M}{2\pi} \int_0^{\delta} \frac{t}{\sin \frac{t}{2}} dt \leq \frac{M\delta}{2}$$

La segunda desigualdad se debe a la parte (iii) de las propiedades de D_N , y la última desigualdad se debe a que para $0 \leq t \leq \pi$, $t \leq \pi \sin \frac{t}{2}$.

De esta manera, para $\varepsilon > 0$, $|I_1(\delta, N)| < \frac{\varepsilon}{2}$ si $\delta \leq \frac{\varepsilon}{M}$, y esto es cierto para todo N .

Se concluye la prueba de (1.14) escogiendo $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$, y mostrando que $I_2(\delta, N) \rightarrow 0$ cuando $N \rightarrow \infty$, entonces para N suficientemente grande se tendrá que

$$|I_1(\delta, N) + I_2(\delta, N)| < \varepsilon$$

quedando demostrado (1.14).

La convergencia de I_2 es una consecuencia directa del lema de Riemann. La función g definida como:

$$g(t) = \begin{cases} 0 & -\pi < t \leq \delta \\ \frac{f(\theta+t) - f(\theta)}{2\pi \operatorname{sen} \frac{t}{2}} & \delta < t \leq \pi \end{cases}$$

es derivable por partes, y

$$I_2(\delta, N) = \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \operatorname{sen}(Nt + \frac{t}{2}) dt$$

y, por lo tanto, $I_2(\delta, N) \rightarrow 0$ cuando $N \rightarrow \infty$, esto completa la prueba del teorema 1.5.

1.9. Algunas aplicaciones del teorema de Poisson.

Uno de los resultados clásicos del análisis matemático es el teorema de aproximación de Weierstrass: una función continua sobre un intervalo cerrado y finito puede ser uniformemente aproximada sobre ese intervalo por un polinomio. Éste y otros teoremas similares de aproximación se han convertido en herramientas estándar del análisis matemático. Aquí se deduce el teorema de Weierstrass, y algunos otros, y como una aplicación se establecerá la igualdad de Parseval.

1.9.1 Aproximación uniforme.

Cualquier suma finita de la forma $\sum_{-N}^N b_n e^{in\theta}$ es llamada suma polinomial trigonométrica de grado menor o igual que N , debido a que $e^{\pm in\theta} = (\cos\theta \pm i\text{sen}\theta)^n$. Claramente, cada polinomio trigonométrico es una función continua de periodo 2π , y es igualmente claro que existen funciones continuas y periódicas que no son polinomiales, por ejemplo, la expansión periódica de $f: f(x) = |x|$ ($|x| \leq \pi$). Sin embargo, ninguna función continua y periódica está lejos de los polinomios trigonométricos, en el siguiente sentido.

Teorema 1.6. Sea f una función continua de periodo 2π . Entonces, para cada $\varepsilon > 0$ existe un polinomio trigonométrico P tal que $|P(\theta) - f(\theta)| < \varepsilon$ para todo θ .

Demostración.

Por el teorema de Poisson (teorema 1.2), existe $r < 1$ tal que $|u(r, \theta) - f(\theta)| < \frac{\varepsilon}{2}$, donde

$$u(r, \theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n r^{|n|} e^{in\theta}$$

y

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta.$$

Como $|a_n| \leq \text{máx}|f|$, se tiene que

$$\left| \sum_{|n| \geq N} a_n r^{|n|} e^{in\theta} \right| \leq 2 \max |f| \frac{r^N}{1-r} \quad (1.15)$$

Si se escoge N de tal forma que el lado derecho de (1.15) es menor que $\frac{\varepsilon}{2}$, se tiene que

$$\begin{aligned} \left| f(\theta) - \sum_{n=-N}^N a_n r^{|n|} e^{in\theta} \right| &< \left| f(\theta) - u(r, \theta) + \sum_{|n| \geq N} a_n r^{|n|} e^{in\theta} \right| \\ &< |f(\theta) - u(r, \theta)| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

y el teorema 1.6 queda demostrado.

Como las funciones $e^{in\theta}$ pueden ser uniformemente aproximadas por sus series de Taylor, se puede obtener el teorema de Weierstrass a partir del teorema 1.6.

Teorema 1.7. Sea f una función continua sobre el intervalo finito cerrado $[a, b]$. Entonces, dado $\varepsilon > 0$ existe un polinomio P tal que $|f - P| < \varepsilon$ sobre $[a, b]$.

Demostración.

Sea c más grande que $\max(|a|, |b|)$. Entonces, f puede ser extendida a una función continua sobre $[-c, c]$ mediante la unión sobre la gráfica de f los segmentos de recta desde el punto $(-c, 0)$ al punto $(a, f(a))$, y desde $(b, f(b))$ a $(c, 0)$.

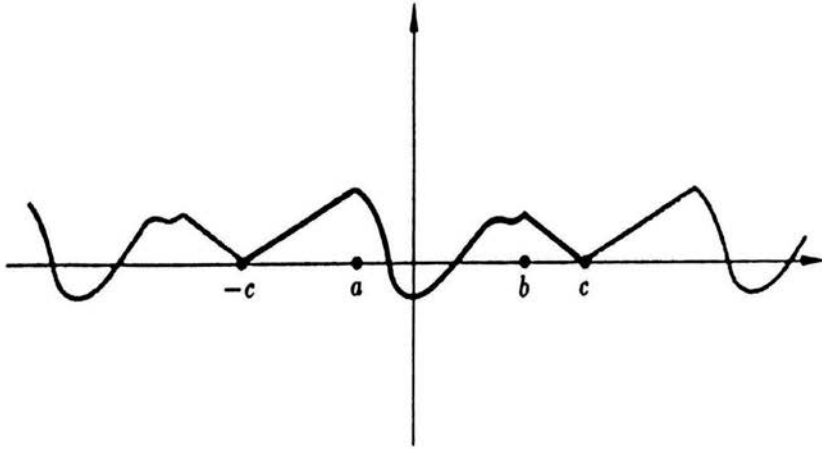


Figura 1.4. Extensión continua y periódica de f en el intervalo $a \leq x \leq b$

Entonces f puede ser extendida lo necesario para que tenga periodo $2c$; llámese a esta extensión F (Figura 1.4). Sea $g(\theta) = F\left(\frac{c\theta}{\pi}\right)$, de tal manera que g tiene periodo 2π . Escógase un polinomio trigonométrico

$$Q(\theta) = \sum_{n=-N}^N a_n e^{in\theta} \text{ con } |Q - g| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Lo anterior puede hacerse por el teorema 1.6. Finalmente, aproxímese $e^{in\theta}$ por un polinomio $P_n(\theta)$ (dígase, un número finito de términos de su serie de Taylor) tal que

$$|P_n(\theta) - e^{in\theta}| < \frac{\varepsilon}{|a_n|(4N+2)} \text{ para } |\theta| \leq c.$$

entonces

$$P(\theta) = \sum_{n=-N}^N a_n P_n(\theta)$$

satisface

$$|g(\theta) - P(\theta)| \leq |g(\theta) - Q(\theta)| + |Q(\theta) - P(\theta)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

así que

$$|f(x) - P\left(\frac{\pi x}{c}\right)| < \varepsilon \text{ para } a \leq x \leq b \text{ q.e.d.}$$

Los teoremas 1.6 y 1.7 algunas veces son llamados *primer y segundo teorema de aproximación de Weierstrass*, respectivamente.

1.9.2. Aproximación por mínimos cuadrados.

La aproximación que aquí se considera no es tan fácil de visualizar gráficamente como la aproximación uniforme en la subsección previa, pero eso no es tan importante, ya que se adapta bien a los cálculos. Un caso simple de tal aproximación es el método de mínimos cuadrados para ajustar una línea recta a un conjunto de puntos dado.

Teorema 1.8. Sean a_n los coeficientes de Fourier de la función continua f de periodo 2π , y

$$S_N(\theta) = \sum_{n=-N}^N a_n e^{in\theta}.$$

Entonces

$$\int_{-\pi}^{\pi} |S_N - f|^2 \rightarrow 0 \text{ cuando } N \rightarrow \infty. \quad (1.16)$$

Más aún, si

$$t_N(\theta) = \sum_{n=-N}^N b_n e^{in\theta}$$

con coeficientes arbitrarios b_n , entonces

$$\int_{-\pi}^{\pi} |t_N - f|^2 > \int_{-\pi}^{\pi} |S_N - f|^2 \quad (1.17)$$

a menos que $a_n = b_n$ para $-N \leq n \leq N$.

Finalmente, la igualdad de Parseval se cumple:

$$2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 \quad (1.18)$$

Capítulo II

Búsqueda de periodicidad.

Introducción.

La esencia del análisis de Fourier es la representación de un conjunto de datos en términos de funciones “senoidales”. Es importante justificar la elección de estas funciones, ya que muchas otras familias de funciones periódicas comparten algunas de las propiedades de las senoidales.

La propiedad más básica de estas funciones que las hacen generalmente útiles para el análisis de series de tiempo es su comportamiento bajo un cambio en la escala de tiempo. Una senoidal de frecuencia ω (en radianes por unidad de tiempo) o de periodo $\frac{2\pi}{\omega}$ puede ser escrita como:

$$f(t) = R \cos(\omega t + \phi)$$

donde R es la amplitud y ϕ la fase. Si se cambia la variable de tiempo t a $u = \frac{t-a}{b}$ ($b \neq 0$), lo que conlleva a un cambio tanto en origen como escala, entonces, la ecuación anterior se convierte en:

$$\begin{aligned} g(u) &= f(a + bu) \\ &= R \cos(\omega bu + \phi + \omega a) \\ &= R' \cos(\omega' u + \phi'). \end{aligned}$$

donde $R = R'$, $\omega' = \omega b$ y $\phi' = \phi + \omega a$. De tal manera que la amplitud permanece sin cambios, la frecuencia es multiplicada por b (el recíproco del cambio en la escala de tiempo), y la fase es alterada por una cantidad que involucra el cambio del origen en el tiempo y la frecuencia de la senoidal.

Como el origen asociado a un conjunto de datos es frecuentemente arbitrario, estas simples relaciones son útiles. En particular, como la amplitud de la senoidal no depende ni del origen ni de la escala de la variable de tiempo, ésta debe ser considerada como una cantidad absoluta sin arbitrariedad en su definición. Otra característica útil de las senoidales es su comportamiento bajo muestreo (esto es, observando una función de la variable continua t en un conjunto de valores igualmente espaciados t_0, t_1, \dots), pues si el intervalo de muestreo es Δ , entonces las funciones:

$$R \cos(\omega_1 t + \phi) \quad \text{y} \\ R \cos(\omega_2 t + \phi)$$

son indistintas si $\omega_1 - \omega_2$ es un múltiplo de $\frac{2\pi}{\Delta}$. Este fenómeno se discute con más detalle en la sección 2.5.

En este capítulo se examina el problema de describir las periodicidades, si algunas están presentes en un conjunto de datos dado. En algunos casos se conoce una colección de periodos que se espera estén presentes, y es entonces cuando se tienen que buscar las amplitudes y las fases asociadas.

Sin embargo, con frecuencia no hay información previa sobre los periodos, y estos

deben ser encontrados también. El primer problema es más simple, y se discute primero. A partir de esa discusión se deberá desarrollar un camino para la solución del problema más difícil: encontrar periodicidades.

2.1 Enfoque al ajuste de una curva.

Considérese un conjunto de observaciones a lo largo de n unidades de tiempo. Supóngase que a lo largo de estas unidades de tiempo se observan m ($m < n$) “picos”; esto sugiere que cualquier periodicidad debería tener alrededor de $\frac{n}{m}$ unidades de tiempo. Así el t -ésimo valor debería contener una componente de la forma $R \cos(\varpi t + \phi)$, donde $\varpi = \frac{2\pi}{\frac{n}{m}}$. Entonces, un modelo propuesto para este conjunto de datos es:

$$X_t = \mu + R \cos(\varpi t + \phi) + \varepsilon_t \quad t = 0, 1, \dots, n-1 \quad (2.1)$$

el caso más simple de “periodicidades escondidas”.

X_t denota el t -ésimo valor del conjunto de datos, y ε_t el t -ésimo residual. Se considera (2.1) como un modelo bueno (esto es, que ajusta bien los datos) si los residuales son generalmente pequeños. El término μ es una constante agregada, que se necesita cuando los residuales son absolutamente pequeños.

En este caso, los parámetros desconocidos son μ , R y ϕ , en la siguiente sección se mostrará como encontrar estimadores para ellos de tal manera que los residuales sean tan pequeños como sea posible en cierto sentido. Inicialmente se mantiene ϖ

como valor fijo ($\frac{2n\pi}{m}$), pero en la sección 2.3 se considera como un parámetro desconocido adicional y así se encontrará un mejor estimador.

Para propósitos de este capítulo, se seguirá la práctica común o usual de medir el tamaño de los residuales mediante la suma de sus valores al cuadrado. Así, el problema es encontrar μ , R y ϕ (y después ω) para minimizar:

$$S(\mu, R, \phi) = S(\mu, R, \phi, \omega) = \sum_{t=0}^{n-1} [X_t - \mu - R \cos(\omega t + \phi)]^2$$

siendo el término entre [.] precisamente el t -ésimo residual ε_t para valores dados de μ , R y ϕ (y ω).

Éste es un ejemplo del método de mínimos cuadrados, el cual es altamente usado y tiene muchas ventajas teóricas y de cálculos. Puede verse que los problemas que involucran mínimos cuadrados son más simples cuando el modelo es una función lineal de los parámetros desconocidos, debido a que la función a minimizar es cuadrática.

La ecuación (2.1) es no lineal en R y ϕ , pero puede reescribirse como.

$$X_t = \mu + A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) + \varepsilon_t$$

donde $A = R \cos(\phi)$ y $B = -R \sin(\phi)$. Lo que es más, dados cualesquiera valores de A y B , se puede resolver para R y ϕ . Debe, por consiguiente, considerarse A y B como parámetros, y el modelo es ahora lineal para ω fijo. En la sección 2.3 se muestra la manera en que la estimación de la frecuencia ω debe ser implementada.

2.2 Estimación por mínimos cuadrados de la amplitud y la fase.

En esta sección se muestra la manera de estimar los parámetros de una senoidal, con o sin una constante agregada (μ). La frecuencia ϖ es considerada como conocida y no varía al implementar el ajuste. En la siguiente sección el método se extiende para incluir la estimación de ϖ .

Considérese primero el modelo de dos parámetros sin constante agregada:

$$X_t = A \cos(\varpi t) + B \text{sen}(\varpi t) + \varepsilon_t,$$

y el principio de los mínimos cuadrados conduce a minimizar:

$$T(\mu, A, B) = \sum_{t=0}^{n-1} [X_t - \mu - A \cos(\varpi t) - B \text{sen}(\varpi t)]^2$$

restringiendo μ a ser cero por el momento, y manteniendo ϖ fijo, se tiene que:

$$\frac{\partial T}{\partial A} = -2 \sum_{t=0}^{n-1} \cos(\varpi t) [X_t - A \cos(\varpi t) - B \text{sen}(\varpi t)]$$

$$\frac{\partial T}{\partial B} = -2 \sum_{t=0}^{n-1} \text{sen}(\varpi t) [X_t - A \cos(\varpi t) - B \text{sen}(\varpi t)]$$

igualando las ecuaciones a cero y resolviendo para A y B , se obtienen las siguientes soluciones:

$$\begin{aligned} A = \hat{A} &= \frac{1}{\Delta} \left[\sum_{t=0}^{n-1} X_t \cos(\varpi t) \sum_{t=0}^{n-1} [\text{sen}(\varpi t)]^2 - \sum_{t=0}^{n-1} X_t \text{sen}(\varpi t) \sum_{t=0}^{n-1} \cos(\varpi t) \text{sen}(\varpi t) \right] \\ B = \hat{B} &= \frac{1}{\Delta} \left[\sum_{t=0}^{n-1} X_t \text{sen}(\varpi t) \sum_{t=0}^{n-1} [\cos(\varpi t)]^2 - \sum_{t=0}^{n-1} X_t \cos(\varpi t) \sum_{t=0}^{n-1} \cos(\varpi t) \text{sen}(\varpi t) \right] \end{aligned} \quad (2.2)$$

donde

$$\Delta = \sum_{t=0}^{n-1} [\cos(\varpi t)]^2 \sum_{t=0}^{n-1} [\text{sen}(\varpi t)]^2 - \left[\sum_{t=0}^{n-1} \cos(\varpi t) \text{sen}(\varpi t) \right]$$

Las sumas que involucran solamente funciones trigonométricas pueden ser evaluadas usando los resultados siguientes:

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{n-1} \cos \lambda t &= \cos\left(\frac{(n-1)\lambda}{2}\right) \frac{\text{sen}\left(\frac{n\lambda}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\lambda}{2}\right)} \\ \sum_{t=0}^{n-1} \sin \lambda t &= \sin\left(\frac{(n-1)\lambda}{2}\right) \frac{\text{sen}\left(\frac{n\lambda}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\lambda}{2}\right)} \end{aligned} \quad (2.3)$$

y las fórmulas:

$$\begin{aligned}
\sin(\lambda + \mu) &= \text{sen}\lambda \cos\mu + \cos\lambda \text{sen}\mu \\
\cos(\lambda + \mu) &= \cos\lambda \cos\mu - \text{sen}\lambda \text{sen}\mu \\
\cos\lambda \cos\mu &= \frac{1}{2} \{\cos(\lambda + \mu) + \cos(\lambda - \mu)\} \\
\cos\lambda \sin\mu &= \frac{1}{2} \{\text{sen}(\lambda + \mu) - \text{sen}(\lambda - \mu)\} \\
\sin\lambda \sin\mu &= \frac{1}{2} \{\cos(\lambda - \mu) - \cos(\lambda + \mu)\}
\end{aligned}$$

de tal manera que:

$$\begin{aligned}
\sum_{t=0}^{n-1} (\cos \varpi t)^2 &= \frac{n}{2} \{1 + D_n(2\varpi) \cos(n-1)\varpi\} \\
\sum_{t=0}^{n-1} \cos \varpi t \text{sen} \varpi t &= \frac{n}{2} D_n(2\varpi) \text{sen}(n-1)\varpi \\
\sum_{t=0}^{n-1} (\text{sen} \varpi t)^2 &= \frac{n}{2} \{1 - D_n(2\varpi) \cos(n-1)\varpi\}
\end{aligned} \tag{2.4}$$

donde

$$D_n(\varpi) = \frac{\text{sen}\left(\frac{n\varpi}{2}\right)}{n \text{sen}\left(\frac{\varpi}{2}\right)}$$

es una versión del kernel de Dirichlet (capítulo 1).

Las sumas que involucran $\{X_t\}$ usualmente tienen que evaluarse directamente.

Para encontrar R y ϕ , la amplitud y la fase, se resuelven las ecuaciones $A = R \cos \phi$ y $B = -R \text{sen} \phi$. Como R es no negativa, se sigue que $R = (A^2 + B^2)^{\frac{1}{2}}$. La ecuación básica para ϕ es $\tan \phi = -\frac{B}{A}$. Sin embargo, la solución $\phi = \arctan\left(-\frac{B}{A}\right)$ es incorrecta, debido a que ésta proporciona el mismo valor tanto para $-A$ y $-B$ como

para A y B . La solución completa es la siguiente:

$$\phi = \begin{cases} \arctan\left(-\frac{B}{A}\right) & A > 0 \\ \arctan\left(-\frac{B}{A}\right) - \pi & A < 0, B > 0 \\ \arctan\left(-\frac{B}{A}\right) + \pi & A < 0, B \leq 0 \\ -\frac{\pi}{2} & A = 0, B > 0 \\ \frac{\pi}{2} & A = 0, B < 0 \\ \text{indefinido} & A = 0, B = 0 \end{cases}$$

Los valores mostrados arriba se obtienen a partir de la función $ATAN(-B,A)$ de FORTRAN.

Ahora bien, considérese el modelo de tres parámetros, la senoidal más la constante, dado en la sección 2.1:

$$X_t = \mu + A \cos \omega t + B \text{sen} \omega t + \varepsilon_t.$$

Las ecuaciones para los estimadores por mínimos cuadrados de μ , A y B (se denotan $\hat{\mu}$, \hat{A} y \hat{B} respectivamente) son:

$$\begin{aligned}
& \sum_{t=0}^{n-1} (X_t - \mu - A \cos \varpi t - B \sin \varpi t) = 0 \\
& \sum_{t=0}^{n-1} \cos \varpi t (X_t - \mu - A \cos \varpi t - B \sin \varpi t) = 0 \\
& \sum_{t=0}^{n-1} \sin \varpi t (X_t - \mu - A \cos \varpi t - B \sin \varpi t) = 0
\end{aligned} \tag{2.5}$$

No se dará una solución exacta a (2.5) pero si se pueden encontrar aproximaciones muy útiles como sigue. Cuando las sumas puramente trigonométricas son evaluadas, los coeficientes en (2.5) involucran el término $\frac{n}{2}$ y términos como $\frac{n}{2} D_n(2\varpi)$; ya que:

$$\begin{aligned}
\sum_{t=0}^{n-1} \cos \varpi t &= \cos \left\{ \frac{(n-1)\varpi}{2} \right\} \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{n\varpi}{2} \right)}{\operatorname{sen} \left(\frac{\varpi}{2} \right)} \\
\sum_{t=0}^{n-1} \sin \varpi t &= \sin \left\{ \frac{(n-1)\varpi}{2} \right\} \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{n\varpi}{2} \right)}{\operatorname{sen} \left(\frac{\varpi}{2} \right)}
\end{aligned}$$

Nótese primero que $D_n \left(\frac{2k\pi}{n} \right) = 0$ para cualquier entero k y que $|nD_n(\varpi)| \leq \frac{1}{\operatorname{sen} \left(\frac{\varpi}{2} \right)}$, de tal manera que los términos en (2.5) que involucran D_n

son para n grande y ϖ no muy cercano a cero, son siempre pequeños comparados con $\left(\frac{n}{2} \right)$, y algunas veces exactamente cero. De tal manera que las siguientes expresiones obtenidas evaluando (2.5) y usando el resultado anterior:

$$\begin{aligned}
& \sum_{t=0}^{n-1} X_t - n\mu - nD_n \left\{ A \cos \left[\frac{(n-1)\varpi}{2} \right] + B \operatorname{sen} \left[\frac{(n-1)\varpi}{2} \right] \right\} \\
& \sum_{t=0}^{n-1} X_t \cos \varpi t - \mu n D_n(\varpi) \cos \left[\frac{(n-1)\varpi}{2} \right] - A \frac{n}{2} \{ 1 + D_n(2\varpi) \cos(n-1)\varpi \} \\
& - B \{ D_n(2\varpi) \operatorname{sen}(n-1)\varpi \} \\
& \sum_{t=0}^{n-1} X_t \operatorname{sen} \varpi t - \mu n D_n(\varpi) \operatorname{sen} \left[\frac{(n-1)\varpi}{2} \right] - A \frac{n}{2} D_n(2\varpi) \operatorname{sen}(n-1)\varpi \\
& - B \{ 1 - D_n(2\varpi) \cos(n-1)\varpi \}
\end{aligned}$$

quedan reducidas, omitiendo los términos pequeños, al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
n\mu &= \sum_{t=0}^{n-1} X_t \\
\frac{nA}{2} &= \sum_{t=0}^{n-1} X_t \cos \varpi t \\
\frac{nB}{2} &= \sum_{t=0}^{n-1} X_t \operatorname{sen} \varpi t
\end{aligned} \quad (2.6)$$

Nótese que la segunda y tercer ecuación son también aproximaciones a las ecuaciones de dos parámetros (2.2).

Con frecuencia sucede que μ es mayor que A o B , y en este caso es imprudente ignorar cualquier término que involucre μ . De tal manera que, finalmente, las aproximaciones son entonces:

$$\begin{aligned}
 n\mu &= \sum_{t=0}^{n-1} X_t \\
 \mu \sum_{t=0}^{n-1} \cos \varpi t + \frac{nA}{2} &= \sum_{t=0}^{n-1} X_t \cos \varpi t \quad (2.6) \\
 \mu \sum_{t=0}^{n-1} \text{sen} \varpi t + \frac{nB}{2} &= \sum_{t=0}^{n-1} X_t \text{sen} \varpi t
 \end{aligned}$$

y las soluciones a estas ecuaciones (denotadas por $\tilde{\mu}$, \tilde{A} , \tilde{B}) son:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mu} &= \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} X_t \\
 \tilde{A} &= \frac{2}{n} \sum_{t=0}^{n-1} (X_t - \tilde{\mu}) \cos \varpi t \quad (2.7) \\
 \tilde{B} &= \frac{2}{n} \sum_{t=0}^{n-1} (X_t - \tilde{\mu}) \text{sen} \varpi t
 \end{aligned}$$

y deben considerarse como soluciones aproximadas de (2.5).

Lo “adecuado” del modelo como una representación de los datos puede ser evaluado examinando la suma de los cuadrados de los residuales, es decir, los valores de $T(\hat{\mu}, \hat{A}, \hat{B})$ para las soluciones por mínimos cuadrados, y $T(\tilde{\mu}, \tilde{A}, \tilde{B})$ para las soluciones aproximadas. Cada uno de estos valores puede ser comparado con $T(\bar{x}, 0, 0)$, la suma de cuadrados de los residuales solamente a partir del término constante. La diferencia $T(\bar{x}, 0, 0) - T(\hat{\mu}, \hat{A}, \hat{B})$ (o $T(\bar{x}, 0, 0) - T(\tilde{\mu}, \tilde{A}, \tilde{B})$) se considera como la cantidad de variación cuadrada en los datos que puede ser atribuida a la

frecuencia ϖ . Un conjunto de aproximaciones similares a aquellas usadas para obtener (2.7) muestran que ambas cantidades son aproximadamente

$$\frac{n}{2}(\tilde{A}^2 + \tilde{B}^2) = \frac{n}{2}\tilde{R}^2, \text{ es decir:}$$

$$T(\hat{\mu}, \hat{A}, \hat{B}) \approx T(\bar{x}, 0, 0) - \frac{n}{2}\tilde{R}^2$$

que se interpreta como la suma de cuadrados de los residuales es igual a la suma de cuadrados de los datos originales menos la suma de cuadrados asociada a la frecuencia ϖ .

2.3 Estimación por mínimos cuadrados para la frecuencia.

En esta sección se muestra cómo los métodos anteriores pueden ser extendidos para incluir la estimación de la frecuencia ϖ . Se tratará sólo con el modelo de tres parámetros (la “senoidal más la constante”) debido a que es, generalmente, el más útil. Sin embargo, un método exactamente análogo podría ser usado para estimar ϖ en el caso de dos parámetros.

En la sección anterior se encontraron valores de μ , A y B para minimizar:

$$T(\mu, A, B) = T(\mu, A, B, \varpi) = \sum_{t=0}^{n-1} [X_t - \mu - A \cos(\varpi t) - B \sin(\varpi t)]^2$$

para un valor de ω fijo . Se mostró que estos valores son aproximadamente:

$$\begin{aligned}\bar{\mu} &= \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} X_t \\ \tilde{A}(\omega) &= \frac{2}{n} \sum_{t=0}^{n-1} (X_t - \bar{\mu}) \cos \omega t \\ \tilde{B}(\omega) &= \frac{2}{n} \sum_{t=0}^{n-1} (X_t - \bar{\mu}) \sin \omega t\end{aligned}$$

y más aún, la suma de los cuadrados de los residuales es:

$$\begin{aligned}T\{\hat{\mu}(\omega), \hat{A}(\omega), \hat{B}(\omega), \omega\} &\approx T\{\bar{\mu}(\omega), \tilde{A}(\omega), \tilde{B}(\omega), \omega\} \\ &\approx T(\bar{x}, 0, 0, \omega) - \frac{n}{2} \left\{ \tilde{A}^2(\omega) + \tilde{B}^2(\omega) \right\} \\ &= T(\bar{x}, 0, 0, \omega) - \frac{n}{2} \tilde{R}^2(\omega)\end{aligned}$$

En esta sección, ω es considerado como un parámetro adicional desconocido. El mejor valor para ω en el sentido de mínimos cuadrados es el valor $\hat{\omega}$ que minimiza $T\{\hat{\mu}(\omega), \hat{A}(\omega), \hat{B}(\omega), \omega\}$. Ahora bien, la aproximación correspondiente es el valor $\tilde{\omega}$ que maximiza $\tilde{R}^2(\omega)$.

Una función equivalente usada es el periodograma $I(\omega) = \frac{n}{8\pi} \tilde{R}^2(\omega)$ (se abordará con más detalle el análisis espectral y el periodograma en el Capítulo III).

Las derivadas de ambas funciones, $\tilde{R}^2(\varpi)$ y $I(\varpi)$, con respecto de ϖ son altamente no lineales y tienen muchos ceros, esto hace imposible una solución analítica. Por ello, el máximo de estas funciones se encuentran usando métodos numéricos, como por ejemplo, el algoritmo descrito por Brent (1972).

La estimación de un número de frecuencias es descrita en la siguiente sección; en particular se mostrará cómo la presencia de una segunda componente periódica, especialmente una con frecuencia similar, puede notablemente distorsionar las estimaciones de la frecuencia y de la amplitud y fase.

2.4 Múltiples periodicidades.

En secciones anteriores se ha usado el modelo

$$X_t = \mu + A \cos \varpi t + B \sin \varpi t + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \text{ } t\text{-ésimo residual.}$$

para obtener expresiones que estimen los valores de A , B y ϖ , usando el método de mínimos cuadrados. La idea detrás de este método es hacer los residuales ε_t lo más pequeño posible. En este caso, sin embargo, el término residual necesariamente incluye el componente periódico descrito en la sección anterior, y entonces, no tiene sentido tratar de hacerlo pequeño.

Una mejor aproximación es incluir el segundo componente en el modelo:

$$X_t = \mu + A_1 \cos \varpi_1 t + B_1 \text{sen} \varpi_1 t + A_2 \cos \varpi_2 t + B_2 \text{sen} \varpi_2 t + \varepsilon_t$$

Lo cual conduce a minimizar:

$$\sum_{t=0}^{n-1} [X_t - \mu - A_1 \cos \varpi_1 t - B_1 \text{sen} \varpi_1 t - A_2 \cos \varpi_2 t - B_2 \text{sen} \varpi_2 t]^2 \quad (2.8)$$

La extensión más natural del método usado en la sección (2.3) para encontrar una sola frecuencia ϖ es como se describe a continuación: Primero, nótese que para ϖ_1 y ϖ_2 fijos el modelo es lineal en los parámetros restantes. Por lo tanto, los mejores valores de éstos pueden encontrarse usando métodos convencionales (por ejemplo, mínimos cuadrados) y sustituirse en la función T . Esto proporciona una nueva función:

$$U(\varpi_1, \varpi_2) = T(\widehat{\mu}, \widehat{A}_1, \widehat{B}_1, \varpi_1, \widehat{A}_2, \widehat{B}_2, \varpi_2)$$

donde $\widehat{\mu}, \widehat{A}_1, \widehat{B}_1, \widehat{A}_2, \widehat{B}_2$ son todos funciones de ϖ_1 y ϖ_2 . La función U o una adecuada aproximación de ella podría ser entonces minimizada numéricamente por alguno de los métodos disponibles (ver apéndice, Brent, 1972); y por analogía con las funciones examinadas en la sección anterior, se espera que U tenga muchos puntos estacionarios.

Un planteamiento alternativo, que también construye el método de la sección (2.3), está basado en el método de “descenso cíclico” (en inglés *cyclic descent*). La idea general del método es dividir los parámetros en subconjuntos (exhaustivos y usualmente excluyentes), de tal manera que la optimización con respecto a los parámetros de un subconjunto, fijando los parámetros restantes, puede ser hecha con relativa facilidad. El método, entonces, consiste en “actualizar” los demás subconjuntos sucesivamente resolviendo los problemas de optimización en turno. El método básico hace un ciclo a través de los subconjuntos en un orden predeterminado, hasta que un ciclo completo provoca que ya no hayan cambios en la función a ser optimizada. Usando algoritmos sofisticados, los subconjuntos pueden ser escogidos cada vez en una secuencia diferente para acelerar la convergencia del método, aunque esto no se hará aquí. Cuando, la función ya no puede ser reducida variando cualquiera de los subconjuntos de parámetros, un mínimo (local) usualmente ha sido alcanzado (para funciones con derivadas parciales continuas, éste siempre es el caso, excepto por algunos ejemplos patológicos, sin embargo, el método fácilmente podría fallar con funciones cuyas derivadas parciales no sean continuas).

A continuación se describe un procedimiento usando el descenso cíclico para ajustar el modelo más general:

$$X_t = \mu + \sum_{j=1}^m (A_j \cos \varpi_j t + B_j \sin \varpi_j t) + \varepsilon_t,$$

el modelo de “periodicidades escondidas”, por el método de mínimos cuadrados. Primero, la minimización con respecto a μ para valores fijos de los otros parámetros es directa. El valor óptimo es solo la media de la serie “corregida”:

$$X_t - \sum_{j=1}^m (A_j \cos \varpi_j t + B_j \text{sen} \varpi_j t)$$

Segundo, si se hace variar ϖ_k , A_k y B_k y se mantienen los demás parámetros fijos, entonces, el problema es minimizar:

$$\begin{aligned} & \sum_{t=0}^{n-1} \left\{ X_t - \mu - \sum_{j \neq k} (A_j \cos \varpi_j t + B_j \text{sen} \varpi_j t) - A_k \cos \varpi_k t + B_k \text{sen} \varpi_k t \right\}^2 \\ &= \sum_{t=0}^{n-1} (Y_t - A_k \cos \varpi_k t + B_k \text{sen} \varpi_k t)^2 \end{aligned}$$

donde:

$$Y_t = X_t - \mu - \sum_{j \neq k} (A_j \cos \varpi_j t + B_j \text{sen} \varpi_j t)$$

La optimización con respecto a ϖ_k , A_k y B_k debe ser como en la sección (2.3) con la simplificación de que el modelo de una sola frecuencia no incluye el término constante. De esta manera, un ciclo del método consiste en estos dos pasos:

i) Corregir los datos para todos los componentes periódicos y estimar μ por la media de la serie corregida.

ii) Para la k -ésima corrida ($k = 1, \dots, m$), corregir la serie para la media μ y los otros componentes, después, estimar ϖ_k , A_k y B_k de la serie ya corregida.

Finalmente, volviendo al caso de 2 frecuencias, si se aplica a (2.8) el método de mínimos cuadrados, se encontrarán las soluciones aproximadas:

$$\begin{aligned}\tilde{\mu} &= \bar{x} \\ \tilde{A}_j &= \frac{2}{n} \sum_{t=0}^{n-1} X_t \cos \varpi_j t \\ \tilde{B}_j &= \frac{2}{n} \sum_{t=0}^{n-1} X_t \sin \varpi_j t \quad j = 1, 2.\end{aligned}$$

2.5 Efecto del tiempo discreto: " ALIAS " .

Hasta ahora no se ha discutido ninguna restricción que pudiera ser impuesta a la frecuencia ϖ de las senoidales ajustadas por los datos. Como las unidades de la frecuencia son radianes por unidad de tiempo, es natural que se requiera que éstos sean no negativos. Esto puede justificarse argumentando que, como $\cos(-x) = \cos(x)$ y $\sin(-x) = -\sin(x)$, cualquier curva con componentes seno y coseno y con frecuencia negativa $-\varpi$ ($\varpi > 0$) puede escribirse como:

$$A \cos(-\varpi t) + B \sin(-\varpi t) = A \cos \varpi t + (-B) \sin \varpi t$$

como una curva de seno y coseno con frecuencia positiva. Así, de esta manera, las frecuencias ω y $-\omega$ son indistintas: se dice que una es alias de la otra. El igual espaciamiento en la variable de tiempo de las observaciones introduce también un alias. Supóngase que el tamaño del intervalo de muestreo es Δ , de tal forma que la t -ésima observación es hecha al tiempo $t\Delta$. Si los datos consisten puramente de curvas de coseno con frecuencia ω (para efectos del argumento, con amplitud unitaria y fase cero), la t -ésima observación será:

$$X_t = \cos \omega t \Delta \quad (2.9)$$

Si se incrementa ω desde cero, (2.9) oscila más y más rápidamente hasta que en $\omega = \frac{\pi}{\Delta}$ se tiene:

$$X_t = \cos \pi t = (-1)^t$$

que es la oscilación más rápida que se puede observar. Ahora, supóngase que ω se incrementa aún más lejos, por ejemplo, a un valor que satisface $\frac{\pi}{\Delta} < \omega < \frac{2\pi}{\Delta}$. Sea $\omega' = \frac{2\pi}{\Delta} - \omega$ entonces:

$$\begin{aligned}
 X_t &= \cos \omega t \Delta \\
 &= \cos \left(\frac{2\pi}{\Delta} - \omega' \right) t \Delta \\
 &= \cos(2\pi t - \omega' t \Delta) \\
 &= \cos(\omega' t \Delta)
 \end{aligned}$$

de la misma manera se obtiene que $\text{sen} \omega t \Delta = -\text{sen}(\omega' t \Delta)$.

Así pues, las frecuencias ω y ω' son también indistintas, y en consecuencia, son alias una de la otra. Ahora, se extenderá (intuitivamente) el argumento usado para cualquier frecuencia positiva, sin importar que tan grande sea ésta.

Se concluye que para $\omega \notin \left[0, \frac{\pi}{\Delta} \right]$, existe $\omega' \in \left[0, \frac{\pi}{\Delta} \right]$ tal que $\cos \omega t \Delta = \cos \omega' t \Delta$ y $\text{sen} \omega t \Delta = -\text{sen} \omega' t \Delta$, es decir, existe un alias en ese intervalo, llamado el “alias principal”. Para eliminar posibles indeterminaciones o confusiones, se restringirán las frecuencias a este intervalo.

La frecuencia $\frac{\pi}{\Delta}$ es conocida como la “frecuencia plegable” o frecuencia Nyquist (en honor a Nyquist quien trabajó sobre ello en 1924), debido a que frecuencias mayores a ésta tienen un alias dentro del intervalo $\left[0, \frac{\pi}{\Delta} \right]$.

La frecuencia Nyquist es $\frac{\pi}{\Delta}$ en radianes por unidad de tiempo, en términos de ciclos

es, por lo tanto, $\frac{1}{2\Delta}$ por cada unidad. Como el intervalo de muestreo es de tamaño Δ , la tasa de muestreo es $\frac{1}{\Delta}$ observaciones por unidad de tiempo. De esta manera la frecuencia plegable es un medio de la tasa de muestreo, en otras palabras, hay dos muestras por cada ciclo de dicha frecuencia, la cuál es la más grande que pueda observarse.

Este fenómeno (el detectar alias en la frecuencia) es importante no sólo en la elección de las frecuencias que serán ajustadas a los datos, sino también debe tenerse en cuenta cuando se diseña un esquema para observar una serie de tiempo.

Supóngase que $x(u)$ es una función del parámetro de tiempo continuo u y se desea hacer un muestreo de esta función para obtener información sobre frecuencias en algún intervalo en particular, por ejemplo (ϖ_0, ϖ_1) . Usualmente se requiere que la frecuencia Nyquist sea más grande que ϖ_1 , de tal manera que todas estas frecuencias sean directamente observables. Sin embargo, si $x(u)$ contiene oscilaciones con frecuencias mayores que ϖ_1 , se tendría que escoger la frecuencia muestral de tal forma que estas frecuencias no tuvieran un alias dentro del intervalo estudiado. De hecho, es preferible, cuando sea posible, remover estas frecuencias de la función antes de hacer el muestreo para evitar este problema.

Es importante hacer notar que el hallar alias es un fenómeno relativamente simple. En general, cuando se toma una sucesión discreta de observaciones de una función continua, puede haber pérdida de información. Es una ventaja de las funciones trigonométricas que esta pérdida de información se manifieste en el contexto del entendimiento de este fenómeno.

En lo sucesivo, se convendrá tomar el intervalo de muestreo como la unidad de tiempo, entonces, $\Delta = 1$, y la frecuencia Nyquist es simplemente π . Esta convención estará implícita excepto cuando sea indicado de otra manera.

2.6 Resultados estadísticos.

Hasta el momento se ha descrito la manera de obtener estimadores para los coeficientes de una o más componentes cíclicas (senoidales) en una serie. Ahora, bajo el supuesto de que los errores en la serie son estadísticos o aleatorios por naturaleza, se dará una descripción de la precisión de dichos estimadores.

Supóngase que los datos x_0, \dots, x_{n-1} fueron generados por el modelo

$$X_t = \mu + A \cos \omega t + B \sin \omega t + \varepsilon_t,$$

donde ε_t son los errores aleatorios y satisfacen:

$$E[\varepsilon_t] = 0$$

$$E[\varepsilon_t \varepsilon_{t'}] = \begin{cases} v > 0 & \text{si } t = t' \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Habiendo hecho un primer supuesto de la naturaleza de los datos, es hora plantear algunos resultados estadísticos concernientes a los estimadores mencionados anteriormente. Los estimadores exactos por mínimos cuadrados \hat{A} y \hat{B} no serán considerados. Para los estimadores \bar{x} , \tilde{A} y \tilde{B} (de μ, A, B respectivamente), se pueden encontrar expresiones exactas para las medias, varianzas y covarianzas, pero son expresiones muy grandes y poco manejables, sin embargo, pueden encontrarse las siguientes aproximaciones:

$$\begin{aligned}
E[\tilde{A}] &\cong A \\
E[\tilde{B}] &\cong B \\
E[\bar{x}] &\cong \mu \\
\text{var}(\tilde{A}) &\cong \text{var}(\tilde{B}) \cong \frac{2v}{n} \\
\text{var}(\bar{x}) &\cong \frac{v}{n} \\
\text{cov}(\tilde{A}, \tilde{B}) &\cong \text{cov}(\tilde{B}, \bar{x}) \cong \text{cov}(\bar{x}, \tilde{A}) \cong 0
\end{aligned}
\tag{2.9}$$

Si se hace la suposición adicional de que los errores $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{n-1}$ son independientes, entonces, por el Teorema Central del Límite (Feller, 1968, pp. 244, 254) se espera que \tilde{A}, \tilde{B} y \bar{x} , como funciones lineales de ellos, tuvieran distribución Normal con medias y varianzas como las establecidas en (2.9).

El caso de que ϖ es desconocido y tiene que ser estimado es más difícil. Primero fue estudiado por Whittle (1952) y después por Walker (1971), llegando a que los principales resultados para el estimador $\tilde{\varpi}$ son:

$$\begin{aligned}
E[\tilde{\varpi}] &= \varpi + \text{términos involucrando } \frac{1}{n} \\
\text{var}(\tilde{\varpi}) &= \frac{24v}{n^3(A^2 + B^2)} + \text{términos "pequeños"}^{[1]}
\end{aligned}$$

Ahora bien, la varianza v de los errores es simplemente su valor cuadrático medio, pues tienen valor esperado 0. El valor correspondiente para la señal (otra nota explicando que es la señal) es:

$$\begin{aligned}
 \text{ave}(A \cos \varpi t + B \text{sen} \varpi t)^2 &= \text{ave}\{R \cos(\varpi t + \phi)\}^2 \\
 &= R^2 \text{ave} \cos^2(\varpi t + \phi) \\
 &= \frac{R^2}{2} \quad [2]
 \end{aligned}$$

La cantidad

$$\frac{R^2/2}{v} = \frac{\text{valor cuadrático medio de la señal}}{\text{valor cuadrático medio del ruido}}$$

llamada el *radio señal-ruido* o *snr* (por sus siglas en inglés *signal-to-noise ratio*), indica que tan bien el signal se hace presente en el ruido. La varianza de $\tilde{\omega}$ puede escribirse de nuevo como:

$$\text{var}(\tilde{\omega}) \cong \frac{12}{n^3 \text{snr}},$$

lo cual muestra que una larga serie es más importante que un signal fuerte.

Ahora bien, las varianzas de \tilde{A} y \tilde{B} se incrementan, como es de esperarse, cuando ϖ ya no es fijo y tiene que ser reemplazado por su estimador $\tilde{\omega}$. Los resultados son los siguientes:

$$\begin{aligned} \text{var}(\tilde{A}) &\cong \frac{2v}{n} \frac{A^2 + 4B^2}{R^2} \\ \text{var}(\tilde{B}) &\cong \frac{2v}{n} \frac{4A^2 + B^2}{R^2} \\ \text{cov}(\tilde{A}, \tilde{B}) &\cong \frac{6v}{n} \frac{AB}{R^2} \\ \text{cov}(\tilde{A}, \tilde{w}) &\cong \frac{12v}{n} \frac{B}{R^2} \\ \text{cov}(\tilde{B}, \tilde{w}) &\cong \frac{-12v}{n} \frac{A}{R^2} \end{aligned}$$

Más aún, estimadores concernientes a más frecuencias son no correlacionados. Debido a que, como Walker muestra, \tilde{A} , \tilde{B} y \tilde{w} tienen distribución aproximadamente Normal, estos resultados permiten encontrar intervalos de confianza para los parámetros correspondientes.

Notas del Capítulo II.

[1] Ver Bloomfield, Peter: "Fourier analysis of time series: an introduction", capítulo 3 para una justificación general y explicación del por qué del comportamiento del orden n^{-3} de la varianza de \tilde{w} .

[2] ave=average en inglés, su traducción propiamente al español es promedio, y el promedio del coseno al cuadrado, no importa el argumento, siempre oscilará entre 0 y 1, por lo que el valor promedio a la larga es próximo a $\frac{1}{2}$

Capítulo III.

Análisis espectral.

Introducción.

El análisis descrito en el capítulo anterior se le conoce como “análisis armónico”, sin embargo, los resultados que pudiera arrojar dicho análisis pueden ser difíciles de interpretar, aún cuando los datos muestren periodicidades definidas en la forma de picos y valles sucesivos y bastante regulares. ¿Qué se puede esperar, entonces, lograr mediante el análisis armónico con oscilaciones menos definidas?. A pesar de la dificultad que se presenta, el análisis armónico (y su pariente cercano, el análisis espectral) es comunmente usado.

En este capítulo se verá que tipo de información se puede obtener.

3.1. Suavizamiento: Filtración Lineal.

Antes de entrar al análisis espectral, es necesario estudiar un problema que aparece en muchos contextos: dado un conjunto de datos que consisten en una función suave, la señal (en este caso la senoidal), más un ruido (error aleatorio), ¿cómo se pueden separar estos dos componentes?. La pregunta es esencialmente acerca del suavizamiento de los datos. Esto se hace casi siempre mediante la aplicación de un filtro lineal:

Supóngase que el conjunto de datos $\{y_i\}$ puede ser escrito como:

$$y_i = a_i + e_i$$

en donde $\{a_i\}$ es suave y $\{e_i\}$ representa errores o alteraciones. Como $\{a_i\}$ es suave, a_{i+1} y a_{i-1} serán aproximadamente el mismo valor que a_i . De esta manera, si se promedia y_{i-1} , y_i , y_{i+1} , el resultado será aproximadamente a_i más el promedio de e_{i-1} , e_i , e_{i+1} . Sin embargo, estos errores tenderán a cancelarse, de tal forma que el error promedio tenderá a ser más pequeño que los correspondientes errores individuales.

Si se repite este proceso para cada valor de i , entonces se obtendrá un nuevo conjunto de datos $\{z_i\}$, consistiendo aproximadamente de $\{a_i\}$ más errores que tienden a ser más pequeños que antes. De cierto modo se ha extraído la serie suave $\{a_i\}$, excepto para los puntos en los extremos de la serie, para los cuales, el promedio no puede calcularse sin alguna modificación.

El camino más claro para describir el efecto de este procedimiento, que se conoce como “promedio móvil simple” (medias móviles), es através de un enfoque en la frecuencia. Supóngase primero que los datos $\{y_i\}$ son exactamente senoidales (Capítulo 2):

$$y_i = R \cos(\omega t + \phi)$$

entonces

$$\begin{aligned}
 z_t &= \frac{1}{3}(y_{t-1} + y_t + y_{t+1}) \\
 &= \frac{1}{3}R\{\cos(\varpi t - \varpi + \phi) + \cos(\varpi t + \phi) + \cos(\varpi t + \varpi + \phi)\}
 \end{aligned}$$

que puede ser evaluado más fácilmente como la parte real de

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{3}R[\exp\{i(\varpi t - \varpi + \phi)\} + \exp\{i(\varpi t + \phi)\} + \exp\{i(\varpi t + \varpi + \phi)\}] \\
 &= \frac{1}{3}R\exp\{i(\varpi t + \phi)\}\exp(-i\varpi) + 1 + \exp(i\varpi) \\
 &= \frac{1}{3}R\exp\{i(\varpi t + \phi)\}(1 + 2\cos\varpi)
 \end{aligned}$$

La parte real es entonces $\frac{1}{3}R\cos(\varpi t + \phi)(1 + 2\cos\varpi)$. Así, la salida $\{z_t\}$, resultado de este procedimiento, se obtiene a partir de la entrada $\{y_t\}$, multiplicando por $\frac{1}{3}(1 + 2\cos\varpi)$. Debido a que en el procedimiento usado, la salida es una función lineal de la entrada, se puede decir también que pasará cuando la entrada es la suma de un cierto número de términos formados por cosenos. La salida, entonces, contendrá también términos con cosenos con las mismas frecuencias, pero con amplitudes afectadas por el factor $\frac{1}{3}(1 + 2\cos\varpi)$.

Así, los términos con frecuencias cercanas a cero permanecerán, mientras que los términos con $\varpi = \frac{2\pi}{3}$ serán removidos completamente. Sin embargo, cualquier conjunto de datos puede escribirse como la suma de términos de cosenos (Bartlett, capítulo 3) y por lo tanto se puede describir la acción de este procedimiento en tal

conjunto arbitrario en estos términos con frecuencia. Esto provee una descripción alternativa del efecto del promedio móvil simple en el problema original, donde y_t es la señal suave más el error o ruido. De tal manera que el procedimiento de medias móviles que se usó aquí afectará más a la señal, pero disminuirá poder al ruido.

Un filtro lineal consiste de un conjunto de pesos $\{g_r, g_{r+1}, \dots, g_s\}$ tales que la entrada al filtro es $\{y_t\}$ y la salida es:

$$z_t = \sum_{u=r}^s g_u y_{t-u} \quad (3.1)$$

El promedio móvil de tres términos usado antes tiene $r = -1$, $s = 1$ y $g_u = \frac{1}{3}$, con $u = -1, 0, 1$. Nótese que, si la serie de entrada está disponible para $t = 0, 1, \dots, n-1$, la salida sólo podrá calcularse para $t = s, \dots, n-1+r$. Cuando la serie de entrada es la senoidal $R \cos(\omega t + \phi)$, la salida, para t en el rango mencionado, es la parte real de

$$\sum_{u=r}^s g_u R \exp\{i(\omega t - \omega u + \phi)\} = R \exp\{i(\omega t + \phi)\} \sum_{u=r}^s g_u \exp(-i u \omega).$$

El segundo factor,

$$G(\omega) = \sum_{u=r}^s g_u \exp(-i u \omega)$$

es llamado “función de transferencia” del filtro, debido a que describe la manera en que una senoidal con frecuencia ω es transferida desde la entrada hasta la salida. Su magnitud al cuadrado $|G(\omega)|^2$ se llama función potencia de transferencia. En el caso de un filtro simétrico, uno para el cual $g_{-u} = g_u$, la función de transferencia será real, y la salida es $R \cos(\omega t + \phi)G(\omega)$. Nótese que en este caso se puede escribir

$$\begin{aligned} G(\omega) &= \sum g_u \cos \omega u \\ &= g_0 + 2 \sum_{u>0} g_u \cos \omega u \end{aligned}$$

y como $\cos \omega u$ es un polinomio en $\cos \omega$, $G(\omega)$ puede expandirse como un polinomio en $\cos \omega$. Más generalmente, $G(\omega)$ puede ser complejo: $G(\omega) = \Gamma(\omega) \exp\{i\gamma(\omega)\}$. La salida es, entonces, la parte real de

$$R \exp\{i(\omega t + \phi)\} \Gamma(\omega) \exp\{i\gamma(\omega)\}$$

la cual es

$$R \Gamma(\omega) \cos\{\omega t + \phi + \gamma(\omega)\}.$$

En este caso, ocurre un cambio en la amplitud del orden de $\Gamma(\omega)$, y un cambio en la fase del orden de $\gamma(\omega)$. Debe notarse que cuando se está operando con datos

real-valorados, entonces se deberán usar coeficientes real-valorados; esto significa que $G(-\omega) = G(\omega)$. Así $\Gamma(-\omega) = \Gamma(\omega)$ y $\gamma(-\omega) = -\gamma(\omega)$. Y como era de esperarse, sólo se necesita discutir el comportamiento de las funciones de transferencia para frecuencias positivas.

La relación (3.1), que define la salida del filtro en términos de su entrada es un ejemplo de convolución. Si los valores en los extremos de la salida ($u = r, u = s$) son calculados bajo el supuesto de que la entrada es parte de una sucesión de periodo n , entonces se tiene una convolución circular, es decir:

$$z_t = \sum_{u=r}^s g_u y_{t-u} \quad t = 0, 1, \dots, n-1$$

donde $t - u$ es interpretado módulo n , y si ω es una frecuencia de Fourier (la frecuencia de una serie de Fourier, $\omega = \frac{2\pi j}{n}$, p.a. $j \in \{1, 2, \dots, n\}$), entonces

$$\begin{aligned} J_z(\omega) &= nJ_g(\omega)J_y(\omega) \\ &= G(\omega)J_y(\omega) \end{aligned}$$

$J(\omega)$ denota la transformada de Fourier discreta¹, la última igualdad es debido a que la transformada de Fourier de los pesos es simplemente $J_g(\omega) = \frac{1}{n}G(\omega)$. En general, alguna otra regla se usa cuando se trata de una convolución no circular, es decir, cuando no se conocen valores para las entradas en los extremos, para $t < 0$ y $t \geq n$.

3.2. Análisis de Periodograma.

El primer problema en el análisis del tipo de datos descritos de manera muy general en la introducción a este capítulo, es el cambio en la escala. Ninguna función trigonométrica puede coincidir con oscilaciones que crecen en amplitud. En este caso se puede producir un índice de fluctuación dividiendo cada valor de la serie entre un promedio centrado de k valores adyacentes (el valor de k dependerá del tipo de datos que se hayan observado). Las oscilaciones en este índice son más uniformes, y en particular, podrían no mostrar una tendencia a cambiar su amplitud a través del tiempo. La construcción del índice de fluctuaciones puede tener su motivación en el sentido de modelar los datos como $X_t = T_t I_t$, en donde T_t es la tendencia al tiempo t , y I_t es el término irregular u oscilante. La interpretación aquí, es que la tendencia refleja efectos o cambios a largo plazo, mientras que el término irregular representa efectos a corto plazo. Muchas veces el interés radica en examinar estas fluctuaciones a corto plazo, por lo que no es deseable cualquier complicación en la tendencia.

Se considerará la media móvil al nivel k (la unidad de tiempo depende del contexto del conjunto de observaciones, esto es, puede ser el año, el mes, día, etc.) como una aproximación al término de largo plazo, y por consiguiente, el índice de fluctuaciones es el estimador correspondiente del término irregular.

Sin embargo, estas operaciones introducen sus propios efectos en los datos, como puede verse de manera más clara en el modelo aditivo $X_t = T_t + I_t$. Una manera de estimar T_t es aplicando un filtro lineal (sección 3.1) al conjunto de observaciones $\{X_t\}$. Supoóngase que el filtro tiene pesos $\{g_u : -s \leq u \leq s\}$ y función de transferencia $G(\omega)$. De esta manera la aproximación de T_t está dada por:

$$y_t = \sum_{u=-s}^s g_u X_{t-u} \quad (3.2)$$

Ahora bien, se asume que $\{T_t\}$ es suave, por lo que $T_{t-u} \cong T_t$ para $-s \leq u \leq s$ (suponiendo que s es razonablemente pequeño).

Así:

$$y_t = \sum g_u T_{t-u} + \sum g_u I_{t-u} \cong T_t + \sum g_u I_{t-u}$$

pues $\sum_{u=-s}^s g_u = 1$ (que es la normalización natural).

La aproximación de I_t está dada por:

$$z_t = X_t - y_t \cong I_t - \sum g_u I_{t-u}$$

resultado de aplicar el filtro lineal a $\{I_t\}$. La función de transferencia es:

$$1 - \sum g_u \exp(-iu\omega) = 1 - G(\omega).$$

Así, la serie $\{z_t\}$ es realmente una aproximación a una versión filtrada de $\{I_t\}$.

En el caso del modelo multiplicativo $X_t = T_t I_t$ el término de tendencia se aproxima de la misma manera, aplicando un filtro lineal a $\{X_t\}$, pero es removido por una división. La serie resultante $z_t = \frac{X_t}{y_t}$, es también aproximadamente una versión filtrada de $\{I_t\}$, con la misma función de transferencia $1 - G(\omega)$ (Granger y Hughes, 1971). Para el índice de fluctuaciones $G(\omega) = D_k(\omega)$, el kernel de Dirichlet (Capítulo 1). De los resultados de la sección 3.1, se sigue que las transformadas de $\{z_t\}$ y $\{I_t\}$, $J_z(\omega)$ y $J_I(\omega)$, respectivamente, muestran una relación dada por:

$$\begin{aligned} J_z(\omega) &\cong (1 - G(\omega))J_I(\omega) \\ &= (1 - D_k(\omega))J_I(\omega). \end{aligned}$$

De esta manera, el periodograma de $\{z_t\}$ consiste en aproximadamente en el de $\{I_t\}$ multiplicado por $(1 - D_k(\omega))^2$, la correspondiente función potencia de transferencia. La función toma el valor 1 cuando $D_k(\omega)$ se anula, esto es, en $\omega = \frac{2\pi l}{k}$, $l = 1, 2, \dots$ (figura 3.1).

Un procedimiento diferente se sugiere al tratar el modelo multiplicativo. Los tres términos son estrictamente positivos, y entonces, puede reescribirse

$$\ln X_t = \ln T_t + \ln I_t.$$

De esta manera, el logaritmo natural de los datos consisten en un término suave, $\ln T_t$, con un componente irregular, $\ln I_t$.

3.3. Análisis por segmentos de una serie: Suavizando el Periodograma.

Para este tipo de análisis, existe un procedimiento propuesto por Bartlett y Kendall (1948), que consiste en dividir los datos en un cierto número de segmentos, calcular un periodograma para cada uno de ellos, y después promediarlos. Para ver con más claridad lo que este procedimiento lleva a cabo, se necesitará derivar una representación alternativa del periodograma. Se usará la representación compleja del periodograma. Para simplificar las expresiones siguientes, se deberá asumir que X_t es la diferencia entre la t -ésima observación y la media de la serie. Esto es equivalente a asumir que $\bar{x} = \frac{1}{n}(X_0 + \dots + X_{n-1}) = 0$. El periodograma es:

$$\begin{aligned}
 I(\omega) &= \frac{1}{2\pi n} \left| \sum_{t=0}^{n-1} X_t \exp(-it\omega) \right|^2 \\
 &= \frac{1}{2\pi n} \sum_t \sum_u X_t X_u \exp\{-i(t-u)\omega\},
 \end{aligned}$$

ya que el cuadrado del módulo de un número complejo, es el mismo número multiplicado por su conjugado. El periodograma mismo es, entonces, una serie de Fourier, para la cual el coeficiente de $\exp(-ir\omega)$ es la suma de $X_t X_u$ sobre todas las parejas (t, u) para las cuales $t - u = r$. Una manipulación algebraica no tan simple conduce a que

$$I(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{|r|<n} c_r \exp(-ir\omega) \quad (3.3)$$

en donde

$$c_r = \begin{cases} \frac{1}{n} \sum_{t=r}^{n-1} X_t X_{t-r} & r \geq 0 \\ c_{-r} & r < 0 \end{cases}$$

La cantidad c_r es la autocovarianza de $\{X_t\}$ con rezago r . Debido a la simetría de $\{c_r\}$, (3.3) puede ser escrita como

$$I(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left(c_0 + 2 \sum_{r=1}^{n-1} c_r \cos r\omega \right) \quad (3.4)$$

Supóngase que los datos se dividen en h segmentos, cada uno de longitud m , donde $n = hm$. Sea $I_j(\omega)$ el periodograma del j -ésimo segmento, y $\{c_{j,r}\}$ las correspondientes autocovarianzas. El promedio es:

$$\begin{aligned} g(\omega) &= \frac{1}{h} \sum_{j=1}^h I_j(\omega) \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{|r| < m} \left(h^{-1} \sum_{j=1}^h c_{j,r} \right) \exp(-ir\omega) \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{|r| < m} \left(1 - \frac{|r|}{m} \right) \frac{1}{h(m-|r|)} \sum_{j=1}^h mc_{j,r} \exp(-ir\omega) \quad (3.5). \end{aligned}$$

Ahora, $\sum_{j=1}^h mc_{j,r}$ es, aproximadamente, igual a nc_r , una suma de productos de la forma $X_t X_{t+r}$, pero no todos los productos están incluidos, pues el término $X_t X_{t+r}$ está incluido sólo si X_t y X_{t+r} caen dentro del mismo segmento de la serie. Hay $m - |r|$ términos en cada $c_{j,r}$ y entonces

$$\frac{1}{h(m-|r|)} \sum_j mc_{j,r}$$

es el promedio de estos productos. Resulta racional reemplazar esta parte de (3.5) por $\frac{nc_r}{n-|r|} = \frac{c_r}{1 - \frac{|r|}{n}}$, el promedio de todos los productos posibles de la forma

$X_t X_{t+r}$. Esto conduce a la función modificada

$$g_B = \frac{1}{2\pi} \sum_{|r| < m} \frac{1 - \frac{|r|}{m}}{1 - \frac{|r|}{n}} c_r \exp(-ir\omega) \quad (3.6)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{|r| < m} w_r c_r \exp(-ir\omega) \quad (3.7)$$

con

$$w_r = \frac{1 - \frac{|r|}{m}}{1 - \frac{|r|}{n}}$$

La función g_B definida en (3.6) es conocida como el “estimador espectral de Bartlett”, y los números $\{W_r\}$ son los correspondientes pesos de rezago.

Esto difiere del periodograma en que todos los términos para los cuales $|r| \geq m$ se han omitido. Los términos restantes se reducen progresivamente en magnitud, y consecuentemente la función resultante es más suave que el periodograma. Más aún, variando el punto donde se trunca la serie, m (la cual ya no requiere ser divisor de n), se logra una variación en la suavidad de la función.

La propiedad significativa de los pesos de rezago es que van decayendo suavemente del valor 1 en $r = 0$ a cero en $r = \pm m$. El camino más viable para calcular un estimador del espectro es aplicar directamente (3.4) y (3.6) (Blackman y Tuckey, 1959).

Como se mostrará en la siguiente sección, las autocovarianzas $\{c_r\}$ pueden calcularse de manera eficiente usando la transformada rápida de Fourier² y su inversa.

3.4. Cálculo de estimadores para autocovarianzas y pesos de rezago.

Para calcular la r -ésima autocovarianza de $\{X_t\}$ definida en (3.4), se requieren de $n - r$ multiplicaciones y $n - r - 1$ sumas. Así, el cálculo de c_0, c_1, \dots, c_{m-1} requiere de $m\{n - \frac{1}{2}(m - 1)\}$ multiplicaciones $m\{n - \frac{1}{2}(m + 1)\}$ sumas. Sin embargo, de (3.3) se puede observar que el periodograma es proporcional a la transformada de Fourier de $\{c_r\}$, y esto sugiere la posibilidad de usar la transformada rápida de Fourier para obtener las autocovarianzas (Gentleman y Sande, 1966).

Si se evalúa el periodograma en las frecuencias de Fourier $\omega_j = \frac{2\pi j}{n}$, se encontrará que

$$I(\omega_j) = \frac{1}{2\pi} \sum_{r=0}^{n-1} (c_r + c_{n-r}) \exp(-ir\omega_j) \quad (3.8)$$

se convendrá que $c_r = 0$ para $|r| \geq n$.

Así

$$c_r + c_{n-r} = \frac{2\pi}{n} \sum_{j=0}^{n-1} I(\omega_j) \exp(ir\omega_j)$$

que se obtuvo a partir de la aplicación de la transformada rápida de Fourier. La autocovarianza para el rezago cero c_0 se puede obtener de este análisis ya que $c_n = 0$. Para r pequeña, c_{n-r} es pequeño, pues es la suma de r términos dividido por n . De esta manera, $c_r + c_{n-r} \approx c_r$, y este análisis también da aproximaciones para autocovarianzas en rezagos pequeños.

Comúnmente, sin embargo, el periodograma se evalúa para frecuencias $\omega'_j = \frac{2\pi j}{n'}$, las frecuencias de Fourier para una serie de longitud $n' > n$. Para estas frecuencias se tiene que

$$I(\omega'_j) = \frac{1}{2\pi} \sum_{r=0}^{n'-1} (c_r + c_{n'-r}) \exp(-ir\omega'_j) \quad (3.9).$$

La inversión es ahora

$$c_r + c_{n-r} = \frac{2\pi}{n'} \sum_{j=0}^{n'-1} I(\omega'_j) \exp(ir\omega'_j)$$

y así, $c_0, c_1, \dots, c_{n'-n}$ se pueden obtener exactamente.

3.5. Representaciones alternativas del estimador espectral.

Supóngase que el estimador espectral está dado por

$$g(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{|r| < n} w_r c_r \exp(-ir\omega) \quad (3.10)$$

y que ninguno de los pesos de rezago $\{w_r : -n < r < n\}$ se anula. Por la fórmula integral de inversión¹, aplicada al periodograma, se tiene que

$$c_r = \int_{-\pi}^{\pi} I(\lambda) \exp(ir\lambda) d\lambda.$$

Entonces

$$g(\varpi) = \int_{-\pi}^{\pi} W_n(\varpi - \lambda) I(\lambda) d\lambda \quad (3.11)$$

donde

$$W_n(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{|r| < n} w_r \exp(-ir\lambda).$$

De esta manera, cualquier estimador espectral de la forma (3.10) puede ser escrito como el promedio integral del periodograma. La ecuación (3.11) es la versión integral de los filtros discretos descritos en la sección 3.1. La función $W_n(\lambda)$ es llamada “ventana espectral” del estimador del espectro. La ventana espectral del estimador de Bartlett no puede ser escrita de manera similar, pero para una versión modificada con pesos

$$w_r = \begin{cases} 1 - \frac{|r|}{m} & |r| < m \\ 0 & |r| \geq m \end{cases}$$

la ventana espectral es

$$\begin{aligned}
 W_n(\lambda) &= \frac{1}{2\pi m} \sum_{|r| < m} (m - |r|) \exp(-ir\lambda) \\
 &= \frac{1}{2\pi m} \left| \sum_{r=0}^{m-1} \exp(-ir\lambda) \right|^2 \\
 &= \frac{m}{2\pi} \{D_m(\lambda)\}^2
 \end{aligned}$$

estas últimas igualdades se obtuvieron de manera análoga a como se obtuvo (3.3), aquí, $D_m(\lambda)$ es el kernel de Dirichlet (Capítulo I). El pico central es de altura $\frac{m}{2\pi}$, y los primeros ceros en cualquiera de los lados se alcanzan en $\lambda = \pm \frac{2\pi}{m}$. Sin embargo, una proporción considerable de la masa de $W_n(\lambda)$ no está concentrada bajo el pico principal, sino a los lados, los cuales van descendiendo de manera no vertiginosa, sino lenta, y por lo tanto, la estimación del espectro en la frecuencia ω puede estar influenciada por valores del periodograma a una cierta distancia de ω . Valores del periodograma a distintas frecuencias, pueden diferir por varios órdenes de magnitud, y consecuentemente, la estimación del espectro en una banda de frecuencia donde hay poder a niveles bajos, puede ser traslapada por la fuga (de masa) de una banda con más niveles más altos de poder, aún si estas bandas no son adyacentes. Este fenómeno de fuga puede presentarse también en versiones más suavizadas del periodograma debido a los lados que se encuentran rodeando el pico principal (en inglés, estos lados son conocidos como “sidelobes”). Estos sidelobes, en la ventana modificada de Bartlett son más largos y caen más lentamente.

La ecuación (3.11) sugiere un camino diferente para construir los estimadores espectrales. Si se escoge una función adecuada $W(\lambda)$ y se establece

$$g(\varpi) = \int_{-\pi}^{\pi} W(\lambda)I(\varpi - \lambda)d\lambda \quad (3.12)$$

el resultado es una versión más suavizada del periodograma. Más aún, puede escribirse en la forma de (3.10) con

$$w_r = \int_{-\pi}^{\pi} W(\lambda) \exp(ir\lambda) d\lambda.$$

Esto implica que $g(\varpi)$ está dada también por (3.11), pero nótese que $W(\lambda)$ y $W_n(\lambda)$ no necesariamente tienen que ser las mismas, pues como $\{w_r\}$ son los coeficientes de Fourier de $W(\lambda)$, entonces, $W_n(\lambda)$ es la n -ésima suma parcial de la serie de Fourier $W(\lambda)$.

Daniell (1946) sugirió un estimador de la forma (3.12), con

$$W(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{2\delta} & |\lambda| < \delta \\ 0 & |\lambda| \geq \delta \end{cases}$$

El estimador resultante $g_D(\varpi)$ es simplemente el promedio integral del periodograma sobre un intervalo de longitud 2δ alrededor de ϖ . Esta es la forma integral del filtro del promedio móvil simple.

La integral (3.12) puede aproximarse mediante una fórmula numérica. Si se cuenta

con una función $W_n(\lambda)$, $g(\omega)$ puede calcularse como

$$g(\omega) = \frac{2\pi}{n'} \sum_u W_n(\omega - \omega'_u) I(\omega'_u) \quad (3.14)$$

donde $\omega'_u = \frac{2\pi}{n'}$ son las frecuencias de Fourier para $n' \geq 2n - 1$. Ahora, si $g(\omega)$ está definida por (3.11) y $\omega_r = 0$ para $|r| \geq m$ ($m \leq n$), entonces $n' \geq n + m - 1$ es suficiente para hacer válida la relación dada por (3.14).

Ahora bien, cuatro factores básicos deben tomarse en cuenta cuando se escoge una ventana espectral:

- (i) resolución,
- (ii) estabilidad,
- (iii) fuga, y
- (iv) suavidad.

La resolución se refiere a la habilidad de la estimación del espectro de representar una estructura fina en las propiedades de las frecuencias de los datos, tales como picos estrechos. Debido al proceso de promediar involucrado en el cálculo de un estimador espectral, puede ser que un pico estrecho se presente dentro de un pico más amplio. Este pico es más o menos una imagen de la ventana espectral de la estimación, y su "anchura", adecuadamente definida, es la anchura de banda de la estimación. Si el espectro de una serie contiene dos picos estrechos más cercanos entre sí que el ancho de banda usado por la estimación, los picos amplios resultantes

se traslapan y forman un solo pico. En este caso, se dice que la estimación falla al resolver estos picos.

La estabilidad de una estimación espectral es la extensión mediante la cual, cualquier estructura fina sin importancia en el periodograma es eliminada. La resolución y la estabilidad son requerimientos conflictivos, pues una alta estabilidad requiere promediar sobre muchos valores del periodograma, mientras que esto reduce la resolución.

La fuga ya ha sido discutida en el contexto del estimador de Brtlett líneas atrás. Es causada por los “sidelobes” en una ventana espectral, que están siempre presentes en la estimación de los pesos de rezago con un punto al cual se trunca no trivial ($m < n$). Sin embargo, si se usa el estimador espectral por promedios, se puede remover el problema de fuga completamente.

Por último, la suavidad de la estimación espectral es una propiedad menos tangible y puede agregar un conflicto más profundo. Por ejemplo, suponga que se define el ancho de banda con una longitud igual a la del intervalo para el cual no es cero, entonces, el estimador más estable para este ancho de banda dado es el correspondiente al estimador propuesto por Daniell. Sin embargo, si el periodograma contiene una o más “puntas” largas, como casi siempre es el caso, éstas serán transformadas en rectángulos. El resultado difícilmente podrá ser llamado suave, y esto hará más difícil el asertar a un buen estimador espectral. Pero, si el procedimiento de Daniell es aplicado sucesivamente, entonces esto podrá conducir a una estimación satisfactoria.

Notas del Capítulo III.

[1] La transformada discreta de Fourier de un conjunto de datos x_0, x_1, \dots, x_{n-1} de tamaño n está dada por la siguiente suma:

$$nJ_j = \sum_{t=0}^{n-1} x_t \exp(-i\omega_j t), \quad j = 0, 1, \dots, n-1$$

[2] La transformada rápida de Fourier (FFT) es una clase de algoritmos que implementan la transformada discreta de Fourier con ahorro considerable en tiempo de computadora. Cabe señalar que la FFT no es una transformada diferente de la discreta.

Apéndice.

Métodos numéricos para el cálculo de raíces en funciones.

En esta sección se expondrán las rutinas en el lenguaje de programación C, que pueden implementarse para el cálculo de máximos y/o mínimos locales de funciones para las cuales un procedimiento analítico es prácticamente imposible. Los métodos mencionados aquí son:

- i) Método de la Bisección.*
- ii) Método de Ridder.*
- iii) Método de Brent.*

i) Método de la Bisección.

```
#include<math.h>
#define JMAX 40      (número máximo de bisecciones).
float rtbis(float(*func)(float), float x1, float x2, float xacc)
*usando la bisección, se encuentra la raíz de una función func que se sabe cae entre
x1 y x2. La raíz, cuyo valor es guardado en rtbis, será refinada *hasta que su
precisión sea de  $\pm xacc$ .
{
    void nerror(char error_text[]);
```

```

int j;
float dx,f, fmid,xmid,rtb;
f=(*func)(x1);
fmid=(*func)(x2);
if (f*fmid >= 0.0 ) nerror("La raíz debe estar dentro del rango especificado");
rtb=f < 0.0 ? (dx=x2-x1,x1) : (dx=x1-x2,x2);
for (j=1,j<=JMAX;j++) {
    fmid=(*func)(xmid=rtb+(dx *=0.5));
    if (fmid <= 0.0) rtb=xmid;
    if (fabs(dx)<xacc || fmid==0.0) return rtb;
}
nerror("Demasiadas bisecciones en rtbis");
return 0.0;
}

```

ii) Método de Ridder:

```

#include<math.h>
#include "nrutil.h"
#define MAXIT 60          Número máximo permitido de iteraciones.
#define UNUSED (-1.11e30)  Precisión de la máquina en punto flotante.
float zriddr(float (*func)(float), float x1, float x2, float xacc)
*usando el método de Ridder, se encuentra la raíz de una función func que se sabe
cae entre x1 y x2. La raíz, cuyo valor es guardado en zriddr, *será refinada hasta que
su precisión sea de xacc.
{
    int j;

```

```

float ans, fh, fl, fm, fnew, s, xl, xm, xnew;

fl=(*func)(x1);

fh=(*func)(x2);
if ((fl > 0.0 && fh < 0.0) || (fl < 0.0 && fh > 0.0)) {
    xl=x1;
    xh=x2;
    ans=UNUSED;
for(j=1;j<=MAXIT;j++) {
    xm=0.5*(xl+xh);
    fm=(*func)(xm);
    s=sqrt(fm*fm-fl*fh);
    if (s==0.0) return ans;
    xnew=xm+(xm-x1)*((fl >= fh ? 1.0 : -1.0)*fm/s);
    if (fabs(xnew-ans) <= xacc) return ans;
    ans=xnew;
    fnew=(*func)(ans);
    if (fnew == 0.0) return ans;
    if (SIGN(fm,fnew) != fm) {
        xl=xm;
        fl=fm;
        xh=ans;
        fh=fnew;
    } else if (SIGN(fl,fnew) != fl) {
        xh=ans;
        fh=fnew;
    } else if (SIGN(fh,fnew) != fh) {
        xl=ans;

```

```

    fl=fnew;
} else nerror("No llegar a este punto.");
if (fabs(xh-xl) <= xacc) return ans;
}
nerror("zridr excede el máximo de las iteraciones");
}
else {
if (fl == 0.0) return x1;
if (fh == 0.0) return x2;
nerror("La raíz debe localizarse dentro del rango de zridr.");
}
return 0.0;
}

```

iii) Método de Brent:

```

#include <math.h>
#include "nrutil.h"
#define ITMAX 100      Número máximo permitido de iteraciones
#define EPS 3.0e-8    Precisión de la máquina en punto flotante.

```

```
float zbrent(float (*func)(float), float x1, float x2, float tol)
```

*usando el método de Brent, se encuentra la raíz de una función *func* que se sabe cae entre *x1* y *x2*. La raíz, cuyo valor es guardado en *zbrent*, *será refinada hasta que su precisión sea de *tol*.

```

{
int iter;

```

```

float a=x1,b=x2,c=x2,d,e,min1,min2;
float fa=(*func)(a),fb=(*func)(b),fc,p,q,r,s,toll,xm;
if ((fa > 0.0 && fb > 0.0) || (fa < 0.0 && fb < 0.0))
nrerror("La raíz debe localizarse dentro del rango de zbrent");
fc=fb;
for (iter=1;iter<=ITMAX;iter++) {
if ((fb > 0.0 && fc > 0.0) || (fb < 0.0 && fc < 0.0)) {
c=a;
f c=f a ;
e=d=b-a;
}
if (fabs(fc) < fabs(fb)) { .
a=b;
b=c;
c=a;
fa=fb;
fb=fc;
fc=fa;
}
toli=2.0*EPS*fabs (b)+0.5*tol;
xm=0.5*(c-b);
if (fabs(xm) <= toll || fb == 0.0) return b;
if (fabs(e) >= toll && fabs(fa) > fabs(fb)) {
s=fb/fa;
if (a == c) {
P=2.0*xm*s;
q=1.0-s;
} else {

```

```

q=f a/ f c ;
r=fb/fc;
p=s*(2.0*xm*q*(q-r)-(b-a)*(r-1.0));
q=(q-1.0)*(r-1.0)*(s-1.0);
}
if (p > 0.0) q = -q;
p=fabs(p);
mina=3.0*xm*q-fabs(toll*q);
min2=fabs (e*q);
if (2.0*p < (min1 < min2 ? min1 : min2)) {
e=d;
d=p/q;
} else {
d=xm;
e=d;
}
} else {
d=xm;
e=d;
}
a=b;
if (fabs(d) > toll)
b+=d;
else
b += SIGN(toll,xm);
fb=(*func) (b) ;
}
nerror("El número máximo de iteraciones excede en z Brent");

```

Comentarios finales.

En el capítulo I se derivó una manera de definir la serie de Fourier como una solución particular de la ecuación diferencial que modela el problema conocido en la física como el problema del calor, dicha ecuación por ende es llamada ecuación del calor, se obtuvieron también a partir de dicha solución los coeficientes de la serie en estudio, y uno de los teoremas más importantes del análisis matemático también fue estudiado, resultó ser de mucha utilidad para el análisis de las propiedades de las series de Fourier, este teorema es el conocido con el nombre de Teorema de Poisson.

Es muy importante señalar y aclarar que lo trabajado en esta tesis es solamente una introducción básica al tema de las series de Fourier y su relación con las series de tiempo. En realidad, un estudio más formal no puede llevarse a cabo, debido a la dificultad que se presenta al intentar hacer un estudio analítico de los estimadores que se vieron en el capítulo II. Debido al particular comportamiento de las funciones trigonométricas usadas, como es el caso del seno y coseno, una estimación haciendo el uso del cálculo diferencial, es prácticamente imposible, debido a la gran cantidad de puntos en los que la serie se anula, esto es en el caso de la estimación de la frecuencia y para resolver este problema, se usan técnicas numéricas, lo cual acarrea en cada cálculo errores que no se pueden controlar, es decir, errores en las cifras decimales. Para tratar de alguna manera de solventar esta dificultad se proponen los métodos descritos como rutinas en el apéndice. Por otro lado, en el proceso de estimación de los demás parámetros (amplitud y fase), se encontraron otras dificultades, como el resolver de manera exacta las ecuaciones normales que conducirían a estimadores exactos por consecuencia, en lugar de ello, se hicieron

solamente aproximaciones a dichos estimadores, en palabras más simples, se hallaron estimadores de los estimadores, por consecuencia, solamente se pudo dar una explicación general del comportamiento de dichos estimadores en cuanto al orden de su varianza y su valor medio (esperanza matemática).

Otro punto importante es el hecho de no haber usado alguna aplicación, puesto que eso consituiría material suficiente para otro trabajo similar de tesis, ya que sería necesario describir las rutinas que se emplearían en el cálculo de los estimadores de los parámetros de la aplicación en particular, dichas rutinas pueden hacerse usando un paquete estadístico o de programación adecuado, tales como MATLAB, FORTRAN, C o C++. El ejemplo para la aplicación deberá tomarse de algún fenómeno físico y/o biológico siempre y cuando el fenómeno en cuestión complete todo un ciclo y sea de periodo 2π , pues para todo este análisis se tomó como base un disco (capítulo I, el problema del calor) con un cierto radio r . Como ejemplos de fenómenos aptos para este tipo de análisis se tiene el movimiento de migración de las aves, otro posible ejemplo podría ser tomado de un problema propio de la astronomía, como observar la trayectoria (órbita) de un cometa en relación a la tierra, y como estos podrían encontrarse algunos más y de dificultad variante.

Bibliografía.

1. Bartle R. G., *Introducción al Análisis Matemático*, Limusa, 1980.
2. Bloomfield P., *Fourier Analysis of time series: An introduction*, John Wiley & Sons, 1976.
3. Otnes R. K., Enochson L., *Applied time series Analysis*, vol. 1, John Wiley & Sons, 1978.
4. Otnes R. K., Enochson L., *Digital time series Analysis*, vol. 1, John Wiley & Sons, 1972.
5. Seeley R. T., *An Introduction to fourier series and Integrals*, W.A. Benjamin, Inc., 1966.
6. <http://aurora.phys.utk.edu/~forrest/papers/fourier/index.html>.
7. <http://www.cz3.nus.edu.sg/~chenk/cz5201/note2.pdf>.
8. <http://www.phys.uni.torun.pl/nrbook/c9-3.pdf>.