UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"COMPACTOS"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

J E S U S D I A Z A L V A R A D O

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

DIRECTOR DE TESIS: DRA. MARIA ISABEL PUGA ESPINOSA

2004

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVFNMA DE
MEXICO

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

" Compactos "

realizado por Jesús Díaz Alvarado

con número de cuenta 9112119-2 , quien cubrió los créditos de la carrera de:
Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
Propietario Dra. María Isabel Puga Espinosa

Propietario Dr. Javier Páez Cárdenas

Propietario Dr. Rafael del Rio Castillo

Suplente M. en C. Félix Capulín Perez

Suplente Dra. Patricia Pellicer Covarrubias Patricia Pellicer.

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. Alejandro Bravo Mojica

A mis padres Manuel y Josefina.
A mi hermana Griselda por apoyarnos cuando todos lo necesitamos.

...gracias por tu paciencia, palabras de aliento, abrazos y comprensión, sin los cuales este trabajo no hubiera sido posible. Gracias mi linda esposa.

Hola Salvador, gracias por despertar en mi este sentimiento tan especial y llenar nuestro espacio de alegría y vitalidad.

Quiero agradecer especialmente a la Dra. Ma. Isabel Puga Espinosa por creer en mi y motivarme a terminar con esta etapa de formación profesional, gracias por su apoyo y paciencia.

Gracias a todas las personas que aceptaron revisar este trabajo y que gracias a sus observaciones y sugerencias hoy esta terminado.

Jesús Díaz Alvarado

Indice

Introducción

El objetivo de esta tesis es estudiar el concepto de compacidad en espacios topológicos, así como variantes, buscando relaciones, ejemplos y contraejemplos.

Las variantes que estudiamos son: compacidad numerable, compacidad local y paracompacidad.

El capítulo 1 está dedicado a desarrollar la herramienta básica que nos ayudará a comprender los siguientes.

En el capítulo 3 titulado "Espacios Numerablemente Compactos", demostramos que todo espacio compacto es numerablemente compacto, y sobresale el contraejemplo que nos dice que el recíproco no es cierto. Esto lo hacemos ayudándonos del concepto de topología del orden, así demostramos que el conjunto de números ordinales Ω es un espacio topológico ordenado compacto y que el subespacio numerable Ω_0, es un espacio numerablemente compacto que no es compacto.

En el capítulo 6, dedicado a la compacidad local, demostramos que todo espacio compacto es localmente compacto, y es también mediante un ejemplo que vemos que no todo espacio localmente compacto es compacto. Lo mismo hacemos en el capítulo 7 que dedicamos al estudio de la paracompacidad.

Uno de los temas de gran interés es también el de la compacidad en el producto de espacios topológicos; así que por ello le dedicamos un capítulo en el que revisamos los conceptos de redes y filtros. Demostramos primero que el producto finito de espacios compactos es compacto si y sólo si cada espacio factor es compacto para posteriormente generalizarlo al teorema de Tychonoff: "El producto no vacío de espacios es compacto si y sólo si cada espacio factor es compacto". De igual manera, analizamos brevemente qué pasa con el producto de espacios localmente compactos y el producto de espacios paracompactos.

En el capítulo 5 exponemos el Teorema de Arzela que nos da una caracterización de los compactos contenidos en el espacio de funciones continuas.

Al final incluimos un diagrama con las relaciones entre las variantes estudiadas.

Capítulo 1

Conceptos Básicos

Definición 1 *Sea X un conjunto. Una topología en X es un subconjunto τ de $P(X)$ que cumple las siguientes condiciones:*

i) $X, \emptyset \in \tau$

ii) Si A y $B \in \tau$ entonces $A \cap B \in \tau$

iii) Sean A_i , $i \in I$, tales que $A_i \in \tau$ para todo $i \in I$, entonces $\cup_{i \in I} A_i \in \tau$.

Si τ es una topología en X , a la pareja (X, τ) se le llama espacio topológico y a los elementos de τ, se les llama abiertos de X.

A veces es más conveniente definir no la totalidad de conjuntos abiertos en un espacio topológico, sino solamente una "base".

Definición 2 *Una base para τ es un subconjunto $\mathcal{B}$ de τ tal que si $\mathcal{U} \in \tau$ y $x \in \mathcal{U}$, entonces existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq \mathcal{U}$.*

Ejemplo 3 *Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales, y sea $\mathcal{B}$ la familia de intervalos $[x, r)$ donde $x \in \mathbb{R}$, $x < r$ y $r \in \mathbb{Q}$; $\mathcal{B}$ es base para una topología de $\mathbb{R}$. A $\mathbb{R}$ con esta topología se le llama la línea de Sorgenfrey. (ver [1], pag. 21).*

Definición 4 *Sea x un elemento de un espacio topológico (X, τ). Decimos que $V \subset X$ es una vecindad de x si existe $A \in \tau$ tal que $x \in A \subset V$.*

Notación 5 *A la colección de vecindades de x se le llama sistema de vecindades de x y la denotamos por $V(x)$.*

Teorema 6 *Sea (X, τ) un espacio topológico y $A \subseteq X$. Supongamos que para todo $x \in A$ existe $V_x \in V(x)$ tal que $x \in V_x \subseteq A$, entonces A es abierto.*

Prueba. Supongamos que para todo $x \in A$ existe $V_x \in V(x)$ tal que $V_x \subseteq A$. Entonces por definición de vecindad para cada V_x existe $B_x \in \tau$ tal que $x \in B_x \subseteq V_x$.

Afirmación: $A = \cup_{x\in A} B_x$.

Sea $x \in A$, entonces existe B_x tal que $x \in B_x$, así $x \in \cup_{x\in A} B_x$.

Y por otra parte si $y \in \cup_{x\in A} B_x$, entonces $y \in B_x$ para alguna $x \in A$ y como $B_x \subseteq A$ entonces $y \in A$. Por lo tanto A es abierto. ■

En particular, A es abierto si para todo $x \in A$ existe $V \in \tau$ tal que $x \in V \subseteq A$.

Definición 7 *Sea (X,τ) un espacio topológico. Decimos que $A \subseteq X$ es un conjunto cerrado si $X \setminus A$ es un conjunto abierto.*

Definición 8 *Sean X espacio topológico y $A \subset X$. Definimos la cerradura de A como el siguiente conjunto de las $x \in X$ tales para todo U abierto de X que contiene a x, ocurre que $U \cap A \neq \emptyset$. $x \in X$.*

Notación 9 *Denotamos a la cerradura de un conjunto A como $Ce(A)$ o bien por $\overline{A}$.*

Definición 10 *Sean X espacio topológico y $E \subset X$. Decimos que $p \in E \subset X$ es punto interior de E si existe un abierto A tal que $p \in A \subset E$.*

Definición 11 *Un espacio X se dice que es T_1 si para todo $x, y \in X$ distintos existe una vecindad de x que no contiene a y, y una vecindad de y que no contiene a x.*

Teorema 12 *X es T_1 si y sólo si $\{x\}$ es cerrado para todo $x \in X$.*

Prueba. Supongamos que X es T_1.

Sea $y \in X \setminus \{x\}$. Entonces existe A abierto tal que $y \in A$ y $x \notin A$, así $X \setminus \{x\}$ es abierto. Por lo tanto $\{x\}$ es cerrado.

Ahora supongamos que $\{x\}$ es cerrado para todo $x \in X$.

Sean $x, y \in X$, $x \neq y$. Como $\{x\}$ es cerrado existe A vecindad de y tal que $A \cap \{x\} = \emptyset$, análogamente existe B vecindad de x tal que $B \cap \{y\} \neq \emptyset$. Por lo tanto X es T_1. ■

Definición 13 *Un espacio X es T_2 o Hausdorff, si y sólo si para todo x, $y \in X$ existen U, V abiertos ajenos de X tales que $x \in U$, $y \in V$.*

Definición 14 *X es T_3 o regular si es T_1 y para todo $F \subset X$ cerrado y para todo $x \in X \setminus F$ existen A_1, A_2 abiertos ajenos tales que $F \subset A_1$ y $x \in A_2$.*

Teorema 15 *X es regular si y sólo si es T_1 y para todo $x \in X$ y para cada $x \in A$, existe B abierto tal que $x \in B \subset \overline{B} \subset A$.*

Prueba. Sean X regular, $x \in X$ y A abierto con $x \in A$. Entonces $X \setminus A$ es cerrado y es tal que $x \notin X \setminus A$.

Como X es regular, existen B y C abiertos ajenos tales que $x \in B$ y $X \setminus A \subset C$, así $X \setminus C \subset A$ es un conjunto cerrado y como $B \subset X \setminus C$ entonces $\overline{B} \subset X \setminus C$, esto quiere decir que $x \in B \subset \overline{B} \subset X \setminus C \subset A$. Por lo tanto $x \in B \subset \overline{B} \subset A$.

Inversamente, supongamos que X es un espacio T_1.

Sea $F \subset X$, cerrado y $x \in X \setminus F$.

$X \setminus F$ es abierto pues es el complemento de un cerrado, por hipótesis existe B abierto tal que $x \in B \subset \overline{B} \subset X \setminus F$, entonces B y $X \setminus \overline{B}$ son abiertos ajenos tales que $x \in B$ y $F \subset X \setminus \overline{B}$. Por lo tanto X es regular. ■

Definición 16 *Si un espacio X es T_1 y cumple que dados F_1, F_2 cerrados ajenos existen A_1, A_2 abiertos ajenos tales que $F_1 \subset A_1$, $F_2 \subset A_2$, se dice que el espacio X es normal o T_4.*

Ejemplo 17 *La línea de Sorgenfrey (ver Ejemplo 3) es un espacio normal.*

Dados A y B cerrados ajenos, para toda $a \in A$ existe un intervalo $[a, x(a))$ ajeno a B; de igual forma para todo $b \in B$ existe un intervalo $[b, x(b))$ ajeno al cerrado A.

Sean $U = \cup_{a \in A} [a, x(a))$ y $V = \cup_{b \in B} [b, x(b))$. Los conjuntos U y V son abiertos y tales que $A \subset U$ y $B \subset V$.

Veremos que para toda $a \in A$ y $b \in B$ se tiene que $[a, x(a)) \cap [b, x(b)) = \emptyset$. Supongamos que no. Entonces si $a < b$ tendriamos que $b \in [a, x(a))$ y si $b < a$ tendriamos que $a \in [b, x(b))$ pero esto no puede ser ya que $[a, x(a))$ es ajeno a B y $[b, x(b))$ es ajeno a A. Así $U \cap V = \emptyset$. Por lo tanto, la línea de Sorgenfrey es un espacio normal.

Observación 18 *Todo espacio normal es un espacio regular.*

Ejemplo 19 *La línea de Sorgenfrey es un espacio regular.*

En efecto, ya que es un espacio normal y todo espacio normal es un espacio regular.

Definición 20 *Sea X un conjunto. Decimos que una función $d : X \times X \to \mathbb{R}$ es una métrica en X si cumple las siguientes condiciones para todo $x, y, z \in X$.*

i) $d(x, y) \geq 0$.

ii) $d(x,y)=0$, *si y sólo si,* $x=y$.
iii) $d(x,y)=d(y,x)$.
iv) $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$.

Definición 21 *Sean* X *un conjunto y* $d: X\times X\rightarrow \mathbb{R}$ *una métrica. A la pareja* (X,d) *le llamaremos espacio métrico.*

Teorema 22 *Todo espacio métrico* X *es normal.*

Prueba. Sean (X,d) un espacio métrico y F_1, F_2 dos cerrados ajenos en X. Para cada $x\in F_1$ sea $\delta_x>0$ tal que $B_{\delta_x}(x)\cap F_2=\emptyset$ y análogamente sea $\varepsilon_y>0$ tal que $B_{\varepsilon_y}(y)\cap F_1=\emptyset$ para cada $y\in F_2$.

Consideremos los conjuntos $A_1=\cup_{x\in F_1}B_{\frac{\delta_x}{3}}(x)$ y $A_2=\cup_{y\in F_2}B_{\frac{\varepsilon_y}{3}}(y)$, los cuales son conjuntos abiertos ya que son uniones finitas de abiertos y son ajenos ya que si $z\in A_1\cap A_2$, entonces $z\in B_{\frac{\delta_x}{3}}(x)$ para alguna $x\in F_1$ y $z\in B_{\frac{\varepsilon_y}{3}}(y)$ para alguna $y\in F_2$.

Así por la desigualdad del triángulo $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)<\frac{\delta_x}{3}+\frac{\varepsilon_y}{3}<$ máx $\{\delta_x,\varepsilon_y\}$, esto quiere decir que $y\in B_{\delta_x}(x)$ o $x\in B_{\varepsilon_y}(y)$, pero esta es una contradicción, además $F_1\subset A_1$ y $F_2\subset A_2$. Por lo tanto X es un espacio normal. ■

Definición 23 *Sean* $x\in X$ *y* r *un número real positivo. Al conjunto* $B_r(x)=\{y\in X: d(y,x)<r\}$, *se le llama bola de radio* r *con centro en* x.

Definición 24 *Una bola cerrada de radio* r *con centro en* x *es el conjunto de los puntos "y" en* X *que cumplen la condición* $d(y,x)\leq r$.

Definición 25 *Sean* X *un espacio métrico y* $K\subseteq X$. *Se define el diámetro de* K *como* $diam K=\sup\{d(x,y):$ *tales que* x, $y\in K\}$.

Definición 26 *Sean* X *un espacio métrico y* $K\subseteq X$. *Se dice que* K *es acotado si* $diam K$ *es finito.*

Definición 27 *Una sucesión en un conjunto* X, *es una función* $f:\mathbb{N}\rightarrow X$.

Notación 28 *Denotaremos a los elementos de la sucesión, como* $x_1,x_2,x_3,\ldots$ *o simplemente por el símbolo* $\{x_n\}$.

Definición 29 *Sea* X *un espacio métrico. Diremos que una sucesión* $\{x_n\}\subseteq X$ *converge a un elemento* x_0 *si cumple la siguiente condición: Para todo* $\varepsilon>0$ *existe* $N\in\mathbb{N}$ *tal que* $d(x_n,x_0)<\varepsilon$, *si* $n>N$.

Definición 30 *Una subsucesión de una sucesión* $\{x_n\}$ *es una sucesión de la forma* $x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, ...,$ *donde los subíndices* n_j *son tales que* $n_1 < n_2 < n_3, \ldots$

A continuación demostraremos el Teorema de Bolzano-Weierstrass, que es válido para todo $\mathbb{R}^n$. Por simplicidad lo demostraremos para $\mathbb{R}^2$; la demostración para $\mathbb{R}^n$ es similar.

Teorema 31 *Sea* $\{x_n\}$ *una sucesión acotada, contenida en* $\mathbb{R}^2$. *Entonces existe* $\{x_{n_k}\}$, *subsucesión de* $\{x_n\}$, *que converge.*

Prueba. Consideremos dos casos:

Caso 1: El conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es finito. Entonces$\{x_n\}$ tiene una subsucesión constante, es decir $x_{n_k} = x$ para alguna $x \in X$ y con algunos $n_1 < n_2 < n_3 < ...$

Es claro que $lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$

Caso 2: Si $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es infinito, como $\{x_n\}$ es acotada, la podemos considerar contenida en un rectángulo $J_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a_{11} \leq x \leq b_{11}, a_{12} \leq y \leq b_{12}\}$, para algunos $a_{11}, b_{11,} a_{12}, b_{12} \in \mathbb{R}$.

Hagamos la siguiente construcción

Bisectemos $[a_{11}, b_{11}]$, así como el segmento $[a_{12}, b_{12}]$. Obtenemos así 2^2 rectángulos.

Observemos que en alguno de esos rectángulos hay una infinidad de elementos de $\{x_n\}$.

Sea J_2 ese rectángulo y tomemos $x_{n_1} \in J_2$.

Volvemos a dividir J_2 en 2^2 rectángulos bisectando cada uno de los lados de J_2.

Nuevamente, en alguno de esos rectángulos hay una infinidad de elementos de $\{x_n\}$.

Elijamos a ese rectángulo como J_3 y tomemos un elemento $x_{n_2} \in J_3$, con $n_2 > n_{1.}$

Si continuamos inductivamente con esta construcción obtenemos una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ de $\{x_n\}$ y una sucesión de rectángulos $\{J_n\}$ tales que $J_1 \supset J_2 \supset J_3 \supset ....$

Así $[a_{11}, b_{11}] \supset [a_{21}, b_{21}] \supset [a_{31}, b_{31}] \supset ...$, y $[a_{12}, b_{12}] \supset [a_{22}, b_{22}] \supset [a_{32}, b_{32}] \supset ...$

Observemos también que $a_{i1} \leq b_{11}$ para toda i, es decir $\{a_{i1}\}$ esta acotado superiormente. Sea $p = \sup\{a_{i1} : i = 1, 2, 3, ...\}$. Como p es el supremo entonces $a_{i1} \leq p$ para toda $i = 1, 2, 3, ...$ y también $p \leq b_{i1}$ para toda $i = 1, 2, 3, ...$ ya que si existiera $j \in \mathbb{N}$ tal que $b_{j1} < p$, como p es el sup $\{a_{i1}\}$, entonces existe $\alpha \in \mathbb{N}$ tal que $b_{j1} < a_{\alpha 1}$. Sea $k = \text{máx}\{j, \alpha\}$, entonces $b_{k1} \leq b_{j1} < a_{\alpha 1} \leq a_{k1}$. Tenemos entonces que $b_{k1} < a_{k1}$, esto es una contradicción. Por lo tanto $a_{i1} \leq p \leq b_{i1}$ para toda $i = 1, 2, 3, ...$, es decir, $p \in \cap_{k=1}^{\infty} [a_{k1}, b_{k1}]$.

Análogamente se puede ver que existe $q \in \cap_{k=1}^{\infty} [a_{k2}, b_{k2}]$. Así $(p, q) \in \cap_{k=1}^{\infty} J_k$.

Veamos ahora que $\{x_{n_k}\}$ converge al punto (p,q).

A cada elemento de la subsucesión x_{n_k} lo podemos ver como un punto $(x^1_{n_k}, x^2_{n_k})$ en $\mathbb{R}^2$. Sea d la distancia euclideana en $\mathbb{R}^2$. Entonces $d(x^1_{n_k}, p) \leq d(a_{k1}, p) + d(p, b_{k1}) \leq \frac{(b_{11}-a_{11})}{2^k} + \frac{(b_{11}-a_{11})}{2^k} = \frac{(b_{11}-a_{11})}{2^{k-1}}$. Así $d(x^1_{n_k}, p) \to 0$ cuando $k \to \infty$, de la misma forma, $d(x^2_{n_k}, q) \to 0$ cuando $k \to \infty$.

Por lo tanto $\{x_{n_k}\}$ converge a (p,q). $\blacksquare$

Definición 32 *Sea X un espacio topológico. Decimos que un conjunto $A \subseteq X$ es denso en X, si la cerradura de A en X es igual a X.*

Teorema 33 *Sea X un espacio topológico. Un conjunto A es denso en X si y sólo si todo abierto no vacío en X intersecta al conjunto A.*

Prueba. Supongamos que A es denso en X.

Veamos que $V \cap A \neq \emptyset$ para todo V abierto no vacío de X.

Sea $V \neq \emptyset$ abierto de X.

Como A es denso en X, nos dice la definición que $Ce(A) = X$.

Supongamos que $V \cap A = \emptyset$, entonces si $x \in V$, $x \notin Ce(A)$. Pero esto es una contradicción al hecho de que $Ce(A) = X$, por lo tanto $V \cap A \neq \emptyset$.

Por otra parte, supongamos que todo abierto no vacío de X intersecta al conjunto A.

Veamos que $Ce(A) = X$.

Sea $x \in X$ y sea V abierto de X tal que $x \in V$. Por hipótesis $V \cap A \neq \emptyset$, entonces $x \in Ce(A)$, así $X \subseteq Ce(A)$. Además siempre se cumple que $Ce(A) \subseteq X$, por lo tanto $Ce(A) = X$. $\blacksquare$

Definición 34 *Decimos que un espacio topológico (X, τ) es segundo numerable si tiene alguna base numerable.*

Veamos un ejemplo de un espacio métrico que no tiene base numerable.

Ejemplo 35 *Un espacio topológico X no numerable con la topología discreta no tiene base numerable.*

Recuérdese que una métrica para la topología discreta es:

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & si \quad x = y \\ \\ 1 & si \quad x \neq y \end{cases}$$

Veremos que X no tiene base numerable.

Sea $\mathfrak{B}$ base para X. Sean $x \in X$ y $V = \{x\}$. Como X es discreto, V es un conjunto abierto; así, existe $B \in \mathfrak{B}$ tal que $x \in B \subseteq \{x\}$, entonces $B = \{x\}$. Esto quiere decir que $\{\{x\} : x \in X\}$ es un subconjunto de cualquier base de X.

Por lo tanto X no tiene base numerable, es decir no es segundo numerable.

Definición 36 *Un espacio topológico que contiene un conjunto denso numerable se le llama separable.*

Teorema 37 *Un espacio métrico X es segundo numerable si y sólo si X es separable.*

Prueba. Supongamos que X es segundo numerable.

Demostremos que X es separable.

Sea $\mathfrak{B}$ base numerable de X. Para cada $B \in \mathfrak{B}$ elijamos $x_B \in B$.

Sea $D = \{x_B : B \in \mathfrak{B}\}$, veremos que D es denso en X. Sea U abierto en X ; como $\mathfrak{B}$ es base, entonces existe un $B \in \mathfrak{B}$ tal que $B \subset U$; así $x_B \in B \subset U$, es decir $U \cap D \neq \emptyset$. Por lo tanto D es denso en X.

Demostremos ahora el recíproco del teorema

Supongamos que X es separable.

Demostremos que es segundo numerable.

Sea $D \subseteq X$ denso numerable y sea $\mathfrak{B} = \{B_r(p) : p \in D \ , \ r \in \mathbb{Q}\}$; dado que $\mathfrak{B}$ es numerable, bastará ver que $\mathfrak{B}$ es base.

Sea A abierto y sea $x \in A$, entonces existe $B_r(x) \subseteq A$.

Sea $\alpha \in \mathbb{Q}$ tal que $0 < 2\alpha < r$; observemos que $B_\alpha(x) \cap D \neq \emptyset$ ya que D es denso.

Sea $p \in B_\alpha(x) \cap D$ y consideremos $B = B_\alpha(p)$, como $d(x,p) < \alpha$, entonces $x \in B_\alpha(p) \in \mathfrak{B}$.

Por último veamos que $B_\alpha(p) \subseteq A$.

Sea $y \in B_\alpha(p)$, entonces $d(x,y) \leq d(x,p) + d(p,y) \leq \alpha + \alpha = 2\alpha < r$, así $y \in B_r(x) \subseteq A$. Por lo tanto $B_\alpha(p) \subseteq A$.

Por lo tanto $\mathfrak{B}$ es base de X. ■

Corolario 38 *$\mathbb{R}^n$ es segundo numerable, para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Prueba. Consideremos al conjunto $D = \mathbb{Q}^n$; así $\mathbb{R}^n$ es separable y por el teorema anterior, $\mathbb{R}^n$ es segundo numerable. ■

Definición 39 *Sea $\{x_n\}$ una sucesión en un espacio métrico X. Decimos que la sucesión $\{x_n\}$ es de Cauchy si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m > N$ entonces $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.*

Definición 40 *Sea $\{B_n\}$ una sucesión de bolas en un espacio métrico. Diremos que $\{B_n\}$ es una sucesión de bolas encajadas siempre que $B_n \subset B_m$, para cada $m > n$.*

Definición 41 *Un espacio métrico X se dice completo si toda sucesión de Cauchy en X es convergente.*

Teorema 42 *Un espacio métrico X es completo si y sólo si cualquier sucesión de bolas cerradas de X, encajadas, cuyo radio tiende a cero, tiene intersección no vacía.*

Prueba. Supongamos que X es completo.

Sean $\{B_n\}$ una sucesión de bolas cerradas encajadas, $\{r_n\}$ la sucesión de radios y $\{x_n\}$ la sucesión de centros correspondientes a cada B_n.

Sean $\varepsilon > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tal que $r_n < \frac{\varepsilon}{2}$, si $n > N$.

Sean $m, k > N$. Entonces x_m, $x_k \in B_{r_{N+1}}(x_{N+1})$, así que

$d(x_m, x_k) \leq d(x_m, x_{N+1}) + d(x_{N+1}, x_k) < r_n + r_n < \varepsilon$

Entonces $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy y como X es completo, $\{x_n\}$ converge, digamos a x_0.

Afirmación: $x_0 \in \cap_{i=1}^{\infty} B_i$.

Supongamos que existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $x_0 \notin B_j$. Entonces $x_0 \in V = X \diagdown B_j$.

Como V es abierto $x_n \in V$ si $n > N$ para alguna $N \in \mathbf{N}$.

Sea $n > \text{máx}\{j, N\}$. Entonces $x_n \in B_n \subset B_j$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $x_0 \in \cap_{i=1}^{\infty} B_i$.

Demostremos el recíproco del Teorema.

Supongamos que cualquier sucesión de bolas cerradas, encajadas, cuyo radio tiende a cero tiene intersección no vacía y demostremos que X es completo.

Sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy y sea $\varepsilon = \frac{1}{2}$, entonces existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_1$, $d(x_n, x_{n_1}) < \frac{1}{2}$ y consideremos la bola de radio 1 con centro en x_{n_1}.

Para $\varepsilon = \frac{1}{2^2}$ existe $n_2 \in \mathbb{N}$, $n_2 > n_1$ tal que si $n > n_2$, entonces $d(x_n, x_{n_2}) < \frac{1}{2^2}$ y consideremos la bola cerrada de radio $\frac{1}{2}$ con centro en x_{n_2}. (véase figura 1.1)

En general para $\varepsilon = \frac{1}{2^{k+1}}$ existe $n_{k+1} \in \mathbb{N}$, $n_{k+1} > n_k$ tal que si $n > n_{k+1}$, entonces $d(x_n, x_{n_{k+1}}) < \frac{1}{2^{k+1}}$ y se considera la bola cerrada de radio $\frac{1}{2^k}$ con centro en $x_{n_{k+1}}$.

Así se construye una sucesión de bolas cerradas, digamos $\{B_k\}$ con radio $\frac{1}{2^{k-1}}$ que por construcción están encajadas. Entonces por hipótesis existe $x_0 \in \cap_{i=1}^{\infty} B_i$. Como $d(x_0, x_{n_k}) < \frac{1}{2^{k-1}}$, la sucesión $\{x_{n_k}\}$ converge y por tanto el $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$. Por lo tanto X es completo. ■

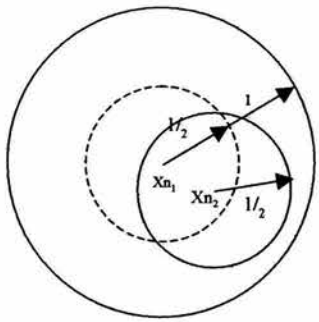


Figura 1.1:

Capítulo 2

Espacios Compactos

Definición 43 *Sea $(X.\tau)$ un espacio topológico. Una colección $\mathfrak{C} = \{C_i\}$ de subconjuntos de X es una cubierta abierta de X si $\mathfrak{C}$ es subconjunto de τ y además $\cup C_i = X$.*

Definición 44 *Sea $\mathfrak{C}$ una cubierta abierta de X. Una subcubierta $\mathfrak{D}$ de $\mathfrak{C}$ es una subcolección de $\mathfrak{C}$ tal que $\cup \{C : C \in \mathfrak{D}\} = X$.*

Definición 45 *Un espacio X es Lindelöff si toda cubierta abierta de X tiene una subcubierta numerable.*

Ejemplo 46 *La línea de Sorgenfrey es un espacio Lindelöff.*

Sean $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una cubierta de la línea de Sorgenfrey, y M el conjunto de las intervalos racionales (p,q) tales que $p < q$ y el intervalo $[p,q)$ es subconjunto de algún elemento U_α de $\mathfrak{U}$. Veamos que $M \neq \emptyset$: Sea $z \in \mathbb{Q}$, dado que $\mathfrak{U}$ es cubierta, $z \in U_\alpha$ para alguna $\alpha \in I$, así existe un intervalo elemento $[p,q)$ de la base (ver Ejemplo 3) tal que $z \in [p,q) \subset U_\alpha$. Así el intervalo $[z,q) \in M$.

Para cada intervalo $(p,q) \in M$, elijamos $U_{\alpha(p,q)} \in \mathfrak{U}$ tal que $[p,q) \subset U_{\alpha(p,q)}$.

Consideremos C_2 el conjunto de los extremos derechos de cada elemento de M.

Para cada $q \in C_2$, sea $N = \{x \in \mathbb{R} : [x,q)$ es subconjunto de algún $U_\alpha \in \mathfrak{U}\}$. Veamos que N está acotado inferiormente: supongamos que para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $x < q$, existe $y \in \mathbb{R}$ tal que $y < x$ y $[y,q) \subset U_\alpha$, entonces existe $p \in \mathbb{Q}$ tal que $y \leq p < q$ y $[p,q) \subset U_\alpha$. Así M es un conjunto no numerable, lo cual es una contradicción.

Sea $x_q \in \mathbb{R}$ tal que $x_q = \inf \{x \in \mathbb{R} : [x,q)$ es subconjunto de algún $U_\alpha \in \mathfrak{U}\}$ y para cada x_q sea $U_{\alpha q} \in \mathfrak{U}$ tal que $x_q \in U_{\alpha q}$.

La colección $\mathfrak{U}' = \left\{U_{\alpha(p,q)}\right\}_{(p,q)\in M} \cup \{U_{\alpha q}\}_{q \in C_2}$ es numerable.

Veamos que $\mathfrak{U}'$ cubre a $\mathbb{R}$.

Sea $x \in \mathbb{R}$. Si $x = x_q$ para alguna $q \in C_2$, entonces $x \in U_{\alpha q}$. Si $x \neq x_q$ existe $U_\alpha \in \mathfrak{U}$ tal que $x \in U_\alpha$.

Como U_α es abierto, entonces existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $[x, q) \subset U_\alpha$. El punto q es un elemento de C_2 ya que para todo racional $p' \in [x, q)$ se tiene que $[p', q) \subset U_\alpha$, así $x_q < x$. Si $p \in \mathbb{Q}$ cumple con $x_q < p < x$, y como $x_q \neq x$ es infimo entonces $[p, q) \subset U_\alpha$, asi que (p, q) es un elemento de M y como $x \in (p, q)$ entonces $x \in U_{\alpha(p,q)}$. Por lo tanto la línea de Sorgenfrey es un espacio Lindelöff.

Teorema 47 *Todo subconjunto de un espacio segundo numerable es Lindelöff.*

Prueba. Sean X un espacio segundo numerable y $A \subseteq X$ y supongamos que $A \subseteq \cup_{i \in I} V_i$, donde cada V_i es un abierto no vacío de X. Veremos que existe una cantidad numerable de estos V_i, tales que $A \subseteq \cup_{j=1}^{\infty} V_{i_j}$.

Sea $\mathfrak{B}$ base numerable de X, sea $\mathfrak{B}^{\otimes} = \{B \in \mathfrak{B} : B \subseteq V_i \text{ para alguna } i \in I\}$, $\mathfrak{B}^{\otimes} \neq \emptyset$ ya que $\mathfrak{B}$ es base.

Como $\mathfrak{B}^{\otimes} \subseteq \mathfrak{B}$ entonces $\mathfrak{B}^{\otimes}$ es numerable; elijamos para cada $B \in \mathfrak{B}^{\otimes}$ un conjunto V_i que contenga a B y denotemos como $\alpha(B) = V_i$, así el conjunto $\{\alpha(B) : B \in \mathfrak{B}\}$ es también numerable ya que $\mathfrak{B}^{\otimes}$ es numerable.

Veremos que $A \subseteq \cup \{\alpha(B) : B \in \mathfrak{B}\}$.

Sea $a \in A$. Como $A \subseteq \cup_{i \in I} V_i$ entonces $a \in V_i$ para alguna $i \in I$, y como $\mathfrak{B}$ es base existe $B \in \mathfrak{B}$ tal que $a \in B \subseteq V_i$. Esto quiere decir que $B \in \mathfrak{B}^{\otimes}$, también $B \subseteq \alpha(B)$ y como $a \in B$ se tiene que $a \in \alpha(B)$. Por lo tanto $A \subseteq \cup \{\alpha(B) : B \in \mathfrak{B}\}$. En consecuencia A es de Lindelöff. ∎

Corolario 48 *Todo subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es un espacio de Lindelöff.*

Prueba. Inmediato dado que $\mathbb{R}^n$ es segundo numerable (ver Corolario 38). ∎

Veamos ahora un ejemplo de un espacio X que no es de Lindelöff.

Ejemplo 49 *Sea (X, τ), tal que X es no numerable y τ es la topología discreta.*

En este espacio el conjunto $\{x\}$ es abierto para todo $x \in X$. Sea entonces $\mathfrak{B} = \{\{x\} : x \in X\}$; $\mathfrak{B}$ es una cubierta abierta de X y no existe subcubierta numerable ya que X no es numerable. Nótese que cualquier espacio numerable X es un espacio Lindelöff.

Definición 50 *Decimos que una propiedad es hereditaria, si cada vez que un espacio X la satisface, entonces cualquier subespacio de X también la satisface.*

En el siguiente ejemplo, veremos que la propiedad de ser espacio de Lindeloff no se hereda.

Ejemplo 51 *Sea X un espacio infinito no numerable y sea $x_0 \in X$. Démosle a X la topología τ dada por: $\tau = \{X\} \cup \{E \subseteq X : x_0 \notin E\}$.*

Sea $\mathfrak{C}$ una cubierta abierta de X, como el único abierto de X que contiene al punto x_0 es el total, entonces $X \in \mathfrak{C}$, así podemos extraer una subcubierta finita de $\mathfrak{C}$, a saber $\{X\}$ es la subcubierta finita. Por lo tanto X es un espacio de Lindelöff.

Sin embargo, $X\diagdown\{x_0\}$ con la topología heredada es un espacio discreto no numerable y por tanto no es un espacio de Lindeloff.

Definición 52 *Un espacio (X, τ) se dice compacto si dada cualquier cubierta abierta $\mathfrak{C}$ de X, existe una subcubierta finita de $\mathfrak{C}$.*

Definición 53 *Sea X un conjunto. A una familia $\{T_i\}_{i\in I}$ de subconjuntos de X tales que cualquier interseccion finita $\cap_{i=1}^{n} T_i$ es no vacía, se le llama sistema centrado.*

El siguiente teorema es una definición dual tomando complementos, también se le conoce como la propiedad de la intersección finita.

Teorema 54 *Un espacio topológico X es compacto, si y sólo si todo sistema centrado $\{T_i\}_{i\in I}$ de subconjuntos cerrados de X tiene intersección no vacía; esto es $\cap_{i\in I} T_i \neq \emptyset$.*

Prueba. Supongamos que X es compacto.

Sea $\{T_i\}_{i\in I}$ un sistema centrado donde cada T_i es cerrado y $T_i \subset X$ para toda $i \in I$. Supongamos que $\cap_{i\in I} T_i = \emptyset$, así $X = X\diagdown \cap_{i\in I} T_i = \cup_{i\in I}(X\diagdown T_i)$.

Sea $C_i = X\diagdown T_i$; cada C_i es abierto ya que es complemento de un cerrado, como X es compacto existe un número finito de elementos de la familia $\{C_i\}$ que cubren a X; es decir, $X = \cup_{j=1}^{n}(C_{i_j})$, así $\cap_{j=1}^{n} T_{i_j} = \emptyset$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\cap_{i\in I} T_i \neq \emptyset$.

Para demostrar el recíproco supongamos que todo sistema centrado de cerrados de X, tiene intersección no vacía.

Sea $\{C_i\}$ una cubierta abierta de X y sea $T_i = X\diagdown C_i$, para cada $i \in I$.Todo T_i es cerrado y $\cap_{i\in I}(T_i) = \emptyset$, así existe un número finito de elementos de la famila $\{T_i\}_{i\in I}$ tales que $\cap_{j=1}^{n} T_{i_j} = \emptyset$. Entonces $X = \cup_{j=1}^{n} C_{i_j}$. Por lo tanto X es compacto. ∎

Teorema 55 *Sean X un espacio Hausdorff y K_1, K_2 dos subconjuntos compactos ajenos de X. Entonces existen dos abiertos ajenos A y B en X tales que $K_1 \subset A$ y $K_2 \subset B$.*

Prueba. Ver [6], pag. 161. ■

Teorema 56 *Sea X un espacio compacto y sea $K \subseteq X$, K cerrado. Entonces K es compacto.*

Prueba. Sea $\mathfrak{C}$ una cubierta abierta de K, como K es cerrado entonces $X \setminus K$ es abierto

Sea $\mathfrak{C}' = \mathfrak{C} \cup \{X \setminus K\}$, tenemos así una cubierta abierta de X. Como X es compacto, existen $C_1', C_2', ..., C_n'$ elementos de $\mathfrak{C}'$ tales que $X \subseteq \cup_{i=1}^n C_i'$. Consideremos los C_i' tales que $C_i \cap K \neq \emptyset$, obtenemos así una subcubierta finita de K cuyos elementos están en $\mathfrak{C}$. Por lo tanto K es compacto. ■

Teorema 57 *Sean X un espacio Hausdorff y $K \subseteq X$ compacto. Entonces K es cerrado.*

Prueba. Basta demostrar que $X \setminus K$ es abierto.

Sea $x \in X \setminus K$ y sea $y \in K$. Como X es Hausdorff existen V_y y U_y abiertos ajenos tales que

$y \in V_y$ y $x \in U_y$, esto ocurre para toda $y \in K$.

Sea $\mathfrak{C}$ el conjunto de las $V's$ elegidas de esta forma, es decir $\mathfrak{C} = \{V_y : y \in K\}$, asi $\mathfrak{C}$ es una cubierta abierta de K y por ser K compacto existen $V_1, V_2, ..., V_n$ tales que $K \subseteq \cup_{i=1}^n V$.

Consideremos las correspondientes U_i que existen para cada V_i, para $i = 1, ..., n$. Entonces

$x \in \cap_{i=1}^n U_i$ y llamemosle W a tal intersección.

Observemos que $W \cap K = \emptyset$, pues si $z \in W \cap K$, entonces $z \in U_i \cap V_i$ para alguna $i = 1, ...n$. Esto es una contradicción; pues U_i y V_i son ajenos, así $X \setminus K$ es abierto. Por lo tanto K es cerrado. ■

Veamos un ejemplo de un espacio X que no es Hausdorff y tal que existe $K \subseteq X$ compacto, y K no es cerrado.

Ejemplo 58 *Sea (X, τ), donde X es infinito y τ es la topologia cofinita. Es decir $\tau = \{A \subseteq X$ tales que $X \setminus A$ es finito$\} \cup \emptyset$.*

Observemos primero que X no es Haurdorff

Sean $x, y \in X$, $x \neq y$ y A abierto tal que $x \in A$ y $y \notin A$. Como A es abierto, $X \setminus A$ es finito, por lo que no puede existir B abierto ajeno al conjunto A tal que $y \in B$. Por lo tanto X no es Hausdorff.

Observemos que si $K \subseteq X$, entonces K es compacto.

Sea $\mathfrak{C} = \{C_i\}_{i\in I}$ una cubierta abierta de K, consideremos $\alpha \in I$ tal que $C_\alpha \cap K \neq \emptyset$ y supongamos que $B = (X \setminus C_\alpha) \cap K \neq \emptyset$; si no fuera así, $\{C_\alpha\}$ sería la subcubierta finita que se está buscando.

Como $X \setminus C_\alpha$ es finito, entonces $B = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Ahora, para cada $x_i \in B$ existe $C_{x_i} \in \mathfrak{C}$ tal que $x_i \in C_{x_i}$.

Así $K \subseteq C_{x_1} \cup C_{x_2} \cup ... \cup C_{x_n} \cup C_\alpha$. Por lo tanto K es compacto.

Se puede concluir entonces que todo subconjunto K de X es compacto y si $K \neq X$ no es finito, entonces no es cerrado, pues los cerrados propios en (X, τ), son finitos.

Definición 59 *Sean (X, τ) un espacio topológico y $S \subset X$. A la pareja (S, τ_s) le llamamos subespacio topológico de X, donde τ_s es la topología débil inducida por la función inclusión. (ver [6] pag. 93) A la topología τ_s le llamamos la topología relativa en X.*

Teorema 60 *Sean $S \subset (X, \tau)$ y τ_s la topología relativa de S. Sea $H \subset S \subset X$ entonces H es compacto respecto a τ, si y sólo si H es compacto respecto a τ_s.*

Prueba. Sea $H \subset S$ y supongamos que H es compacto respecto a τ.

Sea $\mathfrak{C}$ una cubierta abierta en τ_s de H.

Para toda $C \in \mathfrak{C}$, $C = A \cap S$ donde A es abierto en τ, así $H \subset \cup C_i = \cup (A_i \cap S)$.

Veamos que $\{A_i\}$ es una cubierta de H en τ.

Sea $x \in H$, entonces $x \in \cup C_i$ es decir $x \in A_j \cap S$ para alguna j, por lo tanto $x \in A_j$ para alguna j. Por lo tanto $H \subset \cup A_i$.

Ahora como H es compacto respecto a τ, existe un número finito de índices tales que $H \subset \cup_{i=1}^{n} A_i$ y como $H \subset S$ entonces $H \subset \cup_{i=1}^{n} (A_i \cap S)$. Por lo tanto H es compacto en τ_s.

Demostremos el recíproco del Teorema.

Supongamos que H es compacto respecto a τ_s.

Sea $\mathfrak{C} = \{C_i\}_{i\in I}$ una cubierta abierta de H respecto a τ. Como $H \subset S$ entonces $H \subset \cup (C_i \cap S)$, y como H es compacto respecto a τ_s, existen un número finito de índices tales que $H \subset \cup_{i=1}^{m} (C_i \cap S)$.

Así $H \subset \cup_{i=1}^{m} C_i$ ya que $H \subset S$. Por lo tanto H es compacto en τ. ■

Teorema 61 *Sean X espacio métrico y K subconjunto compacto de X. Entonces K es acotado.*

Prueba. Sea $\mathfrak{C} = \{B_1(x) : x \in K\}$, entonces $\mathfrak{C}$ es una cubierta abierta de K. Como K es compacto existen $x_1, x_2, ..., x_n \in K$ tales que $\mathfrak{C}' = \{B_1(x_1), B_1(x_2), ..., B_1(x_n)\}$ es subcubierta finita de K.

Sea $M = \text{máx}\{d(x_i, x_j) : i, j = 1, 2, ..., n\}$.

Veamos que $M + 2$ es cota para K.

Sean $x, y \in K$. Como $\mathfrak{C}'$ es cubierta de K existen $B_1(x_i)$ y $B_1(x_j)$ tales que $x \in B_1(x_i)$, $y \in B_1(x_j)$, entonces $d(x, y) \leq d(x, x_i) + d(x_i, x_j) + d(x_j, y) \leq 2 + M$.

Por lo tanto K es acotado. ■

Teorema 62 *Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$, K. Entonces es compacto si y sólo si K es cerrado y acotado.*

Prueba. Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que K es compacto

Veremos que K es cerrado y acotado

Como $\mathbb{R}^n$ es Hausdorff, entonces K es cerrado (ver Teorema 57). Además, por el teorema anterior, K es acotado.

Supongamos ahora que $K \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto cerrado y acotado.

Demostraremos que K es compacto.

Sea $\mathfrak{C}$ una cubierta abierta de K y supongamos que no existe una subcubierta abierta finita de $\mathfrak{C}$.

Dado que K es Lindelöff (ver corolario 48), existe $\mathfrak{C}' = \{C_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ subcubierta numerable de elementos de $\mathfrak{C}$ pero como no existe subcubierta finita de $\mathfrak{C}$, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in K$ tal que $x_n \notin \cup_{i=1}^{n} C_i$.

La sucesión $\{x_n\}$ construida de esta forma es acotada, ya que K es acotado, así por el teorema de Bolzano-Weierstrass (Teorema 31) existe $\{x_{n_l}\}$ subsucesión convergente de $\{x_n\}$.

Sea z el límite de la sucesión $\{x_{n_l}\}$. Como K es cerrado, $z \in K$.

Sabemos que $\mathfrak{C}'$ es cubierta de K, entonces existe $C_i \in \mathfrak{C}'$ tal que $z \in C_i$ y por la definición de convergencia existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $j \geq j_0$, entonces $x_{n_j} \in C_i$;.En particular, existe $n_j \geq i$ tal que $x_{n_j} \in C_i$; esto es una contradicción ya que si $n_j \geq i$ entonces $x_{n_j} \notin C_i$. Por lo tanto K es compacto. ■

A continuación mencionaremos algunos ejemplos de conjuntos cerrados y acotados que no son compactos.

Ejemplo 63 *Sean (X, d) un espacio métrico, X infinito y d la métrica discreta, es decir:*

$$d(x,y)=\begin{cases} 0 & si \quad x=y \\ \\ 1 & si \quad x\neq y \end{cases}$$

La primera observación es que todo subconjunto de X es abierto y cerrado. Veamos:

Sea $A\subseteq X$ y sea $x\in A$. La bola $B_{\frac{1}{2}}(x)=\{x\}\subseteq A$. Por lo tanto A es abierto.

Sea $B\subseteq X$. Como todo subconjunto de X es abierto entonces $X\diagdown B$ es abierto, por tanto B es cerrado.

La segunda observación es que todo subconjunto de X es acotado. Veamos:

Sea $A\subseteq X$ y sean $x,y\in A$ tales que $x\neq y$, entonces $d(x,y)=1$, asi el $diamA=1$, por lo tanto A es acotado.

Sin embargo si $A\subseteq X$ es infinito, entonces A no es compacto:

Sea $\mathfrak{C}=\left\{B_{\frac{1}{2}}(x):x\in A\right\}$. Entonces $\mathfrak{C}$ es cubierta abierta de A y no existe subcubierta finita pues si existiera $\mathfrak{C}'$ subcubierta finita digamos $B_{\frac{1}{2}}(x_1),B_{\frac{1}{2}}(x_2),...,B_{\frac{1}{2}}(x_n)$ se tendría que A es finito. Por lo tanto A no es compacto.

Ejemplo 64 *Sea $\mathbb{Q}$ el conjunto de los numeros racionales con la topología usual y sea $A=[a,b]\cap\mathbb{Q}$.*

El conjunto A es cerrado y acotado en $\mathbb{Q}$. Veamos que A no es compacto en $\mathbb{Q}$.

Sea $p\in\mathbb{R}\diagdown\mathbb{Q}$ tal que $p\in(a,b)$, observemos que para todo $q\in A$ se tiene $q\in\mathbb{Q}$.

$$\text{Sea } V(q)=\begin{cases} \{w\in\mathbb{R} \text{ tales que } q<w\}, \text{ si } p<q \\ \\ \{z\in\mathbb{R} \text{ tales que } z<q\}, \text{ sì } q<p \end{cases}$$

Entonces $V(q)\cap A$ es abierto para todo $q\in A$. Así veremos que la familia $\{V(q)\cap A\}_{q\in A}$ es una cubierta abierta de A que no tiene subcubierta finita. Veamoslo:

Supongamos que si, es decir que existe $\{V(q_i)\cap A\}_{i\in\{1,...,n\}}$ subcubierta finita de $\{V(q)\cap A\}_{q\in A}$. Sea $q^*=\text{mín}\{q_i:p<q\}$, así los elementos de A entre p y q^* no pertenecen a ningún elemento de la subcubierta. Por lo tanto A no es compacto.

Ejemplo 65 *Sea $\mathfrak{C}(X)=\{f:[0,1]\to\mathbb{R}: f$ es continua$\}$ con la métrica del supremo dada por $d(f,g)=\text{máx}\{|f(x)-g(x)|:x\in[0,1]\}$.*
Sea $\mathfrak{M}=\{f\in\mathfrak{C}(X):f(x)\in[0,1]\}$.

Veremos que $\mathfrak{M}$ es un conjunto cerrado y acotado pero no es compacto.

Sea $h(x) \in \mathfrak{C}(X) \diagdown \mathfrak{M}$, entonces existe $x_0 \in [0,1]$ tal que $h(x_0) > 1$ ó $h(x_0) < 0$ y sea $\varepsilon = \frac{|h(x_0)-1|}{2}$, así $B_\varepsilon(h) \subseteq \mathfrak{C}(X) \diagdown \mathfrak{M}$. Hemos visto que el complemento de $\mathfrak{M}$ es abierto y por tanto $\mathfrak{M}$ es cerrado. $\mathfrak{M}$ es acotado pues $diam\mathfrak{M} = 1$.

Veamos ahora que $\mathfrak{M}$ no es compacto.

Sea $f_n(x) = x^n$, $\{f_n\} \subseteq \mathfrak{M}$, la sucesión $\{f_n\}$ es acotada pues $\mathfrak{M}$ es acotado y el límite puntual (ver [8],pag. 153) $\lim_{n\to\infty} f_n = g$, donde g se define como sigue:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \in [0,1) \\ \\ 1 & si \quad x = 1 \end{cases}$$

La primer observación, es que $g \notin \mathfrak{C}(X)$ ya que no es continua y por tanto el conjunto $\gamma = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ no es cerrado en $\mathfrak{C}(X)$. Veamos que γ no es compacto.

Sea $\mathfrak{C} = \left\{ B_{\frac{1}{2^{n+2}}}(f_n) : n \in \mathbb{N} \right\}$, veremos que $\mathfrak{C}$ es una cubierta abierta de γ de la cual no se puede extraer una subcubierta finita.

Supongamos que existe $\mathfrak{C}'$ subcubierta finita de $\mathfrak{C}$, entonces existen $n_1, n_2, ..., n_k \in \mathbb{N}$ tales que $\mathfrak{C}' = \left\{ B_{\frac{1}{2^{n_1+2}}}(f_{n_1}), ..., B_{\frac{1}{2^{n_k+2}}}(f_{n_k}) \right\}$. Consideremos a $n' \in \mathbb{N}$ tal que $n' > \max\{n_1, n_2, ..., n_k\}$, así $f_{n'}$ no pertenece a ningún elemento de $\mathfrak{C}'$. Por lo tanto γ no es compacto.

También notemos que ni $\mathfrak{M}$ ni $\mathfrak{C}(X)$, son compactos ya que si $\mathfrak{M}$ fuera compacto, entonces cualquier subconjunto cerrado de $\mathfrak{M}$ sería compacto, lo cual no sucede como ya vimos. De la misma forma, $\mathfrak{C}(X)$ no es compacto.

Ejemplo 66 *Sea* $l^2 = \{(a_1, a_2, a_3, ...) : a_i \in \mathbb{R}\ ,\ \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < \infty\}$, *donde la distancia esta dada como sigue:*

$d(a,b) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i)^2}$. Sea $E = \left\{ \widehat{x}_j = \left(x_1^j, x_2^j, x_3^j, ...\right) : x_j^j = 1, x_i^j = 0,\ i \neq j \right\}$.
Veremos que E es cerrado y acotado pero no compacto.
Notemos que si $\widehat{x}_i$, $\widehat{x}_j$ son dos elementos distintos de E, entonces $d(\widehat{x}_i, \widehat{x}_j) = \sqrt{2}$.
E es acotado ya que el $diamE = \sup\{d(\widehat{x}_j, \widehat{x}_i) : \widehat{x}_j, \widehat{x}_i \in E\} = \sqrt{2}$.
Ahora veamos que E es cerrado.
Sea $\widehat{\alpha} \in l^2 \diagdown E$, veremos que la bola $B_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(\widehat{\alpha})$ contiene a lo más un punto de E.

Si $\widehat{x}_i, \widehat{x}_j \in E \cap B_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(\widehat{\alpha})$, entonces $d(\widehat{x}_i, \widehat{x}_j) \leq d(\widehat{x}_i, \widehat{\alpha}) + d(\widehat{\alpha}, \widehat{x}_j) \lneqq \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$, obtenemos así que $\sqrt{2} < \sqrt{2}$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $B_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(\widehat{\alpha}) \cap E$ contiene a lo más un punto.

Supongamos que $\widehat{x}_i \in B_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(\widehat{\alpha})$ y sea $r < d(\widehat{x}_i, \widehat{\alpha})$, entonces por el argumento anterior $B_r(\widehat{\alpha}) \subset l^2 \diagdown E$. En consecuencia, E es cerrado.

Por último, dado que la distancia entre cualesquiera dos elementos de E es igual a $\sqrt{2}$, entonces la familia $\mathfrak{C} = \left\{ B_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(\widehat{x}_i) : \widehat{x}_i \in E \right\}$, no contiene subcubierta finita alguna. Por tanto, E no es compacto.

Teorema 67 *La imagen continua de un espacio compacto es compacto.*

Prueba. Sean X un espacio topológico, $A \subset X$ compacto y $f : X \to Y$ tal que f es continua y suprayectiva.

Sea $\mathbb{C}$ una cubierta abierta de $f(A)$, entonces $\{f^{-1}(C) : C \in \mathbb{C}\}$ es una cubierta abierta de A.

Como A es compacto, entonces existe $\{f^{-1}(C_1), f^{-1}(C_2), ...f^{-1}(C_n)\}$ tales que $A \subset \cup_{i=1}^{n} f^{-1}(C_i)$, así $f(A) \subset \cup_{i=1}^{n} C_i$. Por lo tanto $f(A)$ es compacto. ■

Capítulo 3

Espacios Numerablemente Compactos

Definición 68 *Sea X un espacio métrico, sea $M \subseteq X$ y sea $\varepsilon > 0$. Una $\varepsilon - red$ de M es un conjunto $A \subseteq X$ tal que para todo $x \in M$ existe un punto $a \in A$ que cumple $d(x, a) \leq \varepsilon$.*

Ejemplo 69 *Los puntos de coordenadas enteras en $\mathbb{R}^2$ forman una $\frac{1}{\sqrt{2}} - red$ del plano.*

Definición 70 *Un conjunto M se llama totalmente acotado cuando para toda $\varepsilon > 0$ existe una $\varepsilon - red$ finita de M.*

Es decir, un conjunto M es totalmente acotado, cuando dado $\varepsilon > 0$, M se puede cubrir con un número finito de bolas cerradas de radio ε.

Observación: En general no es necesario que la $\varepsilon - red$ esté contenida en el conjunto M. Sin enbargo, si M es totalmente acotado, la $\varepsilon - red$ puede construirse de manera que sea un subconjunto de M.

Sea $\varepsilon \gneqq 0$ y $\{a_1, a_2, ..., a_n\} \subset X$ una $\varepsilon - red$ de M. Supongamos que para cada a_i existe $b_i \in M$ tal que $d(a_i.b_i) \leq \varepsilon$, así $d(x, b_i) \leq d(x, a_i) + d(a_i, b_i) \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$, es decir $\{b_1, b_2, ..., b_n\}$ es una $2\varepsilon - red$ de M.

Veamos también que un conjunto totalmente acotado, es acotado.

Sea M totalmente acotado y sea $\varepsilon > 0$. Por definición existe una $\varepsilon - red$ A finita de M. Entonces $M = \cup_{a \in A} \left(\overline{B_\varepsilon}(a) \cap M\right)$. Por lo tanto M es acotado, ya que es unión finita de conjuntos acotados.

Sin embargo, en general no es cierto que un conjunto acotado sea totalmente acotado.

Ejemplo 71 *Consideremos la esfera unitaria del espacio l^2 y nuevamente el conjunto $E = \{\widehat{x}_j = (x_1^j, x_2^j, ...) : x_j^j = 1, x_i^j = 0$ si $i \neq j\}$, como diam$E = \sqrt{2}$, para $\varepsilon < \frac{\sqrt{2}}{2}$ no existe una $\varepsilon - red$ finita.*

Por último veamos que si M es totalmente acotado, entonces $\overline{M}$ también es totalmente acotado.

La razón es la siguiente:

Sea $\varepsilon > 0$ y sea $x_0 \in \overline{M}$, entonces existe $y_0 \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_0) \cap M$. Como M es totalmente acotado existe una $\frac{\varepsilon}{2} - red$ A de M, así hay un $a \in A$ tal que $d(a, y_0) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Además cumple la siguiente condición:

$d(a, x_0) \leq d(a, y_0) + d(y_0, x_0) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Así A es una $\varepsilon - red$ finita de $\overline{M}$. Por lo tanto $\overline{M}$ es totalmente acotado.

Definición 72 *Un espacio X es numerablemente compacto si dado $S \subseteq X$ numerable, se tiene que S tiene un punto de acumulación.*

Teorema 73 *Todo espacio métrico numerablemente compacto es totalmente acotado.*

Prueba. Supongamos que X no es totalmente acotado, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que no existe una $\varepsilon - red$ finita en X.

Sea $x_1 \in X$, entonces existe $x_2 \in X$ tal que $d(x_1, x_2) > \varepsilon$.

Nuevamente como X no es totalmente acotado existe $x_3 \in X$ tal que $d(x_1, x_2) > \varepsilon$ y $d(x_1, x_3) > \varepsilon$.

Si continuamos con ese procedimiento, como $d(x_i, x_j) > \varepsilon$, obtendremos una sucesión $\{x_n\}$ no convergente de elementos de X; es decir obtuvimos un subconjuno numerable de X que no tiene punto de acumulación, lo cual es una contradicción. Por lo tanto X es totalmente acotado. ■

Corolario 74 *Todo espacio métrico numerablemente compacto, es separable y segundo numerable.*

Prueba. Demostremos primero que existe $D \subseteq X$ denso y numerable.

Por el teorema anterior sabemos que X es totalmente acotado.

Sea $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, así existe para toda $n \in \mathbb{N}$ una $\varepsilon_n - red$ finita a la cual denotamos por Dn.

El conjunto $D = \cup_{i=1}^{\infty} D_i$ es un conjunto numerable, ya que es unión numerable de conjuntos finitos.

Bastará con demostrar que D es denso en X.

Sea U abierto de X y sea $x_0 \in U$. Como U es abierto, existe $r > 0$ tal que $B_r(x_0) \subseteq U$.

Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < r$. Para x_0 existe $y \in D_n$ tal que $d(x_0, y) \leq \frac{1}{n} < r$.

Así $B_r(x_0) \cap D \neq \emptyset$, entonces $D \cap U \neq \emptyset$. Por lo tanto D es denso en X.

Finalmente X tiene base numerable ya que es separable. (ver Teorema 37). ■

El siguiente teorema muestra la relación que hay entre los espacios compactos y los numerablemente compactos.

Teorema 75 *Todo espacio compacto es numerablemente compacto.*

Prueba. Supongamos que X contiene un conjunto numerable R, sin puntos de acumulación.

Sea $R = \{x_1, x_2, x_3, ...\}$ y consideremos los siguientes conjuntos:

$T_1 = R$, $T_2 = \{x_2, x_3, x_4, ...\}$, ..., $T_n = \{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, ...\}$,... para cada $n \in \mathbb{N}$.

Por construcción $T_1 \supset T_2 \supset T_3 \supset ...$

Además cada T_i es cerrado ya que contiene a todos sus puntos de acumulación y la familia $\{T_i\}$ forma un sistema centrado.

Como R no tiene puntos de acumulación, entonces $\cap_{i=1}^{\infty} T_i = \emptyset$, lo cual es una contradiccón ya que X es compacto (ver Teorema 54). Por lo tanto X es numerablemente compacto. ■

El siguiente lema nos ayudará a demostrar una caracterización de los conjuntos numerablemente compactos.

Lema 76 *Todo cubierta numerable de X contiene una subcubierta finita si y sólo si todo sistema centrado numerable de conjuntos cerrados de X tiene intersección no vacía.*

Prueba. Sea $\{T_n\}$ un sistema centrado numerable de conjuntos cerrados.

Demostremos que tiene intersección no vacía.

Supongamos que $\cap_{i=1}^{\infty} T_i = \emptyset$, y consideremos los complementos de cada uno de los elementos del sistema.

Sea $\mathfrak{C} = \{X \setminus T_1, X \setminus T_2, X \setminus T_3, ...\}$. Cada uno de los elementos de $\mathfrak{C}$ es abierto y son tales que:

$X = X \setminus (\cap_{i=1}^{\infty} T_i) = \cup_{i=1}^{\infty} (X \setminus T_i)$, es decir, $\mathfrak{C}$ es una cubierta abierta de X.

Por hipótesis existe una subcubierta finita, así para alguna $n \in \mathbb{N}$, se cumple que $\cup_{j=1}^{n} (X \setminus T_{i_j}) = X$; entonces $\cap_{i=1}^{n} T_{i_j} = \emptyset$ lo cual es una contradicción ya que $\{T_n\}$ es un sistema centrado. Por lo tanto $\cap_{i=1}^{\infty} T_i \neq \emptyset$.

Demostremos ahora el recíproco del teorema.

Supongamos que todo sistema centrado numerable de cerrados de X tiene intersección no vacía.

Sea $\mathfrak{C} = \{C_1, C_2, C_3, ...\}$ cubierta numerable de X y supongamos que no contiene subcubierta finita, es decir, siempre que se tome la unión de un número finito de elementos de $\mathfrak{C}$ existe $x_0 \in X$ tal que x_0 es elemento del complemento de esa unión.

Sea $R = \{X \diagdown C_1, X \diagdown C_2, X \diagdown C_3, ...\}$, observemos que cada elemento de R es cerrado y cumple que $\cap_{j=1}^{n}(X \diagdown C_{i_j}) = X \diagdown (\cup_{j=1}^{n} C_{i_j}) \neq \emptyset$ para toda $n \in \mathbb{N}$, es decir, R es un sistema centrado numerable de conjuntos cerrados con intersección vacia, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto $\mathfrak{C}$ contiene una subcubierta finita. ∎

Teorema 77 *Un espacio topológico X es numerablemente compacto si y sólo si todo sistema centrado numerable de conjuntos cerrados de X tiene intersección no vacía.*

Prueba. Sea X un espacio topológico numerablemente compacto y sea $\{T_n\}$ un sistema centrado numerable tal que cada T_n es cerrado.

Sabemos que $\cap_{i=1}^{n} T_i \neq \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y además $T_1 \supseteq \cap_{i=1}^{2} T_i \supseteq \cap_{i=1}^{3} T_i \supseteq ...$

Observemos que si todas las intersecciones son distintas, existe $x_n \in \cap_{i=1}^{n} T_i \diagdown T_{n+1}$. Entonces $\{x_n\}$ tiene punto de acumulación digamos x_0.

Afirmación: $x_0 \in \cap_{i=1}^{\infty} T_i = T$.

Supongamos que $x_0 \notin T$. Entonces $x_0 \in V = X \diagdown T_{n_0}$ para alguna $n_0 \in \mathbb{N}$. Como T_{n_0}es cerrado, V es abierto, así que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N \;\; x_n \in V$.

Esto es una contradición ya que si $n > \text{máx}\{n_0, N\}$ se tiene que $x_n \in T_1 \cap ... \cap T_{n_0} \cap ... \cap T_n$, es decir $x_n \in T_{n_0}$ y $x_n \in V$.

Por otra parte, si a partir de cierto momento las intersecciones son iguales también se cumple que $x_0 \in T$. Por tanto , $\cap_{i=1}^{\infty} T_i \neq \emptyset$.

La demostración del regreso se hace por contrapositiva, suponiendo que X no es numerablemente compacto y análogamente a la demostración del teorema anterior se demuestra la existencia de un sistema centrado numerable de conjuntos cerrados de X cuya intersección es vacía. ∎

Hemos visto ya que un espacio compacto es numerablemente compacto, sin embargo no todo numerablemente compacto es compacto.

Para ejemplificar esto necesitaremos las siguientes definiciones:

Definición 78 *Sea X un conjunto no vacío. Una relación $\leq$ en X es un orden parcial si satisface lo siguiente:*

i) $x \leq x$ *para toda* $x \in X$,

ii) si $x \leq y$ *&* $y \leq z$, *entonces* $x \leq z$,

iii) si $x \leq y$ *&* $y \leq x$, *entonces* $x = y$.

Notación 79 *A la pareja* $(X, \leq)$ *se le llama conjunto parcialmente ordenado.*

Definición 80 *Sea* X *un conjunto parcialmente ordenado tal que para todo* $x, y \in X$ *se tiene* $x \leq y$ *o* $y \leq x$. *En este caso se dice que* X *está totalmente ordenado.*

Notación 81 *Dados un conjunto parcialmente ordenado* X, *y un punto* $y \in X$, *denotaremos al subconjunto* $\{x \in X : y < x\}$ *como* $(y, \rightarrow)$ *y al subconjunto* $\{x \in X : x < y\}$ *como* $(\leftarrow, y)$.

Teorema 82 *Sea* X *un conjunto totalmente ordenado y no vacío, entonces el conjunto* $\beta = \{(y, \rightarrow) : y \in X\} \cup \{(\leftarrow, z) : z \in X\} \cup \{(y, z) : y, z \in X\} \cup \{X\}$ *es la base de una topología en* X, *a la que se le llama topología del orden (ver* [3], *pag. 8).*

Definición 83 *A un conjunto totalmente ordenado considerado con la topología del orden se le llama espacio topológico ordenado.*

Teorema 84 *Todo espacio topológico ordenado no vacío es normal.*

Prueba. (ver [3], pag. 10). ■

Definición 85 *Un conjunto* $(A, \leq)$ *es bien ordenado, si y sólo si* $(A, \leq)$ *es un conjunto parcialmente ordenado y todo* $B \subseteq A$ *tiene elemento mínimo.*

Construyamos el conjunto Ω, que nos servirá para construir un ejemplo de un espacio numerablemente compacto que no es compacto.

Recordemos que dado un conjunto A, se define la potencia de A, como el conjunto formado por los subconjuntos de A; y la denotamos como $P(S)$.

Definición 86 *Sea* S *un conjunto y sea* $\mathfrak{C} \subset P(S)$. *Decimos que* $\mathfrak{C}$ *es una cadena si dados* A, $B \in \mathfrak{C}$ *se tiene que* $A \subset B$ *o* $B \subset A$.

Existen varias equivalencias del Axioma de Elección (ver [9], pag. 99), en nuestro trabajo utilizaré las siguientes:

1.- Teorema del Buen Orden: Para todo conjunto hay un Buen Orden

2.-Lema de Zorn: Sea S un conjunto. Si toda cadena de S tiene alguna cota superior en S, entonces existe un elemento maximal en S.

Sea $(X, \leq)$ un conjunto bien ordenado, no numerable.

Sea $p \notin X$. El conjunto $X^* = X \cup \{p\}$ es un conjunto bien ordenado anteponiendo las siguientes condiciones:

i) $p \leq p$.

ii) para todo $x \in X$, se tiene que $x < p$.

Sea $A \subseteq X^*$, entonces $A = \{p\}$ o $A \cap X \neq \emptyset$.

Si $A = \{p\}$, entonces A tiene primer elemento, a saber el mismo p.

Si $A \cap X \neq \emptyset$ y como $A \cap X \subseteq X$, entonces A tiene primer elemento y como $x < p$ para cualquier elemento de X, entonces el primer elemento de $A \cap X$ es el primer elemento de A. Por lo tanto X^* es un conjunto bien ordenado.

Se define como 0 al primer elemento de X^*.

Sea $\omega_1 = \min \{x \in X^* : [0, x] \text{ es no numerable}\}$. Nótese que ω_1 existe debido a la existencia del punto p. Tenemos entonces que $[0, \omega_1]$ también es un conjunto bien ordenado.

Notación 87 *Al conjunto* $[0, \omega_1]$ *lo denotamos con la letra* Ω. *A los elementos de este conjunto se les llama números ordinales.*

Notación 88 *Al conjunto* $[0, \omega_1)$ *lo denotaremos con la letra* Ω_0.

Definición 89 *Sea* X *un espacio topológico ordenado. Diremos que un subconjunto no vacío* A *de* X *está acotado si* A *tiene cota superior y cota inferior.*

Teorema 90 *Sea* X *un espacio topológico ordenado y no vacío, si todo subconjunto acotado superiormente y no vacío* A *de* X *tiene supremo, entonces todo subconjunto acotado inferiormente y no vacío* A *de* X *también tiene ínfimo.*

Prueba. (Ver [3], pag. 19). ■

Definición 91 *Sea* X *un espacio topológico ordenado y no vacío. Diremos que* X *es completo si todo subconjunto acotado superiormente y no vacío de* X *tiene supremo.*

Teorema 92 *Todo conjunto no vacío, acotado superiormente en* Ω_0 *tiene supremo.*

Prueba. Sea $A \subset \Omega_0$, $A \neq \emptyset$ y sea $\mathfrak{C} = \{\gamma \in \Omega_0 : \gamma \text{ es cota superior de } A\}$. Como $\mathfrak{C} \subseteq \Omega_0$, entonces $\mathfrak{C}$ tiene primer elemento, ese es precisamente la cota superior mínima de A. Por lo tanto A tiene supremo. ■

Teorema 93 *Sea* X *un espacio topológico ordenado y no vacío. Entonces,* X *es compacto si y sólo si* X *es acotado y completo.*

Prueba. (Ver [3], pag. 20). ■

Corolario 94 *El conjunto* $[0, \alpha]$ *es compacto, para toda* $\alpha \in \Omega_0$.

Prueba. $[0, \alpha]$ es acotado. Como esta acotado superiormente, entonces tiene supremo. Por lo tanto es compacto. ■

Corolario 95 Ω *es compacto.*

Prueba. Ω es acotado. Dado que todo subconjunto de Ω es el mismo Ω o es subconjunto de Ω_0, entonces tiene supremo, es decir Ω es completo. Por lo tanto es compacto. ■

Teorema 96 *Todo conjunto numerable y no vacío en* Ω_0 *tiene supremo.*

Prueba. Sea $A \subseteq \Omega_0$, $A \neq \emptyset$ y supongamos que A es numerable.

Sea $\alpha \in A$. Observemos primero que el conjunto $[0, \alpha]$ es numerable, de no ser asi, $\omega_1 \leq \alpha$.

Entonces el conjunto $\cup \{[0, \alpha] : \alpha \in A\}$ es numerable.

El conjunto $\Omega_0 \backslash \cup \{[0, \alpha] : \alpha \in A\}$ es numerable y tiene primer elemento, digamos β.

Ahora $\beta \notin \cup \{[0, \alpha] : \alpha \in A\}$, esto quiere decir que $\beta \notin [0, \alpha]$ para toda $\alpha \in A$.

Así $\alpha < \beta$ para toda α, es decir β es cota superior de A. Por lo tanto gracias al Teorema 92, A tiene supremo. ■

Ejemplo 97 Ω_0 *es numerablemente compacto, sin embargo no es compacto.*

Para ver que Ω_0 es numerablemente compacto, por el Lema 76 y el Teorema 77, basta probar que si $\mathfrak{C} = \{C_1, C_2, ...\}$ es una cubierta abierta numerable de Ω_0, entonces $\mathfrak{C}$ tiene una subcubierta finita.

Si no existe una subcubierta finita de $\mathfrak{C}$, entonces para toda $n \in \mathbb{N}$ existe $\alpha_n \notin C_1 \cup C_2 \cup ... \cup C_n$.

Sea $\alpha = \sup \{\alpha_1, \alpha_2, ...\}$. Entonces $\alpha \in \Omega_0$ y no existe subcubierta finita de $\mathfrak{C}$ que cubra al compacto $[0, \alpha]$. Esto es una contradicción, por lo tanto, Ω_0 es numerablemente compacto.

Ahora, dado que Ω_0 es numerable, la cubierta de conjuntos de la forma $[0, \alpha)$, $\alpha \in \Omega_0$ no tiene subcubierta finita. Por lo tanto Ω_0 no es compacto.

Teorema 98 *Sea* X *un espacio topológico segundo numerable. Entonces, los conceptos de compacidad y compacidad numerable coinciden en* X.

Prueba. La primera parte del teorema, ya la hemos demostrado, es decir compacto implica numerablemente compacto (ver Teorema 75).

Asi que bastará con demostrar la segunda parte del teorema.

Supongamos que X es segundo numerable y que X es numerablemente compacto, demostremos la compacidad de X.

Sea $\mathfrak{C} = \{C_i\}_{i\in I}$ una cubierta abierta de X, como es segundo numerable y por el Teorema 47 X es un espacio Lindeloff, así de la cubierta $\mathfrak{C}$ se puede extraer una subcubierta numerable, digamos $\mathfrak{C}'$. Ahora; como X es numerablemente compacto y nuevamente por el Lema 76 y Teorema 77 de $\mathfrak{C}'$ se puede extraer una subcubierta finita. Por lo tanto X es compacto. ∎

Corolario 99 *Todo espacio métrico numerablemente compacto es compacto.*

Prueba. Hemos demostrado ya que todo espacio métrico numerablemente compacto es segundo numerable (ver Corolario 74), y de acuerdo al teorema anterior, también es compacto. ∎

La acotación total no es una condición suficiente para la compacidad, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 100 *El espacio $[0,1]\cap\mathbb{Q}$ con la distancia usual es totamente acotado pero como ya se había visto anteriormente, no es compacto (ver Ejemplo 64).*

Capítulo 4

Producto de Espacios Compactos

Definición 101 *Se dice que Λ es un conjunto dirigido si y sólo si hay una relación $\leq$ en Λ que satisface las siguientes condiciones:*

i) $\lambda \leq \lambda$, para toda $\lambda \in \Lambda$,

ii) si $\lambda_1 \leq \lambda_2$ y $\lambda_2 \leq \lambda_3$, entonces $\lambda_1 \leq \lambda_3$,

iii) si $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$, entonces existe $\lambda_3 \in \Lambda$ tal que $\lambda_1 \leq \lambda_3$ y $\lambda_2 \leq \lambda_3$.

A la relación $\leq$ se le llama dirección de Λ.

Ejemplo 102 *Sea V_x el sistema de vecindades de un punto x en un espacio X y la relación de orden que este dada por $V_1 \leq V_2$, sí y sólo si $V_2 \subset V_1$.*

Veamos que con esta dirección V_x es un conjunto dirigido.

i) Sea $V \in V_x$, como $V \subset V$, entonces $V \leq V$.

ii) Sean $V_1, V_2, V_3 \in V_x$ tales que $V_1 \leq V_2$, $V_2 \leq V_3$, entonces $V_2 \subset V_1$ y $V_3 \subset V_2$, así $V_3 \subset V_1$. Por lo tanto $V_1 \leq V_3$.

iii) Sean $V_1, V_2 \in V_x$ y $V_3 = V_1 \cap V_2$, entonces $V_3 \subset V_1$ y $V_3 \subset V_2$, así $V_1 \leq V_3$ y $V_2 \leq V_3$.

Definición 103 *Una red en un conjunto X es una función $P : \Lambda \to X$, donde Λ es un conjunto dirigido.*

Notación 104 *El punto $P(\lambda)$ se denota por x_λ y denotaremos a la red P en X como $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ o bien $\{x_\lambda\}$.*

Podemos ver que el concepto sucesión es un caso particular tomando a $\Lambda = \mathbb{N}$ que es un conjuntodirigido con el orden usual. Es de esperarse encontrar el concepto de convergencia en redes también como una generalización de tal concepto para sucesiones.

Definición 105 *Sea $\{x_\lambda\}$ una red en X. Decimos que $\{x_\lambda\}$ converge a $x \in X$ si para toda vecindad V de x existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que si $\lambda \geq \lambda_0$, entonces $x_\lambda \in V$.*

En otras palabras, decimos que $\{x_\lambda\}$ converge a x si y sólo si toda vecindad de x contiene una cola de $\{x_\lambda\}$. Frecuentemente se dice: cuando $\{x_\lambda\}$ converge a x, que $\{x_\lambda\}$ está residualmente en toda vecindad de x.

Definición 106 *Decimos que $\{x_\lambda\}$ tiene un punto de acumulación x si y sólo si para toda vecindad V de x y para toda $\lambda_0 \in \Lambda$ existe $\lambda \geq \lambda_0$ tal que $x_\lambda \in V$.*

Ejemplo 107 *Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales, el cual es un conjunto dirigido con el orden usual. En $\mathbb{N}$ cualquier sucesión $\{x_n\}$ es una red.*

Ejemplo 108 *Sea (X, d) un espacio métrico y sea $x_0 \in X$. Consideremos en el conjunto $X \setminus \{x_0\}$. Con la relación $x \leq y$ si y sólo si $d(y, x_0) \leq d(x, x_0)$, el conjunto $X \setminus \{x_0\}$ es un conjunto dirigido.*

En efecto, veamos que se cumplen las tres propiedades que difinen a un conjunto dirigido:

i) Para todo $x \in X \setminus \{x_0\}$ se tiene que $d(x, x_0) = d(x, x_0)$, por lo tanto $x \leq x$.

ii) Sean $x, y, z \in X \setminus \{x_0\}$ tales que $x \leq y$ y $y \leq z$, es decir $d(y, x_0) \leq d(x, x_0)$ y $d(z, x_0) \leq d(y, x_0)$, entonces $d(z, x_0) \leq d(x, x_0)$. Por tanto $x \leq z$.

iii) Para la prueba de este punto consideremos la $B_r(x_0)$, donde
$r = \text{mín}\,\{d(x, x_0), d(y, x_0)\}$, así cualquier punto de esta bola cumple con la propiedad.

Por lo tanto $X \setminus \{x_0\}$ es un conjunto dirigido.

Ejemplo 109 *Sea $f : X \to Y$, donde Y es un espacio métrico. La restricción de f a $X \setminus \{x_0\}$ define una red en Y.*

Definición 110 *Una red $\{x_\lambda\}$ en un conjunto X es una ultrared sí y sólo si para todo $E \subset X$, $\{x_\lambda\}$ esta residualmente en E ó residualmente en $X \setminus E$.*

Si Λ es un conjunto dirigido, $y \in X$; fijo la función $P : \Lambda \to X$, definido por $P(\lambda) = x$ para todo $\lambda \in \Lambda$ es una ultrared en X.

Teorema 111 *Si $\{x_\lambda\}$ es una ultrared en X y $f : X \to Y$ es suprayectiva, entonces$\{f(x_\lambda)\}$ es una ultrared en Y.*

Prueba. Sea $A \subset Y$. Entonces $f^{-1}(A) = X \diagdown f^{-1}(Y \diagdown A)$, así que $X \diagdown f^{-1}(A) = f^{-1}(Y \diagdown A)$.

Como $\{x_\lambda\}$ es una ultrared está residualmente en $f^{-1}(A)$ o bien en $f^{-1}(Y \diagdown A)$ así $\{f(x_\lambda)\}$ está residualmente en A o bien en $Y \diagdown A$. Por lo tanto $\{f(x_\lambda)\}$ es una ultrared en Y. ■

Definición 112 *Un filtro $\mathbb{F}$ en un conjunto S, es una colección no vacía de subconjuntos no vacíos de S con las siguientes propiedades:*

i) si F_1 y $F_2 \in \mathbb{F}$, entonces $F_1 \cap F_2 \in \mathbb{F}$,

ii) si $F \in \mathbb{F}$ y $F \subset F'$, entonces $F' \in \mathbb{F}$.

Definición 113 *Una subcolección $\mathbb{F}_0$ de $\mathbb{F}$ es un filtro base de $\mathbb{F}$ si y sólo si todo elemento de $\mathbb{F}$ contiene algún elemento de $\mathbb{F}_0$.*

Ejemplo 114 *Sea X un conjunto y sea $A \subset X$. Entonces el conjunto $\mathbb{F} = \{F \subset X : A \subset F\}$ es un filtro. Veamoslo:*

i) Sea $F_1, F_2 \in \mathbb{F}$, entonces $A \subset F_1$ y $A \subset F_2$, así $A \subset (F_1 \cap F_2)$. Por lo tanto $F_1 \cap F_2 \in \mathbb{F}$.

ii) Sea $F_1 \in \mathbb{F}$. Supongamos que $F_1 \subset B$, así $A \subset F_1 \subset B$ y se tiene entonces que $A \subset B$.Por lo tanto $B \in \mathbb{F}$. En consecuencia $\mathbb{F}$ es un filtro.

Observación: $\{A\}$ es un filtro base de $\mathbb{F}$.

Ejemplo 115 *Sean X un espacio topológico y $A \subset X$, entonces $\mathbb{F} = \{U \subset X : A \subset U^o\}$ es un filtro en X. Veamos:*

i) Sean F_1, $F_2 \in \mathbb{F}$. Por definición, $A \subset F_1^o$ y $A \subset F_2^o$, entonces $A \subset (F_1^o \cap F_2^o) = (F_1 \cap F_1)^o$. Por lo tanto $F_1 \cap F_2 \in \mathbb{F}$.

ii) Sea $F \in \mathbb{F}$ y sea F' tal que $F \subset F'$.

Como $F^o \subset (F')^{\,o}$ y $A \subset F^o \subset (F')^{\,o}$ se tiene que $F' \in \mathbb{F}$.

Por lo tanto $\mathbb{F}$ es un filtro en X.

Definición 116 *Un filtro $\mathbb{F}$ en un espacio topológico X se dice que converge a x si y sólo si $V_x \subset \mathbb{F}$.*

Definición 117 *Se dice que $\mathbb{F}$ tiene un punto de acumulación x si y sólo si $x \in \cap\{\overline{F} : F \in \mathbb{F}\}$.*

Observación: Si $\mathbb{F}$ converge a x , entonces x es un punto de acumulación de $\mathbb{F}$.

La Razón es la siguiente:

Sea $F \in \mathbb{F}$ y sea V vecindad de x, como $V \in \mathbb{F}$ entonces $V \cap F \neq \emptyset$, para todo $F \in \mathbb{F}$. Así $x \in \overline{F}$, para todo $F \in \mathbb{F}$. Por lo tanto x es un punto de acumulación de $\mathbb{F}$.

Definición 118 *Un filtro $\mathbb{F}$ es un ultrafiltro si es maximal respecto a la contención.*

Teorema 119 *Un filtro $\mathbb{F}$ en X es un ultrafiltro si y sólo si para todo $A \subset X$, se tiene que $A \in \mathbb{F}$ o bien $X \diagdown A \in \mathbb{F}$.*

Prueba. Sean $A \subset X$ y $\mathbb{F}$ un ultrafiltro en X.

Supongamos que A y $X \backslash A$ no son elementos de $\mathbb{F}$.

Si $A \cap F \neq \emptyset$ para todo $F \in \mathbb{F}$, entonces el conjunto $\mathfrak{D} = \{A \cap F : F \in \mathbb{F}\}$ es una base para algún filtro $\mathbb{F}'$.

Como $A \cap F \in \mathbb{F}'$ y $A \cap F \subset A$, entonces $A \in \mathbb{F}'$. Dado que $A \notin \mathbb{F}$ se tiene que $\mathbb{F}'$ es más fino que $\mathbb{F}$ lo cual es una contradicción, pues $\mathbb{F}$ es un ultrafiltro.

Supongamos ahora que $A \cap F_1 = \emptyset$ para algún $F_1 \in \mathbb{F}$ y que $(X \backslash A) \cap F_2 = \emptyset$ para algún $F_2 \in \mathbb{F}$.

Entonces $F_1 \cap F_2 = ((F_1 \cap F_2) \cap A) \cup ((F_1 \cap F_2) \cap (X \backslash A)) \subset (F_1 \cap A) \cup (F_2 \cap (X \backslash A)) = \emptyset$ que es una contradicción ya que F_1 y $F_2 \in \mathbb{F}$. Así que $(X \backslash A) \cap F \neq \emptyset$ para toda $F \in \mathbb{F}$.

Consideremos nuevamente como en el caso anterior el conjunto $\mathfrak{D} = \{(X \backslash A) \cap F : F \in \mathbb{F}\}$ que es base para algún filtro $\mathbb{F}'$ en X mas fino que $\mathbb{F}$ ya que $(X \backslash A) \in \mathbb{F}'$ y no en $\mathbb{F}$. Por lo tanto $A \in \mathbb{F}$ o bien $(X \backslash A) \in \mathbb{F}$.

Supongamos ahora que $A \in \mathbb{F}$ o $(X \backslash A) \in \mathbb{F}$ para todo $A \subset X$. Veremos que $\mathbb{F}$ es un ultrafiltro.

Si $\mathbb{F}'$ un filtro más fino que $\mathbb{F}$ entonces hay algun conjunto $A \in \mathbb{F}'$ tal que $A \notin \mathbb{F}$.

Así por hipótesis $(X \backslash A) \in \mathbb{F}$ y como $\mathbb{F} \subset \mathbb{F}'$ se tiene que $(X \backslash A) \in \mathbb{F}'$ lo cual es una contradicción pues $A \cap (X \backslash A) = \emptyset$. Por lo tanto $\mathbb{F}$ es un ultrafiltro. ■

Teorema 120 *Todo filtro $\mathbb{F}$ esta contenido en algún ultrafiltro.*

Prueba. Sean $\mathbb{F}$ un filtro y $\mathfrak{L}$ la colección de todos los filtros que contienen a $\mathbb{F}$ y dotémoslo del siguiente orden parcial: decimos que $\mathbb{F}_1 \leq \mathbb{F}_2$ si y sólo si $\mathbb{F}_1 \subset \mathbb{F}_2$.

Consideremos una cadena $\mathfrak{C} = \{\mathbb{F}_i : i \in I\}$. Entonces $\cup_{i \in I} \mathbb{F}_i$ es una cota superior para la cadena.

Veamos que $\cup_{i \in I} \mathbb{F}_i$ es un filtro.

Sean F_1, $F_2 \in \cup_{i\in I}\mathbb{F}_i$. Por definición $F_1 \in \mathbb{F}_i$ y $F_2 \in \mathbb{F}_j$, para algunos $i, j \in I$. Como $\mathfrak{C}$ es una cadena; suponemos sin pérdida de generalidad que $\mathbb{F}_i \subset \mathbb{F}_j$. Entonces $F_1 \in \mathbb{F}_j$. Por lo tanto, $F_1 \cap F_2 \in \mathbb{F}_j$. Así $F_1 \cap F_2 \in \cup_{i\in I}\mathbb{F}_i$.

Sea $F \in \cup\mathbb{F}_i$ y sea B tal que $F \subset B$. Como $F \in \mathbb{F}_i$ para alguna $i \in I$ y $F \subset B$, entonces $B \in \mathbb{F}_i$. Por lo tanto $B \in \cup_{i\in I}\mathbb{F}_i$. Por lo tanto $\cup\mathbb{F}_i$ es un filtro. De aquí que la cadena $\mathfrak{C}$ tiene un elemento maximal el cual contiene al filtro $\mathbb{F}$. Así pues, por el Lema de Zorn, podemos concluir que el filtro $\mathbb{F}$ está contenido en algún ultrafiltro. ■

Definición 121 *Si $\{x_\lambda\}$ es una red en X, el filtro generado por $\{x_\lambda\}$ consiste de los conjuntos: $B_{\lambda_0} = \{x_\lambda : \lambda \geq \lambda_0,\ \lambda_0 \in \Lambda\}$.*

Definición 122 *Si $\mathbb{F}$ es un filtro en X, sea $\Lambda_{\mathbb{F}} = \{(x, F) : x \in F \in \mathbb{F}\}$. Notemos que $\Lambda_{\mathbb{F}}$ es un conjunto dirigido con la relación $(x_1, F_1) \leq (x_2, F_2)$ si y sólo si $F_2 \subset F_1$. La función dada por $P(x, F) = x$ es una red en X llamada frecuentemente la red base de $\mathbb{F}$.*

Teorema 123 *Para todo espacio topológico X las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) X es compacto,

ii) toda familia de subconjuntos cerrados de X con la propiedad de la intersección finita tiene intersección no vacía,

iii) todo filtro en X tiene un punto de acumulación,

iv) toda red en X tiene un punto de acumulación,

v) toda ultrared en X converge,

vi) todo ultrafiltro en X converge.

Prueba. $i) \Rightarrow ii)$

Ver Teorema 54.

$ii) \Rightarrow iii)$

Sea $\mathbb{F}$ un filtro en X.

Como $\cap_{i=1}^{n} F_{\alpha_i} \neq \emptyset$, entonces $\cap_{i=1}^{n} \overline{F}_{\alpha_i} \neq \emptyset$ para toda i, es decir $\{\overline{F} : F \in \mathbb{F}\}$ tiene la propiedad de la intersección finita. Así $\cap_{\alpha\in I}\overline{F}_\alpha \neq \emptyset$. Por lo tanto $\mathbb{F}$ tiene un punto de acumulación.

$iii) \Rightarrow iv)$

Sean $\{x_\lambda\}$ una red en X y $\mathbb{F}$ el filtro generado por $\{x_\lambda\}$. Por hipótesis $\mathbb{F}$ tiene un punto de acumulación, digamos x_0.

Afimación: x_0 es un punto de acumulación de la red $\{x_\lambda\}$.

Sea $\lambda_0 \in \Lambda$ y U abierto de X tal que $x_0 \in U$. Como $x_0 \in \overline{B}_{\lambda_0}$, entonces $U \cap B_{\lambda_0} \neq \emptyset$, así existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $x_\lambda \in U$ y $\lambda \geq \lambda_0$. Por lo tanto x_0 es un punto de acumulación de $\{x_\lambda\}$.

$iv) \Rightarrow v)$

Sea $\{x_\lambda\}$ una ultrared en X. Entonces $\{x_\lambda\}$ tiene un punto de acumulación, digamos x_0.

Afirmación: $\{x_\lambda\}$ converge a x_0.

Sea U abierto de X tal que $x_0 \in U$. Supongamos que $\{x_\lambda\}$ esta residualmente en $X \diagdown U$, entonces existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que si $\lambda \geq \lambda_0$, entonces $x_\lambda \in X \diagdown U$. Como x_0 es un punto de acumulación de $\{x_\lambda\}$, para λ_0 existe $\lambda \geq \lambda_0$ tal que $x_\lambda \in U$, lo cual es una contradicción. Así $\{x_\lambda\}$ está residualmente en U. Por lo tanto la red converge a x_0.

$v) \Rightarrow vi)$

Sea $\mathbb{F}$ un ultrafiltro en X y sea P la red base de $\mathbb{F}$.

Afirmación: P es una ultrared.

Sea $E \subset X$. Como $\mathbb{F}$ es un ultrafiltro $E \in \mathbb{F}$ ó $X \diagdown E \in \mathbb{F}$.

Sin pérdida de generalidad supongamos que $E \in \mathbb{F}$. Sean $p \in E$ y $(q, F) \geq (p, E)$, entonces $P(q, F) = q \in F \subset E$, así $q \in E$. Por lo tanto P está residualmente en E. De aquí que P es una ultrared. Tenemos entonces que P converge a un punto $x_0 \in X$.

Sea U vecindad de x_0, entonces existe $(p_0, F_0) \in \Lambda_{\mathbb{F}}$ tal que si $(p, F) \geq (p_0, F_0)$, se tiene que $p \in U$.

Afirmación: $F_0 \subset U$.

Supongamos que existe $q \in F_0 \diagdown U$. Como $(q, F_0) \geq (p_0, F_0)$, entonces $q \in U$, pero esto es una contradicción. Así $F_0 \subset U$, de aquí que $U \in .\mathbb{F}$. Por lo tanto $\mathbb{F}$ converge a x_0.

$vi) \Rightarrow i)$

Sea $\mathbb{C} = \{C_i : i \in I\}$ una cubierta abierta de X. Supongamos que cualquier subcubierta finita de $\mathbb{C}$ no cubre a X, es decir: $X \diagdown \{C_{i_1} \cup C_{i_2} \cup ... \cup C_{i_n}\} \neq \emptyset$ para toda n.

Afirmación: La colección de conjuntos de la forma $X \diagdown (C_1 \cup C_2 \cup ... \cup C_n)$ son una base para algún filtro $\mathbb{F}$ en X.

Sean $A = X \diagdown (C_1 \cup C_2 \cup ... \cup C_n)$ y $B = X \diagdown (C_1' \cup C_2' \cup ... \cup C_k')$. Entonces
$A \cap B = X \diagdown (C_1 \cup C_2 \cup ... \cup C_n \cup C_1' \cup C_2' \cup ... \cup C_k')$.

Entonces $\mathbb{F} \subset \mathbb{F}^*$ donde $\mathbb{F}^*$ es un ultrafiltro y $\mathbb{F}^*$ converge a x_0 para algún $x_0 \in X$.

Como $\mathbb{C}$ es cubierta, $x_0 \in C$ para algún $C \in \mathbb{C}$, así $C \in \mathbb{F}^*$. Además $X \diagdown C \in \mathbb{F} \subset \mathbb{F}^*$, entonces $\emptyset \in \mathbb{F}^*$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto X es compacto. ■

Definición 124 *Sean $X_1, X_2, ..., X_n$ espacios topológicos. La topología producto del* *conjunto* $\Pi_{i=1}^{n} X_i$ *es la que tiene como base a todos los conjuntos de la forma* $\Pi_{i=1}^{n} U_i$, *donde* U_i *es un abierto de* X_i, *para* $i = 1, ..., n$.

Definición 125 *Si* $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ *es una familia infinita de espacios topológicos. La topología producto del conjunto* $\Pi_\alpha X_\alpha$ *es la que tiene como base a todos los conjuntos de la forma* $\Pi_\alpha U_\alpha$, *donde* U_α *es abierto de* X_α, *para cada* $\alpha \in I$.

Definición 126 *La topología de Tychonoff o topología producto en* $\Pi_\alpha X_\alpha$ *tiene como base para los conjuntos abiertos a los conjuntos de la forma* $\Pi_\alpha U_\alpha$ *donde*

i) U_α *es abierto en* X_α *para toda* $\alpha \in I$,

ii) $U_\alpha = X_\alpha$, *excepto para un número finito de coordenadas* α.

Teorema 127 *Una red* $\{x_\lambda\}$ *en un producto* $\Pi_\alpha X_\alpha$ *converge a* x *si y sólo si para toda* α *se tiene que* $\pi_\alpha(x_\lambda)$ *converge a* $\pi_\alpha(x)$ *en* X_α.

Prueba. Ver [7], pag. 76. ■

Definición 128 *Si* X, Y *son espacios topológicos y* $f : X \to Y$, *decimos que* f *es abierta (cerrada) si y sólo si para todo conjunto* A *abierto (cerrado) en* X, $f(A)$ *es abierto (cerrado) en* Y.

Definición 129 *La funcion* $\pi_\beta : \Pi_\alpha X_\alpha \to X_\beta$, *definida por* $\pi_\beta(x) = x_\beta$, *es decir la* $\beta -$ *ésima coordenada, se le llama la función proyección de* $\Pi_\alpha X_\alpha$ *en* X_β.

Teorema 130 *La proyección* $\pi_\beta : \Pi_\alpha X_\alpha \to X_\beta$ *es continua y abierta.*

Prueba. Veamos que la proyección es continua. Sea U_β abierto en X_β, entonces $\pi_\beta^{-1}(U_\beta) = \Pi_\alpha V_\alpha$, donde $V_\alpha = X_\alpha$ para $\alpha \neq \beta$ y $V_\beta = U_\beta$.Así $\pi_\beta^{-1}(U_\beta)$ es abierto en $\Pi_\alpha X_\alpha$. Por lo tanto π_β es continua.

Demostremos ahora que es abierta:

Sean A abierto en $\Pi_\alpha X_\alpha$ y $x \in \pi_\beta(A)$, entonces existe $z \in A$ tal que $\pi_\beta(z) = x$. Ahora, existe un básico $\Pi_\alpha U_\alpha$ en el producto tal que $z \in \Pi_\alpha U_\alpha \subset A$, así $x \in \pi_\beta(\Pi_\alpha U_\alpha) \subset \pi_\beta(A)$. Como π_β es continua $\pi_\beta(\Pi_\alpha U_\alpha)$ es abierto. Por lo tanto $\pi_\beta(A)$ es abierto en X_β. ■

Lema 131 *Sean* X, Y *espacios topológicos, sean* $y \in Y$ *y* $A \subset X$ *compacto. Entonces para todo* $W \subset X \times Y$, W *abierto tal que* $A \times \{y\} \subset W$ *existen* $U \subset X$ *y* $V \subset Y$ *tales que* $A \times \{y\} \subset U \times V \subset W$.

Prueba. Sea W abierto tal que $A \times \{y\} \subset W$, y sea $x \in A$.

Como W es abierto la pareja (x, y) tiene una vecindad de la forma $U_x \times V_x$ tal que $(x, y) \in U_x \times V_x \subset W$, donde $U_x \subset X$ y $V_x \subset Y$.

Así $A \times \{y\} \subset \cup_{x \in A} U_x \times V_x$.

Notemos que la familia $\{U_x : x \in A\}$ es una cubierta abierta de A y como A es compacto existen $\{x_1, x_2, ..., x_k\}$ tales que $A \times \{y\} \subset \cup_{i=1}^{k} U_{x_i} \times V_{x_i}$.

Sea $U = \cup_{i=1}^{k} U_{x_i}$, entonces U es abierto pues es unión de abiertos.

Sea $V = \cap_{i=1}^{k} V_{x_i}$. V es abierto ya que es intersección finita de abiertos.

Ahora $A \subset U$ pues U es cubierta de A y también se cumple que $y \in V$ ya que $y \in V_{x_i}$ para toda $i = 1, 2, ..., k$, entonces $A \times \{y\} \subset U \times V$ y además $U \times V \subset W$. ■

El lema anterior, se puede generalizar de la siguiente forma:

Teorema 132 *Sean X, Y espacios topológicos, sean $A \subset X$ y $B \subset Y$ compactos. Entonces para todo $W \subset X \times Y$ abierto tal que $A \times B \subset W$ existen $U \subset X$ y $V \subset Y$ abiertos tales que $A \times B \subset U \times V \subset W$.*

Prueba. Sea $y_0 \in B$. Por el lema anterior sabemos que existen U'_{y_0}, V'_{y_0} abiertos tales que $A \times \{y_0\} \subset U'_{y_0} \times V'_{y_0} \subset W$.

Notemos que $\left\{U'_y\right\}_{y \in B}$ y $\left\{V'_y\right\}_{y \in B}$ son cubiertas abiertas de A y B respectivamente. Como A y B son compactos existen $\{y_1, y_2, ..., y_k\}$ y $\{y'_1, y'_2, ..., y'_n\}$ tales que $\left\{U'_{y_i}\right\}, i = 1, ..., k$ y $\left\{V'_{y_i}\right\}, j = 1, ..., n$.

son subcubiertas finitas de A y B respectivamente.

Sean $U = \cap_{i=1}^{k} U'_{y_i}$, $V = \cup_{j=1}^{n} V'_{y_j}$ abiertos.

Veamos que $A \times B \subset U \times V \subset W$.

Sea $(x, y) \in A \times B$. Como $y \in B$ y $\left\{V'_{y_j}\right\}$ es cubierta de B, entonces $y \in V'_{y_j}$ para alguna $j \in \{1, ..., n\}$, Así $(x, y) \in U \times V$ pues $x \in U'_y$ para toda $y \in B$. Por lo tanto $A \times B \subset U \times V$.

Ahora, si $(x, y) \in U \times V$, entonces $y \in V'_{y_j}$ para alguna $j \in \{1, ..., n\}$, así que $(x, y) \in U'_{y_j} \times V'_{y_j} \subset W$. Por lo tanto $U \times V \subset W$. ■

Veamos un ejemplo de un espacio que no es normal.

Ejemplo 133 *Si X es la Linea de Sorgenfrey, $X \times X$ no es un espacio normal.*

La diagonal $L = \{(x, y) : y = -x\}$ es cerrado en $X \times X$ y con la topología relativa es discreto. $F = \{(x, -x) : x \in \mathbb{Q}\}$ y su complemento $L - F$ son cerrados ajenos en X y son tales que no se pueden separar, ya que cualquier abierto que contenga a F necesariamente tiene intersección no vacia con $L - F$ (ver [5], pag. 100).

Teorema 134 *Para todo espacio Hausdorff son equivalentes las siguientes proposiciones:*

a) X es compacto,

b) para todo Y la proyección $\pi : X \times Y \to Y$ es cerrada,

c) para todo Y normal la proyección $\pi : X \times Y \to Y$ es cerrada.

Prueba. *a)* $\Rightarrow$ *b)*

Supongamos que X es compacto y veamos que la proyección $\pi : X \times Y \to Y$ es cerrada.

Sea $F \subset X \times Y$ cerrado, demostremos que el complemento de $\pi(F)$ es abierto.

Sea $y \in Y \diagdown \pi(F)$, entonces $X \times \{y\} \subset (X \times Y) \diagdown F$. Como F es cerrado, $(X \times Y) \diagdown F$ es abierto, así por el lema anterior existen U y V abiertos de X e Y respectivamente tales que $X \times \{y\} \subset U \times V \subset (X \times Y) \diagdown F$; $y \in V$ entonces $X \times V \subset (X \times Y) \diagdown F$ asi que $(X \times V) \cap F = \emptyset$ entonces $\pi(F) \cap V = \emptyset$.Por lo tanto $\pi(F)$ es cerrado en Y.

b) $\Rightarrow$ *c)*

Si para todo Y la proyección $\pi : X \times Y \to Y$ es cerrada, en particular esto pasa cuando Y es normal.

c) $\Rightarrow$ *a)*

Sean X espacio topológico, supongamos que para todo Y normal la proyección $\pi : X \times Y \to Y$ es cerrada, demostremos que X es necesariamente compacto.

Sea $\{F_s\}_{s \in S}$ una familia de cerrados en X con la propiedad de la intersección finita y tal que $\cap_{s \in S} F_s = \emptyset$.

Sea $y_0 \notin X$, consideremos $Y = X \cup \{y_0\}$ y dotemos a Y de la topología que consiste en todos los subconjuntos de X y todos los conjuntos de la forma $\{y_0\} \cup (F_{s_1} \cap F_{s_2} \cap ... \cap F_{s_n}) \cup K$ donde $s_i \in S$, $i = 1, ..., n$ y $K \subset X$.

Veamos que Y es un espacio T_1.

Sea $z \in X$. Entonces $Y \diagdown \{z\} = (X \cup \{y_0\}) \diagdown \{z\} = (X \diagdown \{z\}) \cup \{y_0\} = \{y_0\} \cup (X \diagdown \{z\})$. Ahora como $\cap_{s \in S} F_s = \emptyset$ entonces $z \notin \cap_{s \in S} F_s$, así existe $s_0 \in S$ tal que $z \notin F_{s_0}$, entonces $F_{s_0} \subset X \diagdown \{z\}$.

Así $Y \diagdown \{z\} = \{y_0\} \cup F_{s_0} \cup (X \diagdown \{z\}) \diagdown F_{s_0}$, por lo tanto $\{z\}$ es cerrado. Luego Y es un espacio T_1.

Veamos que Y es un espacio T_4.

Sean R y R' dos subconjuntos de Y cerrados ajenos.

Supongamos que $y_0 \in R$, entonces R' es abierto ya que es un subconjunto de X.

Así R' es un conjunto cerrado y abierto, entonces $Y \diagdown R'$ es abierto pues es el complemento de un cerrado y además $R \subset Y \setminus R'$ y $R' \cap (Y \setminus R') = \emptyset$. Por lo tanto, Y es un espacio normal.

Por otra parte, como X tiene la propiedad $c)$ la proyección $\pi(F)$ (donde F es la cerradura del conjunto $\{(x,x) : x \in X\} \subset X \times Y$) es cerrada en Y y $X \subset \pi(F)$. Además $y_0 \in \pi(F)$ ya que $y_0 \in \overline{X} = Y$, así existe un punto $x_0 \in X$ tal que $(x_0, y_0) \in F$.

Para toda vecindad U de x_0 y toda $s \in S$ se tiene que $[U \times (\{y_0\} \cup F_s)] \cap \{(x,x) : x \in X\} \neq \emptyset$, es decir, $U \cap F_s \neq \emptyset$. Esto prueba que $x_0 \in F_s$ para toda $s \in S$, así que $\cap_{s \in S} F_s \neq \emptyset$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto X es compacto. ■

Corolario 135 *El producto de un número finito de espacios compactos es compacto.*

Prueba. Sean $X_1, ..., X_k$ espacios compactos y Y un espacio topológico.

Consideremos las siguientes proyecciones:

$p_1 : X_1 \times X_2 \times ... \times X_k \times Y \rightarrow X_2 \times X_3 \times ... \times X_k \times Y$

$p_2 : X_2 \times X_3 \times ... \times X_k \times Y \rightarrow X_3 \times X_4 \times ... \times X_k \times Y$

....

$p_k : X_k \times Y \rightarrow Y$

Cada proyección es cerrada dado que cada X_i es compacto para cada $i = 1, 2, ..., k$.

Así la composición $p = p_k \circ p_{k-1} \circ ... \circ p_1 : X_1 \times X_2 \times ... \times X_k \times Y \rightarrow Y$ es cerrada. Por lo tanto el producto $X_1 \times X_2 \times ... \times X_k$ es compacto. ■

Teorema 136 *(Tychonoff)*

El producto no vacío de espacios es compacto si y sólo si cada espacio factor es compacto.

Prueba. La proyección $\pi_\beta : \Pi X_\alpha \rightarrow X_\beta$ es continua y suprayectiva, entonces X_β es compacto.

Inversamente, supongamos que $\{X_\alpha\}$ es una familia de espacios compactos tales que $X_\alpha \neq \emptyset$ para toda α.

Veamos que ΠX_α es compacto.

Sea $\{x_\lambda\}$ una ultrared en ΠX_α, entonces $\{\pi_\beta(x_\lambda)\}$ es una ultrared en X_β y como X_β es compacto la ultrared anterior converge en X_β. Entonces po el Teorema 127 $\{x_\lambda\}$ converge en ΠX_α. Por lo tanto el producto es compacto. ■

Capítulo 5

Teorema de Arzela

Teorema 137 *Un espacio métrico X es compacto si y sólo si*

i) X es totalmente acotado.

ii) X es completo.

Prueba. Supongamos que X es un espacio métrico compacto. Entonces X es numerablemente compacto, así X es totalmente acotado.

Demostremos que X es completo.

Sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy en X y supongamos que no converge, esto quiere decir que $\{x_n\}$ no tiene puntos de acumulación en X, esto es una contradicción ya que X es numerablemente compacto.Por lo tanto X es completo.

Demostremos ahora el regreso del teorema.

Supongamos que X es un espacio métrico totalmente acotado y completo y demostremos que X es compacto.

Probaremos que X es numerablemente compacto.

Sea $\{x_n\} \subseteq X$. Por ser X totalmente acotado existe un número finito de bolas cerradas de radio 1 que cubren a X, como$\{x_n\}$ es numerable existe una de estas bolas que contiene una infinidad de elementos de la sucesión, llamémosle B_1 a esta bola. Ahora como B_1 también es totalmente acotado existe un número finito de bolas de radio $\frac{1}{2}$ tales que cubren a B_1, nuevamente alguna de esas bolas contiene una infinidad de elementos de la sucesión, llamémosle B_2. nuevamente podemos cubrir a B_2 con número finito de bolas cerradas de radio $\frac{1}{4}$ y podemos elegir a B_3 tal que contiene una infinidad de elementos de la sucesión. Si continuamos con este procedimiento contruimos una sucesión de bolas cerradas $\{B_n\}$. Ahora para cada B_n elijamos una bola cerrada V_n con radio dos veces el radio de B_n y con centro en el mismo punto.

Por construcción $V_n \supseteq V_{n+1}$ para toda $n \in \mathbb{N}$, ya que si $y \in V_{n+1}$ y z_{n+1}, z_n son el centro de V_{n+1} y V_n respectivamente, y r_n y r_{n+1} los radios de B_n y B_{n+1}, se cumple

$d(y, z_n) \leq d(y, z_{n+1}) + d(z_{n+1}, z_n) = 2(r_{n+1}) + r_n = 2r_n$.

Así $y \in V_n$. Por lo tanto $V_n \supseteq V_{n+1}$.

Ahora como X es completo se tiene que $\cap_{i=1}^{\infty} V_i \neq \emptyset$ y consta de un solo punto, digamos z_0, y además $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$, así X es numerablemente compacto y por lo tanto compacto. ∎

Definición 138 *Sea X un espacio métrico y $M \subseteq X$, decimos que M es relativamente compacto si $\overline{M}$ es compacto.*

Teorema 139 *Sea X un espacio métrico completo, $M \subseteq X$ es relativamente compacto si y sólo si M es totalmente acotado.*

Prueba. Supongamos que M es relativamente compacto.

Así $\overline{M}$ es compacto y por el teorema anterior $\overline{M}$ es totalmente acotado, sabemos que $M \subseteq \overline{M}$. Por lo tanto M es totalmente acotado.

Demostremos el regreso.

Supongamos que M es totalmente acotado.

Sabemos que $\overline{M}$ es totalmente acotado y como es subconjunto de un espacio completo entonces también $\overline{M}$ es completo (ver [4], pag. 114). Por lo tanto $\overline{M}$ es compacto. ∎

Definición 140 *Sea Φ una familia de funciones definidas sobre $[a, b]$, se dice que Φ es equiacotada cuando existe K tal que $| \varphi(x) | < K$ para toda $x \in [a, b]$ y para toda $\varphi \in \Phi$.*

Definición 141 *Una famila de fuciones Φ se dice equicontinua si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $| \varphi(x_1) - \varphi(x_2) | < \varepsilon$ para todo $\varphi \in \Phi$ y todo $x_1, x_2 \in [a, b]$ tales que $d(x_1, x_2) < \delta$*

El siguiente teorema, nos da un criterio más que se utiliza para determinar la compacidad en un espacio métrico particular.

Teorema 142 *(Arzelá)*

Una familia Φ de fuciones continuas, definidas sobre $[a, b]$ es relativamente compacta en $C_{[a,b]}$ si y sólo si es equiacotada y equicontinua.

Prueba. Supongamos que Φ es una familia de funciones relativamente compacta en $C_{[a,b]}$.

Veremos que Φ es equiacotada y equicontinua.

Como Φ es relativamente compacta, entonces Φ es totalmente acotada, es decir, para toda $\varepsilon > 0$ existe una $\frac{\varepsilon}{3} - red$ finta, digamos $\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$.

Ahora, como cada φ_i es continua sobre $[a, b]$, entonces φ_i es acotada para toda $i = 1, 2, 3, ..., n$. Así existen $K_1, K_2, K_3, ..., K_n$ tales que $|\varphi_i(x)| < K_i$ para toda $i = 1, 2, 3, ..., n$.

Sea $K = \text{máx}\left\{K_1 + \frac{\varepsilon}{3}, K_2 + \frac{\varepsilon}{3}, ..., K_n + \frac{\varepsilon}{3}\right\}$

Como $\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$ es una $\frac{\varepsilon}{3} - red$ se tiene que $|\varphi(x) - \varphi_i(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ y por la desigualdad del triángulo se tiene la siguiente desigualdad:

$||\varphi(x)| - |\varphi_i(x)|| \leq |\varphi(x) - \varphi_i(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

Así $-\frac{\varepsilon}{3} \leq |\varphi(x)| - |\varphi_i(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$, entonces $|\varphi(x)| \leq |\varphi_i(x)| + \frac{\varepsilon}{3} \leq K_i + \frac{\varepsilon}{3} \leq K$.

Por lo tanto Φ es una familia equiacotada.

Demostremos ahora que Φ es equicontinua.

Sabemos que cada elemento de la $\frac{\varepsilon}{3} - red$ es uniformemente continua sobre $[a, b]$ ya que son continuas sobre $[a, b]$. Entonces existen $\{\delta_1, \delta_2, ...\delta_n\}$ mayores que cero tales que $|\varphi_i(x_1) - \varphi_i(x_2)| < \frac{\varepsilon}{3}$ si $|x_1 - x_2| < \delta_i$ para $i = 1, 2, ..., n$.

Sea $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n\}$

Supongamos que $|x_1 - x_2| < \delta$ y sea $\varphi \in \Phi$, entonces existe φ_i tal que

$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| = |\varphi(x_1) - \varphi(x_1)| + |\varphi_i(x_1) - \varphi_i(x_2)| + |\varphi_i(x_2) - \varphi(x_2)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$

Por lo tanto Φ es equicontinua.

Demostremos ahora el regreso del teorema.

Sea Φ una familia de funciones equiacotada y equicontinua.

Demostraremos que Φ es relativamente compacta viendo que es totalmente acotada (ver Teorema anterior).

Por ser Φ equiacotada existe K tal que $|\varphi(x)| \leq K$ para toda $\varphi \in \Phi$ y como Φ es equicontinua, para $\delta > 0$ se tiene que $|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| < \frac{\varepsilon}{3}$ siempre que $|x_1 - x_2| < \delta$ para toda $\varphi \in \Phi$.

Sea $a = x_1 < x_2 < ....x_n = b$ una partición finita del intervalo $[a, b]$ tal que $|x_i - x_j| < \delta$ y $-K = y_1 < y_2 < ... < y_n = K$ una partición del intervalo $[-K, K]$ de tal forma que los intervalos $[y_i - y_j] < \frac{\varepsilon}{5}$ y cuadriculemos el rectángulo $[a, b]\text{x}[-K, K]$ tomando las particiones anteriores como base. A cada función $\varphi \in \Phi$ se le asigna la función poligonal $q(x)$ que tiene vertices en los puntos (x_i, y_j) y tales que $|\varphi(x_i) - q(x_i)| < \frac{\varepsilon}{5}$.

Así se cuplen las siguientes desigualdades.

$|\varphi(x_i) - q(x_i)| \lneqq \frac{\varepsilon}{5}$ y $|\varphi(x_{i+1}) - q(x_{i+1})| < \frac{\varepsilon}{5}$, y por ser Φ equicontinua se cumple $|\varphi(x_i) - \varphi(x_{i+1})| < \frac{\varepsilon}{5}$.

Entonces por la desigualdad del triángulo

$|q(x_i) - q(x_{i+1})| = |q(x_i) - \varphi(x_i) + \varphi(x_i) - \varphi(x_{i+1}) + \varphi(x_{i+1}) - q(x_{i+1})| \leq$
$|q(x_i) - \varphi(x_i)| + |\varphi(x_i) - \varphi(x_{i+1})| + |\varphi(x_{i+1}) - q(x_{i+1})| < \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} = \frac{3\varepsilon}{5}$.

Sea $x \in [a, b]$ y sea x_i un elemento de la partición tal que $x_i < x$ y si $x_j < x$, entonces $x_j < x_i$, así que se tiene la siguiente desigualdad

$|\varphi(x) - q(x)| = |\varphi(x) - \varphi(x_i) + \varphi(x_i) - q(x_i) + q(x_i) - q(x)| \leq |\varphi(x) - \varphi(x_i)| + |\varphi(x_i) - q(x_i)| + |q(x_i) - q(x)| < \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{3\varepsilon}{5} = \varepsilon$

Así $\{q(x)\}$ es una $\varepsilon - red$ finita de Φ. Por lo tanto Φ es totalmente acotado. ■

Capítulo 6

Espacios Localmente Compactos

En este capítulo abordaré algunos resultados sobre espacios que se comportan localmente como espacios compactos.

Definición 143 *Decimos que un espacio topológico X es localmente compacto si cada punto en X está contenido en una vecindad compacta.*

Es decir si para todo $x \in X$, existe un conjunto K compacto y un conjunto A abierto tales que $x \in A \subset K$ ó bien si $x \in K^o$.

Ejemplo 144 *$\mathbb{R}$ es un espacio localmente compacto.*

En efecto ya que siempre se cumple para todo $x \in \mathbb{R}$ y $a < x < b$, $x \in (a, b) \subset [a, b]$.

Ejemplo 145 *En general para toda $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^n$ es un espacio localmente compacto, ya que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $\varepsilon > 0$ se tiene que $x \in B_\varepsilon(x) \subset \overline{B}_\varepsilon(x)$.*

Ejemplo 146 *Cualquier espacio discreto es localmente compacto.*

Veamos un ejemplo de un espacio que no es localmente compacto.

Ejemplo 147 *$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, no es localmente compacto.*

Supongamos que si lo es, entonces para todo $p \in \mathbb{Q}$, existe K compacto tal que $p \in K^o \subset K \subset \mathbb{Q}$. Entonces K es compacto en $\mathbb{R}$. (ver Teorema 60)

Por ser p un punto interior de K, existe V vecindad de p tal que $p \in V \subset K^o$. Pero cualquier punto de $V \setminus \mathbb{Q}$ es un punto de acumulación de K que no es elemento de K, así K no es cerrado, lo cual es una contradicción ya que K es compacto en $\mathbb{R}$ y todo compacto es cerrado en $\mathbb{R}$.

Teorema 148 *Todo subconjunto cerrado de un espacio X localmente compacto es localmente compacto.*

Prueba. Sea $K \subset X$, K cerrado.

Demostremos que K es localmente compacto.

Sea $x \in K$, como X es localmente compacto existen R compacto y A abierto tal que $x \in A \subset R$.

Observemos que $A \cap K$ es abierto en K.

$R \cap K \subset R$ es cerrado y como es subconjunto de un compacto, también es compacto y se cumple que

$x \in A \cap K \subset R \cap K$ por lo tanto K es localmente compacto. ■

Ejemplo 149 $[a, b] \subset \mathbb{R}$ *es localmente compacto.*

Teorema 150 *Sea X un espacio topológico compacto, entonces X es localmente compacto.*

Prueba. El espacio total X es vecindad abierta de cada uno de sus puntos, es decir

Para todo $x \in X$ se tiene que $x \in X \subset X$. Por lo tanto X es localmente compacto. ■

Sin embargo el regreso del teorema anterior no se cumple ya que existen espacios localmente compactos que no son compactos.

Ejemplo 151 *El espacio $\mathbb{R}$ con la topología usual no es compacto, pero como hemos visto ya, es localmente compacto. (ver Ejemplo 144)*

Veamos que la propiedad de compacidad local no se preserva bajo continuidad.

Ejemplo 152 *Sea $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ y $f : (\mathbb{Q}, \tau_1) \to (\mathbb{Q}, \tau_2)$ la función identidad, donde τ_1 es la topología discreta, τ_2 la topología usual.*

Esta función es contínua, suprayectiva y manda un espacio localmente compacto en un espacio que no lo es.

Si además, le pedimos a la función que sea abierta, se tiene el siguiente resultado:

Teorema 153 *Sea X un espacio localmente compacto y $f : X \to Y$ suprayectiva, continua y abierta entonces Y es localmente compacto.*

Prueba. Sea $y \in Y$. Como f es suprayectiva existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Ahora como X es localmente compacto existen A abierto y K compacto tales que $x \in A \subset K$ y como f es abierta entonces $f(A)$ es abierto en Y. También $f(K)$ es compacto dado que f es contínua.

Así $y \in f(A) = f(K)$. Por lo tanto Y es localmente compacto. ∎

Respecto al producto de espacios localmentes compactos, se tiene el siguiente Teorema:

Teorema 154 *Si $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una familia de espacios no vacíos, el espacio producto es localmente compacto, si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:*

a) cada X_α es localmente compacto,

b) todos los X_α son compactos, excepto un número finito de ellos.

Prueba. Supongamos que $\Pi_\alpha X_\alpha$ es localmente compacto.

a) Las funciones proyección son continuas y abiertas (ver Teorema 130), entonces cada factor es localmente compacto.

b) Sea $x \in \Pi_\alpha X_\alpha$, por hipótesis, el producto es localmente compacto, así existe K compacto y un elemento de la base de la forma $\Pi_\alpha U_\alpha$, donde $U_\alpha = X_\alpha$ excepto para un número finito de índices tal que $x \in \Pi_\alpha U_\alpha \subset K$. Entonces $\pi_\alpha(\Pi_\alpha U_\alpha) = X_\alpha$ excepto para un número finito de índices.

Ahora ya que $X_\alpha = \pi_\alpha(\Pi_\alpha U_\alpha) \subset \pi_\alpha(K)$, es decir $X_\alpha \subset \pi_\alpha(K)$ y como siempre se cumple que $\pi_\alpha(K) \subset X_\alpha$ entonces $\pi_\alpha(K) = X_\alpha$. Por lo tanto X_α es compacto para toda α excepto para un número finito de índices.

Demostremos el regreso del teorema.

Sea $x \in \Pi_\alpha X_\alpha$ y supongamos que $X_{\alpha_1}, X_{\alpha_2}, X_{\alpha_3}, ..., X_{\alpha_n}$ no son compactos.

Cada X_{α_i}, $i = 1, 2, ..., n$ es localmente compacto, entonces para cada α_i existe K_i vecindad compacta de las coordenadas $\{x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, ..., x_{\alpha_n}\}$ de x. Así $x \in \Pi_{\alpha \neq \alpha_i} X_\alpha \times \Pi K_i$, la cual es una vecindad compacta de x y por lo tanto el producto es localmente compacto. ∎

Capítulo 7

Espacios Paracompactos

Definición 155 *Sea X un espacio topológico y U una colección de subconjuntos de X. Decimos que U es una familia localmente finita si para todo $x \in X$, existe V vecindad de x que intersecta a lo más una colección finita de elementos de U.*

Ejemplo 156 *Cualquier colección finita de subconjuntos de un espacio X es localmente finita.*

Ejemplo 157 *Consideremos a $\mathbb{R}$ con la topología usual, entonces U=$\{[n, n+1] : n \in \mathbb{Z}\}$ es una familia localmente finita.*

Para todo $x \in \mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \leq x < n+1$ y la vecindad $(n-1, n+1)$ de x intersecta solamente a $[n-2, n]$ y $[n-1, n+1]$.

Veamos un ejemplo de una familia que no es localmente finita.

Ejemplo 158 *Sea $\mathbb{R}$ con la topología usual y $U = \left\{ \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right), n \in \mathbb{N} \right\}$.*

Aquí cualquier vecindad del cero intersecta a una infinidad de intervalos.

Definición 159 *Sea U una familia de subconjuntos de un espacio topológico X. Una familia U' de subconjuntos de X es un refinamiento de U si para cada $A \in U'$ existe $B \in U$ tal que $A \subset B$ y además $\cup \left\{ A : A \in U' \right\} = \cup \{ B : B \in U \}$.*

Ejemplo 160 *Cualquier familia U es un refinamiento de ella misma.*

Ejemplo 161 *Sea U una familia de subconjuntos de X, entonces $U' = \{\{x\} : x \in \cup_{A \in U} A\}$ es un refinamiento de U.*

Sea $\{x\} \in U'$, tenemos que demostrar que existe $A \in U$ tal que $\{x\} \in A$, esto es inmediato ya que $x \in \cup_{A \in U} A$. Así por definición las uniones de los elementos correspondientes de U y U' coinciden.

Definición 162 *En caso de que los elementos de U' sean abiertos (cerrados), diremos que se trata de un refinamiento abierto (cerrado) de U.*

Ejemplo 163 *Sea $U = \{[n, n+2], n \in \mathbb{Z}\}$, un refinamiento abierto de U es $U' = \{(n, n+2), n \in \mathbb{Z}\}$.*

En efecto ya que para todo $n \in \mathbb{Z}$ se tiene $(n, n+2) \subset [n, n+2]$, y además $\cup_{n \in \mathbb{Z}} (n, n+2) = \mathbb{R} = \cup_{n \in \mathbb{Z}} [n, n+2]$.

Definición 164 *Decimos que V es un refinamiento localmente finito de U, si V es un refinamiento de U y si para todo $x \in X$, existe una vecindad que intersecta sólo a un número finito de elementos de V.*

Definición 165 *Decimos que V es un refinamiento puntualmente finito de U, si V es un refinamiento de U y si todo $x \in X$ pertenece sólo a un número finito de elementos de V.*

Todo refinamiento V localmente finito es puntualmente finito ya que si algún $x \in X$ perteneciera a una infinidad de elementos de V, entonces cualquier vecindad de x intersectaría a una infinidad de elementos de V.

Lema 166 *Si $\{A_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ es una colección de conjuntos, localmente finita, entonces $\cup_{\alpha \in \Lambda} \overline{A_\alpha} = \overline{\cup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha}$.*

Prueba. Ver [7], pag. 145. ■

Definición 167 *Un espacio topológico X se dice paracompacto, si cualquier cubierta abierta de X tiene un refinamiento abierto localmente finito.*

La definición anterior la podemos escribir de la siguiente manera:

Un espacio topológico X es paracompacto si para cualquier familia $\mathfrak{A}$ de subconjuntos abiertos tales que $\cup \{A : A \in \mathfrak{A}\} = X$, existe una colección $\mathfrak{A}'$ de subconjuntos abiertos de X tal que:

1) Para cada $A' \in \mathfrak{A}'$ existe $A \in \mathfrak{A}$ tal que $A' \subset A$.

2) $\cup \{A' : A' \in \mathfrak{A}'\} = X$.

3) Para cada $x \in X$ existe una vecindad que intersecta sólo a un número finito de elementos de A'.

Ejemplo 168 *Cualquier espacio discreto es paracompacto.*

Sea U una cubierta abierta de X , veamos que $U' = \{\{x\} : x \in X\}$ es un refinamiento abierto localmente finito.

1) Sea $\{x\} \in U'$, como U es cubierta entonces $x \in A$ para alguna $A \in U$, así $\{x\} \subset A$.

2) $\cup_{x\in X} \{x\} = X$. es claro.

3) Veamos que U' es localmente finita.

Sea $x \in X$, $\{x\}$ es una vecindad de x y $\{x\} \cap \{x\} \neq \emptyset$ y es el único elemento de U' que lo intersecta, por lo tanto U' es un refinamiento localmente finito de cualquier cubierta abierta de X. Por lo tanto X es paracompacto.

Teorema 169 *Todo espacio compacto es paracompacto.*

Prueba. Sea X un espacio topológico compacto

Sabemos que para toda U cubierta abierta X existe U'subcubierta finita:

Demostremos que U' es un refinamiento abierto localmente finito de U.

1) Sea $A \in U'$ como $U' \subset U$ entonces $A \in U$ y $A \subset A$.

2) Como U' es cubierta de X entonces $\cup \{A \text{ tales que } A \in U'\} = X$.

3) Sea $x \in X$ entonces cualquier vecindad sólo puede intersectar a un número finito de elementos de U' ya que U' es finita. ■

Sin embargo no se cumple el regreso del teorema anterior, el siguiente ejemplo nos sirve para ejemplificarlo:

Ejemplo 170 *Si X es infinito y discreto, entonces es paracompacto y no es compacto dado que es un espacio discreto.*

Definición 171 *Sea X un espacio topológico, una colección de subconjuntos de X se dice que es σ- localmente finita si es la unión de una colección numerable de familias localmente finitas.*

Ejemplo 172 *Cualquier colección numerable $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos de X es σ- localmente finita; ya que cada singulete $\{A_n\}$ es localmente finita.*

Ejemplo 173 *La colección $\left\{\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right) : n \in \mathbb{N}\right\}$ es σ- localmente finita.*

Ejemplo 174 *Cualquier colección localmente finita es σ- localmente finita.*

Teorema 175 *Si X es un espacio regular, entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1) X es paracompacto.

2) Toda cubierta abierta de X tiene un refinamiento abierto σ- localmente finito.

3) Toda cubierta abierta tiene un refinamiento localmente finito.

4) Toda cubierta abierta tiene un refinamiento cerrado localmente finito.

Prueba. 1) $\Rightarrow$ 2)

Supongamos que X es paracompacto.

Sea $\mathfrak{C}$ una cubierta abierta de X, entonces existe $\mathfrak{C}'$ refinamiento abierto localmente finito.Así $\mathfrak{C}'$ es σ- localmente finita.

2) $\Rightarrow$ 3)

Sea $\mathfrak{C}$ una cubierta abierta de X. Por hipótesis $\mathfrak{C}$ tiene un refinamiento abierto σ- localmente finito digamos W, es decir $W = \cup_{n=1}^{\infty} W_n$ donde W_n es una familia localmente finita de conjuntos abiertos para toda n.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\mathfrak{W}_n = \cup W_n$ y $A_n = \mathfrak{W}_n \diagdown \cup_{i<n} \mathfrak{W}_n$.

Veamos que $\{\mathfrak{W}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es cubierta de X.

Sea $x \in X$. Como W es refinamiento, W cubre a X y como $W = \cup_{n=1}^{\infty} W_n$ entonces $x \in \cup W_n$ para alguna n. Así $x \in \mathfrak{W}_n$. Por lo tanto$\{\mathfrak{W}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es cubierta de X.

Ahora veamos que $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un refinamiento localmente finito de $\{\mathfrak{W}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Sea $n_0 \in \mathbb{N}$, $A_{n_0} = \mathfrak{W}_{n_0} \diagdown \cup_{i<n_0} \mathfrak{W}_i \subset \mathfrak{W}_{n_0}$es decir $A_{n_0} \subset \mathfrak{W}_{n_0}$.

Demostremos que $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ cubre a X.

Sea $x \in X$. Como $\{\mathfrak{W}_n\}$ cubre a X, existe n_0 tal que $x \in \mathfrak{W}_{n_0}$, es decir $x \in A_{n_0}$ ó $x \in \cup_{i<n_0} \mathfrak{W}_i$.

Si $x \in A_{n_0}$ terminamos la demostración.

Si $x \in \cup_{i<n_0} \mathfrak{W}_i$, entonces $x \in \mathfrak{W}_{n_1}$ con $n_1 < n_0$.

Nuevamente hay dos opciones: $x \in A_{n_1}$ o $x \in \cup_{i<n_1} \mathfrak{W}_i$.

Si continuamos con este razonamiento resulta que $x \in A_j$ para alguna $j \leq n_1$. Por lo tanto $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ cubre a X, así pues es un refinamiento.

Nos resta ver que es localmente finito.

Sea $x \in X$. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in \mathfrak{W}_{n_0}$, $\mathfrak{W}_{n_0}$ es abierto ya que es unión de abiertos. $\mathfrak{W}_{n_0} \cap A_{n_0} \neq \emptyset$ y a lo más intersecta a un número finito de elementos de $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $n < n_0$ ya que sí $n_1 > n_0$, $A_{n_1} = \mathfrak{W}_{n_1} - \cup_{i<n_1} \mathfrak{W}_i$; es decir $\mathfrak{W}_{n_0}$ es ajeno a A_{n_1}. Por lo tanto $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es localmente finita.

Sea $\mathfrak{V} = \{A_n \cap V : n \in \mathbb{N}, V \in W_n\}$.

Veamos que $\mathfrak{V}$ es un refinamiento localmente finito de $\mathfrak{C}$.

Observemos primeramente que $A_n \cap V \subset V \in W_n \in W$.

Ahora como W es refinamiento de $\mathfrak{C}$ existe $C \in \mathfrak{C}$ tal que $V \subset C$, así $A_n \cap V \subset C$.

Veamos que $\{A_n \cap V\}$ cubre a X.

Sea $x \in X$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in A_n$ esto implica que $x \in \mathfrak{W}_n$ es decir existe $V \in W_n$ tal que $x \in V$. Por lo tanto $x \in A_n \cap V$, esto es $\{A_n \cap V\}$ cubre a X. Por lo tanto $\mathfrak{V}$ es refinamiento de $\mathfrak{C}$.

Sólo resta probar que es localmente finito; pero esto se desprende del hecho de que $\{A_n\}$ y W_n son localmente finitos.

$3) \Rightarrow 4)$

Sea $\mathfrak{C}$ una cubierta abierta de X.

Sea $x \in X$, como $\mathfrak{C}$ es cubierta, existe $C_x \in \mathfrak{C}$ tal que $x \in C_x$; C_x es abierto entonces $X \setminus C_x$ es cerrado y como X es regular, existe V_x abierto tal que $x \in V_x \subset \overline{V}$ $\subset C_x$. (ver Teorema 15).

Así $\{V_x : x \in X\}$ es una cubierta de X y por hipótesis existe $\mathfrak{W}$ refinamiento localmente finito de $\{V_x : x \in X\}$.

Veamos que $\left\{\overline{W} : W \in \mathfrak{W}\right\}$ es un refinamiento cerrado localmente finito de $\mathfrak{C}$.

Sí $W \in \mathfrak{W}$, entonces $W \subset V_x \subset \overline{V_x} \subset C_x$ esto quiere decir que $\overline{W} \subset \overline{V_x} \subset C_x$, así $\overline{W} \subset C_x$.

Como $\mathfrak{W}$ cubre a X entonces $\left\{\overline{W} : W \in \mathfrak{W}\right\}$ también cubre a X. Así pues es un refinamiento de $\mathfrak{C}$.

Sólo resta probar que es localmente finito. Pero esto es cierto dado que $\mathfrak{W}$ es localmente finita. (ver [6] pag 174).

$4) \Rightarrow 1)$

Sean $\mathfrak{C}$ una cubierta abierta de X y $\gamma = \{G_\alpha\}$ un refinamiento cerrado localmente finito de $\mathfrak{C}$.

Para toda $x \in X$, sea V_x una vecindad abierta de x tal que intersecta sólo a un número finito de elementos de γ. $\mathfrak{B} = \{V_x : x \in X\}$ es una cubierta abierta de X, nuevamente por hiótesis hay un refinamiento cerrado localmente finito de $\mathfrak{B}$ al que llamaremos $\mathfrak{F}$.

Para cada α, sea $W_\alpha = X - \cup\{F \in \mathfrak{F} : F \cap G_\alpha = \emptyset\}$.

W_α es abierto ya que es complemento de un cerrado. Veamos que $G_\alpha \subset W_\alpha$:

Sea $x \in G_\alpha$, entonces $x \notin \cup\{F \in \mathfrak{F} : F \cap G_\alpha = \emptyset\}$.

Así $x \in X \setminus \cup\{F \in \mathfrak{F} : F \cap G_\alpha = \emptyset\} = W_\alpha$.

Afirmación

Para toda α y para toda $F \in \mathfrak{F}$, $W_\alpha \cap F \neq \emptyset$ sí y sólo si $G_\alpha \cap F \neq \emptyset$............(*)

La razón es la siguiente:

Supongamos que $W_\alpha \cap F \neq \emptyset$, sí $G_\alpha \cap F = \emptyset$ entonces $F \in \{F \in \mathfrak{F} : F \cap G_\alpha = \emptyset\}$, entonces $F \cap W_\alpha = \emptyset$ lo que es una contradicción.

Inversamente, supongamos que $G_\alpha \cap F \neq \emptyset$. Sabemos que $G_\alpha \subset W_\alpha$, entonces $W_\alpha \cap F \neq \emptyset$.

Ahora para cada α elijamos $C_\alpha \in \mathfrak{C}$ tal que $G_\alpha \subset C_\alpha$ y sea $V_\alpha = W_\alpha \cap C_\alpha$. El conjunto V_α es abierto pues es intersección de abiertos.

Veamos que la familia $\{V_\alpha\}$ es un refinamiento abierto de $\mathfrak{C}$.

La razón es la siguiente:

Por definición de V_α se tiene que $V_\alpha \subset C_\alpha$.

Veamos que $\{V_\alpha\}$ cubre a X.

Sabemos que para toda $x \in X$, existe α tal que $x \in G_\alpha$.

También sabemos que $G_\alpha \subset W_\alpha$ y $G_\alpha \subset C_\alpha$, entonces $G_\alpha \subset W_\alpha \cap C_\alpha = V_\alpha$. Así $x \in V_\alpha$. Por lo tanto $\{V_\alpha\}$ cubre a X.

Por último veamos que es localmente finita.

Sea $x \in X$. Como $\mathfrak{F}$ es localmente finita, existe U vecindad de x tal que U intersecta a un número finito de elementos de $\mathfrak{F}$.

Veamos quecualquier elemento de $\mathfrak{F}$ intersecta una colección finita de elementos de γ.

Si $F \in \mathfrak{F}$, hay $V_x \in \mathfrak{B}$ tal que $F \subset V_x$ y V_x intersecta a un número finito de elementos de γ entonces por (*), resulta que si $F \in \mathfrak{F}$, F intersecta un número finito de elementos de $\{W_\alpha\}$ y por lo tanto a un número finito de elementos de $\{V_\alpha\}$. Así $\{V_\alpha\}$ es localmente finita. Por lo tanto X es paracompacto. ■

Corolario 176 *Si X es regular y Lindelöff entonces X es Paracompacto.*

Prueba. Sea $\mathfrak{C}$ una cubierta abierta de X. Como es Lindelöff entonces existe $\mathfrak{C}'$ subcubierta numerable de $\mathfrak{C}$, entonces $\mathfrak{C}'$ es un refinamiento abierto σ- localmente finito y del Teorema anterior se tiene el resultado. ■

Ejemplo 177 *La línea de Sorgenfrey es regular (ver Ejemplo 19) y Lindeloff (ver Ejemplo 46), así por el corolario anterior, es paracompacto.*

Teorema 178 *SI X es paracompacto y Hausdorff, entonces X es un espacio regular.*

Prueba. Sea F cerrado de X y sea $x \in X \setminus F$.

Como X es Hausdorff, para todo $y \in F$ existen U_y, V_y tales que $x \in U_y$, $y \in V_y$ y $U_y \cap V_y = \emptyset$, entonces $\{V_y : y \in F\} \cup (X \setminus F)$ es una cubierta abierta de X.

Como X es paracompacto, existe $\{W_k\}$ refinamiento abierto localmente finito de la cubierta anterior.

Sea $V = \cup\{W_k : W_k \cap F \neq \emptyset\}$, V es unión de abiertos por lo que V es abierto y además si $y \in F$, entonces $y \in W_\alpha$ para alguna α, es decir $y \in V$, por lo tanto $F \subset V$.

Como$\{W_k\}$ es localmente finito existe U' vecindad de x que intersecta sólo a un número finito de elementos de $\{W_k\}$, digamos $W_{k_1}, W_{k_2}, ..., W_{k_n}$. Si algún $W_{k_i} \cap F \neq \emptyset$ para alguna $i = 1, 2, ..., n$, entonces $W_{k_i} \subset V_y$ para alguna $y \in F$, llamemosle V_{y_i}.

Sea $U = U' \cap (U_{y_1}, \cap U_{y_2} \cap ... \cap U_{y_n})$, $x \in U$ y U es abierto.

Resta ver que $U \cap V = \emptyset$.

Si $z \in U \cap V$, entonces $z \in U_{y_i}$ y $z \in V_{y_i}$ pero esta es una contradicción ya que $U_{y_i} \cap V_{y_i} = \emptyset$. Por lo tanto X es regular. ∎

Teorema 179 *Si X es paracompacto y Hausdorff entonces es normal.*

Prueba. Sean F_1, F_2 cerrados ajenos de X, como X es regular para cada $x \in F_1$ existen U_x, V_x tales que $x \in U_x$ y $F_2 \in V_x$, entonces $\mathfrak{C} = \{U_x : x \in F_1\} \cup X\setminus F_1$ es una cubierta abierta de X.

Ahora como X es paracompacto existe $\{W_k\}$ un refinamiento abierto localmente finito de $\mathfrak{C}$. ($W_k \subset U_x$ o $W_k \subset X\setminus F_1$)..(*)

Sea $U = \cup\{W_k : W_k \cap F_1 \neq \emptyset\}$, U es abierto ya que es unión de abiertos y $F_1 \subset U$ pues para todo $x \in F_1$ se tiene que $x \in W_k$ para alguna k, esto quiere decir que $x \in U$.

Sea $y \in F_2$. Como $\{W_k\}$ es localmente finito, existe una vecindad H_y que intersecta solo una cantidad finita de elementos de $\{W_k\}$. Sean $W_1, ..., W_n$ los elementos de $\{W_k\}$ que intersectan a H_y y que intersectan a F_1. Entonces por (*) existen $x_1, ..., x_n \in F_1$ tales que $W_i \subset U_{x_i}$ $i = 1, ..., n$.

Sea $G_y = H_y \cap (V_{x_1} \cap ... \cap V_{x_n})$, donde cada V_{x_i} es el conjunto correspondiente a U_{x_i}.

G_y es abierto pues es intersección finita de abiertos, $y \in H_y$ así como en cada V_{x_i}, entonces $y \in G_y$ y $G_y \cap U = \emptyset$.

Sea $V = \cup_{y \in F_2} G_y$, entonces V es abierto y es tal que $F_2 \subset V$, y $V \cap U = \emptyset$. Por lo tanto X es un espacio normal. ∎

Sin embargo no todo espacio normal es paracompacto

Ejemplo 180 *Ω_0 es normal dado que cualquier espacio topológico ordenado es normal (ver Teorema 84), sin embargo no es paracompacto (ver [3], pag. 60).*

Teorema 181 *Todo espacio métrico es paracompacto.*

Prueba. Demostremos que toda cubierta abierta tiene un refinamiento abierto $\sigma-$localmente finita.

Sea X un espacio métrico y sea $\mathfrak{C}$ una cubierta abierta de X.

Para toda $A \in \mathfrak{C}$ y todo $n \in \mathbb{N}$ consideremos el conjunto $A_n = \left\{x \in A : d(x, X - A) \geq \frac{1}{2^n}\right\}$.

Afirmación: $A_n \subset A_{n+1}$, para toda $n \in \mathbb{N}$.

Si $x \in A_n$, entonces $d(x, X - A) \geq \frac{1}{2^n} > \frac{1}{2^{n+1}}$,así $x \in A_{n+1}$.

Afirmación: $d(A_n, X - A_{n+1}) \geq \frac{1}{2^{n+1}}$.

Sean $x \in A_n$, $y \in X - A_{n+1}$, $z \in X - A$, entonces por la desigualdad del triángulo $d(x,y) \geq d(x,z) - d(z,y) = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}}$, esto quiere decir que $\frac{1}{2^{n+1}}$ es cota inferior, por lo tanto $d(A_n, X - A_{n+1}) \geq \frac{1}{2^{n+1}}$..(*).

Sea $<$ un buen orden en $\mathfrak{C}$

Para cada $A \in \mathfrak{C}$ y $n \in \mathbb{N}$ consideremos el conjunto $A_n^* = A_n \setminus \cup\{B_{n+1} : B \in \mathfrak{C},\ B < A\}$

Afirmación: Sí $A, \in \mathfrak{C}$ y $A < B$, entonces $B_n^* \subset X \setminus A_{n+1}$.

Sea $x \in B_n^*$, por definición $B_n^* = B_n \setminus \cup\{A_{n+1} : A \in \mathfrak{C},\ A < B\}$ así $x \notin A_{n+1}$, por lo tanto $x \in X \setminus A_{n+1}$.

Analogamente si $A, B \in \mathfrak{C}$ y $B < A$, entonces $A_n^* \subset X \setminus B_{n+1}$.

Afirmación: En cualesquiera de los dos casos anteriores se tiene que $d(A_n^*, B_n^*) \geq \frac{1}{2^{n+1}}$.

Sean $x \in A_n^*$, $y \in B_n^*$ esto implica que $x \in A_n$ y como $y \in B_n^*$entonces $y \in X \setminus A_{n+1}$.Así por (*), resulta que $d(x,y) \geq \frac{1}{2^{n+1}}$. Por lo tanto $d(A_n^*, B_n^*) \geq \frac{1}{2^{n+1}}$.

Para cada $A \in \mathfrak{C}$ y cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos el conjunto $\widetilde{A}_n = \left\{x \in X : d(x, A_n^*) < \frac{1}{2^{n+3}}\right\}$.

Afirmación: $d\left(\widetilde{A}_n, \widetilde{B}_n\right) \geq \frac{1}{2^{n+2}}$, para todo $A, B \in \mathfrak{C}$ y toda $n \in \mathbb{N}$.

$\widetilde{A}_n$ es abierto para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces $D_n = \left\{\widetilde{A}_n : A \in \mathfrak{C}\right\}$ es una familia de conjuntos abiertos.

Afirmación: D_n es localmente finita.

Demostremos que D es un refinamiento de $\mathfrak{C}$

Sea $x \in X$, y A el primer elemento de la cubierta de $\mathfrak{C}$ que contiene a x, entonces $x \in A_n$ para alguna $n \in \mathbb{N}$, por definición de A_n^* y como A es el primer elemento que contiene a x resulta que $x \in A_n^*$, así $d(x, A_n^*) = 0$, de aquí se desprende que $x \in \widetilde{A}_n$. Por lo tanto D es cubierta de X.

Resta ver que $\widetilde{A}_n \subset A$ para toda $A \in \mathfrak{C}$.

Sea $x \in \widetilde{A}_n$ y supongamos que $x \notin A$, es decir $x \in X - A$. Sea $y \in A_n^*$, como $A_n^* \subset A_n$ se tiene que $d(x,y) \geq \frac{1}{2^n} > \frac{1}{2^{n+3}}$ lo cual es una contradicción, por lo que $x \in A$. Por lo tanto D es un refinamiento de $\mathfrak{C}$. ■

En el Ejemplo 168 se vió que todo espacio discreto es paracompacto, veamos que todo espacio topológico es la imagen contínua de un espacio discreto: Si X tiene la topología discreta, entonces cualquiere funcion $f : X \to Y$, donde Y es un espacio topolológico, es conttinua ya que todo subconjunto del espacio X es abierto, en particular las imagenes inversas de cualquier abierto de Y. Así pues la imagen contínua de un espacio paracompacto no es necesariamente paracompacto.

Sin embargo se cumple el siguiente resultado

Teorema 182 *Sean X, Y espacios topológicos, si X es paracompacto, Y Hausdorff y $f : X \to Y$ es contínua y cerrada, entonces Y es paracompacto.*

Prueba. Ver [7], pag. 149. ■

El producto de espacios paracompactos no es necesariamente paracompacto ya que la línea de Sorgenfrey X es un espacio paracompacto (ver Ejemplo 177). $X \times X$ es un espacio Hausdorff (ver [6], pag 131), si fuera paracompacto, entonces sería un espacio normal, pero esto no es cierto (ver Ejemplo 133). Por lo tanto $X \times X$ no es paracompacto.

Sin embargo se tiene el siguiente resultado:

Teorema 183 *El producto de un espacio paracompacto y de un compacto es un espacio paracompacto.*

Prueba. Sea X paracompacto y Y un espacio compacto.

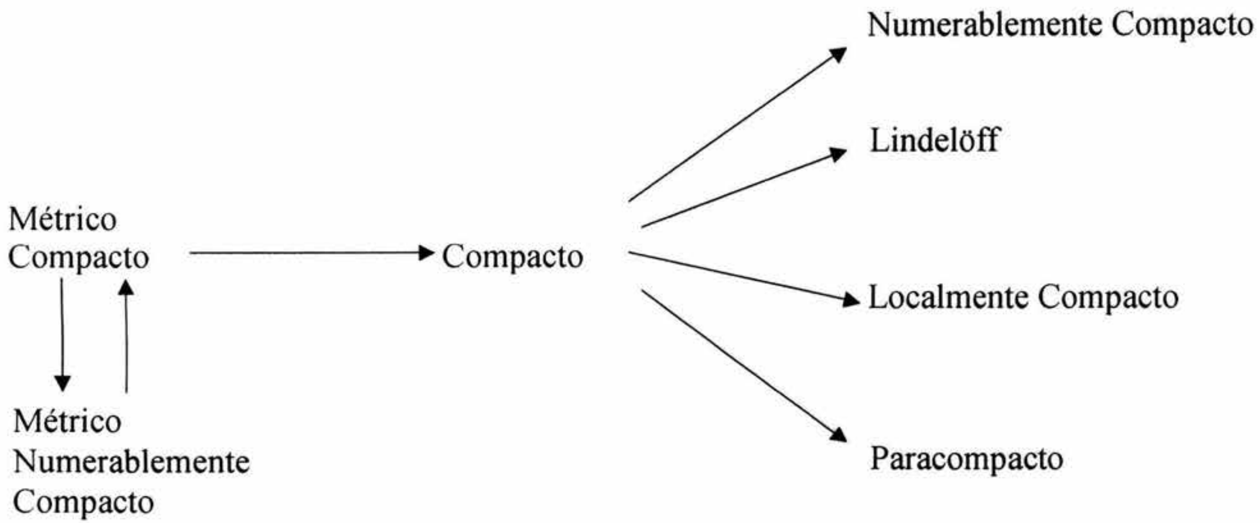
Sea $\mathfrak{C}$ una cubierta abierta de $X \times Y$, para cada $x \in X$ el producto $\{x\} \times Y$ es compacto y $\mathfrak{C}$ es una cubierta de este espacio; asì existen $\{C_1^x, C_2^x, ..., C_n^x\}$ subcubierta de $\mathfrak{C}$ tal que $\{x\} \times Y \subset \cup_{i=1}^n C_i^x$.

Existe A_x abierto de X tal que $x \in A_x$ y $A_x \times Y \subset \cup_{i=1}^n C_i^x$.

La colección $\mathcal{A} = \{A_x : x \in X\}$ es una cubierta abierta de X y como X es paracompacto existe $\mathfrak{D}$ refinamiento abierto localmente finito de $\mathcal{A}$.

Sea $\xi = \{(D \times Y) \cap C_i^x : i = 1, ..., n;\ x, D \in \mathfrak{D}\}$

ξ es un refinamiento abierto de $\mathfrak{C}$, además si $(x, y) \in X \times Y$, existe una vecindad U de x tal que intersecta sólo a una colección finita de elementos de $\mathfrak{D}$ y así la vecindad $U \times Y$ de (x, y) sólo intersecta a un número finito de elementos de ξ, es decir ξ es un refinamiento abierto localmente finito de $\mathfrak{C}$. Por lo tanto $X \times Y$ es paracompacto. ■



En este pequeño cuadro, se muestran las principales relaciones entre los espacios que se estudiaron en el presente trabajo

Bibliografia

[1].- Engelking R., "General Topology", Heldermann Verlag, 1989.

[2].- Gemignani C. Michael, "Elementary Topology", Dover, 1990.

[3].- Herrera A. Juan, "Continuos no métricos", Tesis de Licenciatura, 2002.

[4].- Kolmogorov A. N., Fomin S.V., " Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional", Mir, 1975.

[5].- Steen L. A., Seeback J. A., "Counterexamples in Topology", Holt, Rinehart and Winoto, 1970.

[6].- Tamariz M. Angel, "Curso de Topología General", Universidad Nacional Autónoma de México, 1984.

[7].- Willard Stephen, " General Topology", Addison-Wesley, 1970.

[8].- Rudin Walter, "Principios de Análisis Matemático", Mcgraw-hill, 1980.

[9].- Amor M. José Alfredo, "Teoría de conjuntos para estudiantes de ciencias", Facultad de Ciencias UNAM, 1997.