# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

## FACULTAD DE CIENCIAS

# "TEMAS REPRESENTATIVOS DE LAS NUEVAS FINANZAS"

# T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

**A C T U A R I O**

P R E S E N T A :

**ALEJANDRO SAVE SOTO**

DIRECTORA DE TESIS:

ACT. LAURA MIRIAM QUEROL GONZÁLEZ

2004

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

**ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ**
**Jefe de la División de Estudios Profesionales de la**
**Facultad de Ciencias**
**Presente**

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

Temas representativos de las nuevas finanzas.

realizado por Alejandro Save Soto

con número de cuenta 9455526-8 , quien cubrió los créditos de la carrera de:

Actuaria

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

| | | |
|---|---|---|
| Director de Tesis Propietario | Act. Laura Miriam Querol González | |
| Propietario | Act. María Aurora Valdés Michell | |
| Propietario | Act. Marina Castillo Garduño | |
| Suplente | Act. Noemí Velázquez Sánchez | Noemí Velázquez Sánchez |
| Suplente | Act. Felipe Zamora Ramos | |

**Consejo Departamental de** Matemáticas

Act, Jaime Vázquez Alamilla

# Agradecimientos

Sin pretensión de excluir, mi intención con estas líneas es, de alguna manera, reiterarles a todos esos y estos entes que en formas sublimes y erráticas circunstancias contribuyeron a que yo esté aquí escribiéndoles mi sincero agradecimiento.

**Al Tiempo.**
Parece que en su insaciable sucesión infinitesimal, me ha dado la oportunidad de hacer y deshacer a voluntad, cometer errores y aciertos, buscar y encontrar, buscar y no encontrar, aprender y olvidar... en fin, seremos en él y él en nosotros.

**A la UNAM.**
Por enfrentarme a diferentes mundos de muy variadas formas. Por darme la posibilidad de acceder a todo un cúmulo de experiencias y conocimientos. Siempre recordaré esos momentos que marcaron mi vida. Profundamente agradecido por esto y todo eso que sólo tu y yo sabremos.

**A mis maestros y equivalentes.**
Siempre una guía ante el abismo del conocimiento, una luz en los laberintos de lo invisible, una marca de referencia ante las interrogantes académicas. Su paciencia, desinterés con todos sus contrastes y apasionado sentido de abstracción.

**A mi familia**.
Por estar en esos momentos clave. Por ser un apoyo tanto emocional como económico, por su desinteresado interés. A la abuela (que en paz descanse) y al abuelo, a mis hermanos Nacho y Marcelo (nunca quito el dedo del renglón), a mis pa's, a mis tío(a)s (especialmente a Chelo, Rey, Manolo y Cristi), a mis primo(a)s (especialmente a Chelo) y agregado(a)s. MUCHAS GRACIAS.

**A la banda**.
Por tantos momentos. Me gustaría hacer mención específica de algunos de los de la banda, sin embargo creo que podría ser parcial, hubo contextos y circunstancias particulares para y con cada uno de ellos, así es, así será y según veo seguirá. De cualquier forma GRACIAS por tantos momentos.

# Índice General

# Introducción

Uno de los principales objetivos de las finanzas es la minimización de los diferentes tipos de reisgo existentes en las finanzia de las empresas. En este trabajo intentaremos reunir información relevante sobre la naturaleza y efectos del riesgo financieros, así como el análisis de las técnicas e instrumentos financieros aplicables en lograr una reducción de dicho riesgo.

Capítulo **Merado de Derivados.**

En este capítulo se revisaran los temas relacionados con el mercado de derivados, su amplia gama de posibilidades y funciones y la importancia estratégica en las finanzas mundiales. Se presentans impotantes herramientas que en su conjunto forma una base de operación con estos instrumentos que permiten a las grandes empresas lograr su objetivos de manejo adecuado y racional de los riesgos y optimizar sus resultados mediante la combinacion adecuada de estos instrumentos.

Capítulo **Paridad Monetaria.**

Cuando un país compra bienes a otro país, los liquida en efectivo o monedas de corriente. Si las exportaciones son iguales a las importaciones, la balanza comercial del país esta en equilibrio y no se requieren operaciones adicionales ene efectivo. Pero cuando las importaciones son mayores a las exportaciones el país tiene que cubrir el déficit en efectivo.

Capítulo **Riesgo Cambiario, Modelo para la Valuación de Opciones y Dinámica de Precios** .

El sistema de paridades fijas que se estableció mediante el acuerdo de Bretton Woods durante la segunda guerra mundial se reemplazo a mediados de los años 70's por un régimen de paridades flotantes. Hoy en día las paridades monetarias tienen la libertad de fluctuar entre sí. El cambio y la variabilidad enlas paridades de ocho de las principales monedas, libra esterlina, franco suizo, lira italiana, franfo francés, yen japonés, marco Alemán el guilder holandés y el franco belga, con relación al dólar han sido dramáticos a partir de estas modificaciones y con el cambio económico - político en la Union Europea, el *euro.*

Así mismo revisaremos aquellos factores que tienen un gran impacto sobre el riesgo cambiario, así como algunos instrumentos financieros que nos ayudarían a cubrirnos ante variaciones inesperadas o simplemente generar la certidumbre que el tomador de riesgos acepte.

Capítulo **Procesos Estocásticos en Finanzas**.

Como tema complementario y con la finalidad de introducir otros elementos necesarios para la valoración de opciones, es necesario dedicar un capítulo a la parte correspondiente al cálculo probablístico y algunos resultados importantes como el lema de Itô.

Resulta curioso señalar que la mayor parte de los resultados necesarios no tienen sus orígenes en la teoría financiera tradicional, si no en el trabajo realizado a principios de siglo sobre el movimiento Browniano (el movimiento aleatorio de pequeñas partículas de polvo o de polen suspendidas en un gas) y la teoría cinética de los gases, aunque el lema de Itô es un resultado mucho mas reciente.

# Capítulo 1

# Mercado de Derivados

## 1.1 Nuevos mercados de opciones.

Durante los últimos años, los bancos y los mercados financieros han desarrollado una variedad de instrumentos financieros nuevos diseñados para dar al cliente la opción de comprar o de vender monedas extranjeras. Los mercados en Amsterdam, Montreal, y Philadelphia iniciaron sus operaciones en opciones sobre mondas extranjeras a fines de 1982 y en 1984 el Chicago Mercantile Exchange inició operaciones con un nuevo instrumento, una opción sobre un contrato a futuro en marcos alemanes.

La opción es un contrato que otorga el derecho pero no la obligación de comprar o vender un activo en o antas de una fecha futura a un precio especificado. En este sentido las opciones difieren de los contratos a futuro que son un compromiso de comprar o vender una activo a un precio fijo en una fecha futura. Una vez que un contrato a futuro se acepta tiene que llevarse a su fin aunque los precios cambien favorable o desfavorablemente.

Una opción que puede ejercitarse únicamente en la fecha de vencimiento se conoce como una opción europea y una opción que se puede ejercitar en cualquier fecha hasta su vencimiento es una opción americana. En teoría las opciones pueden expedirse sobre cualquier activo o bien.

Las opciones sobre monedas extranjeras involucran dos transacciones. La primera es la compra o la venta de la opción: Una parte compra a la otra parte el derecho de cambiar dólares (en los mercados americanos) por moneda extranjera en una fecha futura y a un precio determinado que se conoce como el precio de ejercicio. La parte que obtiene el derecho de efectuar el cambio a futuro es del comprador, y la parte que otorga el derecho de efectuar el cambio a futuro es el vendedor. El comprador paga al vendedor una prima por el derecho que recibe.

La segunda transacción es el cambio a futuro de la moneda. En una opción de compra (call), se cambia en dólares por una cantidad fija de moneda extranjera, es decir, la opción de compra es un contrato que otorga el derecho de comprar moneda extranjera. Con una opción de venta (put) se tiene una cantidad de moneda extranjera por dólares; es un contrato que otorga el derecho de vender moneda extranjera. Cuatro posiciones básicas se pueden asumir en el mercado, por el hecho de que las opciones pueden comprarse o venderse para adquirir el derecho de comprar o vender una moneda extranjera. Un participante en el mercado puede:

El costo de la opción depende de tres factores: 1) la posición vigente del precio a futuro de la moneda con relación al precio del ejercicio de la opción; 2) el nivel de la fluctuación del precio a futuro y 3) la vigencia de la opción. Conforme cambian estos tres factores, el potencial de redituabilidad de la opción cambia y el precio de la opción también cambia. La limitación del riesgo constituye la principal atracción de la inversión en opciones.

Los contratos a futuro representan una posición larga o corta en el mercado. Mientras que las opciones representan el derecho de tomar una posición larga o corta en el mercado. Los contratos a futuro ofrecen oportunidades y riesgo ilimitado. La compra de opciones limita el riesgo mientras que la venta de opciones ofrece una utilidad limitada y un riesgo ilimitado.

1. Comprar una opción de compra y obtener el derecho de comprar la moneda extranjera.

2. Vender una opción de compra y estar listo para vender la moneda extranjera a la discreción del comprador de la opción.

3. Comprar una opción de venta y obtener el derecho de vender la moneda extranjera.

4. Vender una opción de venta y estar listo para comprar la moneda extranjera a la discreción del comprador de la opción.

## 1.2 Riesgo y rendimiento en la negociación de opciones.

Opción de compra. El negociante piensa que el franco suizo subirá con relación al dólar por un margen mayor al esperado en el mercado. La operación recomendable es la compra de una opción de compra sobre francos suizos. Por ejemplo, en marzo compra una opción de compra que le otorga el derecho de comprar 62,500 francos suizos en junio al precio de .46 por franco y pagar una prima de 560 por la opción. Si el precio del franco se aprecia a .48 el negociante puede ejercitar la opción y comprar los francos a .46, venderlos en el mercado spot a 48 y obtener una utilidad de 1250, más que suficiente para cubrir la prima de 560 y obtener una utilidad neta de 690. En caso contrario el franco suizo no se aprecia o se deprecia, el negociante simplemente no ejerce la opción y pierde el importe de la prima. El comprador de una opción de compra nunca puede perder más que el importe de la prima de la opción.

Opción de venta. Contrastando con las opciones de compra mediante las cuales el comprador puede obtener una utilidad si el precio spot aumenta, las opciones de venta pueden producir una utilidad cuando el precio spot se reduce. El comprador de una opción de venta obtendrá una utilidad si el recio spot de la moneda se reduce en el futuro lo suficiente, abajo del precio de ejercicio, para cubrir la prima y producir una utilidad. Si la moneda no se deprecia abajo del precio de ejercicio el comprador pierde el importe de la prima.

La opción de venta puede utilizarse ventajosamente como una protección contra la devaluación de una moneda. Si el negociante piensa que el yen se devaluará más de lo esperado en el mercado con relación al dólar puede, por ejemplo, pagar una prima de 225 por una opción de venta de junio sobre 6,250,000 yen a un precio de ejercicio de .0042 yen. Si para junio el yen cae a .004, el negociante ejercita la opción compra, compra yen a .004 en el mercado spot, se los entrega al vendedor de la opción al precio de ejercicio, de .004 y obtiene una utilidad neta de 1250 menos la prima de 225.

## 1.3 Cobertura de contingencias mediante opciones.

La asimetría entre las perdidas y la utilidad potencial en opciones permite que se pueda utilizar para la cobertura de contingencias transacciones que posiblemente nos e materialicen. Como ejemplo se toma el caso de una empresa alemana que participa en un concurso y presenta su cotización en francos, sobre la instalación de un equipo especializado en Francia. Si obtiene el contrato, la empresa recibirá un pago futuro en francos, que necesitará convertir a marcos.

Mientras no se tome la decisión, la empresa esta expuesta al riesgo de una devaluación del franco la cual reducirá el valor del contrato. La empresa debe de cubrir su riesgo cambiario. Contratos a futuros no son el mecanismo adecuado porque la empresa no tiene la seguridad de obtener el contrato. Si cubre el riesgo mediante la venta a futuro de francos y no obtiene el contrato, de encontrará con una posición en francos en el mercado de futuros, sin contar con el ingreso de la transacción para cubrir la posición.

Para cubrir este tipo de transacción, la empresa debe utilizar una opción de venta. Si el contrato se le otorga, la empresa ejercita la opción y vende los francos que recibe a un precio predeterminado. Si no gana el concurso, la empresa no ejercita la opción y su costo de cobertura es la prima de la opción.

Existe una gran variedad de transacciones contingentes en finanzas internacionales. Por ejemplo, los términos de una inversión en una empresa extranjera pueden incluir la compra de una porcentaje de la acciones, a un precio fijo en moneda extranjera en el futuro. La decisión de aceptar la opción de compra sobre unas instalaciones industriales en otro país requerirá la obtención de las divisas necesarias para cubrir la transacción. El resultado de un juicio mercantil en el extranjero por la sobre aplicación de impuestos arancelarios; si el laudo es favorable, la empresa recibirá un reembolso en moneda extranjera. Cada una de estas posibles, pero inseguras demandas o responsabilidades futuras en moneda extranjera, pueden cubrirse mediante opciones. El riesgo cambiario de la compra de las acciones y de las instalaciones puede cubrirse mediante opciones de compra. Una opción de venta puede cubrir el riesgo cambiario de la posible futura recepción de fondos de moneda extranjera provenientes de un laudo favorable en el juicio mercantil. La demanda sobre opciones monetarias ha crecido enormemente, en los últimos años, debido a dos factores: 1) El incremento en la volatilidad de los tipos de cambio monetario y 2) el crecimiento del comercio internacional.

## 1.4 La paridad entre las opciones de compra y venta.

Aunque las opciones y los contratos a futuro son instrumentos distintos, sus precios se relacionan por las acciones de los negociantes que compran y venden ambos instrumentos en busca de una ganancia. La estrategia básica para obtener una ganancia por el diferencial de precio entre el mercado de opciones y el mercado a futuro se conoce como una "reversible". Con esta estrategia el negociante compra una opción de compra y vende una opción de venta simultáneamente, ambas con la misma fecha de vencimiento y con el mismo precio de ejercicio "E". Esta estrategia ofrece al negociante un patrón de ganancias y perdidas que duplica el patrón de un contrato a futuro para la compra de la moneda en la misma fecha y el mismo precio "E". A la fecha de vencimiento el negociante habrá obtenido una ganancia en la opción de compra si el precio spot sobrepasa el precio de ejercicio "E" o una perdida en la opción de venta si el precio spot se reduce; el mismo resultado que la compra del contrato a futuro. El precio efectivo al cual se ha hecho la compra de la moneda a futuro debe tomar en consideración el interés "i"sobre un préstamo sobre la diferencia entre el premio "C"pagado por la opción de compra y el premio "P"pagado por la opción de venta (si "C"es mayor a "P"):

$$E + (C - P)(1 + i)$$

Si el costo de obtener la moneda mediante esta estrategia es menor al costo de un contrato a futuro, al precio futuro "F", el negociante puede lograr una ganancia $G_R$ utilizando una "reversible"y una venta a futuro:

$$G_R = F - E - (C - P)(1 + i)$$

A la inversa, si el costo de comprar la moneda mediante un contrato a futuro es menor al de utilizar la estrategia de la "reversible", el negociante puede utilizar una "conversión", que es diametralmente opuesta a la "reversible". En este caso, el negociante vendería la moneda a futũro mediante la compra de una opción de venta y la venta de una opción de compra, invirtiendo la diferencia entre los premios (si es positiva) a la tasa "i". Esta estrategia mas un contrato a futuro para la compra producen la siguiente utilidad $G_c$:

$$G_c = E + (C - P)(1 + i) - F$$

Las oportunidades de lucro que ofrecen las diferencias entre "E"y "F" atraen a los negociantes que forzaran a los precios de las opciones de compra a subir y a los precios de venta a bajar por el volumen de operaciones "reversibles" o cambiar en dirección opuesta cuando operan "convertibles", hasta lograr un equilibrio en el Mercado ($G_R = G_c = 0$).

$$C - P = (F - E)(1 + i)$$

Esta relación se conoce como la paridad entre la opción de compra y la opción de venta.

Contratos a futuros no son el mecanismo adecuado porque la empresa no tiene la seguridad de obtener el contrato. Si cubre el riesgo mediante la venta a futuro de la divisa y no obtiene el contrato, de encontrará con una posición en la divisa en el mercado de futuros, sin contar con el ingreso de la transacción para cubrir la posición.

Para cubrir este tipo de transacción, la empresa debe utilizar una opción de venta. Si el contrato se le otorga, la empresa ejercita la opción y vende la divisa que recibe a un precio predeterminado. Si no gana el concurso, la empresa no ejercita la opción y su costo de cobertura es la prima de la opción.

# Capítulo 2

# Paridad Monetaria

## 2.1 Algunos factores que afectan la paridad de la moneda.

EL COMERCIO INTERNACIONAL Y LOS TIPOS DE CAMBIO. Cuando un país compra bienes a otro país, los liquida en efectivo o monedas de corriente. Si las exportaciones son iguales a las importaciones, la balanza comercial del país esta en equilibrio y no se requieren operaciones adicionales ene efectivo. Pero cuando las importaciones son mayores a las exportaciones el país tiene que cubrir el déficit en efectivo. El déficit en la balanza comercial de los Estados Unidos en los últimos años han causado un éxodo del dólar par cubrirlo, y a la vez, han incrementado la posición en dólares de los países proveedores este incremento se ha tornado en excedente, muy en especial en el Japón y en los países del mercado común Europeo, y la oferta de estos excedentes en los mercados de cambio mundiales ha propiciado una devaluación del dólar.

## 2.2 El enfoque monetario.

El enfoque monetario sobre la depreciación del tipo de cambio enfatiza la influencia de las transacciones financieras sobre los cambios que se suscitan en la paridad monetaria. La fluctuación de los tipos de cambio se debe más a la disposición de individuos en retener el excedente de moneda que al efecto del resultado del flujo de pagos debido al comercio internacional. El modelo monetario considera de importancia el efecto que tres variables tienen sobre la devaluación de la moneda: 1) la inflación, 2) la tasa de interés real y 3) el ingreso agregado.

La inflación. La paridad en poder adquisitivo de dos monedas establece el tipo de cambio entre ambas.

## 2.3 Polícas Gubernamentales.

Un gobierno puede intervenir en el mercado de divisas a través de su banco central comprando y vendiendo divisas según le convenga, para apoyar el valor de su moneda con relación a otras monedas. En ocasiones algunos países han promovido una política para mantener su moneda devaluada y así lograr exportaciones más baratas. En los bloques comunistas l paridad de la moneda se fija por decreto y en algunos países de libre comercio el banco central fija la paridad de la moneda sujeta a revisión y ajuste periódico. En algunas ocasiones ciertos países controlan la paridad de su moneda indirectamente, controlando los flujos de entrada y salida de fondos del país. Las políticas fiscales y monetarias también afectan el valor de la moneda en los mercados de divisas. Por ejemplo, una política monetaria expansionista y un gasto gubernamental excesivo son causas primordiales de inflación. La aplicación continua de estas políticas causan a la alarga una reducción en el valor de la moneda del país.

El ingreso agregado, PNB. Conforme al producto nacional bruto de un país, se incrementa con relación al producto nacional bruto de otros países, el país importara más bienes extranjeros por el incremento de la demanda para todo tipo de bienes, tanto domésticos como extranjeros. Como el ingreso de los demás países no se ha incrementado en la misma proporción, su demanda para los bienes del país, no se incrementara en una proporción similar. Como resultado, el déficit de la balanza comercial del país se incrementara propiciando una devaluación de su moneda.

Otros factores. Una pronunciada y prolongada época de bonanza en la bolsa de valores de un país atrae a los inversionistas de otros países y crea una enorme demanda sobre la demanda del país. Este incremento en demanda puede ser causa de un incremento en el valor de la moneda del país. De manera similar una reducción significativa en la demanda de las principales exportaciones del país puede causar una devaluación de su moneda. El rand sudafricano, el peso mexicano y la libra esterlina son ejemplos recientes de este fenómeno. Una caída precipitosa en el precio del oro y la sobreproducción mundial del petróleo fueron las causas de las devaluaciones de estas monedas. La existencia de inestabilidad política en un país causa el éxodo de capitales hacia países políticamente estables. La salida masiva de capitales debido al temor del riesgo político socava el valor de la moneda en el mercado extranjero de divisas. También, la existencia general de problemas laborales y de huelgas que aparentemente puedan debilitar la economía de la nación, tiene un efecto depresivo sobre el valor de su moneda.

La balanza comercial. El enfoque de los economistas es sobre la diferencia en las tasas de inflación porque asumen que una disparidad de los salarios causa un desequilibrio en la posición comercial a través del tiempo; un país prudente cambiará la paridad de su moneda para ajustar. Existen dos debilidades en este enfoque: En primer lugar muy pocos países son prudentes y, en segundo lugar la balanza comercial de un país puede depender de un solo producto de alto rendimiento como el oro el petróleo; el nivel salarial no es relevante. Este ha sido el secreto de Venezuela.

El nivel de las reservas del país. El Fondo Monetario Internacional requiere que los miembros elaboren un reporte mensual sobre sus reservas en oro, sus derechos especiales de retiro, y su posición en fondos de reserva y en monedas extranjeras. Internacional Financial Statistics, la publicación mensual del FMI, proporciona las claves sobre la posición de una moneda con base en las tendencias de las reservas del país. Reportes tardíos son un mejor indicativo. Argentina tenía un retraso de cuatro a cinco meses en sus reportes y México llegó a tener retrasos de hasta ocho meses. Estos países prefirieron no tomar el riesgo de divulgar información prejudicial al publico y la retuvieron.

Hemos mencionado una variedad de factores que pueden afectar la paridad de la moneda de un país. Si embargo todos estos factores no afectan necesariamente a todas las monedas en un mismo grado. Algunos factores pueden afectar fundamentalmente el valor de una moneda mientras que su efecto sobre otra moneda puede ser irrisorio.

## 2.4 Determinación de la paridad monetaria.

La relación entre el tipo de cambio inmediato y el tipo de cambio a futuro es importante, y el conocimiento de los factores que intervienen permite entender la forma en la cual se comportan los mercados de cambio de moneda extranjera.

Los tipos de cambio son determinados por los mismos factores que determinan precios en cualquier mercado competitivo: Las acciones de los participantes que compiten entre sí, la fuerza de la oferta y de la demanda.

Existen ciertos tipos de cambio diferentes. El mercado del dólar para cada moneda es generalmente el más activo y la mayoría de las transacciones que se llevan a cabo involucrando al dólar como una de las monedas.

**Diferencia entre el tipo de cambio inmediato y el tipo de cambio a futuro.**

Supongamos que el tipo de cambio futuro del mercado alemán (en dólares) era mayor al tipo de cambio inmediato cotizado en una fecha particular. En ese momento el tipo de cambio del marco alemán se cotizaba como premio (premium, en inglés). A la inversa el tipo de cambio futuro del franco francés (en dólares) en la misma fecha, se cotizaba con descuento sobre el tipo de cambio inmediato.

En la siguiente ecuación mostraremos como puede expresarse en términos cuantitativos la relación (tipo de cambio inmediato) / (tipo de cambio futuro). De la misma manera que las tasas de interés, los premios o descuentos sobre tipos de cambio se expresan generalmente en términos de porcentaje anual.

El porcentaje anual de prima (o de descuento si es negativo) P sobre un tipo de cambio futuro con relación al tipo de cambio inmediato "spot"se determina como sigue:

$$P = \left(\frac{F-S}{S}\right)\left(\frac{12}{n}\right)\cdot 100$$

donde:

- F = tipo de cambio a futuro
- S = tipo de cambio inmediato ("spot").
- n = número de meses a futuro.

La razón para estos diferenciales en los tipos de cambio a futuro se debe principalmente a los diferenciales esperados en las tasas de inflación de los países respectivos: La de los Estados Unidos y Alemania en el caso del marco y la de Estados Unidos y Francia en el caso del franco.

Es difícil obtener información sobre las tasas de inflación esperadas, pero es posible aproximar la inflación en forma indirecta con base en la tasa de interés esperadas. Las tasas de interés siempre contienen una prima basada en el consenso del mercado sobre la inflación esperada. Esta importante relación se determina mediante el teorema de paridad en tasas de interés.

## 2.5 La Paridad en Tasa de Interés.

Todos los centros financieros principales tienen contacto inmediato entre sí por teléfono y por redes computacionales, y en esencia funcionan como un solo mercado. Por lo tanto, se espera que un inversionista en New York deberá recibir el mismo rendimiento en intereses sobre un depósito a 6 meses no importando si los fondos se invierten en dólares o en marcos. Esto es lo que indica el teorema de paridad de tasas de intereses. Supongamos que una persona cuenta con $a$ dólares y que esta considerando dos opciones: invertir en marcos o invertir en dólares. Si decide invertir en dólares por un período de $n$ meses a una tasa anual de interés del $i\%$, el rendimiento esperado es el siguiente:

$$Rendimiento = a\left(1 + i\left(\frac{n}{12}\right)\right)$$

Donde $n/12$ representa la fracción del año que mantiene su inversión. $i = i\%/100$

Si convierte los dólares en marcos al tipo de cambio spot $S$, recibe $a/S$ marcos que puede invertir por un período de $n$ meses a una tasa de interés anual de $i$(DM), y reconvertir a dólares al tipo de cambio a futuro ($n$ meses), $f$. El rendimiento en este caso se calcula como sigue:

$$Rendimiento = \left(\frac{a}{S}\right)\left(1 + i(DM)\left(\frac{n}{12}\right)\right) f$$

Si los mercados de dinero internacionales operan correctamente, la competencia asegurará que cualquiera de las dos opciones producirá el mismo rendimiento.

Al igualar las dos expresiones anteriores se obtiene la ecuación para el teorema de la paridad del interés. Ecuaciones 2 y 3 a continuación:

De acuerdo al teorema de paridad en tasas de interés, la relación entre el tipo de cambio spot y el tipo de cambio a futuro puede expresarse como sigue:

$$\frac{F}{S} = (1+i)(n/12)/\left(1+i(DM)\left(\frac{n}{12}\right)\right)$$

Donde:

- F = tipo de cambio a futuro $\$/DM$.
- S = tipo de cambio spot $\$/DM$.
- i (\$) = interés anual inversión en dólares.
- i (DM) = interés anual inversión en DM.
- n = duración de la inversión en meses.

La relación entre el tipo de cambio spot y el tipo de cambio a futuro también puede expresarse reorganizando la ecuación 2:

$$((F-S)/S)X(12/n) = (i(\$)-i(DM))/\left(1+i(DM)\left(\frac{n}{12}\right)\right)$$

Esta ecuación puede resultar en diferencias debido a que no se toman en consideración las comisiones y costos que cobran los operadores del mercado de cambios.

Por medio del teorema de paridad de interés puede entenderse la relación que existe entre tasa de interés y tipos de cambio. El hecho de poder obtener un interés menor en DM se compensaría con la prima que tiene el tipo de cambio a futuro del DM.

El proceso del mercado a través del cual las relaciones en el teorema de paridad de intereses se llevan a cabo se conoce como arbitraje de cobertura de intereses. Supongamos a manera de ejemplo, que una empresa norteamericana cuenta con un excedente de 100,000 US y que no requerirá estos fondos por seis meses. Podría invertir los fondos en un depósito en Euromoneda denominada en dólares y recibir un interés anual del 8% a través de los 180 días. También podría convertir los 100,000 US a DM en el mercado spot e invertir en un depósito de Euromoneda denominado en DM y recibir un interés anual del 5.25% a través del período. A simple vista parece que el depósito en dólares es una mejor opción pero debe de tomarse en consideración que los DM se reconvertirán a dólares al final del período. Si la paridad entre el dólar y el DM cambia durante el período de inversión, el cambio en una dirección sería favorable para la empresa y el cambio en otra dirección sería desfavorable según la denominación de la inversión. El tesorero de la empresa puede remover esta incertidumbre mediante la venta de marcos en el mercado de futuros para entrega seis meses posteriores, sabiendo exactamente la cantidad de marcos que recibirá en esta fecha de la inversión inicial más intereses. Este tipo de transacciones en el mercado a futuro se conoce como cubrirse, o cobertura de riesgo cambiario. A continuación en el ejemplo aparece el resumen de las transacciones necesarias:

Ejemplo: Arbitraje Mediante Cobertura de Intereses

Transacción A

Enero de 1985

Invertir 100,000 US en Euromoneda denominada en US: compra de certificado de depósito en eurodólares. Vencimiento 6 meses. Importe: 100,000 US.

Julio De 1985

Canjear certificado de depósito en eurodólares. Importe: 100,000 US

Transacción B

1. Convertir 100,000 US a DM en el mercado spot.
2. Invertir el importe en Euromoneda denominada en DM.
3. Vender DM en dólares en el mercado a futuro a 6 meses.

Enero de 1985

1. Comprar DM en mercado spot a 0.3469. 100,000 US X 2.8865 = 288,350 DM.
2. Comprar certificas de depósito de Euromarcos.
   Vencimiento 6 meses. Importe: 288,350 DM
   Valor en enero 1986 - 288,350 DM + 2.625%= 295,919 DM.
3. En el mercado a futuro comprar dólares con marcos a 6 meses: 295,919 DM X 0.3520 = 104,163 US.

Julio de 1985

1. Cobrar certificado de depósito -295,919 DM.
2. Entregar 295,219 DM para cubrir el contrato a futuro.
3. Recibir 104,163 US, importe de este contrato.

El interés menor en Alemania se convierte efectivamente en términos del dólar en un interés mayor debido a la prima en el tipo de cambio a futuro del marco. En la tabla 1 los intereses son efectivamente los mismos una vez que se toma en consideración el mercado de moneda extranjera, es decir, las tasas de interés se encuentran en paridad.

El arbitraje en cobertura de intereses es el proceso dentro del mercado que hace cumplir las relaciones del teorema de paridad en tasas de interés.

Si el tipo de cambio US / DM y las tasas de interés en los dos países no tuvieran la relación que existe en la ecuación 2, los inversionistas tendrían la oportunidad de obtener una utilidad al efectuar operaciones cubiertas como las descritas con anterioridad. En virtud de que los tipos de cambio ya estaban fijados en el momento de la transacción no existiría riesgo alguno. Pero, las oportunidades para obtener oportunidades sin riesgo no pueden pasar desapercibidas por mucho tiempo. Las relaciones inherentes en el teorema de paridad en tasas de interés (ecuación 2) se harán valer a la larga.

Las relaciones entre tipos de cambio monetarios dependen de un número de factores. Uno de los factores más importantes que afecta tanto a los tipos de cambio como a las tasas de interés es la tasa de inflación esperada en el futuro. Las diferencias entre las tasas de inflación de dos países tienen una gran ingerencia en la manera en la cual se comportarán los tipos de cambio de sus monedas a través del tiempo. Si la inflación en los Estados Unidos se mantiene más alta que la inflación en Alemania a través de un período extraordinario, el dólar se devaluaría con respecto al marco: el tipo de cambio spot entre las dos monedas cambiaría. Si los inversionistas y las empresas dedicadas al comercio entre los Estados Unidos y Alemania percibieran que las tasas de inflación serían diferentes en el futuro, el tipo de cambio US /DM se afectaría. El efecto se produciría primordialmente en el tipo de cambio a futuro y subsecuentemente en el tipo de cambio spot. Las expectativas sobre la inflación futura están incluidas dentro de las tasas de interés y por lo tanto, la inflación esperada se toma como consideración implícitamente cuando se aplica el teorema de paridad en tasas de interés.

## 2.6 Efectos de tipo de cambio y la paridad

El precio del mercado, en este caso el tipo de cambio entre dos monedas es una función de la oferta y la demanda. Examinemos los elementos de la oferta y la demanda para una moneda, la libra esterlina, con relación a otra moneda, el dólar americano.

La demanda sobre la libra esterlina (frente al dólar americano) se suscita principalmente por los importadores americanos de bienes ingleses que tienen que efectuar el pago de las mercancías que adquieren para importaciones en libras esterlinas. Otra demanda se crea por turistas americanos que visitan la gran Bretaña y por el pago de servicios, tales como seguros contratados con Lloyd's o transportación en British Airways. Los inversionistas que obtienen valores en la bolsa de Londres o las empresas multinacionales que hacen inversiones en la Gran Bretaña (por ejemplo Exxon invierte en una plataforma petrolera en el mar del norte) propician una demanda adicional sobre la libra esterlina, estos elementos de demanda reflejan transacciones financieras y comerciales normales.

Otro nivel de demanda que puede ser mucho más volátil se refleja en los inversionistas (o especuladores) americanos a corto plazo que depositan libras esterlinas o certificados de tesorería ingleses en bancos del mismo país. Este tipo de dinero puede tener un rápido movimiento de entrada y salida dependiendo de las tasas de interés relativas y las expectativas de los especuladores sobre cambios en la paridad de la libra esterlina.

Un tercer nivel de demanda puede ser creado por la actividad gubernamental para influir en el tipo de cambio. El Banco Central, Banco de Inglaterra, puede comprar libras esterlinas (o vender dólares americanos) para tratar de estabilizar una libra esterlina a la baja. Aunque, por lo general, se permite que los tipos de cambio de las monedas floten ene el mercado respondiendo a la fuerza de la oferta y la demanda, en ocasiones los bancos centrales intervienen para estabilizar sus monedas. Por esta razón, el sistema actual de paridad extranjera se conoce como un sistema de "flote administrativo". Cualquier intervención estabilizadora por parte de los bancos centrales tiene una efectividad limitada; acotando los efectos indeseados a corto plazo, sin embargo estas medidas carecen de influencia en un plazo mayor de tiempo.

La oferta de libras esterlinas en el mercado de monedas extranjeras refleja factores opuestos. Los importadores ingleses tienen que ofrecer libras esterlinas para comprar dólares y los turistas ingleses en los Estados Unidos tienen que hacer lo mismo. Los inversionistas ingleses o las empresas multinacionales que adquieren valores o propiedades en los Estados Unidos, ofrecen libras esterlinas para la compra de dólares. Las empresas inglesas que pagan dividendos o intereses a los inversionistas americanos lo hacen en libras esterlinas que a la vez se convierten en dólares. Los inversionistas (o especuladores) ingleses a corto plazo atraídos por intereses altos en los Estados Unidos o por expectativas de que la libra esterlina se "caiga", transfieren sus cuentas de bancos ingleses a bancos americanos o invierten en valores americanos. También, si la libra esta subiendo frente al dólar, el sistema Federal de Reserva de los Estados Unidos, puede comprar dólares o vender libras esterlinas.

Estos factores inmediatos determinan el tipo de cambio spot. Los factores económicos fundamentales determinan las tendencias de cambio en la paridad monetaria.

## 2.7 Soluciones a problemas operacionales.

Los administradores internacionales han desarrollado un número de soluciones a los problemas relacionados con la paridad monetaria.

Préstamos y técnicas de cobertura local involucran costos y primas adicionales en monedas débiles. Muchas empresas operan con financiamiento en moneda local e incluyen los costos adicionales en el precio de sus productos. Para esas empresas que no operan sus financiamientos en moneda local, ya sea por el alto costo o por restricciones bancarias, y deben financiarse en moneda fuerte, es necesario que sus administradores vigilen muy de cerca la probabilidad de ocurrencia y la fecha esperada para cambios monetarios.

Los préstamos en moneda fuerte tienen dificultades adicionales. Muchos países que controlan el tipo de cambio de su moneda determinan períodos mínimos para financiamientos en moneda extranjera. Aunque aparezca que tales controles limitan l libertan de movimiento del administrador en minimizar sus pasivos en moneda fuerte, cuando cuenta con excedentes en caja no es necesariamente así.

Una empresa debe cotizar el precio de exportación de un producto manufacturado en la moneda del país de manufactura, con el objeto de minimizar el riesgo cambiario. Existe una importante excepción: si el contenido de material importado del producto es de importancia y la moneda de este material es más fuerte que la moneda de exportación, sería preferible cotizar el producto de exportación en la moneda más fuerte. Por ejemplo, una planta francesa que importa materiales holandeses y exporta su producto a Alemania, posiblemente consideraría facturar en marcos alemanes la moneda más fuerte.

La facturación en dólares protege a las líneas aéreas internacionales, a la industria petrolera y a las empresas manufactureras de aviones; la mayoría de otras empresas están obligadas a facturar en moneda local. Para estas empresas es necesario compensar el impacto de cambios monetarios sobre utilidades mediante cambios a precios anticipados. En países que sufren devaluaciones masivas, las empresas pueden sufrir serios trastornos en la cobranza de facturas en dólares. Un método que reduce este problema es el de financiar la operación a través de un banco comercial como intermediario. A los deudores no les conviene el riesgo de falta de cumplimiento cuando el acreedor es un banco comercial.

Una empresa debe cotizar el precio de exportación de un producto manufacturado en la moneda del país de manufactura, con el objeto de minimizar el riesgo cambiario. Existe una importante excepción: si el contenido de material importado del producto es de importancia y la moneda de este material es más fuerte que la moneda de exportación, sería preferible cotizar el

producto de exportación en la moneda más fuerte. Por ejemplo, una planta francesa que importa materiales holandeses y exporta su producto a Alemania, posiblemente consideraría facturar en marcos alemanes la moneda más fuerte.

La facturación en dólares protege a las líneas aéreas internacionales, a la industria petrolera y a las empresas manufactureras de aviones; la mayoría de otras empresas están obligadas a facturar en moneda local. Para estas empresas es necesario compensar el impacto de cambios monetarios sobre utilidades mediante cambios a precios anticipados. En países que sufren devaluaciones masivas, las empresas pueden sufrir serios trastornos en la cobranza de facturas en dólares. Un método que reduce este problema es el de financiar la operación a través de un banco comercial como intermediario. A los deudores no les conviene el riesgo de falta de cumplimiento cuando el acreedor es un banco comercial.

# Capítulo 3

# El Riesgo Cambiario

El sistema de paridades fijas que se estableció mediante el acuerdo de Bretton Woods durante la segunda guerra mundial se reemplazo a mediados de los años 70's por un régimen de paridades flotantes. Hoy en día las paridades monetarias tienen la libertad de fluctuar entre sí. El cambio y la variabilidad enlas paridades de ocho de las principales monedas, libra esterlina, franco suizo, lira italiana, franfo francés, yen japonés, marco Alemán el guilder holandés y el franco belga, con relación al dólar han sido dramáticos a partir de estas modificaciones y en la actualidad el *euro*.

El peso mexicano con una paridad cambiaria "libre flotació" definida por el banco de México también ha sufrió serias devaluaciones pero estas se debieron principalmente a los desmanes económicos perpetrados por algunos políticos.

En 1967, el tipo de cambio entre la libra esterlina y el dólar se mantuvo estable, sin embargo a partir de noviembre de 1967, cuando la libra se devalúo oficialmente, el tipo de cambio a fluctuado considerablemente.

El resultado neto del incremento en los movimientos de los tipos de cambio ha sido el aumentar tanto las utilidades como las pérdidas potenciales en transacciones internacionales. Hoy en día los exportadores, los importadores y las empresas multinacionales se encuentran expuestas a riesgo cambiario. Antes de la crisis monetaria, los cambios en la paridad de las monedas eran de importancia secundaria. Durante el período de 1971 a 1973, los inversionistas americanos hubieran logrado buenas ganancias manteniendo posiciones en todos, menos en una de las monedas incluidas en la nuestra. Durante los últimos cinco meses de 1973 el mantener por posiciones en estas monedas hubiera producido una perdida relativa en dólares.

Las fluctuaciones en los tipos de cambio no se redujeron después de 1973; la incertidumbre relativa a la magnitud y a la dirección de los cambios en las paridades ha continuando siendo un factor importante en el comercio internacional y en las inversiones internacionales.

El sistema monetario internacional actual consiste de una mezcla de tipos de cambio que flotan libremente y de tipos de cambio fijos. Las monedas de los países que contribuyen el principal intercambio comercial con Estados Unidos se cotizan en el mercado libre. En tales mercados, el tipo de cambio entre dos monedas se determina por la oferta y por la demanda para cada moneda. Sin embargo, esta actividad esta sujeta a la intervención de los bancos centrales de varios países. Los factores que tienen a incrementar la oferta o a disminuir la demanda sobre una moneda causaran una disminución en el valor de la misma en los mercados de cambio de moneda extranjera. De manera similar, los factores que tienden a disminuir la oferta y a incrementar la demanda sobre una moneda causarán que el valor de las mismas se incremente. Las fluctuaciones en el valor de las monedas constituyen un riesgo que se conoce como riesgo de paridad o riesgo cambiario.

Aunque el valor de una moneda se determina por la oferta y la demanda total sobre la misma, este efecto, por sí solo, no permite entender o predecir cambios en l paridad. Existen factores fundamentales tales como la inflación, las tasas de interés, la balanza de pagos, y las políticas gubernamentales que tienen una ingerencia importante sobre las fluctuaciones a corto y alargo plazo en el valor de una moneda.

El planteamiento tradicional para la determinación del tipo de cambio monetario, basado en la ley de la oferte y de la demanda determina que el tipo de cambio vigente es el precio que equilibra la oferta con la demanda de moneda doméstica a cambio de moneda extranjera. La demanda y la oferta son un reflejo de transacciones internacionales de bienes y servicios, y en activos financieros.

## 3.1 Tratamiento del Riesgo con las Divisas

El riesgo cambiario es una consecuencia inevitable de las fluctuaciones en el valor de las monedas.

**Cobertura del Riesgo.** El intento de reducir el riesgo asociado con fluctuaciones futuras en los precios se conoce como cobertura del riesgo. El método más utilizado para reducir el riesgo cambiario es a través de contratos a futuro en el mercado de divisas. Este tipo de coberturas es el que se utiliza en los mercados de productos básicos. En los estados Unidos un agricultor puede vender trigo en Enero para entrega en Mayo a un precio determinado. De esta manera, el granjero queda obligado a la entrega del trigo, y sigue siendo un riesgo comercial, pero ha eliminado el riesgo de fluctuación en el precio.

Los consumidores de productos básicos también se cubren mediante compras en el mercado a futuro. En tales casos los productores y los consumidores se han cubierto; pueden concentrarse en llevar a cabo las labores propias, dejando que otros asuman el riesgo de fluctuaciones en los precios. Los que asumen el riesgo monetario se conocen como especuladores. Asumen el riesgo de su propia voluntad en espera de obtener buenas utilidades si los resultados son favorables. Los especuladores en bienes básicos y en divisas cumplen una función social y deseable. A través de la especulación, los que asumen el riesgo y los que desean evitarlo, cuentan con el medio para lograr su objetivo.

A través de la cobertura el riesgo de modificaciones en el tipo de cambio de divisas se elimina en mercados internacionales. En el mercado de divisas, la incertidumbre del precio futuro es el tipo de cambio que regirá entre dos monedas en una fecha futura. En ciertos casos no cubrirse equivale a especular.

## 3.2 Otras Técnicas para Eliminar el Riesgo.

La cobertura a futuro puede funcionar cuando existe un mercado de divisas a futuro. Mercados a futuro están bien desarrollados en solo algunas de las principales monedas del mundo. Un método que puede utilizarse con monedas que no cuentan con n mercado a futuros, se conoce como "LEADING AND LAGGING", es decir tratar de apresurar o de retrasar pagos e ingresos esperados según la probable dirección de cambios en el tipo de cambio monetario.

Otra estrategia es el de obtener un préstamo o la de hacer un préstamo en la moneda local, por ejemplo, una empresa automotriz extranjera que le vende un equipo a su subsidiaria en México no puede cubrirse en el mercado de divisas a futuro. Sin embargo, puede obtener una cobertura inmediata mediante la obtención de un préstamo bancario local en pesos mexicanos por la cantidad que le adeuda su subsidiaria, liquidable en la fecha en la cual su subsidiaria efectuara el pago del equipo. El importe del préstamo lo convierte de inmediato a dólares en el mercado spot, asegurando un tipo de cambio fijo y lo liquida con los pesos que recibirá de su subsidiaria al vencimiento del plazo.

Un tercer método para reducir el riesgo cambiario es mediante un préstamo paralelo. Supongamos que una empresa espera recibir un pago en 60 días de una subsidiaria en un país cuya moneda no se cotiza en el mercado de divisas a futuro. Al mismo tiempo, otra empresa tiene planes de iniciar la ampliación de su planta en el mismo país y requerirá fondos en moneda local en aproximadamente 60 días. Una empresa quiere vender la moneda local en 60 días y otra empresa la quiere adquirir. Las dos empresas pueden concertar un arreglo que las proteja mutuamente de fluctuaciones en el tipo de cambio. Este tipo de transacciones requiere que las fechas y las cantidades coincidan y es relativamente raro.

En virtud de que la mayoría de las monedas extranjeras tienen fluctuaciones, el valor monetario de una transacción internacional medido en la moneda del comprador o en la moneda del vendedor puede variar cuando el pago se aplaza. Como resultado, el vendedor puede recibir una cantidad menor a la esperada o el comprador puede pagar una cantidad mayor. Por lo tanto el término riesgo cambiario se refiere a la posibilidad de una reducción en el ingreso o de un aumento en el costo de una transacción internacional debido a un ajuste en el tipo de cambio monetario.

La volatilidad incrementada de los valores de divisas obligó a muchas de las empresas multinacionales, a los importadores y a los exportadores a darle mayor importancia a la función de la administración del riesgo cambiario.

## 3.3 Cobertura en el Mercado de Cambios a Futuro.

Una cobertura en el mercado de cambios a futuro involucra un contrato a futuro y una fuente de fondos para cubrir el contrato, el contrato se verifica en el momento en el cual se crea el riesgo transaccional. Si se cuenta con los fondos para cubrir el contrato o si éstos se recibirán por la operación, la transacción se considera "cubierta"porque no existe residual en la moneda extranjera. Los fondos existen o por recibir se equipararán con el importe del contrato, si no se cuenta con los fondos para cubrir el contrato a futuro o éstos se recibirán en una fecha posterior el importe del contrato tendrá que obtenerse en el mercado spot en la fecha de vencimiento y la cobertura se considerará " abierta" o "no cubierta". Esta situación es muy riesgosa porque se desconoce el tipo de cambio spot a futuro.

Por otro lado tenemos una cobertura en el mercado de dinero. La estructura de una cobertura en el mercado de dinero es similar a la de una cobertura en el mercado de cambios a futuro. La diferencia estriba en que el costo de la cobertura en el mercado de dinero se determina por diferenciar en tasas de interés mientras que el costo de la cobertura en el mercado de cambios a futuro es una función de la cotización del tipo de cambio a futuro. En los mercados eficientes la paridad de las tasas de interés asegura que estos costos sean casi iguales, pero no todos los mercados son eficientes todo el tiempo. Además, los diferenciales en tasas de interés a los que se enfrenta una empresa que obtiene prestamos en dos mercados nacionales diferentes pueden diferir del diferencial entre las tasas de interés de los certificados de tesorería cotizados en los mismos mercados, siendo éste un factor relevante para la paridad de tasas de interés.

## 3.4 Cobertura en el Mercado de Opciones.

La empresa US puede cubrir su exposición cambiaria de 1'000,000 mediante la compra de una opción *put*. Esta técnica permite que US especule con el potencial de apreciación de la libra esterlina mientras que limita el riesgo de una depreciación a una cantidad conocida.

Basándose en las cotizaciones anteriores, la empresa US puede comprar una opción *put* en Bolsa con vencimiento en junio a un precio "strike"de 140, una prima de 0.0250 y un monto de 12,500. El costo de esta opción se determina de la siguiente manetra:

- Prima por opción: (0.0250 X 12,500) = 312.50
- Comisión bursátil: 25.00
- Costo total por opción: 337.50
- Costo por la Opción: ( 337.50 / 12,500) = 0.0270
- Cantidad de Opciones requeridas: ( 1,000,000/ 12,500) = 80

- Costo total 80 opciones: (80 X 337.50) = 27,000

La empresa también puede obtener una opción a través de su banco pagando una prima del 2%. El costo de esta opción sería de $(1, 4000, 000)(0.02) = 28, 000$. Por lo tanto, obtiene la opción a través de la bolsa de Philadelphia. Al recibir los 1'000,000 en junio, su valor en dólares depende del tipo spot en esa fecha. Igual que con la alternativa de no cubrirse, el potencial positivo de la opción no tiene límite. A cualquier tipo de cambio superior a 1, 4000, la empresa no ejercitaría la opción de vender las libras al precio "strike"de 1.4000 y las convertiría a dólares tipo spot.

Por ejemplo, si se materializa el tipo de cambio esperado de 1.4350, la empresa convierte las libras a dólares en el mercado spot y obtiene un importe neto de 1,435,000 menos el costo de la opción no ejercitada $27, 000 = 1, 408, 000$.

En contraste con la alternativa de no cubrirse, el riesgo negativo se limita con la opción. Si el valor de la libra se deprecia más bajo de 1,4000, la empresa ejercitaría su opción de vender 1'000,000 al tipo de cambio de 1.40000 y recibiría 1'4000,000 menos el costo de la opción, $27, 000, = 1, 373, 000$. Aunque el resultado neto de una opción "put"con una libra a la baja es inferior al resultado neto de una cobertura en el mercado de cambios futuro o de una cobertura en el mercado de dinero, el potencial positivo de la opción (si la libra se aprecia) no se limita como en el caso de las coberturas. Por lo tanto la decisión entre una posición o una cobertura en el mercado de dinero o en el mercado de cambio a futuro depende de la aversión al riesgo.

Se puede calcular un rango de tipos de cambio para la libra que defina los tipos de equilibrio de la opción con las otras estrategias. El límite superior se determina mediante una comparación con el tipo de cambio a futuro. La libra debe de apreciarse lo suficientemente arriba del tipo de cambio a futuro de 1.4175 para poder cubrir el costo de .027 de la opción que no se ejercita. Por lo tanto el límite superior del equilibrio es de $1.4175 + .027 = 1.4445$. Si el tipo de cambio spot de la libra sobrepasa 1.4445, la cobertura en el mercado de cambio a futura sería más ventajosa.

El límite inferior del rango se determina mediante una comparación de una estrategia de no cubrirse. Si el tipo de cambio spot en Junio es inferior a 1.4, la empresa ejercita la opción y obtiene un importe neto de 1,400,000 menos el costo de la operación $27,000 = 1,373,000$. Si la libra se deprecia debajo de 1.373, el rendimiento neto al ejercitar la opción será superior al de la venta de las libras "no cubiertas"en el mercado spot. A cualquier tipo de cambio spot superior a 1.373 la alternativa de no cubrirse es preferible.

## 3.5 Comparación de Estratégias.

Las cuatro alternativas disponibles para la empresa US se encuentran en el ejemplo. Si el tipo de cambio a futuro y las tasas de interés que rigen a los mercados de dinero están en equilibrio y la empresa US invierte los fondos disponibles a corto plazo en el mercado de dinero, las dos posiciones de cobertura producirán 1,417,500 en tres meses. No puede existir variación en el resultado de la cobertura en el mercado de cambios a futuro, pero la cobertura en el mercado de dinero permite que las empresa cambie su posición de riesgo mediante la inversión de los fondos a una tasa diferentes. En virtud de que pueden existir resultados diferentes al cambiar la situación de riesgo, las dos operaciones de cobertura no son directamente comparables.

**Ejemplo.** Comparación de Estrategias de Cobertura.
Maximizar ingreso por venta en dólares: Pisición sin cobertura.
Vender 1,000,000 en el mercado spot en 90 días.
Recibir en 90 días:

1. Máximo ilimitado.
2. Expectativa de 1,435,000.
3. Mínimo de cero.

COBERTURA EN EL MERCADO DE CAMBIOS A FUTURO
Vender 1,000,000 en el mercado de cambios a futuro en dólares.
Ingreso seguro de 1,417,500 en 90 días

COBERTURA EN EL MERCADO DE DINERO
Obtener préstamo por 980,392 en Londres al 8% anual, convertir a 1,372,549 e invertir en USA por 90 días al 13.1% anual.

1. Recibir de inmediato 1,372,549.

2. Valor en 90 días al 13.1% anual en USA de 1,417,500.

3. Valor en 90 días inversión interna al costo de capital del 15% 1'424,020.

COBERTURA EN EL MERCADO Comprar una opción put a 90 días de 1,000,000, precio strike 140, prima de 27,000. Recibir en 90 días:

1. Máximo ilimitado menos prima de 27,000.

2. Cantidad esperada 1,408,0003. Mínimo de 1,373,000.

Si la empresa no se cubre, su expectativa es la de recibir 1,435,000 en tres meses. Pero esta cantidad puede ser mayor o menor según se comporte el tipo de cambio spot. En el caso de que se acepte el tipo de cambio a futuro como el mas viable tipo de cambio spot futuro, los resultados de una posición sin cobertura serían idénticos a los resultados seguros de las dos posiciones cubiertas. En tal situación, la ventaja de cubrirse sobre no cubrirse es la reducción de la incertidumbre.

La cobertura del riesgo a través del mercado de opciones tiene casi el mismo potencial que la alternativa de no cubrirse cuando la libra tiende a la alza y sin tomar en cuenta el costo de la opción, pero limita el riesgo al recibir un mínimo de 1,373, 000 si la libra baja.

Las opciones en moneda extranjera pueden utilizarse en diversas operaciones de cobertura. Una opción put puede ser de utilidad para empresas de construcción o empresas exportadoras cuando tienen que presentar una cotización a precio fijo en moneda extranjera y el resultado de su cotización no se conocerá hasta una fecha futura. Una opción put puede utilizarse para cubrir el periodo de la cotización o para cubrir el período total de la operación en caso de que la cotización sea aceptada. Si la cotización no es aceptada la pérdida se limita al costo de la opción. En caso de que le riesgo se cubra a través de un contrato en el mercado a futuro y de que la cotización no sea exitosa, será necesario nulificar el cot rato a futuro o cumplir con dicho contrato a su vencimiento con una pérdida o con una utilidad futura desconocida. Este es el caso de un contrato a futuro no cubierto.

## 3.6 Opciones Europeas y Americanas.

Otra distinción entre tipos de opción concierne a las fechas en las que está permitido ejercer los derechos que la opción otorga.

- Una opción europea puede ser ejercida únicamente en una sola fecha: su fecha de vencimiento.

- Una opción americana puede ser ejercida en cualquier fecha hasta su fecha de vencimiento. (A veces tan sólo en una serie de fechas determinadas.)

La distinción tiene orígenes históricos, dado que en Estados Unidos las primeras opciones sobre acciones que se hicieron en Chicago se podían ejerce cualquier día hasta su vencimiento, mientras que en la Bolsa de Londres era tradicional que las opciones se pudiesen ejercer únicamente en el último día de su vida.

Hoy en día la distinción geográfica existe únicamente en el nombre; tanto en América como en Europa y Asía es perfectamente posible hacer opciones con cualquiera de los dos posibles mecanismos de ejercicio.

Aunque en algunos casos su valor puede ser idéntico, en general las opciones americanas son más valiosas que las europeas (de strike y vencimiento idénticos) sobre el mismo activo, dado que otorgan más derechos que estas últimas. Una opción americana tiene que valer por lo menos, lo mismoque una opción europea análoga, porque si no la ejercemos hasta suv encimiento se comporta exactamente igual, y además esposible que tenga más valor porque en algunos casos puede resultar ventajoso ejercerla antes de su vencimiento. El valor relativo de ambos tipos de opción se explica más adelante.

## 3.7 Valor Intrínseco y valor tiempo.

Supongamos que tanto el precio spot como forward de una activo determinado están hoy a 100. si tenemos una opción que nos permite comprar el activo en cuestión a 90, por ejemplo, la opción tiene diez unidades de valor intrínseco, el valor que una opción tendría si la ejerciésemos hoy. Cuando un call tiene un strike que está por encima del precio actual del subyacente, se dice que están in - the - money, en inglés, y tiene valor intrínseco porque si las ejerciésemos hoy recibiríamos dinero.

- In the money: call $(S > K)$, put $(S < K)$.
- At the money: $(S = K)$.
- Out of the money: call $(S < K)$, put $(S > K)$.

Una opción está at-the-money cuando su strike es igual al precio del subyacente, y out-of-the-money cuando está alejado del subyacente de manera que ejercer la opción daría lugar a la pérdida.

**Factores que Afectan el Valor de una Opción sobre una Acción.**

El precio de una opción sobre una acción depende de seis variables:

1. El precio spot de la acción: S
2. El precio de ejercicio (strike): K
3. La volatilidad del precio de la acción: $\sigma$
4. El vencimiento de la opción: t
5. La tasa de interés sin riesgo: r
6. La tasa de dividendo: d

# Capítulo 4

# Modelo para la Valuación de Opciones.

Ahora consideraremos la alternativa de comprar una opción de compra a 6 meses, a un precio de ejercicio de 50 por acción. Un precio aproximado seria de 300 por la opción de compra de 100 acciones, 3 por acción. Si la acción sube a 60 cerca del final del período de la opción el valor de la opcon sería de 10 porque permite comprar en 50 una acción cotizada en 60 y la utilidad es de 10 menos el costo de la opción $3 = 7$. Sí la acción se redujera en precio a 40 el tenedor de la opción simplemente no la ejercería y su pérdida se limitaría al costo de la opcíón, 3 por opción. Sí consideramos a los 3 como el monto de inversión, en este caso, puede ganar 233% o perder 100%.

Una tercera alternativa es el vender una opción de compra sin ser el dueño de las acciones, una opción "desnuda". El vendedor recibe 3 por cada opciónd e compra. La casa de bolsa de bolsa retiene los 300 y exigirá depósitos adicionales al tenedor de la opción si el precio de la acción aumenta. Sí el precio de la acción aumenta a 60 antes de la fecha de vencimiento, la opción vale 10. El vendedor de esta opción tiene que poner 10 por ocpión para surtir las acciones o para liquidar su posición y pierde un neto de 7 por opción. Sí la acción baja a 40, la opción no se ejercita y el vendedor gana 3 por opción.

Podemos obsevar que la utilidad de vendedor de la opción se limita al precio de venta de la opción. Sin embargo, no existe limite a la pérdida posiblr. Esta C incrementa conforme aumenta el precio de la acción.

La cuarta posición que consideraremos es la venta de una opción de compra por un inversionist que es dueño de las 100 acciones (una ocpión "cubierta"). En este caso podemos considerar que la venta de la opción representa la venta de la acción en 53 si el precio aumenta a 60 (precio ejercicio 50 más el valor de la opción de compra de 3 = 53) o un cambio en el precio base a 47 si el precio se reduce a 40 (precio de ejercico 50 menos valor de la opción de comprta 3 = 47). Por lo tanto, si el precio aumenta a 60, la utilidad es de 3 / 50 = 6%, y si baja a 40, la pérdida es de 7 / 50 = 14% (precio original 50 menos precio actual 40 más precio de la ocpón 3).

La compra de una opción de compra incrementa las posibles utilidades o pérdidas porcentuales. La venta de una opción de compra desnuda da como resultado unpatrón diametralmente opuesto a la compra de una opción de compra. La venta de una opción cubierta límita la utilidad posible y reduce, en parte, la posible pérdida porcentual. Notése que el vendedor de una opción desnuda sufre pérdidas con un aumento en el precio de la acción mientras que el vendedor de una opción cubierta sufre pérdida con una reducción en elprecio de la acción. Pntos de vista divergentes sobre la expectativa del precio, darán com resultado, la venta deopciones de compra: estas transacciones en opciones de compra pueden incrementar o reducir, pérdidas o ganancias, según la posición y la estrategia del inversionista.

## 4.1 Relación Básica de Precio.

Con estos antecedentes obre la mecanica del comportamiento en opciones y de sus implicaciones se puede iniciar el ánaliss de los determinantes de la valuaciónd e las opciones. Sí $C$ es el precio final de la opción de compra, $A$ es el precio final de la acción, y $E_0$ = el precio de ejercicio de la opción, entontces:

$$C = A - E_0$$

El precio dfinal de la opción será igual a la diferencia entre el precio final de la acción y el precio de ejercicio. Si el precio terminal de la acción antes de vencer elplazo de la acción es de 60 y el precio de ejercicio es de 50 entonces el valor terminal de la opción $C$ es de 10. En un mundo de seguridad, en equilibrio, el rendimiento sobre todos los activos es igual a L (tasa libre de riesgo). Por lo tanto, los valores terminales del precio de la acción y del precio de la opción sol los siguientes:

$$A = A_0 e^{LT} \qquad \text{y} \qquad C = C_0 e^{LT}$$

$$C_0 = A_0 - (e^{-LT})E_0$$

Por lo tanto, el valor de la opción de compra es igual al precio de la acción menos el precio de ejercicio de la acción descontando la tasa $L$ por el tiempo remanente hasta el vencimiento del contrato. Esta expresión difiere de la ecuación de valuación Black & Scholes que se exponen más adelante, unicamente en la multiplicación de los términos del lado derecho de la ecuación, $A_0$ y $E_0$, y por los factores de probabilidad, $N(d.1)$ y $N(d.2)$. Estos términos de probabilidad reflejan la incertidumnre sobre el precio terminal de la acción.

## 4.2 Determinación de los Valores de la Opciones.

**El modelo binomial**. Para desarrollar el Modelo Binomial se asume un periodo durante el cual el precio de la acción puede subir o bajar de su nivel actual. Si existen los siguientes valores:

- $A_0 = 40$ = precio actual de la acción.
- $Q = 0.5$ = probabilidad de aumento en precio de la acción.
- $L = 0.1$ = tasa de interés libre de riesgo.
- $A = 1.2$ = movimiento multiplicativo ascendente enb el precio de la acción. $(a > (1 + L) > 1)$.
- $d = 0.67$ = movimiento multiplicativo descendente en el precio de la acción $(d < 1)$.

Al final de un período, el precio de la acción puede subir con una probabilidad de $q = 0.5$ a (a A), $(1.2(40) = 48)$, o puede bajar con una probabilidad de $1 - q = 0.5$ a $(dA9, (.67(40) = 26.80)$. La definición del movimiento ascendente, $a$, y del movimiento descendente, $d$, es tal, que no existe límite superior al precio de la acción, pero el límite de precio inferior es de 0. Esto refleja la responsabilidad limitada de las acciones comunes. Al comprar una acción, la pérdida máxima no puede superar al precio de la compra. También se requiere que $a > 1 + L > 1 > d$. De otra manera existirían oportunidades para utilidades de arbitraje sin riesgo.

Si la opción de compra $C$, tiene un precio de ejercicio de 338, el valor final tiene 50% de probabilidad de situarse a 10, $(1.2(40) - 38)$, y 50% de probabilidad de situarse en 0 (el diferencial, $dA - 38$, es negativo y no se ejerce la opción).

Para determinar el precio de una opción de compra es necesario construir un portafolio cubierto, libre de riesgo, que consista de la compra de una acción $A$, y de la venta de $m$ unidades de opción de compra sobre la acción.

La razón de cobertura correcta $m$, puede determiarse igualando el valor del portafolio, cuando sube el precio de la acción con el valor del portafolio cuando baja el precio de la acción:

$$aA - mC_a = dA - mC_d$$

$$m = A(a - d)/(C_a - C_d)$$

$$m = 40(1.2 - .67)/(10 - 0) = 2.12$$

Lo cual indica que elportafolio cubierto, libre de riesgo, consiste de la compra de una acción y la venta de 2.12 opciones de compra sobre la misma.

En vista de que el portafoliono tiene riesgo se puede multiplicar el valor actual del mismo por $(1 + L)$ para determinar el valor al final del período:

$$(1 + L)(A - mC) = aA - mC_a$$

$$C = (A(1 + L - d) + mC_a)/(m(1 + L))$$

Subsituyendo el valor de $m = A(a - d)/(C_a - C_d)$:

$$C = (C_a(1 + L - d)/(a - d) + C_d(a - 1 - L)/(a - d))/(1 + L)$$

Si se fija $p = (1 + L - d)/(a - d)$, y $(1 - p) = (a - 1 - L)/(a - d)$:

$$C = (pC_a + (1 - p)C_d)/(1 + L)$$

La probabilidad de cobertura se denomina $p$. Contiene todas las propiedades de una probabilidad siempre es 0 y 1.

$$C = (10(1 + .1 - .67)/(1.6 - .67)/(1.2 - .67))/(1 + .1) = (10(.8113)))/(1.1) = 7.38$$

Si la opción de comrpa tiene un precio de 7.38, y se requiere la compra de una acción y la venta de 2.12 opciones de compra, la inversión neta requerida en el portafolio cubierto es de:

$$A - mC = 40 - 2.12(7.38) = 24.35$$

Los valores que pueden obtener elportafolio son los siguientes:
Situación Portafolio Valor:
Favorable: $aA - mC_a 1.2(40) - 2.12(10) = 26.80$
Desfavorable: $dA - mC_d .67(40) - 2.12(0) = 26.80$
La utilidad $r$ que genera este portafolio cubierto se determina:

$$r = (valor final/inversion) - 1$$

En este caso: $(26.80/24.35) - 1 = 0.1; r = 0.1 = L$, confirma que la opción esta correctamente valuada.

El desarrollo anterior de la valuación de una opción de compra depende primordialmente de la existencia de un portafolio de cobertura y en una valuación de opción, tal que la cobertura libre de riesgo produce un rendimiento igual a la tasa libre de riesgo. Si el precio de la opción es mayor (o menor), la cobertura puede producir un rendimiento mayor (o menor) al de la tasa libre de sriesgo y existe la posibilidad de generar utilidades por arbitraje sin riesgo. Las opciones de arbitraje, a la vez, obligaríann a que el precio se corrigiera.

El modelo de valuación binomial indica:

1. El precio de la opción no depende de la probabilidad, $q$, de un movimiento ascendente en los precios de la acción. Por lo tanto los inversionistas siempre estarán de acuerdo en un precio sujeto a los parametros $A_0$, $a$ y $d$, $E$, $L$ y $T$.

2. Las actitudes hacia el riesgo sonirrelevantes en la determinación del precio de la opción.

3. La única variable aleatoria sobre la cual depende el precio de la opción es el precio de la acción.

**Modelo de Black & Scholes**. La determinación del valor se basa en la reación de una cobertur a perfecta mediante una posición larga (corta) en la acción y, al mismo tiempo, una opción opuesta corta (larga) sobre un número de opciones. Con el objeto de eliminar utilidades por arbitraje, el rendimiento de una posición perfectamente cubierta debe ser igual al rendimiento libre de riesgo. Una opción de compra que únicamente puede ser ejecutada a una fecha de vencimiento futura (opción europea), puede ser evaluada mediante las siguientes expresiones:

$$C = AN(dist.1) - E(e^{-LT})N(dist.2)$$

teniendo que:

$$dist.1 = \frac{\ln\left(\frac{A}{E}\right) + T\left(\frac{L+\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T}}$$

y

$$dist.2 = (dist.1) - \sigma\sqrt{T}$$

donde:

- C= valor de la opción.
- A= valor del activo (acción).
- E= precio de ejercicio de la opción.
- N= función de densidad acumulativa normalizada.
- L= rendimiento libre de riesgo.
- $\sigma^2$= varianza del porcentaje de renidimiento de la acción.
- T= tiempo de duración de la opción.

## 4.3 La Valuación de Valores Corporativos

El modelo para la valuación de opciones también proporciona información adicional sobre la naturaleza de la deuda y del capital contable de la empresa. Como la deuda tiene un vencimiento, el capital contable puede considerarse como una opción de compra europea sobre el valor total de la empresa. Los accionistas de la empresa cuentan, de hecho con una opción para la recompra de la empresa a los tenedores de bonos aun precio de ejercicio igual al valor par de los bonos en la fecha de su vencimiento. Si el valor de la empresa, $V_N$, es mayor al valor par de los bonos, el capital contable tendrá un valor positivo. Sí el valor de la empresa es menor al valor de los bonos, el valor del capital contable es cero; pero no puede tornarse negativo por la misma naturaleza del capital contable que limita sus obligaciones al valor de las acciones. La limitación en las obligaciones del capital de la empresa explica el porque la forma corporativa a facilitado la obtención de grandes cantidades de capital. Los accionistas y tienen protección contra una baja en el valor de la empresa menor a $C$ (el valor par de los bonos igual al precio de ejercicio de la opción y tienen el derecho al diferencial en valor de la empresa mayor a $C$.

El modelo de valuación de opciones permite tener el valor de una acción si se conoce el valor de la deuda o de $C$, el precio de ejercicio de la opción. También permite analizar el efecto del riesgo sobre la inversión en la empresa o en los programas de producción (el grado de apalancamiento operativo), sobre los intereses y sobre las posiciones de los accionistas con relación a los acreedores. Un ejemplo numérico ilustrará las ideas involucradas:

Asumamos lo siguiente: El valor actual d e la empresa Vo es de 3,000,000 el valor a la par de la deuda de es de 1,000,000 y le restan 4 años $T$, hasta el vencimiento. En la anotación $A$ toma el lugar de $C$, y $C$ toma el lugar de $E$. La varianza del rendimiento porcentual sobre el valor de la empresa $\sigma^2$ , es de 0.01, y $L = 5\%$. Primero se calculan las dos funciones de distribución:

Dist. 1 = (ln 3 + (.05 + .005)4) / (.1(2)) = 1.3186 / .2 = 6.593

N (dist. 1) = 1

Dist. 2 = 6.593 - 0.2 = 6.393

N (dist. 2) = 1

en segundo lugar, determinaremos el valor de las acciones comunes:

$$A = 3,000,000(1) - 1,000,000(1)e^{-0.2} = 2,181,269$$

Dado que el valor de la empresa es de 3,000,000, y el valor determinado de las acciones es de 2,181,269, el valor indicado de la deuda es de 818,731.

Ahora es posible investigar los efectos de cambiar el riesgo del programa de inversión de la empresa. Si la empresa obtiene más inversiones riesgosas que aumenten su varianza, a .16, es posible calcular los valores del capital contable y de la deuda, asumiendo que el valor de la empresa se mantiene en 3,000,000. Empezando con las funciones de distribución:

Dist. 1 = (1.0986 + (.05 + .08)4) / .4(2) = 2.0233

N (dist. 1) = 0.9785

Dist. 2 = 2.0233 - .08 = 1.2233

N (dist. 2) = 0.8894

A continuación se calcula el valor del capital de la empresa mediante el modelo de valuación de opciones:

$$A = 3,000,000(.9785) - 1,000,000(.88949(.81873)) = 2,207,322$$

el valor de la deuda se reduce en 792,678 y el incremento en el riesgo de las operaciones de producción incrementa el valor del capital y reduce el valor de la deuda. Por lo tanto el modelo de valuación indica que existen intereses divergentes entre los accionistas y los acreedores. Como los accionistas tienen el control de la empresa, puede darse el caso que tomen decisiones que sean adversas a los intereses de los acreedores. Por tales razones existen restricciones sobre lo que pueden y lo que no pueden hacer los accionistas con relación a los acreedores.

El valor de una opción de compra depende de cinco factores:

A. El precio de la acción, A.

1. El precio de la opción, $C$, se modifica de acuerdo al movimiento en el precio de la acción.
2. $C > 0$, siempre existe la posibilidad de que termine $eneldinero$.
3. $C < A$, el valor de la opción no puede exceder al valor de la acción.
4. $C > (A - E)$, el precio de la opción debe de ser cuando menos, igual a su valor, si se ejercita, en otras palabras, la diferencia entre el precio de la acción y el precio de ejercicio.

B. El precio de ejercicio, E.

1. Mientras menor sea el precio de ejercicio mayor será el precio de la opción.
2. Si E = 0, el precio de la opción es igual al precio de la acción.

C. Tiempo de vigencia, T.

1. Mientras mayor sea el tiempo al vencimiento, mayor será el precio de la opción. Existe más posibilidad de que el precio de la acción sobre pase el precio de ejercicio.
2. Si no existiera el vencimiento, el precio de la opción sería igual al precio de la acción.

D. La varianza en el precio de la acción.

1. Mientras mayor sea la varianza, mayor será el valor de la opción. Existe una mayor posibilidad que el precio de la acción sea mayor que el precio de ejercicio.
2. Una varianza mayor no tiene efecto a la baja cuyo mínimo es $C = 0$.

E. La tasa libre de riesgo, L.

1. Mientras mayor sea la tasa L mayor será el precio de la opción.

2. $C \geq Max(0, A_0 - Ee^{-LT})$

   a. $Ee^{-LT}$ se reduce conforme L aumenta,

   b. $A - Ee^{-LT}$ aumenta conforma $LT$ se incrementa.

F. Resumen de los factores que afectan el precio de una opción: $C_0 = f(A_0, E, T, \sigma^2, L)$:

1. $A$: efecto positivo.
2. E: efecto negativo.
3. T: efecto positivo.
4. $\sigma^2$: efecto positivo.
5. L: efecto positivo.

## 4.4 Elaboración de Contratos Financieros.

Todos los contratos financieros pueden ser elaborados mediante la elaboración de cuatro elementos básicos: acciones, bonos libres de riesgo, opciones de compra y opciones de venta. En México no contamos con un mercado de opciones. En las graficas siguientes, se muestra la rentabilidad de las opciones de compra *call* y las opciones de venta *put*. El eje vertical mide el cambio en el patrimonio del inversionista a través del tiempo y el eje horizontal mide el cambio en precio del activo, en este caso, una acción.

Supongamos que se compra una opción de compra sobre una acción $LePat$ con vigencia de un año. La acción se vende en $A = 30$ y el precio de ejercicio $E = 30$, así que $A = E$. La opción de compra es un contrato que paga cero si expira y el precio de la acción es menor o igual al precio de ejercicio, $A \leq E$, o paga la diferencia entre el precio de la acción y el precio de ejercicio si el precio de la acción es mayor al precio de ejercicio, $A > E$. El valor de una opción a la fecha de vencimiento, $T$ es:

$$C_T = Max(0, A_T - E)$$

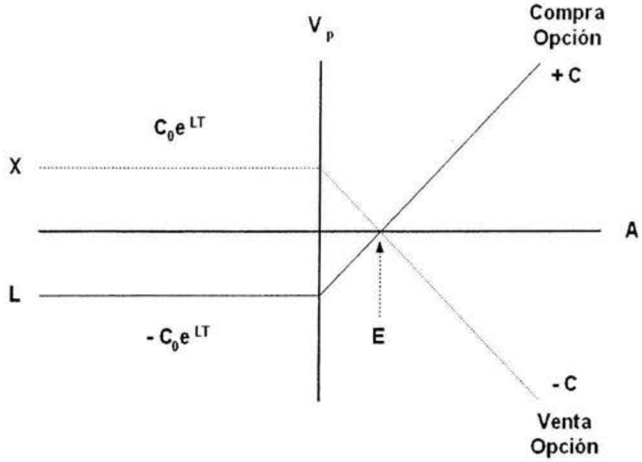


Figura 4.1: Opción de Compra

Supongamos que la opción sobre la acción Vitro Mx tiene un costo de 3. Si el cambio en el precio de la acción $A$, es negativo; entonces el cambio en el patrimonio del inversionista, $Vp$, al final del año es:

$$V_P = -Ce^{LT}$$

Si la tasa libre de riesgo L = 10% y el intervalo de tiempo T = 1 año, el cambio en el patrimonio del inversionista es:

$$V_P = -(3)e^{1(1)} = -3.32$$

Si la opción expira fuera del dinero, el inversionista pierde el valor futuro de su inversión original en la opción.

Si el precio de la acción sube, el patrimonio del inversionista se aumenta 1 por cada aumento de 1 en el valor de la opción A. Por ejemplo, si la acción aumenta 3.32 en precio, la utilidad al final del período se equipara al valor

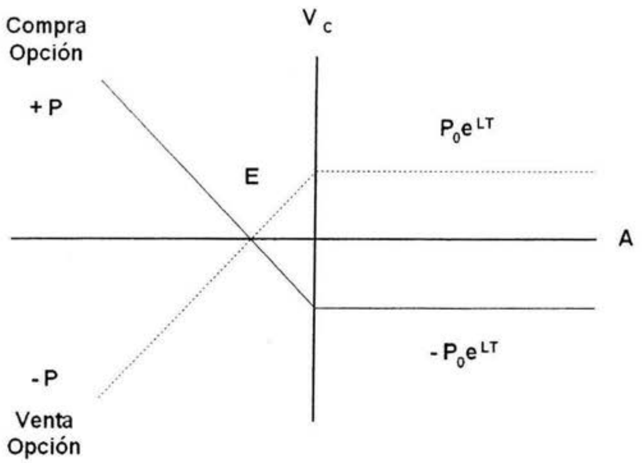


Figura 4.2: Opción de Venta

futuro de la opción y el cambio en el valor del inversionista es cero. La gráfica se representa esta situación en el punto $N$. La línea completa LMNO representa el valor del inversionista al final del período si compra una opción de compra.

La línea XYNZ en la gráfica tambien se representa la rentabilidad si se vende una opción de compra. Los resultados son exactamente opuestos a los de la compra de una opción.

La compra de una opción de venta *put* otorga el derecho de vender una opción al precio de ejercicio. Si el precio de la acción baja, una opción de venta termina *en el dinero* y la utilidad es de $E - A_T$. Si el precio de la opción aumenta, la opción de venta expira sin valor. Los resultados de una opción de venta, $P_T$, son:

$$P_T = Max(0, E - A_T)$$

La grafica se muestra los resultados de la compra de una opción de venta, *put* en la línea sólida y los resultados de la venta de la opción en la línea punteada.

Una inversión en una acción más una opción de venta sobre la acción con un precio de ejercicio $E$, equivale a la inversión en bonos libres de riesgo con un valor par $E$, en una opción de compra con precio de ejercicio $E$ sobre la misma acción.

Para crear una posición sin riesgo con una acción, con la venta de una opción de compra $-C$, y con la compra de una opción de venta $P$, la ecuación anterior se convierte en:

$$B = A - C + P$$

Comprueba entonces que se puede obtener una posición sin riesgo mediante la compra de una acción, la compra de una opción de venta sobre la acción y la venta de una opción de compra sobre la acción.

## 4.5 La Paridad de Opción de Compra y de Venta.

En 1969, Stoll desarrolló la relación que demuestra que, para opciones europeas existe una relación fija entre el precio de mercado de una opción de venta y el precio de mercado de una opción de compra siendo ambas opciones sobre la misma acción, con la misma fecha de vencimiento y con el mismo precio de ejercicio.

Por ejemplo, se forma un portafolio que consiste de la compra de una acción de la empresa X, de la compra de una opción de venta y de la venta de una opción de venta, ambas opciones sobre la acción de la empresa X. El precio de la acción es de $A_0 = 30$, el plazo de vencimiento $T$ es de un año y el precio de ejercicio de $E = 30 = A_0$. Según expuesto con anterioridad el portafolio es equivalente a un bono re de riesgo. El portafolio siempre estará un valor de $E$ en la fecha de vencimiento, no importando el precio que tenga la acción. $E$ es igual al valor par de un bono $BT$.

En la fecha de vencimiento, el precio de la acción puede haber subido, puede haberse mantenido igual o puede haber bajado. Si el precio de la acción en la fecha de vencimiento es menor al precio de ejercicio, el valor del portafolio es:

$A = 25$

Valor de la acción: $A = 25$

Opción de compra no se ejercita: 0

Opción de venta: $E - A = 5$

Valor del portafolio: $E = 30$

si $A > E$:

$A = 35$

Valor de la acción: $A = 35$

Opción de venta:$-(A - E) = -5$

Opción de compra no se ejercita: 0

Valor del portafolio: $E = 30$

No importa el precio de la acción en la fecha de vencimiento, el valor del portafolio siempre será de $E$. Por consecuencia, el rendimiento del portafolio no tiene riesgo y su valor se puede descontar a la tasa libre de riesgo. Aplicando descuento continuo

$$A_0 + P_0 - C_0 = Ee^{-LT}$$

$$C_0 P_0 = A_0 - Ee^{-LT}$$

sí $T = 1$ año y $L = 10\%$, el valor actual del bono libre de riesgo con descuento puro, con valor par es:

$$B_0 = Ee^{-LT} = 27.15$$

esta cantidad es igual $A_0+P_0-C_0$, y se puede utilizar la siguiente ecuación para determinar la diferencia en valor entre la opción de compra y la opción de venta:

$$C_0 - P_0 = A_0 - Ee^{-LT} = 30 - 27.15 = 2.85$$

si el valor de la opción de compra es $C_0 = 3$, la opción de venta tiene un valor de $3 - (C_0 - P_0) = 3 - 2.85 = 0.15$.

Siempre y cuando $A_0 = E$:

$$C_0 - P_0 = A_0(1 - e^{-LT}) > 0$$

y el precio de la opción de compra debe ser mayor al precio de la opción de venta.

## 4.6 Portafolios Cubiertos.

Con el objeto de proporcionar una mayor intuición sobre el modelo Black & Scholes, se repiten a continuación las siguientes ecuaciones:

$$C_0 \geq Max(0, A_0 - Ee^{-LT})$$

esta ecuación determina las fronteras del precio de una opción.

$$C_0 = A_0 N(dist.1) - E_0 e^{-LT} N(dist.2)$$

Esta ecuación es la fórmula de valuación de Black & Scholes para una opción.

Una explicación intuitiva para N (dist. 1) se obtiene tomando la derivada parcial del precio de la opción de compra, C, con respecto al precio de la acción, A:

$$\frac{\partial C}{\partial A} = N(dist.1)$$

por lo tanto, N (dist. 1) es igual al cambio en el precio de la opción de compra con respecto al cambio en el precio de la acción, y es la pendiente de una línea a tangente a la función de la opción de compra 4.6

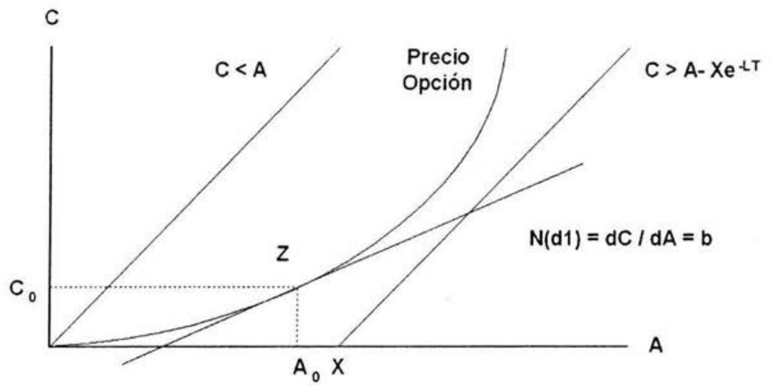


Figura 4.3: Función Precio - Opción de Compra

Dado el precio Ao de la acción, se puede armar un portafolio cubierto, libre de riesgo, mediante la compra de una acción y la venta de $m$ opción s de compra sobre la misma acción. El valor de este portafolio cubierto Vc, es:

$$Vc = A - mC$$

y su cambio por unidad de tiempo es:

$$\frac{dV_c}{dT} = \frac{dA}{dT} - m\left(\frac{dC}{dT}\right)$$

si se fija

$$m = \frac{dA}{dC} = \frac{1}{N(dist.1)}$$

entonces la cobertura no tiene riesgo en el siguiente incremento de tiempo $dT$. Sustituyendo el valor de $m$ en la ecuación se tiene:

$$\frac{dV_c}{dT} = \frac{dA}{dT} - \left(\frac{dA}{dC}\right)\left(\frac{dC}{dT}\right) = 0$$

Esto nos comprueba que la cobertura no tiene riesgo si la posición es de una acción y la cobertura es de $m$ opciones de compra sobre una acción. Se puede considerar a N(dist. 1) como la inversa de la razón de cobertura $m$.

Este tipo de cobertura únicamente se mantiene sin riesgo para pequeños cambios en el precio de la acción. La razón de cobertura debe cambiarse cada vez que ocurra un cambio en el precio de la acción. Por ejemplo, en la 4.6, si el precio de la acción se reduce debajo de $A_0$ la pendiente de la línea tangente a la función de la opción de compra se reduce en valor y N(dist. 1) se incrementa.

N(dist. 2) en la segunda ecuación también tiene una explicación intuitiva, denota la probabilidad de que la opción termine en el dinero.

## 4.7 Combinación de Opciones.

Combinaciones de Opciones de Compra y Venta. El precio de una opción de compra sobre un valor siempre es mayor al precio de una opción de venta sobre el mismo valor. Esto se debe al proceso de conversión a través del cual una opción de venta se puede convertir en una opción de compra y viceversa.

La combinación de la compra de una opción de venta y de una opción de compra sobre la misma acción y al mismo precio de ejercicio, E, se conoce como *straddle* en un mercado americano. Esta combinación le produce una utilidad, U +, al comprador si la variación negativa o positiva en el precio de la acción PA, es mayor a la prima total de las opciones, Cv + Cc. A la vez, la venta de un straddle le produce una utilidad al vendedor igual al monto total de las primas, siempre y cuando la variación en el precio de la acción fuera inferior al valor total de las primas.

La compra de dos opciones de venta y de una opción de compra sobre la misma acción y al mismo de precio de ejercicio, E, se conoce como *strip*. Esta combinación la obtiene el comprador cuando piensa que existe una mayor probabilidad de un movimiento a la baja en el mercado. Obtiene una utilidad, U+, siempre y cuando la variación en el precio de la acción, PA, sea mayor a la prima total, Cc + Cv, de las opciones. Esta utilidad será mayor si el cambio en el precio es a la baja. El vendedor de un strip obtiene una utilidad igual al monto total de las primas si la variación en el precio de la acción es inferior al monto total de las primas.

La combinación de dos opciones de compra y una opción de venta sobre la misma acción y al mismo precio de ejercicio se conoce como un *strap*. El strap es similar al strip por el hecho de que producirá una utilidad si el movimiento de la acción a la alza o a la baja es mayor al monto total de las primas. El strap produce una mayor ganancia si el movimiento de la acción es a la alza. El comprador del strap piensa que la tendencia del mercado es alcista.

La combinación de una compra de una opción de compra sobre una acción con un precio de ejercicio, Ec, mayor al precio de la acción, A, y de la compra de una opción de venta sobre la misma acción con un precio de ejercicio, Ev menor al precio de la acción, A, se conoce como *spread*. Se requiere una variación mayor en el precio de la acción ya sea a la baja o a la alza para lograr una variación neta mayor al monto total de las primas, Cv + Cc. Las primas para opciones con estas características en el precio de ejercicio son menores a las primas de opciones con un precio de ejercicio igual al precio de la acción.

En un mercado con marcada tendencia ascendente los inversionistas quieren comprar opciones de compra pero los agentes de opciones no quieren vender opciones de compra por la muy probable pérdida que incurriría al ejercitarse las mismas. Sin embargo los agentes de opciones estarían más que dispuestos a vender opciones de venta. Como consecuencia de esta anomalía, los especialistas en conversiones comprarían opciones de venta y venderían opciones de compra sobre una acción y simultáneamente se cubrirían tomando una posición larga sobre la misma acción.

# Capítulo 5

# Dinámica de Precios.

## 5.1 Modelo para la Valuación de Activos en Capitales.

El Modelo para la Valuación de Activos Capitales (MVAC), define al portafolio del mercado como un portafolio eficiente, y por lo tanto, como un portafolio óptimo.

Siendo un portafolio óptimo, el principio de la optimalidad es aplicable y todos los valores y portafolios se ubican en la grafica del MVAC, sobre la línea del mercado de capitales, cuando su precio esta equilibrado con su rendimiento esperado. Esta línea mide el rendimiento esperado (R) sobre el eje Y y la varianza marginal ($\beta$) relativa al portafolio del mercado sobre el eje X. La línea del mercado de valores, LMV, y cruza el eje Y a la altura del punto que mide el rendimiento libre de riesgo, ($R_1$), y también pasa por el punto $(1, R_M)$, que determina el cruce de la $\beta M = 1$, y el rendimiento ($R_M$), del portafolio del mercado, estos dos puntos son suficientes para trazar la línea del mercado de valores.

La relación de equilibrio denotada por LMV se mantiene a través del efecto cambiado de los ajustes de los inversionistas en la composición de sus portafolios y de las presiones resultantes sobre el precio de los valores.

- Una acción esta subvaluada si su rendimiento esperado es mayor al rendimiento apropiado para acciones que tengan atributos relevantes comparables (riesgo medido).
- Una acción esta sobrevaluada si su rendimiento esperado es menor al rendimiento apropiado para acciones que tengan atributos relevantes comparables (riesgo medido).
- El valor $\alpha$ de una acción es la diferencia entre su rendimiento esperado, (ERj), y el rendimiento apropiado esperado Rj, en equilibrio.
- Una acción esta subvaluada si el valor alfa es positivo.
- Una acción esta sobrevaluada si su valor alfa es negativo.

De acuerdo con el modelo para la valuación de activos capitales el único atributo relevante es la $\beta$. El rendimiento esperado apropiado lo determina la línea del mercado de valores mediante la aplicación de la siguiente ecuación:

$$Rj = R_L + (R_m - R_L)j$$

donde:

Rj = Rendimiento esperado del valor $j$.

$R_L$ = Rendimiento libre de riesgo (Cetes).

$R_m$ = Rendimiento del protafolio del mercado.

j = Varianza marginal relativa del valor $j$.

La varianza marginal relativa $j$ se determina mediante la siguiente ecuación

$$j = \frac{Cov(Rj, Rm)}{\sigma_m^2}$$

La beta j de un valor mide la volatilidad relativa que los movimientos del valor tienen con relación a los movimientos del mercado. Si el mercado sube 10%, con valor $j$=1.5, tiende a subir 15%.

## 5.2 Determinación del Riesgo.

En la tabla 1 que aparece a continuación, se han tomado diez posibles escenarios con una probabilidad igual para cada escenario y para cada uno se ha estimado el rendimiento de la acción $j$, $(Rj)$, con el rendimiento del portafolio del mercado $(R_m)$.

En este caso, al subconsiderar que cada uno de los datos obtenidos para el rendimiento de la opción $j(Rj)$, y para el rendimiento del portafolio, $R_m$, tienen probabilidades iguales, el rendimiento esperado para la opción j se calcula obteniendo el promedio de los rendimientos anotados. De manera similar, se obtiene el rendimiento esperado del mercado utilizando los datos anotados.

La varianza $(\sigma^2)$, y la desviación estándar $(\sigma)$, son medidas estadísticas de riesgo que miden la dispersión de una serie de datos alrededor de la media esperada de estos datos.

- Un valor positivo para la covarianza indica que los rendimientos de los dos valores tienden a moverse en la misma dirección.

- Un valor negativo para la covarianza indica que los rendimientos de los dos valores tienden a moverse en direcciones opuestas.

- Un valor pequeño o cero a cero para la covarianza indica que existe muy poca relación o que no existe relación alguna entre os movimientos de los rendimientos de los dos valores.

- El coeficiente de relación facilita la comparación con los valores correspondientes de otros pares de variables. El valor de coeficiente de correlación siempre tiene un valor entre (-1,1).

- El valor de +1 para el coeficiente de correlación indica una correlación perfecta entre los rendimientos de los dos valores y en el otro extremo un valor de -1 indica una correlación negativa perfecta.
- Por lo general, el coeficiente de correlación de los rendimientos de dos valores tiene un valor intermedio entre (-1,1).

El riesgo total de un valor medido por la varianza del valor ($\sigma^2$) se compone por dos partes: 1) el componente del riesgo que relaciona la influencia de los movimientos del mercado sobre los movimientos del valor (riesgo sistemático) y 2) el componente de riesgo que no tiene relación con los movimientos del mercado (riesgo no sistemático).

Riesgo del mercado $= (\beta_j)^2\sigma_m^2$.

Riesgo No relacionado al mercado $= (\sigma_j)^2 - (\beta_j)^2\sigma_m^2$.

Riesgo Total $= (\sigma_j)^2$.

La variable $r^2$ indica la proporción de la varianza total que le corresponde al riesgo que se relaciona con el mercado.

$$r^2 = \frac{(Riesgo del Mercado)}{\sigma_j^2}$$

## 5.3 El Riesgo del Portafolio.

La beta para un portafolio se determina tomando el promedio ponderado de las betas que componen al portafolio. Sin embargo, no existe la misma relación para $r^2$ que para el riesgo no relacionado con el mercado. El riesgo del portafolio que no se relaciona con el mercado puede ser bastante menor al riesgo no relacionado con el mercado de los valores individuales que componen el portafolio. Este fenómeno se debe al hecho de que el riesgo no relacionado con el mercado puede reducirse, e inclusive, eliminarse mediante la diversificación. Un valor típico para la $r^2$ de un solo valor es de aproximadamente .30. La incertidumbre del mercado es, por lo tanto, de solamente un 30% de la incertidumbre total de mantener un valor en la cartera de inversiones. Sin embargo la proporción es bastante mayor cuando se toma en consideración un portafolio altamente diversificado. El valor de $r^2$ para un portafolio institucional altamente diversificado puede sobrepasar el 90%. A nivel portafolio, el componente de riesgo debido al mercado puede ser bastante mayor al componente de riesgo que no se relaciona con el mercado.

## 5.4 El Riesgo no Relacionado del Mercado.

Este tipo de riesgo se calcula tomando la raíz cuadrada de la varianza no relacionada con el mercado. Una aproximación al rendimiento del valor sería su valor esperado, si se conoce el Rendimiento Esperado del Mercado ($Erm$) de antemano.

La Relevancia del Riesgo Relacionado al Mercado y del Riesgo no Relacionado al Mercado.

El riesgo del mercado se relaciona al riesgo del portafolio del mercado y a la beta del valor o del portafolio en cuestión. Mientras mayor sea la beta, mayor será el riesgo y mayor será el rendimiento requerido del valor o del portafolio. Estas dos relaciones implican que los valores o portafolios con un mayor riesgo de mercado deberán tener mayores rendimientos esperados.

De acuerdo al modelo para la valuación de activos capitales, el riesgo relacionado con el mercado se remunera mientras que el riesgo no relacionado con el mercado no se remunera.

La Beta - Medida de Sensibilidad a los movimientos del Mercado.

La línea característica de un valor con relación al portafolio del mercado obtenida por análisis de regresión, tiene una pendiente igual al valor de la beta, la ecuación para la línea característica de los rendimientos de los dos valores es la que sigue:

$$R_j = a + bR_m$$

se aplican las ecuaciones de análisis de regresión para obtener a y b.

La beta de un valor mide el porcentaje de cambio esperado en su rendimiento por cada 1% del cambio de un rendimiento del portafolio del mercado.

## 5.5 La Teoría del Portafolio.

Cuando se toma en consideración el riesgo de una inversión en particular es muy conveniente considerar la relación que la inversión puede tener con otras inversiones potenciales. Por ejemplo, una empresa fabricante de raquetas de tenis puede considerar diversificarse mediante la fabricación de esquís para nieve. Sabe que en el verano la venta de raqueta de tenis es alta y los rendimientos de la industria son altos. El mercado para esquís se comporta de manera opuesta; sus ventas son altas en el invierno. Una empresa diversificada conversiones en la fabricación de raquetas de tenis y en la fabricación de esquís puede esperar ingresos más estables que los de una empresa que se dedique exclusivamente a una de estas industrias. En otras palabras, la desviación de los rendimientos del portafolio de activos medida por su desviación estándar puede ser menor que la suma de las desviaciones de los rendimientos de los activos individuales.

El coeficiente correlación de los rendimientos de la fabricación de raquetas de tenis y de la fabricación de esquís es negativo. Cuando los rendimientos de la fabricación de raquetas de tenis los rendimientos de la fabricación de esquís es baja y viceversa. Si dos proyectos a y b tienen un alto grado de correlación negativa, entonces una inversión que contiene $a$ y $b$ reduce el riesgo global de la inversión. Esta reducción en riesgo se conoce como el efecto de portafolio.

A la inversa, si existe una alta correlación positiva entre los proyectos $a$ y $b$, rendimientos para $a$ cuando $b$ genera rendimientos altos, el riesgo global no se reduce tan significativamente por la diversificación. Si el coeficiente de correlación entre $a$ y $b$ es de $+1$, la reducción en riesgo es de cero y no se obtiene efecto de portafolio.

Si los rendimientos de los dos proyectos no tienen correlación, el coeficiente de correlación igual a cero todavía se puede esperar cierto grado de reducción en los riesgos por diversificación. Mientras un mayor número de inversiones independientes o con mínima correlación se incluyan en el portafolio, menor será la variación en el rendimiento global. Proyectos sin correlación pueden reducir el riesgo más que proyectos con correlación positiva, pero los proyectos con correlación negativa producen una reducción mayor del riesgo.

El coeficiente de correlación varia entre +1 y -1; +1 para una correlación positiva perfecta, se mueven al unísono y en la misma dirección; y -1 para una correlación negativa perfecta, se mueven al unísono pero en direcciones opuestas. Si el coeficiente es cero, los proyectos son independientes.

Resumen de los argumentos anteriores:

1. Si se puede obtener un número suficiente de proyectos perfectamente correlacionados negativamente, la diversificación puede eliminar el riesgo por completo. Es casi imposible encontrar proyectos con este tipo de correlación.

2. Si se puede obtener un número suficiente de proyectos sin correlación, la diversificación puede reducir el riesgo significativamente.

3. Si todos los proyectos tienen una correlación perfecta positiva, la diversificación no reduce el riesgo.

Los rendimientos de inversiones en proyectos muy relacionados a los productos y a los mercados de la empresa, tendrán por lo general muy alta correlación con los rendimientos dela empresa y no reducirán su riesgo global. Sin embargo, las inversiones en otras líneas de producción o en otras áreas geográficas pueden tener una correlación baja con los demás componentes dela empresa y pueden reducir su riesgo global.

## 5.6 Rendimiento Esperado de un Portafolio.

Un portafolio se define como una combinación de activos, y la teoría del portafolio trata con la selección de portafolios óptimos; portafolios que producen el mayor rendimiento posible para el grado especifico de riesgo o el menor riesgo para un rendimiento especifico.

La tasa de rendimiento de un portafolio es una función lineal, es el promedio ponderado de los rendimientos de las inversiones individuales incluidas en el portafolio. El peso que se le aplique a cada rendimiento es la porción invertida en ese activo. Si $R_p$ es el rendimiento del portafolio y $X_i$ es la fracción de los fondos invertidos en el activo $I$, entonces:

$$R_p = \sum_{I=1}^{N} X_I R_I$$

donde:

$$\sum_{i=1}^{N} X_i = 1$$

La varianza del portafolio, $\sigma^2$ es la sumatoria de las diferencias de las desviaciones de los rendimientos elevadas al cuadrado, con el rendimiento esperado del portafolio. Para un portafolio de dos valores, A y B, se determina mediante la siguiente ecuación:

$$\sigma^2 = X_A^2\sigma_A^2 + X_B^2\sigma_B^2 + 2X_AX_BCov(A, B)$$

El coeficiente de correlación se determina como sigue:

$$\rho(A,B) = \frac{Cov(A,B)}{\sigma_A \sigma_B}$$

La covarianza negativa y la correlación de -1 nos indican que los resultados buenos y malos son opuestos para la acción A y para la acción B. Cuando ocurre este tipo de situaciones, siempre se puede construir un portafolio con cero de riesgo.

Cuando el portafolio se compone de más de dos valores, por ejemplo acciones A, B y C, la varianza del portafolio, se determina de la siguiente manera:

$$\sigma_P^2 = X_A^2\sigma_A^2 + X_B^2\sigma_B^2 + X_C\sigma_C^2 + 2X_AX_BCov(A,B) +$$

$$2X_AX_CCov(A,C) + 2X_BX_CCov(B,C)$$

Esta ecuación puede extenderse a cualquier número de activos. La varianza de cada activo se multiplica por la proporción invertida en éste, al cuadrado, así que la primera parte dela ecuación es a suma delas varianzas de los activos individuales multiplicadas por la proporción invertida en cada uno, es decir:

$$\sum_{i=1}^{N} X_i^2\sigma_i^2$$

El segundo grupo de términos en la expresión para la varianza de un portafolio lo constituyen las covarianzas de cada para de activos. La doble sumatoria que aparece a continuación captura los términos de la covarianza:

El que no se multiplique la expresión dentro de la sumatoria por 2, como sucede en la ecuación, se debe a que con la doble sumatoria, por ejemplo, la covarianza entre los activos 2 y 3 se produce cuando $j = 2$ y $k = 3$, y nuevamente cuando $j = 3$ y $k = 2$.

Si se suma la ecuación de la varianza a la ecuación de la covarianza se obtiene la siguiente ecuación:

Si se considera el caso en el cual todos los activos son independientes, la covarianza entre éstos es igual a cero. Además, si se cuenta con un portafolio con n activos y se invierte una proporción igual de 1/N en cada activo, la aplicación de la formula es la siguiente

El término dentro del paréntesis es un promedio de las varianzas de los N activos individuales. Conforme N aumente su valor, la varianza se reduce. Conforme N tiende al infinito la varianza del portafolio se aproxima a cero. Si existen activos independientes suficientes, la varianza de un portafolio conteniéndolos se aproxima a cero.

Por lo general, en la mayoría de los mercados el coeficiente de correlación y la covarianza entre activos son positivos. En estos mercados, el riesgo del portafolio no se puede reducir a cero pero si puede ser menor que la varianza de un activo individual.

Nuevamente si se considera una inversión igual de $\frac{1}{n}$ , en $n$ activos , la formula para la varianza de este portafolio es:

Los términos dentro de los paréntesis, dentro de las sumatorias, son promedios. Existen $n$ valores de $j$ y $n-1$ valores de $k$ ($k$ no puede ser igual a $j$). En total, existen $n(n-1)$ términos de covarianza, y el segundo término es la sumatoria de las covarianzas dividido entre el número de covarianzas, por lo tanto también es un promedio.

Esta expresión es una representación mucho más realista de lo que ocurre cuando se invierte en un portafolio de activos. La contribución a la varianza del portafolio por la varianza de los valores individuales se aproxima a cero conforme n tiende al infinito. Sin embargo, la contribución de los términos de covarianza se aproxima a la covarianza promedio conforme N tiende al infinito. El riesgo individual de los valores puede desaparecer mediante la diversificación (aumento en N), pero la contribución al riesgo total causada por los términos de covarianza no, puede diversificarse.

## 5.7 Delineación de Portafolios Eficientes.

El coeficiente de correlación tiene un valor máximo de +1 y un valor mínimo de -1, como ayuda para demostrar estos dos casos extremos se utiliza un ejemplo específico, así como expresiones generales para riesgo y rendimiento. Se consideran dos acciones una empresa cementera (C) y una empresa siderúrgica (E). Las empresas tienen las siguientes características:

Rendimiento Esperado Desviación std. Cementera 14% 6% Siderúrgica 8% 3%

La empresa cementera genera utilidades mayores y tiene un riesgo mayor al de la empresa siderúrgica.

Caso 1. Correlación positiva perfecta. Con un coeficiente así, la ecuación de riesgo del portafolio es:

Con un coeficiente de correlación +1, tanto el riesgo como el rendimiento del portafolio son combinaciones lineales del riesgo y del rendimiento de cada valor. Toda combinación de dos valores que tienen perfecta correlación positiva se encuentran sobre una línea recta en el espacio riesgo y rendimiento.

En el caso de valores perfectamente correlacionados, el rendimiento y el riesgo del portafolio de los dos valores es un promedio ponderado del rendimiento y del riesgo de los valores individuales. No existe reducción en riesgo al formar este portafolio. En el espacio riesgo y rendimiento, las combinaciones de los dos valores que quedan sobre una línea recta que une a los dos valores. Nada se ha ganado con diversificar en lugar de comprar uno u otro de los valores individuales.

Rendimiento esperado y Desviación std. Para el portafolio del ejemplo cuando p=+1

$Xc = (0, 0.2, 0.33, 0.66, 1)$

$Rp = (8, 9.2, 10, 12, 14)$

$Sigmap = (3, 2.6, 4, 5, 6)$

Caso 2. Correlación negativa perfecta (p=-1)

Al lado derecho de una ecuación es -1 veces el lado derecho de la otra. Cada ecuación es válida únicamente cuando el lado derecho es positivo. Una ecuación es positiva cuando la otra es negativa, excepto cuando ambas son iguales a cero. Estas ecuaciones son muy similares a la ecuación que tiene una correlación positiva pero, en este caso, las combinaciones de los dos valores se encuentran sobre dos líneas, cada valor de $\sigma p$ esta contenido en ambas líneas.

Ambas ecuaciones, $pce = -1$, arrojan un valor para $\sigma p$ menor al valor desarrollado cuando $pce = +1$. Si dos valores tienen una correlación negativa perfecta siempre será posible encontrar una combinación d estos valores que arroje un riesgo de cero. Si cualquiera de las ecuaciones 1 ó 2 se fija igual a cero, se puede despejar para $X_c$ y obtener la proporción de inversión en la acción $C$ que produzca un riesgo de cero en el portafolio $\sigma p = 0$.

Tomando los datos del portafolio del ejemplo, el riesgo mínimo se obtiene cuando

Y para el caso de correlación negativa perfecta:

Si tienen dos ecuaciones para determinar el valor del riesgo. La ecuación apropiada es la que produzca un valor positivo $\sigma p > 0$. Rendimiento esperado y desviación std. Para el portafolio del ejemplo cuando $p = -1$

$Xc = (0, 0.2, 0.33, 0.66, 1)$

$Rp = (8, 9.2, 10, 12, 14)$

$Sigmap = (3, 1.2, 0, 3.2, 6)$

Caso 3. Correlación de cero (p=0)

La expresión para el rendimiento del portafolio no cambia, pero con una correlación de cero, la covarianza también es cero y la ecuación para el riesgo se convierte en:

Rendimiento esperado y desviación std. Para el portafolio del ejemplo

cuando p=0 $Xc = (0, 0.2, 0.33, 0.66, 1)$
$Rp = (8, 9.2, 10, 12, 14)$
$Sigmap = (3, 2.68, 2.82, 4.09, 6)$

En el caso de un portafolio compuesto de valores independientes, p=0, existe una combinación de estos valores que produce el mínimo riesgo, esta combinación puede determinarse tomando la derivada de la ecuación para $\sigma p$ con respecto a $X_c$, y fijando esta derivada igual a cero.

Caso 4. Riesgo intermedio (p=.5)

Por lo general, la correlación entre dos acciones es mayor a cero y considerablemente menor a uno. La ecuación para el riesgo de un portafolio compuesto por acciones de la cementera y siderúrgica de nuestro ejemplo cuando su correlación es de .5 es:

Rendimiento esperado y desviación std. Para el portafolio del ejemplo cuando p=0.5

$Xc = (0, 0.2, 0.33, 0.66, 1)$
$Rp = (8, 9.2, 10, 12, 14)$
$Sigmap = (3, 3.17, 3.46, 4.58, 6.0)$

Si el coeficiente de correlación es de 0.5 se obtiene el riesgo mínimo cuando $X_c$ es igual a cero aplicando la ecuación (3):

En este caso en especial se tiene una correlación de .5 entre las acciones y ninguna combinación de las acciones puede lograr una reducción en riesgo menor a la de la acción con menor riesgo. El valor para el coeficiente de correlación no tiene que ser necesariamente .5 para que en ninguna combinación de las acciones produzca un riesgo menor al de la acción individual con el menor riesgo. Este valor depende de las características de las acciones que compongan el portafolio. Para todas las acciones existe un valor de tal que el riesgo del portafolio no puede reducirse a un nivel menor al del riesgo de la acción con menor riesgo en el portafolio.

De los análisis efectuados hasta este punto se deduce lo siguiente:

1. Mientras menor sea el coeficiente de correlación (más cercano a 1) manteniendo los atributos constantes, mayor es el rendimiento y menor es el riesgo debido a la diversificación.

2. Una combinación de dos valores nunca puede tener más riesgo que el que se encuentra en la línea recta que une a los dos valores en el espacio riesgo - rendimiento (correlación de + 1).

3. Por lo tanto, conforme se dan portafolios con una correlación menor $a + 1$ y mayor a cero, estos se encuentran sobre una curva cóncava que une a los dos valores. La forma de esta curva no puede ser convexa porque el rieso de un portafolio que se encuentra sobre la curva convexa es mayor a la de un portafolio sobre la línea que une los dos valores.

## 5.8 Frontera Eficiente sin Ventas en Corto.

La grafica de todas las posibles combinaciones de portafolios se asemejan a la grafica $P - 1$. Un inversionista siempre prefiere mayor rendimiento y menor riesgo. Si se puede encontrar un conjunto de portafolios que:

1. Ofrece un mayor rendimiento por el mismo riesgo, 2. Ofrece un menor riesgo o el mismo rendimiento,

se habrán identificado todos los portafolios aceptables para un inversionista. Todos los demás portafolios se ignorarán.

Un examen de los portafolios A y B en la grafica P - 1 indica lo siguiente:

Se prefiere el portafolio B al portafolio A porque ofrece un mayor rendimiento por el mismo nivel de riesgo. De igual manera, el portafolio C es superior al portafolio A; ofrece el mismo rendimiento a un nivel de riesgo menor. En este punto del análisis no se puede encontrar un portafolio que domine al portafolio C o al portafolio B, y se aprecia que un conjunto de portafolios eficientes no pueden incluir portafolios inferiores. Para cualquier punto en el espacio riesgo - rendimiento, se busca el movimiento máximo posible en la dirección de rendimientos crecientes y a la vez, en dirección a riesgo de creciente. El punto D, un punto exterior, puede eliminarse porque existe el portafolio E que ofrece un mayor rendimiento por el mismo riesgo. Conforme se examina el límite exterior con un movimiento del punto D al punto C se puede concluir que el portafolio c no puede excluirse. No existe un portafolio que ofrezca menos riesgo por el mismo rendimiento o un mayor rendimiento por el mismo riesgo. El portafolio C se conoce como el portafolio con varianza mínima global.

Pasando al punto F, que se encuentra sobre el límite exterior, se nota que el punto E ofrece menor riesgo con el mismo rendimiento. Al moverse por el límite exterior de F hacia B se nota que todos los portafolios están nominados hasta llegar al portafolio B. El portafolio B no puede ser eliminado. No existe otro portafolio con mayor rendimiento por el mismo riesgo o con menor riesgo por el mismo rendimiento. El portafolio B (por lo general una acción individual) representa al portafolio que ofrece el rendimiento esperado mayor del conjunto global de portafolios. Por lo tanto, el conjunto eficiente de los portafolios se encuentra sobre la curva exterior que envuelve a todos los portafolios y se conoce como la frontera eficiente.

La frontera eficiente es una función cóncava en el espacio riesgo - rendimiento, que abarca desde el portafolio con varianza mínima global hasta el portafolio con rendimiento máximo. El problema del portafolio es determinar todos los portafolios que se encuentran sobre la frontera eficiente; una tarea laboriosa que se resuelve mediante un programa computacional.

## 5.9 Frontera Eficiente con Ventas en Corto

La venta por parte de un inversionista de una acción que no posee, con la esperanza de reponerla en el futuro a un precio inferior a la de la venta efectuada se conoce como una venta en corto. En esencia este proceso involucra tomar una posición negativa (posición corta) en la acción, para obtener una utilidad si el precio de la acción se reduce. Un aumento en el precio de la acción le producirá una pérdida. Ventas en corto se manejan en volpúmenes considerables en las principales bolsas de valores del mundo. En la Bolsa Mexicana de Valores las ventas en corto han sido autorizadas, pero están en proceso de operar.

Como un ejemplo sencillo, que se muestra a continuación, se describe en la manera en la cual se verifican las operaciones en corto:

Un inversionista piensa que las acciones de la empresa ABC, cuyo precio actual es de 100, posiblemente pague un dividendo de 3 y tenga un precio de 95 al final del año. Si el inversionista compra una acción de ABC los flujos de efectivo serán los siguientes:

Tiempo 0 1 Compra de la acción - 100 Dividendo + 3 Venta de la acción + 95 Flujo de efectivo total - 100 + 98

Es poco probable que un inversionista, que tenga estas expectativas sobre la acción ABC, la incluya en su portafolio. El inversionista preferiría ser dueño de cantidades negativas de la acción. Para lograr la posición negativa, el inversionista puede pedir prestada a través de su agente de bolsa una acción de ABC con la condición de liquidar cualquier dividendo que la acción declare durante el período del préstamo y de reponer la acción de BC al término del préstamo. La acción prestada se vende de inmediato en 100 y al final del año se liquida el dividendo de 3 y se compra una acción de ABC al precio esperado de 95 para reponer la acción prestada. Los flujos de efectivo de esta transacción son:

Tiempo 0 1 Compra de la acción + 100 Dividendo - 3 Venta de la acción - 95 Flujo de efectivo total + 100 - 98

El prestamista de la acción mantiene su misma posición, mientras que el inversionista a logrado crear un valor que tiene características opuestas a la compra de una acción de ABC.

Si un inversionista espera rendimientos negativos de una acicón, la solucióne s tomar la posición corta en la acción. Aún en el caso de esperar rendimientos positivos se pueden utlilizar posiciones cortas para lograr un beneficio. El flujo proveniente de la venta de acciones en coarto puede utilizarse para adquirir una acción que tenga un rendimiento esperado mayor.

Regresando al ejemplo de la venta cementera y siderúrgica, el rendimiento mayor esperado si no se permiten aventas en corto es de 14% si se invierte 100% de los fondos en acciones de la empresa cementera. Con ventas en corto se pueden lograr rendimientos mayores vendiendo acciones de la empresa siderúrgica en corto y colocando el capital original del inversionista más el flujo inicial de las ventas en corto de la empresa siderúrgica en acciones de la empresa cementera. Esta operación aumenta el riesgo copnsiderablemente. Para determinar el rendimiento esperado, $R_p$, y el riesgo, $\sigma p$, cuando se efectuan ventas en corto se aplican las mismas operaciones utilizadas con anterioridad pero los limites de $X_c$ deben ampliarse a más de uno y menos de cero. La restricción $X_c + X_e = 1$ se mantiene.

La ecuación para el riesgo de un portafolio compuesto por acciones de la empresa cementera y siderúrgica cuando la correlación es de 0.5, es:

Rendimiento esperado y desviación std. Para el portafolio del ejemplo cuando p=0.5

$Xc = (-1, -0.6, -0.2, 1.2, 1.6, 2)$
$Rp = (2, 4.44, 6.8, 15.2, 17.6, 20)$
$Sigmap = (6, 4.33, 3.17, 6.92, 8.8410.82)$

La grafica P - 2 contiene el diagrama que demuestra ventas en corto. Con ventas en corto se puede lograr un número infinito de portafolios con rendimientos esperados diferentes. Por ejemplo, un inversionista que cuenta con 100 para una inversión en acciones en empresa cementera y siderúrgica puede invertir 100 en la cementera y obtener un rendimiento de 14 o sea 14%. También puede vender en corto 1000 de siderúrgica y comprar 1100 de cementera. El rendimiento esperado de esta inversión en la cementera es de 154 mientras que el costo del préstamo de las acciones de la siderúrgica es de 80, por lo tanto, el rendimiento esperado es de 74 equivalente al 74% de la inversión original de 100. El rendimiento aumenta del 14% al 74%, pero el riesgo también aumenta del 6% al 57.2%. La decisión sobre esta inversión depende de la aversión al riesgo del inversionista.

La grafica P - 2 muestra combinaciones de la cementera y de la siderúrgica asumiendo un coeficiente de correlación de 0.5. Nótese que todos los portafolios que ofrecen rendimientos mayores al del portafolio con varianza mínima global se encuentran sobre una curva cóncava. El razonamiento para esto es análogo al presentado en el caso sin ventas en corto.

Al extender este análisis a la frontera eficiente de todos los valores y portafolios se obtiene la curva en la gráfica P - 3, donde MVBC es el conjunto de portafolios eficientes. El conjunto eficiente empieza con MV (El portafolio con varianza mínima global), pero al permitirse ventas en corto no existe un límite superior finito.

**La Frontera Eficiente con Inversiones y Préstamos a la tasa libre de riesgo.**

En este caso, se puede considerar un préstamo a la tasa libre de riesgo como la venta en corto de un valor libre de riesgo. Se denota la tasa libre de riesgo con las siglas Rl. Como el rendimiento es absolutamente seguro, la desviación std,. Del valor libre de riesgo es de cero.

En primer lugar se examina el caso en el cual los inversionistas pueden invertir (prestar) y obtener préstamos en cantidades ilimitadas a la tasa libre de riesgo. Si un inversionista desea invertir parte de sus fondos en un portafolio A, y prestar o recibir préstamos a la tasa libre de riesgo, se puede determinar el patrón geométrico de todas las combinaciones del portafolio A con estos prestamos e inversiones. Se denota como X la fracción de los fondos originales invertidos en el portafolio A. X puede ser mayor que 1 porque el inversionista puede obtener préstamos a la tasa libre de riesgo e invertir en una cantidad mayor a la inversión inicial en el portafolio A. Siendo X la fracción que el inversionista coloca en el portafolio A entonces $(1 - X)$ representa la fracción colocada en valores libres de riesgo. El rendimiento esperado de la combinación de un valor libre de riesgo y de un portafolio riesgoso se determina por:

Esta ecuación representa una línea recta. Todas las posibles combinaciones de préstamos e inversiones a la tasa libre de riesgo con el portafolio A, se encuentra sobre una línea recta. El intercepto de la línea con el eje de los rendimientos es $R_l$, y la pendiente de la recta es $\frac{(Ra-Rl)}{\sigma a}$. Además la recta pasa por el punto $(\sigma a, Ra)$. Nótese en la gráfica P - 4 que sobre la recta y a la izquierda del punto A, se encuentran las combinaciones de la inversión a la tasa libre de riesgo con el portafolio A. A la derecha del punto A y sobre la recta se encuentran las combinaciones de préstamos a la tasa libre de riesgo con el portafolio A,.

Las combinaciones de cualquier valor o portafolio con prestamos o inversiones a tasa libre de riesgo, se ubican sobre una línea recta ene l espacio rendimiento - riesgo. Un examen de la gráfica P - 5 indica que se puede combinar el portafolio B con prestamos e inversiones. Estas combinaciones parecen sobre la línea RlB, y son superiores a las combinaciones sobre la línea RlA; Producen un mayor rendimiento por el mismo riesgo. Lo que se busca es la mayor rotación de la línea que pasa a través del punto Rl en dirección contraria a las manecillas del reloj. Esta máxima rotación se logra cuando la línea pasa por el punto G, el cual al igual que los puntos A y B se encuentra sobre la curva de la frontera eficiente. No se le puede dar mayor rotación a la línea en vista de que, por definición de la frontera eficiente no existen portafolios por la línea que pasa por Rl y el punto G.

Los inversionistas conuna alta aversión al riesgo seleccionarían portafolios sobre el segmento Rl-G, colocando parte de la inversión en un valor libre de riesgo y el remanente en el portafolio G. Otros inversionistas más tolerantes hacia el riesgo, colocarían sus inversiones en portafolios colocados sobre el segmento G-H, obteniendo prestamos y colocando la inversión inicial más los fondos prestados en el portafolio G. Otros inversionistas colocarían la totalidad de su inversión en el punto G. Todos estos inversionistas mantienen portafolios riesgososo con la exacta composición del portafolio G. Por lo tanto, para el caso de prestamos e inversiones a la tasa libre de riesgo, la identificación del portafolio G constituye la solución al problema del portafolio. La habilidad de poder determinar el portafolio óptimo de inversiones riesgosas sin la necesidad de tener información sobre el inversionista se conoce como el teorema de la separación.

Un inversionista puede invertir todos los fondos que requiera en valores libres de riesgo, pero, por lo general, los prestamos requieren el pago de una tasa de interés mayor. Si a esta tasa se le denota con las siglas Rl, la frontera eficiente se convierte en Rl G - H - I, grafica P- 6 , y los portafolios en el segmento GH son opcionales para el inversionista.

# Capítulo 6

# Procesos Estocásticos en Finanzas.

Como tema complementario y con la finalidad de introducir otros elementos necesarios para la valoración de opciones, es necesario dedicar un capítulo a la parte correspondiente al cálculo probablístico y algunos resultados importantes como el lema de Itô.

Resulta curioso señalar que la mayor parte de los resultados necesarios no tienen sus orígenes en la teoría financiera tradicional, si no en el trabajo realizado a principios de siglo sobre el movimiento Browniano (el movimiento aleatorio de pequeñas partículas de polvo o de polen suspendidas en un gas) y la teoría cinética de los gases, aunque el lema de Itô es un resultado mucho mas reciente.

Otro resultado muy importante que veremos en este capítulo es la ecuación diferencial de Black & Scholes, que junto con sus varias generalizaciones forma la base de la valoración de casi todos los instrumentos derivados.

En este capítulo introduciremos en manera a veces poco vertiginosa varios conceptos importantes:

- Los procesos estocásticos.
- El lema de Itô.

- El proceso lognormal como modelo de comportamiento de los precios de los activos financieros.
- La distribución lognormal de precios.
- La ecuación de Black & Scholes que satisface en todos los instrumentos derivados.
- La valoración de instrumentos bajo la indiferencia al riesgo, que unifica todas las posibles preferencias de un inversionista con respecto al riesgo.

## 6.1 Proceso Estocásticos.

Una variable cuyo valor evoluciona en el tiempo de manera aleatoria (o por lo menos parcialmente aleatoria) esta siguiendo un proceso estocástico. La variable puede ser casi cualquier cosa; el resultado de un juego de azar, el precio de una acción, el número de manchas solares en un día, la temperatura del día, o una señal eléctrica con ruido, como por ejemplo una señal de radio muy débil o con interferencias. Los primeros trabajos sobre el tema tuvieron su origen en el estudio del movimiento aleatorio de partículas muy finas de polvo suspendidas en el aire, pero los resultados obtenidos son aplicables en áreas en que se extiende mucho mas allá de la teoría cinética de los gases.

Según los valores que pueda tomar la variable estocástica en cuestión, el proceso estocástico puede clasificarse como *de variable discreta* o *de variable continua.* Un proceso de variable discreta puede ser, por ejemplo, el número obtenido al tirar un dado, ya que los únicos resultados posibles son los números enteros, del uno al seis. Un proceso de variable continua podría, por ejemplo, ser la temperatura diurna al medio día, ya que la temperatura no tiene porque tener ningún valor especial; si vemos que la temperatura es de 20 y aumentamos la resolución de nuestro termómetro veremos probablemente un valor decimal mucho mas preciso como 20.18. Todos los valores intermedios entre ciertos limites razonables son en principio posibles.

De modo análogo podemos definir procesos estocásticos de tiempo continuo o de tiempo discreto. Un proceso de tiempo discreto es aquel cuya variabilidad no cambia constantemente de valor, sino que sólo lo hace en ciertos momentos determinados. Un ejemplo podría ser de nuevo un dado; el valor de la puntuación obtenida no cambia hasta que volvemos a echar el dado. Un proceso de tiempo continuo es, por ejemplo, el ruido eléctrico que se oye por el radio, y que consiste en una señal eléctrica que cambia constantemente de amplitud, o la anteriormente mencionada temperatura que fluctúa durante todo el día.

En general, los activos financieros suelen seguir procesos de variable discreta (por ejemplo el valor de un futuro en eurodólares solo puede variar en múltiplos de un punto base, como podría ser 9305 a 9306, pero nunca 9305.5), pero es frecuente tratarlos como si fuesen de variable continua porque en la practica los movimientos mínimos permitidos son tan pequeños que importa poco la distinción, y el cálculo integral y diferencial continuo es mucho más fácil que el discreto. En cuanto al tiempo, podría decirse que los activos financieros siguen procesos de tiempo discreto también, ya que casi todos los mercados cierran al menos una vez al día y durante ese tiempo los precios no pueden cambiar. En la práctica, los precios siguen cambiando aún cuando el mercado esta cerrado, ya que el precio de apertura no tiene porque ser el precio de cierre del día anterior. Algunos estudios han mostrado que cambian menos cuando el mercado esta cerrado, pero no cabe duda que cambian. Por lo tanto resulta convencional suponer que el proceso estocástico seguido por los activos financieros es un proceso de variable continua y tiempo continuo.

Hay algunas excepciones a esta regla general, algunos tipos de opciones (opciones sobre el precio medio de un activo durante un periodo determinado), que utilizan un proceso de tiempo discreto (el precio al cierre diario de un mercado, o el "fixing"de las doce del medio día o como en el caso de LIBOR).

## 6.2 Proceso de Markov y Eficiencia Debil del Mercado.

Un proceso estocástico posee la propiedad de Markov cuando su estado actual es la única variable necesaria para predecir su futuro; su estado anterior y su evolución histórica no afectan a las predicciones sobre el futuro.

La suposición convencional es que los activos financieros siguen procesos de Markov y toda la información que afecta a su precio esta contenida en su valor actual; no podemos hacer predicciones sobre su evolución ni obtener información adicional sobre la forma de su distribución de sus probabilidades basándonos en el pasado. El valor actual es la única variable que cuenta. Podemos utilizar el pasado para obtener información de naturaleza estadística, como puede ser la desviación estándar, por ejemplo, pero el camino exacto seguido por los precios hasta el presente no importa.

El párrafo anterior fórmula la llamada "eficiencia débil"de un mercado, hipótesis según la cual el precio anual contiene toda la información disponible sobre un activo, y por lo tanto los analistas de acciones, bonos o divisas, no pueden obtener rendimientos superiores a la media mediante un análisis de graficas de precios históricos. Cabe señalar que ningún estudio hasta la fecha ha demostrado de manera definitiva la posibilidad de ganar utilizando métodos de análisis técnico, pero por otra parte, tampoco se ha demostrado de manera concluyente la imposibilidad de hacerlo, y muchos "traders"profesionales son grandes devotos del análisis técnico. La cuestión esta aún por resolverse, (de hecho parece ser que los métodos de análisis estadístico tienen cierto valor en determinadas circunstancias), pero aún así, de aquí en adelante continuaremos con la hipótesis convencional de que el análisis técnico no puede aportar información importante sobre la evolución de los precios, justificando nuestra hipótesis diciendo por una parte, que el mercado esta lleno de análisis técnicos con metodologías muy parecidas compitiendo por extraer la misma información, que por lo tanto estará ya incluida en el precio, y por otra parte (quizás la razón más importante) que las matemáticas son más fáciles si podemos suponer la aplicabilidad de la "eficiencia débil", porque podemos usar un enorme aparato matemático ya que ha sido desarrollado en el mundo de la física.

## 6.3 Proceso de Wiener.

Un proceso de Wiener es un caso especial de proceso estocástico de importante aplicación en finanzas. La variable z significa un proceso de Wiener cuando sus cambios $\Delta z$ en un pequeño intervalo de tiempo $\Delta t$ tiene dos propiedades:

1. $\Delta z = \varepsilon\sqrt{\Delta t}$, donde $\varepsilon$ es una variable aleatoria con distribución normal, media de cero y varianza de 1.

2. Los valores de $\Delta z$ en dos intervalos de tiempo $\Delta t$ son independientes. Esto equivale a decir que el proceso es un proceso de Markov.

El proceso así obtenido en el límite $\Delta t \to 0$ es un proceso de Wiener.

La propiedad 1 implica que $\Delta z$ tiene a su vez una distribución normal con media cero y varianza $\Delta z$, y desviación estándar de $\sqrt{\Delta t}$.

Si consideramos un intervalo mayor de tiempo podemos también calcular la desviación estándar y la varianza, porque todo el intervalo de tiempo $t_2 - t_1$ puede descomponerse en $n$ intervalos menores a $\Delta t$, de manera que podemos sumar los incrementos $\Delta z$ para obtener

$$z(t_2) - z(t_1) = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \sqrt{\Delta t}$$

$$z(t_2) = z(t_1)$$

$$\sigma^2(z(t_2)) = N\Delta t = t_2 - t_1$$

$$\sigma(z(t_2)) = \sqrt{t_2 - t_1}$$

Donde $\sigma^2$ es la varianza, y $\sigma$ es la desviación estándar de $z(t_2)$.

El resultado proviene de la propiedad de las distribuciones normales según la cuál, toda variable que es a la vez la suma de $n$ variables normales independientes $Z_i$, es a su vez una variable normal cuya varianza es la suma de las varianzas de todas las $Z_i$, y cuya media es la suma de las medidas de todas las $Z_i$.

Al tomar el límite $\Delta t \to 0$ en la ecuación 1, de la página anterior obtenemos el proceso de Wiener

$$dz = \varepsilon\sqrt{dt}$$

que podemos a su vez generalizar incluyendo un término que es una función determinística del tiempo transcurrido y una varianza por la unidad de tiempo que no sea necesariamente 1. El proceso resultante para una variable $X$ es:

$$dx = adt + bdz$$

donde $a$ y $b$ son constantes.

En el término $adt$ presenta la parte determinística dela evolución de $x$, lo que se llama el *drift*, y que corresponde a la tendencia general del movimiento de $x$. El otro lado, $bdz$, representa la parte aleatoria y por lo tanto impredecible del movimiento de $x$, el "ruido"por así decirlo. La constante $b$ es la desviación estándar del término aleatorio.

### Distribución Normal.

La función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria de Wiener es una distribución normal, con media $at$ y desviación estándar $b$. La fórmula general es

$$\phi(x,\sigma\sqrt{t}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{t}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2 t}}$$

Y la normal acumulativa $N(x,\sigma\sqrt{t})$ es su integral:

$$N(x,\sigma\sqrt{t}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{t}\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2 t}} dx$$

## 6.4 Proceso de Itô.

El proceso de Itô es una generalización del proceso de Wiener en que a y b pueden a su vez ser funciones determinísticas del valor x y de k tiempo transcurrido t:

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz$$

**Lema de Itô.**

En el proceso de Itô antes descrito $dz$ es un proceso de Wiener con *drift* de $a$ y varianza de $b^2$. El lema de Itô afirma que cualquier función $f(x,t)$ de $x$ y $t$ sigue a su vez el proceso:

$$df = \left( \frac{\partial f}{\partial x} a + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} b^2 + \frac{\partial f}{\partial t} \right) dt + \frac{\partial f}{\partial x} b dx$$

Este nuevo proceso *df* es también un proceso de Itô. Su *drift* es,

$$\frac{\partial f}{\partial x} a + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} b^2 + \frac{\partial f}{\partial t}$$

y su varianza es:

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 b^2$$

El lema de Itô es un resultado importante, y a continuación mostraremos (de manera poco rigurosa) su prueba:

**Prueba del lema de Itô.**

El lema de Itô proviene de hacer una expansión cuidadosa de primer grado en series de Taylor de la función $f(x,t)$. Recordaremos que a la expresión de primer orden de una función general $f(x,t)$ es normalmente:

$$\Delta f = \frac{df}{dx}\Delta x + \frac{df}{dt}\Delta t$$

Esta expresión, aunque parece correcta hasta el primer grado, no lo es en realidad cuando f sigue un proceso de Itô, dado que $\Delta x$ es a su vez una función de $\Delta t$, con un termino en $\Delta t$ de grado más bajo que líneal. Para obtener la expresión correcta tenemos que tomar todos los términos hasta segundo grado, simplificar, y entonces reducir la serie a una serie de primer grado. Tomando términos hasta segundo orden tenemos:

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Delta x^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\Delta t^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\Delta x \Delta t.$$

Recordemos que $dx = a(x,t)dt = b(x,t)dz$. Por lo tanto

$$\Delta x = a(x,t)\Delta t + b(x,y)\Delta z$$

$$= a\Delta t + b\varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

Por lo tanto un término como $\Delta x^2$, que es aparentemente de segundo orden, no lo es en realidad ya que tiene un término $\Delta t$:

$$\Delta x^2 = (a\Delta t + b\varepsilon\sqrt{\Delta t})^2$$

$$= a^2\Delta t^2 + b^2\varepsilon^2\Delta t + 2ab\varepsilon\Delta t\sqrt{\Delta t}$$

$$\approx b^2\varepsilon^2\Delta t$$

tomando términos en $\Delta t$ hasta solo primer orden.

La varianza de e es 1 y su media es cero, con lo que podemos simplificar un poco:

$$E(\varepsilon^2) - [E(\varepsilon)]^2 = 1$$

y $\varepsilon = 0$

$$\Rightarrow E(\varepsilon^2) = 1$$

$$\Rightarrow \Delta x^2 \cong b^2\Delta t$$

Si sustituimos este resultado en la expresión de $f(x,t)$ de segundo grado anterior y tomamos únicamente términos hasta primer orden obtenemos:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}a + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}b^2 + \frac{\partial f}{\partial t}\right)dt + \frac{\partial f}{\partial x}bdz$$

*El lema de Itô.*

**Aplicaciones del lema de Itô - Variables Lognormales.**

Podemos utilizar el lema de Itô para obtener el proceso seguido por una función de $x$, por ejemplo $\ln x$, el logaritmo natural de $x$:

$$dx = \mu x dt + \sigma x dz$$

$$f(x) = \ln x$$

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{1}{x} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

$$\Rightarrow df = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dz \qquad \text{(lema de Ito)}$$

Por lo tanto, $f$ tiene una distribución normal con media de $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$ y desviación estándar $\sigma$. Una variable tiene una distribución **lognormal** cuando, como la variable $x$ que acabamos de definir, su logaritmo tiene una distribución normal.

## 6.5 El Proceso Seguido por el Precio de una Acción o una Divisa.

Tanto las acciones como las divisas siguen procesos estocásticos, pero antes de postular un proceso cualquiera de los múltiples procesos estocásticos posibles, cabe señalar algunos aspectos de los precios:

- El precio de una acción o de una divisa no puede ser jamás negativo, por lo que el proceso que describe su evolución ha de ser tal que impida la aparición de valores negativos.
- El movimiento en el precio de una acción es, aproximadamente, proporcional a su valor; es decir, que si el valor de una acción que hoy esta a 100, puede variar, por ejemplo, entre 90 y 110 en un mes, el valor de una acción igual que hoy está a 10 podrá variar aproximadamente entre 9 y 11 en un mes.

Un proceso como el de Wiener, $dx = adt + bdz$, no nos sirve puesto que:

- Admite valores negativos de $x$; si empezamos con $x$ ligeramente positivo con unos cuantos $dz$ negativos pronto tendremos $x$ negativo.
- La varianza b es independiente de $x$, por lo que sigue teniendo el mismo valor cuando $x$ es casi igual a cero que cuando $x$ es muy grande.

Un proceso sólo un poco más complicado es el siguiente proceso de Itô, en el que usamos $S$ para la variable en cuestión:

$$dS = uSdt + \sigma Sdz$$

o

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz$$

El proceso de Itô presentado satisface nuestras anteriores condiciones; al disminuir $S$ disminuye su desviación estándar $\Sigma S$ por lo que la magnitud de las fluctuaciones estocásticas siempre es proporcional al valor de $S$, al disminuir $S$ disminuyen sus fluctuaciones tanto, que nunca puede llegar a alcanzar valores negativos.

Este proceso es el llamado *movimiento Browniano geométrico*, y es el proceso mas habitual para describir la evolución del precio de una acción o de una divisa.

El término $\sigma$ es la volatilidad de $S$, es decir, la desviación estándar de sus rendimientos, mientras que el término $\mu$ corresponde al rendimiento esperado no diversificable de $S$ si $S$ es una acción, o el diferencial de tasas de interés si $S$ es una divisa.

Si $\sigma = 0$ obtenemos: $\frac{dS}{S} = \mu dt$, e integrando obtenemos:

$$\int \frac{dS}{S} = \int udt \Rightarrow Se^{\mu t}$$

lo que recordaremos es al igual a la formula del precio forward de una divisa con un diferencial de tasa de interés $\mu = r_2 - r_1$:

$$F = Se^{(r_2 - r_1)t}$$

**Distribución Lognormal.**

La distribución lognormal mencionada anteriormente es una variante especial de la distribución normal en la que no es el valor de la variable quien tiene una distribución normal, sino el logaritmo de la variable en cuestión. El proceso mencionado anteriormente da lugar a una distribución lognormal; de hecho en lugar de escribir:

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz$$

podemos escribir

$$\ln S_{t+dt} - \ln S_t = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dz$$

debido a que

$$\frac{d}{dS}(\ln S) = \frac{1}{S} \qquad \Rightarrow \qquad d(\ln S) = \frac{1}{S} dS$$

y utilizando luego el lema de Itô obtenemos el resultado anterior.

Esto implica el logaritmo de los rendimientos esperados tienen una distribución normal, es decir:

$$\ln \frac{S_t}{S_{t-1}} \sim \phi\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t, \sigma\sqrt{t}\right]$$

Puede asumir cualquier valor entre cero e infinito pero no puede ser jamás negativa, una propiedad evidentemente atractiva para cualquier variable que pretenda representar los precios y activos financieros.

Su media es:

$$\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t$$

su varianza es: $\sigma^2 t$

su desviación estándar es: $\sigma\sqrt{t}$.

La distribución lognormal no es en absoluto la última palabra en cuanto a la evolución de los precios. En general, se observa que la distribución real de los precios tiene una probabilidad mayor que la lognormal de movimientos extremos, y es posible definir otras distribuciones con este comportamiento.

Mandelbrot fue uno de los primeros pioneros con su estudio de las fluctuaciones del precio del algodón durante varias décadas, y propone que los precios tienen una distribución de Pareto estable. Las distribuciones estables de Pareto son una gran familia de distribuciones que incluyen la distribución normal, muchas de las cuales tienen varianza infinita. Otra escuela (Hull) propone modelos en los que la desviación estándar de los precios (volatilidad) es a su vez volátil (volatilidad estocástica).

En este capítulo utilizaremos una distribución lognormal para los precios porque es la más fácil y es convencional utilizarla.

## 6.6 Ecuación Diferencial de Black & Scholes.

Si se cumple un número pequeño de condiciones necesarias, el precio de cualquier instrumento derivado sobre un activo que no pague dividendos ni intereses obedece la ecuación diferencial de Black & Scholes, por extraña que sea la función de pagos del instrumento en cuestión. Esta ecuación es por lo tanto un resultado fundamental, ya que si creemos tener la fórmula para calcular el precio de una opción un poco extraña, por ejemplo, podríamos aplicar la ecuación de Black & Scholes para ver si nuestra posible solución es valida. Es también posible modificar la ecuación para tratar con el caso de un activo que paga intereses, con el que el campo de aplicación de la ecuación es realmente muy grande.

Las condiciones necesarias para aplicar la ecuación son las siguientes:

1. El precio del activo subyacente sigue un proceso de Itô del tipo $dS = \mu S, dt = \sigma S dz$, dónde tanto $\mu$ como $\sigma$ son constantes.

2. La venta en corto de activos esta permitida, sin restricciones sobre el uso del dinero así generado.

3. No existen costos de transacción ni impuestos.

4. Todos los activos son infinitamente divisibles.

5. El activo no paga dividendos durante la duración del instrumento derivado.

6. No existen oportunidades de arbitraje sin riesgo en el mercado.

7. El mercado es continuo.

8. La tasa de interés libre de riesgo de crédito, $r$, es constante y es la misma para todos los plazos.

Derivemos ahora la ecuación de Black & Scholes. Tenemos de entrada para el activo subyacente S:

$$dS = \mu S dt = \sigma S dz$$

Si tenemos un instrumento derivado $S$, su precio $f$ obedece la ecuación

$$df = \left( \frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 + \frac{\partial f}{\partial t} \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S dz$$

Según el lema de Itô. Ahora formamos una cartera X de valores que contengan lo siguiente: un instrumento derivado de $f$, $-\frac{\partial f}{\partial S}$ activos financiaros $S$

El valor de la cartera es:

$$X = f - \frac{\partial f}{\partial S} = S$$

Supongamos ahora que un pequeño intervalo de tiempo $\Delta t$ del precio de S se mueve por una pequeña cantidad de $\Delta S$.

La sensibilidad del valor de una cartera que contenga únicamente un activo S a movimientos en el precio $S$ es 1: $\frac{\partial S}{\partial S} = 1$

Si en lugar de 1 activo $S$ tenemos otra cantidad, por ejemplo $\frac{\partial f}{\partial S}$, la sensibilidad será 1 multiplicado por la cantidad, es decir, $\frac{\partial f}{\partial S}$.

En el caso de nuestra cartera X, donde además tenemos un instrumento $f$, la variación $\Delta X$ en el valor será:

$$\Delta X = \Delta f - \frac{\partial f}{\partial S}\Delta S$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 + \frac{\partial f}{\partial t}\right)\Delta t + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S\Delta z - \frac{\partial f}{\partial S}(\mu S\Delta t + \sigma S\Delta z)$$

Tanto los términos en $\Delta z$ como los términos en $\mu$ $\Delta t$ se cancelan mutuamente, porque nuestra posición corta en acciones a neutralizado la variación en el valor de f al cambiar S de precio, con lo que nos queda,

$$\Delta X = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\Delta t$$

Esta ecuación no contiene ningún término en $\Delta z$ por lo que el valor de la cartera X es independiente (durante un pequeño instante de tiempo $\Delta z$ [1]) del riesgo de movimientos aleatorios en el valor de $S$. Durante este pequeño instante $\Delta z$ la cartera X no tiene el menor riesgo, por lo que su rendimiento ha de ser $r$, la tasa de interés libre de riesgo del mercado:

$$\Delta X = rX\Delta t$$

Por lo tanto

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)\Delta t = r\left(f - \frac{\partial f}{\partial S}S\right)\Delta t$$

[1] La cartera solo carece de riesgo durante un pequeño instante del tiempo $\Delta z$. Cuando pasa el tiempo y cuando cambie el valor de S habrá que recalcular f y sus derivadas para obtener de nuevo una cartera en equilibrio sin riesgo.

Simplificando obtenemos la ecuación diferencial de Black & Scholes:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} - rf = 0$$

Y que puede ser reconocida como la ecuación de difusión o ecuación de conducción de calor de una dimensión. Algunos autores hace uso de esta analogía para resolver problemas de valuación de opciones recurriendo a la simetría y a otras propiedades matemáticas conocidas de la ecuación de calor.

Como tantas ecuaciones diferenciales, la ecuación de Black & Scholes tiene muchas soluciones que corresponden entre otras a la multitud de posibles instrumentos derivados. La solución que usaremos dependerá de las condiciones limites que establezcamos. Estos limites pueden ser lo que diferencien una opción *europea* o un contrato *forward* o un *swap* o cualquier instrumento derivado que queramos definir.

Una opción call europea tiene un precio límite al vencimiento dada por:

$$C_{mat} = Max[S - K, 0]$$

donde K es el precio de ejercicio (strike). También podemos definir cualquier otra función de pagos, por ejemplo:

$$f_{mat} = S^2$$

ó

$$f_{mat} = \frac{1}{S}$$

y utilizar la ecuación de Black & Scholes para calcular su valor. Consideremos el segundo caso. La función de pagos es:

$$\frac{1}{S} - K$$

y podemos definir el siguiente proceso estocástico:

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz \qquad definamos U = \frac{1}{S}$$

$$dU = d\left(\frac{1}{S}\right)$$

$$= \frac{-1}{S^2}dS + \frac{1}{S^3}(dS)^2$$

$$= -U\left[\frac{dS}{S} - \frac{(dS)^2}{S^2}\right] \quad \text{(lema de Itô)}$$

$$= -U\left[\mu dt + \sigma dz - \left(\mu^2 dt^2 + 2\mu\sigma dzdt + \sigma^2(dz)^2\right)\right]$$

$$= -U\left[\mu dt + \sigma dz - \sigma^2 dt\right] \quad \text{(ignorando orden} > 1)$$

$$= U\left[\left(-\mu + \sigma^2\right)dt - \sigma dz\right] \quad \text{así que}$$

$$F = \frac{1}{S_0}e^{(\sigma^2-\mu)t}$$

**El Término $\mu$ en el Modelo. Precio del Riesgo en el Mercado.**

En la discusión anterior sobre posibles modelos estocásticos de la evolución de los precios, hemos introducido a la ligera el término $\mu$, el rendimiento esperado de un activo $S$. Si el activo en cuestión es una divisa de un país solvente, existen dos tasas de interés $r_1$ y $r_2$ libre de riesgo en el país de la moneda en cuestión y en nuestro país de referencia respectivamente, que nos permitan valorar un forward por arbitraje,

$$F = Se^{(r_2-r_1)t}$$

$$= Se^{\mu t}$$

$$\mu = r_2 - r_1$$

y el significado del término $\mu$ no es ambiguo; se trata entonces, del diferencial de tasas de interés.

En el caso de una acción podríamos pensar que $\mu$ es la diferencia entre la tasa de interés del mercado y el tipo de dividendo de la acción en cuestión. Esta conclusión es errónea, puesto que el rendimiento a largo plazo de una cartera de acciones si reinvertimos los dividendos en más acciones, es en general superior al rendimiento obtenible en el mercado de dinero. Los estudios realizados, entre muchos otros que usaron para formular el modelo de "Capital Asset Pricing Model", demuestran que, en general, el rendimiento histórico de las acciones ha sido superior al mercado de dinero en Estados Unidos por un margen del 8% anual aproximadamente. Este 8% es un número muy aproximado, que debe interpretarse más bien como algo entre 2% y 14%. Lo importante es que existe y tiene valor positivo.

La inversión en acciones presenta un riesgo que no presenta la inversión en dinero a la tasa libre de riesgo (obligaciones del gobierno a corto plazo, por ejemplo), porque además de subir el precio de las acciones puede perfectamente bajar, cosa que no sucede con el dinero a corto plazo. Un inversionista que tenga aversión al riesgo exigirá por lo tanto, un rendimiento superior antes de invertir en acciones o en otros activos cuyo precio puedan bajar además de subir. El 8% de "risk premium"(prima al riesgo) es precisamente este rendimiento extra exigido por el mercado por asumir el riesgo de las variaciones en el precio de una acción.

La diferencia fundamental entre una acción y un forward sobre divisas es que una divisa es un activo libre de riesgo (si creemos en la solvencia del gobierno en cuestión), mientras que una acción es un activo con cierto riesgo; las compañías de vez en cuando quiebran. En el caso de la divisa del precio forward se ve gobernado por el diferencial entre la tasa de interés libre de riesgo, mientras que en el caso de una acción además del diferencial entre el costo de financiamiento y el dividendo entra también en juego la llamada prima de riesgo.

Cabe señalar que no es necesariamente legitimo suponer a priori que la prima de riesgo sea siempre positiva (es decir, que los inversionistas exijan siempre una compensación adicional para tomar un riesgo). En principio puede existir una inversión a quine el riesgo le resulte indiferente (risk - neutral), o incluso un inversionista amante de las emociones fuertes que este preparado a pagar una prima por el privilegio de poseer un activo con riesgo que le pueda dar un gran rendimiento, pero en general perderá casi siempre dinero. Un buen ejemplo es un billete de lotería, ya que la cantidad de dinero recaudado es el pago en premios que es siempre inferior al 100%, e incluso muy frecuentemente inferior al 50%, con lo que el beneficio esperado es negativo. No hace falta señalar que el mundo no sufre escasez de compradores de lotería.

## 6.7 El Capital Asset Pricing Model (CAPM).

El CAPM es un modelo econométrico derivado de manera independiente por los economistas W. Sharpe, J. Linter y J. Mossin y que intenta explicar de manera rigurosa la naturaleza del termino MU, introduciendo varios conceptos importantes que marcan el comienzo de la teoría moderna de gestión de cartera (modern portafolio theory).

El primer postulado del CAPM nos dice; si tenemos una cartera X compuesta por proporciones $a_i$ de muchos activos distintos $S_i$, cada cual con su rendimiento esperado $\beta\sigma_{ix}$, el rendimiento esperado de la cartera no es mas que la media ponderada de todos los rendimientos individuales:

$$\mu_X = \frac{\sum_{i=1}^{N} a_i \mu_i}{\sum_{i=1}^{N} a_i}$$

El segundo postulado: si definimos el riesgo como una desviación estándar del rendimiento, $\sigma_i$ de cada activo con respecto al mercado en general, (la covarianza del rendimiento del activo en cuestión con el mercado en general), la prima de riesgo $\beta\sigma_{ix}$, en condiciones de equilibrio es una función líneal del riesgo del activo con respecto al mercado en general (el riesgo no diversificable), la prima de riesgo aumenta al aumentar el riesgo, y viceversa.

$$\sigma_x = \sum_i \sum_j a_i a_j cov(\mu_i \mu_j)$$

$$\langle \mu_i \rangle = r + \beta\ sigma_{iX}$$

donde $\sigma_X$ es la desviación estándar

En la practica el modelo tiene varios problemas. El problema principal es que es necesario conocer la matriz de covarianza de todos los activos financieros entre sí, lo que ya de por si presenta grandes problemas (por ejemplo, la matriz de covarianza del índice S & P 500 americano tiene 250,000 elementos puesto que es un cuadro de 500 por 500), y conociéndola matriz, es necesario hacer suposiciones de que la covarianza histórica que hemos observado son constantes invariantes en el tiempo.

Otra suposición necesaria es que el mercado se haya en un estado de equilibrio, cosa que es a su vez dudosa.

A pesar de tener sus problemas de naturaleza cuantitativa, el modelo no es totalmente inútil como modelo cualitativo, y nos permite justificar la existencia de $\mu$'s distintos del simple diferencial de tasa de interés.

## 6.8 La Valuación bajo Indiferencia al Riesgo.

Si definimos el valor de un activo o de un instrumento derivado como la integral del producto de su valor terminal (su función de pagos o "payoff") multiplicado por la probabilidad de que ocurra cada valor terminal, nos encontraremos ante un importante problema teórico. Aún así, estaremos preparados a creer que la distribución lognormal es la representación correcta de los posibles precios y que la volatilidad es constante, quedándonos el problema de definir la media de la distribución, su valor esperado. Este valor esperado es una función de $\mu$, el rendimiento esperado, y nos plantea un importante problema: Cuál es nuestra preferencia con respecto al riesgo?. En principio, cualquier respuesta es válida (véase el caso del billete de lotería).

Podemos intentar resolver el problema diciendo que aceptamos el precio del mercado para el riesgo también, pero esto no es en general satisfactorio porque el precio del riesgo en el mercado no es una variable observable directamente. El único conocimiento que tenemos sobre el precio del riesgo en el mercado es muy general e impreciso, y deriva únicamente de estudios históricos que nos dicen cuál fue el precio del riesgo en un pasado remoto bajo unas condiciones distintas a las que observamos hoy, e incluso estos estudios nos muestran que el precio del riesgo se mueve, por lo que es una variable mas y no una constante que tiene un valor único y estable.

**Valoración bajo Indiferencia al Riesgo (Risk - neutral valuation).**

La solución al problema anterior consiste en decir que si no sabemos cuál es el valor de la prima al riesgo, podemos decir que es cero (decir que somos indiferentes al riesgo) y acabar con el debate.

El motivo por el que podemos hacerlo es una observación sobre la anteriormente presentada ecuación de Black & Scholes (El término $\mu$ que incluye nuestra aversión / preferencia al riesgo no aparece por ninguna parte. Al formar una cartera X que neutraliza su propio riesgo con respecto a movimientos en el precio de $S$ hemos eliminado el riesgo, y por lot anto podemos perfectamente ser indiferentes a él. Ya que el valor de cualquier instrumento derivado que obtenemos de la ecuación Black & Scholes no depende de nuestra preferencia sobre el precio del riesgo, puesto que no entra en la ecuación, podemos valorar instrumentos derivados con cualquier preferencia del riesgo que queramos y el valor siempre será el mismo.

Esto también es importante; resulta conveniente saber que tenemos método de valoración que no nos va a dar dos valores distintos para el valor de un instrumento derivado dependiendo de si la persona que lo valora es inversionista o jugador empedernido.

La ecuación de Black & Scholes nos permite, por lo tanto, suponer, si no es cómodo que los inversionistas sean indiferentes al riesgo y obtener el mismo valor para un instrumento derivado que si no lo fuese. Este resultado es importantísimo, porque en general es mucho más cómodo suponer que el precio del riesgo es cero, ya que el tratamiento matemático de los instrumentos derivados se hace mucho más sencillo. Por ejemplo, podemos descontar cualquier flujo futuro de dinero a la tasa de interés libre de riesgo sin el menor problema filosófico.

Este concepto de hace mucho más importante al momento de valorar opciones, ya que el valor de una opción no es más que el resultado de descontar una tasa de interés el valor esperado de un flujo futuro incierto, y donde la tasa de interés usada para descontar y la tasa de interés usada para definir la medida probabilística están íntimamente unidas.

La ecuación que presentamos a continuación apareció por primera vez en el famoso estudio de Fisher Black y Miron Scholes en 1973.

Tomemos el caso de una opción call europea (una vez calculado el call podemos obtener el put por arbitraje gracias a la paridad put / call). Al vencimiento el valor de la opción viene dado por:

$$Max[S-K,0]$$

Para obtener el valor presente de la opción debemos tomar el valor esperado de la ecuación anterior y descontarlo a la tasa de interés r libre de riesgo del mercado (véase el razonamiento del capítulo sobre la ecuación diferencial de Black & Scholes para repasar por qué podemos utilizar la tasa libre de riesgo):

$$C = e^{-rt}\hat{E}\{Max[S-K,0]\}$$

$$= e^{-rt}\langle Max[S-K,0]\rangle$$

Donde E es el operador del valor esperado. La distribución que suponemos para el precio de subyacente S es la distribución lognormal:

$$D = \ln S_t \sim \phi[\ln S + (r - \frac{\sigma^2}{2})t, \sigma\sqrt{t}]$$

con lo que completamos nuestra fórmula para el valor esperado: la integral de la función de pagos $C$ con la densidad de probabilidad $D$:

$$C = e^{-rt}\int Max[S-K]\phi(S_t)dS_t = e^{-rt}\int_K^{\infty}(S_t - K)\phi(S_t)dS_t$$

La integral se simplifica si hacemos la sustitución $S_t = e^u$, donde $u = \ln S_t$, con lo que podemos usar nuestra función explícita para la distribución $\phi(\ln S_t)$:

$$\phi(\ln S_t) = \phi(u) = \frac{1}{\sigma sqrt 2\pi t}e^{[} - \frac{1}{2}(\frac{u - \mu t}{\sigma\sqrt{t}})^2]$$

$$(\mu = r - \frac{\sigma^2}{2})$$

con lo que el valor de la opción se reduce a:

$$C = e^{-rt}\int_{\ln K}^{\infty}(e^u - k)\phi(u)du = SN(d_1) - Ke^{-rt}N(d_2)$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln\frac{S}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})t}{\sigma\sqrt{t}} y d_2 = \frac{\ln\frac{S}{K} + (r - \frac{\sigma^2}{2})t}{\sigma\sqrt{t}}$$

El desarrollo de la integral que nos permite obtener el resultado anterior es un poco complicado, por lo que lo reproducimos en detalle a continuación. La integral que nos ocupa tiene dos términos:

$$C = e^{-rt} \int_{\ln K}^{\infty} e^{u} \phi(u) du - K e^{-rt} \int_{\ln K}^{\infty} \phi(u) du$$

de los cuales el segundo resutlado nos muestra:

$$K e^{-rt} \int_{\ln K}^{\infty} \phi(u) du = K e^{-rt} N(d_2)$$

N es la distribución normal (acumulada, no densidad de probabilidad). Combinando estos resultados obtenemos el valor de la opción:

$$C = e^{-rt} \int_{\ln K}^{\infty} (e^{u} - K) \phi(u) du = S N(d_1) - K e^{-rt} N(d_2)$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})t}{\sigma \sqrt{t}} y d_2 = \frac{\ln \frac{S}{K} + (r - \frac{\sigma^2}{2})t}{\sigma \sqrt{t}}$$

Este es el valor de una opción call europea sobre un activo $S$ que no paga dividendos y, tal y como explicamos antes, podemos obtener el valor de un put usando la paridad put/call. Si el activo paga un dividendo continuo $d$ se puede demostrar fácilmente que basta con cambiar la definición de $\mu$. Cambiamos:

$$\mu = r - \frac{\sigma^2}{2} \qquad por \qquad \mu = r - d - \frac{\sigma^2}{2}$$

y nuestra ecuación sigue siendo la mismo. Evidentemente el valor de nuestra opción Black & Scholes europea satisface la ecuación diferencial de Black & Scholes:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + rS\frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} - rC = 0$$

**Las Derivada del Precio de la Opción. Delta, Gamma, Vega Y Theta.**

Dado que tenemos una fórmula explícita para el precio, podemos tomar sus derivadas con respecto a los parámetros que determinarán su valor para calcular cómo cubrir su riesgo. En particular, es frecuente definir:

Delta. La primera derivada del precio de la opción con respecto al subyacente

## 6.9 EL Riesgo de una Opción.

### DELTA.

El delta de la opción es sencillamente la primera derivada del precio, $\frac{dC}{dS}$ en la figura, y representa la sensibilidad de valor de la opción a movimientos pequeños en el precio subyacente. Si hemos vendido un call como el de la figura tendríamos que comprar $\frac{dC}{dS}$ unidades de subyacente para que nuestra posición resulte instantáneamente inmune a movimientos pequeños en el precio del subyacente. Si hacemos esto, cuando el precio del subyacente suba una pequeña cantidad dS perderemos una cantidad de dinero aproximadamente igual a $\frac{dSdC}{dS} = dC$ en la opción que hemos vendido, pero ganaremos una cantidad prácticamente igual en nuestra posición de $\frac{dC}{dS}$ unidades de subyacente.

#### Factores que afectan el Delta de una Opción.

Call o put. El delta de un put en unidades forward es igual a uno menos el delta de un call equivalente. Las opciones call suben de precio al subir el subyacente, por lo que tiene delta positivo, mientras que las opciones put suben de precio al bajar el subyacente, por lo que su delta es negativo.

Nivel del subyacente. Si una opción call está muy in.the-money- el precio del subyacente está muy por encima del strike (precio de ejercicio) - es prácticamente equivalente a un forward, por lo que su delta es esencialmente el 100% porque la probabilidad de ejercicio es casi un 100%, mientras que si está muy out-of-the-money- el precio del subyacente se encuentra muy por debajo del strike- el delta es 0% porque la probabilidad de ejercicio es esencialmente cero. Cuando una opción está at-the-money (subyacente = strike), su delta es aproximadamente 50%.Ver gráfico:

Volatilidad y tiempo hasta el vencimiento. Al aumentar la volatilidad o el tiempo hasta el vencimiento aumenta la incertidumbre sobre si la opción va a ser ejercida (100% delta) o no (0% delta), por lo que el delta de las opciones in-the-money disminuye y el de las opciones out-of-the-money aumenta (ambas empiezan a aproximarse hacia deltas de 50% - incertidumbre prefecta).

### GAMMA.

Gamma es un parámetro que mide la sensibilidad del delta a cambios en el subyacente, y que indica, por lo tanto, la frecuencia con la que debemos ajustar la posición del subyacente (que establecimos para cubrir nuestro riesgo delta) cuando el mercado se mueve. Si nuestro gamma es bajo, apenas experimentaremos cambios en nuestro delta según se mueva el mercado, por lo que apenas tendremos necesidad de ajustar nuestra opción, el subyacente, mientras que si nuestro gamma es alto, cada pequeño movimiento el subyacente afectará nuestro delta y nos obligará a ajustar nuestra posición en el subyacente si queremos seguir estando cubiertos. El gamma es mayor donde la incertidumbre a cerca de si la opción va a ser ejercida o no es máximo, es decir, at-the-money. Donde la incertidumbre es muy pequeña (es decir, en los extremos muy in-the-money y muy out-of-the-money) la gamma es esencialmente cero.

### Factores que afectan el Gamma de una Opción.

Las opciones tienen gamma alto cuando la distribución del subyacente es estrecho y el strike se encuentra cerca del centro de la distibución. Esto quiere decir que opciones con las siguientes carácterísticas tiene tipicamente gammas muy altos:

- Opciones at-the-money.
- Opciones a corto plazo.
- Opciones sobre activos con volatilidad baja.

El manejo de posiciones en opciones a corto plazo es, por lo tanto, un ejercicio de manejo gamma y la rentabilidad de posiciones de este tipo está dada puramente por la eficiencia en el manejo del gamma de la posición. Consideremos una compañía que a vendido una opciones at-the-money a corto plazo. La compañía tiene, por lo tanto, una posición de fuerte gamma negativo, y una cantidad de dinero que ha recibido por la opción. Después de haber cubierto su delta inicial, y como su gama es negativo, cada vez que el mercado suba, la compañía deberá comprar mas activo subyacente para seguir con una posición cubierta, y cada vez que el mercado baje deberá vender. Por lo tanto, dado que compra cuando el mercado ha subido y vende, cuando ha bajado, la compañía perderá dinero con esta estrategia aún en total ausencia de costos de transacción. Si el mercado se mueve mucho, la compañía perderá dinero y si el mercado no se mueve la compañía no perderá dinero. Si el precio de la opción se ha calculado correctamente, la prima recibida por la opción, será igual al costo de cubrir su riesgo. Por ultimo queda decir, que la situación es simétrica si la compañía ha comprado en lugar de vendido una opción; la opción habrá costado dinero porque comprará cuando el mercado baje y venderá cuando suba.

### VEGA.

Vega es la sensibilidad del precio de la opción a variaciones en volatilidad del subyacente, y sirve para determinar que opciones se ven afectadas, tanto por errores en la estimación de la volatilidad del subyacente como por variaciones en la volatilidad real del mercado. Es especialmente importante en la valoración de opciones a largo plazo donde el componente de riesgo mas importante es la volatilidad, dado que las opciones a largo plazo suelen tener gammas bastante bajas y por lo tanto se ven apenas afectadas en su delta por movimientos en le subyacente, pero se ven muy afectadas por movimientos en la volatilidad del activo subyacente.

### FACTORES QUE AFECTAN EL VEGA DE UNA OPCIÓN.

El principal factor es el tiempo restante hasta el vencimiento. Si nos fijamos en el vega de una opción, vemos que para una opciones at-the-money, el vega es proporcional a la raíz cuadrada del tiempo. En el caso de las opciones out-of-the-money el vega es acaso mas importante, porque, aunque en términos absolutos el vega de una opción in-the-money es menor que at-the-money, en términos relativos puede ser mucho mayor. Para poner un ejemplo podemos considerar dos opciones sobre un activo con volatilidad del 10%, una at-the-money con un valor del 15% del subyacente, y otra bastante out-of-the-money que vale solo un 0.5%. Si la volatilidad sube del 10% al 11%, la primera opción pasa de valer 15% a valer 16.5% (es decir, un 10% mas), mientras que la segunda opción puede pasar de valer 0.5% a valer 1.0% es decir el doble. La segunda es menos sensible a la volatilidad en términos absolutos (aumento de valor un 0.5% en vez de un 1.5%), pero en términos relativos su valor se ha duplicado.

**THETA.**

Las opciones, tienen dos tipos de valor: el valor intrínseco que tendrían si fuesen ejercidas hoy, y el valor tiempo, debido a la posibilidad de beneficios contingentes que confieren a su dueño. Al llegar el vencimiento el valor tiempo es cero, y el parámetro theta mide la velocidad de declive del valor tiempo desde su valor actual hasta cero. Este declive no es siempre igual; una opción at-the-money a largo plazo pierde muy poco de su valor tiempo cada día que pasa, mientras que en el último día de una opción at-the-money con un día de duración debe necesariamente perder todo su valor tiempo restante. Theta también incluye un término equivalente en cierto modo al cupón corrido en un bono que refleja el diferencial de tasas de interés entre el activo subyacente y el dinero, y que refleja, por lo tanto, el costo de financiamiento.

Theta es, en cierto modo, un parámetro análogo a gamma; si una opción pierde valor con elpaso del tiempo es para compensar el hecho de que su comprador habrá ganado dinero en el mercado cubriendo su posición de gamma positivo. Cuando la opción este at-the-money y próxima al vencimiento su gamma será muy alto, por lo que su poseedor podrá ganar mucho dinero ajustando frecuentemente su delta, pero perderá también bastante dinero con el paso del tiempo debido al theta de la opción. Si la volatilidad ha sido correctamente valorada, ambos efectos se anularán. De hecho la ecuación de Black & Scholes refleja esta simetría:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + rS\frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} - rC = 0$$

$$\Theta = \frac{\partial C}{\partial t} \qquad \Delta = \frac{\partial C}{\partial S} \qquad \Gamma = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}$$

y si el delta ha sido cubierto, $\Delta = 0$

$$\Rightarrow \Theta + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \Gamma = rC$$

Dado que el término C de costo de financiamiento suele ser pequeño, la anterior ecuación refleja que gamma positivo fuerte se corresponde con theta negativo fuerte y viceversa.

Cubrir el riesgo de mercado de una cartera de opciones consiste, en eliminar los riesgos debidos a las derivadas del valor de la cartera con respecto a todos los parámetros que lo afectan. Los primeros riesgos que hay que cubrir son los riesgos de primer orden - neutralizar riesgos debidos directamente a la dirección de los movimientos en el mercado, neutralizando el delta. Una vez hecho esto, hay que cubrir los riesgos, como vega (comprando opciones a largo plazo para cubrir posiciones con vega negativo, por ejemplo), y los riesgos de segundo orden (segundas derivadas del precio), como gamma y theta, que provienen del hecho de que los movimientos del precio, generan como efecto secundario deltas que es necesario cubrir. Además, es necesario cubrir riesgos, como tasas de interés, entre otros.

## 6.10 Cuando Black & Scholes NO Funciona.

El modelo de Black & Scholes es utilizado casi universalmente para valorar opciones europeas, pero existen casos en los que no es aplicable. Por ejemplo, no podemos valorar opciones americanas utilizando Black & Scholes, porque el modelo no intenta calcular bajo qué circunstancias es óptimo ejercer una opción antes de su vencimiento. Para valorar opciones americanas es necesario utilizar otros métodos, como, por ejemplo, el binomial.

El modelo Black & Scholes hace ciertas suposiciones acerca del movimiento activo subyacente, y por lo tanto no funciona correctamente cuando éstas dejan de cumplirse. Las suposiciones principales y sus problemas son:

- La volatilidad es constante durante la vida de la opción. Esto no es normalmente cierto, aunque parecer ser que la volatilidad tiene cierta tendencia a volver hacia el valor medio estándar. El permitir una volatilidad que es, a su vez, volátil tiende a aumentar el valor de las opciones out - of - the - money conr especto a su valor Black & Scholes. De hecho, en lugar de hablar de volatilidad variable, el problema es, en realidad, la parametrización correcta de la distribución de los precios, que no es exactamente lognormal.

- Las tasas de interés son constantes durante la vida de la opción. Esto tampoco es cierto (excpeto quisá en el caso d opción a corto plazo), pero Merton demostró que no tiene mucha importancia, excepto en el caso de opciones de tasas de interés.

- Posibilidad de vender en corto. En muchos mercados no es posible, lo que limita los arbitrajes necesarios para asegurar, por ejemplo, que una opción call europea in-the-money valga por lo menos su valor intrínseco. En la práctica suele tener menos impacto de lo que se podría pensar a primera vista, excepto en el caso de mercados muy pocos líquidos.

- Costos de transacción. En general son bastante altos durante la vida de una opción para un inversionista privado, pero para un participante institucional en el mercado son mucho menores, porque la mayoría de las posiciones que tienen abiertas se neutralizan, por lo que la necesidad de equilibrar frecuentemente la posición se reduce. Además, Los participantes institucionales tienen costos de negociación mucho menores por su gran volumen diario.

- Impuestos. Black & Scholes suponen que no hay impuestos. Los impuestos tienen importantes efectos sobre el funcionamiento de arbitraje, y las reglas exactas en vigor en el mercado afectan enormemente lo que es posible hacer. En instrumentos derivados, por ejemplo, no se hace distinción alguna entre intereses y ganancias de capital, pero muchas jurisdicciones insisten en matizar las supuestas diferencias. A menudo esto da lugar a ambigedades e inconsistencias en el tratamiento de swaps, bonos con cupón cero, opciones, forwards, ventas en corto, etc., además de distinciones entre activos que se poseen durante periodos de tiempo cortos o largos; la supuesta diferencia entre el inversionista que invierte para ganar dinero y el especulador que invierte para ganar dinero, por ejemplo.

A pesar de todas las anteriores imperfecciones, el modelo de Black & Scholes es enormemente útil y es el punto de partida de casí todos los demás métodos de valoración.

**Valuación de Opciones Americanas.**

Como mencionamos anteriormente, no existe hasta la fecha ninguna fórmula que permita valorar de manera analítica una opción americana. Esto no quiere decir, sin embargo, que la valoración de opciones americanas sea imposible; las opciones americanas son muy frecuentes en el mercado y todos los participantes saben valorarlas sin problemas. A parte de algunas aproximaciones cuasianalíticas a su valor, basadas en experiencia en series bastante complicadas, existe un método de valoración muy sencillo y flexible que es el que utiliza a diario casi todos los participantes en el mercado: El "binomial tree". El método es, básicamente, una discretización muy sencilla que explicamos a continuación para una opción sobre un activo S con tasa dividendo continúo d y donde la tasa de interés es $r$.

Supongamos que dividimos el tiempo en dos períodos: Hoy y la fecha de vencimiento de nuestra opción dentro de $\Delta t$ años. Hoy nuestro activo vale $S$ , en el último período el activo habrá subido a un valor $S_u$ (S multiplicado por un salto $u$ hacia arriba) con una probabilidad $p$, o bajado a un valor $S_d$ (S multiplicado por un salto $d$ hacia abajo), con la correspondiente probabilidad $1-p$, dado que si el precio puede solo subir o bajar, la suma de las probabilidades de un aumento o una reducción tiene que ser necesariamente 1.

Por lo tanto nuestro método hasta ahora sigue valorando los forwards correctamente y, dado el método por el cual hemos definido nuestros "saltos" $u$ y $d$, la desviación estandar. Sigue siendo igual a $\sigma$.

Ahora podemos valorar la opción. Si Su esta por encima del strike, la contribución de $S_u$ al valor futuro de la opción es $p(S_u - K)$.

Por ejemplo, si simplificamos un poco y suponemos que $S = 100, u = 1.02, d = 0.98, p = 0.5$, el valor futuro de una opción call con un strike de 100 viene dada por $C = 0.5 * (100 - 102) = 1$. Para obtener el valor presente descontamos la tasa de interés r durante un período $\Delta t$.

El proceso se vuelve más preciso cuando empleamos una discretización más fina.

Y podemos seguir generalizando con un número arbitrario de pasos $\Delta t$.

Hasta ahora hemos estado valorando una opción europea, cosa que no tiene mucho mérito porque tenemos la fórmula Black & Scholes que nos da resultados exactos. Con este método podemos también valorar opciones americanas. El método es el siguiente:

- Empezamos desde el final del árbol ($t = vencimiento = n\Delta t$).
- Dividimos el tiempo hasta el vencimiento $t$ en $n$ intervalo $\Delta t$ (n es un número grande, por ejemplo 100), de manera que $\Delta t = \frac{t}{n}$.
- Calculamos $\mu$, $p$, $u$ y $d$ como antes.
- Calculamos el valor del subyacente en cada rama $j$ al final del árbol $(t = n\Delta t) : S_n(j) = Su^j d^{(n-j)}$.
- Calculamos el valor intrínseco de la opción $O_n$ al final de cada rama $j$: $O_n(j) = Max[S_n(j) - K, 0]]$.
- Damos un paso atrás hasta $t = (n-1)\Delta t$ y calculamos el valor intrínseco en cada punto $j$: $S_{n-1}(j) = Su^j d^{(n-1-j)}$. En cada punto el valor de la opción es mayor de: (1) en valor intrínseco en el punto en cuestión (porque podemos ejercer la opción y capturar el valor intrínseco en cualquier momento), o (2) lasuma de $p*$ valor de la opción cuando el subyacente salta para arriba, descontando durante un período de tiempo $\Delta t$, y $(1 - p)*$ valor de la opciómn cuando el subyacente salta para

abajo, descontando durante el período de tiempo $\Delta t$. Estamos esencialmente preguntándonos en cada instante del árbol si la opción vale más "viva"(sin ejercer) o "muerta"(ejercida). Seguimos retrocediendo un nivel en el árbol y recalculando hasta llegar al principio.

# Conclusiones

*Que se busco presentar en este trabajo?.*

Al paso de mis estudios de la carrera de Actuaría, adquirí un gran cantidad de conocimientos, diria yo mas teóricos que prácticos, que sin embargo, me dieron la oportunidad de buscar un enfoque especialmetne orientado a la auto - búsqueda de áreas de las ciencias aplicadas a las multicitadas finanzas. Desbocando de muchas formas en muchas inquietudes y descubrir con gran sorpresa la gran cantidad de material disponible sobre diversos temas directa e indirectamente relacionado. Cual fue mi sorpresa que existe un muy vasto y amplio mundo de posibilidades y que requieren de su estudio, dedicado y a conciencia, sistemático y con las bases de conocimiento que permitan dar un paso a la vez. De aqui motivó una necesidad de aislar algunos temas claves, y debo confesarlo, no tuve éxito, ya que a cada cambio de hoja descubría nuevos retos. Estos retos se han convertido de alguna forma en este trabajo de tesis.

Con este trabajo, busque hacer una síntesis de algunos de los temas de estudio que un alumno interesado en el campo de las finanzas pueda seguir, sin ser una guía exhaustiva , si como referencia o simplemente como punto de partida en la continuidad que éste decida hacer en el trayecto de sus estudios, presentes o futuros.

*Como se conecta la formación académica del actuario con este tema.*

La formación académica del actuario encuentra en este amplio tema un desarrollo natural, tomando como base todo los elementos que en el transcurso de se preparación y estudio orientado al pensamiento estructurado de manera lógica - matemática, con un sin número de herramientas que permiten de forma ágil y eficiente la cuantificación de los riesgos. Siendo éste el elemento fundamental en los temas que se han buscado presentar, sin afán de generalizar, las finanzas nos obligan a dimensionar de forma ordenada estrategias adecuadas que logren en su conjunto optimizar el costo - beneficio de los riesgos implícitos de los dineros.

El actuario podría de forma funcional orientar sus esfuerzos al estudio de esa disciplina, encontrándose en ella todo una variedad de generalizaciones y especializaciones pueden ser tomadas como retos tanto en la vida profesional como continuidad en su formación académica y si el interesado busca explorar nuevos horizontes por medio de la investigación, es un camino adecuado.

*De que manera participa el actuario como profesional?*

- Motivar la investigación. En esta campo de reciente desarrollo dentro de la ciencia, es imporntante despertar en le alumno la inquietud de buscar nuevas formas y fronteras en el conocimeinto, principalmente en el campo de la finanzas aplicadas y su marco teoríco.

- Ampliar la participación del actuario es temas relacionados. Con antecedente de formación académica y el sustento en las herramientas matemáticas, se perfila como un desarrollador de soluciones ante problemas específicos de las finanzas a nivel tanto análisis como en las definiciones de los riesgos a ser cubiertos.

- Promover el uso de herramientas propias de este campo de aplicación. Con su amplio criterio de pensamiento lógico, sus posibilidades de crear un impacto significativo y estructurado en los desarrollos de nuevas estrategias y productos financieros, mismos que de formas muy variadas peden ser soportados por el Actuario.

- Integrar el uso de herramientas tecnológicas con la teoría desarrollada en esta materia. El análisis de grandes cantidades de información, tema muy recurrente en la actualidad, requiere de un amplio y bien desarrollado sentido de utilización de recursos tecnológicos de punta, facilitando así la operación con estos cúmulos de información y su interpretación. El Actuario esta bien dotado de estas caracteristicas.

- Asumir roles mas activos en las empresas como tomadores de decisiones y administradores de los riesgos monetarios.

# Bibliografía


[1] **Neftci, Salih N.** *An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives.* Academic Press. 2000.

[2] **Hull, John C.** *Options, Futures & Other Derivates.* Prentice-Hall. 2000.

[3] **D. Luenberger.** *Investment Science.* Oxford University Press. 1998.

[4] **T. Copeland** and **J. Weston.** *Financial Theory and Corporate Policy.* Addison-Wesley Publishing Company. 1992.

[5] **M. Jackson** and **M. Staunton.** *Advanced Modeling in Finance.* Wiley Finance. 2002.

[6] **D. Lamberton** and **B. Lapeyre.** *Introduction to Stochastic Calculus applied to Finance.* Chapman and Hall. 1996.

[7] **P. Hoel, S. Port** and **Ch. Stone.** *Introduction to Stochastic Processes.* Houghton Mifflin. 1972.

[8] **Z. Brzeźniak** and **T. Zastawniak.** *Basic Stochastic Processes.* Springer - Verlag London. 2000.

[9] **W. O'neil.** *How to Make Money in Stocks.* McGraw - Hill. 1995.

[10] **P. Hoel, S. Port** and **Ch. Stone.** *Introduction to Probability Theory.* Houghton Mifflin. 1971.

[11] **W. Feller.** *Introducción a la Teoría de Probabilidades y sus Aplicaciones. Volumen I.* Editorial Limusa. 1973.