UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EFECTO AHARONOV BOHM

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

F I S I C O

P R E S E N T A :

MIGUEL ARTURO BALLESTEROS MONTERO

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

DIRECTOR DE TESIS: DR. RICARDO ALBERTO WEDER ZANINOVICH

2004

VNIVERSDAD NACIONAL
AVFN°MA DE
MEXICO

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:
"Efecto Aharonov-Bohm"

realizado por Ballesteros Montero Miguel Arturo

con número de cuenta 97566432 , quien cubrió los créditos de la carrera de: Física.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Dr. Ricardo Alberto Weder Zaninovich
Propietario	Dr. Carlos Villegas Blas
Propietario	Dr. Juan Héctor Arredondo
Suplente	Dr. Rafael René del Río Castillo
Suplente	Dr. Ricardo Berlanga Zubiaga

Consejo Departamental de Física

M. EN C. ALICIA ZARZOSA PEREZ
Coordinadora de Licenciatura

FACULTAD D. CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE FISICA

A Tete, Horacio, mi mamá y mi papá

AGRADECIMIENTOS Debo consignar que en la realización de esta tesis conté con el apoyo de una beca que me fue concedida al amparo del proyecto PAPIIT IN101902, DGAPA-UNAM

Agradezco a mi asesor y director de tesis, Ricardo Weder, por haber sido un ejemplo para mi; por haber impulsado mi desarrollo profesional y personal, a pesar de mi resistencia; por haberme apoyado, como persona y como académico

Agradezco también a mis sinodales: Carlos Villegas, Juan Héctor Arredondo, Rafael del Río, Ricardo Berlanga y Luis Silva

Agradezco a todos mis maestros, especialmente a Guillermo Grabinsky, Jose Alfredo Amor , Pepe Ríos, Armando y César Cedillo

Agradezco a mi familia y a Carolina Hatsue Higashida.

Agradezco a las personas que han estado conmigo; a mi hermana mayor Ángeles, que siempre ha sido un apoyo incondicional para mi; a Paco,que también es como mi hermano; a Karen; Indira, Pedro, Guillermo; a mis viejos amigos, Luis Carlos y Juan Pablo; Jose Luis, Jerónimo, Ariet, Julia, Eduardo Moreno, Luis Mariscal, Dulce, Grisel, Paulina, a Manuel y Alejandro; a Álvaro, Marcela, Alejandro Alva, Salomón, Luis, Natalia, Alicia,Ártico, Selene, Preisser, Laura, Basty ,Yesenia y a Nelson.

Índice general

Introducción

El principal objetivo de este trabajo es comprender y explicar con detalle el artículo "The Aharonov-Bohm effect and time-dependent inverse scattering theory"[2] publicado por el doctor Ricardo Weder, en el cual se estudia el efecto Aharonov-Bohm [12] desde el punto de vista de la teoría de dispersión inversa dependiente del tiempo.
Uno de los fenómenos que demuestran que la física cuántica modela con mayor exactitud el mundo atómico y subatómico que la física clásica es el efecto Aharonov-Bohm. El fenómeno se predijo de manera teórica [2] y después se comprobaron las predicciones de manera experimental [3].

El efecto Aharonov-Bohm considera la dispersión de un electrón por el campo magnético debido a un solenoide ideal, con altura infinita y sección transversal circular que puede tener radio cero.
El artículo plantea un problema más general, considera el caso en el que un campo magnético singular arbitrario está contenido en un cilindro de altura infinita, paralelo al eje z cuya sección transversal es un compacto K con frontera dada por una curva de clase C^1, o bien K se reduce al punto cero. Además se considera un campo magnético regular de soporte compacto, definido en $\Omega = \mathbb{R}^2 - K$ uniformemente continuo y cuyas derivadas de primer orden son uniformemente continuas.

En el artículo [2] se demuestra que a partir del límite de altas energías del operador de dispersión, en el caso del solenoide con sección transversal cero podemos reconstruir el campo magnético regular, y el flujo magnético módulo 2. Para el caso general, suponiendo que K es convexo, se demuestra que podemos reconstruir el campo magnético regular en Ω y el flujo magnético sobre K módulo 2.

Los resultados son en realidad remarcables, porque a partir de la dispersión de partículas que en principio no tienen contacto con el compacto K, (que es en donde se encuentra el campo magnético singular) podemos encontrar una propiedad del campo magnético singular, que es el flujo magnético módulo 2. Es claro que este efecto no se presenta si consideramos el problema desde el punto de vista clásico, ya que si las partículas no interaccionan con el campo magnético singular, no podemos saber nada de este campo a partir del comportamiento clásico de las partículas. En la tesis se estudia el efecto Aharonov-Bohm desde un punto de vista matemáticamente riguroso.

Para estudiar el artículo [2] se necesita en primer lugar conocer la formulación matemática de la mecánica cuántica. Para esto se usa como referencia el libro [5]
Los conceptos expuestos de la página 1 a la 158 de ese libro conforman el lenguaje básico y fundamental que se utiliza en el desarrollo de la tesis. En el presente texto no se explican esos conceptos por lo extenso del tema y porque no es el propósito.
También es necesario conocer temas concretos de análisis funcional como son la teoría de distribuciones, el teorema espectral para operadores autoadjuntos (no necesariamente acotados), grupos a un parámetro y espacios de Sobolev. Los textos utilizados para estos temas son [8]; en el que se demuestra el teorema espectral y se desarrolla la teoría básica de grupos a un parámetro en las páginas 306-385; la teoría de distribuciones se explica en las páginas 149-200; y para espacios de Sobolev se utilizó el libro [10]; los temas que se necesitan conocer del libro se mencionan en la tesis cuando es necesario.
La tesis se desarrolla en la introducción y 9 capítulos . La introducción es como un mapa de la tesis, en donde se explica de manera breve el objetivo de cada capítulo, la manera en que se ligan y los resultados fundamentales. En el capítulo 1 se definen los potenciales magnéticos que se usan y se demuestran algunas de sus propiedades . En el capítulo 2 se definen los hamiltonianos de Aharonov-Bohm y se demuestran sus propiedades fundamentales. En los capítulos 3, 4 , 5 y 6, titulados: Un lema técnico, Algunos resultados de teoría espectral y derivadas generalizadas, Algunos resultados sobre espacios de Sobolev y finalmente Teorema espectral para dos operadores autoadjuntos, respectivamente, se demuestran resultados técnicos que son necesarios para los siguientes tres capítulos. En el capítulo 7 se construyen los operadores de onda y el operador de dispersión. En el capítulo 8 se demuestran teoremas de aproximación para los operadores de onda y finalmente en el capítulo 9 se resuelve el problema inverso.

A continuación explicamos cómo está estructurada la tesis, ya que la demostración de los resultados es bastante técnica y larga. En el caso del solenoide con sección transversal cero, el campo magnético esta dado por

$$B := B_s\delta(x) + B_R \tag{1}$$

En donde B_s es un número, $B_S\delta(x)$ es el campo singular y $B_R \in C_0^1(\mathbb{R}^2)$ es el campo regular. Para nuestro propósito, estudiamos una clase de potenciales magnéticos de B que cumplen con las siguientes características:

Definición 0.0.1. *Denotamos por $\mathcal{A}_{\{0\}}(\alpha_K, B_R)$ al conjunto de funciones $A \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \mathbb{R}^2) \cap L_1^{loc}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, con $\nabla \times A = 2\pi\alpha_{\{0\}}\delta(x) + B_R$, en $D' = C_0^\infty$. Asumimos que $A(x) = O(|x|^{-1}), |x| \to \infty$ y que $\alpha(r) := \sup_{|x| \geqq r} |A(x) \cdot \widehat{x} = x/|x|| \in L_1[0, \infty)$, en donde δ es la delta de Dirac.*

En donde $\alpha_{\{0\}} = \frac{B_s}{2\pi}$ y B_s es el flujo del campo magnético singular.
En el caso más general fijamos el campo magnético B_R en un abierto Ω de complemento compacto K y el flujo del campo sobre K. Notemos que si A es un potencial magnético para el campo magnético singular, el teorema de Green relaciona el flujo magnético del campo con la circulación del potencial A sobre ∂K, de modo que en lugar de fijar el flujo del campo magnético singular, fijaremos la circulación del potencial magnético sobre ∂K.

Definición 0.0.2. *Sea K un compacto en $\mathbb{R}^2$ tal que $0 \in int(K)$, y su frontera es una curva simple, cerrada, C^1; sea $\Omega = K^c$. Entonces para toda $\alpha_K \in \mathbb{R}$ y para toda función a valores reales $B_R \in C^1(\bar{\Omega})$, denotamos por $\mathcal{A}_K(\alpha_K, B_R)$ al conjunto de funciones $A \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^2)$ con $\nabla \times A = B_R$ en Ω, tal que $\alpha_K = 1/(2\pi) \int_{\partial K} A(x)dx$. En donde integramos en contra de las manecillas del reloj. Suponemos también que $A(x) = O(|x|^{-1}), |x| \to \infty$ y que $\alpha(r) := \sup_{x\in\Omega, |x| \geqq r} |A(x) \cdot \widehat{x}| \in L_1[0, \infty)$*

Denotamos por $\mathcal{A}_K(\alpha_K, B_R)$ a cualquiera de los conceptos de las definiciones 0.0.1 y 0.0.2, si $K = \{0\}$ usaremos la definición 0.0.1, usaremos la definición 0.0.2 en otro caso.

En el capítulo 1 demostramos que $\mathcal{A}_K(\alpha_K, B_R) \neq \emptyset$ y mostramos algunos casos particulares de potenciales magnéticos que cumplen con la definición.
También mostramos que si $A^1, A^2 \in \mathcal{A}_K(\alpha_K, B_R)$ existe una función λ tal que si $K = \{0\}, \lambda \in C^2(\mathbb{R}^2) \cap L_\infty(\mathbb{R}^2)$, y, en el otro caso $\lambda \in L_\infty(\bar{\Omega}) \cap C^2(\bar{\Omega})$,

tal que,

$$A^2 = A^1 + \nabla(\lambda) \tag{2}$$

Definimos en este mismo capítulo $\lambda_\infty(x) = \text{lím}_{r\to\infty} \lambda(r\widehat{x})$ (en donde $\widehat{x} = x/|x|$)que usaremos más adelante.
En el capítulo 2 construimos primeramente el operador hamiltoniano para el sistema de partículas con los campos magnéticos antes mencionados.
Se parte del Hamiltoniano formal $(P - A)^2/(2m)$, en donde $P = -i\nabla$ y $A \in \mathcal{A}_K(\alpha_K, B_R)$. Se considera la forma bilineal $q_A(\phi,\psi) = \langle (P-A)\phi, (P-A)\psi\rangle$, se demuestra que es cerrable y se cierra para obtener $\bar{q}_A$, después se encuentra el operador autoadjunto que representa a la forma bilineal cerrada $\bar{q}_A$, tal que $\bar{q}_A(\phi,\psi) = \langle H(A)\phi, \psi\rangle \forall\phi \in Dom(H(A)), \forall\psi \in Dom(\bar{q}_A)$ entonces $H(A)$ es el Hamiltoniano para el potencial magnético A.
Después se define el Hamiltoniano de partícula libre $H_0 = P^2/(2m)$ y se demuestra que es autoadjunto.
El principal propósito del capítulo 3 es demostrar el teorema 3.0.29. El capítulo es más que nada una serie de resultados técnicos que se utilizan en los demás capítulos.
En el capítulo 4 se demuestran resultados que se utilizan en el capítulo 7, el capítulo es más bien técnico.
Sea J el operador de $L_2(\mathbb{R}^2)$ en $L_2(\Omega)$ dado por la multiplicación por la función característica de Ω , entonces se definen los operadores de onda como sigue:

$$W_\pm(A) := \lim_{t\to\pm\infty} e^{itH(A)} J e^{-itH_0} \tag{3}$$

La razón de la definición se puede ver en el libro [5] antes citado, en el capítulo 4.
En el capítulo 5 se estudian resultados básicos de espacios de Sobolev, y el resultado principal es el teorema de Rellich-Kondrachov simplificado (teorema 5.0.44), este resultado se utiliza en el capítulo 7, el capítulo es muy técnico y se necesita la teoría básica de espacios de Sobolev para entenderlo.
En el capítulo 6 se demuestra un teorema espectral para 2 operadores autoadjuntos, que permite desarrollar el cálculo funcional para funciones de dos variables, herramienta que se utilizará en repetidas ocasiones en los capítulos siguientes.

En capítulo 7 se demuestra el teorema 7.0.56 que dice: Los Operadores de onda existen y son isométricos, para toda $A \in \mathcal{A}_K(\alpha_K, B_R)$, además si

$A^1, A^2 \in \mathcal{A}_K(\alpha_K, B_R)$ con $A^2 = A^1 + \nabla\lambda$, en donde λ es como en el capítulo 2 entonces

$$W_{\pm}(A^2) = e^{i\lambda(x)} W_{\pm}(A^1) e^{-i\lambda_\infty(\pm P)} \tag{4}$$

En donde λ_∞ es como en el capítulo 2

Con los operadores de onda, podemos definir el operador de dispersión, que está dado por:

$$S(A) = W_+^*(A) W_-(A) \tag{5}$$

Dado $\widehat{v} \in S^1$ denotamos por $\Omega_v = \{x \in \Omega : x + \widehat{v}\tau \in \Omega, \forall \tau \in \mathbb{R}\}$. Dada $\widehat{v} \in \mathbb{R}^2$ sea $\phi_0 \in C_0^\infty(\Omega_{\widehat{v}})$ en donde $\widehat{v} = v/|v|$, denotamos por $\phi_{\widehat{v}} = e^{imv\cdot x}\phi_0$, entonces $e^{-imv\cdot x}e^{-itH_0}\phi_{\widehat{v}} = e^{im|v|^2t/2}e^{-iP\cdot vt}e^{-itH_0}\phi_0$ (esta fórmula se demostrará en el capítulo 3). Demostraremos que en el límite de velocidades altas, podemos suponer como una buena aproximación que la evolución libre está dada por $e^{-itP\cdot v}\phi_0 = \phi_0(x - vt)$ (módulo una fase no importante), por lo tanto, como $\phi_0 \in C_0^\infty(\Omega_{\widehat{v}})$, entonces tiene interacción despreciable con K para todo tiempo.

Entonces, deseamos reconstruir $B_R(x), x \in \Omega$ y α_K módulo 2 a partir del valor del operador de dispersión aplicado a funciones de la forma $\phi_v = e^{imv\cdot x}\phi_0$, $\phi_0 \in C_0^\infty(\Omega_{\widehat{v}})$

Para tales fines haremos una aproximación más manejable del operador de dispersión, éste es el propósito del capítulo 8, es decir, demostrar el teorema 8.0.58. A partir de éste se deduce el siguiente teorema:

Supongamos que $A_K \in \mathcal{A}(\alpha_K, B_R)$ y que $\phi_0, \psi_0 \in C_0^\infty(\Omega_{\widehat{v}})$. Sean ϕ_v y $\psi_{\widehat{v}}$ dadas por,

$$\phi_v := e^{imv\cdot x}\phi_0, \qquad \psi_v = e^{imv\cdot x}\psi_0$$

Entonces,

$$\langle S(A)\phi_v, \psi_v\rangle = \langle e^{i\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{v}\cdot A(x+\widehat{v}\tau)d\tau}\phi_0, \psi_0\rangle + O(\frac{1}{|v|})$$

Entonces podemos conocer la función $e^{i\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{v}\cdot A(x+\widehat{v}\tau)d\tau}, x \in \Omega_{\widehat{v}}$ a partir del límite, $\lim_{|v|\to\infty}\langle S(A)\phi_v, \psi_v\rangle$, para todo $\phi_0 \in C_0^\infty(\Omega_{\widehat{v}})$

A partir de esta información, se demuestra finalmente en el capítulo 9 el siguiente teorema:

Supongamos que $A^j \in \mathcal{A}_K(\alpha_K^j, B_R^j), j = 1, 2$ y que K es convexo. Entonces si $S(A^1) = S(A^2)$, tenemos que $\alpha_K^1 = \alpha_K^2$ módulo 2 y que $B_R^1(x) = B_R^2(x), x \in \Omega$. Este último teorema es el objetivo final de este trabajo.

Capítulo 1

Potenciales Magnéticos

1.1. Preliminares

1.1.1. Primera parte

Definición 1.1.1. *Denotamos por* $\mathcal{A}_{\{0\}}(\alpha_{\{0\}}, B_R)$ *al conjunto de todas las funciones* $A \in C^1(\mathbb{R}^2 - \{0\}, \mathbb{R}^2) \cap l_2^{loc}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ *con* $\nabla \times A = 2\pi\alpha_{\{0\}}\delta(x) + B_R$ $\in \mathcal{D}'$. *Mas aún, asumimos que* $A(x) = O(\|x\|)^{-1}, \|x\| \to \infty$ *y que*

$$a(r) := \sup\{|A(x) \cdot \widehat{x}| : \|x\| \geqq r\} \in L^1([0, \infty))$$

Definición 1.1.2. *Sea* K *un conjunto compacto tal que* $0 \in int(K)$ *y que su frontera* ∂K *es una curva cerrada, simple* C^1*; sea* $\Omega = K^c$ *. Entonces para toda* $a_K \in \mathbb{R}$ *y toda función a valores reales* $B_R \in C_0^1(\bar{\Omega})$ *denotamos por* $\mathcal{A}_K(\alpha_K, B_R)$ *al conjunto de funciones a valores reales* $A \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^2)$ *con* $\nabla \times A = B_R$ *y tales que*

$$\alpha_K = \frac{\int_{\partial K} A(x)dx}{2\pi}$$

En donde la integral está en sentido contrario de las manecillas de reloj. Además, asumimos que $A(x) = O(\|x\|^{-1}), \|x\| \to \infty$ *y que*

$$a(r) := \sup\{|A(x) \cdot \widehat{x}| : \|x\| \geqq r, x \in \Omega\} \in L^1((0, \infty])$$

Debemos demostrar que estos conjuntos antes definidos no son vacíos. Como la función $B_R \in C_0^1(\bar{\Omega})$, entonces existe una función $\tilde{B}_R \in C_0^1(\mathbb{R}^2)$ tal que $\tilde{B}_R(x) = B_R(x)$ para toda $x \in \Omega$ y $B_R(x) = 0$ en una vecindad del 0 [1]
Definimos las siguientes funciones:

[1] Teorema 26.A.3 del libro [4]

$$(1.1)\qquad A_{1s}(\boldsymbol{x}) := \frac{\alpha_{\{0\}}}{|x|^2}\begin{pmatrix}-x_2\\ x_1\end{pmatrix}, A_{1R}(x) := \frac{1}{2\pi}\int B_R(x-y)\begin{pmatrix}-y_2\\ y_1\end{pmatrix}\frac{dy}{|y|^2}$$

$$(1.2)\qquad A_{2s}(x) := \frac{\alpha_K - \alpha_R}{|x|^2}\begin{pmatrix}-x_2\\ x_1\end{pmatrix}, A_{2R} := \frac{1}{2\pi}\int \tilde{B_R}(x-y)\begin{pmatrix}-y_2\\ y_1\end{pmatrix}\frac{dy}{|y|^2}$$

Además $\boldsymbol{\alpha_R} := \int_{\partial_k} A_R dx$, en donde integramos en contra de las manecillas del reloj.

Entonces $\boldsymbol{A_{1R}} + A_{1S} \in \mathcal{A}_{\{0\}}(\alpha_{\{0\}}, B_R)$ y $A_{2R} + A_{2S} \in \mathcal{A}_K(\alpha_K, B_R)$
Enseguida se demuestra la afirmación anterior:

Teorema 1.1.1. *$\nabla \times A_{1s} = 2\pi\alpha_{\{0\}}\delta$ en el sentido distribucional, en donde δ es la delta de Dirac*

Demostración. Sea $\phi \in \mathcal{D} = C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ Entonces,
$\nabla \times A_{1s}(\phi) = -A_{1s,2}(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}) + A_{1s,1}(\frac{\partial\phi}{\partial x_2}) = -\int \frac{\alpha_{\{0\}}}{|x|^2}(x_1\frac{\partial\phi}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial\phi}{\partial x_2})$.
Por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue, esto último es igual a:$\lim_{\epsilon\to 0} -\int_{\boldsymbol{B_\epsilon(0)^c}} \frac{\alpha_0}{|x|^2}(x_1\frac{\partial\phi}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial\phi}{\partial x_2})$
A continuación hacemos un cambio de variable, $x_1 = r\cos(\theta), x_2 = r\sin(\theta)$; por lo que $\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = \frac{\partial\phi}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial\theta} + \frac{\partial\phi}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial\theta} \qquad \frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{\partial\phi}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial r} + \frac{\partial\phi}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial r}$
Entonces:
$\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = -\frac{\partial\phi}{\partial x_1} r\sin(\theta) + \frac{\partial\phi}{\partial x_2} r\cos(\theta)$
$\frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{\partial\phi}{\partial x_1} cos(\boldsymbol{\theta}) + \frac{\partial\phi}{\partial x_2}\sin(\theta)$
Multiplicando la primera ecuación por $-sin(\theta)$ y la segunda por $r\cos(\theta)$ y sumando las ecuaciones obtenemos:

$$(1.3)\qquad \frac{\partial\phi}{\partial x_1} = \frac{1}{r}(-\sin(\theta)\frac{\partial\phi}{\partial\theta} + r\cos(\theta)\frac{\partial\phi}{\partial r})$$

De manera análoga obtenemos:

$$(1.4)\qquad \frac{\partial\phi}{\partial x_2} = \frac{1}{r}(\cos(\theta)\frac{\partial\phi}{\partial\theta} + r\sin(\theta)\frac{\partial\phi}{\partial r})$$

Entonces:
$\nabla\times A_{1s}(\phi) = -\boldsymbol{\alpha}_{\{0\}} \lim_{\epsilon\to 0}\int_{B_\epsilon(0)^c} \frac{r\cos\theta}{r^2}((\frac{1}{r}(-\sin(\theta)\frac{\partial\phi}{\partial\theta} + r\cos(\theta)\frac{\partial\phi}{\partial r}) + \frac{r\sin(\theta)}{r^2}(\frac{1}{r}(\cos(\theta)\frac{\partial\phi}{\partial\theta} +$

$r\sin(\theta)\frac{\partial\phi}{\partial r})))rdrd\theta$

$= -\alpha_{\{0\}} \text{lím}_{\epsilon\to 0} \int_0^{2\pi} \int_\epsilon^\infty \frac{\partial\phi}{\partial r} drd\theta$

$= \alpha_{\{0\}} \text{lím}_{\epsilon\to 0} \int_0^{2\pi} \phi(\epsilon,\theta)d\theta$

Pero como ϕ es $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, se aplica el teorema de convergencia dominada de Lebesgue para obtener:

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^{2\pi} \phi(\epsilon,\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} \lim_{\epsilon\to 0}\phi(\epsilon,\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} \phi(0)d\theta = 2\pi\phi(0)$$

Por lo tanto, obtenemos:
$\nabla \times A_{1s}(\phi) = \alpha_{\{0\}}2\pi\phi(0) = \alpha_{\{0\}}2\pi\delta(\phi)$
Entonces $\nabla \times A_{1s} = \alpha_{\{0\}}2\pi\delta$ □

Teorema 1.1.2. $\nabla \cdot A_{1s} = 0$ *en el sentido distribucional*

Demostración. Usando la ecuación 1.1 y utilizando coordenadas polares obtenemos:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot A_{1s}(\phi) = -A_{1s,1}\frac{\partial\phi}{\partial x_1} - A_{1s,2}\frac{\partial\phi}{\partial x_2}&\\ &= -\lim_{\epsilon\to 0}\int_{B_\epsilon(0)^c} \frac{\alpha_{\{0\}}}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}d\theta dr\\ &= -\lim_{\epsilon\to 0}\int_\epsilon^0 0\frac{\alpha_{\{0\}}}{r}dr\\ &= 0\end{aligned}$$

□

Teorema 1.1.3. $\nabla \times A_{1R} = B_R$

Demostración. sea $\phi \in C_0^\infty\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}\nabla \times A_{1R}(\phi) &= -A_{1R,2}(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}) + A_{1R,1}(\frac{\partial\phi}{\partial x_2})\\ &= -\int\int \frac{1}{2\pi}B_R(z)(\frac{(x-z)_1}{|x-z|^2}\frac{\partial\phi}{\partial x_1} + \frac{(x-z)_2}{|x-z|^2}\frac{\partial\phi}{\partial x_2})dzdx\end{aligned}$$

Como $B_R \in C_0^1(\mathbb{R}^2)$ y $\phi \in \mathcal{D}$, entonces el integrando de la última ecuación es absolutamente integrable en el plano, por lo tanto, podemos utilizar Fubini:

$$\begin{aligned}
\nabla \times A_{1R}(\phi) &= -\int\int \frac{1}{2\pi} B_R(z)(\frac{(x-z)_1}{|x-z|^2}\frac{\partial\phi}{\partial x_1} + \frac{(x-z)_2}{|x-z|^2}\frac{\partial\phi}{\partial x_2})dxdz \\
&= \int \frac{B_R(z)}{2\pi}(\int -\frac{w_1}{|w|^2}\frac{\partial \tau_{-z}\phi(w)}{\partial w_1} - \frac{w_2}{|w|^2}\frac{\partial \tau_{-z}\phi(w)}{\partial w_2}dw)dz
\end{aligned}$$

En donde $\tau_{-z}\phi(w) = \phi(w+z)$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{B_R(z)}{2\pi} 2\pi\delta(\tau_{-z}\phi)dz \\
&= \int B_R(z)\phi(z)dz \\
&= B_R(\phi)
\end{aligned}$$

□

De manera análoga se demuestra que $\nabla \cdot A_{1R} = 0$
De los teorema anteriores se deduce que $\nabla \times (A_{1R} + A_{1s}) = 2\pi\alpha_{\{0\}}\delta(x) + B_R$ y que $\nabla \cdot (A_{1R} + A_{1s}) = 0$
Es un resultado elemental que $A_{1s} \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$; además A_{1R} es acotado, pues sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $sop(B_r) \subset B_n(0)$; entonces

$$2\pi|A_{1R}(x)| \leqq |B_R|_\infty \int_{B_n(x)} \frac{1}{|y|}dy \leqq \begin{cases} |B_R|_\infty \text{volumen}(B_n(0)) \text{ si } |x| \geqq 2n \\ |B_R|_\infty \int_{B_{2n}(0)} \frac{1}{|y|}dy \text{ si } |x| \leqq 2n \end{cases}$$

Como A_{1R} es acotado, entonces se obtiene que $A_{1R} \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, por lo tanto, $A_{1R} + A_{1s} \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$
Claramente $A_{1s}(x) = O(|x|^{-1}), |x| \to \infty$ y además se cumple que $2|\pi A_{1R}(x)| \leqq |B_R|_\infty volumen\ (B_n(0))\frac{1}{|x|-n} si |x| \geqq 2n$
Se concluye en consecuencia que $A_{1s} + A_{1R} = O(|x|^{-1}), |x| \to \infty$. Además,

$$\begin{aligned}
2\pi(A_{1R} + A_{1s})(x) \cdot \widehat{x} &= \int \frac{B_R(z)}{|x-z|^2|x|}\begin{pmatrix} -(x-z)_2 \\ (x-z)_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} dz \\
&\leqq C\frac{|B_R|_\infty n}{(|x|-n)^2} \text{ si } |x| \geqq 2n
\end{aligned}$$

Como A_{1R} es acotado y $A_{1s}(x) \cdot \widehat{x} = 0$
Se concluye que:

$$\alpha(r) := \sup_{|x| \geqq r} \{(A_{1R} + A_{1s})(x) \cdot \widehat{x}\} \in L^1([0, \infty])$$

Es claro que $A_{1s} \in C^1(\mathbb{R}^2 - \{0\}, \mathbb{R}^2)$

Teorema 1.1.4. $A_{1R} \in C^1(\mathbb{R}^2 - \{0\}, \mathbb{R}^2)$

Demostración. Sea e_i un vector de la base canónica de $\mathbb{R}^2$, sea $g : [-1, 1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $g(h, y) = \frac{B_R(x+he_i-y)-B_R(x-y)}{h}$, como $B_R \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$; entonces g es continua y de soporte compacto, luego existe un compacto E de $\mathbb{R}^2$ y una constante M, tales que $g_h(y) = |g(h, y)| \leqq M\chi_E \forall h \in [-1, 1]$; por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue, se concluye que $\lim_{h \to 0} \int g_h dy = \int \lim_{h \to 0} g_h(y)$ y por ende se obtiene:

$$\frac{\partial A_{1R}}{\partial x_i} = \frac{1}{2\pi} \int \frac{\partial B_R(x-y)}{\partial x_i} \begin{pmatrix} -y_2 \\ y1 \end{pmatrix} \frac{dy}{|y|}$$

Por lo tanto, se concluye que $A_{1R} \in C^1(\mathbb{R}^2 - \{0\}, \mathbb{R}^2)$ □

Hemos demostrado entonces que $A_{1r} + A_{1s} \in \mathcal{A}_{\{0\}}(\alpha_{\{0\}}, B_R)$; por lo tanto: $\mathcal{A}_{\{0\}}(\alpha_{\{0\}}, B_R) \neq \emptyset$.

Veamos ahora que $\mathcal{A}_K(\alpha_k, B_R) \neq \emptyset$.
Sea $A = A_{2s} + A_{2R}$. Podemos concluir que $\nabla \times A_{2s} = (\alpha_K - \alpha_R)2\pi\delta$, esto es, por lo ya demostrado en el caso K = 0, por lo tanto, $\nabla \times A_{2s} = 0$ *en* Ω, pues el 0 está en el interior de K.

De igual forma que en el teorema 1.1.3, podemos concluir que $\nabla \times A_{2R} = \tilde{B}_R$ por lo que se concluye que $\nabla \times A_{2R} = B_R$ en Ω
Se concluye que $\nabla \times A = B_R$ *en* Ω y que $A_{2s} = O(|x|^{-1}), |x| \to \infty$ y el hecho de que A_{2R} es acotado y que $A_{2R} = O(|x|^{-1}), |x| \to \infty$ se demuestra de manera análoga al caso de A_{1R}
De manera igual al caso en el que K = 0, podemos concluir que:

$$\alpha(r) := \sup_{|x| \geqq r} \{(A_{2R} + A_{2s})(x) \cdot \widehat{x}\} \in L^1([0, \infty])$$

Veamos ahora que $A \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^2)$:
Como $0 \in int(K)$ entonces es claro que $A_{2s} \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^2)$, de manera que sólo tenemos que ver que $A_{2R} \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^2)$.

Teorema 1.1.5. $A_{2R} \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^2)$

Demostración. Sabemos que:

$$2\pi A_{2R}(x) = \int \tilde{B}_R(x-y) \begin{pmatrix} -y_2 \\ y_1 \end{pmatrix} \frac{dy}{|y|^2} = \int \tilde{B}_R(y) \begin{pmatrix} -(x-y)_2 \\ (x-y)_1 \end{pmatrix} \frac{dy}{|x-y|^2}$$

Como $\tilde{B}_R$ es continua de soporte compacto, entonces, es uniformemente continua, supongamos que $sop(\tilde{B}_R) \subset B_N(0)$ y que $B_R \neq 0$ (de lo contrario es claro), entonces sea $\epsilon/(\int_{B_{2N+2}(0)} 1/|y|dy + 1 + \lambda(B_N(0))))$ (en donde λ es la medida de Lebesgue) tal que si $|z_1 - z_2| < \delta \Rightarrow |B_R(z_1) - B_R(z_2)| < \epsilon/(|\tilde{B}_R|_\infty(\int_{B_{2N+2}(0)} 1/|y|dy + 1 + \lambda(B_N(0))))$
Entonces si $|x_1 - x_2| < min(1/2, \delta) \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
&|2\pi A_{2R}(x_1) - 2\pi A_{2R}(x_2)| \leqq \\
&\epsilon/((\int_{B_{2N+2}(0)} 1/|y|dy + 1 + \lambda(B_N(0)))) \int_{B_{N+1/2}(x_1)} 1/|y|dy \leqq \\
&\begin{cases} \epsilon/(\int_{B_{2N+2}(0)} 1/|y|dy + 1 + \lambda(B_N(0))) \int_{B_{2N+2}(0)} 1/|y|dy \text{ si } |x_1| < N+1 \\ 2\epsilon/(\int_{B_{2N+2}(0)} 1/|y|dy + 1 + \lambda(B_N(0)))\lambda(B_N(0)) \text{ si } |x_1| \geqq N+1 \end{cases} \\
&< 2\epsilon
\end{aligned}$$

Se concluye que A_{2R} es uniformemente continua.
Veremos que es derivable:
Sea e_1, e_2 los vectores de le base de $\mathbb{R}^2$, definimos

$$h(y,h) = \frac{\tilde{B}_R(x + he_i - y) - \tilde{B}_R(x-y)}{h}$$

Para $|h| \leqq 1$, entonces, como $\tilde{B}_R \in C_0^1(\mathbb{R}^2)$, y h es continua y de soporte compacto, por lo tanto es acotada y de soporte compacto. Se sigue entonces del teorema de convergencia dominada de Lebesgue que

$$\lim_{h\to 0} \int h(y,h) \begin{pmatrix} -y_2 \\ y_1 \end{pmatrix} 1/|y|^2 dy = \int \lim_{h\to 0} h(y,h) \begin{pmatrix} -y_2 \\ y_1 \end{pmatrix} 1/|y|^2 dy$$

Y de esto último se concluye que

$$\frac{\partial}{\partial x_i} A_{2R} = (2\pi)^{-1} \int \frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{B}_R(x-y) \begin{pmatrix} -(x-y)_2 \\ (x-y)_1 \end{pmatrix}$$

Como $\frac{\partial}{\partial x_i}\tilde{B}_R \in C_0^0(\mathbb{R}^2)$, se sigue como cuando demostramos que A_{2R} es uniformemente continua, que $\frac{\partial}{\partial x_i}A_{2R}$ es uniformemente continua.
El hecho de que A_{2R} y $\frac{\partial}{\partial x_i}A_{2R}$ son acotadas , se sigue de que $\tilde{B}_R$ y $\frac{\partial}{\partial x_i}\tilde{B}_R$ son acotadas y de soporte compacto.

□

Teorema 1.1.6. *Si $A = A_{2s} + A_{2R}$, entonces: $\alpha_K = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial K} A(x)dx$*

Demostración. Supongamos que $B_\epsilon(0) \subset K$, *sea* $\tilde{K} = K - B_\epsilon(0) \Rightarrow \int_{\partial K} A_{2s} - \int_{\partial B_\epsilon(0)} A_{2s} = {}^2 \int_{\tilde{K}} \nabla \times A_{2s} = 0 \therefore \int_{\partial B_\epsilon(0)} A_{2s} = \int_{\partial K} A_{2s} = 2\Pi(\alpha_K - \alpha_R) \therefore \frac{1}{2\pi}\int_{\partial K}(A) = \alpha_K$ □

Como resultado tenemos que $A \in \mathcal{A}_\mathcal{K}(\alpha_\mathcal{K}, \mathcal{B}_\mathcal{R})$ y por lo tanto $\mathcal{A}_\mathcal{K}(\alpha_\mathcal{K}, \mathcal{B}_\mathcal{R}) \neq \emptyset$.

Teorema 1.1.7. *Supongamos que $A^1 y A^2 \in \mathcal{A}_K(\alpha_K, B_K)$. Entonces si $K = \{0\}$, existe una función a valores reales $\lambda \in C^2(\mathbb{R}^2 - 0) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$ tal que $A^1 = A^2 + \nabla\lambda$ en $\mathcal{D}''(\mathbb{R}^2)$. Si K es como en la definición 1.1.2, existe una función a valores reales $\lambda \in C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\bar{\Omega})$ tal que $A^1 = A^2 + \nabla\lambda$ en Ω. Además, en ambos casos $\lambda_\infty(\widehat{x}) = \lim_{r\to\infty} \lambda(rx)$ existe y es continua en el circulo S_1. Denotamos también por λ_∞ a la extensión de ésta a la función continua de grado cero definida en $\mathbb{R}^2 - 0$ como sigue:$\lambda_\infty(r\widehat{x}) := \lambda_\infty(\widehat{x}), r > 0$*

Lema 1.1.1. *Denotamos por $A = A^1 - A^2$. Entonces $\nabla \times A = 0$. Supongamos primero que $K = \{0\}$. Sea $\phi \in C_0^\infty(B_1(0)), \phi \geqq 0$ tal que $\int \phi(x)dx = 1$ sea $\phi_n(x) = n^2\phi(nx)$. Definimos $A_n = \phi_n * A$, entonces:$A_n \in C^\infty$,*

Demostración. sea $H : [-1,1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, H(t,y) = (\phi_n(x + te_i - y) - \phi_n(x - y))/t - \frac{\partial \phi_n(x-y)}{\partial x_i}$, en donde e_i es un vector de la base canónica de $\mathbb{R}^2$.
Entonces H es continua de soporte compacto, por lo tanto, H es acotada por una constante M; se sigue que $A(y)H(t,y) \leqq MA(y)\ \forall\, t \in [-1,1] \forall y \in \mathbb{R}^2 - 0$
Por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue $\lim_{t\to 0} \int H(t,y)dy = \int \lim_{t\to 0} H(t,y) = 0 \therefore \frac{\partial A_n}{\partial x_i} = \int A(y)\frac{\partial \phi_n}{\partial x_i}(x-y)dy$
Entonces $\frac{\partial A_n}{\partial x_i}$es continua y por inducción se demuestra que las derivadas de orden superior a 1 con continuas , entonces $A_n \in C^\infty$ □

[2]Teorema de Green

Lema 1.1.2. $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ *uniformemente en compactos contenidos en* $\mathbb{R}^2 - 0$

Demostración. Es claro que $sop(\phi_n) \subset B_{1/n}(0)$ y que $\int \phi_n = 1$.
Sea $U \subset \mathbb{R}^2 - 0$ compacto sea $d := dist(U, 0) > 0$, sea $n_1 \in \mathbb{R}$ tal que $1/n_1 < d/4$.
Como A es continua en Ω, A es uniformemente continua en $U_{d/2} := \{x \in \mathbb{R}^2 : dist(x, U) \leqq d/2\}$, sea $\delta > 0$ tal que si $|x - y| < \delta, x, y \in U_{d/2} \Rightarrow |A(x) - A(y)| < \epsilon$. Sea $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $1/n_2 < \delta$ Entonces:
Sea $x \in U$ y $n > \max(n_1, n_2)$

$$
\begin{aligned}
|A(x) - A_n(x)| &= |\int \phi_n(y)A(x)dy - \int A(x-y)\phi_n(y)dy| \\
&\leqq \int |A(x) - A(x-y)|\phi_n(y)dy \\
&= \int_{B_{1/n}(0)} |A(x) - A(x-y)|\phi_n(y)dy \\
&\leqq \epsilon \int \phi_n(y)dy \\
&= \epsilon
\end{aligned}
$$

□

Lema 1.1.3. $\nabla \times A_n = 0$

Demostración. Se demostrará que $\nabla \times A_n = 0$ en $\mathcal{D}'$ y como A_n es C^∞, de esto se sigue que $\nabla \times A_n = 0$
Sea $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Entonces $A(y)\phi_n(x-y)\frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x)$ es absolutamente integrable en $\mathbb{R}^2$, por lo tanto, podemos aplicar Fubini.

$$
\begin{aligned}
\nabla \times A_n(\psi) &= \int (\int A_1(x-y)\phi_n(y)dy)\frac{\partial \psi}{\partial x_2}(x) - (\int A_2(x-y)\phi_n(y)dy)\frac{\partial \psi}{\partial x_1}(x))dx \\
&= \int \phi_n(y) \int A_1(x-y)\frac{\partial \psi}{\partial x_2}(x) - A_2(x-y)\frac{\partial \psi}{\partial x_1}(x)dxdy \\
&= \int \phi_n(y) \int A_1(z)\frac{\partial \psi}{\partial x_2}(y+z) - A_2(z)\frac{\partial \psi}{\partial x_1}(y+z)dzdy \\
&= \int \phi_n(y)\nabla \times A(\tau_{-y}\psi) \text{donde } \tau_{-y}\psi(z) = \psi(y+z) \\
&= \int \phi(y)0dy \\
&= 0
\end{aligned}
$$

□

Demostración del Teorema 1.1.7. .

Supongamos primero que K = {0} Se sigue del teorema de Stokes que para cualquier curva simple cerrada C que no pase por el 0

$$\int_C A_n dl = \int_{C_{int}} \nabla \times A_n dx = 0$$

Como $A_n \to A$ uniformemente en C, entonces:

$$\int_C Adl = \lim_{n\to\infty} \int_c A_n dl = 0 \tag{1.5}$$

Supongamos ahora que $K \neq \{0\}$; sabemos por hipótesis que $\int_{\partial K} Adl = 0$ Si C es una curva cerrada $C^1 \subset \Omega$ cuyo interior no contiene a K, se sigue del teorema de Stokes que $\int_C Adl = \int_{C_{int}} \nabla \times Adx = 0$ si la curva C tiene al K en su interior entonces, si $K_1 = C_{int} - K \Rightarrow \int_{\partial K_1} Adl = \int_{K_1} \nabla \times A = 0 \Rightarrow \int_C Adl = \int_{\partial K} Adl = 0$ se concluye que si C es una curva simple cerrada $C^1 \subset \Omega$

$$\int_C Adl = 0 \tag{1.6}$$

En cualquier caso, sea K $=\{0\}$ o no, definimos para x_0 fijo en Ω

$$\lambda(x) := \int_{C_{x_0}^x} Adl \tag{1.7}$$

En donde $C_{x_0}^x$ es una curva simple C^1 en Ω que va de x_0 a x, λ está bien definida por 1.5 y 1.6
Por la definición de λ se obtiene que $\nabla\lambda = A$, por lo tanto, si K $= \{0\}$, $\lambda \in C^2(\mathbb{R}^2 - 0)$ y si $K \neq \{0\}$, entonces $\lambda \in C^2(\bar{\Omega})$
Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset B_N(0)$ supongamos que $x_0 \in \partial B_n(0), |x| \geqq N$ sea $x \in \Omega$ sea $x_1 \in \partial B_N(0) \cap \{rx : r > 0\}$ entonces:

$$\begin{aligned}\lambda(x) &= \int_{C_{x_0}^{x_1}} Adl + \int_{C_{x_1}^x} Adl \\ &\leqq 2\pi|A|_\infty N + \int_0^\infty \alpha(r)dr\end{aligned}$$

Además, λ es acotada en la bola $\bar{B}_N(0)$, pues A es acotada y ∂K es una curva C^1, simple y cerrada. Se concluye que $\lambda \in L^\infty(\bar{\Omega})$ si $K \neq \{0\}$ y que $\lambda \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ si $K = \{0\}$

Sea $M \in \mathbb{R}, M \geqq N$ tal que $\int_M^\infty \alpha(r)dr < \epsilon/4$ sea $\delta > 0$ tal que si $\widehat{x}, \widehat{y} \in S_1, |\widehat{x} - \widehat{y}| < \delta \Rightarrow \int_{M\widehat{x}}^{M\widehat{y}} |A|_\infty dl < \epsilon/2$
sean $\widehat{x}, \widehat{y} \in S_1, |\widehat{x} - \widehat{y}| < \delta$, entonces

$$\begin{aligned}|\lambda_\infty(\widehat{x}) - \lambda_\infty(\widehat{y})| &\leqq \int_{M\widehat{x}}^{M\widehat{y}} |A|_\infty dl + 2\int_M^\infty \alpha(r)dr \\ &\leqq \epsilon/4 + 2\epsilon/2 \\ &< \epsilon\end{aligned}$$

Por lo tanto λ es continua en S_1 □

1.1.2. Segunda parte

Definimos aquí algunas funciones particulares que cumplen con las definiciones 1.1.1 y 1.1.2.
Usaremos coordenadas polares $(r, \theta), r > 0$,

$\theta \in [\theta_0, \theta_0 + 2\pi)$ para alguna $\theta_0 \in [0, 2\pi)$
Sea $f(\theta) \in C^1(S^1)$ tal que $f(\theta) = 0$ para $\theta_0 \leqq \theta \leqq \theta_0 + \epsilon/2$ y para $\theta_0 + 2\pi \geqq \theta \geqq \theta_0 + 2\pi - \epsilon/2$, supongamos que $f(\theta) = \theta$ para $\theta_0 + \epsilon \leqq \theta \leqq \theta_0 + 2\pi - \epsilon$ para alguna $\epsilon > 0$. Definimos:

$$A^f := \frac{(\alpha_K - \alpha_R)}{|x|^2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} - (\alpha_K - \alpha_R) \nabla f(\theta)$$

En donde $\alpha_R = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial K} A^Q$ es un número y el término A^Q se define posteriormente.

Teorema 1.1.8. *A^f tiene soporte en un cono con centro en 0, eje $e^{i\theta_0}$ y ángulo de apertura ϵ, además, $A^f = O(|x|^{-1}), |x| \to \infty$ y que $A^f(x) \cdot \widehat{x} = 0$*

Demostración. En realidad se define $f(r, \theta) = f(\theta) \forall r \forall \theta$
Sea $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $G(r, \theta) = (r \cos(\theta), r \sin \theta)$ sea g tal que $g \circ G = f(r, \theta)$, entonces ∇f se refiere en realidad a ∇g

$$\begin{aligned}
\nabla f(\theta) &= (0, \frac{\partial f}{\partial \theta}) \\
&= (\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}) \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{pmatrix} \\
&= (\frac{\partial g}{\partial x} \cos(\theta) + \frac{\partial g}{\partial y} \sin(\theta), -\frac{\partial g}{\partial x} r \sin(\theta) + \frac{\partial g}{\partial y} r \cos(\theta)) \\
&\Rightarrow \\
0 &= \frac{\partial g}{\partial x} \cos(\theta) + \frac{\partial g}{\partial y} \sin(\theta) \\
\frac{\partial f}{\partial \theta} &= -\frac{\partial g}{\partial x} r \sin(\theta) + \frac{\partial g}{\partial y} r \cos(\theta) \\
&\Rightarrow \\
\frac{\partial g}{\partial x} &= -\frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{y}{r^2} \\
\frac{\partial g}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{x}{r^2}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \nabla g(x, y) = \frac{\frac{\partial f}{\partial \theta}}{r^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

Para $(x, y) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ para θ *tal que* $\theta_0 + \epsilon \leqq \theta \leqq \theta_0 + 2\pi - \epsilon$, se cumple que $\frac{\partial f}{\partial \theta} = 1$

Por lo tanto A^f tiene soporte en un cono con centro en 0, eje $e^{i\theta_0}$ y ángulo de apertura ϵ y $A^f = O(|x|^{-1}), |x| \to \infty$ y que $A^f(x) \cdot \widehat{x} = 0$

□

Para cualquier $Q = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$, sea A^Q el siguiente potencial magnético:

$$A^Q := \begin{pmatrix} q_2 - x_2 \\ x_1 - q_1 \end{pmatrix} \int_0^1 \tilde{B}_R(\mu x + (1-\mu)Q)\mu d\mu$$

En donde si $K = \{0\}, \tilde{B}_R = B_R$ y si K es como en la definición 1.1.1, $\tilde{B}_R(x) = B_R(x)$ si $x \in \Omega$ y $\tilde{B}_R \in C_0^1(\mathbb{R}^2)$ es una extensión de B_R que es cero en una vecindad del 0 [3].

Teorema 1.1.9. *Se puede encontrar Q tal que el soporte de A^Q esté contenido en un cono con vértice Q , con ángulo de apertura ϵ y eje $e^{i\theta}$*

Demostración. Supongamos que $sop(\tilde{B}_R) \subset B_N(0), N \in \mathbb{N}$ sea:

$$L_x := \{Q + \mu(x - Q) : \mu \in [0, 1]\}$$

La recta que une a x con Q
Para que $x \in sopA^Q$ es necesario que $L_x \cap B_N(0) \neq \emptyset$, esto quiere decir que $sop(A^Q) \subset \{x : x \in L_x \ y \ L_x \cap B_N(0) \neq \emptyset\}$, este último conjunto es un cono con centro en Q si $|Q| > N$, eje en dirección de -Q y ángulo de apertura menor que $\arcsin(N/|Q|)$, es claro que el ángulo de apertura tiende a 0 cuando $|Q|$ tiende a infinito.

□

Teorema 1.1.10. $\nabla \times A^Q(x) = \tilde{B}_R(x)$

[3]Página 247, teorema 26.A.3 del libro [4]

Demostración.

$$\begin{aligned}
\nabla \times A^Q(x) &= \frac{\partial}{\partial x_1}(x_1 - q_1)\int_0^1 \tilde{B}_R(x\mu + (1-\mu)Q)\mu d\mu \\
&- \frac{\partial}{\partial x_2}(q_2 - x_2)\int_0^1 \tilde{B}_R(x\mu - (1-\mu)Q)\mu d\mu \\
&= \int_0^1 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}(\tilde{B}_R)(x\mu - (1-\mu)Q)\mu^2 + x_2\frac{\partial}{\partial x_2}(\tilde{B}_R)(x\mu - (1-\mu)Q)\mu^2 d\mu \\
&- \int_0^1 q_1 \frac{\partial}{\partial x_1}(\tilde{B}_R)(x\mu - (1-\mu)Q)\mu^2 - q_2\frac{\partial}{\partial x_2}(\tilde{B}_R)(x\mu - (1-\mu)Q)\mu^2 d\mu \\
&+ 2\int_0^1 (\tilde{B}_R)(x\mu - (1-\mu)Q)\mu d\mu \\
&= \int_0^1 \mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu}\tilde{B}_R(Q + \mu(x-Q))d\mu + 2\int_0^1 (\tilde{B}_R)(x\mu - (1-\mu)Q)\mu d\mu \\
&= (\mu^2 \tilde{B}_R(Q + \mu(x-Q)))|_0^1 - 2\int_0^1 (\tilde{B}_R)(x\mu - (1-\mu)Q)\mu d\mu \\
&+ 2\int_0^1 (\tilde{B}_R)(x\mu - (1-\mu)Q)\mu d\mu \\
&= \tilde{B}_R(x)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \nabla \times A^Q = \tilde{B}_R$$

□

Teorema 1.1.11. *A^Q es uniformemente continua, derivable en primer orden, con sus derivadas uniformemente continuas.*

Demostración. Para la continuidad uniforme de A^Q y sus primeras derivadas, es suficiente demostrar que $f(x) = \int_0^1 \tilde{B}_R(Q + \mu(x-Q))\mu$ es uniformemente continua , junto con sus primeras derivadas.
Sea e_i un vector de la base canónica de $\mathbb{R}^2$. Definimos la siguiente función.

$$g(\mu, h) = (\tilde{B}_R(Q + \mu(x + he_i - Q))\mu - \tilde{B}_R(Q + \mu(x-Q))\mu)/h, \ \ \mu, h \in [0,1] \times [0,1]$$

Como $B_R \in C^1_O(\Omega)$ entonces g es continua, y por lo tanto acotada, se sigue del teorema de convergencia dominada de Lebesgue que $\lim_{h\to 0}\int_0^1 g(\mu,h)d\mu = \int \lim_{h\to 0} g(\mu,h)d\mu$, por lo tanto,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\int_0^1 \tilde{B}_R(Q+\mu(x-Q))\mu d\mu = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_i}(\tilde{B}_R(Q+\mu(x-Q))\mu)d\mu$$
$$= \int_0^1 (\frac{\partial}{\partial x_i}\tilde{B}_R)(Q+\mu(x-Q))\mu^2 d\mu$$

Observemos que $|x-y|<\delta, \mu \leqq 1 \Rightarrow |Q+\mu(x-Q)-(Q+\mu(y-Q)) = |\mu(x-y)| < \delta$.Como $\frac{\partial}{\partial x_i}\tilde{B}_R$ es uniformemente continua, dada $\epsilon > 0 \exists \delta > 0$ tal que si $|x-y|<\delta \Rightarrow |(\frac{\partial}{\partial x_i}\tilde{B}_R)(Q+\mu(x-Q))\mu^2 - (\frac{\partial}{\partial x_i}\tilde{B}_R)(Q+\mu(y-Q))\mu^2| < \epsilon$ por lo tanto $|x-y|<\delta \Rightarrow \int_0^1 |(\frac{\partial}{\partial x_i}\tilde{B}_R)(Q+\mu(x-Q))\mu^2 - (\frac{\partial}{\partial x_i}\tilde{B}_R)(Q+\mu(y-Q))\mu^2| d\mu < \epsilon$. De manera que $\frac{\partial}{\partial x_i}f(x)$ es uniformemente continua y de modo análoga demostramos que f es uniformemente continua.

□

Teorema 1.1.12. $A^Q(x) = O(|x|^{-1}), |x| \to \infty$

Demostración. sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $sop(B_R) \subset B_N(0)$, sea $h = |Q| + N$ sea x con $|x| > h$, entonces:

$$\int_0^1 \tilde{B}_R(Q+\mu(x-Q))\mu d\mu \leqq \int_0^{h/(|x-Q|)} |B_R|_\infty h/(|x-Q|)$$
$$= |B_R|_\infty (h/|x-Q|)^2$$
$$\Rightarrow |A^Q(x)| \leqq |B_R|_\infty h^2/|x-Q|$$

Entonces $|A^Q(x)| = O(|x|^{-1}), |x| \to \infty$ □

Teorema 1.1.13. *La restricción de* A^Q *a* Ω *está en* $C^1(\bar{\Omega})$

Demostración. Ya demostramos que A^Q y sus derivadas de primer orden son uniformemente continuas, sólo falta ver que son acotadas.

$$\frac{\partial}{\partial x_i}A^Q = (\frac{\partial}{\partial x_i}\begin{pmatrix} q_2 - x_2 \\ x_1 - q_1 \end{pmatrix}) \int_0^1 \tilde{B}_R(\mu x + (1-\mu)Q)\mu d\mu$$
$$+ \begin{pmatrix} q_2 - x_2 \\ x_1 - q_1 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_i}\int_0^1 \tilde{B}_R(\mu x + (1-\mu)Q)\mu d\mu$$
$$= (\frac{\partial}{\partial x_i}\begin{pmatrix} q_2 - x_2 \\ x_1 - q_1 \end{pmatrix}) \int_0^1 \tilde{B}_R(\mu x + (1-\mu)Q)\mu d\mu$$
$$+ \begin{pmatrix} q_2 - x_2 \\ x_1 - q_1 \end{pmatrix} \int_0^1 (\frac{\partial}{\partial x_i}\tilde{B}_R)(Q+\mu(x-Q))\mu^2 d\mu$$

En donde en la última igualdad usamos la fórmula obtenida en la demostración de que A^Q es derivable.
Como *sop*$(\frac{\partial}{\partial x_i}B_R) \subset B_N(0)$, y $\frac{\partial}{\partial x_i}B_R$ es acotada, se concluye como en la demostración de que $A^Q(x) = O(|x|^{-1}), |x| \to \infty$ que $|\frac{\partial}{\partial x_i}A^Q| = O(|x|^{-1}), |x| \to \infty$. Como A^Q y $\frac{\partial}{\partial x_i}A^Q$ son uniformemente continuas , se concluye entonces que son acotadas. $\square$

Además, $A^Q(x)\cdot\widehat{x} \leqq |Q||\int_0^1 \tilde{B}_R(Q+\mu(x-Q))d\mu| \leqq |Q||B_R|_\infty h^2/|x-Q|^2$ si $|x|$ es suficientemente grande, como A^Q es acotado, se concluye que $\alpha^f(r) = \sup_{x\in\Omega,|x|\geqq r}\{A^Q(x)\cdot\widehat{x}\} \in L^1(0,\infty)$

Definición 1.1.3.

$$A^{f,Q} = A^f + A^Q$$

Ya demostramos que $|A^{f,Q}(x)| = O(|x|^{-1}), |x| \to \infty$ y que $\alpha(r) := \sup_{|x|>r}\{A^{f,Q}(x)\cdot\widehat{x}\} \in L^1(0,\infty)$.

Teorema 1.1.14. $\nabla \times \nabla f = 0$ *en* $\mathcal{D}'$

Demostración. De la demostración del teorema 1.1.8 tenemos que $\nabla f = \frac{\frac{\partial f}{\partial\theta}}{r^2}\begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix}$, de la forma de ∇f, vemos que está en L_1^{loc}, por lo tanto, define una distribución. Sea $\phi \in \mathcal{D}$

$$\nabla \times \nabla f(\phi) = -\int \frac{1}{r^2}\frac{\partial f}{\partial\theta}r\cos(\theta)\frac{\partial\phi}{\partial x_1} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial f}{\partial\theta}r\sin(\theta)\frac{\partial\phi}{\partial x_2}dx$$

Usando las ecuaciones 1.3 y 1.4 y cambiando a coordenadas polares, obtenemos:

$$\nabla \times \nabla f(\phi) = \int \frac{\partial\phi}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial\theta}d\theta dr = 0$$

$\square$

Teorema 1.1.15. *Si* $K \neq \emptyset$, *entonces*

$$\alpha_K = 1/(2\pi)\int_{\partial K} A^{f,Q}(x)dx \tag{1.9}$$

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(0) \subset K$, por el teorema de Green , porque $\nabla \times A^f = 0$ fuera de $B_{\epsilon/2}(0)$ y por la demostración del teorema 1.1.8, obtenemos que $\int_{\partial k} A^f = \int_{\partial B_\epsilon(0)} A^f = (\alpha_K - \alpha_R)(2\pi) - \int_{\partial K} \frac{\frac{\partial f}{\partial \theta}}{r^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = (\alpha_K - \alpha_R)(2\pi)$.El teorema se cumple porque $\alpha_R = 1/(2\pi) \int_{\partial K} A^Q$ □

De todo lo anterior se concluye el siguiente teorema:

Teorema 1.1.16. $A^{f,Q} \in \mathcal{A}_K(\alpha_K, B_R)$, *en donde* K *puede ser el cero.*

Capítulo 2

Los hamiltonianos del problema

Supongamos que $A \in \mathcal{A}_K(\alpha_K, B_R)$ en donde K puede ser el conjunto $\{0\}$, el hamiltoniano formal del sistema (en donde tomamos la constante de Planck, la velocidad de la luz, y la carga del electrón como iguales a uno)es el operador

$$h_A := \frac{(P-A)^2}{2m}$$

Con dominio $C_0^2(\Omega)$ donde $P = -i\nabla$ es el operador momento y $m > 0$ es la masa del electrón.
El símbolo h_A no tiene en realidad un significado preciso puesto que h_A no es necesariamente un observable, por esto es que debemos definir el hamiltoniano de manera exacta conservando la idea física original de h_A. En primer lugar, el hamiltoniano debe ser un operador autoadjunto $H_A : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$, pues debe ser un observable[1], es también razonable que contenga en su dominio a $C_0^2(\Omega)$ y debe cumplir la siguiente fórmula: $1/(2m)\langle(P - A)f, (P - A)g\rangle = \langle H_A f, g\rangle \forall f \in Dom(H_A) \forall g \in Dom(H_A)$ en las siguientes líneas construiremos de manera formal el hamiltoniano H_A que cumpla con lo que queremos.
La forma bilineal asociada al operador formal h_A es:

$$q_A(\phi, \psi) := \frac{1}{2m}\langle(P - A)\phi, (P - A)\psi\rangle \tag{2.1}$$

Con dominio $C_0^1(\Omega)$. En el caso de que $K = \{0\}$, $\Omega = \mathbb{R}^2 - \{0\}$. La forma q_A es claramente no negativa, se demostrará enseguida que es cerrable:

[1]Página 103 del libro [5]

Teorema 2.0.17. *$q_A$es cerrable*

Antes de demostrar el teorema se demostrará el siguiente lema.

Lema 2.0.4. *sea $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2(\mathbb{R})$ o una sucesión de funciones tales que el soporte de cada una de ellas está contenido en un mismo compacto independiente de n, supongamos que $b_n \in C_0^1(\mathbb{R})\forall n$, $b_n \to 0, n \to \infty(enL_1(\mathbb{R})$ o $L_2(\mathbb{R}))$ y que $\frac{\partial b_n}{\partial x} \to b, n \to \infty(enL_1(\mathbb{R})$ o $L_2(\mathbb{R}))$, entonces $b = 0$ en $L_2(\mathbb{R})$, es decir, $b = 0$ en casi todo punto.*

Demostración. Como el soporte de todas la funciones b_n está contenido en un mismo compacto, podemos suponer que el espacio de medida es en realidad $L_2[a, c]$, en donde $sop(b_n) \subset [a + 1, c - 1]\forall n \in \mathbb{N}$
Si la convergencia es en L_2, entonces como $\frac{\partial b_n}{\partial x} - b \to 0$ en $L_2([a, c])$ y por la desigualdad de Hölder, si $f \in L_2([a, c]) \Rightarrow \int |f| \leqq (\int |f|^2)^{1/2}(\int 1)^{1/2}$ se obtiene que $b_n, b, \frac{\partial b_n}{\partial x} \in L_1([a, c]), \forall n \in \mathbb{N}$ y que $\lim_{n\to\infty} b_n - b = 0 \in L_1([a, c])$ Entonces $\lim_{n\to\infty} \int_a^y \frac{\partial b_n}{\partial x} = \int_a^y b$. Por el teorema fundamental del cálculo se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} b_n(y) - b_n(a) = \lim_{n\to\infty} b_n(y) = \int_a^y b \tag{2.2}$$

Entonces la sucesión b_n tiende puntualmente a la función $f(z) = \int_a^z b$ que es continua por ser la integral de otra función integrable, como el espacio de medida es finita, entonces $b_n \to f$ casi uniformemente: dada m $\in \mathbb{N}, \exists E_m \subset [a, c], \lambda(E_m) < 1/m$ (donde λ es la medida de Lebesgue) y tal que $b_n\chi_{E_m^c} \to f\chi_{E_m^c}$ uniformemente, por lo tanto $b_n\chi_{E_m^c} \to f\chi_{E_m^c}$ en $L_2[a, c]$ como $b_n\chi_{E_m^c} \to 0$, se concluye que $f\chi_{E_m^c} = 0(c.t.p)$ entonces se tiene que $f\chi_{\cup_{n\in\mathbb{N}}E_n} = 0(c.t.p)$, pero $\lambda((\cup_{n\in\mathbb{N}E_n})^c) = 0$, se concluye entonces que $f = 0(c.t.p)$, como f es continua, se tiene que $f = 0$. Por ende,

$$\int_a^z b = 0\forall\ z \in [a, c]$$

Esto implica[2] que $b = 0(c.t.p.)$

□

[2]Página 101 del libro [6]

Demostración del teorema 2.0.17. Recordemos primero la definición de que una forma sea cerrable:
Una forma bilineal es cerrable si siempre que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset Dom(q_A)$ y se tiene que $\lim_{n\to\infty, m\to\infty} q_A(u_n - u_m, u_n - u_m) = 0$ y además se cumple que $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ (en L_2), entonces $\lim_{n\to\infty} q_A(u_n, u_n) = 0$
Denotamos por $q_A(f) = q_A(f, f)$
Sea $\{u_n\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ con $u_n \to_{n\to\infty} 0$ y $q_A(u_n - u_m) \to_{n,m\to\infty} \to 0$
Pero $q_A(u_n - u_m) = |(P-A)u_n - (P-A)u_m|_2^2$, entonces la sucesión $(P-A)u_n$ es de Cauchy en $L^2(\Omega)$, como $L^2(\Omega)$ es completo, se concluye que existe un elemento $u \in L^2(\Omega)$ tal que $\lim_{n\to\infty}(P - A)u_n = u$ para que q_A sea cerrable, hay que demostrar que $u = 0$.
Sea D un compacto de Ω y sea $\phi \in C_0^\infty(\Omega), 0 \leqq \phi \leqq 0, \phi(y) = 1 \forall y \in D$ Entonces:

$$\lim_{n\to\infty} (P - A)u_n\phi = \lim_{n\to\infty} -i\phi\nabla u_n - iu_n\nabla\phi + Au_n\phi$$

Por hipótesis A es acotado en $sop(\phi)$, sea M cota de A en $sop(\phi)$, entonces:

$$|A\phi u_n|_2 \leqq M|u_n|_2$$

Por lo tanto, $A\phi u_n \to 0, n \to \infty$. Por la misma razón: $(\nabla\phi)u_n \to 0, n \to \infty$
Por lo tanto, se tiene que:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} (P - A)u_n\phi &= \lim_{n\to\infty} \phi p u_n \\ &= \lim_{n\to\infty} \phi(P - A)u_n \\ &= u\phi = \lim_{n\to\infty} P(\phi u_n) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Tenemos que $u_n\phi \to 0, -i\frac{\partial u_n\phi}{\partial x_i} \to \phi u$ entonces si demostramos que $u\phi = 0$ concluiremos que $u = 0$ en $L_2(\Omega)$, puesto que el compacto D es arbitrario.
Sea $a_n = u_n\phi$, sea $f = \phi u$, entonces, todos los a_n tienen soporte contenido en el compacto D por lo tanto como $a_n \to 0, \frac{\partial a_n}{\partial x_1} \to f$ en $L_2(\mathbb{R}^2) \Rightarrow a_n \to 0, \frac{\partial a_n}{\partial x_1} \to f$ en $L_1(\mathbb{R}^2)$
Se define $b_n(y) = \int |a_n(x, y)|dx$, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \int b_n(y)dy = 0 \tag{2.4}$$

Afirmación 2.0.1. *2.4 implica que existe una subsucesión de b_n que converge puntualmente a 0 en casi todo punto*

Demostración. Sea $E_{1,n} = \{x : |b_n(x)| > \epsilon/1\}$, como $\int b_n(y)dy \to 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} \lambda(E_{1,n}) = 0$, entonces $\forall m \in \mathbb{N} \exists n_m \in \mathbb{N}$ con $\lambda(E_{1,n_m}) < \epsilon/2^m$.
Tenemos que$\lambda(\cup_{m\in\mathbb{N}}\{x : |b_{n_m}(x)| > 1\}) \leqq \sum_{m\in\mathbb{N}} \epsilon/2^m = \epsilon/2$. Sea $b_{n_m} = b^1_m \forall m$. Entonces la subsucesión $\{b^1_n\}$ cumple con las hipótesis de la sucesión $\{b_n\}$. Hayamos una subsucesión $\{b^2_n\}$ de la anterior, tal que $\lambda(\cup_{n\in\mathbb{N}}\{x : |b_n(x)| > \epsilon/2\}) < \epsilon/2^2$. Por el teorema de recursión para naturales, podemos formar la subsucesión $\{b^{m+1}_n\}$ a partir de la sucesión $\{b^m_n\}$ tal que $\lambda(\cup_{n\in\mathbb{N}}\{x : |b^{m+1}_n(x)| > \epsilon/(m+1)\}) < \epsilon/2^{m+1})$.
Sea $F_m = \cup_{n\in\mathbb{N}}\{x : |b^m_n(x)| > 1/m\}$, entonces $\lambda(F_M) < \epsilon/2^m$.
Si $x \notin \cup_{n\in\mathbb{N}} F_n \Rightarrow b^n_n(x) < 1/n \Rightarrow b^n_n(x) \to 0 \forall x \notin \cup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ y tenemos también que $\lambda(\cup_{n\in\mathbb{N}} F_n) < \sum_{n\in\aleph} \epsilon/2^n \leqq \epsilon$.
Dada $1 = \epsilon > 0$ encontramos una subsucesión de $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ llamada $\{c^1_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y un conjunto G_1 con $\lambda(G_1) < 1$ tal que $\lim_{n\to\infty} c^1_n(x) = 0 \forall x \in G^c_1$. Encontramos una subsucesión $\{c^2_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y un conjunto G_2 con $\lambda(G_2) < 1/2$ tal que $\lim_{n\to\infty} c^2_n(x) = 0 \forall x \notin G_2$.
Una vez obtenida $\{c^m_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se construye una subsucesión de esta $\{c^{m+1}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y un conjunto $G_{m+1}, \lambda(G_{m+1}) < 1/(m+1)$ tales que $\lim_{n\to\infty} G^{m+1}_n(x) = 0 \forall x \notin G_{m+1}$.
Formamos la subsucesión $\{c^n_n\}$ de $\{b_n\}$, si $x \notin \cap_{n\in\mathbb{N}} G_n \Rightarrow \exists m$ tal que $x \notin G_m \Rightarrow G^m_n(x) \to 0 (n \to \infty)$. Como $\{c^{m+n}_{m+n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es subsucesión de la anterior, se concluye que $\lim_{n\to\infty} c^n_n = 0$. Entonces $\lim_{n\to\infty} c^n_n(x) = 0 \forall x \notin \cap_{n\in\mathbb{N}} G_n$:
Además $\lambda(\cap Gn) < \lambda(G_n) < 1/n \forall n$, por lo tanto, $\lambda(\cap G_n) = 0$ y se obtiene que $\{C^n_n\}$ es una subsucesión de $\{b_n\}$ tal que converge a 0 en casi todo punto. □

Aplicando lo anterior a la sucesión $c_n(y) = \int |\frac{\partial a_n(x,y)}{\partial x_1} - f(x,y)|dx$, podemos encontrar una subsucesión de esta que converge en casi todo punto a 0. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $b_n \to 0 (c.t.p.)$ y que $c_n \to 0 (c.t.p.)$.
Sea $B = \{x : b_n \nrightarrow 0\} \cup \{x : c_n \nrightarrow 0\}$, es claro que $\lambda(B) = 0$.
Supongamos que $y_0 \notin B$ fija, entonces $b_n(y_0) \to 0$ y $c_n(y_0) \to 0$, esto implica que $a_n(x, y_0)$ converge a 0 en $L_1(\mathbb{R})$ y que $\frac{\partial a_n}{\partial x_1}(x, y_0) \to f(x, y_0)$ en $L_1(\mathbb{R})$ se concluye por el lema 2.0.4 que $f(x, y_0) = 0 (c.t.p)$, entonces: $\int |f(x,y)|^2 dy = \int(\int |f(x,y)|^2 dx)dy = \int(\int |f(x,y)|^2 dx)\chi_B = 0$ pues $\lambda(B) = 0$ se concluye que $f = 0$ en $L_2(\mathbb{R}^2)$.

Con esto concluimos que f es cerrable. $\square$

El hecho de que q_A sea cerrable implica que existe una extensión cerrada $\bar{q}_A$ [3].
Que $\bar{q}_A$ sea cerrada significa lo siguiente:
Si $\{u_n\} \subset Dom(\bar{q}_A), u_n \to u, \bar{q}_A(u_n - u_m) \to 0$ cuando $m, n \to \infty$, entonces $u \in Dom(\bar{q}_A)$ y $\bar{q}_A(u_n - u) \to 0$.

Definición: una forma bilineal q es semiacotada si existe $m \in \mathbb{R}$ tal que $q(\phi) \geqq -m|\phi|^2$.

Teorema 2.0.18. [4] *Si q es una forma bilineal simétrica densamente definida, cerrada y semiacotada, entonces existe un único operador autoadjunto A tal que* $q(\phi, \psi) = \langle A\phi, \psi \rangle \forall \phi \in Dom(A), \forall \psi \in Dom(q)$ *y* $Dom(A)$ *es denso en* $Dom(q)$.

Antes de demostrar el teorema se hacen algunas observaciones:

Lema 2.0.5. *Sea q una forma bilineal definida en un espacio de Hilbert H, supongamos que q es semiacotada ,* $q(\phi) \geqq -M|\phi|^2$*, sea* $Q(q) = Dom(q)$ *es decir:* $q : Q(q) \times Q(q) \to \mathbb{C}$ *entonces* $Q(q)$ *es cerrada si y sólo si* $Q(q)$ *es completo bajo la norma*

$$|\phi|_{+1} = (q(\phi) + (M+1)|\phi|^2)^{1/2}$$

Que viene del producto interior

$$\langle \phi, \psi \rangle_{+1} = q(\phi, \psi) + (M+1)\langle \phi, \psi \rangle$$

Demostración. Supongamos que q es cerrada .
Que $\langle , \rangle_{+1}$ es un producto interior se se demuestra directamente .
Demostraremos que Q(q) es completo con la norma anterior .
Sea $\{\phi_n\}, |\ |_{+1} - Cauchy$, entonces como $q(\psi) + M|\psi|^2 \geqq 0$, $0 \leqq |\psi| \leqq |\psi|_{+1}$, por lo tanto, $\{\phi_n\}$ es $|\ |-Cauchy$ y como H es completo, existe $\phi = \lim_{n\to\infty} \phi_n$ además como $\lim_{n,m\to\infty} q(\phi_n - \phi_m) + (M+1)|\phi_n - \phi_m| = 0, \lim_{n,m\to\infty} q(\phi_n - \phi_m) = 0$ como q es cerrada, $\phi \in Q(q)$ y $\lim_{n\to\infty} q(\phi_n - \phi) = 0$, por lo tanto,

[3] Página 283 del libro [1]

[4] Una referencia para este teorema es el libro [7], página 278

$\text{lím}_{n\to\infty} |\phi_n - \phi|_{+1} = 0$ se concluye que $Q(q)$ es $| \ |_{+1} -$ *completo.*
Supongamos que Q(q) es $| \ |_{+1} - completo$ demostraremos que q es cerrada sea $\{\phi_n\} \subset Q(q)$ tal que $\phi_n \to \phi$ y $q(\phi_n - \phi_m) \to 0(n, m \to \infty)$, entonces se tiene que $\{\phi_n\}$ es $| \ |_{+1} - Cauchy$, por lo tanto, existe $\psi = lim_{n\to\infty}\phi_n$ (el límite en la norma $| \ |_{+1}$), como $| \ | \leqq | \ |_{+1}$ entonces, $\psi = \phi$ y $lim_{n\to\infty} q(\phi_n - \phi) = 0$, por lo tanto, q es cerrada.

□

Prueba del teorema 2.0.18 . Podemos suponer sin pérdida de generalidad que q es positiva ($q(\phi) \geqq 0 \forall \phi \in Q(q)$). Por los resultados anteriores tenemos que q es simétrica y por hipótesis es cerrada, entonces definidos H_{+1} como el espacio de Hilbert Q(q) con el producto interior $\langle , \rangle_{+1}$.
Denotamos por H_{-1} por el espacio de funcionales acotados con dominio H_{+1} sea $j : H \to H_{-1}$ dada por $\phi \to^j \langle ., \phi \rangle$, $j(\phi)$ es acotada, pues:

$$|j(\phi)(\psi)| \leqq |\psi||\phi| \leqq |\psi|_{+1}|\phi|$$

Denotamos por $i : H_{+1} \to H$ a la identidad; ésta función es continua puesto que $| \ | \leqq | \ |_{+1}$ tenemos la siguiente sucesión:

$$H_{+1} \to^i H \to^j H_{-1}$$

Dada $\phi \in H_{+1}$ *sea* $\bar{B}(\phi) \in H_{-1}$ tal que :

$$\bar{B}(\phi)(\psi) = q(\psi, \phi) + (\psi, \phi)$$

Por el lema de Riesz, $\bar{B}$ es un isomorfismo isométrico de H_{+1} en H_{-1} denotamos por $D(B) = \{\psi \in H_{+1} : \bar{B}(\psi) \in Ran(j)\}$ se define B en Dom(B) por

$$B = j^{-1}\bar{B}$$

Demostraremos que el rango de j es denso en H_{-1}. De lo contrario existiría (por el teorema de Hahn-Banach) $\lambda \in H^*_{-1}$ tal que $\lambda \neq 0$ *y* $\lambda(j(\psi)) = 0 \forall \psi \in H$, es conocido que los espacios de Hilbert son reflexivos, de manera que existe $\phi_\lambda \in H_{+1}$ tal que :

$$0 = \lambda(j(\psi)) = j\psi(\phi_\lambda) = \langle \phi_\lambda, \psi \rangle \forall \psi \in H$$

Como $\phi_\lambda \neq 0$ esto último no puede pasar y Ran(j) es denso en H_{-1}.
Como $\bar{B}$ es un isomorfismo isométrico se obtiene que D(B) es denso en H_{+1} mas aún, como $| \ | \leqq | \ |_{+1}$ y Q(q) es denso en H por hipótesis, se obtiene que

D(B) es denso en H.
Suponga que $\phi, \psi \in D(B)$. Entonces

$$\begin{aligned}\langle \phi, B\psi \rangle &= q(\phi, \psi) + \langle \phi, \psi \rangle \\ &= \bar{q}_{\psi,\phi} + \langle \bar{\psi}, \phi \rangle \\ &= \langle \bar{\psi}, \phi \rangle \\ &= \langle B\phi, \psi \rangle\end{aligned}$$

Se sigue que B es un operador simétrico y densamente definido.
Enseguida se demuestra que B es autoadjunto.
Sea $c = \bar{B}^{-1}j$, entonces Dom(c) = H $c : H \to H$, y c es simétrico pues $\langle cx, y \rangle = \langle cx, Bcy \rangle = \langle Bcx, y \rangle = \langle x, cy \rangle$.
Por el teorema de Hellinger-Toepliz (que demostraremos después de acabar este teorema), c es un operador acotado autoadjunto.
c es inyectivo ya que $\bar{B}$ es isometría y j es inyectivo, pues si $j(\phi) = 0 \Rightarrow \langle \psi, \phi \rangle = 0 \forall \psi \in Q(q) \Rightarrow \phi = 0$ porque Q(q) es denso en H.
También B es inyectivo, pues $\bar{B}$ lo es y vimos que j es inyectivo.
Veamos ahora que $B = c^{-1}$ es autoadjunto:
La demostración de lo anterior deriva a partir del hecho de que c es 1 a 1, y autoadjunto y que $c = B^{-1}$.

Definición 2.0.4. *Definimos la gráfica de una función f como sigue:*

$$g(f) = \{(x, f(x)) : x \in Dom(f)\}$$

Enseguida recordamos la definición del adjunto de un operador densamente definido:

Definición 2.0.5. *Sea T un operador $T : D(T) \subset H \to H$, entonces el operador adjunto de T, designado por T^* es tal que cumple lo siguiente:*
$y \in Dom(T^*)$ si existe z tal que $\langle Tx, y \rangle = \langle x, z \rangle \forall x \in Dom(T)$, en este caso $T^*y = z$ Un operador T es autoadjunto si $T = T^*$

Definición 2.0.6. *sea H un espacio de Hilbert, entonces se define la función $v : H \times H \to H \times H$ tal que $v(x, y) = (-y, x)$*

Afirmación 2.0.2. *Si H es un espacio de Hilbert, entonces la función $\langle , \rangle_{H \times H}$: $H \times H \to \mathbb{C}$ tal que $\langle (\phi_1, \phi_2), (\psi_1, \psi_2) \rangle_{H \times H} = \langle \phi_1, \psi_1 \rangle + \langle \phi_2, \psi_2 \rangle$ define un producto interior*

Nota: Para simplificar la notación, no pondremos el subíndice en el producto interior cuando se entienda por el contexto, cuando hablemos del producto interior en el espacio $H \times H$ en donde H es de Hilbert nos referimos al producto interior previamente mencionado, a menos que se aclare lo contrario.

Demostración. Se sigue directamente de la definición □

Afirmación 2.0.3. *Sea T un operador densamente definido en un espacio de Hilbert H con rango en H, entonces $g(T^*) = [vg(T)]^{\perp}$*

Demostración.

$$
\begin{aligned}
(y, z) \in g(T^*) & \\
&\Leftrightarrow y \in Dom(t^*) y T(y) = z \\
&\Leftrightarrow \langle T(x), y\rangle = \langle x, z\rangle \forall x \in Dom(T) \\
&\Leftrightarrow \langle(-T(x), x), (y, T^*(y))\rangle = 0 \forall x \in Dom(T) \\
&\Leftrightarrow \langle(y, z), W\rangle = 0 \forall W \in vg(T) \\
&\Leftrightarrow (y, z) \in [vg(T)]^{\perp}
\end{aligned}
$$

□

Afirmación 2.0.4. *Sea c un operador definido en un espacio de Hilbert H (de dominio H) y con rango denso en H, supongamos que c es inyectivo y autoadjunto, entonces c^{-1} es autoadjunto.*

Demostración. Se demostrará que $g(c^{-1}) = g((c^{-1})^*) = [vg(c^{-1})]^{\perp}$.
Sea (c(x),x) $\in g(c^{-1})$, sea (-y, g(y)) $\in vg(c^{-1})$, entonces

$$\langle(c(x), x), (-y, c(y))\rangle = -\langle c(x), y\rangle + \langle x, c(y)\rangle = -\langle x, c(y)\rangle + \langle x, c(y)\rangle = 0$$

Por lo tanto $g(c^{-1}) \subset g((c^{-1})^*)$
Si $(z, w) \in g((c^{-1})^*) \Rightarrow \langle c^{-1}(x), z\rangle = \langle x, w\rangle \forall x \in Ran(c)$, sea x = c(y) entonces $\langle y, z\rangle = \langle cy, w\rangle \forall y \in Dom(c) \Rightarrow w \in dom(c^*)$ y $c^*(w) = z$ pero como $c = c^* \Rightarrow (z, w) = (cw, w) \in g(c^{-1})$

□

Entonces tenemos que B es autoadjunto, definimos $A = B - I$ en donde I es la identidad, entonces Dom(B) = Dom (A), si $\phi \in Dom(B)$, entonces $\langle\psi, B(\phi)\rangle = q(\psi, \phi) + \langle\psi, \phi\rangle \forall\psi \in H_{+1} \therefore \langle\psi, (B - I)\phi\rangle = q(\psi, \phi) \forall\psi \in Q(q)$

□

Unicidad. Supongamos primero que si T es autoadjunto y cumple lo del teorema,entonces $g(A) \subset g(T)$, de esto se sigue que $g(T^*) = g(T) \subset g(A^*) = g(A) \therefore T = A$.
Entonces es suficiente demostrar que si D cumple con lo del teorema, entonces $g(A) \subset g(D)$.
Supongamos que $\psi \in Dom(D)$, entonces $\langle \phi, D\psi \rangle = q(\phi, \psi) \forall \phi \in Q(q)$. Si $\bar{B}(\psi) \in Ran(j) \Rightarrow \psi \in D(B)$:

$$\begin{aligned}
\bar{B}(\psi)(\phi) &= \langle \phi, \psi \rangle + q(\phi, \psi) \\
&= \langle \phi, \psi \rangle + \langle \phi, d\psi \rangle \\
&= j((I + D)\psi)(\phi) \\
&\therefore \psi \in Ran(j) \therefore \psi \in D(B) = D(A) \Rightarrow \quad \langle \phi, D\psi \rangle = \langle \phi, A\psi \rangle = q(\phi, \psi) \\
&\forall \phi \in Q(q)
\end{aligned}$$

Se concluye que D es extensión autoadjunta de A y por lo tanto $g(A) \subset g(D)$.
□

En el caso de q_A vimos que es cerrable. Si $\bar{q}_A$ es la cerradura de q_A, entonces existe un único operador H_A autoadjunto que cumple con lo establecido en el teorema anterior (poniendo a $\bar{q}_A$ en lugar de q), entonces H_A es el Hamiltoniano del sistema.

Teorema 2.0.19 (Hellinger - Toepliz). *Si A es un operador con dominio todo un espacio de Hilbert H que cumple que $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle \forall x, y \in H \Rightarrow$ A es acotado.*

Demostración. Demostraremos que g(A) es cerrado, por lo tanto, se sigue que A es cerrado y del teorema de la gráfica cerrada se sigue que A es acotado.

Suponga que $(x_n, y_n) \to (x, y), (x_n, y_n) \in q(A) \forall n$, hay que ver que $(x, y) \in g(A)$ (o bien y = A(x)):
Sea $z \in H$

$$\begin{aligned}
(z, y) &= \lim(z, A(x_n)) \\
&= \lim(A(z), x_n) \\
&= (A(z), x) \\
&= (z, A(x))
\end{aligned}$$

Por lo tanto $y = A(x)$ $\square$

Hasta aquí terminamos de definir el hamiltoniano de un sistema afectado por el campo magnético B_R definido en Ω en el caso de $K \neq \{0\}$ o bien $B_R + 2\pi\alpha_{\{0\}}\delta$ en el caso de que $K = \{0\}$.
También usaremos el hamiltoniano de partícula libre, pero mencionaremos más adelante cómo se define.
Enseguida procedemos a demostrar algunas propiedades de H_A.

Teorema 2.0.20. *Sean A^1 y $A^2 \in \mathcal{A}(\alpha_K, B_R)$ y sea λ tal que $A^2 = A^1 + \nabla\lambda$ (la λ definida como en el capítulo 1), entonces:*

$$H_{A^2} = e^{i\lambda(x)} H_{A^1} e^{-i\lambda(x)}$$

Demostración. Sea $T = e^{i\lambda(x)} H_{A^1} e^{-i\lambda(x)}$.
Sean $\phi, \psi \in C_0^1(\Omega)$: Veamos primero que

$$q_{A_1}(e^{-i\lambda(x)}\phi, e^{-i\lambda(x)}\psi) = q_{A^2}(\phi, \psi)$$

$$\begin{aligned}
&q_{A^1}(e^{-i\lambda(x)}\phi, e^{-i\lambda(x)}\psi) \\
&= \langle (P - A^1)e^{-i\lambda(x)}\phi, (P - A^1)e^{-i\lambda(x)}\psi \rangle \\
&= \langle e^{-i\lambda(x)}(P - A^1 - \nabla\lambda)\phi, e^{-i\lambda(x)}(P - A^1 - \nabla\lambda)\psi \rangle \\
&= q_{A^2}(\phi, \psi)
\end{aligned}$$

Por la unicidad en el teorema 2.0.18, para demostrar que $H_{A^2} = T$ es suficiente demostrar que T satisface las hipótesis del teorema 2.0.18 . Debemos demostrar 3 cosas:

$i)$T es autoadjunto
$ii)$Dom(T) es denso en $Dom(\bar{q}_{A^2})$
$iii)\langle T\phi, \psi \rangle = \bar{q}_{A^2}(\phi, \psi) \forall \phi \in Dom(T) \forall \psi \in Dom(\bar{q}_{A^2})$

La cerradura de q_{A^2} se construye de la siguiente manera[5]:
$u \in Dom(\bar{q_{A^2}})$ si existe una sucesión $\{u_n\} \subset Dom(q_{A^2})$ tal que $q_{A^2}(u_n -$

[5]Página 283 del libro [1]

$u_m) \to 0, (m, n \to \infty), u_n \to u$.
Si $\{v_n\} \subset Dom(q_{A^2})$ y $q_{A^2}(v_n - v_m) \to 0, (m, n \to \infty), v_n \to v$ entonces:

$$\bar{q}_{A^2}(u, v) = \lim_{n\to\infty} q_{A^2}(u^n, v^n)$$

De igual forma es la cerradura de q_{A^1}.
A continuación se demuestra iii):
Sea $u \in Dom(T)$, entonces $e^{-i\lambda(x)}u \in Dom(q_{A^1})$, por lo tanto, existe una sucesión $\{u_n\} \subset C_0^1(\Omega)$ tal que $u_n \to e^{-i\lambda(x)}u, q_{A^1}(u_n - u_m) \to 0$. Sea $v_n = e^{i\lambda(x)}u_n \in C_0^1(\Omega)$, claramente $e^{-i\lambda(x)}v_n \to e^{-i\lambda(x)}u, q_{A^1}(e^{-i\lambda(x)}v_n - e^{-i\lambda(x)}v_m) \to 0(m, n \to \infty)$.
De esto último se sigue que $|e^{-i\lambda(x)}(P - A^1 - \nabla\lambda)(v_n - v_m)|^2 \to 0$ de manera que $|(P - A^1 - \nabla\lambda)(v_n - v_m)|^2 \to 0$ y $v_n \to u$, por lo tanto, $u \in Dom(q_{A^2})$ se concluye que $DomT \subset Dom(\bar{q}_{A^2})$.
Sea $b \in Dom(\bar{q}_{A^2})$ y sea $\{b_n\}$ con $b_n \to b$ y $q_{A^2}(b_n - b_m) \to 0(m, n \to \infty)$, sea $c_n, n \in \mathbb{N}$ tal que $b_n = e^{i\lambda(x)}c_n$ entonces $c_n \to e^{-i\lambda(x)}b$, además $|q_{A_2}(b_n - b_m)| = |(P - A_2)(e^{i\lambda(x)}c_n - e^{i\lambda(x)}c_m)|^2 = |e^{i\lambda(x)}(P - A_1)(c_n - c_m)|^2 = |(P - A_1)(c_n - c_m)|^2 = \bar{q}_{A^1}(c_n - c_m)$, por lo tanto, $e^{-i\lambda(x)}b \in Dom(\bar{q}_{A_1})$

$$\begin{aligned}
q_{A^2}(u, b) &= \lim_{n\to\infty} q_{A^2}(e^{i\lambda(x)}u_n, b_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \langle (P - A^1 - \nabla\lambda)e^{i\lambda(x)}u_n, (P - A^1 - \nabla\lambda)e^{i\lambda(x)}c_n\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \langle (P - A^1)u_n, (P - A^1)c_n\rangle \\
&= \bar{q}_{A^1}(e^{-i\lambda(x)}u, e^{-i\lambda(x)}b) \\
&= \langle e^{i\lambda(x)}H_{A^1}e^{-i\lambda(x)}u, b\rangle
\end{aligned}$$

$\therefore \langle e^{i\lambda(x)}H_{A^1}e^{-i\lambda(x)}u, b\rangle = \bar{q}_{A^2}(u, b)$

Es claro que $C_0^2(\Omega) \subset Dom(T)$, por lo tanto, $Dom(q_{A^2})$ es denso en $Dom(q)$ y T es autoadjunto, pues $e^{-i\lambda(x)}$ es unitario con inverso $e^{i\lambda(x)}$ y H_{A^1} es autoadjunto.

□

Con esto último terminamos con el Hamiltoniano H_A, enseguida procedemos a trabajar con el Hamiltoniano de partícula libre.

Definición 2.0.7 (hamiltoniano de partícula libre). *Denotamos por* $H_0 := -\nabla^2/2m := P^2/2m$ *al hamiltoniano de partícula libre.*

El dominio de este operador es el espacio de Sobolev $W_{2,2}(\mathbb{R}^2)$:

$$W_{2,2}(\mathbb{R}^2) := \{f \in L_2(\mathbb{R}^2) : \textit{las derivadas en sentido distribucional de } f \textit{ de orden menor o igual que 2 están en } L_2(\mathbb{R}^2)\ \}$$

Se define la norma de $f \in W_{2,2}$ *como sigue:* $|f|^2_{W_{2,2}} = \sum_{i+j \leqq 2} |\frac{\partial^j}{\partial x_1^j} \frac{\partial^i}{\partial x_2^i} f|^2$

Es Claro que $Dom(H_0)$ es denso en $L_2(\mathbb{R}^2)$, pues $C_0^\infty(\mathbb{R}^2) \subset W_{2,2}$ y C_0^∞ es denso en $L_2(\mathbb{R}^2)$.
Lo siguiente que hay que demostrar es que H_0 es autoadjunto; esta será nuestra siguiente tarea, para esto necesitamos una serie de resultados preliminares, algunos los demostramos aquí y otros los referimos a otros textos.
Para la comprensión de lo siguiente es necesario conocer lo básico de la teoría de distribuciones , un libro apropiado es [8]
Denotamos por $S(U)$ al espacio de Schwartz de funciones de decrecimiento rápido en $U \subset \mathbb{R}^n$ [6] en donde U es abierto.
Como normalmente trabajamos con $S(\mathbb{R}^2)$, entonces ponemos S en lugar de $S(\mathbb{R}^2)$ y lo mismo aplicamos para D = $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. El espacio $S'(U)$ es el espacio de funcionales continuas en S(U), los elementos de este espacio son las distribuciones temperadas.
Note que como $D(U) = C_0^\infty(U) \subset S(U)$ entonces se cumple lo siguiente para en espacio de distribuciones en U, $D'(U)$: $S'(U) \subset D'(U)$.

Observación 2.0.1. *Dada una funcional continua* $T \in S'$, *la inclusión* $i : D \to S$ *induce una una funcional continua* $T \circ i : D \to \mathbb{C}$ *en* D'. *Si* $T, T' \in S'$ *inducen la misma distribución, entonces* $T = T'$ *puesto que* D *es denso en* S.
Entonces las distribuciones temperadas son las distribuciones que se pueden extender a todo S *de manera continua.*

Definición 2.0.8. *Sea* T *una distribución temperada, la transformada de Fourier de* T *es la distribución temperada* $\widehat{T}$ *definida por:*

$$\widehat{T}(\phi) = T(\widehat{\phi}) \forall \phi \in S$$

En donde $\widehat{\phi}$ *es la transformada de Fourier en sentido usual de* ϕ

[6]Página 184 del libro [8]

Definición 2.0.9. *sea* $a := (a_1, a_2, ...a_n) \in \mathbb{N}^n$ *sea* $x = (x_1, ...x_n) \in \mathbb{R}^n$, *entonces:*

$$x^a := x_1^{a_1} x_2^{a_2} ..x_n^{a_n}$$

$$D^a := \frac{\partial^{a_1}}{\partial x_1^{a_1}} \frac{\partial^{a_2}}{\partial x_2^{a_2}} \cdots \frac{\partial^{a_n}}{\partial x_n^{a_n}}$$

$$|a| = a_1 + a_2 + ...a_n$$

$$D_a = (-i)^{|a|} D^a$$

$SiP(x) = \sum_{i=1}^{m} c_{b_i} x^{b_i}, b_i \in \mathbb{N}^n$, *entonces:*

$$P(D) = \sum c_{b_i} (-i)^{|b_i|} D^{b_i}$$

$$P(-D) = \sum (-1)^{|b_i|} (-i)^{|b_i|} c_{b_i} D^{b_i}$$

Teorema 2.0.21. *a)La transformada de Fourier* $\Psi : S' \to S'$ *es continua, lineal , biyectiva , de periodo 4 y con inversa continua.*
b) si $u \in S'$ *y* P *es un polinomio, entonces:*
$(P(D)u\widehat{)} = P\widehat{u}$ *y* $(Pu\widehat{)} = P(-D)\widehat{u}$.

Demostración. Antes que nada recordamos que la topología de S' y D' es la topología débil estrella (W^*).
Como la transformada de Fourier es lineal, basta ver que es continua en cero.
Sean $\phi_1, \cdots \phi_n$ elementos de S y sea u una vecindad básica del 0 en S':

$$u = \{T \in \prime S : |T(\phi_i)| < \epsilon \forall i = 1, 2, ..n\}$$

Como la transformada de Fourier es continua, biyectiva de S' en S', entonces existen $\theta_1, ...\theta_n$ tales que $\widehat{\phi_i} = \theta_i$.
Sea v la vecindad del 0 en S' dada por:

$$v = T \in S' : |T(\theta_i)| < \epsilon \forall i = 1, 2, ..n$$

Si T $\in v \Rightarrow |T(\theta_i)| < \epsilon \Rightarrow |\widehat{T}(\phi_i)| = |T(\theta_i)| < \epsilon \Rightarrow \Psi[v] \subset u$:
Por lo tanto Ψ es continua
Antes de continuar hacemos notar que estamos suponiendo que el teorema análogo para S en vez de S' lo conoce el lector [7].

[7] Para conocer la demostración, consultar el libro [8], página 184

Como si $\phi \in S, \hat{\hat{\hat{\hat{\phi}}}} = \phi$, entonces $\Psi^4 = \Psi$, por lo tanto $\Psi^{-1} = \Psi^3$ de manera que Ψ es invertible y la inversa es continua.
Además:

$$\begin{aligned}(\widehat{P(D)u})(\phi) &= (P(D)u)(\widehat{\phi}) \\ &= u(P(-D)\widehat{\phi}) \\ &= u((\widehat{P\phi})) \\ &= \widehat{u}(P\phi) \\ &= Pu(\phi)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(P(-D)\widehat{u})(\phi) &= \widehat{u}(P(D)\phi) \\ &= u((\widehat{P(D)\phi})) \\ &= u(P\widehat{\phi}) \\ &= (Pu)(\widehat{\phi}) \\ &= (\widehat{Pu})(\phi)\end{aligned}$$

$\square$

Observación 2.0.2. *si $f \in L_2(\mathbb{R}^2) \Rightarrow f$ define una distribución temperada dada por:*

$$f(\phi) = \int f\phi, \quad \phi \in S$$

Demostración. Sea N $\in \mathbb{N}$ tal que $\int (1 + |x|^2)^{2N} < \infty$, entonces:
$(\int |\phi|^2)^{1/2} = (\int (1+|x|^2)^{-2N}(1+|x|^2)^{2N}|\phi|^2)^{1/2} \leqq (\int (1+|x|^{-2N}))^{1/2} \sup_{x\in\mathbb{R}^2}\{(1+|x|^2)^N|\phi|\} = C|\phi|_M$.
En donde la $|\ \ |_M$ es una de las seminormas que definen la topología de S.
De lo anterior se concluye que la inclusión de S en $L_2(\mathbb{R}^2)$ es continua.

$$\begin{aligned}f(\phi) &= \int f\phi \\ &\leqq |f|_{L_2}|\phi|_{L_2} \\ &\leqq C|f|_{L_2}|\phi|_M \\ &= B|\phi|_M\end{aligned}$$

Por lo tanto $f : S \to C$ es continua y lineal, de manera que es una distribución temperada.

$\square$

El mismo teorema es válido para $\mathbb{R}^n$ en lugar de $\mathbb{R}^2$, la demostración es análoga.

Observación 2.0.3. *Sea $f \in L_2(\mathbb{R}^2)$, sea $a \in \mathbb{N}^2$, entonces $D^a(f)$ (en sentido distribucional)$\in L_2\mathbb{R}^2 \Leftrightarrow D^a(f)$(en sentido distribucional temperado)$\in$ $L_2(\mathbb{R}^2)$*

Demostración. Se hace en el caso en que $D^a f = \frac{\partial f}{\partial x_i}$, el caso general se sigue por inducción.
Supongamos que $g = D^a(f)$(en sentido distribucional) $\in L_2$ Entonces g define una distribución temperada Sabemos[8] que D es denso en S y la inclusión de D en S es continua.
Sea $\phi \in S$, sea $\{\phi_n\} \subset D$ tales que $\phi_n \to \phi$ (La convergencia en S).
Como $\int f(D^a\phi_n - D^a\phi) \leqq |f|_2 |D^a\phi_n - D^a\phi|_2$ y la inclusión de S en L_2 es continua, entonces: $\lim_{n\to\infty} \int fD^a\phi_n = \int fD^a\phi$, de manera análoga, $\lim_{n\to\infty} \int g\phi_n = \int g\phi$ Entonces:
$\int fD^a\phi = (-1)^{|a|} \int g\phi$.
Se concluye que $g = D^a f$ en sentido distribucional temperado.

La otra implicación es inmediata del hecho de que D se incluye en S.

$\square$

[8] Página 188 del libro [8]

Teorema 2.0.22. *Sea* $f \in L_2(\mathbb{R}^2) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}$*(en sentido distribucional)* $\in L_2 \Leftrightarrow p_i\widehat{f}(p) \in L_2(\mathbb{R}^2)$ *(en donde* $\widehat{f}(p)$ *es la transformada de* f *en sentido usual)*

Demostración. Por la observación anterior, es lo mismo suponer que las derivadas se toman en el sentido distribucional temperado y eso es lo que haremos.
Si $\phi \in S$ entonces coinciden la transformada de Fourier en sentido normal y en sentido distribucional ya que:

$$\begin{aligned}
\widehat{\phi}(t) &= 1/(2\pi)\int \phi(x)e^{-ix\cdot t}dx, \text{si } t \in \mathbb{R}^2 \\
\widehat{\phi}(h) &= \int \phi\widehat{h}, \text{si } h \in S \\
&= 1/(2\pi)\int \phi(t)\int e^{-ix\cdot t}h(x)dxdt, \text{usando Fubini, obtenemos} \\
&= \int h(x)\widehat{\phi}(x)
\end{aligned}$$

De manera que coinciden las transformadas en sentido distribucional y usual. Si $g \in L_2$ entonces sea $\{\psi_n\} \subset S, \psi_n \to g$ en L_2, entonces $\widehat{g} = \text{lím}_{n\to\infty}\widehat{\psi_n}$(en L_2) pero también $g = \text{lím}_{n\to\infty}\psi_n$ (en $\widehat{S}$) $\therefore \widehat{g} = \text{lím}_{n\to\infty}\widehat{\psi_n}$(en S'), como la transformada de Fourier usual coincide con la distribucional en S, se concluye que la transformada de Fourier usual coincide con la distribucional en L_2.

Por el teorema 2.0.21, se sigue que $g = \frac{\partial f}{\partial x_i} \Leftrightarrow \widehat{g} = ip_i\widehat{f}$, en donde las derivadas y transfotmada de Fourier se toman en el sentido distribucional, pero como en L_2 coinciden la transformada de Fourier usual y la distribucional, entonces en este caso podemos pensar que la transformada de f es en el sentido usual.

Si $g \in L_2$, entonces $\widehat{g} \in L_2$ y como $\widehat{f} \in L_2$, entonces $ip_i\widehat{f} \in L_1^{Loc}$ es una función que coincide como distribución con la función $\widehat{g} \in L_1^{Loc}$, se concluye que $ip_i\widehat{f}$ y $\widehat{g}$ coinciden casi donde quiera como funciones, por lo tanto, $p_i\widehat{f} \in L_2$.

Supongamos que $ip_i\widehat{f} \in L_2$. Entonces $\widehat{\widehat{\widehat{p_i\widehat{f}}}} \in L_2$. Pero $ip_i\widehat{f} = \widehat{\frac{\partial f}{\partial x_i}}$ (en sentido distribucional) se sigue que $\widehat{\widehat{\widehat{\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_i}}}}} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^2$.

□

Teorema 2.0.23. *Sea $f \in L_2$, supongamos que $p_{i_1}.p_{i_2}...p_{i_m}\widehat{f} \in L_2$, entonces: $p_{i_k}\widehat{f} \in L_2 \forall k = 1, 2, ...m$*

Demostración. Supongamos que sin pérdida de generalidad que k = 1 sea $C_1(0) =$ cubo de lado 2 con centro en 0.

$$\begin{aligned}
\int |p_{i_1}|^2|\widehat{f}|^2 &= \int_{C_1(0)} |p_{i_1}|^2|\widehat{f}|^2 + \int_{C_1(0)^c} |p_{i_1}|^2|\widehat{f}|^2 \\
&\leqq \int_{C_1(0)} |p_{i_1}|^2|\widehat{f}|^2 + \int_{C_1(0)^c} |p_{i_1}...p_{1_m}\widehat{f}|^2 \\
&\leqq \int |\widehat{f}|^2 + \int |p_{i_1}...p_{1_m}\widehat{f}|^2 < \infty
\end{aligned}$$

□

Teorema 2.0.24. *$H_0 = -\nabla^2/(2m)$ de dominio $W_{2,2} := \{f \in L_2 : D^a f \in L_2 \text{ para } a \in \mathbb{N}^2, |a| \leqq 2\}$. Es un operador autoadjunto.*

Demostración. Se demostrará que $\triangle$ es autoadjunto en L_2.
Si $(p_1^2 + p_2^2)\widehat{f} \in L_2 \Rightarrow p_i^2\widehat{f} \in L_2$ y por el teorema 2.0.23 resulta que $p_i\widehat{f} \in L_2$ y como $|p_1p_2| \leqq 1/2(p_1^2 + p_2^2) \Rightarrow p_1p_2\widehat{f} \Rightarrow L_2$
. Se concluye que $(p_1^2 + p_2^2)\widehat{f} \in L_2 \Leftrightarrow p^a\widehat{f} \in L_2 \forall a \in \mathbb{N}^2, |a| \leqq 2$. Del teorema 2.0.22 y de lo anterior, se concluye lo siguiente:

$$\begin{aligned}
&\{f \in L_2 : D^a f \in L_2, a \in \mathbb{N}^2 0 \leqq |a| \leqq 2\} \\
&= \{f \in L_2 : p^a\widehat{f} \in L_2, a \in \mathbb{N}^2 0 \leqq |a| \leqq 2\} \\
&= \{f \in L_2 : (p_1^2 + p_2^2)\widehat{f} \in L_2\} \\
&= \{f \in L_2 : \triangle f \in L_2\}
\end{aligned}$$

Sea $G : L_2 \to L_2$ tal que dom(G)=$\{g \in L_2 : (p_1^2 + p_2^2)g \in L_2\}$ y $G(g) = (p_1^2 + p_2^2)g$. Entonces G es autoadjunto [9]
Sea Ψ la transformada de Fourier en L_2.Por el teorema 2.0.21, $1/(2\text{m})H_0 = \Psi^{-1}G\Psi$ pues tiene dominio $\{f \in L_2 : (p_1^2 + p_2^2)\widehat{f} \in L_2\} = W_{2,2}$.
Como $G = G^*$ y Ψ es unitario, entonces $H_0^* = 1/(2m)(\Psi^*G\Psi)^* = H_0 \therefore H_0$ es autoadjunto. □

[9] Página 55 del libro [5]

Capítulo 3

Un lema técnico

Denotamos por $F(x \in M)$ al operador multiplicar por la función característica del conjunto M.
En general si f es una función Borel medible, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ denotamos el operador $f : L_2(\mathbb{R}^2) \to L_2(\mathbb{R}^2)$ con dominio $\{\phi \in L_2 : f\phi \in L_2\}$ tal que $f(\phi) = f\phi$ por la misma letra f. Se puede demostrar que f es autoadjunto[1]

Para cualquier función de Borel $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definimos el operador $f(P) = \Psi^{-1} f(\cdot)\Psi$ en donde Ψ es la transformada de Fourier en $L_2(\mathbb{R}^2)$ y P es en operador momento: $P = (P_1, P_2) = -i(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2})$. Para simplificar la notación, usamos P para denotar el operador momento y p para representar un elemento de $\mathbb{R}^2$

Teorema 3.0.25. *Si x_1 es el operador multiplicación por x_1, de dominio $\{f \in L_2 : x_1 f \in L_2\}$ entonces su resolución de la identidad es:*

$$E(w)\phi = \chi_{w\times\mathbb{R}}\phi, \text{ con } w \text{ boreleano en } \mathbb{R}$$

o bien: $E(w) = F(x \in w \times \mathbb{R})$

Demostración. Claramente $E(w)^2 = E(w), E(\emptyset) = 0$, si $w \cap w' = \emptyset \Rightarrow E(w \cup w') = E(w) + E(w')$ y $E(w)$ es autoadjunto, pues es simétrico y acotado.
Sean $w_i, \imath \in \mathbb{N}$ borelianos disjuntos, sea $w = \cup_{n\in\mathbb{N}}$,sean $x, y \in L_2$, entonces:

[1] Libro [5] página 55

$$
\begin{aligned}
\langle E(w)x, y\rangle &= \int \chi_w xy \\
&= \int_w xy \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{w_n} xy \\
&\text{(Por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue)} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle E(w_n)x, y\rangle
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $\langle E(\cdot)x, y\rangle$ es una medida compleja
Además si $f, g \in L_2$:

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \lambda d\langle E(\cdot)f, g\rangle &= \int \lambda d(\int_{(\cdot)\times\mathbb{R}} fg) \\
&= \int \lambda d(\int_{(\cdot)} \int_{\mathbb{R}} fg).
\end{aligned}
$$

Definimos una medida sobre los borelianos de $\mathbb{R}$ de la siguiente manera: $\mu_{fg}(w) = \int_w \int fg$, entonces μ es absolutamente continua con respecto a λ (la medida de Lebesgue), entonces se puede aplicar el teorema de Radon-Nikodym [2].
Es claro que $\frac{\partial\mu_{fg}}{\partial\lambda}(x) = \int fg(x, y)dy$ por el corolario al teorema de Radon-Nikodym demostrado en la referencia antes citada, si ponemos $\lambda = x_1$:

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} x_1 d(\mu_{fg}) &= \int_{\mathbb{R}} x_1 \frac{\partial\mu_{fg}}{\partial\lambda} d\lambda \\
&= \int_{\mathbb{R}} x_1 \int_{\mathbb{R}} fg(x_1, x_2)dx_2 dx_1 \\
&= \langle x_1 f, g\rangle
\end{aligned}
$$

y esto último de cumple si $f \in Dom(x_1)$.
Se concluye que $E(w) = F(x \in w \times \mathbb{R})$ es resolución de la identidad para x_1 □

[2] Libro [9] página 132

De manera análoga se tiene que la resolución de la identidad para x_2 es: $E(w)(\phi) = \chi_{\mathbb{R}\times w}$ para todo conjunto de Borel $w \subset \mathbb{R}$

Teorema 3.0.26. *Sea u un operador unitario en un espacio de Hilbert H, sea $A : H \to H$ un operador autoadjunto y sea $E(w), w \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$ su resolución de la identidad, sea $B = u^{-1}Au$, entonces la resolución de la identidad para B es $F(w) = u^{-1}E(w)u, w \in \mathbb{B}$*

Demostración. No es difícil demostrar que F es una resolución de la identidad, por lo que lo damos por hecho.

Demostraremos entonces que F es resolución de la identidad para B. Sea $f \in Dom(B)$ y sea $g \in H$, entonces $uf \in Dom(A)$.

$$\begin{aligned} \langle Bf, g\rangle &= \langle Auf, ug\rangle \\ &= \int \lambda d(\langle E(\cdot)uf, ug\rangle) \\ &= \int \lambda d(\langle F(\cdot)f, g\rangle) \end{aligned}$$

Por lo tanto F es resolución de la identidad para A □

Teorema 3.0.27. *Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función Borel-medible, entonces:* $e^{iP\cdot vt}f(x)e^{-iP\cdot vt} = f(x + vt)$.

Demostración. supongamos primero que $\phi \in S$ y que $f \in S$
$\int e^{ip\cdot x}e^{-ip\cdot vt}\widehat{\phi}(p) = \phi(x - vt)$.
Sea $\psi(x) = \phi(x - vt)$

$$\int e^{ip\cdot x}e^{i\cdot vt}\widehat{(f\psi)} = f(x + vt)\phi(x)$$

De lo anterior se concluye que $e^{iP\cdot vt}f(x)e^{-iP\cdot vt}\phi = f(x + vt)\phi$.
Supongamos ahora que $\phi \in L_2$, sea $\{\phi_n\} \subset S$ tal que $\phi = \lim_{n\to\infty} \phi_n$. Entonces $\widehat{\phi} = \lim_{n\to\infty} \widehat{\phi_n}$.
También:

$$\begin{aligned} e^{-ip\cdot vt}\widehat{\phi} &= \lim_{n\to\infty} e^{-iP\cdot vt}\widehat{\phi_n} \\ \therefore \Psi^{-1}e^{-ip\cdot vt}\widehat{\phi} &= \lim_{n\to\infty} \phi_n(x - vt) \\ &= \phi(x - vt) \end{aligned}$$

Si $h(x) = f(x)\phi(x - vt) \in L_2 \Rightarrow e^{iP\cdot vt}h = h(x + vt) = f(x + vt)\phi(x)$. Como $Dom(f(x + vt)) = \{\phi \in L_2 : f(x + vt)\phi \in L_2\} = \{\phi \in L_2 : f(x)\phi(x - vt) \in L_2\} = Dom(e^{iP\cdot vt}f(x)e^{-iP\cdot vt})$, se concluye que $e^{iP\cdot vt}f(x)e^{-iP\cdot vt} = f(x+ vt)$ $\square$

Teorema 3.0.28. *Con la misma notación del teorema anterior:*

$$e^{-imv\cdot x}f(P)e^{imv\cdot x} = f(P + mv)$$

Tenemos que $f(P) = \Psi^{-1}f(p)\Psi$, de manera que $f(p) = \Psi f(P)\Psi^{-1}$. $e^{imv\cdot p} = \Psi e^{imv\cdot P}\Psi^{-1}$, $e^{-imv\cdot p} = \Psi e^{-imv\cdot P}\Psi^{-1}$. Sea $\phi \in L_2$.

$$\begin{aligned} e^{-imv\cdot p}f(P)e^{imv\cdot p} &= \Psi e^{-imv\cdot P}\Psi^{-1}f(P)\Psi e^{imv\cdot P}\Psi^{-1} \\ &= \Psi e^{-imv\cdot P}\Psi^{-2}f(p)\Psi^2 e^{imv\cdot P}\Psi^{-1} \end{aligned}$$

Sabemos que $\Psi^2\phi(x) = \Psi^{-2}\phi(x) = \phi(-x)\forall\phi \in L_2$.
Sea $\phi \in L_2$

$\Psi^2 e^{-imv\cdot P}\Psi^{-2}f(p)\Psi^2 e^{imv\cdot P}\Psi^{-2}\phi(p) = \Psi^2 e^{-imv\cdot P}\Psi^{-2}f(p)\Psi^2 e^{imv\cdot P}\phi(-p)$

$= \Psi^2 e^{-imv\cdot P}\Psi^{-2}f(p)\Psi^2\phi(-(p + mv))$

(Por la demostración del teorema anterior)

$= \Psi^2 e^{-imv\cdot P}\Psi^{-2}f(p)\phi(p + mv)$

$= \Psi^2 e^{-imv\cdot P}f(-p)\phi(-p - mv)$

$= \Psi^2 f(-(p - mv))\phi(-p)$ (Por la demostración del teorema anterior).

$= f(p + mv)\phi(p)$

De lo anterior se concluye que si $\phi \in Dom(f(p + mv)) \cap Dom(\Psi^2 e^{-imv\cdot P}\Psi^{-2}f(p)\Psi^2 e^{imv\cdot P}\Psi^{-2})$, $f(p + mv)\phi = \Psi^2 e^{-imv\cdot P}\Psi^{-2}f(p)\Psi^2 e^{imv\cdot P}\Psi^{-2}\phi$ pero también se hace ver que $Dom(\Psi^2 e^{-imv\cdot P}\Psi^{-2}f(p)\Psi^2 e^{imv\cdot P}\Psi^{-2}) = \{\phi \in L_2 : f(-p)\phi(-p - mv) \in L_2\} = Dom(f(p + mv))$, pues $\int |f(-p)\phi(-p - mv)|^2 = \int |f(p)\phi(p - mv)|^2 = \int |f(p + mv)\phi(p)|^2$. Se concluye que:
$\Psi^2 e^{-imv\cdot P}\Psi^{-2}f(p)\Psi^2 e^{imv\cdot P}\Psi^{-2} = f(p + mv)$
Por lo tanto

$$\begin{aligned} e^{-imv\cdot p}f(P)e^{imv\cdot p} &= \Psi e^{-imv\cdot P}\Psi^{-2}f(p)\Psi^2 e^{imv\cdot P}\Psi^{-1} \\ &= \Psi^{-1}f(p + mv)\Psi \\ &= f(P + mv) \end{aligned}$$

Corolario 3.0.1.

$$e^{-imv\cdot x}e^{-itH_0}e^{imv\cdot x} = e^{-imv^2t/2}e^{-iP\cdot vt}e^{-itH_0}$$

Demostración. Tomamos $f(p) = e^{-itp^2/(2m)}$ y aplicamos el teorema anterior
□

Dado $v \in \mathbb{R}$ denotamos por $B_{mh}(mv)$ a la bola abierta de $\mathbb{R}^n$de radio mh. si $v = 0$ usamos la notación B_{mh}.

Teorema 3.0.29. *$\forall f \in C_0^\infty(B_{mh})$ y $\forall l \in \mathbb{N}$, existe una constante C_l tal que la siguiente ecuación se cumple:*

$$\|F(x \in \tilde{\mathcal{M}})e^{-itH_0}f(\frac{P - mv}{v^\rho})F(x \in \mathcal{M})\| \leqq C_l(1 + rv^\rho + hv^{2\rho}|t|)^{-l}$$

$\forall v \in \mathbb{R}^n, |v| > 0, t \in R, \rho \in \mathbb{R}$ y para todo par de conjuntos medibles $\mathcal{M}, \tilde{\mathcal{M}}$ de $\mathbb{R}^n$ tales que $r := dist(\tilde{\mathcal{M}}, \mathcal{M} + vt) - h|v|^\rho|t| \geqq 0$

Demostración. Nótese que f es acotada y que la función $e^{-itp^2/(2m)}$ es acotada,por lo tanto, el operador multiplicar por $f((p - mv)/v^\rho)$ es acotado al igual que el operador multiplicar por $e^{-itp^2/(2m)}$ y es claro que los operadores $f(x \in \mathcal{M}), F(x \in \tilde{\mathcal{M}})$ son continuos.
Por el teorema 3.0.28,

$$f(P/v^\rho - mv/v^\rho) = e^{i(mv\cdot x)}f(P/v^\rho)e^{-i(mv\cdot x)}$$

$\|F(x \in \tilde{\mathcal{M}})e^{itH_0}f((P - mv)/v^\rho)F(x \in \mathcal{M})\| =$
$\|e^{imv\cdot x}F(x \in \tilde{\mathcal{M}})e^{-imv\cdot x}e^{itH_0}e^{imv\cdot x}f((P)/v^\rho)e^{-imv\cdot x}F(x \in \mathcal{M})\|$
$= \|F(x \in \tilde{\mathcal{M}})e^{-imv^2t/2}e^{-iP\cdot vt}e^{-itH_0}f(P/v^\rho)e^{imv\cdot x}F(x \in \mathcal{M})\|$
(por el corolario 3.0.1)
$= \|e^{iP\cdot vt}F(x \in \tilde{\mathcal{M}})e^{-iP\cdot vt}e^{-itH_0}f(P/v^\rho)e^{imv\cdot x}F(x \in \mathcal{M})\|$
(pues $e^{iP\cdot vt}$ es unitario)
$= \|F(x \in \tilde{\mathcal{M}})(x + vt)e^{-itH_0}f(P/v^\rho)e^{imv\cdot x}F(x \in \mathcal{M})\|$(por el teorema 3.0.27)
$= \|(F(x \in \tilde{\mathcal{M}})(x + vt)e^{-itH_0}f(P/v^\rho)e^{imv\cdot x}F(x \in \mathcal{M}))^*\|$
$= \|F(x \in \mathcal{M})e^{-imv\cdot x}(e^{-itH_0}f(p/v^\rho))^*F(x \in \tilde{\mathcal{M}})(x + vt)\|$
$= \|(F(x \in \mathcal{M})(e^{-itH_0}f(p/v^\rho))^*F(x \in \tilde{\mathcal{M}})(x + vt))^*\|$
$= \|F(x \in \tilde{\mathcal{M}})(x + vt)e^{-itH_0}f(p/v^\rho))F(x \in \mathcal{M})\|$
$= \|F(x \in \tilde{\tilde{\mathcal{M}}})e^{-itH_0}f(p/v^\rho))F(x \in \mathcal{M})\|$(en donde $\tilde{\tilde{\mathcal{M}}} = \tilde{\mathcal{M}} - vt)$

Obsérvese que $dist(\tilde{\tilde{\mathcal{M}}}, \mathcal{M}) = dist(\tilde{\mathcal{M}}, \mathcal{M} + vt)$, por lo tanto, para demostrar el teorema, es suficiente demostrar:

$$\|F(x \in \tilde{\mathcal{M}})e^{-itH_0}f(P/v^\rho)F(x \in \mathcal{M})\| \leqq C_l(1 + rv^\rho + hv^{2\rho}|t|)^{-1}$$

Si $r := dist(\tilde{\mathcal{M}}, M) - h|v|^\rho|t| \geqq 0$. Supongamos que $\phi \in S$

$$\begin{aligned}(3.1) \qquad & e^{-itH_0}f(P/v^\rho)f(x \in \mathcal{M})\phi = \Psi^{-1}e^{-itp^2/(2m)}f(p/v^\rho)(\widehat{F(x \in \mathcal{M})\phi}) \\ & = (2\pi)^{-n/2}\Psi^{-1}(e^{-itp^2/(2m)}f(p/v^\rho)) * \Psi^{-1}((\widehat{F(x \in \mathcal{M})\phi}))\end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned}(3.2) \qquad & \Psi^{-1}(e^{-itp^2/(2m)}f(p/v^\rho)) = (2\pi)^{-n/2}\int e^{ip\cdot x}(e^{-itp^2/(2m)}f(p/v^\rho))dp \\ & := f_t(x)\end{aligned}$$

De 3.1 y 3.2 obtenemos:

$$\begin{aligned}
&\|F(x\in\tilde{\mathcal{M}})e^{-itH_0}f(P/v^\rho)F(x\in\mathcal{M})\phi\|^2\\
&=\int_{\tilde{\mathcal{M}}}e^{-itH_0}f(P/v^\rho)F(x\in\mathcal{M})\phi\overline{e^{-itH_0}f(P/v^\rho)F(x\in\mathcal{M})\phi}dx\\
&=(2\pi)^{-n}\int_{\tilde{\mathcal{M}}}dx(\int_{\mathcal{M}}dyf_t(x-y)\phi(y))\overline{(\int_{\mathcal{M}}dzf_t(x-z)\phi(z))}(\text{Por 3.1y 3.2})\\
&\leqq 1/2(2\pi)^{-n}\int_{\tilde{\mathcal{M}}}dx\int_{\mathcal{M}}dy\int_{\mathcal{M}}dz|f_t(x-y)||f_t(x-z)|(|\phi(y)|^2+|\phi(z)|^2)\\
&\text{pues } 2|\phi(y)\phi(z)|\leqq|\phi(y)|^2+|\phi(z)|^2\\
&=1/2(2\pi)^{-n}\int_{\tilde{\mathcal{M}}}dx\int_{\mathcal{M}}dy\int_{\mathcal{M}}dz|f_t(x-y)||f_t(x-z)|(|\phi(y)|^2)\\
&+1/2(2\pi)^{-n}\int_{\tilde{\mathcal{M}}}dx\int_{\mathcal{M}}dy\int_{\mathcal{M}}dz|f_t(x-y)||f_t(x-z)|(|\phi(z)|^2)\\
&\leqq 1/2(2\pi)^{-n}\int_{\tilde{\mathcal{M}}}dx\int_{\mathcal{M}}dy|f_t(x-y)||\phi(y)|^2\int_{x-\mathcal{M}}f_t(w)dw\\
&+1/2(2\pi)^{-n}\int_{\tilde{\mathcal{M}}}dx\int_{\mathcal{M}}dz|f_t(x-z)||\phi(z)|^2\int_{x-\mathcal{M}}f_t(w)dw\\
&\leqq 1/2(2\pi)^{-n}\int_{|x|\geqq r+hv^\rho|t|}|f_t(x)|dx\{\int_{\mathcal{M}}dy|\phi(y)|^2\int_{\tilde{\mathcal{M}}-y}f_t(w)dw\\
&+\int_{\mathcal{M}}dz|\phi(z)|^2\int_{\tilde{\mathcal{M}}-z}f_t(w)dw\}\\
&\leqq(2\pi)^{-n}(\int_{|x|\geqq r+hv^\rho|t|}|f_t(x)|dx)^2|\phi|^2
\end{aligned}$$

Por lo tanto;

(3.3)

$$\|F(x\in\tilde{\mathcal{M}})e^{-itH_0}f(P/v^\rho)F(x\in\mathcal{M})\phi\|^2\leqq(2\pi)^{-n}\int_{|x|\geqq r+hv^\rho|t|}|f_t(x)|dx)^2|\phi|^2$$

A continuación se enuncia sin demostrar[3] el siguiente teorema:

Teorema 3.0.30. *Sea $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\in C^\infty$ sea $u\in S(\mathbb{R}^n)$ tal que $\widehat{u}$ tiene soporte compacto. Sea $\mathcal{G}$ un abierto que contiene al compacto $\{\nabla g(k):k\in$*

[3]La demostración se encuentra en el libro [7], volumen III página 38

$sop(\widehat{u})\}$. *Sea*

$$u_t(x) = (2\pi)^{-n/2} \int e^{i(x \cdot k - tg(k))} \widehat{u}(k) dk$$

Entonces, para cada m *existe una constante* C_m *que depende de* m *,* u *y* $\mathcal{G}$ *tal que*

$$|u_t(x)| \leqq C_m(1 + |x| + |t|)^{-m}$$

$\forall x, t$ *con* x/t *no en* $\mathcal{G}$

Cambiando variable $k = p/v^\rho$ obtenemos

$$f_t(x) = (2\pi)^{-n/2} v^{n\rho} \int e^{ik.xv^\rho} e^{-iv^{2\rho}k^2t/(2m)} f(k) dk \tag{3.4}$$

Usamos el teorema 3.0.30 con $\widehat{u} = f$ $,s = v^{2\rho}t$, $y = xv^\rho$ $g = k^2/(2m)$, $\mathcal{G} = B_h(0)$.

$$u_s(y)v^{n\rho} = f_t(x) \leqq v^{n\rho} C_l (1 + |x|v^\rho + v^{2\rho}|t|)^{-l} \forall x, t \text{ con } x/(v^\rho|t|) \notin B_h(0)$$

Nótese que $|x|/(v^\rho|t|) \notin B_h(0) \Leftrightarrow |x| \geqq hv^\rho|t|$, por lo tanto,

$$f_t(x) \leqq v^{n\rho} C_l (1 + |x|v^\rho + v^{2\rho}|t|)^{-l} \forall x con |x| \geqq hv^\rho|t|$$

Por lo tanto,

$$\int_{|x| \geqq r + hv^\rho|t|} |f_t(x)| dx \leqq \int_{|x| \geqq r + hv^\rho|t|} C_N v^{n\rho} (1 + |x|v^{n\rho} + v^{2\rho}|t|)^{-N} \tag{3.5}$$

Cambiando a coordenadas esféricas obtenemos:

$$\leqq d_1 C_N v^{n\rho} \int_{R \geqq r + hv^\rho|t|} R^{n-1} (1 + Rv^\rho + v^{2\rho}|t|)^{-N} dR$$

en donde d_1 es constante

(3.6)

Supongamos que $N \geqq n$.

$$v^{n\rho}\int_{R\geqq r+hv^{\rho}|t|}R^{n-1}(1+Rv^{\rho}+v^{2\rho}|t|)^{-N}dR$$

integrando por partes obtenemos:

$$= 1/(-N+1)R^{n-1}v^{(n-1)\rho}(1+Rv^{\rho}+v^{2\rho}|t|)^{-N+1}|_{r+hv^{\rho}|t|}^{\infty}$$

$$-(n-1)/(-N+1)v^{(n-1)\rho}\int_{R\geqq r+hv^{\rho}|t|}R^{n-1}(1+Rv^{\rho}+v^{2\rho}|t|)^{-N+1}dR$$

Integrando por partes n veces obtenemos

$$= \{1/(N-1)R^{n-1}v^{(n-1)\rho}(1+Rv^{\rho}+v^{2\rho}|t|)^{-N+1}$$

$$-(n-1)/((-N+1)(-N+2))R^{n-2}v^{(n-2)\rho}(1+Rv^{\rho}+v^{2\rho}|t|)^{-N+2}$$

$$+(n-1)(n-2)/((-N+1)(-N+2)(-N+3))R^{n-3}v^{(n-3)\rho}(1+Rv^{\rho}+v^{2\rho}|t|)^{-N+3}$$

$$+\cdots$$

$$+(-1)^{m+1}((n-1)/!(n-m))!(N-m-1)!/((-1)^{m}(N-1)!)R^{n-m}v^{(n-m)\rho}$$

$$(1+Rv^{\rho}+v^{2\rho}|t|)^{-N+m}\}_{r+hv^{\rho}|t|}^{\infty}$$

Evaluando la anterior suma, podemos ver que todos los términos son positivos y de la forma:

constante $v^{(n-m)\rho}(1+hv^{\rho}|t|)^{n-m}(1+(r+v^{\rho}h|t|)v^{\rho}+v^{2\rho}|t|)^{-N+m}$

Sea $z = r+hv^{\rho}|t|$

$$\begin{aligned}
&v^{(n-m)\rho}(1+hv^{\rho}|t|)^{n-m}(1+(r+v^{\rho}h|t|)v^{\rho}+v^{2\rho}|t|)^{-N+m}\\
&=(v^{\rho}z)^{n-m}(1+v^{\rho}z+v^{2\rho}|t|)^{-N+m}\\
&\leqq(1+v^{\rho}z+v^{2\rho}|t|)^{n-m}(1+v^{\rho}z+v^{2\rho}|t|)^{-N+m}\\
&=((1+v^{\rho}z+v^{2\rho}|t|)^{n-m-N+m}\\
&\leqq(1+v^{\rho}z)^{n-N}\\
&=(1+rv^{\rho}+v^{2\rho}h|t|)^{n-N}
\end{aligned}$$

De lo anterior se sigue que para (n-N) existe una constante $\bar{C}_{n-N}$ tal que:

$$\begin{aligned}
&v^{n\rho}\int_{R\geqq r+hv^{\rho}|t|}R^{n-1}(1+Rv^{\rho}+v^{2\rho}|t|)^{-N}dR\\
&\leqq\bar{C}_{n-N}(1+rv^{\rho}+v^{2\rho}|t|)^{n-N}
\end{aligned}$$

De 3.5 y lo anterior se obtiene que dada l, existen constantes $\tilde{C}_l$ tales que:

$$\int_{R \geqq r + hv^\rho |t|} |f_t| dx$$
$$\leqq \tilde{C}_l (1 + rv^\rho + v^{2\rho} h|t|)^{-l}$$

Finalmente de 3.3 obtenemos que dada l existe C_l tal que

$$\|F(x \in \tilde{\mathcal{M}}) e^{-itH_0} f(P/v^\rho) F(x \in \mathcal{M})\phi\|^2$$
$$\leqq C_l (1 + rv^\rho + hv^{2\rho}|t|)^{-l}$$

□

Corolario 3.0.2. $\forall Q \in \mathbb{R}^2, \forall f \in C_0^\infty(B_{nh}), \forall 0 < \rho \leqq 1, \forall l \in \mathbb{N}$ *existe una constante* C_l *tal que:*

$$\|F(|x - Q - vt| > |vt|/4) e^{-itH_0} F(\frac{P - mv}{v^\rho}) F(|x - Q| \leqq |vt|/8)\| \leqq C_l (1 + |vt|)^{-l}$$

Si $v > (8h)^{1/(1-\rho)}$ *y* $v > 8^{1/\rho}$

Demostración. Sea $\tilde{\mathcal{M}} = \{x : |x - Q - vt| > |vt|/4\}$
Sea $\mathcal{M} = \{x : |x - Q| \leqq |vt|/8\}$
Entonces: $dis(\tilde{\mathcal{M}}, \mathcal{M} + vt) = |vt|/8$, de manera que
$r := dis(\tilde{\mathcal{M}}, \mathcal{M} + vt) - hv^\rho|t| \geqq 0$ si $v > (8h)^{1/(1-\rho)}$
Aplicando el teorema 3.0.29 obtenemos:

$$\|F(|x - Q - vt| > |vt|/4) e^{-itH_0} F(\frac{P - mv}{v^\rho}) F(|x - Q| \leqq |vt|/8)\|$$
$$\leqq C_l (1 + rv^\rho + hv^{2\rho}|t|)^{-l}$$
$$= C_l (1 + |vt| v^\rho / 8)^{-l}$$
$$\leqq C_l (1 + |vt|)^{-l} (\text{Si } v > 8^{1/\rho})$$

□

Capítulo 4

Algunos resultados de teoría espectral y derivadas generalizadas

En esta parte denotaremos a la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ como $\mu_s = \lambda$, a la medida exterior que da lugar a la medida de Lebesgue la denotamos como μ^*

Definición 4.0.10. *Sea q una colección de intervalos de $\mathbb{R}$ decimos que q cubre a un conjunto E en el sentido de Vitali si $\forall\epsilon > 0 \forall x \in E \exists I \in q$ tal que $x \in I$ y $\lambda(I) < \epsilon$*

Lema 4.0.6. *Sea E un conjunto de medida exterior finita, q una colección de intervalos que cubre a E en el sentido de Vitali. Entonces dada $\epsilon > 0$ existe una colección finita disjunta $\{I_1, \cdots I_n\}$ de intervalos de q tal que*

$$\mu^*(E - \cup_{i=1}^n I_i) < \epsilon$$

Demostración. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que cada intervalo en q es cerrado. Sea O un abierto de medida finita que contiene a E. Como q es cubierta de Vitali de E, podemos suponer que cada I de q está contenido en O. Construimos por recursión una sucesión $\{I_n\}$ de intervalo disjuntos como sigue:
Sea I_1 cualquier intervalo en q, supongamos que $I_1, I_2, \cdots I_n$ fueron elegidos, sea $\{k_n\}$ el supremo de las longitudes de los intervalos en q que no intersectan a ningún $I_1, \cdots I_n$. Como cada I en q está contenido en O, $K_n \leqq \mu(O) < \infty$. A menos que $E \subset \cup_{i=1}^n I_i$, podemos encontrar I_{n+1} en q tal que $\mu(I_{n+1}) > 1/2k_n$

y además que I_{n-1} sea disjunto de los anteriores.
Entonces la sucesión de intervalos que construimos es disjunta está contenida en q y además $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(I_i) \leqq \mu(O) < \infty$, por lo tanto, podemos encontrar un entero N tal que $\sum_{N+1}^{\infty} \mu(I_n) < \epsilon/5$.
Sea $R = E - \cup_{i=1}^{N} I_i$, el lema estaría demostrado si $\mu^*(R) < \epsilon$, sea x arbitrario en R. Como $\cup_{i=1}^{N} I_n$ es cerrado y no tiene a x, podemos encontrar un intervalo I en q que contiene a x y de longitud tan chica que no intersecta a $I_1, \cdots I_N$. Entonces , como $I \cap I_i = \emptyset$ para $i \leqq N \Rightarrow \mu(I) \leqq k_N < 2\mu(I_{N+1})$. Como $\lim_{n\to\infty} \mu I_n = 0$, el intervalo I debe intersectar al menos a uno de los intervalos I_n, sea n el mínimo entero tal que I intersecta a I_n. Tenemos $n > N$ y $\mu(I) \leqq k_{n-1} < 2\mu(I_n)$.
Como x está en I , e I tiene puntos en común con I_n, entonces la distancia de x al punto medio de I_n es a lo mas $\mu(I) + 1/2\mu(I_n) < 5/2\mu(I_n)$. Por lo tanto x está en el intervalo j_n que tiene al mismo centro que I_n pero 5 veces su longitud .
Se obtiene que $R \subset \cup_{i=N1}^{\infty} j_n, \therefore \mu^*(R) \leq \sum_{N+1}^{\infty} \mu(j_n) < \epsilon$

□

Definición 4.0.11. *Sea* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$D^+ f(x) = \limsup_{h\to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$
$$D^- f(x) = \limsup_{h\to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$
$$D_+ f(x) = \liminf_{h\to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$
$$D_- f(x) = \liminf_{h\to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Claramente f es diferenciable Si y sólo si $D^+(f) = D^-(f) = D_+(f) = D_f(f)$

Teorema 4.0.31. *Sea f una función creciente a valores reales, definida en $[a, b]$. Entonces f es diferenciable casi donde quiera, la derivada f' es medible y $\int_a^b f' \leqq f(b) - f(a)$.*

Demostración. Se mostrará que el conjunto en el que cualquiera de las dos derivadas de la definición 4.0.11 tiene medida cero.

Consideramos sólo al conjunto donde $D^+(f) > D_-(f)$, lo demás es análogo.

Sea $E_{u,v} = \{x : D^+(f)(x) > u > v > D_-(f)(x)\}$ para todos los racionales u y v.
Entonces es suficiente probar que $m^*(E_{u,v}) = 0$.
Sea $s = m^*(E_{u,v})$ y sea $\epsilon > 0$. Cubrimos $E_{u,v}$ con un abierto O tal que $\mu(O) < s + \epsilon$. Para cada punto x en $E_{u,v}$ hay un intervalo arbitrariamente chico $[x-h, x]$ contenido en O tal que $f(x) - f(-h) < vh$.
Por el lema 4.0.6 podemos elegir una subcolección finita disjunta $\{I_1, \cdots I_n\}$ de estos intervalos, cuyos interiores cubren un subconjunto A de $E_{u,v}$ de medida exterior mayor que $s - \epsilon$. Sumando estos intervalos obtenemos:

$$\sum_{n=1}^{N} f(x_n) - f(x_n - h_n) < v \sum_{n=1}^{N} h_n < v\mu(O) < v(s+\epsilon)$$

Cada punto $y \in A$ es el extremo izquierdo de de un intervalo arbitrariamente chico $(y, y+k)$ que está contenido en algún I_n y tal que $f(y+k) - f(y) > uk$.
Usando el lema 4.0.6, podemos elegir una subcolección finita $\{j_1, \cdots j_M\}$ de esos intervalos tal que su unión contiene a un subconjunto de medida mayor que $s - 2\epsilon$. Entonces sumando sobre los intervalos obtenemos:

$$\sum_{i=1}^{M} f(y_i + k) - f(y_i) > u \sum k_i > u(s - 2\epsilon)$$

Cada intervalo j_i es contenido en algún intervalo I_n, si sumamos sobre aquéllos i tales que $j_i \subset I_n$, obtenemos

$$\sum f(y_i + k_i) - f(y_i) \leqq \sum f(x_n) - f(x_n - h_n) \text{ya que f es creciente}$$

Entonces:

$$\sum_{n=1}^{N} f(x_n) - f(x_n - h_n) \geqq \sum_{i=1}^{M} f(y_i + k_i) - f(y_i)$$

Y por lo tanto

$$v(s+\epsilon) > u(s - 2\epsilon)$$

Como ϵ es arbitraria, se concluye que $vs \geqq us$, pero como $u > v$ entonces $s = 0$.
Entonces:

$$g(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Está definida casi donde quiera y f es diferenciable cuando g es finita.
Sea :

$$g_n(x) = n(f(x + 1/n) - f(x))$$

En donde $f(x) = f(b)$ si $x \geqq b$. Entonces $g_n(z) \to g(x)$ casi donde quiera, por lo tanto g es medible. Como f es creciente, $g_n \geqq 0$. entonces por el lema de Fatou.

$$\begin{aligned}
\int_a^b g &\leqq \liminf n \int_a^b f(x + 1/n) - f(x) \\
&= \liminf(n \int_b^{b+1/n} f - n \int_a^{a+1/n} f) \\
&= \liminf(f(b) - n \int_a^{a+1/n} f) \\
&\leqq f(b) - f(a)
\end{aligned}$$

Esto muestra que g es integrable y por lo tanto finita casi donde quiera. Entonces f es diferenciable casi donde quiera y g = f' casi donde quiera. □

Sea f a valores reales definida en el intervalo $[a, b]$, sea $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$ una partición de $[a, b]$. Definimos

$$p = \sum_{i=1}^{k} (f(x_i) - f(x_{i-1}))^+$$

$$n = \sum_{i=1}^{k} (f(x_i) - f(x_{i-1}))^-$$

$$t = n + p = \sum_{i=1}^{k} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

En donde r^+ denota r si $r \geqq 0$ y 0 en otro caso, $r^- = |r| - r^+$. Tenemos que f(a)-f(b) = p-n, sean:

$$\begin{aligned}
P &= \sup(p) \\
N &= \sup(n) \\
T &= \sup(t)
\end{aligned}$$

En donde tomamos el supremo sobre todas las posibles particiones de [a,b].
Es claro que $P \leqq T \leqq P + N$. Llamamos P, N y T a la positiva , negativa y total variación de f sobre [a,b]. Para indicar el intervalo ponemos en vez de T, $T_a^b(f)$ o bien T_a^b. Si $T < \infty$ decimos que f es de variación acotada en [a,b] o bien $f \in BV$

Lema 4.0.7. *Si f es de variación acotada, entonces:*

$$T_a^b = P_a^b + N_a^b$$

y

$$f(b) - f(a) = P_a^b - N_a^b$$

Demostración. Para cualquier partición de [a,b]

$p = n + f(b) - f(a)$
$\leqq N + f(b) - f(a)$
Tomando supremo sobre las particiones obtenemos:
$P \leqq N + f(b) - f(a).$
Como $N \leqq T < \infty$
$P - N \leqq f(b) - f(a)$
Análogamente
$P - N \leqq f(a) - f(b)$

Por lo tanto

$P - N = f(b) - f(a)$
Entonces
$T \geqq p + n = p + p - (f(b) - f(a)) = 2p + N - P$
y
$T \geqq 2P + N - P = P + N$

Como $T \leqq P + N$, tenemos $T = P + N$ □

Una función f es de variación acotada en [a,b] si y sólo si es la diferencia de dos funciones monótonas a valores reales en [a,b]

Demostración. Sea f de variación acotada, sea $g(x) = P_a^x$ y $h(x) = N_a^x$. Entonces g y h son monótonas crecientes a valores reales, pues $0 \leqq P_a^x \leqq$

$P_a^p < \infty$, $0 \leqq N_a^x \leqq N_a^b < \infty$. Pero por el lema anterior $f(x) = g(x) - h(x) + f(a)$ y $h - f(a)$ es monótona.
Para la otra implicación, sea $f = g - h$ en [a,b], g y h crecientes, entonces para toda subdivisión de [a, b] tenemos:

$$\sum |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leqq \sum (g(x_i) - g(x_{i-1})) + \sum (h(x_i) - h(x_{i-1}))$$
$$= g(b) - g(a) + h(b) - h(a) < \infty$$

□

Lema 4.0.8. *Si f es integrable en [a,b], entonces a función F definida por*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

es continua, y de variación acotada en [a,b]

Demostración. La continuidad se sigue del teorema de convergencia dominada de Lebesgue.
Mostraremos que es de variación acotada.
Sea $a = x_0 < \cdots < x_k = b$ una subdivisión de [a,b]. Entonces

$$\sum_{i=1}^{k} |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^{k} |\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)dt|$$
$$\leqq \sum_{i=1}^{k} |f(t)|dt$$
$$= \int_a^b |f(t)|dt$$
$$< \infty$$

□

Lema 4.0.9. *Si f es integrable en [a,b] y*

$$\int_a^b f(t)dt = 0$$

$\forall x \in [a, b]$, *entonces* $f(t) = 0 c.t.p$ *en [a,b]*

Demostración. Supongamos que $f(x) > 0$, para un conjunto E de medida positiva. Entonces (por que la medida de Lebesgue es regular) existe un cerrado $F \subset E$ con $\mu(F) > 0$. sea $O = (a, b) - F$. Entonces como $\int_a^b f = 0 \Rightarrow \int_O f = -\int_F f \neq 0$.
Como O es abierto, O es unión numerable de intervalos abiertos disjuntos $\{(a_n, b_n)\}$.Del teorema de convergencia dominada de Lebesgue se sigue:

$$\int_a^b f = \sum \int_{a_n}^{b_n} f$$

Entonces para alguna n tenemos:

$$\int_{a_n}^{b_n} f \neq 0$$

Entonces $\int_a^{a_n} \neq 0$ *o* $\int_a^{b_n} \neq 0$ y esto contradice la hipótesis, entonces f no puede ser positiva en un conjunto de medida positiva y de igual forma f no puede ser negativa en un conjunto de medida positiva, por lo tanto $f = 0$ *c.t.p.* □

Lema 4.0.10. *Si f es medible y acotada en [a,b] y*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + F(a)$$

Entonces $F'(x) = f(x)c.t.p.$

Demostración. Por el lema 4.0.8. F es de variación acotada en [a,b]. por lo tanto existe $F'c.t.p.$. Sea $|f| \leqq k$. Ponemos

$$f_n = \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

Con $h = 1/n$ tenemos:

$$f_x = 1/h \int_x^{x+h} f(t)dt$$

Por lo tanto

$|f_n| \leqq k$

y como

$F_n(x) \to F'(x)c.t.p.$

El teorema de convergencia acotada implica que:

$$\int_a^c F'(x)dx = \lim \int_a^c f_n = \lim_{h\to 0} 1/h \int (F(x+h) - F(x))dx$$
$$= \lim 1/h(\int_c^{c+h} F(x) - 1/h \int_a^{a+h} F)$$
$$= F(c) - F(a) = \int_a^c f \text{ya que F es continua}$$

Entonces $\int_a^c F' - f = 0 \forall c \in [a,b] \Rightarrow f = F'\ c.t.p$ (por el lema 4.0.9)

□

Teorema 4.0.32. *Sea f integrable en [a,b], suponga que*

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt$$

Entonces $F' = f\ c.t.p.$

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $f \geqq 0$. Sea f_n definida por $f_n(x) = f(x)$ si $f(x) \leqq n$ y $f_n(x) = n$ en otro caso. Entonces $f - f_n \geqq 0$ y por lo tanto $G_n(x) = \int_a^x (f - f_n)$ es una función creciente de x, que debe tener derivada en casi todo punto, y su derivada debe ser no negativa.
Por el lema 4.0.10 $\frac{\partial \int_a^x f_n}{\partial x} = f_n c.t.p$ Y por lo tanto $F'(x) = \frac{\partial G_n}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \int_a^x f_n \geqq f_n\ c.t.p.$ como n es arbitrario $F'(x) \geqq f\ c.t.p.$
En consecuencia

$$\int_a^b F'(x)dx \geqq \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Entonces por el teorema 4.0.31

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx,$$

y

$$\int_a^b F'(x) - f(x) = 0$$

Como $F'(x) - f(x) \geqq 0$ se tiene que $F'(x) = f(x)\ c.t.p.$ □

Definición 4.0.12. *Una función a valores reales f definida en [a,b] se dice absolutamente continua en [a,b]. si dada* $\epsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0$ *tal que*

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i') - f(x_i)| < \epsilon$$

Para toda colección finita $\{(x_i', x_i)\}$ *de intervalos disjuntos con*

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i' - x_i| < \delta$$

Es fácil ver que una función absolutamente continua es continua, además toda integral indefinida es absolutamente continua.

Lema 4.0.11. *Si f es absolutamente continua en [a,b], entonces es de variación acotada en [a,b].*

Demostración. Sea δ la de la definición de absolutamente continua que corresponde a $\epsilon = 1$. Entonces cualquier subdivisión de [a,b] puede ser refinada a en k conjuntos de intervalos, cada uno de longitud total menor que δ. Entonces para cualquier partición tenemos que $t \leqq k$ □

Corolario 4.0.3. *Si f es absolutamente continua, entonces tiene derivada casi donde quiera.*

Lema 4.0.12. *Si f es absolutamente continua en [a,b] y* $f' = 0$ *c.t.p. Entonces f es constante.*

Demostración. Mostraremos que $f(a) = f(c) \forall c \in [a,b]$. Sea $E \subset (a,c)$ el conjunto de medida c-a en el cual $f'(x) = 0$, sean $\epsilon > 0, \eta > 0$ para cada $x \in E$ existe un intervalo arbitrariamente chico $[x, x+h]$ contenido en [a,c] talque $|f(x+h) - f(x)| < \eta h$. Por el lema 4.0.6, podemos encontrar una colección finita $\{[x_k, y_k]\}$ de intervalos disjuntos que cubren a E excepto en un conjunto de medida menor que δ en donde δ es la correspondiente a ϵ de la continuidad absoluta de f. Enumeramos los x_k de manera creciente y tenemos:

$$x_0 = a \leqq y_0 < x_1 < y_1 < \cdots \leqq y_n = c$$

$$\sum_{k=0}^{n} |x_{k+1} - y_k| < \delta$$

pero

$$\sum_{k=1}^{n} |f(y_k) - f(x_k)| \leqq \eta \sum (y_k - x_k) \text{y}$$

$$\sum_{k=0}^{n} |f(x_{k+1}) - f(y_k)| < \epsilon \text{ por la continuidad absoluta de f}$$

Entonces

$$|f(c) - f(a)| = |\sum_{k=0}^{n} (f(x_{k+1}) - f(y_k)) + \sum_{k=1}^{n} (f(y_k) - f(x_k))|$$

$$\leqq \epsilon + \eta(b - a).$$

Como ϵ y η son arbitrarios, f(c)= f(a) □

Teorema 4.0.33. *Una función F es una integral indefinida si y sólo si es absolutamente continua.*

Demostración. Si f es integral indefinida entonces es absolutamente continua, esto se sigue de teoría de la medida básica.
Se mostrará la otra implicación.

Como F es absolutamente continua, entonces es de variación acotada y podemos escribir

$$F(x) = F_1(x) - F_2(x)$$

En donde $F_1 y F_2$ son monótonas crecientes. Por lo tanto F' existe casi donde quiera y

$$|F'(x)| \leqq F_1'(x) + F_2'(x)$$

Entonces

$$\int |F'(x)| dx \leqq F_1(b) + F_2(b) - F_1(a) - F_2(a) (\text{por el teorema 4.0.31})$$

Entonces F' es integrable. Sea

$$G(x) = \int_a^b F'(t)dt$$

Entonces G es absolutamente continua y por lo tanto la función $f = F - G$. Se sigue del teorema 4.0.32 que $f' = F' - G'c.t.p.$ y por el tema anterior se sigue que f es constante. Entonces:

$$F(x) = \int_a^x F'(t)dt + F(a)$$

□

Corolario 4.0.4. *Toda función absolutamente continua es la integral indefinida de su derivada*

Definición 4.0.13. *Sea A un Operador autoadjunto.*
Sea $E : \mathcal{B}(sp(A)) \to P(H)$, (en donde A tiene como dominio un subconjunto de H y $Ran(A) \subset H$, $sp(A)$ es el espectro de A , $P(H)$ son las proyecciones sobre el espacio de Hilbert H y $\mathcal{B}(spA)$ es la sigma-Álgebra de Borel en $sp(A)$)una resolución de la identidad para A.
La medida $\mu_{f,g}(w) := \langle E(w)f, g\rangle, f, g \in H, w \in \mathcal{B}(sp(A))$ es una medida compleja y definimos $\mu_f = \mu_{f,f}$ que es una medida real.
Si μ_f es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue (es decir: $\lambda(w) = 0 \Rightarrow \mu_f(W) = 0$) se dice que f es absolutamente continuo con respecto a H.
Si μ_f es singular con respecto a λ (Es decir, existen w_1, w_2 tales que $\lambda(w_1) = 0, \mu_f(w_2) = 0, w_1 \cap w_2 = 0$) entonces decimos que f es singular con respecto a H. El conjunto de elementos de H que son absolutamente continuos (singulares) con respecto a H se denota como $H_{ac}(H_s)$ y es llamado espacio absolutamente continuo (singular) con respecto a H.
Un subespacio cerrado V de H reduce a H si pasa lo siguiente:
Sea P_V la proyección ortogonal sobre V, entonces $P_V(Dom(A)) \subset Dom(A)$, $AP_V Dom(A) \subset V, A(1 - P_V)D(A) \subset V^{\perp}$

Teorema 4.0.34. *H_{ac} y H_{as} son subespacios cerrados, complementos ortogonales entre si y reducen a H*

Demostración. Primero demostramos que $H_{ac} \perp H_s$.
Sea $u \in H_{ac}$ y $v \in H_s$.
Existe un conjunto de Borel s_0 tal que $\lambda(s_0) = 0$ y tal que $E(s_0^c)v = (1 - E(s_0))v = 0 \therefore \langle u, v\rangle = \langle u, E(s_0)v\rangle = \langle E(s_0)u, v\rangle = 0$ pues $\lambda(s_0) = 0$ y μ_u es absolutamente continua con respecto a λ.
Veremos ahora que $H_{ac} + H_s = H$, es decir, $\forall w \in H$ podemos encontrar $u \in H_{ac}$ y $v \in H_s$, tales que $u + v = w$.
Para tales efectos descomponemos la medida finita no negativa μ_w en la suma de dos medidas, una singular (μ'') y otra absolutamente continua (μ') con respecto a λ [1].
Sea s_0 tal que $\lambda(s_0) = 0$ y $\mu''(s) = \mu''(s \cap s_0) \forall s \in \mathcal{B}(sp(A))$. Sea $v = E(s_0)w$ y $u = w - v$.
Afirmamos que $u \in H_{ac}, v \in H_s$.

[1]Estamos usando la descomposición de Lebesgue de μ_w. El teorema de la descomposición de Lebesgue se puede encontrar en el libro [9] página 141

De hecho $\mu_v(s) = |E(s)v|^2 = |E(s)E(s_0)w|^2 = |E(s \cap s_0)w|^2 = \mu_w(s \cap s_0) = \mu''(s \cap s_0)$ ya que $\mu'(s \cap s_0) = 0$ y $\mu''(s) = \mu''(s \cap s_0)$, además $\mu_u(s) = |E(s)u|^2 = |E(s)(1 - E(s_0))w|^2 = |E(s)w|^2 - |E(s \cap s_0)w|^2 = \mu_w(s) - \mu''(s) = \mu'(s)$.
Por lo tanto μ_v es singular y μ_u es absolutamente continua , entonces $u \in H_{ac}, v \in H_s$. Para concluir que $H = H_{ac} + H_s$ es necesario ver antes que $H_s y H_{ac}$ son espacios vectoriales.
Si $u, v \in H_{ac}, a \in \mathbb{C}$ sea s tal que $\lambda(s) = 0$, entonces es claro que $\langle E(s)(u + av), u + av\rangle = 0$ puesto que $\langle E(s)u, u\rangle = \langle E(s)v, v\rangle = 0$. Supongamos ahora que $u, v \in H_s, a \in \mathbb{C}$ sean s_0 y s_1 tales que $\lambda(s_0) = \lambda(s_1) = 0$ y $\mu_u(s_0^c) = \mu_v(s_1^c) = 0 \Rightarrow \lambda(s_0 \cup s_1) = 0, \mu_{u+av}((s_0 \cup s_1)^c) = 0$, de manera que μ_{u+av} es absolutamente singular con respecto a λ, por lo tanto H_s y H_{ac} son espacios vectoriales. Se concluye que $H = H_s + H_{ac}$.
Veremos ahora que H_{ac} y H_s son cerrados. Sea $\{u_n\} \subset H_{ac}$ tal que $u = \lim_{n\to\infty} u_n$, hay que ver que $u \in H_{ac}$.
Como $u \in H = H_{ac} + H_s \Rightarrow u = w + v, w \in H_{ac}, v \in H_s$ pero $\langle u, v\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle u_n, v\rangle = 0 \Rightarrow \langle u, v\rangle = \langle v, v\rangle = 0 \Rightarrow v = 0 \Rightarrow u = w \in H_{ac}$ de manera que H_{ac} es cerrado, análogamente se obtiene que H_s es cerrado. Falta ver que H_{ac} y H_s reducen a H.
Si $u \in H_{ac}$, entonces $E(w)u \in H_{ac} \forall w \in \mathcal{B}(sp(A))$ puesto que si s es tal que $\lambda(s) = 0$ se sigue que $E(s)E(w)u = E(w)E(s)u = 0$.
Si $v \in H_s$ sea s tal que $\lambda(s) = 0, \langle E(s^c)v, v\rangle = 0 \Rightarrow \langle E(s^c)E(w)v, E(w)v\rangle =$
$\langle E(w)E(s^c)v, E(w)v\rangle = \langle E(w)E(s^c)v, v\rangle = \langle E(s^c)E(w)v, v\rangle =$
$\langle E(s^c)E(w)v, E(s^c)v\rangle = \langle E(w)E(s^c)v, E(s^c)v\rangle \leqq \langle E(s^c)v, E(s^c)v\rangle =$
$\langle E(s^c)v, v\rangle = 0$, entonces $E(w)v \in H_s$

Sabemos por el teorema espectral que $Dom(A) = \{f : \int |t|^2 d\langle E(\cdot)f, f\rangle < \infty\}$. Sea $f \in Dom(A)$ hay que demostrar que $P_{ac}f = P_{H_{ac}}f \in Dom(A)$ en donde P_{ac} es la proyección sobre H_{ac}.
Sea $s \in \mathcal{B}(sp(A))$

$$|\langle E(s)f, f\rangle| = |E(s)f|^2$$
$$= |E(s)(P_{ac}f + P_s f)|^2$$
Pues $H = H_{ac} + H_s$
$$= |E(s)P_{ac}f|^2 + |E(s)P_s f|^2$$
pues $H_{ac} \perp H_s$ y $E(s)P_{ac} \in H_{ac}, E(s)P_s \in H_s$

Se obtiene que

$$\langle E(s)P_{ac}f, P_{ac}f\rangle \leqq \langle E(s)f, f\rangle$$
$$\langle E(s)P_sf, P_sf\rangle \leqq \langle E(s)f, f\rangle$$

De manera que como $f \in Dom(A)$, $\int |t|^2 d\langle E(\cdot)f, f\rangle < \infty$, entonces :

$$\int |t|^2 d\langle E(s)P_{ac}f, P_{ac}f\rangle \leqq \int |t|^2 d\langle E(s)f, f\rangle < \infty$$
$$\int |t|^2 d\langle E(s)P_sf, P_sf\rangle \leqq \int |t|^2 d\langle E(s)f, f\rangle < \infty$$

Se concluye que $P_{ac}f \in Dom(A), P_sf \in Dom(A)$.
Como parte del teorema espectral se tiene que $E(s)A \subset AE(s)$ en el sentido de que $E(s)Af = AE(s)f \ \forall f \ \in Dom(A)$ [2].
Sea $f \in Dom(A)$, entonces $g = P_{ac}f \in Dom(A) \cap H_{ac}$, sea $s \in \mathcal{B}(sp(A))$ tal que $\lambda(s) = 0$, entonces:

$$\begin{aligned}\langle E(s)Ag, Ag\rangle &= \langle AE(s)g, Ag\rangle \\ &= 0 \text{ (pues E(s)g = 0)}\end{aligned}$$

De manera que $AP_{ac}f \in H_{ac}$.
También $h = P_s(f) \in Dom(A) \cap H_s$, sea $w \in \mathcal{B}(sp(A))$ tal que $\lambda(w) = 0, \mu_h(w^c) = 0$.

$$\begin{aligned}\langle E(w^c)Ah, Ah\rangle &= \langle AE(w^c)h, Ah\rangle \\ &= 0 \text{ (pues } E(w^c)h = 0)\end{aligned}$$

De manera que $AP_sf \in H_s$.
Se concluye que H_{ac} y H_s reducen a H □

Definición 4.0.14. *Sea μ una medida con dominio $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Denotamos por la función F_μ a la función con dominio los reales y tal que $F_\mu(t) = \mu((-\infty, t])$ haciendo abuso de notación denotaremos también $\mu(t) = F_\mu(t)$.*
Si E es la resolución espectral de un operador autoadjunto A, nuevamente haciendo abuso de notación denotaremos por $E(t) = E((-\infty, t])$,

[2]Libro [8] página 371

Teorema 4.0.35. [3] *Sea μ una medida con signo en $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, entonces F_μ es absolutamente continua Si y sólo si μ es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue*

Teorema 4.0.36 (Radon-Nikodym). [4] *Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio de medida, sea μ una medida positiva $\sigma - finita$ en $(X, \mathcal{A})$, sea ν una medida con signo finita o compleja en $(X, \mathcal{A})$. Si ν es absolutamente continua con respecto a μ, entonces existe una función $g \in L_1(X, \mathcal{A}, \mathbb{R})$ (o $L_1(X, \mathcal{A}, \mathbb{C})$) que satisface $\nu(A) = \int_A g d\mu \; \forall A \in \mathcal{A}$. La función g es única μ- casi donde quiera.*

Observación 4.0.4. *Sea μ absolutamente continua, entonces la función F_μ es absolutamente continua.*
Como μ es absolutamente continua, por el teorema 4.0.36 existe una función g_μ tal que $g_\mu = \frac{d\mu}{d\lambda}$, es decir, $\mu(w) = \int_w q_\mu dt, \forall w \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Como F_μ es absolutamente continua, existe la derivada de F_μ casi donde quiera , además por el Corolario 4.0.4.

$$F_\mu(x) = \int_a^x F'_\mu(t)dt + F_\mu(a)$$

Supongamos que μ es finita, entonces F_μ es acotada entonces $F_\mu(t) = \mu((-\infty, a] \cup (a, t]) = F_\mu(a) + \mu((a, t]) \therefore \mu((a, t]) = \int_a^t F'_\mu(x)dx = \int_a^t g_\mu(x)dx$.
Por lo tanto $\int_a^t (F'_\mu - g\mu) = 0 \forall t, \forall a \in \mathbb{R}$ se sigue del lema 4.0.9 que $F'_\mu = g c.t.p.$.
Entonces la derivada de Radon-Nikodym de μ es la derivada en sentido usual de F_μ

Observación 4.0.5. *El espectro de un operador autoadjunto A es un boreliano de los reales, entonces toda medida sobre $\mathcal{B}(sp(A))$ se puede extender a una en $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ de la manera natural, por lo tanto podemos pensar que la resolución de la identidad tiene como dominio $\mathcal{B}(sp(A))$ o bien $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.*

Teorema 4.0.37. *Si $f \in H_{ac}$ y $g \in H$, entonces la función $\langle E(t)f, g\rangle, t \in \mathbb{R}$ es absolutamente continua en t y.*

$$|\frac{\partial \langle E(t)f, g\rangle}{\partial t}|^2 \leqq \frac{\partial}{\partial t}\langle E(t)f, f\rangle \frac{\partial}{\partial t}\langle E(t)g_{ac}, g_{ac}\rangle$$

En donde $g_{ac} = P_{ac}g$

[3] Libro [9] página 147
[4] Libro [10], página 135

Demostración. Como vimos antes, $f \in H_{ac} \Rightarrow E(t)f \in H_{ac} \Rightarrow \langle E(t)f, g\rangle = \langle E(t)f, g_{ac}\rangle$
Es directo verificar lo siguiente:

$$\langle E(t)f, g_{ac}\rangle = 1/4\Big(\langle E(t)f + g_{ac}, f + g_{ac}\rangle + \langle E(t)f - g_{ac}, f - g_{ac}\rangle$$

$$+ i(\langle E(t)f + ig_{ac}, f + ig_{ac}\rangle - \langle E(t)f - ig_{ac}, f - ig_{ac}\rangle)\Big) \tag{4.1}$$

Como H_{ac} es espacio vectorial, cada una de las funciones que aparecen como sumando en 4.1 son absolutamente continuas, de modo que $\langle E(t)f, g_{ac}\rangle$ es absolutamente continua. De manera análoga, la medida $\langle E(w)f, g_{ac}\rangle$ es absolutamente continua con respecto a λ de manera que $\overline{\langle E(w)f, g_{ac}\rangle}$ es absolutamente continua.Sea

$$C = \{t \in \mathbb{R} : \langle E(t)f, g\rangle \; o \; \overline{\langle E(t)f, g\rangle} \; o \; \langle E(t)g_{ac}, g_{ac}\rangle \; o \; \langle E(t)f, f\rangle \text{ no es derivable}\}$$

Entonces $\lambda C = 0$ por el corolario 4.0.3.
Sea $t \notin C$ sea $\triangle = (t, t + \tau)$. Por la desigualdad de Schwarz se tiene:

$$\langle E(\triangle)f, g\rangle\overline{\langle E(\triangle)f, g\rangle} \leqq \langle E(\triangle)g_{ac}, g_{ac}\rangle\langle E(\triangle)f, f\rangle$$
$$\Rightarrow$$
$$\langle E(\triangle)f, g\rangle/\tau\overline{\langle E(\triangle)f, g\rangle}/\tau \leqq \langle E(\triangle)g_{ac}, g_{ac}\rangle/\tau\langle E(\triangle)f, f\rangle/\tau$$

Sacando límite que sabemos que existe pues $\lambda \notin C$ obtenemos que :

$$\left|\frac{\partial\langle E(t)f, g\rangle}{\partial t}\right|^2 \leqq \frac{\partial}{\partial t}\langle E(t)f, f\rangle\frac{\partial}{\partial t}\langle E(t)g_{ac}, g_{ac}\rangle$$

□

Lema 4.0.13. *Sea U_t un grupo unitario de un parámetro, fuertemente continuo, con generador infinitesimal A, sea $f \in H_{ac}$ entonces U_t converge débilmente a 0 cuando $t \to_{+}^{-} \infty$*

Demostración. Sabemos [5] que

$$U_t = e^{-iAt} = \int e^{-i\lambda t} dE(\lambda) \tag{4.2}$$

[5]Libro [8] página 382

Sea $g \in H$, por el teorema 4.0.37 $\langle E(\lambda)f, g\rangle$ es una función absolutamente continua por lo tanto su derivada es definida casi donde quiera y cumple lo siguiente.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\frac{d}{d\lambda}\langle E(\lambda)f, g\rangle| \leqq \int (\frac{d}{d\lambda}\langle E(\lambda)g_{ac}, g_{ac}\rangle)^{1/2}(\frac{d}{d\lambda}\langle E(\lambda)f, f\rangle)^{1/2}$$
$$\leqq (\int \frac{d}{d\lambda}\langle E(\lambda)g_{ac}, g_{ac}\rangle)^{1/2}(\int \frac{d}{d\lambda}\langle E(\lambda)f, f\rangle)^{1/2}(\text{por Holder})$$
se sigue del teorema 4.0.33:
$$= (\lim_{a\to-\infty} \lim_{x\to\infty}[\langle E(\lambda)g_{ac}, g_{ac}\rangle|_{\lambda=a}^{\lambda=x}])^{1/2}(\lim_{a\to-\infty} \lim_{x\to\infty}[\langle E(\lambda)f, f\rangle|_{\lambda=a}^{\lambda=x}])^{1/2}$$
$$= |g_{ac}||f|$$

Entonces $\frac{d}{d\lambda}\langle E(\lambda)f, g\rangle$ es integrable.

$$\langle U_t f, g\rangle = \int e^{-i\lambda t} d\langle E(\lambda)f, g\rangle = \int e^{-i\lambda t}\frac{d}{d\lambda}\langle E(\lambda)f, g\rangle d\lambda$$

La última igualdad se sigue de la página 138, problema 4 de [9].
Se sigue del lema de Riemann-Lebesgue y de las anteriores igualdades que

$$\lim_{t\to\pm\infty} \langle U_t f, g\rangle = 0$$

□

Teorema 4.0.38. *Sea* $H = L_2(\mathbb{R}^2)$ *y sea* $A(t_1, t_2) = t_1^2 + t_2^2$.
Entonces A *es absolutamente continuo.*
Sea

$$w_\triangle = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x|^2 \in w\}$$

Entonces la función $E : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to P(H)$ *(en donde* $P(H)$ *es el conjunto de proyecciones en* H*) dada por* $E(w)f = \chi_{w_\triangle} f$ *es la resolución de la identidad de* A

Demostración. Primeramente sabemos que A es autoadjunto [6], de manera que tiene sentido hablar de su resolución espectral.
Para cada $w \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ sea

$$w_\triangle = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x|^2 \in w\}$$

[6] Libro [5] página 57

Se define
$$E(w)f = \chi_{w_\triangle} f$$
Es claro que $E(w)$ es autoadjunto y que $E(w)^2 = E(w)$ entonces $E(w)$ es proyección ortogonal.
Como $(w_1 \cap w_2)_\triangle = (w_1)_\triangle \cap (w_2)_\triangle$ se sigue que $E(w_1)E(w_2) = E(w_1 \cap w_2)$.
Supongamos que $w_2 \cap w_2 = \emptyset$ entonces $\chi_{(w_1)_\triangle \cup (w_2)_\triangle} = \chi_{(w_1)_\triangle} + \chi_{(w_2)_\triangle}$, de manera que$E(w_1 \cup w_2) = E(w_1) + E(w_2)$.
Si $\{w_n\} \subset (\mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ es disjunta , entonces $\{(w_n)_\triangle\}$ es disjunta, entonces se sigue del teorema de convergencia dominada de Lebesgue que $\langle E(\cup_{n\in\mathbb{N}} w_n)f, g\rangle = \sum_{i\in\mathbb{N}} \langle E(w_n)f, g\rangle$.
Se concluye entonces que E es una resolución de la identidad.
Es claro que la medida $\mu_{f,g}$ tal que $\mu_{f,g}(w) = \langle E(w)f, g\rangle$ es nula en $\mathbb{R}^-$ por lo que en lo siguiente consideraremos los conjuntos $w \subset \mathbb{R}^+$ Sean $f, g \in L_2(\mathbb{R}^2)$.
Usamos el siguiente sistema de coordenadas:
$$x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta)$$
Sea
$$h(r,\theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} (E(w)f) g\,dx dy = \int_{\mathbb{R}^2} r(E(w)f \circ h) g \circ h\,dr d\theta$$
$$= \int_{\mathbb{R}^2} r\chi_{w_\triangle} \circ h f \circ h g \circ h\,d\theta dr$$
$$= \int_{\{r:r^2\in w\}\times[0,2\pi]} r f \circ h g \circ h\,d\theta dr$$
Entonces:
$$\langle E(w)f, g\rangle = \int_{\{r:r^2\in w\}\times[0,2\pi]} r f \circ h g \circ h\,d\theta dr$$
Hacemos un cambio de variable. $r = u^{1/2}$, sea $G(u) = u^{1/2}$.

$$\int_{\{r:r^2\in w\}\times[0,2\pi]} r f \circ h g \circ h\,d\theta dr = \int_{w\times[0,2\pi]} u^{1/2} f \circ h \circ G g \circ h \circ G(\frac{1}{2u^{1/2}}) d\theta du$$

De esto último se obtiene que la medida $\mu_{f,g}(w) = \langle E(w)f, g\rangle$ es absolutamente continua con respecto a λ y que

$$\frac{d\mu_{f,g}}{d\lambda} = \chi_{[0,\infty)} \int_{[0,2\pi]} u^{1/2} f \circ h \circ Gg \circ h \circ G(\frac{1}{2u^{1/2}}) d\theta$$

Como consecuencia del teorema de Radon-Nikodym tenemos:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} u d\mu_{f,g} &= \int_{[0,\infty)} u \frac{d\mu_{f,g}}{d\lambda} d\lambda \\
&= \int_{[0,\infty)} u \int_{[0,2\pi]} 1/2 f \circ h \circ Gg \circ h \circ G d\theta du \\
&= \int u \circ G^{-1} \int_{[0,2\pi]} f \circ h \circ G \circ G^{-1} g \circ h \circ G \circ G^{-1} r dr \\
&= \int_{[0,\infty) \times 2\pi} r^2 r f \circ h g \circ h \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} |x|^2 f g \\
&= \langle Af, g \rangle
\end{aligned}$$

Supongamos ahora que $f \in Dom(A), \Rightarrow |x|^2 f \in L_2(\mathbb{R}^2)$. Invirtiendo las anteriores igualdades obtenemos que.

$$\langle Af, g \rangle = \int |x|^2 f g = \int_{\mathbb{R}} t d\langle E(\cdot) f, g \rangle$$

Del teorema espectral se concluye que $E : \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \to P(H)$ es la resolución de la identidad para en operador A (en donde P(H) son las proyecciones en H).

De esto último es claro que A es absolutamente continuo.

□

Teorema 4.0.39. *El operador $-\triangle$ es absolutamente continuo.*

Demostración. Denotamos por Ψ la transformada de Fourier en $L_2(\mathbb{R}^2)$ y sea A el mismo operador del teorema pasado. Por el teorema 2.0.24 $\Psi^{-1} A \Psi = -\triangle$.

Como Ψ es unitario, se sigue del teorema 3.0.26 que la resolución de la identidad para $-\triangle$ es $\Psi^{-1} E(w) \Psi, w \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, en donde $E(w)$ es como en el teorema pasado. Si $s \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ es tal que $\lambda(s) = 0$, entonces $E(s) f = 0 \forall f \in L_2(\mathbb{R}) \Rightarrow \Psi^{-1} E(s) \Psi = 0 \forall f \in L_2(\mathbb{R})$ por lo tanto $-\triangle$ es absolutamente continuo . □

Capítulo 5

Algunos resultados sobre espacios de Sobolev

Definición 5.0.15. *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *abierto sea* $u : \Omega \to \mathbb{C}$ *sea* $p \in [1, \infty]$. *Supongamos que* $D^a u \in L_p(\Omega) \forall a \in \mathbb{N}^n, 0 \leqq |a| \leqq m$ *(la derivada en el sentido distribucional) Entonces:*

$$|u|_{m,p,\Omega} = \{ \sum_{0 \leqq |a| \leqq m} |D^a u|_p^p \}^{1/p}, si\ 1 \leqq p < \infty$$

$$|u|_{\infty,\Omega} = \max_{0 \leqq |a| \leqq m} (|D^a u|_\infty)$$

Si se entiende por el contexto, omitiremos el subíndice Ω.

Definición 5.0.16.

$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L_p(\Omega) : D^a u \in L_p(\Omega),$ *En donde* $D^a u$ *es la derivada parcial distribucional* $\}$.

Note que $W^{m,p}$ es un espacio de Banach con la norma de la definición anterior [1]

Definición 5.0.17. *Si* u *es una función definida en un abierto de* R^n *entonces:*

$$\tilde{u} = \begin{cases} u(x) & si\ x \in \Omega \\ 0 & x \in \mathbb{R}^n - \Omega \end{cases}$$

[1] Libro [10] página 45

Teorema 5.0.40. *Sea* $1 \leqq p \leqq \infty$. *Un subconjunto acotado* $K \subset L_p(\Omega)$ *es precompacto en* $L_p(\Omega) \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0 \exists\delta > 0$ *y* $G \subset \Omega$, *G acotado, tal que* $\forall u \in K \forall h \in \mathbb{R}^n$ *con* $|h| < \delta$

$$\int_\Omega |\tilde{u}(x+h) - \tilde{u}(x)|^p dx < \epsilon^p \tag{5.1}$$

y

$$\int_{\Omega - \overline{G}} |u(x)|^p dx < \epsilon^p \tag{5.2}$$

Demostración. Es suficiente probar el teorema para el caso $\Omega = \mathbb{R}^n$, pues el caso general sale de éste poniendo $\tilde{K} = \{\tilde{u} : u \in K\}$.
Para demostrar el teorema haremos uso del siguiente teorema

Teorema 5.0.41. *Un conjunto A en un espacio de Banach X es precompacto si y sólo si para toda* $\epsilon > 0$ *existe un subconjunto finito de puntos* N_ϵ *de X tal que* $A \subset \cup_{y \in N_\epsilon} B_\epsilon(y)$.
A N_ϵ *se le llama* $\epsilon - red$ *finita de A*

El teorema anterior lo asumimos sin demostración.
Supongamos que X es precompacto

Sea $\epsilon > 0$ sea N_ϵ una $\epsilon/6 - red$ finita para K , como C_0^∞ es denso en $L_p(\mathbb{R}^n)$[2]. Existe un conjunto finito T de funciones continuas de soporte compacto, tal que tales que para toda $u \in K$ existe $\phi \in T$ tal que $|u - \phi|_p < \epsilon/3$. Como T es finito, existe $r > 0$ tal que $sop(\phi) \subset \bar{B}_r(0) \forall \phi \in T$. Sea $G = B_r(0)$, entonces se obtiene 5.2.También $\phi(x+h) - \phi(x)$ es uniformemente continua para toda x y es cero fuera de la bola $B_{r+1}(0)$, si $|h| < 1$. Por lo tanto,

$$\lim_{|h| \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} |\phi(x+h) - \phi(x)|^p dx = 0. \tag{5.3}$$

Como T es finito, la anterior ecuación se cumple uniformemente para toda $\phi \in T$. Para $u \in K$, sea t_h la traslación de u por h: $t_h u(x) = u(x+h)$.
Si $\phi \in T$ satisface $|u - \phi|_p < \epsilon/3$, entonces también se cumple $|t_h u - t_h \phi|_p <$

[2]Libro [10] páginas 28-30

$\epsilon/3$, Por lo tanto por 5.3 tenemos que para $|h|$ suficientemente chica (independiente de $u \in K$),

$$|t_h u - u|_p \leqq |t_h u - t_h\phi|_p + |t_h\phi - \phi|_p + |\phi - u|_p$$
$$< (2\epsilon/3) + |t_h\phi - \phi| < \epsilon$$

De esto se sigue 5.1

Demostraremos ahora la otra implicación.

Sea $\epsilon > 0$ y elegimos $G \subset \mathbb{R}^n$ tal que para toda $u \in K$

$$\int_{\mathbb{R}^n - \bar{G}} |u(x)|^p dx < \epsilon/3 \tag{5.4}$$

Sea

Definición 5.0.18.

$$j(x) := \begin{cases} ke^{-1/(1-|x|^2)}, & si\ |x| < 1 \\ 0, & si\ |x| \geqq 1 \end{cases}$$

En donde k es para que $\int j = 1$. Sea

Definición 5.0.19.

$$j_\epsilon(x) = \epsilon^{-n} j(x/\epsilon)$$

Es claro que $\int j_\epsilon = 1$ y que $sop(j_\epsilon) = B_\epsilon(0)$

$$|j_h * \phi(x) - \phi|^p = |\int j_h(y)(\phi(x-y) - \phi(x))dy|^p$$
$$\leqq \int_{B_h(0)} j_h(y)|t_{-y}\phi(x) - \phi(x)|^p dy$$

Por lo tanto:

$$|j_h * \phi(x) - \phi|_p \leqq \sup_{y \in B_h(0)} |t_y\phi - \phi| \tag{5.5}$$

Se demostrará en el siguiente teorema que si $u \in L_p(\mathbb{R}^n) \Rightarrow |j_h * \phi|_p \leqq |\phi|_p$ y que $\lim_{h\to 0} |j_h * \phi - \phi|_p = 0$.
De esto se sigue que si $\{\phi_n\}_n, n \in \mathbb{N} \subset C_0(\mathbb{R}^n)$ es tal que converge en $L_p(\mathbb{R}^n)$ a u $\{j_h \phi_n\}$ es una sucesión de Cauchy que converge a $j_h u$ en $L_p(\mathbb{R}^n)$. Como también $t_y\phi_n \to t_y u$, 5.5 se extiende para toda $u \in L_p(\mathbb{R}^n)$:

$$|j_h * u(x) - u|_p \leqq \sup_{y\in B_h(0)} |t_y u - u| \tag{5.6}$$

De 5.1 se obtiene que $\lim_{|h|\to 0} |t_h u - u|_p = 0$ uniformemente para $u \in K$. Por lo tanto $\lim_{h\to 0} |j_h * u - u|_p = 0$ uniformemente para $u \in K$. Fijamos ahora $h > 0$ tal que

$$\int_{\bar{G}} |j_h * u(x) - u(x)|^p dx < \epsilon/(3 \cdot 2^p) \tag{5.7}$$

Para todo $u \in K$ Mostraremos que $\{j_h * u : u \in K\}$ satisface las hipótesis del teorema de Arzela-Ascoli en $\bar{G}$, y por lo tanto, es precompacto en $C(\bar{G})$.
En el siguiente teorema demostraremos que:

$$|j_h * u(x)| \leqq (\sup_{x\in\mathbb{R}^n} j_h(x))^{1/p} |u|_p$$

Que es acotado uniformemente para $x \in \mathbb{R}^n$ y $u \in K$ porque K es acotado en $L_p(\Omega)$ y h es fijo. De igual forma:

$$|j_h * u(x+y) - j_h * u(x)| \leqq (\sup_{x\in\mathbb{R}^n} j_h(x))^{1/p} |t_y u - u|_p$$

De manera que $\lim_{|y|\to 0} j_h * u(x+y) = j_h * u(x)$ uniformemente para $x \in \mathbb{R}^n$ y $u \in K$.
Por lo tanto, $\{j_h * u : u \in K\}$ es precompacto en $C(\bar{G})$, por el teorema 5.0.41 existe un conjunto finito de funciones $\{\psi_1, \psi_2 \cdots \psi_m\} \subset C(\bar{G})$ tal que si $u \in K$ entonces existe $1 \leqq j \leqq m$ tal que

$$|\psi_i(x) - j_h * u(x)|^p < \frac{\epsilon}{2^p \cdot 3vol\bar{G}} \; \forall x \in \bar{G} \tag{5.8}$$

Denotando por $\tilde{\psi_j}$ a la extensión de ψ_j a $\mathbb{R}^n$ haciéndola valer 0 fuera de $\bar{G}$, obtenemos de 5.4, 5.6, 5.7 y de que $(|a| + |b|)^p \leqq 2^p(|a|^p + |b|^p)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x) - \tilde{\psi}_j|^p dx = \int_{\mathbb{R}^n - \bar{G}} |u(x)|^p + \int_{\bar{G}} |u(x) - \psi_j(x)|^p dx$$
$$< \epsilon/3 + 2^p \int_{\bar{G}} (|u(x) - j_h * u(x)|^p + |j_h * u(x) - \psi_j(x)|^p) dx$$
$$< \epsilon/3 + 2^p(\epsilon/(3 \cdot 2^p) + \epsilon/(3 \cdot 2^p \cdot vol\bar{G}) vol\bar{G}) = \epsilon$$

Por lo tanto, K tiene una $\epsilon - red$ en $L_p(\mathbb{R}^n)$ llamada $\{\tilde{\psi}_j : 1 \leqq j \leqq m\}$, y por lo tanto es precompacto. □

Teorema 5.0.42. *Sea $u \in L_p(\mathbb{R}^n), 1 < p < \infty$, entonces:*

$$|j_\epsilon * u|_p \leqq |u|_p$$
$$\lim_{\epsilon \to 0^+} |j_\epsilon * u - u|_p = 0$$
$$|j_\epsilon * u(x)| \leqq (\sup_{x \in \mathbb{R}^n} j_\epsilon(x))^{1/p} |u|_p$$

Demostración. Sea $q = p/(p-1)$, por la desigualdad de Hölder:

$$|j_\epsilon * u(x)| = |\int j_\epsilon^{1/q}(x-y)(j_\epsilon^{1/p}(x-y)u(y))dy|$$
$$\leqq (\int j_\epsilon(x-y))^{1/q} (\int j_\epsilon(x-y)|u(y)|^p dy)^{1/p}$$
$$= (\int j_\epsilon(x-y)|u(y)|^p dy)^{1/p} \tag{5.9}$$
$$\leqq (\sup_{x \in \mathbb{R}^n} j_\epsilon(x))^{1/p} |u|_p$$

De lo anterior y Fubini obtenemos:

$$\int |j_\epsilon * u(x)|^p dx \leqq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} j_\epsilon(x-y)|u(y)|^p dy dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} |u(y)|^p dy \int_{\mathbb{R}^n} j_\epsilon(x-y) dx$$
$$= |u|_p^p \tag{5.10}$$

Como $C_0(R_n)$ es denso en $L_p(\mathbb{R}n)$, dada $h>0$ existe $\phi \in C_0(\mathbb{R}^n)$ tal que $|u-\phi|_p < h/3$, por 5.10 se cumple que $|j_\epsilon * u - j_\epsilon * \phi|_p \leqq h/3$ Por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
|j_\epsilon * \phi(x) - \phi(x)| &= |\int j_\epsilon(x-y)(\phi(y)-\phi(x))|dy \\
&\leqq \sup_{|x-y|<\epsilon} |\phi(x)-\phi(y)| \qquad (5.11)
\end{aligned}
$$

El lado derecho de 5.11 tiende a 0 cuando $\epsilon \to 0^+$, ya que $\phi \in C_0(\mathbb{R}^n)$ y por lo tanto es uniformemente continua.
Además si $sop(\phi) \subset B_n(0)$, entonces $sop(j_{ep} * \phi) \subset B_{N+1}(0)$ si $\epsilon < 1$, de esto y 5.11 obtenemos que $\lim_{\epsilon\to 0^+} |j_\epsilon * \phi - \phi|_p = 0$.
Sea ϵ_0 tal que $|j_\epsilon * \phi - \phi|_p < h/3$ si $\epsilon \leqq \epsilon_0$ entonces si $\epsilon \leqq \epsilon_0$:

$$
\begin{aligned}
|j_\epsilon * u - u|_p &\leqq |j_\epsilon * u - j_\epsilon * \phi|_p + |j_\epsilon * \phi - \phi|_p + |\phi - u| \\
&< |\phi - u|_p + h/3 + h/3 \\
&< h/3 + h/3 + h/3 = h
\end{aligned}
$$

Se concluye que $\lim_{\epsilon\to 0^+} |j_\epsilon * u - u|_p = 0$

□

Teorema 5.0.43. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, sea $\Omega_0 \subset \Omega$, Ω_0 también abierto. Sean $1 < q_1 < q_0$, supongamos que:*

$$W^{m,p}(\Omega) \to L_{q_0}(\Omega_0) \qquad (5.12)$$

$$W^{m,p}(\Omega) \to L_{q_1}(\Omega_0) \qquad (5.13)$$

Son continuos, en donde los mapeos en ambos casos son la restricción a Ω_0, suponga además que 5.13 es compacto. Entonces, si $q_1 \leqq q < q_0$, la inmersión.

$$W^{m,p}(\Omega) \to L_q(\Omega_0) \qquad (5.14)$$

Es compacta.

Demostración. $q = q_1 + (q-q_1)/(q_0-q_1)(q_0-q_1) = q_1((q_0-q)/(q_0-q_1)) + q_0((q-q_1)/q_0-q_1)$, por lo tanto, $u^{q_1(\frac{q_0-q}{q_0-q_1})} \in L_{\frac{q_0-q_1}{q_0-q}}(\Omega_0)$ y $u^{q_0\frac{q-q_1}{q_0-q_1}} \in$

$L_{\frac{q_0-q_1}{q-q_1}}(\Omega_0)$ de la desigualdad de Hölder se concluye que $u^{q_0\frac{q-q_1}{q_0-q_1}}u^{q_1\frac{q_0-q}{q_0-q_1}} = u^q \in L_1(\Omega_0)$ $\therefore$

$$
\begin{aligned}
& |u|_{0,q,\Omega_0} \leqq |u|^{\lambda}_{0,q_1,\Omega_0}|u|^{\mu}_{0,q_0,\Omega_0} \\
& \text{en donde } \lambda = \frac{q_1(q_0-q)}{q(q_0-q_1)} \text{ y } \mu = \frac{q_0(q-q_1)}{q(q_0-q_1)} \\
(5.15) \quad & \leqq k|u|^{\lambda}_{0,q,\Omega_0}|u|^{\mu}_{m,p,\Omega}, \text{ pues el mapeo 5.12 es continuo} \\
(5.16) \quad & \leqq K_1|u|_{m,p,\Omega} \text{pues el mapeo 5.13 es continuo y } \lambda+\mu=1
\end{aligned}
$$

Sea $\{u_i\}$ una sucesión acotada en $W^{m,p}(\Omega)$. Como 5.13 es compacto, existe una subsucesión $\{u_i'\}$ que converge y, por lo tanto, es de Cauchy en $L_{q_1}(\Omega)$. Por 5.15, $\{u_i'\}$ es de Cauchy en $L_q(\Omega_0)$. Por lo tanto 5.14 es compacto.

□

Para el siguiente teorema se necesita conocer lo siguiente del libro [10]:
Teorema 3.18. Si Ω tiene la propiedad de segmento, entonces las restricciones a Ω de funciones en $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ son densas en $W^{m,p}(\Omega)$ para $1 \leqq p < \infty$.
Teoremas 3.34 y 3.35, teoremas 4.1- 4.8 , teoremas 5.1-5.14 y la teoría básica de espacios de Sobolev en el capítulo 3.

Teorema 5.0.44 (Teorema de Rellich-Kandrachov simplificado). *Sea Ω un abierto en $\mathbb{R}^n$, sea $\Omega_0 \subset \Omega$ abierto acotado. Sea m un entero, $m \geqq 1$ y sea $1 \leqq p < \infty$. Supongamos que Ω tiene la propiedad de cono y que $mp \leqq n$, entonces las siguientes inmersiones son compactas:*

$$
\begin{aligned}
(5.17) \quad & W^{m,p}(\Omega) \to L_q(\Omega_0), \; Si\; 0 < n-mp < n, 1 \leqq q \leqq \frac{np}{n-mp} \\
(5.18) \quad & W^{m,p}(\Omega) \to L_q(\Omega_0), \; Si\; n = mp, 1 \leqq n, 1 \leqq q < \infty
\end{aligned}
$$

Notas:
El teorema 5.14 del libro [10] dice:
Sea Ω un abierto en $\mathbb{R}^n$ con la propiedad de cono, si $mp < n$, entonces el mapeo identidad $W^{m,p}(\Omega) \to L_q(\Omega)$ para $p \leqq q < \frac{np}{n-mp}$ existe y es continuo, si $mp = n$, entonces el mapeo identidad $W^{m,p}(\Omega) \to L_q(\Omega)$ para $p \leqq q < \infty$

existe y es continuo. Las normas de las inmersiones dependen de m, p, n , q y las propiedades del cono C que caracteriza a la propiedad de cono de Ω.

Las inmersiones 5.17 y 5.18 se refieren a lo siguiente:

$$\begin{aligned} &W^{m,p}(\Omega) \to L_q(\Omega_0) \\ &u \to u|_{\Omega_0} \end{aligned}$$

El subconjunto acotado Ω_0 de Ω puede siempre suponerse con la propiedad de cono. Si C es un cono finito que determina la propiedad de cono para Ω. Sea $\tilde{\Omega}$ la unión de todos los conos finitos congruentes con C, contenidos en Ω y teniendo intersección no vacía con Ω_0. Entonces $\Omega_0 \subset \tilde{\Omega} \subset \Omega$, $\tilde{\Omega}$ es acotado y tiene la propiedad de cono. si $W^{m,p} \to L_q(\tilde{\Omega})$, entonces también lo es $W^{m,p} \to L_q(\Omega_0)$.

Demostración. Por el teorema 5.14 del libro [10], la función

$$W^{m,p}(\Omega) \to L_q(\Omega)$$

es continua si $p \leqq q \leqq \frac{np}{n-mp}$.
Veamos ahora que la función:

$$W^{m,p}(\Omega_0) \to L_q(\Omega_0)$$

Es continua si $1 \leqq q \leqq p$.
Primero vemos que $W^{m,p}(\Omega_0) \subset L_q(\Omega_0)$. Si $u \in L_p(\Omega_0) \Rightarrow u^q \in L_{p/q}(\Omega_0)$ como Ω_0 es acotado, $1 \in L_{1-q/p}(\Omega_0) \Rightarrow u^q \cdot 1 \in L_1(\Omega_0)$ y por Hölder:

$$\begin{aligned} \int u^q 1 &\leqq |u^q|_{p/q}^{q/p} |1|_{1-q/p}^{\frac{1}{1-q/p}} \\ &= |u|_p^q vol(\Omega_0)^{\frac{1}{1-q/p}} \\ \therefore |u|_q &\leqq k|u|_p \\ &\leqq k|u|_{m,p,\Omega_0} \end{aligned}$$

Entonces la función

$$W^{m,p}(\Omega_0) \to L_q(\Omega_0)$$

Existe y es continua. Por otro lado es claro que la restricción $W^{m,p}(\Omega) \to W^{m,p}(\Omega_0)$ es continua.

Se concluye que la función $W^{m,p}(\Omega) \to L^q(\Omega_0)$ existe y es continua.
De manera análoga, del hecho de que $W^{m,p}(\Omega) \to L_q(\Omega)$ existe y es continua para $p \leqq p \leqq \infty$, se obtiene que $W^{m,p}(\Omega) \to L_q(\Omega_0)$ existe y es continua para $1 \leqq q < \infty$.
Con esto último probamos que las funciones involucradas en el teorema existen y son continuas; a continuación demostraremos la compacidad.
Sea $q_0 = \frac{np}{n-mp}$
Para probar que las inmersiones

$$W^{m,p}(\Omega) \to L_q(\Omega_0), 1 \leqq q \leqq q_0 \tag{5.19}$$

Son compactas es suficiente, por el teorema 5.0.43, probar esto para q = 1.
Dada $j \in \mathbb{N}$, sea $\Omega_j = \{x \in \Omega_0 : dist(x, \partial\Omega) > 2/j\}$.
Sea T un conjunto de funciones acotado en $W^{m,p}(\Omega)$, mostraremos que T(restringido a Ω_0) es precompacto en $L_q(\Omega_0)$, se mostrará que T satisface las condiciones del teorema 5.0.40.
Sea $\epsilon > 0$ dada, para cada $u \in W^{m,p}(\Omega)$ sea :

$$\tilde{u} := \begin{cases} u(x) & si\_x \in \Omega \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Por Hölder, como $W^{m,p} \to L_q(\Omega_0)$, tenemos:

$$\int_{\Omega_0 - \Omega_j} |u(x)| dx \leqq (\int_{\Omega_0 - \Omega_j} |u(x)^{q_0}|)^{1/q_0} (\int_{\Omega_0 - \Omega_j} 1)^{1/(1-1/q_0)}$$
$$\leqq k_1 |u|_{m,p,\Omega} (vol(\Omega_0 - \Omega_j)^{1/(1-1/q_0)})$$

En donde k_1 es independiente de u.
Como Ω_0 tiene volumen finito, j puede ser suficientemente grande para que

$$\int_{\Omega_0 - \Omega_j} |u(x)| dx < \epsilon$$

También podemos hacer j suficientemente grande para que:

$$\int_{\Omega_0 - \Omega_j} |\tilde{u}(x+h) - \tilde{u}(x)| dx < \epsilon/2 \forall h \in \mathbb{R}^n \tag{5.20}$$

Si $|h| < 1/2j$, entonces $x + th \in \Omega_{2j}$, siempre que $x \in \Omega_j$ y $0 \leqq t \leqq 1$. Si $u \in C^\infty(\Omega)$ se sigue que:

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega_j} |u(x+h) - u(x)|dx &\leqq \int_{\Omega_j} dx \int_0^1 |\frac{\partial u(x+th)}{\partial t}|dt \\
&\leqq |h| \int_0^1 dt \int_{\Omega_{2j}} |grad(u)(y)dy| \\
&\leqq |h||u|_{1,1,\Omega_0} \leqq k_2|h||u|_{m,p,\Omega} \qquad (5.21)
\end{aligned}
$$

Donde k_2 es independiente de u. Por la prueba del teorema 3.16 de [10], se concluye que $C^\infty(\Omega)$ es denso en $W^{m,p}(\Omega)$ por lo que 5.21 se cumple para toda $u \in W^{m,p}(\Omega)$.
Entonces si h es suficientemente tenemos por 5.20 y 5.21 que

$$\int_{\Omega_0} |\tilde{u}(x+h) - \tilde{u}(x)| < \epsilon.$$

Por lo tanto T es precompacto en $L_1(\Omega_0)$ (por el teorema 5.0.40) y las inmersiones en son compactas.
Supongamos ahora que $n = mp, p > 1$ y que $1 \leqq q < \infty$, sea r tal que $1 \leqq r < p, \Rightarrow mr < mp = n$, podemos elegir a r lo suficientemente cercana a p de tal forma que $\frac{nr}{n-mr} > q$. Asumimos que Ω_0 tiene la propiedad de cono, tenemos entonces:

$$W^{m,p}(\Omega) \to W^{m,r}(\Omega_0).$$

Ya que $W^{m,p} \to W^{m,p}(\Omega_0)$ y si $r \leqq p \Rightarrow W^{m,p}(\Omega_0) \to W^{m,r}(\Omega_0)$, pues como $\lambda(\Omega_0) < \infty$, si $u \in L_p(\Omega_0)$, entonces de la desigualdad de Hölder se sigue que $u \in L_q$ y existe una constante k_0 tal que $|u|_q \leqq k_0|u|_p$. Si se aplica lo mismo para $D^a u, a \in \mathbb{N}^n, |a| \leqq m$ obtenemos que existe una constante k tal que $|u|_{m,r} \leqq k|u|_{m,p}$.
Entonces tenemos lo siguiente:

$$W^{m,p}(\Omega) \to W^{m,r}(\Omega_0) \to L_q(\Omega_0) \qquad (5.22)$$

La última inmersión es compacta, por 5.17 (probada anteriormente), por lo tanto, se cumple que la función $W^{m,p} \to L_q(\Omega_0)$ es compacta.
Supongamos ahora que $p = 1, n = m \geqq 2$. Sea $r = \frac{n}{n-1} > 1$, entonces $n = (n-1)r$, tenemos que:

$$W^{n,1}(\Omega) \to W^{n-1,r}(\Omega) \to L_q(\Omega_0)$$

En donde que la primera función sea inmersión se sigue del teorema 5.14 de [10], enunciado en las notas escritas después de enunciar el presente teorema. La última inmersión es compacta por 5.22.

Finalmente, si $m = m = p = 1$
Sea $q_0 > 1$, se prueba que el mapeo $W^{1,1} \to L_1(\Omega_0)$ es compacto igual que en 5.17, como la función $W^{1,1}(\Omega) \to L_q(\Omega_0)$ es inmersión para $1 \leqq q < \infty$(por el teorema 5.14 del libro [10]), se sigue del teorema 5.0.43 que todas estas inmersiones son compactas. $\square$

Capítulo 6

Teorema espectral para 2 operadores autoadjuntos

Sean $E_1, E_2 : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to P(H)$ dos resoluciones de la identidad que conmutan entre si, en donde H es un espacio de Hilbert y P(H) son las proyecciones en este espacio.
Deseamos construir una resolución de la identidad en la σ- álgebra producto que conserve en cierto sentido las propiedades de las primeras dos.

Sean

(6.1)
$I_1 := \{(a,b] : a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, b \in \mathbb{R}\}$
(6.2)
$I_2 := \{(c,\infty) : c \in \mathbb{R}\}$
(6.3)
$I := I_1 \cup I_2$
(6.4)
$A_1 :=$ {uniones finitas disjuntas de elementos de I}
(6.5)
$A_2 :=$ {uniones finita disjuntas de la forma$B_1 \times B_1, B_1 \times B_2, B_2 \times B_1, B_2 \times B_2$
En donde $B_1 \in I_1, B_2 \in I_2$}

A_2 es un álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}^2$, llamamos rectángulos básicos a los elementos de la forma $B_i \times B_j, B_j, B_i \in I$.

Definimos una función con dominio A_2 como sigue:

$$(6.6) \qquad \nu_f(B_i \times B_j) = \langle E_1(B_i)E_2(B_j)f, f\rangle$$
$$\nu_f(\cup_{i=1}^{n} C_i) = \sum_{i=1}^{n} \nu(C_i)(\text{en donde } C_i \text{ es un rectángulo básico } \forall i)$$

Es claro que $\nu_f(\emptyset) = 0$ y que $\nu_f$es finito aditiva. Es un ejercicio de rutina verificar que ν_f está bien definida.

Teorema 6.0.45. *Sea $j = (a,b] \times (c,d]$, supongamos además que j tiene la expresión $j = \cup_{n\in\mathbb{N}} j_n$ en donde $j_n = (x_n, y_n] \times (z_n, w_n]$ con $a, b, c, d, x_n, y_n, z_n, w_n \in \mathbb{R}$ y la unión es disjunta.*
Entonces $\nu_f(j) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_f(j_n)$

Demostración. Es claro que $(a,b] \times (c,d] = \cup_{n\in\mathbb{N}}(a + 1/n, b] \times (c + 1/n, d]$. Como E_1 es una resolución espectral, entonces $E((a,b]) - E(a + 1/n, b])$ es una proyección como la función dada por $\mu_f^1(w) = \langle E_1(w)f, f\rangle$ es una medida, se obtiene que $\lim_{n\to\infty}\langle E_1((a,b] - (a + 1/n, b])f, f\rangle = 0$ por lo que $\lim_{n\to\infty} E_1((a+1/n, b])\phi = E_1((a,b])\forall\phi \in L_2(\mathbb{R}^2)$. De igual forma $\lim_{n\to\infty} E_2((c+1/n, d])\phi = E((c,d])\phi\forall\phi \in L_2(\mathbb{R}^2)$. De los dos resultados anteriores obtenemos el siguiente:

$$(6.7) \qquad E_1((a,b])E_2((c,d])\phi = \lim_{n\to\infty} E_1((a + 1/n, b])E_2((c + 1/n, d])\phi\forall\phi \in L_2(\mathbb{R}^2)$$

Entonces $\nu_f((a,b] \times (c,d]) = \lim_{n\to\infty} \nu_f((a + 1/n, b] \times (c + 1/n, d])$. Dada $\epsilon/2$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|\nu_f((a,b] \times (c,d])| - \nu_f((a+1/n, b] \times (c+1/n, d])| < \epsilon/2\forall n \geqq n_0$.
De manera análoga para cada $n \in \mathbb{N}$ existe m_n tal que $n \geqq m_n \Rightarrow |\nu_f((x_n, y_n + 1/n] \times (z_n, w_n + 1/n]) - \nu_f((x_n, y_n] \times (z_n, w_n])| < \epsilon/2^{n+1}$. Entonces obtenemos lo siguiente:

$$(6.8) \qquad \nu_f((a,b] \times (c,d] - (a + 1/n, b] \times (c + 1/n, d]) < \epsilon/2\forall n > n_0$$
$$\nu_f((x_n, y_n + 1/m_n] \times (z_n, w_n + 1/m_n] - (x_n, y_n] \times (z_n, w_n]) < \epsilon/2^{n+1}$$

Como el rectángulo $[a+1/n, b] \times [c+1/n, d]$ es compacto y está cubierto por los abiertos $(x_n, y_n + 1/m_n)(z_n, w_n + 1/m_n)$, entonces existe un conjunto finito $\{(x_{n_i}, y_{n_i} + 1/m_{n_i}] \times (z_{n_i}, w_{n_i} + 1/m_{n_i}]\}_{i=1}^{M}$ que cubre al compacto $[a + 1/n, b] \times [c+1/n, d]$.

$$\nu_f((a,b] \times (c,d]) \leqq \epsilon/2 + \nu_f((a+1/n, b](c+1/n, d])$$
$$\leqq \epsilon/2 + \sum_{i=1}^{M} \nu_f((x_{n_i}, y_{n_i} + 1/m_{n_i}](z_{n_i}, w_{n_i} + 1/m_{n_i}])$$
$$\leqq \epsilon + \sum_{i=1}^{M} \nu_f(x_{n_i}, y_{n_i}] \times (z_{n_i}, w_{n_i}]$$
$$\leqq \epsilon + \sum_{i=1}^{\infty} \nu_f((x_n, y_n] \times (z_n, w_n])$$
$$\therefore \nu_f((a,b] \times (c,d]) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \nu_f((x_n, y_n](z_n, w_n]).$$

como

$\cup_{n=1}^{m} ((x_n, y_n] \times (z_n, w_n]) \subset (a,b] \times (c,d]$

entonces

$$\nu_f(\cup_{n=1}^{m}((x_n, y_n] \times (z_n, w_n])) = \sum_{n=1}^{m} \nu_f((x_n, y_n] \times (z_n, w_n])$$
$$\leqq \nu_f((a,b] \times (c,d]).$$

se obtiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \nu_f((x_n, y_n] \times (z_n, w_n]) \leqq \nu_f((a,b](c,d])$$

De manera que obtenemos lo que queríamos:

$$\nu_f((a,d] \times (c,d]) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_f((x_n, y_n] \times (z_n, w_n]) \tag{6.9}$$

□

Teorema 6.0.46. *Sea $j = B_1 \times B_2, B_1, B_2 \in I$, supongamos además que j tiene la expresión $j = \cup_{n\in\mathbb{N}} j_n$ en donde $j_n = C_n \times D_n$ con $C_n, D_n \in I$ y la*

unión es disjunta.
Entonces $\nu_f(j) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_f(j_n)$

Demostración. El caso $B_1 = (a, b], B_2 = (c, d], a, c \in \mathbb{R}$ fue demostrado en el teorema anterior.
Supongamos que $a = -\infty, b = -\infty$. Entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\nu_f((a, b] \times (c, d]) - \nu_f((-n, b] \times (-n, d])| < \epsilon/2 \forall n \geqq n_0$$

Entonces $(a, b] \times (a, d] = \cup_{n \in N} C_n \cap (-n_0, b] \times D_n \cap (-n_0, d]$ Por el teorema anterior se concluye que:

$$\nu_f((-n_0, b] \times (-n_0, d]) = \sum_{n_0 \in \mathbb{N}} \nu_f(C_i \cap (-n_0, b] \times D_i \cap (-n_0, d])$$

Además por la finito aditividad de ν_f, se obtiene:

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \nu_f(C_i \times D_i - (-n_0, b] \times (-n_0, d]) \leqq \nu_f((a, b] \times (c, d] - (-n_0, b] \times (-n_0, d]) < \epsilon/2$$

Entonces tenemos:

$$\begin{aligned}
&|\nu_f((a, b] \times (c, d]) - \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu_f(C_n \times D_n)| \\
&\leqq |\nu_f((a, b] \times (c, d] - (-n_0, b] \times (-n_0, d])| \\
&+ |\nu_f((a, b] \times (c, d] \cap (-n_0, b] \times (n_0, d]) - \sum (\nu_f(C_n \cap (-n_0, b] \times D_n \cap (-n_0, d])| \\
&+ |\sum \nu_f(C_n \times D_n - (-n_0, b] \times (-n_0, d])| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon
\end{aligned}$$

Se obtiene entonces que

$$\nu_f((a, b] \times (c, d]) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu_f(C_n \times D_n) \tag{6.10}$$

De manera análoga, se obtiene la ecuación anterior para en caso $a = \infty$ o $c = \infty$.

Supongamos ahora que $j = (a, b] \times (c, \infty)$ Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $\nu_f((a, b] \times (c, \infty) - (a, b] \times (c, m]) < \epsilon/2$ .Entonces:

$$\begin{aligned}
&|\nu_f((a, b] \times (c, \infty)) - \sum_{n=1}^{\infty} \nu_f(C_n \times D_n)| \leqq \\
&|\nu_f((a, b] \times (c, \infty)) - \nu_f((a, b] \times (c, \infty) \cap (a, b] \times (c, m])| \\
&+ |\nu_f((a, b] \times (c, m) - \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu_f(C_n \times D_n \cap (a, b] \times (c, m])| \\
&+ |\sum_{n \in \mathbb{N}} \nu_f(C_n \times D_n - (a, b] \times (c, m])| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon
\end{aligned}$$

En donde usamos el hecho de que ν_f es finito aditiva y el teorema 6.0.45 y la parte ya demostrada.
Entonces:

$$\nu_f((a, b] \times (c, \infty)) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu_f(C_n \times D_n) \tag{6.11}$$

De manera análoga

$$\nu_f((a, \infty) \times (c, d]) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu_f(C_n \times D_n) \tag{6.12}$$

Supongamos ahora que $j = (a, \infty) \times (c, \infty)$, sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $\nu_f((a, \infty) \times (c, \infty) - (a, m](c, m]) < \epsilon/2$, entonces:

$$\begin{aligned}
&|\nu_f((a, \infty) \times (c, \infty)) - \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu_f(C_n \times D_n)| \\
&= |\nu_f((a, \infty] \times (c, \infty] - (a, m] \times (c, m])| \\
&+ |\nu_f((a, m] \times (c, m]) - \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu_f(C_n \times D_n \cap (a, m] \times (b, m])| \\
&+ |\sum_{n \in \mathbb{N}} \nu_f(C_n \times D_n - (a, m] \times (c, m])| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon
\end{aligned}$$

Se concluye que.

$$\nu_f((a,\infty)\times(c,\infty)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu_f(C_n \times D_n) \tag{6.13}$$

□

Teorema 6.0.47. *sea $\theta \in A_2$ tal que $\theta = \cup_{i=1}^{n} B_i \times C_i, D_i, C_i \in I$ (la unión ajena) supongamos además que $\theta = \cup_{i\in\mathbb{N}} D_i \times E_i, D_i, E_i \in I$ (la unión ajena). Entonces $\nu_f(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu_f(D_i \times E_i)$*

Demostración. En vista del teorema anterior, tenemos:

$$\begin{aligned}
\nu_f(\theta) &= \sum_{i=1}^{n} \nu_f(B_i \times C_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\infty} \nu_f(B_i \times C_i \cap D_j \times E_j) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} \nu_f(B_i \times C_i \cap D_j \times E_j) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \nu_f(D_i \times E_i)
\end{aligned}$$

□

Se concluye que ν_f es una medida en el álgebra A_2, por el teorema de Carathéodory [1]. Existe una única extensión de ν_f a la σ- álgebra generada por A_2 es decir $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.Llamaremos a la extensión también ν_f, es consecuencia del teorema de Carathéodory que la extensión es finita, pues la medida en el álgebra A_2 lo es.

Definición 6.0.20. *Denotamos por ν_f a la única medida en $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ tal que $\nu_f(B_1 \times B_2) = \langle E_1(B_1)E_2(B_2)f, f\rangle \forall B_i \in I$*

Teorema 6.0.48. $\nu_f(a \times b) = \langle E_1(a)E_2(b)f, f\rangle \forall a, b \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

[1] Libro [6], Página 257

Demostración. Sea

$$\mathcal{F} = \{a \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : \nu_f(a, b) = \langle E_1(a)E_2(b)f, f\rangle \forall b \in I\}$$

Entonces $A_1 \subset \mathcal{F}$. Supongamos que $A, B \in \mathcal{F}, B \subset A$, entonces es claro que $A - B \in \mathcal{F}$.

Sea ahora $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ una sucesión ajena de conjuntos, entonces.

$$\begin{aligned}
&\nu_f((\cap_{n\in\mathbb{N}}B_n) \times b) = \nu_f((\cap_{n\in\mathbb{N}}B_n \times b)) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu_f(B_n \times b) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle E(B_n)E(b)f, f\rangle \\
&= \langle E_1(\cup_{n\in\mathbb{N}}B_n)E(b)f, f\rangle
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\cup_{n\in\mathbb{N}}B_n \in \mathcal{F}$, es claro que $\mathbb{R} \in \mathcal{F}$ y que $\emptyset \in \mathcal{F}$, se concluye que la $\sigma-$álgebra generada por $A_1 \subset \mathcal{F}$, de manera que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{F}$. Por lo tanto

$$\nu_f(a \times b) = \langle E_1(a)E_2(b)f, f\rangle \forall a \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \forall b \in I$$

Sea ahora

$$\mathcal{G} = \{b \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : \nu_f(a \times b) = \langle E(a)E(b)f, f\rangle \forall a \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$$

De manera análoga a lo anterior se concluye que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{G}$ y con esto se demuestra el teorema. □

Teorema 6.0.49. *Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, tal que sólo depende de la primera coordenada, entonces: g es $\nu_f -$ integrable $\Leftrightarrow$ g(x, c) es $\langle E_1(\cdot)f, f\rangle -$ integrable, además se cumple.*

$$\int_{\mathbb{R}^2} g(x, y) d\nu_f = \int_{\mathbb{R}} g(x, c) d\langle E_1(\cdot)f, f\rangle$$

En donde c es una constante.

Demostración. Primero supongamos que g es de la forma

$$g = \chi_{A\times\mathbb{R}}, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Entonces $\int_{\mathbb{R}^2} g d\nu_f = \nu_f(A \times \mathbb{R}) = \langle E_1(A)E_2(\mathbb{R})f, f\rangle = \int_{\mathbb{R}} g(x,c)d\langle E_1(\cdot)f, f\rangle$
Si g es una función simple, entonces g es una combinación lineal de funciones características como la anterior, puesto que g no depende de la segunda variable, se sigue entonces que el teorema se cumple para g.
Sea ahora g una función integrable (con respecto a cualquiera de la dos medidas). Existe una sucesión de funciones simples $S_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que convergen de puntualmente a g(x,c) y tales que
$|s_n(x)| \leqq |s_{n+1}(x)| \leqq |g(x,c)|, \forall n.$
Si $s_n = \sum_{i=1}^{m_n} a_{i_n}\chi_{A_{i_n}}$, sea $t_n = \sum_{i=1}^{m_n} a_{i_n}\chi_{A_{i_n}\times\mathbb{R}} \Rightarrow g(x,y) = \lim_{n\to\infty} t_n(x,y)$, $|t_n(x,y)| \leqq |T_{n+1}(x,y)| \leqq |g(x,y)| \forall n \in \mathbb{N}$.
Se obtiene del teorema de convergencia monótona que que g es $\nu_f - integrable$ $\Leftrightarrow$ g(x, c) es $\langle E(\cdot)f, f\rangle - integrable$.
Se sigue del teorema de convergencia dominada de Lebesgue que.

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} g d\nu_f &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^2} t_n d\nu_f \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} s_n d\langle E_1(\cdot)f, f\rangle\end{aligned}$$

Se concluye que:

$$\int_{\mathbb{R}} g(x,c)d\langle E_1(\cdot)f, f\rangle = \int_{\mathbb{R}^2} g d\nu_f$$

□

Es claro que el teorema análogo para el caso en el que g depende sólo de la segunda variable es es cierto.

Definición 6.0.21. *Si $M \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ escribimos $\nu_f(M) = \nu_M(f)$.*
Para cada conjunto de Borel M en el plano, definimos:

$$\nu_M(x,y) = 1/4[\nu_M(x+y) - \nu_M(x-y) + i(\nu_M(x+iy) - \nu_M(x-iy))]$$

Teorema 6.0.50. *La función ν_M es antisimétrica y bilineal.*

Demostración. Primeramente se demuestra esto para el caso de rectángulos medibles. Sean $a, b \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
\nu_{a\times b}(x,y) =& 1/4[\langle E_1(a)E_2(b)(x+y), x+y\rangle - \langle E_1(a)E_2(b)(x-y), x-y\rangle \\
&+ i(\langle E_1(a)E_2(b)(x+iy), x+iy\rangle - \langle E_1(a)E_2(b)(x-iy), x-iy\rangle)] \\
&= 1/4[2\langle E_1(a)E_2(b)x, y\rangle + 2\langle E_1(a)E_2(b)y, x\rangle \\
&+ 2i(\langle E_1(a)E_2(b)x, iy\rangle + \langle E_1(a)E_2(b)iy, x\rangle)] \\
&= 1/4[4Re\langle E_1(a)E_2(b)x, y\rangle + 4iIm\langle E_1(a)E_2(b)x, y\rangle] \\
&= \langle E_1(a)E_2(b)x, y\rangle
\end{aligned}$$

En donde en la última parte se usó que E_1, E_2 son proyecciones y conmutan entre si.
Entonces :

$$\nu_{a\times b}(x,y) = \langle E_1(a)E_2(b)x, y\rangle \tag{6.14}$$

De 6.14 se sigue lo que queríamos para el caso de rectángulos medibles. Sea $\mathcal{F}$ la clase de conjuntos M para los cuales ν_M es antisimétrica y bilineal, veamos que es cerrada bajo complementos.
sea $M \in \mathcal{F}$,

$$\begin{aligned}
&\nu_{M^c}(x,y) = 1/4[\nu_{M^c}(x+y) - \nu_{M^c}(x-y) + i(\nu_{M^c}(x+iy) - \nu_{M^c}(x-iy))] \\
&= 1/4[\langle x+y, x+y\rangle - \nu_M(x+y) - (\langle x-y, x-y\rangle - \nu_M(x-y)) \\
&+ i(\langle x+iy, x+iy\rangle - (\nu_M(x+iy) - (\langle x-iy, x-iy\rangle - \nu_M(x-iy))))] \\
&= \langle x,y\rangle - \nu_M(x,y)
\end{aligned}$$

De la última ecuación es claro que ν_M^c es antisimétrica y bilineal.
De hecho de manera análoga a lo anterior se concluye que si $B \subset A$

$$\nu_{A-B}(x,y) = \nu_A(x,y) - \nu_B(x,y) \tag{6.15}$$

Por lo tanto $\mathcal{F}$ es cerrada bajo diferencias.

Sea $M = \cup_{n\in\mathbb{N}} M_i$, con $M_i \subset M_{i+1}, M_i \in \mathcal{F} \forall i.$

$$\nu_M(x,y) = \lim_{n\to\infty} 1/4[\nu_{M_i}(x+y) - \nu_{M_i}(x-y) + i(\nu_{M_i}(x+iy) - \nu_{M_i}(x-iy))]$$

Entonces ν_M es bilineal y antisimétrica por ser límite de funciones bilineales y antisimétricas $\therefore M \in \mathcal{F}$.
Se concluye que $\mathcal{F}$ es un d-sistema que contiene al $\pi-sistema$ de los rectángulos medibles, se concluye [2] que la $\sigma-$ álgebra de los rectángulos medibles está contenida en $\mathcal{F}$, de manera que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{F}$. Entonces $\nu_M(x,y)$ es bilineal y antisimétrica para todo conjunto de Borel M.

$\square$

Teorema 6.0.51. $|\nu_M(x,x)| = \nu_M(x) \leqq |x|^2 \forall M \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$

Demostración. Para la construcción de la medida $\nu_M(x) = \nu_x(M)$, se construye primero la medida exterior sobre la potencia de $\mathbb{R}^2$ generada por la medida en el álgebra A_2. Esto se puede ver en el teorema de Carathéodory citado anterior mente. La medida exterior generada por la medida en el álgebra A_2 se define como sigue:

$$\nu_x^*(M) = \text{ínf}\{\sum_{n\in\mathbb{N}} \nu_x(C_n) : D_n \in A_2, M \subset \cup_{n\in\mathbb{N}} D_n\} \tag{6.16}$$

De la definición de ν_x^*, es claro lo siguiente:

$$\begin{aligned}\nu_x^*(M) = \text{ínf}\{&\sum_{n\in\mathbb{N}} \nu_x(B_n \times C_n) : B_n, C_n \in I, M \subset \cup_{n\in\mathbb{N}} B_n \times C_n,\\ &n \neq m \Rightarrow B_n \times C_n \cap B_m \times C_m = \emptyset\}\end{aligned}$$

Es claro que $\nu_x(B \times C) = \langle E_1(B)E_2(C)x, x\rangle \leqq |x|^2$, pues E_2 y E_2 son proyecciones.
Sea $\{B_n \times C_n\}$ que cumple con la ecuación anterior, sea $M \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ como ν_x es medida positiva, $\nu_x(M) \leqq \nu_x(\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n \times C_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_x(B_n \times C_n) \leqq \nu_x(\mathbb{R}^2) = \langle x, x\rangle$ $\square$

Entonces dada $M \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, la función ν_M es bilineal, antisimétrica y positiva, entonces cumple la desigualdad de Schwarz.

$$|\nu_M(x,y)| \leqq \nu_M(x,x)^{1/2}\nu_M(y,y)^{1/2} \leqq |x||y| \tag{6.17}$$

De manera que a partir teorema de representación de Riesz se puede concluir que dada $y \in H$, existe una única y' tal que $\nu_M(x,y) = \langle x, y'\rangle \forall x \in H$.

[2] Libro [9], teorema 1.6.1

Definimos el operador $E_1 \times E_2 = E$ tal que $E(M)y = y' \forall y \in H$.
De la unicidad se concluye que E es lineal. Además $|\langle y', y' \rangle| = |\nu_M(y', y)| \leqq |y'||y|$ por lo que E(M) es un operador acotado de norma menor o igual que 1.
También tenemos $\langle x, E(M)y \rangle = \nu_M(x, y) = \overline{\nu_M(y, x)} = \overline{\langle y, E(M)x \rangle} = \langle E(M)x, y \rangle \forall x \in H \forall y \in H$. De manera que $E(M)$ es autoadjunto $\forall M \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.
Es claro que $E(\emptyset) = 0$ y que $E(\mathbb{R}^2) = Id$(la identidad en H).
Si $w \cap w' = \emptyset$, entonces $\nu_{w \cup w'}(x, y) = \nu_w(x, y) + \nu_{w'}(x, y) = \langle x, E(w)y \rangle + \langle x, E(w')y \rangle = \langle x, (E(w) + E(w'))y \rangle$, de la unicidad de $E(w \cup w')$, se concluye que $E(w \cup w') = E(w) + E(w')$.
Es claro que para x, y fijos , la función $\langle E(\cdot)x, y \rangle = \nu_w(x, y)$ es una medida compleja, pues es combinación lineal de medidas positivas finitas.
Veamos ahora que $E(w \cap w') = E(w)E(w') \forall w, w' \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$

Teorema 6.0.52. $E(w \cap w') = E(w)E(w') \forall w, w' \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$

Demostración. Supongamos primero que $w = a \times b, w' = c \times d, e, b, c, d \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

$\langle E(w)z, z_1 \rangle = \nu_{a \times b}(z, z_1)$

$= \langle E_1(a)E_2(a)z, z_1 \rangle$(por el teorema 6.0.48 y la definición 6.0.21)

De manera que:

$E(w) = E_1(a)E_2(b)$

De manera análoga

$E(w') = E_1(c)E_2(d)$

$$\begin{aligned}
\langle E(w \cap w')x, y \rangle &= \langle E(a \cap c \times b \cap d)x, y \rangle \\
&= \nu_{a \cap c \times b \cap d}(x, y) \\
&= \langle E_1(a \cap c)E_2(b \cap d)x, y \rangle \\
&\text{(por el teorema 6.0.48 y la definición 6.0.21)} \\
&= \langle E_1(a)E_2(c)E_2(b)E_2(d)x, y \rangle \\
&= \langle E_1(a)E_2(b)E_1(c)E_2(d)x, y \rangle \\
&= \langle E(w)E(w')x, y \rangle
\end{aligned}$$

De manera que se concluye que $E(w)E(w') = E(w \cap w')$.
Sea

$$\mathcal{F} = \{w \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) : E(w \cap N) = E(w)E(N), \forall \text{ N rectángulo medible}\}$$

Acabamos de demostrar que el conjunto de rectángulos medibles está contenido en $\mathcal{F}$. Veamos de $\mathcal{F}$ es un d-sistema.
Sean $A, B \in \mathcal{F}, B \subset A$- debemos demostrar que $A - B \in \mathcal{F}$.

$$\begin{aligned}
\langle E((A-B)\cap N)x, y\rangle &= \nu_{(A-B)\cap N}(x,y) \\
&= \nu_{(A\cap N)-(B\cap N)}(x,y) \\
&= \nu_{A\cap N}(x,y) - \nu_{B\cap N}(x,y) \\
&= \langle E(A)E(N)x,y\rangle - \langle E(B)E(N)x,y\rangle \\
&= \langle (E(A)-E(B))E(N)x,y\rangle \\
&= \langle E(A-B)E(N)x,y\rangle \qquad \therefore A - B \in \mathcal{F}
\end{aligned}$$

Supongamos ahora que $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}, B_i \subset B_{i+1} \forall i 0$, sea $B = \cup_{n\in\mathbb{N}} B_n$, debemos demostrar que $B \in \mathcal{F}$.

$$\begin{aligned}
\langle E(B\cap N)x,y\rangle = \langle E(\cup_{n\in\mathbb{N}}(B_i\cap N))x,y\rangle & \\
&= \nu_{\cup_{i\in\mathbb{N}} B_n\cap N}(x,y) \\
&= \lim_{n\to\infty} \nu_{B_n\cap N}(x,y) \\
&= \lim_{n\to\infty} \langle E(B_n\cap N)x,y\rangle \\
&= \langle E(\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n)E(N)x,y\rangle \\
&\therefore B \in \mathcal{F}.
\end{aligned}$$

Se concluye que $\mathcal{F}$ es un d- sistema que contiene al $\pi - sistema$ de los rectángulos medibles, por el lema de las clases monótonas [3] que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{F}$. Sea ahora

$$\mathcal{G} = \{w \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) : \langle E(A)E(w)x,y\rangle = \langle E(A\cap w)x,y\rangle \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \forall x,y \in H\}.$$

Por lo que acabamos de ver, los rectángulos medibles están en $\mathcal{G}$.
Análogamente al procedimiento anterior se concluye que $\mathcal{G}$ es un d-sistema que contiene al $\pi - sistema$ de los rectángulos medibles. Se concluye por el lema de las clases monótonas que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{G}$. Entonces $E(w)E(w') = E(w\cap w') \forall w, w' \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ □

[3]Libro [9], teorema 1.6.1

De teorema anterior y los comentarios anteriores al teorema, se concluye que la función $E : \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \to P(H)$ es una resolución de la identidad. [4].

De lo anterior se concluye el siguiente teorema.

Teorema 6.0.53. *Sean $E_1 : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to P(H)$ y $E_2 : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to P(H)$ dos resoluciones de la identidad, entonces existe una resolución de la identidad $E_1 \times E_2 : \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \to P(H)$ tal que $E_1 \times E_2(a \times b) = E_1(a)E_2(b)\forall a, b \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$*

Teorema 6.0.54. *La resolución de la identidad del teorema anterior es única.*

Demostración. Para facilitar notación , denotamos por $E = E_1 \times E_2$. Sea F otra resolución de la identidad que satisface lo del teorema anterior,. Entonces para los rectángulos medibles tenemos que $F(a \times b) = E(a \times b), \forall a, b \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. La medida $\langle F(\cdot)x, x\rangle$ es extensión sobre $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ de la medida ν_x definida en el álgebra A_2. Por la unicidad en el teorema de Carathéodory, se concluye que $\nu_x(w) = \langle F(w)x, x\rangle \forall w \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Por lo tanto $\langle E(w)x, x\rangle = \langle F(w)x, x\rangle \forall w \in \mathbb{R}^2$. Como

$$\begin{aligned}
&\langle E(w)x, y\rangle = 1/4[\langle E(w)(x+y), x+y\rangle - \langle E(w)(x-y), x-y\rangle \\
&+ i(\langle E(w)(x+iy), x+iy\rangle - \langle E(w)(x-iy), x-iy\rangle)] \\
&= 1/4[\langle F(w)(x+y), x+y\rangle - \langle F(w)(x-y), x-y\rangle \\
&+ i(\langle F(w)(x+iy), x+iy\rangle - \langle F(w)(x-iy), x-iy\rangle)] \\
&= \langle F(w)x, y\rangle
\end{aligned}$$

De manera que F = E. □

Teorema 6.0.55. *Sean B_1 y B_2 2 operadores autoadjuntos definidos en un espacio de Hilbert H.Supongamos que sus resoluciones de la identidad son E_1, E_2 respectivamente y que estas conmutan entre sí. Entonces existe una única resolución de la identidad. $E_1 \times E_2 : \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \to P(H)$ tal que.*

$$\langle B_1 x, y\rangle = \int_{\mathbb{R}^2} \lambda_1 d\langle E(\cdot)x, y\rangle$$
$$\langle B_2 z, y\rangle = \int_{\mathbb{R}^2} \lambda_2 d\langle E(\cdot)z, y\rangle$$

[4]Libro [8] página 316, definición 12.17

$\forall y \in H, \forall x \in Dom(B_1), \forall z \in Dom(B_2)$, en donde estamos considerando $\mathbb{R}^2 = \{(\lambda_1, \lambda_2) : \lambda_i \in \mathbb{R}, i \in \{1,2\}\}$ y denotamos a la medida $\langle E(\cdot)x, y\rangle$: $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{k}) \to \mathbb{C}$ tal que $w \to \langle E(w)x, y\rangle$

Demostración. Primeramente demostramos la existencia.
Proponemos la resolución de la identidad del teorema 6.0.53, hay que demostrar que esta cumple con las condiciones del teorema.
Para facilitar la notación , ponemos E en lugar de $E_1 \times E_2$.
$\langle E(w)x, y\rangle = 1/4[\langle E(w)(x+y), x+y\rangle - \langle E(w)(x-y), x-y\rangle + i(\langle E(w)(x+iy), x+iy\rangle - \langle E(w)(x-iy), x-iy\rangle)]$. de manera que si $x, y \in Dom(B_i)$:

$$\int_{\mathbb{R}^2} \lambda_i d\langle E(w)x, y\rangle = 1/4[\int_{\mathbb{R}^2} \lambda_i d\langle E(w)(x+y), x+y\rangle$$
$$- \int_{\mathbb{R}^2} \lambda_i d\langle E(w)(x-y), x-y\rangle + i(\int_{\mathbb{R}^2} \lambda_i d\langle E(w)(x+iy), x+iy\rangle$$
$$- \int_{\mathbb{R}^2} \lambda_i d\langle E(w)(x-iy), x-iy\rangle)]$$

Del teorema 6.0.49 se obtiene :

$$= 1/4[\int_{\mathbb{R}} \lambda d\langle E_i(w)x+y, x+y\rangle - \int_{\mathbb{R}} \lambda d\langle E_i(w)(x-y), x-y\rangle$$
$$+ i(\int_{\mathbb{R}} \lambda d\langle E_i(w)(x+iy), x+iy\rangle - \int_{\mathbb{R}} \lambda d\langle E_i(w)(x-iy), x-iy\rangle)]$$
$$= 1/4[\langle B_i(x+y), x+y\rangle - \langle B_i(x-y), x-y\rangle$$
$$+ i(\langle B_i x+iy, x+iy\rangle - \langle B_i x-iy, x-iy\rangle)]$$
$$= \langle B_i x, y\rangle$$

Supongamos ahora que $x \in Dom(B_i), y \in H$
Como $Dom(B_i)$ es denso en H, existe una sucesión $\{y_n\} \subset Dom(B_i)$ que converge a y. Entonces

$$\langle B_i x, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle B_i x, y_n\rangle \tag{6.18}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \int \lambda_i d\langle E(\cdot)x, y_n\rangle$$

Dada una función medible definida en $\mathbb{R}^2$, definimos un operador $\Phi(f) : H \to H$ tal que cumple lo siguiente: $\langle \Phi(f)x, y\rangle = \int_{\mathbb{R}^2} f d\langle E(\cdot)x, y\rangle$[5]. Si f es acotada, entonces se cumple: $|\langle \Phi(f)x, y\rangle| = |\int_{\mathbb{R}^2} f d\langle E(\cdot)x, y\rangle| \leq |\Phi(f)x||y|$

[5]Libro [8], teoremas 13.24 y 12.21

y que $|\Phi(f)x|^2 = \int_{\mathbb{R}^2} |f|^2 d\langle E(\cdot)x, x\rangle$. Por lo tanto $|\int_{\mathbb{R}^2} f d\langle E(\cdot)x, y\rangle| \leqq |y|(\int_{\mathbb{R}^2} |f|^2 d\langle E(\cdot)x, x\rangle)^{1/2}$.
Sea $\nu_R = Re(\langle E(\cdot)x, y\rangle)$ y sea $\nu_I = Im(\langle E(\cdot)x, y\rangle)$. Sean C_R y $D_R$los conjuntos $\nu_R - positivo$ y $\nu_R - negativo$ de la descomposición de Hahn de la medida con signo ν_R y sean C_I y D_I los equivalentes para la medida ν_I.
Sea f una función con dominio el plano y rango los reales y cuadrado integrable con la medida $\langle E(w)x, x\rangle$, sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones acotadas y medibles que converge a f de manera creciente (es decir, $|f_n| \leqq |f_{n+1}| \forall n \in \mathbb{N}$).
$|\int \chi_{C_R}|f_n| d\nu_R| = |Re(\int \chi_{C_R}|f_n| d\langle E(\cdot)x, y\rangle)| \leqq |\int \chi_{C_R}|f_n| d\langle E(\cdot)x, y\rangle|$
$= \langle \Phi(\chi_{C_R}|f_n|)x, y\rangle \leqq |\Phi(|f_n|\chi_{C_R})x||y| = |y|(\int |f_n|^2 \chi_{C_R} d\langle E(\cdot)x, x\rangle)^{1/2} \leqq |y|(\int |f_n|^2 d\langle E(\cdot)x, x\rangle)^{1/2}$.
De manera análoga $|\int \chi_{D_R}|f_n| d\nu_R| \leqq |y|(\int |f_n|^2 d\langle E(\cdot)x, x\rangle)^{1/2}$, $|\int \chi_{C_I}|f_n| d\nu_I| \leqq |y|(\int |f_n|^2 d\langle E(\cdot)x, x\rangle)^{1/2}$, $|\int \chi_{D_I}|f_n| d\nu_I| \leqq |y|(\int |f_n|^2 d\langle E(\cdot)x, x\rangle)^{1/2}$.

De manera que

(6.19)
$$\int |f_n| d\|\langle E(\cdot)x, y\rangle\| \leqq |y|(\int |f_n|^2 d\langle E(\cdot)x, x\rangle)^{1/2} \leqq |y|(\int |f|^2 d\langle E(\cdot)x, x\rangle)^{1/2}$$

En donde $\|\langle E(\cdot)x, y\rangle\|$ es la variación de la medida compleja $\langle E(\cdot)x, y\rangle$.

Como la sucesión $|f_n|$ es creciente y converge puntualmente a f, se sigue del teorema de convergencia monótona que $\lim_{n\to\infty} \int |f_n| d\|\langle E(\cdot)x, y\rangle\| = \int |f| d\|\langle E(\cdot)x, y\rangle\| \leqq |y| \int |f|^2 d\langle E(\cdot)x, x\rangle$. Por lo tanto $f \in L_1(\|\langle E(\cdot)x, y\rangle\|)$ y

$$|\int f d\langle E(\cdot)x, y\rangle| \leqq |y|(\int |f|^2 d\langle E(\cdot)x, x\rangle)^{1/2} \tag{6.20}$$

Ahora, si $x \in Dom(B_i)$ entonces λ es cuadrado integrable con la medida $\langle E_1(\cdot)x, x\rangle$ (en donde $\mathbb{R} = \{\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\}$), de manera que por el teorema 6.0.49 λ_i es cuadrado integrable con respecto a la medida $\langle E(\cdot)x, x\rangle$. Si $\{y_n\}$ es como en 6.18 tenemos:

$$
\begin{aligned}
&|\int_{\mathbb{R}^2} \lambda_i d\langle E(\cdot)x, y\rangle - \int_{\mathbb{R}^2} \lambda_i d\langle E(\cdot)x, y_n\rangle| \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \lambda_i d\langle E(\cdot)x, y - y_n\rangle \\
&\leqq |y - y_n| \int \lambda_i^2 d\langle E(\cdot)x, x\rangle \to_{n\to\infty} 0.
\end{aligned}
$$

De esto último y de 6.18 se obtiene:

(6.21)

$$\langle B_i x, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^2} \lambda_i d\langle E(\cdot)x, y_n\rangle = \int_{\mathbb{R}^2} \lambda_i d\langle E(\cdot)x, y\rangle \forall y \in H, \forall x \in Dom(B_i)$$

Con esta última ecuación acabamos de demostrar la existencia. En seguida demostramos la unicidad.
Sea F una resolución de la identidad que cumple con las premisas del teorema, hay que ver que F = E.
Definimos las funciones $F_1, F_2 : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to P(H)$ como sigue:

$$
\begin{aligned}
F_1(w) &= F(w \times \mathbb{R}) \\
F_2(w) &= F(\mathbb{R} \times w)
\end{aligned}
$$

Como

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^2} \chi_{w\times\mathbb{R}} d\langle F(\cdot)x, y\rangle = \langle F(w \times \mathbb{R})x, y\rangle \\
&= \langle F_1(w)x, y\rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}} \chi_w d\langle F_i(\cdot)x, y\rangle
\end{aligned}
$$

Entonces para cualquier función simple s que no dependa de la segunda coordenada y para cualquier constante c tenemos que.

$$\int_{\mathbb{R}^2} s d\langle F(\cdot)x, y\rangle = \int_{\mathbb{R}} s(\lambda_1, c) d\langle F_1(\cdot)x, y\rangle \tag{6.22}$$

Sea x $\in Dom(B_1)$, entonces por hipótesis se tiene que λ_1 es cuadrado integrable con respecto a la medida $\langle F(\cdot)x, x\rangle$ y como la medida es finita, también es absoluto integrable . Sea $\{s_n\}, s_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones simples que convergen de manera monótona a λ (es decir,$|s_n| \leqq |s_{n+1}| \forall n \in \mathbb{N}$), entonces si $s_n = \sum_{i=1}^{m_n} a_{i,n}\chi_{A_{i,n}}$, sea $t_n = \sum_{i=1}^{m_n} a_{i,n}\chi_{A_{i,n}\times\mathbb{R}}$, se obtiene que la sucesión $\{t_n\}$ converge de manera monótona a λ_1, entonces por el teorema de convergencia monótona $\int_{\mathbb{R}^2} |\lambda_i| d\langle F(\cdot)x, x\rangle =$ $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^2} |t_n| d\langle F(\cdot)x, x\rangle$, y por 6.22 esto último es igual a lo siguiente $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |s_n| d\langle F_1(\cdot)x, x\rangle$ y por el teorema de convergencia monótona, esto último es igual a $\int |\lambda| d\langle F_1(\cdot)x, x\rangle$. Se concluye del teorema de convergencia dominada de Lebesgue lo siguiente:

$$\int_{\mathbb{R}^2} \lambda_1 d\langle F(\cdot)x, x\rangle = \int_{\mathbb{R}} \lambda d\langle F_1(\cdot)x, x\rangle \forall x \in Dom(B_1) \tag{6.23}$$

y de manera análoga

$$\int_{\mathbb{R}^2} \lambda_1^2 d\langle F(\cdot)x, x\rangle = \int_{\mathbb{R}} \lambda^2 d\langle F_1(\cdot)x, x\rangle \forall x \in Dom(B_1)$$

Si $x, y \in Dom(B_1)$, como $\langle F(w)x, y\rangle = 1/4[\langle F(w)(x+y), x+y\rangle - \langle F(w)(x-y), x-y\rangle + i(\langle F(w)(x+iy), x+iy\rangle - \langle F(w)(x-iy), x-iy\rangle)]$ y $\langle F_1(w)x, y\rangle = 1/4[\langle F_1(w)(x+y), x+y\rangle - \langle F_1(w)(x-y), x-y\rangle + i(\langle F_1(w)(x+iy), x+iy\rangle - \langle F_1(w)(x-iy), x-iy\rangle)]$, se obtiene.

$$\langle B_1 x, y\rangle = \int_{\mathbb{R}^2} \lambda_1 d\langle F(\cdot)x, y\rangle = \int_{\mathbb{R}} \lambda d\langle F_1(\cdot)x, y\rangle \forall x, y \in Dom(B_1) \tag{6.24}$$

De manera análoga a la construcción de 6.18-6.21, se concluye que.

(6.25)

$$\langle B_1 x, y\rangle = \int_{\mathbb{R}^2} \lambda_1 d\langle F(\cdot)x, y\rangle = \int_{\mathbb{R}} \lambda d\langle F_1(\cdot)x, y\rangle \forall x \in Dom(B_1) \forall y \in H$$

De la unicidad en el teorema espectral[6], se concluye que $F_1 = E_1$. De manera análoga $F_1 = E_2$.
Entonces $F(w \times \mathbb{R}) = E_1(w) \forall w \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $F(\mathbb{R} \times w) = E_2(w) \forall w \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
Entonces $F(w_1 \times \mathbb{R})F(\mathbb{R} \times w_2) = F(w_1 \times \mathbb{R} \cap \mathbb{R} \times w_2) = F(w_1 \times w_2) = E_1(w_1)E_2(w)_2 \forall w_1, w_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Por el teorema 6.0.54, se concluye que $F = E_1 \times E_2$

□

[6]Libro [8] teorema 13.30

Capítulo 7

Los operadores de onda y el operador de dispersión

Sea J la función $J : L_2(\mathbb{R}^2) \to L_2(\Omega)$ dada por $J(\phi) = \chi_\Omega \phi$, En donde $\Omega = \mathbb{R}^2 - K$ y K es compacto y $0 \in K^\circ$. O bien , J es la identidad si K = { 0 }

Definición 7.0.22. *Sean H_A y H_0 como en el capítulo 2. Definimos los operadores de onda como sigue:*

$$W_\pm(A) := s - \lim_{t \to \pm\infty} e^{itH_A} J e^{-itH_0}$$

Teorema 7.0.56. *Los Operadores de onda existen y son isométricos, para toda $A \in \mathcal{A}_K(\alpha_K, B_R)$, además si $A^1, A^2 \in \mathcal{A}_K(\alpha_K, B_R)$ con $A^2 = A^1 + \nabla\lambda$, en donde λ es como en el capítulo 1 entonces*

$$W_\pm(A_2) = e^{i\lambda(x)} W_\pm(A^1) e^{-i\lambda_\infty(\pm P)} \tag{7.1}$$

En donde λ_∞ es como en el capítulo 2

Demostración. Sea $\chi \in C^\infty(\Omega)$ que satisface $\kappa(x) = 0$ en una vecindad de K y $\chi(x) = 1$ para $|x| \geqq M$, son M suficientemente grande.

Primeramente sabemos por la demostración del teorema 2.0.24 que

$$H_0 = 1/(2m)\Psi^{-1}\lambda^2\Psi$$

En donde Ψ es la transformada de Fourier en $L_2(\mathbb{R}^2)$.
De manera que $H_0 + 1 = \Psi^{-1}(\lambda^2/(2m) + 1)\Psi$, el operador multiplicar por $\lambda^2 + 1$ es acotado e invertible , con inverso el operador multiplicar por $\frac{1}{\lambda^2+1}$.
El inverso del operador $H_0 + 1$ es entonces $\Psi^{-1}\frac{1}{\lambda^2+1}\Psi$ que es acotado.

Afirmación 7.0.5. *Sea $\{u_n\} \subset L_2(\mathbb{R}^2)$ una sucesión acotada en $L_2(\mathbb{R}^2)$, entonces $\{w_n\}$ tal que $w_n = (H_0 - 1)^{-1}u_n$ es acotada en $W^{2,2}$.*

Demostración. Como la transformada de Fourier es una isometría, entonces $\{\widehat{u}_n\}$ es acotada también.

$$|\frac{\lambda_i}{\lambda^2+1}\widehat{u}_n| \leqq |\widehat{u}_n| = |u_n|, i \in \{1,2\}$$
Como $(\lambda_1 - \lambda_2)^2 \geqq 0, \lambda_1\lambda_2 \leqq \lambda_1^2 + \lambda_2^2 \Rightarrow$
$$|\frac{\lambda_1\lambda_2}{1+\lambda^2}\widehat{u}_n| \leqq |\widehat{u}_n|$$
además $(H_0+1)^{-1} = \Psi^{-1}\frac{1}{1+\lambda^2}\Psi$, por lo tanto
$$w_n = \Psi^{-1}\frac{1}{1+\lambda^2}\widehat{u}_n$$
$$\Rightarrow |\frac{\partial}{\partial x_i}w_n| = |\Psi(\frac{\partial}{\partial x_i}w_n)|$$
$$= |\frac{\lambda_i}{\lambda^2+1}\widehat{w}_n| \leqq |u_n|$$
$$|\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}w_n| = |\Psi(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}w_n)|$$
$$= |\frac{\lambda_i\lambda j}{1+\lambda^2}\widehat{u}_n| \leqq |u_n|$$

Nótese que podemos hablar de la norma de las derivadas distribucionales de w_n por que de hecho están en $L_2(\mathbb{R}^2)$ por los teoremas 2.0.22, 2.0.23 y la demostración del teorema 2.0.24.Para acotar la norma de estas derivadas usamos el teorema 2.0.21 y el teorema de Plancherel.
Se concluye que la sucesión $\{w_n\}$ es acotada en $W^{2,2}$. □

Afirmación 7.0.6. *El operador*

$$(1 - \chi(x))(H_0 + 1)^{-1} \textit{es compacto}$$

Demostración. Por el teorema 5.0.44 la función:

$$\begin{aligned} W^{1,2} &\to L_2(B_M(0)) \\ u \quad &\to u|_{B_M(0)} \end{aligned}$$

Es compacta, como $\{w_n\}$ es acotada en $W^{2,2}$, entonces es acotada en $W^{1,2}$, por lo tanto la sucesión $\{w_n|_{B_M(0)}\}$ tiene una subsucesión convergente que denotamos $\{w_{i_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$. Como $1-\chi$ tiene soporte en $B_M(0)$ y $1-\chi \in C_0^\infty(B_M)(0) \Rightarrow$ la sucesión $\{w_{i_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente en $L_2(\mathbb{R})$ por lo tanto el operador $(1-\chi)(H_0+1)^{-1}$ es compacto. □

Si $\phi \in D(H_0) = w^{2,2}(\mathbb{R}^2)$ entonces: sea $\psi = (H_0+1)\phi$

$$e^{itH(A)}(1-\chi(x))e^{-itH_0}\phi = e^{itH(A)}(1-\chi(x))(H_0+1)^{-1}e^{-itH_0}\psi$$

Pues $(H_0+1)^{-1}$ y e^{-tH_0} conmutan, pues son ambas funciones de P.
Como por el teorema 4.0.39 H_0 es absolutamente continua, se sigue del lema 4.0.13 que

$$e^{-itH_0}\psi \to^{\text{débilmente}} 0,\ t \to \infty.$$

Sea $\{t_n\} \subset \mathbb{R}$ con $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$.
Entonces $\{e^{-it_nH_0}\psi\}$ es acotada, pues e^{-itH_0} es unitario. Como $(1-\chi(x))(1+H-0)^{-1}$ es compacto, existe una subsucesión de $\{e^{-it_nH_0}\psi\}$ que denotamos por $\{e^{-it_{i_n}H_0}\psi\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que la sucesión $\{(1-\chi(x))(1+H_0)^{-1}e^{-it_{i_n}H_0}\psi\}$ es convergente. Como $e^{-it_nH_0}\psi$
$\to^{\text{débilmente}} 0$, entonces $(1-\kappa(x))(1+H_0)^{-1}e^{-it_{i_n}H_0}\psi \to^{\text{débilmente}} 0$, se sigue que $(1-\chi(x))(1+H_0)^{-1}e^{-it_{i_n}H_0}\psi \to^{\text{fuertemente}} 0$.
Hemos demostrado que dada una sucesión $\{t_n\}$ existe una subsucesión $\{t_{i_n}\}$ tal que $(1-\kappa(x))(1+H_0)^{-1}e^{-it_{i_n}H_0}\psi \to^{\text{fuertemente}} 0$, de esto se sigue que $(1-\kappa(x))(1+H_0)^{-1}e^{-it_nH_0}\psi \to^{\text{fuertemente}} 0$, y como t_n es una sucesión arbitraria que converge a infinito, se concluye que $(1-\chi(x))(1+H_0)^{-1}e^{-itH_0}\psi \to^{\text{fuertemente}} 0, (t\to\infty)$.
Sea $\psi_t = (1-\chi(x))(1+H_0)^{-1}e^{-itH_0}\psi$, entonces $\lim_{t\to\infty}\psi_t = 0$. Se sigue que $\lim_{t\to\infty} e^{itH(A)}\psi_t = 0$, pues como $e^{itH(A)}$ es unitario, $0 \leqq \lim_{t\to\infty}|e^{itH(A)}\psi| \leqq \lim_{t\to\infty}\psi_t = 0$. Entonces se ha demostrado que si $\phi \in Dom(H_0) \Rightarrow$
$\lim_{t\to\infty} e^{itH(A)}(1-\kappa(x))e^{-itH_0}\phi = 0$. Esto implica que si $\phi \in Dom(H_0)$

$$\lim_{t\to\infty} e^{itH(A)}\chi e^{-itH_0}\phi \text{existe} \Leftrightarrow$$
$$\lim_{t\to\infty} e^{itH(A)}Je^{-itH_0}\phi \text{existe.}$$

Y en el caso en que exista

$$\lim_{t\to\infty} e^{itH(A)}\chi e^{-itH_0}\phi =$$
$$\lim_{t\to\infty} e^{itH(A)}Je^{-itH_0}\phi.$$

Además como $|e^{itH(A)}Je^{-itH_0}\phi| \leqq |\phi|$, si demostramos que $\lim_{t\to\infty} e^{itH(A)}Je^{-itH_0}\phi$. existe $\forall\phi$ en un denso en $L_2(\mathbb{R}^2)$, obtenemos que $\lim_{t\to\infty} e^{itH(A)}Je^{-itH_0}\psi$ existe $\forall\psi \in L_2(\mathbb{R}^2)$.
Probaremos que $W_+(A)$ existe, la demostración para W_- es análoga. Por lo dicho en las anteriores líneas , es suficiente demostrar que existe el límite para las funciones ϕ_v tales que $\widehat{\phi}_v \in C_0^\infty(B_{mh}(mv)), \forall v, h$ con $|v| > 8h$, ya que el conjunto de estas funcione es denso en $L_2^{\mathbb{R}^2}$.
Note que $\phi_v = e^{imv\cdot x}\phi_0$ con $\phi_0 \in C_0^\infty(B_{mh}(0))$. Tomemos por lo pronto las funciones $A^{f,Q}$ del capítulo 1 tales que:

$$A^{f,Q}(x)F(|x - Q - \widehat{v}\tau| \leqq |\tau/4|) = 0,\ \tau \in \mathbb{R} \tag{7.2}$$

En donde $F(|x - Q - \widehat{v}\tau| \leqq |\tau/4|)\phi = \chi_{\{x:|x-Q-\widehat{v}\tau|\leqq|\tau/4|\}}\phi$

Lema 7.0.14.

$$W_+(A^{f,Q})\phi_v = \chi(x)\phi_v + i\int_0^\infty dte^{itH(A^{f,Q})}V(x,P)e^{itH_0}\phi_v$$

En donde

(7.3)
$$V(x,P) = \chi(x)[\frac{-A^{f,Q}\cdot P}{m} + \frac{(-P\cdot A^{f,Q}) + (A^{f,Q})^2}{2m}] - \frac{1}{2m}[(\triangle\chi) + 2i(\nabla\chi)\cdot P + 2A^{f,Q}\cdot(P\chi)]$$

Demostración. Como $\widehat{\phi}_v \in C_0^\infty(B_{mh}(mv)) \Rightarrow \phi_v \in S(\mathbb{R}^n)$.
Pero $e^{-itH_0}\phi_v = \Psi^{-1}e^{-it\lambda^2/2m}\widehat{\phi}_v$, como $e^{-it\lambda^2/2m} \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, se sigue que $e^{-itH_0}\phi_v \in S(\mathbb{R}^2)$, y de esto es claro que

$$\chi e^{-itH_0}\phi_v \in S(\mathbb{R}^2),\ \phi_v \in S(\mathbb{R}^2) \tag{7.4}$$
$$\text{como } S(\mathbb{R}^2) \subset W^{2,2}(\mathbb{R}^2) \Rightarrow \phi_v \in Dom(H_0)$$

Afirmación 7.0.7. *Sea $\chi S(\mathbb{R}^2) = \{\chi u : u \in S(\mathbb{R}^2)\}$, entonces:*

$$\chi S(\mathbb{R}^2) \subset Dom(\bar{q}_A)\forall A \in \mathcal{A}(\alpha_K B_K)$$

Demostración. recordamos como es que se define $H(A)$ en el capítulo 2.
Definimos $q_A(\phi, \psi) = \langle (P - A)\phi, (P - A)\psi\rangle$ de dominio $C_0^1(\Omega)$.
Construimos después la cerradura de q_A como sigue:
$u \in Dom(\bar{q}_A)$ si existe una sucesión $\{u_n\} \subset C_0^1(\Omega)$ tal que $q_a(u_n - u_m) \to 0, (m, n \to \infty)$ y $u_n \to u$.
Sea $f \in S$,hay que ver que $\chi f \in Dom(\bar{q}_A)$.
Sea $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ tal que $\psi = 1$ en $B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$. Sea $f_r(x) = \psi(rx)f(x), r > 0$, es claro que $f_r \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$.
Si g es un polinomio y $a \in \mathbb{N}^2$, entonces.

$$g(x)(D^a(f - f_r))(x) = g(x)\sum_{b \leqq a} C_{ab}(D^{a-b}f)(x)r^{|b|}((D^b(1 - \psi))(rx))$$

Nuestra elección de ψ muestra que
$D^b(1 - \psi)(rx) = 0\forall b\forall |x| \leqq 1/r,\ b \neq 0$

Como $f \in S, D^{a-b}f \in S$, se sigue que la suma de arriba tiende a 0 cuando r tiende a 0 . es decir, $f_r \to^S f$ (f_r tiende a f en la topología de S).
Se obtiene que $D(\mathbb{R}^2) = C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ es denso en $S(\mathbb{R}^2)$.
Sea $\psi_n(x) = \psi(x/n)$, entonces $\psi_n f \to^S f(n \to \infty)$, de manera que $\psi_n f \to^{L_2(\mathbb{R}^2)} f$.
Por otro lado $A\chi$ es acotado, pues A es acotado fuera de una vecindad del 0 y χ es cero en una vecindad del 0, de esto se sigue que. $A\chi\psi_n f \to^{L_2(\mathbb{R}^2)} A\chi f$, de manera que la sucesión $\{A(\chi\psi_n f)\}$ es de Cauchy en $L_2(\mathbb{R}^2)$. Sea $f_n = \psi_n f$, entonces $\chi f_n \to^{L_2(\mathbb{R}^2)} \chi f$, como $D^a\chi$ tiene soporte compacto para $|a| \geqq 1$, entonces $D^a\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2), \forall |a| \geqq 1$ entonces como $D^a f_n \to^{L_2(\mathbb{R}^2)} D^a f \Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
&D^a\chi D^b f_n \to^{L_2\mathbb{R}^2} D^a\chi D^b f \forall a,b\in\mathbb{N}^2, a\leqq b\\
&\Rightarrow D^a(\chi f_n)\to^{L_2(\mathbb{R}^2)} D^a\chi f.\\
&\Rightarrow -i\nabla(\chi f_n)\to^{L_2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)} -i\nabla(\chi f)
\end{aligned}
$$

Entonces la sucesión $\{(P-A)\chi f_n\}$ es de Cauchy en $L_2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$ y $(P-A)\chi f_n \to (P-A)\chi f$ en $L_2(\mathbb{R}^2)$.

Como $\chi f_n \in C_0^1(\Omega)$ se concluye que $\chi f \in Dom(\bar{q}_A)$ y que si $g\in S$

$$
\bar{q}_A(\chi f,\chi g) = \langle (P-A)\chi f,(P-A)\chi g\rangle \tag{7.5}
$$

□

Afirmación 7.0.8. $\chi s \in Dom(H(A))\forall s\in S$

Demostración. Recordamos como se definió $H(A)$ en el capítulo 2.
En este caso $H = L_2(\Omega)$. Denotamos por $H_{+1} = (Dom(\bar{q}_A),\langle\cdot,\cdot\rangle_{+1})$, en donde.

$$
\langle\phi,\psi\rangle_{+1} = \bar{q}_A(\phi,\psi)+\langle\phi,\psi\rangle
$$

H_{-1} es el espacio de funcionales continuas en H_{+1}. H se incluye en H_{-1} por la función j tal que

$$
\psi\to^j \langle\cdot,\psi\rangle
$$

Dada $\phi\in H_{+1}$, definimos el elemento $\widehat{B}(\phi)\in H_{-1}$tal que

$$
\widehat{B}(\phi)(\psi) = \langle\psi,\phi\rangle
$$

Entonces el dominio de $H(A)$ es $D(H(A)) = \{\psi\in H_{+1} : \widehat{B}\psi \in Ran(j)\}$.
Entonces: $H(A)\psi = j^{-1}\widehat{B} - I$ en donde I es la identidad.
Se $f\in S$ hay que ver que $\chi f\in Dom(H(A))$.Para tal propósito debemos demostrar que existe $h\in H$ tal que $\bar{q}_A(\phi,\chi f)+\langle\phi,\chi f\rangle = \langle\phi,h\rangle\forall\phi\in H_{+1}$.
Supongamos primero que $\phi\in Dom(q_A)$, de la afirmación 7.0.7 se sigue:

$$
\begin{aligned}
&\bar{q}_A(\phi,\chi f)+\langle\phi,\chi f\rangle=\langle(P-A)\phi,(P-A)\chi f\rangle+\langle\phi,\chi f\rangle\\
&=\langle P\phi,P\chi f\rangle-\langle P\phi,A\chi f\rangle-\langle A\phi,P\chi f\rangle+\langle A\phi,A\chi f\rangle+\langle\phi,\chi f\rangle\\
&\text{Como } \chi f\in C^\infty(\mathbb{R}^2), f\in S \text{ y } A\chi f=0 \text{ en una vecindad de K}\\
&=\langle\phi,P^2\chi f\rangle-\langle\phi,P\cdot A\chi f\rangle-\langle\phi,A\cdot P\chi f\rangle\langle\phi,A^2\chi f\rangle\langle\phi,\chi f\rangle.\\
&=\langle\phi,P^2(\chi f)-P\cdot A\chi f-A\cdot P\chi f+A^2\chi f+\chi f\rangle
\end{aligned}
$$

Además por la elección de A, A y sus derivadas en primer orden son acotadas en fuera de una vecindad de K, como $f\in S$, χ se anula en una vecindad de K y es infinitamente diferenciable, se tiene que $P^2(\chi f)-P\cdot A\chi f-A\cdot P\chi f+A^2\chi f+\chi f\in L_2(\mathbb{R}^2)$, entonces sea $h=P^2(\chi f)-P\cdot A\chi f-A\cdot P\chi f+A^2\chi f+\chi f$. Si $\phi\in Dom(\bar{q}_A)$, entonces existe una sucesión de funciones ϕ_n tales que $\phi_n\to\phi$ y se tiene $\bar{q}_A(\phi,\chi f)=\lim_{n\to\infty}q_A(\phi_n,\chi f)$, de manera que $\bar{q}_A(\phi,\chi f)+\langle\phi,\chi f\rangle=\lim_{n\to\infty}q_A(\phi_n,\chi f)+\langle\phi_n,\chi f\rangle=\lim_{n\to\infty}\langle\phi_n,h\rangle=\langle\phi,h\rangle$ por lo tanto.

$$\bar{q}_A(\phi,\chi f)+\langle\phi,\chi f\rangle=\langle\phi,h\rangle\forall\phi\in Dom(\bar{q}_A)$$

Se concluye entonces que $\chi f\in Dom(H(A))$ y además que

$$H(A)(\chi f)=P^2(\chi f)-P\cdot A\chi f-A\cdot P\chi f+A^2\chi f \tag{7.6}$$

□

Si $\phi\in S\Rightarrow\phi\in Dom(H_0)$, además $e^{-itH_0}\phi\in S$, de manera que $\chi(x)e^{-itH_0}\phi\in Dom(H(A))$.

Afirmación 7.0.9. *Si $\phi\in S$ entonces $e^{itH(A)}\chi(x)e^{-itH_0}\phi$ es derivable y*

$$\frac{\partial}{\partial t}e^{itH(A)}\chi(x)e^{-itH_0}\phi=e^{itH(A)}(iH(A)\chi(x)-i\chi(x)H_0)e^{-itH_0}\phi$$

Demostración. Para la demostración haremos uso del siguiente hecho.

Teorema 7.0.57. [1] *sea Q(t) un semigrupo de un parámetro, A su generador infinitesimal, y $x\in Dom(A)$, entonces la función $Q(t)x$ es derivable y*

$$\frac{d}{dt}Q(t)x=AQ(t)(x)=Q(t)A(x)$$

[1] Libro [8], página 376

En el caso de e^{-itH_0}, su generador infinitesimal es $-itH_0$ y en el caso de $e^{itH(A)}$, su generador infinitesimales $itH(A)$[2]. Sean $X(t) = \chi(x)e^{-itH_0}\phi, Y(t) = e^{itH(A)}$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{Y(t+h)X(t+h) - Y(t)X(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{Y(t+h)X(t+h) - Y(t+h)X(t)}{h}$$
$$+ \frac{Y(t+h)X(t) - Y(t)X(t)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} Y(t+h)\frac{X(t+h) - X(t)}{h}$$
$$+ \lim_{h\to 0} \frac{Y(t+h) - Y(t)}{h} X(t)$$

Pero $\lim_{h\to 0} \frac{Y(t+h)-Y(t)}{h} X(t) = Y(t)iH(A)X(t)$, pues $X(t) \in Dom(H(A))$ y por el teorema 7.0.57.
Veremos ahora que $\lim_{h\to 0} \frac{Y(t+h)(X(t+h)-X(t)))}{h} = Y(t)\frac{dX}{dt}(t)$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{Y(t+h)(X(t+h) - X(t)))}{h} - Y(t)\frac{dX}{dt}(t)$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{Y(t+h)(X(t+h) - X(t)))}{h} - Y(t+h)\frac{dX}{dt} + Y(t+h)\frac{dX}{dt} - Y(t)\frac{dX}{dt}$$
$$= \lim_{h\to 0} Y(t+h)(\frac{(X(t+h) - X(t)))}{h} - \frac{dX}{dt}) + \lim_{h\to 0}(Y(t+h) - Y(t))\frac{dX}{dt}$$
$$= 0 \quad \text{pues } |Y(t)| \leqq 1 \forall t \in \mathbb{R}$$

Se concluye entonces que.

$$\frac{\partial}{\partial t} e^{itH(A)}\chi(x)e^{-itH_0}\phi = e^{itH(A)}(iH(A)\chi(x) - i\chi(x)H_0)e^{-itH_0}\phi$$

□

De 7.6 obtenemos que si $f \in S$:
$H(A)(\chi f) = P^2(\chi f) - P \cdot A\chi f - A \cdot P\chi f + A^2\chi f$ Como f es derivable

[2]Libro [8] página 383

en Ω y $\chi = 0$ en una vecindad de K, entonces podemos derivar la anterior expresión de la manera usual, usando la fórmula para la derivada del producto obtenemos:

$$H(A)(\chi f) = \chi(x)[-\frac{A\cdot P}{m} + \frac{-(P\cdot A + A^2)}{2m}]f - \frac{1}{2m}(\triangle\chi$$
$$+2i(\nabla\chi)\cdot P) + 2A\cdot(P\chi))f - \frac{1}{2m}\chi\triangle f$$

Entonces, sea $f = e^{-itH_0}\phi_v$:

(7.7)
$$H(A)\chi f - \chi H_0 f = \chi(x)[-\frac{A\cdot P}{m} + \frac{-(P\cdot A + A^2)}{2m}]e^{-itH_0}\phi_v - \frac{1}{2m}(\triangle\chi$$
$$+2i(\nabla\chi)\cdot P) + 2A\cdot(P\chi))e^{-itH_0}\phi_v$$

Entonces de 7.7 y la afirmación 7.5 se obtiene.

$$\frac{de^{itH(A)}\chi(x)e^{-itH_0}\phi_v}{dt} = e^{itH(A)}V(x,P)e^{-itH_0}\phi_v$$

en donde

$$V(x,P) = \chi(x)[-\frac{A\cdot P}{m} + \frac{-(P\cdot A + A^2)}{2m}] - \frac{1}{2m}(\triangle\chi$$
$$+ 2i(\nabla\chi)\cdot P) + 2A\cdot(P\chi))$$

Como el teorema fundamental del cálculo es válido también para este tipo de derivadas, se obtiene:

$$e^{itH(A)}\chi(x)e^{-itH_0}\phi_v - \chi(x)\phi_v$$
$$= \int_0^t \frac{d}{dt}(e^{itH(A)}\chi(x)e^{-itH_0}\phi_v)$$

De manera que

$$\lim_{t\to\infty} e^{itH(A)}\chi(x)e^{-itH_0}\phi_v$$
$$= W_+(A)\phi_v$$
$$= \chi(x)\phi_v + \int_0^\infty \frac{d}{dt}(e^{itH(A)}\chi(x)e^{-itH_0}\phi_v)$$

□

Elegimos ahora $A = A^{f,Q}$como en el capítulo 1 que satisfaga 7.2 y para facilitar la notación , seguimos escribiendo A en lugar de $A^{f,Q}$.
Sea $g \in C_0^\infty(B_{mh}(0))$ que satisfaga $g = 1$ en el soporte de $\widehat{\phi}_0$ De 7.2 $\chi A = \chi AF((|x - Q - vt| > |vt|/4))$.
Como $\phi_v = e^{imv\cdot x}\phi_0 \Rightarrow \widehat{\phi}_v(p) = \widehat{\phi}_0(p - mv)$ y $q = 1$ en el soporte de $\widehat{\phi}_0$

$$g(P - mv)\phi_v = \phi_v \tag{7.8}$$

se sigue:

$$|\chi Ae^{-itH_0}(P - mv)\phi_v| = |\chi AF(|x - Q - vt| > |vt|/4)e^{-itH_0}(P - mv)\phi_v|$$
$$= |\chi AF(|x - Q - vt| > |vt|/4)e^{-itH_0}(P - mv)g(P - mv)$$
$$(F(|x - Q| \leqq |vt|/8) + F(|x - Q| > |vt|/8)e^{imv\cdot x}\phi_0|$$
(7.9)
$$\leqq |\chi AF(|x - Q - vt| > |vt|/4)e^{-itH_0}(P - mv)g(P - mv)F(|x - Q| \leqq |vt|/8)||\phi_0|$$
$$+ |\chi A||e^{itH_0}||g(P - mv)(P - mv)||F(|x - Q| > |vt|/8)\phi_0|$$

Nótese que $g(P - mv)(P - mv)$ es un operador acotado porque $sop(g)$ es compacto, además $|e^{itH_0}| \leqq 1$ y $|\chi A|$ es acotado ,de manera que existe una constante b_1 tal que

(7.10)
$$|\chi A||e^{itH_0}||g(P - mv)(P - mv)||F(|x - Q| > |vt|/8)\phi_0| \leqq b_1|F(|x - Q| > |vt|/8)\phi_0|$$

Por la demostración el corolario 3.0.2, tomando $\rho = 0$

$$|\chi AF(|x - Q - vt| > |vt|/4)e^{-itH_0}(P - mv)g(P - mv)F(|x - Q| \leqq |vt|/8)||\phi_0|$$
$$\leqq |\chi A|C_l(1 + |vt|/8)^{-l} \tag{7.11}$$

Afirmación 7.0.10. *Si $\phi \in S(\mathbb{R}^2)$, $Q \in \mathbb{R}^2$ y $r \in \mathbb{R}$, entonces existe una constante b_2 tal que:*

$$|f(|x - Q| > |vt|/r)\phi| \leqq b_2(1 + |vt|/r)^{-l}$$

Demostración. Como $\phi \in S$, entonces sea C tal que

$$\sup(\{|(1+|x-Q|)^l \phi(x)|\}) = C$$

Entonces

$$|\phi(x)| \leqq C(1+|x-Q|)^{-l} \forall x$$

De manera que:

$$|f(|x-Q| > |vt|/r)\phi| \leqq b_2(1+|vt|/r)^{-l}$$

□

Como $\phi_0 \in S$sea b_2 tal que.

$$|f(|x-Q| > |vt|/8)\phi_0| \leqq b_2(1+|vt|/8)^{-l} \tag{7.12}$$

De 7.9, 7.10, 7.11 y 7.12 se obtiene que existe b_3 tal que

$$|\chi A e^{-itH_0}(P-mv)\phi_v| \leqq b_3(1+|vt|/8)^{-l} \tag{7.13}$$

De manera análoga, se demuestra que

$$|\chi A e^{-itH_0} mv\phi_v| \leqq b_4(1+|vt|/8)^{-l} \tag{7.14}$$

$$|\chi(\nabla A + A^2)e^{-itH_0}\phi_v| \leqq b_5(1+|vt|/8)^{-l} \tag{7.15}$$

$$\begin{aligned}
&|\triangle\chi(x)e^{-itH_0}\phi_v| = |\triangle\chi(x)(F(|x-vt| > |vt|/4) + F(|x-vt| \leqq |vt|/4))e^{-itH_0}\phi_v| \\
&= \triangle\chi(x)(F(|x-vt| > |vt|/4))e^{-itH_0}g(P-mv)F(|x| \leqq |vt|/8)\phi_v \\
&+ \triangle\chi(x)(F(|x-vt| > |vt|/4))e^{-itH_0}g(P-mv)F(|x| > |vt|/8)\phi_v \\
&+ \triangle\chi(x)(F(|x-vt| \leqq |vt|/4))e^{-itH_0}g(P-mv)F(|x| \leqq |vt|/8)\phi_v \\
&+ \triangle\chi(x)(F(|x-vt| \leqq |vt|/4))e^{-itH_0}g(P-mv)F(|x| > |vt|/8)\phi_v
\end{aligned}$$

Además

$$|\triangle\chi(x)F(|x-vt| > |vt|/4)e^{-itH_0}g(P-mv)F(|x| \geqq |vt|/8)\phi_v| \leqq b_6|F(|x| \geqq |vt|/8)\phi_0|$$
$$|\triangle\chi(x)F(|x-vt| \leqq |vt|/4)e^{-itH_0}g(P-mv)F(|x| \geqq |vt|/8)\phi_v| \leqq b_7|F(|x| \geqq |vt|/8)\phi_0|$$

Por lo tanto:

(7.16)

$$
\begin{aligned}
|\triangle(x)e^{-itH_0}\phi_v| &\leqq b_8[|\chi F(|x-vt|>|vt|/4)e^{-itH_0}g(P-mv)F(|x|\leqq|vt|/4)||\phi_0| \\
&+b_8[|\triangle\chi F(|x-vt|\leqq|vt|/4)e^{-itH_0}g(P-mv)F(|x|\leqq|vi|/4)||\phi_0| \\
&+|F(|x|>|vt|/8)\phi_0|.
\end{aligned}
$$

(7.17)

$$
\begin{aligned}
&|\triangle\chi(x)F(|x-vt|\leqq|vt|/4)e^{-itH_0}g(P-mv)F(|x|\leqq|vt/8|)|\leqq \\
&b_9|\triangle\chi(x)F(|x-vt|\leqq|vt|/4)| \\
&\leqq b_9|\triangle\chi(x)F(|x|\geqq 3|vt|/4)| \\
&\leqq b_{10}(1+|vt|/8)^{-l}
\end{aligned}
$$

La última igualdad es porque $\triangle\chi\in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^2)\subset S(\mathbb{R}^2)$ y por la afirmación 7.0.10.

De la afirmación 7.0.10, de 7.16, 7.17 y del corolario 3.0.2 se obtiene que existe una constante b_{11} que depende de l tal que:

$$
|\triangle\chi(x)e^{-itH_0}\phi_v|\leqq b_{11}(1+|vt|/8)^{-l} \tag{7.18}
$$

Ahora demostraremos que existe una constante b_{12} tal que

$$
|\nabla\chi\cdot(P-mv)e^{-itH_0}\phi_v|\leqq b_{12}(1+|vt|/8)^{-l}
$$

$$
\begin{aligned}
&|\nabla\chi\cdot(P-mv)e^{-itH_0}\phi_v| \leqq \\
&|F(|x-vt|>|vt|/4)\nabla\chi\cdot e^{-itH_0}(P-mv)g(P-mv)F(|x|\leqq|vt|/8)\phi_v| \\
&+|F(|x-vt|>|vt|/4)\nabla\chi\cdot e^{-itH_0}(P-mv)g(P-mv)F(|x|>|vt|/8)\phi_v| \\
&+|F(|x-vt|\leqq|vt|/4)\nabla\chi\cdot e^{-itH_0}(P-mv)g(P-mv)F(|x|\leqq|vt|/8)\phi_v| \\
&+|F(|x-vt|\leqq|vt|/4)\nabla\chi\cdot e^{-itH_0}(P-mv)g(P-mv)F(|x|>|vt|/8)\phi_v| \\
&\leqq b_{13}[|F(|x|>|vt|/8)\phi_0|+|F(|x-vt|>|vt|/4)e^{-itH_0}(P-mv)g(P-mv) \\
&F(|x|\leqq|vt|/8)\phi_v| \\
&+|\nabla\chi F(|x-vt|\leqq|vt|/4)e^{-itH_0}(P-mv)g(P-mv)F(|x|\leqq|vt|/8)\phi_v|] \\
&\leqq b_{14}[|F(|x|>|vt|/8)\phi_0|+|\nabla\chi F(|x-vt|\leqq|vt|/4)| \\
&+|F(|x-vt|>|vt|/4)e^{-itH_0}(P-mv)g(P-mv)F(|x|\leqq|vt|/8)\phi_v|] \\
&\leqq b_{14}[|F(|x|>|vt|/8)\phi_0|+|\nabla\chi F(|x|>3|vt|/4)| \\
&+|F(|x-vt|>|vt|/4)e^{-itH_0}(P-mv)g(P-mv)F(|x|\leqq|vt|/8)\phi_v|]
\end{aligned}
$$

Como cada una de las coordenadas de $\nabla\chi$ están en S, se sigue de la última ecuación, de la afirmación 7.0.10, y del corolario 3.0.2 que existe una constante b_{12} tal que

$$
|\nabla\chi\cdot(P-mv)e^{-itH_0}\phi_v| \leqq b_{12}(1+|vt|/8)^{-l} \tag{7.19}
$$

De manera análoga concluimos que existe una constante b_{15} tal que.

$$
|\nabla\chi\cdot ve^{-itH_0}\phi_v| \leqq b_{16}|v|(1+|vt|/8)^{-l} \tag{7.20}
$$

De 7.19 y 7.20 obtenemos que existe una constante b_{16}

$$
|\nabla\chi\cdot Pe^{-itH_0}\phi_v| \leqq b_{16}(1+|v|)(1+|vt|/8)^{-l} \tag{7.21}
$$

De manera similar probamos que existe una constante b_{17} que depende de l tal que

$$
|A\cdot(P\chi)e^{-itH_0}\phi_v| \leqq b_{17}(1+|vt|/8)^{-l} \tag{7.22}
$$

De 7.13 y 7.14 obtenemos que existe una constante b_{18} tal que

$$(7.23) \qquad |\chi A e^{-itH_0}(P)\phi_v| \leqq b_{18}(1+|vt|/8)^{-l}(1+|v|)$$

De 7.15, 7.18, 7.21, 7.22 y 7.23 obtenemos que existe una constante C_l tal que

$$(7.24) \qquad |V(x,P)e^{-itH_0}\phi_v| \leqq C_l(1+|v|)(1+|vt|/8)^{-l}, \forall l \in \mathbb{N}$$

Entonces, si $r, s \in \mathbb{R}^+$, $0 \leqq |\int_s^r e^{itH(a)}V(x,P)e^{-itH_0}\phi_v| \leqq \int_s^r C_l(1+|v|)(1+|vt|/8)^{-l} \to 0(s,t\to\infty)$. Se concluye que la red $\{a_r\}, r \in \mathbb{R}^+$ tal que $a_r = \int_0^r e^{itH(A)}V(x,P)e^{-itH_0}\phi_v$ es de Cauchy. de manera que existe la integral.

$$\int_0^\infty e^{itH(a)}V(x,P)e^{-itH_0}\phi_v$$

De manera que $W_+(A)\phi_v$ existe, y como los elementos de la forma ϕ_v son densos en $L_2(\mathbb{R}^2)$, se sigue que $W_+(A)\phi$ existe $\forall\phi \in L_2(\mathbb{R}^2)$ y para todo A que cumpla con 7.2.

Sea $A \in \mathcal{A}(\alpha_K, B_K)$ arbitrario. Sea $A(f,Q)$ que satisface 7.2 y sea λ como en el capítulo 1 tal que $A = A^{f,Q} + \nabla\lambda$. Por el teorema 2.0.20 se cumple:

$$(7.25) \qquad H(A) = e^{i\lambda(x)H(A^{f,Q})}e^{-i\lambda(x)}$$

Por el teorema 3.0.26, si $E(w), w \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ es la resolución de la identidad para $H(A^{f,Q})$, entonces $e^{i\lambda(x)}E(w)e^{-i\lambda(x)}$ es la resolución de la identidad para H(A).

$$\langle e^{itH(A)}f, g\rangle = \int e^{it\lambda}d\langle E(\cdot)e^{-i\lambda(x)f}, e^{-i\lambda(x)}g\rangle$$

$$\langle e^{itH(A^{f,Q})}e^{-i\lambda(x)}f, e^{-i\lambda(x)}g\rangle$$

Se concluye que

$$e^{itH(A)} = e^{i\lambda(x)}e^{itH(A^{f,Q})}e^{-i\lambda(x)}$$

Por lo tanto,

$$(7.26) \qquad W_+(A)\phi_v = e^{i\lambda(x)}s - \lim_{t\to\infty} e^{itH(A^{f,Q})}e^{-i\lambda(x)}e^{-itH_0}\phi_v$$

Afirmación 7.0.11. *La multiplicación por* $e^{-i\lambda(x)} - e^{-i\lambda_\infty(x)}$ *es compacto, en donde* $\lambda_\infty(x)$ *es como en el capítulo 1*

Demostración. Por el teorema 5.0.44, la función

$$\begin{aligned} \tilde{h}_r &: W^{2,2}(\mathbb{R}^2) \to L_2(B_r(0)) \\ \tilde{h}_r(f) &= f|_{B_r(0)} \end{aligned} \tag{7.27}$$

Es compacta

Como la multiplicación por $(e^{-i\lambda(x)} - e^{-i\lambda_\infty(x)})$ es continua, entonces la función

$$\begin{aligned} h_r &: W^{2,2}(\mathbb{R}^2) \to L_2(B_r(0)) \\ h_r(f) &= (e^{-i\lambda(x)} - e^{-i\lambda_\infty(x)})f|_{B_r(0)} \end{aligned} \tag{7.28}$$

Es compacta. Pero, como se mostró en el capítulo 1, $|\lambda(x) - \lambda_\infty(x)| \leqq \int_{|x|}^\infty a(r)dr$ para $|x| \geqq M$ en donde $K \subset B_M(0)$. Como e^{iy} es uniformemente continua en $[-\infty, \infty]$ (porque es periódica y continua), dada $\epsilon > 0 \exists \delta > 0$ tal que si $|y - z| < \delta, |e^{iy} - e^{ix}| < \epsilon$.
Como $a \in L_1(\mathbb{R}) \Rightarrow$ dada $\delta > 0, \exists r_0 > M \in \mathbb{R}$ tal que $\int_{r_0}^\infty a(r)dr < \delta$ Si $|x| > r_0 \Rightarrow |\lambda(x) - \lambda_\infty(x)| < \delta \Rightarrow |e^{-i\lambda(x)} - e^{-i\lambda_\infty(x)}| < \epsilon$
Entonces si $r > 0$, $(\int |h_r(f) - (e^{-it\lambda(x)} - e^{-it\lambda_\infty(x)})f|^2)^{1/2} = (\int_{B_r(0)^c} |e^{-it\lambda(x)} - e^{-i\lambda_\infty(x)}|^2|f|^2)^{1/2} =\leqq \epsilon|f|_2$.
Por lo tanto $|h_r - (e^{-i\lambda(x)} - e^{-i\lambda_\infty(x)})| < \epsilon \forall r > r_0$, entonces $(e^{-i\lambda(x)} - e^{-i\lambda_\infty(x)}) = \lim_{r\to\infty} h_r$ en donde el límite es tomado con la topología inducida por la norma de operadores, como el conjunto de operadores compactos es cerrado en el espacio de los operadores continuos, y h_r es compacto $\forall r$, se concluye que $e^{-i\lambda(x)} - e^{-i\lambda_\infty(x)}$ es un operador compacto. □

Como por el lema 4.0.13 y por el teorema 4.0.39, $\lim^{devil} e^{-itH_0}\phi_v = 0$ y $(e^{-i\lambda(x)} - e^{-i\lambda_\infty(x)})$es compacto , entonces se sigue como en la discusión posterior a la afirmación 7.0.6 que $s - \lim_{t\to\infty} e^{-itH(A^{f,Q})}J(e^{-i\lambda(x)} - e^{-i\lambda_\infty(x)})e^{-itH_0}\phi_v = 0$.
De manera que
$s - \lim_{t\to\infty} e^{itH(A^{f,Q})}e^{-i\lambda(x)}Je^{-itH_0}\phi_v = s - \lim e^{itH(A^{f,Q})}Je^{-i\lambda_\infty(x)}e^{-itH_0}\phi_v$, siempre que exista cualquiera de los dos límites.

Se concluye.

$$(7.29) \qquad W_+(A)\phi_v = e^{i\lambda(x)}s - \lim_{t\to\infty} e^{itH(A^{f,Q})}je^{-i\lambda_\infty(x)}e^{-itH_0}\phi_v$$

Si $\phi \in L_2(\mathbb{R}^2)$, entonces ϕ define una distribución temperada, por lo que haremos los siguientes cálculos en el sentido de distribuciones temperadas extendiendo el concepto del operador P de la manera natural (en los que haremos uso del teorema 2.0.21).
Denotamos por Ψ a la transformada de Fourier.

$$\begin{aligned}
&e^{itH_0}x_ie^{-itH_0}\phi = \Psi^{-1}e^{itp^2/(2m)}\Psi x_i\Psi^{-1}e^{-itp^2/(2m)}\widehat{\phi} \\
&= \Psi^{-1}e^{itp^2/(2m)}\Psi\Psi^{-1}i\frac{\partial}{\partial p_i}e^{-itp^2/(2m)}\widehat{\phi}(p) \\
&= \Psi^{-1}e^{ip^2/2m}i(-i2tp_i/(2m)e^{-itp^2/2m}\widehat{\phi}(p) + e^{-itp^2/2m}\frac{\partial}{\partial p_i}\widehat{\phi}(p)) \\
&= \Psi^{-1}(i\frac{\partial}{\partial p_i} + (t/m)p_i)\widehat{\phi}(p) \\
&= (\Psi^{-1}(t/m)p_i\Psi + x_i\Psi^{-1}\widehat{\Psi})\phi \\
&= (x_i + P_it/m)\phi
\end{aligned}$$

Entonces,

(7.30)
$e^{itH_0}x_ie^{-itH_0}\phi = x_i + P_it/m$(en el sentido de distribuciones temperadas.)

Queremos ver que la igualdad anterior la tenemos en el sentido usual. Primeramente veremos que los dominios de los dos operadores son iguales. $Dom(e^{-tH_0}x_ie^{-itH_0}) = \{\phi \in L_2 : x_ie^{-itH_0}\phi \in L_2\} = \{\phi \in L_2 : x_i\Psi^{-1}e^{-itp^2/2m}\widehat{\phi} \in L_2\} = \{\phi \in L_2 : i\frac{\partial}{\partial p_i}e^{-itp^2/(2m)}\widehat{\phi} \in L_2\}$ esto último se debe al teorema 2.0.22.
Es directo verificar que $\frac{\partial}{\partial p_i}(e^{-itp^2/2m}\widehat{\phi}(p)) = -it/mp_ie^{-itp^2/2m}\widehat{\phi}(p)+$ $e^{-itp^2/2m}(\frac{\partial}{\partial p_i}\widehat{\phi}(p))$(en el sentido distribucional).
Pero $-i(t/m)p_ie^{-itp^2/2m}\widehat{\phi}(p)+e^{-itp^2/2m}\frac{\partial}{\partial p_i}\widehat{\phi} \in L_2 \Leftrightarrow (t/m)p_i\widehat{\phi}(p)+i\frac{\partial}{\partial p_i}\widehat{\phi}(p) \in L_2 \Leftrightarrow \Psi^{-1}((t/m)p_i\widehat{\phi}(p)+i\frac{\partial}{\partial p_i}\widehat{\phi}(p)) \in L_2 \Leftrightarrow (x_i+P_it/m)\phi \in L_2\Psi \in Dom((x_i+P_it/m))$.

Se concluye que

$$(7.31)\qquad e^{itH_0}x_ie^{-itH_0}\phi = x_i + P_it/m(\text{en el sentido usual})$$

Como x_i es autoadjunto y e^{-itH_0} es unitario, entonces $x_i + P_it/m$ es autoadjunto, por lo tanto, tiene su resolución espectral. Sea E_i la resolución espectral de x_i y sea F_i la resolución espectral de $x_i + P_it/m$, entonces se sigue de 7.31 y del teorema 3.0.26 que $F_i(w) = e^{itH_0}E_i(w)e^{-itH_0}$.
Se define la función $F : \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \to P(H)$, en donde P(H) son la proyecciones sobre el espacio de Hilbert $L_2(\mathbb{R}^2)$ como sigue:

$$(7.32)\qquad F(w) = e^{itH_0}E_1 \times E_2(w)e^{-itH_0}$$

En donde $E_1 \times E_2$ es la resolución de la identidad producto definida en el capítulo 6.
Es fácil verificar que F define una resolución de la identidad y que cumple que $\langle x_i + P_it/m\phi, \psi\rangle = \int_{\mathbb{R}^2} x_id\langle F(\cdot)\phi, \psi\rangle$.
Por la unicidad en el teorema espectral para dos operadores, obtenemos que:

$$(7.33)\qquad F_1 \times F_2 = e^{itH_0}E_1 \times E_2e^{-itH_0}$$

Si $\lambda : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es medible, se define $\lambda(x+Pt/m) : L_2(\mathbb{R}^2) \to L_2(\mathbb{R}^2)$ como la función que cumple lo siguiente

$$(7.34)\qquad \langle\lambda(x + Pt/m)\phi, \psi\rangle = \int_{\mathbb{R}^2} \lambda((x_1, x_2))d\langle F_1 \times F_2(\cdot)\phi, \psi\rangle.$$

Como $F_2 \times F_2 = e^{itH_0}E_1 \times E_2e^{-itH_0}$, se obtiene que

$$\langle\lambda(x + Pt/m)\phi, \psi\rangle = \int_{\mathbb{R}^2} \lambda((x_1, x_2))d\langle E_1 \times E_2(\cdot)e^{-itH_0}\phi, e^{-itH_0}\psi\rangle.$$
$$= \langle\lambda(x)e^{-itH_0}\phi, e^{-itH_0}\psi\rangle$$
$$= \langle e^{itH_0}\lambda(x)e^{-itH_0}\phi, \psi\rangle$$

De manera que

$$\lambda(x + Pt/m) = e^{itH_0}\lambda(x)e^{-itH_0} \tag{7.35}$$

Supongamos ahora que λ es homogénea de grado 0 y continua cuando la restringimos a la esfera S^1.
Como $mx/t + P = m/t(x + Pt/m)$, se sigue que si $G : \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \to P(H)$ es la resolución de la identidad para $mx/t + P$, entonces $G(w) = F_1 \times F_2(wt/m)$, puesto que.

$$\begin{aligned}
\langle m/t(x_i + P_i t/m)\phi, \psi\rangle &= \int x_i d\langle F_1 \times F_2(w) m/t\phi, \psi\rangle \\
&= \int x_i m/t d\langle F_1 \times F_2(w)\phi, \psi\rangle \\
&= \int x_i d\langle F_1 \times F_2(w(t/m))\phi, \psi\rangle
\end{aligned}$$

Entonces se sigue de la unicidad del teorema espectral para dos operadores que $G(w) = F_2 \times F_2(wt/m)$

$$\begin{aligned}
\langle \lambda(mx/t + P)\phi, \psi\rangle &= \int \lambda((x_1, x_2)) d\langle G(w)\phi, \psi\rangle \\
&= \int \lambda((x_1, x_2)) d\langle F_1 \times F_2(wt/m)\phi, \psi\rangle \\
&= \int \lambda(m/t((x_1), x_2)) d\langle F_1 \times F_2(w)\phi, \psi\rangle \\
&= \int \lambda((x_1, x_2)) d\langle F_1 \times F_2(w)\phi, \psi\rangle \\
&= \langle \lambda(x + Pt/m)\phi, \psi\rangle
\end{aligned}$$

Se obtiene que

$$\lambda(mx/t + P) = \lambda(x + Pt/m) \tag{7.36}$$

En el siguiente cálculo se hacen las operaciones en el sentido de distribuciones temperadas.

$$
\begin{aligned}
&e^{-ix^2m/(2t)}P_i e^{ix^2m/(2t)}\phi = e^{-ix^2m/(2t)}(-i)\frac{\partial}{\partial x_i}\phi e^{ix^2m/(2t)} \\
&= e^{-ix^2m/(2t)}(-ie^{ix^2m/(2t)}(imx/te^{ix^2m/(2t)} + e^{ix^2m/(2t)}\frac{\partial}{\partial x_i}\phi)) \\
&= mx/(t)\phi + P\phi
\end{aligned}
$$

Para verificar a partir de lo anterior que los operadores $x/(tm) + P$ y $e^{-ix^2m/(2t)}P_i e^{ix^2m/(2t)}$ son iguales, hay que verificar que sus dominios son los mismos; esto se hace de manera semejante a 7.31, de manera que se omite el cálculo. Entonces:

$$
e^{-ix^2m/(2t)}P_i e^{ix^2m/(2t)} = xm/t + P_i \tag{7.37}
$$

Sea h_i la resolución de la identidad para P_i, entonces se concluye como antes que la resolución de la identidad para $xm/t + P$ es $e^{-ix^2m/(2t)}h_1 \times h_2 e^{ix^2m/(2t)}$, de manera que se demuestra como antes que

$$
\lambda(xm/t + P) = e^{-ix^2m/(2t)}\lambda(P)e^{ix^2m/(2t)} \tag{7.38}
$$

Y por 7.36 se obtiene que

$$
\lambda(x + tP/m) = e^{-ix^2m/(2t)}\lambda(P)e^{ix^2m/(2t)} \tag{7.39}
$$

Sea $f \in L_2(\mathbb{R}^2)$.
Se sigue del teorema de convergencia dominada de Lebesgue que $\lim_{t\to\infty} e^{ix^2m/(2t)}f = f$, como λ es acotada, entonces $\lambda(P)$ es continua, por lo tanto $\lim_{t\to\infty} \lambda(P)e^{ix^2m/(2t)}f = \lambda(P)f$, de manera que

$$
\lim_{t\to\infty} e^{-ix^2m/(2t)}\lambda(P)e^{ix^2m/(2t)} = \lambda(P) \tag{7.40}
$$

De 7.35 y 7.39 se tiene que $e^{-ix^2m(2t)}\lambda(P)e^{ix^2m/(2t)} = e^{itH_0}\lambda(x)e^{-itH_0}$, por lo tanto.

$$
\lim_{t\to\infty} e^{itH_0}\lambda(x)e^{-itH_0}f = \lambda(P)f \tag{7.41}
$$

Pongamos ahora $e^{-i\lambda_\infty(x)}$ en lugar de $\lambda(x)$, entonces de 7.41 y de 7.29 se sigue:

$$
\begin{aligned}
W_+(A)\phi_v &= e^{-i\lambda(x)} \lim_{t\to\infty} e^{itH_{A^{f,Q}}} J e^{-itH_0} e^{itH_0} e^{-i\lambda_\infty(x)} e^{-itH_0}\phi_v \\
&= e^{i\lambda(x)} W_+(A^{f,Q}) e^{-i\lambda_\infty(P)}\phi_v \qquad (7.42)
\end{aligned}
$$

Como los ϕ_v son densos en $L_2(\mathbb{R}^2)$, se concluye que.

$$
W_+(A)\phi = e^{i\lambda(x)} W_+(A^{f,Q}) e^{-i\lambda_\infty(P)}\phi \forall \phi \in L_2(\mathbb{R}^2) \qquad (7.43)
$$

Esto último prueba la existencia del operador de onda al igual que la fórmula para cambio de norma en el potencial magnético, ya que el mismo argumento se puede usar para el caso de dos potenciales $A^1 y A^2$ arbitrarios. $\square$

En el caso de W_- procedemos como antes usando el hecho de que $\lambda_\infty(x + Pt/m) = \lambda_\infty(-mx/t - P)$.
El hecho de que los operadores de onda son isométricos es una consecuencia de que $e^{itH(A)}$ y e^{-itH_0} son unitarios y que $(1 - \chi_\Omega)(H_0 + 1)^{-1}$ es compacto.

Capítulo 8

Aproximaciones para los operadores de onda

Definición 8.0.23. *Dado $v \in \mathbb{R}^2$ definimos*

$$\Omega_{\widehat{v}} := \{x \in \Omega : x + \widehat{v}\tau \in \Omega \forall \tau \in \mathbb{R}\}$$

En donde $\widehat{v} = v/|v|$

En este capítulo se demuestra lo siguiente:

Teorema 8.0.58. *Para toda $A \in \mathcal{A}(\alpha_K, B_K)$, para toda $\phi_0 \in C_0^\infty(\Omega_{\widehat{v}})$.*

$$|(e^{-imv\cdot x}W_\pm(A)e^{imv\cdot x} - e^{-i\int_0^{\pm\infty} \widehat{v}\cdot A(x+\widehat{v}\tau)d\tau})\phi_0| = O(1/v), v \to \infty$$

El trabajo en este capítulo está encaminado a demostrar el teorema que se acaba de enunciar.
Como $\phi_0 \in C_0^\infty(\Omega_{\widehat{v}})$. la distancia entre K y el conjunto $\{x : x = y - \widehat{v}\tau, \tau \in \mathbb{R}, y \in sop(\phi_0)\}$ es positiva, de manera que existe una función $\kappa \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ tal que es cero en una vecindad de K y es 1 en el conjunto $\{x : x = y + \widehat{v}\tau, \tau \in \mathbb{R}, y \in sop(\phi_0)\} \cup \{x : |x| \geqq M\}$ para alguna M suficientemente grande.
Introducimos la notación $\tilde{A}(x) = \kappa(x)A^{f,Q}(x)$. En donde $A^{f,Q}$ es como en el capítulo 1.

$$H_1 := 1/|v|e^{-imv\cdot x}H_0e^{imv\cdot x}. \tag{8.1}$$
$$H_2 := 1/|v|e^{-imv\cdot x}H(A^{f,Q})e^{imv\cdot x}$$

Obsérvese que el operador $u(\phi) = e^{imv\cdot x}\phi$ es unitario de adjunto $u^{-1}(\phi) = e^{-imv\cdot x}\phi$.

Veamos como es e^{-itH_1}.

Usando el teorema 3.0.26 obtenemos que la resolución de la identidad para $e^{-imv\cdot x}H_0e^{imv\cdot x}$ es $e^{-im\cdot x}E_0e^{imv\cdot x}$, en donde E_0 es la resolución de la identidad para H_0 .
Es fácil verificar (por medio de la unicidad en el teorema espectral) que dado un operador autoadjunto B en un espacio de Hilbert H, la resolución de la identidad para $1/|v|B$ es la función $F : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to P(H)$ dada por $F(w) = E(w|v|)$ en donde E es la resolución de la identidad para B.
Entonces $\langle e^{-itH_1}f, g\rangle = \int e^{-it\lambda}d\langle E(w|v|)e^{imv\cdot x}f, e^{imv\cdot x}g\rangle = \int e^{-it/|v|\lambda}$
$d\langle E(w)e^{-mv\cdot x}f, e^{imv\cdot x}g\rangle$
$= \langle e^{-itmv\cdot x}e^{-it/|v|H_0}e^{itmv\cdot x}f, g\rangle$.
De manera que $e^{-itH_1} = e^{-imv\cdot x}e^{-it/|v|H_0}e^{imv\cdot x}$.
De manera análoga se concluye que $e^{itH_2} = e^{-imv\cdot x}e^{it/|v|H(A^{f,Q})}e^{imv\cdot x}$.
Entonces se concluye de lo anterior , de la afirmación 7.0.6 y de los comentarios siguientes a ésta que

$$e^{-imv\cdot x}W_+(A^{f,Q})e^{imv\cdot x} = s - \lim_{n\to\infty} e^{itH_2}\kappa(x)e^{-itH_1} \tag{8.2}$$

Como $\tilde{A}(x + \widehat{v}\tau) = A^{f,Q}(x + \widehat{v}\tau)\forall x \in sop(\phi_0)$, entonces

$$\begin{aligned}(e^{-imv\cdot x}W_+(A^{f,Q}))e^{imv\cdot x} - e^{-i\int_0^\infty \widehat{v}\cdot(A^{f,Q}(x+\widehat{v}\tau))d\tau})\phi_0 \\ = s - \lim_{t\to\infty}[e^{itH_2}\kappa e^{-itH_1} - e^{\int_0^t \widehat{v}\cdot\tilde{A}(x+\widehat{v}\tau)d\tau}]\phi_0\end{aligned} \tag{8.3}$$

Sea $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ tal que $g(k) = 1, |k| \leqq 1$ y $g(k) = 0, |k| \geqq 2$. Entonces como $\phi_0 \in S(\mathbb{R}^2)$.

$$|(g(p/|v|^\rho) - 1)\widehat{\phi_0}(p)| \leqq \chi_{B_{|v|^\rho}(0)^c}|\widehat{\phi_0}(p)|$$
$$\Rightarrow |g(p/|v|^\rho - 1)\widehat{\phi_0}(p)|_2^2 \leqq \int_{B_{|v|^\rho}(0)^c} |\widehat{\phi_0}|^2.$$

Sea $M = \sup\{(1 + |p|)^{2N+2}\widehat{\phi}(p)\}$

$$\leqq \int_{B_{|v|^\rho}(0)^c} M/(1 + |p|)^{2N}1/(1 + |p|)^2$$
$$\leqq M/(1 + |v|^\rho)^{2N}\int_{\mathbb{R}^2} 1/(1 + |p|)^2$$
$$\leqq C/|v|^{2N\rho}$$

En donde C es una constante, de manera que como la transformada de Fourier Ψ es una isometría, $|\Psi^{-1}((g(p/|v|^{\rho})-1)\widehat{\phi_0}(p))| \leqq C/|v|^{\rho N}$, se obtiene lo siguiente:

$$(8.4) \qquad |(g(P/|v|^{\rho})-1)\phi_0|_2 = O(1/|v|^{\rho N}), |v| \to \infty, \rho > 0.$$

Como $\phi_0 = \phi_0 - g(P/|v|^{\rho})\phi_0 + (P/|v|^{\rho})\phi_0$ y $|e^{itH_2}\kappa e^{-itH_1}|$ $\leqq 1, |\kappa e^{-i\int_0^{\infty}\widehat{v}\cdot\tilde{A}(x+\widehat{v}\tau d\tau)}| \leqq 1 \Rightarrow |(e^{itH_2}\kappa e^{-itH_1} - \kappa e^{-i\int_0^{\infty}\widehat{v}\cdot\tilde{A}(x+\widehat{v}\tau d\tau)})$ $(\phi_0 - g(P/|v|^{\rho})\phi_0)|_2 = O(1/v^{N\rho}), v \to \infty$

Para demostrar el teorema 8.0.58 es suficiente demostrar:

$$(8.5) \qquad \lim_{t\to\infty} |[e^{itH_2}\kappa e^{-itH_1} - \kappa e^{-i\int_o^t \widehat{v}\cdot\tilde{A}(x+\widehat{v}\tau)d\tau}]\tilde{\phi}| = O(1/v), v \to \infty.$$

En donde $\tilde{\phi} = g(P/|v|^{\rho})\phi_0$

Lema 8.0.15. *Sea $h \in C^1(\mathbb{R}^2)$, tal que ella y sus primeras derivadas son acotadas, entonces el operador $\frac{\partial}{\partial x_i}h$ contiene en su dominio a $W^{1,2}(\mathbb{R}^2)$ y restringido al espacio $W^{1,2}$ es igual al operador $\frac{\partial h}{\partial x_i} + h\frac{\partial}{\partial x_i}$(el dominio del operador $\frac{\partial}{\partial x_i}$ es $W^{1,2}(\mathbb{R}^2)$).*

Demostración. Como $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^2)$ es denso en $L_2(\mathbb{R}^2)$, sea $\{\phi_n\} \subset C_0^{\infty}$ una sucesión que converja a f en L_2, sea $\phi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^2)$, entonces $\int \phi_n\phi - \int f\phi \leqq |\phi_n - f|_2^2|\phi|_2^2$, de manera que $\phi_n \to^{D'} f$, es claro además que $h(x)\phi_n \to^{D'} h(x)f$, pues h es acotada.
Como $\phi_n \in C_0^{\infty}$, entonces sus derivadas distribucionales coinciden con las derivadas normales y también es cierto que $\frac{\partial}{\partial x_i}h\phi_n = \phi_n\frac{\partial}{\partial x_i}h + h\frac{\partial}{\partial x_i}\phi_n$ (ya sea en sentido distribucional o normal).
Como $\phi_n \to^{D'} f \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_i}\phi_n \to^{D'} \frac{\partial}{\partial x_i}f$ como $\frac{\partial}{\partial x_i}h$ es acotado, $(\frac{\partial}{\partial x_i}h)\phi_n \to^{D'}$ $(\frac{\partial}{\partial x_i}h)f$. Por lo tanto $\frac{\partial}{\partial x_i}(h\phi_n) = (\frac{\partial}{\partial x_i}h)\phi_n + h\frac{\partial}{\partial x_i}\phi_n \to^{D'} (\frac{\partial}{\partial x_i}h)f + h\frac{\partial}{\partial x_i}f$, pero $\frac{\partial}{\partial x_i}(h\phi_n) \to^{D'} \frac{\partial}{\partial x_i}(hf)$, se concluye que $hf \in W^{1,2}(\mathbb{R}^2)$ y que $\frac{\partial}{\partial x_i}(hf) = (\frac{\partial}{\partial x_i}h)f + hd\frac{\partial}{\partial x_i}f$ □

Teorema 8.0.59.

$$(P - \tilde{A}(x))e^{-i\int_0^t \widehat{v}\cdot\tilde{A}(x+\widehat{v}\tau)d\tau} = e^{-i\int_0^t \widehat{v}\cdot\tilde{A}(x+\widehat{v}\tau)d\tau}(P - b(x.t)).$$

En donde $b(x,t) := \tilde{A}(x+\widehat{v}t) + \int_0^t(\widehat{v}\times\tilde{B})(x+\widehat{v}\mu)d\mu$ *y* $(\widehat{v}\times\tilde{B}) = \sum_{j=1}^2(\tilde{F}_{ij})\widehat{v}_j, \tilde{F}_{ij}$ $= \frac{\partial}{\partial x_i}\tilde{A}_j - \frac{\partial}{\partial x_j}\tilde{A}_i$

Demostración. Notemos primero que como la función $h(x) = e^{-i\int_0^t \widehat{v}\cdot\tilde{A}(x+\widehat{v}\tau)d\tau}$ es derivable y sus primeras derivadas son acotadas, entonces $hf \in W^{1,2} \forall f \in W^{1,2}$ y además $si f \in W^{1,2}, h^{-1}f \in W^{1,2}$ de manera que $hf \in W^{1,2} \Leftrightarrow f \in W^{1,2}$. Del lema anterior se sigue que:

$$\begin{aligned}
(8.6)\qquad & (P_i - \tilde{A}(x))e^{-i\int_0^t \widehat{v}\cdot\tilde{A}(x+\widehat{v}\tau)d\tau} \\
&= -\int_0^t \widehat{v}\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}\tilde{A}(x+\widehat{v}\tau)d\tau e^{-i\int_0^t \widehat{v}\cdot\tilde{A}(x+\widehat{v}\tau)d\tau} \\
&+ e^{-i\int_0^t \widehat{v}\cdot\tilde{A}(x+\widehat{v}\tau)d\tau}P_i - e^{-i\int_0^t \widehat{v}\cdot\tilde{A}(x+\widehat{v}\tau)d\tau}\tilde{A}
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
&(\widehat{v}\times\tilde{B})_1(x+\widehat{v}\mu) = (\frac{\partial}{\partial x_1}\tilde{A}_2\widehat{v}_2 - \frac{\partial}{\partial x_2}\tilde{A}_1\widehat{v}_2)(x+\widehat{v}\mu) \\
&= (\frac{\partial}{\partial x_1}\tilde{A}_2\widehat{v}_2 - \frac{\partial}{\partial x_2}\tilde{A}_1\widehat{v}_2 - \frac{\partial}{\partial x_1}\tilde{A}_1\widehat{v}_1 + \frac{\partial}{\partial x_1}\tilde{A}_1\widehat{v}_1)(x+\widehat{v}\mu) \\
&= \widehat{v}\cdot\frac{\partial}{\partial x_1}\tilde{A}(x+\widehat{v}\mu) - \frac{\partial}{\partial\mu}(\tilde{A}_1(x+\widehat{v}\mu)) \\
&\int_0^t(\widehat{v}\times\tilde{B})(x+\widehat{v}\mu)d\mu = \int_0^t \widehat{v}\cdot\frac{\partial}{\partial x_1}(\tilde{A}(x+\widehat{v}\mu))d\mu \\
&- \tilde{A}_1(x+\widehat{v}t) + \tilde{A}_1(x)
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
(8.7)\qquad & \int_0^t(\widehat{v}\times\tilde{B})_1(x+\widehat{v}\mu)d\mu = \int_0^t \widehat{v}\cdot\frac{\partial}{\partial x_1}(\tilde{A}(x+\widehat{v}\mu))d\mu \\
& - \tilde{A}_1(x+\widehat{v}t) + \tilde{A}_1(x)
\end{aligned}$$

De manera análoga,

$$\begin{aligned}
(8.8)\qquad & \int_0^t(\widehat{v}\times\tilde{B})_2(x+\widehat{v}\mu)d\mu = \int_0^t \widehat{v}\cdot\frac{\partial}{\partial x_1}(\tilde{A}(x+\widehat{v}\mu))d\mu \\
& - \tilde{A}_2(x+\widehat{v}t) + \tilde{A}_2(x)
\end{aligned}$$

De 8.6, 8.7 y 8.8, se obtiene lo que queremos. □

Observación 8.0.6. $b(x,t) \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$

Demostración. Vemos que $(\widehat{v} \times \tilde{B})_1 = (\nabla \times \tilde{A})\widehat{v}_2$ y $\widehat{v} \times \tilde{B}_2 = -(\nabla \times \tilde{A})\widehat{v}_1$, de manera que para ver que $b(x,t) \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, es suficiente ver que $\nabla \times \tilde{A} \in C^1(\mathbb{R}^2)$.
$\tilde{A} = \kappa A^{f,Q}$, y $\kappa = 0$ en una vecindad de K, como $A^{f,Q}$ y sus primeras derivadas son continuas fuera cualquier vecindad de K, entonces $\nabla \times A^{f,Q}$ en sentido distribucional y en sentido usual coinciden cuando restringimos el dominio de la distribución $\nabla \times A^{f,Q}$ a conjuntos abiertos que no intersectan a una vecindad de K, por lo tanto, si u es una vecindad cerrada de K en la que κ se anula y $v = u^c$, entonces $\nabla \times A^{f,Q}(x) = B_R(x) \forall x \in v$(ya que B_R es la derivada distribucional de $A^{f,Q}$ y porque tanto $\nabla \times A^{f,Q}$ y B_R son continuas en v). Sea u_1 una vecindad cerrada de K , en donde κ se anula, sea u_2 una vecindad abierta de k contenida en u_1, sea u una vecindad compacta de K contenida en u_2 y sea $v = u^c$, entonces $\nabla \times \kappa A^{f,Q}(x) = \kappa \nabla \times (A^{f,Q})(x) + A^{f,Q}(\frac{\partial \kappa}{\partial x_1} - \frac{\partial \kappa}{\partial x_2})(x) = \kappa B_R(x) + A^{f,Q}(\frac{\partial \kappa}{\partial x_1} - \frac{\partial \kappa}{\partial x_2})(x) \forall x \in v$ y también $\nabla \times \kappa A^{f,Q}(x) = 0 \forall x$ en una vecindad de ∂v.Como $B_R \in C_0'^1(\bar{\Omega})$, se concluye que la función definida por:

$$G(x) = \begin{cases} \kappa B_R(x) + A^{f,Q}(\frac{\partial \kappa}{\partial x_1} - \frac{\partial \kappa}{\partial x_2}) & \text{si } x \in v \\ 0 & \text{si } x \in v^c \end{cases}$$

Esta en $C^1(\mathbb{R}^2)$, y es claro que $G = \nabla \times \tilde{A}$. □

Teorema 8.0.60. *Sea $\phi \in S(\mathbb{R}^2)$, entonces $e^{-i\int_0^{t-\tau} \widehat{v}\cdot\tilde{A}(x+\widehat{v}\mu)d\mu}\kappa\phi \in DomH_2$*

Demostración. Para facilitar la notación , pondremos A en lugar de $A^{f,Q}$.
Es suficiente demostrar que si $\phi \in S(\mathbb{R}^2)$, entonces $e^{imv\cdot x}e^{-i\int_0^{t-\tau} \widehat{v}\cdot\tilde{A}(x+\widehat{v}\mu)d\mu}\kappa\phi \in DomH(A)$ Sea $q_A(\phi,\psi) = 1/(2m)\langle (P-A)\phi, (P-A)\psi\rangle$ como en el capítulo 2. Con dominio $C_0^1(\Omega)$.
Si $\phi \in S$, existe una sucesión de funciones $\{\phi_n\} \subset D(\mathbb{R}^2)$ tal que $\phi_n \to^S \phi$ (pues D es denso en S), por lo tanto, $\phi_n \to^S \phi$ y $P_j\phi_n \to^s P_j\phi$ (en donde $P_j = -i\frac{\partial}{\partial x_j}$). Como $\tilde{A}$ es acotado y sus primeras derivadas también, $e^{-i\int_0^{t-\tau} \widehat{v}\cdot\tilde{A}(x+\widehat{v}\mu)d\mu}\tilde{A}\phi_n \to e^{-i\int_0^{t-\tau} \widehat{v}\cdot\tilde{A}(x+\widehat{v}\mu)d\mu}\tilde{A}\phi$ y $P_je^{-i\int_0^{t-\tau} \widehat{v}\cdot\tilde{A}(x+\widehat{v}\mu)d\mu}\phi_n \to P_je^{-i\int_0^{t-\tau} \widehat{v}\cdot\tilde{A}(x+\widehat{v}\mu)d\mu}\phi$.
Por lo tanto, $(P_j - A_j)e^{-i\int_0^{t-\tau} \widehat{v}\cdot\tilde{A}(x+\widehat{v}\mu)d\mu}\kappa\phi_n \to (P_j - A_j)e^{-i\int_0^{t-\tau} \widehat{v}\cdot\tilde{A}(x+\widehat{v}\mu)d\mu}\kappa\phi$.
Pero $e^{-i\int_0^{t-\tau} \widehat{v}\cdot\tilde{A}(x+\widehat{v}\mu)d\mu}\kappa\phi_n \in C_0^1(\Omega) = Dom(q_A)$, por lo tanto,
$e^{-i\int_0^{t-\tau} \widehat{v}\cdot\tilde{A}(x+\widehat{v}\mu)d\mu}e^{imv\cdot x}\kappa\phi \in Dom(\bar{q}_A)$ [1].

[1]Libro [1] , página 283, teorema 5,3

Sea $g = e^{imv\cdot x}\kappa(x)$ y sea $f = e^{-i\int_0^{t-\tau}\widehat{v}\cdot\tilde{A}(x+\widehat{v}\mu)d\mu}\phi$. Veamos que $fg \in Dom(H(A))$.
Sea $h \in Dom(q_A)$

$$\langle(P-A)fg,(P-A)h\rangle = \langle(P-A+\tilde{A}-\tilde{A})fg,(P-A+\tilde{A}-\tilde{A})h\rangle$$
$$= \langle(P-\tilde{A})fg,(P-\tilde{A})h\rangle + \langle(\tilde{A}-A)(P-\tilde{A})fg,h\rangle$$
$$+ \langle(\tilde{A}-A)fg,(P-\tilde{A})h\rangle + \langle(\tilde{A}-A)^2fg,h\rangle$$

Procedemos a analizar cada uno de los términos.
TERMINO

$$\langle(P-\tilde{A})fg,(P-\tilde{A})h\rangle$$

Como tanto f como g son derivables en $\mathbb{R}^2$, entonces $(P-\tilde{A})(fg) = g(P-\tilde{A})f + f(Pg)$ y por el teorema 8.0.59 esto último es igual a lo siguiente: $g(e^{-i\int_0^{t+\tau}\widehat{v}\cdot\tilde{A}(x+\widehat{v}\mu)d\mu})(P-b(x,t-\tau))\phi + f(Pg)$, entonces:

$$(P-\tilde{A})(fg) = g(e^{-i\int_0^{t+\tau}\widehat{v}\cdot\tilde{A}(x+\widehat{v}\mu)d\mu})(P-b(x,t-\tau))\phi + f(Pg)$$

Como $\phi \in S$ y b(x, t) es acotado al igual que g y sus derivadas, entonces $(P-\tilde{A})fg$ se anula en infinito. Como $b(x,t) \in C_0^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$, entonces $(P-\tilde{A})fg \in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$, de manera que podemos integrar por partes para obtener.

$$\langle(P-\tilde{A})fg,(P-\tilde{A})h\rangle = \langle(P-\tilde{A})^2fg,h\rangle \tag{8.9}$$

Aplicando de nuevo el teorema 8.0.59 obtenemos:

(8.10)
$$(P-\tilde{A})(P-\tilde{A})fg = (P-\tilde{A})(ge^{-i\int_0^{t-\tau}\widehat{v}\cdot\tilde{A}(x+\widehat{v}\mu)d\mu}(P-b(x,t-\tau))\phi + f(Pg))$$
$$= e^{-i\int_0^{t-\tau}\widehat{v}\cdot\tilde{A}(x+\widehat{v}\mu)d\mu}[(Pg)(P-b(x,t-\tau))\phi + g(P-b(x,t-\tau))\cdot$$
$$(P-b(x,t-\tau))\phi + (Pg)(P-b(x,t-\tau))\phi + \phi((P\cdot P)g)]$$

Obsérvese que como b es acotado, entonces $(P-\tilde{A})(P-\tilde{A})fg \in L_2(\mathbb{R}^2)$
TERMINO

$$\langle(\tilde{A}-A)(P-\tilde{A})fg,h\rangle$$

$$(\tilde{A}-A)(P-\tilde{A})fg = (\tilde{A}-A)f(Pg) + (\tilde{A}-A)ge^{-i\int_0^{t-\tau}\hat{v}\cdot\tilde{A}(x+\hat{v}\mu)d\mu}$$
$$(P-b(x,t-\tau))\phi \tag{8.11}$$

Es claro que $(\tilde{A}-A)(P-\tilde{A})fg \in L_2(\mathbb{R}^2)$
TERMINO

$$\langle(\tilde{A}-A)fg,(P-\tilde{A})h\rangle$$

Como $A\kappa$ es derivable en $\mathbb{R}^2$, podemos integrar por partes y obtenemos:

$$\langle(\tilde{A}-A)fg,(P-\tilde{A})h\rangle = \langle(P-\tilde{A})(\tilde{A}-A)fg,h\rangle \tag{8.12}$$

$$(P-\tilde{A})(\tilde{A}-A)fg = (\tilde{A}\kappa - A\kappa)fe^{imv\cdot x}$$
$$= (P-\tilde{A})(\tilde{A}\kappa-\tilde{A})fe^{imv\cdot x}$$
$$= f(P(\tilde{A}\kappa-\tilde{A})e^{imv\cdot x}) + (\tilde{A}\kappa-\tilde{A})e^{imv\cdot x}(e^{-i\int_0^{t-\tau}\hat{v}\cdot\tilde{A}(x+\hat{v}\mu)d\mu}(P-b(x,t-\tau))\phi$$

Por lo tanto,

(8.13)
$$\langle(\tilde{A}-A)fg,(P-\tilde{A})h\rangle =$$
$$\langle f(P(\tilde{A}\kappa-\tilde{A})e^{imv\cdot x}) + (\tilde{A}\kappa-\tilde{A})e^{imv\cdot x}(e^{-i\int_0^{t-\tau}\hat{v}\cdot\tilde{A}(x+\hat{v}\mu)d\mu}(P-b(x,t-\tau))\phi,h\rangle$$

Como las primeras derivadas de $\tilde{A}$ son acotadas, entonces $(P-\tilde{A})(\tilde{A}-A)fg \in L_2(\mathbb{R}^2)$
TERMINO

$$\langle(\tilde{A}-A)^2fg,h\rangle \tag{8.14}$$

A este término no le tenemos nada que hacer y es claro que está en $(L_2\mathbb{R}^2)$.

Por 8.9 8.14 , obtenemos:

$$
\begin{aligned}
(8.15)\quad & \langle (P-\tilde{A})fg,(P-\tilde{A})h\rangle = \langle e^{-i\int_0^{t-\tau}\widehat{v}\cdot\tilde{A}(x+\widehat{v}\mu)d\mu} \\
& [(Pg)(P-b(x,t-\tau))\phi + g(P-b(x,t-\tau))\cdot(P-b(x,t-\tau))\phi \\
& +(Pg)(P-b(x,t-\tau))\phi + \phi((P\cdot P)g)] \\
& +(\tilde{A}-A)f(Pg)+(\tilde{A}-A)ge^{-i\int_0^{t-\tau}\widehat{v}\cdot\tilde{A}(x+\widehat{v}\mu)d\mu}(P-b(x,t-\tau))\phi \\
& +f(P(\tilde{A}\kappa-\tilde{A})e^{imv\cdot x}) \\
& +(\tilde{A}\kappa-\tilde{A})e^{imv\cdot x}(e^{-i\int_0^{t-\tau}\widehat{v}\cdot\tilde{A}(x+\widehat{v}\mu)d\mu} \\
& (P-b(x,t-\tau))\phi+(\tilde{A}-A)^2fg \\
& ,h\rangle
\end{aligned}
$$

Como el primer término en el producto interior está en $L_2(\mathbb{R}^2)$ y la ecuación se cumple para toda h en el dominio de q_A, y, por lo tanto, para toda h en el domino de $\bar{q}_A$, por la construcción de $\bar{q}_A{}^2$, se sigue de la demostración del teorema 2.0.18 que $fg \in Dom(H(A))$ y que

$$
\begin{aligned}
(8.16)\quad & H(A)(fg) = 1/(2m)e^{-i\int_0^{t-\tau}\widehat{v}\cdot\tilde{A}(x+\widehat{v}\mu)d\mu} \\
& [(Pg)(P-b(x,t-\tau))\phi + g(P-b(x,t-\tau))\cdot(P-b(x,t-\tau))\phi \\
& +(Pg)(P-b(x,t-\tau))\phi + \phi((P\cdot P)g)] \\
& +(\tilde{A}-A)f(Pg)+(\tilde{A}-A)ge^{-i\int_0^{t-\tau}\widehat{v}\cdot\tilde{A}(x+\widehat{v}\mu)d\mu}(P-b(x,t-\tau))\phi \\
& +f(P(\tilde{A}\kappa-\tilde{A})e^{imv\cdot x}) \\
& +(\tilde{A}\kappa-\tilde{A})e^{imv\cdot x}(e^{-i\int_0^{t-\tau}\widehat{v}\cdot\tilde{A}(x+\widehat{v}\mu)d\mu} \\
& (P-b(x,t-\tau))\phi+(\tilde{A}-A)^2fg
\end{aligned}
$$

□

[2] Libro [1], página 283

Lema 8.0.16. *Sea* $\phi \in S$, *entonces:*
$H_2 e^{-i\int_0^{t-\tau} \widehat{v}\cdot\tilde{A}(x+\widehat{v}\mu)d\mu}\kappa - e^{-i\int_0^{t-\tau} \widehat{v}\cdot\tilde{A}(x+\widehat{v}\mu)d\mu}\kappa[H_1 - \widehat{v}\cdot\tilde{A}(x+(t-\tau)\widehat{v})])\phi = T_1 + T_2 + T_3$, *en donde*

$$T_1 = \frac{1}{|v|}e^{-i\int_0^{t-\tau} \widehat{v}\cdot\tilde{A}(x+\widehat{v}\mu)d\mu} \Big[-1/(2m)[\kappa[P\cdot b(x,t-\tau) + b(x,t-\tau)P - b(x,t-\tau)^2] + (\triangle\kappa) - 2(P\kappa)\cdot P + 2b(x,t-\tau)\cdot(P\kappa)]\Big]\phi \tag{8.17}$$

$$T_2 = \frac{1}{|v|}e^{-i\int_0^{t-\tau} \widehat{v}\cdot\tilde{A}(x+\widehat{v}\mu)d\mu}\Big[\kappa/(2m)[-P\cdot(A-\tilde{A}) + |A|^2 - (\tilde{A})^2] - \kappa/(m)[(A-\tilde{A})\cdot(P - b(x,t-\tau)+\tilde{A})] - 1/(m)((P\kappa)\cdot(A-\tilde{A}))\Big]\phi \tag{8.18}$$

$$T_3 = e^{-i\int_0^{t-\tau} \widehat{v}\cdot\tilde{A}(x+\widehat{v}\mu)d\mu}\Big[(P\kappa)\cdot\widehat{v} - \kappa(A-\tilde{A})\cdot\widehat{v}\Big]\phi \tag{8.19}$$

Demostración.

$$
\begin{aligned}
&H_2 e^{-i\int_0^{t-\tau}\widehat{v}\cdot\tilde{A}(x+\widehat{v}\mu)d\mu}\kappa \\
&-e^{-i\int_0^{t-\tau}\widehat{v}\cdot\tilde{A}(x+\widehat{v}\mu)d\mu}\kappa[H_1-\widehat{v}\cdot\tilde{A}(x+(t-\tau)\widehat{v})])\phi = \\
&1/(2m)1/|v|e^{-imv\cdot x}\Big[e^{-i\int_0^{t-\tau}\widehat{v}\cdot\tilde{A}(x+\widehat{v}\mu)d\mu} \\
&[(Pg)(P-b(x,t-\tau))\phi+g(P-b(x,t-\tau))\cdot(P-b(x,t-\tau))\phi \\
&+(Pg)(P-b(x,t-\tau))\phi+\phi((P\cdot P)g)] \\
&+(\tilde{A}-A)f(Pg)+(\tilde{A}-A)ge^{-i\int_0^{t-\tau}\widehat{v}\cdot\tilde{A}(x+\widehat{v}\mu)d\mu}(P-b(x,t-\tau))\phi \\
&+f(P(\tilde{A}\kappa-\tilde{A})e^{imv\cdot x}) \\
&+(\tilde{A}\kappa-\tilde{A})e^{imv\cdot x}(e^{-i\int_0^{t-\tau}\widehat{v}\cdot\tilde{A}(x+\widehat{v}\mu)d\mu} \\
&(P-b(x,t-\tau))\phi+(\tilde{A}-A)^2fg\Big] \\
&-e^{-i\int_0^{t-\tau}\widehat{v}\cdot\tilde{A}(x+\widehat{v}\mu)d\mu})\kappa[H_1-\widehat{v}\cdot\tilde{A}(x+(t-\tau)\widehat{v})])\phi \\
&=1/|v|(1/(2m))e^{-i\int_0^{t-\tau}\widehat{v}\cdot\tilde{A}(x+\widehat{v}\mu)d\mu} \\
&\Big[\Big[((P\kappa)+mv\kappa)(P-b(x,t-\tau))+\kappa(P^2-P\cdot b(x,t-\tau)-b(x,t-\tau)\cdot P \\
&+b(x,t-\tau)^2)+((P\kappa)+mv\kappa)(P-b(x,t-\tau))+mv^2+2mv\cdot(P\kappa)+(P^2\kappa) \\
&+(\tilde{A}-A)\cdot((P\kappa)+mv\kappa)+(\tilde{A}-A)\kappa(P-b(x,t-\tau)) \\
&+(P\cdot(\tilde{A}\kappa-\tilde{A}))+mv\cdot(\tilde{A}\kappa-\tilde{A}) \\
&+(\tilde{A}\kappa-\tilde{A})\cdot(P-b(x,t-\tau))+(\tilde{A}-A)^2\kappa\Big]\phi \\
&-\kappa/(2m)(mv^2+2mv\cdot P+P^2-\widehat{v}\cdot(\tilde{A}(x+(t-\tau)\widehat{v})))\phi\Big]
\end{aligned}
$$

Nótese que $v\cdot b(x,t-\tau)=v\cdot(\tilde{A}(x+\widehat{v}(t-\tau))+\int_0^t(\widehat{v}\times\tilde{B})(x+\widehat{v}\mu))d\mu=$ $\widehat{v}\cdot\tilde{A}(x+\widehat{v}(t-\tau))+\int_0^t(\widehat{v}\times\tilde{B})(x+\widehat{v}\mu)\cdot\widehat{v}d\mu=\widehat{v}\cdot\tilde{A}(x+\widehat{v}(t-\tau))$.
La última ecuación es igual a lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
& e^{-i\int_0^{t-\tau}\widehat{v}\cdot\tilde{A}(x+\widehat{v}\mu)d\mu} \\
& \Big[-1/(2m|v|)[\kappa[P\cdot b(x,t-\tau)+b(x,t-\tau)P-b(x,t-\tau)^2] \\
& +\triangle\kappa-2(P\kappa)\cdot P] \\
& \kappa/(|v|2m)[-P\cdot(A-\tilde{A})+|A|^2-(\tilde{A})^2] \\
& -\kappa/(|v|m)[(A-\tilde{A})\cdot(P-b(x,t-\tau))+(A\cdot\tilde{A})-(\tilde{A})^2] \\
& -1/(m|v|)((P\kappa)\cdot(A-\tilde{A})) \\
& +(P\kappa)\cdot\widehat{v}-\kappa(A-\tilde{A})\cdot\widehat{v} \\
& +1/(2m|v|)[\kappa P^2+2((P\kappa)\cdot b(x,t-\tau)+mv\kappa\cdot P-mv\kappa\cdot b(x,t-\tau)) \\
& +\kappa/(2m|v|)(m^2v^2-m^2v^2+2imv\cdot\nabla+\nabla^2)]+\kappa(\widehat{v}\cdot\tilde{A}(x+(t-\tau)\widehat{v}))\Big]\phi. \\
& = e^{-i\int_0^{t-\tau}\widehat{v}\cdot\tilde{A}(x+\widehat{v}\mu)d\mu} \\
& \Big[-1/(2m|v|)[\kappa[P\cdot b(x,t-\tau)+b(x,t-\tau)P-b(x,t-\tau)^2] \\
& +\triangle\kappa-2(P\kappa)\cdot P+2b(x,t-\tau)\cdot(P\kappa)] \\
& \kappa/(|v|2m)[-P\cdot(A-\tilde{A})+|A|^2-(\tilde{A})^2] \\
& -\kappa/(|v|m)[(A-\tilde{A})\cdot(P-b(x,t-\tau))+(A\cdot\tilde{A})-(\tilde{A})^2] \\
& -1/(m|v|)((P\kappa)\cdot(A-\tilde{A})) \\
& +(P\kappa)\cdot\widehat{v}-\kappa(A-\tilde{A})\cdot\widehat{v}\Big]\phi
\end{aligned}
$$

De manera que:

$$
\begin{aligned}
& H_2 e^{-i\int_0^{t-\tau}\widehat{v}\cdot\tilde{A}(x+\widehat{v}\mu)d\mu}\kappa \\
& \quad - e^{-i\int_0^{t-\tau}\widehat{v}\cdot\tilde{A}(x+\widehat{v}\mu)d\mu}\kappa[H_1-\widehat{v}\cdot\tilde{A}(x+(t-\tau)\widehat{v})])\phi \\
& = T_1+T_2+T_3
\end{aligned}
$$

En donde T_1, T_2 y T_3 son como 8.17, 8.18 y 8.19, respectivamente. □

Teorema 8.0.61. *Sea $\tilde{\phi}$ como en 8.5, entonces:*

(8.20)

$$(e^{itH_2}\kappa e^{-itH_1} - \kappa e^{-i\int_0^t \widehat{v}\cdot\tilde{A}(x+\widehat{v}\tau)d\tau})\tilde{\phi} = \int_0^t d\tau e^{i\tau H_2} i[H_2 e^{-i\int_0^{t-\tau}\widehat{v}\cdot\tilde{A}(x+\widehat{v}\mu)d\mu}\kappa$$
$$-e^{-i\int_0^{t-\tau}\widehat{v}\cdot\tilde{A}(x+\widehat{v}\mu)d\mu}\kappa(H_1 - \widehat{v}\cdot\tilde{A}(x+(t-\tau)\widehat{v}))]e^{-i\tau H_1}\tilde{\phi}.$$

Demostración.

$$(e^{itH_2}\kappa e^{-itH_1} - \kappa e^{-i\int_0^t \widehat{v}\cdot\tilde{A}(x+\widehat{v}\tau)d\tau})\tilde{\phi} = e^{itH_2}[\kappa - e^{-itH_2}\kappa e^{-i\int_0^t \widehat{v}\cdot\tilde{A}(x+\widehat{v}\tau)d\tau} e^{itH_1}]e^{-itH_1}$$

Se sigue como en la afirmación 7.0.9 que

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(e^{-itH_2}\kappa e^{-i\int_0^t \widehat{v}\cdot\tilde{A}(x+\widehat{v}\tau)d\tau} e^{itH_1})\tilde{\phi} = \\
&(e^{-itH_2}(-i)[H_2 e^{-i\int_0^t \widehat{v}\cdot\tilde{A}(x+\widehat{v}\tau)d\tau}\kappa \\
&- e^{-i\int_0^t \widehat{v}\cdot\tilde{A}(x+\widehat{v}\tau)d\tau}\kappa(H_1 - \widehat{v}\cdot\tilde{A}(x+\widehat{v}t))]e^{itH_1})\tilde{\phi}
\end{aligned}$$

De manera que

$$\begin{aligned}
&(\kappa - e^{-itH_2}\kappa e^{-i\int_0^t \widehat{v}\cdot\tilde{A}(x+\widehat{v}\tau)d\tau} e^{itH_1})\tilde{\phi} = \\
&\int_0^t [e^{-izH_2}(i)[H_2 e^{-i\int_0^z \widehat{v}\cdot\tilde{A}(x+\widehat{v}\mu)d\mu}\kappa \\
&- e^{-i\int_0^z \widehat{v}\cdot\tilde{A}(x+\widehat{v}\mu)d\mu}\kappa(H_1 - \widehat{v}\cdot\tilde{A}(x+\widehat{v}z))]e^{izH_1}]\tilde{\phi}dz
\end{aligned}$$

Entonces:

$$(e^{itH_2}\kappa e^{-itH_1} - \kappa e^{-i\int_0^t \widehat{v}\cdot\tilde{A}(x+\widehat{v}\tau)d\tau})\tilde{\phi} =$$
$$= e^{itH_2}[\int_0^t [e^{-izH_2}(i)[H_2 e^{-i\int_0^z \widehat{v}\cdot\tilde{A}(x+\widehat{v}\mu)d\mu}\kappa$$
$$- e^{-i\int_0^z \widehat{v}\cdot\tilde{A}(x+\widehat{v}\mu)d\mu}\kappa(H_1 - \widehat{v}\cdot\tilde{A}(x+\widehat{v}z))]e^{izH_1}]]e^{-itH_1}\tilde{\phi}dz = [\int_0^t [e^{i(t-z)H_2}$$
$$(i)[H_2 e^{-i\int_0^z \widehat{v}\cdot\tilde{A}(x+\widehat{v}\mu)d\mu}\kappa$$
$$- e^{-i\int_0^z \widehat{v}\cdot\tilde{A}(x+\widehat{v}\mu)d\mu}\kappa(H_1 - \widehat{v}\cdot\tilde{A}(x+\widehat{v}z))]e^{-i(t-z)}\tilde{\phi}dz =$$
$$= [\int_0^t [e^{i(t-z)H_2}(i)[H_2 e^{-i\int_0^z \widehat{v}\cdot\tilde{A}(x+\widehat{v}\mu)d\mu}\kappa$$
$$- e^{-i\int_0^z \widehat{v}\cdot\tilde{A}(x+\widehat{v}\mu)d\mu}\kappa(H_1 - \widehat{v}\cdot\tilde{A}(x+\widehat{v}z))]e^{-i(t-z)}\tilde{\phi}dz$$
$$= \int_0^t d\tau e^{i\tau H_2}[H_2 e^{-i\int_0^{t-\tau} \widehat{v}\cdot\tilde{A}(x+\widehat{v}\mu)d\mu}\kappa$$
$$- e^{-i\int_0^{t-\tau} \widehat{v}\cdot\tilde{A}(x+\widehat{v}\mu)d\mu}\kappa(H_1 - \widehat{v}\cdot\tilde{A}(x+(t-\tau)\widehat{v}))]e^{-i\tau H_1}\tilde{\phi}d\tau$$

□

En el siguiente cálculo usaremos el teorema 3.0.28.

(8.21)
$$T_1 e^{-i\tau H_1}\tilde{\phi} = e^{-imv\cdot x}e^{imv\cdot x}T_1 e^{-imv\cdot x}e^{-iH_0\tau/|v|}e^{imv\cdot x}\tilde{\phi} =$$
$$= e^{-imv\cdot x}\frac{1}{|v|}e^{-i\int_0^{t-\tau} \widehat{v}\cdot\tilde{A}(x+\widehat{v}\mu)d\mu}$$
$$\Big[-1/(2m)[\kappa[(P-mv)\cdot b(x,t-\tau) + b(x,t-\tau)(P-mv) - b(x,t-\tau)^2]$$
$$+ (\triangle\kappa) - 2(P\kappa)\cdot(P-mv) + 2b(x,t-\tau)\cdot(P\kappa)]\Big]e^{-iH_0\tau/|v|}e^{imv\cdot x}\tilde{\phi}$$

Supondremos de ahora en adelante que $A = A^{f,Q}$ es tal que

$$A(x)F(|x - Q - \widehat{v}\tau| \leqq |\tau|/4) = 0 \tag{8.22}$$

Observemos que por el teorema 3.0.27, para $0 \leqq \tau \leqq t$,

$$
\begin{aligned}
&|\tilde{A}(x+\widehat{v}(t-\tau))F(|x-Q-\widehat{v}\tau| \leqq \tau/4)| = |e^{iP\cdot\widehat{v}(t-\tau)}\tilde{A}(x) \\
(8.23)\qquad &F(|x-Q-\widehat{v}t| \leqq \tau/4|)e^{-iP\cdot(t-\tau)}| \\
&\leqq |\tilde{A}F(|x-Q-\widehat{v}t| \leqq t/4)| = 0
\end{aligned}
$$

También se cumple lo siguiente, si $\mu, \tau \geqq 0$:

(8.24)

$$
\begin{aligned}
&|\tilde{B}(x+\widehat{v}\mu)F(|x-Q-\widehat{v}\tau| \leqq \tau/4)| = |e^{iP\cdot\widehat{v}\mu}\tilde{B}F(|x-Q-\widehat{v}\tau-\widehat{v}\mu| \leqq \tau/4)e^{-iP\cdot\widehat{v}\mu}| \\
&\leqq |\tilde{B}F(|x-Q-\widehat{v}(\tau+\mu)| \leqq (\tau+\mu)/4)| = 0
\end{aligned}
$$

Pues $|\tilde{A}F(|x-Q-\widehat{v}(\tau+\mu)| \leqq (\tau+\mu)/4)| = 0$, y por lo tanto:

$$
(8.25)\qquad b(x,t-\tau)F(|x-Q-\widehat{v}\tau| \leqq \tau/4) = 0 \forall \tau \in (0,t)
$$

Nótese que

$$
\begin{aligned}
(8.26)\qquad & e^{imv\cdot x}\tilde{\phi} = e^{imv\cdot x}g(P/|v|^{\rho})e^{-imv\cdot x}e^{imv\cdot x}\phi_0 \\
&= g(\frac{P-mv}{|v|^{\rho}})e^{imv\cdot x}\phi_0
\end{aligned}
$$

Por la demostración del corolario 3.0.2 sabemos que $\|F(|x-Q-vt| > |vt|/4)e^{-itH_0}F(\frac{P-mv}{v^{\rho}})F(|x-Q| \leqq |vt|/8)\| \leqq C_l(1+|vt|v^{\rho}/8)^{-l}$ si tomamos en lugar de t, $\tau/|v|$, obtenemos que,

$$
\begin{aligned}
&\|F(|x-Q-\widehat{v}\tau| > \tau/4)e^{-i\tau/|v|H_0}F(\frac{P-mv}{v^{\rho}})F(|x-Q| \leqq |\tau|/8)\| \leqq \\
(8.27)\qquad & C_l(1+\tau v^{\rho}/8)^{-l}
\end{aligned}
$$

Si $\tau/8 - h|v|^{\rho}|\tau|/|v| \geqq 0$, en donde ρ puede ser 0.

Teorema 8.0.62. $|T_1 e^{-i\tau H_1}\tilde{\phi}| \leqq C_l/|v|(1+|\tau|/8)^{-1}$

Demostración. Primero analicemos el término

$$
\kappa b(x,t-\tau)P
$$

$\kappa b(x,t-\tau)\cdot Pe^{-i\tau H_1}\tilde{\phi} =$

$= \kappa b(x,t-\tau)\cdot Pe^{-imv\cdot x}e^{-i\tau/|v|H_0}e^{imv\cdot x}\tilde{\phi}$

$= \kappa b(x,t-\tau)\cdot Pe^{-imv\cdot x}e^{-i\tau/|v|H_0}g(\dfrac{P-mv}{|v|^\rho})e^{imv\cdot x}\phi_0$

(por 8.26)

$= \kappa b(x,t-\tau)\cdot e^{-imv\cdot x}e^{imv\cdot x}Pe^{-imv\cdot x}e^{-i\tau/|v|H_0}g(\dfrac{P-mv}{|v|^\rho})e^{imv\cdot x}\phi_0$

$= \kappa b(x,t-\tau)e^{-imv\cdot x}\cdot (P-mv)e^{-i\tau/|v|H_0}g(\dfrac{P-mv}{|v|^\rho})e^{imv\cdot x}\phi_0$

(por el teorema 3.0.28)

$= \kappa b(x,t-\tau)e^{-imv\cdot x}\cdot e^{-i\tau/|v|H_0}(P-mv)g(\dfrac{P-mv}{|v|^\rho})e^{imv\cdot x}\phi_0$

$= \kappa b(x,t-\tau)e^{-imv\cdot x}\cdot F(|x-Q-\widehat{v}\tau|>\tau/4)e^{-i\tau/|v|H_0}(P-mv)g(\dfrac{P-mv}{|v|^\rho})e^{imv\cdot x}\phi_0$

(por 8.25)

$= \kappa b(x,t-\tau)e^{-imv\cdot x}\cdot F(|x-Q-\widehat{v}\tau|>\tau/4)e^{-i\tau/|v|H_0}g(\dfrac{P-mv}{|v|^\rho})(P-mv)e^{imv\cdot x}\phi_0$

$= \kappa b(x,t-\tau)e^{-imv\cdot x}\cdot F(|x-Q-\widehat{v}\tau|>\tau/4)e^{-i\tau/|v|H_0}g(\dfrac{P-mv}{|v|^\rho})e^{imv\cdot x}\Psi^{-1}\widehat{(P\phi_0)}$

En donde Ψ es la transformada de Fourier, y usamos 3.0.28

sea $\psi = e^{imv\cdot x}\Psi^{-1}\widehat{(P\phi_0)} \in S(\mathbb{R}^2)$

$= \kappa b(x,t-\tau)e^{-imv\cdot x}\cdot F(|x-Q-\widehat{v}\tau|>\tau/4)e^{-i\tau/|v|H_0}g(\dfrac{P-mv}{|v|^\rho})\psi$

$= \kappa b(x,t-\tau)e^{-imv\cdot x}\cdot F(|x-Q-\widehat{v}\tau|>\tau/4)e^{-i\tau/|v|H_0}g(\dfrac{P-mv}{|v|^\rho})F(|x-Q|\leqq\tau/8)\psi$

$+ \kappa b(x,t-\tau)e^{-imv\cdot x}\cdot F(|x-Q-\widehat{v}\tau|>\tau/4)e^{-i\tau/|v|H_0}g(\dfrac{P-mv}{|v|^\rho})F(|x-Q|>\tau/8)\psi$

Por lo tanto,

(8.28)

$$\kappa b(x,t-\tau)\cdot Pe^{-i\tau H_1}\tilde{\phi} =$$
$$\leqq C(|F(|x-Q-\widehat{v}\tau| > \tau/4)e^{-i\tau/|v|H_0}g(\frac{P-mv}{v^\rho})F(|x-Q| \leqq \tau/8)||\psi|$$
$$+ |F(|x-Q| > \tau/8)\psi|)$$
$$\leqq C_l(1+|\tau|/8)^{-l}(\text{si } v/4 \geqq h\ )$$

La última ecuación es porque $\psi \in S(\mathbb{R}^2)$ y por 8.27, tomando $\rho = 0$, en donde tomamos $|v|$ suficientemente grande para que podamos elegir h tal que $g \in C_0^\infty(B_{mh}(0))$

Analicemos ahora el término $P \cdot b(x,t-\tau)$. Es claro que $P \cdot b(x,t-\tau) = (P \cdot b(x,t-\tau)) + b(x,t-\tau)\cdot P$, el término $b(x,t-\tau)\cdot P$ ya fue estudiado anteriormente, de manera que nos ocupamos del otro término.

$$\kappa(P\cdot b(x,t-\tau))e^{-i\tau H_1}\tilde{\phi} =$$
$$\kappa(P\cdot b(x,t-\tau))e^{-imv\cdot x}e^{-i\tau/|v|H_0}e^{imv\cdot x}\tilde{\phi} =$$
$$\kappa(P\cdot b(x,t-\tau))e^{-imv\cdot x}F(|x-Q-\widehat{v}\tau| > \tau/4)e^{-i\tau/|v|H_0}g(\frac{P-mv}{v^\rho})e^{imv\cdot x}\phi_0$$

(Por 8.25 y 8.26)

$$= \kappa(P\cdot b(x,t-\tau))e^{-imv\cdot x}F(|x-Q-\widehat{v}\tau| > \tau/4)e^{-i\tau/|v|H_0}g(\frac{P-mv}{v^\rho})$$
$$F(|x-Q| \leqq \tau/8)e^{imv\cdot x}\phi_0$$
$$+ \kappa(P\cdot b(x,t-\tau))e^{-imv\cdot x}F(|x-Q-\widehat{v}\tau| > \tau/4)e^{-i\tau/|v|H_0}g(\frac{P-mv}{v^\rho})$$
$$F(|x-Q| > \tau/8)e^{imv\cdot x}\phi_0$$

Por lo tanto,

(8.29)

$$|\kappa(P \cdot b(x,t-\tau))e^{-i\tau H_1}\tilde{\phi}| \leqq$$
$$C[|F(|x-Q-\widehat{v}\tau| > |\tau|/4)e^{-t\tau/|v|H_0}g(\frac{P-mv}{v^\rho})F(|x-Q| \leqq \|\tau/8|)||\phi_0|$$
$$+ |F(|x-Q| > |\tau|/8)\phi_0|]$$
$$\leqq C_l(1+|\tau|/8)^{-l}$$

La última ecuación es porque $\phi_0 \in S(\mathbb{R}^2)$ y por 8.27, tomando $\rho = 0$, en donde tomamos $|v|$ suficientemente grande para que podamos elegir h tal que $g \in C_0^\infty(B_{mh}(0))$.
Procedemos a analizar el término $(b(x,t-\tau))^2 e^{-i\tau H_1}\tilde{\phi}$.

(8.30)

$$|(b(x,t-\tau))^2 e^{-i\tau H_1}\tilde{\phi}| = b(x,t-\tau)^2 e^{-imv\cdot x}e^{-i\tau/|v|H_0}e^{imv\cdot x}\tilde{\phi}_0$$
$$= |b(x,t-\tau)^2 e^{-imv\cdot x}e^{-i\tau/|v|H_0}g(\frac{P-mv}{v^\rho})e^{imv\cdot x}\phi_0|(\text{por } 8.26)$$
$$= |b(x,t-\tau)^2 F(|x-Q-\widehat{v}\tau| > |\tau|/4)e^{-imv\cdot x}e^{-i\tau/|v|H_0}g(\frac{P-mv}{v^\rho})e^{imv\cdot x}\phi_0|$$
(por 8.25)
$$\leqq |b(x,t-\tau)^2 F(|x-Q-\widehat{v}\tau| > |\tau|/4)e^{-imv\cdot x}e^{-i\tau/|v|H_0}g(\frac{P-mv}{v^\rho})$$
$$F(|x-Q| \leqq |\tau|/8)e^{imv\cdot x}\phi_0|$$
$$+ |b(x,t-\tau)^2 F(|x-Q-\widehat{v}\tau| > |\tau|/4)e^{-imv\cdot x}e^{-i\tau/|v|H_0}g(\frac{P-mv}{v^\rho})$$
$$F(|x-Q| > |\tau|/8)e^{imv\cdot x}\phi_0|$$
$$\leqq C(|F(|x-Q-\widehat{v}\tau| > |\tau|/4)e^{-i\tau/|v|H_0}g(\frac{P-mv}{v^\rho})F(|x-Q| \leqq |\tau|/8)|$$
$$+ |F(|x-Q| > |\tau|/8)\phi_0|)$$
$$\leqq C_l(1+|\tau|/8)^{-l}(\text{para } |v| \text{ suficientemente grande, } \rho = 0\ )$$

Continuamos con el término $\triangle\kappa e^{-i\tau H_1}\tilde{\phi}$

$$
\begin{aligned}
&\triangle\kappa e^{-i\tau H_1}\tilde{\phi} = \triangle\kappa e^{-imv\cdot x}e^{-i\tau/|v|H_0}g(\frac{P-mv}{v^\rho})e^{imv\cdot x}\phi_0 \\
&= \triangle\kappa e^{-imv\cdot x}F(|x-Q-\widehat{v}\tau| > \tau/4)e^{-i\tau/|v|H_0}g(\frac{P-mv}{v^\rho})e^{imv\cdot x}\phi_0 \\
&+ \triangle\kappa e^{-imv\cdot x}F(|x-Q-\widehat{v}\tau| \leqq \tau/4)e^{-i\tau/|v|H_0}g(\frac{P-mv}{v^\rho})e^{imv\cdot x}\phi_0 \\
&= \triangle\kappa e^{-imv\cdot x}F(|x-Q-\widehat{v}\tau| \leqq \tau/4)e^{-i\tau/|v|H_0}g(\frac{P-mv}{v^\rho})F(|x-Q| \leqq |\tau|/8)e^{imv\cdot x}\phi_0 \\
&+ \triangle\kappa e^{-imv\cdot x}F(|x-Q-\widehat{v}\tau| \leqq \tau/4)e^{-i\tau/|v|H_0}g(\frac{P-mv}{v^\rho})F(|x-Q| > |\tau|/8)e^{imv\cdot x}\phi_0 \\
&+ \triangle\kappa e^{-imv\cdot x}F(|x-Q-\widehat{v}\tau| > \tau/4)e^{-i\tau/|v|H_0}g(\frac{P-mv}{v^\rho})F(|x-Q| \leqq |\tau|/8)e^{imv\cdot x}\phi_0 \\
&+ \triangle\kappa e^{-imv\cdot x}F(|x-Q-\widehat{v}\tau| > \tau/4)e^{-i\tau/|v|H_0}g(\frac{P-mv}{v^\rho})F(|x-Q| > |\tau|/8)e^{imv\cdot x}\phi_0
\end{aligned}
$$

Entonces se obtiene:

$$
\begin{aligned}
(8.31)\quad & |\triangle\kappa e^{-i\tau H_1}\tilde{\phi}| \leqq C[\\
& |F(|x-Q-\widehat{v}\tau| > |\tau|/4)e^{-i\tau/|v|H_0}g(\frac{P-mv}{|v|^\rho})F(|x-Q| \leqq |\tau|/8)| \\
& + |F(|x-Q| > |\tau|/8)\phi_0| + |\triangle\kappa F(|x-Q-\widehat{v}\tau| \leqq |\tau|/4)|] \\
& \leqq C_l(1+|\tau|/8)^{-l} + C|\triangle\kappa F(|x-Q| > 3\tau/4)| \\
& \text{Para } \rho = 0, |v| \text{ suficientemente grande} \\
& \leqq C_1(1+|\tau|/8)^{-l}\text{pues } \triangle\kappa \text{ tiene soporte compacto}
\end{aligned}
$$

A continuación se estudia el término $-2(P\kappa)\cdot Pe^{-i\tau H_1}\tilde{\phi}$.

$2(P\kappa) \cdot Pe^{-i\tau H_1}\tilde{\phi} =$

$2(P\kappa) \cdot e^{imv\cdot x}e^{-imv\cdot x}Pe^{-imv\cdot x}e^{-i\tau/|v|H_0}g(\frac{P-mv}{v^\rho})e^{imv\cdot x}\phi_0$(por 8.26)

$= 2(P\kappa) \cdot e^{-imv\cdot x}e^{-i\tau/|v|H_0}g(\frac{P-mv}{v^\rho})(P-mv)e^{imv\cdot x}\phi_0$(por el teorema 3.0.28)

Sea $\psi = (P-mv)e^{imv\cdot x}\phi_0 \in S(\mathbb{R}^2)$

$= 2(P\kappa) \cdot e^{-imv\cdot x}F(|x-Q-\widehat{v}\tau| \leqq |\tau|/4)e^{-i\tau/|v|H_0}g(\frac{P-mv}{v^\rho})F(|x-Q| \leqq |\tau|/8)\psi$

$+ 2(P\kappa) \cdot e^{-imv\cdot x}F(|x-Q-\widehat{v}\tau| \leqq |\tau|/4)e^{-i\tau/|v|H_0}g(\frac{P-mv}{v^\rho})F(|x-Q| > |\tau|/8)\psi$

$+ 2(P\kappa) \cdot e^{-imv\cdot x}F(|x-Q-\widehat{v}\tau| > |\tau|/4)e^{-i\tau/|v|H_0}g(\frac{P-mv}{v^\rho})F(|x-Q| \leqq |\tau|/8)\psi$

$+ 2(P\kappa) \cdot e^{-imv\cdot x}F(|x-Q-\widehat{v}\tau| > |\tau|/4)e^{-i\tau/|v|H_0}g(\frac{P-mv}{v^\rho})F(|x-Q| > |\tau|/8)\psi$

Entonces obtenemos :

(8.32)

$|-2(P\kappa) \cdot Pe^{-i\tau H_1}\tilde{\phi}| \leqq C[$

$|F(|x-Q-\widehat{v}\tau| > |\tau|/4)e^{-i\tau/|v|H_0}g(\frac{P-mv}{v^\rho})F(|x-Q| \leqq |\tau|/8)|]$

$+ |F(|x-Q| > |\tau|/8)\psi| + |(P\kappa)F(|x-Q-\widehat{v}\tau| \geqq \tau/4)|$

$\leqq C_l(1+|\tau|/8)^{-l} + C|(P\kappa)F(|x-Q| > 3\tau/4)|$Con $\rho = 0$ y para $|v|$ suficientemente grande

$\leqq C_l(1+|\tau|/8)^{-l}$. Pues $P\kappa$ tiene soporte compacto

De manera análoga se obtiene

(8.33)

$|2b(x,t-\tau) \cdot (P\kappa)e^{-i\tau H_1}\tilde{\phi}| \leqq C_l(1+|\tau|/8)^{-l}$(Para $|v|$ suficientemene grande)

Se sigue de 8.28- 8.33 que $|T_1 e^{-i\tau H_1}\tilde{\phi}| \leqq C_l/|v|(1+|\tau|/8)^{-l}$ □

Teorema 8.0.63. $|T_2 e^{-i\tau H_1}\tilde{\phi}| \leqq C_l/|v|(1+|\tau|/8)^{-l}$

Demostración. La demostración es análoga a la del teorema anterior □

Usamos la notación

$$a(x) := |(P\kappa)(x)| + |\kappa(x)||A(x) - \tilde{A}(x)| \tag{8.34}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} |T_3 e^{-i\tau H_1}\tilde{\phi}| &= (\int |((P\kappa)\cdot \widehat{v} + \kappa(A-\tilde{A})\cdot \widehat{v})e^{-i\tau H_1}\tilde{\phi}|^2)^{1/2} \\ &\leqq (\int |a(x)|^2 |e^{-i\tau H_1}\tilde{\phi}|^2)^{1/2} \end{aligned} \tag{8.35}$$

$\therefore |T_3 e^{-i\tau H_1}\tilde{\phi}| \leqq |a(x)e^{-i\tau H_1}\tilde{\phi}|$

Teorema 8.0.64. $|a(x)e^{-i\tau H_1}\tilde{\phi}| \leqq C_l(1+|\tau|/8)^{-l}$

Demostración. La demostración es análoga a la del teorema anterior □

Es claro que $a(x) = |(P\kappa)| + |\kappa||A||1-\kappa|$, además $\phi_0 \in C_0^\infty(\Omega_{\widehat{v}})$. Por la definición de κ, ésta vale cero en una vecindad de de K y es uno en el conjunto $\{x : x = y + \widehat{v}\tau, y \in sop(\phi_0), \tau \in \mathbb{R}\} \cup \{x : |x| \geqq M\}$.
Entonces,

$$a(x+\tau\widehat{v})\phi_0(x) = 0 \tag{8.36}$$

$$\begin{aligned}
&a(x)e^{-i\tau H_1}\tilde{\phi} = ae^{-i\tau H_1}(\tilde{\phi}-\phi_0) + ae^{-i\tau H_1}\phi_0 \\
&\textit{Ademas} \\
&ae^{-i\tau H_1}\phi_0 = ae^{-imv\cdot x}e^{-i\tau H_0/|v|}e^{imv\cdot x}\phi_0 \\
&= ae^{-imv^2\tau/(2|v|)}e^{-iP\cdot v\tau/|v|}e^{-i\tau/vH_0}\phi_0 (\text{Por el corolario 3.0.1}) \\
&= e^{-iP\cdot\widehat{v}\tau}e^{iP\cdot\widehat{v}\tau}a(x)e^{-iP\cdot\widehat{v}\tau}e^{-im\tau/(2|v|)}e^{-i\tau H_0/|v|}\phi_0 \\
&= e^{-iP\cdot\widehat{v}\tau}a(x+\widehat{v}\tau)e^{-im\tau/(2)|v|}e^{-i\tau H_0/|v|}\phi_0 (\text{por el teorema 3.0.27}) \\
&= e^{-im\tau/(2)|v|}e^{-iP\cdot\widehat{v}\tau}a(x+\widehat{v}\tau)e^{-i\tau H_0/|v|}\phi_0 \\
&\text{y como } a(x+\widehat{v}\tau)\phi_0 = 0 \\
&= e^{-im\tau/(2)|v|}e^{-iP\cdot\widehat{v}\tau}a(x+\widehat{v}\tau)(e^{-i\tau H_0/|v|} - I)\phi_0
\end{aligned}$$

En donde I es la identidad.

Por 8.4, $|\tilde{\phi} - \phi_0| = O(1/|v|^{\rho N})$,y por lo tanto,

$$|a(x)e^{-i\tau H_1}(\tilde{\phi}-\phi_0)| \leqq C|\tilde{\phi}-\phi_0| \leqq C/|v|(1+|\tau|) \tag{8.37}$$

Por otro lado,

$$(e^{-i\tau/|v|H_0}-I)\phi_0 = \Psi^{-1}(-ip^2)/|v|(\int_0^\tau e^{-ip^2/|v|\mu d\mu})\widehat{\phi_0}.$$

Como $\phi_0 \in S \Rightarrow -ip^2\phi_0 \in S$, sea $\psi \in S$ tal que $\widehat{\psi} = -ip^2\widehat{\phi_0}$. Entonces $|\Psi(e^{-iH_0\tau/|v|}-I)\phi_0| = |1/v\int_0^\tau e^{-ip^2\mu/|v|}\widehat{\psi}|$, pero $1/|v||\int_0^\tau e^{-ip^2\mu/|v|}| \leqq |\tau|/|v|$ de forma que

$$\begin{aligned} &|\Psi^{-1}(\int_0^\tau e^{-ip^2\mu/|v|}d\mu\widehat{\psi})| = |\int_0^\tau e^{-ip^2/|v|}d\mu\widehat{\psi}| \\ &\leqq |\tau||\psi| \\ &\therefore |e^{-im\tau/(2)|v|}e^{-iP\cdot\widehat{v}\tau}a(x+\widehat{v}\tau)(e^{-iH_0\tau/|v|}-I)\phi_0| \\ &\leqq C|(e^{-iH_0\tau/|v|}-I)\phi_0| \leqq C|\tau||\psi|/|v| \leqq C(1+|\tau|)/|v| \end{aligned} \tag{8.38}$$

De 8.37 y 8.38, obtenemos

$$|a(x)e^{-i\tau H_1}\widehat{\phi}| \leqq C(1+|\tau|)/|v| \tag{8.39}$$

Del teorema 8.0.64 y por 8.39 obtenemos lo siguiente:

$$|a(x)e^{-i\tau H_1}\widehat{\phi}| \leqq C_{\delta,l}1/|v|^\delta(1+|\tau|)^{-l} \tag{8.40}$$

Para $l \in \mathbb{N}, 0 \leqq \delta < 1$.
A continuación justificaremos lo afirmado. Sean r , s con $r,s \geqq 0, r+s = 1$. Como $|a(x)e^{-i\tau H_1}\tilde{\phi}| \leqq C_l(1+|\tau|)^{-l}$, $|a(x)e^{-i\tau H_1}\tilde{\phi}|^r \leqq C_l^r(1+|\tau|)^{-rl}$ y $|a(x)e^{-i\tau H_1}\tilde{\phi}| \leqq C(1+|\tau|)/|v| \Rightarrow |a(x)e^{-i\tau H_1}\tilde{\phi}|^s \leqq C^s(1+|\tau|)^s/|v|^s$.
Entonces $|a(x)e^{-i\tau H_1}\tilde{\phi}|^{r+s} = |a(x)e^{-i\tau H_1}\tilde{\phi}| \leqq C_l^r C^s(1+|\tau|)^{-lr}(1+|\tau|)^s/|v|^s = C_{s,l}1/|v|^s(1+|\tau|)^{-lr+s}$.
Pero si $n \in \mathbb{N}$ y $-lr+s < -n \Rightarrow (1+|\tau|)^{-lr+s} \leqq (1+|\tau|)^{-n}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea sea l_n tal que $-l_n r + s < -n$ y sea $C_{s,n} = C_{s,l_n}$ entonces $|a(x)e^{-i\tau H_1}\tilde{\phi}| \leqq C_{s,n}/|v|^s(1+|\tau|)^{-n}, \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqq s < 1$.

Usaremos la siguiente notación:

$$(8.41)\qquad I(v) := \int \gamma(v,\tau)d\tau, \text{en donde}$$
$$\gamma(v,\tau) := [|a(x)e^{-iH_1\tau}\tilde{\phi}|^2 + \epsilon v^{-4}(1+|\tau|)^{-4}]^{1/2}, \text{con } \epsilon > 0$$

Se sigue fácilmente de 8.40 que $I(v) < \infty$ y que $\lim_{|v|\to\infty} I(v) = 0$.

$$\begin{aligned}
&a(x)e^{-iH_1\tau}\tilde{\phi} = a(x)e^{-imv\cdot x}e^{-iH_0\tau/|v|}e^{imv\cdot x}\tilde{\phi}\\
&= a(x)e^{-imv\tau/2}e^{-iP\cdot\widehat{v}\tau}e^{-i\tau/|v|H_0}\tilde{\phi}\text{Por el corolario 3.0.1}\\
&= e^{-iP\cdot\widehat{v}\tau}e^{iP\cdot\widehat{v}\tau}a(x)e^{-iP\cdot\widehat{v}\tau}e^{-im|v|\tau/2}e^{-i\tau/|v|H_0}\tilde{\phi}\\
&= e^{-im|v|\tau/2}e^{-iP\cdot\widehat{v}\tau}a(x+\widehat{v}\tau)e^{-iH_0\tau/|v|}\tilde{\phi}\text{por el teorema 3.0.28}
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$(8.42)\qquad |a(x)e^{-i\tau H_1}\tilde{\phi}| = |a(x+\widehat{v}\tau)e^{-i\tau/|v|H_0}\tilde{\phi}|$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
&|\frac{d}{d|v|}|a(x)e^{-iH_1\tau}\tilde{\phi}|^2| = |\langle\frac{d}{d|v|}a(x+\widehat{v}\tau)e^{-iH_0\tau/|v|}\tilde{\phi}, a(x+\widehat{v}\tau)e^{-iH_0\tau/|v|}\tilde{\phi}\rangle\\
&+ \langle a(x+\widehat{v}\tau)e^{-iH_0\tau/|v|}\tilde{\phi}, \frac{d}{d|v|}a(x+\widehat{v}\tau)e^{-iH_0\tau/|v|}\tilde{\phi}\rangle|\\
&= |\langle i\tau/|v|^2a(x+\widehat{v}\tau)e^{-iH_0\tau/|v|}H_0\tilde{\phi}, a(x+\widehat{v}\tau)e^{-iH_0\tau/|v|}\tilde{\phi}\rangle\\
&+ \langle a(x+\widehat{v}\tau)e^{-iH_0\tau/|v|}\tilde{\phi}, i\tau/|v|^2a(x+\widehat{v}\tau)e^{-iH_0\tau/|v|}H_0\tilde{\phi}\rangle|\\
&\leqq 2|a(x+\widehat{v}\tau)e^{-i\tau/|v|H_0}\tilde{\phi}||\tau|/|v|^2|a(x+\widehat{v}\tau)e^{-iH_0\tau/|v|}H_0\tilde{\phi}|
\end{aligned}$$

De manera que

(8.43)
$$|\frac{d}{d|v|}|a(x)e^{-iH_1\tau}\widehat{\phi}|^2| \leqq 2|a(x+\widehat{v}\tau)e^{-i\tau/|v|H_0}\tilde{\phi}||\tau|/|v|^2|a(x+\widehat{v}\tau)e^{-iH_0\tau/|v|}H_0\tilde{\phi}|$$

$$
\begin{aligned}
&|\frac{d}{d|v|}\gamma(v,\tau)| = |1/2[|ae^{-iH_1\tau}\tilde{\phi}|^2 + \epsilon|v|^{-4}(1+|\tau|)^{-4}]^{-1/2} \\
&[\frac{d}{d|v|}(|ae^{-i\tau H_0}\tilde{\phi}|^2) - 4\epsilon|v|^{-5}(1+|\tau|)^{-4}]| \\
&= |1/2[|ae^{-iH_1\tau}\tilde{\phi}|^2 + \epsilon|v|^{-4}(1+|\tau|)^{-4}]^{-1/2} \\
&[\langle i\tau/|v|^2 a(x+\widehat{v}\tau)e^{-iH_0\tau/|v|}H_0\tilde{\phi}, a(x+\widehat{v}\tau)e^{-iH_0\tau/|v|}\tilde{\phi}\rangle \\
&+ \langle a(x+\widehat{v}\tau)e^{-iH_0\tau/|v|}\tilde{\phi}, i\tau/|v|^2 a(x+\widehat{v}\tau)e^{-iH_0\tau/|v|}H_0\tilde{\phi}\rangle \\
&- 4\epsilon v^{-5}(1+|\tau|)^{-4}]| \\
&\leqq 2\tau/|v|^2\frac{|a(x+\widehat{v}\tau)e^{-iH_0\tau/|v|}H_0\tilde{\phi}||a(x+\widehat{v}\tau)e^{-iH_0\tau/|v|}\tilde{\phi}|}{|a(x)e^{-iH_1\tau}\tilde{\phi}|} \\
&+ \frac{4\epsilon|v|^{-2}(1+|\tau|)^{-2}v^{-3}(1+|\tau|)^{-2}}{(\epsilon v^{-4}(1+|\tau|)^{-4})^{-1/2}}| \\
&\leqq 2|\tau|/|v|^2|a(x+\widehat{v}\tau)e^{-iH_0\tau/|v|}H_0\tilde{\phi}| + 4\epsilon^{1/2}|v|^{-3}(1+|\tau|)^{-2}
\end{aligned}
$$

Eligiendo ϵ de manera adecuada, obtenemos:

$$
(8.44)\quad |\frac{d}{d|v|}\gamma(v,\tau)| \leqq C[|\tau|/|v|^2|a(x+\widehat{v}\tau)e^{-iH_0\tau/|v|}H_0\tilde{\phi}| + |v|^{-3}(1+|\tau|)^{-2}]]
$$

Como en 8.42, cambiando $\tilde{\phi}$ por $H_0\tilde{\phi}$ obtenemos

$$
(8.45)\qquad |a(x)e^{-i\tau H_1}H_0\tilde{\phi}| = |a(x+\widehat{v}\tau)e^{-i\tau/|v|H_0}H_0\widehat{\phi}|
$$

Sea $\psi = H_0\tilde{\phi}$, se demuestra de manera análoga al teorema 8.0.62 que

$$
(8.46)\qquad |a(x)e^{-iH_1\tau}\psi| \leqq C_l(1+|\tau|/8)^{-l}
$$

Se sigue de lo anterior y de 8.42 que $|\frac{d}{d|v|}\gamma(v,t)| \leqq C/|v|^2[C_3|\tau|(1+|\tau|)^{-3} + |v|^{-1}(1+|\tau|)^{-2}]$. Si $|v| \geqq 1$, entonces;

$$
(8.47)\qquad |\frac{d}{d|v|}\gamma(v,t)| \leqq C|v|^{-2}(1+|\tau|)^{-2}, \qquad ||v| \geqq 1
$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
|\frac{d}{d|v|}I(v)| &= |\int \frac{d}{d|v|}\gamma(v,\tau)d\tau| \\
&\leqq \int \tilde{C}|v|^{-2}(1+|\tau|)^{-2}d\tau \\
&\leqq C|v|^{-2} \qquad (8.48)
\end{aligned}
$$

Entonces, $\int_{|v|}^{\infty} \frac{d}{ds}I(s\widehat{v})ds = I(s\widehat{v})|_{|v|}^{\infty} = -I(|v|\widehat{v}) = -I(v)$ y obtenemos

$$
I(v) = |\int_0^{\infty} \frac{d}{ds}I(s\widehat{v})ds| \leqq C|v|^{-1} \qquad (8.49)
$$

Por 8.35, 8.41 y 8.49 se sigue que

$$
\int |T_3 e^{-i\tau H_1}\tilde{\phi}| \leqq I(v) \leqq C|v|^{-1}, \qquad |v| \geqq 1 \qquad (8.50)
$$

La ecuación 8.5 se sigue de 8.20, del lema 8.0.16, de los teoremas 8.0.62 y 8.0.63 y de 8.50.
El teorema 8.0.58 para el caso de $A = A^{f,Q}$ como en 8.22 se sigue de 8.3- 8.5
.
Procedemos a demostrar el teorema 8.0.58 para el caso de $A_1 \in \mathcal{A}_K(\alpha_K, B_R)$.
Sea $A = A^{f,Q}$ como en 8.22 y $A_1 \in \mathcal{A}_K(\alpha_K, B_R)$.
Por el teorema 7.0.56 y el teorema 3.0.28,

$$
\begin{aligned}
& e^{-imv\cdot x}W_+(A_1)e^{imv\cdot x} - e^{-i\int_0^{\infty}\widehat{v}\cdot A_1(x+\widehat{v}\tau)d\tau}\phi_0 \\
&= e^{i\lambda(x)}(e^{-imv\cdot x}W_+(A))e^{-i\lambda_{\infty}(P)}e^{imv\cdot x} - e^{-i\int_0^{\infty}\widehat{v}\cdot(A+\nabla\lambda)(x+\widehat{v}\tau)d\tau}\phi_0 \\
&= e^{i\lambda(x)}[e^{-imv\cdot x}W_+(A)e^{imv\cdot x}e^{-i\lambda_{\infty}(P+mv)}]\phi_0 - e^{-i\int_0^{\infty}\widehat{v}\cdot A(x+\widehat{v}\tau)d\tau} \\
&\quad - e^{-i\int_0^{\infty}\widehat{v}\cdot\nabla\lambda(x+\widehat{v}\tau)d\tau} \qquad (8.51)
\end{aligned}
$$

En donde usamos el teorema 3.0.28.

Obsérvese que

$e^{-imv\cdot x}Pe^{imv\cdot x}\phi = e^{-imv\cdot x}\Psi^{-1}p\Psi(e^{imv\cdot x})\phi$
$= e^{-imv\cdot x}\Psi^{-1}p(\widehat{\phi}(p-mv))$
$= e^{-imv\cdot x}\Psi^{-1}(p-mv)\widehat{\phi}(p-mv) + e^{-imv\cdot x}\Psi^{-1}(mv)\widehat{\phi}(p-mv)$
$= mv\phi + \Psi^{-1}P\widehat{\phi}(p) = (mv+P)\phi$
como $e^{imv\cdot x}$ es unitario, entonces
$\lambda_\infty(P+mv) = e^{-imv\cdot x}\lambda_\infty(P)e^{imv\cdot x}$.
como $P = \Psi^{-1}p\Psi \;\Rightarrow$
$\lambda_\infty(P) = \Psi^{-1}\lambda_\infty(p)\Psi$En donde $\lambda_\infty(p)$ es el operador de multiplicación por esta función
$\Rightarrow \lambda_\infty(P+mv)\phi = e^{-imv\cdot x}\lambda_\infty(P)e^{imv\cdot x}\phi$
$= e^{-imv\cdot x}\Psi^{-1}\lambda_\infty(p)\Psi e^{imv\cdot x}\psi$
$= e^{-imv\cdot x}\Psi^{-1}\lambda_\infty(p)\widehat{\phi}(p-mv)$
$= \Psi^{-1}\lambda_\infty(p+mv)\Psi\phi$

Por lo tanto,

$$\lambda_\infty(P+mv) = \Psi^{-1}\lambda_\infty(p+mv)\Psi \tag{8.52}$$

En donde $\lambda_\infty(p+mv)$ es operador de multiplicación por la función. De manera análoga se sigue que se $k>0$,

$$\lambda_\infty(k(P+mv)) = \Psi^{-1}\lambda_\infty(k(p+mv))\Psi \tag{8.53}$$

Poniendo $k = 1/(m|v|), |v|>0$ en la última ecuación , obtenemos que $\lambda_\infty(1/(m|v|)(P+mv)) = \Psi^{-1}\lambda_\infty(1/(m|v|)(p+mv))\Psi = \Psi^{-1}\lambda_\infty(p+mv)\Psi = \lambda_\infty(P+mv)$ (pues λ_∞ es homogénea de grado 0), obtenemos :

$$\lambda_\infty(P/(m|v|)+\widehat{v}) = \lambda_\infty(P+mv) \tag{8.54}$$

Se define la función $g(\tau) = \lambda(x+\widehat{v}\tau) \Rightarrow \frac{dg}{d\tau} = \nabla g\cdot\widehat{v} \;\therefore\; \int_0^\infty \frac{dg}{d\tau}d\tau = \lim_{\tau\to\infty}\lambda(x+\widehat{v}\tau) - \lambda(x) = \int_0^\infty \widehat{v}\cdot\nabla\lambda(x+\widehat{v}\tau)d\tau$.
Pero $\lim_{\tau\to\infty}\lambda(x+\widehat{v}\tau) = \lim_{\tau\to\infty}\lambda(\tau(x/\tau+\widehat{v})) = \lambda_\infty(\widehat{v})$ (pues λ_∞ es continua fuera del $\{0\}$ y por la definición de λ_∞),por lo tanto,

$$\int_0^\infty \widehat{v}\cdot\nabla\lambda(x+\widehat{v}\tau)d\tau = \lambda_\infty(\widehat{v}) - \lambda(x) \tag{8.55}$$

Se sigue de 8.51, 8.54 y 8.55 que

(8.56)
$$e^{-imv\cdot x}W_+(A_1)e^{imv\cdot x} - e^{-i\int_0^\infty \widehat{v}\cdot A_1(x+\widehat{v}\tau)d\tau}\phi_0$$
$$= e^{i\lambda(x)}[e^{-imv\cdot x}W_+(A)e^{imv\cdot x}e^{-i\lambda_\infty(\widehat{v}+P/(m|v|))} - e^{-i\lambda_\infty(\widehat{v})}e^{-i\int_0^\infty v\cdot A(x+\widehat{v}\tau)d\tau}]\phi_0$$

Sea
$$B = A - A_1$$

Entonces, como demostramos antes, $\lambda(x) = \int_{x_0}^x Bdl, x_0 \in \Omega$ fijo. Por hipótesis $B(x) = O(|x|^{-1}), |x| \to \infty$, por lo tanto existen c_0 y r_0 tales que $|B(x)| \leqq c_0/|x|, |x| \geqq r_0$.
Además, sabemos que $a(r) := \sup_{x\in\Omega,|x|\geqq r} |B(x)\cdot\widehat{x}| \in L_1([0,\infty)) \Rightarrow$ dada $\epsilon > 0$ existe $s_\epsilon > 0$ tal que $\int_s^\infty B(r\widehat{x})\cdot\widehat{x}dr < \epsilon$, si $s \geqq s_\epsilon$.
Sea r_1 tal que $K \subset B_{r_1}(0)$, sea $r_2 = 2\max\{r_0, r_1\}$, sea p tal que $|p/m|v|| < 1/2$, supongamos además que $|v| \geqq 1$. Entonces ponemos:

$$\lambda(x) = \int_{C^x_{r_2\widehat{v}\infty}} Bdl \tag{8.57}$$

En donde $C^x_{r_2\widehat{v}}$ es una curva en Ω que une a $r_2\widehat{v}$ con x (Por el capítulo 1).
Sea $r > r_2, r > s_{1/n}$, supongamos que $|p/(m|v|)| < 1/2$, entonces $|r_2\widehat{v} - r_2(P/(m|v|))| \geqq |r_2| - |r_2|/2 = r_2/2 = \max\{r_0, r_1\}$.
Si $r \geqq r_2, \Rightarrow |r(\widehat{v}-p/(m|v|))| = |r/r_2||r_2(\widehat{v}-p/(m|v|))| \geqq r_2/2 = \max\{r_0, r_1\}$.

Por lo tanto, si $r > r_2, r > s_{1/n} \Rightarrow |\lambda(r\widehat{v}) - \lambda(r(\widehat{v} + p/(m|v|)))| = |\int_{L(r\widehat{v},r(\widehat{v}+p/(m|v|)))} Bdl|$, en donde $L(\widehat{v}, \widehat{v} + p/(m|v|))$ es la línea que une a $r\widehat{v}$ con $r(\widehat{v} + p/(m|v|))$.
$|\int_{L(r\widehat{v},r(\widehat{v}+p(v|m|)))} Bdl| = |\int_0^{|p|r/(m|v|)} B(r\widehat{v} + \widehat{p}\tau)\cdot\widehat{p}d\tau| \leqq \int_0^{|p|r/(m|v|)} |B(r\widehat{v} + \widehat{p}\tau)d\tau| \leqq \int_0^{|p|r/(m|v|)} c_0/(|r\widehat{v} + \widehat{p}\tau|)d\tau$(pues $L(r\widehat{v}, r(\widehat{v} + p/(m|v|))) \subset B_{r_0}(0)^c$) $\leqq \int_0^{|p|r/(m|v|)} c_0/(r/2)d\tau = \frac{2|p|c_0/m}{|v|}$.
Por lo tanto,

$$|\lambda(r\widehat{v}) - \lambda(r(\widehat{v} + p/(mv)))| < C|p|/|v| \tag{8.58}$$

Si $|p/m|v|| < 1/2$, haciendo r tender a infinito, obtenemos:

$$|\lambda_\infty(\widehat{v}) - \lambda_\infty((\widehat{v} + p/(mv)))| < C|p|/|v| \tag{8.59}$$

Esto se cumple independientemente de $\widehat{v}$ y para toda p con la propiedad de que $|p|/(m|v|) < 1/2$.
Sea $g(x,v) = e^{-imv\cdot x}W_+(A)e^{imv\cdot x}$ y sea $h(x,v) = e^{-i\int_0^\infty \widehat{v}\cdot A(x+\widehat{v}\tau)d\tau}$, entonces $g(x,v)e^{-i\lambda_\infty(\widehat{v}+p/(m|v|))} - h(x,v)e^{-i\lambda_\infty(\widehat{v})} = g(x,v)e^{-i\lambda_\infty(\widehat{v}+p/(m|v|))} - g(x,v)e^{-i\lambda_\infty(\widehat{v})} + g(x,v)e^{-i\lambda_\infty(\widehat{v})} - h(x,v)e^{-i\lambda_\infty(\widehat{v})} = g(x,v)(e^{-i\lambda_\infty(\widehat{v}+p/(m|v|))} - e^{-i\lambda_\infty(\widehat{v})}) + e^{-i\lambda_\infty(\widehat{v})}(g(x,v) - h(x,v))$, por lo tanto,

$$\begin{aligned}
(8.60)\quad & |(g(x,v)e^{-i\lambda_\infty(\widehat{v}+p/(m|v|))} - h(x,v)e^{-i\lambda_\infty(\widehat{v})})\phi| \\
& \leqq |g(x,v)||(e^{-i\lambda_\infty(\widehat{v}+p/(m|v|))} - e^{-i\lambda_\infty(\widehat{v})})\phi| + |(g(x,v) - h(x,v))\phi| \\
& \leqq |(e^{-i\lambda_\infty(\widehat{v}+p/(m|v|))} - e^{-i\lambda_\infty(\widehat{v})})\phi| + O(1/|v|)
\end{aligned}$$

La última igualdad se debe a que W_+ es isometría por el teorema 7.0.56 y por que ya demostramos el teorema 8.0.58 para el caso de A.
Sea $\theta_v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ tal que $\theta_v = 1$ en $\overline{B_{m|v|/4}(0)}$ y $\theta_v = 0$ en $(B_{m|v|/3}(0))^c$ y $0 \leqq \theta_v \leqq 1$. Si $\phi \in S \Rightarrow \widehat{\phi} \in S \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
& \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\widehat{\phi}(e^{-i\lambda_\infty(\widehat{v}+p/(m|v|))} - e^{-i\lambda_\infty(\widehat{v})})|^2|\theta_v(p)|^2\right)^{1/2} \\
& \leqq \left(\int |\widehat{\phi}\int_{\lambda_\infty(\widehat{v})}^{\lambda_\infty(\widehat{v}+p/(m|v|))} e^{-i\mu}d\mu\theta_v(p)|^2\right)^{1/2} \\
& \leqq \left(\int |\phi|^2 \int |\lambda_\infty(\widehat{v} + p/(m|v|)) - \lambda_\infty(\widehat{v})|^2\theta_v(p)^2\right)^{1/2} \\
& \leqq \left(\int |\phi|^2p^2C^2/|v|^2\right)^{1/2}, \text{Pues } |p/m|v|| < 1/2 \text{ en el soporte de } \theta_v \\
& \leqq |p^2\widehat{\phi}|_2C/|v|
\end{aligned}$$

Se obtiene que

$$(8.61)\quad |(e^{-i\lambda_\infty(\widehat{v}+P/(m|v|))} - e^{-i\lambda_\infty(\widehat{v})})\theta_v(P)\phi| \leqq |\widehat{\psi}|_2C/|v|, \text{con } \widehat{\psi} = \widehat{\phi}p^2 \in S$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
& |(e^{-i\lambda_\infty(\widehat{v}+p/(m|v|))} - e^{-i\lambda_\infty(\widehat{v})})(1-\theta_v)(P)\phi| \\
& \leqq C|(1-\theta_v)(P)\phi| \\
& = C|(1-\theta_v)(p)\widehat{\phi}| \\
& \leqq |F(|x| \geqq m|v|/3)\widehat{\phi}(p)| \\
(8.62)\quad & \leqq \frac{C}{|v|}, \qquad \text{(Pues } \widehat{\phi} \in S(\mathbb{R}^2))
\end{aligned}$$

De 8.61 y 8.62 obtenemos que

$$(8.63) \qquad |(e^{-i\lambda_\infty(\widehat{v}+p/(m|v|))} - e^{-i\lambda_\infty(\widehat{v})})\phi| = O(\frac{1}{|v|}), \qquad |v| \to \infty$$

De 8.60,de 8.56 , de 8.63 y por la definición de $g(x,v)$ y $h(x,v)$, obtenemos:

$$(8.64) \qquad \begin{aligned} &|e^{-imv\cdot x}W_+(A_1)e^{imv\cdot x} - e^{\int_0^\infty \widehat{v}\cdot A_1(x+\widehat{v}\tau)d\tau}\phi| \\ &= |(g(x,v)e^{-i\lambda_\infty(\widehat{v}+p/|mv|)} - h(x,v)e^{-i\lambda_\infty(\widehat{v})})\phi| \\ &= O(\frac{1}{|v|}) \qquad\qquad |v| \to \infty. \end{aligned}$$

Con esta última ecuación termina la demostración del teorema 8.0.58
El siguiente teorema es una consecuencia directa del teorema 8.0.58.

Teorema 8.0.65. *Supongamos que $A \in \mathcal{A}(\alpha_K, B_R)$ y que $\phi_0, \psi_0 \in C_0^\infty(\Omega_{\widehat{v}})$. Sean ϕ_v y $\psi_{\widehat{v}}$ dadas por,*

$$(8.65) \qquad \phi_v := e^{imv\cdot x}\phi_0, \qquad\qquad \psi_v = e^{imv\cdot x}\psi_0$$

Entonces,

$$(8.66) \qquad \langle S(A)\phi_v, \psi_v\rangle = \langle e^{i\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{v}\cdot A(x+\widehat{v}\tau)d\tau}\phi_0, \psi_0\rangle + O(\frac{1}{|v|})$$

Demostración. El operador de dispersión $S(A)$ está dado por $S(A) = W_+^*(A)W_-(A)$

$$\begin{aligned} &\langle S(A)\phi_v, \psi_v\rangle = \langle W_+^*(A)W_-(A)\phi_v, \psi_v\rangle \\ &= \langle W_-(A)\phi_v, W_+(A)\psi_v\rangle \\ &= \langle e^{-imv\cdot x}W_-(A)\phi_v, e^{-imv\cdot x}W_+(A)\psi_v\rangle \\ &= \langle e^{-imv\cdot x}W_-(A)\phi_v - e^{-i\int_0^{-\infty} \widehat{v}\cdot A(x+\widehat{v}\tau)d\tau}\phi_0, e^{-imv\cdot x}W_+(A)\psi_v\rangle \\ &+ \langle e^{-i\int_0^{-\infty} \widehat{v}\cdot A(x+\widehat{v}\tau)d\tau}\phi_0, e^{-imv\cdot x}W_+(A)\psi_v - e^{-i\int_0^{\infty} \widehat{v}\cdot A(x+\widehat{v}\tau)d\tau}\psi_0\rangle \\ &+ \langle e^{-i\int_0^{-\infty} \widehat{v}\cdot A(x+\widehat{v}\tau)d\tau}\phi_0, e^{-i\int_0^{\infty} \widehat{v}\cdot A(x+\widehat{v}\tau)d\tau}\psi_0\rangle \\ &= \langle e^{-imv\cdot x}W_-(A)\phi_v - e^{-i\int_0^{-\infty} \widehat{v}\cdot A(x+\widehat{v}\tau)d\tau}\phi_0, e^{-imv\cdot x}W_+(A)\psi_v\rangle \\ &+ \langle e^{-i\int_0^{-\infty} \widehat{v}\cdot A(x+\widehat{v}\tau)d\tau}\phi_0, e^{-imv\cdot x}W_+(A)\psi_v - e^{-i\int_0^{\infty} \widehat{v}\cdot A(x+\widehat{v}\tau)d\tau}\psi_0\rangle \\ &+ \langle e^{i\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{v}\cdot A(x+\widehat{v}\tau)d\tau}\phi_0, \psi_0\rangle \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
&|\langle S(A)\phi_v, \psi_v\rangle - \langle e^{i\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{v}\cdot A(x+\widehat{v}\tau)d\tau}\phi_0, \psi_0\rangle| \\
&\leqq |e^{-imv\cdot x}W_-(A)e^{imv\cdot x}\phi_0 - e^{-i\int_0^{-\infty} \widehat{v}\cdot A(x+\widehat{v}\tau)d\tau}\phi_0||\psi_0| \\
&+ |\phi_0||e^{-imv\cdot x}W_+(A)e^{imv\cdot x}\psi_0 - e^{-i\int_0^{\infty} \widehat{v}\cdot A(x+\widehat{v}\tau)d\tau}\psi_0| \\
&= O(\frac{1}{|v|}) + O(\frac{1}{|v|}) \qquad\qquad |v| \to \infty
\end{aligned}
$$

En donde en la última igualdad usamos que $W_-(A)$ y $W_+(A)$ son isometrías y el teorema 8.0.58.
Se concluye que

$$
\langle S(A)\phi_v, \psi_v\rangle = \langle e^{i\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{v}\cdot A(x+\widehat{v}\tau)d\tau}\phi_0, \psi_0\rangle + O(\frac{1}{|v|}), |v| \to \infty. \tag{8.67}
$$

□

Capítulo 9

Solución al problema inverso

La finalidad de este capítulo es demostrar el siguiente teorema.

Teorema 9.0.66. *Supongamos que* $A^j \in \mathcal{A}(\alpha_K^j, B_R^j), j = 1, 2$ *y que* K *es convexo. Entonces si* $S(A^1) = S(A^2)$*, tenemos que* $\alpha_K^1 = \alpha_K^2$ *módulo 2 y que* $B_R^1(x) = B_R^2(x), x \in \Omega$.

Procederemos a desarrollar la teoría que nos permita concluir con la demostración del teorema anterior.

Definición 9.0.24.

$$A_R(x) = \frac{\alpha_\Omega}{|x|^2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} + \tilde{A_R}$$

En donde $\alpha_\Omega = 1/(2\pi) \int \tilde{B}_R(y)dy$ *y* A_R *es como en el capítulo 1*

En realidad, la definición anterior introduce el término $\tilde{A}_R$ en función de los otros ya definidos en otros capítulos.

Teorema 9.0.67. $\tilde{A}_R(x) = O(1/|x|^2), |x| \to \infty$

Demostración. Según el capítulo 1 tenemos que

$$A_R(x) = 1/(2\pi) \int \tilde{B_R}(y) \frac{1}{|x-y|^2} \begin{pmatrix} -(x-y)_2 \\ (x-y)_1 \end{pmatrix} dy \tag{9.1}$$

En donde $B_R = \check{B}_R$ en el caso de que $K = \{0\}$.

Tenemos que $\tilde{A}_R = 1/(2\pi) \int \tilde{B}_R(y)(|x-y|^{-2} \begin{pmatrix} -(x-y)_2 \\ (x-y)_1 \end{pmatrix} - |x|^{-2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix})dy$

Por otro lado,

$|(|x-y|^{-2} \begin{pmatrix} -(x-y)_2 \\ (x-y)_1 \end{pmatrix} - |x|^{-2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix})| = | \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} (|x-y|^{-2} - |x|^{-2})$

$+ \begin{pmatrix} y_2 \\ -y_1 \end{pmatrix} |x-y|^{-2}|$

$\leqq 2|x|^2|y|/(|x-y|^2|x|^2) + |y|^2|x|/(|x-y|^2|x|^2) + |y|/|x-y|^2$

$= 3|y|/|x-y|^2 + |y|^2/(|x||x-y|^2)$.

Supongamos que $sop(B_R) \subset B_r(0)$, que $y \in B_r(0)$ y que $|x| > 2r, |x| > 1$

$\leqq 3r/(|x| - |x|/2)^2 + r^2/((|x| - |x|/2)^2|x|) = 12r/(|x|^2) + 4r^2/(|x|^3)$

$\leqq C|x|^{-2}$

Se concluye que

(9.2) $$|\tilde{A}_R| \leqq 1/(2\pi)|\tilde{B}_R|_\infty C\lambda(B_r(0))|x|^{-2} \qquad |x| > \text{máx}\{2r, 1\}$$

En donde λ es la medida de Lebesgue. De lo anterior, es claro que $\tilde{A}(x) = O(|x|^{-2}), |x| \to \infty$.i □

Introducimos la siguiente notación:

(9.3) $$\Omega_v^\pm := \{x \in \Omega_v : \pm x \cdot \tilde{v} > 0\}, \text{en donde } \tilde{v} = (-\widehat{v}_2, \widehat{v}_1)$$

En donde Ω_v es como en la definición 8.0.23.

Teorema 9.0.68.

(9.4)
$$L_c(x, \widehat{v}) := \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{v} \cdot A_c(x + \widehat{v}\tau)d\tau = \pm\alpha\pi + \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{v} \cdot \tilde{A}_R(x + \widehat{v}\tau)d\tau \quad x \in \Omega_{\widehat{v}}^\pm.$$

En donde,

(9.5) $$A_c = (\alpha_k - \alpha_R)/(|x|^2) \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} + A_R$$

Con $\alpha_R = 1/(2\pi) \int_{\partial K} A_R(x)dx$

Demostración. Sea $x \in \Omega_{\widehat{v}}$, entonnces $0 \notin \{x + \tau\widehat{v} : \tau \in \mathbb{R}\}$.
$\langle x + \widehat{v}\tau, x + \widehat{v}\tau\rangle = |x|^2 + 2\tau(x_1\widehat{v}_1 + x_2\widehat{v}_2) + \tau^2 = (\tau + x \cdot \widehat{v})^2 + x^2 - (x \cdot \widehat{v})^2$, observamos que $|x|^2 = x \cdot \widehat{v}^2 + x \cdot (\widehat{v}^{\perp})^2$, en donde $\widehat{v}^{\perp}$ es el vector ortogonal a $\widehat{v}$ orientado de manera derecha. Sean $b = x \cdot \widehat{v}, a = x \cdot \widehat{v}^{\perp}$. $\int_{\mathbb{R}} 1/(|x + \widehat{v}\tau|^2)d\tau = \int 1/((\tau + b)^2 + a^2) = \int 1/(\tau^2 + a^2) = 2\int_0^{\infty} 1/(\tau^2 + a^2) = \pi/|a|$,por lo tanto,

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{v} \cdot \begin{pmatrix} -x_2 - \widehat{v}_2\tau \\ x_1 + \widehat{v}_1\tau \end{pmatrix} |x + \widehat{v}\tau|^{-2} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \cdot \widehat{v}\frac{\pi}{|x \cdot \widehat{v}^{\perp}|} \tag{9.6}$$

Como $|\begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \cdot \widehat{v}| = |\tilde{v} \cdot x| = |\widehat{v}^{\perp} \cdot x|$, obtenemos que

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{v} \cdot \begin{pmatrix} -x_2 - \widehat{v}_2\tau \\ x_1 + \widehat{v}_1\tau \end{pmatrix} |x + \widehat{v}\tau|^{-2} = \pm\pi \qquad x \in \Omega_v^{\pm} \tag{9.7}$$

De esto último de sigue el teorema 9.0.67, con $\alpha = \alpha_k - \alpha_R + \alpha_\Omega$ y en el caso $k = \emptyset$ tomamos $\alpha_R = 0$.

□

Observación 9.0.7.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{v} \cdot \tilde{A}_R(x + \widehat{v}\tau)d\tau = O(\frac{1}{|x\perp|}), |x\perp| \to \infty.$$

En donde $x\perp = x - (x \cdot \widehat{v})\widehat{v}$

Demostración. Como vimos antes , $\tilde{A}_R = O(1/|x|^2), |x| \to \infty$, por lo tanto, existen constantes r y C tales que $|\tilde{A}_R| \leqq C/|x|^2, |x| \geqq r$, entonces si $|x\perp| > r$, entonces $|x| > r \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{v} \cdot \tilde{A}_R(x + \widehat{v}\tau)d\tau \leqq \int_{-\infty}^{\infty} c/(|x + \widehat{v}\tau|^2)$ y esta última integral es , como en 9.6, igual a lo siguiente: $\pi C/|x \cdot \widehat{v}^{\perp}| = \pi C/(|x\perp|)$. De esto último de obtiene la observación 9.0.7.

□

El operador de dispersión está definido por $S(A) = W_+^*(A)W_-(A)$, si $A^1, A^2 \in \mathcal{A}(\alpha_K, B_R)$, entonces se sigue del teorema 7.0.56 que .

$$S(A^2) = e^{i\lambda_\infty(P)}S(A^1)e^{-i\lambda_\infty(-P)} \tag{9.8}$$

De **9.8** y del teorema 8.0.65 se sigue lo siguiente,

$$e^{-imv\cdot x}S(A^2)e^{imv\cdot x}\phi_0 = e^{-imv\cdot x}e^{\lambda_\infty(P)}S(A^1)e^{-i\lambda_\infty(P)}e^{imv\cdot x}\phi_0$$
$$= e^{-imv\cdot x}e^{\lambda_\infty(P)}e^{imv\cdot x}e^{-imv\cdot x}S(A^1)e^{imv\cdot x}e^{-imv\cdot x}e^{-i\lambda_\infty(P)}e^{imv\cdot x}\phi_0$$
$$= e^{i\lambda_\infty(P+mv)}e^{-imv\cdot x}S(A^1)e^{imv\cdot x}e^{-i\lambda_\infty(-P-mv)}\phi_0$$

. Por el teorema 3.0.28

$$= e^{i\lambda_\infty(P/(m|v|)+\widehat{v})}e^{-imv\cdot x}S(A^1)e^{imv\cdot x}e^{-i\lambda_\infty(-P/(m|v|)-\widehat{v})}\phi_0$$

Por 8.54

De 8.63 se sigue que

$$|e^{-i\lambda_\infty(-(\widehat{v}+p/(m|v|)))} - e^{-i\lambda_\infty(-\widehat{v})}\phi_0| = O(1/|v|), |v| \to \infty \tag{9.9}$$

Por lo tanto,

$$|e^{i\lambda_\infty(P/(m|v|)+\widehat{v})}e^{-imv\cdot x}S(A^1)e^{imv\cdot x}e^{-i\lambda_\infty(-P/(m|v|)-\widehat{v})}\phi_0$$
$$- e^{i\lambda_\infty(P/(m|v|)+\widehat{v})}e^{-imv\cdot x}S(A^1)e^{imv\cdot x}e^{-i\lambda_\infty(-\widehat{v})}\phi_0| = O(1/|v|), |v| \to \infty$$

Pues los operadores involucrados tienen norma menor o igual a 1.
De manera que

(9.10)
$$e^{-imv\cdot x}S(A^2)e^{imv\cdot x}\phi_0 = e^{i\lambda_\infty(\widehat{v}+P/(m|v|))}e^{-imv\cdot x}S(A^1)e^{imv\cdot x}e^{-i\lambda_\infty(-\widehat{v})}\phi_0 + O(1/|v|)$$
$$= e^{-i\lambda_\infty(-\widehat{v})}e^{i\lambda_\infty(\widehat{v}+P/(m|v|))}e^{i\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{v}\cdot A^1(x+\widehat{v}\tau)d\tau}\phi_0 + O(1/|v|)(\text{Por el teorema 8.0.65}).$$

Entonces,

$$\langle e^{-imv\cdot x}S(A^2)e^{imv\cdot x}\phi_0, \psi_0\rangle =$$
$$\langle e^{-i\lambda_\infty(-\widehat{v})}e^{i\lambda_\infty(\widehat{v}+P/(m|v|))}e^{i\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{v}\cdot A^1(x+\widehat{v}\tau)d\tau}\phi_0, \psi_0\rangle + O(1/|v|)$$
$$= \langle \phi_0, e^{i\lambda_\infty(-\widehat{v})}e^{-i\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{v}\cdot A^1(x+\widehat{v}\tau)}e^{i\lambda_\infty(\widehat{v}+P/(m|v|))}\psi_0\rangle + O(1/|v|)$$

De nuevo por 8.63 $|(e^{-i\lambda_\infty(\widehat{v}+P/(m|v|))} - e^{-i\lambda_\infty(\widehat{v})})\phi_0| = O(1/|v|)$ por lo que .

$$\langle \phi_0, e^{i\lambda_\infty(-\widehat{v})}e^{-i\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{v}\cdot A^1(x+\widehat{v}\tau)}e^{-i\lambda_\infty(\widehat{v}+P/(m|v|))}\psi_0\rangle + O(1/|v|)$$
$$= \langle \phi_0, e^{i\lambda_\infty(-\widehat{v})}e^{-i\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{v}\cdot A^1(x+\widehat{v}\tau)}e^{-i\lambda_\infty(\widehat{v})}\psi_0\rangle + O(1/|v|)$$
$$= \langle e^{i(\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{v}\cdot A^1(x+\widehat{v}\tau)d\tau+\lambda_\infty(\widehat{v})-\lambda_\infty(-\widehat{v}))}\phi_0, \psi_0\rangle + O(1/|v|) \tag{9.11}$$

Se sigue del teorema 8.0.65 y de 9.11

$$\langle e^{i(\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{v}\cdot A^1(x+\widehat{v}\tau)d\tau+\lambda_\infty(\widehat{v})-\lambda_\infty(-\widehat{v}))}\phi_0,\psi_0\rangle + O(1/|v|)$$

(9.12)

$$= \langle e^{i\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{v}\cdot A^2(x+\widehat{v}\tau)d\tau}\phi_0,\psi_0\rangle, \qquad \forall\phi_0,\psi_0\in C_0^\infty(\Omega_{\widehat{v}})$$

Afirmación 9.0.12. *Sea $A:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ continua fuera del 0 y tal que $A = O(|x|^{-1}), |x|\to\infty$ y $a(r) := sup_{|x|>r}\{A(x)\cdot\widehat{x}\}\in L_1([0,\infty))$.Entonces ,*

$$f(x) := \int_{-\infty}^{\infty}\widehat{v}\cdot A(x+\widehat{v}\tau)d\tau$$

Es finita continua $\forall x\in\Omega_{\widehat{v}}$

Demostración. $\widehat{v}\cdot A(x+\widehat{v}\tau) = (\widehat{v}-\widehat{(x+\widehat{v}\tau)})\cdot A(x+\widehat{v}\tau)+\widehat{(x+\widehat{v}\tau)}\cdot A(x+\widehat{v}\tau)$ pero $|\widehat{(x+\widehat{v}\tau)}\cdot A(x+\widehat{v}\tau)|\leqq a(|x+\widehat{v}\tau|)\leqq a(\tau-|x|)$(si $|x|<|\tau|$). Entonces $\int_{-\infty}^{\infty}|\widehat{(x+\widehat{v}\tau)}\cdot A(x+\widehat{v}\tau)| = \int_{-\infty}^{-2|x|}|\widehat{(x+\widehat{v}\tau)}\cdot A(x+\widehat{v}\tau)|+\int_{-2|x|}^{2|x|}\widehat{(x+\widehat{v})}\cdot A(x+\widehat{v}\tau)+\int_{2|x|}^{\infty}\widehat{(x+\widehat{v})}\cdot A(x+\widehat{v}\tau)\leqq\int_{-\infty}^{2|x|}a(-\tau+|x|)+\int_{-2|x|}^{2|x|}\widehat{(x+\widehat{v})}\cdot A(x+\widehat{v})+\int_{2|x|}^{\infty}a(\tau-|x|)<\infty$ (pues $x\in\Omega_v$ y A es continua en $\mathbb{R}^2-\{0\}$). Se concluye que $(\widehat{x+\widehat{v}\tau})\cdot A(x+\widehat{v}\tau)\in L_1((-\infty,\infty))$.
Por otro lado, $|\widehat{v}-\widehat{(x+\widehat{v}\tau)}| = |\widehat{v}-(x+\widehat{v}\tau)/|x+\widehat{v}\tau|| = ||x+\widehat{v}\tau|\widehat{v}-(x+\widehat{v}\tau)|/|x+\widehat{v}\tau|\leqq|x|/|x+\widehat{v}\tau|+||x+\widehat{v}\tau|-\tau|/(|x+\widehat{v}\tau|) = |x|/|x+\widehat{v}\tau|+|1-\tau/|x+\widehat{v}\tau|| = |x|/|x+\widehat{v}\tau|+|1-1/|x/\tau+\widehat{v}||$. Pero $||x/\tau+\widehat{v}|^2-1| = (1/\|tau|)2\langle x,\widehat{v}\rangle+|x|^2/\tau^2$, por lo tanto,

$||x/\tau+\widehat{v}|-1|\leqq\frac{1}{|x/\tau+\widehat{v}|+1}(1/|\tau||2\langle x,\widehat{v}\rangle|+|x|^2/\tau^2)\leqq(1/|\tau|)2|\langle x,\widehat{v}\rangle|+|x|^2/\tau^2$. Se concluye que $(\widehat{v}-\widehat{(x+\widehat{v}\tau)}) = O(1/|\tau|)$ y obtenemos la fórmula:

$$|\widehat{v}-\widehat{(x+\widehat{v}\tau)}|\leqq(1/|\tau|)2|\langle x,\widehat{v}\rangle|+|x|^2/\tau^2 \tag{9.13}$$

Como $A(x+\widehat{v}\tau) = O(1/|\tau|), |\tau|\to\infty$, se sigue que $|((\widehat{v}-\widehat{(x+\widehat{v}\tau)}))\cdot(A(x+\tau\widehat{v}))| = O(1/|\tau|^2), |\tau|\to\infty$, como $x\in\Omega_{\widehat{v}}$ y A es continua en $\mathbb{R}^2-\{0\}$, se concluye que $|((\widehat{v}-\widehat{(x+\widehat{v}\tau)}))\cdot(A(x+\tau\widehat{v}))|\in L_1((-\infty,\infty))$.
Por lo tanto, $\widehat{v}\cdot A(x+\tau\widehat{v}) = \widehat{(x+\tau\widehat{v})}\cdot A(x+\tau\widehat{v})+(\widehat{v}-\widehat{(x+\widehat{v}\tau)})\cdot A(x+\tau\widehat{v})\in L_1((-\infty,\infty))$.
Procedemos ahora a verificar la continuidad.
Sea $x_n\to x, x_n\in\Omega_{\widehat{v}}, x\in\Omega_{\widehat{v}}$. Sea n_0 suficientemente grande para que $|x-$

$x_n| < 1/2 \forall n \geqq n_0$. $\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{(\tau\widehat{v} + x_n)} \cdot A(x_n + \tau\widehat{v})| \leqq 2\int_{-\infty}^{-t_0} A(|x_n| - \tau) + \int_{-t_0}^{t_0} |\widehat{(\tau\widehat{v} + x_n)} \cdot A(x_n + \tau\widehat{v})|$ en donde $t_0 > 2(|x| + 1), n > n_0$.
Podemos encontrar $n_1 \in \mathbb{N}$ y un compacto K_1 contenido en $\Omega_{\widehat{v}}$ tal que el conjunto $\gamma_{t_0} = \{(x_n + \tau v) : n \geqq n_1, \tau \in [-t_0, t_0], \} \subset K_1$.Como A es continua en $\mathbb{R}^2 - \{0\}$, entonces es uniformemente continua en K_1 y se sigue que $\lim_{n\to\infty} \int_{-t_0}^{t_0} \widehat{(\widehat{v}\tau + x_n)} \cdot A(x_n + \widehat{v}\tau) = \int_{-t_0}^{t_0} \widehat{(\widehat{v}\tau + x)} \cdot A(x + \tau\widehat{v})$.
Como $a \geqq 0$ es integrable y $|\widehat{(\tau\widehat{v} + x_n)} \cdot A(x_n + \tau\widehat{v})| \leqq a(|\tau| - |x| - 1) \forall n \geqq n_0, \forall \tau \geqq t_0$, se sigue por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue que $\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{-t_0} \widehat{(\widehat{v}\tau + x_n)} \cdot A(x_n + \widehat{v}\tau) + \int_{t_0}^{\infty} \widehat{(\widehat{v}\tau + x_n)} \cdot A(x_n + \widehat{v}\tau) = \int_{-\infty}^{-t_0} \widehat{(\widehat{v}\tau + x)} \cdot A(x + \widehat{v}\tau) + \int_{t_0}^{\infty} \widehat{(\widehat{v}\tau + x)} \cdot A(x + \widehat{v}\tau)$. Se concluye que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{(x_n + \tau\widehat{v})} \cdot A(x_n + \widehat{v}\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{(x + \tau\widehat{v})} \cdot A(x + \widehat{v}\tau) \tag{9.14}$$

Como $x_n \to x$ y por 9.13 existe una constante C tal que .

$$|\widehat{v} - \widehat{(\tau\widehat{v} + x_n)}| \leqq \frac{C}{|\tau|}. \tag{9.15}$$

Como $x \in \Omega_v$, podemos encontrar $n_3 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - \langle x_n, \widehat{v}\rangle\widehat{v}| > \epsilon > 0 \forall n > n_3$, como $A(x) = O(1/|x|), |x| \to \infty$, podemos encontrar $\tau_1 > 0, C_1$ y $n_4 \geqq n_3$ tales que,

$$|A(x_n + \tau\widehat{v})| \leqq C_1/|\tau| \forall |\tau| \geqq \tau_1, \forall n \geqq n_4 \tag{9.16}$$

Como $x_n \to x$ y $x \in \Omega_{\widehat{v}}$, entonces existe un compacto $K_2 \subset \Omega_{\widehat{v}}$ y $n_5 \in \mathbb{N}$ tales que $\{x_n + \tau\widehat{v} : \tau \in [-\tau_1, \tau_1], n \geqq n_5\} \subset \Omega_{\widehat{v}}$, como A es continua , entonces es uniformemente continua en K_2 y de esto se sigue:

(9.17)
$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\tau_1}^{\tau_1} (\widehat{v} - \widehat{(\tau\widehat{v} + x_n)}) \cdot A(\tau\widehat{v} + x_n) d\tau = \int_{-\tau_1}^{\tau_1} (\widehat{v} - \widehat{(\tau\widehat{v} + x)}) \cdot A(\tau\widehat{v} + x) d\tau$$

Por otro lado, por 9.15 y 9.16, $(\widehat{v} - \widehat{(\tau\widehat{v} + x_n)}) \cdot A(\tau\widehat{v} + x_n) \leqq C/|\tau|^2 \forall |\tau| \geqq \tau_1 > 0, \forall n > n_4$, se sigue del teorema de convergencia dominada de Lebesgue que

(9.18)
$$\lim_{n\to\infty} \int_{[-\tau_1,\tau_1]^c} (\widehat{v} - \widehat{(\tau\widehat{v} + x_n)}) \cdot A(\tau\widehat{v} + x_n) d\tau = \int_{[-\tau_1,\tau_1]^c} (\widehat{v} - \widehat{(\tau\widehat{v} + x)}) \cdot A(\tau\widehat{v} + x) d\tau$$

De 9.17 y 9.18, se sigue.

(9.19)
$$\lim_{n\to\infty}\int(\widehat{v}-(\widehat{\tau\widehat{v}+x_n}))\cdot A(\tau\widehat{v}+x_n)d\tau=\int(\widehat{v}-(\widehat{\tau\widehat{v}+x}))\cdot A(\tau\widehat{v}+x)d\tau$$

De 9.14 y 9.19 obtenemos.

$$\lim_{n\to\infty}\int(\widehat{v})\cdot A(\tau\widehat{v}+x_n)d\tau=\int(\widehat{v})\cdot A(\tau\widehat{v}+x)d\tau \tag{9.20}$$

Y esto último implica la continuidad de f. □

Por 9.12, $\langle e^{i(\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{v}\cdot A^1(x+\widehat{v}\tau)d\tau+\lambda_\infty(\widehat{v})-\lambda_\infty(-\widehat{v}))}\phi_0,\psi_0\rangle+O(1/|v|)$ $=\langle e^{i\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{v}\cdot A^2(x+\widehat{v}\tau)d\tau}\phi_0,\psi_0\rangle,\forall\phi_0,\psi_0\in C_0^\infty(\Omega_{\widehat{v}})$, esto implica que $e^{-i(\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{v}\cdot A^1(x+\widehat{v}\tau)d\tau+\lambda_\infty(\widehat{v})-\lambda_\infty(-\widehat{v}))}=e^{-i\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{v}\cdot A^2(x+\widehat{v}\tau)d\tau}$ en $\Omega_{\widehat{v}}$, por lo tanto, por la afirmación 9.0.12, se concluye,

(9.21)
$$\left(\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{v}\cdot A^1(x+\widehat{v}\tau)d\tau+\lambda_\infty(\widehat{v})-\lambda_\infty(-\widehat{v})\right)+2\pi m_0=\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{v}\cdot A^2(x+\widehat{v}\tau)d\tau.$$

En donde $m_0\in\mathbb{N}$ es independiente de x y depende de A^2 y A^1. Como vimos en el capítulo 1, $A_c\in\mathcal{A}(\alpha_K,B_R)$, entonces si ponemos $A^1=A_c, A=A^2$ y usamos el teorema 9.0.68, obtenemos.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{v}\cdot A(x+\widehat{v}\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{v}\cdot A_c(x+\widehat{v}\tau)d\tau+\lambda_\infty(\widehat{v})-\lambda_\infty(-\widehat{v})+m_0 2\pi$$
(9.22)
$$=\pm\alpha\pi+\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{v}\cdot\tilde{A}_R(x+\widehat{v}\tau)d\tau+\lambda_\infty(\widehat{v})-\lambda_\infty(-\widehat{v})+m_0 2\pi$$

Para $A\in\mathcal{A}(\alpha_K,B_R)$ arbitrario, definimos

$$L(x,\widehat{v})=\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{v}\cdot A(x+\widehat{v}\tau)d\tau \tag{9.23}$$

Por la observación 9.0.7 se tiene:

$$\lim_{|x\perp|\to\infty}L(x,\widehat{v})=\pm\alpha\pi+\lambda_\infty(\widehat{v})-\lambda_\infty(-\widehat{v})+m_0 2\pi \tag{9.24}$$

Para $x \in \Omega^{\pm}_{\widehat{v}}$.
Se sigue de lo anterior y del teorema 8.0.65 que si $S(A^1) = S(A^2)$, entonces

$$\alpha^1\pi + \lambda^1_\infty(\widehat{v}) - \lambda^1_\infty(-\widehat{v}) = \alpha^2\pi + \lambda^2_\infty(\widehat{v}) - \lambda^2_\infty(-\widehat{v}) + 2\pi k(\widehat{v}). \tag{9.25}$$

En donde la función $k(\widehat{v})$ toma valores enteros. Como las funciones $\lambda^i_\infty, i = 1, 2$ son continuas para $\widehat{v}$ en el círculo de radio 1, se sigue que k es constante independiente de $\widehat{v}$. De la ecuación 9.25, evaluada en $\widehat{v}$ y en $-\widehat{v}$, obtenemos,

$$\begin{aligned}
&\alpha^1\pi + \lambda^1_\infty(\widehat{v}) - \lambda^1_\infty(\widehat{v}) = \\
&\alpha^2\pi + \lambda^2_\infty(\widehat{v}) - \lambda^2_\infty(-\widehat{v}) + 2\pi k(\widehat{v}) \\
&\alpha^1\pi + \lambda^1_\infty(-\widehat{v}) - \lambda^1_\infty(\widehat{v}) = \\
&\alpha^2\pi + \lambda^2_\infty(-\widehat{v}) - \lambda^2_\infty(\widehat{v}) + 2\pi k(\widehat{v}).
\end{aligned}$$

Sumando estas dos ecuaciones , obtenemos,

$$\alpha^1 = \alpha^2, \qquad \text{Módulo 2} \tag{9.26}$$

Utilicemos la siguiente notación.

$$I(x, y, \widehat{v}) = \int_{-\infty}^{\infty} (\widehat{v} \cdot (A(x + \widehat{v}\tau) - A(y + \widehat{v}\tau)d\tau)), x, y \in \Omega_{\widehat{v}} \tag{9.27}$$

$$\mathcal{R}(x, y) = e^{-iI(x,y,\widehat{v})}. \tag{9.28}$$

De la ecuación 9.22, se sigue que $I(x, y, \widehat{v})$ es invariante bajo cambio de $A \in \mathcal{A}(\alpha_k, B_R)$, de manera que podemos utilizar cualquier A para de definición.

Afirmación 9.0.13. $I(x, y, \widehat{v}) \in C^1(\Omega_{\widehat{v}} \times \Omega_{\widehat{v}})$

Demostración. Es suficiente demostrar que la función $g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{v} \cdot \tilde{A}_R(x + \widehat{v}\tau)d\tau \in C^1(\Omega_{\widehat{v}} \times \Omega_{\widehat{v}})$, pues $A_c \in \mathcal{A}(\alpha_k, B_R)$, y por 9.4.
Definimos $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ de la siguiente manera

$$f(x, y) = (|x - y|^{-2} \begin{pmatrix} -(x-y)_2 \\ (x-y)_1 \end{pmatrix} - |x|^{-2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}) \tag{9.29}$$

Sean $e_i, i = 1, 2$ los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^2$

$$\widehat{v} \cdot (f(x + \tau\widehat{v} + he_2, y) - f(x + \tau\widehat{v}, y))/h = \widehat{v}/h \cdot \{ \begin{pmatrix} -x_2 + y_2 \\ x_1 - y_1 \end{pmatrix}$$
$$[|x + he_2 - y + \tau\widehat{v}|^{-2} - |x - y + \tau\widehat{v}|^{-2}] - |x + he_2 - y + \tau\widehat{v}|^2 he_1 +$$
$$\begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} [|x + \tau\widehat{v}|^{-2} - |x + he^2 + \tau\widehat{v}|^{-2}] + |x + he_2 + \tau\widehat{v}|^{-2} he_1 \}$$
$$:= f_1(y, x, \tau, h) \tag{9.30}$$

$$1/|h|| \begin{pmatrix} -x_2 + y_2 - \tau\widehat{v}_2 \\ x_1 - y_1 + \tau\widehat{v}_1 \end{pmatrix} [|x + he_2 - y + \tau\widehat{v}|^{-2} - |x - y + \tau\widehat{v}|^{-2}]|$$
$$= |\frac{-2\langle e_2, x - y - \tau\widehat{v}\rangle - h}{|x + he_2 - y + \tau\widehat{v}|^2 |x - y - \tau\widehat{v}|^2}||x - y + \tau\widehat{v}|$$
$$\leqq |\frac{|h|}{(|x - y + \tau\widehat{v}| - |h|)^2 |x - y - \tau\widehat{v}|}| + |\frac{2}{(|x - y + \tau\widehat{v}| - |h|)^2}|$$

Esto último es válido para $|\tau|$ suficientemente grande , digamos $|\tau| > \tau_0$, para toda $y \in sop(\tilde{B}_r)$(que es compacto) y $\forall |h| \leqq 1$.Supongamos además que τ_0 cumple con que $\tau_0 > 1 + |x| + \sup\{|y| : y \in sop(\tilde{B}_R)\}$, entonces $|\tau| \geqq \tau_0 \Rightarrow |\tau\widehat{v} + x - y| \geqq |\tau| - |x - y| \geqq 1 \forall y \in sop(\tilde{B}_R)$ y que $|h| \leqq 1/2$ entonces,

$$1/|h|| \begin{pmatrix} -x_2 + y_2 - \tau\widehat{v}_2 \\ x_1 - y_1 + \tau\widehat{v}_1 \end{pmatrix} [|x + he_2 - y + \tau\widehat{v}|^{-2} - |x - y + \tau\widehat{v}|^{-2}]| \leqq$$
$$\frac{4}{|x - y - \tau\widehat{v}|^3} + \frac{4}{|x - y - \tau\widehat{v}|^2} \leqq \frac{8}{|x - y - \tau\widehat{v}|^2}$$

Por otro lado, $\frac{4}{|x-y-\tau\widehat{v}|^2} \leqq \frac{4}{(|\tau| - |x| - \sup\{|y|: y \in sop(\tilde{B}_R)\})^2} \in L_1([-\tau_0, \tau_0]^c)$.
Sea $M = \sup\{|y| : y \in sop(\tilde{B}_R)\}$ entonces se sigue que:

$$\int_{\mathbb{R}^2} |1/|h||(\begin{pmatrix} -x_2 + y_2 - \tau\widehat{v}_2 & \\ & x_1 - y_1 + \tau\widehat{v}_1 \end{pmatrix} [|x + he_2 - y + \tau\widehat{v}|^{-2} - |x - y + \tau\widehat{v}|^{-2}])$$
$$\chi_{\mathbb{R}^2 \times [-\tau_0, \tau_0]^c}(y, \tau) \tilde{B}_R(y)| dy$$
$$\leqq |\tilde{B}_R|_\infty \lambda(sop(\tilde{B}_R)) 8/(|\tau| - |x| - M)^2 \chi_{[-\tau_0, \tau_0]^c}|^2(\tau) \in L_1(\mathbb{R}) \tag{9.31}$$

En la anterior desigualdad suponemos a x fija, $|h| \leqq 1/2$ fija y $\mathbb{R}^2 \times [-\tau_0, \tau_0] = \{(y, \tau) : y \in \mathbb{R}^2, \tau \in [-\tau_0, \tau_0]\}$
Por 9.30, podemos proceder como en 9.31 para obtener lo siguiente.
Dada $|h| \leqq 1/2$ fija y x fija y $\mathbb{R}^2 \times [-\tau_0, \tau_0] = \{(y, \tau) : y \in \mathbb{R}^2, \tau \in [-\tau_0, \tau_0]\}$ podemos encontrar una función $f_2 \in L_1(\mathbb{R})$ y un número $\tau_2 > 0$ tales que

$$(9.32) \qquad \int_{\mathbb{R}^2} |\tilde{B}_R(y)||f_1(x, y, \tau, h)|\chi_{\mathbb{R}^2 \times [-\tau_2, \tau_2]^c}(y, \tau) dy \leqq f_2(\tau)$$

Como por el capítulo 1 sabemos que $A_R \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^2)$ y como $0 \in k^\circ$, podemos concluir que $\tilde{A}_R \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^2)$. Sea $x \in \Omega_{\widehat{v}}$, definimos,

$$(9.33) \qquad f_3(h, \tau) = \frac{\widehat{v} \cdot \tilde{A}_R(x + he_2 + \widehat{v}\tau) - \widehat{v} \cdot \tilde{A}_R(x + \widehat{v}\tau)}{h}.$$

Sea r tal que $dist\{\partial K, x + \widehat{v}\tau : \tau \in \mathbb{R}\} = r$ como $\tilde{A}_R \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^2)$, luego f_3 es continua para $|h| \leqq r/2$, entonces f_3 es uniformemente continua en $\bar{B}_{r/2}(0) \times \bar{B}_{\tau_2}(0)$, entonces $\lim_{h \to 0} \int_{-\tau_2}^{\tau_2} f_3(h, \tau) d\tau = \int_{-\tau_2}^{\tau_2} \lim_{h \to 0} f_3(h, \tau) d\tau = \int_{-\tau_2}^{\tau_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \widehat{v} \cdot \tilde{A}_R(x + \widehat{v}\tau) d\tau$ entonces

$$(9.34) \qquad \frac{\partial}{\partial x_2} \int_{-\tau_2}^{\tau_2} \widehat{v} \cdot \tilde{A}_R(x + \widehat{v}\tau) d\tau = \int_{-\tau_2}^{\tau_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \widehat{v} \cdot \tilde{A}_R(x + \widehat{v}\tau) d\tau$$

Esta última función es continua, pues $\tilde{A}_R \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^2)$.
Sean x, h fijos , $|h| < 1/2$.

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^2 \times [-\tau_2, \tau_2]^c} \tilde{B}_R(y) f_1(y, x, \tau, h) dy d\tau \\
&= \int_{[-\tau, \tau]^c} \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{B}_R(y) f_1(y, x, \tau, h) dy d\tau = \\
(9.35) \qquad & 2\pi \int_{[-\tau, \tau]^c} \widehat{v}/h \cdot (\tilde{A}_R(x + \widehat{v}\tau + he_2) - \tilde{A}_R(x + \widehat{v}\tau)) d\tau
\end{aligned}$$

De 9.32 y del teorema de convergencia dominada de Lebesgue, se sigue:

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\int_{\mathbb{R}^2\times[-\tau_2,\tau_2]^c}\tilde{B}_R(y)f_1(y,x,\tau,h)dyd\tau\\
&=\int_{[-\tau_2,\tau_2]^c}\lim_{h\to 0}\int_{\mathbb{R}^2}\tilde{B}_R(y)f_1(y,x,\tau,h)dyd\tau\\
&=\int_{[-\tau_2,\tau_2]^c}2\pi\widehat{v}\cdot/h(\tilde{A}_R(x+\widehat{v}\tau+he_2)-\tilde{A}_R(x+\widehat{v}\tau))d\tau\\
&=\int_{[-\tau_2,\tau_2]^c}2\pi\widehat{v}\cdot\frac{\partial}{\partial x_2}\tilde{A}_R(x+\widehat{v}\tau)d\tau
\end{aligned}\tag{9.36}$$

Entonces, la ecuación dada en 9.35 es derivable y su derivada está dada por la ecuación 9.36.
La función 9.36 es continua como función de $x\in\Omega_{\widehat{v}}$, esto es por lo siguiente: $\tilde{A}_R(x)=A_R(x)-\alpha_\Omega|x|^{-2}\begin{pmatrix}-x_2\\ x_1\end{pmatrix}$.
La función $\frac{\partial}{\partial x_2}\alpha_\Omega|x|^{-2}\begin{pmatrix}-x_2\\ x_1\end{pmatrix}$ cumple con las hipótesis de la afirmación 9.0.12, de la demostración de la afirmación 9.0.12 es fácil ver que la función $\int\widehat{v}\cdot\frac{\partial}{\partial(x)_2}\alpha_\Omega|x+\tau\widehat{v}|^{-2}\begin{pmatrix}-(x+\tau\widehat{v})_2\\ (x+\tau\widehat{v})_1\end{pmatrix}d\tau$ es continua para $x\in\Omega_{\widehat{v}}$.
Por otro lado, $\frac{\partial}{\partial x_2}A_R(x)=1/(2\pi)\int\frac{\partial}{\partial x_2}\tilde{B}_R(x-y)|y|^{-2}\begin{pmatrix}-y_2\\ y_1\end{pmatrix}dy=1/(2\pi)$ $\int\frac{\partial}{\partial x_2}\tilde{B}_R(y)|x-y|^{-2}\begin{pmatrix}-(x-y)_2\\ (x-y)_1\end{pmatrix}$.
Es fácil ver que esta última función cumple con las hipótesis de la afirmación 9.0.12, (esto se hace de manera análoga a lo hecho en las líneas anteriores al teorema 1.1.4), por lo tanto la función $\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{v}\cdot\frac{\partial}{\partial x_2}A_R(x+\widehat{v}\tau)d\tau$ es continua para $x\in\Omega_{\widehat{v}}$

De 9.34, 9.35 , 9.36 y de lo anterior, se concluye que,

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x_2}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{v}\cdot\tilde{A}_R(x+\widehat{v}\tau)d\tau=\\
&\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial x_2}\widehat{v}\cdot\tilde{A}_R(x+\widehat{v}\tau)d\tau\in C^1(\Omega_{\widehat{v}}\times\Omega_{\widehat{v}})
\end{aligned}\tag{9.37}$$

De manera análoga

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{v}\cdot\tilde{A}_R(x+\widehat{v}\tau)d\tau =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial x_1}\widehat{v}\cdot\tilde{A}_R(x+\widehat{v}\tau)d\tau \in C^1(\Omega_{\widehat{v}}\times\Omega_{\widehat{v}}) \tag{9.38}$$

.

Por lo tanto, la función $g(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{v}\cdot\tilde{A}_R(x+\widehat{v}\tau)d\tau \in C^1(\Omega_{\widehat{v}}\times\Omega_{\widehat{v}})$.

□

De la afirmación 9.0.13, y de 9.28, obtenemos que $\mathcal{R}(x,y,\widehat{v})\in C^1(\Omega^{\pm}_{\widehat{v}}\times\Omega^{\pm}_{v})$ y que.

$$\frac{\partial}{\partial x\perp}\mathcal{R}(x,y,\widehat{v}) = i\mathcal{R}(x,y,\widehat{v})\frac{\partial}{\partial x\perp}I(x,y,\widehat{v}), \qquad x,y\in\Omega_{\widehat{v}} \tag{9.39}$$

Esto implica que en el límite de velocidades altas,a partir del operador de dispersión podemos reconstruir de manera única $\frac{\partial}{\partial x\perp}I(x,y,\widehat{v}), x,y\in\Omega_{\widehat{v}}$

Teorema 9.0.69.

$$\frac{\partial}{\partial x\perp}I(x,y,\widehat{v}) = \frac{\partial}{\partial x\perp}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{v}\cdot(A(x+\widehat{v}\tau)d\tau) = \int_{-\infty}^{\infty}B_R(x+\widehat{v}\tau d)\tau, \quad x,y\in\Omega_{\widehat{v}}$$

En donde tomamos $A=A^{f,Q}$ como en el capítulo 1.
Consideramos $\frac{\partial}{\partial x\perp}$ a la derivada direccional en dirección del vector $\widehat{v}^{\perp}=(\widehat{v}_2,-\widehat{v}_1)$ que es el vector ortogonal a $\widehat{v}$ de tal forma que el par $(\widehat{v}^{\perp},\widehat{v})$ está orientado de manera positiva.

Demostración. Supongamos primero que $\widehat{v}=e_2$ (en donde los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^2$ son e_1,e_2), entonces $x\perp=(x_1,x_2)-\langle x,e_2\rangle e_2=x_1e_1$, sea $v^{\perp}=e_1$.
Sabemos por el capítulo 1 que $B_R=\nabla\times A=\frac{\partial}{\partial x_1}A_2-\frac{\partial}{\partial x_2}A_1$, pero $\frac{\partial}{\partial x_2}A_1(x+\widehat{v}\tau)=\frac{\partial}{\partial\tau}A_1(x+\tau\widehat{v})$, de manera que $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial x_2}A_1(x+\widehat{v}\tau)d\tau = A_1(x+\tau e_2)|_{-\infty}^{\infty}=0$, pues $A(x)=O(|x|^{-1}), |x|\to\infty$. Entonces

(9.40)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\nabla\times A(x+\widehat{v}\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial x_1}A_2(x+\widehat{v}\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial x\perp}A_2(x+\widehat{v}\tau)d\tau$$

Supongamos que $A = A^{f,Q}$ tiene soporte en un cono de ángulo menor que $90°$ y de eje perpendicular a $\widehat{v}$.
La función $F(h,\tau) = 1/h(A(x+\tau he_i+\widehat{v}\tau) - A(x+\tau+\widehat{v}\tau)), x \in \Omega_{\widehat{v}}, |h| \leqq \min(1, dist(\{y : y = x+\tau\widehat{v}, \tau \in \mathbb{R}\}, K)/2)$ tiene soporte compacto , y como $A \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^2)$, entonces es uniformemente continua y de soporte compacto, se sigue que $\lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} F(h,\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty}\lim_{h\to 0} F(h,\tau)$, por lo tanto,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\int_{-\infty}^{\infty} A(x+\widehat{v}\tau)d\tau) = (\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial x_i}A(x+\widehat{v}\tau)d\tau) \tag{9.41}$$

Por lo tanto , como $\frac{\partial}{\partial x_\perp} = \frac{\partial}{\partial x_1}$, se sigue de 9.41 y 9.40 que

$$(\int_{-\infty}^{\infty} B_R(x+\widehat{v}\tau)d\tau) = \frac{\partial}{\partial x\perp}(\int_{-\infty}^{\infty} A_2(x+\widehat{v}\tau)d\tau) \tag{9.42}$$

Supongamos ahora que $\widehat{v}$ es arbitrario, se considera la siguiente transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tal que $T(e_2) = \widehat{v}, T(e_1) = \widehat{v}^\perp$, entonces:

$$T(y_1,y_2) = \begin{pmatrix} \widehat{v}_1^\perp & \widehat{v}_1 \\ \widehat{v}_2^\perp & \widehat{v}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \tag{9.43}$$

Sea $u = (u_1,u_2) = \widehat{v}$, entonces $\widehat{v}^\perp = (u_2,-u_1)$. Sea $F = T^{-1}AT$, en donde es claro que :

$$T^{-1}(z_1,z_2) = \begin{pmatrix} u_2 & -u_1 \\ u_1 & u_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

Sea $x = T(y)$

$$
\begin{aligned}
\nabla \times F &= \frac{\partial F_2}{\partial y_1} - \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\
&= \frac{\partial}{\partial y_1} u \cdot AT - \frac{\partial}{\partial y_2} u^{\perp} AT \\
&= u_1 \frac{\partial}{\partial x_1} A_1 \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + u_1 \frac{\partial}{\partial x_2} A_1 \frac{\partial x_2}{\partial y_1} + u_2 \frac{\partial}{\partial x_1} A_2 \frac{\partial x_1}{\partial y_1} + u_2 \frac{\partial}{\partial x_2} A_2 \frac{\partial x_2}{\partial y_1} \\
&- u_2 \frac{\partial}{\partial x_1} A_1 \frac{\partial x_1}{\partial y_2} - u_2 \frac{\partial}{\partial x_2} A_1 \frac{\partial x_2}{\partial y_2} + u_1 \frac{\partial}{\partial x_1} A_2 \frac{\partial x_1}{\partial y_2} + u_1 \frac{\partial}{\partial x_2} A_2 \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \\
&= u_2 (u_1 \frac{\partial}{\partial x_1} A_1 + u_2 \frac{\partial}{\partial x_1} A_2) + u_1 (-u_2 \frac{\partial}{\partial x_1} A_1 + u_1 \frac{\partial}{\partial x_1} A_2) \\
&- u_1 (u_1 \frac{\partial}{\partial x_2} A_1 + u_2 \frac{\partial}{\partial x_2} A_2) + u_2 (-u_2 \frac{\partial}{\partial x_2} A_1 + u_1 \frac{\partial}{\partial x_2} A_2) \\
&= u_1^2 (\frac{\partial}{\partial x_1} A_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} A_1) + u_2^2 (\frac{\partial}{\partial x_1} A_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} A_1) + u_1 u_2 (\frac{\partial}{\partial x_1} A_1 - \frac{\partial}{\partial x_1} A_1 \\
&- \frac{\partial}{\partial x_2} A_2 + \frac{\partial}{\partial x_2} A_2) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_1} A_2(x_1, x_2) - \frac{\partial}{\partial x_2} A_1(x_1, x_2)
\end{aligned}
$$

Se concluye que

$$
\nabla \times (T^{-1} AT) = (\nabla \times A) \circ T = \tilde{B}_R \circ T \tag{9.44}
$$

Sea $x \in \Omega_{\widehat{v}}$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \nabla \times A(x+u\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} (\nabla \times A) \circ T(T^{-1}(x)+\tau e_2)d\tau$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} (\nabla \times F)(T^{-1}(x)+\tau e_2)d\tau$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} (\frac{\partial}{\partial y_1} F_2(T^{-1}x+\tau e_2) - \frac{\partial}{\partial y_2} F_1(T^{-1}x+\tau e_2)d\tau)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y_1} F_2(T^{-1}x+\tau e_2)d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \tau} F_1(T^{-1}x+\tau e_2)d\tau$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y_1} F_2(T^{-1}x+\tau e_2)d\tau - F_1(T^{-1}x+\tau e_2)|_{-\infty}^{\infty}$$
$$= \frac{\partial}{\partial y_1} \int_{-\infty}^{\infty} F_2(T^{-1}x+\tau e_2)d\tau (\text{De manera análoga a 9.4})$$
$$= \frac{\partial}{\partial y_1} \int_{-\infty}^{\infty} u \cdot A \circ T(T^{-1}x+\tau e_2)d\tau.$$
$$= \frac{\partial}{\partial x \perp} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{v} \cdot A(x+\widehat{v}\tau)d\tau$$

De manera que

(9.45)
$$\frac{\partial}{\partial x \perp} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{v} \cdot A(x+\widehat{v}\tau)d\tau = \frac{\partial}{\partial x \perp} I(x,y,\widehat{v}) = \int_{-\infty}^{\infty} B_R(x+\widehat{v}\tau)d\tau, x, y \in \Omega_{\widehat{v}}$$

□

Por el teorema de soporte de Radon [1], si K es convexo, B_R es determinado de manera única en Ω por la transformada de Radon

$$\int_{-\infty}^{\infty} B_R(x+\widehat{v}\mu)d\mu, \qquad x \in \Omega_{\widehat{v}} \tag{9.46}$$

En consecuencia, si $S(A^1) = S(A^2), A^i \in \mathcal{A}_K(\alpha_K^j, B_R^j), j = 1,2$, obtenemos que $B_R^1(x) = B_R^2(x), x \in \Omega$.
Sea $A \in \mathcal{A}_K(\alpha_K, B_R)$.
Se sigue del teorema de Green que $\int_K \tilde{B_R} = \int_{\partial K} A \cdot ds$. Pero la integral

[1]Se puede encontrar este teorema en el libro [11]

$\int_{\partial K} A \cdot ds$ está determinada de manera única por los valores de $\tilde{B}_R(x), x \in \Omega$, de manera que $\alpha_\Omega = 1/(2\pi) \int \tilde{B}_R(x)dx = (2\pi)^{-1}(\int_\Omega B_R(x)dx + \int_K \tilde{B}_R(x)dx)$ está determinada de manera única por los valores de B_R en Ω.
Como $\nabla \times A_R = \tilde{B}_R$ y $\alpha_K = 1/(2\pi) \int_{\partial K} A_R ds$ se sigue del teorema de Green que α_K está determinado por los valores de B_R en Ω.

Se sigue entonces del teorema 9.0.68 (ya que $\alpha = \alpha_k - \alpha_R + \alpha_\Omega$) y de la ecuación 9.26 que

$$\alpha_K^1 = \alpha_K^2 \qquad \text{(módulo 2)} \tag{9.47}$$

Nótese que si $K = \{0\} \Rightarrow \Omega_{\widehat{v}} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x \perp \neq 0\}$. En este caso conocemos la transformada de Radon de B_R para todas las líneas en $\mathbb{R}^2$, porque las integrales 9.46 son funciones continuas de $x \perp$.
Podemos Reconstruir α de $\mathcal{R}(x, y, \widehat{v})$ como sigue:

$$\lim_{|x\perp| \to \infty, |y\perp| \to \infty} \mathcal{R}(x, y, \widehat{v}) = e^{2i\alpha\pi} \tag{9.48}$$

En el límite tomamos $x \in \Omega_{\widehat{v}}^+$ y $y \in \Omega_{\widehat{v}^-}$, de 9.48 reconstruimos α módulo 1.
Del teorema 8.0.58, por un argumento de densidad, obtenemos que $\forall \phi \in L_2(\mathbb{R}^2)$ con $sop(\phi) \subset \Omega_v$

$$s - \lim_{|v| \to \infty} e^{-imv \cdot x} W_\pm(A) e^{imv \cdot x} \phi = e^{-i \int_0^{\pm\infty} \widehat{v} \cdot A(x + \widehat{v}\tau) d\tau} \phi \tag{9.49}$$

Además, como los operadores de onda son isométricos,entonces tenemos convergencia fuerte también para los operadores adjuntos de los operadores de onda, como el siguiente argumento muestra. Usemos la siguiente notación, $W_{\pm,v} := e^{-imv \cdot x} W_\pm(A) e^{imv \cdot x}$, $W_{\pm,v}^* := e^{-imv \cdot x} W_\pm(A)^* e^{imv \cdot x}$ y $L_\pm := \int_0^{\pm\infty} \widehat{v} \cdot A(x + \widehat{v}\tau) d\tau$. Entonces,

$$\begin{aligned} &|(W_{\pm,v}^* - e^{iL_\pm})\phi| = |W_{\pm,v}^*(e^{-iL_\pm} - W_{\pm,v}) e^{iL_\pm} \phi| \\ (9.50) \qquad &\leqq |(e^{-iL_\pm} - W_{\pm,v}) e^{iL_\pm} \phi| \to 0 \qquad \textit{cuando}, |v| \to \infty \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$s - \lim_{|v| \to \infty} e^{-imv \cdot x} W_\pm(A)^* e^{imv \cdot x} \phi = e^{i \int_0^{\pm\infty} \widehat{v} \cdot A(x + \widehat{v}\tau) d\tau} \phi \tag{9.51}$$

Se sigue también que

$$
\begin{aligned}
&|W^*_{+,v}(A)W_{-,v}(A)\phi - e^{i\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{v}\cdot A(x+\widehat{v}\tau)d\tau}\phi| = \\
&|W^*_{+,v}(A)W_{-,v}(A)\phi - W^*_{+,v}(A)e^{-i\int_0^{-\infty}\widehat{v}\cdot A(x+\widehat{v}\tau)d\tau}\phi \\
&+ W^*_{+,v}(A)e^{-i\int_0^{-\infty}\widehat{v}\cdot A(x+\widehat{v}\tau)d\tau}\phi - e^{i\int_0^{\infty}\widehat{v}\cdot A(x+\widehat{v}\tau)d\tau}e^{-i\int_0^{-\infty}\widehat{v}\cdot A(x+\widehat{v}\tau)d\tau}\phi| \\
&\leqq |W^*_{+,v}(A)(W_{-,v}(A) - e^{-i\int_0^{\infty}A(x+\widehat{v}\tau)d\tau})\phi| + |(W_{+,v}(A)^* - e^{i\int_0^{\infty}\widehat{v}\cdot A(x+\widehat{v}\tau)d\tau}) \\
&e^{-i\int_0^{-\infty}A(x+\widehat{v}\tau)d\tau}\phi| \\
&\to 0, cuando, |v| \to \infty
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, como $S(A) = W^*_+(A)W_-(A)$,

$$
\begin{aligned}
&s - \lim_{|v|\to\infty} e^{-imv\cdot x}W^*_+(A)e^{imv\cdot x}e^{-imv\cdot x}W_-(A)e^{imv\cdot x}\phi \\
&= s - \lim_{|v|\to\infty} e^{-imv\cdot x}S(A)e^{imv\cdot x}\phi \\
&= e^{i\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{v}\cdot A(x+\widehat{v}\tau)d\tau}\phi \qquad (9.52)
\end{aligned}
$$

Bibliografía

[1] Schechter Martin: Principles of Functional Analysis, Academic Press, New York 1971

[2] Weder Ricardo: The Aharonov-Bohm effect and time-dependent inverse scattering theory , Inverse Problems 18 (2002),1041-1056.

[3] Peskin M and Tanamura A 1989: The Aharanov-Bohn Effect (Springer Lecture Notes in Physics vol 340)(Berlin: Springer)

[4] Francois Treves: Basic Linear Partial Differential Ecuations, Academic Press, New York 1975

[5] Amrein Werner O., Jauch Josef M, Sinha Kalyan B.: Scattering Theory in Quantum Mechanics,E.D. W.A. Benjamin,Inc., 1977

[6] Royden, H.L.: Real Analysis, e.d Macmillan Company,U.S.A, 1970.

[7] Reed Michael, Simon Barry: Methods of Modern Mathematical physics vol 3, Academic Press, New York, 1972

[8] Rudin Walter: Functional Analysis, McGraw-Hill,U.S.A, 1991

[9] Cohn Donald: Measure Theory, Birkhauser, U.S.A 1997

[10] Adams Robert: Sobolev Spaces, Academic press U.S.A 1975

[11] Helgason S 1999: The Radon Transform (Progress im Mathematics vol 5) 2nd edn (Berlin:Birkhauser)

[12] Aharonov Y and Bohm D 1959 Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory, Phys. Rev 115, 485-91