UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

FUNDAMENTOS DE LOS DERIVADOS FINANCIEROS: MARCO TEORICO-PRACTICO Y VISUALIZACION GRAFICA.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

ACTUARIA

PRESENTA:

PAOLA FABIOLA VILCHIS JIMENEZ

DIRECTOR DE TESIS:

M. EN C. JESUS AGUSTIN CANO GARCES

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

2004

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVFNOMA DE
MEXICO

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"Fundamentos de los derivados financieros: Marco teórico-práctico y visualización gráfica"

realizado por Vilchis Jiménez Paola Fabiola

con número de cuenta 9403131-7 , quien cubrió los créditos de la carrera de: Actuaría

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	M. en C. Jesús Agustín Cano Garcés
Propietario	Dra. Guadalupe Carrasco Licea
Propietario	M. en I. José Antonio Climent Hernández
Suplente	Act. Mauricio Aguilar González
Suplente	M. en C. Hugo Villaseñor Hernández

Consejo Departamental de Matemáticas

Act. Jaime Vázquez Alamilla

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMATICAS

Para:

Ma. Concepción y José Luis	*(mis padres)*
Saira, Luis y Moy	*(mis hermanos)*
Jorge Santos	*(mi amor)*

Agradecimientos

Mi más profundo agradecimiento a mi familia, por su ejemplo de lucha, honestidad, amor y trabajo. La vida no nos da a elegir a la familia con la que crecemos, pero si ahora pudiese elegir, no dudaría ni un segundo en elegir padres y hermanos exactamente como ustedes.

A Jorge Santos al cual le debo toda la solidaridad, el amor y la paciencia que me ha brindado durante estos buenos años a su lado. Gracias mi amor.

A Jesús Santos González y a su dulcísima esposa Emilia Fierro de Santos, no sólo les agradezco por el hecho de haber traído al mundo y educado al hombre de mi vida, también quiero agradecerles su amistad, confianza, apoyo y esas amenas tardes de sábado.

Un agradecimiento muy especial a la gente de la Facultad de Ciencias, siempre dispuesta a discutir o explicar una demostración o un problema, a contar un chiste o polemizar sobre algún tema controversial, lo que sea, pero siempre dispuesta. En particular quiero agradecer a: Agustín Cano, por la oportunidad de aprender un poco de lo mucho que él sabe y por confiarme a sus alumnos un par de veces a la semana, pues debo decir que la enseñanza ha sido una de las experiencias más retantes y enriquecedoras de mi vida; Guadalupe Carrasco, cuyos alumnos también son víctimas de mi incipiente carrera docente, y a la que también agradezco su confianza y paciencia; Antonio Climent, Mauricio Aguilar y Hugo Villaseñor, los cuales han tenido a bien escucharme y revisar con paciencia este trabajo; todas las chicas de servicios escolares, Ade, Silvia, Mari, Susi, Marta, y todas en general, por su apoyo incondicional; algunos de los maestros que me han contagiado su gusto por la Probabilidad, la Geometría Moderna, el Cálculo, las Finanzas y la Estadística; Miguel Ángel García, Silvestre Cárdenas, Antonio González, Ken Hiranaka, Francisco Sánchez y por supuesto, Agustín, Pita y Hugo; mis alumnos, porque de ellos he aprendido (y sigo aprendiendo) tanto como de mis maestros.En fin, a toda la gente valiosa de esta Facultad.

A mis tíos y primos les agradezco todo su cariño y apoyo, especialmente a: Catalina Jiménez y Luis García, Lourdes Sánchez y Rubén Alejaldre, Agustina Jiménez, Margarita Jiménez, Almita, Vida, Luisín, Vic, Eli, Fabián, Edgar, Miriam, Abraham, Gus, Ara, Raúl y Rubencillo.

Agradezco también a los amigos que han compartido conmigo igualmente tiempos difíciles y tiempos de sana diversión: Ray, Quique, Pepín, José Luis, Clau, More, Gisselle, Glo, Nalle, Anita, Vivian e Hilda.

A todos ustedes, Gracias.

Fundamentos de los derivados financieros : Marco teórico-práctico y visualización gráfica

Paola Fabiola Vilchis Jiménez

Noviembre del 2004

Índice general

Capítulo 1

Introducción

El objetivo de este trabajo es presentar de manera introductoria la naturaleza de los productos derivados. Es una recopilación de material diverso que va desde la bibliografía común del tema, textos de historia financiera, textos de modelos de probabilidad hasta mis notas del curso con el profesor Cano. Incluye también una serie de programas diseñados con el fin de reafirmar e ilustrar algunos de los principales conceptos vistos en cada capítulo, y al igual que la parte conceptual, el grado de complejidad de estos programas va de menos a más a lo largo del texto, invitando así al lector a escribir sus propios programas. Aunque este material es en general introductorio, la forma en la que se plantea cada concepto, se pretende sea suficiente para que aquel lector con la formación adecuada y el interés en profundizar aún más en alguno de los temas, se sienta seguro de hacerlo.

Debido al cambio constante en el sistema económico y a las fuertes diferencias de las políticas financieras en diferentes lugares del mundo, resulta de una complejidad que ameritaría un trabajo de análisis especifico, describir a detalle las políticas de negociación de los productos financieros derivados, por lo que en el presente trabajo sólo se da una descripción general de algunas de ellas, haciendo énfasis siempre que sea posible, en el caso particular de México.

Respecto al software matemático del que frecuentemente hago uso en este trabajo —para obtener las soluciones inmediatas de ecuaciones, gráficas, y demás cálculos requeridos durante el desarrollo— los he llevado a cabo con MAPLE V Release 5.1[1]; asimismo los algoritmos incluidos al final de cada capítulo han sido implementados en el ambiente de MATLAB 6.5.[2]

[1] Versión incluida en Scientific WorkPlace, este software posee un ambiente de computación técnica que combina métodos numéricos con un lenguaje de programación de alto nivel y visualización gráfica avanzada.

[2] Software que además de tener características análogas a las de MAPLE de ScientificWorkplace, cuenta con un ambiente más propicio para la construcción de programas estructurados.

1.1. Antecedentes

Acontecimientos como el derrumbe del sistema de tipo de cambio fijo en 1971, las crisis de los precios del petróleo —que comenzaron en 1973 y vinieron acompañadas de inflación y de grandes oscilaciones en las tasas de interés— el lunes negro del 19 de octubre de 1987, donde las acciones estadounidenses cayeron en promedio un 23 %, el movimiento para la unificación económica y monetaria en Europa, el cual se estancó con el colapso del Sistema Monetario Europeo en septiembre de 1992, y muchos otros importantes sucesos económicos y sociales más, han tenido efectos profundos en los mercados financieros y en las empresas, tanto en el ámbito interno de cada país, como a nivel global. Uno de los efectos más relevantes ha sido la tan temida volatilidad, la cual ha dotado a la economía de las últimas décadas de un carácter sumamente incierto, convirtiéndola así en un escenario ideal para el manejo de los productos derivados que, como se verá más adelante, adquieren su principal razón de ser, inmersos en la incertidumbre.

La motivación principal que da origen al manejo de los productos derivados radica en la necesidad de reducir la incertidumbre que se halla en los acontecimientos futuros, es decir, fungir como un seguro. Pensemos, por ejemplo, en la situación en la que se encuentra un agricultor que no puede estar a expensas de la volatilidad del mercado, pues si el precio de su cosecha cae antes de ser vendida, él puede perder su ganancia e incluso toda su inversión; este hombre tiene la posibilidad de acordar de antemano el precio de venta de su cosecha, —mediante un contrato a futuro[3]— considerando su inversión, su ganancia y el costo de la garantía de las dos anteriores y de este modo traspasar el riesgo de la disminución del valor de la cosecha. El comprador que asumirá el riesgo —que para nuestro ejemplo puede ser un industrial que se dedica al procesamiento del producto cosechado— evidentemente ha especulado que el valor de la cosecha no caerá; de hecho, él espera que se incremente y si esto pasa, obtendrá la ganancia generada de la diferencia entre el precio acordado y el valor final de la cosecha. Como podemos ver este último realiza la transacción basado en una especulación, posición que en teoría por lo menos, puede generar una buena cantidad de ganancias, considerando que siempre existirán posiciones contrarias –como la del agricultor— que mantengan una aversión a la pérdida de sus bienes.

A pesar de que el uso de los productos financieros derivados pudiese parecer una innovación de nuestros tiempos, recuérdese que la incertidumbre ha existido siempre —aunque evidentemente no en la misma medida— por lo que no es extraño que los primeros registros del uso de los productos derivados se remonten a la Edad Media, más especificamente al siglo XII, donde los vendedores en las ferias de comercio del medioevo europeo firmaban contratos llamados *lettres de faire*, concertando la entrega en fechas futuras de sus artículos. Más tarde, en el siglo XVII, los señores feudales japoneses comerciaban el arroz que cosecharían en meses posteriores en un mercado llamado *cho-ai-mai* mediante contratos

[3]Los contratos a futuro son un tipo de productos derivados los cuales comprometen a su tenedor a comprar un bien subyacente a una fecha y un precio determinados, y a la contraparte a vender el bien en cuestión, bajo las mismas condiciones (fecha y precio).

que los protegían en caso de mal tiempo o guerra. Incluso en el mismo siglo en Holanda, se suscitó una de las primeras "burbujas"[4] financieras en el comercio de los tulipanes, que involucró el manejo de uno de los principales contratos de derivados, conocidos como *opciones*.[1]

Pese al largo historial que ostenta el manejo de los derivados financieros, el desarrollo de los mercados modernos de estos productos no fue posible sino hasta 1848 con la incursión de los contratos a futuro en el entonces naciente Chicago Board of Trade (CBOT)[5], que surgió con la intención de estandarizar la cantidad y calidad del grano de referencia con el que se comerciaba. En 1865 se negociaron en el CBOT los primeros contratos a futuro estandarizados, contando desde sus inicios, con una Cámara de Compensación (*Clearinghouse*), cuyo objetivo consistía en asegurar el cumplimiento de sus contrapartes[6].

En 1874 se fundó el Chicago Produce Exchange para la negociación a futuro de productos perecederos y en 1898 surgió el Chicago Butter and Egg Board. Ambas instituciones dieron origen al Chicago Mercantile Exchange (CME) que se constituyó como bolsa de futuros sobre diversos productos agroindustriales.

En 1972 se establece formalmente el mercado de futuros financieros, cuando el CME creó el International Monetary Market (IMM), una división destinada a operar futuros sobre divisas. Otro avance importante se produjo en 1982, cuando se comenzaron a negociar contratos de futuro sobre el índice de Standard & Poor's y otros índices bursátiles, casi simultáneamente en Kansas City, Nueva York y Chicago.

El mercado moderno para el manejo de opciones inició a principios del siglo pasado, y tomó forma en la Put and Call Brokers and Dealers Association, aunque no logró desarrollar un mercado secundario[7] ni contar con mecanismos que aseguraran el cumplimiento de las contrapartes. El mercado formal de opciones se originó en abril de 1973, cuando el CBOT creó una bolsa especializada en este tipo de operaciones, el Chicago Board Options Exchange (CBOE). En mayo de ese mismo año y después de haber sido rechazado por una gran cantidad de periódicos, se publicó uno de los más importantes modelos de valuación de opciones: El Modelo de Black-Scholes.

Dos años más tarde, se comenzaron a negociar opciones en el American Stock Exchange (AMEX) y en el Philadelphia Stock Exchange (PHLX). En 1976 se incorporó el Pacific Stock Exchange (PSE).

A mediados de la década de los años 80, el mercado de futuros, opciones, warrants y otros productos derivados tuvo un desarrollo considerable. A finales de esa década, el volumen de acciones de referencia en los contratos de opciones

[4]Sobreestimación del valor de un bien en el mercado, que suele conducir al desplome repentino de este valor.

[5]Los contratos de futuros se pactaban desde principios del siglo XIX, entre agricultores y comerciantes de granos de Chicago. La producción de las granjas a orillas del lago Michigan estaba expuesta a bruscas fluctuaciones de precios, por lo cual los productores y comerciantes comenzaron a celebrar acuerdos de entrega a fecha futura, a un precio predeterminado.

[6]Todos las fechas y eventos relacionados con el establecimiento de los mercados modernos de derivados han sido tomados textualmente de la página electrónica del MexDer[7].

[7]Es un segmento del mercado de valores, donde se realizan operaciones de valores ya emitidos en primera colocación.

vendidos cada día, superaba al volumen de acciones negociadas en el New York Stock Exchange (NYSE).

En 1997 se operaban en el mundo 27 trillones de dólares en productos derivados, en tanto el valor de capitalización[8] de las bolsas de valores alcanzaba los 17 trillones de dólares. Es decir, la negociación de derivados equivalía a 1.6 veces el valor de los subyacentes listados en las bolsas del mundo. Las bolsas de derivados de Chicago manejaban, en 1997, un volumen de casi 480 millones de contratos.

En México, es a partir de 1978 cuando se comienzan a cotizar contratos a futuro sobre el tipo de cambio peso/dólar, los que se suspendieron a raíz del control de cambios decretado en 1982. En 1983 la BMV listó futuros sobre acciones individuales y petrobonos, los cuales registraron operaciones hasta 1986. Fue en 1987 que se suspendió esta negociación debido a problemas de índole prudencial.

A principios de 1987 se reinició la operación de contratos diferidos sobre el tipo de cambio peso/dólar, por medio de Contratos de Cobertura Cambiaria de Corto Plazo, registrados ante Banco de México.

Los Bonos Brady, resultantes de la renegociación de la deuda externa del sector público, en 1989, incorporan una cláusula de recompra, que es una opción ligada al promedio de precio del petróleo Istmo.

En la década de los 90's se negociaron contratos forward OTC (*over the counter*)[9] sobre tasas de interés de títulos gubernamentales, pactados en forma interinstitucional, sin un marco operativo formal y fueron suspendidos a mediados de 1992.

A fines de 1994 entraron en vigor las normas de Banco de México para la operación de contratos forward sobre la tasa de interés interbancaria promedio (TIIP) y sobre el índice nacional de precios al consumidor (INPC), sujetos a registro ante el banco central y cumpliendo las normas del Grupo de los Treinta[10] para garantizar el control administrativo y de riesgo.

A finales de 1992 se inició la negociación de opciones sobre ADR's de Telmex L en The Chicago Board Options Exchange. En 1994 se operaban diversas opciones sobre acciones mexicanas en CBOE, AMEX, New York Options Exchange (NYOE), NYSE y PLHX, además de las bolsas de Londres y Luxemburgo. Simultáneamente, en México se celebraban contratos forward y swaps sobre tipo de cambio, tasas de interés y bienes de consumo o *commodities*, entre intermediarios extranjeros y entidades nacionales, sin reconocimiento ni protección jurídica.

[8]Valor total del mercado, obtenido a partir del producto del número de contratos negociados multiplicado por sus respectivos precios.

[9]El mercado over-the-counter OTC es un sistema de cotización de valores donde los participantes negocian entre ellos directamente, sin la intermediación de un piso de remates o una bolsa. Las operaciones se realizan a través de redes computarizadas o telefónicas que vinculan entre sí a los agentes de todo el mundo. Además, el término se utiliza para identificar a los instrumentos o valores cotizados en este mercado. No se utiliza la traducción de este término.

[10]Grupo consultivo formado por los principales banqueros, financieros y académicos de las naciones industriales líderes.

Por su parte, el Mercado Mexicano de Derivados (MexDer) surge como respuesta a la necesidad de promover el crecimiento y diversificación del mercado de productos estructurados listados en la Bolsa Mexicana de Valores, de crear un mercado de opciones y futuros listados, con toda la infraestructura necesaria para su adecuado funcionamiento, de acuerdo con los rigurosos estándares internacionales para los mercados de derivados; y de generar un mercado para la operación OTC de contratos "hechos a la medida", para inversionistas institucionales.

El 22 de septiembre de 1997 se entregó a las autoridades financieras la solicitud para constituir MexDer y Asigna. En ese mismo año, la Real Academia Sueca de Ciencias otorga el Premio Nobel de Economía a los profesores Robert C. Merton de la Universidad de Harvard y Myron S. Scholes de la Universidad de Stanford, por el desarrollo de una fórmula para la valuación de opciones[8] la cual también ha permitido la creación de nuevos tipos de instrumentos financieros y ha sido utilizada en diversas áreas del campo económico.

El inocultable lado oscuro de esta historia, se debe a la ocurrencia de fuertes desastres financieros relacionados con el manejo de estos productos, aún cuando la mayoría de esos errores provienen de una escasa comprensión de sus funciones básicas, de las cuales encabeza la lista —irónicamente– la cobertura de riesgos[11].

El 26 de febrero de 1995, Inglaterra recibió la noticia de que Barings PLC, una de sus más importantes instituciones bancarias, con más de 200 años de antigüedad, estaba en bancarrota. La pérdida fue causada por una enorme exposición al riesgo en el mercado accionario japonés, a través del mercado de derivados. La responsabilidad recaía sobre un solo operador, Nicholas Leeson, de 28 años de edad, quien perdió \$1.3 mil millones de dólares en posiciones en futuros sobre índices accionarios.[10]

Metallgesellschaft, el 14° grupo industrial alemán más grande, estuvo cerca de la quiebra a raíz de las pérdidas en que incurriera su subsidiaria americana MG Refining & Marketing (MGRM) por casi \$1.3 mil millones de dólares. En este caso la situación se derivó de una falta de previsión y una subsecuente cadena de acciones financieras equivocadas, entre las que se encuentra una mala posición en el mercado de futuros.[6]

Recientemente, en el año 2001, Enron, la 7ª compañía más grande de Norte América y la mayor comerciante de energía en el mundo, hizo uso excesivo de derivados de energía y créditos, lo que la condujo a la bancarrota y al fraude al intentar encubrir sus colosales pérdidas.

Y así se pueden seguir citando una gran cantidad de casos, en los cuales el traspié no fue "culpa" de los derivados, pese a las múltiples opiniones[12] que así lo afirman. En efecto, aún cuando las pérdidas fueron multimillonarias, las

[11] Al conjunto de transacciones financieras cuyo objetivo consiste en reducir o eliminar el riesgo de mercado en un instrumento o portafolios se le conoce como *hedging*.

[12] Felix Rohatyn, del Wall Street, declaró "jóvenes de 26 años de edad con sus computadoras, están creando bombas de hidrógeno financieras"; Henry González expresidente del House Banking Committee, ha señalado que los derivados son "una monstruosa intriga electrónica global" . Como estas dos opiniones en contra del uso de los derivados, existen muchas otras más, provenientes de personajes importantes en el mundo financiero.

verdaderas causas emanan de actitudes irresponsables y/o fraudulentas.

"La actividad de los derivados hace una contribución a la economía total que puede ser difícil de cuantificar, pero que es, sin embargo, favorable y sustancial" concluye un dictamen que emitió el Grupo de los Treinta (G-30) cuyo punto de vista general coincide en que los derivados no introducen "un riesgo mayor al que ya existe en los mercados financieros". Para no inducir juicios previos al respecto, el presente trabajo pretende hacer una presentación imparcial del tema y deja al lector la tarea de sacar sus propias conclusiones.

1.2. Tipos de contratos y su negociación

1.2.1. Forwards

Estos contratos son la presentación más elemental de la amplia variedad de derivados financieros negociados en la actualidad; funcionan con la misma lógica que los contratos a futuro —descrita anteriormente– salvo por el procedimiento de negociación de tipo OTC, por lo que las características de operación se determinan únicamente entre las dos partes involucradas. Es preciso mencionar que estos contratos normalmente requieren garantías (líneas de crédito o colateral) para reducir el riesgo de incumplimiento de alguna de las partes.

En un contrato forward cada una de las dos partes adquiere una obligación; la parte con obligación de comprar el subyacente a un precio determinado[13] en una fecha dada, se dice que asume una *posición larga*; la contraparte, cuya obligación es vender, asumirá una *posición corta*, evidentemente, respecto a las mismas condiciones (subyacente, precio, y fecha).

El uso de estos contratos es frecuente en la cobertura de riesgos o *hedging* sobre el tipo de cambio. Como ejemplo, tomemos el caso de una compañía que tiene un compromiso de pago de \$100,000 USD dentro de 2 meses, y no desea arriesgarse ante la posibilidad de incremento de precio del dólar. La empresa puede establecer un contrato forward con el banco, el cual ya cuenta con precios establecidos para este tipo de transacciones. Supongamos que el precio forward a 2 meses es de \$11 por unidad de subyacente (por dólar), por lo tanto la compañía, que tendrá una posición larga de un contrato forward sobre el dólar, estará de acuerdo en comprar dentro de dos meses \$100,000 USD al precio de \$1,100,000 y de este modo traspasará los riesgos; el banco por su parte, con la posición corta del contrato, asumirá el riesgo del incremento de precio del dólar, incremento que estima, no alcanzará los \$11.

Generalmente en la negociación de derivados financieros nunca se lleva a cabo la venta "física" del subyacente al final del contrato; la forma de cerrar la transacción es mediante un pago[14]. Para una posición larga este pago resulta de la diferencia entre el precio del subyacente a la maduración del contrato y el

[13] A este precio se le conoce como *strike* y para su representación se acostumbra usar la letra K, en lo sucesivo nos referiremos a él de estas formas.

[14] Cantidad denominada *payoff*. Por la costumbre de uso del término, será utilizado durante el texto.

strike; esta cantidad la recibirá o la otorgará dependiendo si el resultado de la diferencia es positivo o negativo. Por lo tanto el *payoff* de una posición larga en un contrato forward se describe por la expresión:

$$S_T - K$$

donde S_T es el precio del subyacente al final del contrato, y K el strike.

Para una posición corta, el payoff es la diferencia entre el strike y el precio del subyacente a la maduración del contrato, el cual de igual forma que la posición anterior, lo recibirá o lo otorgará, dependiendo del resultado de la diferencia. Su representación se da como:

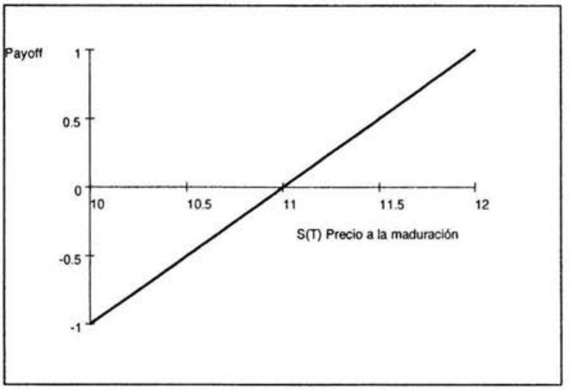
$$K - S_T$$

Las dos expresiones anteriores, representan la única pérdida o ganancia que devengarán las partes involucradas, ya que el contrato, en el momento de ser pactado, no tiene costo alguno para ninguna de ellas.

Retomando el último ejemplo, el payoff de la compañía, que como se recordará representa la posición larga del contrato, está dado por:

$$S_T - 11$$

De esta expresión se desconoce el valor exacto de S_T, pero aproximando los límites de su variación, por ejemplo $10 < S_T < 12$, podemos graficar el diagrama de pago, que ilustra precisamente el payoff resultante de esta variación:



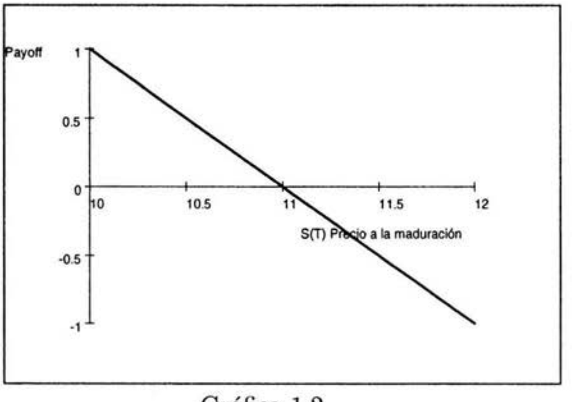
Gráfica 1.1

En la gráfica 1.1 se observa que la intersección con el eje X (que representa los precios que puede tomar el subyacente a la maduración del contrato) es justamente el strike K, y esto implica que si S_T coincide con K no habrá payoff, ni a favor, ni en contra de la posición; si S_T es mayor que K, el payoff constituirá la ganancia (a favor de la posición) correspondiente que aparece en el eje Y; y si S_T es menor que K, la pérdida respectiva.

La expresión correspondiente a la posición corta del banco será:

$$11 - S_T$$

Conservando la variación para S_T, la gráfica 1.2 muestra el comportamiento del payoff para este caso. Al igual que en la posición larga, el punto de intersección en X es K, y la interpretación para este hecho es la misma que en la posición anterior; la relación entre S_T y K será la contraria, es decir, S_T mayor que K, representa una pérdida para el banco, y lo opuesto para S_T menor que K.



Gráfica 1.2

1.2.2. Futuros

Ya se ha comentado la función principal de estos contratos y además de que ya hemos visto que ésta posee la misma naturaleza que los forwards. Sin embargo existen diferencias en su negociación, destacando las siguientes:

- Su negociación se realiza exclusivamente en bolsas creadas para este fin. Algunas de las principales bolsas de futuros en el mundo son: el Chicago Board of Trade, el Chicago Mercantil Exchange (CME), el International Monetary Market adscrito al CME, el Commodity Exchange, el New York Mercantile Exchange, el Tokyo International Financial Futures Exchange (TIFFE), el Korean Futures Exchange KOFEX, y en México, el Mercado Mexicano de Derivados (MEXDER).

- La condiciones de contrato, como tipo de producto, vencimiento, tamaño del contrato (número de unidades del subyacente por contrato), etc., son estandarizadas.

- Se efectúa un reajuste diario conocido como *marking-to-market,* que consiste en saldar en efectivo y día con día, las pérdidas o ganancias de un contrato. El reajuste puede aplicarse a la *cantidad margen*[15] del inversionista, en caso de que éste no desee saldarlo al momento. De manera que las posiciones nunca tienen pérdidas o ganancias latentes sin realizar.

1.2.3. Opciones

La diferencia capital entre los forwards y las opciones, reside en que estas últimas representan el derecho que tiene el poseedor para ejercer (comprar o vender) o no ejercer su contrato, según le convenga, condición que en los forwards, más que un derecho, es una obligación.

Los dos tipos básicos de opciones son: la opción de compra o *call*, y la opción de venta o *put*. Un call le da a su tenedor el derecho de comprar el subyacente respectivo a un cierto precio en una fecha especifica[16]; un put, por su parte, le otorga a su tenedor el derecho de vender el subyacente a un precio y fecha determinados.

En el caso de un call el vendedor del contrato o *writer* recibe un pago del comprador que le da a éste la opción de comprar el subyacente al vendedor del contrato; de igual forma el vendedor de un put recibe un pago del comprador quien adquiere así el derecho de vender el subyacente al vendedor del contrato. A la posición que vende la opción se le conoce como *posición corta*, y a la que la compra, *posición larga.*

Para ilustrar el mecanismo de negociación de estos contratos consideremos la situación de un inversionista A, el cual vende a un inversionista B una opción de compra sobre 100 acciones de BIMBO; el vencimiento del contrato es dentro de 2 meses con un strike de \$30 por unidad de contrato (por acción) y el precio de la opción es de \$3 también por unidad de contrato. Por lo tanto, A estará asumiendo la posición corta de un call, y B la posición larga.

El comportamiento del payoff (pérdidas o ganancias resultantes de la transacción), que como se recordará depende del valor S_T (precio de las acciones dentro de dos meses) para la posición de B puede definirse mediante la siguiente función:

$$f(S_T) = \begin{cases} -3 & si \quad 0 < S_T < 30 \\ S_T - 30 - 3 & si \quad 30 \leq S_T \end{cases} \tag{1.1}$$

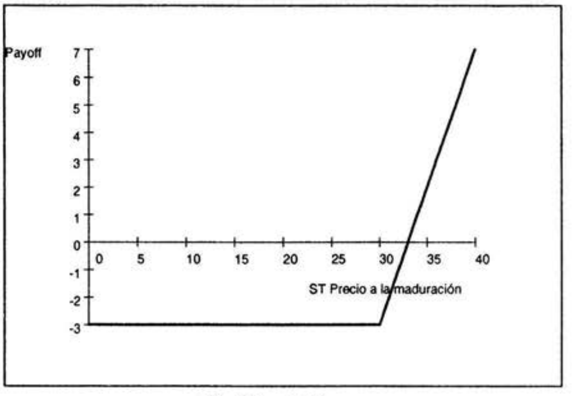
lo que muestra que si S_T fuese menor de \$30, B no ejercería su opción, pues no tendría sentido comprar acciones al precio de \$30 cuando puede adquirirlas en el mercado por un precio inferior. En tal caso, B estaría perdiendo su inversión inicial de \$3 (por acción) que fue lo que pagó por el call. Ciertamente

[15]Es el depósito de "buena fe" que realiza el negociador a su corredor para poder celebrar contratos a futuro, lo que significa que si el negociador deja de cumplir con sus obligaciones, el corredor puede disponer del depósito de margen para cubrir las pérdidas de la operación.

[16]El tiempo en el que se ejerce la opción es una fecha especifica o un periodo de tiempo, dependiendo si las opciones son de tipo europeo o americano. Más adelante abundaremos al respecto.

él adquirió la opción esperando que S_T fuese por lo menos[17] mayor que \$30 e idealmente mayor que \$33 para justificar su inversión con la obtención de una ganancia.

Recurriendo una vez más a los diagramas de pago, al graficar la expresión 1.1 en la gráfica 1.3 es posible ilustrar lo que sucede con el payoff de esta posición en el escenario anterior.



Gráfica 1.3

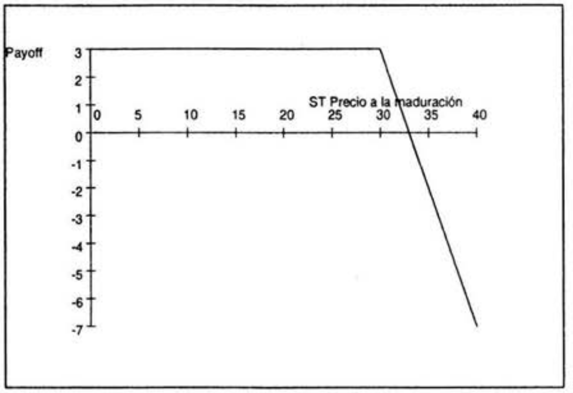
Para A, cuyas expectativas y consecuencias respecto a S_T son las opuestas a las de B, la expresión 1.2 representa la función que define el payoff de su posición.

$$f(S_T) = \begin{cases} 3 & si \quad 0 < S_T < 30 \\ 30 + 3 - S_T & si \quad 30 \leq S_T \end{cases} \tag{1.2}$$

Podemos observar que si S_T fuese menor que \$30, su posición resultaría favorecida, pues B no ejercería la opción por la cual ya le han pagado \$3 por acción (\$300 por el paquete completo); si S_T fuese mayor que \$30 y menor que \$33 continuaría ganando, pero sólo una cantidad inferior a \$3. Si S_T es \$33 no gana ni pierde nada ya que B ejercerá únicamente para recuperar su inversión inicial, y si S_T es mayor que \$33 él perderá la cantidad resultante dada la segunda condición en la expresión 1.2.

El diagrama consecuente de esta posición se ilustra en la gráfica 1.4.

[17]Si S_T es mayor que \$30 y menor que \$33 él recuperaría parcialmente su inversión, pero no obtendría ganancias.



Gráfica 1.4

Generalizando lo anterior, las expresiones[18] y gráficas respectivas para los payoffs de las cuatro diferentes posiciones en opciones serán:

- Call largo:

$$f(S_T) = \begin{cases} 0 & si \quad 0 < S_T < K \\ S_T - K & si \quad K \leq S_T \end{cases}$$

o lo que es lo mismo:

$$f(S_T) = \max(S_T - K, 0)$$

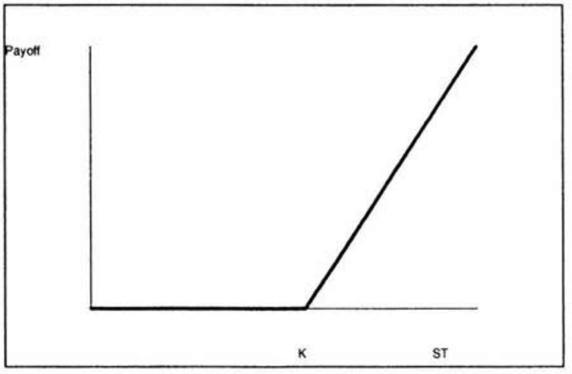


Diagrama de Pago (Call largo)

- Call corto:

$$f(S_T) = \begin{cases} 0 & si \quad 0 < S_T < K \\ K - S_T & si \quad K \leq S_T \end{cases}$$

[18]Sin considerar el costo inicial del contrato.

o lo que es lo mismo:

$$f(S_T) = -\max(S_T - K, 0)$$

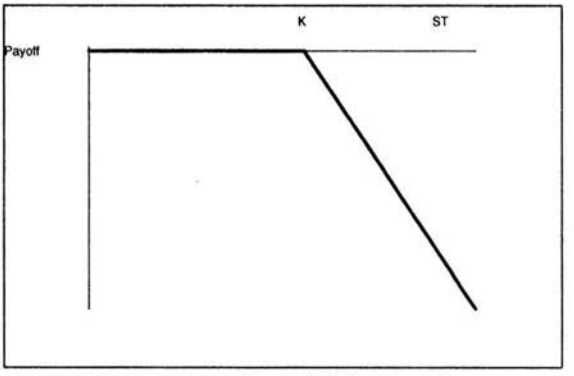


Diagrama de Pago (Call corto)

- Put largo:

$$f(S_T) = \begin{cases} K - S_T & si \quad 0 < S_T < K \\ 0 & si \quad K \leq S_T \end{cases}$$

o lo que es lo mismo:

$$f(S_T) = \max(K - S_T, 0)$$

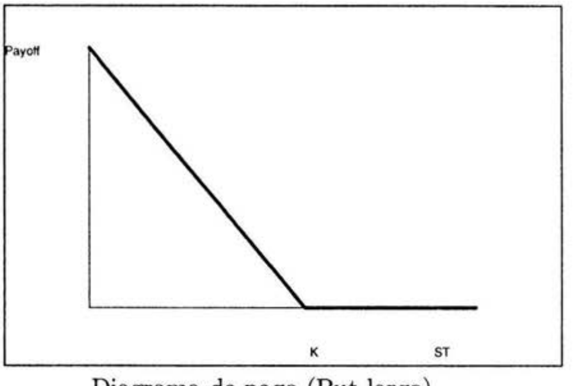


Diagrama de pago (Put largo)

- Put corto:

$$f(S_T) = \begin{cases} S_T - K & si \quad 0 < S_T < K \\ 0 & si \quad K \leq S_T \end{cases}$$

o lo que es lo mismo:

$$f(S_T) = -\text{máx}(K - S_T, 0)$$

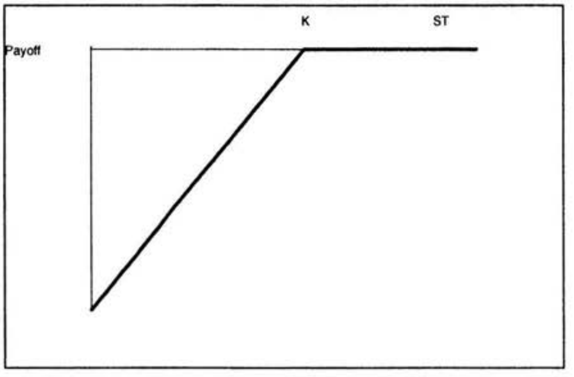


Diagrama de pago (Put corto)

Calls y Puts en realidad representan la estructura estándar de una extensa variedad de instrumentos negociados en la actualidad, ya que desde principios de los 80, bancos y otras instituciones financieras comenzaron a diseñar una impresionante cantidad de productos innovadores con el propósito de satisfacer las diversas necesidades de sus clientes. Las variantes de estos diseños radican en la forma en la que se combinan los tipos de opciones en un portafolio[19], en la singularidad de los subyacentes, en las condiciones de payoffs, etcétera. En efecto, no existe límite alguno en el desarrollo de nuevos y cada vez más caprichosos[20] instrumentos.

1.2.4. Negociación con derivados

Como ya se ha dicho, el manejo de estos productos desempeña un considerable número de funciones importantes dentro de los sistemas financieros; estas funciones se pueden entender fácilmente conociendo los objetivos buscados por cada una de las partes involucradas en la negociación. Para conocer estos objetivos a continuación se describen los tres tipos de negociadores existentes en el mercado:

- *Hedgers*

Buscan disminuir o eliminar, si es posible, el riesgo en el mercado; los ejemplos del agricultor de la sección 1.1, y de la compañía con el compromiso de

[19]Conjunto de bienes de inversión y/o cobertura, propiedad de una institución o un individuo. En México se suele utilizar el término *cartera* en su lugar.

[20]El 29 de julio del 2003 el New York Times publicó que la oficina de Investigación de terrorismo del Pentágono propuso la implantación de un programa de negociación anónima de productos financieros derivados basados en la especulación de ataques terroristas y magnicidios.

pago en dólares de la sección 1.2.1, ilustran esta idea. Para este tipo de negociación son utilizados forwards, futuros y opciones. La cobertura que brindan los forwards y futuros consiste en la neutralización del riesgo mediante la fijación de precio del subyacente; las opciones, por su parte, "aseguran", ya que ofrecen protección para los movimientos desfavorables del mercado y otorgan beneficios para movimientos favorables, ventajas que, obviamente, demandan un costo.

- Especuladores

Persiguen las ganancias resultantes de los movimientos en el mercado. Este tipo de negociación está basado en las suposiciones que se tienen respecto a los cambios futuros en el precio de un subyacente. Para la especulación también se utilizan los tres tipos básicos de productos derivados.

Para ejemplificar el uso de los forwards con este fin, supongamos el caso de un corredor que tiene la corazonada de que el precio del dólar incrementará dentro de 2 meses y está dispuesto a respaldar esa corazonada con \$1,000,000. El corredor decide adquirir un contrato forward sobre el dólar por este monto; si el strike es de \$11.20 y si al transcurso de los 2 meses el precio del dólar fuese de \$11.50 la ganancia obtenida sería de:

$$(\$11.5 - \$11.2)\ \$1{,}000{,}000\ /\ \$11.2 = \$26{,}785.714$$

Véase ahora un ejemplo donde se aprecia el efecto de apalancamiento[21] en la especulación con opciones. Un inversionista supone que el precio de las acciones de IBM, que el día de hoy es de \$38, aumentará dentro de 4 meses; éste cuenta con \$3,800 para respaldar su suposición y tiene dos opciones de inversión de acuerdo con sus expectativas; la primera consiste en comprar hoy 100 acciones, y la segunda en adquirir un call largo. Supongamos que el precio del call es de \$1.6 con un strike de \$39.

La siguiente tabla ilustra las consecuentes ganancias y pérdidas posibles para las dos diferentes estrategias, bajo dos distintos escenarios; en el primero, el precio final de la acción es \$4 menor al precio actual, por lo que en caso de haber comprado las acciones, el inversionista perderá \$4 por cada acción adquirida; con la segunda estrategia y dentro del mismo escenario, perderá toda su inversión, pues no tendrá sentido ejercer el call. En el segundo escenario el precio de las acciones aumenta en \$4, si el inversionista optó por las acciones, percibirá una ganancia de \$4 por cada una, si se inclinó por el call ganará \$3 por cada contrato adquirido (2375 contratos) menos el costo de estos, en otro términos, la ganancia será de:

$$(2375)\ \$3 - \$3{,}800 = \$3{,}325$$

[21] El apalancamiento financiero se da cuando el valor monetario de una posición tomada es mayor a la inversión necesaria para tomar esa posición.

	Precio de las acciones al final del 4^o mes	
Estrategia	$34	$42
Comprar acciones	-$400	$400
Adquirir call largo	-$3,800	$3,325

Nótese que con la misma cantidad invertida en transacciones que involucran derivados financieros, las consecuencias positivas o negativas, se potencializan; a esta propiedad se le conoce como apalancamiento.

Forwards, futuros y opciones son utilizadas de manera semejante por los especuladores; sin embargo, existe una diferencia importante entre unos y otros: con las opciones no importa que tan adversos sean los cambios, ya que las pérdidas del especulador están limitadas por el monto pagado por contrato, mientras que en el caso de los forwards y futuros, no existe tal límite.

- Arbitrajistas

Pretenden obtener ganancias sin riesgos y sin inversión, a través de convenientes transacciones realizadas simultáneamente en dos o más mercados. Para ilustrar esta situación consideremos una acción que es negociada en el New York Stock Exchange y en el London Stock Exchange; su precio en Nueva York es de $162 USD y en Londres, de £98; el tipo de cambio es de $1.68 USD por libra; si un arbitrajista compra 100 acciones en Nueva York y las vende al mismo tiempo en Londres obtendría una ganancia de:

$$100[(\$1.68*98)-\$162]=\$264 \text{ USD}$$

sin considerar los costos de transacción, los cuales, para un pequeño inversionista, podrían representar la anulación de su ganancia; sin embargo, para un inversionista fuerte, estos costos significarían poco, por lo que un arbitraje como el que hemos visto, le sería muy atractivo.

Las oportunidades de arbitraje tienen corta duración debido a las leyes de la oferta y la demanda, y en la práctica se dan escasamente. El arbitraje de los productos derivados actúa con la misma lógica que las transacciones tradicionales (como las ilustradas en el ejemplo anterior), y para este efecto se utilizan de igual manera forwards, futuros y opciones. En lo sucesivo se trabajarán numerosos ejemplos al respecto.

1.3. Apéndice 1A

En está sección se han dispuesto un par de algoritmos que ilustran la aplicación de los diagramas de pago para un contrato, como los que hemos visto, y para un portafolio (combinación de contratos) sobre un mismo subyacente.

1.3.1. diagrama_pago_contrato

Descripción

Grafica el diagrama de pago de un contrato cuyos parámetros (tipo de contrato, límites de precio del subyacente, y strike K) se obtienen durante la ejecución del programa mediante un menú y diálogos de interacción con el usuario.

Código

```
function diagrama_pago_contrato

% Eleccion del tipo del contrato
t_c = menu ('Selecciona el tipo del contrato',                   %NOTA
'1)forward largo',' 2)forward corto',' 3)call largo',
' 4)call corto',' 5)put largo',' 6)put corto');

% Solicitud y asignacion de parametros
li_St = input ('Limite inferior de St:   ');
ls_St = input ('Limite superior de St:   ');
if li_St > ls_St
    error('orden incorrecto de los limites')
end
k = input ('Strike de este contrato:   ');
if ( k < li_St | k > ls_St )
    error('strike fuera de los limites')
end
St = li_St:.1:ls_St;

% Ejecucion de la funcion de pago (payoff) del contrato elegido
switch (t_c)
    case 1
        pay = St-k;
        ti = ('Diagrama de Pago (forward-largo)');
    case 2
        pay = k-St;
        ti = ('Diagrama de Pago (forward-corto)');
    case 3
        for i = 1:length(St);
            if St(i) < k
                pay(i) = 0;
```

```
            else
                pay(i) = St(i)-k;
            end
        end
        ti = ('Diagrama de Pago (call-largo)');
    case 4
        for i = 1:length(St);
            if St(i) < k
                pay(i) = 0;
            else
                pay(i) = k-St(i);
            end
        end
        ti=('Diagrama de Pago (call-corto)');
    case 5
        for i = 1:length(St);
            if  St(i) > k
                pay(i) = 0;
            else
                pay(i) = k - St(i);
            end
        end
        ti = ('Diagrama de Pago (put-largo)');
    case 6
        for i = 1:length(St);
            if  St(i) > k
                pay(i) = 0;
            else
                pay(i) = St(i) - k;
            end
        end
        ti = ('Diagrama de Pago (put-corto)');
    otherwise
        error('opcion invalida');
end

%Graficacion del Diagrama de pago
plot(St,pay,'-')
grid
xlabel('Precio del Subyacente')
ylabel('Payoff')
title(ti)
```

NOTA: MATLAB no acepta los cambios de línea hasta haberse completado la sintaxis de cada función; por lo que los cambios de línea que aquí aparecen[22] por cuestiones de edición, no existen en el código original; esta situación deberá ser considerada para éste y los siguientes programas.

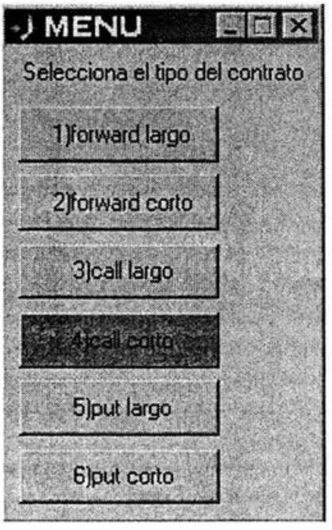
Ejemplo

Para un call corto con $10 < S_T < 12$ y $K = 11$

Llamada

```
>> diagrama_pago_contrato
```

Entrada 1



Entrada 2

```
Limite inferior de St : 10
```

Entrada 3

```
Limite superior de St : 12
```

Entrada 4

```
Strike de este contrato : 11
```

[22] Véanse las líneas 4 y 5 (considerando los espacios en blanco) de este código.

Salida

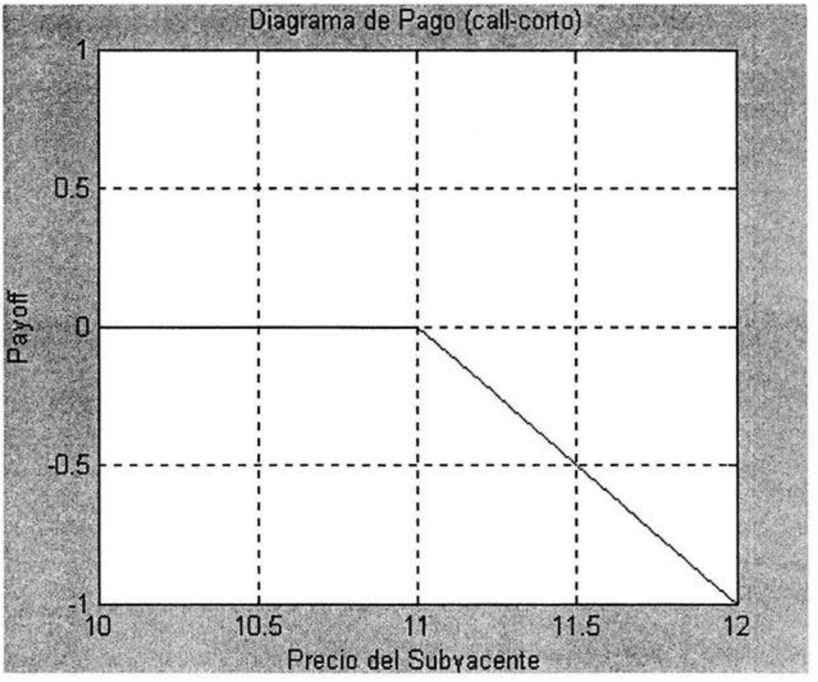


Diagrama de Pago (call-corto)
1
0.5
0
-0.5
-1
Payoff
10
10.5
11
11.5
12
Precio del Subyacente

1.3.2. diagrama_pago_portafolio

Descripción

Grafica el diagrama pago de un portafolio cuyos parámetros generales (número de contratos y límites de precio del subyacente) y particulares de cada uno de sus contratos (strike, tipo y cantidad) se obtienen durante la ejecución del programa mediante interacción con el usuario.

Código

```
function  diagrama_pago_portafolio

% Solicitud y asignacion de parametros generales del portafolio
n_c = input('Numero de contratos en el portafolio:    ');
li_St = input ('Limite inferior de St:    ');
ls_St = input ('Limite superior de St:    ');
if li_St > ls_St
    error('orden incorrecto de los limites')
end
St = li_St:.1:ls_St;

% Graficacion del diagrama de pago donde uno
% de los parametros de plot, es la llamada a
% la subfuncion payoff_portafolio
plot(St,payoff_portafolio(n_c, St, li_St, ls_St),'-')
grid
xlabel('Precio del Subyacente')
ylabel('Payoff')
title('Diagama de pago del Portafolio')


function pay_t = payoff_portafolio(n, St, li_St, ls_St) %subfun.
pay_t = 0;

% Ciclo que solicita el tipo, y la cantidad de cada contrato,
% almacena en la variable pay_t el payoff acumulado
for j = 1:n;
    titulo = ['Selecciona el tipo del contrato ',int2str(j)];
    t_c = menu (titulo, '1)forward largo',
    '2)forward corto', ' 3)call largo', '4)call corto',
    '5)put largo', '6)put corto');
    c_c = input ('Cantidad de este contrato:    ');

    % Uno de los parametros es la llamada a la subfuncion
    % payoff_contrato
    pay_t = pay_t + (c_c*payoff_contrato(t_c, St, li_St, ls_St));
```

```
end


% Subfuncion que ejecuta la funcion de pago (payoff)
% del tipo elegido de cada contrato
function pay = payoff_contrato(tc, St, li, ls)
pay = 0;
k = input ('Strike de este contrato:   ');
if ( k < li | k > ls )
    error('strike fuera de los limites')
end
switch (tc)
    case 1
        pay = St - k;
    case 2
        pay = k-St;
    case 3
        for i = 1:length(St);
            if St(i) < k
                pay(i) = 0;
            else
                pay(i) = St(i)-k;
            end
        end
    case 4
        for i = 1:length(St);
            if St(i) < k
                pay(i) = 0;
            else
                pay(i) = k-St(i);
            end
        end
    case 5
        for i = 1:length(St);
            if  St(i) > k
                pay(i) = 0;
            else
                pay(i) = k - St(i);
            end
        end
    case 6
        for i = 1:length(St);
            if  St(i) > k
                pay(i) = 0;
            else
                pay(i) = St(i) - k;
```

```
            end
        end
    otherwise
        error('opcion invalida');
end
```

Ejemplo

Considérese un portafolio[23] con dos contratos : el primero consta de 2 unidades de un call largo con $K = 70$ y el segundo de 2 de un call corto con $K = 80$, ambos sobre un mismo subyacente donde $65 < ST < 85$

Llamada

```
>> diagrama_pago_portafolio
```

Entrada 1

```
Numero de contratos en el portafolio: 2
```

Entrada 2

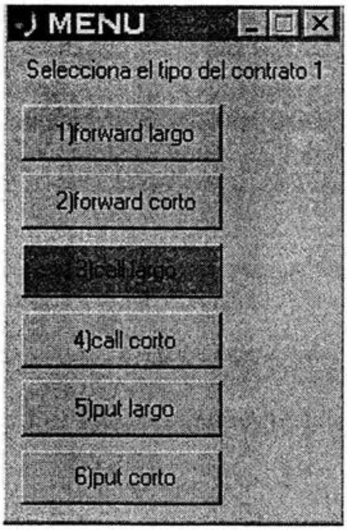
```
Limite inferior de St: 65
```

Entrada 3

```
Limite superior de St:   85
```

[23] Estrategia conocida como *Bull-Spread*, se aplica cuando las expectativas del mercado se encuentran a la alza.

Entrada 4



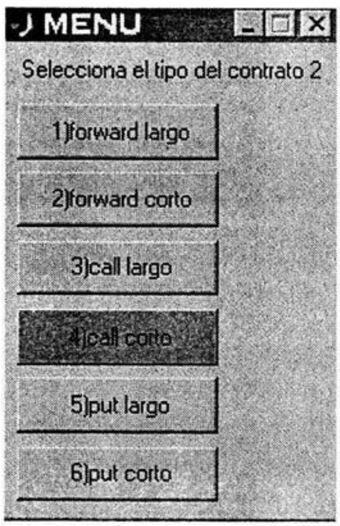
Entrada 5

`Cantidad de este contrato:   2`

Entrada 6

`Strike de este contrato : 70`

Entrada 7



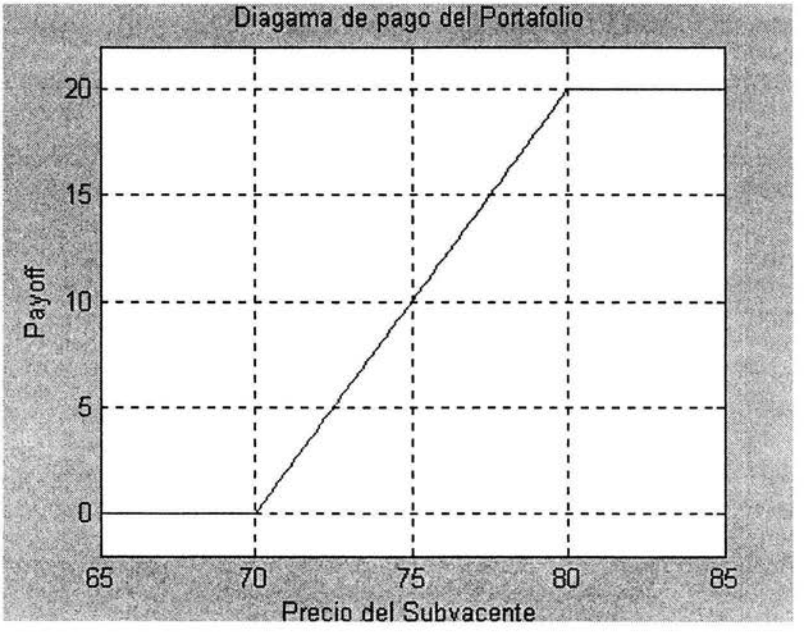
Entrada 8

```
Cantidad de este contrato:   2
```

Entrada 9

```
Strike de este contrato : 80
```

Salida



Capítulo 2

Forwards y futuros

2.1. Los forwards

Para realizar una transacción financiera de cualquier tipo, necesitamos de antemano saber cuál será su costo y cuál su beneficio. Hasta el momento hemos visto que la respuesta en cuanto al beneficio, en el caso de los forwards, depende de dos valores: S_T, desconocido al momento de la contratación, y K, conocido; pero ¿sería posible saber con certeza cuales serán el costo y (o) el beneficio de una transacción que involucre forwards, considerando la incertidumbre inherente a S_T? En las secciones siguientes se desarrollan algunos procedimientos que responden a ésta y algunas otras cuestiones relativas a estos contratos; antes de hacerlo es preciso mencionar las consideraciones efectuadas en los desarrollos posteriores.

- Los subyacentes son bienes de inversión, no de consumo.
- No se toman en cuenta costos de transacción, ni consideraciones fiscales.
- Se asume que la tasa de interés libre de riesgo otorgada en el mercado para un préstamo, será la misma que se otorgue para una inversión.

2.1.1. Valor del contrato y precio forward sobre bienes de inversión que no pagan dividendos

La construcción del siguiente portafolio es uno de los tantos caminos que conducen a la deducción del valor de un contrato forward y del precio forward[1]. Para quien no está familiarizado lo suficiente con el tema, este camino podría no ser producto inmediato de su ingenio, sin embargo, una vez propuesto, la

[1] Los precios forward a deducir, corresponden el strike "justo" de un contrato. Cuando existe posibilidad de arbitraje, el strike que se ofrece en el mercado difiere del precio forward; más adelante se detallará al respecto.

lógica de su construcción resulta fácil de comprender.

Portafolio A	*tiempo t*	*tiempo T*
1. Préstamo para comprar subyacente	S_t	$-S_te^{r(T-t)}$
2. Comprar subyacente	$-S_t$	S_T
3. Forward[2]corto	$-V_{fc}$	$K - S_T$
	$-V_{fc}$	$K - S_te^{r(T-t)}$

r = tasa de interés libre de riesgo compuesta continuamente a la que está sujeto el préstamo

V_{fc} = valor de un contrato forward para una posición corta

S_t = valor del subyacente en la fecha t

K = strike (precio del subyacente acordado en el contrato)

t = cualquier fecha a partir del inicio del contrato, antes de la maduración

T = fecha de la maduración

En la transacción 1 en t, se pide un préstamo de S_t necesario para comprar el subyacente, el cual al llegar a T, deberá ser liquidado con sus respectivos intereses; en la segunda transacción en t, compramos el subyacente con el préstamo de la transacción anterior; el valor de aquél al llegar a T será —obviamente— S_T. Por último en la tercera transacción suscribimos un forward, es decir, adquirimos una posición corta de este contrato, cuyo costo en t se define como V_{fc} (hasta el momento no conocemos su valor en t), y en T sabemos que su valor será la cantidad resultante de su función de *payoff*.

Ahora obsérvese que en el resultado de las transacciones al llegar a T no existe S_T, es decir, la cantidad resultante del Portafolio A en T no está sujeta a ningún elemento cuyo valor no se conozca, por lo que, en ausencia de arbitraje, el valor presente en t de esta cantidad debe ser equivalente al costo[3] del portafolio en t —que es V_{fc}—, en otras palabras:

$$V_{fc} = (K - S_te^{r(T-t)})e^{-r(T-t)}$$

o lo que es lo mismo:

$$V_{fc} = Ke^{-r(T-t)} - S_t \tag{2.1}$$

La ecuación 2.1 representa justamente el valor V_{fc} de un contrato forward para una posición corta, y S_t, K, r, T y t dados.

Es importante notar que, como se dijo en la introducción, el valor de un contrato forward, para las dos posiciones, sólo es cero cuando $t = 0$ (el primer día de la existencia del contrato) y el valor del contrato cambia conforme transcurre t.

[2]Con la finalidad de simplificar operaciones, en la generalidad de los desarrollos del capítulo se considera que los contratos constan de una unidad del subyacente, salvo que el planteamiento particular indique lo contrario.

[3]El signo menos significa que V_{fc} es el costo en t de los beneficios que se reciban en T.

El valor del contrato para la posición larga V_{fl} es igual a $-V_{fc}$, ya que una posición paga lo que la otra cobra. Por lo tanto:

$$V_{fl} = S_t - Ke^{-r(T-t)} \tag{2.2}$$

Para ilustrar los resultados anteriores veamos una ejemplo numérico.

Ejemplo 1. Supongamos que un inversionista desea saber cuál es el valor actual de un contrato forward, para una posición larga, con vencimiento dentro de 27 días, y $K = 31$, $r = .06$, *sobre acciones que el día de hoy tienen un valor de $34.* Para encontrar este valor basta con sustituir los datos anteriores en la ecuación 2.2, lo que resulta:

$$V_{fl} = 34 - 31e^{-.06(27/365)} = 3.1373$$

Precio forward

Supongamos que nos encontramos en el día $t = 0$; sabemos que este día $V = 0$, pues la idea es que en $t = 0$ ninguna de las partes lleve ventaja a la otra, es decir, que no haya posibilidad de arbitraje, por lo tanto de 2.1 o de 2.2 —da lo mismo— y para $V = 0$ tendremos que:

$$K = S_t e^{r(T-t)} \tag{2.3}$$

Esta ecuación indica que en ausencia de arbitraje, el strike es igual al precio actual del subyacente llevado a la fecha de vencimiento del contrato con la tasa de interés libre de riesgo. El lado derecho de esta última expresión se le conoce como *precio forward.*

Con los mismos datos del ejemplo 1 supongamos que el inversionista desea saber cuál será el precio forward, sustituyendo los datos del contrato —excepto K obviamente— en 2.3 se tiene que:

$$f(S_t) = 34e^{.06(27/365)} = 34.151$$

2.1.2. Valor de un contrato y precio forward sobre bienes de inversión que pagan dividendos de forma discreta

El valor de un contrato forward sobre acciones que pagan dividendos[4] de forma discreta puede ser deducido de manera análoga al caso sin dividendos; sin embargo, este proceso resultaría redundante. Por lo tanto, a continuación se plantea un nuevo camino, en el cual también se introduce al manejo de un concepto frecuentemente utilizado en el arbitraje: el concepto de *réplica.*

Un portafolio B que replique a uno A, debe ser aquel cuyo total de sus transacciones en el día T sea igual que el total de las transacciones del portafolio A el mismo día, es decir, los beneficios que otorga A, deben ser iguales a los que otorgue B.

[4] Recuérdese que los dividendos representan una parte proporcional de las utilidades que se paga a los accionistas.

A continuación se muestran dos portafolios: el portafolio A que contiene una posición larga de contrato forward sobre acciones que pagan dividendos de forma discreta, donde el costo de la adquisición —de la posición— del contrato es V_{fl}, y el portafolio B que está formado por tres transacciones, cuyo objetivo es replicar en conjunto el total de las transacciones contenidas en A (la posición larga del forward); es decir, el portafolio B replica al A, lo que implica que $S_T - K$ es el total de las transacciones al día T para ambos portafolios.

		t	T
A	· Forward largo	$-V_{fl}$	$S_T - K$
	Total	$-V_{fl}$	$S_T - K$
B	· Comprar subyacente	$-S_t$	S_T
	· Préstamo del VP[5] de K	$Ke^{-r(T-t)}$	$-K$
	· Préstamo del VP de D[6]	$De^{-r(ti-t)}$	0
	Total	$Ke^{-r(T-t)} - S_t + De^{-r(ti-t)}$	$S_T - K$

Donde $t_i = fecha\ del\ pago\ del\ dividendo$. Por lo tanto, el total de las transacciones en t también deben ser equivalentes, es decir:

$$V_{fl} = S_t - De^{-r(ti-t)} - Ke^{-r(T-t)} \tag{2.4}$$

En caso de que los dividendos se paguen en distintas fechas, la generalización de 2.4 se da en la siguiente espresión:

$$V_{fl} = S_t - \Sigma_i D_i e^{-r(ti-t)} - Ke^{-r(T-t)} \tag{2.5}$$

La ecuación 2.5 representa el valor de un contrato forward, para una posición larga, sobre subyacentes que pagan dividendos de manera discreta.

Precio forward

El precio forward de un contrato sobre bienes de inversión que pagan dividendos discretamente, se deduce de la misma manera que el caso sin dividendos, es decir, de la ecuación 2.5 , considerando $V_{fl} = 0$, obtenemos:

$$f(S_t) = \left[S_t - \Sigma_i D_i e^{-r(ti-t)}\right] e^{r(T-t)} \tag{2.6}$$

Ejemplo 2. Supongamos que un inversionista desea saber el precio forward de un contrato a 6 meses, sobre un subyacente que paga un dividendo de \$4 *dentro de tres meses y tiene un precio actual de* \$100. *La tasa libre de riesgo capitalizable continuamente es de* 8%.

Aplicando 2.6, el inversionista obtendría que:

$$f(S_t) = \left[100 - 4e^{-.08(3/12)}\right] e^{.08(6/12)} \approx 100.0001$$

[5] Valor presente

[6] Dividendos

2.1.3. Valor de un contrato y precio forward sobre bienes de inversión que pagan dividendos de forma continua

Mediante un razonamiento análogo al de la sección anterior, se definen los siguientes portafolios:

		t	T
A	· Forward largo	$-V_{fl}$	$S_T - K$
	Total	$-V_{fl}$	$S_T - K$
B	· Comprar subyacente	$-S_t e^{-q(T-t)}$	S_T
	· Préstamo del VP de K	$Ke^{-r(T-t)}$	$-K$
	Total	$Ke^{-r(T-t)} - S_t e^{-q(T-t)}$	$S_T - K$

Nuevamente el portafolio B replica al A, pues se construyó de tal manera que replicase una posición larga de un forward sobre bienes de inversión que pagan dividendos continuamente; esto último, se ve reflejado en la primera transacción, ya que el costo que se paga en la compra del subyacente, está descontado por una tasa de interés q capitalizable continuamente, que es la tasa que cubrirá el pago de los dividendos.

Por el mismo argumento que en la sección anterior, igualando el total de las transacciones en ambos portafolios, obtenemos:

$$V_{fl} = S_t e^{-q(T-t)} - Ke^{-r(T-t)} \tag{2.7}$$

Precio forward

Una vez más hacemos $V_{fl} = 0$, y obtendremos que el precio forward es:

$$f(S_t) = S_t e^{(r-q)(T-t)}$$

2.1.4. Valor de un contrato y precio forward sobre divisas

Ya que se conoce el valor de un contrato forward sobre acciones que pagan dividendos continuamente, resulta inmediato deducir su análogo para un contrato forward sobre divisas; el siguiente ejemplo ilustrará la forma en la que esto sucede.

Ejemplo 3. *Un inversionista desea saber cuál es el valor de un contrato forward sobre el dólar; el contrato posee las siguientes características:*

Tamaño del contrato $= 100,000\ USD$

vencimiento $= 9$ *meses*

$r_{us} =.02$

$r =.06$

tipo spot[7] = 10.25
strike = 9.5

Si comparamos los datos que se requieren para calcular el valor de un contrato forward sobre bienes que pagan dividendos continuamente con los datos del ejemplo anterior, veremos que existe cierta correspondencia entre unos y otros. En particular la tasa q del pago de dividendos corresponde a la tasa de interés libre de riesgo extranjera r_{us}, pues así como q indica el rendimiento a pagar a los accionistas, r_{us} indica el rendimiento libre de riesgo a pagar al tenedor de las divisas, por lo tanto para saber el valor de un contrato forward sobre divisas, basta con sustituir la tasa de interés q correspondiente al pago de los dividendos, por la tasa extranjera r_{ex} en la ecuación 2.7:

$$V_{fl} = S_t e^{-r_{ex}(T-t)} - K e^{-r(T-t)} \tag{2.8}$$

La ecuación 2.8 corresponde al valor del contrato forward sobre una divisa extranjera, con tipo spot S_t, strike K, tasa de interés libre de riesgo (doméstica) r, tasa de interés libre de riesgo extranjera r_{ex}, una unidad de subyacente, y vencimiento en T. Por lo tanto, regresando al ejemplo 3, el inversionista encontrará que el valor de ese contrato para una poción larga será:

$$V_{fl} = (10.25e^{-.02(9/12)} - 9.5e^{-.06(9/12)})100{,}000 \approx 101{,}540$$

Precio forward

De 2.8, si $V_{fl} = 0$, se obtiene que el precio forward es:

$$f(S_t) = S_t e^{(r-r_{ex})(T-t)} \tag{2.9}$$

Retomando el ejemplo 3, supongamos ahora que el inversionista desea conocer el precio forward. Sustituyendo los datos en 2.9 se tiene que:

$$f(S_t) = 10{,}25e^{(.06-.02)(9/12)} = 10.56$$

2.2. Los futuros

Como hemos visto, un futuro no es más que una especie de forward estandarizado, negociable en un mercado organizado con dispositivos de márgenes y capital para respaldar su integridad.

Las características que mencionamos en la introducción respecto a estos contratos, acostumbran especificarse cuidadosamente en los mercados establecidos que los negocian.

En el apéndice 2B de este capítulo se presentan como ejemplo algunas de las especificaciones de dos tipos de contratos futuros.

[7] Precio actual.

2.2.1. Funcionamiento del mercado

Para ilustrar el proceso de negociación de los contratos futuros, tomemos el siguiente ejemplo de un contrato sobre un bien de consumo. Supóngase que el 6 de septiembre del 2003 un inversionista en NYMEX desea comprar 25 000 barriles del petróleo descrito en el apéndice 2B, a entregar en marzo del 2004. Supongamos también que el precio futuro con estas caracteristícas —según el Wall Street Journal– cerró el día anterior con un precio de $27.65 USD por barril. El inversionista se comunica con su *broker* (agente) y le da instrucciones de comprar 25 futuros de marzo del 2004. Para que el *broker* pueda realizar la transacción, necesitará que el inversionista deposite el margen inicial (indicado en las especificaciones del contrato) de $ 2 750 USD por cada contrato, en total $ 68 750 USD. Al final de cada día de negociación este margen será reajustado de acuerdo al comportamiento del precio futuro del subyacente; este ajuste, conocido como *marking to market*, se comporta de la siguiente forma:

Día	Precio	Ganancia o pérdida	Acumulado	Saldo	Mantenimiento del margen
	27.65			68 750	
6 sep	27.60	-1 250	-1 250	67 500	
7 sep	27.58	-500	-1 750	67 000	
8 sep	27.62	1 000	-750	68 000	
9 sep	27.50	-3 000	-3 750	65 000	
10 sep	27.50	0	-3 750	65 000	
11 sep	27.45	-1 250	-5 000	63 750	
12 sep	27.45	0	-5 000	63 750	
13 sep	27.47	500	-4 500	64 250	
14 sep	27.39	-2 000	-5 000	62 250	6 500
15 sep	27.45	1 500	-4 500	70 250	
16 sep	27.53	2 000	-3 000	72 250	
17 sep	27.48	-1 250	-4 250	71 000	
18 sep	27.52	1 000	-3 250	72 000	
19 sep	27.54	500	-2 750	72 500	
20 sep	27.44	-2 500	-5 250	70 000	
21 sep	27.40	-1 000	-6 250	69 000	
22 sep	27.53	3 250	-3 000	72 250	
23 sep	27.56	750	-2 250	73 000	
24 sep	27.54	-500	-2 750	72 500	
25 sep	27.49	-1 250	-4 000	71 250	

La segunda columna de la tabla anterior describe la evolución del precio futuro del subyacente; por ejemplo, según la tabla, el precio al final del día de la transacción (6 de septiembre) disminuyó a $27.60 USD. La tercera columna indica las pérdidas o ganancias de la posición en cada día, lo que implica que al final del día 6 de septiembre el inversionista habrá perdido $.05 USD por cada unidad del contrato; como adquirió 25 contratos de 1000 barriles cada uno, esta pérdida será de $1 250 USD. La cuarta columna únicamente acumula las pérdidas y ganancias de la posición hasta el día indicado, mientras que en la quinta columna se lleva a cabo el ajuste del margen inicial depositado (que en este caso fue de $ 68 750 USD) restando o sumando las pérdidas o ganancias del día; además cuando algún valor de esta columna es menor que el margen de mantenimiento ($2 500 USD X 25 contratos = $62 500 USD) el inversionista tendrá que depositar la cantidad faltante para el margen inicial. Por ejemplo, el día 14 septiembre el saldo del margen inicial es $250 USD menor al margen de mantenimiento, por lo que el inversionista debió depositar los $6 500 USD indicados en la sexta columna.

Recapitulando: los márgenes de garantía sirven de capital para respaldar al mercado y evitan que éste tome riesgo de crédito[8] sobre algún participante. Todas las posiciones abiertas en el mercado están respaldadas por estos márgenes depositados en la cámara de compensación o *clearinghouse*, y dado que por cada participante que pierde hay uno que gana, cada día que pasa, la cámara sencillamente hace las transferencias pertinentes de la cuenta de aquellos que perdieron a la cuenta de los que ganaron. Además, como existe un margen mínimo para mantener una posición abierta (el margen de mantenimiento), que es típicamente varias veces superior al movimiento estándar diario del mercado, en la práctica la cámara jamás toma riesgo de crédito sobre sus clientes porque cierra las cuentas de los clientes problemáticos antes de que éstos representen un peligro.

Debido a este ajuste diario o *marking to market* todos los contratos futuros son acordados y cerrados al principio y al final de la jornada, es decir, al final de cada día el valor de un futuro vuelve a ser cero.

2.2.2. Información sobre las cotizaciones

Diariamente, en la sección de finanzas de los principales periódicos de todo el mundo, aparecen las cotizaciones de los precios futuros. Estas cotizaciones se encuentran clasificadas dependiendo del tipo de subyacente del contrato, y de acuerdo con esta clasificación existen cinco diferentes grupos principales: 1) Bienes de consumo o *commodities*, que está constituido por diferentes tipos de cereal, ganado, metales preciosos y productos petroleros; 2) futuros de tasas de interés; 3) futuros de tipos de cambio extranjero; 4) futuros de índices accionarios, y el de más reciente creación 5) futuros sobre opciones.

La tabla 2.1 muestra parte de las cotizaciones del primer grupo (futuros sobre el petróleo crudo, ligero y dulce), publicadas en el Wall Street Journal el 5 de septiembre del 2003. La primera línea de cotizacion indica el subyacente del contrato, seguido por la bolsa donde se negoció, en este caso la NYMEX. Después se menciona la cantidad de bienes en un solo contrato y la unidad de cotización, que para el ejemplo son 1 000 barriles y dólares por barril, respectivamente.

En la lista de cotización existe una línea para cada contrato según la fecha de su maduración, que en este caso es mensual a partir de octubre del 2003. Las primeras tres columnas numéricas indican los precios de apertura, el más alto

[8]Riesgo de incumplimiento de pago.

y el más bajo, la cuarta indica el precio de cierre [9], la siguiente columna señala el cambio del último precio de conciliación respecto al anterior a éste, las dos posteriores son los precios más alto y más bajo alcanzados por cada contrato desde que comenzó a negociarse.

La última columna muestra el interés abierto al cierre de las operaciones del día[10], esto es, el número de contratos que en la actualidad tienen obligación de entrega. Cuando la bolsa permite la negociación de un determinado vencimiento de contrato, no existe interés abierto hasta que se haga la primera operación, y al final de la vida del contrato, todos los negociadores tienen que haber cumplido con sus obligaciones, por lo tanto cada contrato comienza y termina su negociación en la bolsa con un interés abierto de cero.

Petroleum Futures

Crude Oil, Light Sweet (NYM)-1,000 bbls.; $ per bbl.

						LIFETIME		OPEN
	OPEN	HIGH	LOW	SETTLE	CHG	HIGH	LOW	INT
Oct	28.96	29.10	28.65	28.88	-0.10	32.63	20.55	150,624
Nov	28.90	29.03	28.65	28.86	-0.11	32.05	20.70	71,608
Dec	28.41	28.74	28.35	28.58	-0.09	31.70	15.92	75,205
Ja04	28.25	28.35	28.09	28.25	-0.08	30.75	20.35	27,293
Feb	27.84	28.10	27.80	27.94	-0.07	30.25	20.35	14,145
Mar	27.65	27.75	27.65	27.63	-0.06	29.65	20.35	17,151
Apr	27.25	27.50	27.25	27.32	-0.05	28.96	20.35	17,089
May	27.05	27.05	27.03	27.02	-0.04	28.43	20.35	9,945
June	26.73	26.85	26.70	26.73	-0.03	28.05	20.53	20,123
July	26.50	26.50	26.50	26.46	-0.02	27.70	20.86	8,048
Sept	26.00	26.00	26.00	26.06	0.03	27.45	20.82	10,788
Nov	25.60	25.60	25.60	25.72	0.06	26.40	24.75	5,395
Dec	25.43	25.45	25.40	25.55	0.07	26.47	16.35	20,495
Dc08	24.60	24.75	24.60	24.57	0.33	24.75	19.75	7,401

Est vol 144,371; vol Thu 240,036; open int 524,431, -12,331.

Tabla 2.1: Fuente Wall Street Journal, 5 de septiembre, 2003.

Al final de la sección se da una estimación del volumen total de contratos negociados[11]; en este caso la estimación para el día 4 de septiembre del 2003, es de 144, 371 contratos y el volumen actual (del día 3 de septiembre de 2003) que es de 240,036 contratos; en esta misma línea se indica el interés abierto para todas las maduraciones, y la diferencia de éste y su correspondiente del día anterior, para el ejemplo, 524,431 y -12,331 respectivamente.

[9]Precio determinado por el comité de conciliación de la bolsa, el cual se utiliza como referencia para realizar el *marking to market*.

[10]Esta columna indica los datos referentes a un día previo al anterior, ya que la recopilación de esta información implica mayor dificultad que en las columnas anteriores.

[11]Esta estimación corresponde al día anterior de la publicación.

2.2.3. Futuros sobre índices bursátiles

La operación de estos contratos inició en Kansas (Kansas City Board of Trade) en 1982. En ellos, las contrapartes de la operación se comprometen a comprar (posición larga) o a vender (posición corta) Q veces el valor del índice en cuestión.

En la tabla 2.2 se puede observar una parte de la sección de las cotizaciones sobre indices bursátiles publicadas en el Wall Street Journal el 5 de septiembre del 2003. La estructura e información de las columnas son iguales a las que se presentan en los contratos futuros sobre bienes de consumo.

Index Futures

	OPEN	HIGH	LOW	SETTLE	CHG	LIFETIME HIGH	LIFETIME LOW	OPEN INT
DJ Industrial Average (CBT)-$10 x index								
Sept	9587	9594	9455	9505	-84	9610	7460	42,315
Dec	9553	9553	9425	9471	-84	11490	7675	5,026
Est vol 12,389; vol Thu 11,445; open int 47,367, +131.								
Idx prl: Hi 9589.52; Lo 9461.37; Close 9503.34, -84.56.								
Mini DJ Industrial Average (CBT)-$5 x index								
Sept	9585	9593	9455	9505	-84	9617	7877	43,379
Vol Fri 56,324; open int 51,558, -159.								
S&P 500 Index (CME)-$250 x index								
Sept	102890	102950	101770	102230	-590	121490	77200	479,677
Dec	102130	102720	101650	102070	-600	122650	77400	145,981
Est vol 117,551; vol Thu 82,642; open int 629,330, -5,664.								
Idx prl: Hi 1029.21; Lo 1018.19; Close 1021.39, -6.58.								

Tabla 2.2: Fuente Wall Street Journal, 5 de septiembre, 2003.

Para ilustrar el proceso de su cotización, supongamos que se realiza un contrato futuro sobre el índice Dow Jones Industrial Average, el cual está basado en un portafolio compuesto por 30 de las más "confiables" acciones de los E.U.A.. El precio futuro de un contrato sobre este índice negociado en la CBOT es $10 USD multiplicado por el valor que tome el índice, por lo tanto, si el día 5 de septiembre se negocia un contrato a diciembre del mismo año sobre este índice, cuyo valor, según la tabla, es de 9 471, entonces el valor del índice como subyacente del contrato futuro sería de $94 710 USD.

Esta clase de contratos, como se mencionó anteriormente, no contemplan la entrega física del subyacente, ya que un índice como valor, físicamente no existe, únicamente representa un valor de referencia.

2.2.4. Futuros sobre divisas

Debido a las fluctuaciones en los tipos cambiarios, los inversionistas se enfrentan al riesgo de una pérdida potencial en sus bienes, por lo que la cobertura ante este riesgo es la función principal de este tipo de contratos. Los contratos futuros sobre tipo de cambio existentes en la actualidad son negociados primordialmente en los mercados más grandes de EUA para realizar compra o venta de dólares estadounidenses contra dólares canadienses, libras esterlinas, yenes japoneses y euros.

La tabla 2.3 muestra una parte de las cotizaciones de estos contratos, correspondientes al 5 de septiembre del 2003, publicadas en el Wall Street Journal.

						LIFETIME		OPEN
	OPEN	HIGH	LOW	SETTLE	CHG	HIGH	LOW	INT
Currency Futures								
Japanese Yen (CME)-¥12,500,000; $ per ¥								
Sept	.8562	.8594	.8537	.8562	-.0007	.8815	.8220	127,449
Dec	.8585	.8615	.8562	.8587	-.0007	.8915	.8318	43,711
Est vol 51,836; vol Thu 26,373; open int 171,260, -122.								
Canadian Dollar (CME)-CAD 100,000; $ per CAD								
Sept	.7281	.7325	.7272	.7296	.0017	.7470	.6185	53,359
Dec	.7253	.7295	.7244	.7266	.0017	.7432	.6160	11,087
Mr04	.7250	.7255	.7223	.7240	.0017	.7395	.6150	2,154
June	.7200	.7232	.7200	.7214	.0017	.7350	.6201	914
Sept	.7176	.7195	.7176	.7188	.0017	.7315	.6505	460
Est vol 17,360; vol Thu 27,963; open int 68,166, +1,790.								
British Pound (CME)-£62,500; $ per £								
Sept	1.5808	1.5904	1.5766	1.5880	.0078	1.6800	1.5100	38,641
Dec	1.5714	1.5806	1.5674	1.5780	.0076	1.6690	1.5000	5,336
Est vol 19,440; vol Thu 13,107; open int 43,978, +3,035.								
Swiss Franc (CME)-CHF 125,000; $ per CHF								
Sept	.7114	.7235	.7082	.7228	.0125	.7842	.6270	57,192
Dec	.7137	.7248	.7101	.7243	.0125	.7835	.6773	5,440
Est vol 25,706; vol Thu 15,250; open int 62,747, +337.								
Australian Dollar (CME)-AUD 100,000; $ per AUD								
Sept	.6420	.6485	.6407	.6471	.0068	.6799	.5075	26,653
Dec	.6355	.6427	.6349	.6412	.0067	.6740	.5025	5,575
Est vol 9,220; vol Thu 12,244; open int 32,732, -334.								
Mexican Peso (CME)-MXN 500,000; $ per MXN								
Sept	.09215	.09215	.09135	.09177	-.00037	.09740	.08480	37,206
Dec	.09095	.09110	.09050	.09075	-.00040	.09590	.08330	11,287
Est vol 9,628; vol Thu 10,591; open int 49,030, -687.								

Tabla 2.3: Fuente Wall Street Journal, 5 de septiembre, 2003.

Como se puede observar, también para esta clase de contratos la estructura e información sobre su cotización son las mismas que las de las dos clases de contratos antes vistas (bienes de consumo e índices bursátiles); nótese que los montos de cada contrato están dados en sus respectivas monedas.

2.2.5. Futuros sobre tasas de interés

Estos contratos son acuerdos a través de los cuales los participantes se comprometen a comprar o vender en una fecha futura una cierta cantidad de títulos de deuda con un vencimiento determinado, a una tasa pactada de antemano conocida como *tasa forward.*

La tasa a futuro o forward, es la tasa de interés que existe de forma implícita entre dos tasas spot[12] de diferentes periodos; por ejemplo, si se habla de una tasa forward a un año, dentro de dos años, en realidad se está haciendo referencia a la tasa spot anual que se espera dentro de dos años. La siguiente expresión refleja la relación entre las tasas spot y forward:

Para r_t = tasa spot (de composición anual) en t y,
f_{t_1,t_2} = tasa forward entre los años t_1 y t_2

$$(1+r_1)^2(1+f_{2,3}) = (1+r_3)^3$$

Generalizando la expresión anterior, para cualesquiera dos periodos de tiempo t_1 y t_2 tal que $t_1 < t_2$ se tiene que:

$$(1+r_{t_1})^{t_1}(1+f_{t_1,t_2})^{(t_2-t_1)} = (1+r_{t_2})^{t_2} \tag{2.10}$$

Por lo tanto, la tasa forward entre el periodo t_1 y el t_2 se puede escribir de la siguiente forma:

$$f_{t_1,t_2} = \left[\frac{(1+r_{t_2})^{t_2}}{(1+r_{t_1})^{t_1}}\right]^{\frac{1}{t_2-t_1}} - 1 \tag{2.11}$$

En caso de que las tasas spot se compongan continuamente, la expresión 2.11 se transforma —considerando la continuidad desde el planteamiento análogo a 2.10— en la siguiente expresión:

$$f_{t_1,t_2} = \frac{r_{t_2}t_2 - r_{t_1}t_1}{t_2-t_1} \tag{2.12}$$

Ejemplo 4 *A continuación se indican los precios de tres bonos cupón cero[13], todos con valor nominal de \$100. Calcular las tasas forward para los periodos de 6 meses a un año y de un año a 2 años, respectivamente:*

Plazo	*Precio \$*
6 meses	97.5
1 año	94.55
2 años	88.25

Para poder deducir las tasas forward asociadas a cada bono, antes necesitamos conocer sus respectivas tasas cero[14] las cuales se deducen, a partir de los datos anteriores, como sigue:

Para r_i tasa cero —de composición continua— para el periodo i

[12] Tasa de interés corriente para cierto plazo.
[13] Bono sin pago de cupones y cuyo valor nominal se paga al vencimiento.
[14] Tasa spot asociada a un bono cupón cero.

$$
\begin{aligned}
100 = 97.5e^{r_1(6/12)} &\implies & r_1 = 0.0506,\\
100 = 94.55e^{r_2} &\implies & r_2 = 0.0560,\\
y\ \ 100 = 88.25e^{r_3(2)} &\implies & r_3 = 0.0625
\end{aligned}
$$

A partir de las tasas cero, a continuación se obtienen las tasas forward. Aplicando la expresión 2.12 se tiene que:

$$f_{1/2,1} = \frac{0.0560 - 0.0506\,(1/2)}{1/2} = 0.061\,4$$

$$f_{1,2} = \frac{0.0625\,(2) - 0.0560}{1} = 0.069$$

Si se quisiera negociar un futuro a un año, sobre un bono de los anteriores, la tasa forward —que no otorga posibilidad de arbitraje— es $f_{1,2} = 0.069$, por lo tanto el precio pactado del bono será:

$$100e^{-0{,}069(1)} = 93.333$$

si al llegar al año 1, la tasa cero que ofrece el mercado es diferente (mayor o menor) a $f_{1,2}$, esa diferencia generará una ganancia —o pérdida— para alguna de las partes del contrato.

De lo anterior se puede deducir que el principio de valuación de un futuro sobre tasa de interés, básicamente consiste en determinar el valor presente del valor nominal del documento que se está negociando, considerando la tasa forward.

En caso de que los títulos de deuda negociados en el contrato paguen cupones[15], es necesario considerarlo al momento de calcular su valor presente, por lo demás, la deducción de las tasas forward siempre será la misma.

2.3. Arbitraje con forwards

En el primer capítulo se mencionó que una de las funciones más importantes del manejo de los productos derivados la constituye el arbitraje. En términos generales una operación de arbitraje se basa en la ejecución de una estrategia cruzada de intercambios bajo las siguientes premisas:

1 Produce un beneficio neto positivo

2 No requiere inversión inicial neta, ya que la operación se realiza con financiación ajena; si se realizara con fondos propios deberá considerarse el costo de oportunidad correspondiente.

3 Está libre de riesgo de sufrir pérdidas.

El arbitraje es una operación de oportunidad que se suele dar durante períodos de tiempo relativamente cortos; para ello, los arbitrajistas, atentos a la evolución del mercado, deben actuar antes de que la intervención de los restantes operadores elimine las oportunidades de arbitraje.

[15] Hull[5] hace un repaso de cómo se calcula el precio, la tasa cero y valor a la par, de este tipo de títulos.

El arbitrajista trata de obtener beneficios aprovechando situaciones anómalas en los precios de los mercados. Es la imperfección o ineficiencia de los mismos la que genera oportunidades de arbitraje. Sin embargo, a través de dichas operaciones los precios tienden a la eficiencia. Debemos, por tanto, considerar que la intervención del arbitrajista resulta positiva y necesaria para el buen funcionamiento del mercado.

Ahora bien, la situación propicia para el arbitraje en los contratos forward y futuros, surge cuando el strike que se ofrece en el mercado es diferente (mayor o menor) al precio forward. Veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 5 *Si a un inversionista le ofrecen un contrato forward a 6 meses, sobre un subyacente que tiene un precio actual de* \$100, $K = \$101$, *y la tasa libre de riesgo capitalizable continuamente es de* 8 %, *¿que portafolio le conviene adquirir?*

El primer paso a seguir consiste en determinar el precio forward correspondiente. Aplicando la expresión 2.3 se tiene que:

$$f(S_t) = S_t e^{r(T-t)} = 100e^{.08(6/12)} \approx 104.08$$

De acuerdo con lo anterior, el ejemplo 5 plantea una situación propicia para la realización del arbitraje, ya que el strike del contrato es menor al precio forward. Debido a que el arbitraje consiste en aprovechar esta diferencia para obtener un beneficio neto positivo —premisa 1—, al inversionista del ejemplo le conviene adquirir un portafolio que contenga, para empezar, una posición larga del contrato forward (pues el precio que pagará por el subyacente a la maduración del contrato, será menor al precio forward[16]).

Por otro lado, la estrategia no deberá hacer uso de inversión externa —premisa 2—, de tal suerte que el accionista debe realizar las transacciones necesarias para el cumplimiento de las obligaciones de cada transacción del portafolio de arbitraje, dentro del mismo. Por lo que, por ser la posición larga del forward la primera transacción y la obligación derivada de ésta, un compromiso de compra, a la maduración del contrato se requerirá del pago de \$101 correspondientes a esa compra, lo que es lo mismo, la transacción que cubre las obligaciones derivadas de la posición larga del forward, es la inversión en t de \$97.04 —el valor presente de \$101—.

Esta última cantidad a invertir tampoco puede ser producto de inversión externa al portafolio, por lo tanto una opción para el inversionista es realizar una venta en corto[17] del subyacente, de la cual obtendrá los recursos para invertir en t.

Resumiendo, el portafolio conveniente que le permitirá efectuar el arbitraje

[16]Véase la parte 2.1.1 de este capítulo.

[17]Venta de una acción propiedad de un tercero; la acción se toma en préstamo por lo que tarde o temprano, ésta debe ser devuelta al dueño original.

al inversionista estará conformado de la siguiente manera:

Portafolio de arbitraje	t	T
I Forward Largo	0	$S_T - 101$
II Subyacente corto	100	$-S_T$
III Inversión del VP de K	$-101e^{-.08(6/12)} = -97.04$	101
Total	$100 - 101e^{-.08(6/12)}$	0

$\therefore$ La ganancia obtenida del arbitraje será:

$$100 - 101e^{-.08(6/12)} = \$2.9603$$

Como se puede ver, el portafolio cumple con las tres premisas básicas de una operación de arbitraje, las dos primeras se satisfacen por construcción y la última es resultado del conjunto, pues la cantidad resultante no contiene ningún término aleatorio.

Nótese que las transacciones II y III corresponden a las transacciones contrarias[18] que replican[19] un forward largo. Esta última observación es de gran importancia, ya que como se verá a continuación, ésta será la pauta para generalizar la construcción de una estrategia de arbitraje. Véase el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6 *Un producto está a la venta en dos almacenes* 1 *y* 2, *respectivamente; usualmente en ambos con el mismo precio, de tal forma que si se desea adquirir el producto, da lo mismo hacer la compra en cualquiera de los dos almacenes.*

Si en un momento dado, el precio de venta en alguno de los dos almacenes supera al otro, si se desease aprovechar esta diferencia —y fuese posible— la estrategia (lógica) de arbitraje estaría formada por las dos transacciones citadas a continuación:

- *Comprar el producto al almacén con menor precio.*
- *Vender el producto al otro almacén.*

Analizando paso a paso el ejemplo 6, primero obsérvese que usualmente se tiene la siguiente situación:

Sean A y B las transacciones que consisten en la compra del producto en el almacén 1 y la compra del producto en el almacén 2, respectivamente, y sean A_r y B_r los beneficios resultantes de las transacciones A y B :

$$\Longrightarrow A_r = B_r$$

La igualdad anterior, indica que la compra del producto en alguno de los almacenes, representa la estrategia que replica la compra del producto en el otro (ya se ha visto que la réplica de una transacción consiste en un camino alterno que conduce al mismo beneficio). De acuerdo con lo que hasta ahora se conoce

[18]Como ejemplo de transacciones opuestas o contrarias, se pueden citar: compra–venta, forward corto–forward largo, inversión de X– préstamo de X, etc.

[19]Véase la parte 2.1.2 de este capítulo.

de arbitraje, el momento propicio para llevar a cabo la estrategia de arbitraje es justamente cuando esta igualdad no es posible, es decir, cuando alguna de las dos transacciones otorga más beneficio que la otra; ésto en el ejemplo sucede cuando el precio de venta del producto es mayor en uno de los dos almacenes (ya que el beneficio que se puede obtener por el mismo costo, es mayor comprando en el que ofrece el menor precio). En otras palabras la estrategia de arbitraje es posible cuando se da una de las dos situaciones siguientes:

Caso i. El almacén 1 ofrece un precio menor que el 2 $\Longrightarrow$ $A_r > B_r$

Caso ii. El almacén 2 ofrece un precio menor que el 1 $\Longrightarrow$ $A_r < B_r$

Supóngase que nos encontramos en el caso i. De acuerdo con lo anterior, la estrategia conveniente de arbitraje sería la siguiente:

Sean P_1 y P_2 los precios de compra-venta manejados en los almacenes 1 y 2, respectivamente:

Portafolio de arbitraje	
Transacción A	$-P_1$
Transacción $-B$[20]	P_2
Total	$P_2 - P_1 > 0$

El portafolio conveniente de arbitraje contiene primero la transacción A, que representa la compra del producto en el almacén 1; esto se debe a que en éste se ofrece el menor precio; después la segunda transacción $-B$ representa la venta al almacén 2 del producto previamente comprado en 1. Por hipótesis se tiene que $P_2 > P_1$, por lo tanto el resultado de la estrategia $P_2 - P_1$ será evidentemente positivo.

Sucede algo análogo para el caso ii. La estrategia conveniente en este caso sería la siguiente:

Portafolio de arbitraje	
Transacción $-A$	P_1
Transacción B	$-P_2$
Total	$P_1 - P_2 > 0$

Como $P_1 > P_2$, el resultado $P_1 - P_2$ de la estrategia para este caso, también será positivo.

Extendiendo la idea anterior a los contratos forward y futuros, se tiene lo siguiente:

Sean A = portafolio que contiene una posición larga en un contrato forward o futuro, B = portafolio que replique al A; es decir, se tienen los siguientes

[20] Transacción contraria a B, es decir, si B indica una compra, $-B$ representa la venta correspondiente.

portafolios A y B

		t	T
Portafolio A	· Forward Largo	0	$S_T - K$
	Total	0	$S_T - K$
Portafolio B	· Comprar Acción	$-S_t$	S_T
	· Préstamo del VP de K	$Ke^{-r(T-t)}$	$-K$
	Total	$Ke^{-r(T-t)} - St$	$S_T - K$

Y sean A_r y B_r los beneficios resultantes de A y B respectivamente

$$\Longrightarrow \text{en condiciones de no arbitraje } A_r = B_r$$

Por lo tanto, en una situación propicia para el arbitraje, sucede una de las dos situaciones siguientes:

caso i. El strike es menor al precio forward $\Longrightarrow$ [21] $A_r > B_r$

caso ii. El strike es mayor al precio forward $\Longrightarrow A_r < B_r$

Ahora, siguiendo la lógica de la estrategia de arbitraje planteada en el ejemplo 6, para el caso i la estrategia conveniente de arbitraje estaría conformada por las siguientes transacciones:

Caso i	Portafolio de arbitraje	t	T
Portafolio A	· Forward Largo	0	$S_T - K$
Portafolio $-B$	· Subyacente corto	S_t	$-S_T$
	· Inversión del VP de K	$-Ke^{-r(T-t)}$	K
	Total	$S_t - Ke^{-r(T-t)}$	0

El total de esta estrategia es un resultado neto positivo ya que por hipótesis se tiene que el strike es menor al precio forward, es decir

$$K < S_t e^{r(T-t)} \Longrightarrow 0 < S_t - Ke^{-r(T-t)}$$

Para el caso ii, la estrategia conveniente quedaría de la siguiente forma:

[21] Para un posición corta simplemente se invierten las desigualdades, y se sigue un razonamiento análogo.

Caso ii	Portafolio de arbitraje	t	T
Portafolio $-A$	· Forward corto	0	$K - S_T$
Portafolio B	· Comprar acción	$-S_t$	S_T
	· Préstamo del VP de K	$Ke^{-r(T-t)}$	$-K$
	Total	$Ke^{-r(T-t)} - S_t$	0

lo cual, por su hipótesis respectiva, también resulta un total neto positivo:

$$S_t e^{r(T-t)} < K \Longrightarrow 0 < Ke^{-r(T-t)} - S_t$$

Las estrategias de arbitraje planteadas para cada caso no requieren de inversión externa, pues sus tres respectivas transacciones cubren en conjunto sus obligaciones consecuentes; además, en ninguna de las dos cantidades resultantes existe el término aleatorio S_T, así que estas cantidades además de ser positivas, son conocidas, por lo tanto se satisfacen las tres premisas de arbitraje antes mencionadas.

Recapitulando, en el ejemplo 6 se plantea la idea esencial del arbitraje, las condiciones en las que éste se da y la construcción de una estrategia conveniente para aprovechar dichas condiciones. En el caso de los contratos forward y futuros, esta estrategia consiste en elegir la posición más conveniente, y combinarla con las transacciones contrarias al portafolio que la replican. En general, una estrategia de arbitraje está formada por la transacción más conveniente, y el conjunto de transacciones contrarias a las que la replican.

Veamos ahora un ejemplo en el cual el subyacente paga dividendos.

Ejemplo 7 *A un inversionista le ofrecen un contrato forward a 6 meses, sobre un subyacente que paga un dividendo de \$4 dentro de tres meses y tiene un precio actual de \$99, la tasa libre de riesgo capitalizable continuamente es de 8 %, y $K = 97$ ¿qué portafolio le conviene adquirir?*

Calculando el precio forward, se obtiene:

$$f(S_t) = \left[S_t - \Sigma D_i e^{-r(ti-t)}\right] e^{r(T-t)} = \left[99 - 4e^{-.08(3/12)}\right] e^{.08(6/12)} \approx 98.958$$

Al comparar $K = 97$ con $f(S_t) = 98.958$, se deduce que al inversionista le conviene adquirir una posición larga en el contrato, por lo que el portafolio de arbitraje conveniente estará conformado de la siguiente manera:

	Portafolio de arbitraje	t	T
A	· Forward Largo	0	$S_T - K$
-B	· Acción corta	99	$-S_T$
	· Inversión del VP de K	$-97e^{-.08(6/12)}$	K
	· Inversión del VP de D	$-4e^{-.08(3/12)}$	0
	Total	$99 - 97e^{-.08(6/12)} - 4e^{-.08(3/12)}$	0

$\therefore$ La ganancia obtenida del arbitraje $= 99 - 97e^{-.08(6/12)} - 4e^{-.08(3/12)} = 1.8826$

2.4. Apéndice 2A

El siguiente algoritmo implementa algunos los resultados más importantes vistos en el presente capítulo. Aunque en general se refiere a los contratos forward, la implementación es igualmente válida para los futuros.

2.4.1. forwards_futuros

Descripción

Este programa calcula el precio forward y el valor de una posición larga de un contrato (por unidad de subyacente). En caso de que este valor sea distinto de cero, sugiere la estrategia conveniente de arbitraje.

Código

```
function forwards_futuros

% Solicitud y asignacion de parametros generales del contrato
t_c = menu ('Selecciona el tipo de subyacente','Bienes de
 inversion que no pagan dividendos','Bienes de inversion que
 pagan dividendos en forma discreta','Bienes de inversion que
 pagan dividendos en forma continua', 'Divisas');
St = input('Precio actual del subyacente (en pesos):      ');
r = input('Tasa de interes libre de riesgo (continua y en decima -
 les):      ');
T = input('Tiempo restante a la maduracion del contrato (en anios
 ):      ');
K = input('Strike (en pesos):      ');

%Calculo del valor del contrato, precio forward, y estrategia
%conveniente de arbitraje para cada caso

switch (t_c)

    case 1
        Precio_forward = St*exp(r*T)
        Valor_del_contrato = St-K*exp(-r*T)

        if Precio_forward > K
            fprintf ('Debido a que el precio forward es mayor al
 strike, el portafolio conveniente \nde arbitraje sera el confor-
 mado por las siguientes transacciones:\n')
            fprintf ('\n   * Posicion larga en un forward  \n   *
 Subyacente corto \n   * Inversion del valor presente del Strike
 \n\n')
 end
```

```
    case 2
        vp_d = 0;
        n_d = input('En cuantas fechas se pagan los dividendos?:
      ');
if n_d == 1
            d = input('Monto del dividendo (en pesos):      ');
            ti = input('Tiempo restante al pago del dividendo
(en anios):      ');
            vp_d = d*exp(-r*ti);

        elseif n_d > 1
            for i = 1 : n_d
                d = input(sprintf('Monto del dividendo %d (en
pesos):      ', i));
ti = input(sprintf('Tiempo restante al pago del dividendo %d
 (en anios):      ',i));
                if ti > T
   error('Unicamente los diviendos cuyos pagos sean anteriores
 al vencimiento del contrato')
                end
                vp_d = d*exp(-r*ti) + vp_d;
            end
        else
error('Se esperaba un numero mayor que cero')
        end
        Precio_forward = (St-vp_d) * exp(r*T)
        Valor_del_contrato = St-vp_d-(K*exp(-r*T))

        if  Precio_forward > K
            fprintf ('Debido a que el precio forward es mayor
 al strike, el portafolio conveniente \nde arbitraje sera el
 conformado por las siguientes transacciones:\n')
            fprintf ('\n    * Posicion larga en un forward  \n
   * Subyacente corto  \n    * Inversion del valor presente del
 Strike  \n    * Inversion del valor presente de los dividendos
\n\n')
        elseif Precio_forward < K
             fprintf('Debido a que el precio forward es menor
 al strike, el portafolio conveniente \nde arbitraje sera el
conformado por las siguientes transacciones:\n')
            fprintf('\n    * Posicion corta en un forward  \n
   * Compra del subyacente \n    * Prestamo del valor presente
del Strike  \n    * Prestamo del valor presente de los dividen-
dos\n\n')
end
```

```
    case 3
 q = input('Tasa a la que se pagan los dividendos (en decima-
les):     ');
        Precio_forward = St*(exp((r-q)*T))
        Valor_del_contrato = (St*exp(-q*T))-(K*exp(-r*T))
   if  Precio_forward > K
            fprintf ('Debido a que el precio forward es mayor
 al strike, el portafolio conveniente \nde arbitraje sera el
 conformado por las siguientes transacciones:\n')
            fprintf ('\n   * Posicion larga en un forward  \n
   * Subyacente corto \n   * Inversion del valor presente del
 Strike \n\n')

        elseif Precio_forward < K
            fprintf('Debido a que el precio forward es menor
 al strike, el portafolio conveniente \nde arbitraje sera el
 conformado por las siguientes transacciones:\n')
            fprintf('\n   * Posicion corta en un forward  \n
   * Compra del subyacente \n   \n   * Prestamo del valor
 presente del Strike \n\n')
end

    case 4
        s = input('Tasa de interes extranjera :      ');
        Precio_forward = St*exp((r-s)*T)
        Valor_del_contrato = St*exp(-s*T)-K*exp(-r*T)

 if  Precio_forward > K
            fprintf ('Debido a que el precio forward es mayor
 al strike, el portafolio conveniente \nde arbitraje sera el
 conformado por las siguientes transacciones:\n')
            fprintf ('\n   * Posicion larga en un forward  \n
   * Venta en corto de las divisas extranjeras \n   * Inversi-
 on del valor presente del Strike \n\n')
        elseif Precio_forward < K
            fprintf('Debido a que el precio forward es menor
 al strike, el portafolio conveniente \nde arbitraje sera el
 conformado por las siguientes transacciones:\n')
            fprintf('\n   * Posicion corta en un forward  \n
  * Compra de las divisas extranjeras  \n   * Prestamo del
 valor presente del Strike \n\n')
   end

end
```

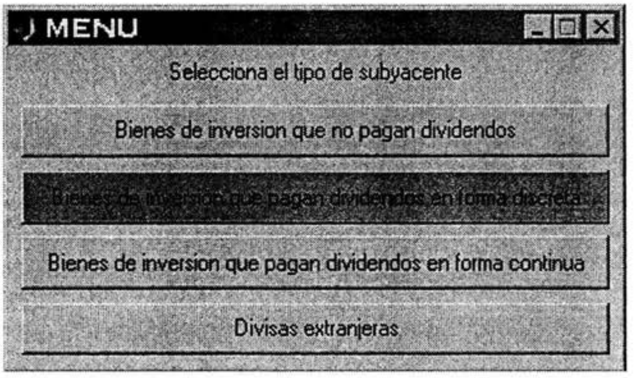
Ejemplo

Para un contrato forward a 6 meses, sobre un subyacente que paga un dividendo de \$4 dentro de tres meses y tiene un precio actual de \$99, la tasa libre de riesgo capitalizable continuamente es de 8 %, y $K = 97$

Llamada

```
>> forwards_futuros
```

Entrada 1



Entrada 2

```
Precio actual del subyacente (en pesos):     99
```

Entrada 3

```
Tasa de interes libre de riesgo (continua y en decimales):     .08
```

Entrada 4

```
Tiempo restante a la maduracion del contrato (en anios): 6/12
```

Entrada 5

```
Strike (en pesos):     97
```

Entrada 6

```
>En cuantas fechas se pagan los dividendos?:     1
```

Entrada 7

```
Monto del dividendo (en pesos):    4
```

Entrada 8

```
Tiempo restante al pago del dividendo (en anios):     3/12
```

Salida

```
Precio_forward =

   98.9595


Valor_del_contrato =

    1.8826
```

```
Debido a que el precio forward es mayor al strike, el portafolio
conveniente de arbitraje sera el conformado por las siguientes -
transacciones:

   * Posicion larga en un forward
   * Subyacente corto
   * Inversion del valor presente del Strike
   * Inversion del valor presente de los dividendos
```

2.5. Apéndice 2B

A continuación se presentan las especificaciones de dos tipos de contratos futuros; el primero se trata de futuros negociados en MexDer[7] sobre acciones de TELMEX; y el segundo, se refiere a futuros sobre petróleo, negociados en NYMEX (New York Mercantil Exchange)[9].

2.5.1. Términos y Condiciones del Contrato de Futuro sobre acciones representativas del capital social de Teléfonos de México, S.A. de C.V

I. OBJETO.

1. Activo Subyacente.

Acciones serie L representativas del capital social de Teléfonos de México S.A. de C.V., (en adelante Telmex). Títulos accionarios listados en la Bolsa Mexicana de Valores.

2. Número de Unidades del Activo Subyacente que ampara un Contrato de Futuro.

Cada Contrato de Futuro ampara la cantidad de 100 acciones de Telmex serie L.

3. Series.

En términos de sus respectivos reglamentos interiores, MexDer listará y mantendrá disponibles para su negociación distintas Series del Contrato de Futuro de Telmex L sobre una base trimestral, lo que significa que de manera permanente estarán disponibles para su negociación Contratos de Futuros con fechas de vencimiento en los meses de marzo, junio, septiembre y diciembre.

En caso que el Mercado demande la disponibilidad de Contratos de Futuro de Telmex serie L con Fechas de Vencimiento distintas a las señaladas en el párrafo anterior, MexDer podrá listar nuevas Series para su negociación.

4. Símbolo o clave de pizarra.

Las distintas Series del Contrato de Futuro de Telmex serán identificadas con un símbolo o clave de pizarra que se integrará por la expresión: "TMXL" a la que se agregarán la primera letra más la siguiente consonante del mes de vencimiento y los últimos dos dígitos del año de vencimiento conforme al ejemplo siguiente:

Clave de pizarra del Contrato de Futuro	Clave del Activo Subyacente	Mes de vencimiento	Año de vencimiento
TMXL SP99	TMXL	SP = Septiembre	99 = 1999
TMXL DC99	TMXL	DC = Diciembre	99 = 1999
TMXL MR00	TMXL	MR = Marzo	00 = 2000
TMXL JN00	TMXL	JN = Junio	00 = 2000

II. CARACTERISTICAS Y PROCEDIMIENTOS DE NEGOCIACIÓN.

1. Unidad de cotización.

La unidad de cotización del Precio Futuro estará expresada en pesos y centavos de peso por título accionario de Telmex serie L

2. Puja.

La presentación de posturas para la celebración de Contratos se reflejará en fluctuaciones mínimas del Precio Futuro, conforme a la Tabla de Lotes y Pujas emitida por la Bolsa Mexicana de Valores (en adelante BMV), que se reproduce a continuación:

Precio de la Acción (Pesos)		Puja
Mínimo	Máximo	
0.001	1.000	0.001
1.01	En adelante	0.01

Fuente: Bolsa Mexicana de Valores

3. Valor de la Puja por Contrato de Futuro.

El valor de un cambio en el precio de un Contrato de Futuro de Telmex L se obtiene de multiplicar una puja, por el número de unidades del Activo Subyacente que ampara un Contrato, conforme a lo siguiente:

Valor de la Puja = (Puja) (tamaño del Contrato)

Ejemplo: Si el Precio del Activo subyacente fuera de 10.00 pesos, sustituyendo valores en la fórmula, se obtiene:

1.00 pesos = (0.01 pesos) (100 acciones de Telmex L)

4. Fluctuación diaria máxima del Precio Futuro.

No habrá fluctuación máxima del precio futuro durante una misma sesión de remate.

5. Mecánica de negociación.

La celebración de Contratos de Futuros sobre TMX L será mediante procedimientos electrónicos a través del Sistema Electrónico de Negociación de MexDer, de acuerdo a las normas y procedimientos establecidos en su Reglamento, sin perjuicio de la facultad de MexDer de establecer alguna mecánica distinta.

6. Horario.

El horario de negociación de los Contratos de Futuro de Telmex serie L será en Días Hábiles de las 7:30 horas a las 15:00 horas tiempo de la Ciudad de México, Distrito Federal. Asimismo, se considerarán como parte de dicho horario el periodo que comprenda la negociación al Precio de Liquidación Diaria y las subastas que convoque MexDer de acuerdo a lo establecido en el numeral (III.4.d) del presente anexo.

7. Horario de negociación a Precio de Liquidación Diaria.

El Precio de Liquidación Diaria será calculado por MexDer al cierre de cada sesión y permitirá la negociación de Contratos de Futuro de Telmex serie L, mediante la presentación de Posturas en firme al Precio de Liquidación Diaria por parte de los Miembros de MexDer. El periodo en el que MexDer recibirá Posturas en firme para negociar al Precio de Liquidación Diaria será de 15:25 a 15:35 horas.

8. Último día de negociación y Fecha de Vencimiento de la Serie.

El último día de negociación y la Fecha de Vencimiento de una Serie del Contrato de Futuro sobre TELMEX Serie "L" será el cuarto martes del mes de vencimiento o el Día Hábil anterior, si dicho martes es inhábil.

9. Nuevas Series.

La negociación de Series con vencimiento distinto al establecido en el inciso (I.3) anterior, se iniciará el Día Hábil siguiente al de la fecha de su anuncio a través del boletín. Las nuevas Series del ciclo del Contrato de Futuro conforme al inciso (I.3) comenzarán su negociación al día hábil siguiente del último día de negociación de la Serie anterior.

10. Fecha de Liquidación al Vencimiento.

Para efectos del cumplimiento de las obligaciones a cargo de Asigna y del Socio Liquidador con respecto al Cliente, es el segundo Día Hábil posterior a la Fecha de Vencimiento.

11. Suspensiones.

En caso de que el Activo Subyacente suspenda su cotización en el mercado de contado de la BMV, la negociación del Contrato de Futuro de Telmex serie L se suspenderá hasta por el mismo periodo de tiempo que en el mercado de contado.

III. LIQUIDACIÓN DIARIA Y LIQUIDACIÓN AL VENCIMIENTO.

1. Liquidación al Vencimiento.

El Cliente efectuará la liquidación al vencimiento de las obligaciones relativas a los Contratos que mantenga abiertos, el Día Hábil siguiente a la Fecha de Vencimiento.

2. Procedimiento para la Liquidación al Vencimiento.

Los Clientes con Posiciones Cortas tendrán la obligación de entregar en la fecha, horario y en la cuenta que le indique el Socio Liquidador, el número de acciones que resulte de multiplicar el número de unidades de Activo Subyacente que ampara un Contrato por el número de sus Contratos Abiertos. En la Fecha de Liquidación, los Clientes con Posiciones Cortas tendrán el derecho de recibir en el horario que indique el Socio Liquidador y en la cuenta convenida, la cantidad que resulte de multiplicar el Precio de Liquidación al Vencimiento por el número de unidades de Activo Subyacente que ampara un Contrato por el número de Contratos Abiertos.

Los Clientes con Posiciones Largas tendrán la obligación de entregar en la fecha, el horario y en la cuenta que le indique el Socio Liquidador, la cantidad que resulte de multiplicar el Precio de Liquidación al Vencimiento por el número de unidades de Activo Subyacente que ampara un Contrato por el número de sus Contratos Abiertos. En la Fecha de Liquidación, los Clientes con Posiciones Largas tendrán el derecho de recibir en el horario que indique el Socio Liquidador y en la cuenta convenida con el Socio Liquidador, el número de acciones que resulte de multiplicar el número de unidades de Activo Subyacente que ampara un Contrato por el número de Contratos Abiertos.

3. Liquidación Diaria.

Los Clientes y los Socios Liquidadores realizarán la liquidación de sus obligaciones conforme lo hayan establecido en el Contrato de Intermediación.

Los Socios Liquidadores y Asigna realizarán diariamente la liquidación de sus obligaciones conforme lo establece el Reglamento de Asigna, quedando incorporados en la misma, las pérdidas y ganancias, la actualización de las Aportaciones Iniciales Mínimas, la actualización del Fondo de Compensación, los intereses devengados y, en su caso, las cuotas correspondientes.

4. Precio de Liquidación al Vencimiento.

El Precio de Liquidación al Vencimiento para un Contrato de Futuro de Telmex L, cuya Serie haya llegado a su término, será igual al precio de cierre que para dicho título calcule la BMV, conforme a lo siguiente:

PL = PC

Donde:

PL = Precio de Liquidación

PC = Precio de Cierre del Activo Subyacente que determine la BMV en la Fecha de Vencimiento del Contrato.

IV. POSICIONES LÍMITE.

1. Posiciones Límite en Posiciones Cortas o Largas y en Posición Opuesta.

Las Posiciones Límite establecidas para el Contrato de Futuro de Telmex L es el número máximo de Contratos Abiertos de una misma Clase que podrá tener un Cliente; de acuerdo con lo siguiente:

· El número de Contratos de la Posición Larga menos el número de Contratos de la Posición Corta en valor absoluto, no podrá ser mayor a 10,000 Contratos para toda la Clase.

· El número de Contratos de la Posición Larga más el número de Contratos de la Posición Corta, no podrá ser mayor a 30,000 Contratos para toda la Clase.

· El número de Contratos de la Posición Larga menos el número de Contratos de la Posición Corta en valor absoluto, no podrá ser mayor a 10,000 Contratos para toda la Clase.

· Tres semanas antes de la Fecha de Vencimiento, el número de Contratos de la Posición Larga o Corta de la Serie a vencer no podrá ser mayor a 5,000 Contratos.

· En la Fecha de Vencimiento, el número de Contratos de la Posición Larga o Corta de la Serie a vencer no podrá ser mayor a 500 Contratos Abiertos.

Los límites establecidos en este numeral podrán ser revisados y, consecuentemente, modificados en términos del Reglamento de MexDer.

2. Posiciones Límite para las posiciones de cobertura.

Los Clientes podrán abrir Posiciones Largas y Posiciones Cortas que excedan las Posiciones Límite establecidas en el numeral IV.1 anterior, con el único fin de crear una posición de cobertura de riesgo.

Será responsabilidad del Socio Liquidador verificar la existencia de las condiciones necesarias para la realización de las operaciones y acreditar por cuenta de sus Clientes ante la Cámara de Compensación, la existencia de posiciones objeto de cobertura de riesgos a más tardar el Día Hábil siguiente en que excedan las Posiciones Límite, de conformidad con el procedimiento establecido en el Manual Operativo.

Conforme a Reglamento, se entenderá por posiciones de cobertura, la Posición Corta o Posición Larga que un Cliente mantenga en la Cámara de Compensación como posición que contribuya a cubrir riesgos de la posición que un Cliente mantenga en otros mercados distintos a la Bolsa y a la Cámara de Compensación, en Activos Subyacentes o valores del mismo tipo que el Activo Subyacente u otro tipo de activos sobre los cuales se esté tomando la posición de cobertura de riesgo.

La Cámara de Compensación aceptará o negará discrecionalmente el que un Cliente mantenga una posición de cobertura y, en caso de rechazo, el Socio Liquidador deberá asegurarse de que su Cliente cierre el número de Contratos necesarios para cumplir con las Posiciones Límite establecidas en el numeral (IV.1) anterior, bajo el entendido de que el no realizar el cierre de los Contratos que excedan la Posición Límite, será objeto de sanción de acuerdo a lo dispuesto en el Reglamento de la Cámara de Compensación.

V. AJUSTES POR EJERCICIO DE DERECHOS.

1. En el caso de que la emisora del Activo Subyacente del presente Contrato de Futuro decrete dividendos en efectivo, la Cámara de Compensación no realizará ningún ajuste en los Contratos de Futuros accionarios. Esto responde a que el precio del contrato a futuro ya incorpora en su cálculo el pago de dividendos esperado. El dividendo realizado podría resultar menor o mayor al esperado y, en esa medida, el precio futuro determinado por el mercado reflejaría un ajuste a la alza o a la baja respectivamente, por el pago no esperado en el dividendo.

Cabe mencionar que en una operación a futuro de este Activo Subyacente, ni el comprador ni el vendedor de los Contratos de Futuro tendrán derechos u obligaciones respecto a los dividendos que otorgue la empresa que emite el Activo Subyacente.

2. En el caso de que la emisora del Activo Subyacente del presente Contrato de Futuro decrete algún derecho patrimonial diferente al señalado en el inciso (V.1) anterior, la Bolsa conjuntamente con la Cámara de Compensación, comunicarán a sus Socios a través del Boletín:

a) La forma de realizar los ajustes en el Activo Subyacente a que da origen el derecho, por parte de la bolsa en la que esté listado el Activo Subyacente correspondiente;

b) La forma en que se realizarán las modificaciones pertinentes a los Precios de Liquidación de las Series correspondientes del Día Hábil inmediato anterior a la entrada en vigor del ajuste; en su caso, a los precios de referencia para efectos de liquidación, cuando el ajuste esté dando origen a más de un Activo Subyacente y Contratos de Futuro correspondientes; las posiciones a las que tendría derecho la posición abierta previa a la entrada en vigor del ajuste; y, los nuevos requerimientos de Aportaciones Iniciales Mínimas.

Cuando la información sobre los derechos decretados por una emisora no establezca los ajustes a realizar por parte de la bolsa en la que esté listado el Activo Subyacente, la Bolsa conjuntamente con la Cámara de Compensación, harán saber a sus Miembros a través del Boletín y los medios que considere necesarios, la información disponible con relación a los ajustes establecidos en los incisos (V.2.a) y (V.2.b) anteriores.

Cuando resulte imposible realizar el ajuste correspondiente a los Contratos de Futuros, la Bolsa en coordinación con la Cámara de Compensación podrá decretar el vencimiento anticipado de cualquier serie.

3. Con el objetivo de mantener la estandarización de los Contratos y facilitar la posibilidad de operaciones de arbitraje con el mercado subyacente, la Cámara de Compensación ajustará a lotes completos el número de Activos Subyacentes amparados por cada Contrato de Futuro, eliminando picos o completando los lotes que resulten a nivel de cuenta.

4. Hechos los ajustes a los Contratos de Futuros accionarios tanto en las Posiciones Abiertas como en los Precios de Liquidación, la Cámara de Compensación notificará a los Socios Liquidadores las Posiciones Abiertas ajustadas conforme al derecho decretado.

5. Los Socios Liquidadores tendrán que ajustar las Posiciones Abiertas de sus Clientes, la de sus Socios Operadores y las propias conforme al reporte de posiciones que la Cámara de Compensación les haya hecho llegar, con motivo del ajuste de derechos.

VI. EVENTOS EXTRAORDINARIOS.

1. Definición de evento extraordinario.

Por evento extraordinario se entenderá el que se suspenda la cotización en la BMV del Activo Subyacente. No se considera evento extraordinario las suspensiones del Activo Subyacente que lleve a cabo la BMV, derivadas de movimientos en sus precios en un mismo Día Hábil que exceden los límites permitidos por la BMV.

Si ocurriera un evento extraordinario en el Activo Subyacente, se suspenderá la negociación del Contrato de Futuro.

2. Caso fortuito o causas de fuerza mayor.

Cuando por condiciones de mercado desaparezca la cotización del Activo Subyacente del mercado de contado, MexDer podrá deslistar el Contrato en ese momento, quedando sin efecto cualquier contrato negociado con posterioridad a la fecha de desliste.

Cuando por caso fortuito o causas de fuerza mayor, resulte imposible continuar negociando Telmex L, MexDer y Asigna podrán suspender o cancelar la negociación y la compensación y liquidación, respectivamente, del Contrato de Futuro y podrán en términos de sus respectivos Reglamentos Interiores determinar la forma de liquidación de los Contratos vigentes hasta ese momento, procurando en todo caso salvaguardar los derechos adquiridos por los Clientes.

Cuando a juicio de Asigna las condiciones económicas de mercado hagan inconveniente la liquidación en especie de los Contratos de Futuros que sean exigibles en la Fecha de Liquidación, ésta podrá ordenar que la liquidación de los Contratos se realice en efectivo. En este caso, los Socios Liquidadores y los Clientes estarán obligados a aceptar y, en su caso, a pagar, el monto en efectivo correspondiente a dicha liquidación.

Cuando por caso fortuito o de fuerza mayor resulte imposible llevar a cabo la entrega del Activo Subyacente los Socios Liquidadores imposibilitados deberán notificarlo en forma inmediata a Asigna quien adoptará la resolución que estime necesaria conforme a las circunstancias del caso y su decisión será obligatoria para todos los Socios Liquidadores involucrados. La Cámara de Compensación podrá prorrogar la fecha de entrega de los Activos Subyacentes, establecer lugares distintos para llevar a cabo la liquidación y modificar el proceso de liquidación.

2.5.2. Términos y Condiciones del Contrato de Futuro sobre el petróleo crudo ligero y dulce negociado en NYMEX

I. Cantidad - unidades del subyacente por contrato, con posible tolerancia cuando sea difícil medir con precisión el subyacente.

1 000 barriles (200 galones)

II. Precio citado - unidad del precio por unidad de subyacente.

Dólares y centavos por barril.

III. Calidad aceptable - definida cuidadosamente, con tablas de posibles sustitutos, a veces con algún ajuste al precio si se entrega una calidad ligeramente distinta a la especificada.

El petróleo doméstico deberá contener 0.42 % de sulfuro o menos, con una gravedad no menor de 37° API ni mayor de 42° API. Deberá provenir de los siguientes flujos de crudo doméstico: West Texas Intermediate, Low Sweet Mix, New Mexican Sweet, North Texas Sweet, Oklahoma Sweet, y South Texas Sweet.

El petróleo extranjero deberá contener 0.42 % de sulfuro o menos, con una gravedad no menor de 34°API ni mayor de 42° API. Deberá provenir de los siguientes flujos de crudo extranjero: U. K. Brent Forties, Norwegian Oseberg Blend, Nigerian Bonny Light, y Colombian Cusĭana Nigerian Qua Iboe.

IV. Horas de negociación

La negociación outcry trading[22] a partir de las 10:00 AM hasta 2:30 PM, después, a través del sistema NYMEX ACCESS® basado en internet, de lunes a jueves a partir de las 3:15 PM hasta las 9:30 AM del día siguiente, y el domingo la sesión comienza a las 7:00 PM (Siempre se manejará la hora de Nueva York).

V. Meses en negociación - maduración de los contratos negociados

30 meses consecutivos más futuros a largo plazo listados 36, 48, 60, 84 y 72 meses previos a la entrega.

VI. Límites de fluctuación - Los límites en las fluctuaciones de precios tienen por objeto la prevención de grandes movimientos causados por excesiva especulación, cuando existe demasiada fluctuación en los precios de un contrato, el mercado acostumbra suspender su negociación, hasta que la variación del precio se normalice.

-Fluctuación mínima de precio

$0.01 USD por barril ($10.00 USD por contrato).

-Fluctuación máxima

$10.00 USD por barril ($10.000 USD por contrato).

VII. Fechas de contratación - plazos en que se puede negociar un contrato.

Último día de negociación:

[22] Negociación en el piso de remates.

Tres días laborales antes del 25 del mes anterior al mes del contrato. Por ejemplo, si el 25 de junio es viernes, el contrato de julio vence el día 22 de junio. Los días restantes son para organizar la entrega de petróleo.

VIII. Mecanismos de entrega del subyacente - en algunos casos como eurodólares o índices bursátiles, no hay entrega, sino simplemente compensación por diferencias.

Por oleoducto en Cushing, Oklahoma, en las dos primeras semanas del mes del contrato en cuestión.

IX. Límite de posiciones - Máximo número de contratos que un especulador puede mantener.

20 000 futuros netos, y no exceder del 000 futuros netos los últimos tres días del mes spot.

X. Márgenes y depósitos de mantenimiento para respaldar las posiciones - el margen inicial es la cantidad que debe encontrarse depositada en la cuenta de negociación de cada posición al momento de efectuar el trato, el margen de mantenimiento se deposita posteriormente (más adelante se verá bajo que circunstancias), estos depósitos se ajustan continuamente en función de la volatilidad del mercado.

Depósito de garantía (margen inicial):

Para los no miembros :	\$ 3 375 USD
Para los miembros:	\$ 2 750 USD

Además del margen inicial NYMEX también estipula el depósito mínimos de garantía (margen de mantenimiento): \$ 2 500 USD

Capítulo 3

Opciones

Recordemos que una opción es aquel contrato que da a su comprador el derecho, pero no la obligación, a comprar o vender activos llamados subyacentes, a un precio predeterminado llamado precio de ejercicio o *strike*, en o antes[1] de una fecha concreta denominada fecha de maduración. Existen dos clases de opciones: call y put; una opción call es un contrato que da a su comprador el derecho, pero no la obligación, a comprar un activo subyacente al precio strike acordado, en o antes de la fecha de vencimiento; el vendedor de la opción call tiene la obligación de vender el activo en caso de que el comprador ejerza el derecho a comprar; por su parte, una opción put da a su comprador el derecho, pero no la obligación, a vender un activo al precio strike acordado, en o antes de la fecha de vencimiento y el vendedor de la opción put tiene la obligación de comprar el activo en caso que el comprador de la opción ejerza el derecho a vender el activo.

A diferencia de los forwards y los futuros, las opciones sí tienen un valor desde el inicio de su vigencia. Esto se debe a que existen el derecho del comprador de ejercer según le convenga y la obligación del vendedor de hacer efectivo este derecho, por lo tanto el comprador deberá pagar un costo por esta ventaja; es en este punto donde se requieren argumentos sólidos que permitan determinar de manera precisa el valor de la opción.

3.1. Factores que influyen en el valor de una opción

Existen seis factores fundamentales que determinan el valor de una opción, y son: el precio actual del subyacente, el strike, la fecha de expiración, la volatilidad

[1] Dependiendo de la fecha en que pueden ser ejercidas, las opciones se clasifican en *europeas*, aquellas que pueden ejercerse únicamente en la fecha de vencimiento, y *americanas*, aquellas que pueder serlo en cualquier momento durante de la vigencia del contrato. Como es claro, esta clasificación no tiene que ver con el lugar de negociación.

en el precio del subyacente, la tasa de interés y los dividendos que paga el subyacente (en caso de que éstos existan).

La relación más evidente entre estos factores se manifiesta en el payoff, que por definición determina una relación entre el precio del subyacente y el strike[2].

Cuando se trata de opciones americanas, la fecha de maduración adquiere un papel relevante, pues en tanto mayor sea el tiempo de vida del contrato, mayores serán las oportunidades que se tengan para ejercerlo, y consecuentemente mayor el valor del contrato[3]. En el caso de las opciones europeas no necesariamente sucede lo mismo, pues un contrato con un tiempo "corto" de vida tendrá las mismas oportunidades para ser ejercido que uno con un tiempo de vida más largo: una, a la maduración del contrato.

La volatilidad es un concepto fundamental en el mercado de opciones. Tengamos en cuenta que de no existir volatilidad, no tendrían razón de ser los mercados de futuros y opciones. La volatilidad se puede definir como una medida de dispersión del precio del activo subyacente. A mayor volatilidad mayor probabilidad que se ejerza la opción; por tanto este factor influye en un incremento en el valor de la opción, tanto de compra (Call), como de venta (Put). En lo sucesivo se estudiará más detalladamente la importancia de este factor en la determinación del valor de una opción.

La tasa de interés libre de riesgo afecta el valor de una opción básicamente en dos sentidos: el primero de los cuales se refleja en el valor del subyacente, es decir, si esta tasa se incrementa el valor del subyacente se incrementará también, y consecuentemente se generará un aumento en el valor de la opción; por otro lado el incremento de esta tasa provocará un decremento en el valor presente de cualquier flujo futuro de efectivo recibido por el tenedor de la opción y por lo tanto un decremento en el valor de ésta. Más adelante se podrá observar que el primer efecto siempre resulta más impactante que el segundo, al menos en teoría.

El hecho de que el bien subyacente pague dividendos afecta el valor de las opciones en función del efecto que producen sobre las cotizaciones de las acciones. El pago de dividendo supone un descenso en la cotización de las acciones, por tanto el comprador del call sobre una acción que pague dividendos dentro del plazo de ejecución, tendrá menos probabilidades de poder ejercerlo por lo que el valor del call bajará. El caso de un put es totalmente inverso, su valor es más alto cuanto más altos son los dividendos futuros esperados.

A continuación se establecerá una notación[4] que facilitará el análisis posterior:

r = tasa de interés libre de riesgo compuesta continuamente
S_t = valor del subyacente en la fecha t
K = strike (precio del subyacente acordado en el contrato)
t = cualquier fecha a partir del inicio del contrato y antes de la maduración

[2]Véase la parte 2.3 de la introducción.

[3]Esto se cumple únicamente cuando el subyacente no paga dividendos, de lo contrario sucede lo inverso.

[4]Parte de esta notación ya ha sido definida anteriormente.

T = fecha de la maduración
C = valor de un call americano cuyo subyacente es una acción
P = valor de un put americano cuyo subyacente es una acción
c = valor de un call europeo cuyo subyacente es una acción
p = valor de un put europeo cuyo subyacente es una acción

De igual manera, será necesario hacer algunas consideraciones del contexto de negociación similares a las que se plantearon para el estudio de los forwards y los futuros:

- Los subyacentes son bienes de inversión, no de consumo.
- No se toman en cuenta costos de transacción, ni consideraciones fiscales.
- Se asume que la tasa de interés libre de riesgo otorgada en el mercado para un préstamo, será la misma que se otorgue para una inversión.
- No hay oportunidades de arbitraje

3.1.1. Límites del valor de una opción

Tanto calls americanos como europeos dan al tenedor el derecho de comprar una acción a cierto precio. Sin importar lo que suceda, el valor de la opción, lógicamente no podrá ser mayor que el valor de la acción misma, por tanto:

$$c \leq S_t \;\; y \;\; C \leq S_t \tag{3.1}$$

Si esta relación no se cumpliese, un arbitrajista podría fácilmente construir un portafolio libre de riesgo comprando la acción y vendiendo el call[5].

Asimismo, sabemos que puts americanos y europeos, dan al tenedor el derecho de vender una acción a un cierto precio K. Sin importar lo que suceda, el valor de la opción de venta no podrá ser mayor que la cantidad a recibir acordada, en caso de ejercicio, esto es:

$$p \leq K \;\; y \;\; P \leq K \tag{3.2}$$

Si la desigualdad anterior no se cumpliese, el argumento de arbitraje es análogo al caso de los calls.

Ahora veremos qué sucede con los límites inferiores comenzando por los calls americanos. El límite inferior que se tiene para estos contratos está dado por la siguiente expresión:

$$C \geq \text{máx}\{0, S_t - K\} \tag{3.3}$$

Supóngase que la desigualdad anterior no se cumpliese, entonces tendríamos que:

$$C < \text{máx}\{0, S_t - K\}$$

[5]Por hipótesis, no hay oportunidad de arbitraje.

Dada la expresión anterior, en cualquier momento durante la vigencia del contrato, un arbitrajista podría construir inmediatamente un portafolio libre de riesgo, comprando el call y ejerciéndolo, como se plantea en el siguiente portafolio:

$$\begin{array}{lll} \text{Call largo} & -C & \\ \text{Ejercer el call} & S_t - K & \\ \hline & S_t - K - C & > 0\,! \end{array}$$

Por lo tanto 3.3 se cumple.

La frontera inferior para los puts americanos de define como sigue:

$$P \geq \text{máx}\,\{0, K - S_t\} \tag{3.4}$$

Suponiendo que 3.4 no se cumpliese, y descartando la posibilidad de que el valor del put sea menor que cero, un arbitrajista podría construir el siguiente portafolio libre de riesgo:

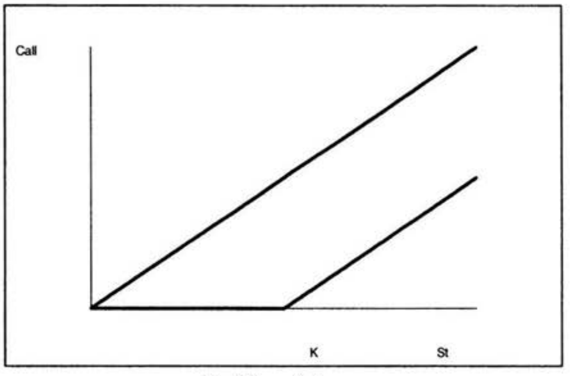
$$\begin{array}{lll} \text{Put largo} & -P & \\ \text{Ejercer el put} & K - S_t & \\ \hline & K - S_t - P & > 0\,! \end{array}$$

Por lo tanto 3.4 se cumple.

A continuación se muestra la representación gráfica de los límites para opciones americanas.

- Límites del valor de un call:

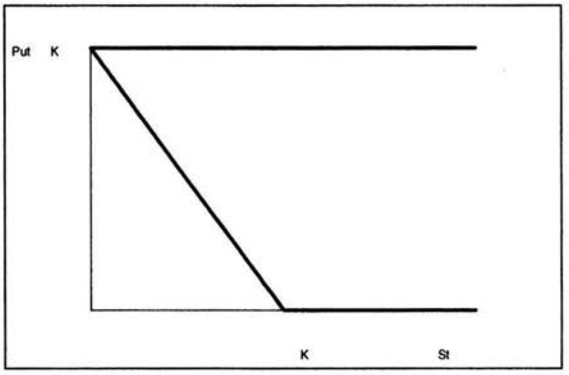
$$C \geq \text{máx}\,\{0, S_t - K\} \;\; y \;\; C \leq S_t$$



Gráfica 3.1

- Límites del valor de un put:

$$P \geq \text{máx}\{0, K - S_t\} \ y \ P \leq K$$



Gráfica 3.2

Límites inferiores para opciones europeas sobre acciones que no pagan dividendos

Para un call europeo sobre un subyacente que no paga dividendos se tiene la siguiente cota inferior:

$$c \geq \text{máx}\left\{S_t - Ke^{-rT}, 0\right\} \tag{3.5}$$

A continuación se demuestra la validez de la expresión 3.5.

Sean A y B portafolios constituidos por las siguientes transacciones:

A	t	$S_T > K$	$S_T < K$
Call europeo	$-c$	$S_T - K$	0
Inversión de Ke^{-rT}	$-Ke^{-rT}$	K	K
Total	$-c - Ke^{-rT}$	S_T	K

B	t	$S_T > K$	$S_T < K$
Acción larga	$-S_t$	S_T	S_T
Total	$-S_t$	S_T	S_T

Como se puede observar, el portafolio A en T, valdrá S_T si $S_T > K$, y K si $S_T < K$, lo que implica que en T, este portafolio siempre tendrá un valor mayor o igual que el B, consecuentemente, el costo de A en t también deberá ser mayor que el costo de B, es decir:

$$c + Ke^{-rT} \geq S_t$$

$$\Longrightarrow c \geq S_t - Ke^{-rT}$$

Y dado que en el peor de los casos el valor de un contrato es cero, se cumple 3.5.

La frontera inferior para un put europeo sobre un subyacente que no paga dividendos, es:

$$p \geq \text{máx}\left\{Ke^{-rT} - S_t, 0\right\} \tag{3.6}$$

Una vez más, se proponen dos portafolios A y B, mediante los cuales se demuestra 3.6.

A	t	$S_T > K$	$S_T < K$
Put europeo	$-p$	0	$K - S_T$
Acción larga	$-S_t$	S_T	S_T
Total	$-p - S_t$	S_T	K

B	t	$S_T > K$	$S_T < K$
Inversión de Ke^{-rT}	$-Ke^{-rT}$	K	K
Total	$-Ke^{-rT}$	K	K

Si en T $S_T > K$, el portafolio A valdrá S_T, y si $S_T < K$ su valor será K, lo que nos muestra que al igual que en el caso anterior, el portafolio A en T tendrá un valor igual o mayor que el B, y por tanto en t, el costo del primero será también igual o mayor que el del segundo:

$$p + S_t \geq Ke^{-rT}$$

$$\Longrightarrow p \geq Ke^{-rT} - S_t$$

Considerando que el valor del contrato puede ser al menos cero, se cumple 3.6.

3.2. Control de riesgos y estrategias de inversión con opciones europeas

Como se ha visto, tanto las opciones como los demás productos derivados son utilizadas con tres objetivos principales: cobertura de riesgos, especulación, o arbitraje.

La opción quizá sea el mejor instrumento para cubrir cualquier riesgo sobre el precio del subyacente. Con la opción estamos traspasando el riesgo de pérdida a un tercero mientras conservamos en nuestro poder la posibilidad de seguir obteniendo beneficios, en caso de una evolución favorable de los precios. Podemos imaginarla como una póliza de seguro. Pagamos una prima a cambio de cubrir un riesgo, si el evento productor del riesgo no se materializa, continuaríamos disfrutando del bien asegurado, perdiendo sólo la prima pagada.

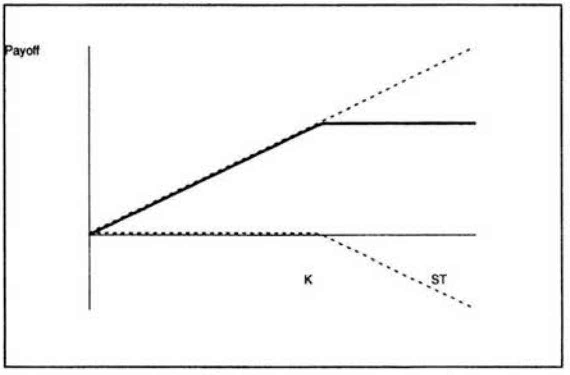
La cobertura con otros instrumentos, como por ejemplo, futuros, implicaría que estaríamos transfiriendo tanto nuestros riesgos de pérdida como la posibilidad de obtener beneficios, en caso de que los mismos se produjeran.

Una estrategia de cobertura con opciones, por tanto, tendría como objeto la protección de una posible pérdida sobre un activo o pasivo de nuestra propiedad, de manera que la pérdida obtenida en una determinada posición sea compensada por la ganancia de la otra.

Las estrategias posibles son prácticamente ilimitadas, dependiendo sólo de la mayor o menor aversión al riesgo del inversionista. Aquí sólo examinaremos algunas a modo de ejemplo para conocer a grandes rasgos sus mecanismos y fines, dejando a la imaginación y paciencia del lector, el desarrollo de otras posibles.

En principio, cada posición en un call o en un put puede considerarse como el diseño más elemental de las estrategias que involucran opciones. La posición que se tome en el contrato dependerá de las expectativas del inversionista; así, si un inversionista considera, por ejemplo, que el precio del subyacente subirá, sencillamente puede asumir una posición larga en un call.

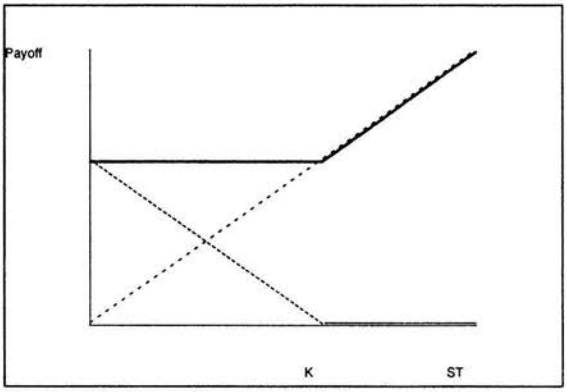
Enseguida se muestran algunas estrategias de cobertura básicas, que involucran la negociación de una acción y una opción[6].



Gráfica 3.3

La gráfica 3.3 ilustra el payoff esperado de un portafolio (línea negrita) compuesto por una acción larga y un call corto (líneas punteadas), portafolio conocido como *covered call*; en éste la acción larga cubre al call corto en caso de un alto incremento en el precio del subyacente. Nótese que este portafolio también pudo haberse construido a partir de un put corto más un bono.

[6]Consideraremos que las opciones a ser compradas o vendidas en cada estrategia, tienen como valor de referencia (subyacente) la acción en cuestión.

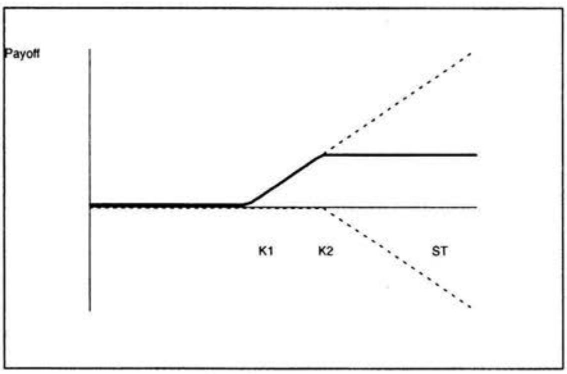


Gráfica 3.4

La gráfica 3.4 ilustra el payoff esperado de un portafolio (línea negrita) compuesto por una acción y un put largos (líneas punteadas); este portafolio se conoce como *protective put*, y tiene como objeto proteger el precio de la acción con el put. Una alternativa para la construcción del *protective put*, es mediante con un call largo más un bono.

Como estrategias de inversión, las opciones ofrecen a sus usuarios, un amplio abanico de posibilidades, si es capaz de anticipar correctamente los potenciales movimientos de los precios o la volatilidad del subyacente.

Un tipo de estrategias de inversión la constituyen los *spreads* (diferencial). Éstos involucran la negociación de dos o más opciones del mismo tipo[7].

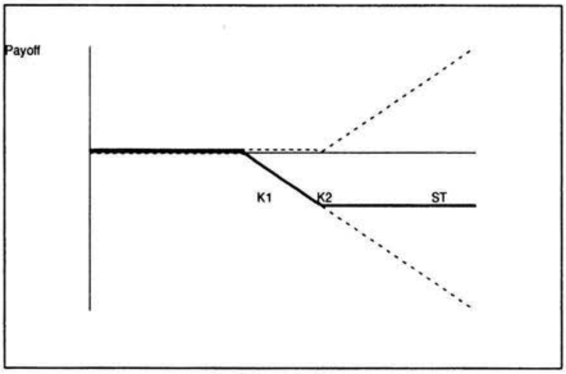


Gráfica 3.5

La gráfica 3.5 ilustra el payoff de un portafolio (línea negrita) formado por dos calls (líneas punteadas), uno largo y otro corto, sobre el mismo subyacente,

[7] *i.e* dos o más calls o dos o más puts.

donde el strike del primero es menor que el del segundo. La construcción de este portafolio, conocido como *bull spread*, tiene sentido cuando las expectativas del mercado se encuentran a la alza. Al igual que las estrategias anteriores, existe una alternativa de construcción formada en este caso por dos puts, uno largo y uno corto, sobre el mismo subyacente, donde el strike del primero es menor que el del segundo.



Gráfica 3.6

La gráfica 3.6 ilustra el payoff de un portafolio conocido como *bear spread,* que al igual que el portafolio anterior, está compuesto por dos calls, uno largo y uno corto, salvo que en este caso el strike del primero es mayor que el del segundo. Al contrario que el *bull spread*, el bear spread se construye bajo expectativas a la baja. La alternativa de construcción para este portafolio se implementa mediante dos puts, uno largo y uno corto, donde el strike del primero sea mayor que el del segundo.

Existen muchísimos más tipos de estrategias de inversión: más *spreads, straddles* (cono), *strangles* (cuna), cóndor, etc, y una gran cantidad de novedosas mezclas que pueden ser usadas para satisfacer los deseos más caprichosos y las necesidades más urgentes de cualquier inversionista[8].

3.3. Algunas relaciones entre opciones europeas y americanas

3.3.1. Call

En general se cumple la siguiente desigualdad:

$$c \leq C \tag{3.7}$$

[8]Hull[5] hace una descripción más detallada de las estrategias que aquí se muestran y presenta también algunas más.

Sin embargo, cuando el subyacente no paga dividendos ocurre que:

$$c = C \tag{3.8}$$

La expresión 3.8 indica que para un call americano sobre un subyacente que no paga dividendos, la fecha más conveniente de ejercicio será al final de su vigencia. A continuación se analiza este argumento.

De la expresión 3.3, se tiene que:

$$C \geq S_t - K$$

Suponiendo que fuese conveniente ejercer el call el día t antes del final de su vigencia, se tendría que:

$$C = S_t - K$$

Por lo que, considerando ésto último, 3.7 y 3.5 , se tendría que para $r > 0$:

$$C \geq S_t - Ke^{-rT} \Longrightarrow S_t - K \geq S_t - Ke^{-rT} \quad !$$

Por lo tanto, nunca será conveniente ejercer un call americano sobre acciones que no pagan dividendos, antes de la fecha de su maduración, es decir, bajo estas circunstancias se cumple 3.8.

3.3.2. Put

En este caso, en general se cumple que:

$$p \leq P \tag{3.9}$$

A diferencia de un call, un put americano sobre acciones que no pagan dividendos siempre tendrá como fecha de ejercicio más conveniente aquella que diste más del vencimiento y en la cual S_t sea suficientemente bajo; por lo tanto, en estas condiciones, se cumple:

$$p < P \tag{3.10}$$

Veamos el argumento que valida 3.10. Si la fecha t, antes del vencimiento, es la más conveniente para ejercer el contrato, se tendría que:

$$P = K - S_t \tag{3.11}$$

Considerando las expresiones 3.11, 3.9 y 3.6, se obtiene:

$$P \geq Ke^{-rT} - S_t \Longrightarrow K - S_t \geq Ke^{-rT} - S_t$$

Lo que siempre se cumple, por lo tanto fue correcto suponer la fecha t, antes del vencimiento, como la más conveniente, es decir, la expresión 3.10 es verdadera.

3.3.3. Paridad call-put

Como se pudo observar en las estrategias planteadas en la sección 3.3, siempre fue posible dar alternativas de construcción; esto se debe a la existencia de una correspondencia entre call y puts que está dada a partir de la siguiente expresión[9]:

$$c = p + S_t - Ke^{-rT} \tag{3.12}$$

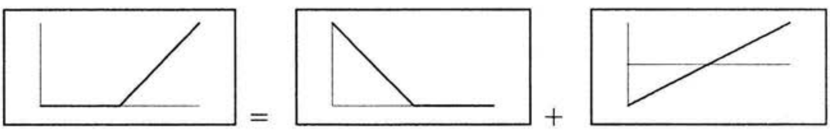
Si $F = valor\ de\ un\ forward$, se recordará que:

$$F = S_t - Ke^{-rT}$$

Por lo tanto, 3.12 queda como sigue:

$$c = p + F \tag{3.13}$$

Gráficamente esta relación resulta bastante clara:



La expresión 3.13 se conoce como paridad call-put. En esencia, esta identidad permite conocer el valor de un put a partir del de un call y viceversa; sin olvidar, claro está, la posibilidad de construir estrategias de inversión de formas alternas.

3.3.4. Calls y puts americanos

La relación "análoga" a la paridad call-put para el caso de las opciones americanas se define por la siguiente expresión:

$$S_t - K \leq C - P \leq S_t - Ke^{-rT} \tag{3.14}$$

Sabemos que en general se cumple:

$$P \geq p$$

Por lo tanto, considerando la expresión 3.12, se obtiene que:

$$P \geq C - S_t + Ke^{-rT} \Longrightarrow C - P \leq S_t - Ke^{-rT}$$

Lo que implica que se satisface el lado derecho de 3.14. Para demostrar el lado restante de la desigualdad, considérese el portafolio formado por las siguientes transacciones:

	t
Call largo	$-C$
Put Corto	P
Acción corta	S_t
Inversión de K	$-K$
Total	$-C + P + S_t - K$

[9]Esta relación es válida únicamente para opciones europeas, donde ambos contratos tengan el mismo valor de referencia (subyacente), strike y fecha de vencimiento.

Cuyos resultados posteriores serán:

$t \leq t\prime \leq T$	$S_T \leq K$	$S_T < K$
$C_{t\prime}$[10]	0	$S_T - K$
$-(K - S_{t\prime})$	$-(K - S_T)$	0
$S_{t\prime}$	$-S_T$	$-S_T$
$Ke^{r(t\prime-t)}$	$Ke^{r(T-t)}$	$Ke^{r(T-t)}$
$C_{t\prime} + 2S_{t\prime} + K(e^{r(t\prime-t)} - 1) > 0$	$K(e^{r(T-t)} - 1) > 0$	$K(e^{r(T-t)} - 1) > 0$

Se puede observar que independientemente de lo que suceda tanto en $t\prime$ como en T el portafolio anterior otorgará beneficios al tenedor, por lo que en ausencia de oportunidades de arbitraje, el costo de este portafolio deberá ser positivo:

$$0 \leq C + K - P - S_t$$

$$\Longrightarrow S_t - K \leq C - P$$

Por lo tanto, el lado izquierdo de 3.14 también se cumple.

3.4. Métodos de valuación

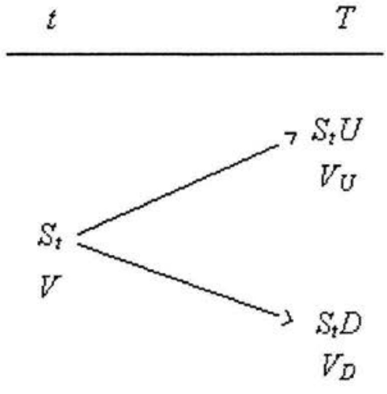
3.4.1. Árboles binomiales

Si se presume que una acción que no paga dividendos, cuyo valor el día de hoy es S_t, tendrá en T uno de dos valores, inferior o superior a S_t, conocidos, será posible calcular el valor de una opción sobre esta acción. Tomando en cuenta las consideraciones planteadas al principio del capítulo, a continuación se deduce la técnica que se aplica bajo estas condiciones, conocida como "árboles binomiales"; en principio, la deducción se hace para opciones de tipo europeo[11]:

Sean $U = 1+$ el posible incremento para S_t en T y $D = 1-$ decremento posible para S_t en T, tales que $U > 1$ y $D < 1$, y sean V, V_U y V_D los valores de la opción en t y en T, respectivamente. Obsérvese la gráfica 3.7.

[10]Como el subyacente no paga dividendos, no es conveniente ejercer.

[11]El desarrollo para el caso de opciones americanas se da más adelante.



Gráfica 3.7

Considérese ahora un portafolio libre de riesgo formado por una posición corta en una opción y por la compra de Δ número de acciones. Si el precio de las acciones incrementa a S_tU, el valor del portafolio al vencimiento de la opción será de:

$$\Delta S_tU - V_U$$

Si por el contrario el precio de las acciones desciende a S_tD, el valor del portafolio será:

$$\Delta S_tD - V_D$$

Para conocer la Δ que satisface que el portafolio sea libre de riesgo se debe cumplir:

$$\Delta S_tU - V_U = \Delta S_tD - V_D$$

$$\Rightarrow \Delta = \frac{V_U - V_D}{S_tU - S_tD} \tag{3.15}$$

Nótese que Δ representa la razón de cambio en T , entre los posibles valores de la opción respecto al cambio en los posibles valores de la acción.

Por otro lado sabemos que el costo del portafolio en t es de:

$$\Delta S_t - V$$

Y dado que el portafolio es libre de riesgo, en ausencia de arbitraje su valor actual es :

$$(\Delta S_tU - V_U)e^{-r(T-t)}$$

o

$$(\Delta S_tD - V_D)e^{-r(T-t)}$$

Por lo tanto, tomando indistintamente la primera de las dos expresiones anteriores, se tendrá que:

$$(\Delta S_t U - V_U)e^{-r(T-t)} = \Delta S_t - V$$

Sustituyendo la expresión 3.15 y despejando V, se obtiene:

$$\begin{aligned} V &= e^{-rT}\left[V_U\left(\frac{e^{r(T-t)}S_t - S_t D}{S_t U - S_t D}\right) + V_D\left(\frac{S_t U - e^{r(T-t)}S_t}{S_t U - S_t D}\right)\right] \\ &= e^{-rT}\left[V_U\left(\frac{e^{r(T-t)} - D}{U - D}\right) + V_D\left(\frac{U - e^{r(T-t)}}{U - D}\right)\right] \qquad (3.16) \end{aligned}$$

Sea:

$$\Pi = \frac{e^{r(T-t)} - D}{U - D} \qquad (3.17)$$

Sustituyendo Π en la expresión 3.16, se tiene finalmente:

$$V = e^{-r(T-t)}\left[\Pi V_U + (1 - \Pi)\, V_D\right] \qquad (3.18)$$

La expresión 3.18 representa el valor de una opción europea sobre una acción que no paga dividendos, con $S_t U$ y $S_t D$ valores probables de la acción al tiempo T.

Veamos un ejemplo numérico.

Ejemplo 8 *A un inversionista le ofrecen un call a un año sobre acciones que no pagan dividendos con un precio actual de \$100, una tasa de interés libre de riesgo r=.03, y strike K=85. La empresa emisora de las acciones se encuentra en un problema legal, por lo que si el fallo resulta a su favor, el precio de las acciones dentro de un año se incrementará en un 10 %, sin embargo si el fallo resulta en su contra, el precio de las acciones disminuirá en un 20 %. ¿Cuál es el valor actual del contrato en cuestión?*

De los datos anteriores se tiene que:

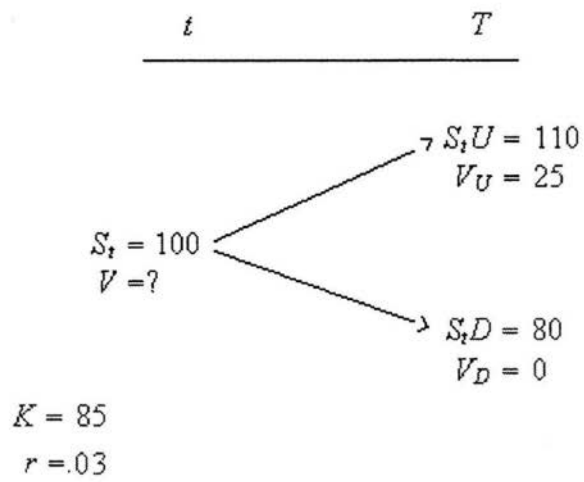
$$S_t U = (1 + .10)100 = 110$$

$$S_t D = (1 - .20)100 = 80,$$

$$V_U = 25 \quad y^{12}$$

$$V_D = 0$$

[12] Recuérdese que se trata de una opción de compra.



Gráfica 3.8

Sustituyendo estos valores en las expresiones 3.17 y 3.18, se obtienen Π y el valor del call V:

$$\Pi = \frac{e^{.03} - .8}{1.1 - .8} = 0.768\,18$$

$$\therefore V = e^{-.03}\left[(0.768\,18)\,25 + (0.231\,82)\,0\right] = 18.\,637$$

Nótese que el modelo no requiere de las probabilidades de que S_t tome el valor de S_tU o S_tD; sin embargo, podemos considerar los valores Π y $1 - \Pi$ como estas probabilidades, siempre que $D < e^{r(T-t)} < U$, y esta consideración deberá satisfacer la hipótesis de probabilidad de riesgo neutral, que básicamente afirma que en ausencia de arbitraje, el rendimiento esperado de la acción es la tasa de interés libre de riesgo, es decir:

$$E(S_T) = S_t e^{r(T-t)}$$

Veamos que esto se cumple.

Por definición de esperanza, se tiene que si p es la probabilidad de que S_t tome en T el valor de S_tU :

$$E(S_T) = pS_tU + (1-p)S_tD \tag{3.19}$$

Sustituyendo p por el valor de Π dado en la expresión 3.17:

$$E(S_T) = \left(\frac{e^{r(T-t)} - D}{U - D}\right) S_tU + \left(1 - \frac{e^{r(T-t)} - D}{U - D}\right) S_tD$$

$$\Rightarrow E(S_T) = \left(\frac{e^{r(T-t)} - D}{U - D}\right) S_t U - \left(\frac{e^{r(T-t)} - D}{U - D}\right) S_t D + S_t D$$

$$\Rightarrow E(S_T) = \left(\frac{e^{r(T-t)} - D}{U - D}\right) S_t (U - D) + S_t D$$

$$\Rightarrow E(S_T) = (e^{r(T-t)} - D) S_t + S_t D$$

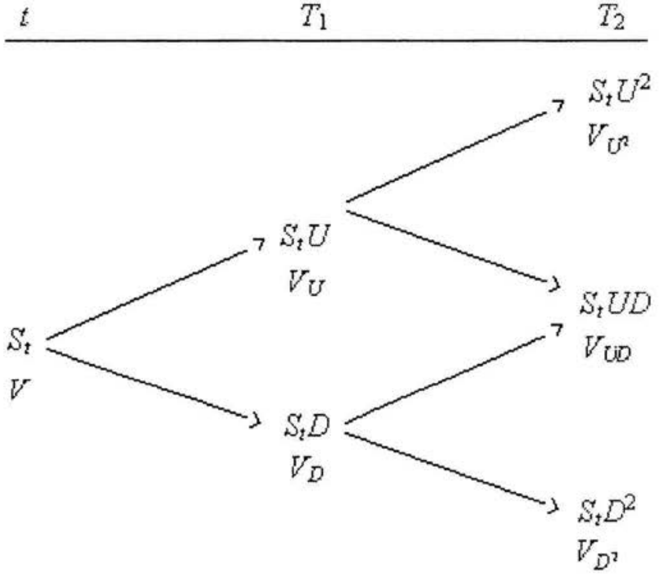
$$\Rightarrow E(S_T) = S_t e^{r(T-t)}$$

$$\therefore Si\ p = \Pi \Rightarrow p S_t U + (1-p) S_t D = S_t e^{r(T-t)} \tag{3.20}$$

Lo anterior nos permite concluir que tomar Π como la probabilidad de que S_T tome el valor de S_tU, satisface la condición de que el rendimiento esperado del activo sea la tasa de interés libre de riesgo.

Árboles de dos o más periodos

La gráfica 3.9 ilustra la extensión de las ideas anteriores a una situación de dos periodos, donde el valor de S_t en cada periodo incrementa o disminuye U o D veces según sea el caso:



Gráfica 3.9

El proceso para encontrar el valor de la opción es iterativo, es decir, el cálculo que se realizó en el caso de un solo periodo se aplica para encontrar, primero los valores V_U y V_D de la opción en el periodo T_1, y después su valor actual V:

Sea δt el tiempo entre cada periodo. Entonces:

$$V_U = e^{-r\delta t}\left[\Pi V_{U^2} + (1-\Pi)\, V_{UD}\right]$$

$$V_D = e^{-r\delta t}\left[\Pi V_{UD} + (1-\Pi)\, V_{D^2}\right]$$

$$V = e^{-r\delta t}\left[\Pi V_U + (1-\Pi)\, V_D\right]$$

Sustituyendo en esta última expresión V_U y V_D se obtiene:

$$V = e^{-2r\delta t}\left[\Pi^2 V_{U^2} + 2\Pi(1-\Pi)V_{UD} + (1-\Pi)^2\, V_{D^2}\right] \tag{3.21}$$

La expresión 3.21 representa el valor actual de una opción europea sobre una acción que no paga dividendos, con S_tU, S_tD, S_tU^2, S_tUD y S_tD^2 valores probables de la acción en $T1$ y en $T2$, respectivamente.

Generalización:

$$\text{Sea } G_j = \begin{cases} V_U & si \quad j=0 \\ V_D & si \quad j=1 \\ V_{U^{1-j}}V_{D^j} & eoc \end{cases}$$

Entonces la expresión 3.18 queda de la siguiente forma:

$$V = e^{-r\delta t}\sum_{j=0}^{1}\binom{1}{j}(1-\Pi)^j\Pi^{1-j}G_j$$

Aplicando la misma lógica para la expresión 3.21, redefinimos G_j:

$$G_j = \begin{cases} V_{U^2} & si \quad j=0 \\ V_{D^2} & si \quad j=2 \\ V_{U^{2-j}}V_{D^j} & eoc \end{cases}$$

Por lo que para dos periodos se tendrá:

$$V = e^{-r2\delta t}\sum_{j=0}^{2}\binom{2}{j}(1-\Pi)^j\Pi^{2-j}G_j$$

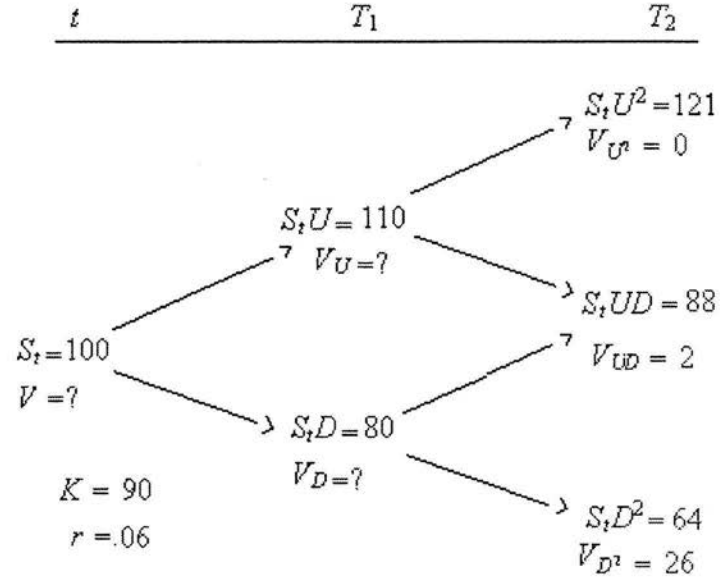
Y como el proceso para obtener V es iterativo, la generalización a n periodos queda como sigue:

$$\text{Sea } G_j = \begin{cases} V_{U^n} & si \quad j=0 \\ V_{D^n} & si \quad j=n \\ V_{U^{n-j}}V_{D^j} & eoc \end{cases}$$

$$\Rightarrow V = e^{-rn\delta t}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(1-\Pi)^j\Pi^{n-j}G_j$$

Ejemplo 9 Determinar el valor de un put a un año con K=90, r=.06, sobre un subyacente cuyo valor actual es de \$100, con posibles incrementos de 10 % o decrementos del 20 % cada 6 meses.

Con los datos anteriores, se obtiene la gráfica 3.10:



Gráfica 3.10

Para encontar el valor del put, se pueden sustituir los valores directamente en la expresión 3.21 o bien, se pueden calcular V_U y V_D y sustituirlos para encontrar V. Utilizando esta última alternativa, se obtiene:

$$\Pi = \frac{e^{.06\frac{1}{2}} - .8}{1.1 - .8} = 0.768\,18$$

$$V_U = e^{-.06\frac{1}{2}}\left[(0.768\,18)0 + (0.231\,82)\,2\right] = 0.449\,94$$

$$V_D = e^{-.06\frac{1}{2}}\left[(0.768\,18)2 + (0.231\,82)\,26\right] = 7.\,340\,2$$

$$V = e^{-.06\frac{1}{2}}\left[(0.768\,18)0.449\,94 + (0.231\,82)\,7.340\,2\right] = 1.\,986\,7$$

En la realidad existen varios factores que harán que el precio del subyacente varíe más de una o dos veces durante el tiempo de vida del contrato[13], por lo que en la práctica se acostumbra dividir en 30 a más periodos, lo que representa 2^{30} trayectorias posibles del precio del activo, de esta forma se obtendrá una mejor aproximación para el precio de la opción.

[13] La vida del contrato suele ser menor que un año.

Árboles binomiales para opciones americanas

Como se vio en la sección 3.3 de este capítulo, el valor de un call americano y de uno europeo sobre un subyacente que no paga dividendos es el mismo, por lo que únicamente analizaremos la aplicación del método para los puts americanos. Supóngase que se desea saber el valor de un put americano, bajo las mismas condiciones del ejemplo 9; al igual que con puts europeos, una vez que ya se ha construido el árbol con las variaciones binomiales del precio del subyacente, los cálculos que restan para determinar el valor de la opción, se realizarán recorriendo el árbol de atrás hacia adelante. Los valores del put en los nodos correspondientes a T_2 son los mismos que en el caso del put europeo, no así en T_1 donde es necesario comparar convenientemente en cada nodo el payoff que se obtendría en caso de ejercer en ese momento con el valor del contrato calculado de la misma manera que se hizo en el ejemplo 9, esto es:

$$V_U = \text{máx}(K - S_t U, e^{-r\delta t}\left[\Pi V_{U^2} + (1-\Pi)\, V_{UD}\right])$$

$$V_U = \text{máx}(\ -20\ ,\ 0.44994\ )$$

y

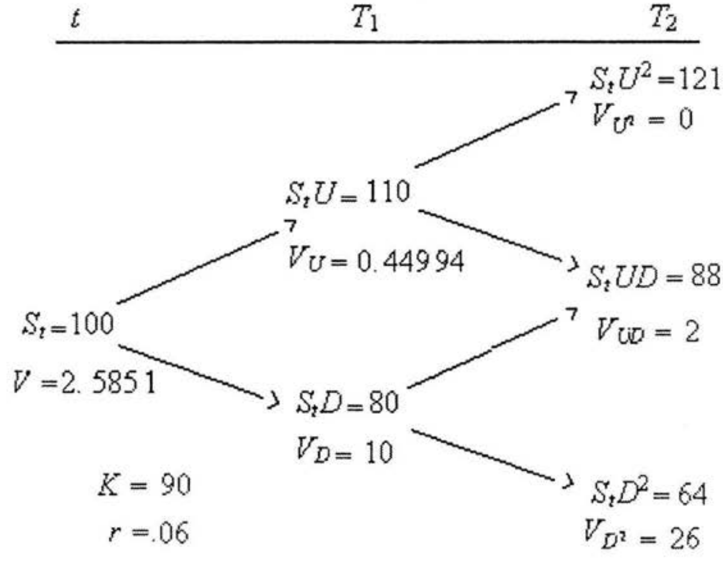
$$V_D = \text{máx}(K - S_t D, e^{-r\delta t}\left[\Pi V_{UD} + (1-\Pi)\, V_{D^2}\right])$$

$$V_D = \text{máx}(\ 10\ ,\ 7.3402\ )$$

Finalmente calculamos V con el nuevo valor de V_D :

$$V = e^{-.06\frac{1}{2}}\left[(0.76818)0.44994 + (0.23182)\,10\right] = 2{,}5851$$

La gráfica 3.11 ilustra este desarrollo:



Gráfica 3.11

Generalización:

Supongamos que la vida de un put americano sobre un subyacente que no paga dividendos está dividida en N periodos de tamaño δt, entonces su valor cuando el subyacente ha tenido m incrementos hasta el periodo n se define como sigue:

$$V_{U^m D^{n-m}} = \text{máx}\left\{ \; K - S_t U^m D^{n-m} \;, \; e^{-r\delta t}\left[\Pi V_{U^{m+1}D^{n-m}} + (1-\Pi) V_{U^m D^{n-m+1}}\right] \; \right\}$$

$$m = 0, 1, \ldots, N-1, \quad 0 \leq n \leq N-1, \quad \text{y} \quad 0 \leq m \leq n$$

3.5. Trayectoria del valor de una acción

El método recién visto para valuar opciones es una clara evidencia de la forma en que se involucran los seis factores de los que se habló al principio de capítulo; cinco de ellos: el precio actual del subyacente, el strike, la fecha de expiración, la tasa de interés y los dividendos que paga el subyacente están predeterminados; no así la volatilidad en el valor del subyacente.

Para la técnica de árboles binomiales en particular, la volatilidad se ve reflejada en los valores U y D que indican los posibles incrementos y decrementos futuros en el valor del subyacente. La deducción de estos valores se basa en ciertas hipótesis probabilísticas sobre la trayectoria que sigue el valor del subyacente a través del tiempo. Más aún, toda la teoría sobre valuación de opciones está basada en estas hipótesis. A continuación se presentan los conceptos de teoría de probabilidad que permitirán la adecuada construcción de U y D, y en general la construcción de otros métodos para valuar opciones.

3.5.1. Movimiento Browniano

Considérese una caminata aleatoria donde en cada unidad de tiempo es igualmente probable desplazarse una unidad de distancia hacia la izquierda o a la derecha[14]; supongamos que Δt representa las unidades de tiempo — y es de la forma $1/n$, con $n \in \mathbb{N}$—, y Δx representa las unidades de distancia; definamos ahora como $X(t)$ a la posición en el tiempo t. Entonces se puede escribir:

$$X(t) = \Delta x \left(X_1 + \cdots + X_{\frac{t}{\Delta t}} \right) \tag{3.22}$$

donde

$$X_i = \begin{cases} +1 & \text{si} \quad \text{el i-ésimo paso es hacia la derecha} \\ -1 & \text{si} \quad \text{el i-ésimo paso es hacia la izquierda} \end{cases}$$

Supongamos también X_i independientes $\forall\ i \in \mathbb{N}$, tales que:

$$P\{X_i = 1\} = P\{X_i = -1\} = \frac{1}{2}$$

Por definición de esperanza y varianza es inmediato deducir que:

$$E[X_i] = 0,\ Var(X_i) = E\left[X_i^2\right] = 1$$

entonces:

$$E[X(t)] = 0$$

$$Var(X(t)) = (\Delta x)^2 \left[\frac{t}{\Delta t}\right]$$

Ahora considérese que $\Delta x = \sigma\sqrt{\Delta t}$ —esto es posible para alguna σ— entonces las ecuaciones anteriores quedarían:

$$E[X(t)] = 0$$

$$Var(X(t)) = \sigma^2 t$$

Cuando $\frac{t}{\Delta t}$ es suficientemente grande, es decir cuando $\Delta t \longrightarrow 0$, de la ecuación 3.22 y del teorema central del límite[15] se puede concluir que $X(t) \sim$

[14] Esta trayectoria es una *cadena de Markov con* $P_{i,i+1} = \frac{1}{2} = P_{i,i-1}$, $i = 0, \pm 1, \ldots$. Ross desarrolla ampliamente este concepto[12].

[15] Este conocido teorema enuncia básicamente lo siguiente: "Sean $X_1, X_2, X_3, \ldots$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media μ y varianza σ^2 comunes. La distribución de $\frac{X_1+X_2+X_3+\cdots+X_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ tiende a una distribución normal estándar conforme $n \longrightarrow \infty$". Miguel A. García[4] hace un análisis de este teorema en el capítulo sobre teoremas límite.

$N(0, \sigma^2 t)$. Además como $\{X(t), t \geq 0\}$ tiene variaciones independientes entonces, para toda $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, $X(t_n) - X(t_{n-1})$, $X(t_{n-1}) - X(t_{n-2}), \ldots$, $X(t_2) - X(t_1)$, $X(t_1)$ son también independientes.

Una vez bosquejado el proceso anterior, a continuación se define formalmente.

Un proceso estocástico $\{X(t), t \geq 0\}$ [16] *describe un movimiento browniano si:*

- $X(0) = 0$;
- $\{X(t), t \geq 0\}$ *tiene variaciones independientes y estacionarias*[17] *;*
- $\forall\ t > 0,\ X(t) \sim N(0, \sigma^2 t)$

El *movimiento browniano* o *proceso de Wiener* surge de la modelación del desplazamiento de una partícula suspendida en un líquido o un gas, de tal manera que los choques de las moléculas del líquido o gas provocan que la partícula se desplace. Este tipo de movimiento fue estudiado por el botanista Robert Brown, de lo cual se deriva su nombre. En 1905, Albert Einstein lo explicó utilizando la teoría molecular, y en 1928 Norbert Wiener estableció el modelo probabilístico que permite estudiarlo[4]. Aunque el origen de su estudio se da en el campo de la física, este proceso también es uno de los más importantes dentro de la teoría de probabilidad aplicada, en particular se utiliza en áreas como estadística, finanzas, y desde luego física.

Cuando $\sigma = 1$ el proceso se denomina movimiento browniano estándar. Si el proceso $X(t)$ no es estándar, siempre es posible estandarizarlo definiendo $B(t) = \frac{X(t)}{\sigma}$.

3.5.2. Movimiento Browniano con deslizamiento

Un proceso estocástico $\{X(t), t \geq 0\}$ *describe un movimiento browniano con media* μ *y parámetro de varianza* σ^2 *si:*

- $X(0) = 0$;
- $\{X(t), t \geq 0\}$ *tiene variaciones independientes y estacionarias;*
- $\forall\ t > 0,\ X(t) \sim N(\mu t, \sigma^2 t)$

En otras palabras, si $\{B(t), t \geq 0\}$ describe un movimiento browniano estándar, entonces:

$$Y(t) = \sigma B(t) + \mu t$$

describe un movimiento browniano con deslizamiento.

[16] Un proceso estocástico $\{X(t), t \geq 0\}$ es una colección de variables aleatorias donde $\forall\ t \in T$, $X(t)$ es una variable aleatoria. Usualmente t hace referencia al tiempo, por lo que $X(t)$ representa el estado del proceso al tiempo t.

[17] Para el proceso $\{X(t), t \geq 0\}$, la distribución de $X(t+s) - X(t)$ depende únicamente del tamaño del intervalo y no de t.

3.5.3. Movimiento Browniano geométrico

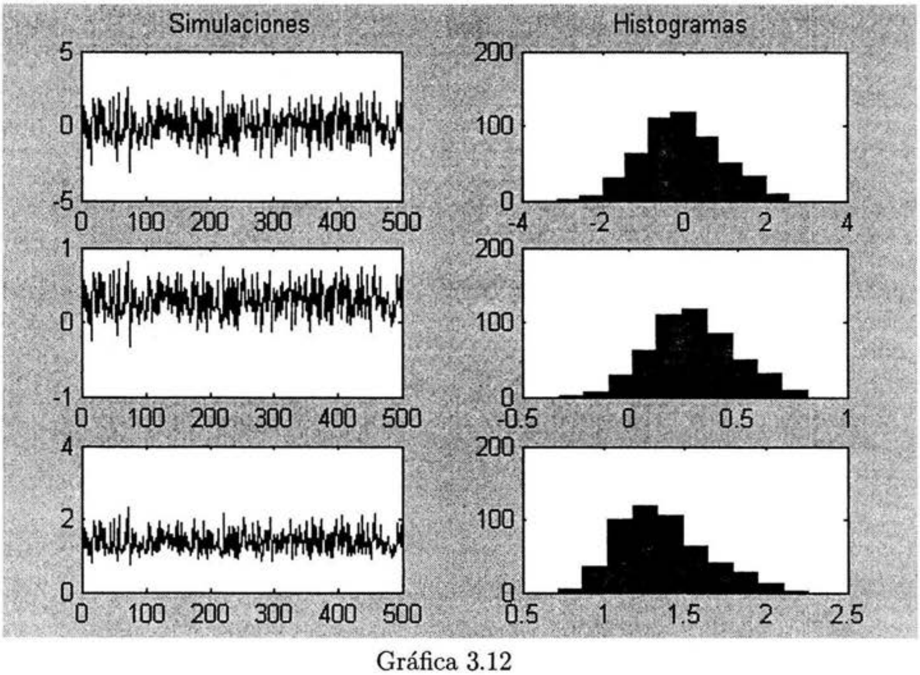
Si el proceso estocástico $\{Y(t), t \geq 0\}$ *describe un movimiento browniano con deslizamiento, con media* μ *y parámetro de varianza* σ^2*, entonces el proceso estocástico* $\{X(t), t \geq 0\}$ *definido por:*

$$X(t) = e^{Y(t)}$$

se denomina movimiento browniano geométrico, y se dice que $\forall\ t > 0$ $X(t) \sim Lognormal(\mu t, \sigma^2 t)$.

Este proceso se emplea justamente para modelar la trayectoria que sigue el precio de una acción a través del tiempo, bajo la suposición de que la tasa de rendimiento sigue una trayectoria independiente e idénticamente distribuida.

La gráfica 3.12 ilustra los tres procesos descritos anteriormente, para 500 simulaciones. En la primera fila se observa una trayectoria browniana estándar, en la segunda una browniana con deslizamiento, para $\mu = .3$ y $\sigma^2 = .04$, y en la última, la correspondiente browniana geométrica. Como se puede apreciar, los histogramas en los dos primeros casos describen distribuciones normales y en el último lognormal.



Gráfica 3.12

A continuación se muestra la consistencia del modelo browniano geométrico en la modelación de la trayectoria del precio de una acción.

Sean X_n = precio del subyacente al tiempo n, y $Y_n = \frac{X_n}{X_{n-1}}$ con $n \geq 1 \Longrightarrow Y_n$

son independientes e identicamente distribuidas al igual que X_n, además:

$$X_n = X_{n-1}Y_n$$

Sustituyendo iterativamente, se obtiene:

$$\begin{aligned} X_n &= Y_n Y_{n-1} X_{n-2} \\ X_n &= Y_n Y_{n-1} Y_{n-2} X_{n-3} \\ &\vdots \\ &= Y_n Y_{n-1} \cdots Y_1 X_0 \end{aligned}$$

Aplicando la función logaritmo de ambos lados:

$$\ln(X_n) = \sum_{i=1}^{n} \ln(Y_i) + \ln(X_0)$$

Donde las variables $\ln(Y_i)$ con $i \geq 1$, son independientes e idénticamente distribuidas por lo que $\{\ln(X_n)\}$ pueden normalizarse y así aproximarse a un proceso browniano con deslizamiento, por lo tanto $\{X_n\}$ se aproximará a su vez a un proceso browniano geométrico.

3.5.4. Modelo Black-Scholes

Una vez que se conoce la expresión que modela la trayectoria de una acción, lo siguiente es determinar a partir de ésta, el valor esperado de la acción en fechas futuras, para después con base en ello calcular el precio esperado de la opción. A continuación se presenta el cálculo del valor esperado de un proceso browniano geométrico $\{X(t)\}$ al tiempo t, dada la historia del proceso hasta el estado s, tal que $s < t$:

$$\begin{aligned} E\left[X(t) \mid X(u), 0 \leq u \leq s\right] &= E\left[e^{Y(t)} \mid Y(u), 0 \leq u \leq s\right] \\ &= E\left[e^{Y(s)+Y(t)-Y(s)} \mid Y(u), 0 \leq u \leq s\right] \\ &= e^{Y(s)} E\left[e^{Y(t)-Y(s)} \mid Y(u), 0 \leq u \leq s\right] \\ &= X(s) E\left[e^{Y(t)-Y(s)}\right] \end{aligned} \tag{3.23}$$

Donde la tercera identidad se cumple puesto que $Y(s)$ ya no es un valor aleatorio, y la última es consecuencia de la independencia en las variaciones del movimiento browniano, dado que $Y(v) \sim N(\mu v, \sigma^2 v)$ entonces $Y(t) - Y(s) \sim N(\mu(t-s), \sigma^2(t-s))$, además se sabe que la función generadora de momentos de una variable W con distribución normal se define:

$$E\left[e^{aW}\right] = e^{aE[W]+a^2 Var(W)/2}$$

Por lo tanto, haciendo $a = 1$ se tiene que:

$$E\left[e^{Y(t)-Y(s)}\right] = e^{\mu(t-s)+(t-s)\sigma^2/2}$$

Finalmente, substituyendo en 3.23 se obtiene:

$$E[X(t) \mid X(u), 0 \leq u \leq s] \quad = X(s)e^{\mu(t-s)+(t-s)\sigma^2/2} = X(s)e^{(t-s)(\mu+\sigma^2/2)} \tag{3.24}$$

Por otro lado, bajo la hipótesis de probabilidad de riesgo neutral, se sabe que si r es la tasa de interés libre de riesgo compuesta continuamente entonces la expresión 3.24 debe ser equivalente a:

$$E[X(t) \mid X(u), 0 \leq u \leq s] \quad = X(s)e^{(t-s)r}$$

De donde se deduce que se deben tener μ y σ tales que:

$$r = \mu + \sigma^2/2 \tag{3.25}$$

Ahora haciendo uso de los resultados anteriores procedamos a calcular el valor de un call europeo sobre acciones que no pagan dividendos. Se tiene que el valor al presente del precio esperado —en ausencia de arbitraje— de un call europeo puede expresarse de la siguiente forma[18]:

$$c = e^{-rt}E\left[(X(t) - K)^+\right]$$

Además, sabemos que para $s < t$ el precio de la acción en t, $X(t)$, será proporcional al precio en s, $X(s)$. Es decir, para $s = 0$, o lo que es lo mismo, para $X(0) = x_0$, se tiene que $X(t) = x_0 e^{Y(t)}$, donde $Y(t) \sim N(\mu t, \sigma^2 t)$ con μ y σ que satisfacen 3.25. Aplicando la definición de esperanza para una función de una variable aleatoria continua, se tiene que:

$$ce^{rt} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x_0 e^Y - K\right)^+ \frac{1}{\sqrt{2\pi t\sigma^2}} e^{-(y-\mu t)^2/2t\sigma^2} dy$$

Como $\left(x_0 e^Y - K\right) > 0 \Rightarrow y > \ln(K/x_0)$ la integral anterior queda:

$$ce^{rt} = \int_{\ln(K/x_0)}^{\infty} \left(x_0 e^Y - K\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi t\sigma^2}} e^{-(y-\mu t)^2/2t\sigma^2} dy$$

Con el fin de obtener este resultado en términos de la función de distribución normal estándar hacemos el siguiente cambio de variable $w = (y - \mu t)/(\sigma\sqrt{t})$:

$$ce^{rt} = x_0 e^{\mu t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^{\infty} e^{\sigma w\sqrt{t}} e^{-w^2/2} dw - K \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^{\infty} e^{-w^2/2} dw$$

Donde:

$$a = \frac{\ln(K/x_0) - \mu t}{\sigma\sqrt{t}}$$

[18] Recuérdese que el pay off de un call europeo con strike K y vencimiento en t se define como $\begin{cases} 0 & si \quad 0 < X(t) < K \\ X(t) - K & si \quad K \leq X(t) \end{cases}$.

El segundo elemento del lado derecho de la igualdad ya es $K\phi(-a)$ donde $\phi(x)$ es la función de distribución normal estándar[19] evaluada en x, y del primer elemento se tiene que:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^{\infty} e^{\sigma w\sqrt{t}}e^{-w^2/2}dw = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\sigma^2 t/2}\int_a^{\infty} e^{-(w-\sigma\sqrt{t^2/2})}dw$$

Donde $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^{\infty} e^{-(w-\sigma\sqrt{t^2/2})}dw$ es la función de distribución normal con media $\sigma\sqrt{t}$ y varianza 1 evaluada el a, de manera que estandarizando obtenemos:

$$P\left\{N(\sigma\sqrt{t},1)\geq a\right\} = P\left\{N(0,1)\geq a-\sigma\sqrt{t}\right\} = P\left\{N(0,1)\leq -(a-\sigma\sqrt{t})\right\}$$

Por lo tanto:

$$ce^{rt} = x_0 e^{\mu t+\sigma^2 t/2}\phi(\sigma\sqrt{t}-a) - K\phi(-a)$$

Usando la expresión 3.25 y haciendo $b=-a$ se obtiene:

$$c = x_0\phi(\sigma\sqrt{t}+b) - Ke^{-rt}\phi(b) \tag{3.26}$$

Donde:

$$b = \frac{rt-\sigma^2 t/2 - \ln(K/x_0)}{\sigma\sqrt{t}} \tag{3.27}$$

Por lo tanto, la expresión 3.26 representa el valor presente —en ausencia de arbitraje— de un call europeo sobre acciones que no pagan dividendos cuyo precio actual es x_0, el strike del contrato es K, la tasa de interés libre de riesgo continua r, y el valor estimado de la varianza[20] σ^2 del precio de las acciones, bajo la hipótesis del movimiento browniano geométrico.

Ejemplo 10 *Determinar el valor de un call a 3 meses con K=\$34, r=.08, sobre un subyacente cuyo valor actual es de \$30 y con parámetro de varianza* $\sigma^2=.04$.

Aplicando 3.26 a los datos anteriores y utilizando las tablas de la distribución normal estándar, se obtiene:

$$b = \frac{(.25)(.08)-(.04)(.25)/2-\ln(34/30)}{.2\sqrt{.25}} \approx -1.10163$$

$$c = 30\phi(-1.0016) - 34e^{-(.08)(.25)}\phi(-1.10163) \approx \$.2383$$

Observése que a partir de la expresión 3.26 y la paridad call-put, es posible obtener el valor de un put europeo sobre acciones que no pagan dividendos. Además, debido a que el valor del call europeo y el americano es el mismo

[19] La función de distribución normal estándar evaluada en z donde $z\geq 0$ se define:

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^z e^{-y^2/2}dy$$

[20] En el Apéndice 3B se describe uno de los procedimientos mediante los cuales es posible la estimación de σ.

sobre acciones que no pagan dividendos, la misma expresión es válida para la valuación de este último. Para el caso de puts americanos sobre acciones que no pagan dividendos, hasta el momento no se conoce una fórmula precisa, por lo que para su valuación es necesario aproximar numéricamente; como por ejemplo, mediante el uso de los árboles binomiales visto en la sección anterior.

Modelo Black-Scholes para opciones sobre acciones que pagan dividendos

En el caso de las opciones europeas, el uso de la expresión 3.26 es prácticamente el mismo, lo que se debe a que el proceso que sigue el precio de la acción continúa siendo un proceso browniano geométrico excepto en los momentos de pago de los dividendos, donde sufre un decremento equivalente al dividendo pagado. Por lo tanto, para calcular el valor de una opción sobre acciones que pagan dividendos de forma discreta basta con sustituir en 3.26 y 3.27 x_0 por $x_0 - \Sigma_i D_i e^{-r(ti-t_0)}$.

Ejemplo 11 Determinar el valor de un call europeo a 6 meses con K=\$34, r=.08, sobre un subyacente cuyo valor actual es de \$30, con parámetro de varianza $\sigma^2 = .04$ *y dos pagos de dividendos de \$1 dentro de 2 y 4 meses.*

$$30 - \left[1e^{-(.08)(.1667)} + 1e^{-(.08)(.333)}\right] = 28.04$$

$$b = \frac{(.5)(.08) - (.04)(.5)/2 - \ln(34/28.04)}{.2\sqrt{.5}} \approx -0.8678$$

$$c = 28.04\phi(-.7264) - 34e^{-(.08)(.5)}\phi(-.8678) \approx \$0.24506$$

Análogamente, cuando los dividendos se pagan de manera continua se sustituye en 3.26 y 3.27 x_0 por $x_0 e^{-qT}$ donde q representa la tasa que cubrirá el pago de los dividendos, por lo que la expresión adecuada para este caso será:

$$c = x_0 e^{-qT}\phi(\sigma\sqrt{t} + b) - Ke^{-rt}\phi(b)$$

Donde:

$$b = \frac{(r-q)t - \sigma^2 t/2 - \ln(K/x_0 e^{-qt})}{\sigma\sqrt{t}}$$

Nótese que para encontrar el valor de b, se considera $r - q$ en lugar de r, debido a que la expresión 3.25 se modifica como sigue:

$$r - q = \mu + \sigma^2/2$$

Del mismo modo, si el subyacente son divisas la sustitución será de x_0 por $x_0 e^{-r_{ex}T}$ donde r_{ex} representa la tasa de interés libre de riesgo otorgada para las divisas[21].

$$c = x_0 e^{-r_{ex}T}\phi(\sigma\sqrt{t} + b) - Ke^{-rt}\phi(b)$$

[21] Véase la sección 2.1.4

Donde:

$$b = \frac{(r - r_{ex})t - \sigma^2 t/2 - \ln(k/x_0 e^{-r_{ex}t})}{\sigma\sqrt{t}}$$

Para determinar el valor de un put europeo en los casos anteriores es válido aplicar la paridad call-put.

En el caso de calls americanos sobre opciones que pagan dividendos de forma discreta es posible demostrar a partir del argumento dado en la secciones 3.3 y 3.1 que el momento óptimo de ejercicio es la fecha anterior al último pago de los dividendos simpre y cuando se cumpla que para D_n el monto del último dividendo y t_n la fecha de pago de este dividendo,

$$D_n > k\left[1 - e^{-r(T-t_n)}\right] \tag{3.28}$$

Por lo que para la valuación de un call americano cuyo subyacente paga dividendos de manera discreta, se aplica este criterio; es decir, en caso de que se satisfaga 3.28, se calcula el valor de la opción aplicando Black-Scholes con nuevos parámetros para x_0 y T, y finalmente se compara este valor con el que se obtendría en caso de no ser conveniente el ejercicio antes del vencimiento y se toma como valor final el más grande de estos[22].

Tanto para calls como para puts americanos sobre subyacentes que pagan dividendos de manera discreta o continua existen métodos numericos diversos que permiten su valuación, uno de ellos es el uso de áboles binomiales, cuya aplicación se analizará el siguiente sección.

3.5.5. Un poco más sobre árboles binomiales

En la sección 3.4 se planteó el proceso de valuación opciones a partir de la trayectoria que sigue el valor del subyacente a través de un árbol binomial, es decir, a partir del conocimiento de los valores U y D. En la realidad no se cuenta con estos valores de forma directa por lo que es necesario calcularlos a partir de un conjunto de valores históricos del precio del valor del subyacente. A continuación se describe como se da este proceso.

La elección de U y D debe satisfacer los parámetros que determinan los cambios en el precio del subyacente, es decir, la esperanza y varianza de los datos históricos de este precio.

Ya se ha visto que por la hipótesis de riesgo neutral y por definición de esperanza:

$$S_t e^{r\delta t} = pS_t U + (1-p)S_t D$$

o

$$e^{r\delta t} = pU + (1-p)D \tag{3.29}$$

[22]Hull[5] en el capítulo 11 analiza propiedades, condiciones y ejemplos de este método de valuación.

La expresión anterior representa el cambio esperado en el precio del subyacente, en un periòdo de tiempo de tamaño δt. Por otro lado sabemos que el precio del subyacente tiene una distribución lognormal por lo que la varianza en el periodo δt del cambio de precio es $\sigma^2\delta t$, y dado que 3.29 representa la esperanza, entonces se tiene[23]:

$$\sigma^2\delta t = pU^2 + (1-p)\,D^2 - [pU + (1-p)\,D]^2 \tag{3.30}$$

Por lo tanto los valores de U y D tienen que satisfacer las ecuaciones 3.29 y 3.30. Debido a que la tasa de interés libre de riesgo r es conocida, y a que es posible obtener el valor de σ^2 para intervalos de tiempo de tamaño δt a partir de los datos históricos[24], en realidad contamos con dos ecuaciones y tres incógnitas, U, D, y p.

Existen dos formas para aproximar los valores de U y D; la primera, propuesta en 1979 por Cox, Ross y Rubistein, consiste en agregar como tercera condición que $D = \frac{1}{U}$, y la segunda únicamente asigna el valor fijo de $p = \frac{1}{2}$[25].

Optando por la opción de tomar $p = \frac{1}{2}$, la ecuación 3.29 quedaría:

$$2e^{r\delta t} = U + D$$

Substituyendo en 3.30 se obtiene:

$$e^{2r\delta t} - UD = \sigma^2\delta t$$

Aproximado con series de Taylor, una solución a esta ecuación[26] es:

$$U = e^{\left(r-\sigma^2/2\right)\delta t+\sigma\sqrt{\delta t}} \tag{3.31}$$

$$D = e^{\left(r-\sigma^2/2\right)\delta t-\sigma\sqrt{\delta t}} \tag{3.32}$$

Las expresiones 3.31 y 3.32 también permiten simular la trayectoria de un subyacente que pague dividendos de manera continua a una tasa q; en estos casos la variable r de estas expresiones se convierte en $r - q$. Por lo tanto, a partir de estas simulaciones será posible calcular el valor de opciones europeas y americanas sobre subyacentes que paguen dividendos a una tasa q, y además sobre índices, divisas y futuros.

Ejemplo 12 *Considérese un call americano a 9 meses sobre la libra esterlina. El tipo de cambio actual de esta divisa es de \$18.70, el strike es de \$18.75, la tasa de interés libre de riesgo nacional es de .06, la tasa de interés libre de riesgo inglesa es de .08 y la volatilidad en el tipo de cambio es de 4 % anual. Calcular el valor de la opción a partir de un árbol binomial de 2 etapas.*

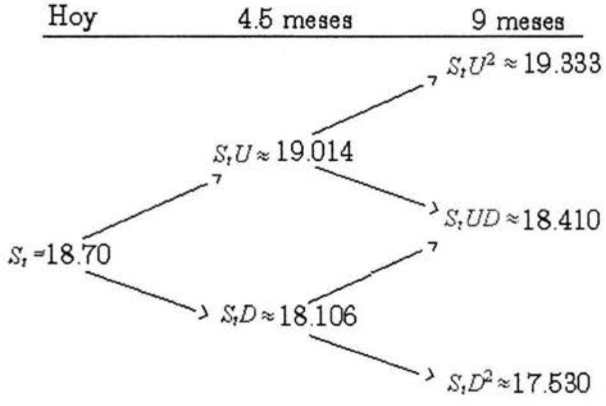
[23] Recuérdese que la varianza de x se puede definir como $E(x^2) - E^2(x)$.

[24] Véase el apéndice 3A.

[25] Hull[5] en el capítulo 16 plantea algunas de sus diferencias.

[26] Al ignorar los potencias mayores a 1 de δt ya que cuando $\delta t \longrightarrow 0$, estos valores se hacen "muy pequeños". Véase la gráfica del polinomio de Taylor de grado 1 evaluado en cero.

En este caso se tiene que $r = .06$, $r_{ext} = .08$, $\sigma = .04$, $K=\$18.75$, $S_0 = \$18.70$, y $\delta t = \frac{1}{2}\frac{3}{4} = \frac{3}{8}$, sustituyendo estos datos en las expresiones 3.31 y 3.32 se obtiene la gráfica 3.13:

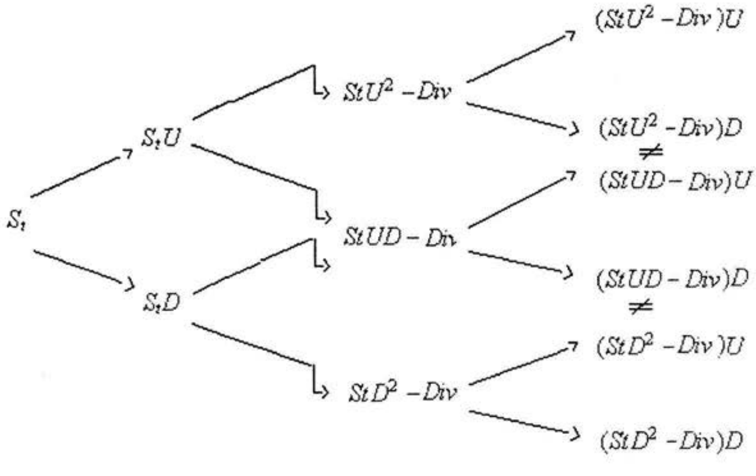


$$U \approx e^{(.06-.08-\frac{.0016}{2}).375+.04\sqrt{.375}} = 1.0168$$
$$D \approx e^{(.06-.08-\frac{.0016}{2}).375-.04\sqrt{.375}} = 0.96822$$

Gráfica 3.13

A partir del árbol anterior se aplica el proceso visto en la sección 3.4, de donde se obtiene que el valor del call es $0.1398.

Para opciones europeas y americanas sobre subyacentes que pagan dividendos de manera discreta no es posible aplicar directamente el proceso visto en la sección 3.4, debido a que al momento de calcular la trayectoria del precio del subyacente, si consideramos simplemente la disminución del precio del subyacente en los periodos inmediatos posteriores al pago de los dividendos, los nodos del periodo siguiente no serían coincidentes. La gráfica 3.14 ilustra esta situación para el caso de un árbol de tres periodos, donde el dividendo se paga en alguna fecha correspondiente al segundo periodo.

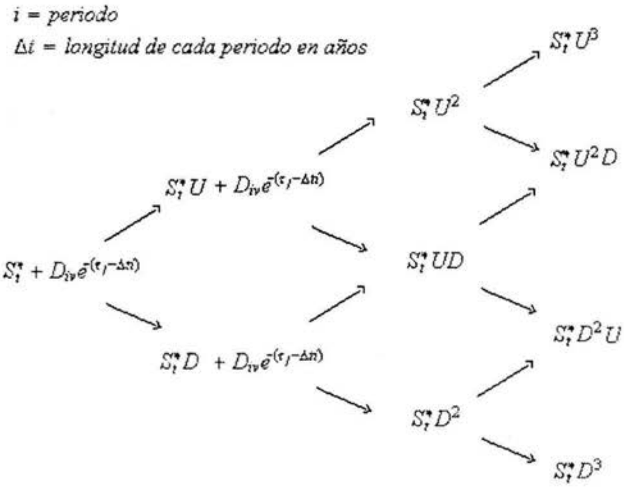


Gráfica 3.14

Matemáticamente el proceso anterior no es válido ya que U y D están definidos a partir de premisas probabilísticas para el precio del subyacente y, cuando el subyacente paga dividendos, sólo una parte de S_t es aleatoria, $S_t - D_{iv}e^{-r\tau j}$, donde τ_j es el tiempo restante al pago del dividendo j[27]. En estos casos, lo adecuado es restar al inicio del primer periodo el valor presente del dividendo y generar los incrementos a partir del valor resultante, para posteriormente sumar en cada uno de los periodos menores al correspondiente del pago del dividendo, el valor del dividendo en ese momento[28], es decir, en lugar de tomar como precio inicial S_t se toma un precio $S_t^* = S_t - \Sigma_i D_{iv}e^{-r\tau_j}$, para el siguiente periodo se tiene S_t^*U y S_t^*D respectivamente, y así sucesivamente; depués, como arriba se menciona, se suma a cada uno de los valores correspondientes a los periodos menores al periodo del pago del dividendo, el valor del dividendo en cada uno de estos periodos. La gráfica 3.15 ilustra este proceso para el caso particular antes mencionado.

[27] Ya que el valor de los dividendos es conocido.

[28] Este cálculo se requiere debido a que el dividendo en estos periodos no ha sido pagado.



Gráfica 3.15

Una vez que se obtiene la trayectoria del valor del subyacente, el método de valuación es el mismo que se planteó en la sección 3.4.

3.5.6. El modelo y la realidad

La premisa a partir de la cual se desarrollan los métodos de valuación de opciones, está basada en la idea de que la trayectoria del precio del subyacente sigue un proceso browniano geométrico. Lo anterior implica, entre otras cosas, que las variaciones futuras del precio del subyacente son independientes de los movimientos pasados. La validez de este argumento es consecuencia de la hipótesis del mercado eficiente, la cual afirma que el precio actual de un bien financiero refleja toda la información disponible hasta el momento —incluyendo los precios anteriores— relativa a este bien. Sin embargo, los críticos de esta hipótesis argumentan que esta información es absorbida de diversas maneras por diferentes inversionistas, por lo que los movimientos pasados de los precios anteriores de un bien reflejan una información que no ha sido reconocida de manera universal y que por lo tanto esto afectará las variaciones futuras, contradiciendo así, la hipótesis de que el precio del bien siga un proceso browniano geométrico.

A pesar de lo anterior, el proceso browniano geométrico es la modelación la más frecuentemente usada. En los casos donde los datos se adecúan a las condiciones, la aplicación del modelo se hace de manera directa —tal como se ha presentado—, y cuando no es así, la mayoría de las veces se sigue trabajando con el modelo haciéndole las adecuaciones necesarias.

Por lo anterior, siempre que sea posible se recomienda un estudio previo de los datos, antes de aplicar un método de valuación. En el apéndice 3A se implementa un método de valuación mediante simulación de Monte Carlo, el cual suele ser utilizado tanto cuando los datos satisfacen las condiciones del modelo browniano geométrico y cuando no es así, efectuando un ligero cambio entre un caso y otro.

Ross[13] analiza en el capítulo 10, los precios del petróleo en el periodo de tiempo comprendido entre 3 de enero de 1995 al 19 de noviembre de 1997. En dicho análisis se muestra, mediante técnicas estadisticas, que los datos no satisfacen las condiciones del modelo, por lo que propone un método de valuación alterno.

En el presente trabajo se han descrito los tipos básicos de opciones conocidos como opciones "vainilla". Sin embargo existe toda una familia de opciones con características algo más complejas —negociadas principalmente en el mercado *over-the-counter*— que han sido diseñadas para cubrir riesgos más complicados, éstas reciben el nombre genérico de "opciones exóticas". La teoría detrás de la valuación de estas opciones resulta en cierta forma una extensión de las ideas que fundamentan la valuación de las opciones vainilla; sin embargo en su estudio se replantean algunas condiciones que requieren un análisis profundo y particular, por lo cual se invita al lector interesado en estos tópicos a recurrir a la bibliografia citada.

En la actualidad existe una amplia gama de métodos numéricos para la valuación de cualquier tipo de opciones, los cuales buscan ajustarse de la manera más precisa a las condiciones reales, como podrían ser: las características particulares de los datos, el tipo de la opción y algunas veces el tiempo y los recursos materiales que requiere cada método de valuación. Los árboles binomiales y la simulación de Monte Carlo son un ejemplo de éstos, una implementación de ambos métodos se encuentra en el apéndice 3A.

3.6. Apéndice 3A

3.6.1. movimiento_browniano

Descripción

Muestra en una ventana las gráficas de las trayectorias brownianas estándar, generalizada y geométrica con sus respectivos histogramas, a partir del número de simulaciones y parámetros de media y varianza (para las trayectorias brownianas con deslizamiento y geométrica) ingresados por el usuario.

Código

```
function movimiento_browniano

%Solicitud y asignacion de parametros
a=input('Numero de simulaciones: ');
b=input('Media: ');
c=input('Varianza: ');
if ( c<0 )
 error('Valor de varianza invalido')
end

%Simulacion de la trayectoria de X, con trayectoria normal estan-
%dar; y calculo de las variables Y y Z, con trayectorias brownia-
%nas con deslizamiento y geometrica.
x=randn(a,1);
y=((sqrt(c))*x)+b;
z=exp(y);

%Graficacion de X, Y, y Z y sus histogramas.
subplot(3,2,1); plot(x)
title('Simulaciones')
ylabel(' Estandar ')
subplot(3,2,3); plot(y)
ylabel(' Con deslizamiento')
subplot(3,2,5); plot(z)
ylabel(' Geometrico')
subplot(3,2,2); hist(x)
title('Histogramas')
subplot(3,2,4); hist(y)
subplot(3,2,6); hist(z)
```

Ejemplo

Para 500 simulaciones, con parámetros $\mu = .3$, y $\sigma^2 = .04$.

Llamada

```
>> movimiento_browniano
```

Entrada 1

```
Numero de simulaciones:    500
```

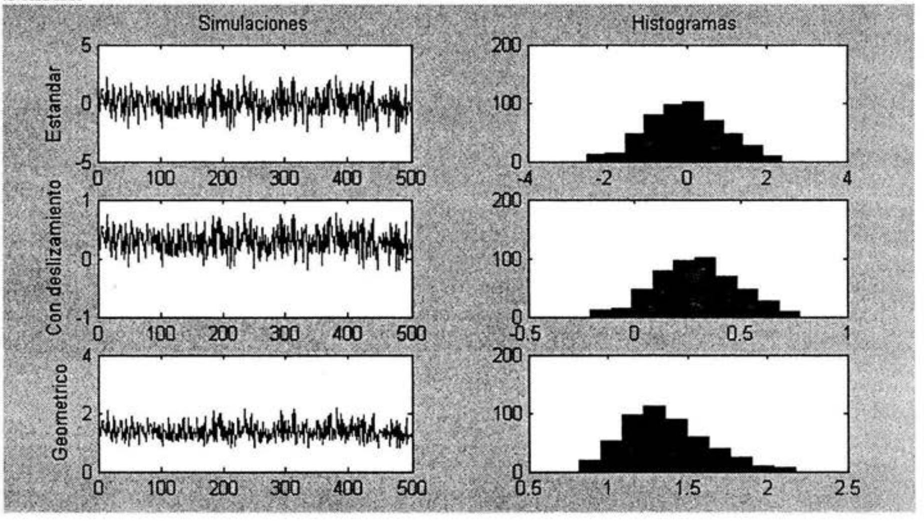
Entrada 2

```
Media:    .3
```

Entrada 3

```
Varianza: .04
```

Salida



3.6.2. arboles_binomiales

Descripción

Calcula el valor de una opción mediante el método de árboles binomiales. Para periodos menores o iguales a 9 grafica las trayectorias del precio del subyacente y del valor de la opción.

Código

```
function arboles_binomiales
%Solicitud y asignacion de parametros generales
t_c = menu ('Selecciona el tipo de contrato','Call Americano'
,'Call Europeo', 'Put Americano','Put Europeo');
t_s = menu ('Selecciona el tipo de subyacente','Bienes de
inversion que no pagan dividendos','Bienes de inversion que
pagan dividendos en forma continua', 'Divisas');
So = input('Precio actual del subyacente (en pesos):      ');
r = input('Tasa de interes libre de riesgo (continua y en deci-
males):   ');
t = input('Tiempo restante a la maduracion del contrato (en
anios):      ');
k = input('Strike (en pesos):      ');
v = input('Varianza:        ');
n = input('Numero de etapas:      ');

%Calculo de U y D para cada uno de los diferentes tipos de
%subyacentes
switch (t_s)

    case 1

        u = exp( ((r - v/2) * (t/n)) + (sqrt(v*(t/n))) );
        d = exp( ((r - v/2) * (t/n)) - (sqrt(v*(t/n))) );

    case 2

        q = input('Tasa a la que se pagan los dividendos:
  ');
        u = exp( ((r - q - v/2) * (t/n)) + (sqrt(v*(t/n))) );
        d = exp( ((r - q - v/2) * (t/n)) - (sqrt(v*(t/n))) );

    case 3
        q = input('Tasa libre de riesgo extranjera:      ');
        u = exp( ((r - q - v/2) * (t/n)) + (sqrt(v*(t/n))) );
        d = exp( ((r - q - v/2) * (t/n)) - (sqrt(v*(t/n))) );
end
```

```
%Construccion del arbol de la trayectoria de valor del subyacente

m = (2*n) + 1 ;
for j=1:n+1
    for i=1:m
        if ( j == 1 )
            if ( i == (m + 1) / 2)
                St(i,j) = So;
            else
                St(i,j)=0;
            end
        end

        if ( j > 1 )
            if ( i <= ((m + 1) / 2) )
                St(i,j) = St(i + 1 , j - 1) * u;
            else
                St(i,j) = St(i - 1 , j - 1) * d;
            end
        end
    end
end

% Matriz de la trayectoria del valor del subyacente
if n < 10
%Matriz de la trayectoria del valor de la opcion
St
else
end


%Construccion del arbol de la trayectoria de valor de la opcion
p = .5;
q = .5;
switch (t_c)
    case 1
        for j= n+1:-1:1
            for i= 1:m
                if ( j == n+1 && St(i,j)~= 0)
                    V( i, j ) = max( St(i,j) - k , 0 );
                elseif ( j < n+1 && i < (m-1))
                        if ( St(i+1,j)~= 0 )
                         V( i+1 , j ) = max((exp (-r*(t/n)) ) *
((V(i,j+1)*p) + (V(i+2,j+1)*q) ), St(i+1,j) - k );
                    end
```

```
            end
        end
    end
case 2
    for j= n+1:-1:1
        for i= 1:m
            if ( j == n+1 )
                V( i, j ) = max( St(i,j) - k , 0 );
            elseif ( j < n+1 && i < (m-1))
                if (  St(i+1,j)~= 0 )
                    V( i+1 , j ) = (exp (-r*(t/n)) ) *
((V(i,j+1)*p) + (V(i+2,j+1)*q) );
                end
            end
        end
    end

case 3
    for j= n+1:-1:1
        for i= 1:m
            if ( j == n+1 && St(i,j)~= 0 )
                V( i, j ) = max( k - St(i,j) , 0 );
            elseif ( j < n+1  && i < (m-1))
                if ( St(i+1,j)~= 0 )
                    V( i+1 , j ) = max((exp (-r*(t/n)) ) *
((V(i,j+1)*p) + (V(i+2,j+1)*q)) , k - St(i+1,j));
                end
            end
        end
    end
case 4
    for j= n+1:-1:1
        for i= 1:m
            if ( j == n+1 && St(i,j)~= 0 )
                V( i, j ) = max( k - St(i,j) , 0 );
            elseif ( j < n+1 && i < (m-1) )
                if (  St(i+1,j)~= 0 )
                    V( i+1 , j ) = (exp (-r*(t/n)) ) *
((V(i,j+1)*p) + (V(i+2,j+1)*q) );
                end
            end
        end
    end

end
if n < 10
```

```
%Matriz de la trayectoria del valor de la opcion
V
else
%Valor de la opcion
Valor_del_contrato = V( (m+1)/2 , 1 )
end
```

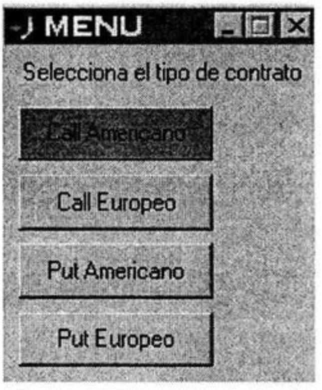
Ejemplo

Para un call americano a 9 meses divididos en 9 periodos, sobre una divisa cuyo precio actual es de \$18.7, la tasa nacional libre de riesgo capitalizable continuamente es de 6 %, la tasa extranjera es de 8 %, con un strike de \$18.75, y parámetro de varianza de .0016.

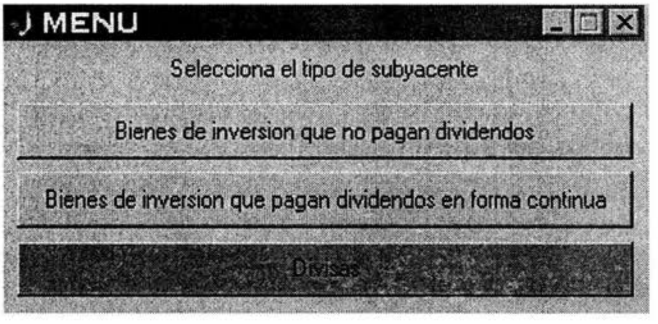
Llamada

```
>> arboles_binomiales
```

Entrada 1



Entrada 2



Entrada 3

Precio actual del subyacente (en pesos):   18.70

Entrada 4

Tasa de interes libre de riesgo (continua y en decimales): .06

Entrada 5

Tiempo restante a la maduracion del contrato (en anios):   9/12

Entrada 6

Strike (en pesos):   18.75

Entrada 7

Varianza: .0016

Entrada 8

Numero de etapas: 8

Entrada 9

Tasa libre de riesgo extranjera: .08

Salida

```
St =

         0         0         0         0         0         0         0         0   20.3057
         0         0         0         0         0         0         0   20.0977         0
         0         0         0         0         0         0   19.8918         0   19.8144
         0         0         0         0         0   19.6880         0   19.6114         0
         0         0         0         0   19.4863         0   19.4105         0   19.3349
         0         0         0   19.2867         0   19.2116         0   19.1369         0
         0         0   19.0891         0   19.0148         0   18.9408         0   18.8671
         0   18.8936         0   18.8200         0   18.7468         0   18.6738         0
   18.7000         0   18.6272         0   18.5547         0   18.4825         0   18.4105
         0   18.4364         0   18.3646         0   18.2931         0   18.2219         0
         0         0   18.1765         0   18.1057         0   18.0353         0   17.9651
         0         0         0   17.9202         0   17.8505         0   17.7810         0
         0         0         0         0   17.6676         0   17.5989         0   17.5304
         0         0         0         0         0   17.4186         0   17.3508         0
         0         0         0         0         0         0   17.1730         0   17.1062
         0         0         0         0         0         0         0   16.9309         0
         0         0         0         0         0         0         0         0   16.6922
```

```
V =

         0         0         0         0         0         0         0         0    1.5557
         0         0         0         0         0         0         0    1.3477         0
         0         0         0         0         0         0    1.1418         0    1.0644
         0         0         0         0         0    0.9380         0    0.8614         0
         0         0         0         0    0.7363         0    0.6605         0    0.5849
         0         0         0    0.5367         0    0.4616         0    0.3869         0
         0         0    0.3559         0    0.2914         0    0.2213         0    0.1171
         0    0.2306         0    0.1792         0    0.1244         0    0.0582         0
    0.1464         0    0.1079         0    0.0690         0    0.0289         0         0
         0    0.0639         0    0.0379         0    0.0144         0         0         0
         0         0    0.0206         0    0.0072         0         0         0         0
         0         0         0    0.0036         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0         0         0         0
```

3.6.3. valuacion_markov

Descripción

Calcula el valor de una opción mediante la simualción del precio del subyacente, ésto mediante el siguiente proceso:

1. Simula m trayectorias de S_t a través de n periodos hasta obtener S_T.
2. Calcula el *payoff* para cada una de las S_T.
3. Calcula el promedio de los *payoffs* .
4. Calcula el valor presente de este promedio.

Código

```
function valuacion_markov

%Solicitud y asignacion de parametros
t_c = menu ('Selecciona el tipo de contrato','Call Europeo'
,'Put Europeo');
k = input ('Strike:      ');
T = input('Tiempo restante a la maduracion del contrato
(en anios):       ');
So = input('Valor actual del subyacente:      ');
m =  input ('Numero de simulaciones:      ');
n = input('Numero de particiones del tiempo total:       ');
a = input('Valor de Miu:     ');
b = input('Valor de Sigma:     ');
if ( b<0 )
    error('Valor de varianza invalido')
end

med_y = a*(T/n);
desv_y = b*sqrt(T/n);
r = a + (b^2)/2;

h = waitbar(0,'Por favor espere...');
for i = 1:m
    St = So;
    %Simulacion de la trayectoria del precio del subyacente
    for j = 1:n
        y = normrnd(med_y ,desv_y);
        St = St*exp(y);
    end

    %Calculo de payoff para cada simulacion
    switch t_c
```

```
        case 1
            P(i) = max( St - k,0);
        case 2
            P(i) = max( k - St, 0);
    end

    waitbar(i/m)
end
close(h)

%Media de los payoffs
m_P = mean (P);

%Valor presente del payoff estimado
Valor_estimado_del_contrato = exp(-r*T)*m_P
```

Ejemplo

Para un call europeo a 2 años divididos en 100 periodos, sobre un subyacente cuyo precio actual es de \$45, con un strike de \$50, parámetros de μ y σ iguales a .03 y.08, respectivamente; el cálculo se realiza con 1000 simulaciones.

Entrada 1

Entrada 2

```
Strike: 50
```

Entrada 3

```
Tiempo restante a la maduracion del contrato (en anios): 2
```

Entrada 4

```
Valor actual del subyacente:     45
```

Entrada 5

```
Numero de simulaciones:     1000
```

Entrada 6

```
Numero de particiones del tiempo total:    100
```

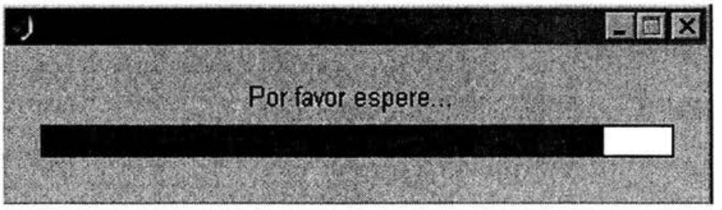
Entrada 7

```
Valor de Miu:    .03
```

Entrada 8

```
Valor de Sigma:    .08
```

Salida




```
Valor_estimado_del_contrato =

    1.4241
```

3.7. Apéndice 3B

3.7.1. Estimación de σ

Para estimar la volatilidad del precio de una acción en un periodo de tiempo, suele observarse el precio de la acción en cuestión durante intervalos de tiempo fijos, estos pueden ser: días, semanas o años. A continuación se muestra la deducción de este procedimiento.

En general se sabe que si X_i es el precio de la acción en el periodo i se tiene que:

$$X_i = X_{i-1}e^{Y_i}$$

$$\Longrightarrow Y_i = \ln\left(\frac{X_i}{X_{i-1}}\right)$$

Donde Y_i es el rendimiento continuo en un periodo —no anualizado—, por lo que si se cuenta con n observaciones consecutivas del precio de la acción para algunos intervalos de tamaño δ, medida en las unidades de la varianza buscada —años por ejemplo—, donde X_i es el precio de la acción en la $i-$*ésima* observación con $i = 1, 2, \ldots n$; un estimador insesgado para la varianza anual del rendimiento es[29]:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y}) \tag{3.33}$$

Donde $\overline{Y}$ es la media de Y.

En la sección 3.5.3 se vio que para $0 \leq s \leq t$ si $X(s) = x_0$ entonces $X(t) = x_0e^{Y(t-s)}$ con $Y(t-s) \sim N(\mu(t-s), \sigma^2(t-s))$, por lo tanto para $t - s = \delta$ se tiene que S^2 es un estimador de $\sigma^2\delta$ —varianza del rendimiento del precio de la acción—, es decir:

$$\widehat{\sigma^2}\delta = S^2$$

$$\Longrightarrow \widehat{\sigma^2} = \frac{S^2}{\delta} \tag{3.34}$$

Ejemplo *Supongamos que se desea estimar la varianza anual del precio de una acción, para lo cual, se cuenta con los precios de ésta durante los últimos 20 días*[30] *listados en la siguiente tabla:*

[29]DeGroot[2] muestra que para $X_1, \ldots X_n$ muestra aleatoria de cualquier distribución, con media y varianza común pero desconocidas, S^2 es un estimador insesgado de σ^2.

[30]Como es de esperarse, entre mayor sea el número de datos de los que se disponga, mejor será la estimación de la varianza, sin embargo, cabe mencionar que no todos los datos tienen la misma relevancia, es decir, serán más representativos de la varianza actual los datos más recientes. En la práctica suelen considerarse datos entre los últimos 90 y 180 días.

Día	*Precio*	$\frac{X_i}{X_{i-1}}$	Y_i
1	20.65		
2	20.60	0.9976	-0.0024
3	20.58	0.9990	-0.0010
4	20.62	1.0019	0.0019
5	20.50	0.9942	-0.0058
6	20.50	1.0000	0.0000
7	20.45	0.9976	-0.0024
8	20.45	1.0000	0.0000
9	20.47	1.0010	0.0010
10	20.39	0.9961	-0.0039
11	20.45	1.0029	0.0029
12	20.53	1.0039	0.0039
13	20.48	0.9976	-0.0024
14	20.52	1.0020	0.0020
15	20.54	1.0010	0.0010
16	20.44	0.9951	-0.0049
17	20.40	0.9980	-0.0020
18	20.53	1.0064	0.0064
19	20.56	1.0015	0.0015
20	20.54	0.9990	-0.0010

En este caso como los datos están dados en intervalos de un día[31] $\delta = 1/252$, aplicando las expresiones 3.33 y 3.34 a los datos anteriores se obtiene:

$$\begin{aligned} S &= 0.0031 \\ \Longrightarrow \widehat{\sigma} &\approx 0.049 \end{aligned}$$

Por lo tanto la volatilidad estimada del precio de la acción[32] es aproximadamente 0.049 .

[31] Se consideran únicamente los días de negociación en un año, que son 252.

[32] En este proceso de estimación se considera que el subyacente no paga dividendos. En caso de que esto no se cumpliese, en teoría habría que hacer algunas modificaciones al proceso; sin embargo en la práctica, debido a la fuerte influencia los impuestos sobre los dividendos, los datos arrojados durante estos periodos, suelen ser descartados.

Bibliografía

[1] Bernstein, Peter, L."Against the Gods: The remarkable story of risk". John Wiley & Sons, Inc. 1996

[2] DeGroot, Morris H. Probability and Statistics, second edition, Addison-Wesley Publishing Company, 1989.

[3] García A, Miguel A. Introducción a la teoría de la probabilidad, Vol. 1, aún no publicado.

[4] García A, Miguel A. Introducción a la teoría de la probabilidad, Vol. 2, aún no publicado.

[5] Hull, Jonh C. Options, futures, & other derivatives, fourth edition, Prentice-Hall, 1999

[6] Jorion, Philippe. "Value at risk: the new benchmark for managing financial risk". New York: MacGraw-Hill, 1995

[7] Página electrónica del Mercado Mexicano de Derivados: http://www.mexder.com.mx/MEX/anteceden.html

[8] Página electrónica del Premio Nobel: http://www.nobel.se/economics/laureates/1997/

[9] Página electrónica del New York Mercantil Exchange: http://www.nymex.com

[10] Rawnsley, J. Total Risk: Nick Leeson and the Fall of Barings Bank, New York: Harper, 1995

[11] Rodríguez de Castro, J. Introducción al análisis de productos financieros derivados, Limusa 1995.

[12] Ross, M. Sheldon. Introduction to Probability Models, seventh edition, Harcourt Academic Press, 2000.

[13] Ross, M. Sheldon. An Introduction to Mathematical Finance: Options and other topics, Cambridge University Press, 1999.

[14] Wilmott, Paul et al. Option Pricing, fifth edition, Oxford Financial Press, 1997.