



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

INSTITUTO DE FÍSICA

**MODELOS BOSÓN-FERMIÓN DE LA
SUPERCONDUCTIVIDAD**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

DOCTOR EN CIENCIAS

PRESENTA:

FRANCISCO JAVIER SEVILLA PÉREZ

DIRECTORES DE TESIS: DR. MIGUEL ÁNGEL SOLÍS ATALA
DR. MANUEL DE LLANO DE LA GARZA

COMITÉ TUTORAL: DR. MIGUEL ÁNGEL SOLÍS ATALA
DR. MANUEL DE LLANO DE LA GARZA
DR. MAURICIO FORTES BESPROSVANI

pcf

posgrado en ciencias físicas
u n a m

MÉXICO D.F. NOVIEMBRE DE 2004

pcf

posgrado en ciencias físicas
u n a m



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Contenido

Agradecimientos	iii
Lista de publicaciones	iv
Resumen	v
1 Introducción	1
2 La Teoría BCS	8
2.1 La concepción de apareamiento	8
2.2 El estado base superconductor	9
2.3 La ecuación de la brecha de energía	11
2.4 Limitaciones	13
3 Condensación Bose-Einstein	15
3.1 Temperatura crítica de condensación Bose-Einstein para un gas de bosones con relación de dispersión $\mathcal{E}_K = C_s K^s$	15
4 BCS-Bose “crossover”	18
4.1 El formalismo BCS-Bose “crossover”	19
4.2 Modelos de interacción electrónica	21
4.2.1 Interacción BCS	21
4.2.2 Interacción de Nozières & Schmitt-Rink	25
4.3 Discusión	34
5 El Modelo Completo Bosón-Fermión de la Superconductividad	37
5.1 Descripción del Modelo Completo Bosón-Fermión	37
5.2 El CBFM en 3D	49
5.2.1 Relación de dispersión cuadrática	49
5.2.2 Relación de dispersión lineal	54
5.3 El CBFM en 2D	55
5.3.1 Relación de dispersión lineal	55
5.3.2 La fase pura condensada BE de 2e-CPs	58
5.3.3 La fase pura condensada BE de 2h-CPs	59
5.4 2D y la relación de dispersión cuadrática	61
5.4.1 La fase pura condensada BE de 2e-CP’s	61
6 Conclusiones	63

Apéndices

A	La ecuación de Schrödinger de dos cuerpos y el problema de Cooper	65
A.1	Interacción $\delta(\mathbf{r})$ atractiva en 2D	67
A.1.1	La ecuación del “gap” en 2D con interacción $\delta(\mathbf{r})$	68
A.2	El problema de Cooper	69
B	Pares de Cooper y pares de BCS	72
C	Deducción heurística de la ecuación del gap de BCS a $T = 0$	77
D	Límite de todos los electrones apareados	80
E	Gas ideal relativista de bosones	83
E.1	Condensación Bose-Einstein (BEC)	83
E.1.1	El límite no-relativista (NR)	84
E.1.2	El límite ultra-relativista (UR) sin antibosones	84
E.2	Los antibosones incluidos	85
E.2.1	Límite no-relativista (NR)	87
E.2.2	Límite ultra-relativista con antibosones	88
F	Algunos resultados matemáticos	92
F.1	Cálculo de la integral $\int_0^y dx (\tanh x)/x$	92
F.2	Integral de volumen sobre la esfera d -dimensional	94
F.3	Integral de Bose	95
F.4	Diagonalización del operador $\hat{H} - \mu\hat{N}$	96
G	La relación de dispersión de 2e-CP’s y 2h-CP’s	99
G.1	Tratamiento Bethe-Salpeter del problema de Cooper	100
G.2	Apareamiento de Cooper generalizado	103
	Lista de Figuras	106
	Lista de Tablas	110
	Referencias	111

Agradecimientos

Quiero agradecer a los Drs. Miguel Ángel Solís Atala y Manuel de Llano de la Garza, la oportunidad de trabajar bajo su dirección, la confianza y apoyo recibido desde 1999 cuando inicié con ellos la realización de mi tesis de licenciatura, la dedicación, motivación y su disposición académica tan profesional que los distingue. Al Dr. Mauricio Fortes, que como miembro de mi comité tutorial, estuvo siempre pendiente de mi desempeño académico.

Al Jurado integrado por: Dr. Manuel de Llano, Dr. Oracio Navarro y Dr. Chumin Wang del IIM-UNAM; Dr. Miguel Angel Solís del IF-UNAM; Dra. Andrea Aburto de la FC-UNAM; Dr. Rafael Baquero del CINVESTAV-IPN y Dr. Salvador Cruz de la UAM-I, por sus comentarios, sugerencias y críticas (siempre positivas) que han enriquecido la presentación final de este trabajo.

Al Posgrado en Ciencias Físicas, UNAM.

Al Instituto de Física, UNAM, que como estudiante asociado me permitió disponer de sus instalaciones y servicios durante la elaboración de esta tesis.

Quiero agradecer también a la DGEP, UNAM, la beca de Doctorado que disfruté durante 2 años y medio, así como el complemento de beca durante los siguientes 2 años. Al CONACyT agradezco la beca de Doctorado que disfruté un año y medio y la beca de tesis de Doctorado que disfruté seis meses.

Lista de publicaciones

Durante mi estancia en el Instituto de Física como estudiante de Doctorado del Posgrado en Ciencias Físicas, UNAM, he publicado los siguientes artículos:

- “Cooper pairs as bosons,” M. de Llano, F.J. Sevilla, S. Tapia & J.R. Clem, enviado al Phys. Rev. Lett. 23 de abril de 2004.
1. “Robust Statistical Mechanism for Phonon-driven High- T_c Superconductivity” M. de Llano, F.J. Sevilla, M.A. Solís & J.J. Valencia, Int. J. Mod. Phys. B (en prensa).
 2. “High T_c 's from BCS and BEC Unification” J. Batle, M. Casas, M. Fortes, M. de Llano & F.J. Sevilla, Physica C, **408-410C** 257 (2004).
 3. “Generalized BCS-Bose crossover picture of superconductivity” J. Batle, M. Casas, M. Fortes, M. de Llano & F.J. Sevilla, Int. J. Mod. Phys. B **17**, 3271 (2003).
 4. “Harmonically Trapped Quantum Gases” M. Grether, M. Fortes, M. de Llano, J.L. del Río, F.J. Sevilla, M.A. Solís & A.A. Valladares, Eur. Phys. J. D **23/1**, 117 (2003).
 5. “BCS and BEC finally unified: a brief review” J. Batle, M. Casas, M. Fortes, M. de Llano, O. Rojo, F.J. Sevilla, M.A. Solís & V.V. Tolmachev, Cond. Matt. Theories **18**, 111 (2003). <http://arXiv.org/abs/cond-mat/0211456>.
 6. “BCS and Bose-Einstein condensation in superconductivity and superfluidity” M. Grether, M. Fortes, M. de Llano, O. Rojo, A. Salazar, F.J. Sevilla, M.A. Solís, & A.A. Valladares, Cond. Matt. Theories **16**, 305 (2001).
 7. “Free and Trapped Fermi Gases: Some Novel Results” M. Grether, M. Fortes, M. de Llano, F.J. Sevilla, M.A. Solís, S. Tapia, V.V. Tolmachev & A.A. Valladares, Cond. Matt. Theories **15**, 425 (2000).
 8. “Low-dimensional BEC” F.J. Sevilla, M. Grether, M. Fortes, M.A. Solís, M. de Llano, A.A. Valladares & O. Rojo, J. Low Temp. Phys. **121**, 281 (2000).

Resumen

El propósito de este trabajo es mostrar cómo, sin abandonar el mecanismo dinámico de formación de pares de Cooper electrón-fonón, es posible obtener temperaturas críticas de transición superconductoras sustancialmente más altas que las que predice la teoría BCS y su extensión la teoría BCS-Bose "crossover." Esto es con el fin de explicar las altas temperaturas críticas observadas en los sistemas cuasi-bidimensionales llamados cupratos y de conocer las características de los posibles superconductores a temperatura ambiente. Primero se muestra que la teoría BCS y la BCS-Bose crossover," están restringidas, para valores físicamente aceptables del parámetro de acoplamiento electrón-fonón, a la simetría perfecta de igual número de pares de Cooper de agujeros que de pares de Cooper de partículas (o electrones). Esto tiene como consecuencia que la temperatura crítica no alcance valores más altos de los que predice BCS.

Al considerar que los pares de Cooper (haciendo énfasis en la diferencia entre éstos y los pares de BCS) son bosones (que tienen una relación de dispersión lineal dependiente del parámetro de acoplamiento electrón-fonón), recurrimos a la condensación Bose-Einstein como explicación de la superconductividad. Suponemos inicialmente un sistema de N fermiones que interactúan entre sí formando un sistema de $N/2$ bosones y calculamos la temperatura crítica. En este caso encontramos temperaturas críticas más grandes que aquellas obtenidas con la teoría BCS y BCS-Bose "crossover" para valores físicamente aceptables del parámetro de acoplamiento electrón-fonón.

Para considerar el notable papel que juegan los agujeros en los superconductores, recurrimos al modelo completo bosón-fermión de la superconductividad, donde se pueden tener pares de agujeros en una proporción variable respecto del número de pares de electrones. El modelo describe la mezcla ternaria de: dos gases de Bose (uno de pares de electrones y otro de pares de agujeros) y un gas de Fermi (electrones desapareados), donde los estados de equilibrio termodinámico se encuentran al resolver tres ecuaciones trascendentales acopladas en: a) la densidad de pares de electrones con momento de centro de masa cero, b) la densidad de agujeros con momento de centro de masa cero y c) el potencial químico del sistema. Consideramos la relación de dispersión lineal y cuadrática de los pares de Cooper y resolvemos el sistema de ecuaciones para encontrar la temperatura crítica como función del cociente de la densidad total de electrones (n) y de una cantidad que depende de la energía en reposo de los pares de electrones y de agujeros (n_f). Las fases que estudiamos son: fase pura de pares de Cooper de electrones (agujeros), donde no se consideran los pares de agujeros (electrones); una fase mixta donde el número de pares de Cooper de agujeros es cero sólo a la temperatura crítica

y otra donde el número de pares de Cooper de electrones es cero sólo a la temperatura crítica. Para las cuatro fases estudiadas en este trabajo se observa que cuando $n/n_f \simeq 1$, los valores de temperatura crítica se aproximan bastante con los valores que da BCS y BCS-Bose “crossover.” Encontramos también que las temperaturas críticas más altas se dan en la fase pura de pares de Cooper de agujeros para valores suficientemente pequeños de n/n_f . Para valores suficientemente grandes de este cociente, la temperatura crítica en la fase pura de pares de Cooper de electrones es aproximadamente la temperatura crítica de condensación Bose-Einstein; en el caso particular 2D y relación de dispersión cuadrática, se obtiene una temperatura crítica distinta de cero contrariamente a lo que se dice que en 2D no hay condensación Bose-Einstein.

Capítulo 1

1 Introducción

La superconductividad de alta temperatura crítica es uno de los temas de mayor interés en la actualidad, ya sea por sus potenciales aplicaciones en diversas áreas (medicina: obtención de imágenes por resonancia magnética; comunicaciones: antenas de microonda; transporte: diseño de trenes de levitación magnética, etc.) o porque hasta ahora los diversos mecanismos dinámicos que la explican siguen sujetos a controversias [1]-[4], en lo que se refiere a la de formación de pares de Cooper y a la simetría de éste (simetría de apareamiento, del inglés “pairing symmetry”).

La simetría de apareamiento en los superconductores de alta temperatura crítica es uno de los temas más controversiales. El desarrollo de técnicas experimentales que permiten deducir la simetría de apareamiento en estos superconductores, favorecen la simetría de onda d (“ d -wave symmetry”) en varios superconductores cupratos [5]. La mayoría de estos experimentos (que miden: la profundidad de penetración, el calor específico, la conductividad térmica, ó que usan la fotoemisión de resolución angular “Angle-resolved photoemission,” la dispersión Raman, la resonancia magnética nuclear y el efecto Meissner no lineal) no son sensibles a la fase de la función de onda, por lo que aún cuando los resultados son compatibles con una simetría de onda d , no distinguen una posible simetría de onda s extendida. Tsuei y Kirtley [5] hacen una profunda revisión de los métodos experimentales que son sensibles a la fase de la función de onda (interferometría de SQUID¹[6], modulación de juntura simple Josephson [6],[7] y magnetometría en tricristales [8], basados en el efecto Josephson), estos confirman una simetría de onda d en los cupratos. En particular, Tsuei y Kirtley usan la magnetometría en tricristales, para concluir que el efecto de flujo cuántico semi-entero es consecuencia inconfundible de la simetría de onda d . Sin embargo, Müller [9] hace una distinción de los experimentos que exploran la superficie del superconductor de aquellos que exploran el cuerpo (“bulk”). Los primeros, sin duda alguna, dan como resultado una simetría de onda d ; mientras que los otros sugieren una componente sustancial de simetría de onda s . De este modo, Müller considera la posibilidad de que la simetría del apareamiento varíe como función de la distancia a la superficie, siendo onda d en la superficie y predominantemente s en

¹SQUID es el acrónimo para el término en inglés “Superconducting QUantum Interference Device” (dispositivo superconductor de interferencia cuántica), es el detector más sensible conocido en ciencia.

el “bulk” del superconductor. A lo largo de este trabajo supondremos que la simetría del apareamiento es s .

Reseña histórica de la superconductividad. Uno de los acontecimientos más notables del siglo XX fue el descubrimiento del fenómeno de la superconductividad, que es observado en una gran variedad de materiales y está definido por dos hechos: la desaparición de la resistencia eléctrica del material por debajo de cierta temperatura llamada temperatura crítica T_c de transición superconductor y la expulsión del interior del material de cualquier campo magnético externo, es decir, el material se vuelve perfectamente diamagnético. El estado de resistencia cero fue observado en el mercurio sólido por primera vez en 1911 por el físico danés Heike Kamerlingh Onnes [10]. En 1908 Onnes había logrado licuar el helio alcanzando temperaturas tan bajas como 4 K y que le permitía hacer experimentos nunca antes llevados a cabo. Uno de ellos fue medir la resistencia eléctrica como función de la temperatura en el mercurio a bajas temperaturas. Onnes notó que la primera desaparecía alrededor de 4.2 K. Una investigación posterior realizada por Meissner y Ochsenfeld en 1933 [11] demostró que los materiales superconductores en el estado de resistencia cero expulsan de su interior cualquier campo magnético externo cuya intensidad no rebase la del campo magnético crítico, arriba del cual no es posible alcanzar el estado superconductor.

Desde el descubrimiento de la superconductividad se ha hecho un gran esfuerzo para entender este fenómeno, tal es así que hasta la fecha han aparecido numerosas teorías que intentan explicarlo. Podemos mencionar las teorías fenomenológicas de los hermanos London [12] que explican el efecto Meissner, la de Ginzburg-Landau [13] que se basa en la teoría de fenómenos críticos de Landau y teorías que relacionan la superconductividad con la condensación de Bose-Einstein [14] (primeros modelos Bosón-Fermión de la superconductividad que no presentan “gap”). Sin embargo, ninguna de estas teorías explican de manera satisfactoria los hechos experimentales que presentan los llamados superconductores convencionales (los elementos superconductores se muestran sombreados en la Tabla periódica de la Fig. 1.1). No fue sino hasta 1957, cuando el trabajo de John Bardeen, Leon N. Cooper y J. R. Schrieffer (BCS) apareció, que se explicó de manera microscópica la superconductividad. La teoría de BCS explica los siguientes fenómenos relacionados con el estado superconductor en los superconductores convencionales: la transición del estado normal (líquido de Fermi) al estado superconductor es una transición de segundo orden, la desaparición de la resistencia eléctrica, el efecto Meissner, la presencia de un “gap” en el espectro de las cuasi partículas relacionado con el calor específico, y el efecto isotópico. Esta teoría ha sido tan exitosa que predice satisfactoriamente los resultados

ELEMENTOS SUPERCONDUCTORES

	1A																	0						
1	H																	He						
2	Li	Be											B	C	N	O	F	Ne						
3	Na	Mg	■B	■YB	Al	Si	P	S	Cl	Ar														
4	K	Cu	Sc	Ti	V	Cr	Mn	Fe	Co	Ni	Cu	Zn	Ga	Ge	As	Se	Br	Kr						
5	Rb	Sr	Y	Zr	Nb	Mo	Tc	Ru	Rh	Pd	Ag	Cd	In	Sn	Sb	Te	I	Xe						
6	Cs	Ba	*La	Hf	Ta	W	Re	Os	Ir	Pt	Au	Hg	Tl	Pb	Bi	Po	At	Rn						
7	Fr	Ra	+Ac	Rf	Ha	106	107	108	109	110	111	112												

* A presión ambiente
* Sólo bajo altas presiones

★ Serie de los Lantanos	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71
	Ce	Pr	Nd	Pm	Sm	Eu	Gd	Tb	Dy	Ho	Er	Tm	Yb	Lu	
+ Serie de los Actinos	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103
	Th	Pa	U	Np	Pu	Am	Cm	Bk	Cf	Es	Fm	Md	No	Lr	

Figura 1.1. Tabla Periódica de los elementos (tomada del sitio en internet www.superconductors.org) donde se indican los elementos superconductores.

experimentales observados en la mayoría de los superconductores de baja temperatura crítica, llamados superconductores convencionales. Por ejemplo, uno de los resultados de la teoría BCS es la famosa razón de la brecha de energía a temperatura cero a la temperatura crítica $2\Delta(0)/k_B T_c \simeq 3.53$, que para el cadmio es 3.2, para el zinc 3.2, para el aluminio 3.4, para el estaño 3.5 y para el niobio 3.8, comparan satisfactoriamente (en otros superconductores convencionales, particularmente el mercurio y el plomo, la discrepancia teoría-experimento es considerable, por lo que la teoría BCS tuvo que ser extendida para tomar en cuenta el acoplamiento fuerte en estos materiales, esto fue realizado por Eliashberg [15] a través de las ecuaciones que llevan su nombre²). Bardeen, Cooper y Schrieffer recibieron el premio Nobel de Física en 1972 por su trabajo en superconductividad.

En 1986 se creía que la superconductividad estaba totalmente explicada y que la máxima temperatura crítica que un superconductor podría alcanzar sería del orden de 45 K (aunque el record lo posea la aleación Nb_3Ge con 23 K). Sin embargo en ese año J. G. Bednorz y K. A. Müller [17] hicieron un descubrimiento trascendental cuando

²Un ejemplo de las aplicaciones del formalismo de Eliashberg en los elementos superconductores es dado en [16].

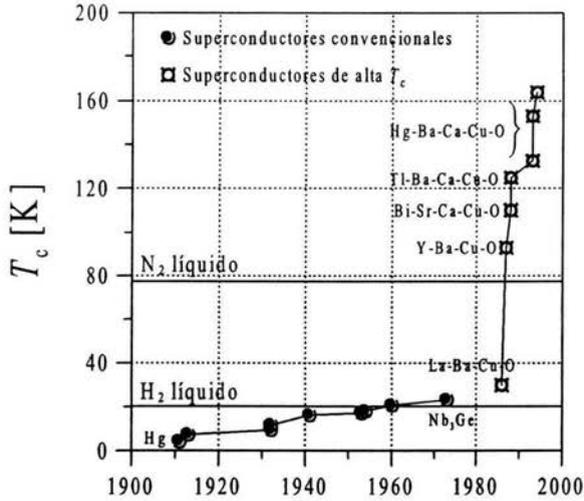


Figura 1.2. Gráfica donde se muestra el dramático ascenso de la temperatura crítica a partir de 1986. Datos tomados de la Ref. [25]

observaron que para los materiales llamados cerámicos del tipo La-Ba-Cu-O (en particular los compuestos $La_{5-x}Ba_xCu_5O_{5(3-y)}$) se volvían superconductores a $T_c \simeq 35$ K. Esto fue el inicio del descubrimiento de otros materiales de estructura similar, que tienen temperaturas críticas tan altas como 164 K (para el sistema HgBaCaCuO a altas presiones), record que se mantiene desde 1993 (ver Fig. 1.2). Por su trabajo Bednorz y Müller recibieron el premio Nobel en física un año después.

Con el mismo criterio que usa la teoría BCS para explicar a los superconductores convencionales, la comunidad científica se encontró incapaz de explicar los nuevos superconductores. Por lo que inmediatamente se inició la búsqueda de nuevos mecanismos que llavan a la superconductividad manteniendo la teoría BCS [18],[20], y/o de nuevas teorías que generalizan la de BCS, mismas que no acaban de explicar aún la nueva superconductividad.

Los primeros modelos bosón-fermión. La primera sugerencia que considera la condensación Bose-Einstein (BEC) como una explicación de la superconductividad, así como para la superfluidez en el helio líquido, la dio London [21] a finales de los años 30. En el helio líquido (^4He) la idea fue muy atractiva ya que los átomos del ^4He obedecen la

estadística de Bose-Einstein. Sin embargo, esto no fue así para los materiales superconductores, ya que los electrones siendo fermiones, no satisfacen la estadística de Bose. De este modo, la condensación Bose-Einstein como explicación de la superconductividad no fue tomada en serio sino hasta mediados de los años 50, cuando independientemente Ginzburg [22] (en la ex-Unión Soviética), Feynman [23] (en los Estados Unidos) y Schafroth [24] (en Australia) demostraron que el gas cargado de Bose en la fase condensada exhibe un comportamiento magnético similar al efecto Meissner³. Schafroth junto con Butler y Blatt [14] siguieron adelante y desarrollaron la teoría del equilibrio cuasi-químico entre electrones y pares de electrones, donde estos últimos son considerados como cuasi-moléculas que satisfacen la estadística de Bose. Así, intentaron dar una explicación de la superconductividad en términos de una condensación del tipo BEC pero con la desventaja de tener ausente el “gap” electrónico de energía. Posteriormente, en 1989 Friedberg y T.D. Lee [28] desarrollaron un modelo para describir los entonces nuevos superconductores de alta temperatura, basado en el hecho de que éstos presentan una longitud de coherencia mucho más pequeña que los superconductores convencionales [29],[30] sugiriendo que los pares de electrones o de huecos en estos materiales pueden ser aproximados por un campo bosónico local. Considerando tanto el campo bosónico como el campo fermiónico, el modelo bosón-fermión de Friedberg y Lee relaciona el “gap” de energía fermiónico con el condensado bosónico del estado de momento cero. Modelos bosón-fermión posteriores [31]-[33] que consideran la mezcla binaria ideal de un gas de Fermi y un gas de Bose describen la transición superconductor a partir de la fase normal debido a la carencia de “gap” de energía. Todos estos modelos bosón-fermión tienen la desventaja de no considerar los pares de Cooper de agujeros que por consistencia deben considerarse, además de que éstos tienen un notable efecto en los superconductores, por ejemplo, en el estado normal: los cupratos que son contaminados (“doped”) con agujeros tienen temperaturas críticas del orden de seis veces más altas que los contaminados con electrones [34]; más del 80% de los elementos superconductores convencionales, tienen coeficiente Hall positivo, lo que significa que los agujeros son los portadores de carga; y que cerca del 90% de los elementos metálicos no magnéticos que no son superconductores, son los electrones los que portan la carga.

El modelo completo bosón-fermión de la superconductividad. En este trabajo se usa el modelo completo bosón-fermión de la superconductividad [35],[36] (CBFM de sus siglas en inglés, llamado completo en el sentido de que no se ignora a los pares de Cooper de agujeros), para calcular la temperatura crítica de transición superconductor a

³Para una breve discusión de este hecho ver Refs. [26],[27]

T_c y el objetivo general es contribuir a generar un modelo de la superconductividad capaz de describir tanto la superconductividad convencional como la de alta temperatura crítica sin abandonar el mecanismo de apareamiento electrón-fonón. Además, pretendemos conocer y sentar las bases para predecir las características de los posibles superconductores a temperatura ambiente. Esto a pesar que se ha dicho que con el mecanismo dinámico electrón-fonón de formación de pares de Cooper, las temperaturas máximas de transición superconductor (calculadas con la fórmula de BCS, $T_c \simeq 1.13\Theta_D e^{-1/\lambda}$) son $\lesssim 45$ K, debido a que los valores típicos de la temperatura de Debye son $\Theta_D \equiv \hbar\omega_D/k_B \sim 300$ K y a que valores del parámetro de acoplamiento $\lambda \equiv N(E_F)V$ no sobrepasan $1/2$ (Ref. [37] y Ref. [26] pag. 204). Así, para conseguir T_c 's más altas se tiene que recurrir a otros mecanismos electrónicos de apareamiento tales como: magnones, excitones, plasmones u otros [38]. El hecho de mantener el mecanismo de apareamiento fonónico en los superconductores de alta temperatura crítica (principalmente en los sistemas cuasi-bidimensionales llamados cupratos) se encuentra sustentado en la evidencia experimental de los trabajos de Lanzara *et al.* y Kulic [1],[4] donde se argumenta que el mecanismo dominante de apareamiento es el electrón-fonón.

Los grados de libertad bosónicos del CBFM representan los pares de Cooper de dos electrones (2e-CPs) y/o de dos agujeros (2h-CPs) (en pleno contraste con las pares de BCS, los CPs pueden considerarse como bosones pese a que se ha dicho lo contrario Ref. [39] pág. 38), mientras que los grados de libertad fermiónicos están dados por los electrones desapareados. Del CBFM resulta la teoría BCS y la BEC como casos especiales, por lo que la superconductividad está íntimamente vinculada con la BEC contrariamente a lo que se ha dicho [40]. Incluso en el caso 2D, del que se ha dicho que la BEC no es posible [41],[42].

Las energías \mathcal{E}_K , de los 2e(2h)-CPs, como función de su momento \mathbf{K} , se obtienen cuando se resuelve la ecuación de eigenvalores de Bethe-Salpeter que considera tanto 2e-CPs como 2h-CPs de manera consistente. Como resultado, \mathcal{E}_K está definida por el momento total (ó de centro de masa) \mathbf{K} , que a orden dominante resulta lineal $\mathcal{E}_K \propto K$ (en vez de cuadrática [43] $\propto \hbar^2 K^2/2(2m)$ y distinta del modo acústico de Anderson-Bogoliubov-Higgs [43]). El CBFM incluye los CPs con $\mathbf{K} \neq 0$ (distintos de aquellos que representan estados con flujo de corriente neta distinta de cero [44]) y no sólo los pares con $\mathbf{K} = 0$ que, como la teoría BCS, toma en cuenta para dar una descripción de la superconductividad [45].

En el Capítulo 2 se describe brevemente la teoría microscópica de la superconductividad de 1957 formulada por Bardeen, Cooper y Schrieffer. En el Capítulo 3 usamos el hecho de que los pares de Cooper son bosones para describir la temperatura de transi-

ción superconductora en términos de la temperatura de condensación Bose-Einstein de los pares. En el Capítulo 4 usamos la teoría BCS-Bose “crossover” para calcular entre otras cosas la temperatura de transición superconductora. En el Capítulo 5 se discute el modelo bosón-fermión completo (donde los pares de agujeros no son ignorados) y se usa para calcular la temperatura de transición superconductora. En el Capítulo 6 damos las conclusiones.

Capítulo 2

2 La Teoría BCS

En 1957 fue publicada la teoría microscópica de la superconductividad (teoría BCS) hecha por Bardeen, Cooper y Schrieffer [46], esta teoría explica satisfactoriamente los superconductores convencionales. En ésta el concepto de *pares de Cooper* (estados ligados de dos electrones) es fundamental. En 1956 Cooper descubrió que dos electrones pueden formar un estado ligado por arriba del mar de Fermi, aun cuando la interacción atractiva entre ambos sea muy débil ([47], ver sección A.2 del Apéndice A).

El mecanismo que permite el apareamiento de dos electrones en los superconductores convencionales, es la interacción electrón-fonón. Fue Fröhlich el primero en sugerir que dicho mecanismo da origen a la superconductividad, creencia basada experimentalmente en el efecto isotópico. Dado el carácter fundamental y general de la teoría BCS, ésta puede aplicarse considerando otros mecanismos de apareamiento sugeridos que dan origen a la superconductividad. Más aún, la teoría BCS se fundamenta en principios tan generales, que ha sido usada y extendida a otros campos de la física como materia nuclear y física de altas energías [48]-[51].

2.1 La concepción de apareamiento

Parece ser que hasta ahora hay un consenso general entre la comunidad científica que acepta que el ingrediente principal en el fenómeno de la superconductividad es la formación de estados ligados de dos partículas, llamados pares de Cooper⁴. Y es exactamente en los pares de Cooper (CPs) donde la teoría BCS encuentra sus cimientos. Cooper, al descubrir que dos electrones que interactúan atractivamente arriba del mar Fermi pueden formar un estado ligado, sin importar que tan pequeña sea la intensidad de la interacción, descubre que el estado base del líquido de Fermi es inestable bajo la formación de pares de Cooper, es decir, el sistema tiende a disminuir su energía a través de la formación de CPs. Basados en esta idea, Bardeen, Cooper y Schrieffer son capaces de construir un estado base variacional capaz de describir el estado superconductor.

⁴En este trabajo consideramos que los pares de Cooper son bosones como es sugerido en el Apéndice B.

2.2 El estado base superconductor

Un sistema capaz de presentar superconductividad es modelado por un gas de fermiones interactuantes a través de su repulsión coulombiana más la interacción electrón-fonón, de tal forma que su hamiltoniano queda dado por

$$H = \sum_{\mathbf{k} (k > k_F)} \epsilon_k \hat{n}_{\mathbf{k},\sigma} + \sum_{\mathbf{k} (k < k_F)} |\epsilon_k| (1 - \hat{n}_{\mathbf{k},\sigma}) + H_{coul} \quad (2.1)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{\substack{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q} \\ \sigma, \sigma'}} \frac{2\hbar\omega_q |M_q|^2 a_{\mathbf{k}'-\mathbf{q},\sigma'}^\dagger a_{\mathbf{k}',\sigma'} a_{\mathbf{k}+\mathbf{q},\sigma}^\dagger a_{\mathbf{k},\sigma}}{(\epsilon_k - \epsilon_{k+q})^2 - (\hbar\omega_q)^2},$$

posteriormente simplificado para ser usado en la teoría BCS [46]. En (2.1) $a_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger$, $a_{\mathbf{k},\sigma}$ son operadores fermiónicos de creación y aniquilación respectivamente que satisfacen

$$\{a_{\mathbf{k},\sigma}, a_{\mathbf{k}',\sigma'}^\dagger\} \equiv a_{\mathbf{k},\sigma} a_{\mathbf{k}',\sigma'}^\dagger + a_{\mathbf{k}',\sigma'}^\dagger a_{\mathbf{k},\sigma} = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \delta_{\sigma,\sigma'}, \quad (2.2)$$

$$\{a_{\mathbf{k},\sigma}, a_{\mathbf{k}',\sigma'}\} \equiv a_{\mathbf{k},\sigma} a_{\mathbf{k}',\sigma'} + a_{\mathbf{k}',\sigma'} a_{\mathbf{k},\sigma} = 0 \quad (2.3)$$

$$\{a_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger, a_{\mathbf{k}',\sigma'}^\dagger\} \equiv a_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger a_{\mathbf{k}',\sigma'}^\dagger + a_{\mathbf{k}',\sigma'}^\dagger a_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger = 0,$$

$\hat{n}_{\mathbf{k},\sigma} \equiv a_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger a_{\mathbf{k},\sigma}$ es el operador fermiónico de número y ϵ_k es la energía de los electrones con vector de onda \mathbf{k} (que caracteriza los estados energéticos de los electrones en el potencial periódico generado por la red de iones), medida a partir de la energía de Fermi E_F . El primer (segundo) término está relacionado con la energía de los electrones (huecos) cuyos estados con vector de onda \mathbf{k} , son de energía mayor (menor) que la energía de Fermi; el tercer término contribuye a la energía debido a la interacción coulombiana efectiva entre los electrones. El último término es la energía de interacción electrón-electrón inducida por el intercambio de fonones, donde $|M_q|^2 \propto \hbar/2\omega_q$ es el elemento de matriz de la interacción electrón-fonón [52] y $\hbar\omega_q$ es la energía del fonón que interviene en el proceso de dispersión. La interacción que produce la diferencia en energía entre la fase normal y la fase superconductora proviene del intercambio virtual de fonones y la repulsión coulombiana de los electrones. Basada en el resultado de Cooper, la teoría BCS se concentra solamente en aquellos términos de (2.1) para los que la interacción efectiva (Coulombiana más electrón-fonón) entre dos electrones está dada por la dispersión de un par de electrones en el estado de momento y espín ($\mathbf{k} \uparrow, -\mathbf{k} \downarrow$) al estado ($\mathbf{k}' \uparrow, -\mathbf{k}' \downarrow$). De este modo la interacción efectiva entre dos electrones es escrita como

$$\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \left[\frac{4\pi e^2}{(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2} + \frac{2\hbar\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} |M_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}|^2}{(\epsilon_k - \epsilon_{k'})^2 - (\hbar\omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'})^2} \right] a_{\mathbf{k}',\uparrow}^\dagger a_{-\mathbf{k}',\downarrow}^\dagger a_{-\mathbf{k},\downarrow}^\dagger a_{\mathbf{k},\uparrow}, \quad (2.4)$$

donde $4\pi e^2/(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2$ es la intensidad de interacción coulombiana entre dos electrones por unidad de volumen. Debe notarse que el segundo término de los que están entre paréntesis cuadrados en (2.4), que corresponde al cuarto término de (2.1), es negativo para aquellas energías que satisfacen $|\epsilon_k - \epsilon_{k'}| < \hbar\omega_{k-k'}$, implicando una parte atractiva en la interacción efectiva. BCS hace la suposición (que después es confirmada) que los estados electrónicos de interés son aquellos que están muy cerca de la superficie de Fermi tales que $|\epsilon_k - \epsilon_{k'}| \ll \hbar\omega_{k-k'}$. Por lo que el criterio de BCS para describir la superconductividad, se obtiene cuando la intensidad de la interacción atractiva efectiva entre dos electrones, con energías muy cerca la superficie de Fermi, puede sustituirse por la siguiente intensidad de interacción promedio

$$-V \equiv \left\langle \frac{4\pi e^2}{q^2} - \frac{2|M_q|^2}{\hbar\omega_q} \right\rangle_{Pr} < 0, \quad (2.5)$$

donde

$$\langle X \rangle_{Pr} \equiv \int \frac{d\Omega'}{4\pi} \int \frac{d\Omega}{4\pi} \langle \mathbf{k} \uparrow, -\mathbf{k} \downarrow | X | \mathbf{k}' \uparrow, -\mathbf{k}' \downarrow \rangle,$$

$d\Omega$ es el elemento de ángulo sólido y las integrales se evalúan en $|\mathbf{k}| = |\mathbf{k}'| = k_F$ con k_F el momento de Fermi.

Con estas aproximaciones, BCS asume, en vez de (2.1), el siguiente hamiltoniano reducido

$$H_{red} \equiv \sum_{\mathbf{k} (k > k_F)} \epsilon_k \hat{n}_{\mathbf{k}\uparrow} + \sum_{\mathbf{k} (k < k_F)} |\epsilon_k| \hat{n}_{-\mathbf{k}\downarrow} - \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} a_{\mathbf{k}'\uparrow}^\dagger a_{-\mathbf{k}'\downarrow} a_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger a_{\mathbf{k}\uparrow}, \quad (2.6)$$

e introduce los operadores de pares $\hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger, \hat{b}_{\mathbf{k}}$ (llamados en este trabajo de BCS, definidos en el Apéndice B por (B.2) y que satisfacen (B.6), (B.7) y (B.9)), que respectivamente crean y aniquilan un par de electrones uno con momento \mathbf{k} y espín \uparrow y otro con momento $-\mathbf{k}$ y espín \downarrow . En términos de éstos, (2.6) se escribe como

$$H_{red} = 2 \sum_{\mathbf{k} (k > k_F)} (\epsilon_k - E_F) \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}} + 2 \sum_{\mathbf{k} (k < k_F)} |(\epsilon_k - E_F)| \hat{b}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger - 2 \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}'} \hat{b}_{\mathbf{k}'} \hat{b}_{\mathbf{k}}, \quad (2.7)$$

donde hemos puesto explícitamente que la energía de los fermiones está referida a la energía de Fermi E_F .

Con H_{red} , BCS proponen el siguiente estado base variacional dado por

$$|\Psi_{GS}\rangle = \prod_{\mathbf{k}} \left(u_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger a_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \right) |0\rangle, \quad (2.8)$$

donde los coeficientes u_k, v_k (llamados también coeficientes de Bogoliubov) se escogen reales⁵ y satisfacen $u_k^2 + v_k^2 = 1$. Donde v_k^2 representa la probabilidad de que el estado del par de electrones, uno con momento \mathbf{k} y espín \uparrow y otro con momento $-\mathbf{k}$ y espín \downarrow esté ocupado y $u_k^2 = 1 - v_k^2$ la probabilidad que esté desocupado.

2.3 La ecuación de la brecha de energía

Para encontrar los coeficientes u_k, v_k que aparecen en la función de onda variacional del estado base minimizamos el valor de expectación de H_{red} en $|\Psi_{GS}\rangle$ respecto de v_k . Primero tenemos que

$$E_0 \equiv \langle \Psi_{GS} | H_{red} | \Psi_{GS} \rangle \quad (2.9)$$

$$= 2 \sum_{\mathbf{k} (k > k_F)} (\varepsilon_k - E_F) v_k^2 + 2 \sum_{\mathbf{k} (k < k_F)} |(\varepsilon_k - E_F)| u_k^2 \quad (2.10)$$

$$- \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}'} u_{\mathbf{k}'} u_{\mathbf{k}} \quad (2.11)$$

y resolviendo

$$\frac{\partial E_0}{\partial v_k} = 0 \quad (2.12)$$

se obtiene la siguiente ecuación para v_k

$$\frac{v_k \sqrt{1 - v_k^2}}{1 - 2v_k^2} = \frac{\sum_{\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} v_{\mathbf{k}'} \sqrt{1 - v_{\mathbf{k}'}^2}}{2(\varepsilon_k - E_F)}. \quad (2.13)$$

Definiendo

$$\Delta_k \equiv - \sum_{\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} v_{\mathbf{k}'} \sqrt{1 - v_{\mathbf{k}'}^2}, \quad (2.14)$$

y resolviendo para v_k se obtiene la siguiente ecuación de auto-consistencia llamada ecuación del “gap”

$$\Delta_k = - \sum_{\mathbf{k}'} \frac{V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \Delta_{\mathbf{k}'}}{2\sqrt{(\varepsilon_{\mathbf{k}'} - E_F)^2 + \Delta_{\mathbf{k}'}^2}}. \quad (2.15)$$

⁵Debido a que la función de onda (2.8) no conserva el número de partículas esta elección siempre puede hacerse [53].

Además, se encuentran los coeficientes de Bogoliubov dados por

$$v_k^2 = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\varepsilon_k - E_F}{\sqrt{(\varepsilon_k - E_F)^2 + \Delta_k^2}} \right], \quad (2.16)$$

$$u_k^2 = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\varepsilon_k - E_F}{\sqrt{(\varepsilon_k - E_F)^2 + \Delta_k^2}} \right]. \quad (2.17)$$

Usando el modelo de interacción electrón-fonón de BCS

$$V_{k,k'} = \begin{cases} -V & \text{si } E_F - \hbar\omega_D < \hbar^2\mathbf{k}^2/2m, \hbar^2\mathbf{k}'^2/2m < E_F + \hbar\omega_D \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \quad (2.18)$$

en (2.15), se tiene

$$\Delta_k = V \sum_{k'}' \frac{\Delta_{k'}}{2\sqrt{(\varepsilon_{k'} - E_F)^2 + \Delta_{k'}^2}}, \quad (2.19)$$

donde la suma primada indica sumar sobre toda k' que satisface la condición en 2.18. De esta última expresión se deduce que $\Delta_k = \Delta$ no depende más de k y obtenemos

$$\frac{1}{V} = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2\sqrt{(\varepsilon_{\mathbf{k}} - E_F)^2 + \Delta^2}}, \quad (2.20)$$

reemplazando la suma por la integral y considerando que $E_F \gg \hbar\omega_D$ tenemos

$$\Delta = \frac{\hbar\omega_D}{\sinh(1/\lambda)} \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 2\hbar\omega_D e^{-1/\lambda}, \quad (2.21)$$

donde $\lambda \equiv VN(E_F)$ y $N(E_F)$ es la densidad de estados evaluada en la energía de Fermi.

La ecuación (2.15) se generaliza a temperaturas finitas minimizando ahora la energía libre de Hemholtz, obteniéndose [46]

$$\Delta_k = \sum_{k'} \frac{V_{k,k'} \Delta_{k'}}{2\sqrt{(\varepsilon_{k'} - E_F)^2 + \Delta_{k'}^2}} \tanh \frac{\sqrt{(\varepsilon_{k'} - E_F)^2 + \Delta_{k'}^2}}{2k_B T}, \quad (2.22)$$

donde la Δ_k ahora depende de T . Usando (2.18) tenemos otra vez que $\Delta_k = \Delta$, por lo que al pasar la suma a una integral y poniendo $\Delta(T_c) \equiv 0$ en la temperatura crítica obtenemos la ecuación

$$1 = \lambda \int_0^{\hbar\omega_D/2k_B T_c} dx \frac{\tanh x}{x}. \quad (2.23)$$

En el límite de acoplamiento débil la Ec. (2.23) puede resolverse para $k_B T_c$ dando como resultado

$$k_B T_c = \frac{2e^\gamma}{\pi} \hbar \omega_D e^{-1/\lambda}, \quad (2.24)$$

donde $\gamma \simeq 0.577216\dots$ es la constante gamma de Euler. De aquí, uno obtiene el cociente universal de BCS

$$\frac{2\Delta(0)}{k_B T_c} = \frac{2\pi}{e^\gamma} \simeq 3.53, \quad (2.25)$$

que caracteriza, con “buena” concordancia experimental, a los superconductores convencionales (ver Tabla 2.1). La teoría BCS explica bien los hechos fundamentales que ocurren en los superconductores convencionales, principalmente, el crecimiento exponencial del calor específico en la fase superconductora, relacionada con la aparición de una brecha de energía en el espectro de las excitaciones del superconductor y el efecto isotópico relacionado con el mecanismo fonónico de formación de pares de Cooper.

Elemento	T_c [K]	$2\Delta/k_B T_c$
Cadmio (Cd)	0.517	3.2
Zinc (Zn)	0.85	3.2
Aluminio (Al)	1.175	3.4
Estaño (Sn)	3.722	3.5
Mercurio (Hg)	4.154	4.6
Plomo (Pb)	7.196	4.3
Niobio (Nb)	9.25	3.8

Tabla 2.1. Valores experimentales de la temperatura de transición superconductora y el cociente universal $2\Delta/k_B T_c$ ($\simeq 3.53$ para BCS) para algunos elementos superconductores.

2.4 Limitaciones

La teoría BCS tiene éxito para describir cualitativamente a los superconductores convencionales, sin embargo, cuantitativamente el éxito es moderado, pues a excepción del aluminio y estaño, hay una discrepancia notable con los valores experimentales (ver Tabla 2.1). Esto se debe principalmente a dos aproximaciones fundamentales en la teoría: a) la interacción efectiva entre dos electrones es atractiva y constante $-V$ alrededor de la energía de Fermi E_F y b) cuando $\hbar\omega_D \ll E_F$ la densidad de estados $N(\epsilon)$ se sustituye

por la constante $N(E_F)$. Con estas limitaciones, la teoría BCS falla cuando es aplicada a los superconductores de alta temperatura crítica. Si se usan los valores típicos de $\hbar\omega_D$ encontrados en los superconductores de alta T_c (cupratos) y el valor límite de $\lambda \lesssim 1/2$ [37] uno encuentra que la máxima temperatura crítica es del orden de 45 K. Otra limitación muy poco reconocida es el hecho de que la teoría BCS, para valores de λ físicamente aceptables, está restringida al caso particular de simetría perfecta de igual número de pares de electrones y pares de agujeros, como lo sugiere la deducción heurística de la ecuación del “gap” de BCS dada en el Apéndice C.

Capítulo 3

3 Condensación Bose-Einstein

Ha habido en la literatura numerosos intentos de describir el fenómeno de la superconductividad como una condensación Bose-Einstein [12],[14],[28]. Estos están fundamentados en el hecho de que el ingrediente principal para la superconductividad es la formación de pares de Cooper (estados ligados de dos fermiones) y, aunque no completamente reconocido, que estos últimos pueden ser considerados como bosones (como se sugiere en el Apéndice B). La idea “más sencilla” o quizá más inocente es imaginar al sistema de N electrones que interactúan mutuamente formando un sistema ideal de $N/2$ bosones y aplicar la fórmula para calcular la temperatura crítica de condensación Bose-Einstein. Esto ocurre por ejemplo, dentro del esquema BCS-Bose “crossover” (como se discute en el Capítulo 4) cuando la intensidad de interacción atractiva de los fermiones es grande y/o la densidad es baja de tal modo que el número de pares de agujeros puede ser despreciable⁶.

3.1 Temperatura crítica de condensación Bose-Einstein para un gas de bosones con relación de dispersión $\mathcal{E}_K = C_s K^s$

Si consideramos que los pares de Cooper son bosones, surge de manera natural la pregunta ¿cuál es la temperatura de condensación de un gas ideal de pares de Cooper? De la estadística de Bose se tiene que el número total de partículas está dado por

$$N_B = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{e^{\beta(\mathcal{E}_{\mathbf{k}} - \mu_B)} - 1}, \quad (3.1)$$

donde $\beta = 1/k_B T$, $\mu_B(T)$ es el potencial químico bosónico que por conservación de N_B depende de T . Se puede demostrar que por debajo de cierta temperatura T_c , llamada temperatura crítica de condensación, el estado base ($\mathcal{E}_{K=0} = 0$, donde \mathcal{E}_K es el espectro de energía de los bosones que depende sólo de K) surge con una ocupación macroscópica. T_c queda definida por las dos siguientes condiciones: $\mu_B(T) = 0$ para toda $T \leq T_c$ y

⁶El número de pares de agujeros dado por $2 \sum_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}^2$, con \mathbf{k} tal que $0 \leq \varepsilon_{\mathbf{k}} < \mu$ y $u_{\mathbf{k}}^2$ dada por (C.6), es muy pequeño (incluso cero), en el límite de acoplamiento fuerte. En este límite, el potencial químico μ es negativo y se alcanza la “bosonización” completa de los pares [54] cuando $v_{\mathbf{k}}^2 \ll 1$ para toda \mathbf{k} ($v_{\mathbf{k}}^2$ está dada por (C.5) en el Apéndice C).

$N_{B+}(T_c) = N_B$ para toda $T \geq T_c$, donde $N_{B+}(T) \equiv \sum_{\mathbf{K} \neq 0} [e^{\beta(\mathcal{E}_{\mathbf{K}} - \mu_B)} - 1]^{-1}$ es el número total de bosones que ocupan los estados excitados. En d dimensiones

$$\sum_{\mathbf{K}} \longrightarrow \left(\frac{L}{2\pi}\right)^d \int d^d K, \quad (3.2)$$

de tal modo que la fórmula general para la temperatura crítica de condensación T_c de un gas no interactuante de bosones en d -dimensiones cuyo espectro de energía es de la forma $\mathcal{E}_{\mathbf{K}} = C_s K^s$, con $s > 0$, se obtiene de la expresión (3.1) para el número de partículas

$$N_B = \frac{L^d}{(2\pi)^d} \int d^d K \frac{1}{\exp[C_s K^s / k_B T_c] - 1}. \quad (3.3)$$

Usando el resultado (F.18) de la sección F.2 del Apéndice F, tenemos que la densidad de número de bosones es

$$\begin{aligned} n_B &\equiv \frac{N_B}{L^d} = \frac{1}{2^{d-1} \pi^{d/2} \Gamma(d/2)} \int_0^\infty dK \frac{K^{d-1}}{\exp[C_s K^s / k_B T_c] - 1} \\ &= \frac{(k_B T_c)^{d/s} \Gamma(d/s) g_{d/s}(1)}{2^{d-1} \pi^{d/2} \Gamma(d/2) s C_s^{d/s}}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

de la cual se obtiene [55] que

$$T_c = \frac{C_s}{k_B} \left[\frac{2^{d-1} \pi^{d/2} \Gamma(d/2) s}{\Gamma(d/s) g_{d/s}(1)} n_B \right]^{s/d}. \quad (3.5)$$

Aquí, $g_\sigma(z)$ es la función usual de Bose [56]. En particular $g_\sigma(1)$ coincide con la función zeta de Riemann $\zeta(\sigma)$ siempre y cuando $\sigma > 1$; para $0 < \sigma \leq 1$ se tiene que $g_\sigma(1)$ diverge, por inspección. La ecuación (3.5) es válida para toda $d > 0$ y $s > 0$. En el caso que $s = 2$, y $C_2 = \hbar^2 / 2m_B$, es decir, para el caso en que los bosones se mueven en el vacío con relación de dispersión $\mathcal{E}_{\mathbf{K}} = \hbar^2 K^2 / 2m_B$, donde m_B es la masa de los bosones, la ecuación (3.5) da como resultado la expresión bien conocida para la temperatura crítica de BEC en 3D

$$T_c = \frac{2\pi \hbar^2}{k_B m_B [\zeta(3/2)]^{2/3}} n_B^{2/3} \simeq 3.31 \frac{\hbar^2}{k_B m_B} n_B^{2/3}. \quad (3.6)$$

El considerar a los antibosones trae consecuencias profundas en la temperatura crítica de la BEC como se muestra en el siguiente ejemplo (ver detalles Apéndice E). El gas ideal relativista de bosones en 3D a muy altas temperaturas, donde aparecen tanto bosones como sus antipartículas a través de la producción de pares partícula-antipartícula [57], la temperatura de condensación que se obtiene, al imponer que en este sistema es la

carga total la cantidad que se mantiene constante, es decir, $N - \bar{N} = \text{constante}$ y no simplemente $N = \text{constante}$ como usualmente se hace (donde N es el número de bosones con carga q y \bar{N} es el número de antibosones con carga $-q$), es distinta en un caso del otro. En el límite ultrarelativista del primer caso ($N - \bar{N} = \text{constante}$) se tiene [57] que $k_B T_c^{UR-BA} \simeq 1.73 [\hbar^3 cn/m_B]^{1/2}$ mientras que en el segundo $k_B T_c^{UR-B} \simeq 2.02 \hbar cn^{1/3}$. En el límite de masas muy pequeñas la dependencia en m_B de T_c^{UR-BA} hace que $T_c^{UR-BA} \gg T_c^{UR-B}$ para T suficientemente alta. Este ejemplo muestra las profundas consecuencias de incluir o no incluir las antipartículas (análogas a los agujeros en el caso no-relativístico).

Capítulo 4

4 BCS-Bose “crossover”

El descubrimiento del superconductor La-Ba-Cu-O de alta temperatura crítica ($T_c \approx 35$ K) por J. G. Bednorz y K. A. Müller [17] en 1986 atrajo de nuevo la atención hacia la superconductividad, primero por que se había superado la máxima temperatura crítica conocida para los superconductores convencionales (23 K para la aleación Nb_3Ge donde el mecanismo de formación de pares de Cooper se supone ser la interacción electrón-fonón), luego porque estos nuevos materiales superconductores no metálicos presentan una longitud de coherencia (o diámetro de los pares) más pequeña que la de los superconductores convencionales. Puesto que el cuanto de flujo magnético en estos nuevos superconductores [58] sigue siendo $hc/2e$, donde h es la constante de Planck, c la velocidad de la luz y e la carga del electrón, los portadores de carga siguen siendo pares de fermiones con carga $2e$, además de electrones individuales, así que se puede seguir considerando sólo mecanismos de formación de pares de electrones. A partir de esto, se sugieren diferentes mecanismos de formación de pares de Cooper y puesto que estos mecanismos aún se encuentran en debate se recurre a una teoría que no depende de dicho mecanismo de apareamiento [59]-[61]. En esta teoría, la temperatura crítica y otras propiedades superconductoras pueden ser calculadas como función de la intensidad de interacción atractiva entre dos electrones, sin importar los detalles del mecanismo dinámico que da origen a tal interacción.

Puesto que en los nuevos superconductores hay evidencia de brecha superconductoras, el formalismo de BCS sigue siendo aplicable aún cuando éstos presentan $2\Delta/k_B T_c \approx 8$, lo que podría sugerir acoplamiento muy fuerte. En el límite de acoplamiento fuerte la longitud de coherencia es muy pequeña y se dice que el sistema está en la región de Bose, región de bosones bien separados entre sí [62]. En el límite de acoplamiento débil la longitud de coherencia, por el contrario es muy grande y se dice que el sistema se encuentra en la región de BCS donde se tienen pares de Cooper traslapados (ver Fig. 4.1). Para acoplamiento entre los límites de BCS y Bose (región de “crossover”) la longitud de coherencia es del orden de aquella que se presenta en los superconductores de alta temperatura crítica. Ha sido ampliamente discutido que en el límite de acoplamiento fuerte (límite de Bose), los pares están fuertemente ligados y su tamaño en el espacio de configuración es pequeño, tal que son considerados bosones sin mayores problemas. Sin embargo, como es sugerido en el Apéndice B, los pares de Cooper son bosones independientemente de su tamaño.

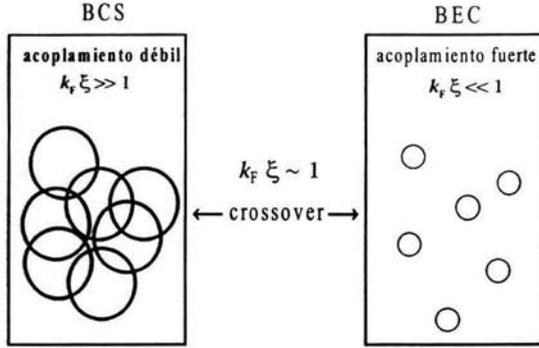


Figura 4.1. El BCS-Bose “crossover” considera la transición continua de la región de Bose donde la longitud de coherencia es muy pequeña (acoplamiento fuerte) a la región de BCS donde la longitud de coherencia es muy grande (acoplamiento débil).

4.1 El formalismo BCS-Bose “crossover”

El método variacional de BCS, que usa como función de onda variacional $|\Psi_{GS}\rangle = \prod_{\mathbf{k}} (u_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k},\uparrow}^{\dagger} a_{-\mathbf{k},\downarrow}^{\dagger}) |0\rangle$ para encontrar el estado base superconductor de un sistema de fermiones cuyo hamiltoniano es $H = \sum_{\mathbf{k},\sigma} \varepsilon_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k},\sigma}^{\dagger} a_{\mathbf{k},\sigma} + \sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{q}} V_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} a_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2,\uparrow}^{\dagger} a_{-\mathbf{k}+\mathbf{q}/2,\downarrow}^{\dagger} \times a_{-\mathbf{k}+\mathbf{q}/2,\downarrow} a_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2,\uparrow}$, nos lleva a resolver dos ecuaciones acopladas en μ y Δ (potencial químico y “gap” respectivamente), en función del acoplamiento y de la temperatura. De este modo, el estudio del “crossover” entre los límites BCS y Bose requiere de la solución autoconsistente de la ecuación del “gap” de BCS a temperaturas finitas dada por

$$\Delta_{\mathbf{k}} = - \sum_{\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \frac{\Delta_{\mathbf{k}'}}{2E_{\mathbf{k}'}} \tanh \left(\frac{E_{\mathbf{k}'}}{2k_B T} \right) \quad (4.1)$$

y la ecuación de número que proviene de $N \equiv \langle \Psi_{GS} | \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k},\sigma}^{\dagger} a_{\mathbf{k},\sigma} | \Psi_{GS} \rangle = 2 \sum_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}^2$, donde $v_{\mathbf{k}}$ es el coeficiente de Bogoliubov que aparece en la función de onda variacional del estado base. A temperaturas finitas se escribe como

$$N = \sum_{\mathbf{k}} \left[1 - \frac{\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu}{E_{\mathbf{k}}} \tanh \left(\frac{E_{\mathbf{k}}}{2k_B T} \right) \right], \quad (4.2)$$

donde

$$E_{\mathbf{k}} = [(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu)^2 + \Delta_{\mathbf{k}}^2]^{1/2} \quad (4.3)$$

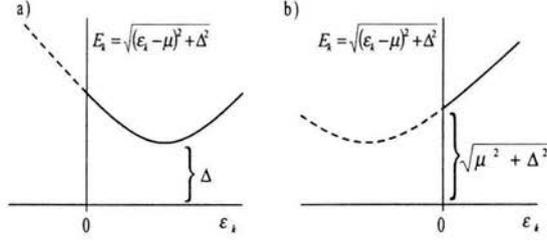


Figura 4.2. La brecha de energía E_{gap} definida por (4.5). a) Δ si $\mu > 0$ pues en este caso el mínimo de $\sqrt{(\varepsilon_k - \mu)^2 + \Delta^2}$ se encuentra en $\varepsilon_k = \mu$. b) $\sqrt{\Delta^2 + \mu^2}$ si $\mu < 0$ pues el mínimo de $\sqrt{(\varepsilon_k - \mu)^2 + \Delta^2}$ se encuentra cuando $\varepsilon_k = 0$.

es el espectro de energía de las cuasi-partículas de Bogoliubov,

$$\varepsilon_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}, \quad (4.4)$$

μ el potencial químico, en principio distinto de la energía de Fermi E_F y Δ_k el parámetro de orden que en términos de los coeficientes u_k y v_k (variacionales de BCS) se escribe como $\Delta_k = \sum_{k'} V_{k,k'} u_{k'} v_{k'}$. Las ecuaciones (4.1, 4.2) se resuelven para Δ_k y μ .

Dos de las propiedades del estado superconductor que nos interesa calcular son: la energía mínima a $T = 0$ que se requiere para formar una excitación de una partícula del estado superconductor, ésta es llamada la brecha (“gap”) de energía superconductor E_{gap} , y la temperatura crítica T_c en la que la brecha es cero. La brecha de energía como función de la temperatura está dada por [63]

$$E_{gap}(T) \equiv 2 \min_{\varepsilon_k > 0} \left\{ \sqrt{[\varepsilon_k - \mu(T)]^2 + \Delta_k^2(T)} \right\}, \quad (4.5)$$

en los casos: $\mu > 0$ y $\mu \leq 0$, se tiene (ver Fig. 4.2)

$$E_{gap}(T) = \begin{cases} 2\Delta(T) & \text{si } \mu > 0 \\ 2\sqrt{\mu^2(T) + \Delta^2(T)} & \text{si } \mu < 0. \end{cases} \quad (4.6)$$

La temperatura crítica queda definida por

$$E_{gap}(T_c) = 0, \quad (4.7)$$

y en vista de (4.6) por

$$\Delta_k(T_c) \equiv 0. \quad (4.8)$$

4.2 Modelos de interacción electrónica

Consideraremos el modelo de interacción interelectrónica de BCS y la de Nozières & Schmitt-Rink. Este último modelo de interacción puede simular varios mecanismos dinámicos posibles en superconductores como el fonónico, plasmónico, excitónico, magnónico, etc. Incluso es aplicable a la superfluidez fermiónica, como es el caso de ^3He [64] y de los recientes experimentos llevados a cabo con átomos fermiónicos alcalinos ultrafríos ^{40}K [65] y ^6Li [66], [67]. En estos experimentos varios autores han estudiado la fase superfluida en gases de Fermi degenerados [68]-[72] y otros han observado la BEC de bosones compuestos de dos átomos fermiónicos neutros [73]-[76].

4.2.1 Interacción BCS

Consideramos la interacción entre electrones de BCS (2.18) que modela el interacción efectiva electrón-electrón mediada por fonones. En la teoría BCS, la interacción entre dos electrones ocurre alrededor de la energía de Fermi E_F en lugar del potencial químico μ . En nuestro caso quitamos esta restricción, pero consideramos que la cota mínima del intervalo de interacción alrededor de μ está dada por $\max\{0, \mu - \hbar\omega_D\}$. En otras palabras, puesto que $\varepsilon_k, \varepsilon_{k'} \geq 0$, el límite inferior del intervalo de interacción $\mu - \hbar\omega_D$ carece de sentido físico si $\mu < \hbar\omega_D$. Así, $V_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}$ es una constante diferente de cero $-V$, sólo si $\varepsilon_k, \varepsilon_{k'}$ se encuentran en el intervalo $[\max\{0, \mu - \hbar\omega_D\}, \mu + \hbar\omega_D]$. Los elementos de matriz de la interacción (2.18) no dependen explícitamente de \mathbf{k}, \mathbf{k}' por lo que puede escribirse fuera de la suma en (4.1), a saber

$$\Delta_{\mathbf{k}} = V \sum_{\mathbf{k}'}' \frac{\Delta_{\mathbf{k}'}}{2E_{\mathbf{k}'}} \tanh\left(\frac{E_{\mathbf{k}'}}{2k_B T}\right), \quad (4.9)$$

donde la suma primada significa sumar sobre todas las k que satisfacen la condición (2.18). Nótese que $\Delta_{\mathbf{k}}$ es independiente de k , por lo que simplemente escribimos Δ . Así, (4.9) se reescribe como

$$1 = V \sum_{\mathbf{k}}' \frac{1}{2E_{\mathbf{k}}} \tanh\left(\frac{E_{\mathbf{k}}}{2k_B T}\right) \quad (4.10)$$

y junto con la ecuación de número (4.2), que permanece igual, son las ecuaciones que describen el modelo en términos de Δ y μ . Haciendo la sustitución

$$\sum_{\mathbf{k}} \longrightarrow \int N(\varepsilon) d\varepsilon, \quad (4.11)$$

donde $N(\varepsilon)$ es la densidad de estados, las ecuaciones (4.10) y (4.2) pueden reescribirse de la siguiente manera

$$1 = V \int_{\max\{0, \mu - \hbar\omega_D\}}^{\mu + \hbar\omega_D} d\varepsilon \frac{N(\varepsilon)}{2\sqrt{(\varepsilon - \mu)^2 + \Delta^2}} \tanh \frac{\sqrt{(\varepsilon - \mu)^2 + \Delta^2}}{2k_B T} \quad (4.12)$$

$$\int_0^\infty d\varepsilon N(\varepsilon) \left[1 - \frac{\varepsilon - \mu}{\sqrt{(\varepsilon - \mu)^2 + \Delta^2}} \tanh \frac{\sqrt{(\varepsilon - \mu)^2 + \Delta^2}}{2k_B T} \right] = N. \quad (4.13)$$

En $T = T_c$, la integral que aparece en (4.12) puede resolverse analíticamente en cualquier dimensión sólo en el límite de acoplamiento débil y numéricamente para cualquier otro valor del parámetro de acoplamiento, mientras que la integral que aparece en (4.13) puede calcularse analíticamente sólo en dos dimensiones para cualquier acoplamiento.

Gas de electrones en 2D. Con el propósito de modelar los sistemas cupratos nos restringimos al caso bidimensional. En 2 dimensiones la densidad de estados electrónicos $N(\varepsilon) = mL^2/\pi\hbar^2$ es una constante, $E_F = \hbar^2\pi N/mL^2$ y las ecuaciones para el gap y la ecuación de número a $T = 0$ se escriben como

$$1 = \lambda \int_{\max\{0, \mu - \hbar\omega_D\}}^{\mu + \hbar\omega_D} d\varepsilon \frac{1}{2\sqrt{(\varepsilon - \mu)^2 + \Delta^2}}, \quad (4.14)$$

$$2E_F = \int_0^\infty d\varepsilon \left[1 - \frac{\varepsilon - \mu}{\sqrt{(\varepsilon - \mu)^2 + \Delta^2}} \right], \quad (4.15)$$

donde $\lambda \equiv N(E_F)V$ es el parámetro de acoplamiento del orden de $1/2$ [37].

Para $\mu > \hbar\omega_D$ las integrales pueden calcularse analíticamente dando como resultado

$$\Delta = \frac{\hbar\omega_D}{\sinh 1/\lambda}, \quad (4.16)$$

$$\mu = E_F - \frac{\Delta^2}{4E_F} = E_F - \frac{\hbar^2\omega_D^2}{4E_F \sinh^2(1/\lambda)}, \quad (4.17)$$

donde la última expresión se ha obtenido usando (4.17). En el límite de acoplamiento débil $\lambda \ll 1$ tenemos el resultado bien conocido de la teoría BCS

$$\Delta \simeq 2\hbar\omega_D e^{-1/\lambda}, \quad (4.18)$$

$$\mu = E_F - \frac{\Delta^2}{4E_F} \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} E_F - \frac{\hbar^2\omega_D^2}{E_F} e^{-2/\lambda} \simeq E_F. \quad (4.19)$$

Como estas cuatro ecuaciones son válidas sólo para valores de λ tales que $\mu > \hbar\omega_D$, de (4.17) obtenemos que μ disminuye hasta el valor $\hbar\omega_D$ cuando

$$\frac{1}{\lambda} = \ln \left[\frac{\hbar\omega_D}{2\sqrt{E_F(E_F - \hbar\omega_D)}} \right] + \ln \left[1 + \sqrt{1 + 4\frac{E_F(E_F - \hbar\omega_D)}{\hbar^2\omega_D^2}} \right], \quad (4.20)$$

dándonos un valor límite de λ para el cual las Ecs. (4.16)-(4.19) son válidas. Para el caso que $\mu \leq \hbar\omega_D$ el límite inferior de (4.12) es cero y obtenemos el siguiente par de ecuaciones implícitas para Δ y μ

$$\Delta^2 = \left(\sqrt{\hbar^2\omega_D^2 + \Delta^2} + \hbar\omega_D \right) e^{-1/\lambda} \left[2\mu + e^{-1/\lambda} \left(\sqrt{\hbar^2\omega_D^2 + \Delta^2} + \hbar\omega_D \right) \right] \quad (4.21)$$

$$\mu = E_F - \frac{\Delta^2}{4E_F}. \quad (4.22)$$

Tras de un poco de algebra, la ecuación (4.21) puede escribirse como

$$0 = \frac{1}{16}\Delta^4(e^{-2/\lambda} - 1)^4 e^{-4/\lambda} + (\mu + e^{-1/\lambda}\hbar\omega_D)^4 - \frac{1}{2}(2\hbar^2\omega_D^2 + \Delta^2)(e^{-2/\lambda} - 1)^2 e^{-2/\lambda} (\mu + e^{-1/\lambda}\hbar\omega_D)^2 \quad (4.23)$$

y en el límite $\lambda \rightarrow \infty$, aunque no físico, se tiene que $\mu \rightarrow -\hbar\omega_D$ y por (4.22) que $\Delta \rightarrow 2E_F\sqrt{1 + (\hbar\omega_D/E_F)}$, como puede apreciarse en la Figura 4.3 para el valor típico de los cupratos $\hbar\omega_D/E_F = 0.05$ [77]

La temperatura crítica queda definida por $\Delta(T_c) = 0$, las ecuaciones que determinan T_c y $\mu(T_c)$ están dadas por

$$1 = \lambda \int_0^{\hbar\omega_D/2k_B T_c} dx \frac{\tanh x}{x}, \quad \mu > \hbar\omega_D, \quad (4.24)$$

$$1 = \lambda \int_{-\mu(T_c)/2k_B T_c}^{\hbar\omega_D/2k_B T_c} dx \frac{\tanh x}{2x}, \quad \mu < \hbar\omega_D, \quad (4.25)$$

$$\int_0^\infty d\varepsilon \left\{ 1 - \tanh \left[\frac{\varepsilon - \mu(T_c)}{2k_B T_c} \right] \right\} = 2. \quad (4.26)$$

La ecuación (4.26) puede resolverse analíticamente para μ dando

$$\mu(T_c) = k_B T_c \ln(e^{E_F/k_B T_c} - 1). \quad (4.27)$$

En el límite de acoplamiento débil, es decir $\lambda \ll 1$, el potencial químico en T_c no cambia apreciablemente del valor E_F , por lo que (4.27) se satisface si $k_B T_c/E_F \ll 1$ y entonces

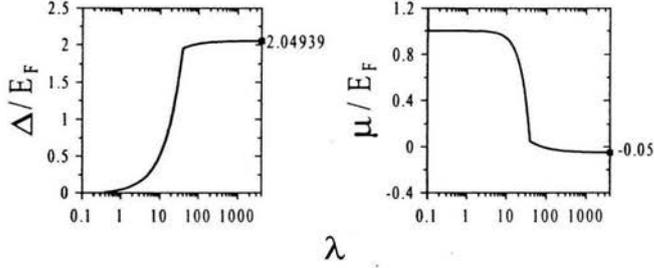


Figura 4.3. Parámetro de orden Δ y el potencial químico μ a temperatura cero como función del parámetro de acoplamiento λ .

podemos usar la aproximación (ver sección F.1 del Apéndice F) para calcular (4.24). Usando (F.6) obtenemos el resultado de BCS

$$k_B T_c = \frac{2e^\gamma}{\pi} \hbar \omega_D e^{-1/\lambda}, \quad (4.28)$$

que comparando con (4.18) obtenemos la razón de la brecha de energía a la temperatura crítica

$$\frac{2\Delta}{k_B T_c} = \frac{2\pi}{e^\gamma} \simeq 3.53. \quad (4.29)$$

Usando $\hbar \omega_D / E_F = 0.05$ como valor típico para los cupratos se tiene que $T_c \simeq 0.001 T_F$ para $\lambda = 1/4$ y $T_c \simeq 0.0008 T_F$ para $\lambda = 1/2$. Al aumentar la intensidad de la interacción por medio del parámetro de acoplamiento λ , el valor del potencial químico decrece desde su valor en acoplamiento débil E_F hasta $\hbar \omega_D$ cuando $\lambda \simeq 56.25$ que son valores muy grandes no físicos para λ . Para $\lambda \simeq 115.42$ se tiene $\mu(T_c) = 0$ con una temperatura de transición $T_c / T_F = 1 / \ln(2) \simeq 1.4427$. Este valor de la temperatura crítica coincide con el valor de la temperatura al cual el potencial químico de un gas ideal de fermiones en 2D es cero. En el límite en el que $\lambda \rightarrow \infty$ tenemos que el valor mínimo de $\mu / E_F = -\hbar \omega_D / E_F$ y una cota superior para $T_c / T_F = 1.47846$. Si aplicamos la Ec. (D.6) (donde se imaginan todos los fermiones apareados) en este límite obtenemos que $T_c / T_F \rightarrow \infty$, el cual carece totalmente de sentido físico. El resultado anterior manifiesta las profundas consecuencias de considerar los pares de agujeros, pues para la interacción modelo BCS (2.18), el BCS-Bose “crossover” considera pares de agujeros aun para λ muy grandes.

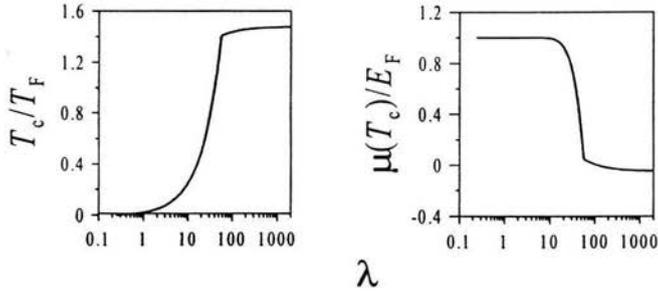


Figura 4.4. Se muestra la dependencia de la temperatura crítica y del potencial químico en T_c , (en unidades de T_F) como función del parámetro de acoplamiento λ , para el potencial modelo BCS.

4.2.2 Interacción de Nozières & Schmitt-Rink

Ahora consideramos un gas de electrones en 2D, donde los elementos de matriz del término de interacción en el espacio \mathbf{k} entre un par de electrones es modelada por una interacción atractiva separable y de alcance finito [78]

$$V_{kk'} = -v_0 g_k g_{k'}. \quad (4.30)$$

Aquí $v_0 \geq 0$ es la intensidad de la interacción y g_k está definida por

$$g_k \equiv (1 + k^2/k_0^2)^{-1/2}, \quad (4.31)$$

donde k_0 es el inverso del alcance de la interacción. Para esta forma particular de interacción electrónica, la ecuación (4.1) se escribe como

$$\Delta_k = \sum_{k'} v_0 g_k g_{k'} \frac{\Delta_{k'}}{2E_{k'}} \tanh\left(\frac{E_{k'}}{2k_B T}\right). \quad (4.32)$$

Nótese que la razón Δ_k/g_k es una cantidad independiente de k y por tanto una constante que llamaremos Δ por lo que $\Delta_k = \Delta g_k$. Junto con la ecuación de número (4.2) estudiamos el “crossover” para los casos:

- $k_0 \rightarrow \infty$, es decir $g_k = 1$, que corresponde al potencial de contacto $V(r) = -v_0 \delta(r)$, y
- $k_0 = k_F$, es decir, cuando el inverso del alcance de la interacción es del orden de la distancia entre partículas.

En el caso en que $k_0 \rightarrow \infty$, cuando se sustituye la sumatoria de (4.32) por la integral, resulta que esta última presenta una divergencia ultravioleta. Por lo que, como se sabe [79] para el potencial $\delta(\mathbf{r})$ en 2 dimensiones, se necesita regularizar la integral. En este trabajo regularizaremos la integral utilizando la ecuación de Schrödinger de dos cuerpos en el vacío, de donde podemos eliminar la intensidad de la interacción v_0 (que toma valores infinitesimales para asegurar un solo estado ligado), en favor de la energía de enlace B_2 de dos cuerpos en el vacío que interactúan con el mismo potencial (ver Apéndice A).

Interacción de alcance cero $k_0 \rightarrow \infty$. Las funciones Δ y μ de B_2 para temperatura cero se obtienen de resolver las ecuaciones siguientes

$$\int_0^\infty \frac{d\varepsilon}{(B_2 + 2\varepsilon)} - \int_0^\infty \frac{d\varepsilon}{2[(\varepsilon_k - \mu)^2 + \Delta^2]^{1/2}} = 0, \quad (4.33)$$

$$\int_0^\infty d\varepsilon \left\{ 1 - \frac{\varepsilon - \mu}{[(\varepsilon_k - \mu)^2 + \Delta^2]^{1/2}} \right\} = 2E_F. \quad (4.34)$$

Las integrales en (4.33) pueden calcularse analíticamente, reduciéndose a calcular el siguiente límite

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \ln \left[\frac{(\alpha^2 + \Delta^2) + \alpha \frac{B_2}{B_2 + 2\alpha}}{(\mu^2 + \Delta^2) - \mu \frac{B_2}{B_2 + 2\alpha}} \right] \quad (4.35)$$

el cual da como resultado $B_2/[(\mu^2 + \Delta^2)^{1/2} - \mu]$. Por lo que la ecuación (4.33) se reduce a

$$\frac{B_2}{(\mu^2 + \Delta^2)^{1/2} - \mu} = 1 \quad (4.36)$$

de la cual se obtiene

$$\Delta = \sqrt{B_2^2 + 2B_2\mu}. \quad (4.37)$$

Cuando se evalúa la integral en (4.34) se obtiene

$$\Delta \left[\frac{\mu}{\Delta} + \left(\frac{\mu^2}{\Delta^2} + 1 \right)^{1/2} \right] = 2E_F, \quad (4.38)$$

con lo que

$$\mu = E_F - \frac{\Delta^2}{4E_F}. \quad (4.39)$$

Resolviendo (4.37) y (4.39) para Δ y μ como función de B_2 tenemos

$$\Delta = \sqrt{2B_2E_F} \quad (4.40)$$

$$\mu = E_F - B_2/2 \quad (4.41)$$

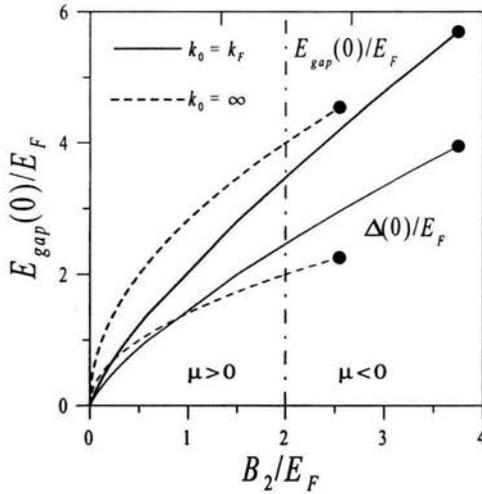


Figura 4.5. La brecha de energía E_{gap} y el parámetro de orden Δ a $T = 0$ como función del parámetro de acoplamiento B_2/E_F . Para $\mu > 0$ (ó equivalentemente $B_2/E_F < 2$) se tiene $E_{gap}/E_F = 2\Delta/E_F$ y $2\sqrt{(\mu/E_F)^2 + (\Delta/E_F)^2}$ para $\mu < 0$ ($B_2/E_F > 2$). Los puntos en los que terminan las curvas se refieren a los valores de E_{gap}/E_F y Δ/E_F cuando B_2/E_F alcanza su valor máximo posible ($= \pi/e^\gamma \ln 2$ para el caso $k_0 \rightarrow \infty$ y $\simeq 3.746$ para el caso $k_0 = k_F$) calculado de apartir del hecho de que $k_B T_c$ es una cantidad no negativa.

que fueron obtenidas por Miyake en 1983 [80] en el contexto de la superfluidez de películas de ^3He . El significado físico del parámetro de orden Δ en términos de B_2 es inmediato, la brecha de energía 2Δ crece conforme la interacción entre dos electrones aumenta como se espera (ver Fig. 4.5). Del potencial químico obtenemos la siguiente información, en el límite de acoplamiento débil donde $B_2/E_F \ll 1$ tenemos que $\mu \simeq E_F$ y $\Delta \simeq 0$, aunque parece que el estado normal, $\mu = E_F$ $\Delta = 0$, no es afectado de manera dramática, el hecho que $\Delta \neq 0$ manifiesta la fase superconductora [46],[81] drásticamente distinta de la fase normal. Conforme B_2 aumenta μ puede apartarse notablemente del valor E_F (incluso puede alcanzar valores negativos ver Fig. 4.6) y el sistema se vuelve menos degenerado debido a la formación de pares de Cooper. Para $B_2/E_F > 2$ el potencial químico se hace negativo lo cual indica, en el contexto del trabajo hecho por Leggett [61], una transición al límite de Bose. Como en este caso Δ es independiente de k se tiene de (4.5) que (ver

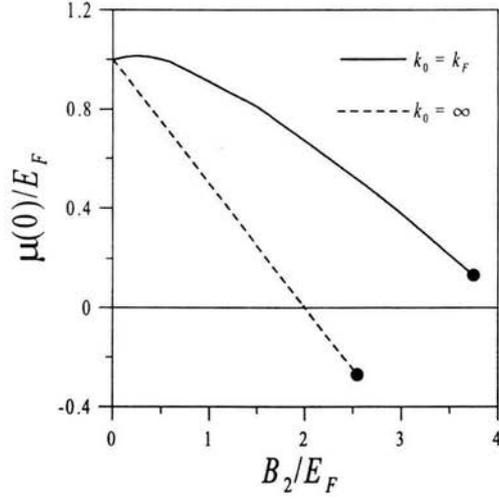


Figura 4.6. El potencial químico μ (en unidades de E_F) a temperatura cero para el caso de alcance cero (línea en trazas) y alcance r_0 igual a la distancia entre partículas. Los puntos corresponden al valor de μ/E_F en el valor máximo posible de B_2/E_F ($= \pi/e^\gamma \ln 2$ para el caso $k_0 \rightarrow \infty$ y $\simeq 3.746$ para el caso $k_0 = k_F$) calculado a partir del hecho de que $k_B T_c$ es una cantidad no negativa.

Fig. 4.2)

$$E_{gap} = \begin{cases} 2\Delta & \mu > 0 \\ 2\sqrt{\mu^2 + \Delta^2} & \mu < 0, \end{cases} \quad (4.42)$$

por lo que sustituyendo (4.40) y (4.41) se tiene que

$$E_{gap} = \begin{cases} 2\sqrt{2B_2E_F} & (0 < B_2 \leq 2E_F) \\ 2E_F + B_2 & (B_2 > 2E_F). \end{cases} \quad (4.43)$$

La temperatura de transición T_c es calculada, como antes, a partir de la condición $\Delta(T_c) = 0$. Por lo que necesitamos resolver las ecuaciones siguientes para $\mu(T_c) \equiv \mu_c$ y T_c

$$\int_0^\infty \frac{d\varepsilon}{B_2 + 2\varepsilon} - \int_0^\infty \frac{d\varepsilon}{2(\varepsilon - \mu_c)} \tanh\left(\frac{\varepsilon - \mu_c}{2k_B T_c}\right) = 0 \quad (4.44)$$

$$\int_0^{\infty} d\varepsilon \left[1 - \tanh \left(\frac{\varepsilon - \mu_c}{2k_B T_c} \right) \right] = 2E_F. \quad (4.45)$$

La primera integral en (4.44) es inmediata y la segunda da como resultado $\ln(4e^{2\gamma}\mu_c/\pi^2 k_B^2 T_c^2) + \int_{\mu_c/2k_B T_c}^{\infty} dx [e^{-2x}/x \cosh(x)]$ que en el límite de acoplamiento débil se reduce a $\ln(4e^{2\gamma}\mu_c/\pi^2 k_B^2 T_c^2)$ (ver sección F.1 del Apéndice F). Así, sustituyendo en (4.44) y haciendo un poco de algebra se tiene que

$$k_B T_c = \frac{e^\gamma}{\pi} \sqrt{2\mu_c B_2 \exp[f(\mu_c/2k_B T_c)]}, \quad (4.46)$$

donde $\gamma = 0.57722$ es la constante gamma de Euler y

$$f(\mu_c/2k_B T_c) \equiv \int_{\mu_c/2k_B T_c}^{\infty} dx \frac{e^{-2x}}{x \cosh x}. \quad (4.47)$$

Haciendo la integral que aparece en la ecuación de número (4.45) y un poco de algebra, tenemos

$$\mu_c + 2k_B T_c \ln \left[2 \cosh \left(\frac{\mu_c}{2k_B T_c} \right) \right] = 2E_F, \quad (4.48)$$

una ecuación implícita para μ_c . Esta ecuación coincide con la expresión calculada en la Ref. [82]. Sin embargo, usando la identidad $1 - \tanh(x/2) \equiv 2[e^x + 1]^{-1}$ tenemos que (4.45) puede escribirse como

$$\int_0^{\infty} d\varepsilon \frac{2}{\exp[(\varepsilon - \mu_c)/k_B T_c] + 1} = 2E_F, \quad (4.49)$$

que tiene la forma del número total de fermiones libres a $T = T_c$. La integral puede realizarse analíticamente y da como resultado

$$k_B T_c \ln \left[1 + \exp \left(\frac{\mu_c}{k_B T_c} \right) \right] = E_F, \quad (4.50)$$

de donde se obtiene una expresión explícita para μ_c , a saber

$$\mu_c = k_B T_c \ln \left[\exp \left(\frac{E_F}{k_B T_c} \right) - 1 \right]. \quad (4.51)$$

Sustituyendo en (4.46) tenemos una ecuación implícita para T_c como función del parámetro de acoplamiento B_2

$$k_B T_c = \frac{2e^{2\gamma}}{\pi^2} B_2 \ln \left[\exp \left(\frac{E_F}{k_B T_c} \right) - 1 \right] \exp[h(k_B T_c)], \quad (4.52)$$

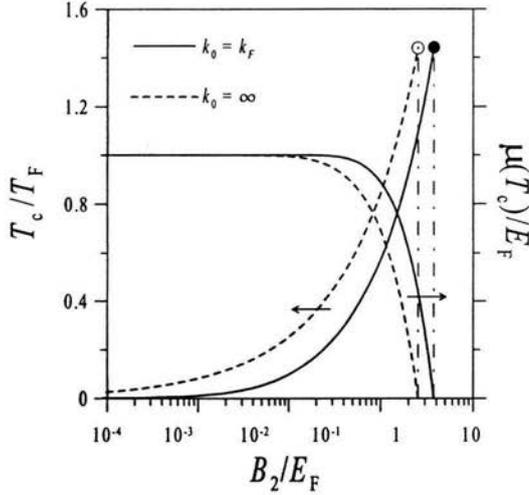


Figura 4.7. Dependencia de T_c (en unidades de T_F) y de $\mu(T_c)$ (en unidades de E_F) como función del parámetro de acoplamiento B_2 (en unidades de E_F).

donde ahora

$$h(k_B T_c) \equiv \int_{\ln[\exp(E_F/k_B T_c) - 1]^{1/2}}^{\infty} dx \frac{e^{-2x}}{x \cosh(x)}.$$

De este modo la ecuación (4.51) junto con (4.52) permiten evaluar T_c y μ_c como funciones del parámetro de acoplamiento B_2 .

Puesto que $k_B T_c$ es una cantidad no negativa, se requiere por autoconsistencia de la ecuación (4.52) que $k_B T_c/E_F \leq 1/\ln(2) \simeq 1.4427$. Esto restringe los valores del potencial químico μ_c al intervalo $[0, E_F]$ y los de B_2 al intervalo entre 0 y $\pi/e^\gamma \ln 2 \simeq 2.545$ (ver Fig. 4.7). Que el valor mínimo de μ_c sea cero es consistente con el hecho de que la brecha de energía definida en (4.5) para valores de B_2 menores que 2 sea cero en T_c . Con esto podemos dar el comportamiento del potencial químico μ y del parámetro de orden Δ como función de la temperatura para valores fijos del parámetro de acoplamiento B_2 (ver Fig. 4.8 y Fig. 4.9). En el potencial químico encontramos un “pellizco” (“kink”) en $T = T_c$ ya encontrado por Van der Marel [83].

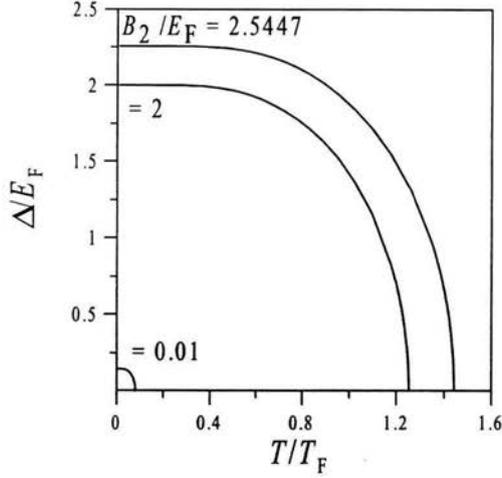


Figura 4.8. Comportamiento del parámetro de orden Δ como función de la temperatura para valores del parámetro de acoplamiento $B_2/E_F = 0.01, 2, 2.5447$.

Si se combina (4.43) con (4.52) tenemos para la razón $E_{gap}(0)/k_B T_c$

$$\frac{E_{gap}(0)}{k_B T_c} = \frac{2\pi}{e^\gamma} \sqrt{\frac{E_F}{k_B T_c \ln[\exp(E_F/k_B T_c) - 1] \exp\{h(k_B T_c)\}}} \quad (4.53)$$

si $0 < B_2 \leq 2E_F$, y

$$= \left(E_F + \frac{B_2}{2}\right) \sqrt{\frac{2\pi^2}{e^{2\gamma} B_2 k_B T_c \ln[\exp(E_F/k_B T_c) - 1] \exp\{h(k_B T_c)\}}} \quad (4.54)$$

si $2E_F < B_2 \leq \pi/e^\gamma \ln 2$.

En el límite de acoplamiento débil ($B_2 \rightarrow 0$) se tiene que $E_F \gg k_B T_c$ por lo que $\exp\{h(k_B T_c)\} \approx 1$ y siendo $\mu > 0$ obtenemos el resultado bien conocido de BCS para la razón $E_{gap}/k_B T_c$, es decir,

$$\frac{E_{gap}}{k_B T_c} = \frac{2\pi}{e^\gamma} \simeq 3.53, \quad (4.55)$$

Relación entre B_2 y λ . Experimentalmente la cantidad que tiene significado físico independientemente del modelo de interacción es la brecha de energía E_{gap} . A $T = 0$

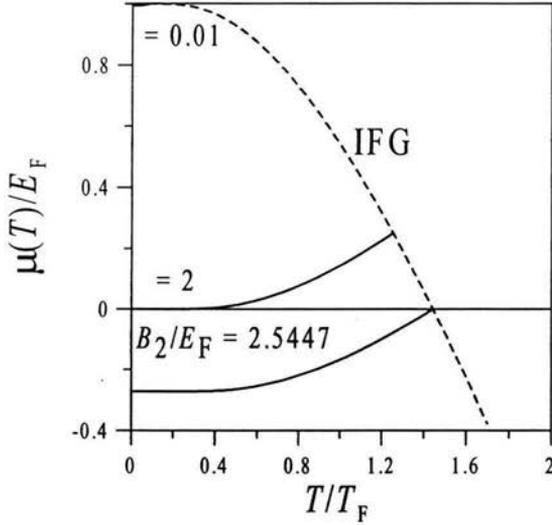


Figura 4.9. El potencial químico μ como función de la temperatura para $B_2/E_F = 0.01, 2, 2.5447$.

podemos relacionar B_2 y λ por medio de las cantidades observables E_{gap} y μ (4.17), (4.16) y (4.40), (4.41). Igualando ya sea (4.17) con (4.41) ó (4.16) con (4.40) obtenemos la misma relación entre B_2 y λ dada por

$$B_2 = \frac{\hbar^2 \omega_D^2}{2E_F \sinh^2(1/\lambda)} \quad (4.56)$$

que se muestra en la Fig. 4.10 para tres valores distintos de $\hbar\omega_D/E_F$.

Interacción de alcance finito $k_0 = k_F$. Con el propósito de ir más allá de la interacción de contacto, ahora estudiamos el caso particular cuando el inverso del alcance de la interacción es del orden del inverso de la distancia entre partículas. La distancia entre partículas r_0 en un gas de Fermi bidimensional, está definida por la relación $L^2/N = \pi r_0^2$, donde L^2 es el área del sistema y $N = k_F/2\pi$ el número total de partículas con k_F el momento de Fermi, por lo que

$$r_0 = \sqrt{2} k_F^{-1}. \quad (4.57)$$

Es decir, ponemos $k_0 = k_F$ donde k_F es el momento de Fermi. En este caso $\Delta_k = \Delta g_k = \Delta[1 + k^2/k_F^2]^{-1/2}$. Uno puede encontrar Δ resolviendo (4.1) y (4.2) simultáneamente

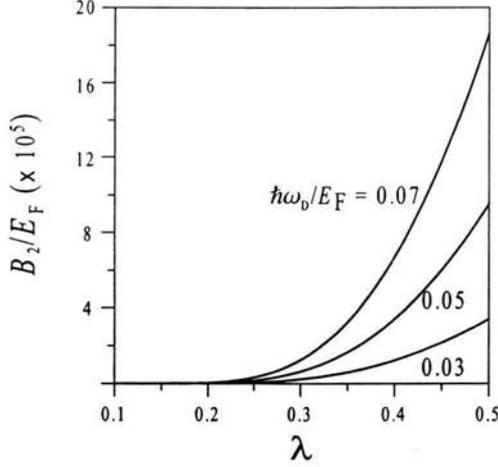


Figura 4.10. Relación entre B_2 y λ para valores de $\hbar\omega_D/E_F = 0.03, 0.05, 0.07$.

(poniendo $T = 0$), es decir

$$\int_0^\infty d\varepsilon \frac{1}{(1 + \varepsilon/E_F)(B_2 + 2\varepsilon)} - \int_0^\infty d\varepsilon \frac{1}{(1 + \varepsilon/E_F)2E(\varepsilon)} \tanh \left[\frac{E(\varepsilon)}{2k_B T} \right] = 0, \quad (4.58)$$

$$\int_0^\infty d\varepsilon \left\{ 1 - \frac{\varepsilon - \mu}{E(\varepsilon)} \tanh \left[\frac{E(\varepsilon)}{2k_B T} \right] \right\} = 2E_F, \quad (4.59)$$

donde $E(\varepsilon)$ es simplemente $[(\varepsilon - \mu)^2 + \Delta^2(1 + \varepsilon/E_F)^{-1}]^{1/2}$ y E_F la energía de Fermi. En este caso, el potencial químico μ a $T = 0$ disminuye de forma más lenta con B_2 y no alcanza valores negativos en contraste con el caso donde la interacción es de alcance cero (ver Fig. 4.6). El máximo valor permitido de B_2 es determinado, como en el caso de interacción de alcance cero, por aquel tal que $\mu(T_c) = 0$ y está dado aproximadamente por 3.746. En la Fig. 4.5 se mostró la dependencia de $E_{gap}(0)$ y $\Delta(0)$ respecto de B_2 en el intervalo de validez y se observa que debido a que el valor máximo de B_2 es mayor para el caso de interacción de alcance finito, $E_{gap}(0)$ y $\Delta(0)$ alcanzan valores mayores.

Para determinar T_c ponemos $\Delta(T_c) = 0$ en (4.58) y (4.59), lo que da el par de ecuaciones

$$\int_0^\infty \frac{d\varepsilon}{(1 + \varepsilon/E_F)(B_2 + 2\varepsilon)} - \int_0^\infty \frac{d\varepsilon}{2(1 + \varepsilon/E_F)|(\varepsilon - \mu_c)|} \tanh \frac{|\varepsilon - \mu_c|}{2k_B T_c} = 0, \quad (4.60)$$

$$\int_0^\infty d\varepsilon \left[1 - \frac{\varepsilon - \mu}{|\varepsilon - \mu|} \tanh \frac{|\varepsilon - \mu_c|}{2k_B T_c} \right] = 2E_F. \quad (4.61)$$

Haciendo la primera integral en (4.60), ésta se reduce a

$$\frac{E_F}{B_2 - 2E_F} \ln \frac{B_2}{2E_F} = \int_0^\infty \frac{d\varepsilon}{2(1 + \varepsilon/E_F)(\varepsilon - \mu_c)} \tanh \frac{\varepsilon - \mu_c}{2k_B T_c}, \quad (4.62)$$

mientras que la integral que aparece en (4.61) ya se ha calculado, dando por resultado la expresión explícita para el potencial químico (4.51). Las $k_B T_c$ y μ_c (en unidades de E_F) como función de B_2 se muestran en la Fig. 4.7 donde puede notarse que $k_B T_c/E_F$ es mayor para el caso de interacción de alcance cero para valores fijos B_2 en el intervalo 0 y $\pi/e^\gamma \ln 2$.

4.3 Discusión

Esta extensión a la teoría BCS no puede predecir temperaturas más allá de las que predice BCS cuando se usa el modelo de interacción de BCS para valores físicamente adecuados de λ , es decir menores o del orden a 1/2 (ver Fig. 4.11). Para alcanzar temperaturas críticas altas uno debe recurrir a valores muy grandes (no físicos) de λ . Esto mismo ocurre para alcanzar el límite de Bose ($v_k^2 \ll 1$, para toda k [54]), donde de acuerdo con diversos autores [78],[54] la ecuación del “gap” se transforma en una ecuación de Schrödinger para el movimiento relativo de dos partículas de igual masa siempre que $v_k^2 \ll 1$ para toda k , lo cual se consigue cuando $\mu \ll 0$, entonces, se dice que la bosonización completa del sistema se ha alcanzado, por lo que sólo los pares de partículas son los que contribuyen al estado superconductor. Para el caso del modelo de interacción de BCS el mínimo valor de μ es $-\hbar\omega_D$ el cual no es $\ll 0$ para los valores típicos de los cupratos por lo que el límite de Bose no se alcanza, aún para valores muy grandes (no físicos) de λ . Así que en el rango de valores adecuados de λ (acoplamiento débil), el BCS-Bose “crossover” está limitado a la simetría perfecta de igual número de pares partículas y pares de agujeros como puede apreciarse del hecho que los coeficientes de Bogoliubov se parecen a la función escalón en acoplamiento débil (ver Fig. 4.12). En el caso de la interacción delta, el límite de Bose se alcanza, según la Ec. (4.41), cuando $\mu \sim -B_2/2$ ya que $B_2 \gg E_F$.

El hecho de que en acoplamiento débil tanto pares de partículas como pares de agujeros, en igual cantidad, contribuyen a la ecuación del gap, proviene de la ecuación (4.1), que a temperatura cero puede escribirse como

$$\Delta_k = - \sum_{\substack{k' \\ \varepsilon_{k'} > \mu}} V_{k,k'} \frac{\Delta_{k'} (u_{k'}^2 - v_{k'}^2)}{2(\varepsilon_{k'} - \mu)} - \sum_{\substack{k' \\ \varepsilon_{k'} < \mu}} V_{k,k'} \frac{\Delta_{k'} (u_{k'}^2 - v_{k'}^2)}{2(\varepsilon_{k'} - \mu)}, \quad (4.63)$$

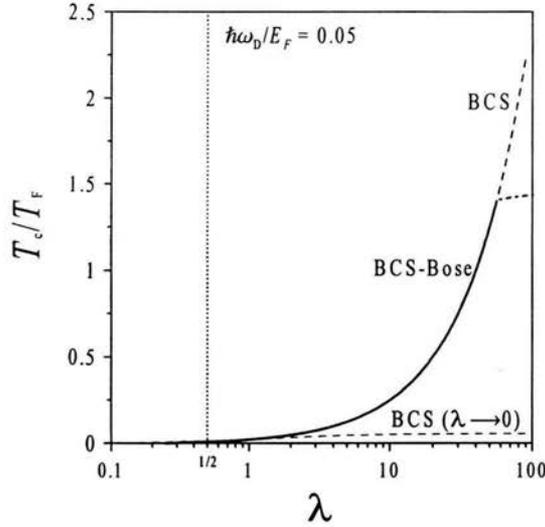


Figura 4.11. Temperatura crítica de transición superconductora T_c (en unidades de T_F) calculada a partir de la ecuación del “gap” BCS (línea en trazos) y a partir de las dos ecuaciones (“gap” y número) del BCS-Bose “crossover” (línea llena). Para valores de $\lambda \leq 56.25$ BCS y BCS-Bose coinciden casi perfectamente y es necesario pasar este límite de valores de λ para tener una diferencia notable entre ellas. La curva BCS superior se determina de la Ec. (2.23) en tanto que la curva BCS inferior es su límite de acoplamiento débil (2.24)

donde se ha usado que $E_k = (\varepsilon_k - \mu)/(u_k^2 - v_k^2)$. En acoplamiento débil, v_k^2 y u_k^2 pueden aproximarse por las funciones escalón $\theta(\varepsilon_k - \mu)$ y $\theta(\mu - \varepsilon_k)$ respectivamente y la Ec. (4.63) puede reescribirse como

$$\Delta_k \simeq - \sum_{\substack{k' \\ \varepsilon_{k'} > \mu}} V_{k,k'} \frac{\Delta_{k'}}{2(\varepsilon_{k'} - \mu)} + \sum_{\substack{k' \\ \varepsilon_{k'} < \mu}} V_{k,k'} \frac{\Delta_{k'}}{2(\mu - \varepsilon_{k'})}, \quad (4.64)$$

donde el primer término está asociado a los pares de partículas y el segundo a los pares de agujeros. Para el modelo de interacción BCS, Δ_k no depende de k y después de un

⁷Esta expresión para $E_k \equiv \sqrt{(\varepsilon_k - \mu)^2 + \Delta_k^2}$ se obtiene de las Ecs. (2.16) y (2.17)

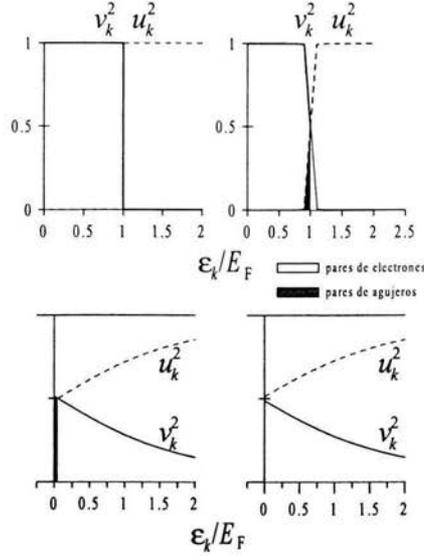


Figura 4.12. Coeficientes de Bogoliubov u_k^2 , v_k^2 como función de ϵ_k/E_F para diferentes valores del parámetro de acoplamiento $\lambda = 0.01, 0.5, 39$ y ∞ . Puede observarse que el límite de Bose ($v_k^2 \ll 1$ para toda k) *no* se alcanza, ni aun para valores muy grandes (no físicos) de λ . Para el caso $\lambda = \infty$ el potencial químico disminuye hasta su valor mínimo posible $-\hbar\omega_D$.

poco de algebra la ecuación (4.63) se reescribe como

$$1 = V \sum_k' \frac{1}{2(\epsilon_k - \mu)} - V \sum_k'' \frac{1}{2(\epsilon_k - \mu)}, \quad (4.65)$$

donde la suma primada del primer término significa sumar sobre k tal que $\mu < \epsilon_k < \mu + \hbar\omega_D$, mientras que la suma doblemente primada del segundo término significa sumar sobre k tal que $\mu - \hbar\omega_D < \epsilon_k < \mu$. Así, en acoplamiento débil esta última ecuación se asemeja mucho a la ecuación generalizada de pares de Cooper (ver Apéndice G) obtenida de la ecuación de Bethe-Salpeter (basada en el estado base del gas ideal de Fermi) que considera tanto pares de partículas como de agujeros.

Capítulo 5

5 El Modelo Completo Bosón-Fermión de la Superconductividad

5.1 Descripción del Modelo Completo Bosón-Fermión

Considerando a los pares de Cooper (ya sean de partículas o de agujeros) como bosones, el Modelo Completo Bosón-Fermión de la superconductividad [35],[36] (CBFM de sus siglas en inglés) describe la mezcla ternaria de dos gases de Bose con un gas de Fermi. El gas de Fermi está formado por los electrones desapareados (no ligados) del sistema; los gases ideales de Bose están formados por un gas de pares de Cooper de dos electrones (2e-CP's) y un gas de pares de Cooper de dos agujeros (2h-CP's). El modelo no considera la interacción entre electrones desapareados, la interacción entre 2e-CP's ni la interacción entre 2h-CP's y sólo considera la interacción entre electrones desapareados y 2e-CP's así como con los 2h-CP's debidas a los procesos elementales de decaimiento de 2e-CP's o de 2h-CP's en pares de electrones o de agujeros y los procesos elementales inversos de formación de 2e-CP's (2h-CP's) a partir de pares de electrones (agujeros) desapareados.

En el lenguaje de segunda cuantización sean $a_{\mathbf{k},s}^\dagger$ y $a_{\mathbf{k},s}$ los operadores de creación y aniquilación de electrones desapareados en d dimensiones que ocupan estados con momento \mathbf{k} , espín s , función de onda $\psi_{\mathbf{k},s}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}/L^{d/2}$ y energía $\varepsilon_{\mathbf{k}} = \hbar^2 k^2/2m$ con m la masa efectiva del electrón. Puesto que son operadores de fermiones satisfacen las siguientes reglas de anticonmutación

$$\begin{aligned} \{a_{\mathbf{k},s}, a_{\mathbf{k}',s'}^\dagger\} &\equiv a_{\mathbf{k},s} a_{\mathbf{k}',s'}^\dagger + a_{\mathbf{k}',s'}^\dagger a_{\mathbf{k},s} = \delta_{\mathbf{k}',\mathbf{k}} \delta_{s',s}, \\ \{a_{\mathbf{k},s}^\dagger, a_{\mathbf{k}',s'}^\dagger\} &= 0, \\ \{a_{\mathbf{k},s}, a_{\mathbf{k}',s'}\} &= 0, \end{aligned} \quad (5.1)$$

donde $\delta_{\mathbf{k}',\mathbf{k}}$ y $\delta_{s',s}$ son las usuales delta de Kronecker definidas por

$$\delta_{\sigma,\sigma'} = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma = \sigma' \\ 0 & \text{si } \sigma \neq \sigma'. \end{cases} \quad (5.2)$$

Los operadores, en segunda cuantización, de creación y aniquilación de 2e-CP's de estados de una partícula con momento de centro de masa \mathbf{K} , función de onda $\Phi_{\mathbf{K}}(\mathbf{R}) = e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}}/L^{d/2}$

y energía $E_+(K) = E_+(0) + \hbar^2 K^2/4m$ son designados con $b_{\mathbf{K}}^\dagger$ y $b_{\mathbf{K}}$. Por simplicidad asumimos que los 2e(2h)-CPs corresponden a un solo estado ligado. Puesto que 2e-CP's son bosones, sus operadores de creación y aniquilación satisfacen las reglas siguientes de conmutación

$$\begin{aligned} [b_{\mathbf{K}}, b_{\mathbf{K}'}^\dagger] &\equiv b_{\mathbf{K}} b_{\mathbf{K}'}^\dagger - b_{\mathbf{K}'}^\dagger b_{\mathbf{K}} = \delta_{\mathbf{K}', \mathbf{K}}; \\ [b_{\mathbf{K}}^\dagger, b_{\mathbf{K}'}^\dagger] &= 0, \\ [b_{\mathbf{K}}, b_{\mathbf{K}'}] &= 0, \end{aligned} \quad (5.3)$$

Análogamente, $c_{\mathbf{K}}^\dagger$ y $c_{\mathbf{K}}$ son los operadores de creación y aniquilación de 2h-CP's en los estados con momento de centro de masa \mathbf{K} , función de onda $\Phi_{\mathbf{K}}(\mathbf{R}) = e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}}/L^{d/2}$ y energía $E_-(K) = -E_-(0) + \hbar^2 K^2/4m$ que satisfacen

$$\begin{aligned} [c_{\mathbf{K}}, c_{\mathbf{K}'}^\dagger] &\equiv c_{\mathbf{K}} c_{\mathbf{K}'}^\dagger - c_{\mathbf{K}'}^\dagger c_{\mathbf{K}} = \delta_{\mathbf{K}', \mathbf{K}}, \\ [c_{\mathbf{K}}^\dagger, c_{\mathbf{K}'}^\dagger] &= 0, \\ [c_{\mathbf{K}}, c_{\mathbf{K}'}] &= 0. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Nótese que $E_{\pm}(0)$ (que supondremos positivas) son las energías de reposo de los 2e(2h)-CP's que tienen masa $2m$. Además supondremos que los operadores de creación y aniquilación de los electrones $a_{\mathbf{k},s}^\dagger, a_{\mathbf{k},s}$ conmutan cada uno, con los de los pares de Cooper 2e-CPs $b_{\mathbf{K}}^\dagger, b_{\mathbf{K}}$ y con los de 2h-CPs $c_{\mathbf{K}}^\dagger, c_{\mathbf{K}}$, es decir, supondremos que los operadores $a_{\mathbf{k},s}^\dagger, a_{\mathbf{k},s}$; $b_{\mathbf{K}}^\dagger, b_{\mathbf{K}}$ y $c_{\mathbf{K}}^\dagger, c_{\mathbf{K}}$ describen partículas cinemáticamente independientes.

El hamiltoniano del modelo se puede escribir como la suma de un hamiltoniano de orden cero H_0 y la de un hamiltoniano de interacción H_{int} , es decir,

$$H = H_0 + H_{int}, \quad (5.5)$$

donde el hamiltoniano de orden cero (que define el estado "normal" del sistema) es la suma de los hamiltonianos de partícula libre de los electrones desapareados, de los 2e-CP's y de los 2h-CP's, explícitamente [35],[36]

$$\begin{aligned} H_0 &= \sum_{\mathbf{k},s} \varepsilon_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k},s}^\dagger a_{\mathbf{k},s} + \\ &+ \sum_{\mathbf{K}} E_+(K) b_{\mathbf{K}}^\dagger b_{\mathbf{K}} - \sum_{\mathbf{K}} E_-(K) c_{\mathbf{K}}^\dagger c_{\mathbf{K}}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

La presencia de los dos últimos miembros, explicarían los experimentos [58],[84],[85] que detectan portadores de carga de pares en la cuantización del flujo magnético atrapado en

un anillo superconductor. El hamiltoniano de interacción H_{int} está relacionado con los procesos de decaimiento (formación) de un par de Cooper en (a partir de) dos electrones (especificados más adelante) dado por [35],[36]

$$\begin{aligned}
H_{int} = & L^{-d/2} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{K}} f_+(k) (a_{\mathbf{k}+\frac{1}{2}\mathbf{K}, \uparrow}^\dagger a_{-\mathbf{k}+\frac{1}{2}\mathbf{K}, \downarrow}^\dagger b_{\mathbf{K}} + \\
& + a_{-\mathbf{k}+\frac{1}{2}\mathbf{K}, \downarrow} a_{\mathbf{k}+\frac{1}{2}\mathbf{K}, \uparrow} b_{\mathbf{K}}^\dagger) + \\
& + L^{-d/2} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{K}} f_-(k) (a_{\mathbf{k}+\frac{1}{2}\mathbf{K}, \uparrow} a_{-\mathbf{k}+\frac{1}{2}\mathbf{K}, \downarrow} c_{\mathbf{K}} + \\
& + a_{-\mathbf{k}+\frac{1}{2}\mathbf{K}, \downarrow}^\dagger a_{\mathbf{k}+\frac{1}{2}\mathbf{K}, \uparrow}^\dagger c_{\mathbf{K}}^\dagger),
\end{aligned} \tag{5.7}$$

donde $f_{\pm}(\mathbf{k})$ es la transformada de Fourier de la función de onda interna de los pares. El primer término describe la aniquilación de un 2e-CP con momento de centro de masas \mathbf{K} , con la respectiva creación de dos electrones de momento $\mathbf{k} + \frac{1}{2}\mathbf{K}$ y $-\mathbf{k} + \frac{1}{2}\mathbf{K}$ con espines opuestos, más el proceso inverso, es decir, la creación de un 2e-CP con momento de centro de masas \mathbf{K} con la respectiva aniquilación de dos electrones de momento $\mathbf{k} + \frac{1}{2}\mathbf{K}$ y $-\mathbf{k} + \frac{1}{2}\mathbf{K}$ con espines opuestos. El segundo término describe el proceso de la aniquilación de un 2h-CP con momento de centro de masas \mathbf{K} y la respectiva creación de dos agujeros de momento $\mathbf{k} + \frac{1}{2}\mathbf{K}$ y $-\mathbf{k} + \frac{1}{2}\mathbf{K}$, con espines opuestos más la creación de un 2h-CP con momento de centro de masas \mathbf{K} y la respectiva aniquilación de dos agujeros de momento $\mathbf{k} + \frac{1}{2}\mathbf{K}$ y $-\mathbf{k} + \frac{1}{2}\mathbf{K}$, con espines opuestos (ver Fig. 5.1). Como puede notarse, el momento y espín total se conserva en cada uno de los procesos anteriores así como el número total de electrones. Consideremos que nuestro sistema puede intercambiar con sus alrededores energía y electrones. Por lo que es conveniente usar el ensamble gran-canónico, donde las variables termodinámicas naturales son volumen $L^d \equiv V$, temperatura T y potencial químico μ .

El potencial termodinámico correspondiente que es función de las variables termodinámicas V, T, μ es llamado gran potencial y está dado por

$$\Omega(T, L^d, \mu) = -k_B T \ln \left[\text{Tr} \left\{ e^{-\beta(H - \mu \hat{N}_{op})} \right\} \right], \tag{5.8}$$

donde $\beta = 1/k_B T$, H es el hamiltoniano completo del sistema, \hat{N}_{op} es el operador de número *total* de electrones del sistema, el cual está dado por

$$\hat{N}_{op} = \sum_{\mathbf{k}, s} a_{\mathbf{k}, s}^\dagger a_{\mathbf{k}, s} + 2 \sum_{\mathbf{K}} b_{\mathbf{K}}^\dagger b_{\mathbf{K}} - 2 \sum_{\mathbf{K}} c_{\mathbf{K}}^\dagger c_{\mathbf{K}}, \tag{5.9}$$

es decir, el número total de electrones del sistema es la suma del número de electrones desapareados más el número de electrones que forman estados ligados de dos electrones,

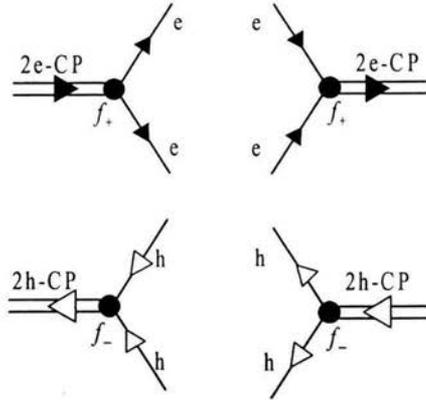


Figura 5.1. Diagramas que representan los vértices de interacción entre un par de Cooper de dos electrones (2e-CP) y dos electrones desapareados (arriba) y los vértices de interacción entre un par de Cooper de dos agujeros (2h-CP) y dos agujeros (abajo).

menos el número de agujeros que forman estados ligados de dos agujeros. Nótese que de (5.6), (5.7), y (5.9) podemos concluir que el hamiltoniano $H = H_0 + H_{int}$ del sistema conmuta con el operador de número total de electrones \hat{N}_{op} .

A temperaturas T suficientemente bajas y valores definidos del número total N de electrones, los pares de Cooper de dos electrones y pares de Cooper de dos agujeros que hay en el sistema pueden condensarse en sus estados de cero momento de centro de masa $\mathbf{K} = 0$. En otras palabras, puede ocurrir una ocupación macroscópica con N_0 pares de Cooper $2e$, y M_0 pares de Cooper de $2h$ que ocupan el estado con $\mathbf{K} = 0$.

Usando el postulado (o “receta”) de Bogoliubov [86], reemplazamos los operadores de creación y aniquilación de pares de Cooper con $\mathbf{K} = 0$ por $\sqrt{N_0}$ y $\sqrt{M_0}$, donde N_0 y M_0 son el número de pares de Cooper con momento de centro de masas cero de $2e$ y $2h$ respectivamente. Explícitamente, reemplazamos b_0^\dagger , b_0 por $\sqrt{N_0}$ y c_0^\dagger , c_0 por $\sqrt{M_0}$. Así, el

operador $\hat{H} - \mu\hat{N}_{op}$ se puede escribir como

$$\begin{aligned}
\hat{H} - \mu\hat{N}_{op} &\simeq \sum_{\mathbf{k},s} [\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu] a_{\mathbf{k},s}^\dagger a_{\mathbf{k},s} \\
&+ [E_+(0) - 2\mu] N_0 + \sum_{\mathbf{K} \neq 0} [E_+(\mathbf{K}) - 2\mu] b_{\mathbf{K}}^\dagger b_{\mathbf{K}} \\
&+ [2\mu - E_-(0)] M_0 + \sum_{\mathbf{K} \neq 0} [2\mu - E_-(\mathbf{K})] c_{\mathbf{K}}^\dagger c_{\mathbf{K}} \\
&+ \sum_{\mathbf{k}} \left[\sqrt{\frac{N_0}{L^d}} f_+(k) + \sqrt{\frac{M_0}{L^d}} f_-(k) \right] (a_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger a_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger + a_{-\mathbf{k}\downarrow} a_{\mathbf{k}\uparrow}). \quad (5.10)
\end{aligned}$$

Nótese que (5.10) depende explícitamente de los parámetros independientes N_0 y M_0 .

El operador (5.10) puede diagonalizarse usando la transformación de Bogoliubov-Valatin [87] dando por resultado (ver sección F.4 del Apéndice F)

$$\begin{aligned}
\hat{H} - \mu\hat{N}_{op} &\simeq \sum_{\mathbf{k},s} E_{\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{k},s}^\dagger \alpha_{\mathbf{k},s} \\
&+ \sum_{\mathbf{K} \neq 0} [E_+(\mathbf{K}) - 2\mu] b_{\mathbf{K}}^\dagger b_{\mathbf{K}} + \sum_{\mathbf{K} \neq 0} [2\mu - E_-(\mathbf{K})] c_{\mathbf{K}}^\dagger c_{\mathbf{K}} \\
&+ [E_+(0) - 2\mu] N_0 + [2\mu - E_-(0)] M_0 + \sum_{\mathbf{k}} (\xi_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}}), \quad (5.11)
\end{aligned}$$

donde $\alpha_{\mathbf{k},s}^\dagger$ y $\alpha_{\mathbf{k},s}$ están definidas en la transformación de Bogoliubov-Valatin (F.22). Aquí $E_+(0)$ y $E_-(0)$ son considerados como parámetros fenomenológicos del modelo y $E_{\mathbf{k}}$ corresponde al espectro de las cuasi-partículas de Bogoliubov

$$E_{\mathbf{k}} = \sqrt{(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu)^2 + \Delta_{\mathbf{k}}^2}, \quad (5.12)$$

con

$$\Delta_{\mathbf{k}} \equiv \sqrt{\frac{N_0}{L^d}} f_+(k) + \sqrt{\frac{M_0}{L^d}} f_-(k). \quad (5.13)$$

La termodinámica está completamente determinada cuando calculamos (5.8). Por ejemplo, la presión P , la entropía S y el calor específico C pueden determinarse a través de

$$\begin{aligned}
P &= -\frac{\Omega}{L^d}, \\
S/L^d &= -k_B \frac{\partial}{\partial T} (\Omega/L^d), \\
C/L^d &= T \frac{\partial}{\partial T} (S/L^d).
\end{aligned}$$

Los estados y valores propios de $\hat{H} - \mu \hat{N}_{op}$ son ahora fáciles de calcular y están dados por

$$\prod_{\mathbf{k},s} (\alpha_{\mathbf{k},s}^\dagger)^{n_{\mathbf{k},s}} \prod_{\mathbf{K} \neq 0} \frac{1}{\sqrt{N_{\mathbf{K}}!}} (b_{\mathbf{K}}^\dagger)^{N_{\mathbf{K}}} \prod_{\mathbf{K} \neq 0} \frac{1}{\sqrt{M_{\mathbf{K}}!}} (c_{\mathbf{K}}^\dagger)^{M_{\mathbf{K}}} |0\rangle,$$

y por

$$\begin{aligned} & \sum_{\mathbf{k},s} E_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k},s} + \sum_{\mathbf{K} \neq 0} [E_+(K) - 2\mu] N_{\mathbf{K}} + \sum_{\mathbf{K} \neq 0} [2\mu - E_-(K)] M_{\mathbf{K}} + \\ & + [E_+(0) - 2\mu] N_0 + [2\mu - E_-(0)] M_0 + \sum_{\mathbf{k}} (\xi_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}}) \end{aligned} \quad (5.14)$$

donde $|0\rangle$ es el nuevo estado de vacío definido de tal manera que $\alpha_{\mathbf{k},s}|0\rangle = b_{\mathbf{K}}|0\rangle = c_{\mathbf{K}}|0\rangle \equiv 0$. Entonces la Ec. (5.8) nos da que

$$\begin{aligned} \Omega(T, L^d, \mu, N_0, M_0) &= -k_B T \ln [Tr \{ e^{-\beta(H - \mu N_{op})} \}] \\ &= \sum_{\mathbf{k}} [\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu - E_{\mathbf{k}}] - 2k_B T \sum_{\mathbf{k}} \ln \{ 1 + \exp[-\beta E_{\mathbf{k}}] \} \\ &+ [E_+(0) - 2\mu] N_0 + k_B T \sum_{\mathbf{K} \neq 0} \ln [1 - \exp\{-\beta[E_+(K) - 2\mu]\}] \\ &+ [2\mu - E_-(0)] M_0 + k_B T \sum_{\mathbf{K} \neq 0} \ln [1 - \exp\{-\beta[2\mu - E_-(K)]\}]. \end{aligned} \quad (5.15)$$

El estado de equilibrio del sistema se obtiene minimizando $\Omega(T, L^d, \mu, N_0, M_0)$ respecto de N_0 y M_0 manteniendo fijo el número total de electrones N , es decir, el estado de equilibrio queda determinado por la siguiente tripleta de ecuaciones trascendentales acopladas en N_0 , M_0 y μ

$$\frac{\partial \Omega}{\partial N_0} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial M_0} = 0, \quad -\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} = N$$

de las que se obtiene

$$\sqrt{N_0 L^d} [E_+(0) - 2\mu] = \sum_{\mathbf{k}} \frac{\Delta_{\mathbf{k}} f_+(k)}{2E_{\mathbf{k}}} \tanh \frac{E_{\mathbf{k}}}{2k_B T} \quad (5.16)$$

$$\sqrt{M_0 L^d} [2\mu - E_-(0)] = \sum_{\mathbf{k}} \frac{\Delta_{\mathbf{k}} f_-(k)}{2E_{\mathbf{k}}} \tanh \frac{E_{\mathbf{k}}}{2k_B T} \quad (5.17)$$

$$2N_B(T) - 2M_B(T) + N_f(T) = N, \quad (5.18)$$

donde $N_B(T)$, $N_B(T)$ y $N_f(T)$ están definidas por

$$N_B(T) \equiv N_0 + \sum_{\mathbf{K} \neq 0} \left\{ \exp \left[\frac{E_+(K) - 2\mu}{k_B T} \right] - 1 \right\}^{-1} \equiv N_0(T) + N_{B+}(T), \quad (5.19)$$

$$M_B(T) \equiv M_0 + \sum_{\mathbf{K} \neq 0} \left\{ \exp \left[\frac{2\mu - E_-(K)}{k_B T} \right] - 1 \right\}^{-1} \equiv M_0(T) + M_{B^+}(T), \quad (5.20)$$

$$N_f(T) \equiv \sum_{\mathbf{k}} \left[1 - \frac{\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu}{E_{\mathbf{k}}} \tanh \frac{E_{\mathbf{k}}}{2k_B T} \right]. \quad (5.21)$$

Las ecuaciones (5.16) y (5.17) son ecuaciones tipo "gap" de BCS mientras (5.18) representa la conservación de número de electrones, es decir, el número total de electrones es la suma de los electrones que forman 2e-CPs, $2N_B(T)$, menos los que forman 2h-CPs, $2M_B(T)$, más los electrones desapareados $N_f(T)$. En el límite termodinámico, las variables termodinámicas extensivas (volumen, energía interna total, el calor específico, número total de partículas) tienden a infinito de tal modo sus densidades (densidad volumétrica de energía, del potencial termodinámico, etc.) se mantiene constante y finita. De este modo tenemos las densidades de número de los pares 2e y 2h son

$$n_B = \frac{N_B}{L^d} \quad \text{y} \quad m_B = \frac{M_B}{L^d},$$

respectivamente. Las ecuaciones (5.16), (5.17) y las (5.19)-(5.21) son escritas, usando (4.11), como

$$\sqrt{n_0} [E_+(0) - 2\mu] = \int_0^{\infty} d\varepsilon N(\varepsilon) \frac{\Delta(\varepsilon) f_+(\varepsilon)}{2E(\varepsilon)} \tanh \frac{E(\varepsilon)}{2k_B T} \quad (5.22)$$

$$\sqrt{m_0} [2\mu - E_-(0)] = \int_0^{\infty} d\varepsilon N(\varepsilon) \frac{\Delta(\varepsilon) f_-(\varepsilon)}{2E(\varepsilon)} \tanh \frac{E(\varepsilon)}{2k_B T} \quad (5.23)$$

$$n_B(T) \equiv n_0 + \int_{0^+}^{\infty} d\varepsilon M(\varepsilon) \left\{ \exp \left[\frac{E_+(K) - 2\mu}{k_B T} \right] - 1 \right\}^{-1}, \quad (5.24)$$

$$m_B(T) \equiv m_0 + \int_{0^+}^{\infty} d\varepsilon M(\varepsilon) \left\{ \exp \left[\frac{2\mu - E_-(K)}{k_B T} \right] - 1 \right\}^{-1}, \quad (5.25)$$

$$N_f(T) \equiv \int_0^{\infty} d\varepsilon N(\varepsilon) \left[1 - \frac{\varepsilon - \mu}{E(\varepsilon)} \tanh \frac{E(\varepsilon)}{2k_B T} \right], \quad (5.26)$$

donde $N(\varepsilon)$, $M(\varepsilon)$ son la densidad de estados fermiónica (de un solo espín) y bosónica, respectivamente, en d dimensiones. Las energías de los pares de electrones y pares de

agujeros están definidas por

$$\begin{aligned} E_+(K) - 2\mu &= \mathcal{E} + E_+(0) - 2\mu, \\ 2\mu - E_-(K) &= \mathcal{E} + 2\mu - E_-(0). \end{aligned} \quad (5.27)$$

El siguiente modelo de interacción es el que se usa a lo largo de este trabajo

$$f_{\pm}(\varepsilon) = \begin{cases} f & \text{for } \frac{1}{2}[E_{\pm}(0) - \delta\varepsilon] < \varepsilon < \frac{1}{2}[E_{\pm}(0) + \delta\varepsilon], \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases} \quad (5.28)$$

Este modelo es en sí una generalización del modelo de interacción de BCS donde se identifica $\delta\varepsilon \equiv \hbar\omega_D$ y $f \equiv \sqrt{2\delta\varepsilon V}$ donde V es la intensidad de la interacción en el modelo BCS.

Los parámetros fenomenológicos $E_{\pm}(0)$ pueden reemplazarse por dos nuevos parámetros de energía $\delta\varepsilon$, E_f definidos por

$$\delta\varepsilon \equiv \frac{1}{2}[E_+(0) - E_-(0)], \quad (5.29)$$

$$E_f \equiv \frac{1}{4}[E_+(0) + E_-(0)], \quad (5.30)$$

de tal modo que

$$E_{\pm}(0) = 2E_f \pm \delta\varepsilon. \quad (5.31)$$

Así, (5.28) puede escribirse como

$$f_+(\varepsilon) = \begin{cases} f & \text{si } E_f < \varepsilon < E_f + \delta\varepsilon, \\ 0 & \text{otro caso,} \end{cases} \quad (5.32)$$

y

$$f_-(\varepsilon) = \begin{cases} f & \text{si } E_f - \delta\varepsilon < \varepsilon < E_f, \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases} \quad (5.33)$$

Por lo que las Ecs. (5.16),(5.17) y (5.18) se escriben respectivamente como

$$2[E_f + \frac{\delta\varepsilon}{2} - \mu] = \int_{E_f}^{E_f + \delta\varepsilon} d\varepsilon N(\varepsilon) \frac{f^2}{2\sqrt{(\varepsilon - \mu)^2 + n_0 f^2}} \tanh \frac{\sqrt{(\varepsilon - \mu)^2 + n_0 f^2}}{2k_B T} \quad (5.34)$$

$$2[\mu + \frac{\delta\varepsilon}{2} - E_f] = \int_{E_f - \delta\varepsilon}^{E_f} d\varepsilon N(\varepsilon) \frac{f^2}{2\sqrt{(\varepsilon - \mu)^2 + m_0 f^2}} \tanh \frac{\sqrt{(\varepsilon - \mu)^2 + m_0 f^2}}{2k_B T} \quad (5.35)$$

$$\begin{aligned}
n &= 2n_0 - 2m_0 \tag{5.36} \\
&+ 2 \int_{0^+}^{\infty} d\varepsilon \frac{M(\varepsilon)}{\exp\{[E_+(K) - 2\mu]/k_B T\} - 1} - 2 \int_{0^+}^{\infty} d\varepsilon \frac{M(\varepsilon)}{\exp\{[2\mu - E_-(K)]/k_B T\} - 1} + \\
&+ 2 \left(\int_0^{E_f - \delta\varepsilon} + \int_{E_f + \delta\varepsilon}^{\infty} \right) d\varepsilon \frac{N(\varepsilon)}{\exp[(\varepsilon - \mu)/k_B T] + 1} + \\
&+ \int_{E_f - \delta\varepsilon}^{E_f} d\varepsilon N(\varepsilon) \left[1 - \frac{\varepsilon - \mu}{\sqrt{(\varepsilon - \mu)^2 + m_0 f^2}} \tanh \frac{\sqrt{(\varepsilon - \mu)^2 + m_0 f^2}}{2k_B T} \right] + \\
&+ \int_{E_f}^{E_f + \delta\varepsilon} d\varepsilon N(\varepsilon) \left[1 - \frac{\varepsilon - \mu}{\sqrt{(\varepsilon - \mu)^2 + n_0 f^2}} \tanh \frac{\sqrt{(\varepsilon - \mu)^2 + n_0 f^2}}{2k_B T} \right].
\end{aligned}$$

Uno puede verificar que a partir de las ecuaciones (5.34), (5.35) y (5.36) que engloban el CBFM uno obtiene [35]:

- 1) *La ecuación del gap y la ecuación de número del BCS-Bose crossover* bajo la simetría perfecta de igual número de 2e-CPs y 2h-CPs, es decir $n_B(T) \equiv m_B(T)$ y $n_0(T) \equiv m_0(T)$. Para que se satisfaga $n_B(T) \equiv m_B(T)$ para toda T debe pasar que $E_+(K) - 2\mu \equiv 2\mu - E_-(K)$, por lo que usando (5.30) tenemos que $\mu = E_f$. Así (5.34), (5.35) se escriben como

$$\delta\varepsilon = \int_{\mu}^{\mu + \delta\varepsilon} d\varepsilon N(\varepsilon) \frac{f^2}{2\sqrt{(\varepsilon - \mu)^2 + n_0 f^2}} \tanh \frac{\sqrt{(\varepsilon - \mu)^2 + n_0 f^2}}{2k_B T} \tag{5.37}$$

$$\delta\varepsilon = \int_{\mu - \delta\varepsilon}^{\mu} d\varepsilon N(\varepsilon) \frac{f^2}{2\sqrt{(\varepsilon - \mu)^2 + n_0 f^2}} \tanh \frac{\sqrt{(\varepsilon - \mu)^2 + n_0 f^2}}{2k_B T}. \tag{5.38}$$

Haciendo el cambio de variable $\xi = \varepsilon - \mu$ y suponiendo que $\delta\varepsilon \ll \mu$, las ecuaciones tipo gap (dos primeras ecuaciones de arriba) coinciden en una dada por

$$1 = \frac{N(\mu)f^2}{\delta\varepsilon} \int_0^{\delta\varepsilon} d\xi \frac{1}{2\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}} \tanh \frac{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}}{2k_B T}, \tag{5.39}$$

con $\Delta^2 \equiv n_0 f^2$. Mientras que la ecuación de número (5.36) se escribe como

$$n = 2 \left(\int_0^{\mu-\delta\epsilon} + \int_{\mu+\delta\epsilon}^{\infty} \right) d\epsilon \frac{N(\epsilon)}{\exp[(\epsilon - \mu)/k_B T] + 1} \quad (5.40)$$

$$+ N(\mu) \int_{\mu-\delta\epsilon}^{\mu+\delta\epsilon} d\epsilon \left[1 - \frac{\epsilon - \mu}{\sqrt{(\epsilon - \mu)^2 + n_0 f^2}} \tanh \frac{\sqrt{(\epsilon - \mu)^2 + n_0 f^2}}{2k_B T} \right],$$

que son las dos ecuaciones acopladas en Δ y μ del BCS-Bose crossover.

- 2) Más aún, en el límite de acoplamiento débil uno puede despreciar $\Delta = \sqrt{n_0 f^2}$ por pequeña y suponiendo $\mu = E_F$ (como ocurre en la teoría BCS) obtenemos la *ecuación del gap de BCS*

$$1 = N(E_F) V \int_0^{\hbar\omega_D} d\xi \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}} \tanh \frac{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}}{2k_B T} \quad (5.41)$$

donde se ha identificado

$$V \equiv f^2/2\delta\epsilon, \quad (5.42)$$

$$\delta\epsilon \equiv \hbar\omega_D.$$

- 3) Las 2 ecuaciones del modelo bosón-fermión de Friedberg y Lee [28] cuando sólo 2e-CPs son considerados, es decir, $m_0(T) \equiv 0$, $f_-(\epsilon) \equiv 0$ y se toma $E_f = E_+(0)/2$. Las dos condiciones que definen la fase pura de 2e-CPs nos lleva al siguiente par de ecuaciones

$$2E_f + \delta\epsilon - 2\mu = \int_{E_f}^{E_f+\delta\epsilon} d\epsilon N(\epsilon) \frac{f^2}{2\sqrt{(\epsilon - \mu)^2 + n_0 f^2}} \tanh \frac{\sqrt{(\epsilon - \mu)^2 + n_0 f^2}}{2k_B T} \quad (5.43)$$

$$n = 2n_0 + 2 \int_0^{\infty} d\mathcal{E} \frac{M(\mathcal{E})}{\exp\{[E_+(K) - 2\mu]/k_B T\} - 1} \quad (5.44)$$

$$+ 2 \left(\int_0^{E_f} + \int_{E_f+\delta\epsilon}^{\infty} \right) d\epsilon \frac{N(\epsilon)}{\exp[(\epsilon - \mu)/k_B T] + 1}$$

$$+ \int_{E_f}^{E_f+\delta\epsilon} d\epsilon N(\epsilon) \left[1 - \frac{\epsilon - \mu}{\sqrt{(\epsilon - \mu)^2 + n_0 f^2}} \tanh \frac{\sqrt{(\epsilon - \mu)^2 + n_0 f^2}}{2k_B T} \right]$$

- 4) En el límite de acoplamiento cero, es decir $f \rightarrow 0$, se tiene que $\mu = E_f + \delta\varepsilon/2$ y el modelo de Friedberg y Lee se reduce al modelo de la mezcla binaria ideal de un gas de bosones y un gas de fermiones [33] (IBFM, por sus siglas en inglés) descrito por la ecuación

$$n = 2n_0 + 2 \int_0^\infty d\varepsilon \frac{M(\varepsilon)}{\exp[\varepsilon/k_B T] - 1} + 2 \int_0^\infty d\varepsilon \frac{N(\varepsilon)}{\exp[(\varepsilon - \mu)/k_B T] + 1} \quad (5.45)$$

de la cual se calcula la fracción del condensado $n_0(n, T)$ en el intervalo de temperaturas $0 \leq T \leq T_c$. Puesto que $n_B(T) \equiv (n - n_f(T))/2$, donde

$$n_f(T) \equiv 2 \int_0^\infty d\varepsilon \frac{N(\varepsilon)}{\exp[(\varepsilon - \mu)/k_B T] + 1}, \quad (5.46)$$

se tiene que la temperatura crítica [definida por $n_0(T_c) \equiv 0$] para el caso en que los bosones en d dimensiones tienen una relación de dispersión $\mathcal{E} = C_s K^s$ con $s > 0$ queda determinada por la ecuación

$$n_B(T_c) = \frac{1}{2^{d-1} \Gamma(d/2) \pi^{d/2} C_s^{d/s} s} \int_0^\infty d\mathcal{E} \frac{\mathcal{E}^{d/s-1}}{\exp[\mathcal{E}/k_B T_c] - 1}. \quad (5.47)$$

- 5) Esto nos lleva a la ecuación (3.5), excepto que ahora es una ecuación implícita en T_c . En el caso tridimensional con $s = 2$, $C_s = \hbar^2/4m$, se tiene $T_c \simeq 3.31\hbar^2 \times [n_B(T_c)]^{2/3} / 2m_B k_B$ (ver Fig. 5.2).

Procederemos ahora a calcular la temperatura crítica de transición superconductor y construir los diagramas de fase en el plano (T, n) en 2 y 3 dimensiones cuando la relación de energía *vs* momento, del centro de masa de los pares de Cooper es cuadrática y cuando es lineal. La temperatura crítica queda determinada por la condición $\Delta(T_c) = \sqrt{n_0(T_c)} f_+(\varepsilon) + \sqrt{m_0(T_c)} f_-(\varepsilon) \equiv 0$ que estudiamos en los siguientes casos:

- *fase pura de 2e-CPs (s+)*: esta fase está definida por $m_B(T) \equiv 0$ para toda T y la temperatura crítica queda determinada por $n_0(T_{cs+}) = 0$
- *fase pura de 2h-CPs (s-)*: esta fase está definida por $n_B(T) \equiv 0$ y la temperatura crítica queda determinada por $m_0(T_{cs-}) = 0$
- *fase mixta (ss+)*: esta fase está determinada por $n_0(T_{css+}) \equiv 0$

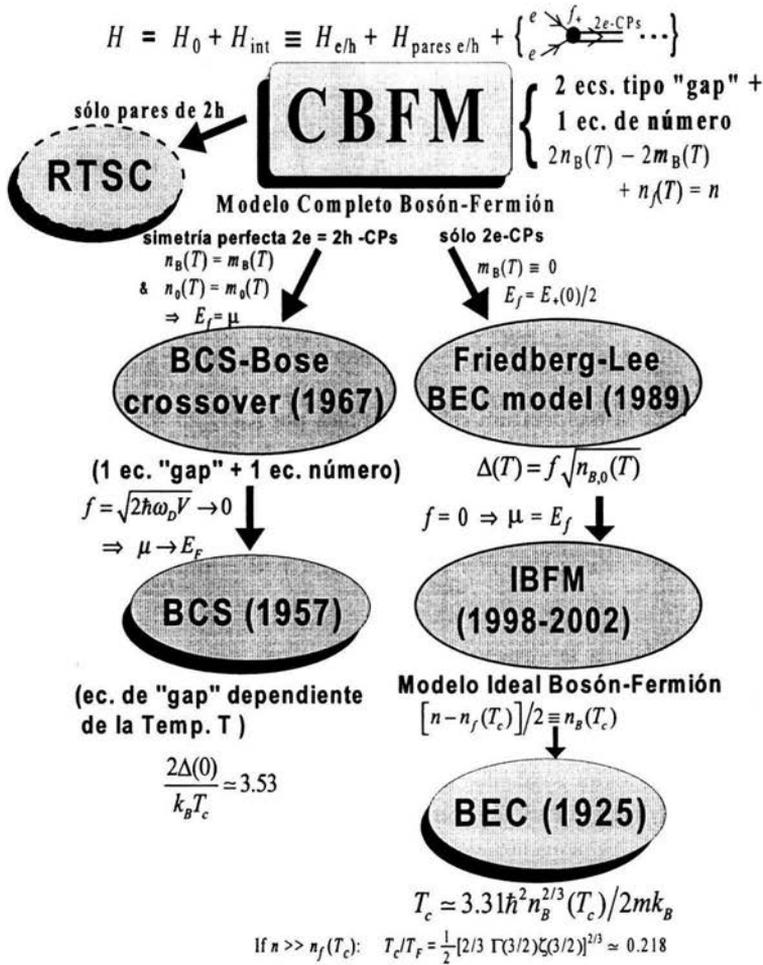


Figura 5.2. Organigrama donde se muestra cómo a partir del modelo completo bosón-fermión se obtienen, como casos particulares, la ecuación del gap de BCS por un lado y la fórmula (ahora implícita) de la temperatura de condensación Bose-Einstein por otro.

- *fase mixta (ss-)*: esta fase está determinada por $m_0(T_{css-}) \equiv 0$.

La temperatura crítica, el potencial químico entre otras, son calculados como función del parámetro n/n_f , donde n es la densidad de electrones y n_f por definición relacionada con E_f vía la Ec. (5.30) para valores fijos típicos de los cupratos [77] $\hbar\omega_D/E_F$ y $\lambda \equiv N(E_F)V$.

5.2 El CBFM en 3D

La densidad de estados electrónica (un solo espín) en d dimensiones $N(\varepsilon)$ está dada por

$$N(\varepsilon) = \frac{1}{\Gamma(d/2)2^d\pi^{d/2}} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{d/2} \varepsilon^{d/2-1}, \quad (5.48)$$

que en tres dimensiones se reduce a

$$N(\varepsilon) = \frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \varepsilon^{1/2}. \quad (5.49)$$

La densidad de estados bosónicos en d dimensiones asociada a los pares de Cooper $M(\mathcal{E})$, está dada por

$$M(\mathcal{E}) \equiv \frac{K^{d-1}}{\Gamma(d/2)2^{d-1}\pi^{d/2}} \frac{dK}{d\mathcal{E}} \quad (5.50)$$

y se tiene

$$M(\mathcal{E}) = \frac{2}{\pi^2} \left(\frac{m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \mathcal{E}^{1/2} \quad (5.51)$$

para el caso 3D y relación de dispersión cuadrática $\mathcal{E} = \hbar^2 K^2/4m$, y

$$M(\mathcal{E}) \simeq \frac{32}{\pi^2 \lambda^3 \hbar^3 v_F^3} \mathcal{E}^2 \quad (5.52)$$

para el caso de la relación de dispersión lineal $\mathcal{E} \simeq \lambda \hbar v_F K/4$ [88](ver Apéndice G).

5.2.1 Relación de dispersión cuadrática

Para el caso de la relación de dispersión cuadrática, la T_c para la fase pura $s+$ del condensado BE de 2e-CPs denotada con T_{cs+} queda determinada al resolver el siguiente par de ecuaciones:

$$E_f + \frac{\delta\varepsilon}{2} - \mu = \frac{f^2 m^{3/2}}{2^{5/2} \pi^2 \hbar^3} \int_{E_f}^{E_f + \delta\varepsilon} d\varepsilon \frac{\varepsilon^{1/2}}{2(\varepsilon - \mu)} \tanh \frac{(\varepsilon - \mu)}{2k_B T_{cs+}}, \quad (5.53)$$

$$n = \frac{m^{3/2}}{2\pi^2\hbar^3} \left\{ \int_0^\infty d\mathcal{E} \frac{\mathcal{E}^{1/2}}{\exp[(\mathcal{E} + 2E_f + \delta\varepsilon - 2\mu)/k_B T_{cs+}] - 1} + 2^{3/2} \int_0^\infty d\varepsilon \frac{\varepsilon^{1/2}}{\exp[(\varepsilon - \mu)/k_B T_{cs+}] + 1} \right\}, \quad (5.54)$$

que resultan de las Ecs. (5.34), (5.35) y (5.36) al poner $m_0(T) \equiv 0$ para toda T , $n_0(T_c) = 0$ y sustituir (5.49) y (5.51). Aquí $E_f \equiv (\hbar^2/2m)(3\pi^2 n_f)^{2/3} \equiv k_B T_f$ y $E_F = (\hbar^2/2m)(3\pi^2 n)^{2/3} \equiv k_B T_F$. Usando las identidades $V \equiv f^2/2\delta\varepsilon$ y $\delta\varepsilon \equiv \hbar\omega_D$ podemos relacionarlos con los valores $\lambda = 1/5$ y $\hbar\omega_D/E_F = 0.001$. La curva T_{cs+} (en unidades de T_F) que sirve de frontera de fase entre la fase normal y la fase $s+$ es representada por la línea en trazas en la Fig. 5.3, para valores grandes de n/n_f ésta se aproxima al conocido valor 0.218 (D.3). Análogamente, las dos ecuaciones que se resuelven para encontrar T_{cs-} para la fase $s-$ del condensado BE de 2h-CPs son

$$\mu + \frac{\delta\varepsilon}{2} - E_f = \frac{f^2 m^{3/2}}{2^{5/2} \pi^2 \hbar^3} \int_{E_f - \delta\varepsilon}^{E_f} d\varepsilon \frac{\varepsilon^{1/2}}{2(\varepsilon - \mu)} \tanh \frac{(\varepsilon - \mu)}{2k_B T_{cs-}}, \quad (5.55)$$

$$n = \frac{m^{3/2}}{2\pi^2\hbar^3} \left\{ - \int_0^\infty d\mathcal{E} \frac{\mathcal{E}^{1/2}}{\exp[(\mathcal{E} + 2E_f + \delta\varepsilon - 2\mu)/k_B T_{cs+}] - 1} \right. \quad (5.56)$$

$$\left. + 2^{3/2} \int_0^\infty d\varepsilon \frac{\varepsilon^{1/2}}{\exp[(\varepsilon - \mu)/k_B T_{cs+}] + 1} \right\}. \quad (5.57)$$

La curva T_{cs-}/T_F como función del parámetro n/n_f se muestra con una curva llena en la Fig. 5.3.

Las curvas T_{cs-}/T_F y T_{cs+}/T_F se intersectan aproximadamente en $n/n_f = 1$ (como puede apreciarse en la Fig. 5.4) con el valor $T_c/T_F \simeq 7.64 \times 10^{-6}$ que coincide aproximadamente con los valores calculados a partir del BCS-Bose crossover y BCS explícitamente, usando la relación (2.24). La frontera de fase T_{cs-}/T_f cae a cero cuando $n/n_f \simeq 1 + 9.54 \times 10^{-6}$ mientras que la frontera de fase T_{cs+}/T_f cae a cero cuando $n/n_f \simeq 1 - 9.55 \times 10^{-6}$ (ver Fig. 5.4).

Las fases mixtas $ss+$ (donde el número de 2e-CPs es cero solamente a T_c) y $ss-$, (donde el número de 2h-CPs es cero solamente a T_c) tienen como frontera las curvas T_{css+} y T_{css-} (en unidades de T_f) respectivamente (ver Fig. 5.4). Estas curvas resultan de resolver las

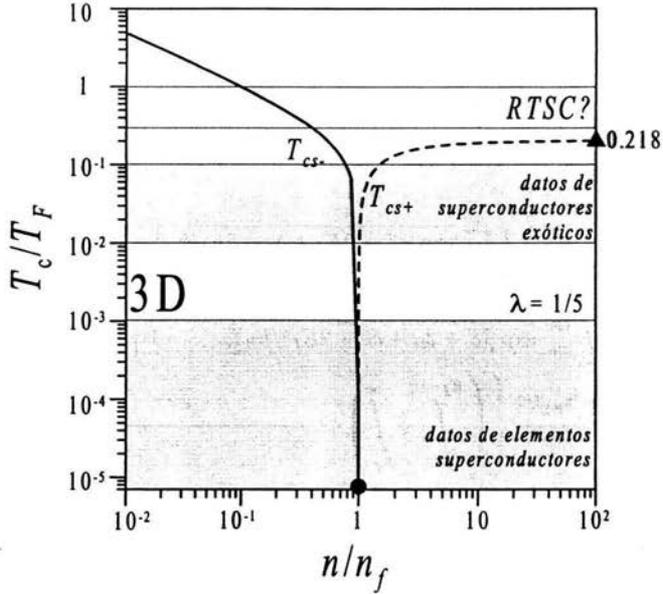


Figura 5.3. Diagrama de fases en el plano $T/T_f - n/n_f$ para el caso 3D y pares de Cooper con relación de dispersión energía *vs* momento de centro de masa cuadrática. La curva llena T_{cs-}/T_f corresponde a la frontera de fase entre la fase normal y la fase pura superconductora $s-$. La curva en trazos corresponde a la frontera de fases entre la fase normal y la fase superconductora $s+$. Esta última tiende aproximadamente al valor $T_c/T_f = 0.218$ (marcado con un triángulo) cuando no hay electrones desapareados (D.3). El punto indica la intersección entre las curvas T_{cs-} y T_{cs+} que ocurre aproximadamente en el valor de T_c calculada con BCS-Bose “crossover.”

tres ecuaciones siguientes acopladas en T_{css+} , μ y m_0 para la fase $ss+$

$$E_f + \frac{\delta\varepsilon}{2} - \mu = \frac{f^2 m^{3/2}}{2^{5/2} \pi^2 \hbar^3} \int_{E_f}^{E_f + \delta\varepsilon} d\varepsilon \frac{\varepsilon^{1/2}}{(\varepsilon - \mu)} \tanh \frac{(\varepsilon - \mu)}{2k_B T_{css+}} \quad (5.58)$$

$$\mu + \frac{\delta\varepsilon}{2} - E_f = \frac{f^2 m^{3/2}}{2^{5/2} \pi^2 \hbar^3} \int_{E_f - \delta\varepsilon}^{E_f} d\varepsilon \frac{\varepsilon^{1/2}}{\sqrt{(\varepsilon - \mu)^2 + m_0 f^2}} \tanh \frac{\sqrt{(\varepsilon - \mu)^2 + m_0 f^2}}{2k_B T_{css+}} \quad (5.59)$$

$$n = -2m_0 \quad (5.60)$$

$$\begin{aligned} & + \frac{4m^{3/2}}{\pi^2 \hbar^3} \left\{ \int_0^\infty d\varepsilon \frac{\varepsilon^{1/2}}{\exp[(\varepsilon + 2E_f + \delta\varepsilon - 2\mu)/k_B T_{css+}] - 1} - \right. \\ & \left. - \int_0^\infty d\varepsilon \frac{\varepsilon^{1/2}}{\exp[(\varepsilon + 2\mu + \delta\varepsilon - 2E_f)/k_B T_{css+}] - 1} \right\} + \\ & + \frac{2^{1/2} m^{3/2}}{\pi^2 \hbar^3} \left\{ \left(\int_0^{E_f - \delta\varepsilon} + \int_{E_f}^\infty \right) d\varepsilon \frac{\varepsilon^{1/2}}{\exp[(\varepsilon - \mu)/k_B T_{css+}] + 1} + \right. \\ & \left. + \int_{E_f - \delta\varepsilon}^{E_f} d\varepsilon \varepsilon^{1/2} \left[1 - \frac{\varepsilon - \mu}{\sqrt{(\varepsilon - \mu)^2 + m_0 f^2}} \tanh \frac{\sqrt{(\varepsilon - \mu)^2 + m_0 f^2}}{2k_B T_{css+}} \right] \right\}, \end{aligned}$$

y en T_{css-} , μ y n_0 para la fase $ss-$

$$E_f + \frac{\delta\varepsilon}{2} - \mu = \frac{f^2 m^{3/2}}{2^{5/2} \pi^2 \hbar^3} \int_{E_f - \delta\varepsilon}^{E_f} d\varepsilon \frac{\varepsilon^{1/2}}{(\varepsilon - \mu)} \tanh \frac{(\varepsilon - \mu)}{2k_B T_{css-}} \quad (5.61)$$

$$\mu + \frac{\delta\varepsilon}{2} - E_f = \frac{f^2 m^{3/2}}{2^{5/2} \pi^2 \hbar^3} \int_{E_f}^{E_f + \delta\varepsilon} d\varepsilon \frac{\varepsilon^{1/2}}{(\varepsilon - \mu)} \tanh \frac{(\varepsilon - \mu)}{2k_B T_{css-}} \quad (5.62)$$

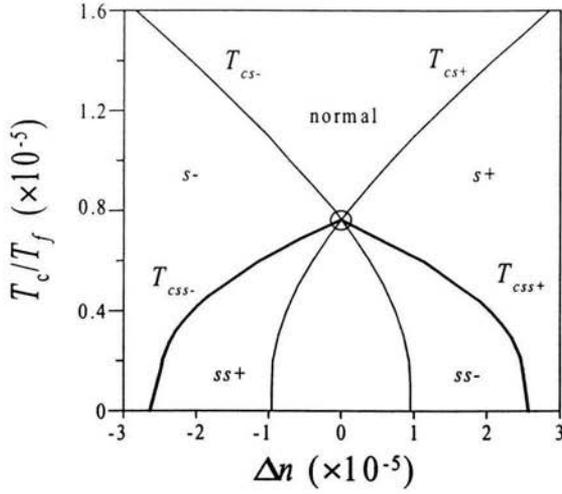


Figura 5.4. Diagrama de fases en el plano $T/T_f - \Delta n$, para el caso 3D y relación de dispersión cuadrática donde $\Delta n \equiv n/n_f - 1$. Este diagrama muestra con mejor detalle lo que ocurre alrededor del punto de intersección de las curvas T_{cs-}/T_f y T_{cs+}/T_f , donde además se muestran las fronteras entre las fases superconductoras puras $s+$, $s-$ y las fases superconductoras mixtas $ss-$, $ss+$.

$$\begin{aligned}
 n = 2n_0 & \quad (5.63) \\
 & + \frac{4m^{3/2}}{\pi^2 \hbar^3} \left\{ \int_0^\infty d\mathcal{E} \frac{\mathcal{E}^{1/2}}{\exp[(\mathcal{E} + 2E_f + \delta\epsilon - 2\mu)/k_B T_{css-}] - 1} - \right. \\
 & \left. - \int_0^\infty d\mathcal{E} \frac{\mathcal{E}^{1/2}}{\exp[(\mathcal{E} + 2\mu + \delta\epsilon - 2E_f)/k_B T_{css-}] - 1} \right\} + \\
 & + \frac{2^{1/2} m^{3/2}}{\pi^2 \hbar^3} \left\{ \left(\int_0^{E_f} + \int_{E_f + \delta\epsilon}^\infty \right) d\epsilon \frac{\epsilon^{1/2}}{\exp[(\epsilon - \mu)/k_B T_{css-}] + 1} + \right. \\
 & \left. + \int_{E_f}^{E_f + \delta\epsilon} d\epsilon \epsilon^{1/2} \left[1 - \frac{\epsilon - \mu}{\sqrt{(\epsilon - \mu)^2 + n_0 f^2}} \tanh \frac{\sqrt{(\epsilon - \mu)^2 + n_0 f^2}}{2k_B T_{css-}} \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

5.2.2 Relación de dispersión lineal

Cuando consideramos la relación de dispersión lineal $\mathcal{E} \simeq \lambda \hbar v_F K/4$, [88] las ecuaciones para calcular T_c en las fases puras $s+$, $s-$ y en las fases mixtas $ss+$, $ss-$ lucen muy similares a las anteriores, ya que $N(\varepsilon)$ es la misma en ambos casos. Sin embargo, hay una diferencia fundamental en las ecuaciones donde aparece la densidad de estados bosónica $M(\mathcal{E})$, pues ahora ésta depende del parámetro de acoplamiento λ . Puesto que es en la ecuación de número donde aparece $M(\mathcal{E})$, ésta se ve modificada de la siguiente manera: para la fases puras $s\pm$

$$n = \pm \frac{2^{9/2} m^{3/2}}{\lambda^3 \pi^2 \hbar^3 E_F^{3/2}} \int_0^\infty d\mathcal{E} \frac{\mathcal{E}^2}{\exp[(\mathcal{E} \pm 2E_f + \delta\varepsilon \mp 2\mu)/k_B T_{cs\pm}] - 1} + \frac{2^{1/2} m^{3/2}}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty d\varepsilon \frac{\varepsilon^{1/2}}{\exp[(\varepsilon - \mu)/k_B T_{cs\pm}] + 1}, \quad (5.64)$$

para la fase mixta $ss+$

$$n = -2m_0 + \frac{2^{9/2} m^{3/2}}{\lambda^3 \pi^2 \hbar^3 E_F^{3/2}} \left\{ \int_0^\infty d\mathcal{E} \frac{\mathcal{E}^2}{\exp[(\mathcal{E} + 2E_f + \delta\varepsilon - 2\mu)/k_B T_{css+}] - 1} - \int_0^\infty d\mathcal{E} \frac{\mathcal{E}^2}{\exp[(\mathcal{E} + 2\mu + \delta\varepsilon - 2E_f)/k_B T_{css+}] - 1} \right\} + \frac{2^{1/2} m^{3/2}}{\pi^2 \hbar^3} \left\{ \left(\int_0^{E_f - \delta\varepsilon} + \int_{E_f}^\infty \right) d\varepsilon \frac{\varepsilon^{1/2}}{\exp[(\varepsilon - \mu)/k_B T_{css+}] + 1} + \int_{E_f - \delta\varepsilon}^{E_f} d\varepsilon \varepsilon^{1/2} \left[1 - \frac{\varepsilon - \mu}{\sqrt{(\varepsilon - \mu)^2 + m_0 f^2}} \tanh \frac{\sqrt{(\varepsilon - \mu)^2 + m_0 f^2}}{2k_B T_{css+}} \right] \right\} \quad (5.65)$$

y finalmente para la fase $ss-$

$$\begin{aligned}
n = & 2n_0 + \frac{2^{9/2}m^{3/2}}{\lambda^3\pi^2\hbar^3 E_F^{3/2}} \left\{ \int_0^\infty d\mathcal{E} \frac{\mathcal{E}^2}{\exp[(\mathcal{E} + 2E_f + \delta\epsilon - 2\mu)/k_B T_{cs-}] - 1} - \right. \\
& \left. - \int_0^\infty d\mathcal{E} \frac{\mathcal{E}^2}{\exp[(\mathcal{E} + 2\mu + \delta\epsilon - 2E_f)/k_B T_{cs-}] - 1} \right\} \\
& + \frac{2^{1/2}m^{3/2}}{\pi^2\hbar^3} \left\{ \left(\int_0^{E_f} + \int_{E_f+\delta\epsilon}^\infty \right) d\epsilon \frac{\epsilon^{1/2}}{\exp[(\epsilon - \mu)/k_B T_{cs-}] + 1} + \right. \\
& \left. + \int_{E_f}^{E_f+\delta\epsilon} d\epsilon \epsilon^{1/2} \left[1 - \frac{\epsilon - \mu}{\sqrt{(\epsilon - \mu)^2 + n_0 f^2}} \tanh \frac{\sqrt{(\epsilon - \mu)^2 + n_0 f^2}}{2k_B T_{cs-}} \right] \right\}. \quad (5.66)
\end{aligned}$$

Las curvas fronteras de fase T_{cs+} y T_{cs-} (todas en unidades de T_F) se muestran en la Fig. 5.5 donde se han usado los valores $\lambda = 1/2$ y $\hbar\omega_D/E_F = 0.005$. En el diagrama de fases de la Fig. 5.6 se muestran tanto las fases puras $s+$, $s-$ como las fases mixtas $ss+$ y $ss-$.

Uno puede apreciar que en este caso cuando $n/n_f = 1$ las curvas T_{cs+} y T_{cs-} se intersecan aproximadamente en el valor calculado a partir de BCS-Bose crossover $T_c/T_F \simeq 0.0008$. En el límite de $n/n_f \gg 1$ tenemos que la curva T_{cs+} se aproxima al valor de la temperatura de condensación Bose-Einstein $T_c/T_F \simeq 0.129$ calculado a partir de la Ec. (D.8) para $\lambda = 1/2$. Como puede apreciarse en la Fig. 5.5, las temperaturas críticas más altas se obtienen para la fase pura de 2h-CPs, este resultado es muy importante debido a que parece ser que el rol de los agujeros es más significativo cuando se trata de encontrar superconductores con T_c altas.

5.3 El CBFM en 2D

En esta sección aplicamos el modelo completo bosón-fermión a los cupratos, considerados como sistemas superconductores cuasi-bidimensionales de alta temperatura crítica.

5.3.1 Relación de dispersión lineal

En 2 dimensiones la densidad de estados correspondiente a los electrones desapareados es calculada a partir de la Ec. (5.48) y resulta constante dada por $N(\epsilon) = m/2\pi\hbar^2$. Usando

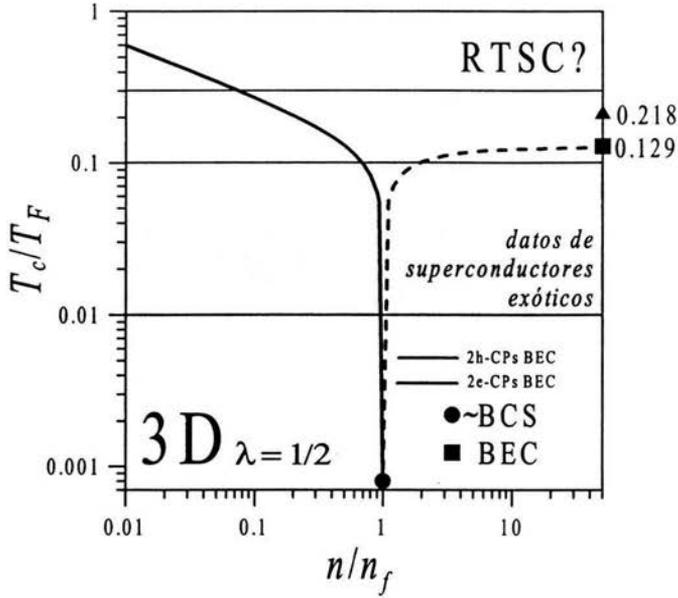


Figura 5.5. Diagrama de fases en el plano $T/T_F - n/n_f$ para el caso 3D y pares de Cooper con relación de dispersión energía vs momento de centro de masa lineal. La curva llena T_{cs-}/T_F corresponde a la frontera de fase entre la fase normal y la fase pura superconductora $s-$. La curva en trazas corresponde a la frontera de fases entre la fase normal y la fase superconductora $s+$. Esta última tiende aproximadamente al valor $T_c/T_F = 0.129$ (marcado con un cuadrado) que corresponde al valor calculado de la temperatura de condensación B-E cuando no hay electrones desapareados (D.8). El punto indica la intersección entre las curvas T_{cs-} y T_{cs+} que ocurre aproximadamente en el valor de T_c calculada con BCS-Bose “crossover.”

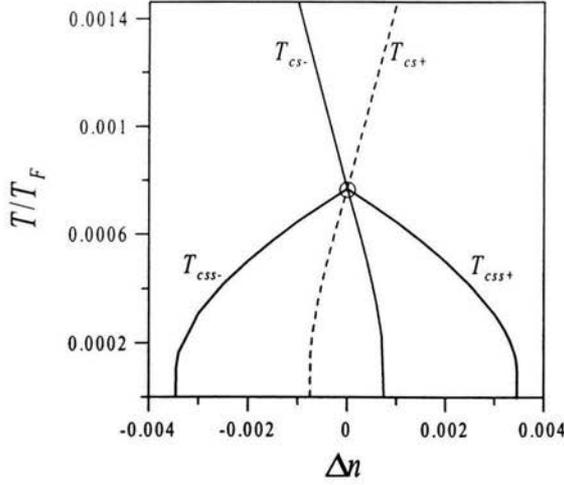


Figura 5.6. Diagrama de fases en el plano $T/T_f - \Delta n$ para el caso 3D y relación de dispersión lineal, donde $\Delta n \equiv n/n_f - 1$ y se han usado los valores $\lambda = 1/2$ y $\hbar\omega_D/E_F = 0.005$. Este diagrama muestra con mejor detalle lo que ocurre alrededor del punto de intersección de las curvas T_{cs-}/T_f y T_{cs+}/T_f , donde además se muestran las fronteras entre las fases superconductoras puras $s+$, $s-$ y las fases superconductoras mixtas $ss-$, $ss+$.

la relación de dispersión lineal para los pares CPs [89]

$$\mathcal{E} \simeq \frac{\lambda}{2\pi} \hbar v_F K, \quad (5.67)$$

tenemos que la densidad de estados de los CPs está dada, de la Ec. (5.50), por

$$M(\mathcal{E}) \simeq \frac{2\pi}{\lambda^2 \hbar^2 v_F^2} \mathcal{E}. \quad (5.68)$$

Usemos como escala de energía la cantidad $E_f \equiv \pi \hbar^2 n_f / m \equiv k_B T_f$ que es análoga a la energía de Fermi $E_F \equiv \pi \hbar^2 n / m \equiv k_B T_F$ de tal modo que todas las cantidades son adimensionales, por ejemplo entenderemos μ como μ/E_F . La densidad de pares condensados 2e-CPs (2h-Cps) n_0 (m_0) está adimensionalizada con $n_{0f} \equiv m_{0f} \equiv E_f^2 / f^2$, es decir, entenderemos n_0 como n_0/n_{0f} , además introducimos la cantidad $G \equiv m f^2 / 8\pi \hbar^2 E_f$.

Así las Ecs. (5.34), (5.35) y (5.36) se reescriben como

$$1 + \frac{\delta\varepsilon}{2} - \mu = G \int_1^{1+\delta\varepsilon} dx \frac{1}{\sqrt{(x-\mu)^2 + n_0}} \tanh \frac{\sqrt{(x-\mu)^2 + n_0}}{2T} \quad (5.69)$$

$$\mu + \frac{\delta\varepsilon}{2} - 1 = G \int_{1-\delta\varepsilon}^1 dx \frac{1}{\sqrt{(x-\mu)^2 + m_0}} \tanh \frac{\sqrt{(x-\mu)^2 + m_0}}{2T} \quad (5.70)$$

$$\begin{aligned} n = & \frac{n_0 - m_0}{4G} \quad (5.71) \\ & + \frac{2\pi^2}{\lambda^2 n} \left\{ \int_0^\infty d\varepsilon \frac{1}{\exp[\varepsilon_+(\varepsilon)/T] - 1} + \int_0^\infty d\varepsilon \frac{1}{\exp[\varepsilon_-(\varepsilon)/T] - 1} \right\} \\ & + \left(\int_0^{1-\delta\varepsilon} + \int_{1+\delta\varepsilon}^\infty \right) dx \frac{1}{\exp[(x-\mu)/T] + 1} \\ & + \int_{1-\delta\varepsilon}^1 dx \left[1 - \frac{x-\mu}{\sqrt{(x-\mu)^2 + n_0}} \tanh \frac{\sqrt{(x-\mu)^2 + n_0}}{2T} \right] \\ & + \int_1^{1+\delta\varepsilon} dx \left[1 - \frac{x-\mu}{\sqrt{(x-\mu)^2 + m_0}} \tanh \frac{\sqrt{(x-\mu)^2 + m_0}}{2T} \right]. \end{aligned}$$

5.3.2 La fase pura condensada BE de 2e-CPs

La fase pura de 2e-CPs queda definida como aquella para la cual los 2h-CPs no están presentes, es decir, $m_B(T) \equiv 0$. Para esta fase la temperatura crítica de transición superconductor se obtiene de resolver para T_c y $\mu(T_c)$ el siguiente par de ecuaciones

$$E_f + \hbar\omega_D/2 - \mu = \lambda(\hbar\omega_D/2) \int_{E_f}^{E_f + \hbar\omega_D} d\varepsilon \frac{1}{|\varepsilon - \mu|} \tanh \frac{|\varepsilon - \mu|}{2k_B T_c}, \quad (5.72)$$

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty d\varepsilon [1 - \tanh \frac{\varepsilon - \mu}{2k_B T_c}] + \frac{\pi^2}{\lambda^2} \frac{n_f}{n E_f} \int_0^\infty d\varepsilon \mathcal{E} \left[\coth \frac{\mathcal{E} + 2(E_f + \hbar\omega_D/2 - \mu)}{2k_B T_c} - 1 \right] = \frac{n E_f}{n_f}, \quad (5.73)$$

donde se han usado las identidades (5.42).

En la Fig. 5.7 mostramos T_{cs+}/T_F como función del parámetro n/n_f (línea a trazos) para $\lambda = 1/4, 1/2$. Para $n/n_f = 1$, T_{cs+}/T_F coincide aproximadamente con la T_c/T_F calculada en el BCS-Bose “crossover,” $\simeq 0.001$ para $\lambda = 1/4$ y $\simeq 0.0077$ para $\lambda = 1/2$ (ver puntos negros en Fig. 5.7). Por el contrario, si $n/n_f \gg 1$ la T_{cs+}/T_F tiende aproximadamente al valor de la temperatura crítica de BE $\simeq 0.088$ para $\lambda = 1/2$ y 0.044 para $\lambda = 1/4$ (ver cuadrados en la Fig. 5.7).

5.3.3 La fase pura condensada BE de 2h-CPs

La temperatura crítica para la fase pura $s-$, que denotamos con T_{cs-} , se determina al resolver el siguiente par de ecuaciones acopladas en T_{cs-} y $\mu(T_{cs-})$

$$\mu - E_f + \hbar\omega_D/2 = \lambda(\hbar\omega_D/2) \int_{E_f - \hbar\omega_D}^{E_f} d\varepsilon \frac{1}{|\varepsilon - \mu|} \tanh \frac{|\varepsilon - \mu|}{2k_B T_c}, \quad (5.74)$$

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty d\varepsilon \left[1 - \tanh \frac{\varepsilon - \mu}{2k_B T_c} \right] - \frac{\pi^2}{\lambda^2} \frac{n_f}{n E_f} \int_0^\infty d\varepsilon \mathcal{E} \left[\coth \frac{\mathcal{E} + 2(\mu + \hbar\omega_D/2 - E_f)}{2k_B T_c} - 1 \right] = \frac{n E_f}{n_f}, \quad (5.75)$$

la integral que aparece en la ecuación de número (5.73) y (5.75) relacionada con el número de fermiones desapareados, ya ha sido calculada antes (ver 4§2.2) y tiene el siguiente valor

$$\int_0^\infty dx \left[1 - \tanh \frac{x - \mu}{2T_c} \right] = 2k_B T_c \ln \left[1 + \exp \left(\frac{\mu_c}{k_B T_c} \right) \right], \quad (5.76)$$

mientras que las integrales restantes están relacionadas con las funciones de Bose [56] de la manera siguiente

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dx x \left[\coth \frac{x + \delta}{2T_c} - 1 \right] &= \int_0^\infty dx \frac{x}{\exp[(x + \delta)/T_c] - 1} \\ &= 2T_c^2 g_2(e^{-\delta/T_c}) \end{aligned} \quad (5.77)$$

donde $g_\sigma(z)$ está relacionada con la función PolyLog $[\sigma, z]$ [90].

En la Fig. 5.7 mostramos T_{cs-}/T_F como función del parámetro n/n_f (con una línea llena) para $\lambda = 1/4, 1/2$. Cuando $n/n_f = 1$, T_{cs+}/T_F coincide aproximadamente con la T_c/T_F calculada en el BCS-Bose “crossover,” $\simeq 0.001$ para $\lambda = 1/4$ y $\simeq 0.0077$ para $\lambda = 1/2$ (ver puntos negros en Fig. 5.7). Sin embargo, a diferencia de la fase pura de 2e-CPs (donde la T_{cs+}/T_F es menor que $\simeq 0.088$ para $\lambda = 1/2$ y menor que 0.044 para $\lambda = 1/4$), si $n/n_f < 1$ la T_{cs-}/T_F alcanza valores mayores inclusive la temperatura ambiente (denotada con RTSC del inglés “Room Temperature SuperConductivity”).

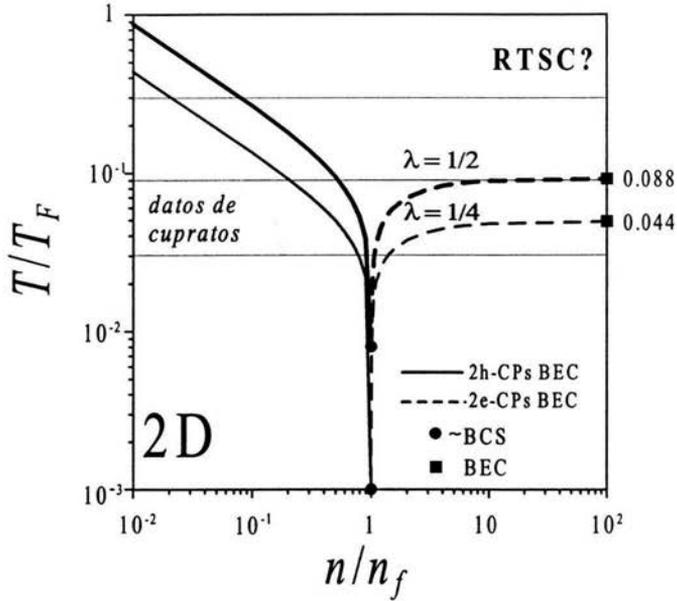


Figura 5.7. Diagrama de fases en el plano $T/T_F - n/n_f$ para el caso 2D y pares de Cooper con relación de dispersión energía *vs* momento de centro de masa lineal. Las curvas llenas T_{cs-}/T_F corresponden a la frontera de fase entre la fase normal y la fase pura superconductora $s-$ mientras que las curvas en trazas corresponden a la frontera de fases entre la fase normal y la fase superconductora $s+$ para los valores de $\lambda = 1/2$, $1/4$. Estas últimas tienden aproximadamente a los valores de la temperatura crítica de condensación BE (Ec. (D.6)) $T_c/T_F = 0.088$, 0.044 respectivamente. El punto indica la intersección entre las curvas T_{cs-} y T_{cs+} que ocurre aproximadamente en el valor de T_c calculada con BCS-Bose “crossover.”

5.4 2D y la relación de dispersión cuadrática

5.4.1 La fase pura condensada BE de 2e-CP's

Es un resultado muy conocido que la temperatura de condesación Bose-Einstein es cero en el caso del gas ideal de Bose bidimensional (relación de dispersión cuadrática). Esto resulta del hecho de que en la temperatura crítica el potencial químico bosónico alcanza el valor del estado base de energía y el número de partículas que ocupan el estado base $N_{B0}(T)$ es cero, donde $N_{B0}(T) + N_{B+}(T) = N_B$ es constante y $N_{B+}(T)$ el número de bosones que ocupan los estados excitados a temperatura T . Esto mismo ocurre en el CBFM pero en el límite de acoplamiento cero ($\lambda = 0$). Las dos ecuaciones que describen la fase pura condensada de 2e-CP's a $T = T_c$ son

$$E_f + \hbar\omega_D/2 - \mu = \lambda(\hbar\omega_D/2) \int_{E_f}^{E_f + \hbar\omega_D} d\varepsilon \frac{1}{|\varepsilon - \mu|} \tanh \frac{|\varepsilon - \mu|}{2k_B T_c}, \quad (5.78)$$

$$n = \frac{2m}{\pi\hbar^2} \int_{0^+}^{\infty} \frac{d\varepsilon}{\exp[(\varepsilon + E_+(0) - 2\mu)/k_B T_c] - 1} + \frac{m}{\pi\hbar^2} \int_0^{\infty} \frac{d\varepsilon}{\exp[(\varepsilon - \mu)/k_B T_c] + 1}, \quad (5.79)$$

donde $E_+(0)$ está dado por (5.31) y se ha usado que la densidad de estados electrónica $N(\varepsilon)$ y bosónica $M(\varepsilon)$ son $m/2\pi\hbar^2$ y $m/\pi\hbar^2$, respectivamente. Se deduce de la Ec. (5.78) que en acoplamiento cero se tiene $\mu = E_f + \hbar\omega_D/2$. Haciendo el cambio de variable $x \equiv \varepsilon/k_B T_c \equiv \varepsilon/k_B T_c$ y sustituyendo μ en la Ec. (5.79), ésta se reescribe como

$$n = \frac{2mk_B T_c}{\pi\hbar^2} \int_0^{\infty} \frac{dx}{\exp x - 1} + \frac{mk_B T_c}{\pi\hbar^2} \int_0^{\infty} \frac{dx}{\exp[x - (E_f + \hbar\omega_D/2)/k_B T_c] + 1}, \quad (5.80)$$

de la cual, la primera integral diverge logarítmicamente pues

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{dx}{\exp x - 1} &\equiv g_1(1) \\ &= \ln[1 - \exp(-x)]_0^{\infty} \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (5.81)$$

mientras que la segunda da como resultado

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\exp[x - (E_f + \hbar\omega_D/2)/k_B T_c] + 1} = \ln\{1 + \exp[(E_f + \hbar\omega_D/2)/k_B T_c]\}. \quad (5.82)$$

Para que la ecuación (5.80) se satisfaga para valores fijos de la densidad de electrones n , debe pasar que T_c vaya a cero de tal modo que el producto $T_c g_1(1)$ sea constante. Si esto

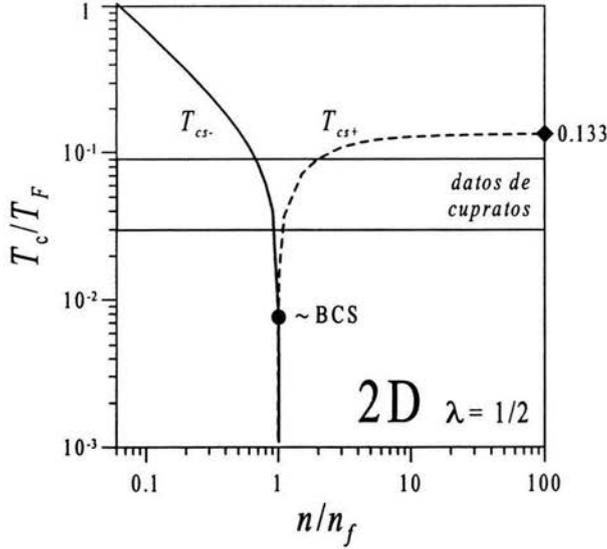


Figura 5.8. Diagrama de fases en el plano $T/T_F - n/n_f$, para el caso 2D y relación de dispersión cuadrática.

pasa, el segundo sumando da como resultado la cantidad finita $m(E_f + \hbar\omega_D/2)/\pi\hbar^2$, por lo que podemos escribir

$$k_B T_c = \frac{n\pi\hbar^2}{m[2g_1(1) + m(E_f + \hbar\omega_D/2)/\pi\hbar^2]} \rightarrow 0, \quad (5.83)$$

pues $g_1(1) \rightarrow \infty$. Por lo tanto, recuperamos el hecho de que en 2D la temperatura crítica de BEC cuando los bosones tienen relación de dispersión cuadrática es cero.

Sin embargo, en el CBFM en acoplamiento finito, esto deja de ser así (ver Fig. 5.8). Para valores finitos (pero diferentes de cero) apropiados de λ , el potencial químico bosónico ($\mu_B \equiv 2\mu$) en la temperatura crítica no alcanza el estado base del espectro bosónico $E_+(0) \equiv 2E_f + \delta\varepsilon$, esto es debido básicamente al mecanismo de formación y destrucción de pares de electrones que está íntimamente relacionado con la ecuación tipo gap. Dicho mecanismo impide que el número de electrones desapareados se mantenga constante y por tanto impide que el número de bosones se conserve.

6 Conclusiones

Sin abandonar el mecanismo dinámico de apareamiento electrón-fonón (que en este trabajo juzgamos fundamental en la formación de pares de Cooper), modelado por la interacción efectiva, atractiva de BCS (2.18) entre dos electrones, mostramos cómo el formalismo BCS-Bose crossover” resulta incapaz de predecir temperaturas críticas más altas de las que predice BCS para valores físicamente adecuados del parámetro de acoplamiento λ (ver Fig. 4.11). También mostramos, para estos valores de λ , que el límite de Bose ($v_k^2 \ll 1$, para toda k [54]) no se alcanza y más aún, que el BCS-Bose “crossover” está limitado a la simetría perfecta de igual número de pares partículas y pares de agujeros como puede apreciarse del hecho que los coeficientes de Bogoliubov son prácticamente una función escalón (ver Fig. 4.12).

El modelo completo bosón-fermión, que por construcción considera proporciones variables entre pares de agujeros y pares de partículas, supera la limitación del BCS-Bose “crossover” y hemos encontrado que para obtener las altas temperaturas críticas que se observan en los superconductores de alta temperatura, sin abandonar el mecanismo electrón-fonón y para valores aceptables de λ , es necesario fijarse en aquellos en los que los pares de agujeros juegan un papel más importante que los pares de electrones. Incluso para diseñar los posibles materiales superconductores a temperatura ambiente, puede apreciarse de las Figs. 5.5, 5.8 que es para la fase pura de 2h-CPs donde las temperaturas ambiente podrían ser alcanzadas. Claramente, son las T_c 's asociadas al condensado puro de 2h-CPs la *primera* singularidad que aparece en un superconductor modelado por el CBFM al enfriarse desde temperaturas elevadas. Por consiguiente, en vista del ejemplo relativista del Apéndice E que establece T_c 's sin antibosones (análogos a los 2h-CPs del CBFM) como espurias por ser una *segunda* singularidad más baja, el CBFM sugiere que las T_c 's asociadas al condensado puro de 2e-CPs son espurias. Esta conclusión no es inconsistente con los datos experimentales recopilados, e.g. en la Ref. [34], como alegamos en el Capítulo 1.

Por otra parte, hemos encontrado que la temperatura crítica depende fuertemente del parámetro fenomenológico $n/n_f = (E_F/E_f)^{d/2}$ para valores fijos del parámetro de acoplamiento λ y de la energía de Debye $\hbar\omega_D/E_F$, donde E_f está definida en (5.30). Para todas las fases condensadas ($s+$, $s-$, $ss+$ y $ss-$) se obtienen los valores de T_c/E_F que da la teoría BCS-Bose cuando $n/n_f \sim 1$. Es decir, la simetría perfecta de igual número de 2e-CPs y de 2h-CPs está directamente relacionada para valores de $E_f \simeq E_F$. Esto pasa en las fases puras 2e-CPs y 2h-CPs, porque para $n/n_f \sim 1$, la densidad de número de bosones $n_B(T_c)$ y $m_B(T_c)$ son cero para todo fin práctico (ver Tabla 6.1). El efecto de

éstos en la ecuación de número puede despreciarse, quedando básicamente las ecuaciones del “gap” (5.39) y número (5.40) de la teoría BCS-Bose “crossover.” Para la fase pura de 2e-CPs y para valores muy grandes de n/n_f , se obtienen aproximadamente las T_c 's de la BEC analíticas discutidas en el Apéndice D. Aunque la densidad de número de bosones $n_B(T_{cs})$ es mayor que la densidad de electrones desapareados, estos últimos siempre están presentes, por lo que no se alcanza las T_c 's de la BEC; además que siempre debe considerarse la ecuación tipo “gap.” Es interesante notar que para el caso bidimensional y relación de dispersión cuadrática para los pares de Cooper, existe una temperatura de condensación Bose-Einstein distinta de cero, contrariamente a lo que se sabe. Lo anterior es consecuencia principalmente del hecho de que el potencial químico bosónico en la temperatura crítica no alcanza el valor del estado base del espectro bosónico, esto como consecuencia de los procesos de decaimiento y formación de pares de Cooper. Hacemos notar también que para la fase pura de 2h-CPs, la temperatura crítica crece conforme se disminuye el valor de n/n_f de su valor máximo $\gtrsim 1$, y que las T_c 's más altas se obtienen cuando nos apartamos lo suficiente de este valor.

n/n_f	T_{cs+}/T_F	$n_B(T)/n$	T_{cs-}/T_F	$m_B(T)/n$
1	0.008	0.00002	0.008	0.00002

Tabla 6.1. Temperatura crítica de condensación y densidad de número de bosones para las fases $s+$ y $s-$ cuando $n/n_f = 1$.

Debemos decir que este trabajo puede ser extendido para considerar: a) los términos con $K > 0$ en el vértice de la interacción bosón-fermión; b) la interacción bosón-bosón; c) los efectos debidos a temperatura finita en el tratamiento Bethe-Salpeter de los pares de Cooper; y d) los efectos de la red cristalina, los cuales pueden ser incluidos a través de las singularidades de Van Hove en la densidad de estados electrónica.

Apéndice A

A La ecuación de Schrödinger de dos cuerpos y el problema de Cooper

Aquí se discute el problema de dos partículas que interactúan entre sí, primero en el vacío y luego en un mar de Fermi. En particular, nos concentramos en el sistema bidimensional de partículas que interactúan por medio de un potencial de contacto en el vacío y en el problema de Cooper (las partículas interactúan por medio de un potencial atractivo en el mar de Fermi).

La ecuación de Schrödinger en la representación de las coordenadas para dos cuerpos es

$$H \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \mathcal{E} \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2), \quad (\text{A.1})$$

donde H corresponde al hamiltoniano de dos partículas interactuantes de igual masa m

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_1^2 - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla_2^2 + \hat{V}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|). \quad (\text{A.2})$$

Haciendo el cambio de variables $\mathbf{R} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ la ecuación de Schrödinger (A.2) se vuelve

$$\left[-\frac{\hbar^2}{4m} \nabla_{\mathbf{R}}^2 - \frac{\hbar^2}{m} \nabla_{\mathbf{r}}^2 + \hat{V}(r) \right] \psi(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = \mathcal{E} \psi(\mathbf{r}, \mathbf{R}), \quad (\text{A.3})$$

donde $r \equiv |\mathbf{r}|$. Haciendo la expansión

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \psi_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_1} e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}_2} \quad (\text{A.4})$$

y usando las coordenadas momento de centro de masa $\mathbf{K} \equiv \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ y momento relativo $\mathbf{k} \equiv (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)/2$, la función de onda $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{R})$ tiene la siguiente expansión

$$\psi(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = \sum_{\mathbf{K}, \mathbf{k}} \psi_{\mathbf{k}, \mathbf{K}} e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{R}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}. \quad (\text{A.5})$$

Cuando se sustituye (A.5) en (A.3) se obtiene

$$\sum_{\mathbf{k}, \mathbf{K}} \psi_{\mathbf{k}, \mathbf{K}} \left[\frac{\hbar^2 K^2}{4m} + \frac{\hbar^2 k^2}{m} - \mathcal{E} \right] e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{R}} = - \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{K}} \psi_{\mathbf{k}, \mathbf{K}} V(r) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{R}}. \quad (\text{A.6})$$

La Ec. (A.6) se simplifica cuando la multiplicamos por $e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}}e^{i\mathbf{K}'\cdot\mathbf{R}}$ y después integramos sobre las variable \mathbf{r}, \mathbf{R} , de tal modo que podemos usar la identidad

$$\frac{1}{L^d} \int d^d x e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} e^{i\mathbf{q}'\cdot\mathbf{x}} \xrightarrow{L^d \rightarrow \infty} \delta_{\mathbf{q},\mathbf{q}'}, \quad (\text{A.7})$$

dando por resultado⁸

$$\left[\frac{\hbar^2 K^2}{4m} + \frac{\hbar^2 k^2}{m} - \mathcal{E} \right] \psi_{\mathbf{k},\mathbf{K}} = \sum_{\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}(\mathbf{K}) \psi_{\mathbf{k}',\mathbf{K}}. \quad (\text{A.8})$$

En (A.8) se tiene⁹

$$V_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}(\mathbf{K}) \equiv (1/L^d) \int d^d \mathbf{r} e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}} \hat{V}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad (\text{A.9})$$

cuya dependencia en \mathbf{K} es consecuencia de la conservación del momento total $\mathbf{K} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}'_1 + \mathbf{k}'_2$ [91] (ver Fig. A.1 b).

Otra manera de abordar el problema es probar si en las coordenadas de centro de masa \mathbf{R} y relativa \mathbf{r} la ecuación de Schrödinger resulta separable. Esto resulta cierto en nuestro caso, pues $V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ es sólo función de $\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Cuando escribimos $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \equiv \psi(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = \Phi(\mathbf{R})\phi(\mathbf{r})$ resultan el siguiente par de ecuaciones

$$-\frac{\hbar^2}{4m} \nabla_{\mathbf{R}}^2 \Phi(\mathbf{R}) = E_R \Phi(\mathbf{R}), \quad (\text{A.10})$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{m} \nabla_{\mathbf{r}}^2 + \hat{V}(\mathbf{r}) \right] \phi(\mathbf{r}) = E_r \phi(\mathbf{r}), \quad (\text{A.11})$$

donde la energía total es $\mathcal{E} = E_R + E_r$. En la representación de los momentos, la ecuación de Schrödinger para la función de onda relativa $\phi(\mathbf{r})$ puede escribirse como

$$\frac{\hbar^2 k^2}{m} \varphi_{\mathbf{k},\mathbf{K}} + \sum_{\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}(\mathbf{K}) \varphi_{\mathbf{k}',\mathbf{K}} = E_r \varphi_{\mathbf{k},\mathbf{K}}, \quad (\text{A.12})$$

⁸Este resultado también es válido para el caso de dos electrones cuya interacción es independiente del espín y cuyo estado de espín del par, es el estado singlete (este es el caso para el par de Cooper). El estado de espín singlete ψ_{s_1, s_2}^S , donde $s \equiv \uparrow, \downarrow$ es el espín de un electrón, es el estado de espín que es antisimétrico ante el intercambio de los dos electrones, es decir, $\psi_{s_1, s_2}^S = -\psi_{s_2, s_1}^S$; explícitamente está dado por $\psi_{s_1, s_2}^S \equiv (\varphi_{1, \uparrow} \varphi_{2, \downarrow} - \varphi_{1, \downarrow} \varphi_{2, \uparrow}) / \sqrt{2}$. Sabemos que la función de onda total $\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \equiv \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \psi_{s_1, s_2}$ para dos electrones debe ser antisimétrica (pues los electrones siendo fermiones, obedecen el principio de exclusión de Pauli), donde ψ_{s_1, s_2} es la función de onda de espín del par. Entonces cuando se elige el estado de espín singlete necesariamente la función de onda espacial $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ debe ser simétrica como precisamente es el caso para $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ dada en (A.4).

⁹En el caso más general, $V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \equiv L^{-d} \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}'}$ es la doble transformada de Fourier de la posible interacción no local $V(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, en el espacio d -dimensional.

donde se ha hecho la expansión $\phi(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} \varphi_{\mathbf{k},\mathbf{K}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ y se ha usado la identidad (A.7). Como antes, la dependencia en \mathbf{K} de $V_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}$ y $\varphi_{\mathbf{k},\mathbf{K}}$ se debe a la conservación del momento total \mathbf{K} . Dependiendo del modelo de interacción la ecuación (A.12) es más fácil de resolver que la original. La solución de (A.10) es inmediata, pues corresponde a la función de onda de partícula libre

$$\Phi(\mathbf{R}) = \text{const. } e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}}, \quad (\text{A.13})$$

por lo que la función de onda total $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{R})$ tiene la forma

$$\psi_{\mathbf{K}}(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = \text{const. } e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}} \sum_{\mathbf{k}} \varphi_{\mathbf{k},\mathbf{K}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. \quad (\text{A.14})$$

Puesto que $\psi_{\mathbf{K}}(\mathbf{r}, \mathbf{R})$ es el estado de dos partículas con momento total \mathbf{K} bien definido, éste puede considerarse como número cuántico. El significado físico de este resultado es inmediato, la función de onda de dos cuerpos (A.14) describe el estado de un par de partículas, como una partícula “libre” de masa $2m$ y momento total \mathbf{K} cuyas coordenadas son las del centro de masa y otra partícula de masa reducida $m/2$ con coordenadas relativas en un potencial externo $V(\mathbf{r})$.

Puesto que a cada estado cuántico $\psi_{\mathbf{K}}$ del par de partículas le corresponde su eigenvalor $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathbf{K})$, podemos decir que la energía del par depende sólo de \mathbf{K} . Esto no se ha podido demostrar directamente de la Ec. (A.8) para cualquier tipo de interacción $V_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}$, pero es posible demostrarlo en algunos casos. Por ejemplo, en el caso que el potencial de interacción es separable¹⁰, es decir, $V_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} = v_0 g_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}'}$ y en el caso particular de la interacción modelo de BCS (ver sección A.2 de este Apéndice).

A.1 Interacción $\delta(\mathbf{r})$ atractiva en 2D

Se conoce que el problema de dos cuerpos que interactúan con un potencial atractivo de contacto $-v_0\delta(\mathbf{r})$ presenta una divergencia ultravioleta [79],[92],[93]. Para la interacción delta tenemos que los elementos de matriz (A.9) $V_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} = -v_0/L^2$, donde L^2 es el tamaño (o área) del sistema, son constantes. Entonces la ecuación de valores propios (A.12) puede escribirse como

$$1 = \frac{v_0}{L^2} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2\varepsilon_{\mathbf{k}} - E_r} \quad (\text{A.15})$$

donde $\varepsilon_{\mathbf{k}} = \hbar^2 k^2 / 2m$.

¹⁰Los potenciales separables no locales han sido usados para estudiar la física de pocos cuerpos ya que tales potenciales permiten obtener soluciones analíticas simples, por ejemplo, para el problema de dos cuerpos además de modelar razonablemente bien potenciales débiles de corto alcance.

Queremos los estados ligados de dos cuerpos para los que $E_r = -B_2$ con $B_2 > 0$., Usando

$$\sum_{\mathbf{k}} \rightarrow (L/2\pi)^2 \int d^2k = \int d\varepsilon N(\varepsilon) \quad (\text{A.16})$$

la Ec. (A.15) se vuelve

$$\frac{1}{v_0} = \frac{m}{4\pi\hbar^2} \int_0^\infty \frac{d\varepsilon}{2\varepsilon + B_2}. \quad (\text{A.17})$$

Si integramos hasta $\varepsilon = \Lambda$ primero, y luego se toma el límite $\Lambda \rightarrow \infty$, se obtiene que

$$\frac{1}{v_0} = \frac{m}{8\pi\hbar^2} \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{2\Lambda + B_2}{B_2} \right). \quad (\text{A.18})$$

Esto exhibe una divergencia logarítmica del tipo ultravioleta. Para Λ grande pero finita tendríamos

$$B_2 \approx 2\Lambda \exp \left(-\frac{8\pi\hbar^2}{v_0 m} \right) \quad (\text{A.19})$$

de modo que para tener un valor finito de B_2 requerimos que v_0 sea infinitésimamente pequeño.

A.1.1 La ecuación del “gap” en 2D con interacción $\delta(\mathbf{r})$

La ecuación del parámetro de orden (4.1) en dos dimensiones a $T = 0$ con la interacción $\delta(\mathbf{r})$ atractiva es

$$1 = \frac{v_0}{L^2} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2E_{\mathbf{k}}} \tanh \frac{E_{\mathbf{k}}}{2k_B T}. \quad (\text{A.20})$$

En el límite termodinámico esto se puede escribir como

$$1 = v_0 N(E_F) \int_0^\infty \frac{d\varepsilon}{2\sqrt{(\varepsilon - \mu)^2 + \Delta^2}} \tanh \frac{\sqrt{(\varepsilon - \mu)^2 + \Delta^2}}{2k_B T} \quad (\text{A.21})$$

que es exacta en 2D ya que $N(E_F) = cte$. Un análisis dimensional similar al que se hace en teoría cuántica de campos muestra que la integral anterior diverge logarítmicamente a altas energías (divergencia ultravioleta). Una manera de eliminar esas divergencias es regularizar el potencial delta. Sin embargo, en este trabajo eliminaremos la divergencia logarítmica que ocurre en la ecuación del gap usando la ecuación de Schrödinger (A.17) de dos cuerpos en el vacío, es decir sustituyendo v_0 en favor de B_2 . Combinando (A.21) con (A.17) tenemos la ecuación del “gap” a temperatura finita

$$\int_0^\infty \frac{d\varepsilon}{2\varepsilon + B_2} = \int_0^\infty \frac{d\varepsilon}{2\sqrt{(\varepsilon_k - \mu)^2 + \Delta^2}} \tanh \frac{\sqrt{(\varepsilon_k - \mu)^2 + \Delta^2}}{2k_B T}. \quad (\text{A.22})$$

Ahora tanto el parámetro de orden Δ como el potencial químico μ son funciones de la energía del estado ligado de dos cuerpos en el vacío B_2 , así como de T .

A.2 El problema de Cooper

Para el caso de la interacción modelo BCS¹¹ (ver Fig. A.1)

$$V_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}(\mathbf{K}) = \begin{cases} -V & \text{si } E_F < \varepsilon_{\mathbf{k}_1}, \varepsilon_{\mathbf{k}'_1}, \varepsilon_{\mathbf{k}_2}, \varepsilon_{\mathbf{k}'_2} < E_F + \hbar\omega_D, \\ 0 & \text{otro caso,} \end{cases} \quad (\text{A.23})$$

con $V > 0$, $\hbar\omega_D$ la energía máxima de los fonones asociados con las vibraciones de la red donde el gas de electrones se encuentra y E_F la energía Fermi, la ecuación (A.8) se puede escribir como

$$\sum_{\mathbf{k}}' \frac{1}{\hbar^2 k^2/m + \hbar^2 K^2/4m - 2E_F - \mathcal{E}_K} = 1/V, \quad (\text{A.24})$$

donde se ha puesto explícitamente que el eigenvalor $\mathcal{E}(\mathbf{K}) \equiv 2E_F + \mathcal{E}_K$ depende sólo del momento de centro de masa \mathbf{K} , pues el modelo de interacción (A.23) conserva el momento total [47], es decir, $\mathbf{K} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}'_1 + \mathbf{k}'_2$. De la Ec. (A.24) uno puede calcular el eigenvalor \mathcal{E}_K para cada valor de K (relación de dispersión energía *vs* momento de centro de masa). La suma primada significa que para cada valor de \mathbf{K} , la suma sobre \mathbf{k} debe realizarse únicamente sobre la región sombreada mostrada en la Fig. A.2. Para el caso $K = 0$ la ecuación (A.24) se reduce a

$$\sum_{\mathbf{k}}' \frac{1}{\hbar^2 k^2/m - 2E_F - \mathcal{E}_0} = 1/V. \quad (\text{A.25})$$

La ecuación de Schrödinger en el espacio de momentos para la función de onda relativa de dos cuerpos en el mar de Fermi está dada por (A.12) con la condición adicional $\varphi_{\mathbf{k}} = 0$ para toda \mathbf{k} tal que $|\mathbf{k}| < k_F$ (principio de exclusión de Pauli). Usando (2.18) para el caso $K = 0$ tenemos que (A.12) se escribe como

$$\varphi_{\mathbf{k},\mathbf{K}} = \frac{V}{\hbar^2 k^2/m - E_r} \sum_{\mathbf{k}'}' \varphi_{\mathbf{k}',\mathbf{K}}, \quad (\text{A.26})$$

donde la suma primada significa sumar sobre toda \mathbf{k} tal que se satisfaga (2.18). Así, haciendo esto en ambos lados de la Ec. (A.26) tenemos la ecuación de eigenvalores E_r

$$1 = V \sum_{\mathbf{k}}' \frac{1}{\hbar^2 k^2/m - E_r}. \quad (\text{A.27})$$

¹¹Nótese que (A.23) se reduce a (2.18) para el caso especial $\mathbf{K} = 0$, pues $\varepsilon_{\mathbf{k}_1} = \varepsilon_{\mathbf{k}} = \varepsilon_{\mathbf{k}_2}$ y $\varepsilon_{\mathbf{k}'_1} = \varepsilon_{\mathbf{k}'} = \varepsilon_{\mathbf{k}'_2}$.

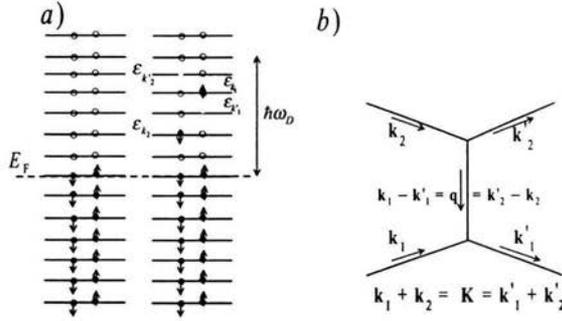


Figura A.1. a) En el problema de Cooper la interacción entre dos electrones ocurre cuando éstos tienen sus energías en el intervalo $[E_F, E_F + \hbar\omega_D]$, donde $\hbar\omega_D \ll E_F$ es la energía de Debye asociada a la máxima energía fonónica de la red. b) La interacción efectiva entre dos electrones en el problema de Cooper dada por (A.23), es tal que conserva el momento total $\mathbf{K} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ en el proceso $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 \rightarrow \mathbf{k}'_1, \mathbf{k}'_2$.

Usando (A.16) tenemos

$$\frac{1}{VN(E_F)} = \int_{E_F}^{E_F + \hbar\omega_D} \frac{d\varepsilon}{2\varepsilon - E_r}, \quad (\text{A.28})$$

donde hemos tomado $N(\varepsilon) = N(E_F)$, lo cual es exacto en 2D y una buena aproximación en 1D y 3D siempre y cuando $\hbar\omega_D/E_F \ll 1$. La integral en (A.28) es inmediata, por lo que (A.28) se escribe como

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2} \ln \frac{2E_F + 2\hbar\omega_D - E_r}{2E_F - E_r}, \quad (\text{A.29})$$

donde hemos definido $\lambda \equiv VN(E_F)$. El eigenvalor E_r , correspondiente a la función de onda relativa en la ecuación de Schrödinger (A.26), puede ser calculado de (A.29), dando por resultado

$$E_r = 2E_F - \frac{2\hbar\omega_D}{e^{2/\lambda} - 1} \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 2E_F - 2\hbar\omega_D e^{-2/\lambda}. \quad (\text{A.30})$$

Como la energía total $\mathcal{E}(\mathbf{K} = 0) = 2E_F + \mathcal{E}_0 = E_r$ se tiene que

$$\mathcal{E}_0 = -\frac{2\hbar\omega_D}{e^{2/\lambda} - 1}. \quad (\text{A.31})$$

El resultado anterior nos dice que existe un estado ligado (par de Cooper) que baja la energía del sistema. Para pares de Cooper con momento de centro de masa igual a cero

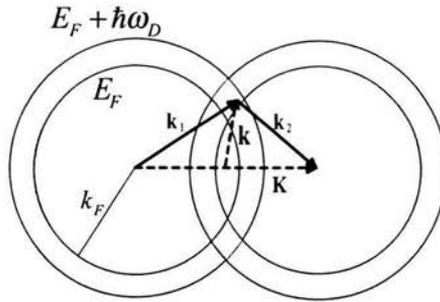


Figura A.2. Sección transversal del volumen traslapado en el espacio k (región sombreada) donde debe apuntar el vector de onda relativo del par $\mathbf{k} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)$ para que el modelo de interacción de BCS (2.18) sea distinto de cero para cierto valor del momento total (o de centro de masa) $\hbar\mathbf{K} \equiv \hbar(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)$. El extremo opuesto del vector \mathbf{k} parte de la mitad del vector \mathbf{K} .

(único caso estudiado por Cooper y posteriormente por BCS) la energía total del par está dada por (A.30).

Apéndice B

B Pares de Cooper y pares de BCS

Debido al hecho de que los pares de BCS, definidos en la Ref. [46] y que distinguimos de los pares de Cooper [47], no satisfacen [46] las reglas usuales de conmutación de Bose, Ecs. (2.11) a (2.13), se concluye que éstos no son bosones y por lo tanto la teoría BCS y la Condensación Bose-Einstein no están de algún modo relacionadas. Estas afirmaciones son consecuencia del trabajo de BCS donde textualmente se dice “*our transition is not analogous to a Bose-Einstein condensation (BEC)*” (ver pie de página 18 en Ref. [46]). Posteriormente también Bardeen escribió [94] “*...the picture by Schafroth (1955)...of electron pairs...which at low temperature undergo a BEC, is not valid.*”

En este Apéndice se hace una clara distinción entre pares de BCS y pares de Cooper y se propone que los pares de Cooper son bosones como experimentalmente lo sugieren Samuelsson y Büttiker [95] con su reciente análogo electrónico del experimento tipo “Hanbury Brown-Twiss photon-effect,” pero con electrones en vez de fotones, aunque parece que es necesario investigar más para dar una prueba experimental contundente. En la literatura, algunos autores afirman que los pares de Cooper son bosones pero no dan prueba alguna de su afirmación [96]-[100]. La diferencia entre pares de BCS y pares de Cooper está, a grandes rasgos, en que para tener un par de BCS bien definido se necesita especificar tanto el momento relativo $\mathbf{k} \equiv (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)/2$ como el momento de centro de masas $\mathbf{K} \equiv \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ del par, mientras que un par de Cooper (como fue demostrado en la sección A.2 del Apéndice A) está definido cuando se especifica únicamente su momento de centro de masas. Esta diferencia trae como consecuencia que el número de pares de Cooper que pueden ocupar un estado con momento de centro de masa definido no tenga límite (en el límite termodinámico), por lo que los pares de Cooper obedecen la estadística de Bose. Aquí se da primero una prueba heurística cualitativa de que los pares de Cooper son bosones y después una demostración cuantitativa, usando las relaciones de conmutación, al hecho de que los pares de Cooper y los pares de BCS son distintos.

Nos enfocaremos en la interacción interfermiónica de BCS (A.23), donde dos electrones con vectores de onda \mathbf{k}_1 y \mathbf{k}_2 interactúan con una atracción constante $-V$ sólo cuando la punta del vector de onda relativo $\mathbf{k} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)$ apunta dentro de la región donde se traslapan los dos cascarones esféricos en el espacio k (ver Fig. A.2) y cuya distancia (en el espacio k) entre sus centros está dada por la magnitud del momento total $\mathbf{K} \equiv \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$.

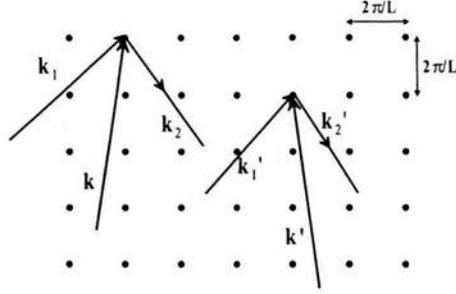


Figura B.1. Dos valores distintos del vector de onda relativo $\mathbf{k} \equiv (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)/2$ y $\mathbf{k}' \equiv (\mathbf{k}'_1 - \mathbf{k}'_2)/2$ (con el mismo valor de momento de centro de masa \mathbf{K}), correspondientes a dos pares de BCS distintos, que caen dentro de la región de traslape de la Fig. A.2 y por tanto que contribuyen en la suma (B.1) para determinar \mathcal{E}_K . Se ilustra cómo para un par de Cooper con estos pares de BCS, el término $\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}$ siempre es cero sin violar el principio de exclusión de Pauli.

La ecuación de eigenvalores para $K \geq 0$ con la interacción (A.23), está dada por (ver Ec. (A.24) en el Apéndice A)

$$\sum_{\mathbf{k}}' (\hbar^2 k^2/m + \hbar^2 K^2/4m - 2E_F - \mathcal{E}_K)^{-1} = 1/V, \quad (\text{B.1})$$

donde \mathcal{E}_K es el eigenvalor de la energía del par que depende sólo de \mathbf{K} y la prima en la suma significa que se suman aquellos términos que satisfagan la restricción dada por (A.23). Así, los vectores de onda \mathbf{k} que ocurren en la suma (A.24), terminan en puntos de una red cúbica simple (ver Fig. B.1) en el espacio k (en el caso 3D) con constante de red $2\pi/L$ (L el tamaño del sistema), pero dentro de la zona sombreada de la Fig. A.2, donde la interacción no es cero. En el límite termodinámico hay un número infinito de valores aceptables de \mathbf{k} para cada valor fijo de \mathbf{K} , por lo que el número de pares de Cooper que pueden ocupar el estado \mathbf{K} no tiene límite. Nótese que de (A.8), cualquiera que sea la interacción interfermiónica entre portadores de carga o entre átomos neutros, el eigenvalor de la energía de un par de Cooper $2E_F + \mathcal{E}_K$ así como la función de onda (ver Apéndice A), dependen sólo de valores definidos de \mathbf{K} y no de valores definidos de \mathbf{k} , por lo que \mathbf{K} es un buen número cuántico. Esto ocurre también en el caso de los pares de Cooper definidos autoconsistentemente (sin excluir los pares de Cooper de agujeros) a través de la ecuación de Bethe-Salpeter en la aproximación de escalera (“ladder approximation”), tanto en 3D [88] como en 2D [89]. Por lo anterior, es la estadística de Bose-Einstein la

que satisfacen ya sean los pares de Cooper ordinarios o los de Bethe-Salpeter pues cada nivel de energía del par de Cooper \mathcal{E}_K no tiene un límite de ocupación. Nótese que lo anterior es válido para cualquier acoplamiento, es decir, no importa el tamaño del par de Cooper ni su traslape mutuo.

En pleno contraste, los pares de BCS definidos por los operadores de aniquilación y creación (Ref. [46], Ecs. (2.9) y (2.10))

$$b_{\mathbf{k}\mathbf{K}} \equiv a_{\mathbf{k}_2\downarrow} a_{\mathbf{k}_1\uparrow} \quad \text{y} \quad b_{\mathbf{k}\mathbf{K}}^\dagger \equiv a_{\mathbf{k}_1\uparrow}^\dagger a_{\mathbf{k}_2\downarrow}^\dagger, \quad (\text{B.2})$$

respectivamente, representan pares de fermiones con valores de \mathbf{K} y \mathbf{k} fijos, donde

$$\mathbf{k} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \quad \text{y} \quad \mathbf{K} \equiv \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 \quad (\text{B.3})$$

son los vectores de onda relativo y de centro de masa, respectivamente, asociados con los vectores de onda de dos fermiones

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{K}/2 + \mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{k}_2 = \mathbf{K}/2 - \mathbf{k}. \quad (\text{B.4})$$

En (B.2), $a_{\mathbf{k}_1s}^\dagger$ y $a_{\mathbf{k}_1s}$ son los operadores de creación y aniquilación de fermiones, que satisfacen las reglas de anticonmutación de Fermi:

$$\begin{aligned} \{a_{\mathbf{k}_1s}^\dagger, a_{\mathbf{k}'_1s'}^\dagger\} &= \{a_{\mathbf{k}_1s}, a_{\mathbf{k}'_1s'}\} = 0 \\ \{a_{\mathbf{k}_1s}, a_{\mathbf{k}'_1s'}^\dagger\} &= \delta_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}'_1} \delta_{ss'}. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Los operadores $b_{\mathbf{k}\mathbf{K}}$ y $b_{\mathbf{k}\mathbf{K}}^\dagger$ satisfacen: a) las reglas de conmutación de pseudobosones

$$[b_{\mathbf{k}\mathbf{K}}, b_{\mathbf{k}'\mathbf{K}}^\dagger] = (1 - n_{\mathbf{K}/2-\mathbf{k}\downarrow} - n_{\mathbf{K}/2+\mathbf{k}\uparrow}) \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \quad (\text{B.6})$$

$$[b_{\mathbf{k}\mathbf{K}}^\dagger, b_{\mathbf{k}'\mathbf{K}}^\dagger] = [b_{\mathbf{k}\mathbf{K}}, b_{\mathbf{k}'\mathbf{K}}] = 0 \quad (\text{B.7})$$

donde

$$n_{\mathbf{K}/2\pm\mathbf{k}s} \equiv a_{\mathbf{K}/2\pm\mathbf{k}s}^\dagger a_{\mathbf{K}/2\pm\mathbf{k}s} \quad (\text{B.8})$$

es el operador de número de fermiones; y b) la reglas de anticonmutación de pseudofermiones

$$\{b_{\mathbf{k}\mathbf{K}}, b_{\mathbf{k}'\mathbf{K}}\} = 2b_{\mathbf{k}\mathbf{K}} b_{\mathbf{k}'\mathbf{K}} (1 - \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}). \quad (\text{B.9})$$

La única restricción que se tiene es $\mathbf{K} \equiv \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}'_1 + \mathbf{k}'_2$.

Para probar (B.6) escribimos

$$\begin{aligned} [b_{\mathbf{k}\mathbf{K}}, b_{\mathbf{k}'\mathbf{K}}^\dagger] &\equiv b_{\mathbf{k}\mathbf{K}} b_{\mathbf{k}'\mathbf{K}}^\dagger - b_{\mathbf{k}'\mathbf{K}}^\dagger b_{\mathbf{k}\mathbf{K}} \\ &\equiv a_{\mathbf{k}_2\downarrow} a_{\mathbf{k}_1\uparrow} a_{\mathbf{k}'_1\uparrow}^\dagger a_{\mathbf{k}'_2\downarrow}^\dagger - a_{\mathbf{k}'_1\uparrow}^\dagger a_{\mathbf{k}'_2\downarrow}^\dagger a_{\mathbf{k}_2\downarrow} a_{\mathbf{k}_1\uparrow} \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

donde se ha usado (B.2). Usando (B.4), (B.10) se puede escribir como

$$\begin{aligned} [b_{\mathbf{k}\mathbf{K}}, b_{\mathbf{k}'\mathbf{K}}^\dagger] &= a_{\mathbf{K}/2-\mathbf{k}\downarrow} a_{\mathbf{K}/2+\mathbf{k}\uparrow} a_{\mathbf{K}/2+\mathbf{k}'\uparrow}^\dagger a_{\mathbf{K}/2-\mathbf{k}'\downarrow}^\dagger - \\ &\quad - a_{\mathbf{K}/2+\mathbf{k}'\uparrow}^\dagger a_{\mathbf{K}/2-\mathbf{k}'\downarrow}^\dagger a_{\mathbf{K}/2-\mathbf{k}\downarrow} a_{\mathbf{K}/2+\mathbf{k}\uparrow}. \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Aplicando (B.5) al par de operadores $a_{\mathbf{K}/2+\mathbf{k}\uparrow} a_{\mathbf{K}/2+\mathbf{k}'\uparrow}^\dagger$ del primer término del miembro derecho, éste se transforma en

$$a_{\mathbf{K}/2-\mathbf{k}\downarrow} a_{\mathbf{K}/2-\mathbf{k}'\downarrow}^\dagger \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} - a_{\mathbf{K}/2-\mathbf{k}\downarrow} a_{\mathbf{K}/2+\mathbf{k}'\uparrow}^\dagger a_{\mathbf{K}/2+\mathbf{k}\uparrow} a_{\mathbf{K}/2-\mathbf{k}'\downarrow}^\dagger. \quad (\text{B.12})$$

Usando (B.5) y recordando que $\delta_{\uparrow\downarrow} \equiv 0$, etc. los dos términos anteriores se escriben como

$$a_{\mathbf{K}/2-\mathbf{k}\downarrow} a_{\mathbf{K}/2-\mathbf{k}'\downarrow}^\dagger \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} - a_{\mathbf{K}/2+\mathbf{k}'\uparrow}^\dagger a_{\mathbf{K}/2+\mathbf{k}\uparrow} a_{\mathbf{K}/2-\mathbf{k}\downarrow} a_{\mathbf{K}/2-\mathbf{k}'\downarrow}^\dagger. \quad (\text{B.13})$$

Aplicando (B.5) otra vez pero ahora al par de operadores $a_{\mathbf{K}/2-\mathbf{k}\downarrow} a_{\mathbf{K}/2-\mathbf{k}'\downarrow}^\dagger$ tenemos que el primer término de (B.11) puede escribirse como $\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} (1 - a_{\mathbf{K}/2-\mathbf{k}'\downarrow}^\dagger a_{\mathbf{K}/2-\mathbf{k}\downarrow} - a_{\mathbf{K}/2+\mathbf{k}'\uparrow}^\dagger a_{\mathbf{K}/2+\mathbf{k}\uparrow}) \times -a_{\mathbf{K}/2+\mathbf{k}'\uparrow}^\dagger a_{\mathbf{K}/2+\mathbf{k}\uparrow} a_{\mathbf{K}/2-\mathbf{k}'\downarrow}^\dagger a_{\mathbf{K}/2-\mathbf{k}\downarrow}$. Después de anticonmutar todos los operadores de creación a la izquierda en el último término usando que $\delta_{\uparrow\downarrow} \equiv 0$, etc., y sustituyendo en (B.11) obtenemos precisamente (B.6) donde hay que usar la definición del operador de número (B.8). Por otro lado, (B.7) se obtiene como sigue

$$\begin{aligned} [b_{\mathbf{k}\mathbf{K}}, b_{\mathbf{k}'\mathbf{K}}] &\equiv b_{\mathbf{k}\mathbf{K}} b_{\mathbf{k}'\mathbf{K}} - b_{\mathbf{k}'\mathbf{K}} b_{\mathbf{k}\mathbf{K}} \\ &\equiv a_{\mathbf{k}_2\downarrow} a_{\mathbf{k}_1\uparrow} a_{\mathbf{k}'_2\downarrow} a_{\mathbf{k}'_1\uparrow} - a_{\mathbf{k}'_2\downarrow} a_{\mathbf{k}'_1\uparrow} a_{\mathbf{k}_2\downarrow} a_{\mathbf{k}_1\uparrow} \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

donde (B.2) ha sido usada, o usando (B.4) se tiene que

$$\begin{aligned} [b_{\mathbf{k}\mathbf{K}}, b_{\mathbf{k}'\mathbf{K}}] &\equiv a_{\mathbf{K}/2-\mathbf{k}\downarrow} a_{\mathbf{K}/2+\mathbf{k}\uparrow} a_{\mathbf{K}/2-\mathbf{k}'\downarrow} a_{\mathbf{K}/2+\mathbf{k}'\uparrow} - \\ &\quad - a_{\mathbf{K}/2-\mathbf{k}'\downarrow} a_{\mathbf{K}/2+\mathbf{k}'\uparrow} a_{\mathbf{K}/2-\mathbf{k}\downarrow} a_{\mathbf{K}/2+\mathbf{k}\uparrow}. \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Usando (B.5) el primer término del lado derecho se transforma en el segundo anticonmutando todos los operadores con subíndices primados a la izquierda, demostrando (B.7). Finalmente, para demostrar (B.9) escribimos

$$\begin{aligned} \{b_{\mathbf{k}\mathbf{K}}, b_{\mathbf{k}'\mathbf{K}}\} &\equiv b_{\mathbf{k}\mathbf{K}} b_{\mathbf{k}'\mathbf{K}} + b_{\mathbf{k}'\mathbf{K}} b_{\mathbf{k}\mathbf{K}} \\ &\equiv a_{\mathbf{k}_2\downarrow} a_{\mathbf{k}_1\uparrow} a_{\mathbf{k}'_2\downarrow} a_{\mathbf{k}'_1\uparrow} + a_{\mathbf{k}'_2\downarrow} a_{\mathbf{k}'_1\uparrow} a_{\mathbf{k}_2\downarrow} a_{\mathbf{k}_1\uparrow} \\ &\equiv a_{\mathbf{K}/2-\mathbf{k}\downarrow} a_{\mathbf{K}/2+\mathbf{k}\uparrow} a_{\mathbf{K}/2-\mathbf{k}'\downarrow} a_{\mathbf{K}/2+\mathbf{k}'\uparrow} + \\ &\quad + a_{\mathbf{K}/2-\mathbf{k}'\downarrow} a_{\mathbf{K}/2+\mathbf{k}'\uparrow} a_{\mathbf{K}/2-\mathbf{k}\downarrow} a_{\mathbf{K}/2+\mathbf{k}\uparrow}. \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Si $\mathbf{k} \neq \mathbf{k}'$, usando (B.5) ésta se convierte en

$$\begin{aligned} \{b_{\mathbf{k}\mathbf{K}}, b_{\mathbf{k}'\mathbf{K}}\} &= 2a_{\mathbf{K}/2-\mathbf{k}\downarrow} a_{\mathbf{K}/2+\mathbf{k}\uparrow} a_{\mathbf{K}/2-\mathbf{k}'\downarrow} a_{\mathbf{K}/2+\mathbf{k}'\uparrow} \\ &\equiv 2b_{\mathbf{k}\mathbf{K}} b_{\mathbf{k}'\mathbf{K}}. \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Y cuando $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$ se tiene que (B.16) da como resultado

$$\begin{aligned} \{b_{\mathbf{k}\mathbf{K}}, b_{\mathbf{k}\mathbf{K}}\} &= 2a_{\mathbf{K}/2-\mathbf{k}\downarrow} a_{\mathbf{K}/2+\mathbf{k}\uparrow} a_{\mathbf{K}/2-\mathbf{k}\downarrow} a_{\mathbf{K}/2+\mathbf{k}\uparrow} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

pues $(a_{\mathbf{K}/2\pm\mathbf{k}\downarrow})^2 \equiv 0$. Por lo que (B.9) se satisface.

Claramente, los pares de BCS *no son* bosones pues (B.6) hace imposible que se satisfagan [39] las reglas ordinarias de conmutación de Bose:

$$[b_{\mathbf{k}\mathbf{K}}, b_{\mathbf{k}'\mathbf{K}}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \quad (\text{B.19})$$

$$[b_{\mathbf{k}\mathbf{K}}^\dagger, b_{\mathbf{k}'\mathbf{K}}^\dagger] = [b_{\mathbf{k}\mathbf{K}}, b_{\mathbf{k}'\mathbf{K}}] = 0. \quad (\text{B.20})$$

En el caso $\mathbf{K} = 0$ (de tal modo que $\mathbf{k}_1 = -\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}$, el único caso considerado por BCS), y definiendo $b_{\mathbf{k}\mathbf{K}=0} \equiv b_{\mathbf{k}}$, etc., (B.6), (B.7) y (B.9) se transforman en las ecuaciones (2.11)-(2.13) de la Ref. [46].

A pesar de que indudablemente los pares de BCS no son bosones, hay casos especiales en los que pueden considerarse como tales. Primero, nótese que existe una correspondencia uno a uno entre los valores de \mathbf{k} y los operadores de pares de BCS (B.2). Así, si elegimos $\mathbf{k} \neq \mathbf{k}'$, es evidente que tanto (B.6) como (B.7) se convierten en las reglas de conmutación (B.19) y (B.20), respectivamente. Entonces, como un par de Cooper, con \mathbf{K} definida, involucra muchos valores *distintos* de \mathbf{k} en la suma (B.1), los operadores (B.2) asociados a esos valores de \mathbf{k} satisfacen (B.19) y (B.20). Otro caso es, cuando el número de valores posibles de \mathbf{k} es mucho mayor que el número de partículas del sistema (aproximación bosónica [101]), con lo cual, podemos hacer la aproximación $(1 - n_{\mathbf{K}/2-\mathbf{k}\downarrow} - n_{\mathbf{K}/2+\mathbf{k}\uparrow}) \simeq 1$, de este modo tanto (B.6) como (B.7) se reducen a (B.19) y (B.20), respectivamente.

Hasta donde sabemos, si bien no se han podido deducir los operadores de creación y aniquilación de pares de Cooper (que en el CBFM postulamos bosónicos) a partir de los operadores fermiónicos del hamiltoniano no perturbado (que define al estado normal) y por tanto mostrar que obedecen las reglas de conmutación de Bose, sí es un hecho que los pares de Cooper obedecen la estadística de Bose (como lo corrobora el hecho que los eigenvalores de $\sum_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}\mathbf{K}}^\dagger b_{\mathbf{k}\mathbf{K}}$ son 0, 1, 2, ... [102], en correspondencia con la estadística de Bose-Einstein a diferencia de los eigenvalores de $b_{\mathbf{k}\mathbf{K}}^\dagger b_{\mathbf{k}\mathbf{K}}$ que son 0 o 1 en perfecta concordancia con el principio de exclusión de Pauli), pues *no* dependen de \mathbf{k} sino sólo de \mathbf{K} .

Apéndice C

C Dedución heurística de la ecuación del gap de BCS a $T = 0$

Esta simple deducción heurística resalta la simetría perfecta entre pares de Cooper de electrones y de agujeros en el condensado de BCS, aunque sólo a $T = 0$.

Sea k el número cuántico que describe el estado cuántico de dos electrones tal que el estado interno del par corresponde a un electrón con momento \mathbf{k} y espín \uparrow y otro con momento $-\mathbf{k}$ y espín \downarrow . De este modo el momento total o momento de centro de masa del par será $\mathbf{K} \equiv \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k} - \mathbf{k} = 0$. Los coeficientes variacionales de la función de onda del estado base de BCS, Ec. (2.8) también llamados coeficientes de Bogoliubov, u_k, v_k son definidos de manera que v_k^2 da la probabilidad de que el estado k esté ocupado mientras que $u_k^2 = 1 - v_k^2$ da la probabilidad de que el estado k esté desocupado. Fijamos el número de electrones escribiendo $N = 2 \sum_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}^2$ y la energía cinética de los pares está dada por $2 \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}^2$.

La interacción efectiva entre dos electrones mediada a través de fonones es modelada por $V_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}$ (2.18) que da la transición de un par de electrones en el estado \mathbf{k} al estado \mathbf{k}' . La transición requiere, por el principio de exclusión de Pauli, que inicialmente el estado \mathbf{k} del par esté ocupado y el estado del par \mathbf{k}' esté vacío. Así que la probabilidad de dicha transición debe ser proporcional a $v_{\mathbf{k}}^2 u_{\mathbf{k}'}^2 = v_{\mathbf{k}}^2 (1 - v_{\mathbf{k}'}^2)$ mientras que la probabilidad para la transición opuesta sería proporcional a $v_{\mathbf{k}'}^2 (1 - v_{\mathbf{k}}^2)$.

La energía potencial sería entonces $-V \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{k}'} v_{\mathbf{k}}^2 (1 - v_{\mathbf{k}'}^2)$ pero esta forma no es simétrica, a menos que se escriba como $-V \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{k}'} [v_{\mathbf{k}}^2 (1 - v_{\mathbf{k}'}^2) v_{\mathbf{k}'}^2 (1 - v_{\mathbf{k}}^2)]^{1/2}$. Bajo estas consideraciones, la energía total del estado superconductor puede escribirse como

$$E_S = 2 \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}^2 - V \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{k}'} [v_{\mathbf{k}}^2 (1 - v_{\mathbf{k}'}^2) v_{\mathbf{k}'}^2 (1 - v_{\mathbf{k}}^2)]^{1/2}$$

donde las sumas primadas son sobre todas las k que satisfacen (2.18).

En el límite cuando $V \rightarrow 0$, debemos recuperar la energía del estado normal E_N , es decir, del gas ideal de Fermi, que sería

$$E_S \xrightarrow{V \rightarrow 0} E_N = 2 \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}}$$

con $n_k = \theta(k_F - k)$ a $T = 0$, donde $\theta(x)$ es 1 si $x > 0$ y 0 si $x < 0$.

Los valores de v_k^2 que minimizan $E_S[v_k^2]$ bajo la constricción de que $N = 2 \sum_k v_k^2$ es constante; pueden calcularse minimizando $E_S[v_k^2] - 2\mu \sum_k v_k^2$ donde el multiplicador de Lagrange μ es el potencial químico. Entonces calculando $\delta\{E_S[v_k^2] - 2\mu \sum_k v_k^2\}/\delta v_k^2 = 0$ mediante la identidad $\delta v_l^2/\delta v_k^2 = \delta_{k,l}$ tenemos, después de un poco de algebra, que

$$2(\varepsilon_l - \mu) = V \sum_k' \frac{v_k^2(1 - v_k^2)(1 - 2v_l^2)}{[v_k^2(1 - v_k^2)v_l^2(1 - v_l^2)]^{1/2}}. \quad (\text{C.1})$$

Definiendo $V \sum_k' \sqrt{v_k^2(1 - v_k^2)} \equiv \Delta \geq 0$ y sacando de la suma los términos con subíndice l tenemos que (C.1) se reescribe como

$$2(\varepsilon_l - \mu) \frac{\sqrt{v_l^2(1 - v_l^2)}}{(1 - 2v_l^2)} = \Delta. \quad (\text{C.2})$$

Reemplazando el subíndice l por k y simplificando, queda la siguiente ecuación cuadrática en v_k^2

$$v_k^4 - v_k^2 + \frac{\Delta^2}{4[(\varepsilon_k - \mu)^2 + \Delta^2]} = 0 \quad (\text{C.3})$$

cuya solución es

$$v_k^2 = \frac{1}{2} \left[1 \pm \frac{\varepsilon_k - \mu}{\sqrt{(\varepsilon_k - \mu)^2 + \Delta^2}} \right]. \quad (\text{C.4})$$

Puesto que v_k^2 da la probabilidad de tener el estado k ocupado, v_k^2 debe reducirse a $\theta(k_F - k)$ en acoplamiento cero, es decir cuando $\Delta = 0$, por lo que se elige el signo negativo en la Ec. (C.4), quedando (2.16), es decir

$$v_k^2 = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\varepsilon_k - \mu}{\sqrt{(\varepsilon_k - \mu)^2 + \Delta^2}} \right]. \quad (\text{C.5})$$

De aquí

$$\begin{aligned} u_k^2 &= 1 - v_k^2 \\ &= \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\varepsilon_k - \mu}{\sqrt{(\varepsilon_k - \mu)^2 + \Delta^2}} \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Así sustituyendo (C.5) en la definición de Δ obtenemos la ecuación BCS del gap a $T = 0$ (2.20)

$$1 = \frac{V}{2} \sum_k' \frac{1}{\sqrt{(\varepsilon_k - \mu)^2 + \Delta^2}}.$$

Haciendo la sustitución $\sum_{\mathbf{k}}' \rightarrow \int_{E_F - \hbar\omega_D}^{E_F + \hbar\omega_D} d\varepsilon N(\varepsilon)$ tenemos

$$1 = \frac{V}{2} \int_{E_F - \hbar\omega_D}^{E_F + \hbar\omega_D} d\varepsilon N(\varepsilon) \frac{1}{\sqrt{(\varepsilon - \mu)^2 + \Delta^2}}$$

y suponiendo $\hbar\omega_D \ll \mu = E_F$ la $N(\varepsilon)$ puede quedar fuera de la integral como la constante $N(E_F)$. La integral que resulta es analítica y da el conocido resultado (2.21), es decir

$$\Delta = \frac{\hbar\omega_D}{\sinh(1/\lambda)}$$

$$\xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 2\hbar\omega_D e^{-1/\lambda},$$

donde $\lambda \equiv N(E_F)V$.

Así pues, vemos que el condensado de BCS consiste de pares de Cooper de electrones y de agujeros en simetría perfecta.

ESTA TESIS NO SALE
DE LA BIBLIOTECA

Apéndice D

D Límite de todos los electrones apareados

Si queremos aplicar (3.5) a la superconductividad considerando que un sistema en d dimensiones de N fermiones (por ejemplo electrones) forman un sistema de $N_B \equiv N/2$ bosones de masa $m_B = 2m$ a través de la formación de pares de Cooper, y suponiendo la relación de dispersión de energía *vs* momento de centro de masa cuadrática, tenemos que la BEC ocurre de la (3.5) con $s = 2$ a la temperatura

$$T_c = \frac{\pi \hbar^2}{k_B m [2g_{d/2}(1)]^{2/d} n^{2/d}} \quad (\text{D.1})$$

donde $n \equiv N/L^d$ es la densidad de número de fermiones y $g_{d/2}(1)$ la función de Bose evaluada en 1 que coincide con la función zeta de Riemann $\zeta(d/2)$ si $d/2 > 1$. Si usamos como escala de temperatura la temperatura de Fermi definida a través de $E_F \equiv k_B T_F = \hbar^2 k_F^2 / 2m$ con $k_F = [2^{d-2} \pi^{d/2} d \Gamma(d/2) n]^{1/d}$ el momento de Fermi, reescribimos la Ec. (D.1) como

$$\frac{T_c}{T_F} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\Gamma(d/2 + 1) \zeta(d/2)} \right]^{2/d}. \quad (\text{D.2})$$

Esta es igual a 0 para $d \leq 2$ pues $g_{d/2}(1) = \infty$ siempre que $d/2 \leq 1$. En el caso $d = 3$ se obtiene el resultado bien conocido

$$\frac{T_c}{T_F} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\Gamma(5/2) \zeta(3/2)} \right]^{2/3} \simeq 0.218 \quad (\text{D.3})$$

(ver línea en trazas en la Fig. 2 de Uemura de Ref. [103]). Este valor es marcado con un triángulo en las Figs. 5.3 y 5.5. De este modo $T_c = 0$ si $0 < d \leq s$ pues $g_{d/s}(1) = \infty$ siempre que $d/s \leq 1$, pero vale $\zeta(d/s)$ y es finita en otro caso.

Uno puede tener temperaturas críticas finitas cuando $d = 2$ y aún en $d = (1 + \epsilon)$ siempre que $s = 1$ pues para este caso de la Ec. (3.5) uno tiene

$$\frac{T_c}{T_F} = \frac{m C_1}{\hbar^2} \left[\frac{2}{\Gamma(d+1) \Gamma(d/2+1) \zeta(d) \pi^{d/2} n} \right]^{1/d}, \quad (\text{D.4})$$

donde C_1 es el coeficiente que aparece en la relación de dispersión generalizada $\mathcal{E}_K = C_s K^s$ para el caso $s = 1$. Para calcular la temperatura de transición BEC no nula de sistemas

bidimensionales [104]-[106], como los cupratos, por medio de la fórmula general (3.5), tendríamos, por lo anterior que usar (D.4), es decir, suponer una relación de dispersión de energía *vs* momento de centro de masa lineal, explícitamente $\mathcal{E}_K = C_1 K$ y no la cuadrática $\hbar^2 K^2/4m$. Y resulta que si uno resuelve el problema de Cooper donde tanto la formación de pares de partículas (bosones) como la de pares de agujeros (antibosones) es tomada en cuenta (como por consistencia se debe hacer) a través de las funciones de Green en, por ejemplo, la ecuación de Bethe-Salpeter (donde se incluyen tanto los pares de agujeros como los efectos de muchos cuerpos), la relación de dispersión de los pares de Cooper, a orden dominante, resulta también lineal, es decir, $\mathcal{E}_K \simeq (\lambda/2\pi)\hbar v_F K$ en 2D [89] y $\mathcal{E}_K \simeq (\lambda/4)\hbar v_F K$ en 3D [88]. Aquí, $\lambda \equiv VN(E_F)$ es el parámetro de acoplamiento de BCS, $N(E_F)$ la densidad de estados electrónica (para un sólo spin) evaluado en la superficie de Fermi. Nótese que λ *no* aparece en la relación lineal del problema original (con pares 2e-CPs nada más) de Cooper. Por lo tanto, identificando C_1 con $(\lambda/2\pi)\hbar v_F$ y sustituyendo en (D.4) para $d = 2$ tenemos

$$\frac{T_c}{T_F} = \frac{m\lambda v_F}{2\pi\hbar} \left[\frac{2}{2\zeta(2)\pi n} \right]^{1/2}. \quad (\text{D.5})$$

Como $E_F \equiv mv_F^2/2 = \hbar^2\pi n/m$, esto da

$$\frac{T_c}{T_F} = \frac{\lambda}{\pi} \left[\frac{1}{2\zeta(2)} \right]^{1/2}, \quad (\text{D.6})$$

que para $\lambda = 1/2$ da $T_c/T_F \simeq 0.088$ y para $\lambda = 1/4$ da $T_c/T_F \simeq 0.044$ ya que $\zeta(2) = \pi^2/6$. Estos valores han sido marcados con unos cuadrados en la Fig. 5.7.

En el caso 3D el análogo de la Ec. (D.5) será

$$\frac{T_c}{T_F} = \frac{mC_1}{\hbar^2} \left[\frac{2}{\Gamma(4)\Gamma(5/2)\zeta(3)\pi^{3/2}n} \right]^{1/3}. \quad (\text{D.7})$$

Usando que ahora $C_1 = (\lambda/4)\hbar v_F$ y que $E_F = mv_F^2/2 = (\hbar^2/2m)[3\pi^2n]^{2/3}$ tenemos

$$\frac{T_c}{T_F} = \frac{\lambda}{4} \left[\frac{4}{3\zeta(3)} \right]^{1/3} \quad (\text{D.8})$$

lo que resulta $\simeq 0.129$ para $\lambda = 1/2$ ya que $\zeta(3) \simeq 1.202$ (valor marcado con un cuadrado en la Fig. 5.5) y $\simeq 0.065$ para $\lambda = 1/4$.

	\mathcal{E}_K	T_c/T_F
3D	$\frac{\hbar^2 k^2}{4m}$	0.218
	$\frac{1}{2}\hbar v_F K$	0.518
	$\frac{\lambda}{4}\hbar v_F K$	$\frac{\lambda}{4} \left[\frac{4}{3\zeta(3)} \right]^{1/3} \begin{cases} 0.129 & (\lambda = 1/2) \\ 0.065 & (\lambda = 1/4) \end{cases}$
2D	$\frac{\hbar^2 k^2}{4m}$	0
	$\frac{2}{\pi}\hbar v_F K$	0.702
	$\frac{\lambda}{2\pi}\hbar v_F K$	$\frac{\lambda}{\pi} \left[\frac{1}{2\zeta(2)} \right]^{1/2} \begin{cases} 0.088 & (\lambda = 1/2) \\ 0.044 & (\lambda = 1/4) \end{cases}$

Tabla D.1. Temperatura crítica de BEC T_c , cuando se considera que un sistema de N electrones forma un sistema de $N/2$ bosones, cuya relación de dispersión \mathcal{E}_K es: cuadrática $\hbar^2 k^2/4m$, que corresponde a bosones libres; lineal e independiente del parámetro de acoplamiento λ , $a_d \hbar v_F K$ ($a_d = 1/2, 2/\pi$ en 3D y 2D respectivamente), que resulta de resolver la ecuación de eigenvalores del problema de Cooper en el límite $K \rightarrow 0$; lineal y dependiente de λ , $\lambda a_d \hbar v_F K$ ($a_d = 1/4, 1/2\pi$ en 3D y 2D respectivamente), que se obtiene cuando se resuelve el problema de Cooper vía la ecuación de Bethe-Salpeter (donde tanto pares de partículas y de agujeros son considerados consistentemente) en el límite $K \rightarrow 0$.

Apéndice E

E Gas ideal relativista de bosones

En este Apéndice discutimos el concepto de una T_c tipo BEC *espúria*, que lo es por tratarse de una singularidad posterior (o más baja) al enfriar un sistema de muchos cuerpos. Se describen los notables efectos en la temperatura crítica cuando se consideran anti-partículas en la BEC. El caso que aquí se expone es el gas ideal relativista de bosones de masa m_B , ya que en éste, a temperaturas suficientemente elevadas ($T \gtrsim m_B c^2/k_B$) la creación de pares bosón-antibosón debe tomarse en cuenta.

E.1 Condensación Bose-Einstein (BEC)

La temperatura crítica de condensación de un gas ideal relativista cambia dramáticamente cuando son consideradas las anti-partículas, en particular en el límite ultrarelativista (UR, cuando la masa m_B de los bosones es muy pequeña), el efecto de las anti-partículas es reflejado en un aumento de la temperatura crítica de condensación respecto del caso cuando éstas no son consideradas.

De la estadística de Bose el número total de partículas de un gas ideal de bosones en d dimensiones sin tomar en cuenta las anti-partículas está dado por

$$N = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{e^{\beta(E_{\mathbf{k}} - \mu)} - 1} \quad (\text{E.1})$$

donde $\beta \equiv 1/k_B T$, $\mu(T)$ es el potencial químico bosónico y \mathbf{k} es un vector d -dimensional. Si pedimos que N sea constante entonces $\mu = \mu(T)$. Las partículas poseen la relación de dispersión exacta

$$E_{\mathbf{k}} = \sqrt{c^2 \hbar^2 k^2 + m_B^2 c^4} \begin{cases} \xrightarrow{\hbar k c \ll m_B c^2} \hbar^2 k^2 / 2m_B + m_B c^2 + O(k^4) & \text{NR} \\ \xrightarrow{\hbar k c \gg m_B c^2} \hbar k c [1 + (m_B c / \hbar k)^2 / 2 + \dots] & \text{UR}, \end{cases} \quad (\text{E.2})$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío, k_B es la constante de Boltzmann y NR significa “no-relativista.” Considerando que el número de partículas se conserva tenemos que para temperaturas $T \geq T_c$, el potencial químico $\mu \leq E_0 \equiv m_B c^2$ donde T_c queda definida por $\mu(T_c) = m_B c^2$ y la densidad de número

$$n \equiv \frac{N}{L^d} = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d k \frac{1}{\exp[\beta_c (E_{\mathbf{k}} - m_B c^2)] - 1}. \quad (\text{E.3})$$

Esta última expresión se obtiene al pasar de la suma que aparece en (E.1) a una integral vía la Ec. (3.2) y poner $N_0 \equiv \exp\{\beta_c [m_B c^2 - \mu(T_c)] - 1\}^{-1} \equiv 0$, donde $\beta_c \equiv 1/k_B T_c$.

E.1.1 El límite no-relativista (NR)

El límite NR se consigue tomando el límite superior en (E.2) y sustituyendo en (E.3), es decir,

$$n = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d k \frac{1}{\exp[\beta_c (\hbar^2 k^2 / 2m_B)] - 1}. \quad (\text{E.4})$$

Evaluando la integral mediante las Ecs. (F.18) y (F.19) resulta

$$n = \frac{m_B^d c^d}{\hbar^d 2^{d/2} \pi^{d/2} g_{d/2}(1)} \left(\frac{k_B T_c}{m_B c^2} \right)^{d/2}, \quad (\text{E.5})$$

donde $g_\sigma(z) \equiv \sum_{i=1}^{\infty} (z^i / i^\sigma)$ es la función de Bose que para $d/2 > 1$, $g_{d/2}(1)$ coincide con la función zeta de Riemann $\zeta(\sigma) \equiv \sum_{i=1}^{\infty} i^{-\sigma}$ (ver Apéndice E.3). De aquí que la temperatura crítica está dada por

$$k_B T_c^{NR} = \frac{2\pi \hbar^2}{m_B [\zeta(d/2)]^{2/d}} n^{2/d}. \quad (\text{E.6})$$

En 3D se tiene el conocido resultado no-relativista (3.6)

$$k_B T_c^{NR} = \frac{2\pi \hbar^2}{m_B [\zeta(3/2)]^{2/3}} n^{2/3} \simeq 3.31 \frac{\hbar^2}{m_B} n^{2/3} \quad (\text{E.7})$$

ya que $\zeta(3/2) \simeq 2.612$. Para $d \leq 2$ la función de Bose $g_{d/2}(1)$ diverge dando cero para las temperaturas críticas T_c de condensación.

E.1.2 El límite ultra-relativista (UR) sin antibosones

Usando el primer término del límite inferior de (E.2), la ecuación (E.3) es

$$n = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d k \frac{1}{\exp[\beta_c (c\hbar k - m_B c^2)] - 1}. \quad (\text{E.8})$$

Evaluando la integral mediante las Ecs. (F.18) y (F.19) tenemos que

$$n = \frac{\Gamma(d)}{\Gamma(d/2) 2^{d-1} \pi^{d/2} g_d(1)} \left(\frac{k_B T_c}{\hbar c} \right)^d \quad (\text{E.9})$$

y despejando $k_B T_c$ resulta

$$k_B T_c^{UR-B} = \left[\frac{\hbar^d c^d 2^{d-1} \pi^{d/2} \Gamma(d/2)}{\Gamma(d) \zeta(d)} \right]^{1/d} n^{1/d}, \quad (\text{E.10})$$

donde el superíndice $UR - B$ se refiere al caso ultrarelativista donde sólo partículas (bosones) son consideradas y aún no las antipartículas (antibosones). Para el caso $d = 3$ esto se reduce a

$$k_B T_c^{UR-B} = \frac{\hbar c \pi^{2/3}}{[\zeta(3)]^{1/3}} n^{1/3} \simeq 2.02 \hbar c n^{1/3}. \quad (\text{E.11})$$

A diferencia del caso NR (E.7) tenemos $T_c^{UR-B} \neq 0$ en 2D pues para $d = 2$

$$k_B T_c^{UR-B} = \hbar c \left[\frac{2\pi}{\zeta(2)} \right]^{1/2} n^{1/2} \simeq 1.95 \hbar c n^{1/2} \quad (\text{E.12})$$

ya que $\zeta(2) = \pi^2/6 \simeq 1.645$.

Es importante resaltar el hecho de que en este límite, $k_B T_c$ no depende de la masa en reposo m_B de las partículas, pues en el límite UR la energía en reposo se desprecia frente a la energía cinética. En la Fig. E.1 se presenta la temperatura crítica de condensación cuando no hay antibosones tanto para el límite no-relativista usando $E_k = \hbar^2 k^2 / 2m_B$ como para el ultra-relativista usando $E_k = \hbar c k$ como función de la masa m_B en unidades de $\hbar n^{1/3} / c$ y se compara con el caso exacto utilizando $E_k = \sqrt{c^2 \hbar^2 k^2 + m_B^2 c^4}$. En la misma figura se aprecia como para valores grandes de $m_B c / \hbar n^{1/3}$ el límite no-relativista domina mientras que en el caso contrario, es decir, para valores pequeños de $m_B c / \hbar n^{1/3}$, es el límite ultra-relativista el que domina.

E.2 Los antibosones incluidos

Para temperaturas $k_B T \gtrsim m_B c^2$ la producción de pares partícula-antipartícula no debe ignorarse [57],[107]. En este caso el número de bosones N ya no es una cantidad conservada, sino la carga total $Q \equiv q(N - N^-)$ del sistema, donde si N es el número de bosones entonces N^- es el número de antibosones, q es la carga de cada bosón y $-q$ la de cada antibosón. En segunda cuantización, el operador de carga y el hamiltoniano se escriben como

$$\begin{aligned} \hat{Q} &\equiv q(\hat{N} - \hat{N}^-) \\ &= q \sum_{\mathbf{k}} (\beta_{\mathbf{k}}^\dagger \beta_{\mathbf{k}} - \gamma_{\mathbf{k}}^\dagger \gamma_{\mathbf{k}}), \end{aligned} \quad (\text{E.13})$$

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}} E_k (\beta_{\mathbf{k}}^\dagger \beta_{\mathbf{k}} + \gamma_{\mathbf{k}}^\dagger \gamma_{\mathbf{k}}). \quad (\text{E.14})$$

donde $\beta_{\mathbf{k}}^\dagger$ ($\beta_{\mathbf{k}}$), $\gamma_{\mathbf{k}}^\dagger$ ($\gamma_{\mathbf{k}}$) son los operadores de creación (aniquilación) de bosones y antibosones respectivamente.

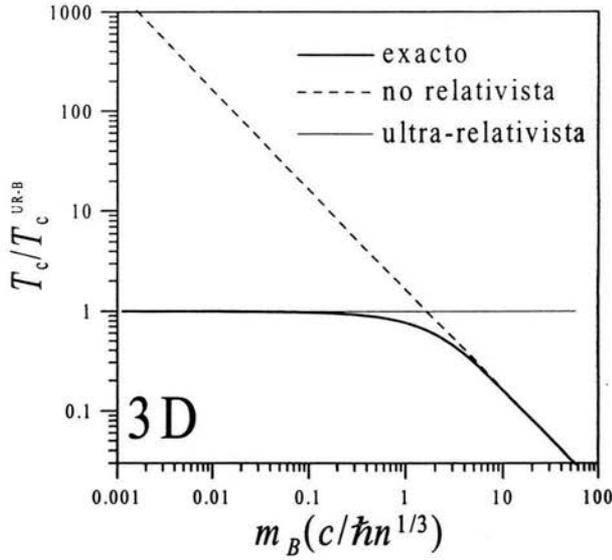


Figura E.1. T_c para el caso 3D cuando no hay antibosones presentes. Para valores pequeños de $m_B c / \hbar n^{1/3}$ (masa pequeña y/o densidad grande) es la temperatura crítica de condensación en el límite ultra-relativista T_c^{UR-B} la que domina y es prácticamente constante. Por otro lado, en el límite no-relativista, es decir, para valores grandes de $m_B c / \hbar n^{1/3}$ la temperatura crítica de condensación está dada por T_c^{NR-B} va como $1/m_B$.

Las propiedades termodinámicas se obtienen a partir de la gran función de partición $\Xi(T, V, \mu) \equiv \left\{ e^{-\beta[H - \mu(\hat{N} - \hat{N}^-)]} \right\}$ de la que se obtiene la carga total promedio $Q \equiv q(N - N^-)$, donde

$$\begin{aligned}
 N - N^- &= k_B T \left[\frac{\partial \ln \Xi(T, V, \mu)}{\partial \mu} \right]_{T, V} \\
 &= \sum_{\mathbf{k}} \left\{ \frac{1}{\exp[\beta(E_{\mathbf{k}} - \mu)] - 1} - \frac{1}{\exp[\beta(E_{\mathbf{k}} + \mu)] - 1} \right\} \\
 &\equiv \sum_{\mathbf{k}} (n_{\mathbf{k}} - n_{\mathbf{k}}^-). \tag{E.15}
 \end{aligned}$$

Aquí, $n_{\mathbf{k}} = \{\exp[\beta(E_{\mathbf{k}} - \mu)] - 1\}^{-1}$ ($n_{\mathbf{k}}^- = \{\exp[\beta(E_{\mathbf{k}} + \mu)] - 1\}^{-1}$) es el número promedio de bosones (antibosones) en el nivel de energía $E_{\mathbf{k}}$. Puesto que $n_{\mathbf{k}}, n_{\mathbf{k}}^- > 0$ para

toda \mathbf{k} el potencial químico satisface la siguiente desigualdad para cada valor de \mathbf{k} : $-E_{\mathbf{k}} \leq \mu \leq E_{\mathbf{k}}$. Además, como $E_{\mathbf{k}} = \sqrt{c^2 \hbar^2 k^2 + m_B^2 c^4}$ es una función creciente de \mathbf{k} , cada una de las desigualdades se satisfacen si elegimos μ dentro del intervalo $[-E_{k=0}, E_{k=0}]$, es decir,

$$-m_B c^2 \leq \mu \leq m_B c^2. \quad (\text{E.16})$$

La ecuación (E.15) puede escribirse como

$$N - N^- = \sum_{\mathbf{k}} \left[\frac{\sinh(\beta\mu)}{\cosh(\beta E_{\mathbf{k}}) - \cosh(\beta\mu)} \right]. \quad (\text{E.17})$$

Si empezamos inicialmente con un gas de N bosones, y puesto que a altas temperaturas se crean pares bosón-antibosón de tal modo que $N - N^-$ es constante, tendríamos que $0 \leq \mu \leq m_B c^2$. En el otro caso, si empezamos con un gas de N^- antibosones, tendríamos $-m_B c^2 \leq \mu \leq 0$.

Para $T > T_c$, donde ahora T_c queda definida por $\mu(T_c) = \pm m_B c^2$ (se toma el signo + si se empieza con un gas de N bosones y el - si se empieza con uno de N^- antibosones), tendríamos que

$$|n| = \frac{d\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2 + 1)(2\pi)^d} \int_0^\infty dk k^{d-1} \frac{\sinh(\beta_c m_B c^2)}{\cosh\left(\beta_c \sqrt{c^2 \hbar^2 k^2 + m_B^2 c^4}\right) - \cosh(\beta_c m_B c^2)}, \quad (\text{E.18})$$

donde $n \equiv (N - N^-)/L^d$, L^d el volumen en d dimensiones y $\beta_c \equiv 1/k_B T_c$. Y para pasar de la suma (E.17) a la integral en (E.18) usamos que $d^d k = A_d k^{d-1} dk$ donde A_d está dada por (F.18).

E.2.1 Límite no-relativista (NR)

El límite no-relativista se obtiene cuando $k_B T \ll m_B c^2$. En este límite $E_{\mathbf{k}}$ está dada por el límite superior de (E.2); además

$$\sinh(\beta_c m_B c^2) \simeq [\exp(\beta_c m_B c^2)]/2,$$

$$\cosh(\beta_c m_B c^2) \simeq [\exp(\beta_c m_B c^2)]/2,$$

y

$$\cosh\left(\beta_c \sqrt{c^2 \hbar^2 k^2 + m_B^2 c^4}\right) \simeq \{\exp[\beta_c m_B c^2 + \beta_c \hbar^2 k^2 / 2m_B]\}/2.$$

Por lo tanto la ecuación (E.18) se escribe como

$$\begin{aligned}
|n| &= \frac{1}{\Gamma(d/2)2^{d-1}\pi^{d/2}} \int_0^\infty dk k^{d-1} \frac{1}{\exp(\beta_c \hbar^2 k^2 / 2m_B) - 1} \\
&= \frac{m_B^d c^d}{\hbar^d 2^{d/2} \pi^{d/2}} \zeta(d/2) \left(\frac{k_B T_c}{m_B c^2} \right)^{d/2}
\end{aligned} \tag{E.19}$$

expresión que coincide con (E.5) para $n > 0$ cuando $d/2 > 1$ pues entonces $g_{d/2}(1) = \zeta(d/2)$ y por tanto a temperaturas bajas el efecto de las antipartículas puede ignorarse.

E.2.2 Límite ultra-relativista con antibosones

En el límite en que $k_B T \gg m_B c^2$ tenemos que E_k está dada por el límite inferior de (E.2); además

$$\begin{aligned}
\sinh(\beta_c m_B c^2) &\simeq \beta_c m_B c^2, \\
\cosh(\beta_c m_B c^2) &\simeq 1,
\end{aligned}$$

y

$$\cosh\left(\beta_c \sqrt{c^2 \hbar^2 k^2 + m_B^2 c^4}\right) \simeq \cosh(\beta_c c \hbar k).$$

Por lo que (E.18) se escribe como

$$\begin{aligned}
|n| &\approx \frac{\beta_c m_B c^2 d \pi^{d/2}}{\Gamma(d/2 + 1) (2\pi)^d} \int_0^\infty dk \frac{k^{d-1}}{\cosh(\beta_c c \hbar k) - 1} \\
&= \frac{2\beta_c m_B c^2 d \pi^{d/2}}{\Gamma(d/2 + 1) (2\pi)^d} \int_0^\infty dk k^{d-1} \frac{e^{\beta_c \hbar c k}}{(e^{\beta_c \hbar c k} - 1)^2}.
\end{aligned} \tag{E.20}$$

Haciendo la integral mediante la Ec. (F.21) se tiene

$$|n| \approx \frac{2m_B d \pi^{d/2} \Gamma(d) \zeta(d-1)}{\hbar^d c^{d-2} \Gamma(d/2 + 1) (2\pi)^d} (k_B T_c)^{d-1}, \tag{E.21}$$

de la cual se puede resolver para T_c obteniéndose

$$k_B T_c^{UR-BA} = \left[\frac{\hbar^d c^{d-2} \Gamma(d/2 + 1) (2\pi)^d}{2m_B d \pi^{d/2} \Gamma(d) \zeta(d-1)} \right]^{1/(d-1)} n^{1/(d-1)}, \tag{E.22}$$

donde el superíndice $UR - BA$ se refiere al caso ultra-relativista cuando tanto bosones como antibosones son considerados. Nótese que se recupera la dependencia de $k_B T_c$ con la masa m_B . En el caso 3D tenemos

$$k_B T_c^{UR-BA} = \left[\frac{3\hbar^3 c}{m_B} \right]^{1/2} n^{1/2} \simeq 1.73 \left[\frac{\hbar^3 c}{m_B} \right]^{1/2} n^{1/2}. \quad (\text{E.23})$$

Para valores pequeños de $m_{BC}/\hbar n^{1/3}$ la temperatura crítica de condensación del gas relativista está dada prácticamente por (E.23). Por el contrario, para valores suficientemente grandes de $m_{BC}/\hbar n^{1/3}$ el efecto de los antibosones pueden ignorarse y la temperatura crítica de condensación está dada por el resultado no-relativista (ver Fig. E.2). En el caso 2D se tiene una temperatura crítica de condensación igual a cero debido a la divergencia de $\zeta(d-1)$ cuando $d = 2$.

CASO	$d = 3$	$d = 2$
UR-BA	$1.73 \frac{\hbar^{3/2} c^{1/2}}{m_B^{1/2} k_B} n^{1/2}$	0
UR-B	$2.02 \frac{\hbar c}{k_B} n^{1/3}$	$1.95 \hbar c n^{1/2}$
NR-B	$3.31 \frac{\hbar^2}{m_B k_B} n^{2/3}$	0

Tabla E.1. Temperatura crítica de condensación en los límites no-relativista (NR) y ultra-relativista (UR) para el gas ideal en 2D y 3D cuando sólo bosones son considerados (B) y cuando tanto bosones como antibosones (BA) están presentes.

La dependencia de la temperatura crítica de condensación con la masa tiene como consecuencia que la T_c^{UR-B} es espuria. Las correcciones relativistas son considerables cuando la masa en reposo de los bosones es muy pequeña (límite ultra-relativista) y/o la densidad de carga muy grande. En este límite y en 3D el cociente de la temperatura crítica de condensación cuando son tomados en cuenta tanto bosones como antibosones a la temperatura crítica cuando sólo se tienen bosones está dada por

$$\frac{T_c^{UR-BA}}{T_c^{UR-B}} = \frac{3^{1/2} [\zeta(3)]^{1/3}}{\pi^{2/3}} \left(\frac{\hbar n^{1/3}}{m_{BC}} \right)^{1/2}, \quad (\text{E.24})$$

que a densidad fija crece como $m_B^{-1/2}$ cuando la masa m_B disminuye (o crece con la densidad de carga como $n^{1/6}$ teniendo fija la masa). El resultado anterior es válido siempre que $\hbar n^{1/3}/m_{BC} > 1.36$. Por lo que en este límite ($m_B \rightarrow 0$), la temperatura crítica de condensación es más alta cuando son tomadas en cuenta las anti-partículas (ver Fig. E.3).

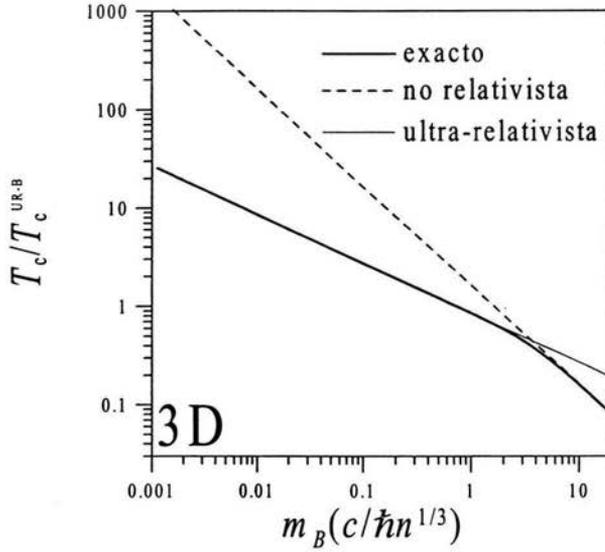


Figura E.2. Cuando tanto bosones como antibosones son considerados la temperatura crítica de condensación va como $T_c^{UR-BA} \propto m_B^{-1/2}$ para valores pequeños de $m_B c / \hbar n^{1/3}$ (caso tridimensional). Para valores suficientemente grandes de $m_B c / \hbar n^{1/3}$ la temperatura crítica de condensación va como $T_c^{NR-BA} \propto m_B^{-1}$.

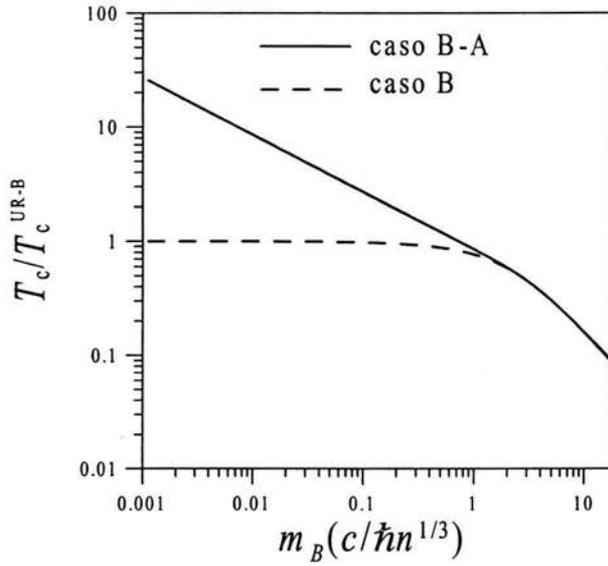


Figura E.3. En esta gráfica se aprecia cómo la temperatura crítica de condensación, para valores pequeños de $m_B c/\hbar n^{1/3}$, es más alta cuando bosones y antibosones son considerados que cuando sólo los bosones están presentes.

Apéndice F

F Algunos resultados matemáticos

En este Apéndice están incluidos algunos resultados matemáticos que son utilizados a lo largo de este trabajo.

F.1 Cálculo de la integral $\int_0^y dx (\tanh x)/x$

Usando las siguientes identidades dadas en [108]

$$\begin{aligned} \int_0^{2y} dx x^{-1} (e^{-x} - 1) &= -\gamma - \ln(2y) + E_i(-2y) \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} (2y)^l, \end{aligned} \quad (\text{F.1})$$

donde $\gamma = 0.577216\dots$ es la constante de Euler, así como

$$E_i(-y) \equiv - \int_y^{\infty} dx x^{-1} e^{-x} \quad (x > 0), \quad (\text{F.2})$$

$$\int_0^{\infty} dx \frac{e^{-ax}}{x} \tanh x = \ln\left(\frac{a}{4}\right) + 2 \ln\left[\frac{\Gamma(a/4)}{\Gamma(a/4 + 1/2)}\right] \quad (a > 0), \quad (\text{F.3})$$

tenemos que

$$\begin{aligned} -\gamma - \ln(2y) + E_i(-2y) &= \int_0^{2y} dx x^{-1} (e^{-x} - 1) \\ &= - \int_0^y dx \frac{(e^{-2x} + 1)}{x} \tanh x \end{aligned} \quad (\text{F.4})$$

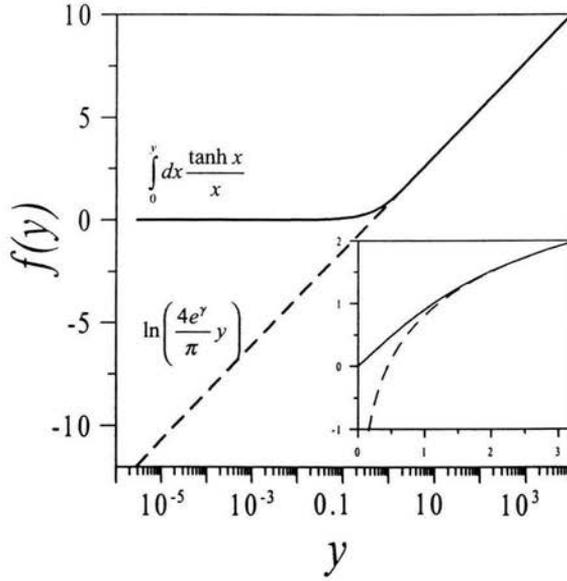


Figura F.1. En la gráfica se puede apreciar cómo para valores de y suficientemente grandes, la aproximación (C.6) es mejor.

por lo que sustituyendo (F.2) y usando (F.3)

$$\begin{aligned}
 \int_0^y dx \frac{1}{x} \tanh x &= \gamma + \ln(2y) + \ln(2/\pi) + \int_{2y}^{\infty} dx x^{-1} e^{-x} + \int_y^{\infty} dx \frac{e^{-2x}}{x} \tanh x \\
 &= \ln\left(\frac{4e^\gamma}{\pi} y\right) + \int_y^{\infty} dx \frac{e^{-2x}}{x \cosh x}.
 \end{aligned} \tag{F.5}$$

Para $y \gg 1$ es muy buena aproximación tomar el primer término, es decir,

$$\int_0^y dx \frac{1}{x} \tanh x \simeq \ln\left(\frac{4e^\gamma}{\pi} y\right). \tag{F.6}$$

F.2 Integral de volumen sobre la esfera d -dimensional

La integral en d dimensiones de una función $f(\mathbf{x})$ cuyo argumento toma valores vectoriales $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d)$ y que depende sólo de la magnitud de $|\mathbf{x}| \equiv x$

$$I = \int d^d x f(x), \quad (\text{F.7})$$

puede calcularse [56] usando que por simetría “esférica” se puede escribir $d^d x = A_d x^{d-1} dx$, con A_d una constante. Este resultado es una generalización de los conocidos casos en dos y tres dimensiones donde $d^2 x = 2\pi x dx$ y $d^3 x = 4\pi x^2 dx$, respectivamente. Usando este hecho tenemos que

$$I = \int d^d x f(x) = A_d \int_0^\infty dx x^{d-1} f(x). \quad (\text{F.8})$$

Para encontrar el valor de A_d usamos la función $f(\mathbf{x}) = e^{-(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_d^2)} = e^{-x^2}$. De este modo

$$\int d^d x e^{-x^2} = A_d \int_0^\infty dx x^{d-1} e^{-x^2} \quad (\text{F.9})$$

y la primera integral puede evaluarse así

$$\int d^d x e^{-x^2} = \int dx_1 \int dx_2 \dots \int dx_d e^{-x_1^2} e^{-x_2^2} \dots e^{-x_d^2} \quad (\text{F.10})$$

$$= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-x^2} \right]^d \quad (\text{F.11})$$

$$= \left[\int_0^{+\infty} dy y^{-1/2} e^{-y} \right]^d \quad (\text{F.12})$$

$$= [\Gamma(1/2)]^d \quad (\text{F.13})$$

$$= \pi^{d/2}, \quad (\text{F.14})$$

donde

$$\Gamma(\nu) = (\nu - 1)! \equiv \int_0^\infty e^{-t} t^{\nu-1} dt. \quad (\text{F.15})$$

es la función Gamma. Por otro lado, la segunda integral de (F.9) da

$$\int_0^\infty dx x^{d-1} e^{-x^2} = \frac{1}{2} \int_0^\infty dy y^{d/2-1} e^{-y} \quad (\text{F.16})$$

$$= \frac{1}{2} \Gamma(d/2) \quad (\text{F.17})$$

por lo cual se deduce que

$$A_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}. \quad (\text{F.18})$$

F.3 Integral de Bose

La llamada función de Bose $g_\sigma(z)$, definida por

$$g_\sigma(z) \equiv \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^\infty \frac{x^{\sigma-1}}{z^{-1}e^x - 1} dx, \quad (\text{F.19})$$

puede desarrollarse en serie de potencias de z como a continuación se expone:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{x^{\sigma-1}}{z^{-1}e^x - 1} dx &= \int_0^\infty zx^{\sigma-1} e^{-x} (1 - ze^{-x})^{-1} dx \\ &= \int_0^\infty zx^{\sigma-1} e^{-x} \sum_{l=0}^{\infty} (ze^{-x})^l dx \\ &= \int_0^\infty x^{\sigma-1} \sum_{l=1}^{\infty} (ze^{-x})^l dx \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} z^l \int_0^\infty x^{\sigma-1} e^{-xl} dx, \end{aligned}$$

haciendo el cambio de variable $y = xl$, la última integral se escribe como

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{z^l}{l^\sigma} \int_0^\infty y^{\sigma-1} e^{-yl} dy,$$

finalmente usando la definición (F.15) se tiene que la función de Bose (F.19) se escribe como

$$g_\sigma(z) \equiv \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_0^\infty \frac{x^{\sigma-1}}{z^{-1}e^x - 1} dx = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{z^l}{l^\sigma}. \quad (\text{F.20})$$

Claramente cuando $z \ll 1$ la función $g_\sigma(z)$ se comporta como z misma para toda σ . Puede observarse que $g_\sigma(z)$ es una función monótona creciente de z cuyo valor límite para nuestro interés es 1. Así, cuando $z \rightarrow 1$, $g_\sigma(z)$ se comporta como la función zeta de Riemann [56] $\zeta(\sigma) = \sum_{l=1}^{\infty} 1/l^\sigma$. Algunos valores numéricos de $\zeta(\sigma)$ son

$$\begin{aligned} \zeta(3/2) &\simeq 2.612, & \zeta(2) &= \pi^2/6 \simeq 1.645, \\ \zeta(5/2) &\simeq 1.341, & \zeta(3) &\simeq 1.202, \\ \zeta(7/2) &\simeq 1.127, & \zeta(4) &= \pi^4/90 \simeq 1.082, \\ \zeta(5) &\simeq 1.037. & \zeta(6) &= \pi^6/945 \simeq 1.017. \end{aligned}$$

Para el caso $\sigma \leq 1$, $g_\sigma(z)$ diverge conforme $z \rightarrow 1$. Cuando $\sigma = 1$ se tiene

$$g_1(z) = \int_0^\infty \frac{dx}{z^{-1}e^x - 1} = -\ln(1 - z),$$

que diverge logarítmicamente a ∞ conforme $z \rightarrow 1$.

Análogamente al cálculo de la integral que aparece en (F.19) calculamos la integral en (E.20).

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} dy y^{d-1} \frac{e^y}{(e^y - 1)^2} &= \int_0^{\infty} dy y^{d-1} e^{-y} (1 - e^{-y})^{-2} \\
 &= \int_0^{\infty} dy y^{d-1} e^{-y} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n!} e^{-yn} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \int_0^{\infty} dy y^{d-1} e^{-y(n+1)},
 \end{aligned}$$

haciendo el cambio de variable $x = y(n+1)$, la última integral resulta $\Gamma(d)/(n+1)^d$, ver (F.15). Así

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} dy y^{d-1} \frac{e^y}{(e^y - 1)^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(d)}{(n+1)^d} \\
 &= \Gamma(d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^d} \\
 &= \Gamma(d) \zeta(d),
 \end{aligned} \tag{F.21}$$

donde $\zeta(\sigma)$ es la función zeta de Riemann.

F.4 Diagonalización del operador $\hat{H} - \mu\hat{N}$

Usando la transformación llamada de Bogoliubov-Valatin [87]

$$\begin{aligned}
 a_{\mathbf{k},\uparrow} &\equiv u_{\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{k},\uparrow} + v_{\mathbf{k}} \alpha_{-\mathbf{k},\downarrow}^{\dagger} \\
 a_{\mathbf{k},\uparrow}^{\dagger} &\equiv u_{\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{k},\uparrow}^{\dagger} + v_{\mathbf{k}} \alpha_{-\mathbf{k},\downarrow} \\
 a_{\mathbf{k},\downarrow} &\equiv u_{\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{k},\downarrow} - v_{\mathbf{k}} \alpha_{-\mathbf{k},\uparrow}^{\dagger} \\
 a_{\mathbf{k},\downarrow}^{\dagger} &\equiv u_{\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{k},\downarrow}^{\dagger} - v_{\mathbf{k}} \alpha_{-\mathbf{k},\uparrow}
 \end{aligned} \tag{F.22}$$

podemos diagonalizar el operador (5.10)

$$\begin{aligned}
\hat{H} - \mu\hat{N} &\simeq \sum_{\mathbf{k},s} [\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu] a_{\mathbf{k},s}^\dagger a_{\mathbf{k},s} & (F.23) \\
&+ [E_+(0) - 2\mu] N_0 + \sum_{\mathbf{K}\neq 0} [E_+(\mathbf{K}) - 2\mu] b_{\mathbf{K}}^\dagger b_{\mathbf{K}} \\
&+ [2\mu - E_-(0)] M_0 + \sum_{\mathbf{K}\neq 0} [2\mu - E_-(\mathbf{K})] c_{\mathbf{K}}^\dagger c_{\mathbf{K}} \\
&+ \sum_{\mathbf{k}} [\sqrt{n_0} f_+(k) + \sqrt{m_0} f_-(k)] \left(a_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger a_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger + a_{-\mathbf{k}\downarrow} a_{\mathbf{k}\uparrow} \right).
\end{aligned}$$

Sustituyendo (F.22) en el primero y último términos de (5.10) y simplificando tenemos que

$$\begin{aligned}
\hat{H} - \mu\hat{N} &\simeq \sum_{\mathbf{k},s} [\xi_{\mathbf{k}} (u_{\mathbf{k}}^2 - v_{\mathbf{k}}^2) - 2\Delta_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}] \alpha_{\mathbf{k},s}^\dagger \alpha_{\mathbf{k},s} \\
&+ \sum_{\mathbf{k},s} 2s \left[\xi_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \Delta_{\mathbf{k}} (u_{\mathbf{k}}^2 - v_{\mathbf{k}}^2) \right] \left(\alpha_{\mathbf{k},s}^\dagger \alpha_{-\mathbf{k},-s}^\dagger + \alpha_{\mathbf{k},s} \alpha_{-\mathbf{k},-s} \right) \\
&+ \sum_{\mathbf{k},s} 2 [\xi_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}^2 + \Delta_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}] \\
&+ [E_+(0) - 2\mu] N_0 + \sum_{\mathbf{K}\neq 0} [E_+(\mathbf{K}) - 2\mu] b_{\mathbf{K}}^\dagger b_{\mathbf{K}} \\
&+ [2\mu - E_-(0)] M_0 + \sum_{\mathbf{K}\neq 0} [2\mu - E_-(\mathbf{K})] c_{\mathbf{K}}^\dagger c_{\mathbf{K}}, & (F.24)
\end{aligned}$$

donde $\xi_{\mathbf{k}} \equiv \varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu$, $\Delta_{\mathbf{k}} \equiv \sqrt{n_0} f_+(k) + \sqrt{m_0} f_-(k)$. Es claro que (F.24) no se obtuvo como aproximación de (F.23) por lo que el CBFM va más allá que el tratamiento de campo medio, es decir, va más allá (por ejemplo) de BCS donde se desprecian más términos que contienen operadores α .

Para que $\hat{H} - \mu\hat{N}$ quede diagonalizado debemos imponer que

$$\xi_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \Delta_{\mathbf{k}} (u_{\mathbf{k}}^2 - v_{\mathbf{k}}^2) \equiv 0 \quad (F.25)$$

o bien que

$$u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} = -\frac{\Delta_{\mathbf{k}} (u_{\mathbf{k}}^2 - v_{\mathbf{k}}^2)}{2\xi_{\mathbf{k}}}. \quad (F.26)$$

Definiendo

$$\xi_{\mathbf{k}} (u_{\mathbf{k}}^2 - v_{\mathbf{k}}^2) - 2\Delta_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} \equiv E_{\mathbf{k}}, \quad (F.27)$$

y combinando esto con la Ec. (F.26) se tiene que

$$u_k^2 - v_k^2 = \frac{E_k \xi_k}{\xi_k^2 + \Delta_k^2}. \quad (\text{F.28})$$

Como además $u_k^2 + v_k^2 = 1$ se tiene que

$$u_k^2 = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{E_k \xi_k}{\xi_k^2 + \Delta_k^2} \right] \quad (\text{F.29})$$

$$v_k^2 = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{E_k \xi_k}{\xi_k^2 + \Delta_k^2} \right]. \quad (\text{F.30})$$

Sustituyendo (F.29) y (F.30) en (F.26) obtenemos que E_k vale

$$E_k = \sqrt{\xi_k^2 + \Delta_k^2}. \quad (\text{F.31})$$

De aquí que

$$u_k^2 = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\xi_k}{\sqrt{\xi_k^2 + \Delta_k^2}} \right] \quad (\text{F.32})$$

$$v_k^2 = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\xi_k}{\sqrt{\xi_k^2 + \Delta_k^2}} \right]. \quad (\text{F.33})$$

Por tanto, $\hat{H} - \mu \hat{N}$ queda diagonalizado, a saber,

$$\begin{aligned} \hat{H} - \mu \hat{N} \simeq & \sum_{\mathbf{k}, s} E_k \alpha_{\mathbf{k}, s}^\dagger \alpha_{\mathbf{k}, s} + \sum_{\mathbf{k}} (\xi_k - E_k) \\ & + [E_+(0) - 2\mu] N_0 + \sum_{\mathbf{K} \neq 0} [E_+(\mathbf{K}) - 2\mu] b_{\mathbf{K}}^\dagger b_{\mathbf{K}} \\ & + [2\mu - E_-(0)] M_0 + \sum_{\mathbf{K} \neq 0} [2\mu - E_-(\mathbf{K})] c_{\mathbf{K}}^\dagger c_{\mathbf{K}}. \end{aligned} \quad (\text{F.34})$$

Su estado y valores propios serían dados por la Ec. (5.14).

Apéndice G

G La relación de dispersión de 2e-CP's y 2h-CP's

Resolviendo el problema de Cooper con la interacción modelo BCS (2.18) para el caso en que el momento de centro de masa \mathbf{K} es distinto de cero uno puede encontrar el eigenvalor de la energía correspondiente al estado con \mathbf{K} definido. Para el caso 2D se tiene el siguiente resultado en acoplamiento débil [109]

$$\mathcal{E}_K \xrightarrow{K \rightarrow 0} \mathcal{E}_0 + \frac{2}{\pi} \hbar v_F K + O(K^2), \quad (\text{G.1})$$

mientras que en 3D se tiene (y ya se conocía en Ref. [39] p. 33) que

$$\mathcal{E}_K \xrightarrow{K \rightarrow 0} \mathcal{E}_0 + \frac{1}{2} \hbar v_F K + O(K^2). \quad (\text{G.2})$$

En ambos casos la relación de dispersión es lineal en acoplamiento débil y K pequeña. Resultados similares se obtienen para el caso de la interacción interelectrónica de alcance cero $-v_0 \delta(\mathbf{r})$ en 2D y en 3D [110],[111]. A diferencia del problema original de Cooper, que en esencia es un problema de dos cuerpos donde sólo se considera el estado ligado estacionario de un par de electrones arriba del mar de Fermi (ver Apéndice A), la ecuación de Bethe-Salpeter (que es una ecuación que considera el efecto muchos cuerpos) en la aproximación de escalera ("ladder approximation"), que trata tanto a pares de partículas como pares de agujeros, ambos como entes fundamentales [112], da como resultado que el problema original de Cooper (basado en el estado base del gas ideal de Fermi) no posee estados ligados estables [89], es decir, la energía resultante es imaginaria pura. Sin embargo, los CPs basados no en el mar de Fermi correspondiente al gas ideal de Fermi sino en el estado base de BCS [88],[89] recobran su estabilidad aunque por un tiempo finito como sugiere el hecho de que junto con la solución trivial del modo sonoro, aparece una solución no-trivial llamado "par de Cooper móvil" (*moving CP*, o en esencia un par de Cooper generalizado). Este también es lineal en K a orden dominante. Esta solución resulta ser una resonancia de energía positiva con una parte imaginaria implicando que el par de Cooper tiene un tiempo de vida finito.

G.1 Tratamiento Bethe-Salpeter del problema de Cooper

Consideremos el hamiltoniano de un sistema no relativista de muchos fermiones

$$\begin{aligned}
 H &= \sum_{\mathbf{k},\sigma} \varepsilon_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k},\sigma}^{\dagger} a_{\mathbf{k},\sigma} + \sum_{\substack{\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{q},\mathbf{q}' \\ \sigma,\sigma'}} v(|\mathbf{q} - \mathbf{k}|) a_{\mathbf{q},\sigma}^{\dagger} a_{\mathbf{q}',\sigma'}^{\dagger} a_{\mathbf{k},\sigma} a_{\mathbf{k}',\sigma'} \\
 &\equiv H_0 + H_{int}.
 \end{aligned} \tag{G.3}$$

La ecuación de Bethe-Salpeter para la función de onda del estado ligado de dos fermiones [88] en la aproximación de escalera (“ladder approximation”), tomando en cuenta partículas y agujeros en el estado base del gas ideal de Fermi, está dada por

$$\begin{aligned}
 \Psi(\mathbf{k}, E) &= - \left(\frac{i}{\hbar} \right)^2 G_0(\mathbf{K}/2 + \mathbf{k}, \mathcal{E}_K/2 + E) G_0(\mathbf{K}/2 - \mathbf{k}, \mathcal{E}_K/2 - E) \times \\
 &\quad \times \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} dE' \frac{1}{L^d} \sum_{\mathbf{k}'} v(|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|) \Psi(\mathbf{k}', E')
 \end{aligned} \tag{G.4}$$

donde L^d es el volumen del sistema en d dimensiones, $\mathbf{K} \equiv \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ es el momento de centro de masa y $\mathbf{k} \equiv (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)/2$ es el vector de onda relativo del estado ligado de dos fermiones cuya función de onda es $\Psi(\mathbf{k}, E)$; $\mathcal{E}_K \equiv E_1 + E_2$ es la energía del estado ligado y $G_0(\mathbf{K}/2 + \mathbf{k}, \mathcal{E}_K/2 + E)$ es la función de Green de un solo fermión en ausencia de interacción (es decir, a orden cero), mientras que $v(|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|)$ corresponde, con fines de estudiar el sistema de muchos electrones interactuando, a la interacción tipo BCS cuya doble transformada de Fourier es

$$\nu(|\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}'_1|) = -V \quad \text{if } k_F - k_D < k_1, k'_1 < k_F + k_D, \tag{G.5}$$

y 0 en cualquier otro caso. Aquí $V > 0$, $\hbar k_F \equiv m v_F$ es el momento de Fermi, m es la masa efectiva del electrón, y $k_D \equiv \omega_D/v_F$ con ω_D la frecuencia de Debye. La condición (que se verifica en muchos superconductores) $\hbar\omega_D \ll E_F \equiv \hbar^2 k_F^2/2m$ implica que $k_D/k_F \equiv \hbar\omega_D/2E_F \ll 1$. La $G_0(\mathbf{k}_1, E_1)$ basada en el estado base del gas ideal de Fermi está dada por

$$G_0(\mathbf{k}_1, E_1) = \frac{\hbar}{i} \left\{ \frac{\theta(k_1 - k_F)}{-E_1 + \varepsilon_{k_1} - E_F - i\epsilon} + \frac{\theta(k_F - k_1)}{-E_1 + \varepsilon_{k_1} - E_F + i\epsilon} \right\} \tag{G.6}$$

donde $\varepsilon_{k_1} \equiv \hbar^2 k_1^2/2m$ y $\theta(x)$ es la función escalón de Heaviside

$$\theta(x) \equiv \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases} \tag{G.7}$$

De este modo el primer término en (G.6) se refiere a *electrones* y el segundo a *agujeros*.

Ya que $\Psi(\mathbf{k}, E)$ en (G.4) depende de E sólo a través de las funciones de Green, es conveniente definir la función auxiliar

$$\varphi(\mathbf{k}) \equiv \frac{1}{L^d} \int_{-\infty}^{+\infty} dE' \sum_{\mathbf{k}'} v(|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|) \Psi(\mathbf{k}', E'), \quad (\text{G.8})$$

con lo que (G.4) se escribe en terminos de $\varphi(\mathbf{k})$ como

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{k}) &= -\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{L^d} \left(\frac{i}{\hbar}\right)^2 \sum_{\mathbf{k}'} v(|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|) \varphi(\mathbf{k}') \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} dE G_0(\mathbf{K}/2 + \mathbf{k}, \mathcal{E}_K/2 + E) G_0(\mathbf{K}/2 - \mathbf{k}, \mathcal{E}_K/2 - E). \end{aligned} \quad (\text{G.9})$$

Haciendo las integrales en el plano complejo sobre E uno encuentra que

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{k}) &= -\frac{1}{L^d} \sum_{\mathbf{k}'} v(|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|) \frac{[\theta(|\mathbf{K}/2 + \mathbf{k}'| - k_F)]^2}{-\mathcal{E}_K + \mathcal{E}_{\mathbf{K}/2 + \mathbf{k}'} + \mathcal{E}_{\mathbf{K}/2 - \mathbf{k}'} - 2E_F} \varphi(\mathbf{k}') + \\ &+ \frac{1}{L^d} \sum_{\mathbf{k}'} v(|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|) \frac{[\theta(k_F - |\mathbf{K}/2 + \mathbf{k}'|)]^2}{-\mathcal{E}_K + \mathcal{E}_{\mathbf{K}/2 + \mathbf{k}'} + \mathcal{E}_{\mathbf{K}/2 - \mathbf{k}'} - 2E_F} \varphi(\mathbf{k}'). \end{aligned} \quad (\text{G.10})$$

Para el caso $K = 0$ esta ecuación se vuelve

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{k}) &= -\frac{1}{L^d} \sum_{\mathbf{k}'} v(|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|) \frac{[\theta(k' - k_F)]^2}{-\mathcal{E}_0 + 2\mathcal{E}_{\mathbf{k}'} - 2E_F} \varphi(\mathbf{k}') + \\ &+ \frac{1}{L^d} \sum_{\mathbf{k}'} v(|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|) \frac{[\theta(k_F - k')]^2}{-\mathcal{E}_0 + 2\mathcal{E}_{\mathbf{k}'} - 2E_F} \varphi(\mathbf{k}'). \end{aligned} \quad (\text{G.11})$$

Con la interacción (G.5) esto da

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{k}) &= \frac{V}{L^d} \sum'_{|\mathbf{k}'| > k_F} \frac{\varphi(\mathbf{k}')}{-\mathcal{E}_0 + 2\mathcal{E}_{\mathbf{k}'} - 2E_F} - \\ &- \frac{V}{L^d} \sum'_{|\mathbf{k}'| < k_F} \frac{\varphi(\mathbf{k}')}{-\mathcal{E}_0 + 2\mathcal{E}_{\mathbf{k}'} - 2E_F} \end{aligned} \quad (\text{G.12})$$

donde las primas significan sumar sobre \mathbf{k}' que satisfacen (G.5). Introduciendo la definición $\psi_{\mathbf{k}} \equiv \varphi(\mathbf{k}) [-\mathcal{E}_0 + 2\mathcal{E}_{\mathbf{k}'} - 2E_F]^{-1}$ se tiene que

$$(2\mathcal{E}_{\mathbf{k}} - 2E_F - \mathcal{E}_0) \psi_{\mathbf{k}} = V \sum'_{\mathbf{k}'} \psi_{\mathbf{k}'} - V \sum''_{\mathbf{k}'} \psi_{\mathbf{k}'}. \quad (\text{G.13})$$

La primera suma primada (asociada a los pares de Cooper de electrones) significa sumar sobre los términos que satisfacen $E_F < \varepsilon_{k'} < E_F + \hbar\omega_D$ mientras que la suma doblemente primada (asociada a los pares de Cooper de agujeros) está sujeta a la restricción $E_F - \hbar\omega_D < \varepsilon_{k'} < E_F$. El caso original de Cooper se recupera [47] si suprimimos el último término de (G.13), quedando la ecuación $\psi_{\mathbf{k}} = (2\varepsilon_{\mathbf{k}} - 2E_F - \mathcal{E}_0)^{-1} V \sum_{\mathbf{k}'}' \psi_{\mathbf{k}'}$, ver (A.24), que nos lleva al conocido resultado de Cooper para \mathcal{E}_0 (A.31). Si la primera suma es suprimida en (G.13) se obtiene el mismo resultado para \mathcal{E}_0 (A.31) pero con un cambio de signo, y corresponde a los 2h-CPs.

Si uno considera el problema completo, es decir, tanto pares de agujeros como pares de partículas, la ecuación (G.13) no puede ser deducida de una ecuación tipo Schrödinger, como sucede cuando o bien pares de agujeros o pares de electrones se suprimen. Para resolver la ecuación completa (G.13) procedemos como sigue: definimos

$$A \equiv V \sum_{\mathbf{k}'}' \psi_{\mathbf{k}'}, \quad (\text{G.14})$$

$$B \equiv V \sum_{\mathbf{k}'}'' \psi_{\mathbf{k}'}, \quad (\text{G.15})$$

con lo que (G.13) se escribe como

$$\psi_{\mathbf{k}} = (A - B) (2\varepsilon_{\mathbf{k}} - 2E_F - \mathcal{E}_0)^{-1}. \quad (\text{G.16})$$

Tomando $\sum_{\mathbf{k}}'$ sobre (G.16) obtenemos

$$A = (A - B) V \sum_{\mathbf{k}}' \frac{1}{(2\varepsilon_{\mathbf{k}} - 2E_F - \mathcal{E}_0)}, \quad (\text{G.17})$$

y tomando $\sum_{\mathbf{k}}''$ sobre (G.16) tenemos

$$B = (A - B) V \sum_{\mathbf{k}}'' \frac{1}{(2\varepsilon_{\mathbf{k}} - 2E_F - \mathcal{E}_0)}. \quad (\text{G.18})$$

Puesto que $\psi_{\mathbf{k}}$ depende de A y B que a su vez dependen de $\psi_{\mathbf{k}}$ es necesario eliminarlas. Para hacerlo resolvemos el sistema homogéneo de dos ecuaciones en A y B dadas por (G.17) y (G.18). Para tener una solución no trivial es necesario que

$$1 - V \sum_{\mathbf{k}}' \frac{1}{(2\varepsilon_{\mathbf{k}} - 2E_F - \mathcal{E}_0)} + V \sum_{\mathbf{k}}'' \frac{1}{(2\varepsilon_{\mathbf{k}} - 2E_F - \mathcal{E}_0)} = 0. \quad (\text{G.19})$$

Pasando las sumas a integrales sobre ε estas últimas pueden evaluarse inmediatamente dando por resultado

$$1 - \frac{\lambda}{2} \ln(1 - 2\hbar\omega_D/\mathcal{E}_0) - \frac{\lambda}{2} \ln(1 + 2\hbar\omega_D/\mathcal{E}_0) = 0, \quad (\text{G.20})$$

donde $\lambda \equiv VN(E_F)$. De este modo se obtiene que

$$1 = \frac{1}{2}\lambda \ln[1 - (2\hbar\omega_D/\mathcal{E}_0)^2]. \quad (\text{G.21})$$

De aquí se tiene el eigenvalor explícitamente

$$\mathcal{E}_0 = \pm i2\hbar\omega_D/\sqrt{e^{2/\lambda} - 1}. \quad (\text{G.22})$$

Puesto que la energía del par de Cooper (de partículas o agujeros) es puramente imaginaria, lo que carece de sentido físico, esto implica una inestabilidad del problema de Cooper cuando tanto pares de partículas como pares de agujeros son considerados. Este resultado no es nuevo, pues ya ha sido reportado en Refs. [113] pág. 44 y [114] Sec. 33, aunque los casos donde sólo pares de partículas ó sólo pares de agujeros están presentes (arriba discutidos) no son discutidos en las referencias mencionadas.

Un ejemplo donde se exhibe el profundo efecto de considerar tanto partículas como antipartículas es el caso del gas ideal relativista de bosones a muy altas temperaturas donde la producción de pares bosón-antibosón debe tomarse en cuenta (ver Apéndice E).

G.2 Apareamiento de Cooper generalizado

Sin embargo, si uno usa el tratamiento de Bethe-Salpeter basado en el estado base de BCS en lugar del estado base del gas ideal de Fermi el concepto de par de Cooper es restaurado. Uno sustituye (G.6) por

$$\mathbf{G}_0(\mathbf{k}_1, E_1) = \frac{\hbar}{i} \left\{ \frac{v_{k_1}^2}{-E_1 + E_{k_1} - i\epsilon} + \frac{u_{k_1}^2}{-E_1 + E_{k_1} + i\epsilon} \right\} \quad (\text{G.23})$$

donde $E_{\mathbf{k}} \equiv \sqrt{(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu)^2 + \Delta^2}$ con Δ el “gap” fermiónico, $v_k^2 \equiv [1 - (\varepsilon_k - \mu)/E_k]/2$ y $u_k^2 \equiv 1 - v_k^2$ son los coeficientes de Bogoliubov [87]. En el límite $\Delta \rightarrow 0$ las cantidades anteriores se vuelven $|\varepsilon_k - \mu|$, $\theta(k_1 - k_F)$ y $\theta(k_F - k_1)$, respectivamente, y de este modo (G.23) se convierte en (G.6). La sustitución $G_0(\mathbf{k}_1, E_1)$ por $\mathbf{G}_0(\mathbf{k}_1, E_1)$ corresponde básicamente a reescribir el hamiltoniano completo (G.3) de tal modo que el nuevo hamiltoniano no perturbado H'_0 corresponda al hamiltoniano de BCS y los términos restantes se suponen adecuados para hacer un tratamiento perturbativo. La sustitución anterior se justifica experimentalmente en base a los trabajos [58],[84],[85], y teóricamente en el hecho de que uno recupera el modo sonoro de Anderson-Bogoliubov-Higgs y un tiempo de vida finito para el nuevo par de Cooper móvil (“*moving CP*”) [88],[89]. El formalismo de Bethe-Salpeter consiste de un conjunto de tres ecuaciones acopladas, una para cada función de

onda (2-partículas, 2-agujeros y partícula-agujero). Pero como la ecuación para la función de onda partícula-agujero se desacopla, sólo quedan dos ecuaciones acopladas. La solución no trivial llamada par de Cooper móvil nos lleva a la relación de dispersión energía *vs* momento de centro de masa del par \mathcal{E}_K , la que para el caso bidimensional (el caso de interés en el estudio de los superconductores cupratos por su estructura casi-bidimensional [106]) está contenida en la ecuación [88]

$$\frac{1}{2\pi} \lambda \hbar v_F \int_{k_F - k_D}^{k_F + k_D} dk \int_0^{2\pi} d\varphi u_{\mathbf{K}/2+\mathbf{k}} v_{\mathbf{K}/2-\mathbf{k}} \times \\ \times \{u_{\mathbf{K}/2-\mathbf{k}} v_{\mathbf{K}/2+\mathbf{k}} - u_{\mathbf{K}/2+\mathbf{k}} v_{\mathbf{K}/2-\mathbf{k}}\} \frac{E_{\mathbf{K}/2+\mathbf{k}} + E_{\mathbf{K}/2-\mathbf{k}}}{-\mathcal{E}_K^2 + (E_{\mathbf{K}/2+\mathbf{k}} + E_{\mathbf{K}/2-\mathbf{k}})^2} = 1, \quad (\text{G.24})$$

De la anterior ecuación, haciendo una expansión de Taylor para \mathcal{E}_K en potencias de K alrededor de $K = 0$, e introduciendo el factor de amortiguamiento $-i\Gamma_K$ en el denominador, se obtiene a segundo orden en K para λ pequeña

$$\pm \mathcal{E}_K \simeq 2\Delta + \frac{\lambda}{2\pi} \hbar v_F K + \frac{1}{9} \frac{\hbar v_F}{k_D} e^{1/\lambda} K^2 - i \hbar v_F K \left[\frac{\lambda}{\pi} + \frac{1}{12k_D} e^{1/\lambda} K \right] + O(K^3) \quad (\text{G.25})$$

donde el signo + corresponde a la solución para el par de Cooper de dos partículas y – para el de dos agujeros. Nótese que aparece una relación de dispersión lineal a orden dominante en K asociada con el par de Cooper móvil.

La contribución de un término imaginario en la energía del par de Cooper (signo negativo en (G.25)) significa que este último decae como $e^{-t/\tau}$ con una vida media dada por

$$\tau_K \equiv \hbar/2\Gamma_K = \hbar/2 \left[(\lambda/\pi) \hbar v_F K + (\hbar v_F/12k_D) e^{1/\lambda} K^2 \right]. \quad (\text{G.26})$$

Esta diverge solamente para $K = 0$, y cae rápidamente conforme K crece (ver Fig. G.1). Así, pares de Cooper con $K \neq 0$ tienen una vida media que decrece conforme K crece, mientras que los pares de Cooper con $K = 0$ tienen una vida media infinita (son estados estacionarios). Debemos hacer notar que el término lineal (real) $(\lambda/2\pi) \hbar v_F K$ en (G.25) depende del parámetro de acoplamiento λ en pleno contraste con los resultados citados arriba (G.1), (G.2) que resultan de resolver el problema de Cooper *original* donde no se consideran los agujeros. Esto en sí garantiza que, como se esperaríamente, $T_c \rightarrow 0$ en la mezcla binaria del IBFM [115] sin pares 2h-CP, en vez de diverger como venía ocurriendo en 3D con la relación (G.2).

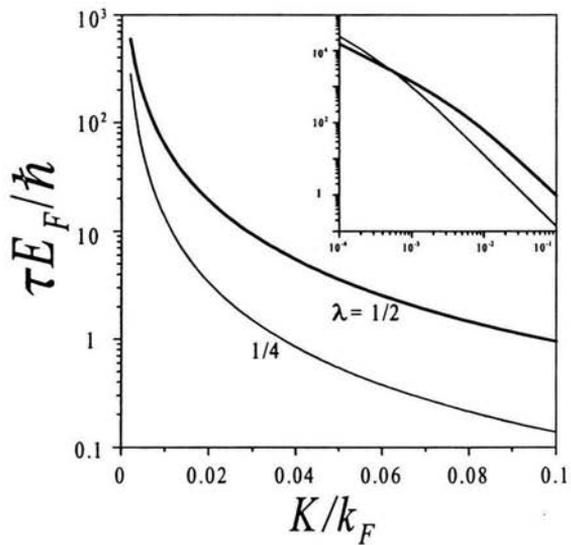


Figura G.1. Vida media de los pares de Cooper, la cual diverge para $K = 0$ y cae a cero conforme K crece, según la generalización vía la ecuación de Bethe-Salpeter.

Lista de Figuras

1.1	Tabla Periódica de los elementos (tomada del sitio en internet www.superconductors.org) donde se indican los elementos superconductores.	3
1.2	Gráfica donde se muestra el dramático ascenso de la temperatura crítica a partir de 1986. Datos tomados de la Ref. [25]	4
4.1	El BCS-Bose “crossover” considera la transición continua de la región de Bose donde la longitud de coherencia es muy pequeña (acoplamiento fuerte) a la región de BCS donde la longitud de coherencia es muy grande (acoplamiento débil).	19
4.2	La brecha de energía E_{gap} definida por (4.5). a) Δ si $\mu > 0$ pues en este caso el mínimo de $\sqrt{(\varepsilon_k - \mu)^2 + \Delta^2}$ se encuentra en $\varepsilon_k = \mu$. b) $\sqrt{\Delta^2 + \mu^2}$ si $\mu < 0$ pues el mínimo de $\sqrt{(\varepsilon_k - \mu)^2 + \Delta^2}$ se encuentra cuando $\varepsilon_k = 0$	20
4.3	Parámetro de orden Δ y el potencial químico μ a temperatura cero como función del parámetro de acoplamiento λ	24
4.4	Se muestra la dependencia de la temperatura crítica y del potencial químico en T_c , (en unidades de T_F) como función del parámetro de acoplamiento λ , para el potencial modelo BCS.	25
4.5	La brecha de energía E_{gap} y el parámetro de orden Δ a $T = 0$ como función del parámetro de acoplamiento B_2/E_F . Para $\mu > 0$ (ó equivalentemente $B_2/E_F < 2$) se tiene $E_{gap}/E_F = 2\Delta/E_F$ y $2\sqrt{(\mu/E_F)^2 + (\Delta/E_F)^2}$ para $\mu < 0$ ($B_2/E_F > 2$). Los puntos en los que terminan las curvas se refieren a los valores de E_{gap}/E_F y Δ/E_F cuando B_2/E_F alcanza su valor máximo posible ($= \pi/e^\gamma \ln 2$ para el caso $k_0 \rightarrow \infty$ y $\simeq 3.746$ para el caso $k_0 = k_F$) calculado de apartir del hecho de que $k_B T_c$ es una cantidad no negativa.	27
4.6	El potencial químico μ (en unidades de E_F) a temperatura cero para el caso de alcance cero (línea en trazas) y alcance r_0 igual a la distancia entre partículas. Los puntos corresponden al valor de μ/E_F en el valor máximo posible de B_2/E_F ($= \pi/e^\gamma \ln 2$ para el caso $k_0 \rightarrow \infty$ y $\simeq 3.746$ para el caso $k_0 = k_F$) calculado a partir del hecho de que $k_B T_c$ es una cantidad no negativa.	28
4.7	Dependencia de T_c (en unidades de T_F) y de $\mu(T_c)$ (en unidades de E_F) como función del parámetro de acoplamiento B_2 (en unidades de E_F).	30
4.8	Comportamiento del parámetro de orden Δ como función de la temperatura para valores del parámetro de acoplamiento $B_2/E_F = 0.01, 2, 2.5447$	31

4.9	El potencial químico μ como función de la temperatura para $B_2/E_F = 0.01, 2, 2.5447$	32
4.10	Relación entre B_2 y λ para valores de $\hbar\omega_D/E_F = 0.03, 0.05, 0.07$	33
4.11	Temperatura crítica de transición superconductor T_c (en unidades de T_F) calculada a partir de la ecuación del "gap" BCS (línea en trazas) y a partir de las dos ecuaciones ("gap" y número) del BCS-Bose "crossover" (línea llena). Para valores de $\lambda \leq 56.25$ BCS y BCS-Bose coinciden casi perfectamente y es necesario pasar este límite de valores de λ para tener una diferencia notable entre ellas. La curva BCS superior se determina de la Ec. (2.23) en tanto que la curva BCS inferior es su límite de acoplamiento débil (2.24)	35
4.12	Coefficientes de Bogoliubov u_k^2, v_k^2 como función de ε_k/E_F para diferentes valores del parámetro de acoplamiento $\lambda = 0.01, 0.5, 39$ y ∞ . Puede observarse que el límite de Bose ($v_k^2 \ll 1$ para toda k) <i>no</i> se alcanza, ni aun para valores muy grandes (no físicos) de λ . Para el caso $\lambda = \infty$ el potencial químico disminuye hasta su valor mínimo posible $-\hbar\omega_D$	36
5.1	Diagramas que representan los vértices de interacción entre un par de Cooper de dos electrones (2e-CP) y dos electrones desapareados (arriba) y los vértices de interacción entre un par de Cooper de dos agujeros (2h-CP) y dos agujeros (abajo).	40
5.2	Organigrama donde se muestra cómo a partir del modelo completo bosón-fermión se obtienen, como casos particulares, la ecuación del gap de BCS por un lado y la fórmula (ahora implícita) de la temperatura de condensación Bose-Einstein por otro.	48
5.3	Diagrama de fases en el plano $T/T_f - n/n_f$ para el caso 3D y pares de Cooper con relación de dispersión energía <i>vs</i> momento de centro de masa cuadrática. La curva llena T_{cs-}/T_F corresponde a la frontera de fase entre la fase normal y la fase pura superconductor $s-$. La curva en trazas corresponde a la frontera de fases entre la fase normal y la fase superconductor $s+$. Esta última tiende aproximadamente al valor $T_c/T_F = 0.218$ (marcado con un triángulo) cuando no hay electrones desapareados (D.3). El punto indica la intersección entre las curvas T_{cs-} y T_{cs+} que ocurre aproximadamente en el valor de T_c calculada con BCS-Bose "crossover."	51

- 5.4 Diagrama de fases en el plano $T/T_f - \Delta n$, para el caso 3D y relación de dispersión cuadrática donde $\Delta n \equiv n/n_f - 1$. Este diagrama muestra con mejor detalle lo que ocurre alrededor del punto de intersección de las curvas T_{cs-}/T_f y T_{cs+}/T_f , donde además se muestran las fronteras entre las fases superconductoras puras $s+$, $s-$ y las fases superconductoras mixtas $ss-$, $ss+$ 53
- 5.5 Diagrama de fases en el plano $T/T_f - n/n_f$ para el caso 3D y pares de Cooper con relación de dispersión energía *vs* momento de centro de masa lineal. La curva llena T_{cs-}/T_f corresponde a la frontera de fase entre la fase normal y la fase pura superconductora $s-$. La curva en trazas corresponde a la frontera de fases entre la fase normal y la fase superconductora $s+$. Esta última tiende aproximadamente al valor $T_c/T_f = 0.129$ (marcado con un cuadrado) que corresponde al valor calculado de la temperatura de condensación B-E cuando no hay electrones desapareados (D.8). El punto indica la intersección entre las curvas T_{cs-} y T_{cs+} que ocurre aproximadamente en el valor de T_c calculada con BCS-Bose "crossover." 56
- 5.6 Diagrama de fases en el plano $T/T_f - \Delta n$ para el caso 3D y relación de dispersión lineal, donde $\Delta n \equiv n/n_f - 1$ y se han usado los valores $\lambda = 1/2$ y $\hbar\omega_D/E_F = 0.005$. Este diagrama muestra con mejor detalle lo que ocurre alrededor del punto de intersección de las curvas T_{cs-}/T_f y T_{cs+}/T_f , donde además se muestran las fronteras entre las fases superconductoras puras $s+$, $s-$ y las fases superconductoras mixtas $ss-$, $ss+$ 57
- 5.7 Diagrama de fases en el plano $T/T_f - n/n_f$ para el caso 2D y pares de Cooper con relación de dispersión energía *vs* momento de centro de masa lineal. Las curvas llenas T_{cs-}/T_f corresponden a la frontera de fase entre la fase normal y la fase pura superconductora $s-$ mientras que las curvas en trazas corresponden a la frontera de fases entre la fase normal y la fase superconductora $s+$ para los valores de $\lambda = 1/2, 1/4$. Estas últimas tienden aproximadamente a los valores de la temperatura crítica de condensación BE (Ec. (D.6)) $T_c/T_f = 0.088, 0.044$ respectivamente. El punto indica la intersección entre las curvas T_{cs-} y T_{cs+} que ocurre aproximadamente en el valor de T_c calculada con BCS-Bose "crossover." . 60
- 5.8 Diagrama de fases en el plano $T/T_f - n/n_f$, para el caso 2D y relación de dispersión cuadrática. 62

A.1	a) En el problema de Cooper la interacción entre dos electrones ocurre cuando éstos tienen sus energías en el intervalo $[E_F, E_F + \hbar\omega_D]$, donde $\hbar\omega_D (\ll E_F)$ es la energía de Debye asociada a la máxima energía fonónica de la red. b) La interacción efectiva entre dos electrones en el problema de Cooper dada por (A.23), es tal que conserva el momento total $\mathbf{K} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ en el proceso $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 \rightarrow \mathbf{k}'_1, \mathbf{k}'_2$.	70
A.2	Sección transversal del volumen traslapado en el espacio k (región sombreada) donde debe apuntar el vector de onda relativo del par $\mathbf{k} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)$ para que el modelo de interacción de BCS (2.18) sea distinto de cero para cierto valor del momento total (o de centro de masa) $\hbar\mathbf{K} \equiv \hbar(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)$. El extremo opuesto del vector \mathbf{k} parte de la mitad del vector \mathbf{K} .	71
B.1	Dos valores distintos del vector de onda relativo $\mathbf{k} \equiv (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)/2$ y $\mathbf{k}' \equiv (\mathbf{k}'_1 - \mathbf{k}'_2)/2$ (con el mismo valor de momento de centro de masa \mathbf{K}), correspondientes a dos pares de BCS distintos, que caen dentro de la región de traslape de la Fig. A.2 y por tanto que contribuyen en la suma (B.1) para determinar \mathcal{E}_K . Se ilustra cómo para un par de Cooper con estos pares de BCS, el término $\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}$ siempre es cero sin violar el principio de exclusión de Pauli.	73
E.1	T_c para el caso 3D cuando no hay antibosones presentes. Para valores pequeños de $m_{BC}/\hbar n^{1/3}$ (masa pequeña y/o densidad grande) es la temperatura crítica de condensación en el límite ultra-relativista T_c^{UR-B} la que domina y es prácticamente constante. Por otro lado, en el límite no-relativista, es decir, para valores grandes de $m_{BC}/\hbar n^{1/3}$ la temperatura crítica de condensación está dada por T_c^{NR-B} va como $1/m_B$.	86
E.2	Cuando tanto bosones como antibosones son considerados la temperatura crítica de condensación va como $T_c^{UR-BA} \propto m_B^{-1/2}$ para valores pequeños de $m_{BC}/\hbar n^{1/3}$ (caso tridimensional). Para valores suficientemente grandes de $m_{BC}/\hbar n^{1/3}$ la temperatura crítica de condensación va como $T_c^{NR-BA} \propto m_B^{-1}$.	90
E.3	En esta gráfica se aprecia cómo la temperatura crítica de condensación, para valores pequeños de $m_{BC}/\hbar n^{1/3}$, es más alta cuando bosones y antibosones son considerados que cuando sólo los bosones están presentes.	91
F.1	En la gráfica se puede apreciar cómo para valores de y suficientemente grandes, la aproximación (C.6) es mejor.	93
G.1	Vida media de los pares de Cooper, la cual diverge para $K = 0$ y cae a cero conforme K crece, según la generalización vía la ecuación de Bethe-Salpeter.	105

Lista de Tablas

2.1	Valores experimentales de la temperatura de transición superconductor y el cociente universal $2\Delta/k_B T_c$ ($\simeq 3.53$ para BCS) para algunos elementos superconductores.	13
6.1	Temperatura crítica de condensación y densidad de número de bosones para las fases $s+$ y $s-$ cuando $n/n_f = 1$	64
D.1	Temperatura crítica de BEC T_c , cuando se considera que un sistema de N electrones forma un sistema de $N/2$ bosones, cuya relación de dispersión \mathcal{E}_K es: cuadrática $\hbar^2 k^2/4m$, que corresponde a bosones libres; lineal e independiente del parámetro de acoplamiento λ , $a_d \hbar v_F K$ ($a_d = 1/2, 2/\pi$ en 3D y 2D respectivamente), que resulta de resolver la ecuación de eigenvalores del problema de Cooper en el límite $K \rightarrow 0$; lineal y dependiente de λ , $\lambda a_d \hbar v_F K$ ($a_d = 1/4, 1/2\pi$ en 3D y 2D respectivamente), que se obtiene cuando se resuelve el problema de Cooper vía la ecuación de Bethe-Salpeter (donde tanto pares de partículas y de agujeros son considerados consistentemente) en el límite $K \rightarrow 0$	82
E.1	Temperatura crítica de condensación en los límites no-relativista (NR) y ultra-relativista (UR) para el gas ideal en 2D y 3D cuando sólo bosones son considerados (B) y cuando tanto bosones como antibosones (BA) están presentes.	89

Referencias

- [1] A. Lanzara, P.V. Bogdanov, X.J. Zhou, S.A. Kellar, D.L. Feng, E.D. Lu, T. Yoshida, H. Eisaki, A. Fujimori, K. Kishio, J.-I. Shimoyama, T. Noda, S. Uchida, Z. Hussain, & Z.-X. Shen, *Nature* **412**, 510 (2001).
- [2] T. Cuk, F. Baumberger, D.H. Lu, N. Ingle, X.J. Zhou, H. Eisaki, N. Kaneko, Z. Hussain, T.P. Devereaux, N. Nagaosa, & Z.X. Shen, *cond-mat/0403521*.
- [3] J. Hwang, T. Timusk, & G.D. Gu, *Nature* **427**, 714 (2004).
- [4] M.L. Kubic, *cond-mat/0404287*.
- [5] C.C. Tsuei & J.R. Kirtley, *Rev. Mod. Phys.* **72**, 969 (2000).
- [6] D.A. Wollman, D.J. Van Harlingen, W.C. Lee, D.M. Ginsberg, & A.J. Leggett, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 2134 (1993).
- [7] D.A. Wollman, D.J. Van Harlingen, J. Giapintzakis, & D.M. Ginsberg, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 797 (1995).
- [8] C.C. Tsuei, J.R. Kirtley, C.C. Chi, L.S. Yu-Jahnes, A. Gupta, T. Shaw, J.Z. Sun, & M. B. Ketchen, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 593 (1994).
- [9] K.A. Müller, *Phil. Mag. Lett.* **82**, 279 (2002).
- [10] H.K. Onnes, *Comm. Phys. Lab. Univ. Leiden*, **119**, **120**, **122** (1911).
- [11] W. Meissner & R. Ochsenfeld, *Naturwiss*, **21**, 787 (1933).
- [12] F. London & H. London, *Physica* **2**, 341 (1935). F. London, *Superfluids* Vol. I: Macroscopic Theory of Superconductivity (Wiley, N.Y. 1950).
- [13] V.L. Ginzburg, *J. Phys. (USSR)* **9**, 305 (1945). V.L. Ginzburg & L. Landau, *J. Exptl. Theoret. Phys.* **20**, 1064 (1950).
- [14] M.R. Schafroth, S.T. Butler & J.M. Blatt, *Helv. Phys. Acta* **30**, 93 (1957).
- [15] G.M. Eliashberg, *Sov. Phys. JETP* **11**, 696 (1960).
- [16] R. Baquero & J.P. Carbotte, *J. Low Temp. Phys.* **51**, 135 (1983).

- [17] J.G. Bednorz & K.A. Müller, *Z. Phys.* **64**, 189 (1986).
- [18] R.A. Barrio, Chumin Wang, J. Tagüeña, & J. Keller, *Rev. Mex. Fís.* **34**, 407 (1988); y referencias allí.
- [19] J. Bok, *Physica C* **209**, 107 (1993). J. Labbé & J. Bok, *Europhysics Letters* **3**, 1125 (1987).
- [20] R. Baquero, D. Quesada, & C. Trallero-Giner, *Physica C* **271**, 122 (1996).
- [21] F. London, *Phys. Rev.* **54**, 947 (1938).
- [22] V.L. Ginzburg, *Uzp. Fiz. Nauk* **48**, 25 (1952).
- [23] R.F. Feynman, *Proc. Intern. Conf. Theoret. Phys. Kyoto Tokio, Japón*, (1953).
- [24] M.R. Schafroth, *Phys. Rev.* **96**, 1149 (1954).
- [25] P.J. Ford & G.A. Saunders, *Contemporary Physics* **38**, 63 (1997).
- [26] J.M. Blatt, *Theory of Superconductivity* (Academic, New York, 1964).
- [27] T. Tsuneto, *Superconductivity & Superfluidity*, (Cambridge University Press, 1998).
- [28] R. Friedberg & T.D. Lee, *Phys. Rev. B* **40**, 6745 (1989).
- [29] P. Chaudhari, R.T. Collins, P. Freitas, R.J. Gambino, J.R. Kirtley, R.H. Koch, R.B. Laibowitz, F.K. LeGoues, T.R. McGuire, T. Penney, Z. Schlesinger, & Armin P. Segmüller, *Phys. Rev. B* **36**, 8903 (1987).
- [30] T.K. Worthington, W.J. Gallagher, y T.R. Dinger, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 1160 (1987).
- [31] M. Casas, A. Rigo, M. de Llano, O. Rojo, & M.A. Solís, *Phys. Lett. A* **245**, 5 (1998).
- [32] S.K. Adhikari, M.Casas, A.Puente, A. Rigo, M. Fortes, M.A. Solís, M. de LLano, A.A. Valladares & O. Rojo, *Phys. Rev. B* **62**, 8671 (2000).
- [33] M. Casas, N.J. Davidson, M. de Llano, T.A. Mamedov, A. Puente, R.M. Quick, A. Rigo, & M.A. Solís, *Physica A* **295**, 425-440 (2001).
- [34] J. Hirsch, *Physica C* **341-348**, 213 (2000).
www.iitap.iastate.edu/htcu/forum.html#Q3.

- [35] V.V. Tolmachev, Phys. Lett. A **266**, 400 (2000).
- [36] M. de Llano & V.V. Tolmachev, Physica A **317**, 546 (2003).
- [37] A.B. Migdal, JETP **7**, 996 (1958).
- [38] J.E. Hirsch, Science **295**, 2226 (2002).
- [39] J.R. Schrieffer, *Theory of Superconductivity* (Benjamin, New York, 1964).
- [40] J. Bardeen, Physics Today (Jan. 1963) p. 25.
- [41] A.A. Abrikosov (2002) semi-priv. comm.
- [42] A.S. Alexandrov (2003) no publicado.
- [43] Revisor Anónimo del Phys. Rev. Lett. (2001).
- [44] J.R. Schrieffer, *Nobel Lecture*, Dec. 1972.
- [45] L.N. Cooper, Am. J. Phys. **28**, 91 (1960).
- [46] J. Bardeen, L.N. Cooper & J.R. Schrieffer, Phys. Rev. **108**, 1175 (1957).
- [47] L.N. Cooper, Phys. Rev. **104**, 1189 (1956).
- [48] S. Hands & D.N. Walters, hep-lat/0209140.
- [49] T. Ohsaku, cond-mat/0112456.
- [50] R. Balian, H.Flocard, & M. Vénéroni, nucl-th/9706041.
- [51] S. Shelly Sharma & N. K. Sharma, nucl-th/0002049.
- [52] J. Bardeen & D. Pines, Phys. Rev. **99**, 1140 (1955).
- [53] M. Tinkham, *Introduction to Superconductivity*, 2a. Ed. (McGrawHill, 1996).
- [54] F. Pistolesi & G.C. Strinati en *Bose-Einstein Condensation* Ed. A. Griffin, D.W. Snoke & Stringari (Cambridge University Press, 1995).
- [55] M. Casas, A. Rigo, M. de Llano, O. Rojo, & M.A. Solís, Phys. Lett. A **245**, 5 (1998).
- [56] R.K. Pathria, *Statistical Mechanics*, 2a. Ed. (Pergamon Press, New York, 1985).

- [57] H.E. Haber & H.A. Weldon, *Phys. Rev. Lett.* **46**, 1497 (1981).
- [58] C.E. Gough, M.S. Colclough, E.M. Forgan, R.G. Jordan, M. Keene, C.M. Muirhead, I.M. Rae, N. Thomas, J.S. Abell, & S. Sutton, *Nature* **326**, 855 (1987).
- [59] J. Labbé, S. Barisic, & J. Friedel, *Phys. Rev. Lett.* **19**, 1039 (1967).
- [60] D.M. Eagles, *Phys. Rev.* **186**, 456 (1969).
- [61] A.J. Leggett, in *Modern Trends in the Theory of Condensed Matter*, ed. by A. Pekalski & J. Przystawa, *Lecture Notes in Physics*, Vol. 115, (Springer-Verlag, Berlin, 1980); *J. Phys. (Paris) Colloq.* **41**, C7-19 (1980).
- [62] F. Pistolesi & G.C. Strinati, *Phys. Rev. B* **49**, 6356 (1994); M. Casas, J.M. Getino, M. de Llano, A. Puente, R.M. Quick, H. Rubio, & D.M. van der Walt, *Phys. Rev. B* **50**, 15945 (1994); R.M. Carter, M. Casas, J.M. Getino, M. de Llano, A. Puente, H. Rubio, & D.M. van der Walt, *Phys. Rev. B* **52**, 16149 (1995); L. Benfatto, A. Toschi, S. Caprara, & C. Castellani, *Phys. Rev. B* **66**, 054515 (2002).
- [63] M. Randeria, J.-M. Duan, & L.-Y. Shieh, *Phys. Rev. B* **41**, 327 (1990).
- [64] D. Vollkardt & P. Wölfle, *The Superfluid Phases of Helium 3*, (Taylor & Francis, London, 1990).
- [65] M.J. Holland, B. DeMarco, & D.S. Jin, *Phys. Rev. A* **61**, 053610 (2000).
- [66] K.M. O'Hara, S.L. Hammer, M.E. Ghem, S.R. Granade, & J.E. Thomas, *Science* **298**, 2179 (2002).
- [67] K.E. Strecker, G.B. Partridge, & R.G. Hulet, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 080406 (2003).
- [68] M. Holland, S.J.J.M.F. Kokkelmans, M.L. Chiofalo, & R. Walser, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 120406 (2001).
- [69] E. Timmermans, K. Furuya, P.W. Milonni, & A.K. Kerman, *Phys. Lett. A* **285**, 228 (2001).
- [70] M.L. Chiofalo, S.J.J.M.F. Kokkelmans, J.N. Milstein, & M.J. Holland, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 090402 (2002).
- [71] Y. Ohashi & A. Griffin, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 130402 (2002).

- [72] L. Pitaevskii & S. Stringari, *Science* **298**, 2144 (2002).
- [73] M. Greiner, C.A. Regal, & D.S. Jin, *Nature* **426**, 537 (2003).
- [74] C.A. Regal, M. Greiner, & D.S. Jin, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 040403 (2004).
- [75] M.W. Zwierlein, C. A. Stan, C. H. Schunck, S.M. F. Raupach, S. Gupta, Z. Hadzibabic, & W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 250401 (2003).
- [76] S. Jochim, M. Bartenstein, A. Altmeyer, G. Hendl, S. Riedl, C. Chin, J. Hecker Denschlag, & R. Grimm, *Science* **302**, 2101 (2003).
- [77] C.P. Poole, Jr., H.A. Farach, & R.J. Creswick, *Superconductivity* (Academic Press, New York, 1995).
- [78] P. Nozières & S. Schmitt-Rink, *J. Low Temp. Phys.* **59**, 195 (1985).
- [79] P. Godzinsky & R. Tarrach, *Am. J. Phys.* **59**, 70 (2000).
- [80] K. Miyake, *Prog. Theor. Phys.* **69**, 1794 (1983).
- [81] R.P. Feynman, *Statistical Mechanics* A set of lectures (W.A. Benjamin, Inc., 1972).
- [82] S.K. Adhikari & A. Ghosh, *Phys. Rev. B* **55**, 1110 (1997).
- [83] D. van der Marel, *Physica C* **165**, 35 (1990).
- [84] B.S. Deaver, Jr. & W.M. Fairbank, *Phys. Rev. Lett.* **7**, 43 (1961).
- [85] R. Doll & M. Näbauer, *Phys. Rev. Lett.* **7**, 51 (1961).
- [86] N.N. Bogoliubov, *J. Phys. (USSR)* **11**, 23 (1947).
- [87] N.N. Bogoliubov, *Nuovo Cimento* **7**, 794 (1958); J. Valatin, *Nuovo Cimento* **7**, 843 (1958).
- [88] M. Fortes, M.A. Solís, M. de Llano, & V.V. Tolmachev, *Physica C* **364-365**, 95 (2001).
- [89] V.C. Aguilera-Navarro, M. Fortes, & M. de Llano, *Sol. St. Comm.* **129**, 577 (2004). Cond-mat/0306726.
- [90] S. Wolfram, *The MATHEMATICA Book*, 3rd ed. (Wolfram Media, IL, 1996) p. 743.

- [91] W. Greiner, *Quantum Mechanics* special chapters, (Springer-Verlag, Berlin, 1998) p. 227.
- [92] Su-Long Nyeo, Am. J. Phys. **68**, 571 (2000).
- [93] A. Salazar, M. de Llano & M.A. Solís, enviado para ser publicado.
- [94] J. Bardeen, Phys. Today (Jan. 1963) p. 25.
- [95] P. Samuelsson & M. Büttiker, Phys. Rev. Lett. **89**, 046601 (2002).
- [96] R.P. Feynman, R.B. Leighton, & M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics* Vol. III, (Addison-Wesley Publishing Co., 1965) p. 21-7.
- [97] L.W. Ryder, *Quantum Field Theory*, (Cambridge University Press, N.Y., 1985) p. 360.
- [98] A.M. Zagoskin, *Quantum Field Theory of Many-Body Systems: Techniques & Applications*, (Springer, 1998) p. 43.
- [99] R. Haussmann, *Self-consistent Quantum Field Theory and Bosonization for Strongly Correlated Electron Systems*, (Springer, 1999) p. 27.
- [100] S. Doniach & E.H. Sondheimer, *Green's Functions for Solid State Physicists*, (Benjamin-Cummings, London, 1974) pag. 224.
- [101] J. Högaasen-Feldman, Nuclear Physics **28**, 258 (1961). A.M. Lane, *Nuclear Theory Pairing Force Correlations and Collective Motion*, (W.A. Benjamin, Inc. 1964).
- [102] S. Fujita & S. Godoy, *Theory of High Temperature Superconductivity* (Kluwer, NY, 2001) pp. 97-98.
- [103] Y.J. Uemura, cond-mat/0406301. La cota superior experimental más reciente para T_c/T_F es aproximadamente 0.05 en vez de 0.09 para los sistemas superconductores cuasi-bidimensionales y 0.1 para los tridimensionales.
- [104] S. Schmitt-Rink, C.M. Varma, & A.E. Ruckenstein, Phys. Rev. Lett. **63**, 445 (1989).
- [105] S. Sachdev & Z. Wang, Phys. Rev. B **43**, 10229 (1991).
- [106] B.D. Brandow, Phys. Repts. **296**, 1 (1998).
- [107] K. Huang, *Statistical Mechanics*, 2a. Ed. (Wiley Text Books, 1987) p. 154-155.

- [108] I.S. Gradshteyn & I.M. Ryzhik, editor Alan Jeffrey, *Table of Integrals, Series, & Products* fifth edition, (Academic Press, N.Y., 1994). Ecuaciones 8.212-1, 3.551.9 y 8.211-1, respectivamente.
- [109] M. Casas, S. Fujita, M. de Llano, A. Puente, A. Rigo, & M.A. Solís, *Physica C* **295**, 93 (1998).
- [110] S.K. Adhikari, M. Casas, A. Puente, A. Rigo, M. Fortes, M.A. Solís, M. de Llano, A.A. Valladares, & O. Rojo, *Phys. Rev. B* **62**, 8671 (2000).
- [111] S.K. Adhikari, M. Casas, A. Puente, A. Rigo, M. Fortes, M.A. Solís, M. de Llano, A.A. Valladares, & O. Rojo, *Physica C* **351**, 341 (2001).
- [112] A.L. Fetter & J.D. Walecka, *Quantum Theory of Many-Particle Systems* (McGraw-Hill, New York, 1971).
- [113] N.N. Bogoliubov, V.V. Tolmachev & D.V. Shirkov, *Fortschr. Phys.* **6**, 605 (1958); & *A New Method in the Theory of Superconductivity* (Consultants Bureau, NY, 1959).
- [114] A.A. Abrikosov, L.P. Gorkov, & I.E. Dzyaloshinskii, *Methods of Quantum Field in Statistical Physics*, (Dover, N.Y., 1975).
- [115] M. Casas, M. de Llano, A. Puente, A. Rigo, & M.A. Solís, *Sol. State Comm.* **123**, 101 (2002).