

01181



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
POSGRADO EN INGENIERÍA

***OBTENCIÓN DE CURVAS DE FRAGILIDAD
SÍSMICA DE MARCOS DE CONCRETO
REFORZADO CON Y SIN MUROS DE
RELLENO UTILIZANDO MODELOS
SIMPLIFICADOS DE ANÁLISIS NO LINEAL***

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

**DOCTOR EN INGENIERÍA
(Estructuras)**

Presenta:

M. en C. Esteban Flores Mendez

Dirigida por:

Dr. Gustavo Ayala Milián

Ciudad Universitaria

octubre del 2004



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

RESUMEN

En este trabajo, se presenta un procedimiento general para la obtención de curvas de fragilidad sísmica de estructuras. El estudio se enfoca particularmente a estructuras vulnerables típicas edificadas en la zona del lago de la Ciudad de México. La demanda sísmica considerada, es la correspondiente a la fuente de mayor riesgo sísmico que existe en la actualidad: la brecha de Guerrero. Estos sismos se caracterizaron a través de un proceso estocástico Gaussiano no estacionario en la media y en la covarianza. La técnica de simulación utilizada fue el método de la función de Green empírica y para obtener el ambiente sísmico deseado, se utilizó como función de Green empírica al sismo registrado en SCT del 23 de abril de 1989 de magnitud 6.9. La estructura considerada, se modela como un sistema equivalente de un grado de libertad con propiedades de histéresis dadas por un modelo bilineal, correspondiente a una simplificación de la curva de capacidad de la estructura original. La ecuación diferencial que modela al oscilador, es linealizada usando el método de la linealización equivalente, considerando tanto coeficientes Gaussianos como no Gaussianos. El caso Gaussiano es considerado cuando la respuesta es lineal o incursiona en comportamiento no lineal con bajas ductilidades ($1 < \mu < 1.3$). El caso no Gaussiano se aplica cuando la respuesta involucra altas ductilidades ($1.3 < \mu$). Manipulando las ecuaciones diferenciales estocásticamente equivalentes lineales, se obtienen las ecuaciones diferenciales para la media y la covarianza de la respuesta, cuyas soluciones se obtienen a través de un método de integración iterativo. Usando estos resultados y la teoría de extremos, se obtiene la función de densidad de probabilidad condicional de los picos de la respuesta sujeta a una intensidad sísmica dada. Evaluando la probabilidad de que los picos excedan el estado límite de colapso incipiente de la estructura para distintas intensidades sísmicas, se obtiene la curva de fragilidad sísmica del edificio para este estado límite. Los resultados obtenidos se verifican realizando extensas simulaciones de Monte Carlo.

SUMMARY

In this work is presented a general procedure to obtain seismic fragility curves of structures. Particularly, this work is focused on buildings located at the lake-bed zone of Mexico City, when subjected to earthquakes, generated at the Guerrero gap in the pacific coast of Mexico. This earthquakes where characterized with a non-stationary Gaussian stochastic process, that has non-stationary mean and covariance. The simulation technique used is the empirical Green's function method, and in order to attain the desired seismic environment, the empirical Green's function used is the 23 April 1989 earthquake registered at SCT station of 6.9 magnitude. The considered structure is modeled as an equivalent SDOF system with hysteretic properties given by a bi-linear model; the bi-linear curve corresponds to a simplification of the capacity curve of the original structure. The differential equation that models the system is linearized using the equivalent linearization method; the linearized coefficients were obtained considering that the probability density function of the response could be Gaussian or non-Gaussian. The Gaussian case is considered when the response is linear or it intrudes in non linear behavior with low ductility ($1 < \mu < 1.3$). The non- Gaussian case is applied when the response is non-linear and attain high ductility ($1.3 < \mu$). Manipulating the equivalent linear differential equations are obtained the mean and covariance matrix equations of the response, whose solutions are obtained by following an iterative integration scheme. Using this results and the extremes theory, is obtained the conditional probability density function of the peaks of the response given a seismic intensity. Evaluating the probability that the peaks exceed the limit state that corresponds to the incipient collapse of the structure for different seismic intensities, it is obtained the seismic fragility curve of the building. The results are compared with those obtained by Monte Carlo simulations.

Dedicada a Marilú

Sólo dejaremos nuestras flores
y nuestros cantos

Agradecimientos

Martín- ¿Qué hay atrás de esos símbolos en medio del caos papá?

Ernesto- Son los signos de que Dios está ahí hijo.

Agradezco al Dr. Gustavo Ayala: su disciplina, infinita paciencia, sus conocimientos en análisis estructural, ecuaciones diferenciales no lineales, métodos numéricos y mecánica numérica.

Agradezco al Dr. Mario Ordaz: su imaginación, sus conocimientos en probabilidad, estadística, ingeniería sísmica, sismología, funciones especiales y transformadas integrales, dinámica, computación, música, cine, historia, literatura, economía, arquitectura, finanzas y en el arte de hacer un buen asado.

Agradezco al Dr. Roberto Meli: su apoyo.

Agradezco al Dr. Ernesto Heredia: su filosofía, sus conocimientos de vibraciones aleatorias, mecánica de fluidos, procesos estocásticos, estadística, dinámica, finanzas, cine, poesía, literatura, psicología y humanidades.

Agradezco al Dr. Raúl Barrón: su amabilidad, sus conocimientos en vibraciones aleatorias, probabilidad, dinámica, computación y en el arte de convivir.

Agradezco al Dr. Francisco Sánchez-Sesma: sus consejos y conocimientos matemáticos.

Agradezco al Dr. Gabriel Auvinet: sus conocimientos en procesos estocásticos.

Agradezco al Dr. Jesús Savage: sus conocimientos en teoría de señales y comentarios.

Agradezco al Dr. Mircea Grigoriu: sus comentarios.

Agradezco al Dr. Jorge Aguirre: sus conocimientos en sismología.

Se agradece al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por la beca otorgada para realizar mis estudios de doctorado y por el patrocinio del proyecto **“Desarrollo y Evaluación Experimental de un Método de Diseño Sísmico por Desempeño”** al cual pertenece este trabajo.

Agradecimientos

Agradezco a:

Margarita, Roboam, Vanessa y Yadir por darme el punto de apoyo que mueve al mundo: Una familia. Por enseñarme el arte de convivir, por su generosidad sin límite.

Marco, Georgina y Xochiquetzal por enseñarme el sentido de la Unidad. Por enseñarme el arte de tener un rostro y un corazón.

A la Sra. María Luisa Guevara y al Sr. Anastasio Peña su gran cariño.

Al Jefe Sergio Coira Campoy y a Doña Teresa Jennings el arte de la tradición: La Flor y el Canto.

A la familia Cevallos Santacruz la música, las matemáticas y las teorías financieras.

Al grupo del Dr. Ayala: M.en I. Octavio, Gelacio, Roberto, Guillermo, Mauro, Mabel, Arturo, por su apoyo.

Alejandrino por las discusiones sobre daño acumulado
Moisés por las discusiones de sismología
Gelacio por las discusiones sobre elemento finito
Roberto por las discusiones sobre desempeño
Miguel Jaimes por las discusiones sobre riesgo
Miguel Torres por las discusiones sobre mecánica
Verónica por las discusiones sobre interacción suelo estructura
David por las discusiones sobre mecánica y probabilidad
César por las discusiones sobre fragilidad
Abraham por las discusiones sobre cómputo

ÍNDICE

	Pág.
Resumen	I
Summary	II
Dedicatoria	III
Agradecimientos	IV
Índice	VI
Índice de figuras	IX
Glosario	XII
1. INTRODUCCIÓN	
1.1 La medida de la vulnerabilidad sísmica de las estructuras	1
1.2 Objetivo	5
2. MÉTODO SIMPLIFICADO DE EVALUACIÓN SÍSMICA	
2.1 Antecedentes del método	7
2.2 Reducción de una estructura a un sistema equivalente de 1GDL	8
2.3 Estructura y sistema equivalente de 1GDL	14
3. SIMULACIÓN SÍSMICA USANDO EL MÉTODO DE LA FUNCIÓN DE GREEN EMPÍRICA	
3.1 Descripción del método de simulación sísmica utilizado	15
3.2 Características estadísticas del método de simulación sísmica utilizado	21
3.3 Media y densidad espectral de potencia de un proceso estocástico evolutivo generado usando una función de Green empírica dada	24
3.4 Cálculo de la media y de la densidad espectral de potencia evolutivas del proceso estocástico estudiado usando el método de Monte Carlo	25
3.5 Cálculo del número de simulaciones necesarias para que las estadísticas estimadas usando Monte Carlo sean significativas	27

4. LINEALIZACIÓN EQUIVALENTE NO GAUSSIANA

4.1 Antecedentes de la linealización equivalente	30
4.2 Linealización equivalente	32
4.3 Solución numérica de las ecuaciones diferenciales matriciales acopladas de la media y covarianza	37
4.4 Media y varianza utilizando Monte Carlo	38
4.5 Media y varianza utilizando linealización equivalente	39

5. ESTADÍSTICA DE MÁXIMOS

5.1 Antecedentes de funciones de distribución y de densidad de probabilidad de picos de señales no estacionarias	46
5.2 Funciones de distribución y de densidad de probabilidad de picos	47
5.3 Funciones de distribución y de densidad de probabilidad de picos utilizando el método de Monte Carlo	53

6. CURVAS DE FRAGILIDAD

6.1 Fragilidad sísmica	56
6.2 Estados límite	57
6.3 Curvas de fragilidad de los sistemas equivalentes de 1GDL	60

7. CONCLUSIONES

7.1 Conclusiones sobre el método para el cálculo de la fragilidad sísmica de una estructura	64
7.2 Contribuciones	67

8. REFERENCIAS 68

APÉNDICE A. ESPERANZA DE LA NORMA CUADRADA DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE LA SEÑAL SIMULADA Y DE LA SEÑAL SIMULADA CENTRADA

A.1 Esperanza de la norma cuadrada de la transformada de Fourier de la señal simulada	74
A.2 Esperanza de la norma cuadrada de la transformada de Fourier de la señal simulada centrada	77

APÉNDICE B. DEPENDENCIA TEMPORAL DE LA NORMA CUADRADA DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE LA SEÑAL SIMULADA

B.1 La transformada de Fourier discreta (TFD)	80
B.2 Periodicidad de la TFD y frecuencia máxima	82
B.3 La TFD de segmentos de señales digitales	84

APÉNDICE C. COEFICIENTES LINEALIZADORES

C.1 Coeficientes linealizadores por la teoría de vibración aleatoria	92
C.2 El coeficiente a_0	92
C.3 Los coeficiente a_2 y a_3	95

Índice de figuras

Figura		Página
2.1	Obtención de la curva de capacidad a partir del sistema de múltiples grados de libertad y su aproximación bilineal.	12
2.2	Sistema de 1GDL equivalente definido a partir de la curva de comportamiento.	13
2.3	Curvas de histéresis modeladas por la ec. (2.13)	14
3.1	Funciones de deslizamiento en varios puntos sobre una superficie de falla hipotética. Tanto la forma como la amplitud de las funciones de deslizamiento pueden variar irregularmente sobre la falla.	16
3.2	Descripción de las funciones de Green. Puntos individuales sobre la superficie de falla, se desplazan con funciones $\delta(t)$ de deslizamiento, como se indica en el gráfico. El movimiento de terreno que ocurre en la posición del observador debido a una de las fuentes puntuales es la función de Green. Se indican las funciones de Green causadas por los puntos A, B y C.	17
3.3	Media evolutiva, ec. (3.14).	24
3.4	Densidad espectral de potencia evolutiva, ec. (3.19).	25
3.5	Comparación de las medias, en línea discontinua la calculada con la ec. (3.14) y en línea continua la calculada con la ec. (3.20).	26
3.6	Diferencia de las DEPES calculadas con las ecs. (3.19) y (3.22).	27
3.6	Comportamiento de la media en función del número de simulaciones, cada línea continua corresponde a un valor de la media del proceso estocástico para un tiempo dado.	28
4.1	La matriz de covarianza no estacionaria para el ensamble sísmico simulado con la ec. (4.9).	36
4.2	Esquema de integración de las ecs. (4.7) y (4.9).	38
4.3	Histograma de la variable de estado z .	41
4.4	Comparación de varianzas para un oscilador bilineal de período 0.87 s.	41

4.5	Comparación de varianzas para un oscilador con periodo de 2 s y ductilidad de 7.76.	42
4.6	Comparación entre dos histogramas de z . El histograma de barras corresponde a la simulación de Monte Carlo y el continuo a la aproximación de Kimura dada por la ec. (4.12).	42
4.7	Kurtosis de la respuesta de un oscilador con periodo de 0.87 s, incursionando en una ductilidad promedio de 1.7.	44
4.8	Kurtosis de la respuesta de un oscilador bilineal con periodo de 0.87 s, con una ductilidad promedio de 1.7.	44
4.9	Comparación de medias y desviaciones estándar para el sistema de periodo 0.87 s.	45
4.10	Comparación de medias y desviaciones estándar para el sistema de periodo 2 s.	45
5.1	FDP de máximos para los sistema de $T = 2$ s y $T = 0.87$ s.	51
5.2	Identificación de los máximos de una señal del ensemble de respuestas, y de la banda donde la varianza del ensemble es máxima (círculos). Sistema $T = 2$ s.	54
5.3	Identificación de los máximos de una señal del ensemble de respuestas, y de la banda donde la varianza del ensemble es máxima (círculos). Sistema $T = 0.87$ s.	54
5.4	Función de densidad de probabilidad de máximos obtenida desde la teoría de la vibración aleatoria e histograma de máximos obtenido con el método de Monte Carlo, para el sistema de $T = 2$ s.	55
5.5	Función de densidad de probabilidad de máximos obtenida desde la teoría de la vibración aleatoria e histograma de máximos obtenido con el método de Monte Carlo, para el sistema de $T = 0.87$ s.	55
6.1	Determinación del desplazamiento modal correspondiente al estado límite de colapso incipiente.	61
6.2	Desplazamiento espectral del modo correspondiente a la segunda rama de la curva de comportamiento que produce una distorsión de 2.5% del entrepiso crítico.	61

6.2	Curvas de fragilidad correspondientes a los sistemas con $T = 0.8$ s y con $T = 2$ s.	63
B.1	Función coseno de 2 Hz de frecuencia.	85
B.2	TFD de la función de la Figura B.1.	85
B.3	Función coseno de 2 Hz, muestreada cada 3 segundos.	86
B.4	TFD de la Figura B.3, que ilustra la fuga espectral.	86
B.5	Señal de la Figura B.1, multiplicada por una ventana de Hamming de 3 s de longitud (intervalo de muestreo) y 1 m de amplitud.	87
B.6	TFDes de la Figura B.1, de la Figura B.3 y de la Figura B.5.	88

GLOSARIO

Capítulo 2

S_a	Seudo-aceleración espectral
S_v	Seudo-velocidad espectral
S_d	Desplazamiento espectral,
ω_j	Frecuencia angular del modo j de vibración de la estructura
T	<i>Período de la estructura</i>
ξ_j	Relación de amortiguamiento del modo de vibrar j
W_i	Peso del piso i
m_j	Masa del piso j
M	Masa de la estructura
$[M]$	Matriz diagonal de masas
$\{\phi_j\}$	Vector de forma modal j
ϕ_{jn}	Componente del vector de forma modal j para el nivel n
F_{jn}	Fuerza en el nivel n para el modo de vibrar j
N	Número de pisos de la estructura
N_m	Número de formas modales consideradas
g	Aceleración de la gravedad
Γ_j	Factor de participación correspondiente al modo j
V	Cortante basal
Δ_a	Desplazamiento de azotea
V_y	Cortante de fluencia
V_u	Resistencia al máximo desplazamiento experimentado por la estructura equivalente
Δ_u	Deformación al máximo desplazamiento experimentado por la estructura equivalente
K_e	Rigidez inicial
K	Rigidez de fluencia
Δ_y	Desplazamiento de fluencia
η	Cociente de la rigidez de posfluencia a la rigidez
U	Función de salto unitario

A_m	Área bajo la curva de capacidad
J^*	Cortante basal en el espacio de Seudo-aceleracion v.s. Desplazamiento espectral (espacio espectral (EE))
Δ_a^*	Desplazamiento de azotea en el EE
m	Masa del sistema equivalente en el EE
c	Viscosidad del sistema equivalente en el EE
k	Rigidez inicial del sistema equivalente en el EE
x_f	Desplazamiento de fluencia en el EE
k_f	Rigidez de posfluencia en el EE
k_l	Rigidez del resorte lineal del sistema equivalente en el EE
k_2	Rigidez del resorte elastoplástico del sistema equivalente en el EE
α	Cociente de la rigidez de posfluencia con la rigidez inicial en el EE
$a(t)$	Proceso estocástico que representa la historia de aceleraciones del terreno
H	Regla de histéresis bilineal
x	Desplazamiento del sistema equivalente
z	Variable de estado que acopla la ecuación de la dinámica del sistema equivalente con la regla de histéresis
t	Tiempo

Capítulo 3

$\delta(t)$	Delta de Dirac
$a_e(t)$	Función de Green empírica
M_{oe}	Momento sísmico de la falla que produce la función de Green
$\Delta\sigma_e$	Caída de esfuerzos de la falla que produce la función de Green
M_{os}	Momento sísmico de la falla que produce la señal por simular
$\Delta\sigma_s$	Caída de esfuerzos de la falla que produce la señal por simular
ω_c	Frecuencia de esquina
τ_i	Tiempo de ruptura de la celda i
$p(t)$	Función de densidad de probabilidad de los tiempos de ruptura
$P(\omega)$	Transformada de Fourier de $p(t)$
N	Número de celdas elementales en que se descompone la falla
ξ	Coficiente de escalamiento

$a_s(t)$	Proceso estocástico que representa la historia de aceleraciones del terreno
$a_{s,i}(t)$	Realización número i del proceso $a_s(t)$
$\tilde{a}_s(t)$	Proceso estocástico centrado
$F(\omega)$	Espectro de la fuente sísmica
$f(t)$	Antitransformada de $F(\omega)$
$Q(\omega)$	Cociente entre los espectros de la señal simulada a la señal de Green
$F\{\bullet\}$	Transformada de Fourier de \bullet
$E[\bullet]$	Esperanza de \bullet
$R(t_1, t_2)$	Función de autocorrelación
$Cov(t_1, t_2)$	Función de autocovarianza
$\tilde{A}_s(\omega)$	Transformada de Fourier del proceso centrado
$\tilde{A}_s(\omega, t)$	Transformada de Fourier Corta
$S(\omega, t)$	Densidad espectral de potencia evolutiva
$S^{se}(\omega, t)$	Densidad espectral de potencia evolutiva par T (período) finito
$S_c(\omega, t)$	Densidad espectral de potencia evolutiva centrada
$S_c^{sc}(\omega, t)$	Densidad espectral de potencia evolutiva del proceso centrado con T finito
$\mu_s(t)$	Media del proceso usando Monte Carlo
$S^{ex}(\omega, t)$	Densidad espectral de potencia evolutiva usando Monte Carlo
$S_c^{ex}(\omega, t)$	Densidad espectral de potencia evolutiva usando Monte Carlo para un proceso centrado
$P\{A\}$	Probabilidad del evento A
$P\{A I\}$	Probabilidad condicional de que suceda A dado que sucedió el evento I
γ	Índice de significancia

Capítulo 4

a_0, a_2, a_3	Coefficientes linealizadores
k	Rigidez elástica del sistema equivalente
m	Masa del sistema equivalente

c	Viscosidad del sistema equivalente
ω	Frecuencia del sistema equivalente
ζ	Razón de amortiguamiento del sistema equivalente
x	Desplazamiento relativo del sistema equivalente (desplazamiento)
\dot{x}	Derivada temporal de x (velocidad)
z	Variable de estado que acopla la ecuación de la dinámica con la regla de histéresis (z)
$a(t)$	Proceso estocástico que representa la historia de aceleraciones del terreno
$f(t)$	$-a(t)$
X	Vector de estados $X = [x \quad \dot{x} \quad z]^T$
A	Matriz del sistema
G	$G = [0 \quad 1 \quad 0]$
$E[X]$	Esperanza del vector de estados
\tilde{X}	Vector de estados centrado $\tilde{X} = X - E[X]$
\tilde{f}	Proceso centrado $\tilde{f} = f - E[f]$
$\Gamma_X(t)$	Matriz de Covarianza $\Gamma_X(t) = E[\tilde{X}(t)\tilde{X}^T(t)]$
$\Gamma_f(t)$	Covarianza del proceso $\Gamma_f(t) = E[\tilde{f}(t)\tilde{f}^T(t)]$
$\Phi(t, t_0)$	Matriz de transición $\Phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}$
$\varphi(x)$	Función de densidad de probabilidad normal de x
$\varphi(x, y)$	Función de densidad de probabilidad divariada de x y y
$m\bar{x}$	Media del desplazamiento
$m\bar{\dot{x}}$	Media de la velocidad
$m\bar{z}$	Media de z
σ_x^2	Varianza del desplazamiento
$\sigma_{\dot{x}}^2$	Varianza de la velocidad
σ_z^2	Varianza de z
$\sigma_{x\dot{x}}$	Covarianza de x y dx/dt
σ_{xz}	Covarianza de x y z
$\sigma_{\dot{x}z}$	Covarianza de dx/dt y z

Capítulo 5

ν_p	Tasa condicional de ocurrencia de los máximos del proceso
$f_{P(t)}$	Función de densidad de probabilidad condicional de los máximos
$F_{P(t)}$	Función de distribución de probabilidad condicional de los máximos
$f_{\dot{X}(t),\ddot{X}(t)}$	Función de densidad de probabilidad conjunta condicional de \dot{x} y \ddot{x}
$f_{X(t),\dot{X}(t),\ddot{X}(t)}$	Función de densidad de probabilidad conjunta condicional de x , \dot{x} y \ddot{x}
x_j^*	Estado límite
$P[x > x_j^* I]$	Probabilidad condicional de exceder el estado límite

Capítulo 6

H	Altura de entrepiso
x_j	Desplazamiento relativo del nivel j
x_{j+1}	Desplazamiento relativo del nivel $j+1$
Δ_j	Distorsión de entrepiso
x_l	Estado límite
x_l^*	Estado límite espectral
Φ_{1Ra}	Modo fundamental asociado a la primera rama de la curva bilineal del sistema equivalente
Φ_{2Ra}	Modo fundamental asociado a la segunda rama de la curva bilineal del sistema equivalente
Γ_j	Factor de participación del modo Φ_{2Ra}
t_d	Tiempo de duración de la señal
I	Intensidad de Arias

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

1.1 La medida de la vulnerabilidad sísmica de las estructuras

Evaluar el impacto que tienen los sismos en las estructuras es una tarea importante por las pérdidas de vidas y económicas que ocasionan, por lo que es necesario contar con un método que cuantifique, confiable y eficazmente, la probabilidad de que una estructura incurriere en cierto nivel de daño por estar sujeta a un sismo de intensidad dada. Esto permitiría, a la sociedad en su conjunto y especialmente a los centros dedicados a la prevención de desastres, desarrollar estrategias para mitigar el riesgo sísmico en que se encuentran las estructuras y planes de acción cuando una ocurra un sismo.

Los autores (ver p.e. Casciati, 1991) que se han abocado a la evaluación del comportamiento sísmico de las estructuras, coinciden en métodos generales, que han derivado en la construcción de una teoría denominada vulnerabilidad sísmica. Esta teoría estudia la probabilidad condicional de que una estructura incurriere en cierto estado de daño por estar sujeta a un sismo de cierta intensidad. Existen diversos métodos para evaluar la vulnerabilidad sísmica de una estructura. Corsanego y Petrini (1990), los clasificaron en: directos, indirectos, convencionales y mixtos. Basado en esta clasificación, Dolce (Safina, 2002), propone una nueva clasificación: métodos estadísticos, mecánicos y basados en juicios de expertos.

Aunque existen otras clasificaciones de la vulnerabilidad sísmica, que involucran distintas técnicas y métodos para su evaluación, es difícil desde un punto de vista teórico, por las diferencias intrínsecas que existen entre ellas, evaluar las ventajas que tienen unas sobre otras, ya que en distintas circunstancias que se establecen por la información disponible, unas involucran el tratamiento de un volumen de información considerable y otras, métodos matemáticos sofisticados. Otros autores, por ejemplo, Caicedo *et al.* (1994), prefieren separar los métodos de evaluación de vulnerabilidad en dos clases: analíticos y subjetivos. En este trabajo se utiliza el método analítico, que consiste en modelar matemáticamente tanto a los sismos como a la estructura y en determinar la respuesta en términos probabilista.

La vulnerabilidad sísmica de una estructura depende del tipo de daño que se desea considerar y de los sismos a los que la estructura, se espera, estará sujeta. La relación entre estos parámetros suele formularse en forma discreta mediante matrices (Sarabandis, 2003), ó en forma continua mediante curvas de fragilidad. El presente estudio se dedica a la evaluación de la vulnerabilidad sísmica de las estructuras utilizando curvas de fragilidad.

La fragilidad sísmica de un edificio, se define como la probabilidad condicional de que su respuesta exceda un estado límite dado cuando se le somete a sismos de cierta intensidad. La fragilidad se expresa por una función entre dos conjuntos: el dominio y el contradominio de dicha función, en la que el dominio de la función (abscisas), es una medida de intensidad sísmica y el contradominio (ordenadas), la probabilidad condicional de que la respuesta de la estructura exceda un estado límite cuando se le sujeta a un sismo de intensidad dada.

La fragilidad sísmica tiene diferentes aplicaciones como son: la estimación de daños probables debidos a sismo, la definición y/o evaluación de los parámetros que determinan el desempeño estructural ante sismo, la definición de medidas de prevención de desastres, el cálculo de la inversión óptima para obtener diseños de estructuras con un nivel de seguridad establecido, y el desarrollo de códigos de diseño basados en probabilidad, utilizando las curvas de fragilidad como una herramienta para determinar la confiabilidad de las estructuras diseñadas. Algunos ejemplos de la orientación probabilista que los

códigos están tomando se refleja en: la metodología de evaluación de riesgo probabilista para plantas nucleares, NRC, desarrollada en 1970 y actualizada en 1980, Nuclear Regulatory Commission (1983), el Eurocódigo desarrollado dentro de la comunidad Europea en 1993, Eurocódigo (1998), y los criterios de diseño propuestos por el comité Visión 2000, SEAOC (1995).

El desempeño de una estructura frente a un sismo está dado por la relación que guarda su respuesta con la resistencia de los elementos que la componen. La respuesta de la estructura puede ser representada por: el desplazamiento de uno o varios puntos característicos, la distorsión de un entrepiso, o las fuerzas actuantes en un elemento de la misma estructura como consecuencia de su deformación. Diferentes niveles de respuesta ocasionan que la estructura se dañe y hasta falle. La respuesta de una estructura se correlaciona con el daño experimentado por la misma, ya que mientras más dañada esté, menor resistencia tendrá para resistir las fuerzas de inercia ocasionadas por los sismos (Xianguo et al., 1994).

Hay diferentes aproximaciones para obtener la fragilidad sísmica de estructuras (Waisman y Grigoriu, 1996), que se basan en: i) observaciones de campo, ii) experimentos de laboratorio y iii) modelos numéricos. Este trabajo se enfoca al desarrollo de modelos numéricos y se divide en: 1) el método de Monte Carlo y 2) el método de vibraciones aleatorias (Casciati, 1991). En el método de Monte Carlo, la fragilidad sísmica de una estructura se obtiene calculando primero las respuestas de la estructura sujeta a una gran cantidad de sismos de la misma intensidad, para varias intensidades, y después calcular la frecuencia relativa condicional a una intensidad sísmica dada de que las respuestas excedan un valor dado. Los sismos deben ser simulados mediante un método que permita obtener gran cantidad de ellos con una intensidad dada y características que reflejen el lugar de emplante de la estructura, el período dominante del sitio, la duración, y el contenido de frecuencias, entre otros. Algunos métodos de simulación deben contener además ciertas características de la fuente sísmica. Estudios de este tipo han sido realizados por Mosalam *et al.* (1997), encontrándose que este método tiene la desventaja de involucrar un esfuerzo computacional considerable que normalmente está fuera del alcance de la ingeniería práctica.

El método de vibraciones aleatorias, en cambio, calcula directamente las estadísticas de la respuesta estructural frente a la demanda sísmica considerada, por lo que llega a resultados similares que los que se obtienen usando el método de Monte Carlo, involucrando un esfuerzo computacional considerablemente menor.

Las diferencias entre el método de Monte Carlo y el método de vibraciones aleatorias se debe a que sus resultados dependen en general de variables e incluso hipótesis de partida distintas. En ocasiones estas diferencias se pueden reducir hasta donde se desee. Sin embargo, existen casos, en los que los resultados de ambos métodos son muy diferentes por causas inherentes a sus fundamentos. En ambos métodos es necesario contar con un modelo de simulación sísmica.

Para el cálculo de las estadísticas de la respuesta de sistemas no lineales hysteréticos, la teoría de vibraciones aleatorias normalmente utiliza el método de la linealización equivalente, ya que presenta ventajas sobre otros métodos (Hurtado, 1998). La aplicación del método de la linealización equivalente, requiere que se suponga *a priori* una función de densidad de probabilidad (fdp) de la respuesta, hipótesis que se verifica posteriormente. Con el primer y el segundo momentos estadísticos de la respuesta, se encuentra la función de distribución de probabilidad de los máximos de la respuesta, que permite evaluar la fragilidad sísmica de la estructura directamente. Investigaciones que utilizan este método han sido realizadas por Hurtado (1993) y por Barrón (1999).

El método de la linealización equivalente se aplica generalmente utilizando técnicas de simulación sísmica que se basan en filtrar ruido blanco, obteniéndose sismos Gaussianos con una intensidad y densidad espectral de potencia dada, correspondiente a un sismo registrado en el sitio de interés. Los sismos simulados son matemáticamente aceptables; sin embargo, el procedimiento de simulación carece de sentido físico. En este trabajo se utiliza el método de simulación de la función de Green empírica, y se plantea un esquema dentro de la linealización equivalente que toma en cuenta las características de la simulación, principalmente considerando el hecho de que la densidad espectral de potencia no proviene

de ruido blanco. Con esto se pretende sacar ventaja sobre el método tradicional de simulación, debido a que el método de la función de Green empírica se basa en un modelo físico de simulación de señales y el método utilizado filtrando ruido blanco se basa en un ajuste estadístico de datos (Hurtado, 1993).

1.2 Objetivo

El objetivo de la presente tesis doctoral es la obtención de curvas de fragilidad sísmica de estructuras hechas a base de marcos, utilizando modelos simplificados de análisis no lineal y conceptos novedosos de la teoría de vibraciones aleatorias. Se aplicarán las curvas de fragilidad en la evaluación de la vulnerabilidad sísmica de una estructura vulnerable típica del Valle de México.

Para el cálculo de la fragilidad sísmica de una estructura se desarrolla un método que consta de cinco pasos. El primero reduce, con fundamentos en la teoría de la dinámica estructural, una estructura de múltiples grados de libertad (MGDL) a un sistema equivalente con comportamiento no lineal de un grado de libertad (1GDL), definido con la curva de capacidad obtenida de un análisis de cargas incrementales. En el segundo paso, utilizando el método de la función de Green empírica, se caracteriza como un proceso estocástico los sismos que provienen de la Costa de Guerrero, fuente a la que se le atribuye el máximo peligro sísmico, como lo explican Ordaz *et al.* (1991). El tercer paso, determina las estadísticas de primer y segundo orden de la respuesta del sistema de 1GDL equivalente sujeto a un proceso estocástico cuyas realizaciones corresponden a sismos de intensidad dada. Las estadísticas se obtienen utilizando la teoría de vibraciones aleatorias. El cuarto paso utiliza las estadísticas de la respuesta obtenidas del tercer paso y calcula la función de distribución de probabilidad de los picos de la respuesta a través de la teoría de tasas de ocurrencia y distribución de extremos. En el quinto y último paso, se calcula la probabilidad de excedencia de los estados límites de interés.

En este trabajo los resultados obtenidos en cada paso del método propuesto también se obtienen con el método de Monte Carlo para su validación. Con este método se calculan las

mismas estadísticas que las que se obtienen con la teoría de la vibración aleatoria a través de realizar un número suficiente de experimentos. Esta suficiencia se demuestra con base en la realización de mas experimentos no modifica las estadísticas que se desea estimar.

CAPÍTULO 2

MÉTODO SIMPLIFICADO DE EVALUACIÓN SÍSMICA

2.1 Antecedentes del método

Hasta ahora, los análisis dinámicos no lineales son realizados sólo en el marco de la investigación y para estructuras especiales, y todavía no representan una opción viable para los ingenieros de la práctica, debido al gran número de factores que dificultan su aplicación. La identificación de un sismo con el cual realizar el análisis dinámico de estructuras es una tarea compleja, ya que los sismos presentan una gran variabilidad debido a: el mecanismo de falla que los genera, la distancia a la fuente y la estratigrafía del punto donde se quiera desplantar la estructura. Puesto que los registros sísmicos se obtienen para un sitio dado, esta información en realidad no se puede utilizar para ningún otro lugar, sin que se consulte a un experto como puede ser un sismólogo ó ingeniero geofísico. Combinadas con lo anterior, las características del material y la forma de caracterizar el comportamiento no lineal de la estructura producen sistemas muy complejos. Esto ha motivado el desarrollo de métodos simplificados de análisis no lineal. Se debe a Freeman *et al.* (1975), la creación de un método rápido para la evaluación sísmica de instalaciones militares, ahora denominado método del espectro de capacidad, que utiliza un procedimiento para determinar la capacidad de una estructura frente a sismos, al que se le llama pushover análisis (análisis del empujón). El análisis del empujón, se define como un procedimiento de análisis sucesivos con el que se determinan las respuestas de una estructura sujeta a un sistema de cargas estáticas equivalentes a las sísmicas, que se incrementan monótonamente hasta que

la estructura alcanza un estado limite preestablecido. El método desarrollado por Freeman, ha sido modificado y mejorado en sus alcances por diversos autores como, Fajfar y Gaspersic (1996), Xianguo (1996), y Ayala (1999), pudiéndose actualmente aplicar con confianza a diversos tipos de estructuras como son: marcos planos de cualquier altura, edificios asimétricos y puentes.

2.2 Reducción de una estructura a un sistema equivalente de 1GDL

Con el fin de contar con un método simplificado de análisis no lineal, un sistema de múltiples grados de libertad se reduce a un sistema equivalente de un grado de libertad utilizando la curva de capacidad del sistema original. La curva de capacidad se define como la relación funcional que existe entre el cortante basal de la estructura y el desplazamiento de un nodo de control de la misma; normalmente, en el caso de marcos, se considera al centro de masa de la azotea. Por simplicidad, la curva de capacidad se aproxima por una curva bilineal y esta última se transforma del espacio de cortante basal contra desplazamiento de un punto característico al espacio de pseudos-aceleraciones espectrales contra desplazamientos espectrales. A esta función se le denomina curva de comportamiento, y de ella se obtienen las propiedades del sistema equivalente de 1GDL.

La curva de cortante basal contra desplazamiento resulta de aplicar sobre la estructura cargas laterales monótonas que se van incrementando paso a paso hasta alcanzar un desplazamiento objetivo del nodo característico. La distribución de las cargas en la altura se define de acuerdo a los modos de vibración que contribuyen a la respuesta de la estructura. Cuando los desplazamientos producidos por cierto modo de vibración de la estructura predominan sobre los desplazamientos debidos a los otros modos, es posible aproximar la distribución de cargas en términos de una distribución correspondiente a dicho modo. Sin embargo, la formulación general permite considerar la contribución de todos los modos que se requieran. Durante la etapa de carga, cuando alguno de los elementos de la estructura fluye, los modos de vibración cambian, por lo que es necesario actualizar durante el proceso de carga la distribución de las cargas cada vez que la rigidez cambie (Ayala, (1999).

Definiendo las siguientes variables (Clough y Penzien, 1993): S_a , S_v y S_d , como pseudo-aceleración espectral, pseudo-velocidad espectral y desplazamiento espectral, respectivamente, ω_j la frecuencia angular del modo j de vibración de la estructura, ξ_j la relación de amortiguamiento del modo de vibrar j , W_i el peso del piso i , m_j la masa del piso j , $[M]$ la matriz diagonal de masas, $\{\phi\}_j$ el vector de forma modal j , ϕ_{jn} la componente del vector de forma modal j para el nivel n , F_{jn} la fuerza en el nivel n para el modo de vibrar j , N el número de pisos de la estructura, Nm el número de formas modales consideradas, g la aceleración de la gravedad, y Γ_j el factor de participación correspondiente al modo j dado por:

$$\Gamma_j = \frac{\{\phi\}_j^T [M] \{I\}}{\{\phi\}_j^T [M] \{\phi\}_j} \quad (2.1)$$

Se tiene que el cortante basal y el desplazamiento de azotea, para el caso en el que se considera solo la contribución del modo fundamental de vibrar, están dados por:

$$V = \{I\}^T [M] \{\phi\}_1 \Gamma_1 S_a(\omega_1, \xi_1), \quad \text{y} \quad \Delta_a = \phi_{1a} \Gamma_1 S_d(\omega_1, \xi_1) \quad (2.2)$$

El cortante basal V , es el resultado de aplicar sobre la estructura la siguiente distribución de cargas:

$$F_{jn} = \Gamma_n m_j \phi_{jn} S_a(\omega_1, \xi_1) \quad (2.3)$$

La curva de comportamiento se obtiene de la siguiente transformación:

$$V^* = \frac{V}{\{I\}^T [M] \{\phi\}_1 \Gamma_1 g}, \quad \text{y} \quad \Delta_a^* = \frac{\Delta_a}{\phi_{1a} \Gamma_1} \quad (2.4)$$

Si se considera la contribución de los n modos de vibrar de la estructura, y una regla particular de combinación de contribuciones modales, por ejemplo la de la raíz cuadrada de

la suma de los cuadrados de las contribuciones modal (regla de Rosenblueth), las ecuaciones anteriores quedan:

$$V = \sum_{i=1}^N W_i \phi_{i1} \Gamma_i \frac{S_a(T_i, \xi_i)}{g} (\Phi \Gamma)^{SRSS}, \quad \text{y} \quad \Delta_r = SRSS_{j=1}^N \phi_{rj} \Gamma_j S_d(T_j, \xi_j), \quad (2.5)$$

donde: $SRSS = SRSS_{i=1}^M x_i = \left(\sum_{i=1}^M x_i^2 \right)^{1/2}$, $(\Phi \Gamma)^{SRSS} = SRSS_{j=1}^N [f_{\phi_j} f_{\Gamma_j} f_a]$, $f_{\phi} = \frac{\phi_{ij}}{\phi_{i1}}$,

$f_{\Gamma_j} = \frac{\Gamma_j}{\Gamma_1}$ y $f_a(T_j, T_1, \xi_j, \xi_1) = \frac{S_a(T_j, \xi_j)}{S_a(T_1, \xi_1)}$. La distribución de las cargas en este caso es:

$$F_i = W_i \phi_{i1} \Gamma_i \frac{S_a(T_i, \xi_i)}{g} (\Phi \Gamma)^{SRSS}. \quad (2.6)$$

La transformación a las coordenadas espectrales, Requena (1998), está dada por:

$$V^* = \frac{V}{\{I\}^T [M] \{\phi\}_1 \Gamma_1 (\Phi \Gamma)^{SRSS} / g}, \quad \text{y} \quad \Delta_a^* = \frac{\Delta_a}{\phi_{ia} \Gamma_i (\Phi \Gamma)^{SRSS}}. \quad (2.7)$$

Por simplicidad en el proceso la curva de capacidad de la estructura se aproxima por una curva bilineal y de esta se obtiene la curva de comportamiento, con la que se definen las propiedades del sistema equivalente de 1GDL. Estas propiedades son la rigidez inicial K_e , la rigidez de fluencia K_y , y el desplazamiento de fluencia Δ_y . La masa del sistema equivalente se obtiene utilizando:

$$M = \{\phi\}_1^T [M] \{\phi\}_1. \quad (2.8)$$

Los modos naturales $\{\phi\}_j$, se determinan a través del problema de eigenvalores (Clough y Penzien, 1993), pero las condiciones a las que están sujetos los modos los determinan sólo hasta un factor multiplicativo. Si el vector $\{\phi\}_j$, es un modo natural, cualquier vector

proporcional a el, es esencialmente el mismo modo natural puesto que también satisface el mismo problema de eigenvalores. Algunas veces a los vectores modales se les aplican factores de escala para estandarizar sus elementos. Este proceso es llamado normalización. En este trabajo los modos que se consideran presentan su máximo valor igual a uno.

En la Figura 2.1, se muestra el proceso de obtener la curva de capacidad a partir de aplicar a la estructura en estudio un sistema monotónico de cargas incrementales. En donde además se muestra la aproximación bilineal a la curva de capacidad, cuya ecuación está dada por:

$$V(\Delta_a) = V_y \left\{ \frac{\Delta_a}{\Delta_y} - (1-\eta) \left[\frac{\Delta_a}{\Delta_y} - 1 \right] U \left(\frac{\Delta_a}{\Delta_y} - 1 \right) \right\} \quad (2.9)$$

donde V_y es el cortante de fluencia, η es el cociente de la rigidez de posfluencia a la rigidez inicial y U es la función de Heaviside:

$$U(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

En este trabajo la aproximación bilineal a la curva de capacidad se obtiene considerando que el área bajo ella es la misma que el área bajo la curva de capacidad original. Si A_m es el área bajo la curva de capacidad entonces:

$$A_m = \frac{1}{2} V_y \Delta_y + \frac{1}{2} (V_u + V_y) (\Delta_u - \Delta_y) \quad (2.10)$$

donde V_u y Δ_u son la resistencia y la deformación, respectivamente, correspondientes al máximo desplazamiento experimentado por la estructura equivalente de IGDL cuando esta sujeta a la demanda sísmica que se considera; a la coordenada (Δ_u, V_u) , se le denomina punto de desempeño y satisface: $V_u = V_y [1 + \eta(\mu - 1)]$ y $\Delta_u = \mu \Delta_y$, y μ es la ductilidad desarrollada por la estructura (Sandoval, 2000). El desplazamiento de fluencia satisface:

$$\Delta_y = \frac{2I_u \Delta_u - k_y \Delta_u^2 - 2A_u}{V_u - k_y \Delta_u} \quad (2.11)$$

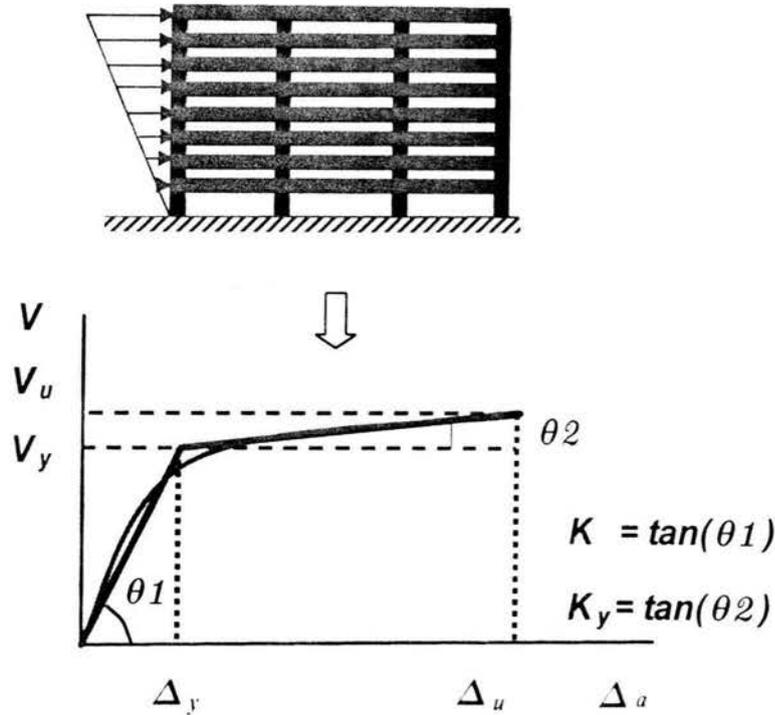


Figura 2.1 Obtención de la curva de capacidad a partir del sistema de múltiples grados de libertad y su aproximación bilineal.

La Figura 2.2, muestra la aproximación bilineal de la curva de comportamiento en el espacio espectral, y cómo de las propiedades de esta se obtienen las propiedades del sistema de 1GDL equivalente. El sistema de 1GDL que resulta está dado por la ecuación:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + \alpha kx(t) + (1 - \alpha)kz(t) &= -ma(t) \\ \dot{z}(t) &= H(\dot{x}, z), \end{aligned} \quad (2.12)$$

donde x es el desplazamiento relativo del sistema equivalente, z la variable de estado que acopla la ecuación diferencial de la dinámica del sistema equivalente con la regla de histéresis. m , c , y k , son la masa, el amortiguamiento y la rigidez inicial del sistema equivalente, respectivamente. El coeficiente α , es el cociente de la rigidez de postfluencia con la rigidez inicial. La función del tiempo $a(t)$ corresponde a un proceso estocástico que representa la historia de aceleraciones del terreno. El comportamiento no lineal del sistema

se modela a través del acoplamiento de las ecuaciones diferenciales y de la función H , que según el modelo bilineal debe satisfacer:

$$\dot{z}(t) = H(\dot{x}, z) = \dot{x} \left[1 - U(\dot{x})U\left(\frac{z}{x_y} - 1\right) - U(-\dot{x})U\left(-\frac{z}{x_y} - 1\right) \right]. \quad (2.13)$$

El tipo de curva de histéresis que modela la ec. (2.13) se ilustra en la Fig. 2.3. para un sistema de período $T = 2$ s, sujeto a una excitación sísmica de magnitud 8.1. En esta Figura, se grafican en el eje de las abscisas (Sd) el desplazamiento $x(t)$, y en el de las ordenadas (Sa) la fuerza de restitución por unidad de masa del oscilador equivalente: $\alpha kx(t)/m - (1-\alpha)kz(t)/m$.

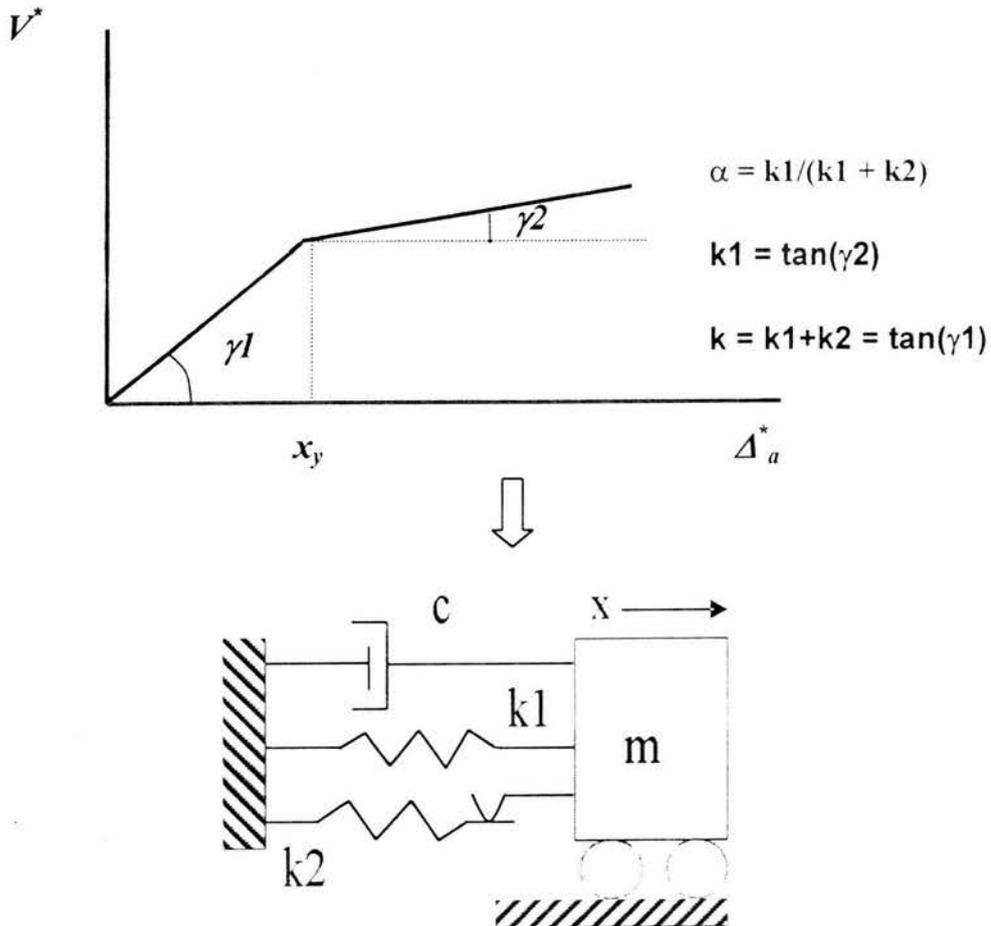


Figura 2.2. Sistema de IGDL equivalente definido a partir de la curva de comportamiento.

2.3 Estructura y sistema equivalente de 1GDL

Para ilustrar la aplicación del método desarrollado en este trabajo, se estudia el edificio simétrico de 8 pisos y tres crujiás que se muestra en la Figura 2.1, con pisos de 3.3 m de altura y crujiás de 7 m de claro. Las propiedades de la estructura fueron determinadas por Sandoval (2000), y sus propiedades equivalentes son: $M = 44.34 \text{ t}\cdot\text{s}^2/\text{m}$ ($t = 1000 \text{ Kg} \cdot 9.81 \text{ m/s}^2$), $k1 = 2311.31 \text{ ton/m}$, $k2 = 627.76 \text{ t/m}$, $V_y^* = 71.21 \text{ t/m}$ y $\xi = 5\%$. Las propiedades de la curva de comportamiento son: Γ_I elástico = 1.2979, Γ_I inelástico = 1.2365, y $x_y = 0.0308 \text{ m}$.

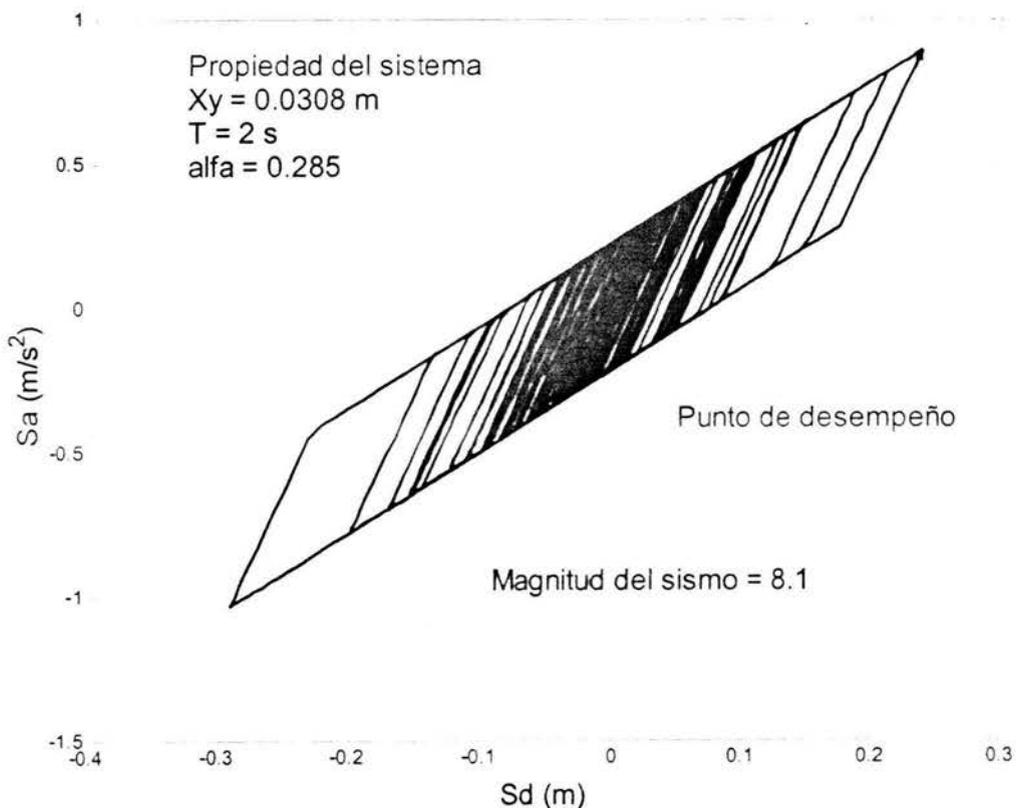


Figura 2.3. Curvas de histéresis modeladas por la ec. (2.13).

Después de obtener el punto de desempeño del sistema de la Fig. 2.3, se obtiene mediante un análisis del empujón una aproximación al desempeño de la estructura.

CAPÍTULO 3

SIMULACIÓN SÍSMICA USANDO EL MÉTODO DE LA FUNCIÓN DE GREEN EMPÍRICA

3.1 Descripción del método de simulación sísmica utilizado

El método de simulación sísmica llamado de la función de Green empírica supone que el sismo que se registra en cierto lugar, debido al deslizamiento de una falla tectónica, se puede obtener considerando las contribuciones del movimiento del suelo, en el lugar dado, debidas al deslizamiento de distintos puntos sobre dicha falla. Para hacer esto, primero hay que especificar cómo se desliza cada punto sobre la falla durante el sismo, y determinar para cada punto sobre la misma, cómo se mueve el suelo en el lugar donde se realiza el registro cuando uno solo de estos puntos se desliza. Una vez que se conoce el movimiento del suelo en el lugar de registro debido al deslizamiento de cada punto sobre la falla, el movimiento “total” del suelo es la suma de todos los movimientos del suelo causados por el deslizamiento individual de todos los puntos sobre la falla, Fig. 3.2.

Lo primero que es necesario hacer para simular sismos con el método de la función de Green empírica es la especificación de la fuente sísmica. La fuente sísmica se describe proporcionando la localización de la falla y la función de deslizamiento (la historia temporal del desplazamiento relativo entre los dos lados de la falla) en cada punto sobre la falla. Para crear un modelo de la fuente, se deben considerar las propiedades conocidas de

ruptura sísmica, que han sido estudiadas por distintos autores, entre ellos Spudich y Hartzell (1984). Las funciones de deslizamiento que pueden caracterizar un sismo hipotético en diversos puntos sobre una falla se muestran en la Figura 3.1, donde se aprecian algunas de las características comunes que presentan dichas funciones: todas ellas son no decrecientes, comienzan de cero y terminan con un valor constante en el tiempo, consistente con el hecho de que los sismos resultan del deslizamiento relativo entre los lados de una falla. También se aprecia en la Figura 3.1, que el deslizamiento en los distintos puntos puede comenzar en diferentes momentos. La fuente sísmica se caracteriza completamente haciendo gráficas como estas para las tres componentes de deslizamiento para cada punto de la falla.

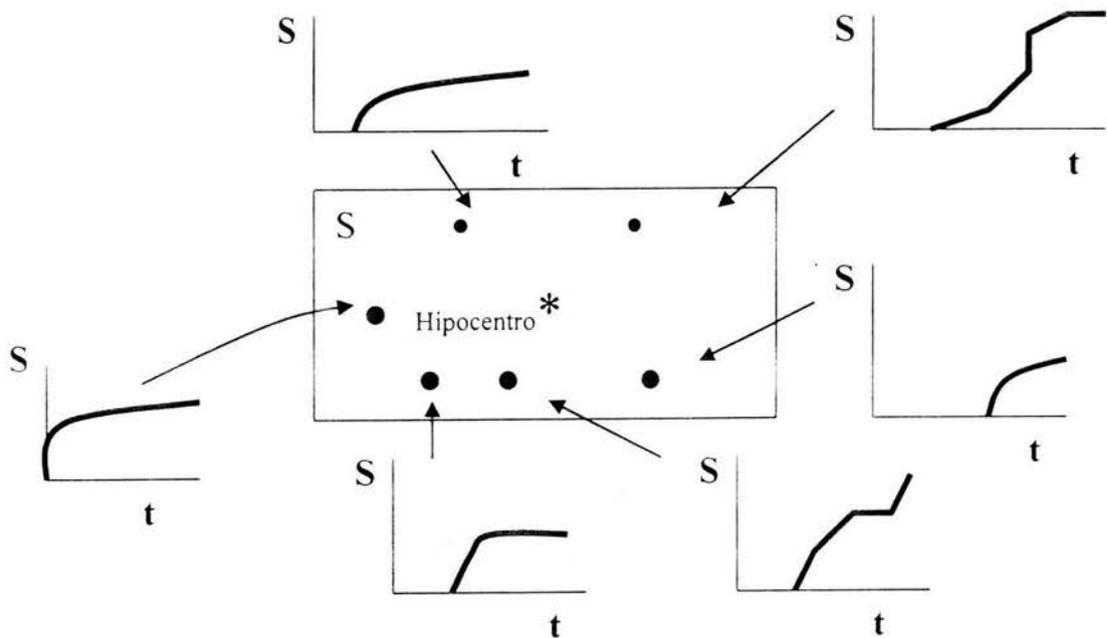


Figura 3.1. Funciones de deslizamiento en varios puntos sobre una superficie de falla hipotética. Tanto la forma como la amplitud de las funciones de deslizamiento pueden variar irregularmente sobre la falla.

La segunda parte del problema es la descripción de cómo se propagan y se alteran las ondas sísmicas que viajan desde la falla donde se producen, hasta el lugar de registro. Esta parte del problema se caracteriza por las funciones de Green. Para definir una función de Green, supóngase que un punto de la falla se desplaza mediante un deslizamiento caracterizado por $\delta(t)$ (delta de Dirac), tal como se ilustra en el punto A de la Fig. 3.2. El movimiento del

suelo en el lugar de registro (punto de observación), causado por esta fuente puntual individual, se denomina función de Green para la fuente puntual. La función de Green es en esencia la respuesta de la estructura geológica al impulso unitario. La razón para introducir funciones de Green es que una vez conocida dicha función para un punto de la falla, el movimiento del terreno, causado por una función de deslizamiento arbitraria de dicho punto, se puede conocer a través de realizar el producto de convolución de la historia temporal del deslizamiento del punto que se encuentra en la falla, con la función de Green. Por lo tanto, para determinar la contribución de cada punto de la falla en el lugar de registro, primero se determinan las funciones de Green para cada punto de ella, tal como los puntos A, B y C en la Fig. 3.2. Las funciones de Green para cada punto de la falla, en general, diferirán una de otra, ya que la distancia de la fuente al punto de observación y la estructura geológica a través de la cual las ondas viajarán son distintas. Después se realiza el producto de convolución de la función de Green con la función de desplazamiento del punto fuente de la falla para obtener la contribución puntual al movimiento del terreno en el lugar de observación.

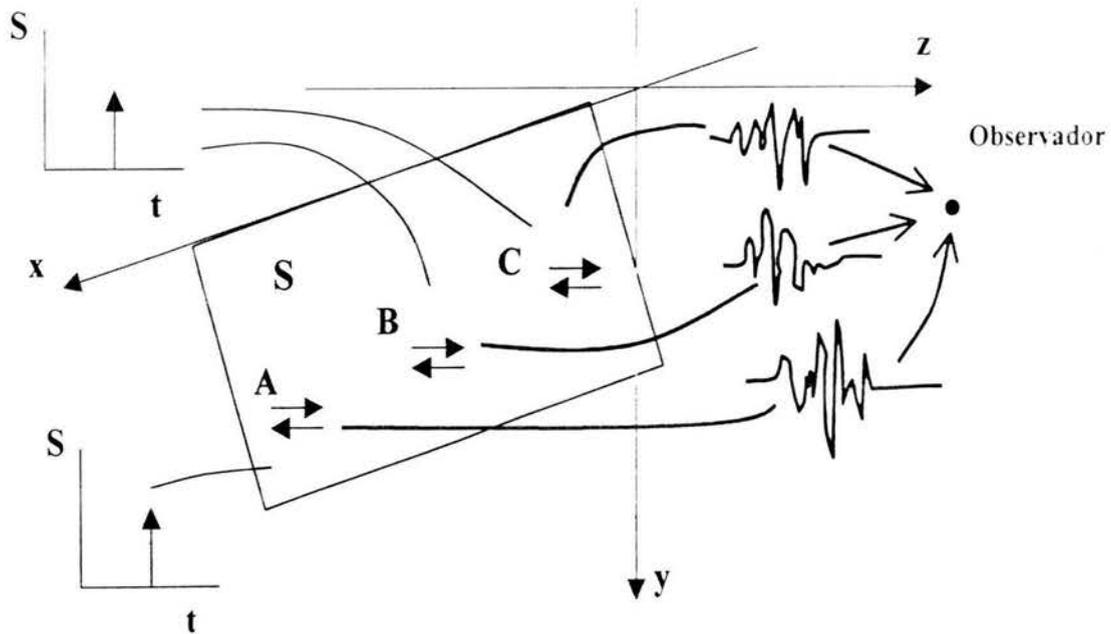


Figura 3.2. Descripción de las funciones de Green. Puntos individuales sobre la superficie de falla, se desplazan con funciones $\delta(t)$ de deslizamiento, como se indica en el gráfico. El movimiento del terreno que ocurre en la posición del observador debido a una de las fuentes puntuales es la función de Green. Se indican las funciones de Green causadas por los puntos A, B y C.

Una vez conocida las contribuciones de cada punto de la falla, estas se suman sobre todos los puntos de la falla para obtener el movimiento total causado por la ruptura de la falla entera. Lo que se debe hacer matemáticamente, es una integral de área sobre toda la superficie de la falla, y el procedimiento de la suma de puntos descrito en el párrafo anterior es el método más simple posible para esta integral. En la práctica, se debe tomar una muestra suficientemente densa de puntos sobre la falla para alcanzar una aproximación apropiada en la integral.

El método de la función de Green, permite expresar al acelerograma generado por un sismo en la forma:

$$a_s(t) = Kf(t) * r(t) * l(t), \quad (3.1)$$

donde K es una constante, $*$ es el producto de convolución, $r(t)$ es un término que incluye las modificaciones que sufre la señal por efectos de trayecto, $l(t)$ incluye los efectos de sitio y $f(t)$ es la aceleración en la fuente sísmica. De acuerdo con el modelo ω^2 de Brune (1970), el espectro de $f(t)$ esta dado por:

$$F(\omega) = \frac{M_o \omega^2}{1 + (\omega^2 / \omega_c^2)}, \quad (3.2)$$

donde M_o es el momento sísmico y ω_c es la llamada frecuencia de esquina, dada por (Brune, 1970):

$$\omega_c = 2\pi 4.9 \times 10^6 \beta (\Delta\sigma / M_o)^{1/3}, \quad (3.3)$$

donde β es la velocidad de propagación de las ondas de cortante en Km/s, M_o está en dinas-cm (1 Dina = 10^{-5} N) y $\Delta\sigma$ es la caída de esfuerzos en bares (1bar = 100 kilopascales). Considerando dos eventos generados en la misma región y registrados en el mismo sitio, con los parámetros del sismo de mayor magnitud dados por: M_{os} , $\Delta\sigma_s$ y ω_{cs} , y con los parámetros del sismo de menor magnitud dados por: M_{oe} , $\Delta\sigma_e$ y ω_{ce} . Suponiendo que el espectro de fuente sigue la ley de Brune, el cociente entre los dos correspondientes espectros $Q(\omega)$ será:

$$Q(\omega) = \frac{M_{os}}{M_{oe}} \frac{1 + (\omega/\omega_{cc})^2}{1 + (\omega/\omega_{cs})^2}. \quad (3.4)$$

Se observa que:

$$Q(0) = \frac{M_{os}}{M_{oe}}, \text{ y } \lim_{\omega \rightarrow \infty} Q(\omega) = \frac{M_{os}}{M_{oe}} \left(\frac{\omega_{cs}}{\omega_{ce}} \right)^2. \quad (3.5)$$

El método de simulación sísmica que se utiliza en este trabajo se debe a Ordaz *et al.* (1995), quienes suponen que la falla es puntual y que emite una sola función de Green en tiempos aleatorios. La única función de Green utilizada es un registro sísmico en un sitio de interés. Los sismos que se simulan con este método tienen un contenido de frecuencias predicho por el modelo de fuente de Brune (Ordaz *et al.*, 1995). El método consiste en construir un sismo de magnitud dada con base en otro de menor magnitud registrado en cierto lugar de interés. Se requiere también conocer, las características de la falla y la velocidad de las ondas de cortante. Al sismo registrado se le denomina función de Green empírica $a_e(t)$. Las características de la falla que se requieren son el momento sísmico y la caída de esfuerzos. Al momento sísmico de la falla que produce la función de Green se le denomina M_{oe} y a su caída de esfuerzos $\Delta\sigma_e$, al momento sísmico de la falla que produce la señal por simular M_{os} y a su caída de esfuerzos $\Delta\sigma_s$.

Considerando que el evento que produce el sismo por simular se genera en una superficie de falla dividida en N celdas concentradas en un punto, cada una de las cuales produce al tiempo τ_i un sismo $\xi a_e(t)$, el sismo simulado resulta de la superposición escalada del sismo registrado y se expresa como:

$$a_s(t) = \xi \sum_{i=1}^N a_e(t - \tau_i), \quad (3.6)$$

donde las τ_i son variables aleatorias, independientes e igualmente distribuidas con función de densidad de probabilidad (fdp) $p(t)$. Los coeficientes ξ y N están dados de forma tal que el cociente de espectros de la señal registrada a la señal simulada satisfaga las condiciones

límite del cociente espectral dado por la ec. (3.5). Tomando la transformada de Fourier de la ec. (3.6) se obtiene:

$$F\{a_s(t)\} = A_s(\omega) = \xi A_e(\omega) \sum_{j=1}^N \exp(-i\omega\tau_j). \quad (3.7)$$

Utilizando los resultados del Apéndice A, se tiene que $A_s(\omega)$ satisface:

$$E\left[|A_s(\omega)|^2\right] = \xi^2 |A_e(\omega)|^2 \left\{ N + (N^2 - N) |P(\omega)|^2 \right\}, \quad (3.8)$$

donde $P(\omega)$, es la transformada de Fourier de $p(t)$. El cociente entre los espectros de amplitudes de la señal simulada a la señal registrada se puede estimar entonces con:

$$R(\omega) = \xi \sqrt{N + (N^2 - N) |P(\omega)|^2}. \quad (3.9)$$

Como $R(0) = \xi N$, ya que $P(0) = 1$, y como $\lim_{\omega \rightarrow \infty} P(\omega) = 0$, se deduce que para que se satisfaga (3.5), es necesario que $\xi N = M_{os}/M_{oe}$ y que $\xi N^{1/2} = (M_{os}/M_{oe})^{1/3} (\Delta\sigma_s/\Delta\sigma_e)^{2/3}$, de donde:

$$N = \left(\frac{M_{oe}}{M_{os}} \right)^{4/3} \left(\frac{\Delta\sigma_e}{\Delta\sigma_s} \right)^{-4/3}, \quad (3.10)$$

$$\xi = \left(\frac{M_{oe}}{M_{os}} \right)^{-1/3} \left(\frac{\Delta\sigma_e}{\Delta\sigma_s} \right)^{4/3} \quad (3.11)$$

Para la falla que produce la función de Green empírica la frecuencia de esquina es ω_{ce} y para la falla que produce el sismo por simular la frecuencia de esquina es ω_{cs} . De acuerdo con Ordaz *et al.* (1995), para diseñar un esquema de funciones de Green empíricas tal que, en promedio y para todas las frecuencias, se obtengan temblores con un contenido espectral congruente con el modelo de escalamiento ω^2 , es necesario que $R(\omega) = Q(\omega)$, para toda ω ,

para lo cual además de satisfacerse las ecs. (3.10) y (3.11), es necesario que se satisfaga la siguiente relación:

$$|P(\omega)| = \frac{\sqrt{1 + a(\omega / \omega_{ce})^2}}{1 + (\omega / \omega_{ce})^2}, \text{ con } a = \frac{2\omega_{ce}^2}{\omega_{ce}^2 + \omega_{cs}^2}. \quad (3.12)$$

Si además se impone la condición de que $P(\omega)$ sea real para evitar cambios de fase en el proceso de suma, resulta que el esquema de suma en que los tiempos de ruptura de las celdas elementales tienen una fdp que es la antitransformada de Fourier de la ec. (3.12):

$$p(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{1 + a(\omega / \omega_{ce})^2}}{1 + (\omega / \omega_{ce})^2} e^{i\omega t} d\omega. \quad (3.13)$$

3.2 Características estadísticas del método de simulación sísmica utilizado

La media de la simulación está dada por:

$$E[a_s(t)] = \xi N \int_{-\infty}^{\infty} a_e(t - \tau) p(\tau) d\tau, \quad (3.14)$$

donde se aprecia que la media de la simulación no es cero, puesto que $p(t)$ es una función picuda que tiende a infinito en $t = 0$, y aproximando $p(t)$ con un delta de Dirac (ver Apéndice C), la media que resulta es $\xi N a_e(t)$, cuyo valor no solo no es cero sino que depende de t . A pesar de este resultado, comúnmente se simulan sismos utilizando la hipótesis de media cero como lo hacen diversos autores (Kimura, 1994 y Hurtado, 1998).

La función de correlación $R(t_1, t_2) = E[a_s(t_1)a_s(t_2)]$, está dada por:

$$E[a_s(t_1)a_s(t_2)] = \frac{\sigma^2}{\pi} N \int_{-\infty}^{\infty} a_s(t_1 - \tau)a_s(t_2 - \tau)p(\tau)d\tau + \frac{\sigma^2}{\pi} N(N-1)E[a_s(t_1)]E[a_s(t_2)]. \quad (3.15)$$

Puesto que la condición que establece que un proceso estocástico sea evolutivo, es el hecho de que sus estadísticas dependan del tiempo, en las últimas dos ecuaciones se aprecia que el método de simulación sísmica dado por (3.6) produce esta clase de procesos estocásticos, (Soong y Grigoriu, 1993). Utilizando el marco teórico de Johnson y Kotz (1972), los resultados de un estudio estadístico llevado a cabo sobre una muestra de 1000 sismos y utilizando una prueba de Kolmogorov para un 0.05 de nivel de significancia se confirmó que las señales simuladas corresponden a un proceso estocástico Gaussiano no estacionario. Este resultado era de esperarse por el teorema central del límite (Papoulis, 1984), el cual establece que dado un conjunto de variables aleatorias independientes x_i , con

$$E[x_i] = \eta_i \quad \text{y} \quad \sigma_x^2 = \sigma_i^2,$$

entonces la suma $x = \sum_{i=1}^N x_i$, que tiene por media y varianza:

$$E[x] = \eta = \sum_{i=1}^N \eta_i \quad \text{y} \quad \sigma^2 = \sum_{i=1}^N \sigma_i^2,$$

y por fdp a:

$$f(x) = f_1(x) * f_2(x) * \dots * f_n(x),$$

satisface que bajo ciertas condiciones generales, $f(x)$ se aproxima a una normal conforme n aumenta:

$$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\eta)^2}{2\sigma^2}\right).$$

La densidad espectral de potencia evolutiva (DEPE) de los sismos, se calculó utilizando el marco teórico de la función de Green empírica, partiendo de la transformada de Fourier de la ec. (3.6), definiendo: $\tilde{A}_s(\omega) = F\{a_s(t) - E[a_s(t)]\}$, y tomando la esperanza de la norma cuadrada de la ecuación anterior, se sigue del apéndice A que:

$$E \left[|A_s(\omega)|^2 \right] = \xi^2 |A_e(\omega)|^2 \left[N + (N^2 - N) |P(\omega)|^2 \right],$$

y (3.16)

$$E \left[|\tilde{A}_s(\omega)|^2 \right] = \xi^2 |A_e(\omega)|^2 \left[N - N |P(\omega)|^2 \right].$$

Si la transformada de Fourier de $a_s(t)$, se aplica tomando ventanas temporales sobre la señal simulada, se puede demostrar que esta ecuación depende del tiempo en la forma:

$$E \left[|A_s(\omega, t)|^2 \right] = \xi^2 |A_e(\omega, t)|^2 \left[N + (N^2 - N) |P(\omega)|^2 \right],$$

y (3.17)

$$E \left[|\tilde{A}_s(\omega, t)|^2 \right] = \xi^2 |A_e(\omega, t)|^2 \left[N - N |P(\omega)|^2 \right].$$

La dependencia temporal se discute con detalle en el Apéndice B. La DEPE se calcula usando, (Clough y Penzien, 1975):

$$S(\omega, t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E \left[|A_s(\omega, \tau)|^2 \right]}{2\pi T},$$

y (3.18)

$$S_c(\omega, t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E \left[|\tilde{A}_s(\omega, t)|^2 \right]}{2\pi T},$$

y dado que la señal es finita, la ec. (3.18) se aproxima como:

$$S^{te}(\omega, t) \approx \frac{E \left[|A_s(\omega, t)|^2 \right]}{2\pi T},$$

y (3.19)

$$S_c^{te}(\omega, t) \approx \frac{E \left[|\tilde{A}_s(\omega, t)|^2 \right]}{2\pi T}.$$

El superíndice “te” de S indica que la DEPE se calcula a través de la teoría de la función de Green empírica y el subíndice “c” indica que se trata de señales con media cero.

3.3 Media y densidad espectral de potencia de un proceso estocástico evolutivo generado usando una función de Green empírica dada

Las Figuras 3.3 y 3.4, muestran las características evolutivas de la media, ec. (3.14), y de la DEPE, ec. (3.19), del proceso estocástico generado usando la función de Green empírica del sismo del 25 de abril de 1989 de Guerrero registrado en el sitio SCT, con $M_{oe} = 2.5 \cdot 10^{26}$ dinas-cm (Magnitud sísmica de 6.9), $\Delta\sigma_e = 150$ bar, $M_{os} = 1.5 \cdot 10^{28}$ dinas-cm, $\Delta\sigma_s = 150$ bar, y con una velocidad de cortante de $\beta = 0.06$ Km/s. Este sismo en particular fue seleccionado, debido a que presenta las características morfológicas de un temblor grande (se aprecia claramente la llegada de la onda S), y es de magnitud 6.9, que permite simular sismos de magnitud mayor o igual a 7, con el método de simulación que se decidió utilizar. Por otro lado, este sismo fue generado por la fuente sísmica de mayor peligro para las estructuras del Valle de México: la brecha de Guerrero, lo que permite estudiar el estado límite de colapso incipiente de la estructura considerada.

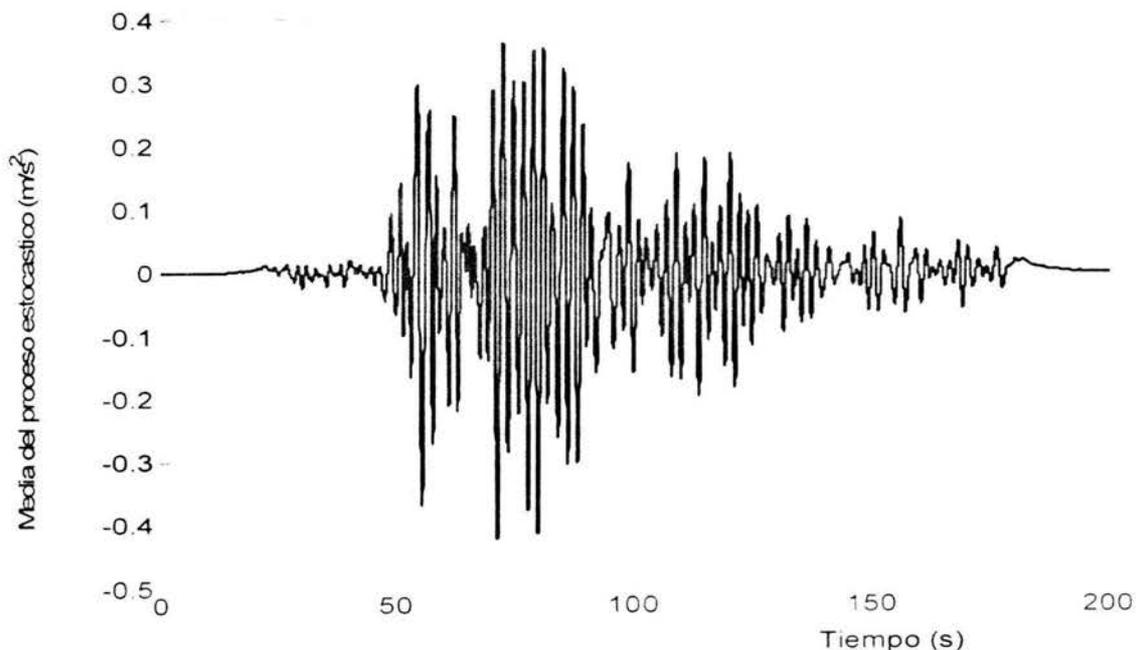


Figura 3.3. Media evolutiva, ec. (3.14).

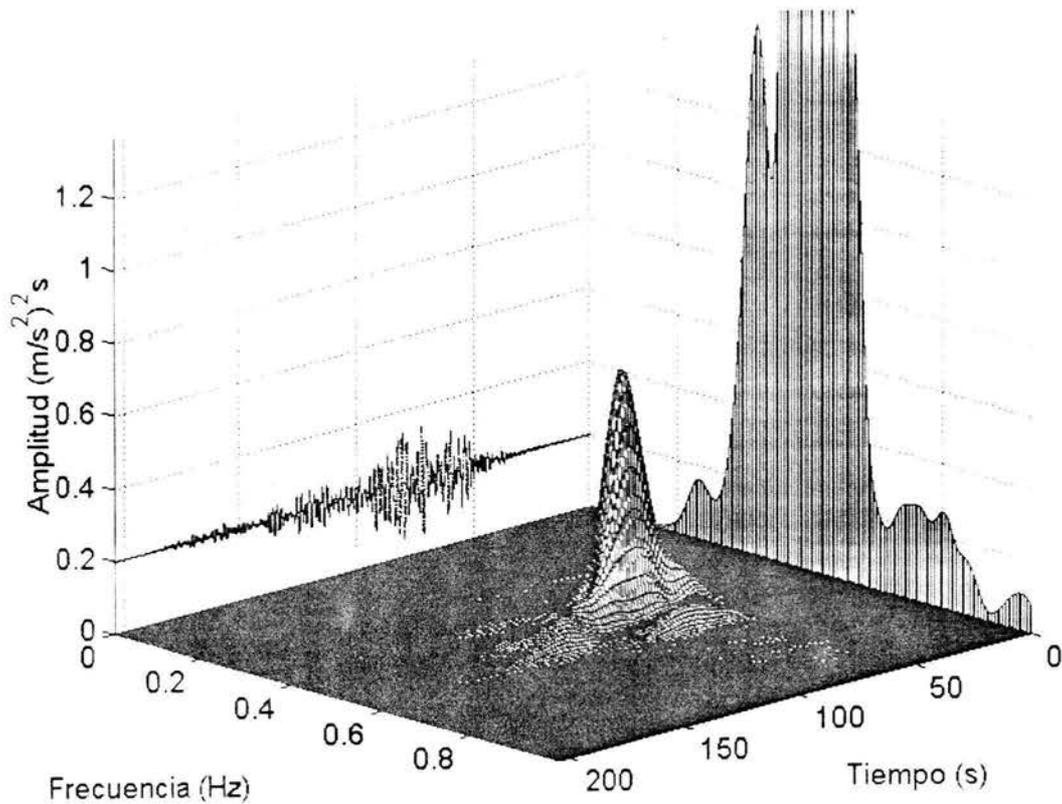


Figura 3.4. Densidad espectral de potencia evolutiva, ec. (3.19).

3.4 Cálculo de la media y de la densidad espectral de potencia evolutivas del proceso estocástico estudiado usando el método de Monte Carlo

Con el fin de comparar la media y la DEPE del proceso estocástico que arroja la teoría de la función de Green empírica, se simularon 1000 señales usando la ec. (3.6), para obtener la media y la DEPE utilizando el método de Monte Carlo. Las mil señales simuladas se denotan: $a_{si}(t)$, $i = 1, \dots, 1000$, y con ellas la media se calcula:

$$\mu_s(t) = \frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} a_{si}(t). \quad (3.20)$$

En la Figura 3.5, se compara la media calculada con la ec. (3.14) con la calculada con la ec. (3.20).

Para calcular la DEPE utilizando el método de Monte Carlo, se obtiene de cada uno de los sismos simulados la norma cuadrada de la transformada de Fourier de la señal: $|A_{si}(\omega, t)|^2$ $i = 1, \dots, 1000$. La DEPE correspondiente se calcula promediando en el ensamble de 1000 señales estos valores:

$$S^{ex}(\omega, t) \approx \frac{1}{2\pi T 1000} \sum_{i=1}^{1000} |A_{si}(\omega, t)|^2. \quad (3.21)$$

El superíndice *ex* de S, indica que la DEPE se calculó a través del promedio del total de simulaciones. La *T* que se utiliza es un coeficiente que conserva la potencia de la señal. La DEPE centrada se obtiene:

$$S_c^{ex}(\omega, t) \approx \frac{1}{2\pi T 1000} \sum_{i=1}^{1000} |\tilde{A}_{si}(\omega, t)|^2. \quad (3.22)$$

En la Figura 3.6, se presenta la diferencia entre las DEPES calculadas con las ecs. (3.19) y (3.22), la diferencia que resulta pico a pico es menor del 10%.

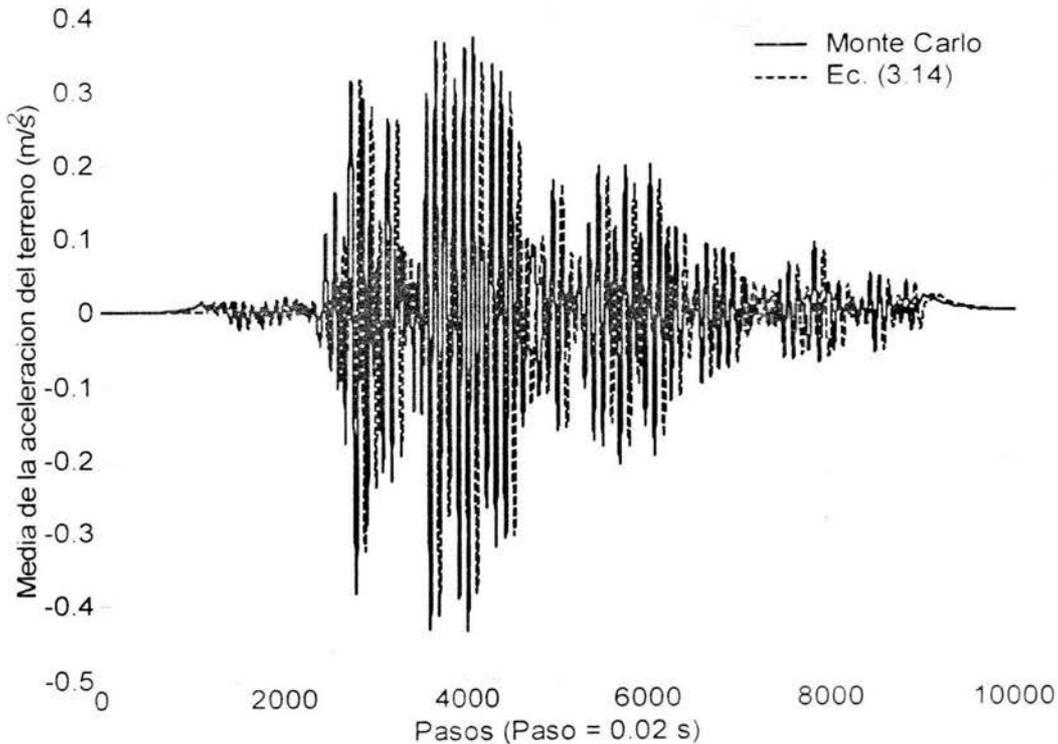


Figura 3.5 Comparación de las medias, en línea discontinua la calculada con la ec. (3.14) y en línea continua la calculada con la ec. (3.20).

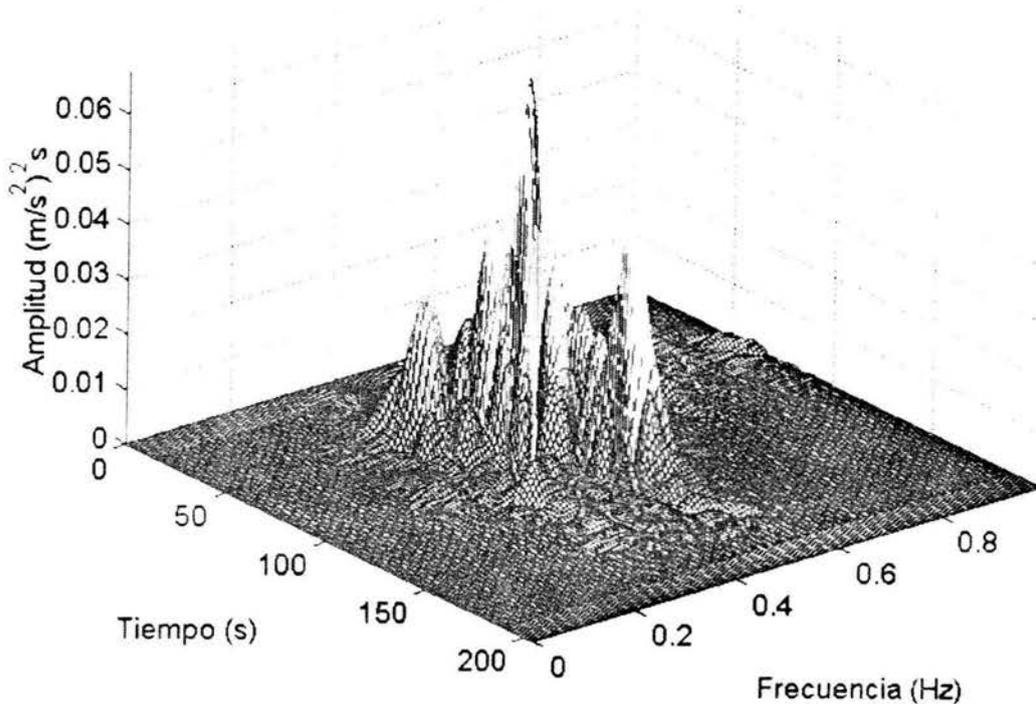


Figura 3.6 Diferencia de las DEPES calculadas con las ecs. (3.19) y (3.22).

3.5 Cálculo del número de simulaciones necesarias para que las estadísticas estimadas usando Monte Carlo sean significativas

Para determinar el número de simulaciones necesarias para estimar la media y la DEPE se siguieron dos caminos; en el primero, se buscó que la media del ensemble en cada instante del tiempo como función del número de sismos fuera prácticamente constante, y se buscó también que su coeficiente de variación fuera pequeño, de forma tal que al incrementar el número de sismos considerados la media del ensemble no tuviera variaciones importantes. Fue necesario considerar distintos tiempos puesto que cada una de las señales del ensemble que se buscaba obtener, era una realización de un proceso estocástico evolutivo. En la Figura 3.7 se presentan curvas de distintos colores, cada color representa la media de las señales consideradas del ensemble para un tiempo dado, la media se calcula en función del número de sismos del ensemble. Lo mismo se hizo con los picos de la DEPES. En la Figura 3.7, se muestra la dependencia de las medias para distinto número de sismos; se aprecia la estabilización de las medias alrededor de un valor conforme aumenta el número de sismos.

3.7. se muestra la dependencia de las medias para distinto número de sismos: se aprecia la estabilización de las medias alrededor de un valor conforme aumenta el número de sismos.

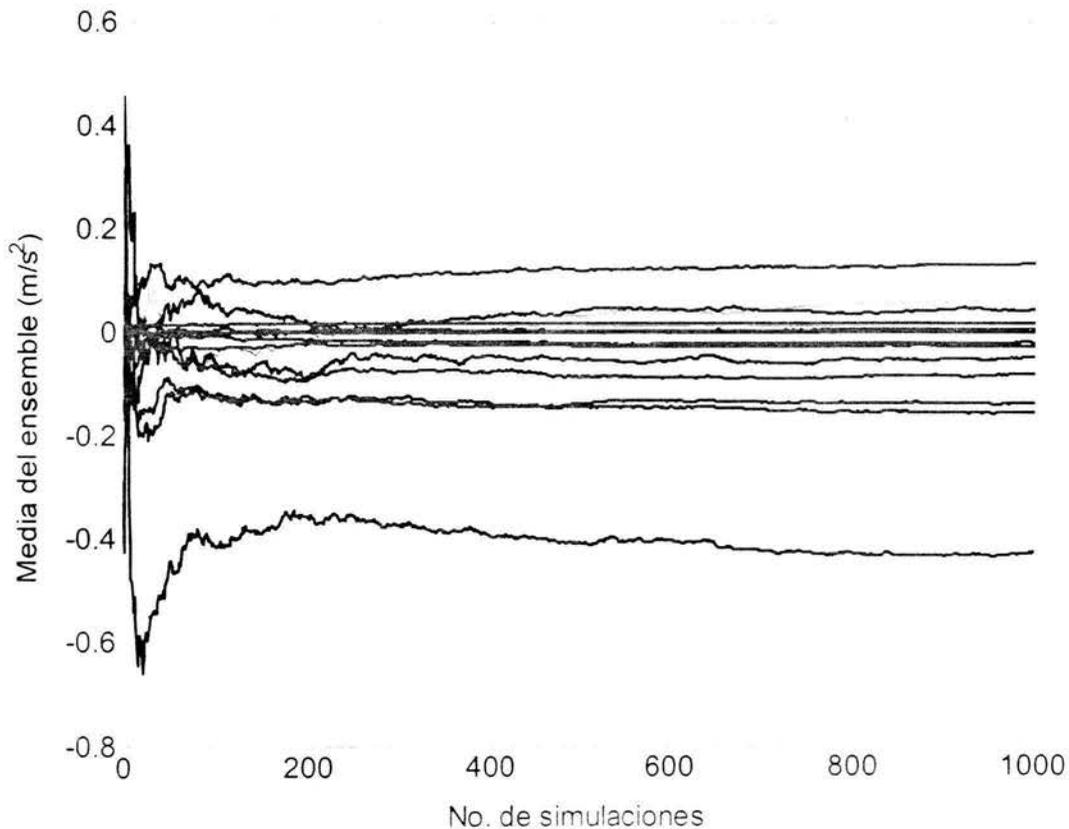


Figura 3.7. Comportamiento de la media en función del número de simulaciones, cada línea continua corresponde a un valor de la media del proceso estocástico para un tiempo dado.

El segundo camino que se buscó para determinar si el número de elementos del ensemble era estadísticamente significativo fue utilizando la desigualdad de Tchebycheff (Papoulis, 1984):

$$P\{|X - E[X]| \geq \varepsilon\} \leq \frac{E\left[|X - E[X]|^2\right]}{\varepsilon^2}, \quad (3.23)$$

donde $P\{A\}$ es la probabilidad del evento A . En el caso que nos compete, se aplica la desigualdad de Tchebycheff al promedio de la respuesta $a_s(t)$ para un t dado, y puesto que $a_s(t)$ para un t dado es normal, también lo es su promedio. El promedio es el mejor estimador de la media del proceso estocástico para ese tiempo $\eta(t)$, la ec. (3.20) se reduce a:

$$P \left\{ \left| \bar{a}_s(t_i) - \eta \right| \geq \varepsilon^2 \right\} \leq \frac{\sigma^2}{n \varepsilon^2}, \quad (3.24)$$

la n en el denominador aparece puesto que la varianza del promedio muestral es igual a la varianza de la variable aleatoria considerada dividida entre el número de elementos de la muestra. Dividiendo la desigualdad entre $\sigma/n^{1/2}$, con el fin de obtener una variable aleatoria estándar se obtiene:

$$P \left\{ \left| \frac{\bar{a}_s(t_i) - \eta}{\sigma / \sqrt{n}} \right| \geq \frac{\varepsilon^2}{\sigma / \sqrt{n}} = \varepsilon_1^2 \right\} \leq \frac{\sigma^2}{n \varepsilon_1^2}, \quad (3.25)$$

que se reduce a:

$$P \left\{ z \geq \varepsilon_1^2 \right\} \leq \frac{\sigma^2}{n \varepsilon_1^2}, \quad (3.26)$$

y considerando un nivel de significancia de $\gamma = 0.001$ ($z_\gamma = 4$), se determina el caso más crítico para la n :

$$\gamma = P \left\{ z \geq z_\gamma \right\} \leq \frac{\sigma^2}{n^* z_\gamma^2},$$

de donde:

$$n^* = \frac{\sigma^2}{\gamma z_\gamma^2}. \quad (3.27)$$

De acuerdo con los resultados obtenidos para el valor máximo de la varianza del ensamble $\sigma^2 = 0.4005 \text{ (m/s}^2\text{)}^2$, y sustituyendo los datos en la ec. (3.27) se obtiene $n^* = 1000$.

CAPÍTULO 4

LINEALIZACIÓN EQUIVALENTE NO GAUSSIANA

4.1 Antecedentes de la linealización equivalente

El método de la linealización equivalente permite la estimación de los momentos estadísticos de primer y segundo orden del vector de respuesta de estructuras determinísticas no lineales sujetas a vibración aleatoria. Este método no es el único disponible para este propósito; están, por ejemplo, el método de perturbación y el de promedio estocástico. Sin embargo estos métodos son aplicables a sistemas débilmente no lineales, por lo que la linealización equivalente tiene clara ventaja (Hurtado, 1998). El método de la linealización equivalente tiene sus raíces en el trabajo de Krylov y Bogoliubov (1943), de linealización determinista, y aparece después en una formulación probabilista en los artículos de Caughey (1963), y Iwan y Yang (1972). Barrón (2000), sin embargo señala, que el método de Krylov-Bogoliubov es una técnica distinta de la linealización equivalente, ya que este método supone que la respuesta tiene cambios de signo en el desplazamiento y en la velocidad en cada ciclo, que no es el caso de sistemas inelásticos cuyo comportamiento presenta el conocido comportamiento de deriva bajo cargas aleatorias (Lutes y Sarkani, 1997). El método de linealización equivalente reemplaza el sistema no lineal por un sistema lineal cuyos coeficientes se obtienen de minimizar la esperanza de la media cuadrática del “error”, y no utiliza ningún otro tipo de hipótesis sobre

la respuesta. La solución así obtenida, es la mejor aproximación lineal a la respuesta del sistema no lineal.

Un gran impulso en las aplicaciones prácticas del método se debe a un artículo de Atalik y Utku (1996), que demuestran que la suposición de Gaussianidad del comportamiento de las variables de estado simplifica el cálculo de los coeficientes de linealización. Un artículo posterior de Faravelli *et al* (1988), demuestra que tal simplificación sólo es posible bajo tal hipótesis. Gran parte del interés recibido por el método para aplicaciones prácticas se debe a la introducción de modelos de histéresis suaves debidos a Bouc (1967), y a su desarrollo posterior debido a Wen (1976), a Baber y Wen (1979), a Casciati (1987) y a otros.

Los modelos de histéresis suaves tienen la ventaja de que permiten el cálculo de los coeficientes linealizadores en forma explícita, lo cual es difícil de lograr en osciladores con modelos de histéresis elastoplástico, bilineal, orientado al origen, etc. Los últimos modelos han sido estudiados por Kimura *et al.*(1994), entre otros.

En el método de la linealización equivalente es necesario el conocimiento a priori de la fdp multivariada de la respuesta del sistema de 1GDL. Puesto que no se cuenta con esta información, es necesario realizar simulaciones de Monte Carlo para poder estimarla de antemano. Los trabajos de Kimura *et al.* (1994) y de Silva (2003), contienen los avances más recientes en las técnicas de construir una fdp multivariada no Gaussiana de la respuesta.

En todos los métodos que se mencionan anteriormente, el método de simulación sísmica que se utiliza consiste en filtrar ruido blanco como se menciona en la introducción. En este trabajo se utiliza como método de simulación sísmica el método de la función de Green empírica; esta técnica, no ha sido mencionada en la literatura dentro del método de la linealización equivalente. Además se utiliza una generalización del método de Kimura *et al.* (1994), para caracterizar la fdp multivariada de la respuesta del sistema de 1GDL equivalente.

4.2 Linealización equivalente

Una vez determinado el proceso estocástico que caracteriza a los sismos provenientes de la brecha de Guerrero, se procede a determinar las estadísticas de la respuesta del sistema de 1GDL, ec. (2.12), sujeto a esta excitación. Para obtener las matrices del primer y del segundo estadístico de la respuesta, se utiliza el método de la linealización equivalente, el cual consiste en obtener un sistema lineal estocásticamente equivalente al no lineal, encontrando:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + \alpha kx(t) + (1-\alpha)kz(t) &= -m\dot{a}(t), \\ \dot{z}(t) &= a_0 + a_2(\dot{x} - E[\dot{x}]) + a_3(z - E[z]). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Los coeficientes a_0 , a_2 y a_3 , se obtienen de la minimización del error medio cuadrático:

$$E[\varepsilon^2] \rightarrow \text{mínimo}. \quad (4.2)$$

donde: $\varepsilon = H(\dot{x}, z) - a_0 + a_2(\dot{x} - E[\dot{x}]) + a_3(z - E[z])$ y H está dado por la ec. (2.13). Los coeficientes que cumplen esta condición satisfacen:

$$\frac{\partial}{\partial a_0} E[\varepsilon^2] = \frac{\partial}{\partial a_2} E[\varepsilon^2] = \frac{\partial}{\partial a_3} E[\varepsilon^2] = 0, \quad (4.3)$$

esto es:

$$\begin{aligned} a_0 &= E[\dot{z}], \\ a_2 &= \frac{E[(z - E[z])^2] E[(\dot{x} - E[\dot{x}])\dot{z}] - E[(z - E[z])(\dot{x} - E[\dot{x}])] E[(z - E[z])\dot{z}]}{E[(\dot{x} - E[\dot{x}])^2] E[(z - E[z])^2] - E[(\dot{x} - E[\dot{x}])(z - E[z])]^2}, \\ a_3 &= \frac{E[(\dot{x} - E[\dot{x}])^2] E[(z - E[z])\dot{z}] - E[(z - E[z])(\dot{x} - E[\dot{x}])] E[(\dot{x} - E[\dot{x}])\dot{z}]}{E[(\dot{x} - E[\dot{x}])^2] E[(z - E[z])^2] - E[(\dot{x} - E[\dot{x}])(z - E[z])]^2}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Los coeficientes linealizadores se calculan como se indica en el Apéndice C. Dividiendo el primer renglón de la ec. (4.1) por la masa y definiendo:

$$\omega = \sqrt{k/m}, \quad \zeta = c/2m\omega, \quad f(t) = -a(t), \quad (4.5)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -\alpha\omega^2 & -2\zeta\omega & -(1-\alpha)\omega^2 \\ 0 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ z \end{bmatrix},$$

la ecuación (4.1) se reduce a:

$$\dot{X} = AX + \begin{bmatrix} 0 \\ f \\ a_0 - a_2 E[\dot{x}] - a_3 E[z] \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

Para obtener la ecuación diferencial de la media se toma la esperanza de la ec. (4.6), esto es:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} E[x] \\ E[\dot{x}] \\ E[z] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\alpha\omega^2 & -2\zeta\omega & -(1-\alpha)\omega^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E[x] \\ E[\dot{x}] \\ E[z] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ E[f] \\ a_0 \end{bmatrix}, \quad (4.7)$$

Restando la ec. (4.7) a la (4.6) se obtiene:

$$\frac{d\tilde{X}}{dt} = A\tilde{X} + G\tilde{f}, \quad (4.8)$$

donde: $G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\tilde{X} = X - E[X]$, y $\tilde{f} = f - E[f]$.

Definiendo $\Gamma_x(t) = E[\tilde{X}(t)\tilde{X}^T(t)]$ y $\Gamma_f(t) = E[\tilde{f}(t)\tilde{f}^T(\tau)]$, y siguiendo el procedimiento de Soong y Grigoriu (1993), se determina la ecuación para la matriz de covarianza de la respuesta $\Gamma_x(t)$, quedando:

$$\frac{d}{dt}\Gamma_x(t) = A(t)\Gamma_x(t) + \Gamma_x(t)A^T(t) + D(t) + D^T(t), \quad (4.9)$$

donde:

$$D(t) = G \int_0^t E[\tilde{f}(t)\tilde{f}^T(\tau)] G^T \Phi^T(t, \tau) d\tau. \quad (4.10)$$

Si A es constante, Φ es:

$$\Phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}. \quad (4.11)$$

La matriz A , depende de la respuesta, según la ec. (4.5) y por lo tanto es función del tiempo.

El acoplamiento de las ecs. (4.7) y (4.9) está dado por los coeficientes linealizadores. El cálculo de estos coeficientes requiere del conocimiento previo de la fdp conjunta de la respuesta, la cual depende de la amplitud de la misma. Para casos lineales o con ductilidades del orden de uno, se supuso que la fdp era Gaussiana multivariada. Para el caso de respuesta no lineal el procedimiento de cálculo desarrollado en este trabajo es una ampliación del método de Kimura *et al.* (1994), y considera que la respuesta tiene media no cero.

El método de Kimura *et al.*, supone que la respuesta x y dx/dt , son variables aleatorias con fdp Gaussiana bivariada $\varphi(x, dx/dt)$, con medias y correlación distintas de cero, y la variable de estado z es una variable aleatoria con fdp dada por:

$$f(z) = \varphi(z)rect(z) + \delta(z - x_1)S^- + \delta(z + x_1)S^-, \quad (4.12)$$

donde:
$$S^+ = \int_{x_1}^{\infty} \varphi(z) dz, \quad S^- = \int_{-\infty}^{-x_1} \varphi(z) dz, \quad \varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z} e^{-\frac{(z-mz)^2}{2\sigma_z^2}},$$
 (4.13)

y
$$\text{rect}(z) = U(z+x_y) - U(z-x_y), \quad \text{con } U(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

La fdp conjunta bivariada para x y z es:

$$f(x, z) = \varphi(x, z)\text{rect}(z) + \delta(z - x_y) \int_{x_1}^{\infty} \varphi(x, z) dz + \delta(z + x_y) \int_{-\infty}^{-x_1} \varphi(x, z) dz. \quad (4.14)$$

La fdp conjunta bivariada para \dot{x}/dt y z es:

$$f(\dot{x}, z) = \varphi(\dot{x}, z)\text{rect}(z) + \delta(z - x_y) \int_{x_1}^{\infty} \varphi(\dot{x}, z) dz + \delta(z + x_y) \int_{-\infty}^{-x_1} \varphi(\dot{x}, z) dz. \quad (4.15)$$

Para determinar los parámetros que caracterizan a las funciones de densidad de probabilidad de la respuesta es necesario invertir el siguiente sistema de ecuaciones:

$$E[x] = mx,$$

$$E[\dot{x}] = m\dot{x},$$

$$E[z] = -\sigma_z^2 \varphi_z(x_y) + \sigma_z^2 \varphi_z(-x_y) + mz \int_{-x_y}^{x_1} \varphi(z) dz + x_1 S^- - x_y S^+,$$

$$E[(x - E[x])^2] = \sigma_x^2,$$

$$E[(\dot{x} - E[\dot{x}])^2] = \sigma_{\dot{x}}^2, \quad (4.16)$$

$$E[(z - mz)^2] = -\sigma_z^2 (x_1 - mz) \varphi_z(x_y) - \sigma_z^2 (x_y + mz) \varphi_z(-x_y) + \sigma_z^2 \int_{-x_1}^{x_1} \varphi(z) dz \\ + (x_1 - mz)^2 \int_{x_1}^{\infty} \varphi(z) dz + (x_y + mz)^2 \int_{-\infty}^{-x_1} \varphi(z) dz$$

$$E[(x - E[x])(\dot{x} - E[\dot{x}])] = \sigma_{x\dot{x}},$$

$$E[(\dot{x} - E[\dot{x}])(z - E[z])] = \sigma_{\dot{x}z} \int_{-x_1}^{x_1} \varphi(z) dz,$$

$$E[(x - E[x])(z - E[z])] = \sigma_{xz} \int_{-x_1}^{x_1} \varphi(z) dz.$$

La entrada de las ecs. (4.7) y (4.9) se muestra en las Figuras 3.3 y 4.1, respectivamente, en el primer caso se tiene $E[f]$ y en el segundo $E[\tilde{f}(t)\tilde{f}(\tau)]$ que es la transformada de Fourier de S^e ó de S^e_c , ec. (3.19).

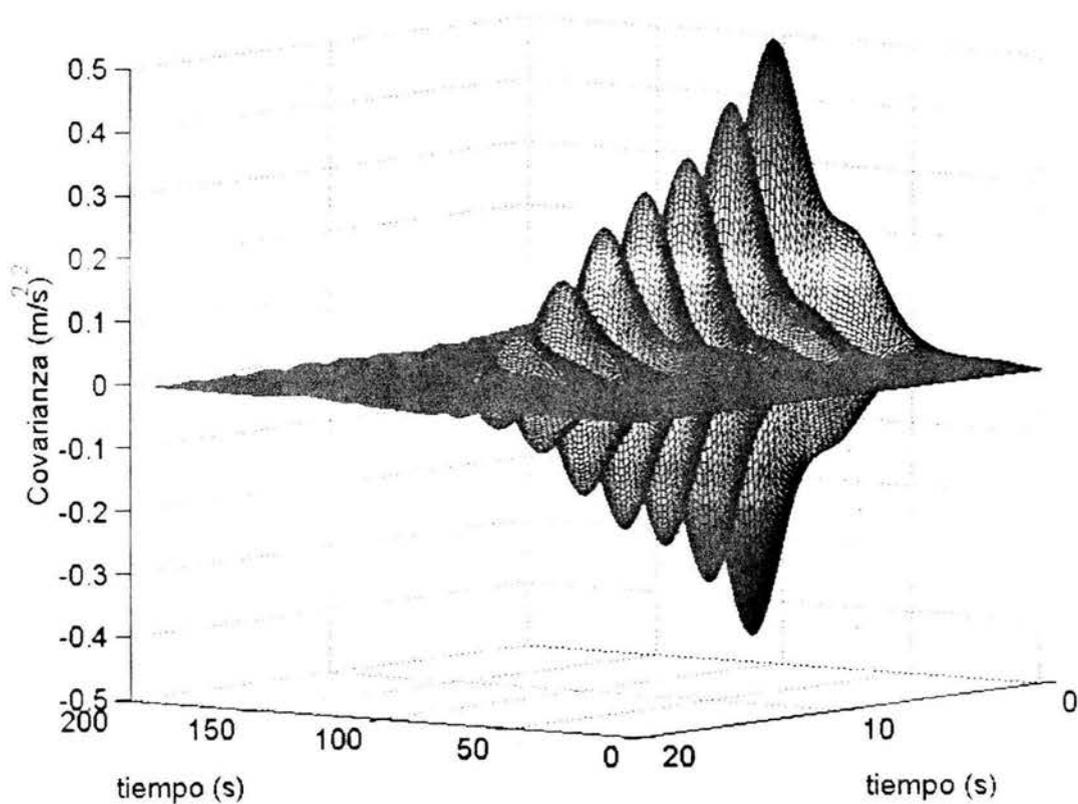


Figura 4.1. La matriz de covarianza no estacionaria para el ensamble sísmico simulado con la ec. (4.9).

4.3 Solución numérica de las ecuaciones diferenciales matriciales acopladas de la media y covarianza

Las ecs. (4.7) y (4.9) son desconocidas a priori puesto que los elementos a_0 , a_2 y a_3 dependen de la respuesta, como lo indican las ecs. (4.4). Para resolver los sistemas acoplados, se consideró al tiempo como una variable discreta en los enteros y consiste de una serie creciente de N puntos equiespaciados que comienza de cero; la separación entre dos puntos consecutivos está dada por el tiempo de muestreo Δt de la función de Green empírica. Para encontrar la solución de las ecuaciones, se aprovechó la forma de la matriz de transición Φ en el caso en que A es constante, como se observa en la ecuación (4.11), por lo que se separó a los N puntos del tiempo en conjuntos de puntos consecutivos de igual tamaño a los que se denominó ventanas de solución, donde A se supuso constante. Con el fin de hacer que la transición de la respuesta entre las ventanas de solución tuviera mayor orden de continuidad que el que corresponde a la derivada y al desplazamiento de la respuesta, las ventanas de solución se traslapan, como se muestra en la Figura 4.2. Las ventanas de solución se separan en las así denominadas ventanas de tiempo y ventanas de traslape. Las ventanas de tiempo tienen la propiedad de que son conjuntos disjuntos y su unión contiene a todos los N puntos del tiempo. Al número de ventanas temporales se le denominó N_v y al número de puntos que tiene cada una n , el extremo izquierdo de cada ventana temporal se localiza en los puntos t_{pi} . Las ventanas de traslape son de longitud fija y tienen tr puntos (ver Figura 4.2). Partiendo de una A arbitraria, se resolvieron (4.7) y (4.9) iterativamente en cada ventana de solución hasta que los coeficientes de A y a_0 tuvieron variaciones menores que un valor preestablecido. Se resuelven (4.7) y (4.9) iterativamente en cada intervalo de solución, actualizando A y a_0 en cada iteración según el valor de la respuesta a la mitad de la ventana de traslape, hasta que la variación de los coeficientes de A son menores que una tolerancia dada. Para el primer intervalo de solución se toman valores arbitrarios para a_0 , a_2 y a_3 . El valor inicial de los coeficientes en los siguientes intervalos de solución se toma del intervalo de solución anterior. El esquema de integración de la ecuación se representa en la Figura 4.2.

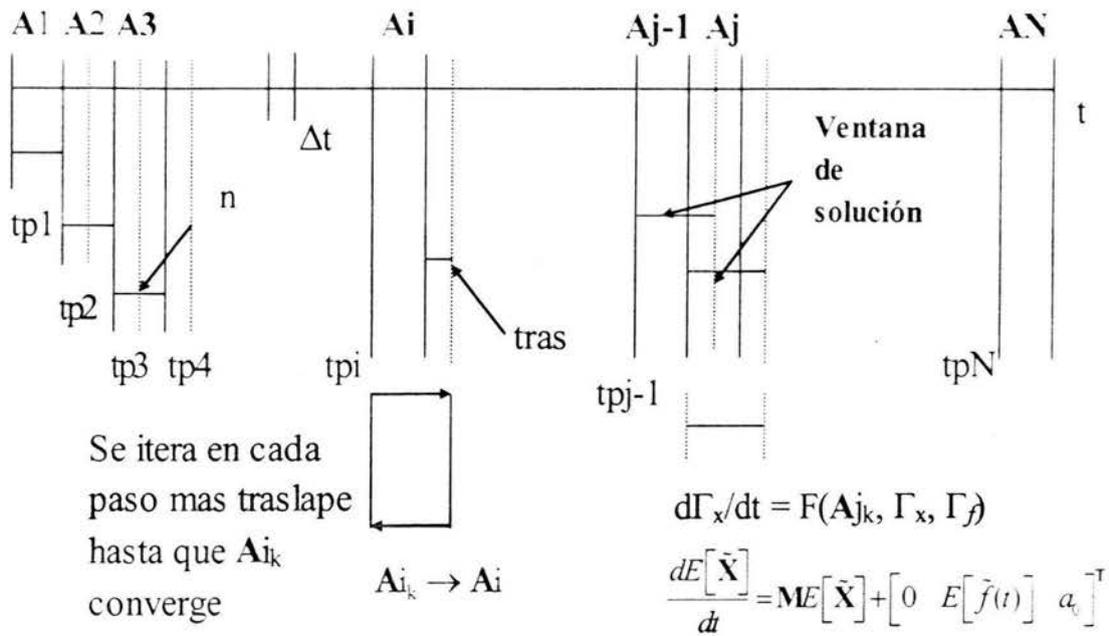


Figura 4.2. Esquema de integración de las ecs. (4.7) y (4.9).

4.4 Media y varianza utilizando Monte Carlo

Con el fin de comparar las medias y varianzas que se obtuvieron con el método de la linealización equivalente, se obtienen con el método de Monte Carlo. Las mil señales que se calcularon \$a_{si}(t), i = 1, \dots, 1000\$, se usan para excitar la ecuación (2.12), y se obtienen mil respuestas \$x_i, dx_i/dt\$ y \$z_i\$, que son promediadas, para obtener la media en la forma:

$$\bar{u}(t) = \frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} u_i(t) \quad (4.17)$$

donde \$u\$ es cualquiera de \$x, dx/dt\$ y \$z\$, y para obtener la varianza se utiliza:

$$\text{var}[u(t)] = \frac{1}{1000-1} \sum_{i=1}^{1000} [u_i(t) - \bar{u}(t)]^2 \quad (4.18)$$

4.5 Media y varianza utilizando linealización equivalente

Con el fin de obtener la solución de las ecuaciones diferenciales acopladas (4.7) y (4.9), con las condiciones dadas por las ecs. (4.12), (4.15) y (4.16), realizaron diferentes aproximaciones, ya que el problema es complejo. Los sistemas que fueron estudiados y modelados a través de las ecs. (4.7) y (4.9), fueron seleccionados con el fin de ver las diferencias entre comportamiento lineal ó no lineal con ductilidades bajas y no lineal cuando estos se sujetan a sismos de magnitud 8.1.

La primera estructura estudiada corresponde a la descrita en la sección 2.2, cuyo comportamiento es no lineal con ductilidad de 1.3, correspondiente a una ductilidad baja en el sentido de que al suponer comportamiento Gaussiano de la respuesta al resolver las ecs. (4.7) y (4.9), se obtienen resultados que se comparan bien con los que se obtienen usando el método de Monte Carlo. Se estudio otro sistema de 1GDL con período de 2 s, desplazamiento de fluencia $x_y = 0.0308$ m, razón de posfluencia $\alpha = 0.285$ y coeficiente de amortiguamiento $\xi = 0.05$, con comportamiento no lineal.

En los primeros casos que se estudiaron para los dos sistemas, se resolvió la ec. (4.9) considerando que la media era cero, es decir: $E[\ddot{f}] = 0$ en la ec. (4.7), y que la fdp multivariada de la respuesta de la ec. (4.6) era Gaussiana, sin embargo la hipótesis de comportamiento Gaussiano para el sistema con período de 2 s, estaba muy alejada de la fdp de la variable de estado z .

En la Fig. 4.3, se presenta el histograma evolutivo de la variable de estado z cuando el sistema de $T = 2$ s incursiona en una ductilidad de 7.73, el cual fue calculado a través del método de Monte Carlo. En la Figura se aprecia que la probabilidad tiende a acumularse en la vecindad del desplazamiento de fluencia del sistema, en ella se indican los valores máximo (0.0155 m), mínimo (-0.0155 m) y el número de marcas de clase del histograma. El histograma correspondiente a los 1000 primeros pasos (paso = 0.02 s), corresponde a una distribución Gaussiana. para luego pasar, entre los 2000 y 8000 pasos restantes a una distribución con la probabilidad concentrada en los puntos de fluencia del sistema. En la

Fig. 4.3 se puede apreciar que el valor medio del histograma va variando a lo largo del tiempo, ya que las barras no son simétricas.

Cuando el método de la linealización equivalente considera que la fdp de la respuesta es Gaussiana con sismos de media cero, produce los mismos resultados de la varianza, para fines prácticos, que cuando se le obtiene usando Monte Carlo, para el caso en el que el sistema tiene un comportamiento lineal, o no lineal con ductilidades bajas (menores de 1.4). Para satisfacer la condición de media cero, se usó como entrada a la ec. (4.9), la covarianza sísmica evolutiva obtenida de la DEPE centrada, ec. (3.19), y para obtener la varianza por el método de Monte Carlo se usó la ec. (4.18). Los resultados se muestran en la Fig. 4.4 para casos con una ductilidad menor de 1.3. En los casos de ductilidades mayores, las varianzas obtenidas con la ec. (4.9) estaban muy lejos de predecir el comportamiento que resultaba de Monte Carlo. Esto debido al hecho de que la fdp de z se aleja mucho de ser Gaussiana como se aprecia en la Fig. 4.3. Esto se explica por el hecho de que la suposición Gaussiana del comportamiento probabilístico de la respuesta está asociado con comportamiento lineal.

Puesto que la varianza calculada con la ec. (4.9) y con la hipótesis de respuesta Gaussiana se alejaba mucho de la varianza obtenida a través del método de Monte Carlo, se cambió la hipótesis de la fdp de z , y se aplicó el método de Kimura *et al.* (1994) para encontrar la varianza de la respuesta del sistema con período de 2 s, considerando que el proceso estocástico al que estaba sujeto era de media cero. La respuesta del sistema a una realización del proceso presentaba una ductilidad de 7.76, y la comparación de varianzas entre el método de la linealización equivalente y el método de Monte Carlo se muestran en la Fig. 4.5, dejando claro que en caso de que el sistema equivalente de 1GDL incurriera en comportamiento inelástico es preferible usar la hipótesis de Kimura con media cero.

En la Fig. 4.6, se presenta una comparación entre el histograma evolutivo de z obtenido con Monte Carlo para el corte del paso 4000 de la respuesta del sistema con período de 2 s y el resultado obtenido utilizando linealización equivalente con la aproximación de Kimura.

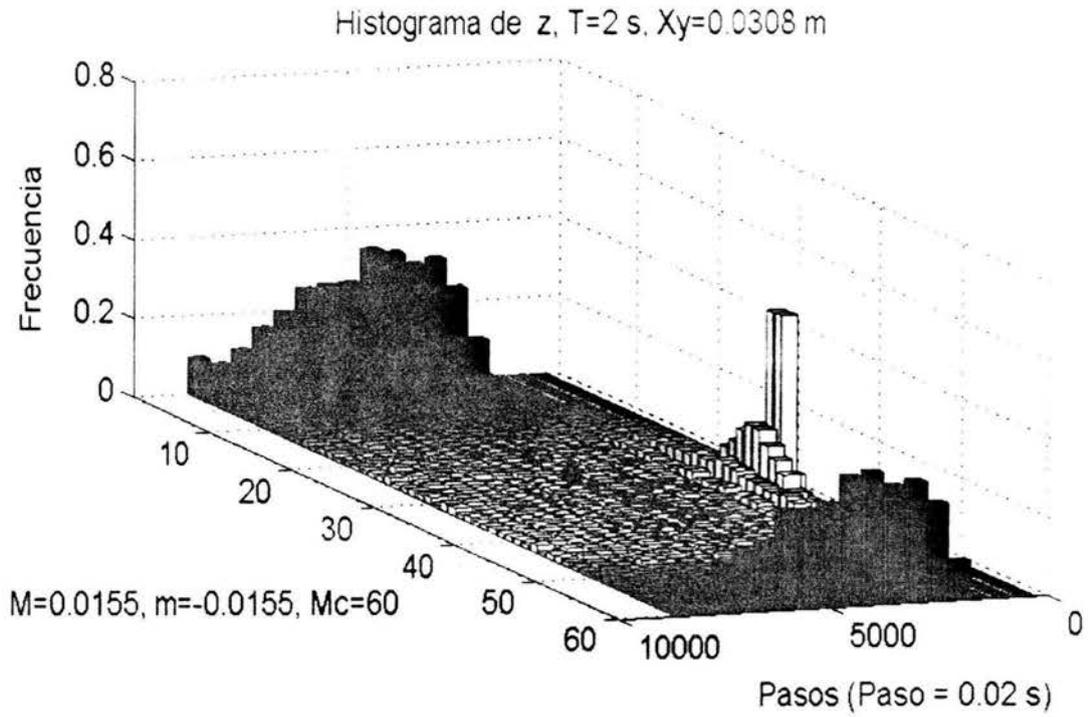


Figura 4.3. Histograma evolutivo de la variable de estado z .

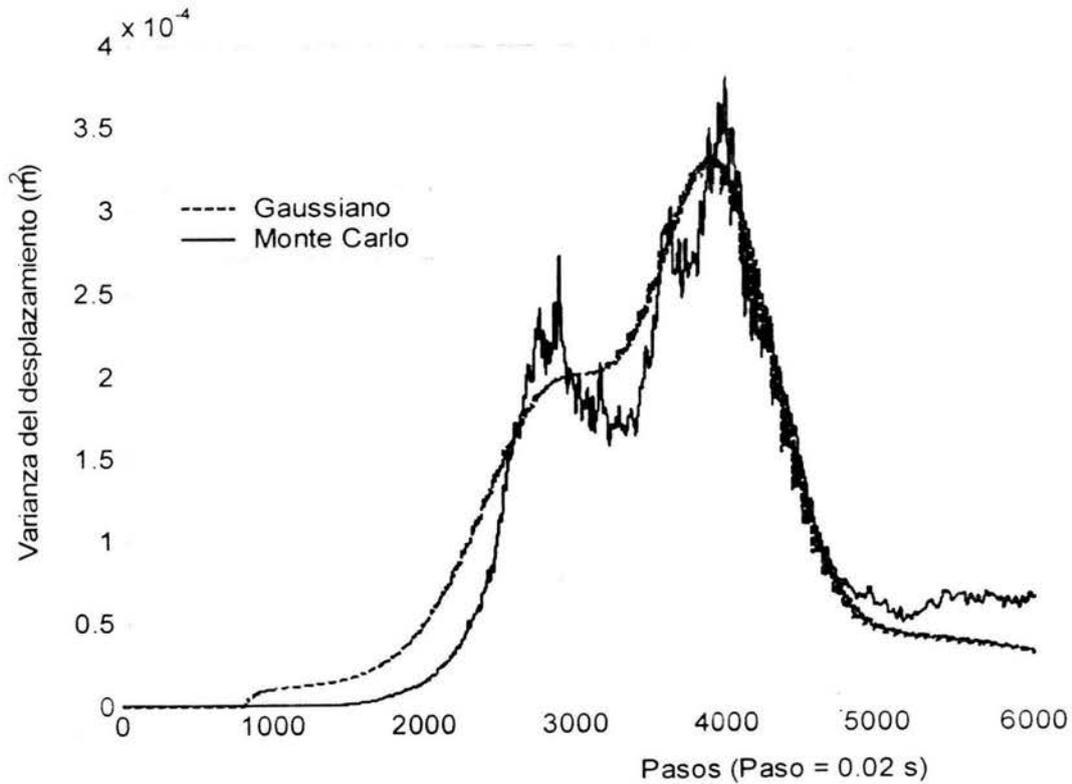


Figura 4.4. Comparación de varianzas para un oscilador bilineal de periodo 0.87 s.

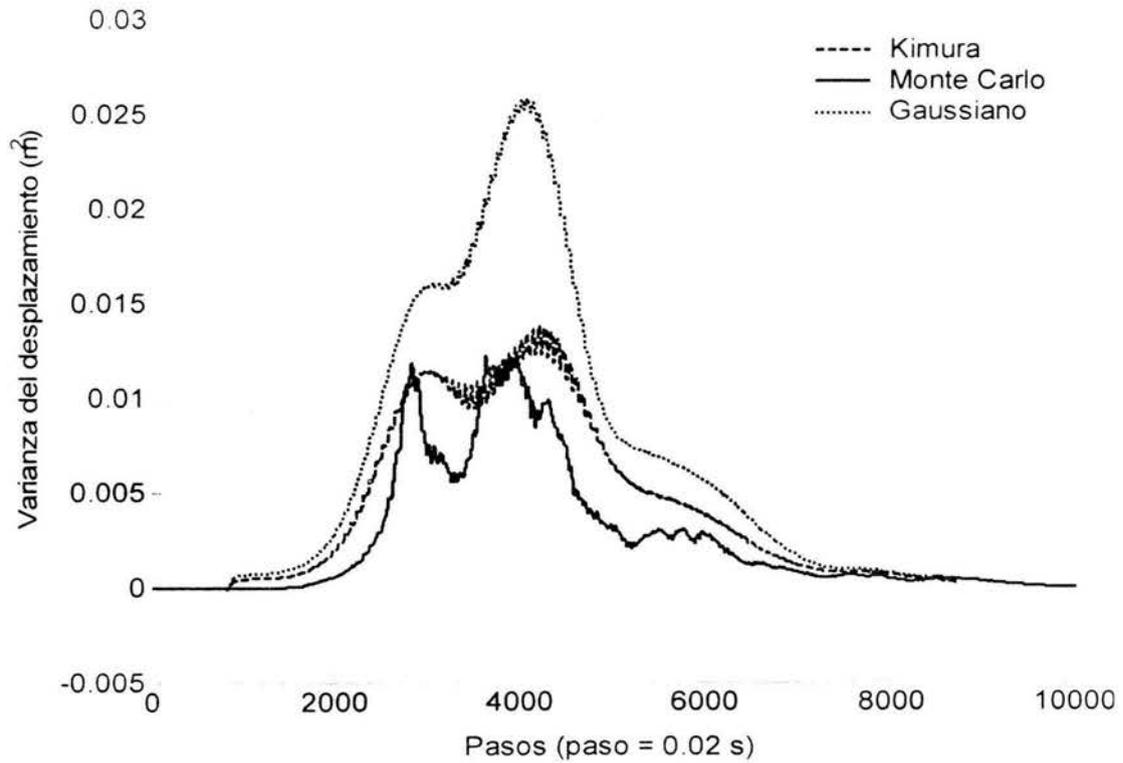


Figura 4.5. Comparación de varianzas para un oscilador con periodo de 2 s y ductilidad de 7.76.

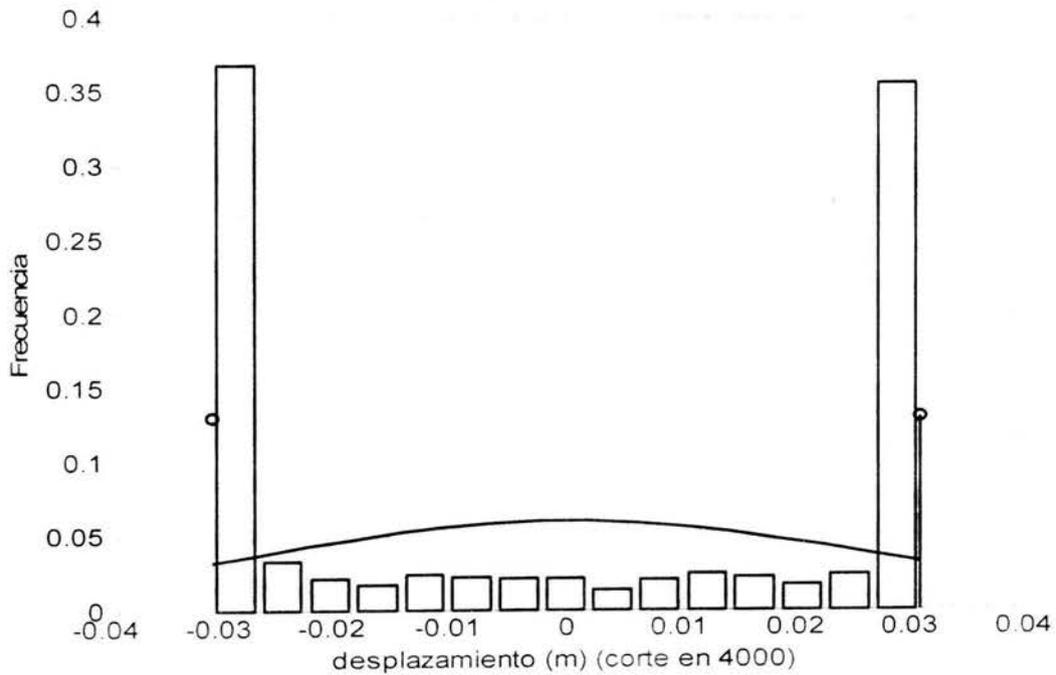


Figura 4.6. Comparación entre dos histogramas de z . El histograma de barras corresponde a la simulación de Monte Carlo y el continuo a la aproximación de Kimura dada por la ec. (4.12).

Para períodos mayores de 1.5 s, se estudió la kurtosis de la respuesta del resorte bilineal sujeto a ensambles de señales correspondientes a sismos de distintas magnitudes y se halló que la variable de estado z tiende a tener una kurtosis menor que 3 (en el caso Gaussiano la kurtosis es igual a tres), mientras que las variables x y dx/dt tienen una kurtosis que se aproxima en promedio a la Gaussiana, como se aprecia en la Fig. 4.7, para un oscilador de $T = 2$ s. A esto se atribuye la diferencia de áreas entre el histograma evolutivo obtenido con Monte Carlo y el resultado obtenido con linealización equivalente de la Figura 4.6. Para períodos menores de 1.5 s, el oscilador bilineal arroja respuestas con kurtosis muy altas comparadas con la Gaussiana, por lo cual los resultados obtenidos con la ec. (4.9) para ductilidades altas en estas circunstancias siguen estando alejados de las respuestas obtenidas con Monte Carlo, aún utilizando el método de Kimura, significando esto que las hipótesis de la fdp de la respuesta utilizadas en el método de Kimura, están alejadas de su verdadera fdp, y será necesario en un futuro mejorar esta aproximación. En la Fig. 4.8, se muestra la kurtosis de la respuesta para un oscilador bilineal con período de 0.87 s, obtenida con el método de Monte Carlo, incursionando en ductilidades de 1.7. Es notable que mientras las variables x y dx/dt , alcanzan kurtosis muy altas, la variable de estado z toma valores menores que 3, de donde se aprecia que la fdp de la respuesta de x y dx/dt esta lejos de ser una Gaussiana bivariada.

Puesto que la media de las señales simuladas se elimina restando la media a todas las señales del ensamble en los ejemplos pasados, estos resultados son solamente una aproximación al problema, aún cuando el método de la vibración aleatoria produce varianzas cercanas a aquellas obtenidas con el método de Monte Carlo. Como el ensamble sísmico y el proceso estocástico tienen media, la forma correcta de modelar el problema es acoplar la ecuación diferencial de la media no nula ec. (4.7), con la ec. (4.9), y obtener la media y la varianza de la respuesta. Para el caso de la estructura con período de 0.87 s, se obtuvieron las soluciones de estas ecuaciones considerando que la respuesta del sistema equivalente es Gaussiana, y la media y la desviación estándar obtenidas se compararon con los resultados obtenidos usando el método de Monte Carlo en la Fig. 4.9. Los resultados obtenidos son aceptables en ambos casos. En el caso del sistema de 1GDL con período de 2 s, se comparan la media y la desviación estándar obtenidos usando linealización

equivalente con los resultados obtenidos usando Monte Carlo en la Fig. 4.10, y los resultados son aceptables para fines prácticos.

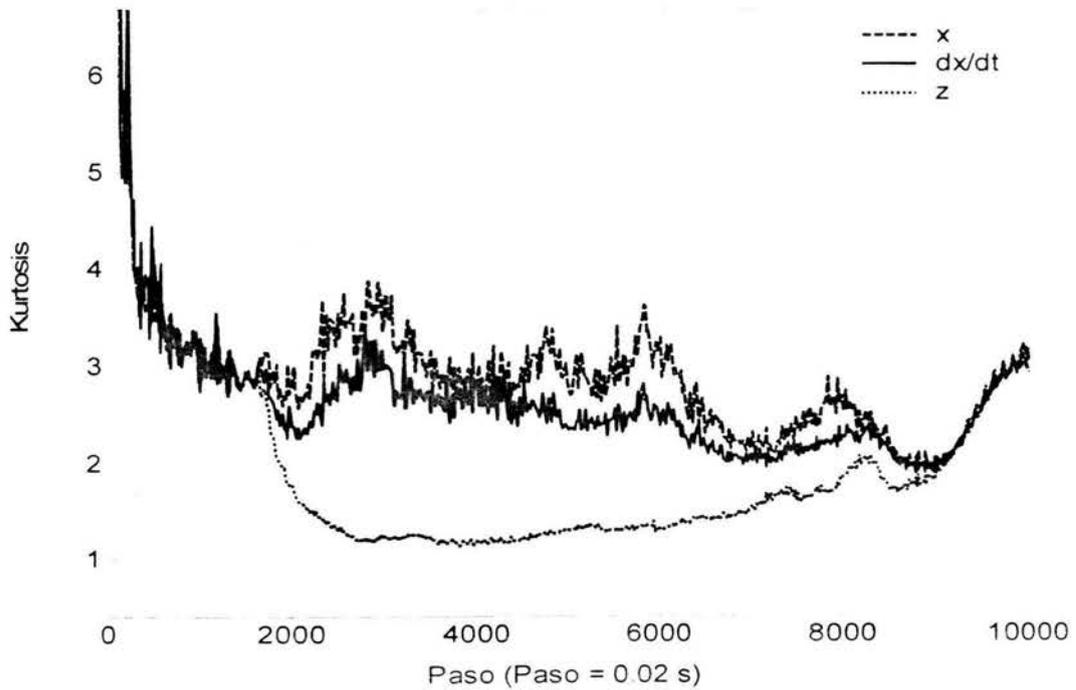


Figura 4.7. Kurtosis de la respuesta de un oscilador con periodo de 2 s, incursionando en una ductilidad promedio de 1.7.

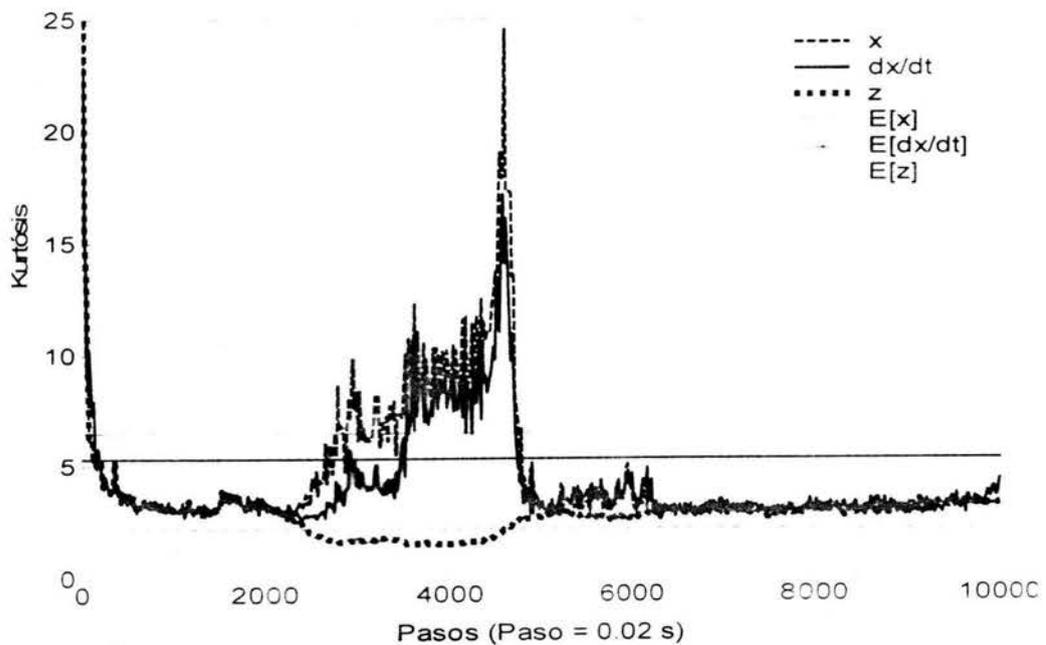


Figura 4.8. Kurtosis de la respuesta de un oscilador bilineal con periodo de 0.87 s, con una ductilidad promedio de 1.7.

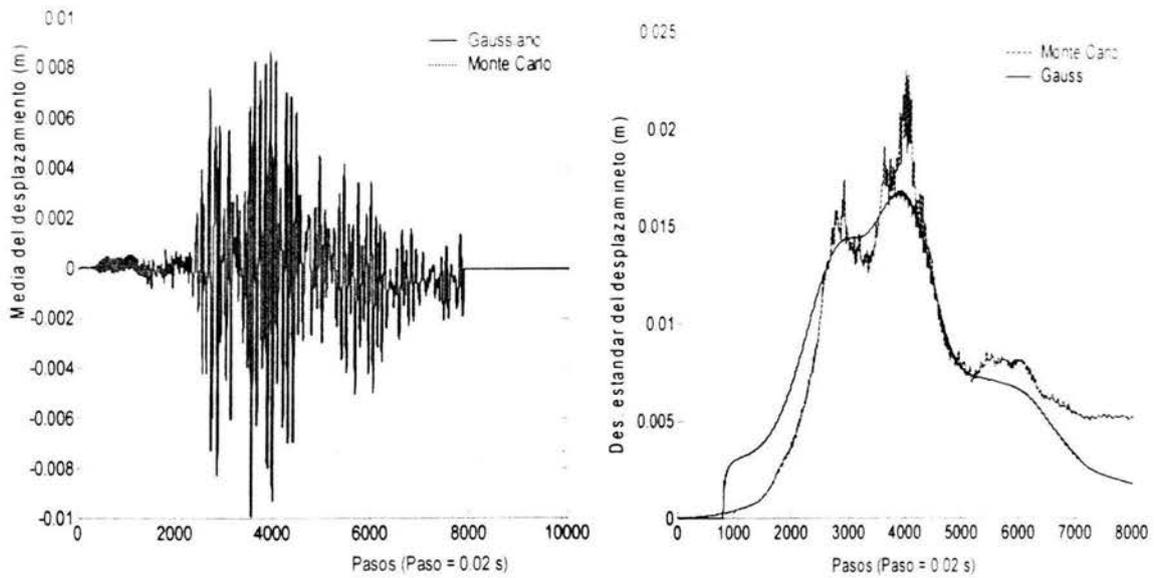


Figura 4.9. Comparación de medias y desviaciones estándar para el sistema de periodo 0.87 s.

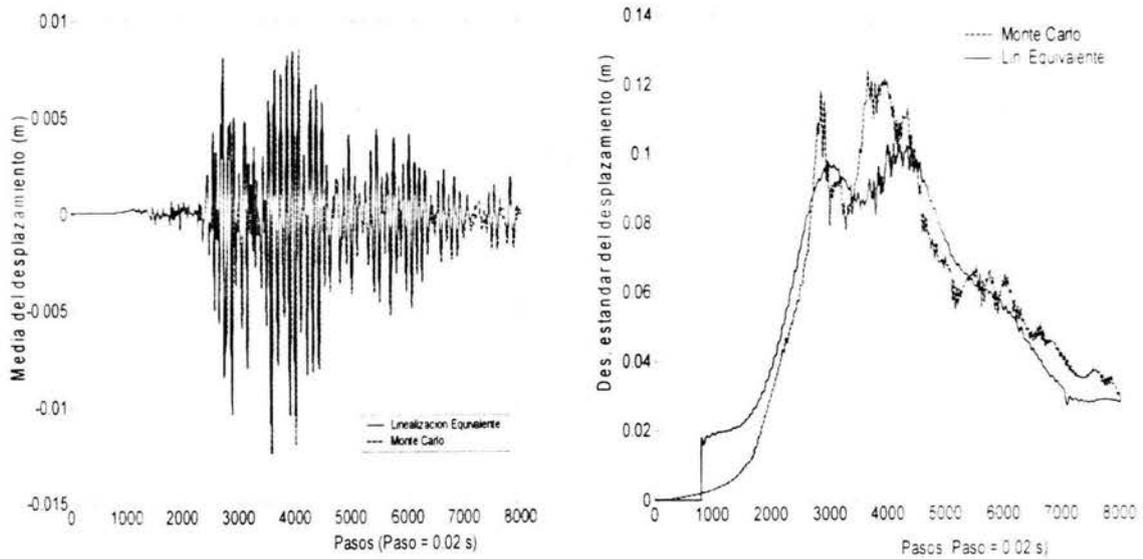


Figura 4.10 Comparación de medias y desviaciones estándar para el sistema de periodo 2 s.

CAPÍTULO 5

ESTADÍSTICA DE MÁXIMOS

5.1 Antecedentes de funciones de distribución y de densidad de probabilidad de picos de señales no estacionarias

En el capítulo anterior se ha estudiado la respuesta estadística de primer y segundo orden de un sistema de 1GDL, no lineal, equivalente a un sistema de múltiples grados de libertad sujeto a un proceso estocástico que caracteriza los sismos de subducción provenientes de la costa de Guerrero. Los parámetros fundamentales que describen el comportamiento del sistema, son el primer y el segundo momento estadístico de las funciones de entrada y de respuesta. Sin embargo, en las aplicaciones a la ingeniería esta información no es de gran ayuda para el análisis o diseño de un sistema. Para alcanzar este objetivo, es necesario determinar la distribución de probabilidad de los máximos de la respuesta y la probabilidad que tienen de exceder un cierto estado límite. El sistema podría dejar de funcionar si la respuesta excede un umbral tan sólo una vez, para lo cual se buscaría entonces la probabilidad de la primera excedencia. En otros casos, el comportamiento del sistema puede ser tal que, el sistema físico en cuestión tolere varias excursiones de la respuesta arriba del umbral antes de que se dañe.

La determinación de la probabilidad de que la respuesta de un sistema exceda cierto estado límite por estar sujeto a un proceso estocástico ha sido, por su complejidad, normalmente realizada sobre respuestas estacionarias. Para ello es necesario determinar si se trata de

señales de banda ancha o angosta. El desarrollo de la teoría y la capacidad de resolver estos problemas por primera vez se debe a los trabajos de Rice (1944) y (1945), quien estaba interesado en el ruido que aparecía en las señales eléctricas. Avances significativos en esta teoría se deben a Cartwright y Longuet-Higgins (1956), que buscaban la descripción probabilística de los máximos de olas marítimas, encontrando una técnica matemáticamente poderosa para su cálculo. En el área del análisis estructural, son de importancia los trabajos de Crandall *et al.* (1963 a), y (1963 b). Es de interés, para el cálculo de los momentos estadísticos, la interpretación que realiza Vanmarke (1972). Sin embargo, en este trabajo se está interesado en señales que tienen comportamiento probabilístico evolutivo, que conduce a que las teorías anteriores no sean aplicables a este caso, como lo muestran Mischeelov *et al.* (1999), para el cálculo de los momentos estadísticos de la respuesta, necesarios para la determinación de las probabilidades de máximos. En este trabajo se hace una aproximación, que permite el cálculo de las funciones de distribución y densidad de probabilidad de máximos de señales que provienen de un proceso estocástico subyacente evolutivo.

5.2 Funciones de distribución y de densidad de probabilidad de picos

La función de distribución de probabilidad condicional a una intensidad dada de los picos del proceso estocástico $X(t)$, se puede encontrar a través de determinar la tasa de ocurrencia de los máximos del proceso. Sea:

$$\nu_p [t; X(t) \leq u | I] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{E[\text{Número de picos} \leq u \text{ en } [t, t + \Delta t] | I]}{\Delta t}, \quad (5.1)$$

la tasa esperada condicional para una intensidad fija al tiempo t de la ocurrencia de picos menores que el umbral u . Puesto que durante el intervalo de tiempo infinitesimal $[t, t + \Delta t]$, se espera que a lo sumo un pico suceda, entonces la ec. (5.1) se puede expresar en la forma:

$$\nu_p [t; X(t) \leq u | I] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P[\text{Un pico} \leq u \text{ en } [t, t + \Delta t] | I]}{\Delta t}, \quad (5.2)$$

donde $P[A|I]$ es la probabilidad condicional de que suceda A dado que sucedió el evento I ; la ec. (5.2) se debe a que se puede despreciar la posibilidad de que dos o más picos sucedan en el intervalo de tiempo. Si se hace u tender a infinito, se obtiene la probabilidad de que un pico suceda:

$$\nu_p [t|I] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P[\text{pico en } [t, t + \Delta t] | I]}{\Delta t}. \quad (5.3)$$

De acuerdo con las propiedades de la probabilidad condicional, dados los sucesos \mathcal{A} , \mathcal{B} y \mathcal{C} , se satisface:

$$P[\mathcal{A} | \mathcal{C}] = P[\mathcal{A} | \mathcal{B}, \mathcal{C}] P[\mathcal{B} | \mathcal{C}],$$

si y sólo si: $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$. De acuerdo con esto, se tiene:

$$P[\text{pico} \leq u \text{ en } [t, t + \Delta t] | I] = P[\text{pico} \leq u \text{ en } [t, t + \Delta t] | \text{pico en } [t, t + \Delta t], I] P[\text{pico en } [t, t + \Delta t] | I],$$

y puesto que la función de distribución de probabilidad de los picos satisface:

$$F_{p(t)}(u) = P[\text{pico} \leq u \text{ en } [t, t + \Delta t] | \text{pico en } [t, t + \Delta t], I], \quad (5.4)$$

entonces:

$$F_{p(t)}(u|I) = \frac{\nu_p [t; X(t) \leq u | I]}{\nu_p [t|I]}. \quad (5.5)$$

De la ec. (5.5), se aprecia que se puede determinar la distribución de probabilidad a través de la tasa del número esperado de picos menores que cierto valor u ; para calcularla, se observa que si $U(x)$ es la función escalón unitario, entonces $U(-dX/dt)$ es un proceso estocástico con un escalón positivo unitario en cada pico de $X(t)$ y con un escalón negativo unitario en cada mínimo de $X(t)$. La derivada de este proceso es: $-d^2X/dt^2 \delta(-dX/dt)$ y corresponde a funciones delta de Dirac unitarias positivas y negativas ubicadas en los

máximos y en los mínimos del proceso $X(t)$, respectivamente, que multiplicada por $U(-d^2X/dt^2)$, sólo proporciona funciones delta positivas. Si además, el producto de las dos funciones anteriores se multiplica por: $U(u-X(t))$, se obtienen deltas sólo para aquellos picos menores de u . En consecuencia, la tasa esperada de picos menores de u se puede expresar en la forma:

$$\nu_p [t; X(t) \leq u | I] = E \left[-\ddot{X}(t) \delta [-\dot{X}(t)] U [-\dot{X}(t)] U [u - X(t)] | I \right]. \quad (5.6)$$

Sustituyendo la ec. (5.6) en la ec. (5.5), se obtiene:

$$F_{P(t)} [u | I] = \frac{E \left[-\ddot{X}(t) \delta [-\dot{X}(t)] U [-\dot{X}(t)] U [u - X(t)] | I \right]}{E \left[-\ddot{X}(t) \delta [-\dot{X}(t)] U [-\dot{X}(t)] | I \right]}, \quad (5.7)$$

que se puede expresar en términos de las funciones de densidad de probabilidad conjunta en la forma:

$$F_{P(t)} [u | I] = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} -z \delta [-v] U [-z] U [u - w] f_{X(t), \dot{X}(t), \ddot{X}(t)} (w, v, z | I) dw dv dz}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} -z \delta [-v] U [-z] f_{X(t), \dot{X}(t)} (v, z | I) dv dz}, \quad (5.8)$$

La ec. (5.8) conduce a:

$$F_{P(t)} [u | I] = \frac{\int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^u |z| f_{X(t), \dot{X}(t), \ddot{X}(t)} (w, 0, z | I) dw dz}{\int_{-\infty}^{\infty} |z| f_{\dot{X}(t), \ddot{X}(t)} (0, z | I) dz}. \quad (5.9)$$

La función de densidad de probabilidad de los picos se obtiene derivando con respecto a u la ec. (5.9) quedando:

$$f_{P(t)}[u|I] = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |z| f_{X(t), \dot{X}(t), \ddot{X}(t)}(u, 0, z|I) dz}{\int_{-\infty}^{\infty} |z| f_{X(t), \dot{X}(t)}(0, z|I) dz} \quad (5.10)$$

En esta tesis, $X(t)$, dX/dt y d^2X/dt^2 , se suponen conjuntamente Gaussianos aún para ductilidades altas, ya que $X(t)$ es el proceso que resulta de resolver la ec. (4.1), que es la respuesta del sistema equivalente de 1GDL sujeto al proceso estocástico que caracteriza los sismos generados por la brecha sísmica de Guerrero correspondientes a cierta magnitud. En el Capítulo 4, se supuso que la función de densidad de probabilidad conjunta de la respuesta era Gaussiana para $X(t)$ y dX/dt , lo que llevó a obtener soluciones a través del método de la linealización equivalente “iguales” (dentro de cierta tolerancia aceptable para fines de ingeniería), a soluciones obtenidas usando el método de Monte Carlo. La suposición de Gausussianidad se justificó a posteriori. En el Capítulo 4, para el caso no lineal, en realidad no se supone que las tres funciones sean conjuntamente Gaussianas: el método de Kimura sólo supone conjuntamente Gaussianas a $X(t)$ y a dX/dt ; sin embargo, puesto que la derivada es un operador lineal se justifica la hipótesis de Gaussianidad conjunta de $X(t)$, dX/dt y d^2X/dt^2 , para los casos lineal y no lineal (Lutes, 1997). De esta forma:

$$f_{\text{cond}}(w, v, z|I) = \frac{1}{(2\pi)^3 \sqrt{\Gamma}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} w - E[X|I] & v - E[\dot{X}|I] & z - E[\ddot{X}|I] \end{pmatrix} \Gamma^{-1} \begin{pmatrix} w - E[X|I] \\ v - E[\dot{X}|I] \\ z - E[\ddot{X}|I] \end{pmatrix} \right\},$$

donde:

$$\Gamma = E \begin{bmatrix} (X - E[X|I])(X - E[X|I]) & (X - E[X|I])(\dot{X} - E[\dot{X}|I]) & (X - E[X|I])(\ddot{X} - E[\ddot{X}|I]) \\ (\dot{X} - E[\dot{X}|I])(X - E[X|I]) & (\dot{X} - E[\dot{X}|I])(\dot{X} - E[\dot{X}|I]) & (\dot{X} - E[\dot{X}|I])(\ddot{X} - E[\ddot{X}|I]) \\ (\ddot{X} - E[\ddot{X}|I])(X - E[X|I]) & (\ddot{X} - E[\ddot{X}|I])(\dot{X} - E[\dot{X}|I]) & (\ddot{X} - E[\ddot{X}|I])(\ddot{X} - E[\ddot{X}|I]) \end{bmatrix}.$$

En la Figura 5.1 se muestran las funciones de densidad de probabilidad condicional de picos para los sistemas de periodo 0.87 s y 2 s descritos en el Capítulo 4, en el punto de varianza máxima $t = 4000 \cdot 0.02$ s, ver Figuras 4.9 y 4.10. Para encontrar estas funciones fue necesario obtener los parámetros de las mismas que son: $E[X|I]$, $E[dX/dt|I]$, $E[d^2X/dt^2|I]$, y

la matriz Γ . Las soluciones de las ecs. (4.7) y (4.9), proporcionan: $E[X|I]$, $E[dX/dt|I]$, $E[d^2X/dt^2|I]$, $[\Gamma]_{11}$, $[\Gamma]_{12}$ y $[\Gamma]_{22}$, el término $[\Gamma]_{13}$, se calculó utilizando la relación:

$$\frac{d}{dt} E[(X - E[X|I])(\dot{X} - E[\dot{X}|I])|I] = E[(\dot{X} - E[\dot{X}|I])^2|I] + E[(X - E[X|I])(\ddot{X} - E[\ddot{X}|I])|I],$$

de donde:

$$[\Gamma]_{13} = \frac{d[\Gamma]_{12}}{dt} - [\Gamma]_{22}. \quad (5.11)$$

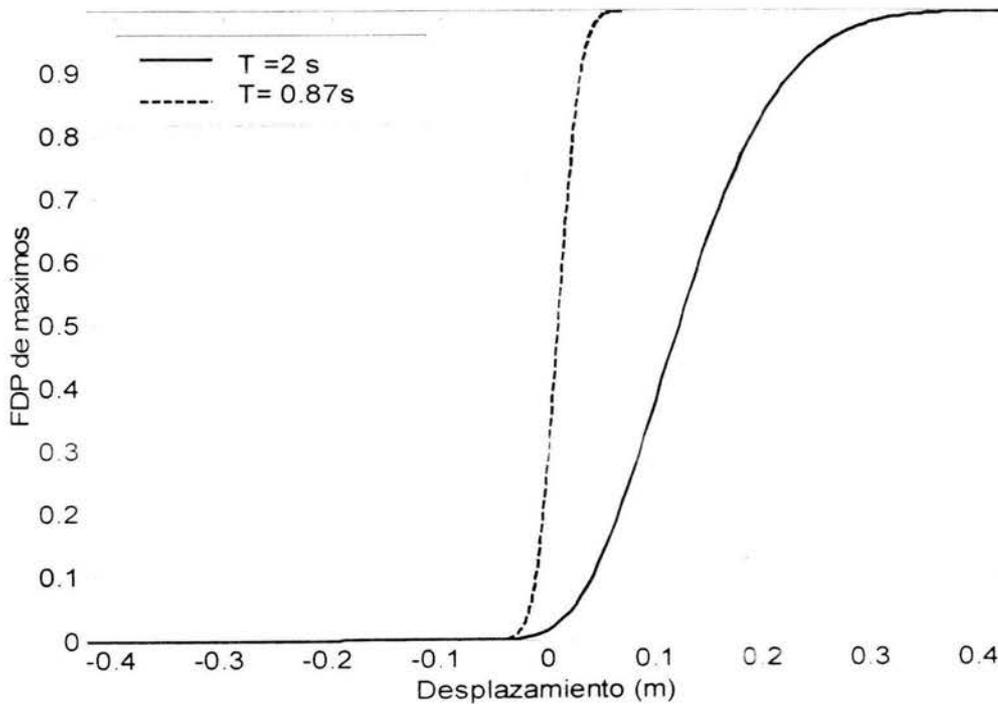


Figura 5.1. FDP de máximos para los sistema de $T = 2$ s y $T = 0.87$ s.

El elemento $[\Gamma]_{23}$, se calculó utilizando la relación:

$$\frac{d}{dt} E[(\dot{X} - E[\dot{X}|I])^2|I] = 2E[(\dot{X} - E[\dot{X}|I])(\ddot{X} - E[\ddot{X}|I])|I].$$

De donde:

$$[\Gamma]_{13} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\Gamma]_{22}. \quad (5.12)$$

$$[\Gamma]_{i,i} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\Gamma]_{i,i} \quad (5.12)$$

El elemento $[\Gamma]_{33}$, se calculó usando la matriz de covarianza condicional de respuesta del sistema de 1GDL equivalente:

$$\Gamma_X(t,s) = E[\tilde{\mathbf{X}}(t)\tilde{\mathbf{X}}(s)|I],$$

que satisface, (Soong y Grigoriu, 1993):

$$\Gamma_X(t,s) = \int_0^t \int_0^s \Phi(t,u) \mathbf{G}(u) \Gamma_f(u,v) \mathbf{G}^T(v) \Phi^T(s,v) dv du, \quad (5.13)$$

donde Φ , y \mathbf{G} están dados por las ecs. (4.11), y (4.8), respectivamente. La matriz del sistema \mathbf{A} , necesaria para caracterizar Φ , se obtiene determinando los coeficientes linealizadores como funciones del tiempo al resolver la ec. (4.9). El elemento buscado satisface:

$$[\Gamma]_{33} = \sigma_x^2 = \left. \frac{\partial^2 [\Gamma_X(t,s)]_{22}}{\partial t \partial s} \right|_{t=s}. \quad (5.14)$$

Sustituyendo en la ec. (5.14) la ec. (5.13) se obtiene:

$$[\Gamma]_{33} = [\Phi(t,t) \mathbf{G} \Gamma_f(t,t) \mathbf{G}^T \Phi^T(t,t)]_{22}. \quad (5.15)$$

De las ecs. (4.8) y (4.11) se tiene:

$$\Phi(t,t) = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad \mathbf{G}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad \text{como} \quad E[\tilde{f}(t)\tilde{f}(t)|I] \text{ es un escalar.}$$

(5.15) se puede expresar en la forma:

$$[\Gamma]_{33} = \frac{\partial^2 [\Gamma_X(t,s)]_{22}}{\partial t \partial s} \Big|_{t=s} = \Gamma_f(t,t) \begin{bmatrix} \phi_{12}^2 & \phi_{12}\phi_{22} & \phi_{12}\phi_{32} \\ \phi_{22}\phi_{12} & \phi_{22}^2 & \phi_{22}\phi_{32} \\ \phi_{32}\phi_{12} & \phi_{32}\phi_{22} & \phi_{32}^2 \end{bmatrix}_{22} = \Gamma_f(t,t)\phi_{22}^2(t,t). \quad (5.16)$$

5.3 Funciones de distribución y de densidad de probabilidad de picos utilizando el método de Monte Carlo

Para evaluar las funciones de distribución y de densidad de probabilidad de los picos usando el método de Monte Carlo, se procedió a realizar estadísticas de los picos de las mil señales de respuesta discutidas en el Capítulo 4: $x_i(t)$, $i = 1, \dots, 1000$. Primero se identificaron, para cada señal los picos de la respuesta como se muestra en la Fig. 5.2 para el sistema de periodo $T = 2$ s. A continuación, se determinó para todas las señales, el intervalo de tiempo donde la varianza y media de la respuesta alcanzan sus valores máximos, y se identificaron los máximos en el intervalo encontrado, que se indica por los círculos en los máximos de la Fig. 5.2. La longitud del intervalo alrededor del punto de varianza máxima, fue elegido lo suficientemente grande para contar con el número de picos necesarios para realizar una estadística y lo suficientemente pequeño como para que ese intervalo describa un comportamiento local de la función de densidad de probabilidad de máximos alrededor del instante de varianza máxima. La Fig. 5.3 corresponde a una señal del conjunto de señales que caracterizan al proceso estocástico (ensamble) de respuesta del sistema de periodo $T = 0.87$ s, donde los máximos y la banda han sido identificados. Finalmente se encontró el histograma de frecuencias de los máximos correspondientes al intervalo dado correspondiente a las mil señales de respuesta. En las Figs. 5.4 y 5.5, se muestran los histogramas de frecuencias correspondientes a los sistemas de 0.87 s y 2 s, respectivamente. En estas figuras se superponen las funciones de densidad de probabilidad encontradas en la sección anterior con el fin de compararlas. Utilizando una prueba de hipótesis Kolmogorov – Smirnov con un nivel de significancia del 95%, se comprobó que las funciones teóricas son aquellas que describen el comportamiento estadístico de los histogramas de frecuencias.

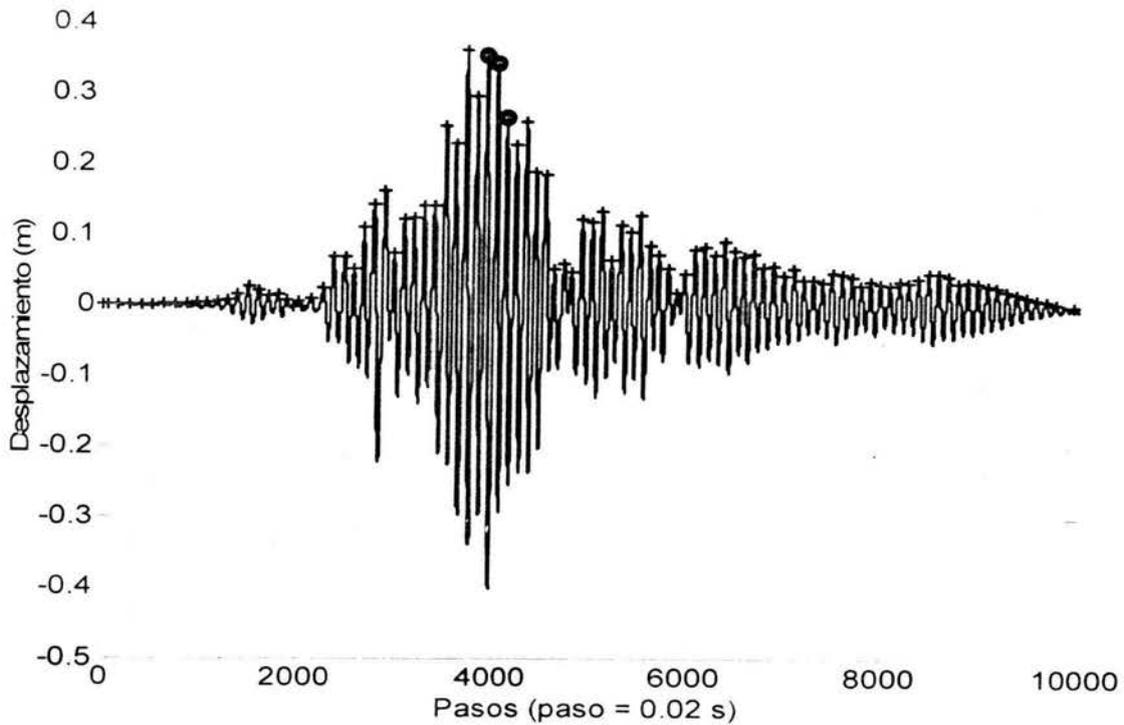


Figura 5.2. Identificación de los máximos de una señal del ensemble de respuestas, y de la banda donde la varianza del ensemble es máxima (círculos). Sistema $T = 2$ s.

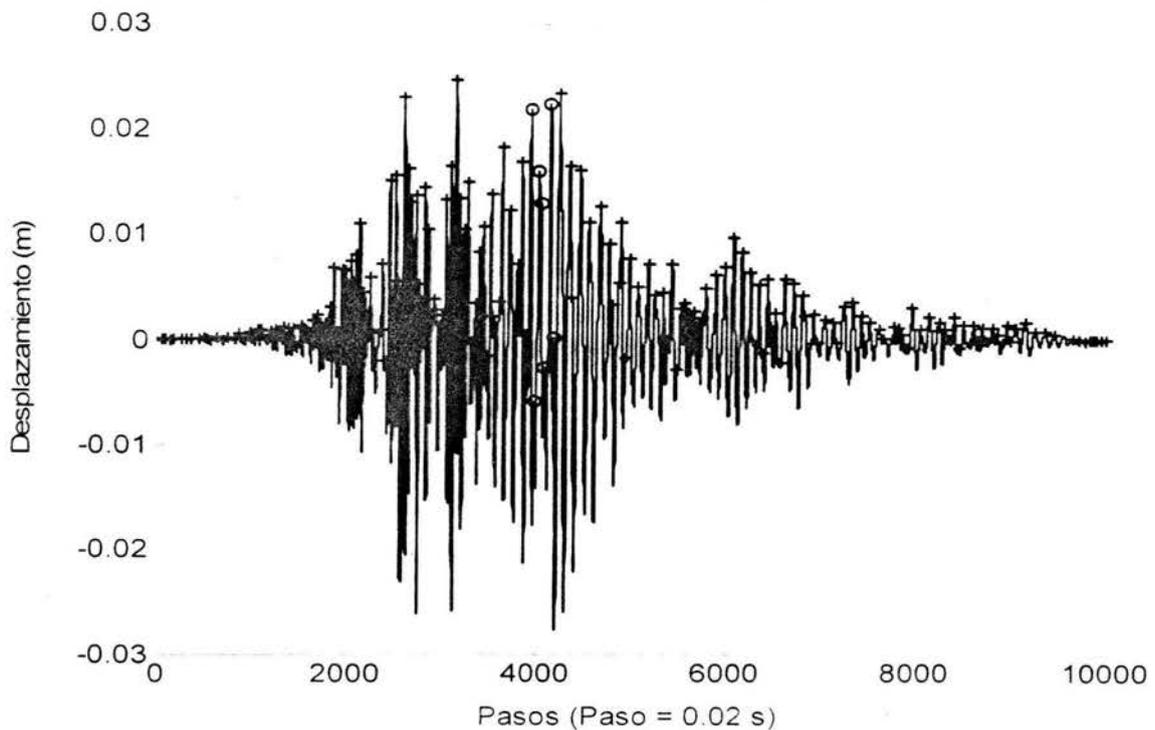


Figura 5.3. Identificación de los máximos de una señal del ensemble de respuestas, y de la banda donde la varianza del ensemble es máxima (círculos). Sistema $T = 0.87$ s.

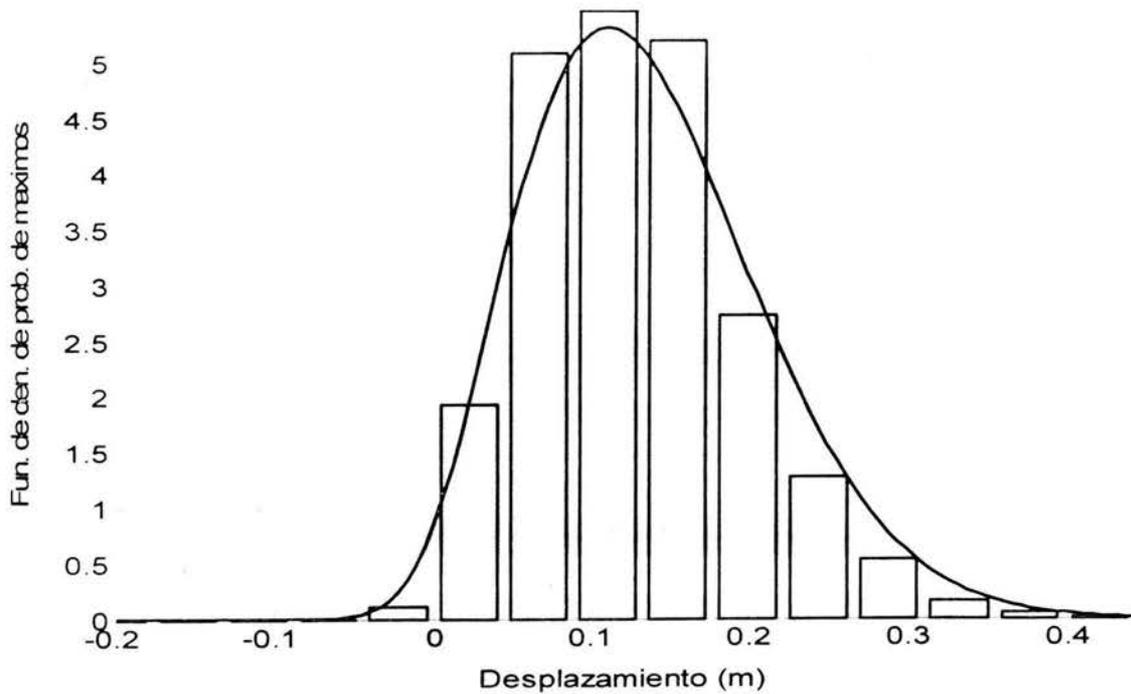


Figura 5.4. Función de densidad de probabilidad de máximos obtenida desde la teoría de la vibración aleatoria e histograma de máximos obtenido con el método de Monte Carlo, para el sistema de $T = 2$ s.

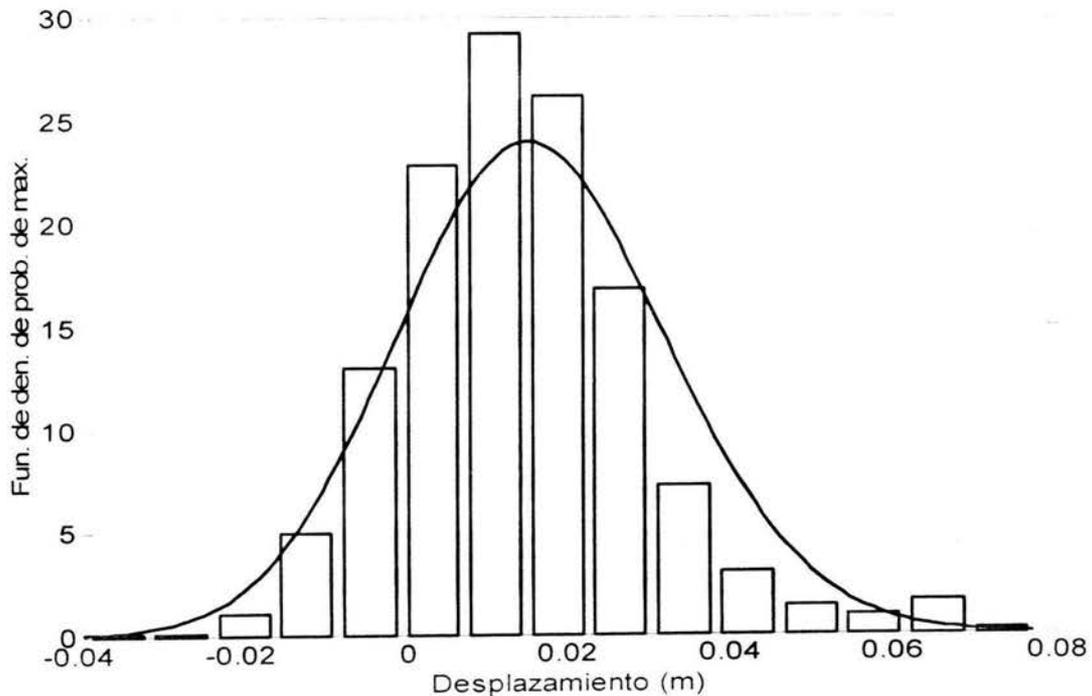


Figura 5.5. Función de densidad de probabilidad de máximos obtenida desde la teoría de la vibración aleatoria e histograma de máximos obtenido con el método de Monte Carlo, para el sistema de $T = 0.87$ s.

CAPÍTULO 6

CURVAS DE FRAGILIDAD

6.1 Fragilidad sísmica

Para calcular las curvas de fragilidad sísmica de cierta estructura con base a la respuesta del sistema de 1GDL equivalente sujeto a un proceso estocástico, es necesario determinar el ó los estados límite que se desean estudiar y dependiendo de ellos, identificar las fuentes y las magnitudes sísmicas para las cuales es necesario determinar la probabilidad de que el sistema equivalente exceda el estado límite deseado. Para obtener la fdp de los máximos de la respuesta en el caso evolutivo se utiliza la teoría de extremos (Lutes y Sarkani, 1997). Denotando con $M(t)$ al máximo de $x(t)$ para el tiempo t , la fdp de máximos es:

$$f_{M(t)}(u|I) = \frac{\int_0^0 |z| f_{x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t)}(u, 0, z|I) dz}{\int_{-\infty}^0 |z| f_{x(t), \dot{x}(t)}(0, z|I) dz}, \quad (6.1)$$

donde: las funciones en el interior de las integrales son las fdp multivariadas Gaussianas, debido al hecho de que en las suposiciones de las fdp multivariadas de la respuesta $x(t)$ y dx/dt son consideradas conjuntamente Gaussianas. La fragilidad sísmica, para el estado límite x_t^* queda expresada en términos de la ec. (6.1) en la forma:

$$P[x > x_i^* | I] = 1 - P[x \leq x_i^* | I] = 1 - \int_{-\infty}^{x_i^*} f_{M(t)}(u | I) du. \quad (6.2)$$

6.2 Estados límites

El estado límite que se desea estudiar en este trabajo es el de colapso incipiente, y puesto que la “brecha de Guerrero” representa el sitio con más alto potencial sísmico, se consideró como única fuente ésta. Los sismos provenientes de la “brecha de Guerrero” de magnitud menor de 7 no han causado que estructuras típicas vulnerables del Valle de México incursionen en estados cercanos al colapso, por lo que para el estudio del estado límite de colapso incipiente se consideran magnitudes sísmicas de 7 a 8.2. Si se quisiera estudiar el estado límite de servicio para el Valle de México, sería necesario considerar todas las fuentes y magnitudes que pudieran hacer incurrir la estructura en este estado límite.

Los estados límite de las estructuras, se pueden definir en términos de la distorsión de entrepiso, la cual representa un índice que se correlaciona muy bien con el daño experimentado por ellas en el caso de sismos Reyes (1999). La distorsión de entrepiso para el caso de edificios a base de marcos, se define como la diferencia de desplazamientos entre dos niveles consecutivos dividida por la altura del entrepiso. En el documento SLAC (2000), se establece el significado de daño en términos de la capacidad de transmitir cargas laterales de los elementos de la estructura, del daño a sistemas arquitectónicos y de la obstrucción en las salidas del sistema con el fin de que haya posibilidad de evacuación de la gente que se encuentre en el inmueble en caso de sismo. Si la respuesta de la estructura, en términos de distorsión de entrepiso, no excede del 0.5%, el daño en la totalidad de la estructura es moderado, queriendo decir con esto, que tanto la resistencia del sistema como su rigidez se han visto reducidos aun cuando el sistema de soporte de cargas laterales permanezca funcional. Si la distorsión de entrepiso se encuentra entre el 0.5% y el 2.5% el daño es severo, implicando que la resistencia y la rigidez disponible de la estructura han quedado muy reducidas, que se tienen grandes deformaciones permanentes y que los

elementos estructurales secundarios han fallado completamente. Si la respuesta excede del 2.5%, la estructura puede colapsar total o parcialmente.

El estado límite se debe traducir en desplazamiento espectral, ecs. (2.4) ó (2.7) según se consideren uno o múltiples modos de vibración de la estructura, respectivamente, para que se pueda introducir el valor en la ec. (6.2) para el cálculo de la curva de fragilidad. Esto se consigue a partir de la curva de comportamiento de la estructura en estudio. La curva de comportamiento, como se indicó, está aproximada por dos líneas rectas en el espacio de pseudo aceleraciones contra desplazamientos espectrales. Fig. 2.2, cada una corresponde a dos distintos períodos de vibrar, dados para cada recta por la ecuación, Sandoval (2000):

$$S_a = \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 S_d. \quad (6.3)$$

La curva de comportamiento entonces, representa a la estructura en dos estados distintos, uno sin daño y otro con daño. La recta que tiene una mayor pendiente, está asociada al período de vibración T_{1R} que domina a la estructura que se encuentra en su estado inicial sin daño, y la recta que tiene menor pendiente, corresponde al período T_{2R} , de la estructura que se encuentra en su estado dañado por la demanda sísmica. Una estructura tiene varios períodos de vibración, y para cada uno de ellos se tiene asociada una forma modal, lo cual no implica que estructuras con distintos modos de vibrar deban tener distintos períodos; se puede dar el caso de estructuras distintas con el mismo período de vibración y distintos modos. La simplificación de la curva de comportamiento de una estructura, indica que la estructura en su estado inicial está “dominada” por cierto modo de vibrar, es decir, asociado a uno de sus modos se presentan los desplazamientos que contribuyen más a la respuesta. Lo mismo se puede decir para la estructura en su estado dañado. Asociados a los períodos T_{1R} y T_{2R} , hay un modo de vibración para cada uno que caracteriza la configuración de desplazamientos de los pisos. Estos modos, a los que se les puede denominar modo de la primera rama y modo de la segunda rama, presentan un entrepiso particular con una distorsión mayor que el resto de los entrepisos. Los entrepisos críticos no son

necesariamente el mismo para los modos, y será en ellos donde se producirá la mayor distorsión al deformarse la estructura.

El estado límite de colapso incipiente, para el caso que se estudia, corresponde a un desplazamiento que ha excedido el desplazamiento de fluencia x_y de la estructura equivalente, y por lo tanto, el desplazamiento espectral correspondiente a este estado límite se debe calcular utilizando sólo el modo de la segunda rama, como se muestra en la Fig. 6.1, en donde se aprecia que el desplazamiento asociado al estado límite de colapso está dado por la suma de dos desplazamientos: x_y y x_d . El desplazamiento x_d que define la incursión de la estructura en el estado límite de colapso, resulta de multiplicar la coordenada modal asociada al modo de la segunda rama: z_{2Rl} , con dicho modo, para obtener una distorsión de 2.5%, en el entrepiso crítico. Para expresar esto matemáticamente, se utiliza el modo de vibrar correspondiente a la segunda rama: Φ_{2R} , y se denota la componente modal para el nivel j , con: Φ_{2Rj} . Como la componente del modo de vibrar de la segunda rama a nivel de azotea $j = a$, tiene el valor de $\Phi_{2Ra} = 1$, ya que el modo está normalizado, se tiene que:

$$x_j = \Phi_{2Ra} z_{2R} = z_{2Rj}$$

Suponiendo que el entrepiso crítico estuviera localizado entre los niveles j y $j+1$ de la estructura, entonces, los desplazamientos de esos niveles serían:

$$x_j = \Phi_{2Rj} x_l, \quad \text{y} \quad x_{j+1} = \Phi_{2Rj+1} x_l$$

El valor de x_l que se busca, es el que produzca una distorsión de entre piso de:

$$\Delta_j = (x_{j+1} - x_j) / H = 2.5\% ,$$

donde H , es la altura del entrepiso.

Puesto que los desplazamientos que se utilizan en el cálculo de la fragilidad son desplazamientos espectrales, el desplazamiento límite x_l^* , que se usa dentro de la ec. (6.2)

para el cálculo de la fragilidad, se obtiene de transformar el desplazamiento x_i a coordenadas espectrales mediante la ec. (2.4) ó (2.7) según sea el caso.

El caso de estudio considerado, en este trabajo, es la estructura calculada por Sandoval (2000) cuyas alturas de entrepiso son de 3.3 m, y el entrepiso crítico para el modo correspondiente a la segunda rama de la curva de comportamiento, está ubicado entre la tercera y cuarta losa. La diferencia de desplazamientos de pisos consecutivos que produce la distorsión requerida está dada por:

$$Dif = (3.3 \text{ m}) * 2.5\% = 0.0825 \text{ m}. \quad (6.4)$$

El desplazamiento de azotea que produce la distorsión requerida en el entrepiso crítico se muestra en la Fig. 6.2, y su valor es $x_i = 0.3815$. El valor del desplazamiento espectral está dado por:

$$x_i^* = \frac{x_i}{\Phi_{2Ra} \Gamma_1} = \frac{0.3815}{(1) * 1.2365} = 0.3086. \quad (6.5)$$

Por lo que x_i^* , es el valor que debe ser introducido en la ec. (6.2) para obtener la fragilidad de la estructura calculada por Sandoval (2000).

En este trabajo, la estructura de $T = 2$ s, se considera que tiene el mismo desplazamiento límite, ya que esta fue introducida con el fin de estudiar el comportamiento de un sistema de 1GDL con comportamiento no lineal para sismos de magnitud 8.1 y no se cuenta para ella con datos de los modos de vibración.

6.3 Curvas de fragilidad de los sistemas equivalentes de 1GDL

La curva de fragilidad para el estado límite de colapso incipiente de la estructura equivalente calculada por Sandoval (2000), se muestra en la Fig. 6.3. La curva de fragilidad resulta de calcular la ec. (6.2) para distintas intensidades; los parámetros de la fdp

multivariada de la ec. (6.2), para cada intensidad, se obtienen de las respuestas de las ecs. (4.7), (4.9) y (5.16).

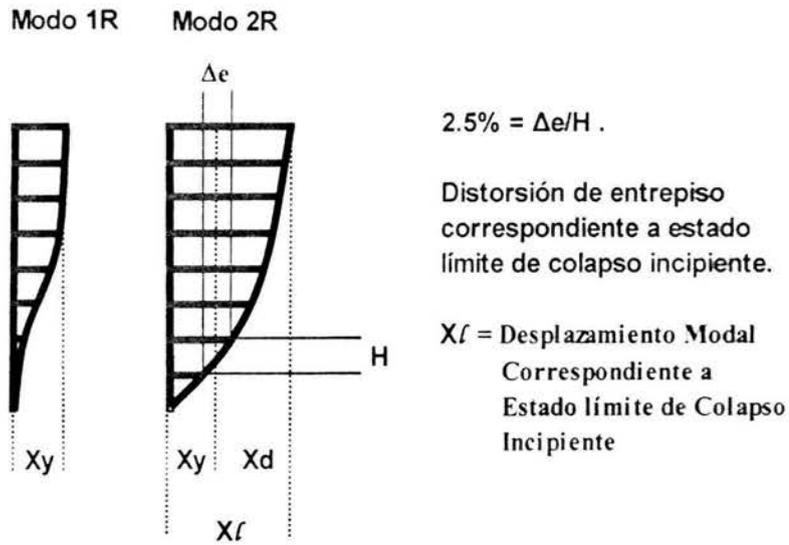


Figura 6.1. Determinación del desplazamiento modal correspondiente al estado límite de colapso incipiente.

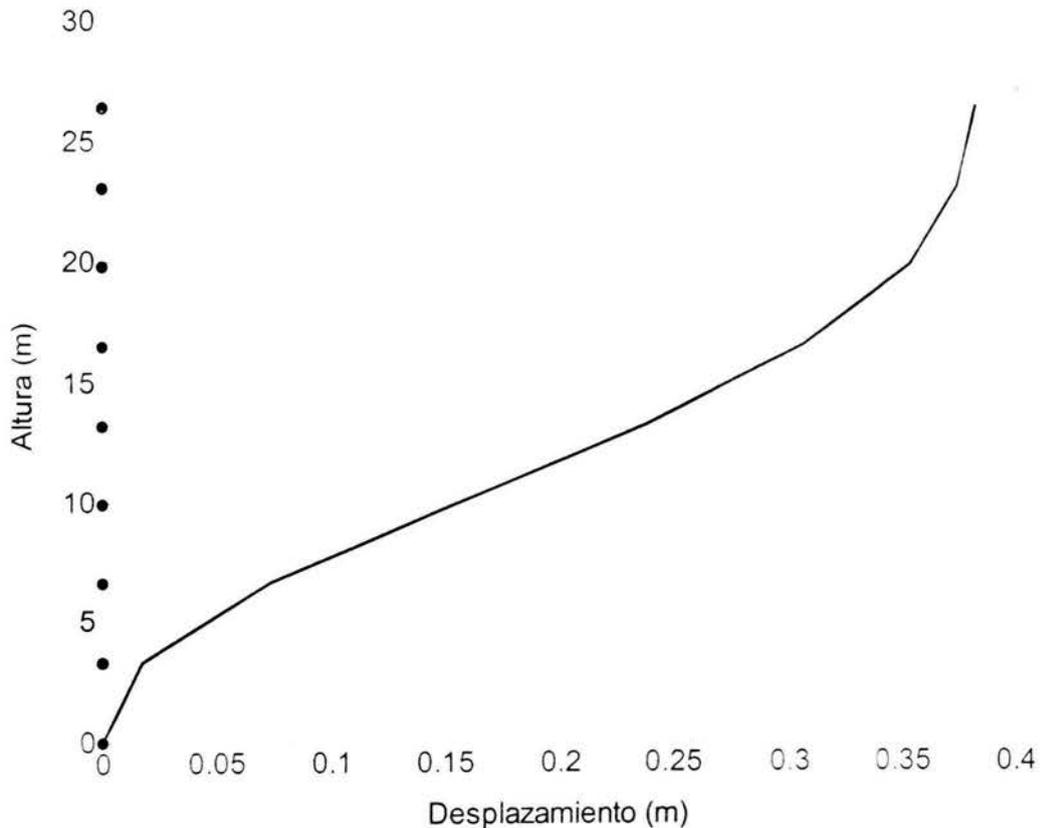


Figura 6.2. Desplazamiento espectral del modo correspondiente a la segunda rama de la curva de comportamiento que produce una distorsión de 2.5% del entrepiso crítico.

Debido a la buena correlación que presenta la intensidad de Arias con el daño estructural Xianguo *et al.* (1994), la intensidad considerada en este trabajo para el cálculo de la fragilidad es la del valor esperado de la intensidad de Arias (Arias, 1990), el cual se calcula en términos de la varianza del proceso estocástico, en la forma:

$$E[I] = E \left[\frac{\pi}{2g} \int_0^{t_d} \tilde{a}_s^2(t) dt \right] = \frac{\pi}{2g} \int_0^{t_d} \sigma_s^2(t) dt , \quad (6.6)$$

donde t_d , es el tiempo de duración de la señal. La probabilidad de exceder el estado límite considerado se graficó con las intensidades calculadas a través de la ec. (6.6) y se interpolaron los puntos graficados con la curva lognormal que mejor ajustaba los datos.

La curva de fragilidad correspondiente a la estructura de $T = 2$ s, se muestra en la Fig. 6.3, con trazo discontinuo. Esta curva ajusta los valores de fragilidad que resultan de resolver las ecuaciones obtenidas a través del método de la linealización equivalente. Los valores que se obtienen usando el método de Monte Carlo también se muestran y quedan dentro de un error razonable (menos del 10%). En la misma gráfica, se muestra la curva de fragilidad de la estructura de $T = 0.87$ s, los valores de fragilidad que resultan de utilizar las ecuaciones de la linealización equivalente y los de Monte Carlo, dando igualmente resultados razonables.

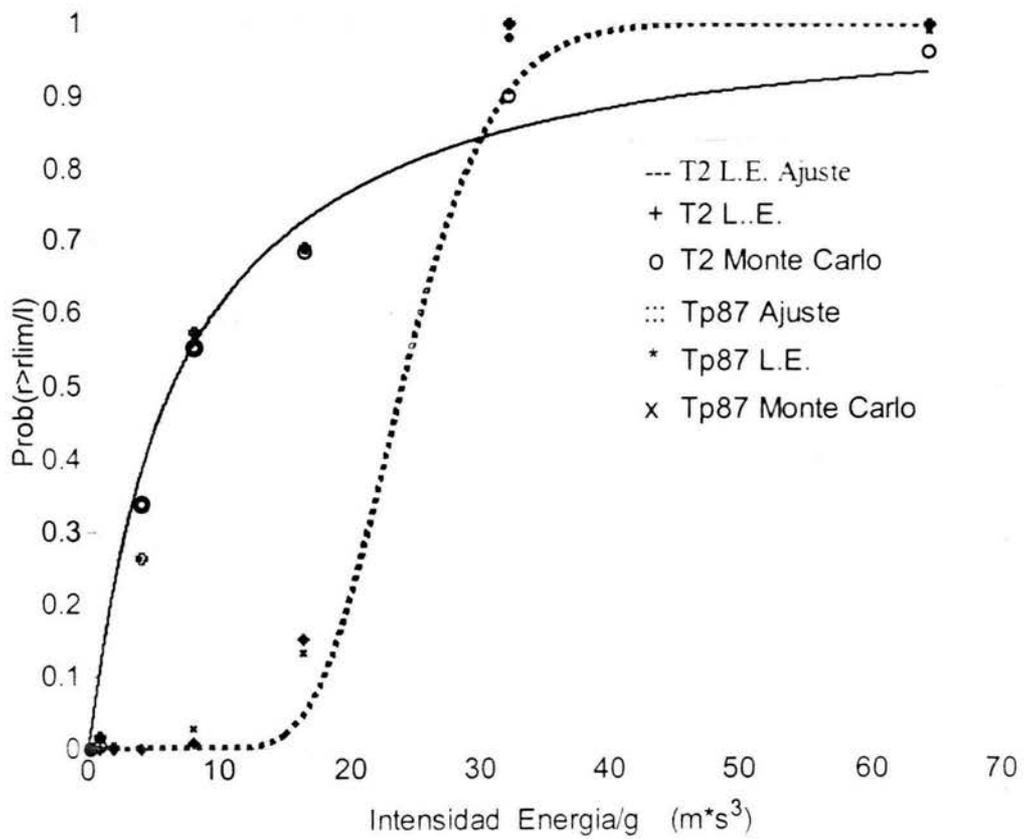


Figura 6.3. Curvas de fragilidad correspondientes a los sistemas con $T=0.8s$ y con $T = 2s$.

CAPÍTULO 7

CONCLUSIONES

7.1 Conclusiones sobre el método para el cálculo de la fragilidad sísmica de una estructura

En esta tesis, se desarrolla un método para el cálculo de curvas de fragilidad sísmica de estructuras hechas a base de marcos. Los resultados encontrados se comparan con simulaciones de Monte Carlo para su verificación, demostrando que el método planteado tiene grandes posibilidades de ser una herramienta práctica.

El método propuesto parte de la posibilidad de reducir un sistema de múltiples grados de libertad a un sistema equivalente de uno sólo, cuya regla de disipación histerética este dado por un modelo bilineal extraído de la curva de capacidad de la estructura. La obtención de la curva de comportamiento y el sistema de 1GDL equivalente ha sido estudiada ampliamente por distintos autores (p.e. Ayala, 1999 y Requena, 1998), que concluyen no sólo con el validamiento del método sino con interesantes posibilidades como la del diseño sísmico por desempeño de estructuras. El método aquí propuesto requiere de esta simplificación, y brinda grandes posibilidades teóricas y prácticas al análisis y diseño de las estructuras que se estudian mediante su curva de comportamiento.

La caracterización del ensamble sísmico de señales simuladas con funciones de Green empíricas como un proceso estocástico, condujo a que el ensamble es el resultado de realizaciones de un proceso Gaussiano evolutivo en la media y en la densidad espectral de potencia. Esto llevó a la necesidad de acoplar a la ecuación diferencial de la matriz del segundo momento estadístico de la respuesta del oscilador bilineal con la ecuación diferencial de la media del mismo.

Para la obtención de las curvas de fragilidad sísmica se incorporó el método de simulación sísmica de la función de Green empírica, dentro del marco teórico de la linealización equivalente, obteniendo un sistema lineal cuyos resultados estadísticos de primer y segundo orden son iguales (dentro de un error razonable) a aquellos que se obtienen con simulaciones de Monte Carlo; demostrando que el método de la linealización equivalente es una herramienta útil para obtener las matrices de primer y segundo momento estadístico de la respuesta de un oscilador bilineal sujeto a un proceso estocástico que caracteriza un ensamble sísmico simulado a través del método de la función de Green empírica. En los casos en los que la respuesta del oscilador es prácticamente lineal, se puede suponer que la respuesta del oscilador es Gaussiana, pero es necesario suponer distinto comportamiento probabilístico de la respuesta en los casos en que el oscilador incursiona en el intervalo no lineal. Esto se debe al hecho de que la variable de estado z , presenta un comportamiento muy alejado del Gaussiano, tendiendo a concentrar la probabilidad en los valores de fluencia del desplazamiento. El modelo de Kimura *et al.* se aplicó para el caso de media cero e incursiones del sistema equivalente en ductilidades mucho mayores que uno, y se obtuvieron resultados para la varianza que se comparan bien (errores del 10%) con las varianzas obtenidas utilizando el modelo de Monte Carlo. Para el caso de comportamiento lineal del sistema equivalente y considerando que el proceso estocástico que caracteriza al ensamble sísmico tiene media evolutiva, la media y la varianza de la respuesta del sistema equivalente obtenida utilizando vibración aleatoria se comparan bien con los resultados obtenidos utilizando el método de Monte Carlo, como se ilustra en la Fig. (4.9). El modelo extendido de Kimura *et al.* es adecuado para el marco de la linealización equivalente, y nos proporciona la posibilidad de considerar el comportamiento de concentración de probabilidad de la variable de estado z en el caso de incursión del sistema equivalente en

ductilidades mayores que 1.3. Para estos casos, la varianza y la media de la respuesta, calculadas conjuntamente utilizando el método de la linealización equivalente, se encuentran dentro del 10% de error de aquellos que resultan de utilizar el método de Monte Carlo.

Las funciones de densidad de probabilidad (fdp) de los máximos de la respuesta del oscilador condicionadas a una intensidad sísmica dada, se obtuvieron por dos caminos: por un lado se utilizó la teoría de la vibración aleatoria para el cálculo de las distribuciones de extremos, utilizando la media y la varianza que resultan del método de la linealización equivalente, y por el otro camino, se utilizó el método de Monte Carlo. Los máximos de las respuestas, obtenidos usando el método de Monte Carlo, fueron organizados en un **histograma que fue comparado con la fdp que resulta de la vibración aleatoria** utilizando una prueba de Kolmogorov con un nivel de significancia de 0.05, indicando que el camino por el que se calcule la fdp es indistinto.

El cálculo de las curvas de fragilidad requiere de las fdp de los máximos de la respuesta para distintas intensidades sísmicas, y del valor de la respuesta que define la incursión de la estructura en el estado límite de interés. En este estudio, el interés fue puesto en el estado límite correspondiente a un estado de colapso incipiente, caracterizado en términos de una distorsión de entrepiso de mas del 2.5%. Asociado a este estado límite, la estructura tiene un período fundamental y un modo fundamental correspondiente, con el conocimiento de dicho modo, se estuvo en la posibilidad de calcular el valor del desplazamiento asociado que produce en el entrepiso crítico la distorsión requerida. Sustituyendo este valor dentro de las fdp de los máximos se calcularon las curvas de fragilidad del sistema de período $T = 0.87$ s y el sistema de 1GDL de $T = 2$ s.

Las curvas de fragilidad tienen gran aplicación en la práctica de la ingeniería y su aplicación en la evaluación de la vulnerabilidad sísmica de estructuras del Valle de México demuestra ser una herramienta útil para la prevención de daño y de desastres. Si bien el cálculo de las curvas de fragilidad representa una cantidad considerable de trabajo, se

espera que esta tesis contribuya al entendimiento de las mismas y permita su cálculo de forma racional y de manera relativamente rápida.

7.2 Contribuciones

El camino que se adoptó para evaluar las curvas de fragilidad tiene la novedad de utilizar linealización equivalente con un método de simulación sísmica que no resulta de filtrar ruido blanco. Esto ha resultado en que las ecuaciones por resolver y sus métodos de solución, sean distintas a las que se utilizan (Hurtado, 1998). Este hecho llevó a la necesidad de caracterizar mediante un proceso estocástico el ensamble que resulta de los métodos de simulación de la función de Green empírica, resultando en un proceso estocástico Gaussiano evolutivo tanto en la media como en la densidad espectral de potencia.

Para el método de la linealización equivalente, es novedoso el hecho de que se utilicen una covarianza y una media evolutivas como entrada del sistema de ecuaciones por resolver. Las fdp conjuntas, supuestas a priori para la caracterización probabilística de la respuesta del oscilador es la primera vez que se plantean, puesto que consideran la media evolutiva, lo que resulta en una extensión al método de Kimura.

El método planteado para el cálculo de las curvas de fragilidad, utilizando el método de la linealización equivalente con el método de simulación sísmica de la función de Green empírica, llevó a que todo el procedimiento a seguir tuviera que ser novedoso, tanto para el cálculo de las fdp de los máximos como para el cálculo de las curvas de fragilidad mismas.

REFERENCIAS

Ang A. H-S. y Tang W. H. (1975). "Probability Concepts in Engineering Planning and Design". John Wiley & Sons INC. Vol. I. Nueva York, N. Y.

Arias A. (1970). Earthquake Intensity and Smoothed Earthquake Spectra, Proceeding, V WCEE, Roma, pp. 1659-1669.

Atalik T. S. y Utku S. (1976). Stochastic linearization of multi-degree of freedom non-linear systems. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 4, pp. 411-420.

Ayala G. (1999). Evaluación del Desempeño Sísmico de Estructuras, un Nuevo Enfoque. Conferencia de ingreso como Académico de Número, Academia Mexicana de Ingeniería, México.

Ayala M. (1999). Evaluación del Comportamiento Sísmico de Estructuras de Edificios Asimétricos en 3D. Tesis de Maestría, División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería de la UNAM.

Barrón R. (1999). Structural Evaluation of Seismic Fragility of Structures. Doctoral dissertation. Faculty of Graduate School of State University at Buffalo, Buffalo, N. Y.

Baber T. T. y Wen Y. K. (1979). Stochastic Equivalent Linearization for Hysteretic, Degrading, Multistory Structures. *Structural Research Series*, Vol. 471, University of Illinois, Department of Civil Engineering, Urbana-Champaign-Ill.

Bouc R. (1967). Forced Vibration of Mechanical Systems with hysteresis. Proceedings of the Fourth Conference on Nonlinear Oscillation, Praga, Checoslovaquia.

Brune J. N. (1970). Tectonic stress and the spectra of seismic shear waves from earthquakes. *Journal of Geophys Res.* Vol. 75, pp. 4997 – 5009.

Caicedo C., Barbat A. H., Canas J. A. y Aguilar R. (1994). “Vulnerabilidad Sísmica de Edificios”. Monograph Series in Earthquake Engineering. Editado por A. H. Barbat. Monograph CIMNE IS-6, Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona.

Cartwright D. E. y Longuet-Higgins M. S. (1956). The Statistical Distribution of the Maxima of a Random Function. *Proc. Royal Society, Ser. A*, Vol. 237, Oct., Londres.

Casciati F. (1987). Nonlinear Stochastic Dynamics of Large Structural Systems by Equivalent Linearization, *Proceedings ICASP5*, Vancouver.

Casciati F. y Faravelli L. (1991). “Fragility Analysis of Complex Structural Systems”. John Wiley & Sons INC. Nueva York, N.Y.

Caughey T. K. (1963). Equivalent Linearization Techniques. *Journal of the Acoustical Society of America*. Vol. 35, pp. 1706-1711.

Clough R. W. y Penzien J. (1993). “Dynamics of Structures”. Mc Graw-Hill International Editions. Nueva York, N. Y.

Cohen L. (1995). “Time Frequency Analysis”. Prentice Hall Signal Processing Series Alan V. Oppenheim, Series Editor. Englewood Cliffs, NJ.

Corsanego A. y Petrini V. (1990). Seismic vulnerability of buildings. *Proceedings of the SEISMED 3*, Trieste, Italy.

Crandall S. H. y Mark W. D. (1963 a). “Random Vibrations in Mechanical Systems”. Academic Press, New York, N. Y.

Crandall S. H. (1963 b). Envelope Distribution of a Broad Band Process and other Statistical Measures of Random Responses. *Journal of Acoust. Soc. of America*, Vol. 12, pp. 11.

Crandall S. H. (1978). Heuristic and Equivalent Linearization Techniques for Random Vibration of Non-Linear Oscillators. *Proceedings of the 8th International Conference on Non-Linear Oscillation*, Vol. 1, Academia Prague pp. 211-226.

Eurocódigo (1998). "Disposiciones para el Proyecto de Estructuras Sismoresistentes". AENOR, 28004 Madrid, España.

Fafjar P. y Gaspersic P. (1996). The N2 method for the seismic damage analysis of RC buildings, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 25, pp. 31-46.

Faravelli L. (1988). Stochastic Modeling of the seismic excitation for structural dynamics purposes. *Probabilistic Engineering Mechanics*. Vol. 3, pp. 189-195.

Freeman S., Nicoletti J. P. y Tyrrell J. V. (1975). Evaluation of existing buildings for seismic risk. A case study of Puget Sound Naval Shipyard, Bremerton, Washington. *Proceedings of the 1st US National Conference on Earthquake Engineering*, EERI, Ann Arbor, Mi.

Hurtado J. E. (1998). "Stochastic Dynamics of Hysteretic Structures". Monograph Series in Earthquake Engineering. Editado por A. H. Barbat. Monograph CIMNE IS-25, Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona.

Iwan W. D. y Yang I. M. (1972). Application of statistical linearization techniques to nonlinear multidegree of freedom systems. *Journal of Applied Mechanics*. Vol. 39, pp. 545-550.

Johnson, L. N. y Kotz, S. (1972). "Distribution in statistics: Continuous Multivariate Distribution". John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, N.Y., Capítulo 35, pp. 59.

Kimura K., Yasumuro, H. y Sakata M. (1994). "Non Gaussian Equivalent Linearization for Nonstationary Random Vibration of Hysteretic System." Probabilistic Engineering Mechanics, Vol. 9, pp. 15- 22.

Sarabandis P., Pachakis D., King S. y Kiremidjian A. (2003). Development of empirical building performance functions data from past earthquakes. Applications of Statistics and Probability in Civil Engineering. Der Kiureghian, Madanat y Pestana Editores. Millpress, Rotterdam. Vol. 1, pp. 629-635.

Krylov N. y Bogoliubov N. (1943). Introduction to nonlinear mechanics. Princeton University Press, New York, N. Y.

Lin Y. K. y Cai G. Q. (1995). "Probabilistic Structural Dynamics". McGraw-Hill International Editions New York, N. Y.

Lin Y. K. y Cai G. Q. (1988). "Equivalent Stochastic System". ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 55, No. 4, pp. 702-705.

Lutes L. D. y Sarkani S. (1997). "Stochastic Analysis of Structural and Mechanical Vibrations". Prentice- Hall, Upper Saddle River. N.J.

Michaelov G., Sarkani S. y Lutes. L. D. (1999). Spectral Characteristics of Nonstationary Random Processes. Structural Safety, Vol. 21, pp. 223 – 224.

Mossalam K. M., Ayala G., White R. N., Gergely P. y Roth Ch. (1997). Computational Strategies for Frames with Infill Walls: Discrete and Smeared Crack Analyses and Seismic Fragility. NCEER-97-0021, Buffalo N.Y.

Ordaz M., Arboleda J., y Singh S. K. (1995). "A Scheme of Random Summations of an Empirical Green's Function to Estimate Ground Motions from Future Large Earthquakes". *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol. 85, No. 6, pp. 1635-1647.

Papoulis A. (1978). "Sistemas Digitales y Analógicos Transformadas de Fourier, Estimación Espectral". Marcombo Boixerau Editores. Barcelona – 7. España.

Papoulis A. (1984). "Probability, Random Variables and Stochastic Processes". Ed. McGraw Hill. Nueva York, N. Y.

Reyes S. J. (1999). *El Estado Límite de Servicio en el Diseño Sísmico de Edificios*. Tesis de Doctorado, División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería de la UNAM.

Rice S. O. (1944). *Mathematical Analysis of Random Noise*. *Bell Syst. Tech. Journal* Vol. 23, pp. 282.

Rice S. O. (1945). *Mathematical Analysis of Random Noise*. *Bell Syst. Tech. Journal* Vol. 24, pp. 46.

Roberts J. B. y Spanos P. D. (1990). "Random Vibration and Statistical Linearization". Wiley, New York, N.Y.

Safina S. M. (2002). *Vulnerabilidad Sísmica de Edificaciones Esenciales Análisis de su Contribución al Riesgo Sísmico*. Tesis Doctoral. Universidad Politécnica de Cataluña. España.

Sandoval P. C. (2000). *Procedimiento de Diseño Sísmico por Desempeño, Basado en un Método Simplificado de Análisis no Lineal*. Tesis de Maestría, División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería de la UNAM.

- SEAOC (1995). *Visión 2000. Performance Based Seismic Engineering of Buildings*. Structural Engineers Association of California, Sacramento, California.
- Quian S. y Chen D. (1996). "Joint Time – Frequency Analysis". Prentice Hall Upper Saddle River, NJ.
- Silva F. (2002). *Respuesta Estocástica de Estructuras Histeréticas Sujetas a Sismos*. Tesis de Doctorado, División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería de la UNAM.
- SLAC (2000). *Specification for Seismic Design of Buildings, Structures, Equipment and Systems at the Stanford Linear Accelerator Center*. SLAC-I-720-0A24E-002.
- Soong T. T. y Grigoriou M. (1993). "Random Vibration of Mechanical and Structural Systems". P T R Prentice - Hall, Upper Saddle River, N. J.
- U.S. Nuclear Regulatory Commission (NRC). (1983). *PRA Procedures Guide*. NUREG/CR-2300, Vol. 2, pp.
- Vanmarke E. H. (1972). *Properties of Spectral Moments with Applications to Random Vibrations*. Journal of Eng. Mech. Div. ASME, Vol. 42, pp. 215-220.
- Waisman F. y Grigoriu M. (1996). *Reliability and Performance of Nonstructural Components*. NCEER State of the art report on secondary systems.
- Wen Y. K. (1975). *Method for Random Vibration of Hysteretic Systems*. Journal of Engineering Mechanics, Vol. 102, pp. 249-263.
- Xianguo Y., Ayala G. y Escobar J. A. (1994). *Evaluación analítica del daño estructural en un marco de concreto reforzado sujeto a sismo*. IX Congreso Nacional de Ingeniería Estructural Zacatecas, Zacatecas. Memoria II, pp. 639-648.

APÉNDICE A

ESPERANZA DE LA NORMA CUADRADA DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE LA SEÑAL SIMULADA Y DE LA SEÑAL SIMULADA CENTRADA

A.1 Esperanza de la norma cuadrada de la transformada de Fourier de la señal simulada

El cálculo de $E\left[|A_s(\omega)|^2\right]$, se desarrolla a partir de:

$$E\left[|A_s(\omega)|^2\right] = E\left[A_s(\omega)A_s^*(\omega)\right],$$

que lleva a:

$$E\left[|A_s(\omega)|^2\right] = E\left[F\{a_s(t)\}F\{a_s(t)\}^*\right]$$

y sustituyendo la eq. (3.1), en la última expresión se obtiene:

$$E\left[|A_s(\omega)|^2\right] = E\left[F\left\{\xi \sum_{i=1}^N a_e(t-\tau_i)\right\}F\left\{\xi \sum_{j=1}^N a_e(t-\tau_j)\right\}^*\right]$$

donde $F\{a(t)\}$, es la transformada de Fourier de $a(t)$. Utilizando la propiedad de linealidad de la transformada de Fourier se obtiene:

$$E\left[|A_s(\omega)|^2\right] = E\left[\xi^2 \sum_{i=1}^N F\{a_e(t-\tau_i)\} \sum_{j=1}^N F\{a_e(t-\tau_j)\}^*\right],$$

y aplicando la transformada de Fourier en su forma integral:

$$E\left[|A_s(\omega)|^2\right] = E\left[\xi^2 \sum_{k=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} a_e(t-\tau_k) e^{-i\omega t} dt \sum_{j=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} a_e(t-\tau_j) e^{i\omega t} dt\right],$$

haciendo el cambio de variable que se indica, se obtiene:

$$E\left[|A_s(\omega)|^2\right] = E\left[\xi^2 \sum_{k=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} a_e(u) e^{-i\omega(u+\tau_k)} du \sum_{j=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} a_e(v) e^{i\omega(v+\tau_j)} dv\right]$$

$$u = t - \tau_k$$

$$v = t - \tau_j$$

Extrayendo de las sumas los elementos que no dependen de los índices:

$$E\left[|A_s(\omega)|^2\right] = E\left[\xi^2 \sum_{k=1}^N e^{-i\omega\tau_k} \int_{-\infty}^{\infty} a_e(u) e^{-i\omega u} du \sum_{j=1}^N e^{i\omega\tau_j} \int_{-\infty}^{\infty} a_e(v) e^{i\omega v} dv\right],$$

y sustituyendo la transformada de Fourier por una función dependiente de la frecuencia:

$$E\left[|A_s(\omega)|^2\right] = E\left[\xi^2 A_e(\omega) A_e^*(\omega) \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N e^{-i\omega\tau_k} e^{i\omega\tau_j}\right],$$

y por tratarse de funciones conjugadas complejas:

$$E\left[|A_s(\omega)|^2\right] = E\left[\xi^2 |A_e(\omega)|^2 \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N e^{-i\omega(\tau_k-\tau_j)}\right].$$

Utilizando la propiedad de linealidad del operador de esperanza:

$$E\left[|A_s(\omega)|^2\right] = \xi^2 |A_e(\omega)|^2 \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N E\left[e^{-i\omega(\tau_k-\tau_j)}\right].$$

Separando las sumas en los elementos con $j = k$, y con $j \neq k$, se obtiene:

$$E\left[|A_s(\omega)|^2\right] = \xi^2 |A_e(\omega)|^2 \left\{ \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \delta_{kj} E\left[e^{-i\omega(\tau_k - \tau_j)}\right] + \sum_{k=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N E\left[e^{-i\omega(\tau_k - \tau_j)}\right] \right\},$$

donde la función δ_{kj} es la delta de Kronecker definida: $\delta_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = j \\ 0 & \text{si } k \neq j \end{cases}$.

La esperanza de una función de variables con subíndices j y k , idénticamente distribuidas, hace que estos se pierdan, ya que los pone bajo el signo de integral volviéndolos variable comodín. Conduciendo a:

$$E\left[|A_s(\omega)|^2\right] = \xi^2 |A_e(\omega)|^2 \left\{ \sum_{k=1}^N 1 + E\left[e^{-i\omega(\tau - \tau')}\right] \sum_{k=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N 1 \right\}.$$

Sumando se obtiene:

$$E\left[|A_s(\omega)|^2\right] = \xi^2 |A_e(\omega)|^2 \left\{ N + (N^2 - N) E\left[e^{-i\omega(\tau - \tau')}\right] \right\}.$$

Aplicando la definición integral de la esperanza sobre la función bivariada, se obtiene:

$$E\left[|A_s(\omega)|^2\right] = \xi^2 |A_e(\omega)|^2 \left\{ N + (N^2 - N) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(\tau - \tau')} p(\tau, \tau') d\tau d\tau' \right\}.$$

Por hipótesis las variables aleatorias τ , son independientes lo que conduce a:

$$E\left[|A_s(\omega)|^2\right] = \xi^2 |A_e(\omega)|^2 \left\{ N + (N^2 - N) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} p(\tau) d\tau \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau'} p(\tau') d\tau' \right\}.$$

En la última expresión se observa que las expresiones bajo el signo de integral corresponden a la transformada de Fourier de las funciones involucradas:

$$E\left[|A_s(\omega)|^2\right] = \xi^2 |A_e(\omega)|^2 \left\{ N + (N^2 - N) P(\omega) P^*(\omega) \right\}.$$

Puesto que se trata de funciones conjugadas complejas se obtiene finalmente:

$$E\left[|A_s(\omega)|^2\right] = \xi^2 |A_e(\omega)|^2 \left\{ N + (N^2 - N) |P(\omega)|^2 \right\},$$

que es lo que se quería demostrar.

A.2 Esperanza de la norma cuadrada de la transformada de Fourier de la señal simulada centrada

La esperanza de la transformada de Fourier de la señal centrada se define:

$$E\left[|\tilde{A}_s(\omega)|^2\right] = E\left[|A_s(\omega) - \mu_s(\omega)|^2\right].$$

Utilizando las propiedades de multiplicación en los complejos es equivalente a:

$$E\left[|\tilde{A}_s(\omega)|^2\right] = E\left[(A_s(\omega) - \mu_s(\omega))(A_s(\omega) - \mu_s(\omega))^*\right],$$

y a:

$$E\left[|\tilde{A}_s(\omega)|^2\right] = E\left[|A_s(\omega)|^2 - A_s(\omega)\mu_s^*(\omega) - A_s^*(\omega)\mu_s(\omega) + |\mu_s(\omega)|^2\right].$$

Utilizando la propiedad de linealidad de la esperanza y de la transformada de Fourier se obtiene:

$$E\left[|\tilde{A}_s(\omega)|^2\right] = E\left[|A_s(\omega)|^2\right] - \mu_s(\omega)\mu_s^*(\omega) - \mu_s^*(\omega)\mu_s(\omega) + |\mu_s(\omega)|^2,$$

que es equivalente a:

$$E\left[|\tilde{A}_s(\omega)|^2\right] = E\left[|A_s(\omega)|^2\right] - |\mu_s(\omega)|^2.$$

Utilizando la definición de la transformada de Fourier de la media de la señal se obtiene:

$$E\left[|\tilde{A}_s(\omega)|^2\right] = E\left[|A_s(\omega)|^2\right] - \left|F\{E[a_s(t)]\}\right|^2.$$

Sustituyendo en la última expresión la ec. (2.1), se obtiene:

$$E\left[|\tilde{A}_s(\omega)|^2\right] = E\left[|A_s(\omega)|^2\right] - \left|F\left\{E\left[\xi \sum_{i=1}^N a_s(t - \tau_i)\right]\right\}\right|^2.$$

Utilizando la propiedad de linealidad de la esperanza se obtiene:

$$E\left[|\tilde{A}_s(\omega)|^2\right] = E\left[|A_s(\omega)|^2\right] - \left|F\left\{\xi \sum_{i=1}^N E[a_e(t - \tau_i)]\right\}\right|^2.$$

Como la esperanza de una variable con subíndice la pone bajo el signo de integral y transforma dicha variable en una variable comodín, la función pierde la dependencia de su subíndice y conduce a:

$$E\left[|\tilde{A}_s(\omega)|^2\right] = E\left[|A_s(\omega)|^2\right] - \left|F\left\{\xi N E[a_e(t - \tau)]\right\}\right|^2.$$

Aplicando la definición integral de la esperanza:

$$E\left[|\tilde{A}_s(\omega)|^2\right] = E\left[|A_s(\omega)|^2\right] - \left|F\left\{\xi N \int_{-\infty}^{\infty} a_e(t - \tau) p(\tau) d\tau\right\}\right|^2,$$

y utilizando la propiedad de linealidad de la transformada de Fourier se obtiene:

$$E\left[|\tilde{A}_s(\omega)|^2\right] = E\left[|A_s(\omega)|^2\right] - \left|\xi N \int_{-\infty}^{\infty} F\{a_e(t - \tau)\} p(\tau) d\tau\right|^2.$$

Aplicando la definición integral de la transformada de Fourier conduce a:

$$E\left[|\tilde{A}_s(\omega)|^2\right] = E\left[|A_s(\omega)|^2\right] - \left|\xi N \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a_e(t - \tau) e^{-i\omega t} dt p(\tau) d\tau\right|^2.$$

Haciendo el cambio de variable: $u = t - \tau$, y por lo tanto $du = dt$, se obtiene:

$$E\left[|\tilde{A}_s(\omega)|^2\right] = E\left[|A_s(\omega)|^2\right] - \left|\xi N \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a_e(u) e^{-i\omega(u+\tau)} du p(\tau) d\tau\right|^2,$$

y separando las integrales según sus argumentos se obtiene:

$$E\left[|\tilde{A}_s(\omega)|^2\right] = E\left[|A_s(\omega)|^2\right] - \left|\xi N \int_{-\infty}^{\infty} a_e(u) e^{-i\omega u} du \int_{-\infty}^{\infty} p(\tau) e^{-i\omega \tau} d\tau\right|^2,$$

donde se pueden identificar claramente la transformada de Fourier de las funciones que se encuentran bajo el signo de integral:

$$E\left[|\tilde{A}_s(\omega)|^2\right] = E\left[|A_s(\omega)|^2\right] - \left|\xi N A_e(\omega) P(\omega)\right|^2.$$

Utilizando las propiedades de las operaciones de los complejos se obtiene:

$$E\left[|\tilde{A}_s(\omega)|^2\right] = E\left[|A_s(\omega)|^2\right] - \xi^2 N^2 |A_e(\omega)|^2 |P(\omega)|^2.$$

Sustituyendo el resultado de la sección A1, en la última expresión:

$$E\left[|\tilde{A}_s(\omega)|^2\right] = \xi^2 |A_e(\omega)|^2 \left\{ N + (N^2 - N) |P(\omega)|^2 \right\} - \xi^2 N^2 |A_e(\omega)|^2 |P(\omega)|^2,$$

y reduciendo términos:

$$E\left[|\tilde{A}_s(\omega)|^2\right] = \xi^2 |A_e(\omega)|^2 \left\{ N - N |P(\omega)|^2 \right\}.$$

Que es lo que se quería demostrar.

ESTA TESIS NO SALE
DE LA BIBLIOTECA

APÉNDICE B

DEPENDENCIA TEMPORAL DE LA NORMA CUADRADA DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE LA SEÑAL SIMULADA

B.1 La transformada de Fourier discreta (TFD)

Una señal $x(t)$ es periódica, si existe un número T a partir del cual se cumple: $x(t) = x(t-T)$. Bajo ciertas condiciones generales, una función periódica $x(t)$ se puede expresar en la forma de una serie infinita de funciones exponenciales, Papoulis (1984):

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{i2\pi kt/T}, \quad (\text{B.1})$$

donde los coeficientes C_k satisfacen:

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{i2\pi kt/T} dt, \quad (\text{B.2})$$

Estas ecuaciones se pueden discretizar si el tiempo se toma: $t = j\Delta t, j = 0, \dots, n-1, x(j\Delta t) = x_j$ y $T = n\Delta t$, donde Δt , es la tasa de muestreo de la señal. Utilizando la aproximación de sumas de Riemann para las integrales:

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{i2\pi kt} dt = \frac{1}{n\Delta t} \sum_{j=0}^{n-1} x_j e^{i2\pi kj \Delta t} = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} x_j e^{i2\pi kj/n} = \frac{1}{n} \xi_k. \quad (\text{B.3})$$

Si el factor $1/n$ de (B.3), se pasa a la ecuación (B.1), y se consideran sólo los elementos de la TFD con que se cuenta, el par de transformadas de Fourier discretas queda:

$$x_j = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k e^{i2\pi kj/n} \quad j = 0, \dots, n-1. \quad (\text{B.4})$$

donde:

$$\xi_k = \sum_{j=0}^{n-1} x_j e^{-i2\pi kj/n} \quad k = 0, \dots, n-1. \quad (\text{B.5})$$

El hecho de que al sustituir (B.5) en (B.4) se cumpla la identidad, se debe a la propiedad de ortogonalidad de las funciones exponenciales. Para apreciar este hecho, se parte de la siguiente expresión matemática con $r < 1$:

$$S_n = \sum_{j=0}^{n-1} r^j, \quad (\text{B.6})$$

y multiplicando por r se obtiene:

$$rS_n = \sum_{j=0}^{n-1} r^{j+1}. \quad (\text{B.7})$$

Restando (B.7) a (B.6) y despejando S_n se obtiene:

$$S_n = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}. \quad (\text{B.8})$$

Sustituyendo (B.5) en (B.4) se obtiene:

$$x_j = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{m=0}^{n-1} x_m e^{-i2\pi km/n} e^{i2\pi kj/n}, \quad (\text{B.9})$$

cambiando el orden de las sumas, se obtiene:

$$x_j = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} x_m \sum_{k=0}^{n-1} e^{-i2\pi(m-j)k/n} \quad (\text{B.10})$$

Considerando:

$$S_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} e^{-i2\pi(m-j)k/n}, \quad (\text{B.11})$$

y tomando:

$$r = e^{-i2\pi(m-j)/n}, \quad (\text{B.12})$$

y sustituyendo (B.11) y (B.12) en (B.8), considerando que el subíndice en (B.11) es $n-1$, se obtiene:

$$S_{n-1} = \begin{cases} \frac{r^n - 1}{r - 1} = \frac{e^{-i2\pi(m-j)} - 1}{e^{-i2\pi(m-j)/n} - 1} = 0 & \text{si } m = j \\ n & \text{si } m \neq j \end{cases} = n\delta_{mj} \quad (\text{B.13})$$

donde: $\delta_{mj} = \begin{cases} 1 & \text{si } m = j \\ 0 & \text{si } m \neq j \end{cases}$. Al hecho de que S_{n-1} , satisfaga la ec. (B.13) se le conoce como la propiedad de ortogonalidad de las funciones exponenciales. Sustituyendo (B.13) en (B.10), se obtiene:

$$x_j = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} x_m n\delta_{mj} = x_j \quad (\text{B.14})$$

Que era a lo que se quería llegar. Utilizando la propiedad de ortogonalidad, es fácil obtener el principio de Parseval, Papoulis (1984), en forma discreta:

$$\sum_{j=0}^{n-1} |x_j|^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |\hat{x}_k|^2$$

B.2 Periodicidad de la TFD y frecuencia máxima

Una de las consecuencias de obtener x_j a través de la ec. (B.4), es el valor que obtiene x cuando j se encuentra fuera del intervalo $[0, n-1]$. Especialmente cuando se evalúa en $j - mn$, con m entero, se obtiene:

$$x_{j+mn} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k e^{i2\pi k(j+mn)/n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k e^{i2\pi kj/n} e^{i2\pi km} = x_j. \quad (\text{B.15})$$

Por lo que x_j resulta ser una variable periódica de período n . Lo mismo sucede para la TFD ξ_k . Expresando la ec. (B.5), en términos de su parte real e imaginaria, se obtiene:

$$\xi_k = \sum_{j=0}^{n-1} x_j \cos(2\pi kj/n) - i \sum_{j=0}^{n-1} x_j \text{sen}(2\pi kj/n). \quad (\text{B.16})$$

Debido a las propiedades de periodicidad de ξ_k , se pueden evaluar estos coeficientes en $-k$, y definiendo $\text{Re}(z)$ y $\text{Im}(z)$, como las parte real e imaginaria del número complejo z , respectivamente, se tiene:

$$\text{Re}(\xi_{-k}) = \text{Re}(\xi_k) \quad \text{y} \quad \text{Im}(\xi_{-k}) = -\text{Im}(\xi_k), \quad (\text{B.17})$$

debido a que el coseno es una función par y el seno es impar. Como la TFD, es una función periódica de período n , se tiene:

$$\text{Re}(\xi_{n-k}) = \text{Re}(\xi_k) \quad \text{y} \quad \text{Im}(\xi_{n-k}) = -\text{Im}(\xi_k). \quad (\text{B.18})$$

El primer término de la última expresión establece que la parte real de la TFD de una señal real, es una función par alrededor del índice $k = n/2$. La expresión del lado derecho, establece que la parte imaginaria de la TFD de una señal real, es una función impar alrededor del índice $k = n/2$. Esto implica que la información que arroja la TFD es

redundante. Esta es una condición lógica si se toma en cuenta, de acuerdo con la eq. (B.16), que:

$$\text{Im}(\xi_0) = \text{Im}(\xi_{n-2}) = 0, \quad (\text{B.19})$$

ya que el $\text{sen}(m\pi) = 0 = \text{sen}(0)$, cuando m es un entero. De la ec. (B.18), queda que la componente de mayor frecuencia de la TFD, corresponde al término $n/2$, cuya frecuencia corresponde a $1/(2\Delta t)$. Lo cual se aprecia de la ec. (B.5), ya que:

$$\xi_k = \sum_{j=0}^{n-1} x_j e^{-i2\pi k j / n} = \sum_{j=0}^{n-1} x_j e^{-i2\pi \frac{k}{n\Delta t} j \Delta t}, \quad (\text{B.20})$$

y como el tiempo se discretiza: $t = j\Delta t$, $j = 0, \dots, n-1$, a la frecuencia le corresponde: $f = k/(n\Delta t)$, $k = 0, \dots, n-1$. Puesto que el valor máximo de k es $k = n/2$, antes de que la TFD se vuelva a repetir, la frecuencia máxima, o frecuencia de Nyquist, corresponde a: $f_{\max} = (n/2)/(n\Delta t) = 1/(2\Delta t)$. Por lo que, si la señal $x(t)$, eq. (B.1), tiene frecuencias mayores de $1/(2\Delta t)$ Hz, entonces es imposible para la TFD representar acertadamente a la señal en estas frecuencias, ya que la tasa de muestreo, Δt , es demasiado grande.

B.3 La TFD de segmentos de señales digitales

Cuando se desea analizar un segmento de una señal digital utilizando la TFD, es necesario cuidar el hecho de que la TFD depende de la forma en que el segmento se extrae de la señal original. Esto, se debe a que la TFD supone intrínsecamente que los datos cuya transformada de Fourier se desea obtener, corresponden a un período de una función que se repite periódicamente. Lo que en ocasiones puede producir discontinuidades de la función en su expansión periódica, ocasionando que la TFD de la señal con discontinuidad contenga componentes de frecuencias que no aparecen en la señal original. En la Figura B.1, se presenta una señal periódica que se muestrea en un número entero del período de la señal. La señal corresponde a una función coseno con 2 Hz de frecuencia, y por lo tanto, la TFD de esta señal corresponde a un pico en esta frecuencia, como se enseña en la Figura B.2. Si

el muestreo se hubiera realizado un número no entero del período, como en el caso de la Figura B.3, la expansión periódica de la señal presenta una discontinuidad, ocasionando que su TFD presente un pico mas ancho como se aprecia en la Figura B.4. Pareciendo, como si la energía asociada a una frecuencia se hubiera “fugado” a otras frecuencias, produciendo el fenómeno conocido como fuga espectral.

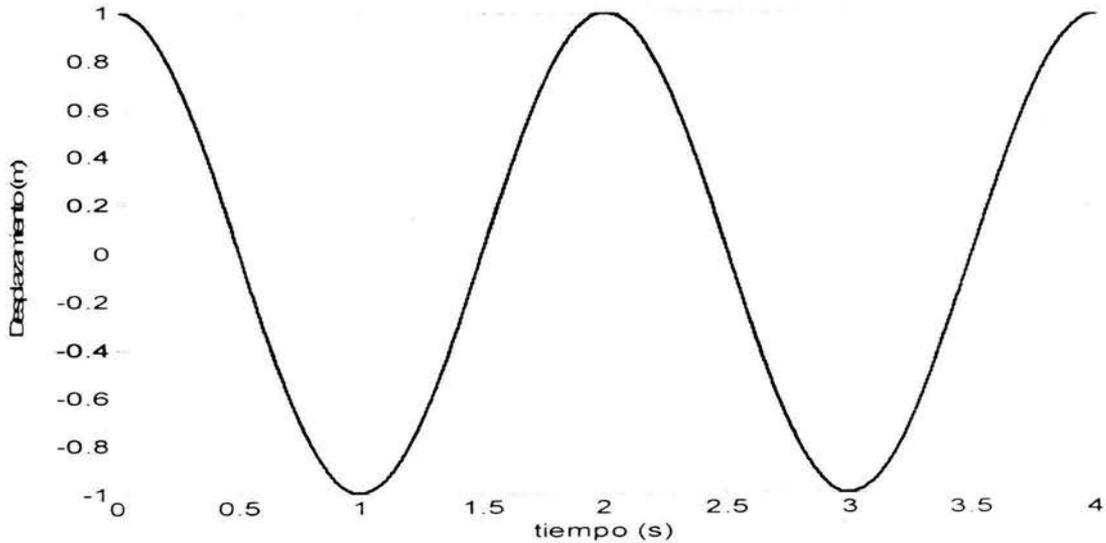


Figura B.1. Función coseno de 2 Hz de frecuencia.

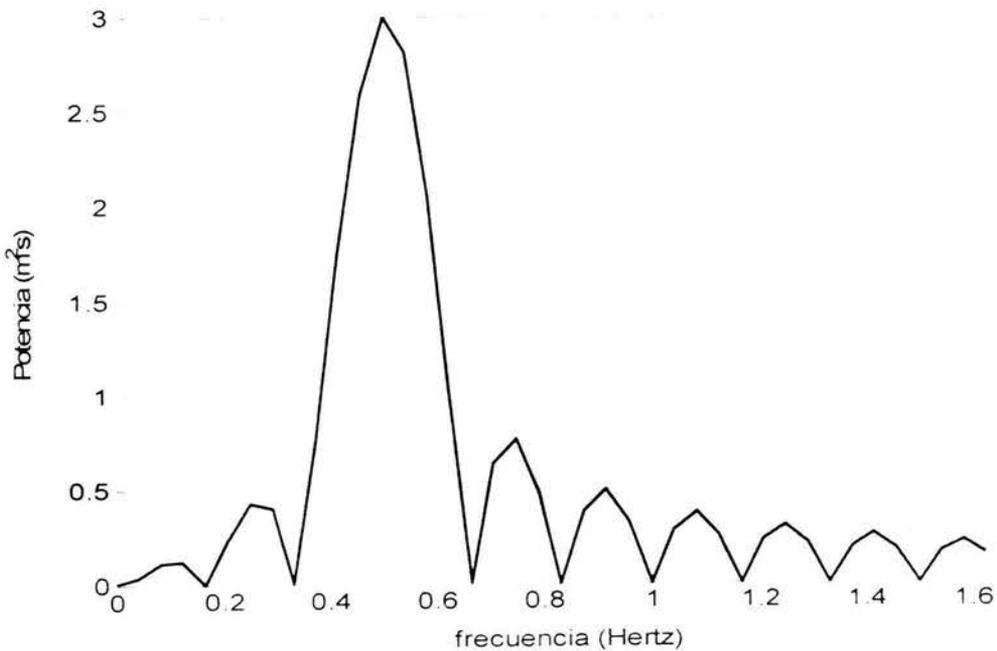


Figura B.2. TFD de la función de la Figura B.1.

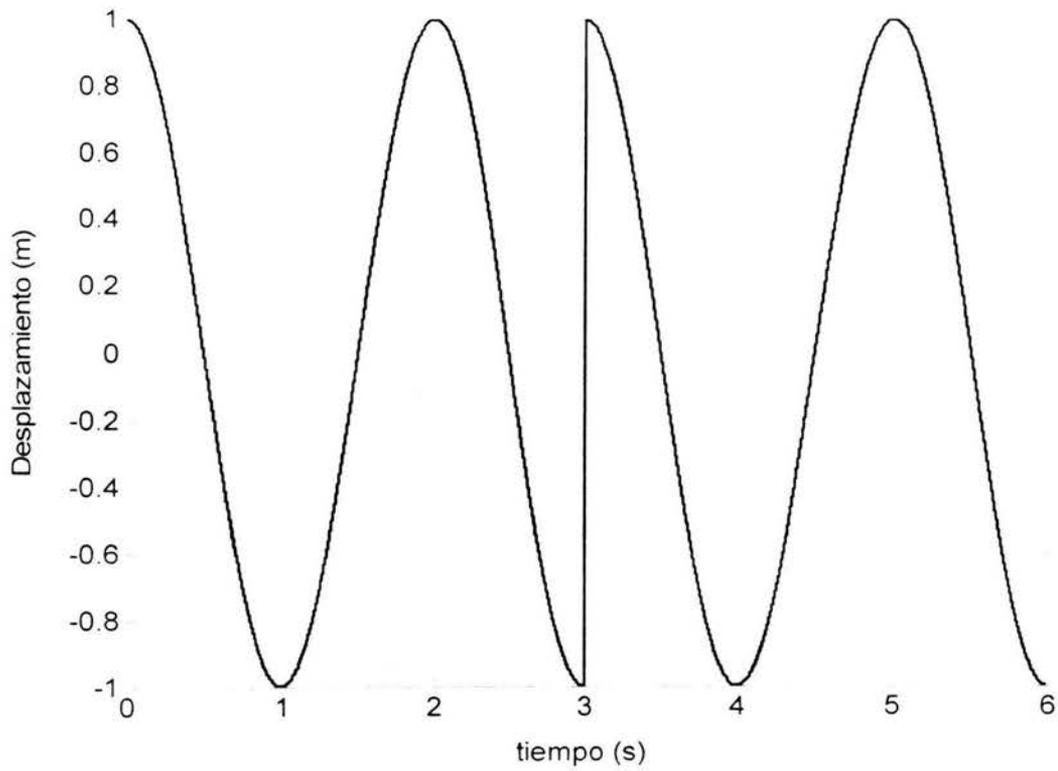


Figura B.3. Función coseno de 2 Hz, muestreada cada 3 segundos.

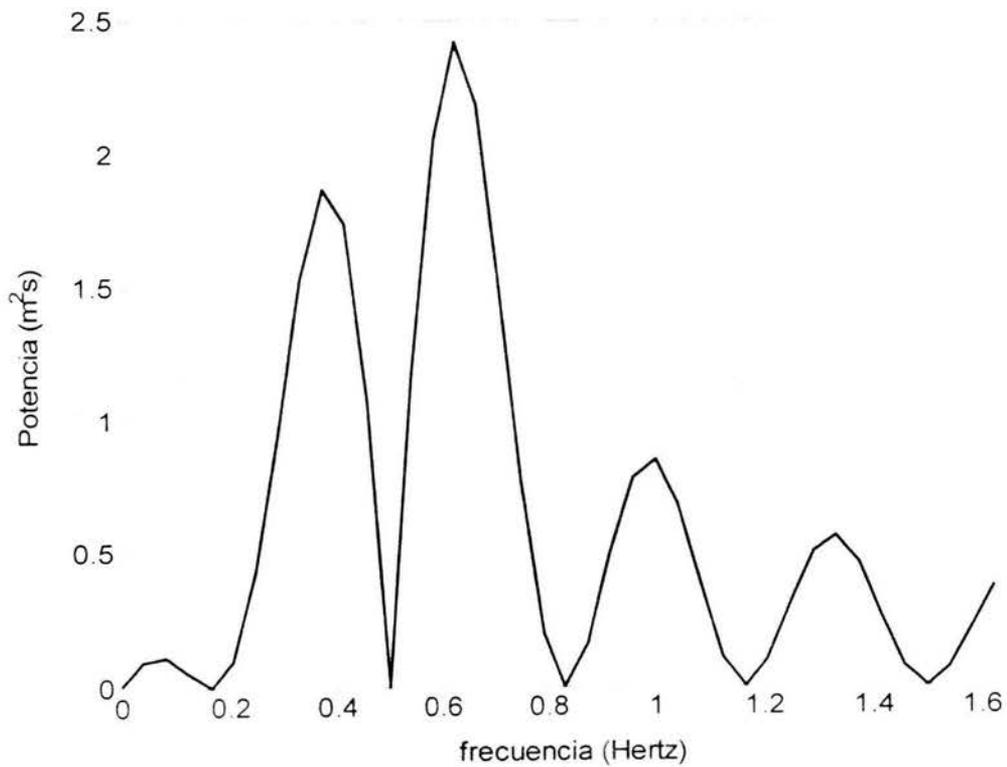


Figura B.4. TFD de la Figura B.3, que ilustra la fuga espectral.

La fuga del ejemplo representado en las Figuras B.3 y B.4, sucede por tratarse de la TFD de una señal finita, si se hubiera considerado el registro de $-\infty < t < \infty$, la TFD hubiera producido una línea espectral en el lugar correcto. Sin embargo, esto en la práctica resulta imposible, por lo que se utiliza una técnica conocida como ventaneo para reducir la fuga espectral.

La cantidad de energía fugada depende de la amplitud de la discontinuidad. Mientras más grande sea la discontinuidad mayor será la fuga espectral. El ventaneo se utiliza para reducir las discontinuidades en las fronteras del segmento de la señal que se extrae, y consiste en multiplicar la señal por una función de longitud finita cuya amplitud disminuye a cero poco a poco en los extremos. Este efecto se muestra en la Figura B.5, en la cual la señal original es ventaneada utilizando una ventana de Hamming. En la Figura B.6, se comparan las TFDs de las señales correspondientes a la Figura B.1, a la B.3 y a la B.5, y se aprecia que la potencia de la señal ventaneada se ha reducido por el efecto atenuador de la ventana, e igualmente se aprecia, la disminución de la fuga espectral.

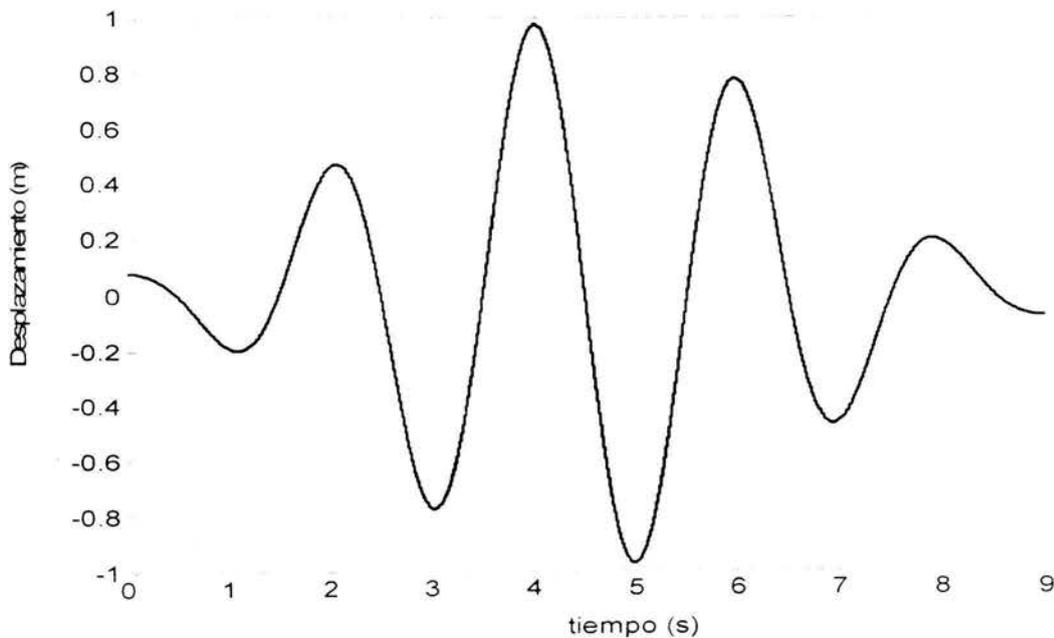


Figura B.5. Señal de la Figura B.1, multiplicada por una ventana de Hamming de 3 s de longitud (intervalo de muestreo) y 1 m de amplitud.

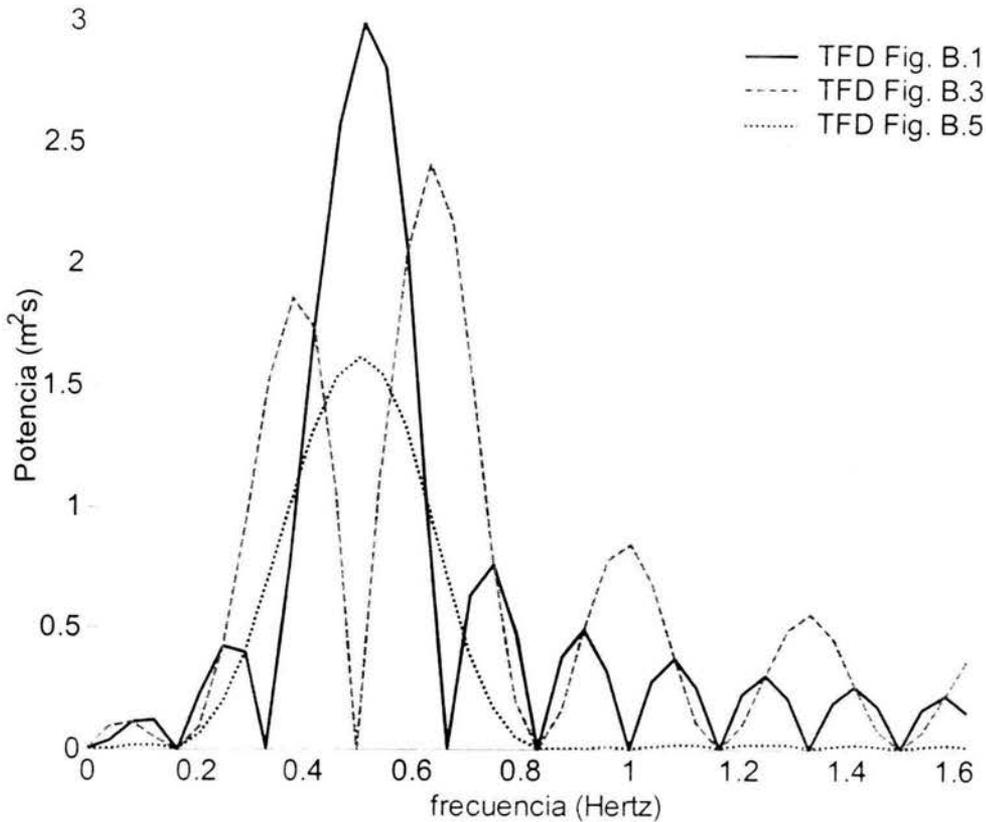


Figura B.6. TFDs de la Figura B.1, de la Figura B.3 y de la Figura B.5.

La TFD de la Fig. B.1, se puede recuperar aproximadamente a partir de la TFD de la señal ventaneada si se divide entre la potencia de la señal ventaneada y se multiplica por la potencia de la señal original.

B.4 La transformada de Fourier discreta corta (TFDC) de una señal

Una de las suposiciones para utilizar la TFD para el cálculo del espectro de una señal discreta, es que la señal observada sea estacionaria durante todo el tiempo de muestreo $n\Delta t$, eq. (B.4). En otras palabras, el espectro de la señal se supone que permanece igual durante el tiempo de observación. Para la mayoría de las señales prácticas, esta suposición no es válida. Por ejemplo, en las señales sísmicas, el espectro de la señal puede variar significativamente de un punto a otro. Esto depende del contenido de la señal, y del tiempo de muestreo. En este caso, y en otros similares, la TFD se modifica de forma tal que se

obtiene una representación bidimensional en tiempo y frecuencia de la señal. Esta TFD modificada es llamada la TFDC de la señal y tiene la particularidad de que depende de una función a la que se le denomina ventana, la cual se define:

$$w_m = \begin{cases} \neq 0 & \text{para } 0 \leq m \leq L-1 \\ 0 & \text{para } 0 \geq m \cup L \leq m \end{cases} \quad (\text{B.21})$$

La pareja de ecuaciones que definen la TFDC de una señal, Quian y Chen (1996), esta dada por:

$$x_{j+m} = \frac{1}{nw_j} \sum_{k=0}^{n-1} \xi_{m,k} e^{i2\pi kj/n} \quad j = 0, \dots, L-1, \quad m = 0, \dots, n-1. \quad (\text{B.22})$$

$$\xi_{k,m} = \sum_{j=0}^{L-1} x_{j+m} w_j e^{-i2\pi kj/n} \quad k = 0, \dots, n-1. \quad (\text{B.23})$$

El índice k en la ec. (B.23), es similar al índice de frecuencia de la TFD en la ec. (B.5). La TFDC directa ($\xi_{k,m}$) en este caso, proporciona una estimación de el espectro de frecuencia instantáneo para cualquier tiempo. La ventana w_j , tiene un origen estacionario, y conforme n cambia, la señal se desliza a través de la ventana, y para cada valor de n , una distinta porción de la señal es observada. El detalle de la operación realizado en la ec. (B.23), se puede llevar a cabo utilizando un filtro lineal. Por ejemplo, la k ésima componente de la TFDC directa, $\xi_{k,m}$, se puede obtener filtrando x_j , eq. (B.4), con un filtro cuya respuesta al impulso sea:

$$h_{k,n} = w_j e^{-i2\pi kj/n}. \quad (\text{B.24})$$

El propósito principal de la ventana en la TFDC, es limitar la extensión de la señal por transformar, de forma tal que las características espectrales sean razonablemente estacionarias sobre la duración de la ventana. Mientras mas rápido las características de la señal cambien, la ventana debe ser más pequeña. La resolución de la TFDC en el dominio

de la frecuencia para la ventana uniforme (constante en toda su longitud), esta dada en términos de la tasa de muestreo, Δt , y es igual a: $\Delta f = 1/L\Delta t$, que es el inverso de la duración de la ventana. Para otras formas de ventanas, como la de Hamming ó Hanning, la resolución se obtiene de: $\Delta f = \alpha L\Delta t$, en donde $0 \leq \alpha \leq 1$ y depende de la formad de la ventana. En general, la resolución de la TFDC se relaciona con el ancho de banda de la ventana, Papoulis (1978) y Cohen (1995):

$$\Delta f = \left(\frac{\sum_{k=0}^{n-1} k^2 |W_k|^2}{\sum_{k=0}^{n-1} |W_k|^2} \right)^{1/2}, \quad (\text{B.25})$$

en donde W_k , es la TFD de la ventana:

$$W_k = \sum_{j=0}^{L-1} w_j e^{-i2\pi kj/n}, \quad k = 0, \dots, n-1. \quad (\text{B.26})$$

Similarmente la resolución en el tiempo de la TFDC es:

$$\Delta T = \left(\frac{\sum_{j=0}^{n-1} j^2 |w_k|^2}{\sum_{j=0}^{n-1} |w_k|^2} \right)^{1/2}. \quad (\text{B.27})$$

Este parámetro indica la resolución en el tiempo. Es decir, dos pulsos en el tiempo se pueden discriminar sólo si están separados en más de ΔT . Conforme la longitud de la ventana se vuelve menor, la resolución en el dominio de la frecuencia decrece. Por otro lado, conforme la longitud de la ventana decrece, la habilidad de la TFDC de encontrar cambios en la señal en el dominio del tiempo aumenta. En consecuencia, escoger la longitud de la ventana se vuelve un compromiso entre la resolución de la frecuencia y la resolución del tiempo. La resolución entre la frecuencia y el tiempo no puede ser

arbitrariamente pequeña, ya que su producto está acotado por abajo. Cohen (1995), en la forma:

$$\Delta T \Delta f \geq \frac{1}{4\pi}. \quad (\text{B.28})$$

Conocido como el principio de incertidumbre, ó desigualdad de Heisenberg. Cuando la ventana, w_k , es Gaussiana, el producto en la ec. (B.28) satisface la igualdad. El significado general de esta expresión establece que sólo se puede mejorar la resolución en el tiempo a cambio de perder resolución en la frecuencia.

APÉNDICE C

COEFICIENTES LINEALIZADORES

C.1 Coeficientes linealizadores por la teoría de vibración aleatoria

Los coeficientes linealizadores son:

$$a_0 = E[\dot{z}], \quad (C.1)$$

$$a_2 = \frac{E[(z - E[z])^2] E[(\dot{x} - E[\dot{x}])\dot{z}] - E[(z - E[z])(\dot{x} - E[\dot{x}])] E[(z - E[z])\dot{z}]}{E[(\dot{x} - E[\dot{x}])^2] E[(z - E[z])^2] - E[(\dot{x} - E[\dot{x}])(z - E[z])]^2}, \quad (C.2)$$

$$a_3 = \frac{E[(\dot{x} - E[\dot{x}])^2] E[(z - E[z])\dot{z}] - E[(z - E[z])(\dot{x} - E[\dot{x}])] E[(\dot{x} - E[\dot{x}])\dot{z}]}{E[(\dot{x} - E[\dot{x}])^2] E[(z - E[z])^2] - E[(\dot{x} - E[\dot{x}])(z - E[z])]^2}. \quad (C.3)$$

C.2 El coeficiente a_0

El coeficiente a_0 se calcula a través de determinar la esperanza de la derivada de la variable de estado que acopla la ecuación diferencial de movimiento con el modelo de histéresis. esta variable satisface la siguiente expresión:

$$\dot{z}(t) = H(\dot{x}, z) = \dot{x} \left[1 - U(\dot{x})U\left(\frac{z}{x_y} - 1\right) - U(-\dot{x})U\left(-\frac{z}{x_y} - 1\right) \right], \quad (2.13)$$

Cuya interpretación y elementos se discuten en el Capítulo 2. Como se aprecia de los elementos de la eq. (2.13), es necesario conocer la función de densidad de probabilidad conjunta de las variables de estado dx/dt y z , para poder calcular la ec. (C.1), que de acuerdo a la teoría de Kimura es:

$$f(\dot{x}, z) = \varphi(\dot{x}, z)rect(z) + \delta(z - x_y) \int_{x_y}^{\infty} \varphi(\dot{x}, z) dz + \delta(z + x_y) \int_{-\infty}^{-x_y} \varphi(\dot{x}, z) dz. \quad (4.15)$$

La razón de la forma de esta ecuación se describe en el Capítulo 4. Para calcular el valor del coeficiente $a\theta$, se requiere:

$$E[\dot{z}(t)] = E \left[\dot{x} \left[1 - U(\dot{x})U\left(\frac{z}{x_y} - 1\right) - U(-\dot{x})U\left(-\frac{z}{x_y} - 1\right) \right] \right],$$

y expresando la esperanza en términos de su expresión integral

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{x} \left[1 - U(\dot{x})U\left(\frac{z}{x_y} - 1\right) - U(-\dot{x})U\left(-\frac{z}{x_y} - 1\right) \right] f(\dot{x}, z) d\dot{x} dz,$$

y separando los elementos:

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{\infty} \dot{x} f(\dot{x}) d\dot{x} - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{x} U(\dot{x}) U\left(\frac{z}{x_y} - 1\right) f(\dot{x}, z) d\dot{x} dz \\ &\quad - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{x} U(-\dot{x}) U\left(-\frac{z}{x_y} - 1\right) f(\dot{x}, z) d\dot{x} dz. \end{aligned}$$

de las propiedades de la función $U(x)$, y de la región de integración se obtiene:

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \dot{x} f(\dot{x}) d\dot{x} - \int_{x_y}^{\infty} \int_{\theta}^{\infty} \dot{x} f(\dot{x}, z) d\dot{x} dz - \int_{-\infty}^{-x_y} \int_{-\infty}^{\theta} \dot{x} f(\dot{x}, z) d\dot{x} dz = I1 + I2 + I3.$$

donde la asignación de estas integrales I1, I2 e I3, obedece a la posición. Se realiza esto, puesto que la ec. (4.15) debe ser introducida en esta última expresión, quedando para I1:

$$I1 = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{x} f(\dot{x}) d\dot{x} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{x} f(\dot{x}, z) dz d\dot{x},$$

$$I1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{x} \left[\varphi(\dot{x}, z) \text{rect}(z) + \delta(z - x_y) \int_{x_y}^{\infty} \varphi(\dot{x}, z') dz' + \delta(z + x_y) \int_{-\infty}^{-x_y} \varphi(\dot{x}, z') dz' \right] d\dot{x} dz.$$

separando las integrales, utilizando las propiedades de las funciones $\text{rect}(z)$, y de las deltas de dirac y observando la región de integración se obtiene:

$$I1 = \int_{-x_y}^{x_y} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{x} \varphi(\dot{x}, z) d\dot{x} dz + \int_{-\infty}^{\infty} \dot{x} \int_{x_y}^{\infty} \varphi(\dot{x}, z') dz' d\dot{x} + \int_{-\infty}^{\infty} \dot{x} \int_{-\infty}^{-x_y} \varphi(\dot{x}, z') dz' d\dot{x},$$

y cambiando el orden de integración que se puede hacer porque suponemos que la integral existe:

$$I1 = \int_{-\infty}^{-x_y} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{x} \varphi(\dot{x}, z) dz d\dot{x} + \int_{-x_y}^{x_y} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{x} \varphi(\dot{x}, z) d\dot{x} dz + \int_{x_y}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{x} \varphi(\dot{x}, z) d\dot{x} dz.$$

De las propiedades de la integral, la última expresión es equivalente a:

$$I1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{x} \varphi(\dot{x}, z) dz d\dot{x} = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{x} \varphi(\dot{x}) d\dot{x} = m\dot{x}.$$

La integral:

$$I2 = \int_{x_y}^{\infty} \int_0^{\infty} \dot{x} f(\dot{x}, z) d\dot{x} dz,$$

se transforma en la siguiente expresión al sustituir la fdp:

$$I2 = \int_{x_y}^{\infty} \int_0^{\infty} \dot{x} \left[\varphi(\dot{x}, z) \text{rect}(z) + \delta(z - x_y) \int_{x_y}^{\infty} \varphi(\dot{x}, z') dz' + \delta(z + x_y) \int_{-\infty}^{-x_y} \varphi(\dot{x}, z') dz' \right] d\dot{x} dz,$$

observando que la función $\text{rect}(z)$ es nula para la región de la primera integral y separando las integrales se obtiene:

$$I2 = \int_{x_y}^{\infty} \delta(z - x_y) dz \int_0^{\infty} \dot{x} \int_{x_y}^{\infty} \varphi(\dot{x}, z') dz' d\dot{x} + \int_{x_y}^{\infty} \delta(z + x_y) dz \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{-x_y} \varphi(\dot{x}, z') dz' d\dot{x},$$

la segunda integral de la expresión anterior es nula por que el valor donde el argumento de la delta de dirac se anula esta fuera del intervalo de integración, de donde:

$$I2 = \int_0^{\infty} \dot{x} \int_{x_1}^{\infty} \varphi(\dot{x}, z') dz' d\dot{x}$$

De una forma análoga se obtiene:

$$I3 = \int_{-\infty}^0 \dot{x} \int_{-\infty}^{-x_1} \varphi(\dot{x}, z') dz' d\dot{x}$$

C.3 Los coeficiente a_2 y a_3

Estos coeficientes dependen del cálculo de las esperanzas de:

$$\begin{aligned} & E \left[(z - E[z])^2 \right], \\ & E \left[(\dot{x} - E[\dot{x}])^2 \right], \\ & E \left[(z - E[z])(\dot{x} - E[\dot{x}]) \right], \\ & E \left[(\dot{x} - E[\dot{x}]) \dot{z} \right], \\ & E \left[(z - E[z]) \dot{z} \right]. \end{aligned}$$

La varianza de z satisface:

$$E \left[(z - E[z])^2 \right] = \int_{-\infty}^{\infty} (z - E[z])^2 f(z) dz ,$$

donde:

$$f(z) = \varphi(z) \text{rect}(z) + \delta(z - x_1) S^+ + \delta(z + x_1) S^- .$$

Por lo que:

$$E[(z - E[z])^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (z - E[z])^2 \left[\varphi(z) \text{rect}(z) + \delta(z - x_1) S^+ + \delta(z + x_1) S^- \right] dz ,$$

y utilizando las propiedades de la delta de dirac:

$$E[(z - E[z])^2] = \int_{-x_1}^{x_1} (z - E[z])^2 \varphi(z) dz + (x_1 - E[z])^2 S^+ + (x_1 - E[z])^2 S^- .$$

Integrando por partes, la primera expresión del lado derecho de la última ecuación y tomando:

$$u = z - E[z] \text{ y } dv = (z - E[z]) \exp\left(-\frac{1}{2} \left\{ \frac{z - E[z]}{\sigma_z} \right\}^2\right) dz, \text{ se obtiene:}$$

con $mz = E[z]$,

$$E[(z - mz)^2] = -\sigma_z^2 (x_y - mz) \varphi_z(x_y) - \sigma_z^2 (x_y + mz) \varphi_z(-x_y) + \sigma_z^2 \int_{-x_y}^{x_y} \varphi(z) dz \\ + (x_y - mz)^2 \int_{x_y}^{\infty} \varphi(z) dz + (x_y + mz)^2 \int_{-\infty}^{-x_y} \varphi(z) dz.$$

Puesto que la variable dx/dt es Gaussiana, se tiene:

$$E[(\dot{x} - E[\dot{x}])^2] = \sigma_x^2.$$

El cálculo de $E[(z - E[z])(\dot{x} - E[\dot{x}])]$, se realiza usando (4.15):

$$E[(z - E[z])(\dot{x} - E[\dot{x}])] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (z - E[z])(\dot{x} - E[\dot{x}]) f(\dot{x}, z) d\dot{x} dz,$$

que conduce a:

$$E[(\dot{x} - E[\dot{x}])(z - E[z])] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [(\dot{x} - E[\dot{x}])(z - E[z])] \{ \varphi(\dot{x}, z) \text{rect}(z) \\ + \delta(z - x_y) \int_{x_y}^{\infty} \varphi(\dot{x}, z') dz' + \delta(z + x_y) \int_{-\infty}^{-x_y} \varphi(\dot{x}, z') dz' \} d\dot{x} dz.$$

y separando las integrales e identificándolas con las variables que se indica de acuerdo a la posición:

$$E[(\dot{x} - E[\dot{x}])(z - E[z])] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\dot{x} - E[\dot{x}])(z - E[z]) \varphi(\dot{x}, z) \text{rect}(z) d\dot{x} dz \\ + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\dot{x} - E[\dot{x}])(z - E[z]) \delta(z - x_y) dz \int_{x_y}^{\infty} \varphi(\dot{x}, z') dz' d\dot{x} \\ + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\dot{x} - E[\dot{x}])(z - E[z]) \delta(z + x_y) dz \int_{-\infty}^{-x_y} \varphi(\dot{x}, z') dz' d\dot{x} = J1 + J2 + J3.$$

Utilizando las propiedades de $rect(z)$, $J1$ satisface:

$$J1 = \int_{-x_1}^{x_1} \int_{-\infty}^{\infty} (z - E[z])(\dot{x} - E[\dot{x}])\varphi(\dot{x}, z) d\dot{x} dz,$$

como φ es normal bivariada:

$$J1 = \int_{-x_1}^{x_1} \int_{-\infty}^{\infty} (z - E[z])(\dot{x} - E[\dot{x}]) \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_z\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{\dot{x}-m\dot{x}}{\sigma_x}\right)^2 + 2\rho\left(\frac{\dot{x}-m\dot{x}}{\sigma_x}\right)\left(\frac{z-mz}{\sigma_z}\right) + \left(\frac{z-mz}{\sigma_z}\right)^2\right]\right\} d\dot{x} dz.$$

Rescribiendo la última expresión en la forma:

$$J1 = \int_{-x_1}^{x_1} (z - E[z]) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-mz}{\sigma_z}\right)^2} \int_{-\infty}^{\infty} (\dot{x} - E[\dot{x}]) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_x^2(1-\rho^2)}\left[\dot{x} - m\dot{x} - \rho\sigma_x(z-mz)/\sigma_z\right]^2\right\} d\dot{x} dz.$$

Puesto que la segunda integral del lado derecho de la ecuación, se realiza sobre una función normal con media y varianza dadas por:

$$m_x^* = m_x + \frac{\rho\sigma_x(z-mz)}{\sigma_z},$$

$$\sigma_z^* = \sigma_z\sqrt{1-\rho^2},$$

la integral resulta en:

$$J1 = \rho \frac{\sigma_x}{\sigma_z} \int_{-x_1}^{x_1} (z - E[z])^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-mz}{\sigma_z}\right)^2} dz.$$

Integrando por partes:

$$J1 = \rho \frac{\sigma_x}{\sqrt{2\pi}\sigma_z^2} \left\{ -(z-mz)\sigma_z^2 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-mz}{\sigma_z}\right)^2} \Big|_{-x_1}^{x_1} + \sigma_z^2 \int_{-x_1}^{x_1} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-mz}{\sigma_z}\right)^2} dz \right\},$$

desarrollando los términos:

$$J1 = -\rho\sigma_x(x_y - mz) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_y - mz}{\sigma_z}\right)^2} - \rho\sigma_x(x_y + mz) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_y + mz}{\sigma_z}\right)^2} + \frac{\rho\sigma_x}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x_y}^{x_y} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z - mz}{\sigma_z}\right)^2} dz.$$

y recordando que $\rho = \frac{\sigma_{xz}}{\sigma_x\sigma_z}$, la expresión anterior se reduce a:

$$J1 = -\sigma_{xz}(x_y - mz)\phi(x_y) - \sigma_{xz}(x_y + mz)\phi(-x_y) + \sigma_{xz} \int_{-x_y}^{x_y} \phi(z) dz.$$

La integral $J2$ es:

$$J2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\dot{x} - E[\dot{x}])(z - E[z]) \delta(z - x_y) dz \int_{x_y}^{\infty} \phi(\dot{x}, z') dz' d\dot{x}.$$

y utilizando las propiedades de la delta, cambiando el orden de integración y recordando que la variable z' es una variable comodín que describe a z :

$$J2 = (x_y - mz) \int_{x_y}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\dot{x} - E[\dot{x}]) \phi(\dot{x}, z) d\dot{x} dz,$$

y utilizando la misma técnica que para integrar $J1$, se obtiene:

$$J2 = (x_y - mz) \int_{x_y}^{\infty} \phi(z) \int_{-\infty}^{\infty} (\dot{x} - E[\dot{x}]) \phi^*(\dot{x}) d\dot{x} dz,$$

donde ϕ^* , es una normal con media y varianza dadas por: m_x^* y σ_x^* . Por lo que la integral se reduce a:

$$J2 = (x_y - mz) \frac{\rho\sigma_x}{\sigma_z} \int_{x_y}^{\infty} (z - mz) \phi(z) dz.$$

Integrando, usando el siguiente cambio de variable: $u = \frac{z - E[z]}{\sqrt{2}\sigma_z}$, $J2$ resulta en:

$$J2 = -(x_y - mz) \rho \sigma_{\dot{x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2} \Big|_{\frac{x_y - mz}{\sqrt{2}\sigma_z}}^{\infty} = \sigma_{\dot{z}} (x_y - mz) \varphi(x_y).$$

De forma análoga J3 satisface:

$$J3 = \sigma_{\dot{z}} (x_y + mz) \varphi(-x_y).$$

Por lo que:

$$E[(\dot{x} - E[\dot{x}])(z - E[z])] = J1 + J2 + J3 = \sigma_{\dot{z}} \int_{-x_y}^{x_y} \varphi(z) dz.$$

La esperanza de las variables de estado que sigue es: $E[(\dot{x} - E[\dot{x}])\dot{z}]$, que satisface:

$$E[(\dot{x} - E[\dot{x}])\dot{z}] = E\left[(\dot{x} - E[\dot{x}])\dot{x} \left[1 - U(\dot{x})U\left(\frac{z}{x_y} - 1\right) - U(-\dot{x})U\left(-\frac{z}{x_y} - 1\right)\right]\right].$$

Utilizando el hecho de que la esperanza es un operador lineal:

$$\begin{aligned} E[(\dot{x} - E[\dot{x}])\dot{z}] &= E[(\dot{x} - E[\dot{x}])\dot{x}] - E\left[(\dot{x} - E[\dot{x}])\dot{x}U\left(\frac{z}{x_y} - 1\right)\right] \\ &\quad - E\left[(\dot{x} - E[\dot{x}])\dot{x}U\left(-\frac{z}{x_y} - 1\right)\right] = K1 + K2 + K3. \end{aligned}$$

Cada una de las esperanzas se ha identificado con las variables $K1$, $K2$ y $K3$ de acuerdo a la posición. $K1$ satisface:

$$K1 = E[(\dot{x} - E[\dot{x}])\dot{x}] = E[(\dot{x} - E[\dot{x}])(\dot{x} - E[\dot{x}] + E[\dot{x}])],$$

que conduce a:

$$K1 = E[(\dot{x} - E[\dot{x}])(\dot{x} - E[\dot{x}])] + E[(\dot{x} - E[\dot{x}])E[\dot{x}]],$$

por las propiedades Gaussianas de dx/dt , resulta:

$$K1 = \sigma_{\dot{x}}^2.$$

En el caso de $K2$ se tiene:

$$K2 = -E \left[(\dot{x} - E[\dot{x}]) \dot{x} U(\dot{x}) U \left(\frac{z}{x_y} - 1 \right) \right].$$

La expresión integral de $K2$ es:

$$K2 = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\dot{x} - E[\dot{x}]) \dot{x} U(\dot{x}) U \left(\frac{z}{x_y} - 1 \right) f(\dot{x}, z) d\dot{x} dz.$$

Utilizando las propiedades de la función $U(x)$, se tiene:

$$K2 = - \int_{x_y}^{\infty} \int_0^{\infty} (\dot{x} - E[\dot{x}]) \dot{x} f(\dot{x}, z) d\dot{x} dz.$$

Sustituyendo la función de densidad de probabilidad (4.15), en la última expresión:

$$K2 = - \int_{x_y}^{\infty} \int_0^{\infty} (\dot{x} - E[\dot{x}]) \dot{x} \left[\varphi(\dot{x}, z) \text{rect}(z) + \delta(z - x_y) \int_{x_y}^{\infty} \varphi(\dot{x}, z') dz' + \delta(z + x_y) \int_{-\infty}^{-x_y} \varphi(\dot{x}, z') dz' \right] d\dot{x} dz.$$

Utilizando las propiedades de la función $\text{rect}(z)$, de las deltas y observando el dominio de integración, $K2$ se puede expresar en la forma:

$$K2 = - \int_{x_y}^{\infty} \delta(z - x_y) dz \int_0^{\infty} (\dot{x} - E[\dot{x}]) \dot{x} \int_{x_y}^{\infty} \varphi(\dot{x}, z') dz' d\dot{x} - \int_{x_y}^{\infty} \delta(z + x_y) dz \int_0^{\infty} (\dot{x} - E[\dot{x}]) \dot{x} \int_{-\infty}^{-x_y} \varphi(\dot{x}, z') dz' d\dot{x}.$$

que se reduce a:

$$K2 = - \int_0^{\infty} (\dot{x} - E[\dot{x}]) \dot{x} \int_{x_y}^{\infty} \varphi(\dot{x}, z) dz d\dot{x},$$

considerando las características de las variables comodín.

La esperanza identificada con $K3$ es:

$$K3 = -E \left[(\dot{x} - E[\dot{x}]) \dot{x} U(-\dot{x}) U \left(-\frac{z}{x_y} - 1 \right) \right],$$

y expresándola en su forma integral:

$$K3 = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\dot{x} - E[\dot{x}]) \dot{x} U(-\dot{x}) U \left(-\frac{z}{x_y} - 1 \right) f(\dot{x}, z) d\dot{x} dz.$$

$$K3 = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\dot{x} - E[\dot{x}]) \dot{x} U(-\dot{x}) U\left(-\frac{z}{x} - 1\right) f(\dot{x}, z) d\dot{x} dz.$$

Utilizando las propiedades de $U(x)$, se tiene:

$$K3 = - \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^{-x} (\dot{x} - E[\dot{x}]) \dot{x} f(\dot{x}, z) d\dot{x} dz.$$

Sustituyendo la función de densidad de probabilidad (4.15), en la última expresión:

$$K3 = - \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^{-x} (\dot{x} - E[\dot{x}]) \dot{x} \left[\varphi(\dot{x}, z) \text{rect}(z) + \delta(z - x_y) \int_{x_y}^{\infty} \varphi(\dot{x}, z') dz' + \delta(z + x_y) \int_{-\infty}^{-x_y} \varphi(\dot{x}, z') dz' \right] d\dot{x} dz.$$

Utilizando las propiedades de la función $\text{rect}(z)$, de las deltas y observando el dominio de integración, $K2$ se puede expresar en la forma:

$$K3 = - \int_{-\infty}^{-x_y} \delta(z - x_y) dz \int_{-\infty}^0 (\dot{x} - E[\dot{x}]) \dot{x} \int_{x_y}^{\infty} \varphi(\dot{x}, z') dz' d\dot{x} - \int_{-\infty}^{-x_y} \delta(z + x_y) dz \int_{-\infty}^0 (\dot{x} - E[\dot{x}]) \dot{x} \int_{-\infty}^{-x_y} \varphi(\dot{x}, z') dz' d\dot{x}.$$

Utilizando las propiedades de la función $\text{rect}(z)$, de las deltas y observando el dominio de integración, $K2$ se puede expresar en la forma:

$$K3 = - \int_{-\infty}^{-x_y} \delta(z - x_y) dz \int_{-\infty}^0 (\dot{x} - E[\dot{x}]) \dot{x} \int_{x_y}^{\infty} \varphi(\dot{x}, z') dz' d\dot{x} - \int_{-\infty}^{-x_y} \delta(z + x_y) dz \int_{-\infty}^0 (\dot{x} - E[\dot{x}]) \dot{x} \int_{-\infty}^{-x_y} \varphi(\dot{x}, z') dz' d\dot{x}.$$

que se reduce a:

$$K3 = - \int_{-\infty}^0 (\dot{x} - E[\dot{x}]) \dot{x} \int_{-\infty}^{-x_y} \varphi(\dot{x}, z) dz d\dot{x}.$$

Por lo que:

$$E[(\dot{x} - E[\dot{x}]) \dot{z}] = K1 + K2 + K3 = \sigma_{\dot{x}}^2 - \int_0^{\infty} (\dot{x} - E[\dot{x}]) \dot{x} \int_{x_y}^{\infty} \varphi(\dot{x}, z) dz d\dot{x} - \int_{-\infty}^0 (\dot{x} - E[\dot{x}]) \dot{x} \int_{-\infty}^{-x_y} \varphi(\dot{x}, z) dz d\dot{x}.$$

Finalmente, la esperanza de las variables de estado para el cálculo de los coeficientes linealizadores es: $E[(z - E[z]) \dot{z}]$.

$$E[(z - E[z])\dot{z}] = \int_{-x}^x \int_{-x}^x (z - E[z])\dot{z}f(\dot{x}, z)d\dot{x}dz.$$

Sustituyendo la ec. (2.13) en la última expresión:

$$E[(z - E[z])\dot{z}] = \int_{-x}^x \int_{-x}^x (z - E[z])\dot{x} \left[1 - U(\dot{x})U\left(\frac{z}{x_y} - 1\right) - U(-\dot{x})U\left(-\frac{z}{x_y} - 1\right) \right] f(\dot{x}, z)d\dot{x}dz.$$

Y utilizando las propiedades de la función $U(x)$ y observando el dominio de integración:

$$\begin{aligned} E[(z - E[z])\dot{z}] &= \int_{-x}^x \int_{-x}^x (z - E[z])\dot{x}f(\dot{x}, z)d\dot{x}dz - \int_{x_y}^x \int_0^x (z - E[z])\dot{x}f(\dot{x}, z)d\dot{x}dz \\ &\quad - \int_{-x}^0 \int_{-x}^{-x_y} (z - E[z])\dot{x}f(\dot{x}, z)d\dot{x}dz = L1 + L2 + L3. \end{aligned}$$

Donde las integrales han sido asignadas a las variables $L1$, $L2$ y $L3$ de acuerdo a su posición. Sustituyendo la ec. (4.15) en la expresión para $L1$ se tiene:

$$L1 = \int_{-x}^x \int_{-x}^x (z - E[z])\dot{x} \left\{ \varphi(\dot{x}, z)rect(z) + \delta(z - x_y) \int_{x_y}^{\infty} \varphi(\dot{x}, z')dz' + \delta(z + x_y) \int_{-\infty}^{-x_y} \varphi(\dot{x}, z')dz' \right\} d\dot{x}dz.$$

Utilizando las propiedades de las funciones $rect(z)$, de las deltas y considerando el dominio de integración, $L1$ se expresa en la forma:

$$L1 = \int_{-x_y}^x \int_{-x}^x (z - E[z])\dot{x}\varphi(\dot{x}, z)d\dot{x}dz + (x_y - mz) \int_{-x}^x \int_{x_y}^{\infty} \varphi(\dot{x}, z')dz'd\dot{x} - (x_y + mz) \int_{-x}^x \int_{-\infty}^{-x_y} \varphi(\dot{x}, z')dz'd\dot{x}.$$

Cambiando el orden de integración y usando el hecho de que la variable z' es una variable comodín se obtiene:

$$L1 = \int_{-x_y}^x (z - E[z]) \int_{-x}^x \dot{x}\varphi(\dot{x}, z)d\dot{x}dz + (x_y - mz) \int_{x_y}^{\infty} \int_{-x}^x \dot{x}\varphi(\dot{x}, z)d\dot{x}dz - (x_y + mz) \int_{-\infty}^{-x_y} \int_{-x}^x \dot{x}\varphi(\dot{x}, z)d\dot{x}dz.$$

Utilizando el mismo procedimiento que para integrar $J1$, la última expresión resulta:

$$\begin{aligned} L1 &= \int_{-x_y}^x (z - E[z])\varphi(z) \int_{-x}^x \dot{x}\varphi^*(\dot{x})d\dot{x}dz + (x_y - mz) \int_{x_y}^{\infty} \int_{-x}^x \dot{x}\varphi(\dot{x}, z)d\dot{x}dz \\ &\quad - (x_y + mz) \int_{-\infty}^{-x_y} \int_{-x}^x \dot{x}\varphi(\dot{x}, z)d\dot{x}dz. \end{aligned}$$

donde φ^* , es una normal con media y varianza dadas por: m_x^* y σ_x^* . Por lo que $L1$ queda:

$$L1 = \left(m_x + \frac{\rho\sigma_x}{\sigma_z} \right) \int_{-x_1}^{x_1} (z - E[z])^2 \varphi(z) dz + (x_y - mz) \int_{x_1}^x \int_{-x}^x \dot{x} \varphi(\dot{x}, z) d\dot{x} dz - (x_y + mz) \int_{-x}^{-x_1} \int_{-x}^x \dot{x} \varphi(\dot{x}, z) d\dot{x} dz.$$

El cálculo para $L2$ es:

$$L2 = - \int_{x_1}^x \int_0^x (z - E[z]) \dot{x} f(\dot{x}, z) d\dot{x} dz.$$

Sustituyendo la eq. (4.15) en la última expresión se obtiene:

$$L2 = - \int_{x_1}^x \int_0^x (z - E[z]) \dot{x} \left\{ \varphi(\dot{x}, z) \text{rect}(z) + \delta(z - x_y) \int_{x_1}^{\infty} \varphi(\dot{x}, z') dz' + \delta(z + x_y) \int_{-\infty}^{-x_1} \varphi(\dot{x}, z') dz' \right\} d\dot{x} dz.$$

Utilizando las propiedades de la función $\text{rect}(z)$, de la delta y observando el dominio de integración:

$$L2 = -(x_y - mz) \int_{x_1}^x \int_0^x \dot{x} \varphi(\dot{x}, z) d\dot{x} dz.$$

El cálculo para $L3$ es:

$$L3 = - \int_{-x}^0 \int_{-x}^{-x_1} (z - E[z]) \dot{x} f(\dot{x}, z) d\dot{x} dz.$$

Sustituyendo la eq. (4.15) en la última expresión se obtiene:

$$L3 = - \int_{-x}^0 \int_{-x}^{-x_1} (z - E[z]) \dot{x} \left\{ \varphi(\dot{x}, z) \text{rect}(z) + \delta(z - x_y) \int_{x_1}^{\infty} \varphi(\dot{x}, z') dz' + \delta(z + x_y) \int_{-\infty}^{-x_1} \varphi(\dot{x}, z') dz' \right\} d\dot{x} dz.$$

Utilizando las propiedades de la función $\text{rect}(z)$, de la delta y observando el dominio de integración:

$$L3 = (x_y + mz) \int_{-x}^{-x_1} \int_{-x}^0 \dot{x} \varphi(\dot{x}, z) d\dot{x} dz.$$

Por lo que:

$$\begin{aligned}
 L1 + L2 + L3 = & \left(m_x + \frac{\rho\sigma_x}{\sigma_z} \right) \int_{-x_y}^{x_y} (z - E[z])^2 \varphi(z) dz + (x_y - mz) \int_{x_y}^y \int_{-x}^0 \dot{x} \varphi(\dot{x}, z) d\dot{x} dz \\
 & - (x_y + mz) \int_{-x}^{-x_y} \int_0^x \dot{x} \varphi(\dot{x}, z) d\dot{x} dz.
 \end{aligned}$$