



# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

---

FACULTAD DE INGENIERIA

SIMULACION NUMERICA CON CAMBIO DE FASE  
(SOLIDIFICACION) EN UNA CAVIDAD SUJETA A LA  
ACELERACION CENTRIFUGA

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

**INGENIERO MECANICO**

**P R E S E N T A :**

**EDUARDO MARTINEZ GALVAN**



ASESOR: DR. RUBEN AVILA RODRIGUEZ

MEXICO, D.F.

2004



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A Adriana Berenice, quien en los momentos más difíciles  
estuvo a mi lado para brindarme todo su apoyo  
incondicional.

A mis padres, quienes me dieron su apoyo.

A mi hermano y mi tío Toño, que son un ejemplo a seguir.

A mis abuelos, que fueron toda una fuente de  
conocimientos.

A mis tíos, que me enseñaron tantas cosas.

**Mis más sinceros agradecimientos:**

A mi director de tesis Dr. Rubén Ávila Rodríguez, quien me impulso a realizar este trabajo y me dio toda su confianza

Al Departamento de Termoenergía y Mejoramiento Ambiental, de la Facultad de Ingeniería UNAM, por brindarme todo el apoyo.

# Índice general

Nomenclatura	vii
Resumen	ix
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación . . . . .	1
1.2. Antecedentes . . . . .	2
1.3. Objetivos . . . . .	7
<b>2. Modelos Matemáticos</b>	<b>9</b>
2.1. Planteamiento del problema . . . . .	9
2.2. Ecuación de continuidad . . . . .	11
2.3. Ecuación de conservación de movimiento . . . . .	12
2.4. Ecuación de energía . . . . .	13
2.5. Ecuación de la interfase . . . . .	14
2.6. El rotacional . . . . .	17
<b>3. Resultados</b>	<b>19</b>
3.1. Método Numérico . . . . .	21
3.2. Problema unidimensional (difusión) . . . . .	22

---

3.2.1. Problema de Neumann . . . . .	23
3.2.2. Solidificación . . . . .	30
3.3. Convección natural . . . . .	34
<b>4. Conclusiones y trabajo a futuro</b>	<b>45</b>
4.1. Conclusiones . . . . .	45
4.2. Trabajo a futuro . . . . .	46
<b>A. Obtención de la aceleración centrífuga y de Coriolis</b>	<b>49</b>
<b>B. Ecuación del rotacional de la ecuación de momento</b>	<b>51</b>
B.1. Término temporal . . . . .	52
B.2. Término convectivo . . . . .	52
B.3. Gradiente de presiones . . . . .	53
B.4. Término viscoso . . . . .	54
B.5. Aceleración de Coriolis . . . . .	55
B.6. Aceleración centrífuga . . . . .	55
<b>C. Adimensionalización de las ecuaciones de gobierno</b>	<b>57</b>
C.1. Ecuación de continuidad . . . . .	57
C.2. Ecuación de conservación de cantidad de movimiento . . . . .	58
C.3. Ecuación de la energía . . . . .	59
C.4. Ecuación de la interfase . . . . .	60
<b>. Bibliografía</b>	<b>61</b>

# Índice de figuras

2.1. Vista superior y lateral del brazo de giro, y arreglo de los vectores de las aceleraciones que actúan en la cavidad . . . . .	9
2.2. Arreglo de la cavidad que contiene el material que se va a solidificar . . . . .	10
2.3. Cambio de fase por difusión . . . . .	14
3.1. Configuración de la cavidad para la solución numérica . . . . .	22
3.2. Representación del gradiente de temperaturas . . . . .	23
3.3. Distribución de temperaturas para el caso 1 al tiempo $t=1$ s . . . . .	27
3.4. Gradiente de temperaturas caso 1 . . . . .	28
3.5. Distribución de temperaturas cerca de la pared caliente . . . . .	29
3.6. Distribución de temperaturas caso 1 . . . . .	29
3.7. Parámetro $pt$ en función del tiempo caso 1 . . . . .	32
3.8. Parámetro $pt$ en función de la distancia caso 1 . . . . .	33
3.9. Posición de la interfase a los 100 s . . . . .	34
3.10. Posición de la interfase a los 112 s . . . . .	35
3.11. Distribución de temperaturas para el caso 2, para el tiempo $t=9.25$ s, y posición de la interfase en $0.74 \times 10^{-2}$ m . . . . .	36
3.12. Patrones de flujo del caso 3, para los tiempos 0.15 s, 24.15 s, 27.75 s, 28.2 s, 28.8 s y 30. s . . . . .	37

---

3.13. Distribución de temperaturas caso 3, para los tiempos 0.15 s, 24.15 s, 27.75 s, 28.2 s, 28.8 s y 30. s . . . . .	38
3.14. Configuración del movimiento del fluido al tiempo $t=27.6$ s . . .	39
3.15. Número de Rayleigh contra tiempo para el tercer caso . . . . .	40
3.16. Número de Nusselt promedio en la pared caliente contra tiempo para el tercer caso . . . . .	41
3.17. Amplificación de la distribución de velocidades para caso 3, para los tiempos 28.95 s y 29.25 s . . . . .	43
3.18. Amplificación de la distribución de velocidades para caso 3, para los tiempos 29.55 s y 30. s . . . . .	44
4.1. Distribución de temperaturas en el líquido . . . . .	47
A.1. Representación del sistema . . . . .	49



# Lista de tablas

2.1. Propiedades del galio . . . . .	11
3.1. Casos a tratar . . . . .	19
3.2. Parámetros adimensionales . . . . .	21

# Nomenclatura

$C_p$	calor específico a presión constante [J/kg·K]
$Gr$	número de Grashof = $\beta(T_h - T_m)\hat{g}H^3/\nu^2$ [ ]
$H$	altura de la cavidad [m]
$i$	vector unitario
$j$	vector unitario
$k$	conductividad térmica [W/m <sup>2</sup> K]
$L$	longitud característica [m]
$p$	presión [N/m <sup>2</sup> ]
$Pr$	número de Prandtl = $\nu/\alpha$ [ ]
$q$	flujo de calor por unidad de área [W/m <sup>2</sup> ]
$Ra$	número de Rayleigh = $Gr Pr$ [ ]
$St$	número de Stefan = $\lambda/c_p(T_m - T_c)/[ ]$
$t$	tiempo [s]
$T$	temperatura [K]
$T_I$	temperatura de la interfaz física [K]
$T_c$	temperatura en la pared fría [K]
$T_h$	temperatura en la pared caliente [K]
$T_m$	temperatura de cambio de fase [K]
$u$	velocidad del fluido en la dirección $x$ [m/s]
$v$	velocidad del fluido en la dirección $y$ [m/s]
$x, y$	coordenadas cartesianas [m]
$X$	posición de la interfaz [m]

*Símbolos griegos*

$\alpha$	difusividad térmica [m <sup>2</sup> /s]
$\beta$	coeficiente de expansión térmica [1/K]
$\delta$	delta de Kronecker [ ]
$\lambda$	calor latente [J / kg]
$\mu$	viscosidad dinámica [kg/m·s]
$\nu$	viscosidad cinemática [m <sup>2</sup> /s]
$\pi$	número pi 3,1416
$\rho$	densidad [kg/m <sup>3</sup> ]
$\varrho$	relación de densidades = $\rho_t/\rho_s$
$\omega$	velocidad angular [rad / s]
$\varpi$	rotacional [1/s]

*Subíndice*

$c$	temperatura fría
$h$	temperatura caliente
$l$	líquido
$m$	cambio de fase
$s$	sólido
$T$	total
$x$	en la dirección de $x$
$y$	en la dirección de $y$
$z$	en la dirección de $z$
1	en la dirección de $x$
2	en la dirección de $y$
3	en la dirección de $z$
0	referencia

# Resumen

En el presente trabajo se estudia el proceso de solidificación del galio, en una cavidad sujeta a fuerzas centrífugas, en dos dimensiones, tomando en cuenta únicamente la fuerza centrífuga, esto es porque la fuerza de flotación debida a la gravedad, cuando se presenta la convección, es 130 veces menor que la debida a la fuerza centrífuga.

La solidificación se lleva a cabo en una cavidad de relación de aspecto  $1/3$  ( $H/L$ ), lo cual representa una cavidad esbelta. Se analizan tres casos.

El primer caso es una comparación de los resultados obtenidos numéricamente con una solución analítica, en esta solución no se presenta convección, por lo que en la solución numérica no se considera ninguna fuerza de cuerpo  $Ra = 0$ . La solución analítica es para un medio seminfinito y en la solución numérica los resultados son para un medio finito, por lo que se llega a un tiempo de 3.75 segundos en el cual las dos soluciones dejan de coincidir, esto es por la distribución de temperaturas en el medio líquido, la condición de frontera en todo momento para la solución analítica cuando  $x \rightarrow \infty$  es  $\partial T/\partial x = 0$ , mientras que para la solución numérica existe un tiempo en el cual  $x \rightarrow L$  es  $\partial T/\partial x > 0$ , para el intervalo de tiempo en donde las dos condiciones coinciden, se obtuvieron resultados satisfactorios.

El segundo caso es cuando se tiene solidificación sin convección natural, pero en este caso ya existe una fuerza de cuerpo  $Ra = 3.26 \times 10^3$ , este segundo caso es para verificar que con fuerzas de cuerpo se siguen obteniendo resultados satisfactorios, en el caso de solidificación con difusión. El  $Ra_c$  es función de la relación de aspecto y va disminuyendo conforme se va solidificando el material, para este segundo caso el  $Ra$  siempre se mantiene por debajo del crítico.

El tercer caso es cuando se presenta la convección natural y a la vez se tienen solidificación. En este caso se tiene un  $Ra = 1 \times 10^6$ , con lo cual

se garantiza que se va a tener movimiento de convección natural, ya que el  $Ra_c = 5.2 \times 10^4$ . Cuando se presenta la convección natural, se observa que se forma un patrón de flujo de seis celdas simétrico, el cual es debido a la fuerza centrífuga, la cual tiene dos componentes, para una cavidad con la misma relación de aspecto y con convección natural, en presencia de la gravedad únicamente, la configuración del patrón de flujo es de una sola celda (celdas de Bénard).

En este tercer caso se apreció, que cuando se inició la convección natural incrementó la transferencia de calor, de la pared caliente hacia el fluido, viéndose disminuida al formarse el patrón de flujo de seis celdas. Este patrón flujo de seis celdas parece ser satisfactorio ya que por una parte podría mantener atrapada la escoria lejos de la interfase, mientras que cerca de la interfase esta el constante movimiento el cual aporta material a la interfase.

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Motivación

Los monocristales son utilizados principalmente en los circuitos electrónicos, por las propiedades eléctricas de éstos, la calidad de los monocristales debe ser excepcional para un mejor rendimiento.

El estudio del comportamiento de la solidificación bajo ciertas condiciones nos permite conocer qué factores intervienen en mayor peso para la formación de defectos en la solidificación, como la contaminación de todo el material por escoria, además del efecto de las corrientes dentro del material para el correcto acomodo de los átomos y así contar con un mono cristal de buena calidad.

El estudio de estas corrientes se puede extrapolar a otro tipo de problemas que también tengan que ver con la solidificación, o bien, con las corrientes originadas por las fuerzas a las que está sujeto el sistema a estudiar, como lo son la fuerza centrífuga y la fuerza de Coriolis. Por ejemplo, las corrientes de aire (las cuales originan lluvias, tormentas, tornados, etc.), las corrientes marítimas, el movimiento de las placas tectónicas, el movimiento de las constelaciones, la solidificación de la lava, etc.

Por otra parte la implementación de herramientas potentes como lo son las computadoras para realizar la solución de estos fenómenos de manera numérica, resulta una gran ventaja puesto que en las soluciones analíticas, por la complejidad de las ecuaciones, es indispensable hacer simplificaciones

en la mayoría de los casos para obtener una solución, las soluciones numéricas requieren de ecuaciones pero se resuelven con métodos numéricos los cuales nos dan una aproximación de la solución del problema. Particularmente en transferencia de calor existen ecuaciones con derivadas parciales, lo que dificulta su solución analítica, por lo que los métodos numéricos son una herramienta deseable para obtener las soluciones a estos problemas.

Existe pocos estudios realizados de convección con cambio de fase, ya sea solidificación o licuefacción, para toda la diversidad de problemas que se podrían plantear. Es muy interesante este tipo de fenómenos puesto que se tiene una longitud característica de la cavidad variable por el cambio de fase, cuando existe licuefacción la cavidad al principio tiene una longitud característica pequeña, que muy probablemente no permita la convección natural, el Rayleigh es pequeño, pero conforme pasa el tiempo la cavidad se va haciendo más grande, y por lo tanto la longitud característica, hasta que sea considerablemente grande para que se produzca la convección natural. En el caso de solidificación, al principio todo el material dentro de la cavidad se encuentra a una temperatura uniforme y conforme transcurre el tiempo, va adquiriendo un gradiente de temperaturas, y dependiendo de las condiciones, puede presentar convección, pero al transcurrir del tiempo la cavidad se va haciendo más pequeña y tal vez se pueda frenar la convección.

En ambos casos, tanto de licuefacción como la solidificación, se puede presentar un fenómeno interesante, el cual consiste en la igualdad de los flujos de calor. El movimiento de la interfase está modelado a partir de los flujos de calor que entran y salen de está, en el caso de la solidificación sale más calor de la interfase del que está entrando, para la licuefacción entra más calor que el que sale, por lo que, si los flujos de calor que actúan en la interfase son iguales, esto indicaría que la interfase se encuentra en equilibrio, lo cual no es lo que se quiere, puesto que se pretende estudiar la interacción del movimiento de la interfase con los patrones de flujo. Para el caso de difusión es fácil de determinar el punto de equilibrio de la interfase, cuando se tiene convección es difícil predecir la posición, además de que la interfase puede sufrir deformaciones por el transporte de energía.

## 1.2. Antecedentes

Desde hace mucho tiempo el hombre ha tratado de explicar la composición de la materia, hubieron muchas conjeturas, hasta que se comprendió que la materia estaba hecha de pequeñas estructuras que se les llamo átomos.

Estos átomos están a su vez constituidos por otros componentes: electrones, protones y neutrones.

Se llegaron a estudiar las relaciones entre los átomos y el por qué la materia podía estar en estado sólido, líquido o gaseoso, y a su vez por qué la materia en estado sólido podía tener varias propiedades, y así surgió el estudio de los enlaces los cuales pueden ser iónicos, covalentes, metálicos, de Hidrogeno o enlace de Van der Walls

Durante el experimento de DAVISSON-GERMER del carácter ondulatorio de las partículas (1927), el cual consistía en reflejar un haz de rayo láser en un trozo de níquel pulido, ocurrió un accidente por el cual se oxidó el trozo de níquel que actuaba como blanco. Luego de remover el oxido, los resultados experimentales cambiaron rotundamente.

Dedujeron que la estructura policristalina original del níquel había cambiado por efectos del calentamiento, debido al cual, el trozo de níquel se convirtió en un gran monocristal.

*Un cristal se compone de átomos dispuestos en un modelo que se repite periódicamente en las tres dimensiones.*<sup>1</sup>

Se empezaron a estudiar las propiedades de este tipo de arreglo y fue cuando se encontró que el cristal de un material semiconductor es la materia prima para la creación de dispositivos electrónicos y fotoeléctricos. Estas aplicaciones necesitan cristales con propiedades bien definidas y una alta pureza del material.

Los defectos que puede tener un cristal son: defectos puntuales (vacantes e intersticios) que son un mal acomodo de los átomos, lo cual se podría interpretar como una desviación de la estructura periódica del cristal, impurezas, defectos lineales (dislocaciones), defectos superficiales (paredes del cristal) y defectos espaciales. En el material el tipo de defectos que se puede tener es la contaminación del material por impurezas (Askeland, 1998). Estos defectos en la estructura ocasionan influencias apreciables en las propiedades del cristal.

Las características del cristal que se ven afectadas por los defectos son:

\* Conductividad.

\* Fotoconductividad.

---

<sup>1</sup>C.S., Structure of metals, 2º ed., McGraw-Hill, New York,1952, pag. 1.



- \* Resistencia mecánica.
- \* Plasticidad.

Existen varios métodos para el crecimiento de monocristales, muchos de los cuales se diferencian, unos de otros, sólo en pequeños detalles. Desde un punto de vista físico, el cambio de fase que controla el crecimiento puede ofrecernos una primera clasificación:

- \* Crecimiento a partir de una fase sólida. Las transiciones de fase implicadas son aquí sólido-sólido.
- \* Crecimiento a partir de una fase fundida. El crecimiento ocurre a través de una transición líquido-sólido.
- \* Crecimiento a partir de una fase vapor. El aporte a la fase cristalina se realiza directamente desde una fase gaseosa.
- \* Crecimiento a partir de una solución. La fase sólida se nutre a partir de uno o varios solutos, o incluso del mismo solvente.

El crecimiento a partir de la fase fundida es el mejor método para obtener en forma rápida monocristales de gran tamaño y con elevado grado de perfección cristalina. Sin embargo, el crecimiento a partir del fundente requiere que el material funda congruentemente, es decir, que no se descomponga por debajo o cerca del punto de fusión y tenga una presión manejable en éste.

Los métodos más populares de crecimiento que operan cerca del punto de fusión pueden agruparse como se indica a continuación:

- \* Enfriamiento normal o direccional (normal or direccional freezing)
- \* Tirado de cristales (crystal pulling),
- \* Fusión por zonas,
- \* Evaporación incongruente.

El arreglo de los átomos de un material es muy importante puesto que define las propiedades y el comportamiento de un material metálico. Los átomos forman un patrón repetitivo, regular en forma de rejilla o de red.

La red difiere de un material a otro dependiendo del tamaño de los átomos y del tipo de enlace entre ellos. La red se puede ver como el conjunto de subdivisiones llamadas celdas unitarias. El acomodo de varias celdas en una misma dirección se le conoce como cristal o grano.

Un metal fundido empieza a cristalizarse cuando las condiciones del medio son tales que son energéticamente favorables para que los átomos formen uniones permanentes (Gay, 1977). O bien, visto desde otro punto de vista, el metal fundido empieza a perder energía y el estado en equilibrio cuando pierde energía es el estado sólido.

Cuando se dan estas condiciones se empiezan a formar embriones los cuales crecen hasta formar núcleos, todo esto pasa porque los átomos pierden energía y al perder energía forman enlaces, que a su vez, forman estructuras cristalinas según su disposición, todo esto en pequeños volúmenes del medio, llamados embriones. En el medio, los átomos que se encuentran en movimiento constante y al azar, provocan la aportación de material al núcleo, ayudado también por las fuerzas de atracción desarrolladas por la proximidad entre partículas, cuando este núcleo choca con otro núcleo se forma un límite de grano. Como no se tiene control del movimiento, existen varios núcleos en la solidificación del material y cada núcleo puede tener una orientación distinta.

La forma de poder manipular la orientación de los átomos, cuando estos se estén acomodando para la solidificación, es la convección natural. La convección natural es debida a la diferencia de densidades en el fluido, esta diferencia de densidades causa fuerzas de cuerpo (en presencia de alguna aceleración como la aceleración de la gravedad, o bien, para el caso de esta tesis la aceleración centrífuga)(Incropera, 1990). La diferencia de densidades puede causar gradientes de temperatura o de concentraciones. La convección térmica es muy común en la naturaleza, cuando está en conjunto con la aceleración de Coriolis se produce el movimiento de la atmósfera, las corrientes marítimas y muy posiblemente el movimiento del magma, el cual ocasiona el movimiento de las placas continentales.

El primer estudio a cerca de la convección fue realizado por Rayleigh-Bénard. En este estudio se colocaron dos placas horizontales a cierta distancia y con diferente temperatura, debido a la gravedad existe un gradiente de presiones con lo cual, cuando la placa superior estaba más caliente que la placa inferior el sistema es estable y no se presentaba movimiento en el fluido, cuando la placa inferior estaba más caliente que la superior el sistema es inestable y aparece un movimiento convectivo en el fluido. El experimento original del estudio de este flujo fue hecho por Bénard, y el primer análisis

teórico fue hecho por Rayleigh en 1917.

El análisis del movimiento de un fluido por convección natural ha cambiado, enfocándose no nada más al caso cuando se tienen dos placas infinitas paralelas, horizontales o verticales, si no también cuando se trata de un medio finito confinado en una cavidad rectangular, para este tipo de análisis se ha variado la relación de aspecto de la cavidad, también las condiciones de frontera en las paredes de la cavidad bidimensional (Corcione, 2003), los estudios convencionales de cavidades bidimensionales, se tienen dos paredes a diferente temperatura, pero Corcione varía la temperatura de dos o más de dos paredes, incluso las cuatro, manteniendo las restantes aisladas.

En el año de 1891, J. Stefan analizó el problema concerniente a la formación de hielo en el océano de los casquetes polares. Las condiciones que él asumió para este problema son: que se trataba de un medio semi-infinito de temperatura en la superficie constante y que a un  $t = 0$  s la fase líquida se encuentra a la temperatura de cambio de fase  $T_m$ . El caso cuando la temperatura de la fase líquida es más alta que la del cambio de fase  $T_m$  fue estudiado por F. Neumann en la década de 1860, pero publicó sus resultados hasta el año de 1912 (Grigull and Sandner, 1984).

En el caso cuando se tiene un material confinado en una cavidad finita, independientemente de si se está solidificando o licuando y existe las condiciones necesarias para la convección natural, se presentan ciertos regímenes de flujo. Jonathan A. Dantzig (Dantzig, 1989) presenta un estudio del patrón de flujo en un material que se está licuando, el estudio que presenta es numérico, y se basa en el estudio de Gau y Viskanta quienes reportan que el flujo se ve afectado por el movimiento de la interfase. Dantzig presenta entre otros casos la solidificación de un material con una zona pastosa, donde se puede observar la deformación de la interfase y el decrecimiento de las velocidades conforme avanza la interfase y el número de Rayleigh decrece.

La fuerza de Coriolis interviene de gran forma en los patrones de flujo que se tienen en una cavidad que se encuentra girando en un brazo giratorio, de igual manera interviene en la estabilidad de la energía cinética dependiendo de la dirección de giro (Müller et al., 1992), en principio con forme el número de Grashof aumenta empieza a existir fluctuaciones en la energía cinética ( $Gr=5 \times 10^4$ ), cuando esto pasa la fuerza de Coriolis puede estabilizar esta fluctuación dependiendo del sentido de giro (Tao et al., 1994)

El estudio de crecimiento de cristales bajo la influencia de fuerzas debidas a la rotación es tal que se ha estudiado la influencia de la rotación y campos magnéticos en la intervención del disparo de la convección (Aurnou and

Olson, 2001). La rotación retarda el inicio de la convección al igual que los campos magnéticos, Aurnou y Olson reportan también, que mientras mayor sea el número de Taylor mayor es el número de Rayleigh crítico.

### 1.3. Objetivos

- \* Obtención de las soluciones de los problemas a tratar, solidificación con difusión pura y solidificación con convección natural en el fluido, por medio de métodos numéricos (elementos espectrales).
- \* Analizar la influencia de la fuerza centrífuga en los patrones de flujo dentro de la cavidad, cuando existe convección natural.
- \* Estudiar la interacción entre el movimiento del fluido, debido a la convección natural, y el movimiento de la interfase, y la influencia que tienen uno sobre el otro.
- \* Estudio de la transferencia de calor de la pared caliente hacia el fluido.

# Capítulo 2

## Modelos Matemáticos

### 2.1. Planteamiento del problema

El problema que se va a tratar es el de una cavidad que se encuentra en el extremo de un brazo giratorio como se muestra en la figura (2.1). En dicha cavidad se encuentra un material metálico en estado líquido, el cual se está solidificando.

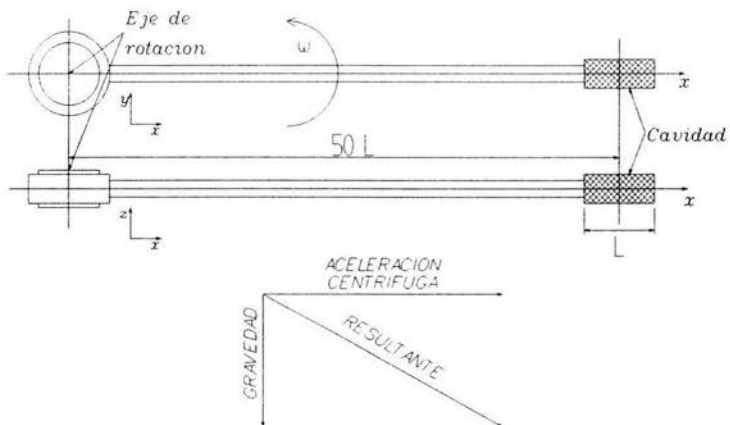


Figura 2.1: Vista superior y lateral del brazo de giro, y arreglo de los vectores de las aceleraciones que actúan en la cavidad

Esta cavidad se encuentra sujeta a las fuerzas de gravedad, fuerzas debidas a la aceleración centrífuga y fuerzas debidas a la aceleración de Coriolis, estas dos ultimas fuerzas son denominadas fuerzas ficticias, ya que son debidas al sistema de referencia. El estudio que se realiza en está tesis solo contempla la fuerza centrífuga, despreciando los efectos que produce la gravedad y la aceleración de Coriolis. Se desprecian los efectos de la gravedad porque, para el caso cuando hay movimiento de convección natural en el fluido, la aceleración centrífuga es 130 veces mayor que la gravedad. En el caso de la aceleración de Coriolis, se desprecia porque en un trabajo a futuro se pretende estudiar la influencia de esta en los patrones de flujo.

El arreglo de la cavidad se muestra en la figura (2.2) donde el extremo más cercano al eje de rotación tiene una temperatura  $T_c$  menor a la de cambio de fase y el extremo más alejado del eje de rotación tiene una temperatura  $T_h$  mayor a la de cambio de fase y las caras laterales están aisladas.

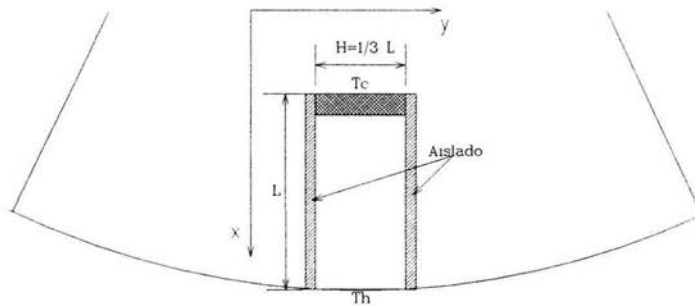


Figura 2.2: Arreglo de la cavidad que contiene el material que se va a solidificar

Las consideraciones que se van a tomar para todos los casos que se van a tratar, son las siguientes:

- \* Se considera que la densidad del material líquido es igual a la del material sólido, solamente se considera el cambio de la densidad cuando se calculan las fuerzas de flotación (aproximación de Boussinesq).
- \* Las propiedades termofísicas del material se mantienen constantes.
- \* Las temperaturas de las paredes, fría y caliente, son invariantes en el tiempo.

Tabla 2.1: Propiedades del Galio a la temperatura de cambio de fase

Propiedad	Símbolo	Unidades	Valor
Densidad	$\rho$	kg/m <sup>3</sup>	6116
Temperatura de cambio de fase	$T_m$	°C	29.78
Coefficiente de expansión térmica	$\beta$	K <sup>-1</sup>	1.27x10 <sup>-4</sup>
Calor específico	$C_p$	J kg <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup>	360
Calor latente	$\lambda$	J/kg	13397
Viscosidad cinemática	$\nu$	m <sup>2</sup> /s	3.2x10 <sup>-7</sup>
Difusividad térmica	$\alpha$	m <sup>2</sup> /s	1.27x10 <sup>-5</sup>
Conductividad térmica	$k$	W m <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup>	40.6

\* La velocidad angular es constante.

\* Las únicas fuerzas de cuerpo son las producidas por la aceleración centrífuga.

El material que se está utilizando es Galio; las propiedades de este material se presentan en la tabla 2.1

En las siguientes secciones se presentarán los modelos matemáticos que son utilizados para la solución de los distintos casos que se tratan en esta tesis.

## 2.2. Ecuación de continuidad

La siguiente ecuación nos dice que se trata de un fluido incompresible (White, 1979)

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.1)$$

donde  $\mathbf{u}$  es el vector velocidad del fluido,  $x$  y  $y$  son las coordenadas,  $u$  y  $v$  son las componentes de la velocidad en las direcciones de  $x$  y  $y$  respectivamente.

### 2.3. Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento

La ecuación de conservación de la cantidad de movimiento, para las condiciones mencionadas en el apartado 2.1, página 10, está expresada de la siguiente manera.

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} - 2\vec{\omega} \times \mathbf{u} - \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \mathbf{r} \quad (2.2)$$

donde  $\rho$  es la densidad del fluido,  $p$  es la presión,  $\nu$  es la viscosidad cinemática,  $\omega$  es la velocidad angular y  $\mathbf{r}$  es el vector de posición desde el eje de rotación hasta un punto dentro de la cavidad.

Además

$$\begin{aligned} 2\vec{\omega} \times \mathbf{u} \\ \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \mathbf{r} \end{aligned}$$

son respectivamente la aceleración de Coriolis y la aceleración centrífuga (ver apéndice A).

La distribución de la presión, densidad y velocidad durante el movimiento convectivo son:

$$\begin{aligned} p &= p_0 + p^* \\ \rho &= \rho_0 + \rho^* \\ u &= 0 + u^* \end{aligned} \quad (2.3)$$

donde  $p_0$  y  $\rho_0$  son la presión y la densidad, respectivamente, cuando existe equilibrio estático, es decir, no hay movimiento del fluido.

Por lo tanto, en la ausencia de cualquier movimiento del fluido, la ecuación de cantidad de movimiento queda como:

$$-\nabla p_0 - \rho_0 \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \mathbf{r} = 0 \quad (2.4)$$

Multiplicando todo por la densidad y sustituyendo (2.3) en (2.2) tenemos la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} (\rho_0 + \rho^*) \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t} + (\rho_0 + \rho^*) \mathbf{u}^* \cdot \nabla \mathbf{u}^* &= -\nabla(p_0 + p^*) \\ + \mu \nabla^2 \mathbf{u}^* - 2(\rho_0 + \rho^*) \vec{\omega} \times \mathbf{u}^* - (\rho_0 + \rho^*) \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \mathbf{r} \end{aligned} \quad (2.5)$$



Utilizando la ecuación (2.4) en (2.5) tenemos la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} (\rho_0 + \rho^*) \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t} + (\rho_0 + \rho^*) \mathbf{u}^* \cdot \nabla \mathbf{u}^* = -\nabla p^* \\ + \mu \nabla^2 \mathbf{u}^* - 2(\rho_0 + \rho^*) \vec{\omega} \times \mathbf{u}^* + \rho^* \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \mathbf{r} \end{aligned} \quad (2.6)$$

La aproximación de Boussinesq consiste en enfatizar los términos que mediante la variación de la densidad propician el movimiento de flotación. Por lo común el término que está asociado con la flotación es la gravedad. En este análisis se estudiará el caso donde se tiene un cuerpo sujeto a fuerzas centrífugas únicamente, como ya se mencionó, se desprecia la gravedad que sería perpendicular al eje de acción del brazo giratorio, por lo tanto, el término que está asociado con la flotación es la aceleración centrífuga, para efectos prácticos en los demás términos se considera la densidad como constante, por lo tanto tenemos que:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} - 2\rho \vec{\omega} \times \mathbf{u} + \Delta \rho \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \mathbf{r} \quad (2.7)$$

Donde  $\Delta \rho = \rho - \rho_0$  de la ecuación (2.3)

## 2.4. Ecuación de energía

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (2.8)$$

donde  $\alpha$  es la difusividad térmica,  $T$  es la temperatura del fluido y  $t$  es el tiempo (Incropera, 1990).

Para el caso cuando no hay convección ya sea libre o forzada, tenemos una condición de difusión, el flujo de calor está dado por la ley de Fourier:

$$Q = -kA \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2.9)$$

donde  $k$  es la conductividad térmica del material y  $A$  es el área de la sección transversal.

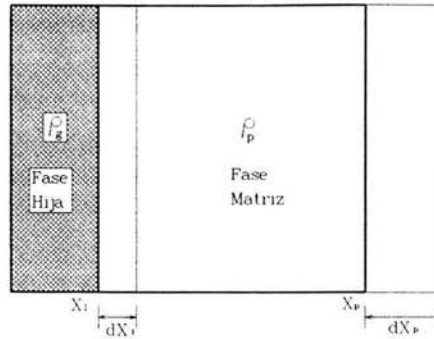


Figura 2.3: Cambio de fase por difusión

En la condición de flujo de calor en una dimensión, la distribución de temperaturas a lo largo de  $x$  se obtiene de la ecuación (2.8) que quedaría de la siguiente forma:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (2.10)$$

## 2.5. Ecuación de la interfase

En el cambio de fase de solidificación, la fase líquida pierde material mientras la fase sólida lo gana, visto desde otro punto de vista, la interfase se desplaza hacia la fase líquida. En la licuefacción la interfase se desplaza hacia el lado de la fase sólida. En el siguiente análisis se mostrará qué es lo que ocasiona el desplazamiento de la interfase, cuando el desplazamiento de la interfase es unidireccional (flujo de calor en una dimensión).

De la figura 2.3 podemos observar que durante un intervalo de tiempo  $dt$  crece la fase hija  $g$  una distancia  $dx_I$ , donde  $x_I$  marca la localización de la interfase. En la fase matriz un punto arbitrario  $x_p$  se desplaza, en el mismo incremento de tiempo, una distancia  $dx_p$ . Si  $\rho_g < \rho_p$  entonces  $dx_p > dx_I$ .

El material ganado en la fase  $g$ ,  $\rho_g dx_I$ , es igual al perdido en la fase  $p$ ,  $\rho_p dx_I - \rho_p dx_p$  (Lock, 1996). Por lo tanto:

$$\rho_p dx_I - \rho_p dx_p = \rho_g dx_I \quad (2.11)$$

Despejando el desplazamiento  $dx_p$  de la ecuación (2.11) tenemos:

$$dx_p = \left( \frac{\rho_p - \rho_g}{\rho_p} \right) dx_I \quad (2.12)$$

Como todo es en un determinado tiempo por lo tanto tenemos de la ecuación (2.12)

$$\frac{dx}{dt} \Big|_p = \left( \frac{\rho_p - \rho_g}{\rho_p} \right) \frac{dx}{dt} \Big|_I \quad (2.13)$$

Donde  $dx_p/dt$  es la velocidad de la fase matriz y  $dx_I/dt$  es la velocidad de la interfase, ambas relativas a la fase hija que está creciendo. De la ecuación (2.13) se puede observar que cuando la densidad de la fase hija es mucho menor que la fase matriz, las velocidades de la interfase y del punto  $p$  dentro de la fase matriz son iguales, esto se puede explicar de la siguiente manera, para formar un cierto volumen de fase hija no se necesita una gran cantidad de fase matriz, ocasionando un desplazamiento de igual magnitud de la interfase como del punto  $p$ . Cuando las densidades son iguales se puede interpretar como que no hay cambios en el volumen y por lo tanto el volumen del material perdido por la fase matriz es el mismo que el ganado por la fase hija. Cuando la densidad de la fase hija es mucho mayor que el de la fase matriz, la velocidad del punto  $p$  es negativa, esto es por que para formar cierto volumen de la fase hija se necesita una gran cantidad de la fase matriz, por lo tanto, al formarse la fase hija absorbe una gran cantidad de la fase matriz lo que ocasiona un desplazamiento negativo.

El trabajo producido por el cambio de fase es un trabajo de compresión, no hay trabajo debido a esfuerzos viscosos ni a elementos externos como algún agitador, por lo tanto el trabajo es (White, 1979):

$$w = \int_{sc} p(\mathbf{v}_p \cdot \mathbf{n}) dA$$

ó integrando:

$$w = pA \frac{dx}{dt} \Big|_p$$

El trabajo de compresión neto referido a la interfase y por unidad de área es:

$$w = p \left( \frac{\rho_p - \rho_g}{\rho_p} \right) \frac{dx}{dt} \Big|_I \quad (2.14)$$

El flujo de calor en la interfase se debe a la difusión o conducción térmica cuya ecuación es (2.9), por lo tanto, el flujo de calor neto por unidad de área, en la interfase, está dado por la siguiente ecuación:

$$q = k_g \left( \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_g \right) \Big|_I - k_p \left( \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_p \right) \Big|_I \quad (2.15)$$

El cambio de energía específica en el tiempo, es igual al cambio de la energía interna por la velocidad de la interfase, la densidad y por unidad de área (Lock, 1996):

$$\frac{de}{dt} = \rho_g (u_g - u_p) \frac{dx}{dt} \Big|_I \quad (2.16)$$

Aplicando la primera ley de la termodinámica para un sistema cerrado y despreciando los cambios de energía cinética y potencial tenemos la siguiente expresión:

$$\frac{de}{dt} = q - w \quad (2.17)$$

Sustituyendo (2.14) y (2.16) en (2.17) tenemos:

$$\begin{aligned} q &= -\rho_g \frac{dx}{dt} \Big|_I (u_g - u_p) - p \left( \frac{\rho_p - \rho_g}{\rho_p} \right) \frac{dx}{dt} \Big|_I \\ &= \rho_g \frac{dx}{dt} \Big|_I \left[ u_g - u_p - p \frac{1}{\rho_g} + p \frac{1}{\rho_p} \right] \end{aligned} \quad (2.18)$$

Pero como  $1/\rho = v$  por lo tanto de la ecuación (2.18) tenemos:

$$q = \rho_g \frac{dx}{dt} \Big|_I [(u_g - pv_g) - (u_p - pv_p)] \quad (2.19)$$

Por definición:

$$h = u - pv$$

$$\lambda = h_g - h_p$$

Donde  $h$  es la entalpía y  $\lambda$  es el calor latente por unidad de masa

Sustituyendo la ecuación (2.15) en (2.19) tenemos:

$$k_g \left( \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_g \right) \Big|_I - k_p \left( \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_p \right) \Big|_I = \rho_g \lambda \frac{dx}{dt} \Big|_I \quad (2.20)$$

La ecuación (2.20) es la ecuación de la interfase. En esta ecuación aparece la velocidad de la interfase en función de la diferencia de calor, transmitido por las fases hija y matriz hacia la interfase, por lo que sin importar cual sea la fase sólida o líquida, esta ecuación nos puede indicar si hay solidificación o licuefacción.

Para el caso de la solidificación, la fase hija es el medio sólido y la fase matriz es el medio líquido, por lo que la ecuación que representa el movimiento de la interfase para la solidificación es:

$$k_s \left( \frac{\partial T_s}{\partial x_s} \right) \Big|_{x_s=X} - k_l \left( \frac{\partial T_l}{\partial x_l} \right) \Big|_{x_l=X} = \rho \lambda \frac{dX}{dt} \quad (2.21)$$

donde los subíndices  $s$  y  $l$  se refieren a si se trata del sólido o del líquido.

## 2.6. Ecuación del rotacional de la ecuación de momento

En el apéndice B se desarrolla la ecuación del rotacional de la ecuación de cantidad de movimiento.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varpi_z}{\partial t} + u \frac{\partial \varpi_z}{\partial x} + v \frac{\partial \varpi_z}{\partial y} = \nu \left( \frac{\partial^2 \varpi_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varpi_z}{\partial y^2} \right) \\ - \left[ \rho_0 \omega_z^2 r_y \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\rho} \right) - \rho_0 \omega_z^2 r_x \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\rho} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.22)$$

donde  $\varpi_z$  la componente del vector rotacional en la dirección  $z$

# Capítulo 3

## Resultados

En el capítulo anterior se presentó la descripción del problema físico que se pretende abordar y las ecuaciones que gobiernan el campo de velocidades, presiones, temperaturas y desplazamiento de la interfase. En este capítulo se presentan los diversos problemas que se propusieron así como los resultados que se obtuvieron.

Los problemas que se van a tratar se muestran en la tabla siguiente:

Tabla 3.1: Casos que se analizan en esta tesis para el Galio con un número de Prandtl,  $Pr = 0.025$

Casos	$T_h$ [K]	$T_c$ [K]	$\omega$ [rad/s]
1	305.43	298.93	0
2	307.93	295.93	0.7
3	303.93	296.93	27.41

Si las ecuaciones de transporte formuladas en el capítulo anterior se adimensionalizan, como se muestra en el apéndice C, es posible obtener los parámetros adimensionales relevantes del sistema en estudio, estos parámetros son los siguientes:

Número de Prandtl

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha}$$

Número de Rayleigh

$$Ra = \frac{\hat{g}\beta\Delta T_h L^3}{\nu\alpha}$$

donde  $\hat{g}$  es la aceleración centrífuga y se define como  $\hat{g} = \omega^2 R$ ;  $R$  es el radio de giro (ver figura 2.1) y  $\omega$  la velocidad angular,  $\beta$  es el coeficiente de expansión volumétrica,  $\Delta T_h$  es la diferencia de temperaturas entre la pared caliente  $T_h$  y la temperatura de la interfase  $T_m$ ,  $L$  es la longitud característica de la cavidad (ver figura 2.2),  $\nu$  es la viscosidad cinemática y  $\alpha$  es la difusividad térmica.

Número de Stefan

$$St = \frac{\lambda}{C_p \Delta T_c}$$

donde  $\Delta T_c$  es la diferencia de temperaturas entre la interfase  $T_m$  y la pared fría  $T_c$ ,  $\lambda$  es el calor latente y  $C_p$  es el calor específico a presión constante.

Número de Taylor

$$Ta = \frac{4\omega^2 L^4}{\nu^2}$$

Número de Nusselt local

$$Nu = \frac{hH}{k}$$

donde  $h$  es el coeficiente local de transferencia de calor por convección y  $k$  es el coeficiente de transferencia de calor por conducción.

Puede observarse que tres de los parámetros adimensionales ( $Ra$ ,  $Nu$  y  $Ta$ ) tienen en común la longitud característica  $L$ , la cual es variable con respecto al tiempo. Debido a que la longitud característica del sistema es la longitud de la pared caliente a la interfase, no es deseable tener los parámetros en función de esta longitud variable, por lo que se recurrió a la generación de un parámetro adimensional que no incluya la longitud  $L$ .

El número de Rayleigh nos indica la razón de las fuerzas de flotación a las viscosas, suponiendo que se tiene un Rayleigh arriba del crítico ( $Ra_c = 1708$ , para cavidades con relación de aspecto  $H/L > 1$ , y para cavidades con relación de aspecto  $H/L < 1$ ,  $Ra_c = 900(L/H)^{3.7}$  (Cappelli et al., 2003)), se esperaría que se obtenga un movimiento de convección natural pero tal vez el número Stefan es muy pequeño (el número de Stefan nos indica la razón de la energía que se necesita para el cambio de fase a la energía que se está retirando del sistema por la pared fría), es decir, que se está extrayendo mucha energía y en consecuencia hay un desplazamiento muy rápido de la

interfase (ecuación (2.21)), lo que provoca que la longitud característica  $L$  del sistema se esté haciendo cada vez menor, un movimiento de la interfase relativamente rápido provocaría que no se iniciara la convección natural.

En el afán de obtener un número adimensional que nos pueda dar información sobre la relación que existe entre la energía que se extrae del sistema (número de Stefan  $St$ ), la relación entre las fuerzas de flotación y las fuerzas viscosas (número de Rayleigh  $Ra$ ) y la relación que existe entre la fuerza de Coriolis y las fuerzas viscosas (número de Taylor  $Ta$ ), se combinan los números adimensionales ( $Ra$ ,  $St$  y  $Ta$ ) para obtener un parámetro adimensional el cual se espera que pueda ser un único número adimensional que gobierne el sistema.

$$E = \frac{Ra St}{Ta^{3/4}} = \omega^{1/2} R \frac{\Delta T_h}{\Delta T_c} \frac{\beta \rho \lambda \nu^{1/2}}{2,828 k} \quad (3.1)$$

donde 2.828 sale de elevar el coeficiente 4 a la 3/4 del número de Taylor. En base a las condiciones de cada caso (ver tabla 3.1) y a los parámetros adimensionales relevantes del sistema en estudio, se obtiene la siguiente tabla:

Tabla 3.2: Parámetros adimensionales para cada caso, con un número de Prandtl,  $Pr=0.025$

Caso	$Ra$	$St$	$Ta$	$E$
1	0	18.61	0	0
2	$3.26 \times 10^3$	5.32	$1.55 \times 10^7$	$5.21 \times 10^{-2}$
3	$1.00 \times 10^6$	4.65	$2.38 \times 10^{10}$	$5.70 \times 10^{-2}$

### 3.1. Método Numérico

Para todos los casos mencionados, la solución numérica se obtiene para una cavidad, la cual tiene una relación de aspecto ( $H/L$ ) de 3:1 (ver figura 3.1). El método que se emplea para la solución del problema es el de elementos espectrales. La malla numérica que se emplea para este caso es de 300 elementos, 10 en la dirección de  $y$  y 30 en la dirección de  $x$ , la pared más cercana al eje de rotación tiene una temperatura constante  $T_c$  inferior a la temperatura de cambio de fase  $T_m$  y la pared más alejada tiene una temperatura por arriba de la temperatura de cambio de fase  $T_h$ , las demás paredes son aislada, es decir que  $\partial T / \partial y = 0$ .



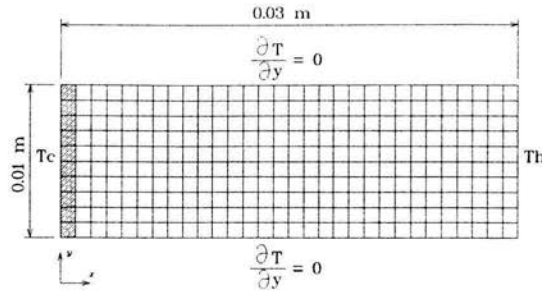


Figura 3.1: Configuración de la celda para la solución numérica, las condiciones de frontera son: las paredes verticales de la cavidad tienen temperatura constante y las paredes horizontales son aisladas, se emplea una malla numérica de 300 elementos.

El método de elementos espectrales está basado en el método de elemento finito de alto orden para ecuaciones diferenciales parciales, el dominio computacional está representado por macro-elementos, los cuales están divididos por una malla de  $N \times N$  puntos de colocación Gauss-Lobatto Legendre, la solución y la geometría son aproximadas con polinomios de expansión de alto orden para cada macro-elemento.

Cada macro-elemento depende de la velocidad, presión y temperatura, el cual es representado por un producto tensorial de interpolantes Lagrangianos a través de los puntos de colocación de Gauss-Lobatto Legendre.

El método de elementos espectrales es una extensión del método de residuos pesados. El método de residuos pesados es una técnica para resolver ecuaciones diferenciales parciales (Avila, 2004).

### 3.2. Problema unidimensional (difusión)

En esta sección se presenta la solución del caso 1 (ver tablas 3.1 y 3.2). Cuando no hay movimiento de convección o las velocidades del fluido son despreciables se tiene una situación de difusión pura (solidificación del material líquido).

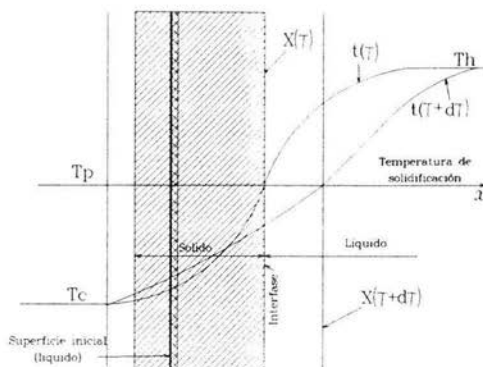


Figura 3.2: Representación del gradiente de temperaturas en un proceso de solidificación (difusión pura) de un sistema unidimensional semi-infinito (Eckert and Robert M. Drake, 1972)

### 3.2.1. Problema de Neumann

Se supone que tenemos un medio semi-infinito como el que se muestra en la figura 3.2 el cual inicialmente es líquido y se encuentra a una temperatura  $T_h$  por arriba del cambio de fase. Al principio del proceso de solidificación,  $t = t_0$ , la velocidad de formación de la fase sólida es muy grande, de la ecuación (2.21) se puede observar que el gradiente de temperaturas en la parte sólida tiende al infinito, porque la sección de material sólido es relativamente muy pequeña con respecto a la diferencia de temperaturas, lo que ocasiona que un flujo de calor muy grande salga del sistema. Ante este desplazamiento rápido de la interfase, el sistema es incapaz de responder, la velocidad de la interfase al inicio es mayor que la velocidad de respuesta del sistema, esto hace que la distribución de temperaturas en el sólido, al inicio de la solidificación, no sea lineal. Al tiempo  $t = t_0$  el material sólido se encuentra a la temperatura de la pared fría  $T_c$ , un instante después,  $t = \tau$ , la porción sólida crece y adquiere una distribución de temperaturas no lineal.

El medio líquido (el cual es infinitamente mayor que el medio sólido) cerca de la interfase, al tiempo  $t = \tau$ , adquiere una distribución de temperaturas que no es lineal, después de un incremento de tiempo  $t = \tau + d\tau$  la parte sólida crece y adquiere una distribución de temperaturas casi lineal. El movimiento de la interfase empieza a disminuir, el material en estado sólido va creciendo. De la ecuación (3.11), como se verá más adelante, y de la

ecuación (2.21) se puede observar que si la zona sólida va creciendo el gradiente va disminuyendo, al ir disminuyendo la velocidad de desplazamiento de la interfase el sistema responde a la diferencia de temperaturas en el material solidificado adquiriendo una distribución de temperaturas casi lineal, mientras que la parte líquida por ser infinitamente mayor que el sólido adquiere una distribución de temperaturas que tiene una forma no lineal.

En un incremento de tiempo muy grande, la velocidad de la interfase será menor que la velocidad de respuesta del sistema permitiendo que la parte sólida tenga una distribución de temperaturas prácticamente lineal (conductividad térmica del sólido constante) mientras que la distribución de temperatura de la parte líquida cerca de la interfase sigue siendo no lineal.

Como se trata de un problema de difusión pura, puesto que no hay movimiento del fluido, por lo tanto a partir de la ecuación de la energía (2.8) podemos obtener la distribución de temperaturas para el medio sólido y el medio líquido:

Para el medio sólido de la ecuación (2.10) obtenemos la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial^2 T_s}{\partial x_s^2} - \frac{1}{\alpha_s} \frac{\partial T_s}{\partial t} = 0 \quad \text{con } T_s = T_c \quad \text{en } x_s = 0 \quad (3.2)$$

Para el medio líquido, de la ecuación (2.10), tenemos la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial^2 T_l}{\partial x_l^2} - \frac{1}{\alpha_l} \frac{\partial T_l}{\partial t} = 0 \quad \text{con } T_l = T_h \quad \text{en } x_l \rightarrow \infty \quad (3.3)$$

De la solución analítica de Neumann (Solomon, 1976), debido a que la distribución de temperatura es una función del tiempo y de la posición, se hace el siguiente cambio de variable:

$$T(x, t) = F(\xi)$$

donde  $F(\xi)$  es una función desconocida y  $\xi$  es una variable de similitud la cual es de la forma:

$$\xi = \frac{Ax}{t^n}$$

Obteniendo las derivadas parciales de  $\xi$  con respecto al tiempo y la segunda derivada con respecto a  $x$  y sustituyendo en la ecuación (2.10) llegamos a la siguiente ecuación:

$$\frac{A^2}{t^{2n}} \frac{d^2T}{d\xi^2} = -\frac{n\xi}{\alpha t} \frac{dT}{d\xi} \quad (3.4)$$

donde  $n = 1/2$  para eliminar al tiempo  $t$ , quedando una ecuación diferencial de dos variables. Resolviendo esta ecuación tenemos que la solución para el sólido y el líquido son las siguientes (Eckert and Robert M. Drake, 1972):

$$\vartheta_s = T_s - T_m = (T_c - T_m) + A \operatorname{erf} \frac{x_s}{2\sqrt{\alpha_s t}} \quad (3.5)$$

$$\vartheta_l = T_l - T_m = (T_h - T_m) + B \operatorname{erfc} \frac{x_l}{2\sqrt{\alpha_l t}} \quad (3.6)$$

donde A y B son constantes,  $T_s$  es la temperatura del sólido en el punto  $x_s$  y  $T_l$  es la temperatura del líquido en el punto  $x_l$ .

Para las condiciones en la interfase,  $T_s = T_l = T_m$  y  $x_s = X_s$ ,  $x_l = X_l$  evaluadas en las ecuaciones (3.5) y (3.6) se obtiene lo siguiente:

$$T_m - T_s = A \operatorname{erf} \frac{X_s}{2\sqrt{\alpha_s t}} \quad (3.7)$$

$$T_m - T_l = B \operatorname{erfc} \frac{X_l}{2\sqrt{\alpha_l t}} \quad (3.8)$$

Del problema de Stefan, en donde la temperatura de todo el líquido es la temperatura del cambio de fase, es decir que no hay flujo de calor del líquido hacia la interfase, obtenemos que la posición de la interfaz es proporcional a la raíz del tiempo, es decir:

$$X \sim C\sqrt{t} \quad (3.9)$$

donde  $C$  es una constante.

Para la parte líquida de la ecuación (3.9) tenemos:

$$X_l = K\sqrt{t} \quad (3.10)$$

Para la parte sólida de la ecuación (3.9) tenemos:

$$X_s = K\rho\sqrt{t} \quad (3.11)$$

donde  $\varrho$  esta definida como:

$$\varrho = \frac{\rho_l}{\rho_s}$$

donde  $\rho_l$  es la densidad del líquido y  $\rho_s$  es la densidad del sólido.

De la ecuación (3.9)  $K$  es una constante a determinar y para determinarla se sustituyen las ecuaciones (3.5), (3.6), (3.10) y (3.11) en la ecuación (2.21) por lo que tenemos la siguiente ecuación:

$$\frac{A k_s}{\sqrt{\pi\alpha_s}} e^{-\frac{K^2\varrho^2}{4\alpha_s}} + \frac{B k_l}{\sqrt{\pi\alpha_l}} e^{-\frac{K^2}{4\alpha_l}} = \frac{\lambda\rho_l K \varrho}{2} \quad (3.12)$$

Y finalmente sustituyendo las ecuaciones (3.7) y (3.8) en (3.12) tenemos la siguiente ecuación:

$$\frac{(T_m - T_s) k_s e^{-\frac{K^2\varrho^2}{4\alpha_s}}}{\sqrt{\pi\alpha_s} \operatorname{erf}\left(\frac{K\varrho}{2\sqrt{\alpha_s}}\right)} - \frac{(T_m - T_l) k_l e^{-\frac{K^2}{4\alpha_l}}}{\sqrt{\pi\alpha_l} \operatorname{erfc}\left(\frac{K}{2\sqrt{\alpha_l}}\right)} = \frac{\lambda\rho_l K \varrho}{2} \quad (3.13)$$

De la ecuación (3.13) se obtiene la constante  $K$  de forma numérica en términos de las temperaturas  $T_c$ ,  $T_h$  y  $T_m$ , y de las propiedades termofísicas del material. Cuando  $K$  es conocida y de las ecuaciones (3.7), (3.8), (3.10) y (3.11) sustituidas en (3.5) y (3.6) tenemos que:

La distribución en la parte sólida es de la forma:

$$\frac{T_s - T_m}{T_c - T_m} = 1 - \frac{\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_s t}}\right)}{\operatorname{erf}\left(\frac{K\varrho}{2\sqrt{\alpha_s}}\right)} \quad (3.14)$$

y la distribución para la parte líquida es de la forma:

$$\frac{T_l - T_m}{T_h - T_m} = 1 - \frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_l t}}\right)}{\operatorname{erfc}\left(\frac{K}{2\sqrt{\alpha_l}}\right)} \quad (3.15)$$

Para la solución analítica es indispensable obtener el valor de la constante  $K$  de la ecuación (3.13), la posición de la interfase en un tiempo dado se obtiene a partir de las ecuaciones (3.11) y (3.10), donde se considera  $\varrho = 1$ ,

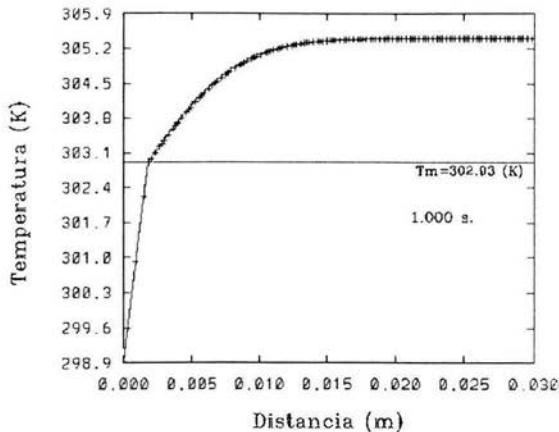


Figura 3.3: Distribución de temperaturas para el caso 1 al tiempo  $t=1$  s, donde los signos + representan la solución numérica y la línea continua – representa la solución analítica ecuaciones (3.14) y (3.15). La interfase se encuentra localizada en la intersección de la línea horizontal (temperatura de cambio de fase  $T_m$ ) con la curva que representa la distribución de temperaturas.

y de las ecuaciones (3.14) y (3.15) se obtiene la distribución de temperaturas en la parte sólida y en la parte líquida respectivamente.

Es importante mencionar que la solución analítica se obtuvo para un medio semi-infinito el cual cumple con la condición:

$$\left. \frac{\partial T_l}{\partial x_l} \right|_{x \rightarrow \infty} = 0 \quad (3.16)$$

En la figura 3.3 se puede observar tanto la solución numérica como la analítica a un tiempo  $t=1$  s, la solución numérica representada con + mientras la analítica con línea continua. En esta figura se puede observar que las dos soluciones coinciden perfectamente, relativamente lejos de la interfase las dos soluciones cumplen con la condición (3.16)

Como ya se mencionó, la velocidad de la interfase va disminuyendo conforme se va solidificando el material (ecuación (2.21)). Esto permite que la distribución de temperaturas cambie, a un cierto tiempo  $t=7$  s empieza a percibirse una diferencia en la distribución de temperaturas (material líquido) entre ambas soluciones como se puede ver en la figura 3.4, esto es porque

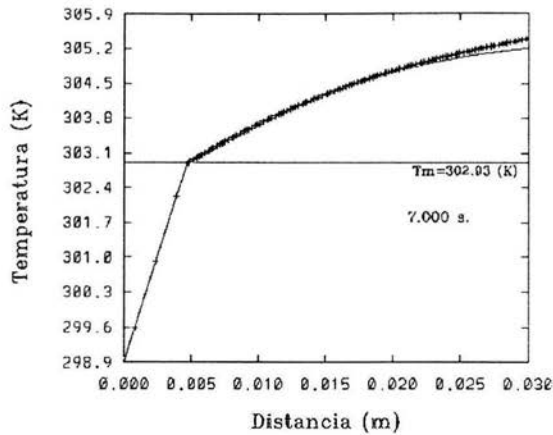


Figura 3.4: Diferencias entre la solución numérica y la solución analítica, donde los signos + representan la solución numérica y la línea continua – representa la solución analítica ecuaciones (3.14) y (3.15).

la solución numérica es para un medio finito (ver figura 3.1). Es posible observar que para un cierto tiempo la solución numérica en la zona líquida adquiere una distribución de temperaturas lineal (ver figura 3.5).

¿Pero a que tiempo deja de coincidir la solución analítica con la solución numérica?. Esta respuesta se puede obtener al derivar con respecto  $x$  la ecuación (3.6), es decir:

$$\frac{\partial T_l}{\partial x_l} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha_l t}} \quad (3.17)$$

Para que la solución numérica y la solución analítica sean similares el gradiente de temperaturas de la solución numérica evaluado en la pared caliente debe ser muy pequeño, casi cero. Para encontrar el tiempo en el cual las dos soluciones no coinciden, se resuelve la ecuación (3.17) para el tiempo, es decir:

$$t = -\frac{4\alpha_l}{x^2} \ln \left( \frac{\partial T_l}{\partial x_l} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right) \quad (3.18)$$

donde  $x$  es la longitud de la cavidad que es de 0.03 m y el gradiente de temperaturas se propone que tenga un valor de 0.01 °K/m, lo cual nos da un

tiempo de  $t=3.75$  s, es decir que aproximadamente a este tiempo la solución numérica ya no coincide con la solución analítica. Como se puede observar en la figura 3.5, cuando  $t=4$  s, la distribución de temperaturas cerca de la pared caliente empieza a tener una cierta pendiente.

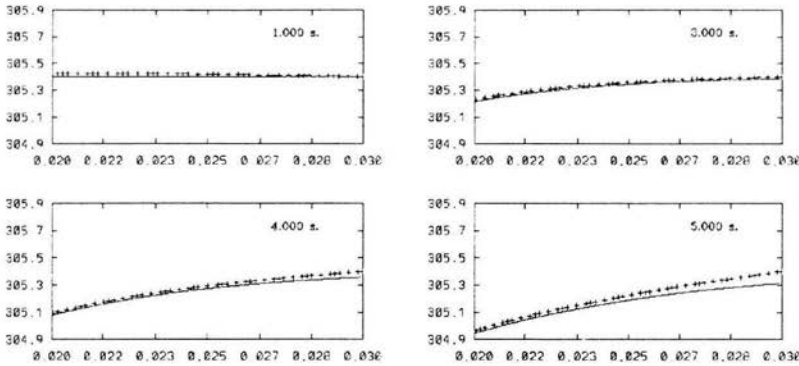


Figura 3.5: Distribución de temperaturas en las cercanías de la pared caliente para diversos tiempos, donde los signos + representan la solución numérica y la línea continua – representa la solución analítica ecuaciones (3.14) y (3.15).

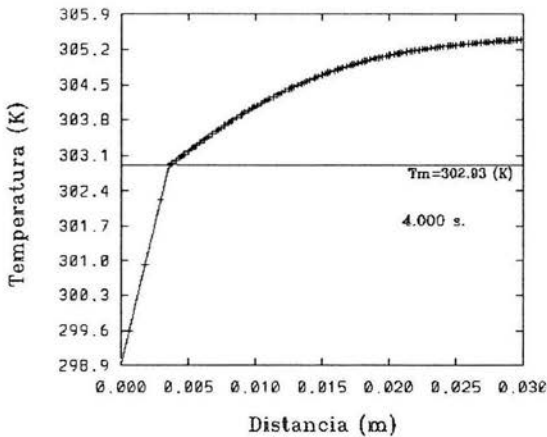


Figura 3.6: Distribución de temperaturas para el caso 1 al tiempo  $t=4$  s donde la línea continua corresponde a la solución analítica (3.14) y (3.15). Símbolo + representa la solución numérica. Posición de la interfase en 0.00354 m



### 3.2.2. Solidificación

Debido a que se pretende determinar la influencia del movimiento convectivo sobre el frente de solidificación, es necesario fijar la temperatura de la pared caliente  $T_h$  por arriba de la temperatura del cambio de fase, con el propósito de garantizar que la temperatura  $T_h$  permita el inicio de la convección ( $Ra > Ra_c$ ) pero que a su vez permita que se lleve a cabo el proceso de solidificación en lugar de la licuefacción, se analizó la ecuación de la interfase (2.21). Si se considera que la conductividad de la parte sólida y la parte líquida son iguales, la ecuación de la interfase queda de la siguiente manera.

$$k \left[ \frac{\partial T_s}{\partial x_s} - \frac{\partial T_l}{\partial x_l} \right] = \lambda \rho \frac{dX}{dt}$$

Despejando la conductividad y manejando las diferenciales como incrementos (difusión de calor) tenemos:

$$\frac{T_m - T_c}{x_s} - \frac{T_h - T_m}{x_l} = \frac{\lambda \rho dX}{k dt} \quad (3.19)$$

$$x_l = x_T - x_s \quad (3.20)$$

donde  $x_T$  es la longitud total de la cavidad ver figura 3.1.

Sustituyendo (3.20) en (3.19) tenemos lo siguiente:

$$\frac{(x_T)(T_m - T_c) + (x_s)(T_c - T_h)}{(x_s)(x_T - x_s)} = \frac{\lambda \rho dx}{k dt} \quad (3.21)$$

Para que exista solidificación, la velocidad de la interfase según el sistema de referencia que se está utilizando (ver figura 2.2), debe ser positiva, por lo que analizando la ecuación (3.21) se puede afirmar que lo que puede hacer negativa a la velocidad es el numerador ya que el denominador nunca podrá ser negativo, si acaso será cero cuando toda la cavidad se solidifique, por lo que tenemos lo siguiente:

$$(x_T)(T_m - T_c) + (x_s)(T_c - T_h) \geq 0 \quad (3.22)$$

donde  $x_s \leq x_T$

Manejando la ecuación (3.22) llegamos a la siguiente expresión:

$$T_h \leq \frac{x_T}{x_s}(T_m - T_c) + T_c \quad (3.23)$$

Finalmente sustituyendo la ecuación (3.11) en (3.23), llegamos a la ecuación:

$$T_h \leq \frac{x_T}{K \rho \sqrt{t}}(T_m - T_c) + T_c = pt \quad (3.24)$$

que quiere decir que para que exista el proceso de solidificación se tiene que cumplir la desigualdad anterior, de lo contrario, es posible que se tenga proceso de licuefacción que es no deseable, la constante  $K$  se obtiene de forma numérica de la ecuación (3.13).

En las figuras 3.7 y 3.8 se grafica el parámetro  $pt$  como función del tiempo y la distancia respectivamente, se puede observa hasta donde se espera que se cumpla la ecuación (3.24). Por un lado tenemos hasta que tiempo (después de iniciarse el proceso de solidificación) la desigualdad se cumple (ver figura 3.7). Por el otro lado tenemos hasta donde llega la interfase (ver figura 3.8). El punto donde la gráfica de  $pt$  coincide con la temperatura de la pared caliente, es la posición o el tiempo para el cual se cumple con la ecuación (3.24), y es hasta donde se espera que llegue la interfase. Si consideramos que la conductividad térmica del líquido y del sólido son iguales y sustituimos  $pt = T_h$  en la ecuación (3.21) llegamos al siguiente resultado:

$$\frac{\rho \lambda}{k} \frac{dX}{dt} = 0 \quad (3.25)$$

donde lo único que puede valer cero, para que se cumpla la igualdad, es  $dX/dt$ , lo que significa que la interfase deja de moverse.

Si se igualan los flujos de calor de la ecuación (3.21), y se despeja la temperatura de la pared caliente, se obtiene que  $T_h$  para que la velocidad sea cero, es igual al parámetro  $pt$ .

Observando la gráfica del parámetro  $pt$  contra el tiempo (ver figura 3.7) y de la ecuación (3.24), se espera que el tiempo para que la interfase llegue a un equilibrio (el flujo calor que está entrando a la interfase sea el flujo calor que está saliendo), sea de 108.8 s y la posición a la que llegue la interfase sea de 0.0185 m (ver figura 3.8).

De la solución numérica se tienen la figura 3.9, que es a un tiempo cercano al del equilibrio, y la figura 3.10, que es a un tiempo que se considera ya en

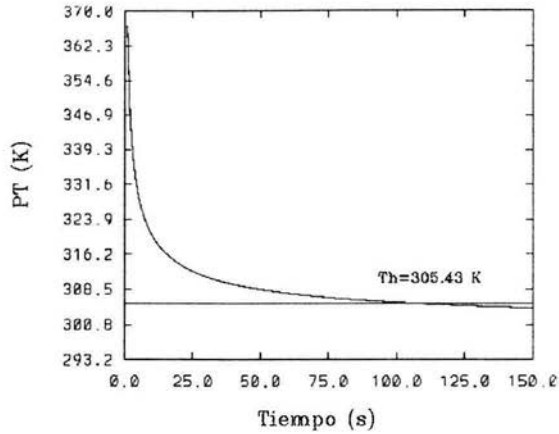


Figura 3.7: Parámetro  $pt$  en función del tiempo para una  $K=1.77 \times 10^{-3}$

equilibrio la interfase, según la figura 3.8, pero no se puede decir que la interfase llegue a la posición que se espera, esto es porque al sustituir la ecuación (3.11) en (3.23), se pretende obtener una ecuación que solo este en función de una variable  $t$ , pero no hay que olvidar que la ecuación (3.10), es tan sólo una *aproximación* para un medio semi-infinito, problema Stefan, y que el problema que estamos tratando es para un medio finito.

En la figura 3.10 se pueden observar tres líneas de apoyo, la primera de ellas es la línea horizontal que indica la temperatura de cambio de fase  $T_m$ , la intersección de la gráfica (símbolos +) con esta línea nos da la localización de la interfase, se tiene una segunda línea que es la vertical, la cual nos indica la posición de la interfase al tiempo  $t = 100$  s, esto es tan sólo para poder observar cuanto avanzó la interfase después de 12 segundos, y la tercera línea (recta continua) de apoyo es la recta que se encuentra con una cierta pendiente.

La tercera línea de la figura 3.10 nos indica por una parte la localización de la interfase en equilibrio, recordando que se toman las conductividades térmicas del líquido igual que la del sólido por lo que lo único que puede hacer variar el flujo de calor, tanto en el líquido como en el sólido, es el gradiente de temperaturas, con lo cual se concluye que si los gradientes de temperatura son iguales entonces la interfase se encuentra en equilibrio, como se muestra en la figura 3.10 y la interfase quedará en la intersección de esta línea con la línea horizontal (aproximadamente en 0.0185 m).

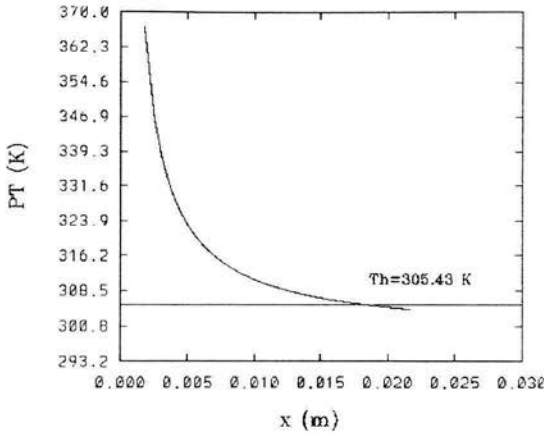


Figura 3.8: Parámetro  $pt$  en función de la distancia para una  $K=1.77 \times 10^{-3}$

Por lo que se puede concluir que la gráfica de  $pt$  en función del tiempo no representa una solución para este problema y la gráfica de  $pt$  en función de la distancia representa la posición de equilibrio a la que tiende la interfase, con lo cual se espera que a un tiempo muy grande la interfase llegue a esta posición.

Como comprobación tanto del  $Ra_c$  para cavidades y que al ponerle fuerzas de cuerpo al sistema ( $Ra < Ra_c$ ), se sigue teniendo solidificación por difusión, se propone el caso 2 (ver tablas 3.1 y 3.2) en donde se tiene un número de Rayleigh  $Ra=3.26 \times 10^3$ , con el cual no se espera que se tenga convección natural, ya que el número de Rayleigh crítico es  $Ra_c = 5.24 \times 10^4$ , para una cavidad de relación  $L/H = 3$  y calentamiento en la parte inferior, (Cappelli et al., 2003).

Para el caso 2 los resultados que se obtuvieron indican que la convección natural no se presentó, tal como se esperaba, esto se puede observar en la figura 3.11 en donde la interfase se encuentra en  $X=0.74 \times 10^{-2}$  m, la longitud característica de la cavidad al tiempo  $t=9.25$  s es de  $2.26 \times 10^{-2}$  m, con esta longitud característica se tiene un número de Rayleigh  $Ra=1.39 \times 10^3$  el cual está por debajo del crítico, por lo que en la cavidad en el líquido no se observa movimiento convectivo, el  $Ra$  siempre se mantiene por debajo del crítico.

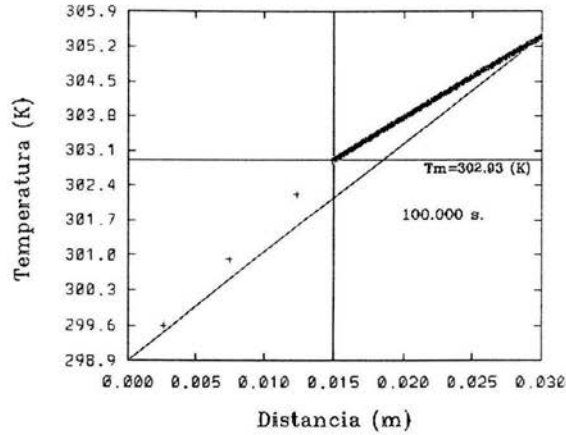


Figura 3.9: Posición de la interfase a los 100 s, la línea vertical indica la posición de la interfase a los 100 s, la línea horizontal indica la temperatura de cambio de fase, la intersección de esta línea con la distribución de temperaturas nos indica la posición de la interfase, donde lo que se encuentre abajo de esta línea es el material sólido y lo que se encuentre arriba es el material líquido.

### 3.3. Convección natural

En esta sección se presenta el caso 3, cuando las condiciones son tales que se espera en el fluido un movimiento de convección natural y a la vez la solidificación del material líquido (ver tablas 3.1 y 3.2). Se estudia cómo la convección natural es afectada por el movimiento de la interfase. La longitud característica del sistema sólido-líquido va decreciendo y con ello el número de Rayleigh. Si decrece el número de Rayleigh, esto nos indica que la fuerza de flotación se va haciendo más pequeña, con respecto a la fuerza viscosa, por lo que es más difícil que exista movimiento de convección natural, aparentemente.

El  $Ra_c$ , como se menciono anterior mente, es función de la relación de aspecto ( $Ra_c = 900(L/H)^{3,7}$ ), como tenemos una cavidad que varia con forme se va solidificando el material, el  $Ra_c$  también va cambiando con lo que probablemente se pudiera iniciar la convección.

Planteando un posible caso donde las condiciones iniciales en la cavidad

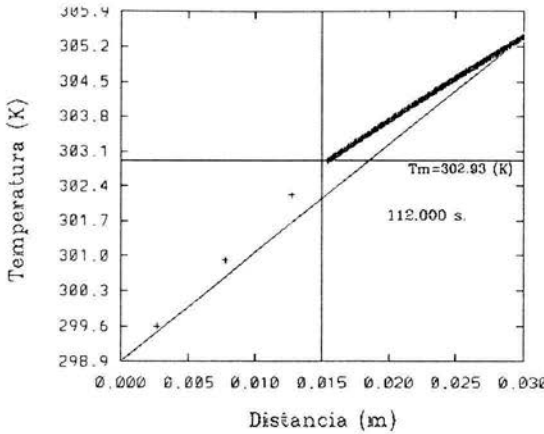


Figura 3.10: Posición de la interfase a los 112 s, la línea vertical indica la posición de la interfase a los 100 s, la línea horizontal indica la temperatura de cambio de fase, la intersección de esta línea con la gráfica indica la posición de la interfase, donde lo que se encuentre abajo de esta línea es el material sólido y lo que se encuentre arriba es el material líquido, la línea inclinada indica la posición de la interfase a un tiempo muy grande.

nos den un  $Ra = 5.2 \times 10^4$ , conforme se solidifique la cavidad va disminuyendo el  $Ra$ , supongamos que la cavidad llega de una relación de aspecto 3 a 2, del número de Rayleigh

$$Ra = \frac{\hat{g}\beta\Delta T_h L^3}{\nu\alpha}$$

se puede observar que lo único que cambia, para un mismo caso, es la longitud  $L$ , por lo que cuando la posición de la interfase nos de una relación de aspecto de la cavidad igual a 2, el Rayleigh será de  $Ra = 1.55 \times 10^4$  y el  $Ra_c$  para esta relación de aspecto es  $Ra_c = 1.17 \times 10^4$ , por lo que se puede concluir que, la condición crítica disminuye a una mayor razón que el número de Rayleigh.

En este problema es donde se le da importancia al número adimensional encontrado anteriormente (ver ecuación (3.1)), tratando de caracterizarlo y así obtener información sobre el comportamiento del fluido.

Las condiciones iniciales del problema son las siguientes: tanto en la zona líquida como en la sólida se parte de una distribución de temperaturas lineal, esto es, en la zona sólida la distribución de temperaturas lineal va de la pared fría a la interfase y en la zona líquida va de la interfase a la pared caliente,

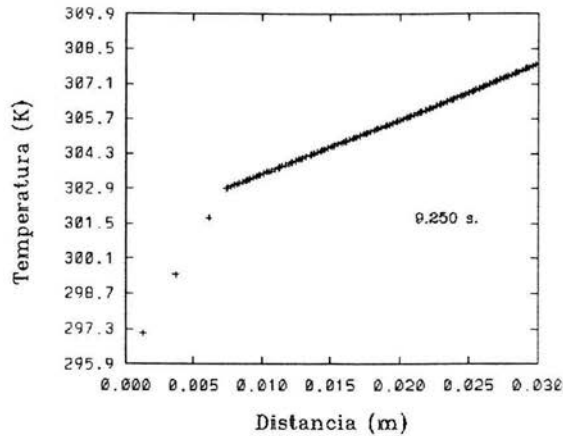


Figura 3.11: Distribución de temperaturas para el caso 2, para el tiempo  $t=9.25$  s, y posición de la interfase en  $0.74 \times 10^{-2}$  m

esto es con el afán de ganar tiempo de cómputo y esperar un movimiento de convección lo más pronto posible.

Las condiciones de frontera en la pared caliente  $T_h$  y en la fría  $T_c$  para que exista solidificación y a su vez convección se determinan con la ecuación (3.24), ya que en un principio se parte de velocidades del fluido iguales a cero con lo cual se tiene difusión hasta que se inicia la convección natural.

Como ya se comentó en la sección anterior, el movimiento de la interfase, cuando el sólido tiene un espesor delgado, es muy rápido. Si la longitud característica disminuye, el número de Rayleigh disminuye mucho, puesto que la longitud característica está elevada al cubo. Para tiempos muy pequeños la velocidad de la interfase es muy grande lo que hace que las fuerzas de flotación, que están actuando al principio del proceso, disminuyan rápidamente para que el sistema se entere y así se pueda llevar a cabo la convección natural.

Con el propósito de que en el sistema se tenga convección natural, se propone el caso 3 (ver tablas 3.1 y 3.2) en el cual se tiene al inicio de la solidificación un Rayleigh super-crítico, y del cual se obtuvieron los patrones de flujo mostrados en la figura 3.12

En la figura 3.12 se puede observar que al tiempo  $t=0.15$  s se tiene una

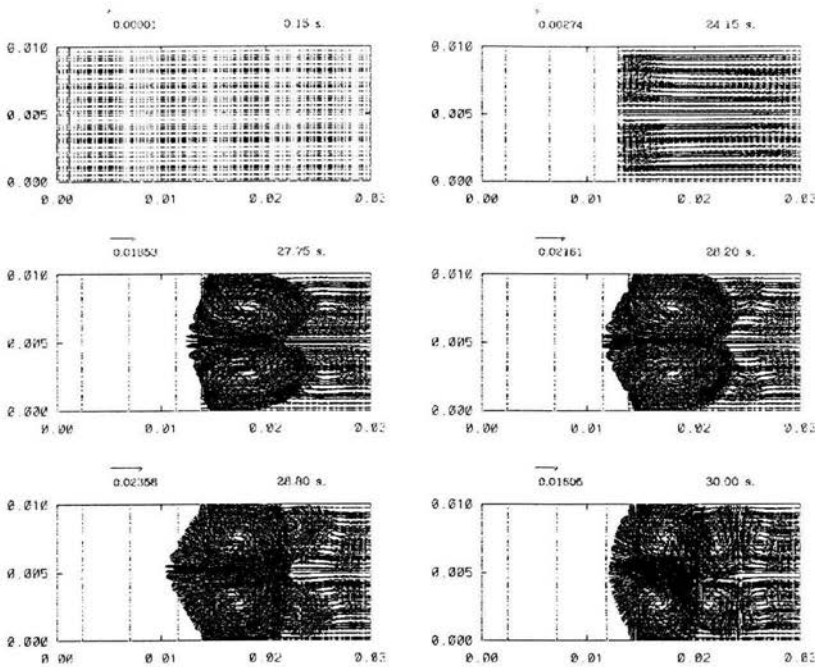


Figura 3.12: Patrones de flujo del caso 3, para los tiempos 0.15 s, 24.15 s, 27.75 s, 28.2 s, 28.8 s y 30. s

velocidad muy pequeña, casi cero a pesar de que se tiene al inicio del proceso un número de Rayleigh super-crítico, esto se puede explicar de igual manera con el movimiento relativamente rápido de la interfase, inicialmente el sistema está enterado de que tiene una fuerza centrífuga muy grande pero el sistema se tarda en responder, esto es debido a que existen fuerzas viscosas. Aún cuando las velocidades se incrementen conforme va pasando el tiempo, no son lo suficientemente grandes como para transportar calor y así verse afectadas las isolíneas de temperatura, como se muestra en la figura 3.13 para el mismo tiempo,  $t=0.15$  s. Puede decirse que la transferencia de calor en la fase líquida es por difusión (régimen conductivo).

Es después de un cierto tiempo que el sistema logra vencer la fuerza viscosa y el estado inicial de reposo ( $\mathbf{u} = 0$ ), esto se puede ver en la figura 3.12 al tiempo  $t=24.15$  s. A este tiempo el número de Rayleigh es igual a  $Ra=0.2026 \times 10^6$  por lo que la velocidad es tal que es capaz de transportar



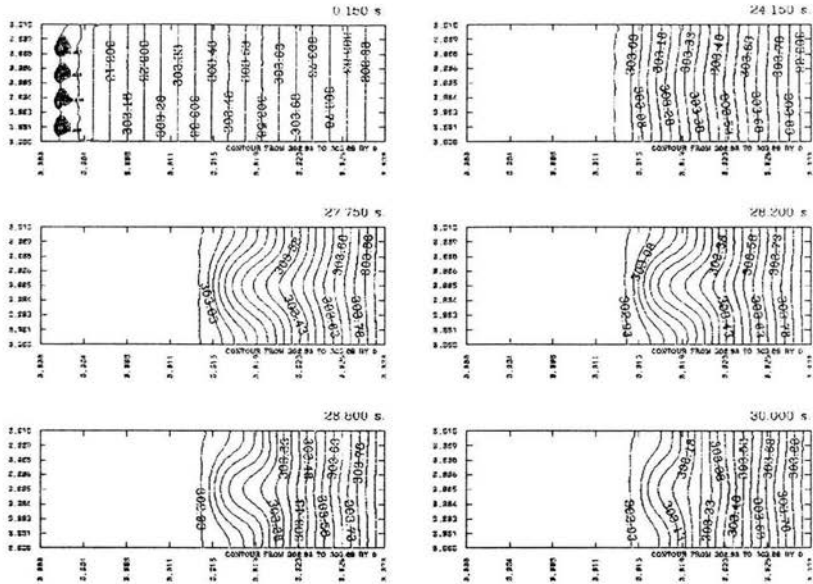


Figura 3.13: Distribución de temperaturas caso 3, para los tiempos 0.15 s, 24.15 s, 27.75 s, 28.2 s, 28.8 s y 30. s

calor por convección natural (se puede decir que en este momento empieza la convección natural para el tercer caso).

Para el tiempo  $t=24.15$  s, se observa de la figura 3.13, en el centro de la cavidad y a lo largo de esta, que se modifica la distribución de temperaturas de una forma uniforme, para un tiempo  $t= 27.75$  s, la deformación de la distribución de temperaturas es mayor cerca de la interfase. Observando la figura 3.12 para este mismo tiempo, se puede apreciar que se forma un vórtice cerca de la interfase, lo cual hace que la distribución de temperaturas se deforme más donde se encuentra el vórtice que en el resto de la cavidad.

Al tiempo  $t= 28.2$  s las velocidades del vórtice formado se incrementan (ver figura 3.12), en el centro de la interfase, se puede apreciar (ver figura 3.13), que existe un gradiente de temperatura muy grande ( $\partial T/\partial x$  de la ecuación (2.9)), por lo que en el centro de la cavidad, a lo largo de ésta, se forma un *chorro*, el cual transporta a la interfase energía de una forma severa ocasionando que se deforme y licue la interfase. La viscosidad del fluido hace que se empieza a transmitir energía cinética al resto del fluido empezando a

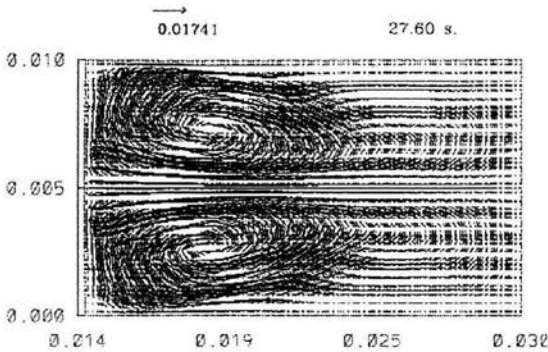


Figura 3.14: Configuración del movimiento del fluido al tiempo  $t=27.6$  s

formar seis celdas.

Para el tiempo  $t=28.8$  s, las velocidades del vórtice llegan a su máximo, las líneas isotérmicas (ver figura 3.13) fuera de la zona del vórtice se recuperan de la deformación, debido a que se han transmitido suficiente energía cinética al resto del fluido con lo cual se a formado dos vórtices que giran al sentido contrario existiendo una recirculación.

Para el tiempo  $t=30$  s, el gradiente de temperaturas cerca de la interfase ha disminuido (figura 3.13), las velocidades disminuyen y el patrón de flujo de seis celdas es más claro, apreciándose de la figura 3.12 que los vórtices tienden a tener el mismo tamaño y la misma cantidad de energía cinética.

En la figura 3.14 se observa un patrón de flujo de dos celdas completamente simétricas a lo largo de la cavidad. Para una cavidad esbelta con convección natural, celdas de Bénard, no se espera que se tenga este tipo de configuración. Según lo reportado por Corcione (2003), para una cavidad sin rotación y con una relación de aspecto ( $H/L$ ) 1.5 (que es la que se tiene cuando se presenta el patrón de flujo de seis celdas) se tiene una celda simple axisimétrica, en este artículo es reportado como la configuración AA, que es cuando las paredes laterales de la cavidad están aisladas. Por lo que todo hace suponer que se debe a la fuerza centrífuga, ya que en las celdas de Bénard solo se tiene fuerzas de cuerpo en una sola dirección, mientras que para los casos reportados se presenta una fuerza centrífuga con componente en dos direcciones (ver ecuación en el apéndice A).

Como se puede observar en la figura 3.15, el Rayleigh va decreciendo

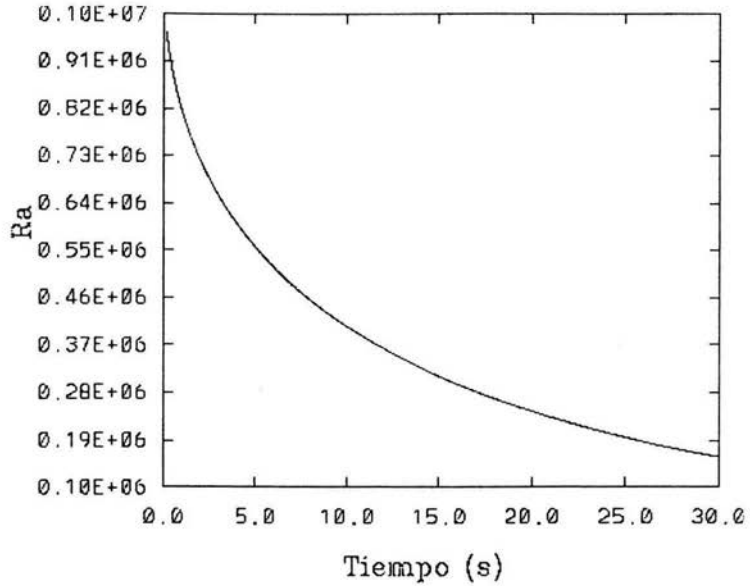


Figura 3.15: Número de Rayleigh contra tiempo para el tercer caso

conforme aumenta el tiempo, esto es porque el material se va solidificando y la longitud  $L$  va decreciendo, también se puede observar que el Rayleigh se mantiene en el rango supercrítico.

El número de Nusselt promedio evaluado en la pared caliente nos indica la transferencia de calor de la pared caliente hacia el fluido. Para obtener este parámetro es necesario obtener el coeficiente de transferencia de calor por convección promedio, el cual está definido como:

Coeficiente de convección local.

$$h = \frac{k \frac{\partial T}{\partial x}}{T_h - T_m} \quad (3.26)$$

Coeficiente de convección promedio.

$$\bar{h} = \frac{1}{H} \int_0^H \frac{k \frac{\partial T}{\partial x}}{T_h - T_m} dx \quad (3.27)$$

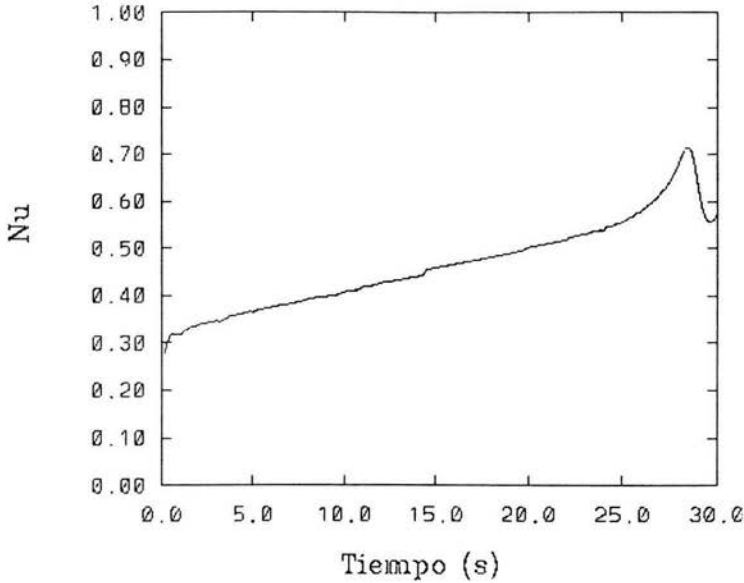


Figura 3.16: Número de Nusselt promedio en la pared caliente contra tiempo para el tercer caso

Utilizando la ecuación (3.26) en la definición del número de Nusselt local tenemos:

$$Nu = \frac{\partial T}{\partial x} \frac{H}{T_h - T_m} \quad (3.28)$$

El número de Nusselt promedio está definido como:

$$\bar{Nu} = \frac{1}{H} \int_0^H \frac{\partial T}{\partial x} \frac{H}{T_h - T_m} dx \quad (3.29)$$

De los resultados obtenidos de la simulación numérica se determinaron funciones de la distribución de la temperatura a lo largo de  $x$  para diversos valores de  $y$  y a su vez para distintos tiempos, estas funciones se determinaron utilizando polinomios de Chebyshev de noveno orden. Después de obtener el polinomio que describe la distribución de temperaturas a lo largo de  $x$ , se derivó numéricamente y se evaluó en la pared caliente el número de Nusselt promedio con lo cual obtuvimos la gráfica 3.16.

De la ecuación (3.28) se puede observar que para el caso de difusión pura, el número de Nusselt es igual a la relación de aspecto de la cavidad, ya que si tomamos la siguiente aproximación:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T_h - T_m}{L} \quad (3.30)$$

Al ser evaluado en el Nusselt tenemos que:

$$Nu = \frac{H}{L} \quad (3.31)$$

Por lo tanto, el Nusselt va creciendo conforme se solidifica el material, pero cuando despierta la convección natural, la transferencia de calor aumenta. Esto se puede ver en la figura 3.16 al tiempo  $t= 25$ . s, que es cuando se observa que número de Nusselt inicia una tendencia no lineal, y de las figuras 3.12 y 3.13 al tiempo  $t= 24.15$  s se puede observar que es cuando inicia la convección natural.

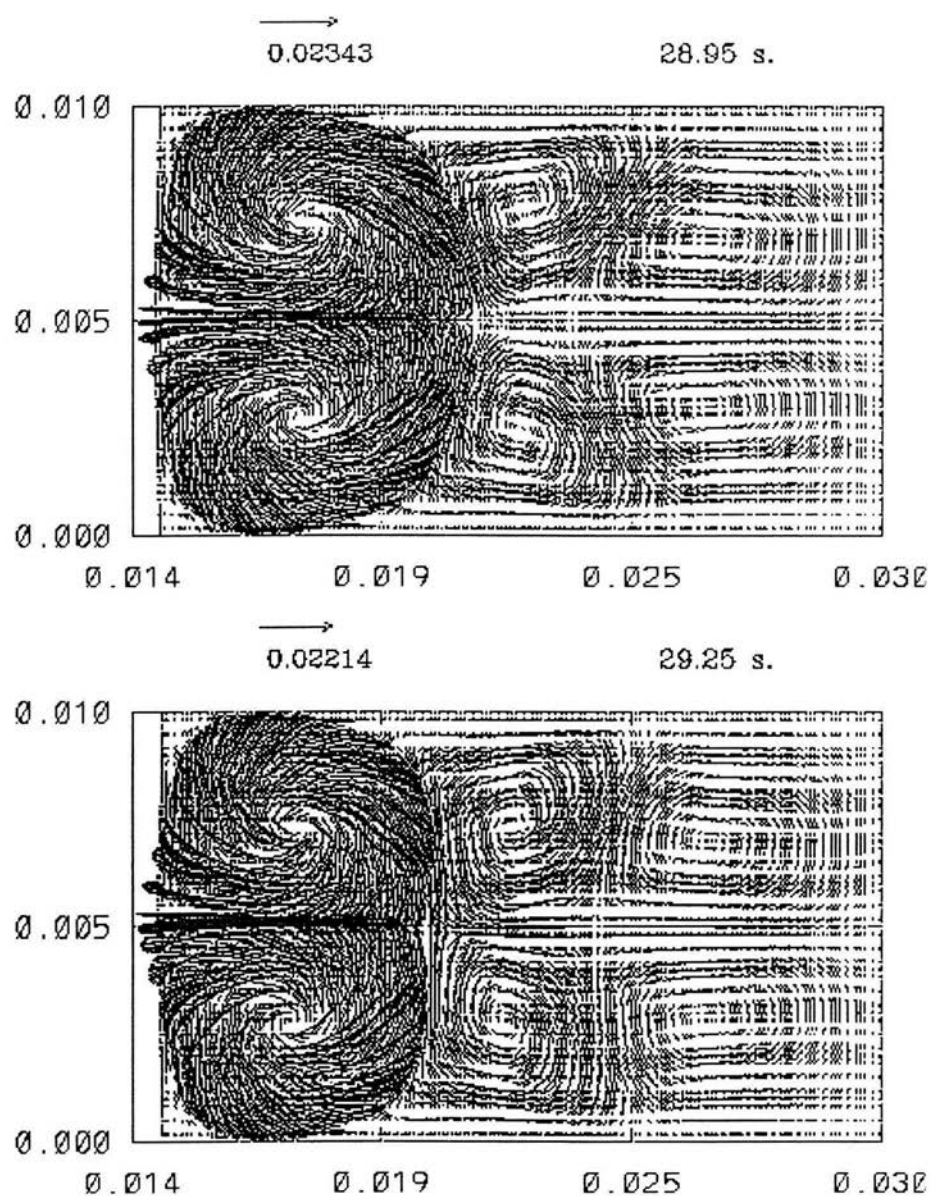


Figura 3.17: Amplificación de la distribución de velocidades para caso 3, para los tiempos 28.95 s y 29.25 s

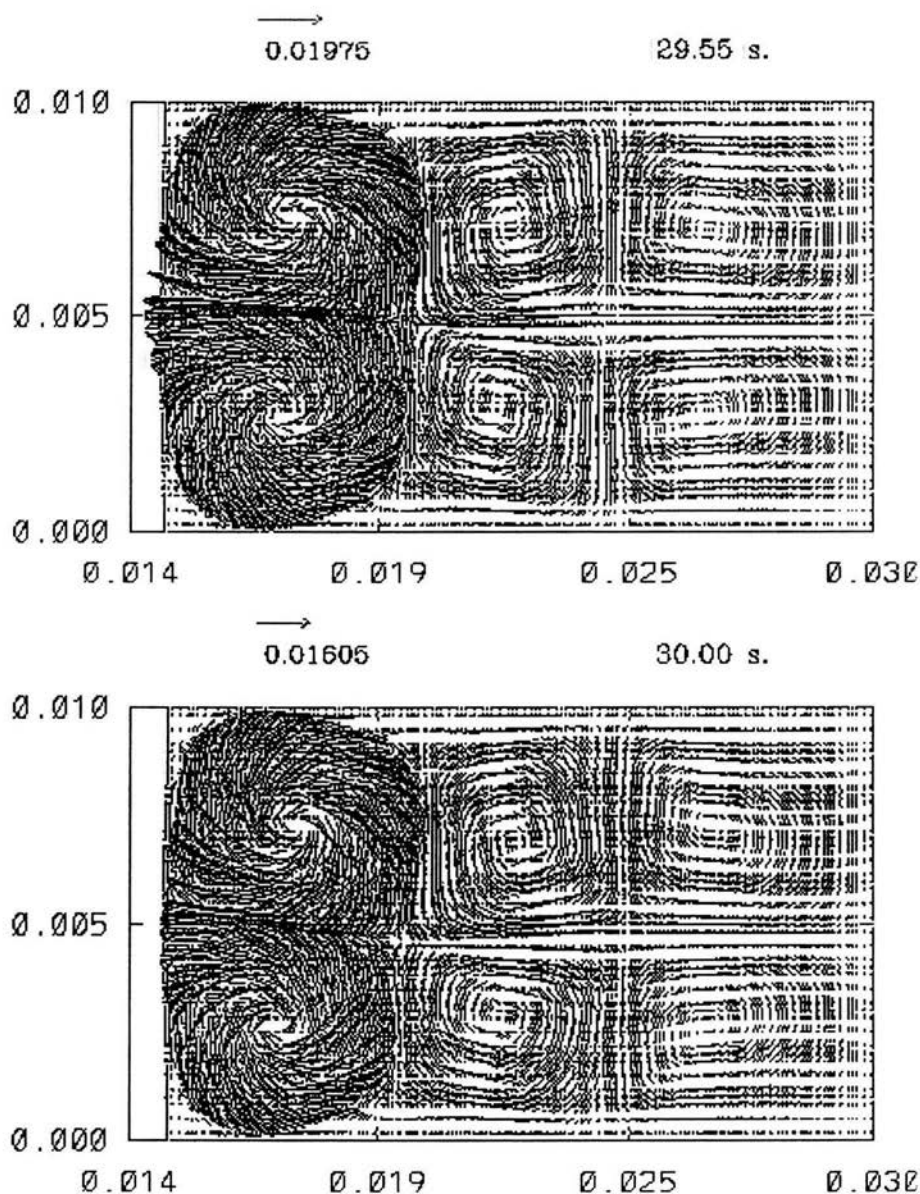


Figura 3.18: Amplificación de la distribución de velocidades para caso 3, para los tiempos 29.55 s y 30. s

# Capítulo 4

## Conclusiones y trabajo a futuro

### 4.1. Conclusiones

Para la parte de solidificación con difusión pura se concluye que:

\* Para el primer caso

- El parámetro  $pt$  en función de la distancia  $x$  (ecuación 3.24), para las propiedades y condiciones que usamos, se tiene solidificación cuando se presenta difusión pura.
- Se pudo observar que para tiempos pequeños la solución analítica coincide con la solución numérica (distribución de temperaturas y posición de la interfase).

\* Para el segundo caso:

- Se obtuvieron resultados satisfactorios con lo cual se comprobó el  $Ra_c$  y la coincidencia de la solución numérica con la solución analítica.

Para la parte de convección natural se puede concluir que:

\* Para el tercer caso que es cuando se presenta la convección natural:



- Se concluye que la configuración del patrón de flujo dentro de la cavidad, que es simétrico a lo largo de la cavidad, es debido a la fuerza centrífuga ya que le da al fluido información de la fuerza de cuerpo en dos direcciones. Este tipo de configuración no se puede comparar con las celdas de Bénard ya que en este tipo de celdas sólo se tiene fuerzas de cuerpo en una sola dirección.
- Para el comportamiento del Rayleigh con respecto al tiempo, la figura 3.15 muestra que a tiempos pequeños el número de Rayleigh decrece rápido, esto como ya se mencionó por el movimiento de la interfase que al inicio del proceso es relativamente rápido.
- El polinomio de interpolación que se obtuvo a partir de los datos obtenidos en la simulación numérica, por medio del método de polinomios de Chebyshev de noveno orden, tienen una muy buena aproximación como se puede observar en la figura 4.1
- El número de Nusselt al inicio del proceso, difusión pura, es igual a la relación de aspecto de la cavidad.
- El número de Nusselt al transcurrir del tiempo se va incrementando, debido a que la longitud  $L$  se va haciendo menor pero el  $\Delta T_h$  es el mismo. Cuando inicia la convección natural existe mayor transferencia de calor de la pared caliente hacia el fluido, cuando se forma la configuración de seis celdas la transferencia de calor disminuye.
- La configuración de seis celdas es un muy buen prospecto para los fines de obtener un material de alta calidad, ya que por una parte existe convección natural pero no llega a la interfase escoria, al no llegar directamente material de la pared caliente a la interfase, tampoco llega energía, por lo que la interfase no se deforma.

## 4.2. Trabajo a futuro

- \* Implementación de la fuerza de Coriolis en la solución numérica.
- \* Estudio en tres dimensiones del crecimiento de cristales en centrífugas (Arnold et al., 1992).
- \* Ponerle rotación en su eje de simetría a la cavidad a la vez que es trasladada por el brazo giratorio (movimiento de rotación y traslación).

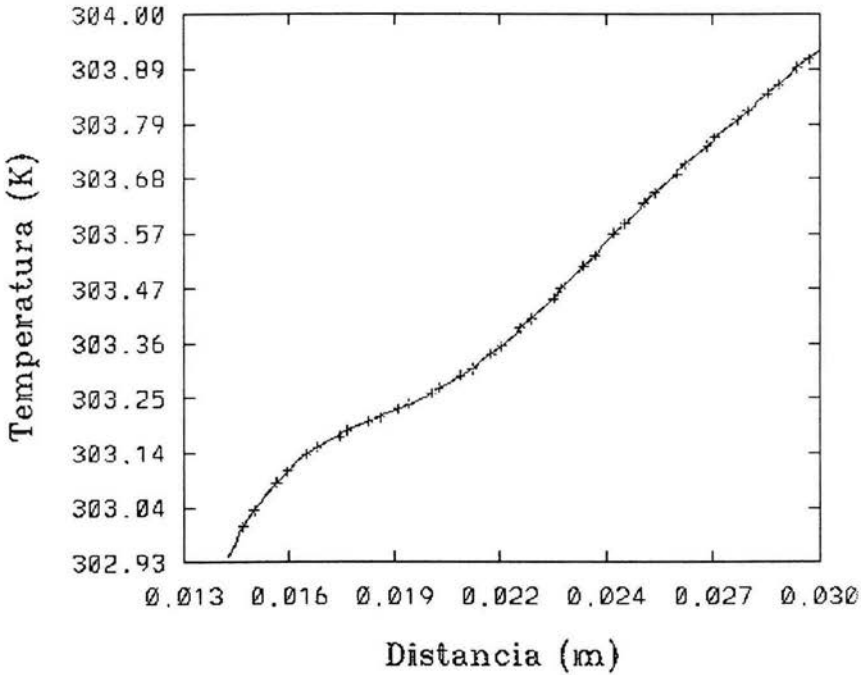


Figura 4.1: Comparación de distribución de temperaturas de la solución numérica con la distribución obtenida con el polinomio de Chebyshev de noveno orden, generado numéricamente

# Apéndice A

## Obtención de la aceleración centrífuga y de Coriolis

Supongamos que se tienen dos sistemas uno fijo y otro móvil como se muestra en la figura A.1, para el sistema de referencia fijo el vector de posición, de la velocidad y de la aceleración de una partícula  $P$  son los siguientes:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= X_i \vec{I}_i \\ \vec{v} &= \dot{X}_i \vec{I}_i \\ \vec{a} &= \ddot{X}_i \vec{I}_i\end{aligned}\tag{A.1}$$

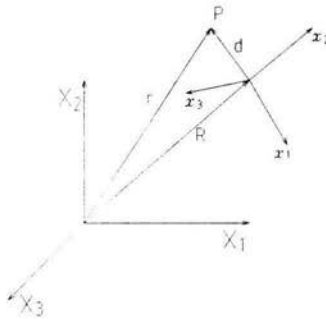


Figura A.1: Representación del sistema

El movimiento absoluto referido al sistema en movimiento, es decir si las expresiones (A.1) las referimos al sistema móvil llegamos a las siguientes expresiones.

Para la posición

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{R} + \vec{d} \\ \vec{r} &= \vec{R} + x_i \vec{i}_i\end{aligned}$$

Para la velocidad

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{R}} + \dot{x}_i \vec{i}_i + x_i \dot{\vec{i}}_i$$

donde  $\dot{\vec{R}}$  es la velocidad del sistema móvil con respecto al sistema fijo y  $\dot{\vec{i}}_i = \vec{\omega} \times \vec{i}_i$  por lo que tenemos

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{R}} + \dot{x}_i \vec{i}_i + x_i (\vec{\omega} \times \vec{i}_i) = \dot{\vec{R}} + \dot{x}_i \vec{i}_i + \vec{\omega} \times x_i \vec{i}_i$$

donde  $\dot{x}_i \vec{i}_i$  es el vector velocidad referido al sistema móvil

Para la aceleración

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{r}} &= \ddot{\vec{R}} + \ddot{x}_i \vec{i}_i + \dot{x}_i \dot{\vec{i}}_i + \dot{\vec{\omega}} \times x_i \vec{i}_i + \vec{\omega} \times \dot{x}_i \vec{i}_i + \vec{\omega} \times x_i \dot{\vec{i}}_i \\ \ddot{\vec{r}} &= \ddot{\vec{R}} + \ddot{x}_i \vec{i}_i + \dot{\vec{\omega}} \times x_i \vec{i}_i + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times x_i \vec{i}_i + 2\vec{\omega} \times \dot{x}_i \vec{i}_i\end{aligned}$$

pero la velocidad angular se considera constante por lo tanto  $\dot{\vec{\omega}} \times x_i \vec{i}_i = 0$

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{R}} + \ddot{x}_i \vec{i}_i + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times x_i \vec{i}_i + 2\vec{\omega} \times \dot{x}_i \vec{i}_i \quad (\text{A.2})$$

donde  $\ddot{\vec{R}}$  es la aceleración del sistema móvil con respecto al fijo,  $\ddot{x}_i \vec{i}_i$  es la aceleración del punto  $P$  referida al sistema móvil,  $\vec{\omega} \times \vec{\omega} \times x_i \vec{i}_i$  es la aceleración centrífuga y  $2\vec{\omega} \times \dot{x}_i \vec{i}_i$  es la aceleración de Coriolis.

Desarrollando la aceleración centrífuga tenemos:

$$\omega_i \vec{i}_i \times \omega_j \vec{i}_j \times x_k \vec{i}_k = \epsilon_{ilm} \epsilon_{jkl} \omega_i \omega_j x_k \vec{i}_m$$

En dos dimensiones tenemos que la aceleración centrífuga queda:

$$\vec{\omega} \times \vec{\omega} \times x_i \vec{i}_i = -\omega_z^2 r_x \vec{i} - \omega_z^2 r_y \vec{j} \quad (\text{A.3})$$

Desarrollando la aceleración de Coriolis:

$$2\omega_i \vec{i}_i \times \dot{x}_j \vec{i}_j = 2\epsilon_{ij k} \omega_i \dot{x}_j \vec{i}_k$$

En dos dimensiones tenemos que la aceleración de Coriolis queda:

$$2\vec{\omega} \times \dot{x}_i \vec{i}_i = \omega_z u \vec{i} - \omega_z v \vec{j} \quad (\text{A.4})$$

## Apéndice B

### Ecuación del rotacional de la ecuación de momento

El rotacional está definido como (White, 1991)

$$\nabla \times \mathbf{v} = \vec{\omega} \quad (\text{B.1})$$

Por lo tanto de la ecuación (2.7) el rotacional queda:

$$\begin{aligned} \nabla \times \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) + \vec{\nabla} \times (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\vec{\nabla} \times \left( \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p \right) + \\ \nabla \times (\nu \nabla^2 \mathbf{u}) - \nabla \times (2\vec{\omega} \times \mathbf{u}) - \nabla \times \left( \frac{\rho - \rho_0}{\rho} \right) (\vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \mathbf{r}) \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

En el siguiente desarrollo se presentara el rotacional de cada término de la ecuación de momento para el caso donde se tiene únicamente fuerzas de Coriolis y centrífuga tridimensional y el caso propiamente de esta tesis el cual es en dos dimensiones por lo tanto las condiciones para el caso de esta tesis son:

$$\begin{aligned} \omega_1 = \omega_2 = 0 \\ u_3 = r_3 = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_3} = 0 \\ \text{div} \cdot \mathbf{u} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

## B.1. Término temporal

$$\nabla \times \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \vec{i}_i \times \frac{\partial u_j}{\partial t} \vec{i}_j = \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \vec{i}_k = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) \vec{i}_1 + \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \vec{i}_2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \vec{i}_3 \right] \quad (\text{B.4})$$

El vector rotacional se puede definir en sus tres componentes como:

$$\vec{\omega} = \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) \vec{i}_1 + \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \vec{i}_2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \vec{i}_3 = \omega_1 \vec{i}_1 + \omega_2 \vec{i}_2 + \omega_3 \vec{i}_3 \quad (\text{B.5})$$

Sustituyendo la ecuación (B.5) en (B.4) tenemos :

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} \right) (\omega_1 \vec{i}_1 + \omega_2 \vec{i}_2 + \omega_3 \vec{i}_3) = \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} \quad (\text{B.6})$$

Con las restricciones (B.3) el término temporal (B.6) queda de la siguiente forma en la dirección de  $z$ :

$$\frac{\partial \omega_3}{\partial t} = \frac{\partial \omega_z}{\partial t} \quad (\text{B.7})$$

## B.2. Término convectivo

$$\nabla \times (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \frac{\partial}{\partial x_i} \vec{i}_i \times u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \vec{i}_j = \epsilon_{ijm} \frac{\partial}{\partial x_i} u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \vec{i}_m \quad (\text{B.8})$$

Desarrollando la ecuación (B.8) tenemos lo siguiente :

$$\begin{aligned}
& \left[ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + u_1 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} + u_2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_2} + u_3 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \right. \\
& \left. \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - u_1 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_3} - u_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_3} - u_3 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3 \partial x_3} - \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right] \vec{i}_1 + \\
& \left[ u_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + u_2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2 \partial x_3} + u_3 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3 \partial x_3} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \right. \\
& \left. u_1 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_1} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - u_2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} - u_3 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right] \vec{i}_2 + \\
& \left[ u_1 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_1} + u_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + u_3 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \right. \\
& \left. u_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} - u_2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2 \partial x_2} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - u_3 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right] \vec{i}_3 = \\
& \left[ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \left( u_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \varpi_1 \right] \vec{i}_1 + \\
& \left[ \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \left( u_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \varpi_2 \right] \vec{i}_2 + \\
& \left[ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \left( u_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \varpi_3 \right] \vec{i}_3 \\
& \tag{B.9}
\end{aligned}$$

Con las restricciones (B.3) el término convectivo (B.9) queda de la siguiente forma en la dirección de  $z$ :

$$u_1 \frac{\partial \varpi_3}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial \varpi_3}{\partial x_2} = u \frac{\partial \varpi_z}{\partial x} + v \frac{\partial \varpi_z}{\partial y} \tag{B.10}$$

### B.3. Gradiente de presiones

$$\begin{aligned}
\nabla \times \left( \frac{1}{\rho} \nabla p \right) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \vec{i}_i \times \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} \vec{i}_j = \epsilon_{ijm} \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j} \vec{i}_m = \left( \frac{1}{\rho} \right) \left( \left[ \frac{\partial^2 p}{\partial x_2 \partial x_3} - \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{\partial^2 p}{\partial x_2 \partial x_3} \right] \vec{i}_1 + \left[ \frac{\partial^2 p}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 p}{\partial x_1 \partial x_3} \right] \vec{i}_2 + \left[ \frac{\partial^2 p}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 p}{\partial x_1 \partial x_2} \right] \vec{i}_3 \right) = 0 \\
& \tag{B.11}
\end{aligned}$$

### B.4. Término viscoso

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nu \nabla^2 \mathbf{u}) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \vec{i}_i \times \nu \frac{\partial}{\partial x_m} \frac{\partial}{\partial x_m} u_j \vec{i}_j = \epsilon_{ijk} \nu \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_m^2} \vec{i}_k = \\ &= \nu \left( \left[ \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} \right) \right] \vec{i}_1 + \right. \\ &\quad \left[ \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} \right) \right] \vec{i}_2 + \\ &\quad \left. \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \right) \right] \vec{i}_3 \right) = \\ &= \nu \left( \left[ \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} - \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} \right] \vec{i}_1 + \right. \\ &\quad \left[ \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} - \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} - \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} - \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} \right] \vec{i}_2 + \\ &\quad \left. \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} - \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} - \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} - \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \right] \vec{i}_3 \right) = \\ &= \nu \left( \left[ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right] \varpi_1 \vec{i}_1 + \right. \\ &\quad \left[ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right] \varpi_2 \vec{i}_2 + \\ &\quad \left. \left[ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right] \varpi_3 \vec{i}_3 \right) = \nu \nabla^2 \vec{\varpi} \end{aligned} \tag{B.12}$$

Con las restricciones (B.3) el término viscoso (B.12) queda de la siguiente forma en la dirección de  $z$ :

$$\nu \left( \frac{\partial^2 \varpi_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varpi_3}{\partial x_2^2} \right) = \nu \left( \frac{\partial^2 \varpi_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varpi_z}{\partial y^2} \right) \tag{B.13}$$



## B.5. Aceleración de Coriolis

$$\begin{aligned}
\nabla \times (2\vec{\omega} \times \mathbf{u}) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \vec{i}_i \times \epsilon_{mjk} 2\omega_m u_j \vec{i}_k = \\
\epsilon_{ikp} \epsilon_{mjk} 2 \frac{\partial}{\partial x_i} \omega_m u_j \vec{i}_p &= (\delta_{pm} \delta_{ij} - \delta_{pj} \delta_{im}) 2 \frac{\partial}{\partial x_i} \omega_m u_j \vec{i}_p = \\
2 \left[ \frac{\partial}{\partial x_2} (\omega_1 u_2 - \omega_2 u_1) + \frac{\partial}{\partial x_3} (\omega_1 u_3 - \omega_3 u_1) \right] \vec{i}_1 &+ \quad (B.14) \\
2 \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} (\omega_2 u_1 - \omega_1 u_2) + \frac{\partial}{\partial x_3} (\omega_2 u_3 - \omega_3 u_2) \right] \vec{i}_2 &+ \\
2 \left[ \frac{\partial}{\partial x_2} (\omega_3 u_2 - \omega_2 u_3) + \frac{\partial}{\partial x_1} (\omega_3 u_1 - \omega_1 u_3) \right] \vec{i}_3 &
\end{aligned}$$

Con las restricciones (B.3) el término de la aceleración de Coriolis (B.14) es igual a cero tal parece que el término de Coriolis no interviene en la formación de turbulencia.

## B.6. Aceleración centrífuga

$$\begin{aligned}
\nabla \times \left( \frac{\rho - \rho_0}{\rho} \right) (\vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \mathbf{r}) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \vec{i}_i \times \left( \frac{\rho - \rho_0}{\rho} \right) (\omega_j \vec{i}_j \times \omega_k \vec{i}_k \times r_m \vec{i}_m) = \\
\frac{\partial}{\partial x_i} \vec{i}_i \times \left( \frac{\rho - \rho_0}{\rho} \right) (\delta_{lk} \delta_{jm} - \delta_{lm} \delta_{jk}) \omega_j \omega_k r_m \vec{i}_l &= \\
\epsilon_{ilm} (\delta_{lk} \delta_{jm} - \delta_{lm} \delta_{jk}) \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\rho - \rho_0}{\rho} \right) \omega_j \omega_k r_m \vec{i}_n &=
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left[ \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\rho - \rho_0}{\rho} \right) (\omega_1 \omega_3 r_1 + \omega_2 \omega_3 r_2 - \omega_1^2 r_3 - \omega_2^2 r_3) \right. \\
&\left. + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\rho - \rho_0}{\rho} \right) (\omega_1^2 r_2 + \omega_3^2 r_2 - \omega_1 \omega_2 r_1 - \omega_2 \omega_3 r_3) \right] \vec{i}_1 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\rho - \rho_0}{\rho} \right) (\omega_1^2 r_3 + \omega_2^2 r_3 - \omega_1 \omega_3 r_1 - \omega_2 \omega_3 r_2) + \right. \\
& \left. \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\rho - \rho_0}{\rho} \right) (\omega_1 \omega_2 r_2 + \omega_1 \omega_3 r_3 - \omega_2^2 r_1 - \omega_3^2 r_1) \right] \vec{i}_2 + \\
& \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\rho - \rho_0}{\rho} \right) (\omega_1 \omega_2 r_1 + \omega_2 \omega_3 r_3 - \omega_1^2 r_2 - \omega_3^2 r_2) + \right. \\
& \left. \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\rho - \rho_0}{\rho} \right) (\omega_2^2 r_1 + \omega_3^2 r_1 - \omega_1 \omega_2 r_2 - \omega_1 \omega_3 r_3) \right] \vec{i}_3
\end{aligned} \tag{B.15}$$

Con las restricciones (B.3) el término de la aceleración centrífuga (B.15) queda de la siguiente forma en la dirección de  $z$ :

$$\begin{aligned}
\rho_0 \omega_3^2 r_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{\rho} \right) - \rho_0 \omega_3^2 r_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{1}{\rho} \right) = \\
\rho_0 \omega_z^2 r_y \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\rho} \right) - \rho_0 \omega_z^2 r_x \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\rho} \right)
\end{aligned} \tag{B.16}$$

Sumando todos los términos tenemos como resultado la siguiente ecuación que es el rotacional de la ecuación de momento.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varpi_z}{\partial t} + u \frac{\partial \varpi_z}{\partial x} + v \frac{\partial \varpi_z}{\partial y} = \nu \left( \frac{\partial^2 \varpi_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varpi_z}{\partial y^2} \right) \\
- \left[ \rho_0 \omega_z^2 r_y \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\rho} \right) - \rho_0 \omega_z^2 r_x \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\rho} \right) \right] \vec{i}_z
\end{aligned} \tag{B.17}$$

# Apéndice C

## Adimensionalización de las ecuaciones de gobierno

### C.1. Ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Desarrollando la ecuación de continuidad para el caso bidimensional tenemos:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{C.1})$$

Parámetros adimensionales

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{x}{H} & y^* &= \frac{y}{H} \\ u^* &= \frac{u}{v_{ref}} & v^* &= \frac{v}{v_{ref}} \end{aligned}$$

donde  $H$  es la longitud característica de la cavidad y  $v_{ref}$  es una velocidad de referencia.

Sustituyendo los parámetros adimensionales en la ecuación (C.1) tenemos la ecuación de continuidad adimensionalizada

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \quad (\text{C.2})$$

## C.2. Ecuación de conservación de cantidad de movimiento

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \beta(T - T_0) \hat{g} - 2\vec{\omega} \times \mathbf{u} \quad (\text{C.3})$$

donde  $\hat{g} = \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \mathbf{r}$  y  $T_0$  es la temperatura de referencia

Desarrollando la ecuación (C.3) para el caso bidimensional con rotación únicamente en la dirección en  $z$  tenemos:

Para la dirección en  $x$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + \beta(T - T_0) \hat{g} + 2\omega_z v \quad (\text{C.4})$$

donde  $\hat{g} = -\omega_z^2 r_x$

Para la dirección en  $y$ :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] - 2\omega_z u \quad (\text{C.5})$$

Parámetros adimensionales:

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{x}{H} & y^* &= \frac{y}{H} \\ u^* &= \frac{u}{v_{ref}} & v^* &= \frac{v}{v_{ref}} \\ t^* &= \frac{v_{ref}}{H} t & p^* &= \frac{1}{v_{ref}^2 \rho} p \\ T^* &= \frac{T - T_0}{T_h - T_m} \end{aligned}$$

donde  $H$  es la longitud característica de la cavidad,  $v_{ref}$  es una velocidad de referencia,  $T_0$  es una temperatura de referencia,  $T_h$  es la temperatura de la pared caliente y  $T_m$  es la temperatura del cambio de fase.

Sustituyendo los parámetros adimensionales en las ecuaciones (C.4) y (C.5) llegamos a las siguientes ecuaciones adimensionales:

Para la dirección en  $x$ :

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* \mathbf{u}^* = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{Re} (\nabla^{*2} \mathbf{u}^*) + \frac{H}{v_{ref}^2} \beta (T_h - T_m) \hat{g} T^* + \frac{2H}{v_{ref}} \omega_z v^* \quad (\text{C.6})$$

Para la dirección en  $y$ :

$$\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* \mathbf{u}^* = -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{1}{Re}(\nabla^{*2} \mathbf{u}^*) - \frac{2H}{v_{ref}} \omega_z \mathbf{u}^* \quad (\text{C.7})$$

Si la velocidad de referencia se toma como (Cappelli et al., 2003):

$$v_{ref} = \frac{\nu}{H}$$

y se sustituye en las ecuaciones (C.6) y (C.7) se tiene:

Para la dirección en  $x$ :

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* \mathbf{u}^* = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{Re}(\nabla^{*2} \mathbf{u}^*) + Gr T^* + Ta^{1/2} v^* \quad (\text{C.8})$$

Para la dirección en  $y$ :

$$\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* \mathbf{u}^* = -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{1}{Re}(\nabla^{*2} \mathbf{u}^*) - Ta^{1/2} u^* \quad (\text{C.9})$$

### C.3. Ecuación de la energía

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (\text{C.10})$$

Parámetros adimensionales:

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{x}{H} & y^* &= \frac{y}{H} \\ u^* &= \frac{u}{v_{ref}} & v^* &= \frac{v}{v_{ref}} & v_{ref} &= \frac{\nu}{H} \\ t^* &= \frac{v_{ref} t}{H} & T^* &= \frac{T - T_0}{T_h - T_m} \end{aligned}$$

ESTA TESIS NO SALE  
DE LA BIBLIOTECA

Sustituyendo los parámetros adimensionales en la ecuación (C.10) obtenemos la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \frac{\alpha}{v_{ref} H} \left( \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} \right)$$

o bien, sustituyendo  $v_{ref}$

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \frac{1}{Pr} \left( \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} \right) \quad (\text{C.11})$$

### C.4. Ecuación de la interfase

$$k_s \left( \frac{\partial T_s}{\partial x_s} \right) - k_l \left( \frac{\partial T_l}{\partial x_l} \right) = \rho \lambda \frac{dx}{dt} \quad (\text{C.12})$$

donde los subíndices  $s$  y  $l$  se refieren a si se trata del medio sólido o del líquido.

Parámetros adimensionales

$$x^* = \frac{x}{H} \quad t^* = \frac{\alpha}{H^2}$$

$$T_s^* = \frac{T_s - T_0}{T_m - T_c} \quad T_l^* = \frac{T_l - T_0}{T_h - T_m}$$

Sustituyendo los parámetros adimensionales en la ecuación (C.12) tenemos la siguiente ecuación:

$$\frac{k_s(T_m - T_c)}{H} \frac{\partial T_s^*}{\partial x_s^*} - \frac{k_l(T_h - T_m)}{H} \frac{\partial T_l^*}{\partial x_l^*} = \frac{\rho \lambda \alpha}{H} \frac{\partial x^*}{\partial t^*} \quad (\text{C.13})$$

Dividiendo la ecuación (C.13) entre  $k_s(T_m - T_c)$  y multiplicándola por  $H$  tenemos lo siguiente:

$$\frac{\partial T_s^*}{\partial x_s^*} - k^* \theta \frac{\partial T_l^*}{\partial x_l^*} = \frac{\rho \lambda \alpha}{k_s(T_m - T_c)} \frac{\partial x^*}{\partial t^*} \quad (\text{C.14})$$

donde

$$k^* = \frac{k_l}{k_s}$$

$$\theta = \frac{T_h - T_m}{T_m - T_c}$$

Pero como  $\alpha = k/\rho C_p$  entonces la ecuación (C.14) queda de la siguiente forma:

$$\frac{\partial T_s^*}{\partial x_s^*} - k^* \theta \frac{\partial T_l^*}{\partial x_l^*} = St \frac{\partial x^*}{\partial t^*} \quad (\text{C.15})$$

# Bibliografía

- Arnold, W. A., Wilcox, W. R., Carlson, F., Chait, A., and Regel, L. L. (1992). Transport modes during crystal growth in a centrifuge. *Journal of crystal growth*, pages 24–40.
- Askeland, D. R. (1998). *Ciencia e Ingeniería de los Materiales*. ITP.
- Aurnou, J. M. and Olson, P. L. (2001). Experiments on rayleigh-bénard convection, magnetoconvection and rotating magnetoconvection in liquid gallium. *Journal Fluid Mechanic*, 430:283–307.
- Avila, R. (2004). The Spectral Element Method: Galerkin Formulation.
- Cappelli, M., Cianfrini, C., and Corcione, M. (2003). Rayleigh-bénard convection in tall rectangular enclosures. *International Journal of Thermal Sciences*, 43:135–144.
- Corcione, M. (2003). Effects of the thermal boundary conditions at the sidewalls upon natural convection in rectangular enclosures heated from below and cooled from above. *International journal of thermal sciences*, pages 199–208.
- Dantzig, J. A. (1989). Modelling liquid-solid phase changes with melt convection. *Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28:1769–1789.
- Eckert, E. R. G. and Robert M. Drake, J. (1972). *Analisis of Heat and Mass Transfer*. McGraw-Hill series in Mechanical Engineering, Second Edition.
- Gay, R. (1977). *Introducción al Estado Cristalino*. EUNIBAR.
- Grigull, U. and Sandner, H. (1984). *Heat Conduction*. HPC.
- Incropera, F. P. (1990). *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*. Wiley, New York, 3rd ed.

- Lock, G. S. H. (1996). *Latent Heat Transfer*. OUP.
- Müller, G., Neumann, G., and Weber, W. (1992). The growth of homogeneous semiconductor crystals in a centrifuge by the stabilizing influence of the coriolis force. *Journal of Crystal Growth*, 119:8–23.
- Solomon, A. D. (1976). *Mathematical Modeling of Melting and Freezing Processes*. HPC.
- Tao, F., Zheng, Y., Ma, W. J., and Xue, M. L. (1994). Unsteady thermal convection of melts in a 2-d horizontal boat in a centrifugal field with consideration of the coriolis effect. *Materials Processing in High Gravity*, pages 67–79.
- White, F. M. (1979). *Fluid Mechanics*. McGraw-Hill, Inc.
- White, F. M. (1991). *Viscous Fluid Flow*. McGraw-Hill, Inc.