



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**COMPARACION DE RESULTADOS DE LA TEORIA DE
UNIFICACION DE SIMETRIAS DE NORMA Y
ESPACIO - TIEMPO CON LA ELECTRODINAMICA
CUANTICA.**

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE :
F I S I C O
P R E S E N T A :
RICARDO ROMERO OCHOA

**DIRECTOR DE TESIS:
DR. JAIME BESPROSVANY FRIDZON**



**FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION ESCOLAR**



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**ESTA TESIS NO SALE
DE LA BIBLIOTECA**



ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"Comparación de Resultados de la Teoría de Unificación de Simetrías de Norma y Espacio-Tiempo con la Electrodinámica Cuántica"

realizado por Romero Ochoa Ricardo

con número de cuenta 97576215 , quien cubrió los créditos de la carrera de: Física.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
Propietario

Propietario Dr. Jaime Besprosvany Fridzón

Dr. José Antonio García Zenteno

Propietario

M. en C. Mirna Villavicencio Torres

Suplente

Dr. Genaro Toledo Sánchez

Suplente

Dr. Alejandro Ayala Mercado

Consejo Departamental de Física


DRA. PATRICIA GOLDSTEIN MENACHE
Coordinadora de Licenciatura

AGRADECIMIENTOS

A mi Madre,
In memoriam
Leve fit, quod bene fertur, onus.
Ovidio

A Vicky,
In gratia aeterna
Quos amor verus tenuit, tenebit.
Seneca

A mi Padre y a la familia Ochoa,
por su apoyo, amor y comprensión.

A todos aquellos profesores que a lo largo de los años han contribuido a
aumentar mi conocimiento y mi gusto por la ciencia, en especial a los doctores
Jaime Besprosvany y Alejandro Ayala

Ipsa scientia potestas est
Bacon

*Where the world ceases to be the scene of our personal hopes and wishes,
where we face it as free beings, admiring, asking and observing, there we
enter the realm of Art and Science*
Einstein

*The history of the human race is a continuous struggle from darkness toward
light. It is therefore to no purpose to discuss the use of knowledge. Man wants
to know and when he ceases to do so he is no longer a man*
Nansen

**Comparación de Resultados de la Teoría
de Unificación de Simetrías de Norma y
de Espacio-Tiempo con la
Electrodinámica Cuántica.**

Ricardo Romero Ochoa

Facultad de Ciencias, UNAM

Índice general

| | |
|--|-----------|
| 0.1. Resumen | 2 |
| 1. Ecuación de Dirac Extendida | 4 |
| 1.1. Antecedentes | 4 |
| 1.2. Ecuación de Dirac Extendida | 9 |
| 1.3. Soluciones fermiónicas de masa nula | 12 |
| 2. Propagador fermiónico estándar | 15 |
| 2.1. Teoría de agujeros | 15 |
| 2.2. Función de Green y propagador | 18 |
| 2.3. Solución en presencia de un campo electromagnético | 23 |
| 2.4. Interpretación del propagador en los procesos dispersivos | 25 |
| 3. Propagador Extendido sin Masa | 30 |
| 3.1. Sumas de Polarización | 30 |
| 3.2. Operadores de proyección | 31 |
| 3.3. El propagador en el espacio de momentos | 36 |
| 3.4. Forma explícita del propagador en el espacio de configuración | 39 |
| 4. Propagador Fotónico Estándar | 43 |
| 4.1. Invariancia de Norma | 43 |
| 4.2. El Propagador fotónico en el espacio de momentos | 44 |
| 4.3. Teoría Cuántica de Campos | 46 |
| 4.4. Relaciones de conmutación | 48 |
| 5. Conclusiones | 52 |
| A. Métrica y matrices gama | 54 |
| B. Propiedades de la función Δ | 56 |

0.1. Resumen

El objetivo de la presente tesis es mostrar la compatibilidad de la electrodinámica cuántica, al nivel de construcción de los propagadores, con las soluciones para fermiones de masa nula obtenidas a partir de la teoría de unificación de simetrías de norma y de espacio-tiempo, o teoría de espacio extendido de espín como también es conocida.

El trabajo se divide en cinco capítulos. En el primero se discuten brevemente algunas de las teorías de unificación más importantes en la historia de la física, para dar paso a una descripción general de la teoría de espacio extendido de espín y, finalmente, presentar las soluciones para fermiones de masa nula y la forma de clasificarlas.

El segundo capítulo trata con la ecuación de Dirac estándar. Se describen someramente las dificultades en la interpretación de las soluciones para energía negativa y la teoría de agujeros, con la posterior reformulación de Feynman-Stückelberg. A continuación se construye el propagador causal asociado a la ecuación de Dirac, y se muestra su aplicación para obtener la solución en presencia de un campo electromagnético. El capítulo concluye con una visión general de cómo se interpreta el propagador en los procesos dispersivos.

En el tercer capítulo se construye el propagador para las soluciones fermiónicas de masa nula de la teoría de espacio extendido de espín. Se calculan las sumas sobre los estados de polarización y se obtienen los operadores de proyección asociados. Por último, se obtiene la forma explícita del propagador en el espacio de configuración.

En el capítulo cuatro se describe el propagador para el campo electromagnético. Se discuten los problemas en la construcción del propagador asociados con la invariancia de norma inherente a la teoría; posteriormente se muestra, de manera general, cómo se obtiene el mismo resultado a partir de las relaciones de conmutación para los operadores del campo, dentro del marco de trabajo de la teoría cuántica de campos. Finalmente se inducen dichas relaciones de conmutación empleando únicamente teoría cuántica relativista.

En el último capítulo se presentan las conclusiones. Se incluyen también tres apéndices. El apéndice A proporciona la convención de métrica y la representación para las matrices gama empleadas a lo largo del trabajo, el

apéndice B establece las propiedades más importantes de la función invariante Δ , las cuales se emplean en el desarrollo del capítulo cuatro, mientras que en el apéndice C se muestran algunos resultados básicos sobre operadores de proyección de la teoría estándar, los cuales se comparan en las conclusiones con los resultados obtenidos.

Capítulo 1

Ecuación de Dirac Extendida

1.1. Antecedentes

A lo largo de la historia, la unificación ha demostrado ser una idea poderosa en la Ciencia, particularmente en Física, donde ha servido para establecer vínculos entre hechos que no habían sido relacionados con anterioridad; vínculos que a su vez han llevado, en la mayoría de los casos, a la predicción de nuevos fenómenos, así como a una mejor comprensión del conocimiento establecido. Las ideas de unificación difieren tanto en objetivos como en el método de aplicación, pudiendo este último ser teórico, experimental o una combinación de ambos. No importando cuál sea el caso, podemos afirmar que los avances más relevantes en la historia de la Física han estado basados, de una forma u otra, en ideas de unificación, por lo que a continuación repasaremos brevemente algunos de estos avances.

Un primer ejemplo de unificación podemos rastrearlo hasta la época de la Grecia antigua, de donde proviene la idea de suponer que existe una estructura matemática detrás de todo fenómeno físico, idea que generalmente se le atribuye a Pitágoras. Así, mediante el vínculo de las matemáticas con la Física nació una de las herramientas más poderosas para la Ciencia de todos los tiempos.

Mucho tiempo después Newton relacionaría, mediante su teoría de la gravitación, dos hechos de la naturaleza que hasta entonces parecían deberse a causas totalmente distintas, como son el movimiento de cuerpos terrestres y el movimiento de cuerpos celestes. El trabajo de Newton demostró por primera vez que ambos fenómenos obedecen las mismas leyes. En el siglo

XIX tenemos otro gran ejemplo de unificación con la unión de los fenómenos eléctricos y magnéticos dentro de un único marco teórico. Dicha conexión se pudo dar, en un principio, gracias a una serie de brillantes experimentos realizados por Ampère y Faraday. Algunos años después Maxwell formalizaría y sintetizaría todo el conocimiento empírico del electromagnetismo, mediante un conjunto de ecuaciones que permitieron entender a la luz como una onda más de las muchas que conforman el espectro electromagnético, propagándose con una velocidad predicha por la misma teoría.

En el siglo XX, basándose en las ecuaciones de Maxwell y rechazando la hipótesis del éter, Einstein propuso su teoría de la relatividad especial, estableciendo el principio de una velocidad constante para la luz, y apartándose de la formulación Newtoniana para la dinámica de los cuerpos. En la teoría de la relatividad el tiempo pierde su carácter absoluto, para volverse una cantidad dependiente del sistema de referencia respecto al cual es medido. Además, tanto el tiempo como el espacio pueden estudiarse desde un solo punto de vista geométrico, como fue demostrado por Minkowsky. Esta nueva unión entre el espacio y el tiempo dio origen, a su vez, a nuevas predicciones teóricas, tal como la equivalencia entre la masa y la energía, y logró explicar muchos fenómenos interesantes, como el flujo de muones cósmicos medido sobre la superficie de la tierra.

Posteriormente, Einstein ampliaría los fundamentos de la teoría de la relatividad al campo gravitatorio, empleando para ello la noción de geometría curva (no euclidiana), la cual había sido estudiada extensamente por Riemann unas décadas antes, así como el concepto de campo, desarrollado con anterioridad por Faraday. La relatividad general surge entonces de considerar el campo gravitacional como una propiedad de la geometría del espacio-tiempo, uniendo así los conceptos de materia, gravedad y espacio-tiempo. A partir de esta teoría se pudieron hacer pequeñas correcciones, en el límite gravitatorio débil, a la teoría de Newton, y se obtuvieron, posteriormente, predicciones teóricas importantes, como la existencia de los hoyos negros.

El siguiente gran paso en la búsqueda de una descripción unificada de la naturaleza se dio al relacionar las dos teorías más importantes desarrolladas en la primera mitad del siglo XX: La relatividad especial y la mecánica cuántica. Esta última ya había tenido éxito al proporcionar un vínculo entre los conceptos de onda y partícula, lo cual es inédito en la física anterior. Durante algún tiempo se pensó que la ecuación de Klein-Gordon era la única ecuación relativista posible en mecánica cuántica, pero el problema de no tener una densidad de probabilidad positiva definida, que sirviera para una

interpretación probabilística como en el caso de la ecuación de Schrödinger, dejaba insatisfechos a muchos físicos. Al intentar resolver dicho problema, P.A.M. Dirac obtuvo la ecuación que lleva su nombre, proporcionando con ello una teoría de unificación elegante y poderosa. En palabras del propio Dirac[10]

Recuerdo una ocasión, cuando estaba en Copenhagen, que Bohr me preguntó en qué estaba trabajando, y le respondí que estaba intentando obtener una teoría relativista del electrón satisfactoria, a lo que Bohr repuso: *¡Pero Klein y Gordon ya han hecho eso!* Esa respuesta me molestó en primera instancia. Bohr parecía bastante satisfecho con la solución de Klein, pero yo no, debido a las probabilidades negativas a las que conducía. Simplemente seguí intentándolo, preocupándome por conseguir una teoría que tuviera únicamente probabilidades positivas.

Con gran intuición, Dirac se dio a la tarea[3] de buscar otra ecuación que fuera lineal en la derivada temporal o, equivalentemente, en el operador p_0 , correspondiente a la componente cero del cuadrimomento. La razón de pedir dicha propiedad es que para una ecuación de segundo orden en la derivada temporal, la evolución en el tiempo del sistema puede hacer cambiar el signo de la cantidad asociada a la densidad de probabilidad; llevando precisamente a las probabilidades negativas que hacían insatisfactoria la ecuación de Klein - Gordon. Además, para que la nueva ecuación de onda fuera invariante bajo transformaciones de Lorentz, también era necesario que fuera lineal en las componentes vectoriales del momento p_1 , p_2 y p_3 , con coeficientes independientes de las coordenadas y el momento. Tomando estas ideas como base Dirac propuso la ecuación[2]

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\hbar c}{i} \left(\alpha_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \alpha_3 \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \right) + \beta mc^2 \psi \equiv H\psi \quad (1.1)$$

donde los coeficientes son ahora matrices de 4×4 que cumplen con el álgebra

$$\begin{aligned} \alpha_i \alpha_k + \alpha_k \alpha_i &= 2\delta_{ik} \\ \alpha_i \beta + \beta \alpha_i &= 0 \\ \alpha_i^2 &= \beta^2 = 1 \end{aligned} \quad (1.2)$$

La ecuación de Dirac no sólo incluye una cuadricorriente conservada, con su componente temporal positiva definida, sino que también incorpora el espín

del electrón de forma natural, y conduce a la predicción de las antipartículas, aunque es posible deducir la existencia de antipartículas a partir de la ecuación de Klein-Gordon.

En la física moderna, el cuerpo teórico que describe de manera correcta a las partículas fundamentales de la naturaleza y sus interacciones se conoce como modelo estándar, y es dentro del mismo que encontramos otro gran ejemplo de unificación con la teoría electro-débil de Weinberg-Salam, la cual unifica la interacción electromagnética con la débil a partir de una energía de 100 GeV, considerando que ambas se originan a partir de una simetría de norma. El modelo describe tres de las cuatro fuerzas conocidas: el electromagnetismo, la interacción débil y la interacción fuerte. Esta última mantiene unidos a protones, neutrones y núcleos, mientras que la segunda se encuentra implicada en la formación de los elementos químicos y procesos de decaimiento β^+ , β^- . Las interacciones son mediadas por el intercambio de partículas bosónicas: fotones en el electromagnetismo, bosones W^\pm y Z^0 en la interacción débil, y gluones en la fuerte. Para la gravedad se postularon los gravitones, aunque la interacción gravitacional no se incluye propiamente dentro de la teoría.

La forma como explica las interacciones fundamentales y predice las partículas asociadas correspondientes, constituye uno de los grandes éxitos del modelo estándar. Para el electromagnetismo, la validez de la electrodinámica cuántica implica que debe existir el fotón e interactuar tal como lo hace, lo que lleva al entendimiento de la naturaleza de la luz. Razonamientos similares conducen a predecir la existencia de los gluones y de los bosones W^\pm y Z^0 , así como sus propiedades. Por ejemplo, para éstos últimos el modelo predice que deberían ser muy masivos, con una masa de aproximadamente 80 GeV para los W^\pm y de 90 GeV para el Z^0 , propiedades que fueron confirmadas experimentalmente tiempo después. El modelo predice también la existencia del bosón de Higgs, el cual interactúa con las partículas de una manera que les confiere masa y que aún no ha sido detectado experimentalmente.

A pesar de sus logros, el modelo estándar tiene serias limitaciones, pues existen fenómenos que no puede explicar o, en ciertos casos, ni siquiera admitir, algunos de los cuales se mencionan a continuación:

- El modelo no puede explicar el origen del rompimiento de la simetría por el campo de Higgs para que las partículas adquieran masa.
- No abarca la gravedad, pues ésta no tiene la misma estructura que las otras fuerzas.

- Los valores de las masas de cuarks y leptones no pueden explicarse con el modelo estándar.
- Aunque las describe, el modelo no explica el número de generaciones, ni sus jerarquías.
- El modelo no explica las constantes de acoplamiento.

En la búsqueda de una unificación de las interacciones de la naturaleza cabe destacar la teoría de Kaluza-Klein, la cual tuvo como motivación principal el tratar de unificar el electromagnetismo con la relatividad general; objetivo que el mismo Einstein persiguió en los últimos años de su vida, sin resultados satisfactorios. La idea original de Kaluza-Klein consiste en suponer la existencia de una quinta dimensión espacial compactada, asociada a la simetría de norma de la teoría electromagnética. El que la dimensión extra se encuentre compactada implica que debería tener la topología de un círculo, con un radio del orden de la longitud de Planck, lo que a su vez explicaría el por qué no ha sido detectada. Hasta ahora, dicha idea no ha aportado mayor información, ni ha llevado a la predicción de fenómenos nuevos que puedan ser sujetos a comprobación experimental, por lo que no puede ser clasificada como una unificación exitosa en sentido estricto, pero incluso así sigue representando una posibilidad viable, y continúa siendo utilizada como hipótesis de trabajo en teorías como supercuerdas o supergravedad.

Para poder describir el comportamiento de una partícula relativista con espín dado, requerimos tanto del espacio de espines como del espacio de configuración (o de momento), lo que nos obliga a tener una combinación de los generadores correspondientes de ambos espacios, manteniendo así la estructura de las ecuaciones relativistas. Retomando la idea de Kaluza-Klein, cabría preguntarse si es posible encontrar una conexión entre las interacciones fundamentales y un espacio de espín extendido, en lugar de tener un espacio de configuración con más dimensiones. Por otro lado, al buscar una relación más profunda entre los grados de libertad bosónicos y fermiónicos, es importante tener presente que la representación para partículas de espín $1/2$ del grupo de Lorentz $SO(3, 1)$ es más fundamental que la representación vectorial, pues se puede obtener esta última a partir de un producto tensorial de la primera, pero no al revés. Estas son las ideas básicas que sugieren considerar una teoría de unificación de simetrías de norma y de espacio-tiempo[1], la cual se desarrolla dentro del marco de la mecánica cuántica relativista. La

propuesta original de la teoría se basa en la posibilidad de considerar espacios extendidos de espín, como una forma de restringir las interacciones y representaciones de las partículas, y se implementa mediante la introducción de una nueva ecuación de campo, basada en la de Dirac, la cual permite obtener un tratamiento unificado de grados de libertad de espín bosónicos y fermiónicos. Lo anterior se logra al hacer que las soluciones para ambos casos compartan el mismo espacio. Dichas soluciones también conllevan grados de libertad que pueden ser atribuidos a los grupos de norma.

1.2. Ecuación de Dirac Extendida

Para construir la nueva teoría es deseable que se satisfagan dos aspectos básicos: debe proveer una descripción para vectores y escalares lo más cercana posible a la ya existente para los fermiones, de forma que sea posible relacionar ambas representaciones, y es conveniente que se sitúe dentro del marco de trabajo de un principio variacional. Estos aspectos quedan cubiertos si en vez de tomar al operador de Dirac, para partícula libre, actuando sobre un espinor de la manera usual[2]

$$(i\partial_\mu\gamma^\mu - M)\psi = 0 \quad (1.3)$$

con ψ el vector columna de componentes ψ_α , suponemos que actúa sobre una matriz Ψ de 4×4 , con componentes $\Psi_{\alpha\beta}$, y la ecuación se escribe ahora como[1]

$$(i\partial_\mu\gamma^\mu - M)\Psi = 0 \quad (1.4)$$

Esta forma extendida de la ecuación de Dirac implica que todos los operadores de simetría válidos para (1.3), ya sea para los casos con o sin masa, son también válidos para (1.4). La nueva ecuación contiene cuatro condiciones sobre cuatro espinores, por lo que se tienen condiciones adicionales para clasificar Ψ más allá de las estándares. Así, las transformaciones y operaciones de simetría que actúan sobre el operador de Dirac de la forma

$$(i\partial_\mu\gamma^\mu - M) \rightarrow U(i\partial_\mu\gamma^\mu - M)U^{-1} \quad (1.5)$$

inducen el lado izquierdo de la transformación

$$\Psi \rightarrow U\Psi U^\dagger \quad (1.6)$$

Aquí la U del lado izquierdo se fija por la transformación del operador de Dirac, pero hay una libertad en la elección del término para el lado derecho. Por otro lado, podemos ver a Ψ como construida a partir del producto tensorial del espacio de configuración (o de momentos) usual y dos estados a determinar (incluyendo la posibilidad de que sean espinores), de acuerdo con la expansión

$$\Psi = \sum_{i,j} a_{ij} |\omega_i\rangle \langle \omega_j| \quad (1.7)$$

Donde a_{ij} son los coeficientes arbitrarios de la expansión. El producto tensorial de operadores que resulta de (1.7), conduce a que los generadores correspondientes del álgebra de Poincaré, en la transformación U , estén formados de dos operadores de espín, actuando en ambos lados de Ψ , y de operadores diferenciales, que actúan una sola vez en alguno de los dos lados, como en el caso de la ecuación de Dirac, por lo que la elección de U es relevante en este punto. Los productos de operadores diferenciales y de espín actúan en ambos lados con el mismo signo. La expansión (1.7) implica que los componentes de Ψ se transforman bajo las transformaciones de Lorentz como escalares, vectores y tensores antisimétricos. De hecho, abajo se demuestra que es posible clasificar algunas de las soluciones como fermiones, mediante el empleo de operadores de simetría modificados, y con la elección adecuada de proyecciones sobre la ecuación de Dirac.

Las soluciones matriciales generan un espacio vectorial, donde el producto está dado por el producto matricial ordinario, el cual define el álgebra del espacio, es decir, si A y B son soluciones, tenemos entonces que el nuevo campo dado por

$$C = AB \quad (1.8)$$

también es un elemento del álgebra y vive en el mismo espacio vectorial, aunque no necesariamente sea solución. El producto punto de A y B se define como

$$\langle A | B \rangle = \text{tr}(A^\dagger B) \quad (1.9)$$

definición que lleva implícita una traza sobre las coordenadas. Puede comprobarse directamente que (1.9) satisface las propiedades usuales para una medida, dentro del espacio extendido formado por el producto tensorial de espinores.

Es importante notar que la transformación (1.6) también es válida para los campos conjugados Hermitianos Ψ^\dagger , los cuales satisfacen la ecuación

$$0 = \Psi^\dagger \left(-i \overleftarrow{\partial}_\mu \gamma^{\mu\dagger} - M \right) \quad (1.10)$$

lo que extiende el espacio de soluciones, al considerar también combinaciones de los campos A, B^\dagger , de la forma

$$A + B^\dagger \quad (1.11)$$

Al igual que en el caso de la ecuación de Dirac para partícula libre, nos interesan las soluciones de onda plana de la ecuación (1.4), que podemos escribir como

$$\Psi_k^{(+)}(x) = u(k)e^{-ikx} \quad (1.12)$$

$$\Psi_k^{(-)}(x) = v(k)e^{ikx} \quad (1.13)$$

con $k = (E, \mathbf{k})$ el cuadrivector de energía-momento y u, v matrices que contienen la información sobre el estado de polarización. Aplicando el operador de (1.4) a cada uno de los estados (1.12) y (1.13) encontramos las ecuaciones estacionarias que satisfacen las matrices u y v

$$\gamma_0 (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\gamma} + M) u(k) = Eu(k) \quad (1.14)$$

$$\gamma_0 (-\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\gamma} + M) u(k) = -Eu(k) \quad (1.15)$$

A partir de los generadores del grupo de Lorentz

$$J_{\mu\nu} = i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) + \frac{1}{2} \sigma_{\mu\nu} \quad (1.16)$$

con los operadores de espín dados por

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] \quad (1.17)$$

construimos el vector de Pauli-Lubansky

$$W_\mu = -\frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} J^{\nu\rho} p^\sigma \quad (1.18)$$

donde el operador de momento es $p^\mu = i\partial^\mu$. El vector de Pauli-Lubansky, junto con el hamiltoniano definido por

$$H = \gamma_0 (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\gamma} + M) \quad (1.19)$$

son empleados para clasificar las soluciones. Si proyectamos W_μ sobre el cuadvector de tipo espacio n_k de norma -1

$$n_k = \left(\frac{|\mathbf{k}|}{M}, \frac{E\mathbf{k}}{M|\mathbf{k}|} \right) \quad (1.20)$$

el cual es ortogonal al momento, obtenemos

$$\frac{1}{M} W \cdot n_k = \boldsymbol{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{k}} \quad (1.21)$$

donde

$$\boldsymbol{\Sigma} = \frac{1}{2} \gamma_5 \boldsymbol{\gamma} \gamma_0 \boldsymbol{\gamma} \quad (1.22)$$

es el operador de espín, relacionado con (1.17) por medio de

$$\Sigma^i = \epsilon_{ijk} \sigma^{jk} \quad (1.23)$$

La ecuación (1.21) es válida para los casos con y sin masa.

1.3. Soluciones fermiónicas de masa nula

Consideremos la expresión

$$(1 - \gamma_5) i \gamma_0 \boldsymbol{\gamma}^\mu \partial_\mu \Psi = 0 \quad (1.24)$$

El álgebra de Clifford que define a esta forma reducida de la ecuación (1.4) contiene al generador de Lorentz

$$J_{\mu\nu}^- = \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) J_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) \left[i (x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) + \frac{1}{2} \sigma_{\mu\nu} \right] \quad (1.25)$$

junto con el resto de operadores del grupo de Poincaré. El operador $(1 - \gamma_5) i \gamma_0 \boldsymbol{\gamma}^\mu \partial_\mu$ en (1.24) se encuentra definido sobre un espacio de matrices de 2×2 , pero sus soluciones pertenecen al espacio más grande de matrices de

4×4 . Es precisamente dicha estructura la que permite clasificar un conjunto de las soluciones como partículas de espín $1/2$ bajo $J_{\mu\nu}^-$. Esto muestra que la ecuación (1.24) tiene una libertad en la elección de la transformación de Lorentz empleada, por lo que se puede elegir una del tipo (1.6) tal que uno de los lados se transforme trivialmente, obteniendo así objetos de espín $1/2$, los cuales se transforman de acuerdo a las representaciones $(1/2, 0)$ o $(0, 1/2)$ del grupo de Lorentz. Además, bajo el mismo generador, tenemos como simetría adicional el grupo de las transformaciones lineales complejas $G(2, C)$, con ocho componentes generadas por

$$\frac{1}{2}(1 + \gamma_5) \quad (1.26)$$

$$f_{\mu\nu} = -\frac{i}{4}(1 + \gamma_5)\sigma_{\mu\nu} \quad (1.27)$$

La naturaleza de las soluciones dependerá entonces del Hamiltoniano y del conjunto de transformaciones que se escojan para clasificarlas, pero una vez hecha dicha elección, que en el presente caso se limita a $J_{\mu\nu}^-$, podemos interpretar a las soluciones como partículas izquierdas de espín $1/2$ con masa nula.

Los subgrupos unitarios $SU(2) \times U(1)$ de $G(2, C)$ dan lugar a dos números cuánticos adicionales que podemos asignar a las soluciones. Tomando en cuenta los números cuánticos conocidos para los fermiones en la naturaleza, se asocian estos operadores con el *sabor* y el número leptónico, respectivamente. Escogiendo f_{30} de entre los generadores de $SU(2)$ para clasificar las soluciones de (1.24), éstas se muestran en el cuadro 1.1, donde se ha usado el caret para distinguir los dos sabores. El valor del sabor se muestra en la última columna. La dependencia completa en las coordenadas se escribe entonces como

$$\Psi_k^{(+)-}(x) = w_{-1/2}(k)e^{-ikx} \quad (1.28)$$

$$\Psi_k^{(-)-}(x) = w_{-1/2}(k)e^{ikx} \quad (1.29)$$

El signo entre paréntesis corresponde al valor de la energía, mientras que el signo adicional en el superíndice proporciona el valor de la quiralidad. Se tienen expresiones semejantes para el otro valor del sabor.

Las soluciones se encuentran normalizadas de acuerdo con

$$\text{tr} \left(w_i^\dagger(k) w_i(k) \right) = 1 \quad (1.30)$$

Las conjugadas Hermitianas de (1.29) son interpretadas como antipartículas derechas. Las soluciones con dependencia en k corresponden a ondas propagándose en la dirección \hat{z} , mientras que los otros términos, denotados por \tilde{k} , corresponden a ondas propagándose en la dirección $-\hat{z}$. Dichas soluciones no representan componentes de polarización independientes, ya que se obtienen a partir de las primeras mediante una rotación. El caso con masa no se puede dar para el espacio de soluciones considerado, pues para tener un término de masa se necesita una ecuación que mezcle soluciones con ambas quiralidades, lo cual no puede realizarse en el espacio de matrices de 4×4 del presente caso.

| Partículas izquierdas de espín 1/2 | $\frac{1}{2}(1 - \gamma_5) \gamma_0 \gamma^3$ | $\frac{1}{2}(1 - \gamma_5) \gamma_1 \gamma_2$ | $[f_{30}, \bullet]$ |
|--|---|---|---------------------|
| $w_{-1/2}(k) = \frac{1}{4}(1 - \gamma_5)(\gamma_0 + \gamma_3)$ | 1 | -1/2 | 1/2 |
| $w_{-1/2}(\tilde{k}) = \frac{1}{4}(1 - \gamma_5)(\gamma_1 + i\gamma_2)$ | -1 | 1/2 | 1/2 |
| $\hat{w}_{-1/2}(k) = \frac{1}{4}(1 - \gamma_5)(\gamma_1 - i\gamma_2)$ | 1 | -1/2 | -1/2 |
| $\hat{w}_{-1/2}(\tilde{k}) = \frac{1}{4}(1 - \gamma_5)(\gamma_0 - \gamma_3)$ | -1 | 1/2 | -1/2 |

Cuadro 1.1: Fermiones sin masa

Capítulo 2

Propagador fermiónico estándar

2.1. Teoría de agujeros

La ecuación de Dirac (ecuación 1.3) predice correctamente el espectro de energía del átomo de hidrógeno y proporciona el valor de la razón giro magnética del electrón con muy buena precisión. Pero incluso con el éxito que tiene en la descripción de la naturaleza, existe el problema de interpretar las soluciones de energía negativa que dicha ecuación admite [2, 3]. La dificultad es la siguiente: Dada una cierta energía, podría inducirse a los electrones con energía positiva a caer en cascada hacia estados de energía negativa, lo que haría inestable a la materia. En ausencia de interacciones los electrones con energía positiva permanecen inalterados, y podría postularse en principio que no existen estados con energía negativa. Sería posible, entonces, calcular soluciones estacionarias y encontrar valores propios para la energía, así como amplitudes de transición, que concuerden muy bien, en general, con los experimentos. Sin embargo, desde el punto de vista físico, la teoría tendría muy poca aplicabilidad si no incluyera interacciones, pues siempre existen algunas perturbaciones, debidas al campo de radiación, actuando sobre las partículas. Estas perturbaciones tienen que tomarse en cuenta si se desea, por ejemplo, calcular propiedades atómicas incluyendo la interacción con el campo de radiación. Además, existe el fenómeno de producción y aniquilación de pares, el cual se produce al colisionar partículas a energías relativistas, y que no podría ser explicado considerando únicamente soluciones que no tomen en cuenta dichas colisiones. Desde un punto de vista formal tampoco es posible eliminar las soluciones de energía negativa de la ecuación de

Dirac, pues entonces se tendría un conjunto de soluciones *matemáticamente* incompleto, lo que llevaría a incongruencias en el desarrollo de la teoría. De lo anterior se sigue que no es posible eliminar las soluciones de energía negativa del formalismo, por lo que se tiene entonces el problema de proporcionar una interpretación de las mismas que sea coherente con las interacciones y la estabilidad de la materia.

El camino para salvar este obstáculo lo propuso el mismo Dirac en 1930[4], postulando que los estados de energía negativa están todos ocupados de acuerdo con el principio de exclusión de Pauli. El estado correspondiente al vacío es entonces aquél con todos los niveles de electrones con energía negativa llenos, pero inobservables, y todos los niveles de energía positiva vacíos. De esta forma el asunto de la estabilidad queda resuelto gracias al principio de exclusión, el cual evita que los electrones de energía positiva decaigan a los estados ocupados de energía negativa.

Esta imagen de un *mar* lleno de electrones con energía negativa implica la posibilidad de que un electrón con energía negativa absorba radiación suficiente para ser excitado a un estado de energía positiva, como se muestra esquemáticamente en la figura 2.1. Si esto ocurre se observa un electrón de carga $-|e|$ y energía $+E$, pero también se ha creado un agujero en el mar de Dirac. El hoyo registra la *ausencia* de un electrón de carga $-|e|$ y energía $-E$, el cual sería descrito por un observador relativo al vacío como una partícula de carga $+|e|$ y energía $+E$; es decir, como un *positrón*. Esto constituye la base de la teoría de agujeros para la producción de pares. Correspondientemente, un hoyo en el mar de energía negativa (un positrón) es una trampa para electrones con energía positiva, y lleva a la aniquilación del par electrón - positrón, emitiendo radiación en el proceso, como se ilustra en la figura 2.2.

La teoría de agujeros de Dirac explica satisfactoriamente la creación y aniquilación de pares, pero persiste la dificultad de que no es aplicable a partículas sin espín, las cuales no obedecen el principio de Pauli y al mismo tiempo presentan el problema de soluciones con energía negativa, como puede verificarse al insertar una solución de onda plana en la ecuación de Klein - Gordon[2, 7]. En 1942, pensando en resolver este problema, Stückelberg concibió por primera vez la idea de que los positrones pueden ser interpretados como electrones moviéndose *hacia atrás* en el tiempo. Posteriormente, tanto Feynman como el mismo Stückelberg, en trabajos independientes, formalizaron dicha idea con la aplicación del propagador causal (que será descrito en la siguiente sección) al cálculo de la matriz de dispersión[5, 11]. La interpretación de Feynman y Stückelberg, aplicable a bosones y fermio-

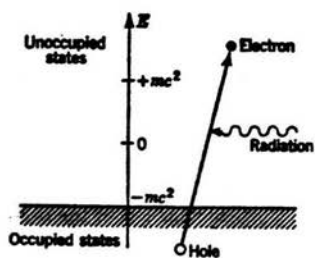


Figura 2.1: Creación de un hoyo en el mar de Dirac

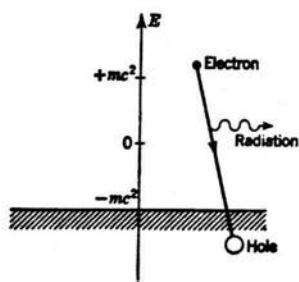


Figura 2.2: Aniquilación de un par electrón-positrón

nes, consiste básicamente en describir a las partículas con energía negativa como si viajaran hacia atrás en el tiempo. En la figura 2.3 se muestra una partícula con energía negativa creada en el punto espacio-temporal c , la cual viaja hacia atrás al punto d , donde es destruida. Un observador moviéndose adelante en el tiempo describe el proceso como sigue:

- (i) $t < t_d$ No se observa nada.
- (ii) $t = t_d$ Se destruyen energía negativa $-|E|$ y carga $-e$, i.e. la energía se incrementa por $|E|$ y la carga por e en relación con el pasado. Se ha creado un positrón.
- (iii) $t = t_c$ Se crean energía negativa y carga $-e$, lo que destruye al positrón.
- (iv) $t > t_c$ No se observa nada.

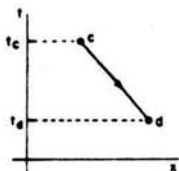


Figura 2.3: Creación y aniquilación de un positrón

De esta forma el proceso tiene sentido físico y representa un positrón creado en c y destruido en d . Mediante una aplicación adecuada de las relaciones de causalidad en la construcción del propagador, se asegura que los estados de energía negativa se propaguen hacia atrás en el tiempo, como se verá en la próxima sección.

2.2. Función de Green y propagador

Dentro del marco de trabajo de la teoría de Dirac para electrones y positrones, los cálculos de probabilidades de transición y de secciones eficaces de dispersión, se realizan utilizando teoría de perturbaciones principalmente, la cual es en esencia una expansión en términos de parámetros de interacción pe-

queños. En el método del propagador de Feynman, los procesos de dispersión son descritos por medio de ecuaciones integrales, siguiendo la interpretación para electrones y positrones establecida en la sección anterior.

Como un primer paso en la descripción matemática de los procesos de dispersión, necesitamos encontrar la función de Green adecuada para electrones y positrones. Esta función se conoce como el propagador relativista o propagador de Feynman, y se denota por $S_F(x', x; A)$ cuando se tiene interacción, o simplemente $S_F(x', x)$ cuando la propagación es libre. En general se puede interpretar una función de Green como el inverso del operador que actúa sobre ella, por lo que, para el caso con interacción, el propagador debe satisfacer la ecuación matricial

$$(i\cancel{\partial} + eA - m) S_F(x', x; A) = \delta^4(x' - x) \quad (2.1)$$

donde se ha seguido la convención usual de no mostrar explícitamente la matriz unidad. Esta ecuación se toma, de hecho, como la definición del propagador. Por lo tanto $S_F(x', x; A)$ es una matriz de 4×4 , como corresponde a la dimensión de las matrices gama. El caso más simple corresponde a la partícula libre, donde se anula el término de interacción en (2.1), obteniéndose

$$(i\cancel{\partial} - m) S_F(x', x) = \delta^4(x' - x) \quad (2.2)$$

Debido al hecho de que una onda emitida de la fuente en x al tiempo t , y que llega a x' al tiempo t' , depende únicamente de la distancia $\{x' - x, t' - t\}$, también $S_F(x', x)$ debe depender únicamente del cuadrivector distancia, dado por $x' - x$. Tenemos entonces que esta propiedad del propagador libre es una manifestación de la homogeneidad del espacio - tiempo y no será válida, en general, para el caso con interacción. Lo anterior nos permite escribir $S_F(x', x)$ en el espacio de momentos mediante una integral sencilla. Entonces, realizando la transformación de Fourier correspondiente al espacio de cuadrimomentos, la expresión para el propagador libre es

$$S_F(x', x) = S_F(x' - x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x' - x)} S_F(p) \quad (2.3)$$

Insertando (2.3) en (2.2) y empleando la representación de Fourier para la función delta: $\delta^4(x' - x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x' - x)}$, así como la representación para el operador de cuadrimomento $p_\mu \rightarrow i\partial_\mu$, se obtiene la expresión

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (\not{p} - m) S_F(p) e^{-ip(x'-x)} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x'-x)} \quad (2.4)$$

La ecuación (2.4) implica que

$$(\not{p} - m) S_F(p) = 1 \quad (2.5)$$

Para obtener $S_F(p)$, multiplicamos (2.5) por la izquierda con el factor $\not{p} + m$

$$(\not{p} + m)(\not{p} - m) S_F(p) = (\not{p} + m) \quad (2.6)$$

y, puesto que

$$\not{p}\not{p} = \gamma^\mu p_\mu \gamma^\nu p_\nu = \gamma_\mu \gamma_\nu p^\mu p^\nu = \frac{1}{2}(\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu) p^\mu p^\nu = g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = p_\mu p^\mu = p^2 \quad (2.7)$$

entonces (2.6) se convierte en

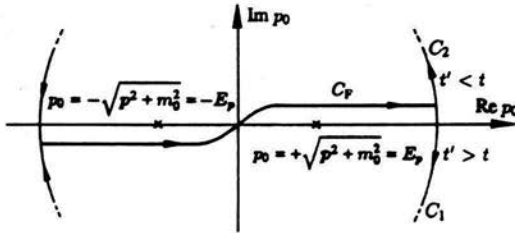
$$(p^2 - m^2) S_F(p) = (\not{p} + m) \quad (2.8)$$

de donde se obtiene finalmente la expresión para la *amplitud*

$$S_F(p) = \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2}, \quad p^2 \neq m^2 \quad (2.9)$$

Para completar la definición de $S_F(p)$ falta dar la prescripción que permita manejar las singularidades en $p^2 = m^2$, la cual es simplemente la condición de la capa de masa $p_0^2 - \mathbf{p}^2 = m^2$. La información adicional se obtiene de las condiciones a la frontera que debe satisfacer $S_F(x' - x)$ para tener significado físico, es decir, para que cumpla con las relaciones de causalidad adecuadas para electrones y positrones. Al resolver una ecuación inhomogénea existen varias soluciones homogéneas que se pueden agregar, dando lugar a una libertad en la elección de las soluciones, libertad que se elimina escogiendo las condiciones a la frontera apropiadas. Por lo tanto es aquí donde hay que poner en práctica la interpretación de Feynman para los positrones, al elegir el contorno de integración adecuado para cada polo pues, como se muestra más abajo, existen otros contornos posibles, los cuales, sin embargo, son incompatibles con las condiciones físicas requeridas. Para aplicar dichas condiciones sustituimos (2.9) en la representación de Fourier (2.3) y realizamos la integración para la energía (la integral de dp_0), a lo largo del contorno C mostrado en la figura 2.4, obteniéndose

$$\begin{aligned}
 S_F(x' - x) &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} S_F(p) e^{-ip(x' - x)} \\
 &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} S_F(p) e^{-i[p_0(t' - t) - \mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x})]} \\
 &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x})} \int_{C_F} \frac{dp_0}{2\pi} e^{-ip_0(t' - t)} \frac{p_0 + m}{p_0^2 - m^2}
 \end{aligned} \tag{2.10}$$


 Figura 2.4: Contorno de integración para S_F

Para $t' > t$ cerramos el contorno de integración en el semi-plano inferior, puesto que en este caso la integral del semicírculo inferior, parametrizado por $p_0 = \rho e^{i\phi}$, no contribuye cuando $\rho \rightarrow \infty$. De acuerdo al teorema del residuo, únicamente contribuye el polo para la energía positiva, el cual está situado en $p_0 = E_p = +\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$. Por lo tanto, la integral queda como

$$\begin{aligned}
 \int_{C_F} \frac{dp_0}{2\pi} e^{-ip_0(t' - t)} \frac{p_0 + m}{p_0^2 - m^2} &= \int_{C_F + C_1} \frac{dp_0}{2\pi} e^{-ip_0(t' - t)} \frac{(p_0 \gamma^0 + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma} + m)}{(p_0 - E_p)(p_0 + E_p)} \\
 &= -2\pi i e^{-iE_p(t' - t)} \frac{(E_p \gamma^0 - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma} + m)}{4E_p}
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

y entonces (2.10) da por resultado

$$\begin{aligned}
 S_F(x' - x) &= -i \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x})} e^{-iE_p(t' - t)} \\
 &\quad \times \frac{(E_p \gamma^0 - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma} + m)}{2E_p} \quad \text{para } t' > t
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

El signo menos en (2.12) se debe a que el contorno $C_F + C_1$ seguido se recorre en sentido horario, lo cual es matemáticamente negativo. Este propagador describe el movimiento de las partículas hacia adelante en el tiempo, de la

posición x a x' . En el punto $x' = (x', t')$, S_F tiene solamente componentes de energía positiva, ya que el factor de energía en el exponente de (2.12) es positivo definido, $E_p = +\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$. Por otro lado, al considerar la propagación de las partículas hacia atrás en el tiempo tenemos que $t' - t$ es negativo, lo que implica que la integración para p_0 debe ser hecha a lo largo del contorno que se cierra en el semi-plano superior, de forma que no contribuya al semi-círculo cuando $\rho \rightarrow \infty$. Entonces la única contribución proviene del polo de energía negativa situado en $p_0 = -E_p = -\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$, lo que resulta en

$$\begin{aligned} & \int_{C_F+C_2} \frac{dp_0}{2\pi} e^{-ip_0(t'-t)} \frac{(p_0\gamma^0 + \mathbf{p}_i\gamma^i + m)}{(p_0 - E_p)(p_0 + E_p)} \\ &= 2\pi i e^{iE_p(t'-t)} \frac{(-E_p\gamma^0 - \mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\gamma} + m)}{-4\pi E_p} \end{aligned} \quad (2.13)$$

En consecuencia, la expresión para el propagador cuando $t' < t$, es

$$\begin{aligned} S_F(x' - x) &= -i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}'-\mathbf{x})} e^{iE_p(t'-t)} \\ &\quad \times \frac{(-E_p\gamma^0 - \mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\gamma} + m)}{2E_p} \quad \text{para } t' < t \end{aligned} \quad (2.14)$$

Éste describe la propagación de partículas con energía negativa hacia atrás en el tiempo. Es importante notar que existen otras alternativas a la elegida para el contorno de integración, como las que se muestran en la figura 2.5, por ejemplo. En el caso (a) tendríamos contribuciones de ondas de energía negativa propagándose hacia el futuro, mientras que en el caso (b) las ondas de energía positiva se propagarían hacia el pasado.

Como se ve, la elección de contorno de acuerdo con la figura 2.4 nos garantiza que las ondas de energía positiva se muevan hacia adelante en el tiempo y las de energía negativa hacia atrás, tal como es requerido por la interpretación de Feynman de la teoría de agujeros. Una forma alternativa de caracterizar completamente el contorno de integración correcto es añadir una pequeña parte imaginaria positiva $+i\varepsilon$ al denominador de (2.10) y tomar el límite $\varepsilon \rightarrow 0$ al final de los cálculos. Es decir

$$S_F(x' - x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{(p + m)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{-ip(x'-x)} \quad (2.15)$$

Entonces, la singularidad correspondiente a los estados de energía positiva queda abajo del eje real p_0 y la escribimos como

$$p_0 = +\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2 - i\varepsilon} = +\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} - i\eta(\varepsilon) \quad (2.16)$$

mientras que el polo para los estados de energía negativa es

$$p_0 = -\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2 - i\varepsilon} = -\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} + i\eta(\varepsilon) \quad (2.17)$$

y se encuentra arriba del eje p_0 , cumpliendo con los requisitos del contorno C_F . Dada la utilidad de dicha prescripción, podemos elevarla a la categoría de regla y enunciar: *Para asegurar las condiciones a la frontera correctas, se le tiene que proporcionar a la masa una pequeña parte imaginaria negativa.*

2.3. Solución en presencia de un campo electromagnético

Las ecuaciones (2.12) y (2.14) determinan al propagador de partícula libre de la Electrodinámica Cuántica, y a partir de ellas es posible construir formalmente la función de Green completa para el caso de interacción con un potencial electromagnético A . Para ver esto, empezamos por reescribir (2.1) como

$$(i\cancel{\partial} - m) S_F(x', x; A) = \delta^4(x' - x) + e\cancel{A}(x') S_F(x', x; A) \quad (2.18)$$

expresión que puede ser vista como una ecuación de Dirac inhomogénea de la forma

$$(i\cancel{\partial} - m) \Psi = \rho(x) \quad (2.19)$$

La función de Green libre asociada a (2.19) es

$$(i\cancel{\partial} - m) S_F(x', x) = \delta^4(x' - x) \quad (2.20)$$

De acuerdo con el principio de superposición, las soluciones de (2.19) se generan a partir de

$$\Psi(x) = \Psi_0(x) + \int d^4y S_F(x - y) \rho(y) \quad (2.21)$$

donde $\Psi_0(x)$ satisface la ecuación homogénea y las condiciones a la frontera que se requieran. Empleando (2.18), (2.19) y (2.21) se obtiene una expresión integral para el propagador

$$\begin{aligned}\widehat{S}_F(x', x; A) &= \int d^4y S_F(x' - y) [\delta^4(y - x) + e\mathcal{A}(y)S_F(y, x; A)] \\ &= S_F(x' - x) + e \int d^4y S_F(x', y)\mathcal{A}(y)S_F(y, x; A)\end{aligned}\quad (2.22)$$

Un proceso iterativo aplicado a (2.22), análogo al caso no relativista[2], conduce a la expansión para dispersiones múltiples

$$\begin{aligned}\widehat{S}_F(x', x; A) &= S_F(x' - x) + e \int d^4x_1 S_F(x' - x_1)\mathcal{A}(x_1)S_F(x_1 - x) \\ &\quad + e^2 \int d^4x_1 d^4x_2 S_F(x' - x_1)\mathcal{A}(x_1)S_F(x_1 - x_2)\mathcal{A}(x_2)S_F(x_2 - x) \\ &\quad + \dots\end{aligned}\quad (2.23)$$

En consecuencia, la solución exacta de la ecuación de Dirac completa

$$(i\cancel{\partial} - m)\Psi(x) = e\mathcal{A}(x)\Psi(x)\quad (2.24)$$

queda completamente determinada en términos de S_F si uno impone las condiciones a la frontera de Feynman y Stückelberg

$$\Psi(x) = \psi(x) + \int d^4y S_F(x - y)e\mathcal{A}(y)\Psi(y)\quad (2.25)$$

$\psi(x)$ corresponde a la solución de la ecuación de Dirac libre. El segundo término de la derecha representa la onda dispersada, la cual contiene solamente frecuencias positivas para el futuro distante, y únicamente frecuencias negativas en el pasado lejano. Físicamente, dentro de la interpretación de agujeros de Dirac, dichas propiedades de las soluciones expresan el hecho de que un electrón, después de haber sido dispersado por un campo externo $\mathcal{A}(y)$, no puede caer en el mar de estados de energía negativa ocupados, puesto que solamente se encuentran disponibles los estados de energía positiva desocupados. En contraste, los positrones son dispersados a tiempos anteriores, de regreso a otros estados de energía negativa.

2.4. Interpretación del propagador en los procesos dispersivos

En la figura 2.6 se muestra esquemáticamente un proceso de dispersión múltiple de una partícula. En dicho proceso la amplitud de probabilidad de la onda asociada a la partícula, que describe su propagación del punto x al punto x' en el espacio-tiempo, puede descomponerse en una suma de amplitudes parciales, y se construye a partir de los factores individuales de propagación entre cada punto de dispersión, los que a su vez son causados por la interacción con $A(x)$. El proceso de dispersión de orden n estará dado, entonces, por la integración sobre las coordenadas espacio - temporales de los puntos de interacción.

Cada línea de la figura 2.6 representa una función de Green, con los pequeños círculos indicando los puntos donde sucede la interacción, los cuales se conocen como vértices. También es posible describir los procesos de dispersión individuales estableciendo que la interacción en el i -ésimo vértice *aniquila* la partícula que se ha propagado libremente hasta x_i , mientras que *crea* una partícula que se propaga libremente a x_{i+1} , con $t_{i+1} \geq t_i$. La situación física en general queda descrita, en términos del propagador para partícula libre, mediante la expansión 2.23.

En la figura 2.7 se muestran algunos procesos típicos que deben poder ser descritos dentro del formalismo del propagador. Tenemos así, los procesos ordinarios de dispersión de un electrón (Fig. 2.7a) y de un positrón (Fig. 2.7b, en la dispersión de x_1 a x' se tiene velocidad negativa), y los procesos de creación y aniquilación de pares (Fig. 2.7c-f). En la figura 2.7c el par electrón-positrón es creado por un potencial que actúa en el punto x_1 del espacio-tiempo. Una vez creadas, las dos partículas se propagan libremente hacia adelante en el tiempo, el positrón a x' y el electrón a x . De igual forma, la figura 2.7d muestra las trayectorias de un electrón y un positrón, los cuales parten de los puntos x y x' , respectivamente, para encontrarse en el punto x_1 , donde se aniquilan.

El diagrama 2.7e representa un electrón originado en x moviéndose hacia delante en el tiempo y experimentando varias dispersiones para terminar en x' . En el camino de x a x' es producido un par debido al potencial que actúa en x_1 , con las partículas creadas propagándose hacia adelante en el tiempo. El positrón de este par y el electrón original convergen en x_3 y son aniquilados, mientras que el electrón sobreviviente del par creado se

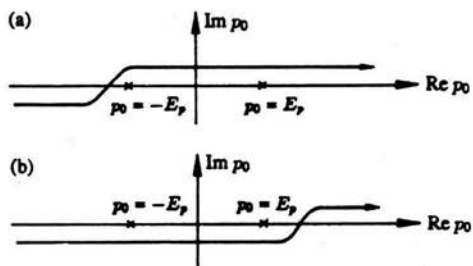


Figura 2.5: Contornos de integración alternativos para S_F

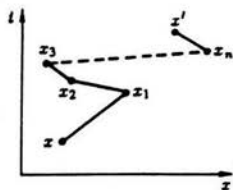


Figura 2.6: Dispersión múltiple de una partícula

propaga a x' . Finalmente el diagrama 2.7f muestra un par producido en x_1 propagándose hasta x_2 , donde se aniquila. Solamente estuvo "virtualmente" presente por un periodo de tiempo específico: aquél permitido por el principio de incertidumbre de Heisenberg. Dicho proceso se conoce como la polarización del vacío.

Estos ejemplos simples nos sirven para mostrar que la teoría necesariamente debe ser capaz de proporcionar la amplitud para la creación de un positrón que se propaga de un punto del espacio-tiempo a otro, donde es a su vez destruido, y no únicamente la amplitud para el electrón que se propaga de x_1 a x_2 como sucede en la teoría no relativista ordinaria. Una vez obtenida la nueva *amplitud del positrón*, podemos encontrar la amplitud total para los distintos procesos considerados en la figura 2.7, sumando o integrando sobre todos los puntos intermedios que puedan contribuir al proceso total. En general, tanto la amplitud para el electrón como la amplitud para el positrón contribuirán en un evento dispersivo.

Tomemos como ejemplo la figura 2.7e. Lo anterior sugiere la posibilidad de que la amplitud para la creación del positrón en x_1 , y su posterior destrucción en x_3 , esté relacionada con la amplitud para crear un electrón de energía negativa en x_3 y que es destruido en x_1 , donde el tiempo transcurre de forma que $t_1 < t_3$. Desde esta perspectiva, los procesos de creación de pares, tales como los de las figuras 2.7c y 2.7e, nos llevan a la interpretación de Stückelberg-Feynman para positrones y electrones descrita con anterioridad.

Tenemos entonces que un proceso como el ilustrado en la figura 2.8 puede ser interpretado de dos formas distintas pero equivalentes. En principio podemos decir que un electrón originado en x se propaga hacia adelante en el tiempo y posteriormente es dispersado a un estado de energía negativa en x_2 debido a la interacción $A(x_2)$, lo que provoca que se propague hacia atrás en el tiempo de regreso a x_1 , donde es dispersado nuevamente a un estado de energía positiva, para finalmente propagarse hacia adelante en el tiempo a x' . Alternativamente, podemos ver el proceso como un electrón, originado en x , moviéndose adelante en el tiempo hacia x_2 , donde es destruido por la interacción $A(x_2)$ junto con el positrón del par electrón-positrón creado con anterioridad en x_1 por $A(x_1)$. El electrón sobreviviente de dicho par se propaga libremente adelante en el tiempo hacia x' .

Finalmente consideremos la figura 2.9. Los procesos representados por lazos cerrados, como el de dicho diagrama, son interpretados en términos de la creación de un par electrón-positrón en x_1 , debido a la interacción $A(x_1)$, el cual se propaga hacia adelante en el tiempo hacia x_2 , donde es destruido

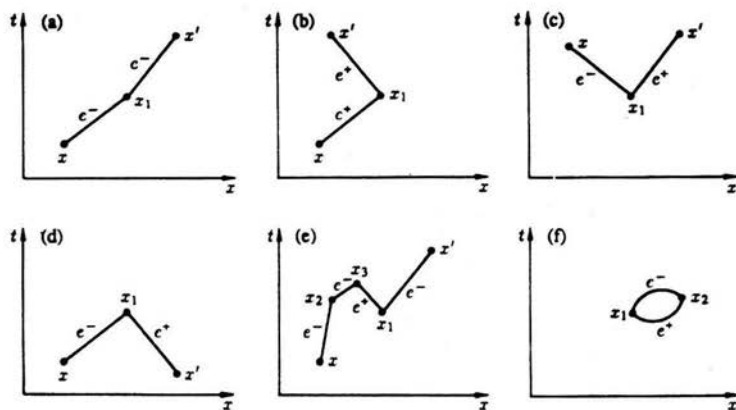


Figura 2.7: Procesos típicos de dispersión

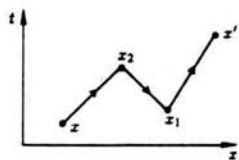


Figura 2.8: Propagación de un electrón

por $A(x_2)$. Equivalentemente, podemos decir que el potencial $A(x_1)$ en x_1 dispersa un electrón del mar de estados de energía negativa, hacia un estado de energía positiva, dejando un agujero en su lugar. Entonces, es dispersado de regreso al mar, combinándose con el hoyo en x_2 bajo la acción de $A(x_2)$. En el lenguaje del propagador, lo anterior se simplifica a decir que el electrón creado en x_1 es dispersado en x_2 hacia atrás en el tiempo, para destruirse a sí mismo en x_1 .

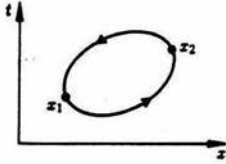


Figura 2.9: Proceso de auto interacción

Capítulo 3

Propagador Extendido sin Masa

3.1. Sumas de Polarización

Una vez establecidas las propiedades principales del propagador fermiónico estándar, el objetivo es construir ahora el propagador para el caso de masa nula, dentro del modelo de espacio extendido de espín discutido en el capítulo 1, siguiendo para ello un procedimiento análogo al presentado en el capítulo anterior. Como un primer paso se obtendrán las sumas sobre los estados de polarización de las soluciones a la ecuación (1.24). De la forma completa de las soluciones, dada por las expresiones (1.28) y (1.29), se puede apreciar que la parte matricial $w_{-1/2}$ permanece inalterada al cambiar el signo de la energía, distinguiéndose únicamente por las direcciones de propagación k y \tilde{k} definidas en la sección 1.3; lo anterior para cada sabor. Entonces, empleando la representación explícita para las matrices w mostrada en el cuadro 1, la suma sobre los estados de polarización k , que mezcla ambos valores del sabor, resulta

$$\begin{aligned} & w_{-1/2}(k)w_{-1/2}^\dagger(k) + \widehat{w}_{-1/2}(k)\widehat{w}_{-1/2}^\dagger(k) \\ &= \frac{1}{16}(1-\gamma_5)(\gamma_0+\gamma_3)[(1-\gamma_5)(\gamma_0+\gamma_3)]^\dagger + \frac{1}{16}(1-\gamma_5)(\gamma_1-i\gamma_2)[(1-\gamma_5)(\gamma_1-i\gamma_2)]^\dagger \\ &= \frac{1}{16}(1-\gamma_5)(4+2\gamma_3\gamma_0-2i\gamma_1\gamma_2)(1-\gamma_5) = \frac{1}{8}(1-\gamma_5)(2+\gamma_3\gamma_0+i\gamma_0\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_3)(1-\gamma_5) \\ &= \frac{1}{8}(1-\gamma_5)[2+(1-\gamma_5)\gamma_3\gamma_0](1-\gamma_5) = \frac{1}{8}(1-\gamma_5)[2(1-\gamma_5)+2(1-\gamma_5)\gamma_3\gamma_0] \\ &= \frac{1}{2}(1-\gamma_5)(1+\gamma_3\gamma_0) \end{aligned}$$

Análogamente, para los estados de polarización \tilde{k}

$$\begin{aligned}
& w_{-1/2}(\tilde{k}) w_{-1/2}^\dagger(\tilde{k}) + \hat{w}_{-1/2}(\tilde{k}) \hat{w}_{-1/2}^\dagger(\tilde{k}) \\
&= \frac{1}{16} (1 - \gamma_5) (\gamma_1 + i\gamma_2) [(1 - \gamma_5) (\gamma_1 + i\gamma_2)]^\dagger + \frac{1}{16} (1 - \gamma_5) (\gamma_0 - \gamma_3) [(1 - \gamma_5) (\gamma_0 - \gamma_3)]^\dagger \\
&= \frac{1}{16} (1 - \gamma_5) (4 - 2\gamma_3\gamma_0 + 2i\gamma_1\gamma_2) (1 - \gamma_5) \\
&= \frac{1}{8} (1 - \gamma_5) (2 - \gamma_3\gamma_0 - i\gamma_0\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_3) (1 - \gamma_5) = \frac{1}{8} (1 - \gamma_5) [2 - (1 - \gamma_5) \gamma_3\gamma_0] (1 - \gamma_5) \\
&= \frac{1}{8} (1 - \gamma_5) [2(1 - \gamma_5) - 2(1 - \gamma_5) \gamma_3\gamma_0] = \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) (1 - \gamma_3\gamma_0)
\end{aligned}$$

Así pues, se han obtenido los resultados

$$\sum_{r=1}^2 w_r(k) w_r^\dagger(k) = \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) (1 + \gamma_3\gamma_0) \quad (3.1)$$

$$\sum_{r=1}^2 w_r(\tilde{k}) w_r^\dagger(\tilde{k}) = \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) (1 - \gamma_3\gamma_0) \quad (3.2)$$

los cuales, por lo mencionado en el primer párrafo, son independientes del signo de la energía considerado, y donde $r = 1, 2$ corresponde al sabor $\pm 1/2$ respectivamente.

3.2. Operadores de proyección

El operador $P_- = \frac{1}{2} (1 - \gamma_5)$, que corresponde a soluciones de quiralidad negativa, junto con $P_+ = \frac{1}{2} (1 + \gamma_5)$ para quiralidad positiva, son operadores de proyección con las siguientes propiedades

$$\begin{aligned}
P_\pm^2 &= P_\pm \\
P_+ + P_- &= 1 \\
P_+ P_- &= 0 \\
\text{tr} P_\pm &= 2
\end{aligned} \quad (3.3)$$

Las primeras tres propiedades son esenciales para todo operador de proyección bien definido, y corresponden respectivamente a las condiciones de idempotencia, completéz y ortogonalidad. Si ahora se definen los operadores

$$\Sigma_\pm = \frac{1}{2} (1 \pm \gamma_3\gamma_0) \quad (3.4)$$

es fácil comprobar que cumplen con las propiedades (3.3). De igual forma, un cálculo directo conduce a la relación de conmutación

$$[P_{\pm}, \Sigma_{\pm}] = 0 \quad (3.5)$$

Con la finalidad de mostrar la relevancia de (3.4) se aplica el operador $i\gamma_0\gamma^\mu\partial_\mu$ a las soluciones $\Psi_k(x)$ dadas por (1.28), correspondientes a estados de energía positiva y propagación a lo largo del eje $\hat{\mathbf{k}}$

$$\begin{aligned} i\gamma_0\gamma^\mu\partial_\mu\Psi_k^{(+)}(x) &= i\gamma_0\gamma^\mu\partial_\mu w_k e^{-ik_0t} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \\ &= i\gamma_0(-ik_0\gamma_0 + i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\gamma}) w_k e^{-ikx} \\ &= \gamma_0(k_0\gamma_0 - \mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\gamma}) w_k e^{-ikx} \\ &= \gamma_0 \not{k} w_k e^{-ikx} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Debido a que las soluciones (1.28) satisfacen la ecuación de Dirac sin masa $i\gamma^\mu\partial_\mu\Psi_k^{(+)}(x) = 0$, se sigue entonces de (3.6) la ecuación estacionaria

$$\not{k} w_k = 0 \quad (3.7)$$

cuya adjunta es

$$w_k^\dagger \gamma_0 \not{k} = 0 \quad (3.8)$$

Ambas ecuaciones se pueden reescribir de la forma

$$k_0\gamma_0 w_k = \mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\gamma} w_k \quad (3.9)$$

$$w_k^\dagger k_0\gamma_0 = -w_k^\dagger \mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\gamma} \quad (3.10)$$

Multiplicando (3.7) por (3.8), y empleando (3.9) junto con (3.10), se obtiene

$$\begin{aligned} (k_0\gamma_0 w_k - \mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\gamma} w_k) (w_k^\dagger k_0\gamma_0 + w_k^\dagger \mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\gamma}) &= 0 \\ \Rightarrow 2\gamma_0 k_0\gamma_0 w_k w_k^\dagger k_0\gamma_0 &= (\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\gamma} w_k w_k^\dagger + k_0\gamma_0 w_k w_k^\dagger) k_0\gamma_0 \\ \Rightarrow 2k_0\gamma_0 w_k w_k^\dagger &= (k_0\gamma_0 + \mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\gamma}) w_k w_k^\dagger \\ \Rightarrow \gamma_0 w_k w_k^\dagger &= \frac{1}{2k_0} (k_0\gamma_0 + \mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\gamma}) w_k w_k^\dagger \\ \Rightarrow w_k w_k^\dagger &= \frac{\not{k}}{2k_0} \gamma_0 w_k w_k^\dagger \end{aligned} \quad (3.11)$$

De acuerdo con este resultado, y puesto que $k_0 = E_k$, se define el operador de proyección sobre los estados w_k

$$\Lambda_+ = \frac{\not{k}\gamma_0}{2E_k} \quad (3.12)$$

Por otro lado, aplicando el operador $i\gamma_0\gamma^\mu\partial_\mu$ a las soluciones con propagación a lo largo del eje $-\hat{\mathbf{k}}$, manteniendo energía positiva pero sustituyendo $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$ en el exponente, se tiene

$$\begin{aligned} i\gamma_0\gamma^\mu\partial_\mu\Psi_k^{(-)}(x) &= i\gamma_0\gamma^\mu\partial_\mu w_{\bar{k}} e^{-ik_0t} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \\ &= -i\gamma_0 (ik_0\gamma_0 + i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\gamma}) w_{\bar{k}} e^{ikx} \\ &= \not{k}\gamma_0 w_{\bar{k}} e^{ikx} \end{aligned} \quad (3.13)$$

expresión que conduce a las ecuaciones estacionarias

$$\not{k}\gamma_0 w_{\bar{k}} = 0 \quad (3.14)$$

$$w_{\bar{k}}^\dagger \not{k} = 0 \quad (3.15)$$

de las cuales se siguen

$$k_0\gamma_0 w_{\bar{k}} = -\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\gamma} w_{\bar{k}} \quad (3.16)$$

$$w_{\bar{k}}^\dagger k_0\gamma_0 = w_{\bar{k}}^\dagger \mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\gamma} \quad (3.17)$$

Entonces, siguiendo un procedimiento análogo a (3.11), se llega a

$$\begin{aligned} (k_0\gamma_0 w_{\bar{k}} + \mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\gamma} w_{\bar{k}}) (w_{\bar{k}}^\dagger k_0\gamma_0 - w_{\bar{k}}^\dagger \mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\gamma}) &= 0 \\ \Rightarrow -2k_0\gamma_0 w_{\bar{k}} w_{\bar{k}}^\dagger k_0\gamma_0 &= (\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\gamma} w_{\bar{k}} w_{\bar{k}}^\dagger - k_0\gamma_0 w_{\bar{k}} w_{\bar{k}}^\dagger) k_0\gamma_0 \\ \Rightarrow 2k_0\gamma_0 w_{\bar{k}} w_{\bar{k}}^\dagger &= (k_0\gamma_0 - \mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\gamma}) w_{\bar{k}} w_{\bar{k}}^\dagger \\ \Rightarrow \gamma_0 w_{\bar{k}} w_{\bar{k}}^\dagger &= \frac{1}{2k_0} (k_0\gamma_0 - \mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\gamma}) w_{\bar{k}} w_{\bar{k}}^\dagger \\ \Rightarrow w_{\bar{k}} w_{\bar{k}}^\dagger &= \gamma_0 \frac{\not{k}}{2k_0} w_{\bar{k}} w_{\bar{k}}^\dagger \end{aligned} \quad (3.18)$$

resultado que sugiere la siguiente definición para el operador de proyección sobre los estados $w_{\bar{k}}$

$$\Lambda_- = \frac{\gamma_0 \not{k}}{2E_k} \quad (3.19)$$

Los operadores Λ_+ y Λ_- proyectan sobre estados de polarización definidos, y a partir de las expresiones (3.12) y (3.19) es posible mostrar directamente que satisfacen las propiedades correctas para operadores de proyección

$$\begin{aligned}\Lambda_{\pm}^2 &= \Lambda_{\pm} \\ \text{tr} \Lambda_{\pm} &= 2 \\ \Lambda_+ + \Lambda_- &= 1 \\ \Lambda_+ \Lambda_- &= 0\end{aligned}\quad (3.20)$$

Empleando la forma explícita de las matrices gama en la representación de Dirac (Apéndice A), se obtienen las representaciones matriciales de (3.12) y de (3.19)

$$\Lambda_+ = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}}{k_0} \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}}{k_0} & 1 \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

$$\Lambda_- = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}}{k_0} \\ -\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}}{k_0} & 1 \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

Para el caso específico de propagación a lo largo del eje $\hat{\mathbf{z}}$, $\mathbf{k} = (0, 0, k_z)$ y en consecuencia (3.21) se reduce a

$$\Lambda_+ = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sigma^3 k_z}{k_0} \\ \frac{\sigma^3 k_z}{k_0} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

donde se ha empleado la relación relativista para masa cero $k_0^2 = E_k^2 = \mathbf{k}^2$, de la cual se desprende $k_0 = E_k = \|\mathbf{k}\| = |k_z| = k_z$.

Por otro lado, usando la misma representación de Dirac, la forma explícita del operador Σ_+ , definido por (3.4), es

$$\Sigma_+ = \frac{1}{2} (1 + \gamma_3 \gamma_0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

entonces, de (3.23) y (3.24) se concluye

$$\Lambda_+ = \Sigma_+ = \frac{1}{2} (1 + \gamma_3 \gamma_0) \quad (3.25)$$

Pasando al caso de propagación a lo largo de $-\hat{z}$, el vector \mathbf{k} es ahora $\mathbf{k} = (0, 0, -k_z)$, y la relación $k_0 = E_k = \|\mathbf{k}\| = |k_z| = k_z$ permanece válida, por lo que (3.22) se simplifica a

$$\Lambda_- = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\sigma^3 k_z}{k_0} \\ -\frac{\sigma^3 k_z}{k_0} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

Comparando (3.26) con la forma explícita del operador Σ_-

$$\Sigma_- = \frac{1}{2} (1 - \gamma_3 \gamma_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

se llega a la conclusión

$$\Lambda_- = \Sigma_- = \frac{1}{2} (1 - \gamma_3 \gamma_0) \quad (3.28)$$

Estos resultados muestran que Λ_{\pm} toman las formas simples (3.25) y (3.28) para polarización a lo largo de $\pm\hat{z}$, respectivamente, por lo que finalmente se puede establecer una relación entre los operadores de proyección y las sumas (3.1) y (3.2)

$$\sum_{r=1}^2 w_r(\mathbf{k}) w_r^\dagger(\mathbf{k}) = \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) (1 + \gamma_3 \gamma_0) = (1 - \gamma_5) \Lambda_+ \quad (3.29)$$

$$\sum_{r=1}^2 w_r(\tilde{\mathbf{k}}) w_r^\dagger(\tilde{\mathbf{k}}) = \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) (1 - \gamma_3 \gamma_0) = (1 - \gamma_5) \Lambda_- \quad (3.30)$$

Para el caso más general, con el vector \mathbf{k} apuntando en una dirección arbitraria, se tiene entonces

$$\sum_{r=1}^2 w_r(\mathbf{k}) w_r^\dagger(\mathbf{k}) = (1 - \gamma_5) \Lambda_+ = (1 - \gamma_5) \frac{\not{k} \gamma_0}{2E_k} \quad (3.31)$$

$$\sum_{r=1}^2 w_r(\tilde{\mathbf{k}}) w_r^\dagger(\tilde{\mathbf{k}}) = (1 - \gamma_5) \Lambda_- = (1 - \gamma_5) \frac{\gamma_0 \not{k}}{2E_k} \quad (3.32)$$

3.3. El propagador en el espacio de momentos

Para que el propagador sea una función de Green de la ecuación (1.24), se debe satisfacer la relación

$$(1 - \gamma_5) i \gamma_0 \not{\partial} S_F(x' - x) = (1 - \gamma_5) \gamma_0 \delta^4(x' - x) \quad (3.33)$$

y una ecuación similar para la proyección sobre $(1 + \gamma_5)$, por lo que sumando ambas proyecciones se tiene

$$i \not{\partial} S_F(x' - x) = \delta^4(x' - x) \quad (3.34)$$

La transformación correspondiente al espacio de momentos da por resultado

$$S_F(x' - x) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x'-x)} S_F(k) \quad (3.35)$$

Sustituyendo (3.35) en (3.34) junto con la representación de Fourier de la delta se obtiene

$$\not{k} S_F(k) = 1 \quad (3.36)$$

de donde, empleando (2.7), se sigue directamente la expresión para el propagador sin masa en el espacio de momentos

$$S_F(k) = \frac{\not{k}}{k^2} \quad (3.37)$$

La ecuación (3.37) permite reescribir (3.35) como

$$S_F(x' - x) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\not{k}}{k_0^2 - \mathbf{k}^2} e^{-ik(x'-x)} \quad (3.38)$$

Nuevamente aparece aquí el problema de manejar la singularidad en el denominador de (3.38), la cual no es otra cosa que la condición para la capa de energía $k_0^2 = E_k^2 = \mathbf{k}^2$. Retomando la discusión de la sección 3.2 es posible asegurar la correcta aplicación de las condiciones de causalidad, realizando la integración de k_0 a lo largo del contorno señalado en la figura 2.4 (la evaluación explícita de las integrales se muestra en la siguiente sección), esto para el caso $t' > t$

$$\begin{aligned} \int_{C_F} \frac{dk_0}{2\pi} e^{-ik_0(t'-t)} \frac{k\gamma_0}{k_0^2 - \mathbf{k}^2} &= \int_{C_F+C_1} \frac{dk_0}{2\pi} e^{-ik_0(t'-t)} \frac{(k_0\gamma^0 + k_i\gamma^i)}{(k_0 - E_k)(k_0 + E_k)} \\ &= -2\pi i e^{-iE_k(t'-t)} \frac{(E_k\gamma^0 - \mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\gamma})}{4\pi E_k} \end{aligned} \quad (3.39)$$

En consecuencia (3.38) cambia a

$$\begin{aligned} S_F(x' - x) &= -i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}' - \mathbf{x})} e^{-iE_k(t' - t)} \\ &\quad \times \frac{(E_k\gamma^0 - \mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\gamma})}{2E_k} \quad \text{para } t' > t \end{aligned} \quad (3.40)$$

De forma similar, para el polo de energía negativa

$$\begin{aligned} \int_{C_F} \frac{dk_0}{2\pi} e^{-ik_0(t'-t)} \frac{k\gamma_0}{k_0^2 - \mathbf{k}^2} &= \int_{C_F+C_2} \frac{dk_0}{2\pi} e^{-ik_0(t'-t)} \frac{(k_0\gamma^0 + k_i\gamma^i)\gamma_0}{(k_0 - E_k)(k_0 + E_k)} \\ &= 2\pi i e^{iE_k(t'-t)} \frac{(-E_k\gamma^0 - \mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\gamma})}{-4\pi E_k} \end{aligned} \quad (3.41)$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} S_F(x' - x) &= -i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}' - \mathbf{x})} e^{iE_k(t' - t)} \\ &\quad \times \frac{(-E_k\gamma^0 - \mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\gamma})}{2E_k} \quad \text{para } t' < t \end{aligned} \quad (3.42)$$

Aunque se está considerando el régimen de masa nula, también es posible aplicar en (3.38) la prescripción $+i\varepsilon$ que garantiza el contorno de integración adecuado

$$S_F(x' - x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k}{k^2 + i\varepsilon} e^{-ik(x' - x)} \quad (3.43)$$

Es decir, la *masa compleja* de la descripción estándar tiene ahora solamente la parte imaginaria ε . Utilizando las propiedades de la función escalón se pueden reescribir (3.40) y (3.42) en una sola expresión. Además, puesto que la integral sobre el momento vectorial incluye todas las direcciones permisibles, es válido cambiar \mathbf{k} por $-\mathbf{k}$ en (3.42) sin alterar el resultado. La finalidad de lo anterior se verá en seguida. Entonces

$$\begin{aligned} S_F(x' - x) &= -i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ e^{-iE_k(t' - t)} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}' - \mathbf{x})} \right. \\ &\quad \times \frac{(E_k\gamma^0 - \mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\gamma})}{2E_k} \theta(t' - t) \\ &\quad + e^{iE_k(t' - t)} e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}' - \mathbf{x})} \\ &\quad \left. \times \frac{(-E_k\gamma^0 + \mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\gamma})}{2E_k} \theta(t - t') \right\} \end{aligned} \quad (3.44)$$

Recordando que $t' - t < 0$ y que $k_0 = -E_k = -\sqrt{\mathbf{k}^2}$ para la parte de energía negativa, la dependencia en las coordenadas mostrada en el tercer renglón de (3.44) se reescribe como

$$\begin{aligned} iE_k(t' - t) - i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x}) &= i(-E_k, -\mathbf{k})(-(t' - t), \mathbf{x}' - \mathbf{x}) \\ &= i(k_0, -\mathbf{k})(-(t' - t), \mathbf{x}' - \mathbf{x}) \\ &= ik_\mu(x' - x)^\mu = ik(x' - x) \end{aligned} \quad (3.45)$$

por lo que (3.44) cambia a

$$\begin{aligned} S_F(x' - x) &= -i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ e^{-ik(x' - x)} \right. \\ &\quad \times \frac{(k_0 \gamma_0 - \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\gamma})}{2k_0} \theta(t' - t) \\ &\quad \left. + e^{ik(x' - x)} \right. \\ &\quad \left. \times \frac{(k_0 \gamma_0 + \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\gamma})}{2k_0} \theta(t - t') \right\} \end{aligned} \quad (3.46)$$

Multiplicando (3.46) por γ_0 por la derecha, y sustituyendo (3.12) junto con (3.19), se llega a una expresión para el propagador extendido sin masa en términos de los operadores de proyección sobre estados de polarización

$$iS_F(x' - x)\gamma^0 = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ \Lambda_+ e^{-ik(x' - x)} \theta(t' - t) + \Lambda_- e^{ik(x' - x)} \theta(t - t') \right\} \quad (3.47)$$

Finalmente, multiplicando (3.47) por $(1 - \gamma_5)$ por la izquierda, y haciendo uso de (3.31) y (3.32), se tiene

$$\begin{aligned} i(1 - \gamma_5) S_F(x' - x)\gamma^0 &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ (1 - \gamma_5) \Lambda_+ e^{-ik(x' - x)} \theta(t' - t) + (1 - \gamma_5) \Lambda_- e^{ik(x' - x)} \theta(t - t') \right\} \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ \sum_r w_r(k) w_r^\dagger(k) e^{-ik(x' - x)} \theta(t' - t) + \sum_r w_r(\tilde{k}) w_r^\dagger(\tilde{k}) \theta(t - t') \right\} \\ &= \theta(t' - t) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_r w_r(k) w_r^\dagger(k) e^{-ik(x' - x)} \\ &\quad + \theta(t - t') \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_r w_r(\tilde{k}) w_r^\dagger(\tilde{k}) e^{ik(x' - x)} \end{aligned} \quad (3.48)$$

ecuación que proporciona la descomposición del propagador en términos de ondas planas.

3.4. Forma explícita del propagador en el espacio de configuración

El punto de partida para calcular explícitamente el propagador es la ecuación (3.43), la cual se simplifica factorizando el operador de Dirac fuera de la integral

$$\begin{aligned}
 S_F(x) &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k}{k^2 + i\epsilon} e^{-ikx} \\
 &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i\partial_\mu \gamma^\mu}{k^2 + i\epsilon} e^{-ikx} \\
 &= i\partial_\mu \gamma^\mu \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ikx}}{k_0^2 - \mathbf{k}^2 + i\epsilon} \\
 &= i\partial_\mu \gamma^\mu \Delta_F(x)
 \end{aligned} \tag{3.49}$$

donde se ha definido

$$\Delta_F(x) \equiv \int_{C_F} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ikx}}{k_0^2 - \mathbf{k}^2 + i\epsilon} = \int_{C_F} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ikx}}{k_0^2 - \mathbf{k}^2} \tag{3.50}$$

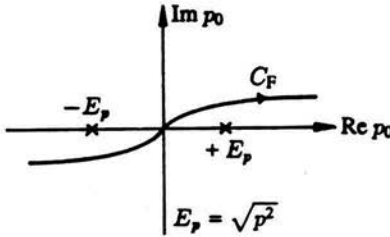


Figura 3.1: Contorno de integración para Δ_F

C_F corresponde al contorno de integración mostrado en la figura 3.1. De igual forma a lo mencionado en la sección 4.2, la integral sobre k_0 en (3.50) se calcula usando el teorema del residuo, el cual determina los valores de integrales realizadas sobre contornos cerrados en el plano complejo. Puesto que el integrando lleva un factor $\exp(-ik_0 x_0 + ik \cdot \mathbf{x})$, es claro que para $x_0 > 0$ se anula asintóticamente para $|k_0|$ grandes en el semi-plano inferior. Así pues, para $x_0 > 0$, se puede añadir un semicírculo infinito al contorno

C_F en el semi-plano inferior sin afectar el valor de la integral. Debido a que el integrando es regular en todos lados excepto en los dos polos, el camino de integración puede ser contraído al contorno C^+ , el cual encierra al punto $k_0 = +E_k$, como se muestra en la figura 3.2

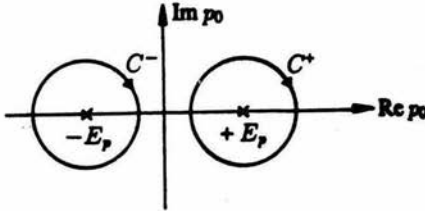


Figura 3.2: Contracción del contorno C_F

Análogamente, para $x_0 < 0$ el contorno C_F necesita cerrarse en el semi-plano superior, por lo que se integra a lo largo del contorno $-C^-$ (la dirección de integración es esencial). De esta forma se tiene

$$\Delta_F(x) = \Theta(x_0) \Delta_F^+(x) - \Theta(-x_0) \Delta_F^-(x) \quad (3.51)$$

donde

$$\Delta_F^\pm(x) = \oint_{C^\pm} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ikx}}{k_0^2 - \mathbf{k}^2} \quad (3.52)$$

Se procede reescribiendo el denominador en (3.52) como

$$\frac{1}{k_0^2 - \mathbf{k}^2} = \frac{1}{2E_k} \left(\frac{1}{k_0 - E_k} - \frac{1}{k_0 + E_k} \right) \quad (3.53)$$

con $E_k = +\sqrt{\mathbf{k}^2}$, para aislar los dos polos y obtener

$$\begin{aligned} \Delta_F^\pm(x) &= \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \frac{1}{2E_k} \oint \frac{dk_0}{2\pi} e^{-ik_0 x_0} \left(\frac{1}{k_0 - E_k} - \frac{1}{k_0 + E_k} \right) \\ &= \mp \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_k} \exp[-i(\pm E_k x_0 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})] \end{aligned} \quad (3.54)$$

Con este resultado se pueden combinar las dos contribuciones en (3.51) dentro de una sola expresión

$$\Delta_F(x) = -i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_k} \exp(-iE_k |x_0| + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \quad (3.55)$$

Para evaluar esta integral tridimensional se emplean coordenadas polares esféricas, de esta forma las integrales angulares son inmediatas. Entonces, escribiendo $|\mathbf{k}| = k$ y $|\mathbf{x}| = x$ se tiene

$$\begin{aligned} \Delta_F(x) &= -\frac{i}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk \int_{-1}^{+1} d\cos\theta \int d\phi \frac{k^2}{2E_k} \exp(-iE_k |x_0| + ikr\cos\theta) \\ &= -\frac{i}{(2\pi)^3} 2\pi \int_0^\infty dk \frac{k^2}{2E_k} \frac{1}{ikr} \exp(-iE_k |x_0|) [\exp(ikr) - \exp(-ikr)] \\ &= -\frac{1}{8\pi^2 r} \int_0^\infty dk \frac{k}{E_k} \exp(-iE_k |x_0|) [\exp(ikr) - \exp(-ikr)] \end{aligned} \quad (3.56)$$

El cálculo de la integral resultante en (3.56) depende del tamaño relativo de los argumentos de espacio y tiempo, $|x_0|$ y r . El caso cuando la separación es de tipo luz, es decir $|x_0| = r$, tiene que tratarse de forma especial puesto que para valores grandes de k el integrando se aproxima a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{E_k} \exp(-iE_k r) [\exp(ikr) - \exp(-ikr)] = \lim_{k \rightarrow \infty} [1 - \exp(-2ikr)] \quad (3.57)$$

El primer término en (3.57) se aproxima a una constante, provocando que la integral (3.56) diverja. Reemplazando E_k por k y tomando el límite $x_0 \rightarrow r$ en (3.57) se obtiene

$$\begin{aligned} \Delta_F(x)|_{x_0 \rightarrow r} &\simeq -\frac{1}{8\pi^2 r} \int_0^\infty dk \{ \exp[-ik(|x_0| - r)] - \exp[-ik(|x_0| + r)] \} \\ &\simeq -\frac{1}{8\pi^2 r} \left(\frac{1}{2} 2\pi \delta(|x_0| - r) - \frac{1}{2} 2\pi \delta(|x_0| + r) \right) \\ &= -\frac{1}{4\pi} \delta(x_0^2 - r^2) \end{aligned} \quad (3.58)$$

Para el cálculo de (3.58) únicamente se ha tomado en cuenta la contribución de la función delta. Con la finalidad de obtener la contribución para los casos $|x_0| \neq r$ se hace notar primero que la función de Green para el operador \square , en el espacio de coordenadas, está dada por [9, 12]

$$G(x^2) = -\frac{i}{4\pi^2 x^2} \quad \text{para } |x_0| \neq r \quad (3.59)$$

es decir, G satisface la ecuación

$$\square G(x^2) = \delta(x^2) \quad (3.60)$$

Tomando la transformada de Fourier de G

$$G(x^2) = \int G(k^2) \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ikx} \quad (3.61)$$

y sustituyendo en (3.60) junto con la representación de Fourier para $\delta(x^2)$ y \square se obtiene

$$-k^2 \int G(k^2) \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ikx} = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ikx} \quad (3.62)$$

de donde se sigue

$$G(k^2) = -\frac{1}{k^2} \quad (3.63)$$

Reemplazando (3.63) en (3.61) e igualando con (3.59) se llega al resultado

$$\frac{i}{4\pi^2 x^2} = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ikx}}{k^2} \quad (3.64)$$

La integral en (3.64) es justamente la integral que aparece en (3.50) sin la prescripción $i\epsilon$, por lo que la contribución buscada para los casos $|x_0| \neq r$, ya sea que $|x_0| > r$ o $|x_0| < r$, es simplemente $\frac{i}{4\pi^2 x^2}$. Formalmente

$$\Delta_F(x)|_{x_0 \neq r} = \frac{i}{4\pi^2 x^2} \quad (3.65)$$

Sumando (3.58) y (3.66) se tiene entonces

$$\begin{aligned} \Delta_F(x) &= -\frac{1}{4\pi} \delta(x_0^2 - r^2) + \frac{i}{4\pi^2 x^2} \\ &= \frac{i}{4\pi^2} \left(\frac{1}{x^2} + i\pi \delta(x^2) \right) \\ &= \frac{i}{4\pi^2} \frac{1}{x^2 - i\epsilon} \end{aligned} \quad (3.66)$$

donde en la última línea se ha usado la bien conocida identidad

$$\frac{1}{x \pm \epsilon} = P \frac{1}{x} \mp i\pi \epsilon \quad (3.67)$$

Sustituyendo (3.66) en (3.49) se llega finalmente a la forma explícita del propagador en el espacio de coordenadas

$$S_F(x) = i\partial_\mu \gamma^\mu \frac{i}{4\pi^2} \frac{1}{x^2 - i\epsilon} \quad (3.68)$$

Capítulo 4

Propagador Fotónico Estándar

4.1. Invariancia de Norma

Si se quiere calcular el propagador en el espacio de momentos para la ecuación de onda del fotón, siguiendo para ello el método general aplicado en los capítulos anteriores, se encuentra inmediatamente una dificultad insuperable: no es posible obtener tal propagador. Para verificar dicha afirmación partimos de la ecuación covariante para los potenciales [8]

$$\square A^\mu - \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu) = j^\mu \quad (4.1)$$

la cual se reescribe como

$$(g^{\nu\lambda} \square - \partial^\nu \partial^\lambda) A_\lambda = j^\nu \quad (4.2)$$

En la representación de momentos el operador que actúa en el lado izquierdo de (4.2) se transforma a

$$-g^{\nu\lambda} q^2 + q^\nu q^\lambda \quad (4.3)$$

Esencialmente lo que se quiere es encontrar el inverso de (4.3), de manera que sea posible despejar la expresión para la amplitud después de realizar la transformación de Fourier correspondiente en (4.2). Este procedimiento asegura la evaluación correcta de la función de Green para el operador diferencial como se ha visto anteriormente. Suponiendo la existencia de dicho inverso, se puede escribir de manera general como

$$Aq^2 g_{\mu\nu} + Bq_\mu q_\nu \quad (4.4)$$

donde A y B son funciones arbitrarias de q^2 . Entonces, al aplicar (4.4) a (4.3) se obtiene

$$(Aq^2 g_{\mu\nu} + Bq_\mu q_\nu) (-g^{\nu\lambda} q^2 + q^\nu q^\lambda) = Aq^2 (-q^2 \delta_\mu^\lambda + q_\mu q^\lambda) \quad (4.5)$$

expresión que únicamente depende de A , y de la forma de (4.5) se concluye que no es posible elegir A de tal forma que el producto de (4.4) por su inverso resulte en δ_μ^λ , como se esperaría si la suposición inicial fuera correcta. Por lo tanto, sin importar la forma que tomen las funciones A y B , no puede construirse un inverso para el operador (4.4). Dicho resultado obedece, en esencia, a la libertad de norma asociada al campo electromagnético. Recordando que el campo queda invariante bajo la transformación [6, 8]

$$A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \chi \quad (4.6)$$

es necesario en consecuencia fijar dicha condición antes de intentar la construcción del propagador. Puesto que se tiene la libertad de escoger la norma más conveniente en la realización de los cálculos, de aquí en adelante se trabajará en la *norma de Lorentz*

$$\partial_\mu A^\mu(x) = 0 \quad (4.7)$$

De acuerdo con (4.7) la ecuación (4.1) se simplifica a

$$\square A^\mu = j^\mu \quad (4.8)$$

Como es natural, la solución de (4.8) puede obtenerse mediante la función de Green correspondiente, la cual, para el caso cuántico estudiado aquí, constituye el propagador de Feynman para el campo electromagnético. Dicho propagador se denotará con el símbolo D_F siguiendo la convención usual.

4.2. El Propagador fotónico en el espacio de momentos

Al igual que en el caso del electrón, el propagador asociado al fotón debe cumplir el requisito de ser una función de Green para el operador en (4.8). Entonces, en ausencia de fuentes

$$\square D_F(x - y) = \delta^4(x - y) \quad (4.9)$$

La transformada de Fourier de (4.9) es

$$D_F(x - y) = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} e^{-iq(x-y)} D_F(q^2) \quad (4.10)$$

Usando

$$\delta^4(x' - x) = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} e^{-iq(x-y)} \quad (4.11)$$

se obtiene inmediatamente

$$D_F(q^2) = -\frac{1}{q^2} \quad (4.12)$$

Una vez más hay que tener cuidado al evaluar el polo en $q^2 = 0$. Siguiendo la discusión de los capítulos anteriores, se aseguran las condiciones a la frontera correctas proporcionándole al fotón una pequeña *masa imaginaria* positiva.

$$D_F(q^2) = -\frac{1}{q^2 + i\varepsilon} \quad (4.13)$$

Esta receta para tratar al polo garantiza el principio de causalidad. Los fotones con frecuencia positiva solamente pueden propagarse hacia adelante en el tiempo. Las contribuciones al campo A^μ que tengan frecuencia negativa se moverán hacia atrás en el tiempo. Puesto que el fotón, en contraste con el electrón, no tiene carga y es su propia antipartícula, estos dos procesos son físicamente idénticos, por lo que no hay necesidad de hablar de fotones con energía negativa. Para obtener la descripción completa se sustituye (4.13) en (4.10)

$$D_F(x - y) = - \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} e^{iq \cdot (x-y)} \int \frac{dq_0}{2\pi} \frac{e^{-iq_0(x_0-y_0)}}{q_0^2 - \mathbf{q}^2 + i\varepsilon} \quad (4.14)$$

De acuerdo con la figura 4.1, el camino de integración en el plano q_0 complejo tiene que cerrarse en el semi-plano inferior para $x_0 > y_0$, lo que da una contribución en $q_0 = +|\mathbf{q}|$. Este resultado establece simplemente que únicamente las ondas con energía positiva ($q_0 > 0$) se mueven hacia el futuro, de y_0 a x_0 . Análogamente, para $y_0 > x_0$ el polo en $q_0 = -|\mathbf{q}|$ contribuye al propagador y puede interpretarse como un fotón de energía positiva ($-q_0 > 0$) moviéndose de x_0 a y_0 . Finalmente, en términos del propagador, la solución de (4.8) es

$$A^\mu(x) = \int d^4y D_F(x-y) j^\mu(y) \quad (4.15)$$

4.3. Teoría Cuántica de Campos

Hasta aquí se han derivado resultados para los propagadores dentro del marco de trabajo de la teoría de agujeros de Dirac y la interpretación que Feynman hace de ella. Esto constituye una primera aproximación a la electrodinámica cuántica pero existe al menos otra forma de derivar dichos resultados, matemáticamente más rigurosa y conceptualmente más adecuada, conocida como Teoría Cuántica de Campos (QFT por sus siglas en inglés). Las objeciones principales a la teoría de agujeros fueron ya explicadas brevemente en la sección 2.1.

Considerando entonces que los sistemas físicos estudiados por la Electrodinámica Cuántica pueden tener un número infinito de grados de libertad, lo que hace necesario recurrir a la interpretación de campos, y sin entrar en antecedentes formales ni conceptuales de la teoría, simplemente se establecen aquí las reglas de conmutación para tiempos iguales (RCTI) que deben satisfacer los campos dentro del esquema canónico de cuantización [7, 6]. Dichas reglas se obtendrán de manera heurística en la siguiente sección.

$$[A_\mu(t, \mathbf{x}), A_\nu(t, \mathbf{y})] = [\dot{A}_\mu(t, \mathbf{x}), \dot{A}_\nu(t, \mathbf{y})] = 0 \quad (4.16)$$

$$[\dot{A}_\mu(t, \mathbf{x}), A_\nu(t, \mathbf{y})] = ig_{\mu\nu} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (4.17)$$

Asimismo, para analizar el campo se recurre a su expansión de Fourier en términos de soluciones de ondas planas

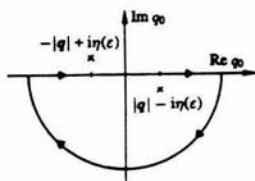


Figura 4.1: Contorno de integración para D_F

$$A_\mu(x) = \int d\tilde{q} \sum_{\lambda=0}^3 \left\{ a^{(\lambda)}(q) \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(q) e^{-iqx} + a^{(\lambda)\dagger}(q) \varepsilon_\mu^{(\lambda)*}(q) e^{iqx} \right\} \quad (4.18)$$

donde

$$d\tilde{q} = \frac{d^3q}{2q_0(2\pi)^3} \quad q_0 = |\mathbf{q}| \quad (4.19)$$

Por otro lado, los vectores de polarización cumplen con las relaciones de completéz

$$\sum_\lambda \frac{\varepsilon_\mu^{(\lambda)}(q) \varepsilon_\nu^{(\lambda)*}(q)}{\varepsilon^{(\lambda)}(q) \varepsilon^{(\lambda)*}(q)} = g_{\mu\nu} \quad (4.20)$$

$$\varepsilon^{(\lambda)}(q) \varepsilon^{(\lambda')*}(q) = g^{\lambda\lambda'} \quad (4.21)$$

Sustituyendo (4.18) en (4.17) y (4.16) se encuentran las reglas de conmutación que satisfacen los operadores a

$$\left[a^{(\lambda)}(q), a^{(\lambda')\dagger}(q) \right] = -g^{\lambda\lambda'} 2q^0 (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{q} - \mathbf{q}') \quad (4.22)$$

$$\left[a^{(\lambda)}(q), a^{(\lambda')}(q) \right] = \left[a^{(\lambda)\dagger}(q), a^{(\lambda')\dagger}(q) \right] = 0 \quad (4.23)$$

Dentro del presente formalismo el propagador se define como el valor de expectación para el vacío del producto ordenado en el tiempo. Este último se realiza a través de las funciones escalón correspondientes, las cuales multiplican a los productos de los campos asegurando así el cumplimiento de las condiciones de causalidad correctas

$$TA_\mu(x)A_\nu(y) = \theta(x^0 - y^0) A_\mu(x)A_\nu(y) + \theta(y^0 - x^0) A_\nu(y)A_\mu(x) \quad (4.24)$$

Insertando la expansión (4.18) y usando los conmutadores (4.22) y (4.23) se obtiene la expresión final para el propagador

$$\langle 0 | TA_\mu(x)A_\nu(y) | 0 \rangle = ig_{\mu\nu} D_F(x - y) = -ig_{\mu\nu} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{e^{-iq(x-y)}}{q^2 + i\varepsilon} \quad (4.25)$$

4.4. Relaciones de conmutación

El punto de partida para obtener heurísticamente las reglas de conmutación es la ecuación de onda para los campos en el vacío

$$\square A_\mu(x) = 0 \quad (4.26)$$

junto con la descomposición de Fourier de A_μ en ondas viajando a la velocidad de la luz

$$A_\mu(x) = \int \left(A_{\mu\mathbf{k}}^c e^{ikx} + A_{\mu\mathbf{k}}^{c\dagger} e^{-ikx} \right) d^3k \quad (4.27)$$

El índice c en los coeficientes de Fourier indica que son constantes en el tiempo. Cada $A_{\mu\mathbf{k}}^c$ tiene una parte $A_{0\mathbf{k}}^c$ que viene de $A_0(x)$ y una parte $A_{\mathbf{r}\mathbf{k}}^c$ $\mathbf{r} = (1, 2, 3)$ que es un vector tridimensional. Este último puede descomponerse a su vez en dos partes, una longitudinal en la dirección de \mathbf{k} , es decir, en la dirección de movimiento de las ondas, y una parte transversal, perpendicular a \mathbf{k} . Se sabe de la teoría electromagnética que únicamente la parte transversal de los campos contribuye a la radiación [8], y el estudio de la radiación dentro del formalismo cuántico no relativista lleva a obtener las siguientes reglas de conmutación para las componentes transversales[3]

$$\left[A_{1\mathbf{k}}^\dagger, A_{1\mathbf{k}} \right] = \left[A_{2\mathbf{k}}^\dagger, A_{2\mathbf{k}} \right] = -i \frac{s_{\mathbf{k}}}{4\pi^2 k_0} \quad (4.28)$$

donde $s_{\mathbf{k}}$ es la densidad de partículas y los coeficientes no son constantes en el tiempo, sino que están formados por el producto de los $A_{\mu\mathbf{k}}^c$ de (4.27) con el factor temporal $e^{ik_0 x_0}$

$$A_{\mu\mathbf{k}}^c e^{ik_0 x_0} = A_{\mu\mathbf{k}} \quad (4.29)$$

Claramente la ecuación (4.28) no es invariante ante transformaciones de Lorentz, por lo que tiene que ser extendida a un conjunto relativista, y la forma más simple de hacerlo es exigiendo que las componentes $A_{3\mathbf{k}}$ y $A_{0\mathbf{k}}$ cumplan con las relaciones

$$\left[A_{3\mathbf{k}}^\dagger, A_{3\mathbf{k}} \right] = - \left[A_{0\mathbf{k}}^\dagger, A_{0\mathbf{k}} \right] = -i \frac{s_{\mathbf{k}}}{4\pi^2 k_0} \quad (4.30)$$

Así, (4.29) y (4.30), junto con la condición de que $A_{\mu\mathbf{k}}^\dagger$ y $A_{\nu\mathbf{k}}$ conmuten para $\mu \neq \nu$ (como debe suceder pues se refieren a grados de libertad distintos), se combinan para formar la ecuación tensorial

$$\left[A_{\mu\mathbf{k}}^\dagger, A_{\nu\mathbf{k}} \right] = i \frac{g_{\mu\nu} s_{\mathbf{k}}}{4\pi^2 k_0} \quad (4.31)$$

la cual puede ser extendida a

$$\left[A_{\mu\mathbf{k}}^\dagger, A_{\nu\mathbf{k}'} \right] = i \frac{g_{\mu\nu} s_{\mathbf{k}} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}}{4\pi^2 k_0} \quad (4.32)$$

La ecuación (4.32) proporciona las reglas de conmutación para todas las variables dinámicas. El objetivo ahora es pasar de valores discretos de \mathbf{k} a valores continuos, como corresponde a la descripción de campo. Para ello se emplea la siguiente aproximación para una función arbitraria $f(\mathbf{k})$ en el espacio \mathbf{k} tridimensional, válida cuando el volumen del espacio tiende a infinito.

$$\sum_{\mathbf{k}} f(\mathbf{k}) \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = f(\mathbf{k}') = \int f(\mathbf{k}) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') d^3 k \quad (4.33)$$

Por otro lado, la relación general para pasar de valores discretos \mathbf{p}' a valores continuos, y viceversa, está dada por[3]

$$\int \int \int f(\mathbf{p}') dp'_x dp'_y dp'_z = \sum f(\mathbf{p}') s_{\mathbf{p}'}^{-1} \quad (4.34)$$

Entonces, con la finalidad de hacer que (4.33) esté en conformidad con (4.34) se debe tener

$$s_{\mathbf{k}} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (4.35)$$

Por lo tanto, la ecuación (4.32) cambia a

$$\left[A_{\mu\mathbf{k}}^\dagger, A_{\nu\mathbf{k}'} \right] = i \frac{g_{\mu\nu}}{4\pi^2 k_0} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (4.36)$$

la cual, junto con las relaciones

$$\left[A_{\mu\mathbf{k}}, A_{\nu\mathbf{k}'} \right] = \left[A_{\mu\mathbf{k}}^\dagger, A_{\nu\mathbf{k}'}^\dagger \right] = 0 \quad (4.37)$$

proveen todos los conmutadores de la teoría para valores de \mathbf{k} continuos. Nótese que estos conmutadores permanecen válidos para los coeficientes de Fourier constantes $A_{\mu\mathbf{k}}^c$ y $A_{\nu\mathbf{k}}^c$. Para establecer que la teoría es completamente relativista es necesario mostrar explícitamente que las relaciones de conmutación lo son, lo cual no es del todo evidente de la forma como están

escritas (4.36) y (4.37) en términos de componentes de Fourier. El objetivo es entonces obtener una versión relativista de las relaciones de conmutación mediante la evaluación de $[A_\mu(x), A_\nu(x')]$, con x y x' dos puntos cualesquiera en el espacio-tiempo. Para ello se empleará la función $\Delta(x)$ definida como

$$\Delta(x) = \frac{2\delta(x_\mu x^\mu) x_0}{|x_0|} \quad (4.38)$$

cuyas propiedades generales se describen en el apéndice II. Empleando (4.27), (4.36) y (4.37) se tiene

$$\begin{aligned} [A_\mu(x), A_\nu(x')] &= \int \int [A_{\mu k} e^{ikx} + A_{\mu k}^\dagger e^{-ikx}, A_{\nu k'} e^{ik'x'} + A_{\nu k'}^\dagger e^{-ik'x'}] d^3 k d^3 k' \\ &= i \frac{g_{\mu\nu}}{4\pi^2} \int \int \frac{1}{k_0} \{ e^{-ikx} e^{ik'x'} - e^{ikx} e^{-ik'x'} \} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') d^3 k d^3 k' \\ &= i \frac{g_{\mu\nu}}{4\pi^2} \int \frac{1}{k_0} \{ e^{-ik(x-x')} - e^{ik(x-x')} \} d^3 k \end{aligned} \quad (4.39)$$

Aquí k_0 está definido como $|\mathbf{k}|$ y por lo tanto siempre es positivo. Intercambiando \mathbf{k} por $-\mathbf{k}$ en la segunda parte del integrando se encuentra que (4.39) es igual a la integral

$$\begin{aligned} i \frac{g_{\mu\nu}}{4\pi^2} \int \frac{1}{|\mathbf{k}|} \{ \delta(k_0 - |\mathbf{k}|) - \delta(k_0 + |\mathbf{k}|) \} e^{-ik(x-x')} d^4 k \\ = i \frac{g_{\mu\nu}}{4\pi^2} \int \Delta(k) e^{-ik(x-x')} d^4 k \end{aligned} \quad (4.40)$$

En la cual k_0 toma todos los valores, tanto positivos como negativos, y donde se ha empleado la ecuación (B.3) del apéndice. Evaluando (4.40) con la ayuda de (B.6) se obtiene finalmente

$$[A_\mu(x), A_\nu(x')] = g_{\mu\nu} \Delta(x - x') \quad (4.41)$$

resultado que muestra la invariancia de las relaciones de conmutación bajo transformaciones de Lorentz. La ecuación (4.41) implica que los potenciales electromagnéticos, evaluados en dos puntos del espacio-tiempo, siempre conmutan a menos que el intervalo entre dichos puntos sea de tipo nulo, es decir, la trayectoria de un rayo de luz. Por otro lado, (4.41) cumple adecuadamente con la condición de satisfacer la ecuación de campo (4.26), pues al aplicar el operador \square al lado derecho resulta en cero, como se muestra en (B.8).

Finalmente, para obtener las RCTI se escribe $x'_0 = x_0$ en (4.41) lo que resulta en

$$[A_{\mu\mathbf{x}}, A_{\nu\mathbf{x}'}] = 0 \quad (4.42)$$

Diferenciando (4.41) con respecto a x_0 y haciendo después $x'_0 = x_0$ se tiene, con la ayuda de (B.10)

$$[\dot{A}_{\mu\mathbf{x}}, A_{\nu\mathbf{x}'}] = 4\pi g_{\mu\nu} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (4.43)$$

Donde $\dot{A}_\mu = \frac{\partial A_\mu}{\partial x_0}$. Diferenciando (4.41) con respecto a x_0 y x'_0 , y haciendo después $x'_0 = x_0$ se obtiene

$$[\dot{A}_{\mu\mathbf{x}}, \dot{A}_{\nu\mathbf{x}'}] = 0 \quad (4.44)$$

Las ecuaciones (4.42), (4.43) y (4.44) proporcionan las RCTI buscadas, equivalentes, aparte de constantes de normalización, a las relaciones (4.16) y (4.17) de la teoría cuántica de campos.

Capítulo 5

Conclusiones

Tomando como referencia los resultados de la teoría estándar mostrados en el apéndice C, se hace notar, como primer punto, que la normalización (1.30) para las soluciones del cuadro 1, se puede interpretar como la extensión matricial de (C.9), por lo que se tiene congruencia con el caso de masa cero estándar. Como segundo punto se tiene, comparando (C.21) y (C.22) con las ecuaciones (3.12) y (3.19) del capítulo 3, que los operadores de proyección sobre estados de polarización, dentro del modelo de espacio extendido de espín considerado, no tienen precisamente la misma forma que los operadores correspondientes para la ecuación de Dirac en el límite de masa cero, pero satisfacen las propiedades básicas de idempotencia, ortogonalidad y completez, mientras que los últimos no. La γ_0 en el caso extendido proviene del operador $(1 - \gamma_5)i\gamma_0\gamma^\mu\partial_\mu$ en (1.24), y es una consecuencia de la representación empleada. Más aún, las ecuaciones (3.29) a (3.32) establecen una importante relación, para el modelo extendido, entre las sumas sobre los estados de polarización y los operadores de proyección correspondientes. Dicha relación es análoga a la que se tiene en la teoría estándar, de acuerdo con (C.21) y (C.22).

Al nivel de los propagadores, el resultado (3.43) define correctamente al propagador extendido, y es la generalización correspondiente para el propagador de Feynman de la ecuación de Dirac sin masa, como se ve enseguida de (2.15) tomando el límite $m \rightarrow 0$. Las relaciones (3.37), (3.44) y (3.47) son asimismo congruentes con los resultados respectivos (2.9), (2.12) y (2.14) de la teoría usual, siempre dentro del límite de masa cero.

Por otro lado, la función $\Delta_F(x)$, definida en (3.50), no depende de las soluciones fermiónicas, por lo que debería producir el mismo resultado inde-

pendientemente del formalismo. Dicha función es, de hecho, el propagador de Feynman para la ecuación de Klein-Gordon sin masa [2, 7], aplicable a partículas de espín cero, por lo que también sería de esperar que $\Delta_F(x)$ estuviera relacionada de alguna forma con el propagador fotónico. Esto sucede así pues en la referencia [7] se muestra que el propagador para el fotón en el espacio de configuración, es precisamente el resultado (3.66). Lo anterior se sigue también de comparar (3.50) con los resultados de la sección 4.2, específicamente con las relaciones (4.12), (4.13) y (4.14). En consecuencia $\Delta_F(x)$ tiene la misma forma en el espacio de espín extendido que en el espacio espinorial usual de la ecuación de Dirac sin masa y, por lo tanto, no hay diferencia alguna entre la expresión explícita del propagador en el espacio de coordenadas para ambos casos.

Finalmente, es importante resaltar que todo lo mencionado en los párrafos anteriores es aplicable a los dos valores del sabor. Esto debido al hecho de que las soluciones para ambos sabores están incluidas en las sumas sobre los estados de polarización (3.1) y (3.2), y en consecuencia para los operadores de proyección, como se detalla en la sección 3.2. En consecuencia, la construcción del propagador es independiente del sabor considerado.

De esta forma se ha concluido la comparación de resultados de la Teoría de Unificación de Simetrías de Norma y Espacio-Tiempo con la Electrodinámica Cuántica, para soluciones fermiónicas de masa cero.

Apéndice A

Métrica y matrices gama

En el espacio-tiempo de 4 dimensiones se emplea la métrica

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

las matrices gama de 4×4 utilizadas en el texto se encuentran en la representación de Dirac, y se definen a partir de las matrices de Pauli σ_i , $i = 1, 2, 3$ y la matriz identidad de 2×2 1_2

$$\gamma_0 = \sigma_3 \otimes 1_2 = \begin{pmatrix} 1_2 & 0 \\ 0 & -1_2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

$$\gamma = i\sigma_2 \otimes \sigma = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ -\sigma & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

$$\gamma_5 = -i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \sigma_1 \otimes 1_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1_2 \\ 1_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

Las matrices gama cumplen con las siguientes relaciones

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \quad (\text{A.5})$$

$$\gamma_5^2 = I \quad (\text{A.6})$$

$$\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0 \quad (\text{A.7})$$

$$\gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 = \gamma^{\mu\dagger}, \quad \gamma^0 \gamma_5 \gamma^0 = -\gamma_5^\dagger = -\gamma_5 \quad (\text{A.8})$$

Apéndice B

Propiedades de la función Δ

Por definición

$$\Delta(x) = \frac{2x_0}{|x_0|} \delta(x_\mu x^\mu) \quad (\text{B.1})$$

Claramente la función $\delta(x_\mu x^\mu)$ es invariante de Lorentz. Se anula en todas partes excepto en el cono de luz con vértice en el origen, i.e. para $x_\mu x^\mu = 0$. El cono de luz está formado de dos partes, una parte futura, para la cual $x_0 > 0$, y una parte pasada, para la cual $x_0 < 0$. La función Δ toma el valor $2\delta(x_\mu x^\mu)$ en la parte futura y $-2\delta(x_\mu x^\mu)$ en la parte pasada. De acuerdo con la propiedad de la función delta

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2a} \{ \delta(x - a) + \delta(x + a) \} \quad (a > 0) \quad (\text{B.2})$$

se puede expresar $\delta(x_\mu x^\mu)$ de la siguiente forma

$$\delta(x_\mu x^\mu) = \frac{1}{2|\mathbf{x}|} \{ \delta(x - |\mathbf{x}|) + \delta(x + |\mathbf{x}|) \} \quad (\text{B.3})$$

por lo que (B.1) cambia a

$$\Delta(x) = \frac{1}{|\mathbf{x}|} \{ \delta(x - |\mathbf{x}|) + \delta(x + |\mathbf{x}|) \} \quad (\text{B.4})$$

Por definición $\Delta(x)$ tiene el valor cero en el origen, y además es una función impar $\Delta(-x) = -\Delta(x)$. Realizando la transformada inversa de Fourier de (B.4) se tiene

$$\begin{aligned} \int \Delta(x) e^{ikx} d^4x &= \int \frac{1}{|\mathbf{x}|} \{ \delta(x - |\mathbf{x}|) + \delta(x + |\mathbf{x}|) \} e^{i[k_0x_0 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})]} d^4x \\ &= \int \frac{1}{|\mathbf{x}|} \{ e^{ik_0|\mathbf{x}|} - e^{-ik_0|\mathbf{x}|} \} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d^3x \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Introduciendo las coordenadas esféricas $|\mathbf{x}|$, θ y ϕ , con la dirección de la parte tridimensional de k^μ como polo, (B.5) resulta en

$$\begin{aligned} \int \Delta(x) e^{ikx} d^4x &= \int \int \int \{ e^{ik_0|\mathbf{x}|} - e^{-ik_0|\mathbf{x}|} \} e^{-i|\mathbf{k}||\mathbf{x}|\cos\theta} |\mathbf{x}| \sin\theta d\theta d\phi d|\mathbf{x}| \\ &= 2\pi \int_0^\infty \{ e^{ik_0|\mathbf{x}|} - e^{-ik_0|\mathbf{x}|} \} d|\mathbf{x}| \int_0^\pi e^{-i|\mathbf{k}||\mathbf{x}|\cos\theta} |\mathbf{x}| \sin\theta d\theta \\ &= \frac{2\pi i}{|\mathbf{k}|} \int_{-\infty}^\infty \{ e^{ik_0|\mathbf{x}|} - e^{-ik_0|\mathbf{x}|} \} d|\mathbf{x}| \{ e^{-i|\mathbf{k}||\mathbf{x}|} - e^{i|\mathbf{k}||\mathbf{x}|} \} \\ &= \frac{2\pi i}{|\mathbf{k}|} \int_{-\infty}^\infty \{ e^{i(k_0 - |\mathbf{k}|)a} - e^{i(k_0 + |\mathbf{k}|)a} \} da \\ &= \frac{2\pi i}{|\mathbf{k}|} \{ \delta(k_0 - |\mathbf{k}|) - \delta(k_0 + |\mathbf{k}|) \} \\ &= 4\pi^2 i \Delta(k) \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

En consecuencia, la transformada inversa de Fourier produce la misma función multiplicada por el coeficiente $4\pi^2 i$. Intercambiando k y x en (B.6) se obtiene

$$\Delta(x) = \frac{-i}{4\pi^2} \int \Delta(k) e^{ikx} d^4k \quad (\text{B.7})$$

Algunas de las propiedades importantes de $\Delta(x)$ pueden deducirse fácilmente de su transformada de Fourier. En primer lugar la ecuación (B.7) muestra que $\Delta(x)$ puede escribirse en términos de ondas viajando a la velocidad de la luz. Con el propósito de obtener una ecuación para este resultado se aplica el operador \square a ambos lados de (B.7), entonces

$$\square \Delta(x) = \frac{-i}{4\pi^2} \int \Delta(k) \square e^{ikx} d^4k = \Delta(x) = \frac{i}{4\pi^2} \int k^\mu k_\mu \Delta(k) e^{ikx} d^4k \quad (\text{B.8})$$

Por otro lado, de acuerdo con la definición (B.1), $k^\mu k_\mu \Delta(k) = 0$ y por lo tanto

$$\square \Delta(x) = 0 \quad (\text{B.9})$$

Ecuación que permanece válida para todo punto del espacio-tiempo. Se le puede dar significado a $\square \Delta(x)$ en un punto donde $\Delta(x)$ sea singular tomando la integral de $\square \Delta(x)$ sobre un pequeño espacio cuadrudimensional

alrededor del punto, y transformándola a una integral de superficie tridimensional mediante el teorema de Gauss. La ecuación (B.9) nos dice que dicha integral de superficie se anula siempre.

La función $\Delta(x)$ se anula sobre toda la superficie tridimensional $x_0 = 0$, y la derivada $\partial\Delta(x)/\partial x_0$ evidentemente también se anula en todas partes excepto en el punto $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, donde tiene una singularidad que puede evaluarse como sigue. Diferenciando ambos lados de (B.7) con respecto de x_0 se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Delta(x)}{\partial x_0} &= \frac{1}{4\pi^2} \int k_0 \Delta(k) e^{ikx} d^4k \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int \frac{k_0}{|\mathbf{k}|} \{ \delta(k_0 - |\mathbf{k}|) - \delta(k_0 + |\mathbf{k}|) \} e^{ikx} d^4k \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int \{ \delta(k_0 - |\mathbf{k}|) + \delta(k_0 + |\mathbf{k}|) \} e^{ikx} d^4k \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Evaluando (B.10) para $x_0 = 0$ se obtiene finalmente

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial\Delta(x)}{\partial x_0} \right]_{x_0=0} &= \frac{1}{4\pi^2} \int \{ \delta(k_0 - |\mathbf{k}|) + \delta(k_0 + |\mathbf{k}|) \} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^4k \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^3k \\ &= 4\pi \delta(x_1) \delta(x_2) \delta(x_3) = 4\pi \delta(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Así pues la singularidad δ ordinaria, multiplicada por 4π , aparece en el punto $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Apéndice C

Operadores de Proyección

Dentro del formalismo para la ecuación de Dirac estándar, los espinores u y v , que corresponden a las soluciones de energía positiva y negativa respectivamente, satisfacen las ecuaciones[2, 7]

$$(\not{k} - m) u_{\mathbf{k}\sigma} = 0 \quad (\text{C.1})$$

$$(\not{k} + m) v_{\mathbf{k}\sigma} = 0 \quad (\text{C.2})$$

los espinores se encuentran normalizados de acuerdo con

$$\bar{u}_{\mathbf{k}\sigma} u_{\mathbf{k}\sigma'} = \delta_{\sigma\sigma'} \quad (\text{C.3})$$

$$\bar{v}_{\mathbf{k}\sigma} v_{\mathbf{k}\sigma'} = \delta_{\sigma\sigma'} \quad (\text{C.4})$$

donde los adjuntos de Dirac, definidos de la forma usual $\bar{u} = u^\dagger \gamma_0$, $\bar{v} = v^\dagger \gamma_0$, cumplen a su vez con las relaciones

$$\bar{u}_{\mathbf{k}\sigma} (\not{k} - m) = 0 \quad (\text{C.5})$$

$$\bar{v}_{\mathbf{k}\sigma} (\not{k} + m) = 0 \quad (\text{C.6})$$

A partir de estas expresiones, es posible obtener los operadores de proyección correspondientes sobre estados de energía positiva y negativa[2, 7]

$$P_+ = \sum_{\sigma} u_{\mathbf{k}\sigma} \bar{u}_{\mathbf{k}\sigma} = \frac{\not{k} + m}{2m} \quad (\text{C.7})$$

$$P_- = - \sum_{\sigma} v_{\mathbf{k}\sigma} \bar{v}_{\mathbf{k}\sigma} = \frac{-\not{k} + m}{2m} \quad (\text{C.8})$$

Ahora bien, si en lugar de normalizar los espinores como se muestra en (C.3) y (C.4), se escoge la normalización

$$u_{\mathbf{k}\sigma}^{\dagger} u_{\mathbf{k}\sigma'} = v_{\mathbf{k}\sigma}^{\dagger} v_{\mathbf{k}\sigma'} = \delta_{\sigma\sigma'} \quad (\text{C.9})$$

entonces los operadores de proyección (C.7) y (C.8) cambian a

$$P_+ = \sum_{\sigma} u_{\mathbf{k}\sigma} \bar{u}_{\mathbf{k}\sigma} = \frac{\not{k} + m}{2E_{\mathbf{k}}} \quad (\text{C.10})$$

$$P_- = - \sum_{\sigma} v_{\mathbf{k}\sigma} \bar{v}_{\mathbf{k}\sigma} = \frac{-\not{k} + m}{2E_{\mathbf{k}}} \quad (\text{C.11})$$

La normalización (C.9) es la correcta para fermiones de masa cero. De (C.10) y (C.11) se sigue directamente que, para el caso de masa cero

$$P_+ = \sum_{\sigma} u_{\mathbf{k}\sigma} \bar{u}_{\mathbf{k}\sigma} = \frac{\not{k}}{2E_{\mathbf{k}}} \quad (\text{C.12})$$

$$P_- = - \sum_{\sigma} v_{\mathbf{k}\sigma} \bar{v}_{\mathbf{k}\sigma} = \frac{-\not{k}}{2E_{\mathbf{k}}} \quad (\text{C.13})$$

Sin embargo, un cálculo directo muestra que (C.12) y (C.13) dan cero para todas las propiedades (3.3)

$$\begin{aligned} P_{\pm}^2(k) &= 0 \\ \text{tr} P_{\pm}(k) &= 0 \\ P_+(k) + P_-(k) &= 0 \\ P_+(k) P_-(k) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

Por lo anterior, y debido al hecho de que la normalización (C.9) no emplea la definición de adjunto de Dirac, es conveniente reescribir los operadores de proyección (C.12) y (C.13) como

$$P_+ = \sum_{\sigma} u_{\mathbf{k}\sigma} u_{\mathbf{k}\sigma}^{\dagger} = \frac{\not{k}}{2E_{\mathbf{k}}} \gamma_0 \quad (\text{C.15})$$

$$P_- = - \sum_{\sigma} v_{\mathbf{k}\sigma} v_{\mathbf{k}\sigma}^{\dagger} = - \frac{\not{k}}{2E_{\mathbf{k}}} \gamma_0 \quad (\text{C.16})$$

los cuales satisfacen las propiedades

$$\begin{aligned} P_{\pm}^2(k) &= \frac{\gamma_0 \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\gamma}}{2E_{\mathbf{k}}} \\ \text{tr } P_{\pm}(k) &= \pm 2 \\ P_+(k) + P_-(k) &= 0 \\ P_+(k) P_-(k) &= - \frac{\gamma_0 \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\gamma}}{2E_{\mathbf{k}}} \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

Ninguna de las propiedades (C.14) y (C.17) cumple con las condiciones básicas de idempotencia, ortogonalidad y completéz.

Por otro lado, siguiendo en la teoría de Dirac estándar, se puede mostrar que los operadores de proyección sobre estados de polarización, definidos a lo largo de un cuadrivector n de tipo espacio ortogonal a p , están dados por[7]

$$u(p, n) \otimes \bar{u}(p, n) = \frac{\not{p} + m}{2m} \frac{1 + \gamma_5 \not{n}}{2} \quad (\text{C.18})$$

$$-v(p, n) \otimes \bar{v}(p, n) = \frac{m - \not{p}}{2m} \frac{1 + \gamma_5 \not{n}}{2} \quad (\text{C.19})$$

Si se escoge n , tal que n es proporcional a p en el plano de referencia

$$n_p = \left(\frac{|\mathbf{p}|}{M}, \frac{p^0 \mathbf{p}}{M |\mathbf{p}|} \right) \quad (\text{C.20})$$

y se toma el límite ultrarelativista, (C.18) y (C.19) cambian a

$$u(p, n) \otimes \bar{u}(p, n) = \frac{\not{p} + m}{2} \frac{1 - \gamma_5}{2} \quad (\text{C.21})$$

$$-v(p, n) \otimes \bar{v}(p, n) = \frac{-\not{p} + m}{2} \frac{1 - \gamma_5}{2} \quad (\text{C.22})$$

donde únicamente se ha considerado helicidad negativa.

Índice de figuras

| | | |
|------|--|----|
| 2.1. | Creación de un hoyo en el mar de Dirac | 17 |
| 2.2. | Aniquilación de un par electrón-positrón | 17 |
| 2.3. | Creación y aniquilación de un positrón | 18 |
| 2.4. | Contorno de integración para S_F | 21 |
| 2.5. | Contornos de integración alternativos para S_F | 26 |
| 2.6. | Dispersión múltiple de una partícula | 26 |
| 2.7. | Procesos típicos de dispersión | 28 |
| 2.8. | Propagación de un electrón | 28 |
| 2.9. | Proceso de auto interacción | 29 |
| 3.1. | Contorno de integración para Δ_F | 39 |
| 3.2. | Contracción del contorno C_F | 40 |
| 4.1. | Contorno de integración para D_F | 46 |

Bibliografía

- [1] J. Besprosvany, *Int. J. Theo. Phys.*, **39**, 12 (2000)
- [2] J. D. Bjorken, S. D. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics*, McGraw-Hill, 1964.
- [3] P. A. M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*, Oxford University Press, 1981.
- [4] P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc. (London)* **A126**, 360 (1930)
- [5] R. P. Feynman, *Phys. Rev.* **76**, 749 (1949)
- [6] W. Greiner, J. Reinhardt, *Field Quantization*, Springer, 1998.
- [7] C. Itzykson, J. B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill, 1980.
- [8] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, John Wiley & Sons, 1962.
- [9] K. Osterwalder, R. Schrader, *Commun. Math. Phys.* **31**, (1973)
- [10] A. Salam y E. P. Wigner, editores, *Aspects of Quantum Theory*, Cambridge University Press, 1972.
- [11] E. C. G. Stückelberg, D. Rivier, *Helv. Phys. Acta* **22**, 215 (1949)
- [12] D. A. Woodside, *J. Math. Phys.* **40**, (1999)