UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"VARIABLES, VECTORES E INTEGRALES ESTOCASTICAS ESTABLES"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

PEREZ GARMENDIA JOSE LUIS ANGEL

DIRECTORA DE TESIS: DRA. MARIA EMILIA CABALLERO ACOSTA

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

2004

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVFNOMA DE
MEXICO

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

" VARIABLES, VECTORES E INTEGRALES ESTOCASTICAS ESTABLES "

realizado por PEREZ GARMENDIA JOSE LUIS ANGEL

con número de cuenta 09850788-1 , quien cubrió los créditos de la carrera de: MATEMATICAS

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
Propietario DRA. MARIA EMILIA CABALLERO ACOSTA

Propietario DR. LUIS ANTONIO RINCON SOLIS

Propietario DR. RICARDO GOMEZ AIZA

Suplente DR. ARMANDO GARCIA MARTINEZ

Suplente MAT. MARGARITA ELVIRA CHAVEZ CANO

Consejo Departamental de
MATEMATICAS

M. EN C. ALEJANDRO BRAVO MOJICA

A mis padres:

José Luis y Roxanna

"La obscura duda, la perenne angustia del llanto existencial.
El interminable enigma del proceso de ser.
Cuestiones todas del hombre, que por origen,
en este mundo a su suerte es abandonado.
Y en plena contraposición al vacuo matiz de tan solitario génesis:
La calidez del alma humana,
La fortaleza de sus virtudes,
La realización del que es ya no solo en si mismo
Sino en otro cuyo camino apenas comienza.
Manifestación misma del que transmuta el recibir en el dar.
Alcanzando en el acto mismo, la primigenia promesa,
De la trascendencia."

A mi padrino:

Dr. Arturo Noyola Isgleas

Con la esperanza de algún día merecer guía,
En la vía que por breves instantes asoma.

Agradecimientos.-

-Quisiera agradecer a mi tutora la Dra. Maria Emilia Caballero por su sincera amistad, y por su apoyo y guía en la elaboración de este trabajo.

-A los miembros del jurado:
-Dr. Armando Garcia Martinez
-Mat. Margarita Chavez Cano
-Dr. Ricardo Gomez Aiza
-Dr. Luis Antonio Rincón

Por sus comentarios, sugerencias, correcciones, y por el cálido apoyo brindado durante este tiempo.

Contenido

Introducción

El propósito fundamental de este trabajo, es el proporcionar una introduccón sencilla y directa al tema de las distribuciones y los procesos estocásticos estables. El intéres en los procesos estócasticos estables ha crecido en los últimos años, y actualmente es difícil encontrar un texto que haga accesible este tema al lector con conocimientos básicos de probabilidad.
El teorema del límite central ofrece la justificación fundamental de la importancia de las distribuciones estables: son las únicas distribuciones que son límite de sumas de variables aleatorias independientes, estandarizadas, e idénticamente distribuidas, y por ende incluyen a la distribución gaussiana como miembro destacado. Las distribuciones y los procesos gaussianos han sido ampliamente estudiados y su utilidad tanto como herramientas análiticas como dentro de la modelación estocástica es bien aceptada. Sin embargo no permiten grandes fluctuaciones y son por tanto inadecuadas al modelar alta variabilidad. Los modelos estables no gaussianos, por otro lado, no comparten dichas limitaciones. En general, las colas superiores e inferiores de sus distribuciones marginales decrecen como una función potencia. La razón de decaimiento depende de un parámetro α, que toma valores entre 0 y 2. Entre mas pequeño sea el valor de α, mas lento será el decaimiento y mas pesadas serán las colas. Las distribuciones siempre tienen varianza infinita y cuando $\alpha \leq 1$, también tienen media infinita.
En las tres últimas décadas, muestras con colas pesadas han sido obtenidas en campos tan diversos como economía, telecomunicaciones, hidrología y física, que sugieren el utilizar procesos estables no gaussianos como posibles modelos. Estos modelos ofrecen el mérito adicional de proporcionar mayor flexibilidad y variedad que los procesos gaussianos. Estos últimos están completamente especificados por su media y sus funciones de autocovarianza, mientras que los procesos estables no gaussianos demandan una parametrización mucho más rica. Mas aún las distribuciones gaussianas, son simétricas alrededor de la media, mientrás que las distribuciones estables no gaussianas pueden tener un grado arbitrario de sesgo.
El enfoque dado al tema en la tesis es distinto al que usualmente se encuentra en la mayoría de los textos que llegan a tratarlo. Para facilitar el acceso al material se prescindió de la teoría de las funciones de variación regular y de los teoremas Tauberianos, utilizando en su lugar la definición que utiliza Keni-Iti Sato de distribucón estable. Este enfoque facilita la obtención de la forma canónica que adopta la función característica de estas distribuciones. El resto de la tesis esta

basado en el trabajo desarrollado por Taqqu y Samorodnitsky sobre procesos estocásticos estables no gaussianos.
Las distribuciones estables pertencén a la vasta clase de distribuciones conocidas como infinitamente divisibles. Estas se caracterizan por la forma canónica que adopta su función característica conocida como representación de Lévy-Khintchine. Por lo que en el primer capítulo se introduce la teoría básica para encontrar la representación de Lévy-Khintchine para distribuciones infinitamente divisibles en R^d.
En el segundo capítulo se introduce el concepto de distribución α-estable en R^d. Se define el índice de estabilidad, y se trabaja con la representación de Lévy-Khintchine para encontrar la forma específica que toma en este tipo de distribuciones. Esta forma desempeña un papel fundamental en el resto del trabajo desarrollado en la tesis.
En el tercer capítulo se introducen las variables aleatorias estables unidimensionales, se derivan propiedades básicas de estas variables aleatorias y se obtiene una interpretación sobre los parámetros que caracterizan a una distribución estable en R. También en este capítulo se retoma el tema de las distribuciones α-estables en R^d o vectores estables. Se estudia la relación entre la estabilidad de un vector estable y la estabilidad de las combinaciones lineales de sus componentes.
En el cuarto capítulo se estudian los procesos estocásticos α-estables, es decir elementos aleatorios cuyas distribuciones finito-dimensionales son α-estables. Esta definición se utiliza para introducir la noción de integrales estocásticas α-estables, que son integrales de funciones no aleatorias con respecto a una medida aleatoria α-estable. Todo el trabajo anterior se realizó con el objeto de estudiarlas, ya que el representar procesos estocásticos α-estables como integrales proporciona valiosas ventajas. También se desarrolla la teoría básica de estas integrales.
Por último en el quinto capítulo se introducen resultados nuevos (al menos no se encuentran en la literatura consultada). Estos resultados toman dos direcciones. El primero es un teorema de Radon-Nikodým para medidas aleatorias α-estables, y el segundo explora la representación de martingalas continuas utilizando integrales estocásticas α-estables. Hay que mencionar que estos resultados son apenas un comienzo y un claro ejemplo del amplio campo que existe por explorar entorno a este vasto y apasionante tema.

Capítulo 1

Distribuciones Infinitamente Divisibles

En este capítulo estudiaremos las distribuciones infinitamente divisibles. Esta clase especial de distribuciones desempeña un papel clave en el estudio de los teoremas límite, asi como en el estudio de la descomposición de distribuciones de probabilidad.

Definición 1 *Una medida de probabilidad μ en R^d es infinitamente divisible si, para todo entero positivo n, existe una medida de probabilidad μ_n en R^d tal que $\mu = (\mu_n)^n$.*

Observación 1 *Como la función característica de la convolución es el producto de las funciones características, μ resulta ser infinitamente divisible si y solo si para cada n, alguna raíz n-ésima de la función característica puede ser elegida de tal forma que sea la función característica de una medida de probabilidad.*

Ejemplo 1 *a)Sea φ la función característica de una distribución normal con media μ y varianza σ^2. Entonces*

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= exp(it\mu - \frac{\sigma^2 t^2}{2}) \\ &= [exp(it\frac{\mu}{n} - \frac{\sigma^2}{n}\frac{t^2}{2})]^n \\ &= \varphi_n^n(t)\end{aligned}$$

y como $\varphi_n(t)$ es la función característica de una distribución normal con media μ/n y varianza σ^2/n, se sigue que la distribución normal es infinitamente divisible.
b)La distribución Poisson con parámetro λ también es infinitamente divisible.

Dado que si φ es su función característica entonces

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= exp\{\lambda(e^{it}-1)\} \\ &= [exp\{\frac{\lambda}{n}(e^{it}-1)\}]^n \\ &= \varphi_n(t)^n\end{aligned}$$

y el resultado se sigue de que $\varphi_n(t)$ es la función característica de una distribución Poisson con parámetro λ/n.
c)Sea φ la función característica de una distribución gamma con parámetros (α,β). Entonces

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= (1-\frac{it}{\beta})^{-\alpha} \\ &= [(1-\frac{it}{\beta})^{-\alpha/n}]^n \\ &= \varphi_n(t)^n\end{aligned}$$

pero como $\varphi_n(t)$ es la función característica de una distribución gamma con parámetros $(\alpha/n,\beta)$, entonces la distribución gamma es infinitamente divisible.

Ejemplo 2 *Si $\{X_t\}_{t\geq 0}$ es un proceso de Lévy en R^d, tenemos que para cada t, la distribución de X_t es infinitamente divisible.*

Sea n un entero postivo y $t \in R$, entonces consideremos $t_k = \frac{kt}{n}$. Y hagamos $\mu = P_{X_t}$ y $\mu_n = P_{X(t_k)-X(t_{k-1})}$, lo cual no depende de k por la homogeneidad del proceso de Lévy. Como para un proceso de Lévy $X_0 = 0$, se sigue que:

$$X_t = (X_{t_n} - X_{t_0}) = (X_{t_1} - X_{t_0}) + \ldots + (X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$$

Entonces como los incrementos tienen la misma distribución μ_n, y son independientes, la distribución de la suma de los incrementos es igual μ_n^n, es decir:

$$\mu = P_{X_t} = \mu_n^n$$

A continuación demostraremos el siguiente teorema.

Teorema 1 *Si μ_1 y μ_2 son infinitamente divisibles, entonces $\mu_1 * \mu_2$ es infinitamente divisible.*

Prueba.
Como μ_1 y μ_2 son infinitamente divisibles, entonces para cualquier entero positivo n, existen μ_{1_n} y μ_{2_n} tal que, en términos de sus funciones características:

$$\widehat{\mu}_1 = \widehat{\mu}_{1_n}^n$$

$$\widehat{\mu}_2 = \widehat{\mu}_{2_n}^n$$

De lo anterior se sigue que:

$$\widehat{\mu}_1\widehat{\mu}_2 = \widehat{\mu}^n_{1_n}\widehat{\mu}^n_{2_n} = (\widehat{\mu}_{1_n}\widehat{\mu}_{2_n})^n$$

Pero como la función característica de la convolución es el producto de las respectivas funciones características

$$\widehat{\mu_1 * \mu_2} = \widehat{\mu}_1\widehat{\mu}_2 = \widehat{\mu}^n_{1_n}\widehat{\mu}^n_{2_n} = (\widehat{\mu}_{1_n}\widehat{\mu}_{2_n})^n$$

Por lo que

$$\mu_1 * \mu_2 = (\mu_{1_n} * \mu_{2_n})^n$$

A continuación demostraremos una propiedad que nos pemitirá definir el logaritmo de la función característica de las distribuciones infinitamente divisibles.

Teorema 2 *Si μ es infinitamente divisible, entonces $\widehat{\mu}(z)$ no tiene ceros, es decir $\widehat{\mu}(z) \neq 0$ para toda $z \in R^d$.*

Prueba.
Como μ es infinitamente indivisible, entonces para todo entero positivo n existe μ_n tal que $\widehat{\mu}(z) = \widehat{\mu}^n_n(z)$. Entonces $|\widehat{\mu}(z)|^2 = |\widehat{\mu}_n(z)|^{2n}$. Como la norma de la función característica es una función que toma valores en los reales positivos, entonces podemos extraer la raiz enésima, y obtenemos que $|\widehat{\mu}_n(z)|^2 = |\widehat{\mu}(z)|^{2/n}$, y además $|\widehat{\mu}_n(z)|^2$ es la función característica de la distribución $\mu_n * (-\mu_n)$. Ahora definamos $\varphi(z)$ por:

$$\varphi(z) = \lim_{n\to\infty} |\widehat{\mu}_n(z)|^2 = \begin{cases} 0, & \text{si } \widehat{\mu}(z) = 0, \\ 1, & \text{si } \widehat{\mu}(z) \neq 0. \end{cases}$$

Esto se debe a que $|\widehat{\mu}(z)|^2 \leq 1$ y a que $|\widehat{\mu}_n(z)|^2 = |\widehat{\mu}(z)|^{2/n}$. Ahora como $\widehat{\mu}(z)$ es continua y $\widehat{\mu}(0) = 1$ entonces existe una vecindad Vde cero en la cual $\widehat{\mu}(z) \neq 0$, entonces $\varphi(z) = 1$ para toda $z \in V$, por lo que $\varphi(z)$ es continua en cero. Entonces por el teorema de continuidad $\varphi(z)$ es una función característica, y por ende es continua en todo R^d. Ahora como $\varphi(z)$ solo toma dos valores, necesariamente $\varphi(z) = 1$ para toda $z \in R^d$. Lo que por la definición de $\varphi(z)$ implica que $\widehat{\mu} \neq 0$ para toda $z \in R^d$.

Observación 2 *Hay que tener cuidado pues el que la función caracteristística de una distribución no tenga ceros no implica que la distribución sea infinitamente divisible. Por ejemplo una distribución binomial con parámetros (n,p) tiene función característica sin ceros si $p \neq 2$, pero no es infinitamente divisible.*

A continuación enunciaremos un lema de análisis que nos será útil en el desarrollo de este cápitulo

Lema 1 *Sea $\varphi(z)$ una función continua de R^d en C tal que $\varphi(0) = 1$ y $\varphi(z) \neq 0$ para toda z. Entonces, existe una única función continua f(z) de R^d en C tal que f(0)=0 y $e^{f(z)} = \varphi(z)$. Para cualquier entero positivo n existe una única función continua $g_n(z)$ de R^d en C tal que $g_n(0) = 1$ y $g_n(z)^n = \varphi(z)$. Donde $g_n(z) = e^{f(z)/n}$.*

En lo siguiente denotaremos $f(z) = log(\varphi(z))$ y $g_n(z) = \varphi(z)^{1/n}$ y los llamaremos el logaritmo distinguido y la raíz enésima distinguida de $\varphi(z)$, respectivamente. Notemos que f(z) no es la composición de $\varphi(z)$ y una rama fija de la función logaritmo. Esto es, $\varphi(z_1) = \varphi(z_2)$ no implica que $f(z_1) = f(z_2)$. De forma mas general, definimos, para $t \geq 0$, $\varphi(z)^t = e^{tf(z)}$, y le llamamos la potencia t-ésima distinguida de φ. Y aplicamos esto a las funciones características. Supongamos que $\widehat{\mu}(z) \neq 0$ para toda z. Entonces $\widehat{\mu}(z)^t$ esta definida para toda $t \geq 0$, aunque no siempre es una función característica. Si $\widehat{\mu}(z)^t$ es la función característica de una medida de probabilidad, entonces esta medida de probabilidad es denotada por μ^t.

Teorema 3 *Si μ_k es una sucesión de distribuciones infinitamente divisibles y $\mu_k \xrightarrow{d} \mu$, entonces μ es infinitamente divisible.*

Prueba.
Primero demostraremos que $\widehat{\mu}(z) \neq 0$. Como $\mu_k \xrightarrow{d} \mu$, por el teorema de continuidad $\widehat{\mu}_k \to \widehat{\mu}$ puntualmente. Por otro lado como μ_k es infinitamente divisible procedemos como se hizo en el teorema anterior y tenemos que $|\widehat{\mu}_k(z)|^{2/n}$ es función característica. Dado que $\widehat{\mu}(z)$ es continua, $|\widehat{\mu}(z)|^{2/n}$ también es continua. Y por ende como $|\widehat{\mu}(z)|^{2/n}$ es límite de funciones caracteristicas y es continua, por el teorema de continuidad también es una función característica. Y como $|\widehat{\mu}(z)|^2 = (|\widehat{\mu}(z)|^{2/n})^n$, tenemos que $|\widehat{\mu}(z)|^2$ es la función característica de una distribución infinitamente divisible y por el teorema anterior $|\widehat{\mu}|^2(z) \neq 0$, y por ende $\widehat{\mu}(z) \neq 0$. Como $\widehat{\mu} \neq 0$, entonces podemos definir log $\widehat{\mu}$. Ahora como $\widehat{\mu}_k \to \widehat{\mu}$ uniformemente en cualquier conjunto compacto, tenemos que, $log(\widehat{\mu}_k) \to log(\widehat{\mu})$. Por lo tanto $\widehat{\mu}_k(z)^{1/n} \to \widehat{\mu}(z)^{1/n}$ conforme $k \to \infty$. Pero como μ_k es infinitamente divisible entonces $\widehat{\mu}_k(z)^{1/n}$ es una función característica y como $\widehat{\mu}(z)^{1/n}$ es continua, tenemos que es la función característica de una medida de probabilidad; y como $\widehat{\mu} = (\widehat{\mu}^{1/n})^n$, μ es infinitamente divisible.

Teorema 4 *Si μ es infinitamente divisible, entonces, para toda $t \in [0, \infty)$, μ^t esta bien definido y es infinitamente divisible.*

Prueba.
Tenemos que como μ es infinitamente divisible, entonces para todo entero positivo n existe una distribución $\mu^{1/n}$ con función característica $\widehat{\mu}(z)^{1/n}$.
Sin embargo $\widehat{\mu}(z)^{1/n} = (\widehat{\mu}(z)^{1/(kn)})^k$, para todo entero positivo k; como μ es infinitamente divisible, $\widehat{\mu}(z)^{1/(kn)}$ es una función característica, y por ende $\mu^{1/n}$ es infinitamente divisible.
Asi que por el teorema 1, tenemos que para todo par de enteros positivos m y n, $\mu^{m/n}$ es una distribución infinitamente divisible.
Ahora consideremos un numero irracional $t \geq 0$, entonces existe una sucesión de racionales $r_n > 0$ que convergen a t. Entonces es claro que $\widehat{\mu}(z)^{r_n} \to \widehat{\mu}(z)^t$ puntualmente (dado que $\widehat{\mu}(z)^{r_n} = exp(\frac{1}{r_n}\log(\widehat{\mu}(z))))$; pero como $\widehat{\mu}(z)$ y el logaritmo son funciones continuas, tenemos que $\widehat{\mu}(z)^t = \frac{1}{t}\log\widehat{\mu}(z)$ también lo es.
Asi que como $\widehat{\mu}(z)^t$ es límite de funciones características y es continua, entonces

por el teorema de continuidad $\widehat{\mu}(z)^t$ también es una función característica, y por el teorema anterior la distribución correspondiente a $\widehat{\mu}(z)^t$ es infinitamente divisible.
Obviamente μ^0 es δ_0. A continuación mostraremos la correspondencia entre los procesos de Lévy en ley y las distribuciones infinitamente divisibles.

Teorema 5 *i)Si $\{X_t : t \geq 0\}$ es un proceso de Lévy en ley R^d, entonces, para toda $t \geq 0$, P_{X_t} es infinitamente divisible y, si $P_{X_1} = \mu$, tenemos que $P_{X_t} = \mu^t$.*
ii) Si μ es una distribución infinitamente divisible en R^d, entonces existe un proceso de Lévy en ley $\{X_t : t \geq 0\}$ tal que $P_{X_1} = \mu$.
iii)Si $\{X_t\}$ y $\{X'_t\}$ son procesos de Lévy en ley en R^d tal que $P_{X_1} = \mu$, entonces $\{X_t\}$ y $\{X'_t\}$ son idénticos en ley.

Prueba. i)Sea $\{X_t\}$ un un proceso de Lévy en ley. La divisibilidad infinita de P_{X_t} se demostró en el ejemplo 1. Ahora sea $\mu = P_{X_1}$, entonces por la homogeneidad de los procesos de Lévy en ley tenemos que $\mu = (P_{X_{1/n}})^n$, y por lo tanto tenemos que $P_{X_{1/n}} = \mu^{1/n}$. Ahora como el proceso tiene incrementos independientes tenemos que $P_{X_{m/n}} = \mu^{m/n}$. Ahora si $t > 0$ es irracional, elegimos una sucesion de numeros racionales r_n tal que $r_n \to t$. Ahora como $\{X_t\}$ un un proceso de Lévy en ley entonces es estocasticamente continuo y por lo tanto $X(r_n) \to X(t)$ en probabilidad, y como convergencia en probabilidad implica convergencia en distribución, $P_{X(r_n)} \to P_{X(t)}$. Y por la unicidad del limite $P_X(t) = \mu^t$.
ii)Sea μ infinitamente divisible. Entonces μ^t es una distribución con función característica $e^{tlog\widehat{\mu}(z)}$ por como se definió en el teorema anterior. Asi que:

$$\mu^s * \mu^t = \mu^{s+t}, \tag{1.1}$$

$$\mu^0 = \delta_0, \tag{1.2}$$

$$\mu^t \to \delta_0 \qquad \text{conforme } t \downarrow 0. \tag{1.3}$$

A continuación utilizaremos el teorema de extensión de Kolmogorov para construir el correspondiente proceso de Lévy en ley. Asi que consideremos $\Omega = (R^d)^{[0,\infty)}$ el conjunto de todas las funciones $\omega = (\omega(t))_{t\in[0,\infty)}$ de $[0,\infty)$ a R^d; y $\Im$ la σ-álgebra de Kolmogorov. Entonces para toda $n \geq 0$ y para cualquiera

$t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n$, definamos:

$$\begin{aligned}
&\mu_{t_0,\ldots,t_n}(B_0 \times \cdots \times B_n) \qquad (1.4)\\
&= \int \cdots \int \mu^{t_0}(dy_0) 1_{B_0}(y_0) \mu^{t_1-t_0}(dy_1) 1_{B_1}(y_0+y_1)\\
&\quad \times \ldots \mu^{t_n-t_{n-1}}(dy_n) 1_{B_n}(y_0+\ldots+y_n).
\end{aligned}$$

Ahora supongamos que $B_m = R^d$, entonces al aplicar Fubini

$$\begin{aligned}
&= \int \cdots \int \mu^{t_m-t_{m-1}}(dy_m) 1_{B_m}(y_0+\cdots+y_m)\\
&\quad \mu^{t_{m+1}-t_m}(dy_{m+1}) 1_{B_{m+1}}(y_0+\cdots+y_{m+1})\\
&\quad \times \ldots \mu^{t_n-t_{n-1}}(dy_n) 1_{B_n}(y_0+\cdots+y_n) \mu^{t_0}(dy_0) 1_{B_0}(y_0)\\
&\quad \times \ldots \mu^{t_{m-1}-t_{m-2}}(dy_{m-1}) 1_{B_{m-1}}(y_0+\cdots+y_{m-1})
\end{aligned}$$

por otro lado fijémonos en las integrales con respecto a $\mu^{t_m-t_{m-1}}$ y $\mu^{t_{m+1}-t_m}$, como $B_m = R^d$ tenemos que $1_{B_m}(y_0+\cdots+y_n) = 1$, de donde se sigue que

$$\begin{aligned}
&\int\int 1_{B_m}(y_0+\cdots+y_m) 1_{B_{m+1}}(y_0+\cdots+y_{m+1}) \ldots\\
&\quad 1_{B_n}(y_0+\cdots+y_n) \mu^{t_m-t_{m-1}}(dy_m) \mu^{t_{m+1}-t_m}(dy_{m+1})\\
&= \int\int 1_{B_{m+1}}(y_0+\cdots+y_{m+1}) \ldots\\
&\quad 1_{B_n}(y_0+\cdots+y_n) \mu^{t_m-t_{m-1}}(dy_m) \mu^{t_{m+1}-t_m}(dy_{m+1})
\end{aligned} \qquad (1.5)$$

pero $\prod_{i=m+1}^{n} 1_{B_i}(y_0+\cdots+y_i) = 1_A(y_m+y_{m+1})$ donde $A = \{x \in R^d : y_0+y_1+\cdots+x \in B_{m+1}, \ldots, y_0+\cdots+y_{m-1}+x+y_{m+2}+\cdots+y_n \in B_n\}$, por lo que

$$= \int\int 1_A(y_m+y_{m+1}) \mu^{t_m-t_{m-1}}(dy_m) \mu^{t_{m+1}-t_m}(dy_{m+1}) \qquad (1.6)$$

pero la expresión anterior corresponde a la convolución entre $\mu^{t_m-t_{m-1}}$ y $\mu^{t_{m+1}-t_m}$ por lo que por (1.1)

$$= \int 1_A(y_{m+1}) \mu^{t_{m+1}-t_{m-1}}(dy_{m+1})$$

por lo que al sustituir en (1.4) y aplicando otra vez el teorema de Fubini

$$
\begin{aligned}
&\mu_{t_0,\dots,t_n}(B_0 \times \cdots \times B_n) \\
&\quad = \int \cdots \int \mu^{t_m - t_{m-1}}(dy_m) 1_{B_m}(y_0 + \cdots + y_m) \\
&\qquad\qquad \mu^{t_{m+1}-t_m}(dy_{m+1}) 1_{B_{m+1}}(y_0 + \cdots + y_{m+1}) \\
&\qquad\qquad \times \ldots \mu^{t_n - t_{n-1}}(dy_n) 1_{B_n}(y_0 + \cdots + y_n) \mu^{t_0}(dy_0) 1_{B_0}(y_0) \\
&\qquad\qquad \times \ldots \mu^{t_{m-1}-t_{m-2}}(dy_{m-1}) 1_{B_{m-1}}(y_0 + \cdots + y_{m-1}) \\
&\quad = \int \cdots \int \mu^{t_0}(dy_0) 1_{B_0}(y_0) \mu^{t_1 - t_0}(dy_1) 1_{B_1}(y_0 + y_1) \\
&\qquad\qquad \times \ldots \mu^{t_{m-1}-t_{m-2}}(dy_{m-1}) 1_{B_{m-1}}(y_0 + \ldots + y_{m-1}) \\
&\qquad\qquad \mu^{t_{m+1}-t_{m-1}}(dy_{m+1}) 1_{B_{m+1}}(y_0 + \ldots + y_{m+1}) \\
&\qquad\qquad \times \ldots \mu^{t_n - t_{n-1}}(dy_n) 1_{B_n}(y_0 + \ldots + y_n). \\
&= \mu_{t_0,\dots,t_{m-1},t_{m+1},\dots,t_n}(B_0 \times \ldots \times B_{m-1} \times B_{m+1} \times \cdots \times B_n). \qquad (1.7)
\end{aligned}
$$

Entonces $\mu_{t_0,\dots,t_n}(B_0 \times \cdots \times B_n)$ se extiende a un medida de probabilidad en $\mathbf{B}((R^d)^{n+1})$ y la familia $\{\mu_{t_0,\dots,t_n}(B_0 \times \cdots \times B_n\}\}$ satisface la condición de consistencia por (1.7)). Entonces por el teorema de extensión de Kolmogorov (ver apéndice), obtenemos una medida de probabilidad única P en $\Im$ tal que:

$$
P[X_{t_0} \in B_0, \dots, X_{t_n} \in B_n] = \mu_{t_0,\dots,t_n}(B_0 \times \cdots \times B_n). \qquad (1.8)
$$

En particular por la consistencia de $\{\mu_{t_0,\dots,t_n}(B_0 \times \cdots \times B_n)\}$, X_t tiene distribución μ^t. Ahora mostraremos que $[X_t : t \geq 0]$ es un proceso de Lévy en ley. Si $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n$, entonces por (1.4) y (1.8),

$$
\begin{aligned}
&E[f(X_{t_0}, \dots, X_{t_n})] \qquad (1.9) \\
&\quad = \int \ldots \int f(y_0, y_0 + y_1, \dots, y_0 + \cdots + y_n) \mu^{t_0}(dy_0) \\
&\qquad\qquad \times \mu^{t_1 - t_0}(dy_1) \ldots \mu^{t_n - t_{n-1}}(dy_n)
\end{aligned}
$$

para toda funcion medible y acotada f. Sea $z_1, \dots, z_n \in R^d$ y

$$
f(x_0, \dots, x_n) = exp(i \sum_{j=1}^{n} \langle z_j, x_j - x_{j-1} \rangle).
$$

Entonces:

$$E[exp(i\sum_{j=1}^{n}\langle z_j, x_j - x_{j-1}\rangle)]$$

$$= \int\cdots\int exp(i\sum_{j=1}^{n}\langle z_j, x_j - x_{j-1}\rangle)\mu^{t_0}(dy_0)\times\mu^{t_1-t_0}(dy_1)\ldots\mu^{t_n-t_{n-1}}(dy_n)$$

asi que haciendo $y_j = x_j - x_{j-1}$ se sigue que

$$= \prod_{j=1}^{n}\int exp(i\langle z_j, y_j\rangle)\mu^{t_j-t_{j-1}}(dy_j)$$

Haciendo $z = e_j$ donde ($e_j = (0,\ldots,1,0,\ldots,0)$ con 1 en la j-ésima posición), se sigue que

$$E[exp(i\langle z_j, X_{t_j} - X_{t_{j-1}}\rangle)] = \int exp(i\langle z_j, y_j\rangle)\mu^{t_j-t_{j-1}}(dy_j)$$

lo cual muestra que $X_{t_j} - X_{t_{j-1}}$ tiene distribución $\mu^{t_j-t_{j-1}}$, y por ende que el proceso es temporalmente homogéneo, por otro lado

$$E[exp(i\sum_{j=1}^{n}\langle z_j, X_{t_j} - X_{t_{j-1}}\rangle)] = \prod_{j=1}^{n}E[exp(i\langle z_j, X_{t_j} - X_{t_{j-1}}\rangle)] \tag{1.10}$$

Lo que implica que $\{X_t\}$ tiene incrementos independientes. Por otro lado por (1.3) tenemos que $X_t \to 0$ en distribución, sin embargo convergencia en distribución a cero implica convergencia en probabilidad a cero. Por lo que por la homogeneidad temporal $P[|X_s - X_t| \leq \varepsilon] = P[|X_{|s-t|}| \leq \varepsilon] \to 0$ conforme $s \to t$. Entonces $\{X_t\}$ es un proceso de Lévy en ley.

iii)Sean $\{X_t\}$ y $\{X'_t\}$ procesos de Lévy en ley y $X_1 \overset{d}{=} X'_1$. Entonces por i) tenemos que$P_{X_t} = \mu^t = P_{X'_t}$, por lo que $X_t \overset{d}{=} X'_t$. Se sigue por la homogeneidad temporal que $X_{s+t} - X_s \overset{d}{=} X'_{s+t} - X'_s$ para toda t y s. Entonces $(X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}) \overset{d}{=} (X'_{t_0}, X'_{t_1} - X'_{t_0}, \ldots, X'_{t_n} - X'_{t_{n-1}})$ para toda $t_0 \geq t_1 \geq \ldots \geq t_n$ por independencia. Pero como $(X_{t_0}, X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ es una función de $(X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$, entonces obtenemos $(X_{t_0}, X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) \overset{d}{=} (X'_{t_0}, X'_{t_1}, \ldots, X'_{t_n})$. Lo cual completa la prueba.

1.1 Representación de las Distribuciones Infinitamente Divisibles

A continuación demostraremos un teorema que nos permite obtener una representación de todas las distribuciones infinitamente divisibles. Se conoce como la representación de Lévy-Khintchine. Fue obtenida en R alrededor de 1930 por de Finetti y Kolmogorov en casos particulares, y por Lévy en el caso general. Así que sea $D = \{x : |x| \leq 1\}$.

Teorema 6 *i)Si μ es una distribución infinitamente divisible en R^d, entonces*

$$\widehat{\mu}(z) = exp[-\frac{1}{2}\langle z, Az\rangle + i\langle \gamma, z\rangle + \int_{R^d}(e^{i\langle z,x\rangle} - 1 - i\langle z, x\rangle 1_D(x))v(dx)], z \in R^d, \tag{1.11}$$

donde A es una matriz de $d\times d$ simétrica definida positiva, y v es una medida en R^d que satisface

$$v(\{0\}) = 0 \qquad \int_{R^d}(|x|^2 \wedge 1)v(dx) < \infty \tag{1.12}$$

y $\gamma \in R^d$.
ii)La representación de $\widehat{\mu}(z)$ en i) por A, v, y γ es única.
iii)De manera análoga si A es una matriz de $d \times d$ simétrica definida positiva, v es una medida que satisface (1.12), y $\gamma \in R^d$, entonces existe una distribución infinitamente divisible μ cuya función característica está dada por (1.11).

Definición 2 *Llamamos a (A,v,γ) la terna generadora de μ. A y v se conocen, respectivamente, como la matriz de covarianzas Gaussiana y la medida de Lévy de μ.*

Corolario 1 *Si μ tiene terna generadora (A,v,γ), entonces μ^t tiene terna generadora $(tA,tv,t\gamma)$.*

El resto de esta sección esta dedicado a la demostración del teorema 6, pero antes necesitaremos el siguiente lema:

Lema 2 *Para toda $u \in R$ y $n \in N$*

$$e^{iu} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(iu)^k}{k!} + \theta\frac{|u|^n}{n!}$$

con alguna $\theta \in C$ tal que $|\theta| \leq 1$.

Prueba Tenemos que expandiendo la función en serie de Taylor:

$$e^{iu} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(iu)^k}{k!} + \frac{i^n}{(n-1)!}\int_0^u (u-v)^{n-1}e^{iv}dv$$

Pero

$$\begin{aligned}|\frac{i^n}{(n-1)!}\int_0^u (u-v)^{n-1}e^{iv}dv| &\leq \frac{1}{(n-1)!}\int_0^u (u-v)^{n-1}dv \\ &\leq \frac{1}{n!}|u|^n\end{aligned}$$

Es decir si $u \neq 0$

$$|\frac{|i^n n|}{|u|^n}\int_0^u (u-v)^{n-1}e^{iv}dv| \leq 1 \qquad \text{si } u \neq 0$$

Asi que si se define

$$\theta = \begin{cases} \frac{i^n n}{|u|^n}\int_0^u (u-v)^{n-1}e^{iv}dv & \text{si } u \neq 0 \\ 0 & \text{si } u = 0 \end{cases}$$

demostramos el lema.
Hay que notar que el integrando en el lado derecho de (1.11) es integrable con respecto a v, porque es acotada fuera de cualquier vecindad de 0, y por el lema anterior tenemos que

$$\begin{aligned} e^{i\langle z,x\rangle} - 1 - i\langle z,x\rangle 1_D(x) &= i\langle z,x\rangle 1_{R/D}(x) + \theta\frac{|\langle z,x\rangle|^2}{2!} \\ &\leq |z||x|1_{R/D}(x) + \theta\frac{(|z||x|)^2}{2!} \\ &\leq |z||x|^2 1_{R/D}(x) + \theta\frac{(|z||x|)^2}{2!} \\ &= O(|x|^2) \qquad \text{conforme } |x| \to 0 \end{aligned}$$

para z fija. Pero existen otras formas de obtener un integrando integrable. Sea c(x) una función medible y acotada de R^d en R^d y que satisface

$$c(x) = 1 + o(x) \quad \text{cuando } |x| \to 0 \tag{1.13}$$

$$c(x) = O(1/|x|) \quad \text{cuando } |x| \to \infty \tag{1.14}$$

Asi (1.11) puede ser reescrita como

$$\widehat{\mu}(z) = exp[-\frac{1}{2}\langle z, Az\rangle + i\langle \gamma_c, z\rangle + \int_{R^d}(e^{i\langle z,x\rangle} - 1 - i\langle z,x\rangle c(x))v(dx)] \tag{1.15}$$

con $\gamma_c \in R^d$ definida por

$$\gamma_c = \gamma + \int_{R^d} x(c(x) - 1_D(x))v(dx) \tag{1.16}$$

la expresión anterior tiene sumandos finitos dado que por (1.11)

$$\begin{aligned} |x|(c(x) - 1_D(x)) = O(|x|^2) &\qquad \text{conforme } |x| \to 0, \text{ y} \\ |x|(c(x) - 1_D(x)) = 0 &\qquad \text{conforme } |x| \to \infty. \end{aligned}$$

Asi que por (1.12) $\int_{R^d}|x|(c(x) - 1_D(x))v(dx) < \infty$, y por ende γ_c tiene sumandos finitos. Algunos ejemplo de c(x) usualmente utilizados son

$$\begin{aligned} c(x) &= 1_{|x|\leq\varepsilon}(x) \qquad \text{con } \varepsilon \geq 0, \\ c(x) &= 1/(1+|x|^2), \\ c(x) &= 1_{|x|\leq 1}(x) + 1_{1\leq|x|\leq 2}(x)(2-|x|). \end{aligned} \tag{1.17}$$

Denotamos a la terna en (1.15) por $(A, v, \gamma_c)_c$. Por otro lado si v satisface la condición adicional $\int_{|x|\leq 1}|x|v(dx) < \infty$, entonces podemos utilizar la función cero como c, y obtenemos

$$\widehat{\mu}(z) = exp[-\frac{1}{2}\langle z, Az\rangle + i\langle\gamma_0, z\rangle + \int_{R^d}(e^{i\langle z,x\rangle} - 1)v(dx)] \tag{1.18}$$

con $\gamma_0 \in R^d$. Esta es la representación por la terna $(A, v, \gamma_0)_0$. A la constante γ_0 se le conoce como el corrimiento de μ. Si v stisface $\int_{|x|\geq 1}|x|v(dx) < \infty$, entonces , permitiendo que c(x) sea la constante 1, tenemos una representación por la terna $(A, v, \gamma_1)_1$:

$$\widehat{\mu}(z) = exp[-\frac{1}{2}\langle z, Az\rangle + i\langle\gamma_1, z\rangle + \int_{R^d}(e^{i\langle z,x\rangle} - 1 - i\langle z, x\rangle)v(dx)] \tag{1.19}$$

Y llamamos a la constante γ_1 el centro de μ. Por último notamos que A y v son invariantes no importando que función c(x) elijamos.
Existen dos formas de acercarse al teorema(6). Uno es el enfoque probabilista que analiza la estructura de los saltos de las funciones muestrales de un proceso de Lévy general y obtiene la representación como su distribución en un tiempo fijo. La segunda es el metodo analítico inciado por Khintchine en 1937, que obtiene la representación de forma directa. Aqui se utilizará el método analítico, para derivar la representación de Lévy- Khintchine.
Prueba de Teorema (6) (ii).
Suponga que $\widehat{\mu}(z)$ se expresa como (1.11) con A, v, γ. Y notemos que

$$|e^{i\langle z,x\rangle} - 1 - i\langle z, x\rangle 1_D(x)| \leq \frac{1}{2}|z|^2|x|^2 1_{\{|x|\leq 1\}}(x) + 2\cdot 1_{\{|x|\geq 1\}}(x) \tag{1.20}$$

por el Lema anterior. Ahora como el lado derecho de la igualdad anterior es integrable utilizando el teorema de convergencia dominada, la expresion dentro de los corchetes en (1.11) es continua en z. Asi

$$log\widehat{\mu}(sz) = -\frac{1}{2}s^2\langle z, Az\rangle + is\langle\gamma, z\rangle + \int_{R^d}(e^{i\langle sz,x\rangle} - 1 - i\langle sz, x\rangle 1_D(x))v(dx))$$

para $s \in R$. Utilizando (1.20) y el teorema de convergencia dominada de nuevo, tenemos

$$s^{-2}log\widehat{\mu}(sz) \to -\frac{1}{2}\langle z, Az\rangle \quad \text{cuando } s \to \infty$$

Asi tenemos que A esta unívocamete determinada por μ. Sea $\psi(z) = log\widehat{\mu}(z) + \frac{1}{2}\langle z, Az\rangle$ y $C = [-1,1]^d$. Entonces podemos probar

$$\int_C (\psi(z) - \psi(z+w))dw = 2^d \int_{R^d} e^{i\langle z,x\rangle}(1 - \prod_{j=1}^{d} \frac{sin(x_j)}{x_j})\upsilon(dx), \qquad (1.21)$$

donde $\frac{sin(x_j)}{x_j}$ vale 1 cuando $x_j = 0$. En efecto, tenemos

$$\psi(z) - \psi(z+w) = \int_{R^d} (e^{i\langle z,x\rangle} - e^{i\langle z+w,x\rangle} + i\langle w,x\rangle 1_D(x))\upsilon(dx) - i\langle\gamma, w\rangle$$

y

$$\begin{aligned}|(e^{i\langle z,x\rangle} &- e^{i\langle z+w,x\rangle} + i\langle w,x\rangle 1_D(x)| \\ &\leq |1 - e^{i\langle w,x\rangle} + i\langle w,x\rangle 1_D(x)| + |\langle w,x\rangle 1_D(x)||1 - e^{i\langle z,x\rangle}| \\ &\leq (\frac{1}{2}|w|^2|x|^2 + |w||x|^2|z|)1_D(x),\end{aligned}$$

$(\frac{1}{2}|w|^2|x|^2 + |w||x|^2|z|)1_D(x))$ es integrable con respecto a la medida de Lévy υ entonces podemos utilizar el teorema de Fubini y obtenemos

$$\int_C (\psi(z) - \psi(z+w))dw = \int_{R^d} e^{i\langle z+w,x\rangle}\upsilon(dx)\int_C (1 - e^{i\langle w,x\rangle})dw,$$

Y ahora como

$$\begin{aligned}\int_C (1 - e^{i\langle w,x\rangle})dw &= \int_{-1}^{1}\cdots\int_{-1}^{1}(1 - \prod_{i=1}^{d} e^{i(w_i x_i)})dw_i \\ &= \int_{-1}^{1}\cdots\int_{-1}^{1} dw_i - \prod_{i=1}^{d}\int_{-1}^{1} e^{i(w_i x_i)})dw_i \\ &= 2^d - \prod_{i=1}^{d}(\int_{-1}^{1}(cos(w_i x_i) + isin(w_i x_i))dw_i) \\ &= 2^d - \prod_{i=1}^{d}(\int_{-1}^{1} cos(w_i x_i)dw_i + i\int_{-1}^{1} sin(w_i x_i)dw_i \\ &= 2^d - \prod_{i=1}^{d}(2\frac{sin(x_i)}{x_i}) \\ &= 2^d(1 - \frac{sin(x_i)}{x_i})\end{aligned} \qquad (1.22)$$

asíobtenemos (1.21). Ahora sea

$$\rho(dx) = 2^d \frac{sin(x_j)}{x_j}\upsilon(dx)$$

Entonces ρ es una medida finita ya que

$$\prod_{j=1}^{d} \frac{sin(x_j)}{x_j} = 1 - \frac{1}{6}|x|^2 + O(|x|^4) \quad \text{conforme } |x| \to 0. \tag{1.23}$$

Ahora como el lado derecho de (1.21) es la transformada de Fourier de ρ, entonces por la existencia de la transformada inversa de Fourier, ρ esta unívocamente determinada por ψ, esto es, por μ. Pero como $v(0) = 0$, v esta unívocamente determinada por μ. Ahora por (1.11) γ esta determinada por μ, A, y por v.
Prueba de Teorema (6) (iii).
Dadas A,v, y γ, sea $\varphi(z)$ el lado derecho de (1.11). Y sea

$$\begin{aligned}\varphi_n(z) &= exp[-\frac{1}{2}\langle z, Az\rangle + i\langle\gamma, z\rangle + \int_{|x|>1/n} (e^{i\langle z,x\rangle} - 1 - i\langle\gamma, z\rangle 1_D(x))v(dx)] \\ &= exp[-\frac{1}{2}\langle z, Az\rangle + i\langle\gamma_n, z\rangle + \int (e^{i\langle z,x\rangle} - 1)v_n(dx)] \quad (1.24)\end{aligned}$$

Ahora como la medida v restringida a $\{|x| > 1/n\}$ es finita, entonces v_n es finita y por ende, $\varphi_n(z)$ es la función característica de la convolución de distribuciónes gaussiana y Poisson compuesta; y por lo tanto de una distribución infinitamente divisible. Ahora por el teorema de convergencia dominada, converge a $\varphi(z)$ conforme $n \to \infty$. Por otro lado como se demostró al inicio de la demostración de la parte ii), $\varphi(z)$ es continua y por ende es una función característica. Y por el teorema 3 $\varphi(z)$ es la función característica de una distribución infinitamente divisible.
Esto demuestra la parte ii) y iii) del teorema 6 y ahora veremos un resultado que relaciona la convergencia de las medidas μ_n a μ la convergencia de sus respectivas ternas generadoras y que nos permitirá demostrar el resto del teorema 6.
En el siguiente teorema escribiremos $f \in C_v$ si f es una función acotada de R^d en R que se anula en una vecindad del origen.

Teorema 7 *Sea c(x) una función continua y acotada de R^d en R que satisface (1.13) y (1.14). Suponga que $\mu_n(n = 1, 2, \ldots)$ distribuciones infinitamente divisibles en R^d y que cada $\widehat{\mu}_n(z)$ tiene la representación de Lévy-Khintchine con triada generadora $(A_n, v_n, \beta_n)_c$. Sea μ una medida de probabilidad en R^d. Entonces $\mu_n \to \mu$ en distribución si y solo si μ es infinitamente divisible y $\widehat{\mu}(z)$ tiene la representación de Lévy-Khintchine con triada generadora $(A, v, \beta)_c$ donde (A, v, β) cumplen las siguientes tres condiciones.*
1) Si $f \in C_v$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_{R^d} f(x)v_n(dx) = \int_{R^d} f(x)v(dx)$$

2) Defina matrices simetricas definidas no negativas $A_{n,\varepsilon}$ por

$$\langle z, A_{n,\varepsilon}z\rangle = \langle z, A_n z\rangle + \int_{|x|\le\varepsilon} \langle z, x\rangle^2 v_n(dx)$$

Entonces

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \limsup_{n\to\infty} |\langle z, A_{n,\varepsilon}\rangle - \langle z, A\rangle| = 0$$

3) $\beta_n \to \beta$

Hay que notar que si utilizamos (8.1) para la representación de Lévy-Khintchine, este teorema no puede ser probado, debido a la discontinuidad de $1_D(x)$.

Prueba de Teorema. Primero supongamos que $\mu_n \to \mu$. Entonces como las distribuciones μ_n son infinitamente divisibles entonces μ es infinitamente divisible y por el teorema 2, $\widehat{\mu}(z) \neq 0$, entonces podemos definir el logaritmo. Ahora como $\mu_n \to \mu$, entonces $\widehat{\mu}_n(z) \to \widehat{\mu}(z)$ uniformemente en compactos y por lo tanto $log\widehat{\mu}_n(z) \to log\widehat{\mu}(z)$ uniformemente en cualquier compacto. Ahora definamos $\rho_n(dx) = (|x|^2 \wedge 1)\upsilon_n(dx)$. Entonces aseguramos que la sucesión de medidas $\{\rho_n\}$ es tensa, es decir

$$\sup_n \rho_n(R^d) < \infty \tag{1.25}$$

$$\lim_{l\to\infty} \sup_n \int_{|x|>l} \rho_n(dx) = 0 \tag{1.26}$$

Supongamos por el momento que las relaciones anteriores han sido probadas. Entonces por el teorema de selección existe una subsucesión $\{\rho_{n_k}\}$que converge a una medida finita ρ. Definamos υ por $\upsilon(\{0\}) = 0$ y $\upsilon(dx) = (|x|^2 \wedge 1)^{-1}\rho(dx)$ en $\{|x| > 0\}$. Ahora sea

$$g(z,x) = e^{i\langle z,x\rangle} - 1 - i\langle z,x\rangle c(x), \tag{1.27}$$

que es continua en x para z fija, y por la condición (1.14) sobre c(x), también acotada. Entonces tenemos

$$\begin{aligned} log\widehat{\mu}_n(z) &= -\frac{1}{2}\langle z, A_n z\rangle + i\langle \beta_n, z\rangle + \int g(z,x)\upsilon_n(dx) \\ &= -\frac{1}{2}\langle z, A_{n,\varepsilon} z\rangle + i\langle \beta_n, z\rangle + I_{n,\varepsilon} + J_{n,\varepsilon}, \end{aligned} \tag{1.28}$$

donde

$$I_{n,\varepsilon} = \int_{|x|\le\varepsilon} (g(z,x) + \frac{1}{2}\langle z,x\rangle^2)(|x|^2 \wedge 1)^{-1}\rho_n(dx)$$

$$J_{n,\varepsilon} = \int_{|x|>\varepsilon} g(z,x)(|x|^2 \wedge 1)^{-1}\rho_n(dx).$$

Sea E el conjunto de $\varepsilon > 0$ para las cuales $\int_{|x|=\varepsilon} \rho(dx) = 0$. Entonces como $\rho_{n_k} \to \rho$ conforme $k \to \infty$, $\lim_{k\to\infty} J_{n_k,\varepsilon} = \int_{|x|>\varepsilon} g(z,x)(|x|^2 \wedge 1)^{-1}\rho(dx)$ para $\varepsilon \in E$. Por lo que como $\upsilon(\{0\}) = 0$ tenemos

$$\lim_{E\ni\varepsilon\downarrow 0} \lim_{k\to\infty} J_{nk,\varepsilon} = \int_{R^d} g(z,x)\upsilon(dx). \tag{1.29}$$

Por otro lado por la condición (1.13) tenemos que $(g(z,x)+\frac{1}{2}\langle z,x\rangle^2)(|x|^2\wedge 1)^{-1}$ tiende a 0 conforme $x \to 0$. Entonces por (1.25) tenemos que

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\sup_n |I_{n,\varepsilon}| = 0 \tag{1.30}$$

Asi que al utilizar (1.21),(1.29),(1.30) en (1.28) y considerando las partes reales e imaginarias por separado tenemos que

$$\lim_{E\ni\varepsilon\downarrow 0}\limsup_{k\to\infty}\langle z, A_{n_k,\varepsilon}\rangle = \lim_{E\ni\varepsilon\downarrow 0}\liminf_{k\to\infty}\langle z, A_{n_k,\varepsilon}\rangle, \tag{1.31}$$

$$\limsup_{k\to\infty}\langle \beta_{n_k}, z\rangle = \liminf_{k\to\infty}\langle \beta_{n_k}, z\rangle, \tag{1.32}$$

y ambos lados de las relaciones anteriores son finitos. Ahora por (1.32) existe β tal que $\beta_{n_k} \to \beta$. Ahora como como cada lado de (1.31) es una forma cuadrática no negativa de z, es igual a $\langle z, Az\rangle$ con alguna matriz simétrica definida positiva A. Y por otro lado como $\langle z, A_{n_k,\varepsilon}\rangle$ es monótona en ε podemos olvidar la restricción de $\varepsilon \in E$. De aqui se sigue que $\widehat{\mu}(z)$ tiene la representación (24) con A,v, y β, y que (1),(2),(3) se cumplen con $n \to \infty$ a través de la subsucesión $\{\mu_{n_k}\}$. Tenemos que A,v, y β, de la triada $(A, v, \beta)_c$ son únicas, ya que se demostró la parte ii) de l teorema 6. Como la discusión anterior es válida si comenzamos con cualquier subsucesión de $\{\mu_n\}$, entonces por la unicidad explicada anteriormente (1) y (2) se cumplen para la sucesión completa. Por otro lado como

$$\lim_{E\ni\varepsilon\downarrow 0}\limsup_{k\to\infty}\langle z, A_{n_k,\varepsilon}\rangle = \lim_{E\ni\varepsilon\downarrow 0}\liminf_{k\to\infty}\langle z, A_{n_k,\varepsilon}\rangle = \langle z, Az\rangle. \tag{1.33}$$

Lo cual es equivalente a (2). Y con eso finalizamos la primera parte de la demostración, a continuación probaremos (1.25) y (1.26). Sea $[-h,h]^d = C(h)$, entonces por ((1.27))

$$-\int_{C(h)} log\widehat{\mu}_n(z)dz = \frac{1}{2}\int_{C(h)}\langle z, A_n z\rangle dz - \int_{R^d} v_n(dx)\int_{C(h)} g(z,x)dz$$

Por Fubini, dado que por (1.13) y (1.14) g(z,x) es integrable con respecto a v_n

$$\frac{1}{2}\int_{C(h)}\langle z, A_n z\rangle dz - \int_{R^d} v_n(dx)\int_{C(h)} g(z,x)dz \geq (2h)^d\int_{R^d}(1-\prod_{j=1}^d \frac{sinhx_j}{hx_j})v_n(dx)$$

dado que A es una matriz definida no negativa, y por ende $\int_{C(h)}\langle z, A_n z\rangle dz \geq 0$

(1.34)

Ahora el primer término de la expresión anterior tiende a $\int_{C(h)} log(\widehat{\mu}(z))dz$ conforme $n \to \infty$. Por lo que haciendo $h = 1$ tenemos que existe $M \in R$ tal que $|\int_{C(h)} log\widehat{\mu}_n(z)dz| \leq M$. Ahora por (1.23)

$$\inf_x(1-\prod_{j=1}^d \frac{sinx_j}{x_j})(|x|^2\wedge 1)^{-1} > 0 \tag{1.35}$$

tenemos que por (1.34)

$$\int_{R^d}(2)^{-d}(\inf_x(1-\prod_{j=1}^{d}\frac{sinx_j}{x_j})(|x|^2\wedge 1)^{-1})\rho_n(dx)$$
$$\leq \int_{R^d}(2)^{-d}(1-\prod_{j=1}^{d}\frac{sinx_j}{x_j})(|x|^2\wedge 1)^{-1}\rho_n(dx)$$
$$\leq \int_{R^d}(2)^{-d}(1-\prod_{j=1}^{d}\frac{sinx_j}{x_j})v_n(dx)$$

Y por (1.34)

$$\leq -\int_{C(h)} log\widehat{\mu}_n(z)dz$$
$$\leq |\int_{C(h)} log\widehat{\mu}_n(z)dz| < M$$

De donde se sigue que

$$\rho_n(R^d)\leq (2)^{-d}(\inf_x(1-\prod_{j=1}^{d}\frac{sinx_j}{x_j})(|x|^2\wedge 1)^{-1})^{-1}M<\infty$$

Para toda $n\in N$ y por ende $\sup_n \rho_n(R^d) < M < \infty$, lo que prueba (1.25). Ahora como $log\widehat{\mu}(z)$ es continua en C(h), tenemos

$$\lim_{h\downarrow 0}\frac{-1}{(2h)^d}\int_{C(h)} log(\widehat{\mu}(z))dz = 0, \tag{1.36}$$

Entonces por (1.34) y (1.36) tenemos que

$$\lim_{h\downarrow 0}\int_{R^d}(1-\prod_{j=1}^{d}\frac{sinhx_j}{hx_j})v_n(dx)=0$$

Por lo que para cualquier $\varepsilon>0$, existen n_0 y h_0 tal que

$$\int_{R^d}(1-\prod_{j=1}^{d}\frac{\sin h_0x_j}{h_0x_j})v_n(dx)<\varepsilon \quad \text{para } n\geq n_0.$$

Si $|x|>2\frac{\sqrt{d}}{h_0}$, entonces $|x_{jo}|>\frac{2}{h_0}$ para alguna j_0 y

$$1-\prod_{j=1}^{d}\frac{\sin h_0x_j}{h_0x_j}\geq 1-|\frac{\sin h_0x_{j_0}}{h_0x_{j_0}}|\geq 1-\frac{1}{h_0|x_{jo}|}>\frac{1}{2}. \tag{1.37}$$

Y por ende al integrar la expresión anterior con respecto a v_n obtenemos

$$\frac{1}{2}\int_{|x|>2\frac{\sqrt{d}}{h_0}} v_n(dx)<\varepsilon \quad \text{para } n\geq n_0 \tag{1.38}$$

Pero como

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{|x|>2\frac{\sqrt{d}}{h_0}} \rho_n(dx) \\ &= \frac{1}{2}\int_{|x|>2\frac{\sqrt{d}}{h_0}} (|x|^2 \wedge 1) v_n(dx) \\ &\leq \frac{1}{2}\int_{|x|>2\frac{\sqrt{d}}{h_0}} v_n(dx) \\ &\text{Y por (1.38)} \\ &< \varepsilon \quad \text{para } n \geq n_0\end{aligned}$$

Lo que prueba (1.26).
Ahora haremos la segunda parte de la demostración . Definamos $\rho_n(dx) = (|x|^2 \wedge 1)v_n(dx)$ y $\rho(dx) = (|x|^2 \wedge 1)v(dx)$. Sea E como se definió anteriormente. Entonces aproximando $g(z,x)1_{\{|x|>\varepsilon\}}$ por funciones continuas que se anulan en una vecindad del cero, y utilizando la propiedad (1) obtenemos (1.29). Ahora como las condiciones (1) y (2) implican que $\{\rho_n\}$ esta uniformemente acotada, entonces obtenemos (1.30) también. Asi que por lo anterior y utilizando (2) y (3) en (1.28), tenemos

$$\lim_{n\to\infty} log\widehat{\mu}_n(z) = -\frac{1}{2}\langle z, Az\rangle + i\langle\beta, z\rangle + \int g(z,x)v(dx).$$

Ahora como el lado derecho de la relación anterior es igual al $log\widehat{\mu}(z)$. entonces $\mu_n \to \mu$.
Ahora probaremos la primera parte del teorema 6.
Prueba del teorema 6
i)Entonces dada una medida de probabilidad μ infinitamente divisible, elegimos una sucesión $t_n \downarrow 0$. Ahora definimos μ_n por

$$\widehat{\mu}_n(z) = exp[t_n^{-1}(\widehat{\mu}(z)^{t_n} - 1)] = exp[t_n^{-1}\int_{R^d/0}(e^{i\langle z,x\rangle} - 1)\mu^{t_n}(dx)].$$

La distribución μ_n es Poisson compuesta. Notemos que

$$\widehat{\mu}_n(z) = exp[t_n^{-1}(e^{t_n log\widehat{\mu}(z)} - 1)] = exp[t_n^{-1}(t_n log\widehat{\mu}(z) + O(t_n^2))]$$

para cada z conforme $n \to \infty$. Asi $\widehat{\mu}_n(z) \to e^{log\widehat{\mu}(z)} = \widehat{\mu}(z)$. Ahora como μ_n tiene la representación (1.15) en el teorema 7, podemos aplicarlo y concluir que $\widehat{\mu}(z)$ tiene la representación con triada $(a, v, \beta)_c$. Y esta representación pueden ser escrita como (1.11).

Corolario 2 *Toda distribución infinitamente divisible es el límite de una sucesión de distribuciones Poisson compuesta.*

Capítulo 2

Distribuciones Estables

Las distribuciones estables constituyen una clase muy rica de distribuciones de probabilidad que exhiben colas pesadas y sesgo y tienen propiedades matemáticas muy importantes, fueron introducidas por Lévy en los 1920's y han sido estudiadas extensivamente desde los 1930's.
Parte de la importancia de las distribuciones estables radica en que han sido propuestas como modelos para diversos sistemas físicos y económicos. Existen dos razones priomordiales por las que se utilizan las distribuciones estables para describir un sistema. La primera es que existen razones teóricas sólidas para esperar un modelo estable, por ejemplo la reflexión sobre un espejo en rotación cuyo modelo es una distribución Cauchy, o los campos gravitatorios de estrellas, que se modelan a partir de una distribución Holtsmark. El segundo argumento para modelar sistemas utilizando distribuciones estables es empírica, ya que una gran cantidad de conjuntos de datos exhiben colas pesadas o algún tipo de sesgo.
Comenzaremos esta sección por definir a las distribuciones estables, y a las estrictamente estables, posteriormente exhibiremos la forma que toma la representación de Lévy-Khintchine, para esta clase de distribuciones.

Definición 3 *Sea μ una medida de probabilidad infinitamente divisible en R^d. Es llamada estable si, para cualquier $a > 0$, existen $b > 0$ y $c \in R^d$ tales que*

$$\widehat{\mu}(z)^a = \widehat{\mu}(bz)e^{i\langle c,z\rangle}. \tag{2.1}$$

Es llamada estrictamente estable si, para cualquier $a > 0$, existe $b > 0$ tal que

$$\widehat{\mu}(z)^a = \widehat{\mu}(bz).$$

Antes de enfocarnos en la existencia del exponente, demostraremos algunos lemas.

Lema 3 *i)Sea X una variable aleatoria distinta de cero en R^d. Suponga que $b_1, b_2 \in (0,\infty)$ satisfacen $b_1 X \stackrel{d}{=} b_2 X$. Entonces $b_1 = b_2$. ii)Sea X una vari-*

able aleatoria no constante en R^d. Suponga que $b_1, b_2 \in (0, \infty)$ y $c_1, c_2 \in R^d$ satisfacen $b_1X + c_1 \stackrel{d}{=} b_2X + c_2$. Entonces $b_1 = b_2$ y $c_1 = c_2$.

Prueba
i) Supongamos que $b_1 \neq b_2$. Entonces $X \stackrel{d}{=} bX$ con $b \in (0,1)$. Por lo que iterando la relación anterior tenemos que $X \stackrel{d}{=} b^n X$ para $n = 1, 2, \ldots$, asi que haciendo $n \to \infty$ tenemos que $X = 0$ a.s. lo cual es una contradicción . ii) Tenemos que $X \stackrel{d}{=} b_2^{-1}(b_1X + c_1 - c_2)$. Asi que podemos suponer que $X \stackrel{d}{=} bX + c$ con $b > 0$ y $c \in R^d$ y afirmamos que b=1 y c=0. Sean X_1 y X_2 variables aleatorias independientes, cada una con la misma distribución que X. Entonces

$$X_1 - X_2 \stackrel{d}{=} (bX_1 + c) - (bX_2 + c) = b(X_1 - X_2).$$

La variable aleatoria $X_1 - X_2$ es distinta de cero, dado que X es no constante. Entonces por i) b=1. Por lo tanto $X \stackrel{d}{=} X + nc$ para $n = 1, 2, \ldots$, de lo que se sigue que c=0.

Lema 4 *Sea X una variable aleatoria no constante con distribución estable en R^d. Entonces b, y c en la definición (1) estan unívocamente determinadas por a.*

Prueba. Supongamos que existen $b_1 > 0$, $c_1 \in R^d$ y $b_2 > 0$ $c_2 \in R^d$ tal que satisfacen la relación de estabilidad definida en (2.1), entonces

$$b_1X + c_1 \stackrel{d}{=} b_2X + c_2$$

Ahora como X es una variable aleatoria no constente entonces por el lema anterior podemos concluir que $b_1 = b_2$ y $c_1 = c_2$. Por lo que b y c, estan unívocamente determinadas por a.

Teorema 8 *Sea X una variable aleatoria con distribución estable y $a, b > 0$ las constantes de la definición (3), entonces existe $H > 0$ tal que, $b = a^H$.*

Prueba. Como sabemos que b esta unívocamente determinada por a, denotaremos a b por b(a).
i)Primero demostraremos que $b(a^{-1}) = b^{-1}(a)$. Sea μ la distribución de la variable aleatoria X, entonces por la definición de estabilidad tenemos que

$$\widehat{\mu}(z)^a = \widehat{\mu}(b(a)z)e^{i\langle c(a), z\rangle} \tag{2.2}$$

Ahora como la distribución μ es infinitamente divisible entonces podemos definir al logaritmo por lo que

$$\widehat{\mu}(z) = \widehat{\mu}(b(a)z)^{1/a}e^{i\langle (1/a)c(a), z\rangle}$$

Asi que haciendo z'=bz

$$\widehat{\mu}(z'/b(a)) = \widehat{\mu}(z')^{1/a}e^{i\langle (1/a)c(a), (z'/b(a))\rangle}$$

Entonces
$$\widehat{\mu}(z')^{1/a} = \widehat{\mu}(z'/b(a))e^{-i\langle(1/a)c(a),(z'/b(a))\rangle}$$

Por lo que por la unicidad de $b(a^{-1}), b(a^{-1}) = b^{-1}(a)$. ii)Ahora veremos que $b(aa') = b(a)b(a')$. Tenemos que por la definición de estabilidad

$$\widehat{\mu}(z)^a = \widehat{\mu}(b(a)z)e^{i\langle c(a),z\rangle}, \text{ y } \widehat{\mu}(z)^{a'} = \widehat{\mu}(b(a')z)e^{i\langle c(a'),z\rangle}$$

Asi que

$$\begin{aligned}
\widehat{\mu}(z)^{aa'} &= (\widehat{\mu}(z)^a)^{a'} = (\widehat{\mu}(b(a)z)e^{i\langle c(a),z\rangle})^{a'} \\
&= (\widehat{\mu}(b(a)z))^{a'}e^{i\langle a'c(a),z\rangle} = (\widehat{\mu}(b(a)b(a')z)e^{i\langle c(a'),b(a)z\rangle})e^{i\langle a'c(a),z\rangle} \\
&= \widehat{\mu}(b(a)b(a')z)e^{i\langle a'c(a)+b(a)c(a'),z\rangle}
\end{aligned}$$

Asi que por la unicidad de $b(aa')$, $b(aa') = b(a)b(a')$ -Por último demostraremos que si $a_n \to a$ con $0 < a < \infty$, entonces $b(a_n) \to b(a)$ Tenemos que para toda $n = 1, 2, \ldots$ por la definicón de estabilidad

$$\widehat{\mu}(z)^{a_n} = \widehat{\mu}(b(a_n)z)e^{i\langle c(a_n),z\rangle}$$

Por lo que por un lado

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \widehat{\mu}(z)^{a_n} &= \lim_{n\to\infty} exp(a_n ln\widehat{\mu}(z)) = exp(\lim_{n\to\infty} a_n ln\widehat{\mu}(z)) \\
&= exp(aln\widehat{\mu}(z)) = \widehat{\mu}(z)^a
\end{aligned}$$

Por otro aprovechando la continuidad de $\widehat{\mu}(z)$ tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{\mu}(b(a_n)(z)e^{i\langle c(a_n),z\rangle} = \widehat{\mu}(\lim_{n\to\infty} b(a_n)z)e^{i\lim_{n\to\infty}\langle c(a_n),z\rangle}$$

Asi que igualando ambos lados obtenemos

$$\widehat{\mu}(z)^a = \widehat{\mu}(\lim_{n\to\infty} b(a_n)z)e^{i\lim_{n\to\infty}\langle c(a_n),z\rangle}$$

Por lo que por la unicidad de $b(a)$, concluimos que $b(a) = \lim_{n\to\infty} b(a_n)$. Ahora definamos $H = ln\ b(e)$, entonces por la definición de estabilidad tenemos

$$\widehat{\mu}(z)^e = \widehat{\mu}(b(e)z)e^{i\langle c,z\rangle} = \widehat{\mu}(exp(lnb(e))z)e^{i\langle c,z\rangle} = \widehat{\mu}(e^H z)e^{i\langle c,z\rangle}$$

Entonces utilizando i) y ii) tenemos que para toda $s \in Z$

$$b(e^s) = b(e)^s$$

Por otro lado supongamos que $s = \frac{1}{n}$ entonces

$$b(e) = b(e^{\frac{n}{n}}) = b(e^{\frac{1}{n}})^n$$

Por lo que al extraer raíz enésima obtenemos

$$b(e)^{\frac{1}{n}} = b(e^{\frac{1}{n}})$$

Asi que podemos concluir que para $s \in Q$

$$b(e^s) = b(e)^s$$

Ahora sea x en R entonces existe una sucesión $\{a_n\} \in Q$ tal que $a_n \to x$, por lo que utilizando la relación anterior tenemos

$$b(e^x) = \lim_{n\to\infty} b(e^{a_n}) = \lim_{n\to\infty} b(e)^{a_n} = b(e)^x$$

Ahora tomemos $t > 0$ entonces como la función $f(x) = e^x$ es suprayectiva en los reales positivos, tenemos que existe $s \in R$ tal que $t = e^s$. Por lo que

$$\begin{aligned}\widehat{\mu}(z)^t &= \widehat{\mu}(b(t)z)e^{i\langle c(t),z\rangle} = \widehat{\mu}(b(e^s)z)e^{i\langle c(t),z\rangle}\\ &= \widehat{\mu}(b(e)^s z)e^{i\langle c(t),z\rangle} = \widehat{\mu}((e^H)^s z)e^{i\langle c(t),z\rangle}\\ &= \widehat{\mu}(t^H z)e^{i\langle c(t),z\rangle}\end{aligned}$$

Con lo anterior podemos concluir por la unicidad de b(t) que b(t)=t^H para toda $t > 0$. Gracias al resultado anterior estamos en condicion de definir al exponente

Definición 4 *La H obtenida anteriormente es conocida como el* exponente *de la distribución estable. Por otro lado a* $\alpha = \frac{1}{H}$ *se le conoce como elíndice de estabilidad; y a una distribución con índice de estabilidad* α*, se le llama distribución* α*-estable.*

A continuación determinaremos las funciones características de las distribuciones estables. Para hacerlo sea $S = \{x \in R^d : |x| = 1\}$, la esfera unitaria, y sea, para $b > 1$ y $n \in Z$, $S_n(b) = \{x \in R^d : b^n < |x| \leq b^{n+1}\}$. Y consideremos la siguiente transformación T_r definida sobre medidas ρ en R^d por

$$(T_r\rho)(B) = \rho(r^{-1}B) \tag{2.3}$$

Teorema 9 *Sea* μ *infinitamente divisible y no trivial en* R^d *con terna generadora* (A, ν, γ)*. Sea* $0 < \alpha < 2$*. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
1)μ *es* α*-estable*
2)A=0 y

$$\nu = b^{-\alpha}T_b\nu \quad para \quad toda \quad b > 0 \tag{2.4}$$

3)A=0 y existe una medida finita λ *en S tal que*

$$\nu(B) = \int_S \lambda(d\xi)\int_0^\infty 1_B(r\xi)\frac{dr}{r^{1+\alpha}} \quad para \quad B \in B(R^d) \tag{2.5}$$

Prueba.
Supongamos i) entonces para $a > 0$ tenemos que $\widehat{\mu}(z)^a$ tiene terna generadora $(aA, a\nu, a\alpha)$. Por otro lado como la distribución μ es α-estable entonces por la definición de estabilidad tenemos que

$$\widehat{\mu}(z)^a = \widehat{\mu}(a^H z)e^{i\langle c,z\rangle}$$

La distribución con función característica dada por el lado derecho de la ecuación anterior tiene terna generadora $(a^{2H}A, T_b\nu, \gamma(a))$ para algun $\gamma(a) \in R^d$ y $b = a^H$. Asi que por la unicidad de la representación de Lévy-Khintchine tenemos que $aA = a^{2H}A$ y $a\nu = T_b\nu$. Ahora como la distribución es no trivial tenemos que $A \neq 0$ o $\nu \neq 0$. Si $A \neq 0$, entonces $H = \frac{1}{2}$ lo cual como $0 < \alpha < 2$ hace el caso $A = 0$ imposible. Supongamos que $\nu \neq 0$, entonces se sigue que $a\nu = T_b\nu$, pero como $b = a^H$ y $H = \frac{1}{\alpha}$ entonces $\nu = b^{-\alpha}T_b\nu$. Y como es válido para toda $a > 0$, tenemos que $\nu = b^{-\alpha}T_b\nu$ para toda $b > 0$. Ahora supongamos 2). Entonces escribamos, para $E \subset (0, \infty)$ y $C \subset S$,

$$EC = \{x \in R^d - \{0\} : |x| \in E \quad y \quad |x|^{-1}x \in C\}. \tag{2.6}$$

Y definamos una medida finita λ en S mediante

$$\lambda(C) = \alpha\nu((1, \infty)C) \quad para \quad C \in B(S). \tag{2.7}$$

Ahora definamos $\nu'(B)$ por el lado derecho de (2.5). Entonces ν' es una medida en R^d, con $\nu'(\{0\}) = 0$ y, para $b > 0$ y $C \in B(S)$,

$$\begin{aligned}\nu'((b, \infty)C) &= \lambda(C) \int_b^\infty \frac{dr}{r^{1+\alpha}} = \alpha^{-1}b^{-\alpha}\lambda(C) \\ &= \nu(b(1, \infty)C) = \nu((b, \infty)C)\end{aligned}$$

por(2.4). Se sigue que $\nu'(B) = \nu(B)$ para todo $B \in B(R^d - \{0\})$. (Para el resultado anterior utilizamos el lema de Dynkin. Se fija $\varepsilon > 0$ y se considera al conjunto $\{x : |x| > \varepsilon\}$. Sea A_ε la colección de todos los conjuntos de la forma $(b, \infty)C$ con $b > \varepsilon$ y $C \in B(S)$. El uso del lema de Dynkin lleva a la conclusión de que $\nu = \nu'$ en $\sigma(A_\varepsilon)$, donde $\sigma(A_\varepsilon)$ es la colección de todos los borelianos en $\{x : |x| > \varepsilon\}$. Se sigue que $\nu = \nu'$ en $B \in B(R^d - \{0\})$.) Y asi obtenemos 3). Ahora supongamos 3) y sea $b > 0$ y $B \in B(R^d - \{0\})$ entonces

$$\begin{aligned}\nu(B) &= \int_S \lambda(d\xi) \int_0^\infty 1_B(r\xi) \frac{dr}{r^{1+\alpha}} = b^{-\alpha} \int_S \lambda(d\xi) \int_0^\infty 1_B(r'\xi) \frac{dr'}{(r')^{1+\alpha}} \quad \text{con r'=r/b} \\ &= b^{-\alpha}\nu(b^{-1}B) = b^{-\alpha}T_b\nu(B)\end{aligned}$$

Y como es válido para todo $b > 0$ y $B \in B(R^d - \{0\})$, tenemos que $\nu = b^{-\alpha}T_b\nu$ para todo $b > 0$, y obtenemos 2). Ahora supongamos 2), tenemos que como $\widehat{\mu}(z)^{b^\alpha}$, tiene terna generadora $(b^\alpha A, b^\alpha\nu, b^\alpha\gamma)$, dado que por hipotesis $A = 0$ y $\nu = b^{-\alpha}T_b\nu$ para toda $b > 0$, entonces la terna generadora para $\widehat{\mu}(z)^{b^\alpha}$ es $(0, T_b\nu, b^\alpha\gamma)$. Dado que $\widehat{\mu}(bz)$ tiene terna generadora $(0, T_b\nu, \gamma_b)$ con $\gamma_b = b\gamma + \int bx(1_D(bx) - 1_D(x))\nu(dx)$ donde $D = \{x \in R^d : |x| \leq 1\}$. Entonces por la unicidad de la representación de Lévy-Khintchine tenemos que

$$\widehat{\mu}(z)^{b^\alpha} = \widehat{\mu}(bz)e^{i\langle c, b^\alpha\gamma - \gamma_b\rangle}$$

Lo que muestra que μ es α-estable, y asi obtenemos 1.

Observación 3 *Hay que notar que en el teorema anterior la medida λ en S esta unívocamente determinada por ν, ya que (2.5) implica (2.7). Se acostumbra llamar al múltiplo positivo constante de λ "la parte esférica de la medida de Lévy ν". Para cualquier medida finita no trivial λ en S y para cualquier $0 < \alpha < 2$ podemos encontrar una distribución α-estable μ con medida de Lévy definida por (2.5). En realidad se sigue de (2.5) que*

$$\int_{R^d} f(x)\nu(dx) = \int_S \lambda(d\xi) \int_0^\infty f(r\xi)\frac{dr}{r^{1+\alpha}} \tag{2.8}$$

para cualquier función medible no negativa f. Asi que

$$\begin{aligned}\int_{R^d} (|x|^2 \wedge 1)\nu(dx) &= \int_S \lambda(d\xi) \int_0^\infty (|r\xi|^2 \wedge 1)\frac{dr}{r^{1+\alpha}} \\ &= \lambda(S)(\int_0^1 r^{1-\alpha}dr + \int_0^\infty \frac{dr}{r^{1+\alpha}}) = \lambda(S)(\frac{1}{2-\alpha} + \frac{1}{\alpha}) < \infty\end{aligned}$$

Como $\int(|x|^2 \wedge 1)\nu(dx)$ es finita, existe una distribución infinitamente divisible μ con medida de Lévy ν y se aplica el teorema anterior. Podemos considerar $r^{-(1+\alpha)}dr$ como la parte radial de la medida de Lévy de la distribución α-estable. Hay que notar que conforme α decrece, $r^{-(1+\alpha)}$ se hace mas pequeña para $0 < r < 1$ y mas grande para $1 < r < \infty$. A continuación demostraremos una proposición que nos permitira caracterizar a la medida de Lévy ν de una distribución α-estable, en términos del índice.

Proposición 1 *Sea μ una distribución α-estable no trivial en R^d con $0 < \alpha < 2$. Sea ν su medida de Lévy. Entonces, $\int_{|x|\leq 1} |x|\nu(dx)$ es finita si y solo si $0 < \alpha < 1$. La integral $\int_{|x|>1} |x|\nu(dx)$ es finita si y solo si $1 < \alpha < 2$. La masa total de ν siempre es infinita.*

Prueba. Sea $b > 1$ y $S_n(b) = \{x \in R^d : b^n < |x| \leq b^{n+1}\}$ para $n \in Z$, entonces tenemos que $S_n(b) = b^n S_0(b)$. Ahora por el teorema anterior sabemos que $b^\alpha \nu = T_b \nu$, asi que

$$\begin{aligned}\nu(S_n(b)) &= \nu(b^n S_0(b)) = T_{b^{-n}}\nu(S_0(b)) \quad \text{por la definición (2.3)de } T_b\nu, \\ &= b^{-n\alpha}\nu(S_0(b)) \qquad \text{por(2.4)}\end{aligned}$$

Con un cambio de variable, y con la relación anterior obtenemos

$$\int_{S_n(b)} |x|\nu(dx) = b^{n(1-\alpha)} \int_{S_0(b)} |x|\nu dx$$

Ahora como $x \in S_0(b)$, $|x| \leq b$, asi que

$$\int_{S_0(b)} |x|\nu dx \leq b \int_{S_0(b)} \nu dx \leq \int (|x|^2 \wedge 1)\nu(dx) \leq \infty$$

Sea $Z^- = \{z \in Z : z < 0\}$ y $Z^+ = \{z \in Z : z \geq 0\}$, y como $\int_{S_0(b)} |x|\nu dx \leq \infty$, tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{|x|\leq 1} |x|\nu(dx) &= \sum_{Z^-} \int_{S_n(b)} |x|\nu(dx) = \sum_{Z^-} b^{n1-\alpha} \int_{S_0(b)} |x|\nu dx \\ &= \int_{S_0(b)} |x|\nu dx \sum_{Z^-} b^{n(1-\alpha)}\end{aligned}$$

que es finita si y solo si $\alpha < 1$

Por otro lado

$$\begin{aligned}\int_{|x|>1} |x|\nu(dx) &= \sum_{Z^+} \int_{S_n(b)} |x|\nu(dx) = \sum_{Z^+} b^{n1-\alpha} \int_{S_0(b)} |x|\nu dx \\ &= \int_{S_0(b)} |x|\nu dx \sum_{Z^+} b^{n(1-\alpha)}\end{aligned}$$

la cual es finita si y solo si $\alpha > 1$

Ahora

$$\nu(S_0(b)) = \int_{S_0(b)} \nu(dx) \leq \int_{R^d} (|x|^2 \wedge 1)\nu(dx) < \infty$$

Por otro lado como $\nu(S_n(b)) = b^{-n\alpha}\nu(S_0(b))$, y $\nu(S_0(b)) < \infty$

$$\begin{aligned}\nu(R^d) = \sum_{n\in Z} \nu(S_n(b)) &= \sum_{n\in Z} b^{-n\alpha}\nu(S_0(b)) \\ &= \nu(S_0(b)) \sum_{n\in Z} b^{-n\alpha} = \infty\end{aligned}$$

Y asi finalizamos la proposición.

Por la proposición anterior tenemos la siguiente representación de una distribución α-estable no trivial μ con $0 < \alpha < 2$. Si $0 < \alpha < 1$, entonces μ tiene corrimiento γ_0 y

$$\widehat{\mu}(z) = exp[\int_S \lambda(d\xi) \int_0^\infty (e^{i\langle z,r\xi\rangle} - 1)\frac{dr}{r^{1+\alpha}} + i\langle\gamma_0, z\rangle]. \tag{2.9}$$

Si $1 < \alpha < 2$, entonces μ tiene centro γ_1 y

$$\widehat{\mu}(z) = exp[\int_S \lambda(d\xi) \int_0^\infty (e^{i\langle z,r\xi\rangle} - 1 - i\langle z, r\xi\rangle)\frac{dr}{r^{1+\alpha}} + i\langle\gamma_1, z\rangle]. \tag{2.10}$$

Que son casos particulares de (1.19) y (1.18). Si $\alpha = 1$ entonces

$$\widehat{\mu}(z) = exp[\int_S \lambda(d\xi) \int_0^\infty (e^{i\langle z,r\xi\rangle} - 1 - i\langle z, r\xi\rangle 1_{(0,1]}(r))\frac{dr}{r^2} + i\langle\gamma, z\rangle].$$

Teorema 10 *Sea μ infinitamente divisible y no trivial en R^d con terna generadora (A, ν, γ).*
(i)Sea $0 < \alpha < 1$. Entonces μ es estrictamente α-estable si y solo si μ es α-estable y el corrimiento $\gamma_0 = 0$.
(ii)Sea $\alpha = 1$. Entonces μ es estrictamente $1-$estable si y solo si μ es $1-$estable, $\nu \neq 0$, y la medida λ en el teorema (9) satisface

$$\int_S \xi\lambda(d\xi) = 0 \tag{2.11}$$

o A=0, $\nu = 0$, y $\gamma \neq 0$.
(iii)Sea $1 < \alpha < 2$. Entonces μ es estrictamente α-estable si y solo si μ es α-estable y el centro $\gamma_1 = 0$.

Prueba
i)Sea $0 < \alpha < 1$, y $b > 0$ entonces por (2.9)

$$\begin{aligned}
\widehat{\mu}(bz) &= exp[\int_S \lambda(d\xi)\int_0^\infty (e^{i\langle bz, r\xi\rangle} - 1)\frac{dr}{r^{1+\alpha}} + i\langle\gamma_0, bz\rangle] \\
&= exp[\int_S \lambda(d\xi)\int_0^\infty (e^{i\langle z, br\xi\rangle} - 1)\frac{dr}{r^{1+\alpha}} + ib\langle\gamma_0, z\rangle] \\
&= exp[b^\alpha \int_S \lambda(d\xi)\int_0^\infty (e^{i\langle z, r\xi\rangle} - 1)\frac{dr}{r^{1+\alpha}} + ib\langle\gamma_0, z\rangle] \\
&= \widehat{\mu}(z)^{b^\alpha}(exp[i(b - b^\alpha)\langle\gamma_0, z\rangle])
\end{aligned}$$

Asi que $\widehat{\mu}(bz) = \widehat{\mu}(z)^{b^\alpha}$ si y solo si $\gamma_0 = 0$.
(ii)Supongamos que $\nu \neq 0$ entonces sea $b > 0$

$$\begin{aligned}
&\widehat{\mu}(bz) = exp[\int_S \lambda(d\xi)\int_0^\infty (e^{i\langle bz, r\xi\rangle} - 1 - i\langle bz, r\xi\rangle 1_{(0,1]}(r))\frac{dr}{r^2} + i\langle\gamma, bz\rangle] \\
&= exp[\int_S \lambda(d\xi)\int_0^\infty (e^{i\langle z, br\xi\rangle} - 1 - i\langle z, br\xi\rangle 1_{(0,1]}(r))\frac{dr}{r^2} + ib\langle\gamma, z\rangle] \\
&= exp[b\int_S \lambda(d\xi)\int_0^\infty (e^{i\langle z, r\xi\rangle} - 1 - i\langle z, r\xi\rangle 1_{(0,1]}(r))\frac{dr}{r^2} + ib\langle\gamma, z\rangle \\
&+ \int_S \lambda(d\xi)\int_0^\infty i\langle z, br\xi\rangle(1_{(0,1]}(br) - 1_{(0,1]}(r))\frac{dr}{r^2}] \\
&= \widehat{\mu}(z)^b(exp[ib\langle z, \int_S \lambda(d\xi)\int_0^\infty r\xi(1_{(0,1]}(br) - 1_{(0,1]}(r))\frac{dr}{r^2}\rangle])
\end{aligned}$$

Entonces $\widehat{\mu}(bz) = \widehat{\mu}(z)^b$ si y solo si $\int_S \lambda(d\xi)\int_0^\infty r\xi(1_{(0,1]}(br) - 1_{(0,1]}(r))\frac{dr}{r^2} = 0$.
Pero

$$\begin{aligned}
\int_S \lambda(d\xi)\int_0^\infty r\xi(1_{(0,1]}(br) - 1_{(0,1]}(r))\frac{dr}{r^2} &= \int_S \xi\lambda(d\xi)\int_0^\infty r(1_{(1/b,1]})\frac{dr}{r^2} \\
&= \int_S \xi\lambda(d\xi)\int_{1/b}^1 r\frac{dr}{r^2} = ln(b)\int_S \xi\lambda(d\xi)
\end{aligned}$$

Por lo que como la relación anterior es válida para toda $b > 0$ tenemos que$\widehat{\mu}(bz) = \widehat{\mu}(z)^b$ si y solo si $\int_S \xi\lambda(d\xi) = 0$. Ahora supongamos que $\nu = 0$ entonces como μ es no trivial necesariamente $\gamma \neq 0$ y

$$\widehat{\mu}(bz) = i\langle\gamma, bz\rangle = ib\langle\gamma, z\rangle = \widehat{\mu}(z)^b$$

Lo que muestra que μ es 1-estable.
(iii)Sea $1 < \alpha < 2$, y $b > 0$ entonces por (2.10)

$$\begin{aligned}
\widehat{\mu}(bz) &= exp[\int_S \lambda(d\xi)\int_0^\infty (e^{i\langle bz, r\xi\rangle} - 1 - i\langle bz, r\xi\rangle)\frac{dr}{r^{1+\alpha}} + i\langle\gamma_1, bz\rangle] \\
&= exp[\int_S \lambda(d\xi)\int_0^\infty (e^{i\langle z, br\xi\rangle} - 1 - i\langle z, br\xi\rangle))\frac{dr}{r^{1+\alpha}} + ib\langle\gamma_1, z\rangle] \\
&= exp[b^\alpha \int_S \lambda(d\xi)\int_0^\infty (e^{i\langle z, r\xi\rangle} - 1 - i\langle z, r\xi\rangle))\frac{dr}{r^{1+\alpha}} + ib\langle\gamma_1, z\rangle] \\
&= \widehat{\mu}(z)^{b^\alpha}(exp[i(b - b^\alpha)\langle\gamma_1, z\rangle])
\end{aligned}$$

Asi que $\widehat{\mu}(bz) = \widehat{\mu}(z)^{b^\alpha}$ si y solo si $\gamma_1 = 0$.
En el siguiente teorema mostraremos la representación mas usual de la funcion característica de las distribuciones estables.

Teorema 11 *Sea $0 < \alpha < 2$. Si μ es α-estable y no trivial en R^d, entonces existe una medida finita distinta de cero λ_1 en S y τ en R^d tal que*

$$\widehat{\mu}(z) = exp[-\int_S |\langle z, \xi\rangle|^\alpha(1 - itan\frac{\pi\alpha}{2}sgn\langle z, \xi\rangle)\lambda_1(d\xi) + i\langle\tau, z\rangle] \qquad para \quad \alpha \neq 1, \tag{2.12}$$

$$\widehat{\mu}(z) = exp[-\int_S (|\langle z, \xi\rangle| + i\frac{2}{\pi}\langle z, \xi\rangle log|\langle z, \xi\rangle|)\lambda_1(d\xi) + i\langle\tau, z\rangle] \qquad para \quad \alpha = 1. \tag{2.13}$$

La medida λ_1 y el vector τ estan unívocamente determinados por μ. Del mismo modo para toda medida finita distinta de cero λ_1 en S y $\tau \in R^d$, el lado derecho de (2.12) o (2.13) es la función característica de una distribución α-estable no trivial. Si $0 < \alpha < 1$ o $1 < \alpha < 2$ entonces una condición necesaria y suficiente para una distribución α-estable no trivial μ para se estrictamente α-estable es que $\tau = 0$. Una condición necesaria y suficiente para una distribución $1-$estable no trivial para ser estrictamente $1 - $estable es que

$$\int_S \xi\lambda_1(d\xi) = 0. \tag{2.14}$$

*Prueba.*Denotaremos al producto interior simplemente como $\langle z, \xi\rangle = z\xi$. Si $0 < \alpha < 1$, notamos que al conjugar la relación (5.11) del apéndice obtenemos:

$$\int_0^\infty (e^{-ir} - 1)r^{-(1+\alpha)}dr = \Gamma(-\alpha)e^{i\pi\alpha/2} \tag{2.15}$$

Entonces utilizando (A2.1) y su conjugado tenemos:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty (e^{irz\xi}-1)r^{-(1+\alpha)}dr &= 1_{z\xi\geq 0}\int_0^\infty (e^{ir|z\xi|}-1)r^{-(1+\alpha)}dr\\ &+ 1_{z\xi<0}\int_0^\infty (e^{-ir|z\xi|}-1)r^{-(1+\alpha)}dr\\ &= |z\xi|^\alpha\Gamma(-\alpha)(exp[-i\frac{\pi\alpha}{2}]1_{z\xi\geq 0}+exp[i\frac{\pi\alpha}{2}]1_{z\xi<0})\\ &= |z\xi|^\alpha\Gamma(-\alpha)exp[-i\frac{\pi\alpha}{2}sign(z\xi)]\\ &= \Gamma(-\alpha)(cos\frac{\pi\alpha}{2})|z\xi|^\alpha(1-itan\frac{\pi\alpha}{2}sign(z\xi)),\end{aligned}$$

Asi que

$$\begin{aligned}\int_S\lambda(d\xi)\int_0^\infty (e^{irz\xi}-1)r^{-(1+\alpha)}dr &= \int_S\lambda(d\xi)\Gamma(-\alpha)(cos\frac{\pi\alpha}{2})|z\xi|^\alpha(1-itan\frac{\pi\alpha}{2}sign(z\xi))\\ &= -\int_S\lambda_1(d\xi)|z\xi|^\alpha(1-itan\frac{\pi\alpha}{2}sign(z\xi))\end{aligned}$$

Y haciendo $\lambda_1=-\Gamma(-\alpha)(cos\frac{\pi\alpha}{2})$ reescribimos (2.9).Si $1<\alpha<2$ entonces utilizando (2.10) y la relación (5.12)del apéndice en lugar de (2.9) y (5.11), obtenemos (2.12) de manera similar. Si $\alpha=1$, tenemos que el complejo conjugado de la relación (5.13) es

$$\int_0^\infty (e^{-irz\xi}-1+irz\xi 1_{(0,1]}(r))r^{-2}dr=-\frac{\pi z}{2}+izlog(z)-icz \tag{2.16}$$

Asi que utilizando (A2.3) y su complejo conjugado tenemos

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty (e^{irz\xi}-1-irz\xi 1_{(0,1]}(r))r^{-2}dr = 1_{z\xi\geq 0}\int_0^\infty (e^{ir|z\xi|}-1-ir|z\xi|1_{(0,1]}(r))r^{-2}dr\\ &+1_{z\xi<0}\int_0^\infty (e^{-ir|z\xi|}-1+ir|z\xi|1_{(0,1]}(r))r^{-2}dr\\ &=1_{z\xi\geq 0}(-\frac{\pi|z\xi|}{2}-i|z\xi|log(|z\xi|)+ic|z\xi|)+1_{z\xi<0}(-\frac{\pi|z\xi|}{2}+i|z\xi|log(|z\xi|)-ic|z\xi|)\\ &=1_{z\xi\geq 0}(-\frac{\pi|z\xi|}{2}-iz\xi log(|z\xi|)+icz\xi)+1_{z\xi<0}(-\frac{\pi|z\xi|}{2}-iz\xi log(|z\xi|)+icz\xi)\\ &=-\frac{\pi|z\xi|}{2}-iz\xi log(|z\xi|)+icz\xi\end{aligned}$$

(con la convención de que $z\xi log|z\xi|=0$ si $z\xi=0$), asi que aplicando la relación anterior a (2.10) obtenemos

$$\begin{aligned}&\int_S\lambda(d\xi)\int_0^\infty (e^{i\langle z,r\xi\rangle}-1-i\langle z,r\xi\rangle 1_{(0,1]}(r))\frac{dr}{r^2}+i\langle\gamma,z\rangle\\ &=\int_S(-\frac{\pi|z\xi|}{2}-iz\xi log(|z\xi|)\lambda(d\xi)+icz\xi)+i\langle\gamma,z\rangle\\ &=-\int_S(|z\xi|+i\frac{2}{\pi}z\xi log(|z\xi|)+icz\xi)\lambda_1(d\xi)+i\langle\tau,z\rangle\end{aligned}$$

Haciendo $\lambda_1 = \frac{\pi}{2}\lambda$ y $\tau = c\int_S \xi\lambda(d\xi) + \gamma$, obtenemos (2.13). La unicidad de λ_1 y τ y la afirmación opuesta se deducen de la observación 3. Si $0 < \alpha < 1$, entonces τ es igual al corrimiento γ_0; si $1 < \alpha < 2$, entonces τ es el centro γ_1. Asi que en los dos casos anteriores la condición para la estabilidad estricta es que $\tau = 0$, como puede ser visto del teorema 10. En el caso $\alpha = 1$, la condición (2.11) para la estabilidad estricta es equivalente a (2.14) (dado que $\lambda_1 = \frac{\pi}{2}\lambda$). A continuación discutiremos el caso unidimensional, es decir cuando d=1.

Teorema 12 *Sea d=1, y $0 < \alpha < 2$. Si μ es no trivial y α-estable, entonces*

$$\widehat{\mu}(\theta) = exp\{-\sigma^\alpha|\theta|^\alpha(1 - i\beta sign(\theta)tan(\frac{\pi\alpha}{2}) + i\tau\theta\} \quad para\ \alpha \neq 1, \tag{2.17}$$

$$\widehat{\mu}(\theta) = exp\{-\sigma|\theta|(1 - i\frac{2}{\pi}\beta sign(\theta)ln|\theta|) + i\tau\theta\} \quad para\ \alpha = 1, \tag{2.18}$$

con $\sigma > 0$, $\beta \in [-1,1]$, y $\tau \in R$. Aqui σ, β, y τ, estan unívocamente determinados por μ. Del mismo modo, para toda $\sigma > 0$, $\beta \in [-1,1]$, y $\tau \in R$, existe una distribución no trivial α-estable μ que satisface (2.17) o (2.18). Una condición necesaria y suficiente para que una distribución α-estable μ, sea estrictamente α-estable es que $\tau = 0$ si $\alpha \neq 1$, o que $\beta = 0$ si $\alpha = 1$.

Prueba Tenemos que $S = \{-1, 1\}$, por lo que sea $c_1 = \lambda_1\{1\}$, y $c_2 = \lambda_1\{-1\}$, para la medida λ_1 del teorema 10. Ahora denotemos por $\sigma^\alpha = c_1 + c_2$, y $\beta = (c_1 - c_2)/(c_1 + c_2)$. Entonces por el teorema anterior para $\alpha \neq 1$

$$\begin{aligned}
\widehat{\mu}(\theta) &= exp[-\int_S |\theta\xi|^\alpha(1 - itan(\frac{\pi\alpha}{2})sign(\theta\xi)\lambda_1(d\xi) + i\tau\theta] \\
&= exp[-|\theta|^\alpha(1 - itan(\frac{\pi\alpha}{2})sign(\theta)\lambda_1\{1\} \\
&\quad - |\theta|^\alpha(1 + itan(\frac{\pi\alpha}{2})sign(\theta)\lambda_1\{-1\} + i\tau\theta] \\
&= exp[-|\theta|^\alpha(c_1 + c_2) - |\theta|^\alpha itan(\frac{\pi\alpha}{2})sign(\theta)(c_1 - c_2) + i\tau\theta] \\
&= exp[-|\theta|^\alpha(c_1 + c_2)(1 - i\frac{c_1 - c_2}{c_1 + c_2}tan(\frac{\pi\alpha}{2})sign(\theta) + i\tau\theta] \\
&= exp[-\sigma^\alpha|\theta|^\alpha(1 - i\beta tan(\frac{\pi\alpha}{2})sign(\theta) + i\tau\theta]
\end{aligned}$$

El caso $\alpha = 1$ se hace de manera análoga. Por otro lado como λ_1 es una medida sobre S, claramente $\sigma^\alpha = c_1 + c_2 = \lambda_1\{1\} + \lambda_1\{-1\} \geq 0$, del mismo modo como $c_1 + c_2 \geq c_1 - c_2 \geq -(c_1 + c_2)$, entonces $\beta = \frac{c_1 - c_2}{c_1 + c_2} \in [-1, 1]$. Como (2.12) y (2.13), se convierten en (2.17) y (2.18), el resto se sigue del teorema 10. Ahora por el teorema anterior una condición necesaria y suficiente para que μ sea estrictamente α-estable, cuando $\alpha \neq 1$, es que $\tau = 0$. Por otro lado para que μ sea estrictamente 1-estable una condición necesaria y suficiente es que

$$\int_S \xi\lambda_1(d\xi) = 0$$

Esto es lo mismo que pedir en el caso d=1 que

$$\int_S \xi \lambda_1(d\xi) = \lambda_1\{1\} - \lambda_1\{-1\} = c_1 - c_2 = 0$$

Pero como $\beta = \frac{c_1 - c_2}{c_1 + c_2}$, entonces $\beta = 0$ si y solo si $c_1 - c_2 = 0$. Asi que la condición necesaria y suficiente para que μ sea estrictamente 1-estable es que $\beta = 0$.

Capítulo 3

Variables Aleatorias y Vectores Estables

3.1 Variables Aleatorias Estables

En este capítulo analizaremos algunas propiedades de las distribuciones estables univariadas. Las distribuciones estables univariadas estan caracterizadas por cuatro parámetros. Estos son: el índice de estabilidad α, el parámetro de escala σ, el parámetro de sesgo β, y el parámetro de corrimiento μ. Una distribución estable es Gaussiana cuando $\alpha = 2$, y en este caso, σ es proporcional a la desviación estándar, β puede tomarse como cero y μ es la media. Las distribuciones estables con $\alpha < 2$ comparten muchas propiedades con la distribución gaussiana, pero también difieren de ella de muchas formas significativas. Cuando $\alpha < 2$, por ejemplo, las colas de las distribuciones decaen como una función potencia. Esto significa que la variable aleatoria estable exhibe mucha mayor variabilidad que la gaussiana, es decir es mas común para este tipo de distribuciones el tomar valores lejos de la media. La alta variabilidad de las distribuciones estables es una de las razones por las que toman un papel importente dentro de la modelación matemática. Las distribuciones estables se han utilizado para modelar diversos fenómenos como los campos gravitatorias de estrellas, distribuciones de temperatura en reactores nucleares, estres en arreglos cristalinos, precios en el mercado de valores y la caída de lluvia anual. Ahora recordemos del capítulo 2 que una variable aleatoria X tiene una distribución estable si existen parámetros $0 < \alpha \leq 2$, $\sigma \geq 0$, $-1 \leq \beta \leq 1$, y un real μ tal que su función característica toma la siguiente forma:

$$E[exp\{i\theta X\}] = \begin{cases} exp\{-\sigma^\alpha|\theta|^\alpha(1 - i\beta(sign\theta)tan\frac{\pi\alpha}{2}) + i\mu\theta\} & \text{si } \alpha \neq 1, \\ exp\{-\sigma|\theta|(1 + i\beta\frac{2}{\pi}(sign\theta)ln|\theta|) + i\mu\theta\} & \text{si } \alpha = 1. \end{cases} \quad (3.1)$$

Donde los parámetros σ, β, y μ son únicos (β es irrelevante cuando $\alpha = 2$). Las densidades de probabilidad de las variables aleatorias α-estables existen

y son continuas pero con, unas pocas excepciones, no se conocen de forma explícita.
Las excepciones son:
a)La distribución Gaussiana $S_2(\sigma, 0, \mu)$ ó $N(\mu, 2\sigma^2)$, cuya densidad es

$$\frac{1}{2\sigma\pi^{\frac{1}{2}}}e^{-(x-\mu)^2/4\sigma^2}.$$

b)La distribución Cauchy $S_1(\sigma, 0, \mu)$, cuya densidad es

$$\frac{\sigma}{\pi((x-\mu)^2+\sigma^2)}.$$

c)La distribución Lévy $S_{1/2}(\sigma, 1, \mu)$, cuya densidad

$$(\frac{\sigma}{2\pi})^{1/2}\frac{1}{(x-\mu)^{3/2}}exp\{-\frac{\sigma}{2(x-\mu)}\}$$

esta concentrada en (μ, ∞).
d)La constante μ que tiene distribución degenerada $S_\alpha(0, 0, \mu)$ para cualquier $0 < \alpha \leq 2$. En general se excluyen las distribuciones degeneradas por tener propiedades inusuales. Por ejemplo, todos los momentos de una distribución degenerada son finitos, mientras que una distribución α-estable no degenerada con $0 < \alpha < 2$ tiene segundo momento infinito.
Una herramienta útil en el estudio de las distribuciones α-estables es su función característica. A continuación la utilizaremos para obtener algunas propiedades de las variables aleatorias estables y para obtener una interpretación de los parámetros σ, β, y μ.

Propiedad 1 *Sean X_1 y X_2 variables aleatorias independientes con $X_i \sim S_\alpha(\sigma_i, \beta_i, \mu_i)$, i=1,2. Entonces $X_1 + X_2 \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$, con*

$$\begin{aligned}
\sigma &= (\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha)^{1/\alpha}, \\
\beta &= \frac{\beta_1\sigma_1^\alpha + \beta_2\sigma_2^\alpha}{\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha}, \\
\mu &= \mu_1 + \mu_2.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Prueba. Primero haremos el caso en el que $\alpha \neq 1$. Entonces por independencia tenemos que,

$$\begin{aligned}
&lnE[exp\{i\theta(X_1 + X_2)\}] = lnE[exp\{i\theta(X_1\}] + lnE[exp\{i\theta(X_2\}] \\
&= (-\sigma_1^\alpha|\theta|^\alpha(1 - i\beta_1(sign\theta)tan\frac{\pi\alpha}{2}) + i\mu_1\theta) + (-\sigma_2^\alpha|\theta|^\alpha(1 - i\beta_2(sign\theta)tan\frac{\pi\alpha}{2}) \\
&+ i\mu_2\theta) \\
&= -(\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha)|\theta|^\alpha(1 - i(\frac{\beta_1\sigma_1^\alpha + \beta_2\sigma_2^\alpha}{\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha})(sign\theta)tan\frac{\pi\alpha}{2}) + i(\mu_1 + \mu_2)\theta
\end{aligned}$$

Ahora veamos el caso $\alpha = 1$

$$\begin{aligned}
&lnE[exp\{i\theta(X_1 + X_2)\}] = lnE[exp\{i\theta(X_1\}] + lnE[exp\{i\theta(X_2\}] \\
&= (-\sigma_1|\theta|(1 + i\beta_1\frac{2}{\pi}(sign\theta)ln|\theta|) + i\mu_1\theta) + (-\sigma_2|\theta|(1 - i\beta_2\frac{2}{\pi}(sign\theta)ln|\theta|) \\
&+ i\mu_2\theta) \\
&= -(\sigma_1 + \sigma_2)|\theta|(1 + i\frac{2}{\pi}(\frac{\beta_1\sigma_1 + \beta_2\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2})(sign\theta)ln|\theta|) + i(\mu_1 + \mu_2)\theta
\end{aligned}$$

La conclusión se sigue de la unicidad de la representación de la función característica de una variable aleatoria estable.
El parámetro μ es conocido como *parámetro de corrimiento*, y la razón proviene de la siguiente propiedad.

Propiedad 2 *Sea $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ y sea* ***a*** *una constante real. Entonces $X + a \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu + a)$.*

Prueba Para $\alpha \neq 1$

$$\begin{aligned}
lnE[exp\{i\theta(X + a)\}] &= ia\theta + lnE[exp\{i\theta X\}] \\
&= ia\theta + (-\sigma^\alpha|\theta|^\alpha(1 - i\beta(sign\theta)tan\frac{\pi\alpha}{2}) + i\mu\theta) \\
&= -\sigma^\alpha|\theta|^\alpha(1 - i\beta(sign\theta)tan\frac{\pi\alpha}{2}) + i(\mu + a)\theta
\end{aligned}$$

Y como en el caso anterior la conclusión se sigue la unicidad de la representación.
El caso $\alpha = 1$ es totalmente análogo.

Propiedad 3 *Sea $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ y sea a una constante real distinta de cero. Entonces*

$$\begin{aligned}
&aX \sim S_\alpha(|a|\sigma, sign(a)\beta, a\mu) \quad si\ \alpha \neq 1, \\
&aX \sim S_\alpha(|a|\sigma, sign(a)\beta, a\mu - \frac{2}{\pi}a(ln|a|)\sigma\beta) \quad si\ \alpha = 1.
\end{aligned}$$

Prueba Para $\alpha \neq 1$ tenemos por (3.1)

$$\begin{aligned}
&lnE[exp\{i\theta(aX)\}] = lnE[exp\{i(a\theta)X\}] \\
&= -\sigma^\alpha|a\theta|^\alpha(1 - i\beta(sign(a\theta))tan\frac{\pi\alpha}{2}) + i\mu(a\theta) \\
&= -(|a|\sigma)^\alpha|\theta|^\alpha(1 - isign(a)\beta(sign\theta)tan\frac{\pi\alpha}{2}) + i(a\mu)\theta
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Ahora para $\alpha = 1$ tambien por (3.1) tenemos

$$
\begin{aligned}
&lnE[exp\{i\theta(aX)\}] = lnE[exp\{i(a\theta)X\}]\\
&= -\sigma|a\theta|(1 + i\frac{2}{\pi}\beta(sign(a\theta))ln|a\theta|) + i\mu(a\theta)\\
&= -(|a|\sigma)|\theta|(1 + i\frac{2}{\pi}sign(a)\beta(sign\theta)(ln|a| + ln|\theta|) + i(a\mu)\theta\\
&= -(|a|\sigma)|\theta|(1 + i\frac{2}{\pi}sign(a)\beta(sign\theta)ln|\theta|) + ia\mu\theta - i|a|\sigma\frac{2}{\pi}sign(a)\beta ln|a|)\\
&(|\theta|sign(\theta))\\
&= -(|a|\sigma)|\theta|(1 + i\frac{2}{\pi}sign(a)\beta(sign\theta)ln|\theta|) + i(a\mu - \frac{2}{\pi}a(ln|a|)\beta\sigma)\theta
\end{aligned}
$$

Y por la unicidad de la representación se sigue la conclusión. El parámetro σ es conocido como el *parámetro de escala*. Hay que observar que cuando $\alpha = 1$, la multiplicación por una constante afecta al parámetro de corrimiento de forma no-lineal.

Propiedad 4 *Para toda* $0 < \alpha < 2$,

$$X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, 0) \Longleftrightarrow -X \sim S_\alpha(\sigma, -\beta, 0)$$

Prueba Se sigue directamente de la Propiedad (3).
La siguiente propiedad identifica a β como el *parámetro de sesgo.*

Propiedad 5 $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ *es simétrica si y solo si* $\beta = 0$ *y* $\mu = 0$. *Es simétrica con respecto a* μ *si y solo si* $\beta = 0$.

Prueba Para que una variable aleatoria sea simétrica, es necesario y suficiente que su función característica sea real. Pero por (3.1) esto ocurre si y solo si $\beta = 0$ y $\mu = 0$. Por otro lado, que X sea simétrica con respecto a μ es equivalente a pedir que $X - \mu$ sea simétrica con respecto a 0. Ahora por la propiedad (2) $X - \mu \sim S_\alpha(\sigma, \beta, 0)$, asi que por lo anterior $X - \mu$ es simétrica con respecto a cero si y solo si $\beta = 0$.

Propiedad 6 *Sea* $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ *con* $\alpha \neq 1$. *Entonces* X *es estrictamente estable si y solo si* $\mu = 0$.

Prueba Recordemos que X es estrictamente estable, si para toda $a \geq 0$,

$$(E[exp\{i\theta X\}])^a = E[exp\{i\theta(a^{1/\alpha})X\}]$$

Por lo que por ((3.1)) tenemos

$$\begin{aligned}
&(E[exp\{i\theta X\}])^a \\
&= (exp\{-(\sigma)^\alpha|\theta|^\alpha(1 - i\beta(sign\theta)tan\frac{\pi\alpha}{2}) + i\mu\theta)\})^a \\
&= exp\{-a(\sigma)^\alpha|\theta|^\alpha(1 - i\beta(sign(\theta))tan\frac{\pi\alpha}{2}) + i(a)\mu\theta)\})
\end{aligned}$$

Ahora como $a \geq 0$

$$\begin{aligned}
&= exp\{-(\sigma)^\alpha|(a^{1/\alpha})\theta|^\alpha(1 - i\beta(sign(a\theta))tan\frac{\pi\alpha}{2}) + i(a)\mu\theta)\}) \\
&= E[exp\{i\theta(a^{1/\alpha})X\}]exp\{i(a - a^{1/\alpha})\mu\theta\} \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

Lo que implica que X es estrictamente estable si y solo si $\mu = 0$.

Observación

De los cuatro parámetros α, σ, β y μ, el parámetro μ es el menos importante ya que solo afecta la localización. Asi que asumiremos por simplicidad que $\mu = 0$. Por otro lado, como podemos notar de la propiedad (4), $X \sim S_\alpha(\sigma, -\beta, 0) \Leftrightarrow -X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, 0)$. Decimos que la distribución $S_\alpha(\sigma, \beta, 0)$ esta sesgada a la derecha si $\beta > 0$, y a la izquierda si $\beta < 0$. Se dice que esta totalmente sesgada a la derecha si $\beta = 1$, y totalmente sesgada a la izquierda si $\beta = -1$.

La siguiente proposición establece que el soporte de una distribución $S_\alpha(\sigma, 1, 0)$, esta contenido en el semieje real positivo, esto se logra representando a la variable aleatoria $X \sim S_\alpha(\sigma, 1, 0)$ como el límite de una sucesión de variables aleatorias positivas con distribución Poisson compuesta. La variable aleatoria $X \sim S_\alpha(\sigma, 1, 0)$, con $0 < \alpha < 1$, es conocida como un subordinador estable.

Proposición 2 *Sean $0 < \alpha < 1$, $\delta > 0$ fijos, y N_δ una variable aleatoria Poisson con media $E[N_\delta] = \delta^{-\alpha}$ y sean $Y_{\delta,k}$, $k = 1, 2, \ldots$, variables aleatorias positivas i.i.d., independientes de N_d, y con distribución*

$$P(Y_{\delta,k} > \lambda) = \begin{cases} \delta^\alpha\lambda^{-\alpha} & si\ \lambda > \delta, \\ 1 & si\ \lambda \leq \delta. \end{cases}$$

Entonces la variable aleatoria Poisson compuesta

$$X_\delta = \sum_{k=1}^{N_\delta} Y_{\delta,k}$$

converge en distribución conforme $\delta \to 0$ al subordinador estable

$$X \sim S_\alpha(\sigma, 1, 0)$$

con

$$\sigma^\alpha = \Gamma(1 - \alpha)cos(\pi\alpha/2).$$

Mas aún, la transformada de Laplace de X esta dada por

$$E[e^{-\gamma X}] = e^{-a^\alpha\gamma^\alpha}, \quad \gamma \geq 0, \qquad (3.5)$$

con $a > 0$ y

$$a^{\alpha} = \Gamma(1-\alpha) = \sigma^{\alpha}/cos(\pi\alpha/2). \tag{3.6}$$

Prueba. Tenemos que

$$\begin{aligned}
E[exp(i\theta X_\delta)] &= E[E[exp(i\theta X_\delta)|N_\delta]] \\
&= E[\sum_{k=0}^{\infty} E[exp(i\theta X_\delta)|N_\delta = k]1_{\{N_\delta=k\}}] \\
&= E[\sum_{k=0}^{\infty} E[exp(i\theta X_\delta)|N_\delta = k]1_{\{N_\delta=k\}}]
\end{aligned}$$

y por la independencia entre N_δ, y las $(Y_{\delta,j})_{j=1,2,\ldots}$,

$$\begin{aligned}
&= E[\sum_{k=0}^{\infty} E[exp(i\theta \sum_{j=1}^{k} Y_{\delta,j})]1_{\{N_\delta=k\}}] \\
&= E[\sum_{k=0}^{\infty} E[\prod_{j=1}^{k} exp(i\theta Y_{\delta,j})]1_{\{N_\delta=k\}}] \\
&= E[\sum_{k=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{k} E[exp(i\theta Y_{\delta,j})]1_{\{N_\delta=k\}}]
\end{aligned}$$

y como las $Y_{\delta,j} j = 1, 2, \ldots$ son idénticamente distribuidas, entonces

$$\begin{aligned}
&= E[\sum_{k=0}^{\infty} E[exp(i\theta Y_{\delta,j})]^k 1_{\{N_\delta=k\}}] \\
&= E[E[exp(i\theta Y_{\delta,j})]^{N_\delta}] \\
&= exp\{\delta^{-\alpha}(E[exp(i\theta Y_{\delta,1})] - 1)\} \\
&= exp\{\delta^{-\alpha} \int_\delta^\infty \delta^\alpha \alpha \lambda^{-(\alpha+1)}(e^{i\theta\lambda} - 1)d\lambda\}.
\end{aligned}$$

Ahora se tome el límite:

$$\begin{aligned}
\lim_{\delta\to 0} E[exp(i\theta X_\delta)] &= exp\{\int_0^\infty \alpha\lambda^{-(\alpha+1)}(e^{i\theta\lambda} - 1)d\lambda\}. \\
&= exp\{-|\theta|^\alpha \Gamma(1-\alpha)(cos\frac{\pi\alpha}{2} - isign(\theta)sin\frac{\pi\alpha}{2})\} \\
&= exp\{-|\theta|^\alpha \Gamma(1-\alpha)cos\frac{\pi\alpha}{2}(1 - isign(\theta)tan\frac{\pi\alpha}{2})\},
\end{aligned}$$

Lo que prueba que X_δ converge en distribución a

$$X \sim S_\alpha((\Gamma(1-\alpha)cos\frac{\pi\alpha}{2})^{1/\alpha}, 1, 0),$$

Similarmente, si $\gamma > 0$,

$$E[exp(-\gamma X_\delta)] = exp\{\delta^{-\alpha} \int_\delta^\infty \delta^\alpha \alpha\lambda^{-(\alpha+1)}(e^{-\gamma\lambda} - 1)d\lambda\}].$$

haciendo $\delta \to 0$

$$E[exp(-\gamma X)] = exp\{\int_0^\infty \alpha\lambda^{-(\alpha+1)}(e^{-\gamma\lambda} - 1)d\lambda\}$$
$$= exp\{\gamma^\alpha \int_0^\infty \alpha x^{-(\alpha+1)}(e^{-x} - 1)dx\}$$
$$= exp\{\gamma^\alpha \int_0^\infty \alpha x^{-(\alpha+1)}(e^{-x} - 1)dx\}$$

y al integrar por partes obtenemos

$$= exp\{-\gamma^\alpha \int_0^\infty \alpha x^{-\alpha} e^{-x} dx\}$$
$$= exp\{-\gamma^\alpha \Gamma(1-\alpha)\},$$

lo que establece (3).

Las variables aleatorias que estan totalmente sesgadas a la derecha se pueden considerar como bloques de construcción básicos por lo siguiente:

Propiedad 7 *Sea X una variable aleatoria con distribución $S_\alpha(\sigma, \beta, 0)$ con $\alpha < 2$. Entonces existen dos variables aleatorias i.i.d. Y_1 y Y_2 con distribución común $S_\alpha(\sigma, 1, 0)$ tal que*

$$X \stackrel{d}{=} (\frac{1+\beta}{2})^{1/\alpha} Y_1 - (\frac{1-\beta}{2})^{1/\alpha} Y_2 \quad si\ \alpha \neq 1, \tag{3.7}$$

y

$$X \stackrel{d}{=} (\frac{1+\beta}{2}) Y_1 - (\frac{1-\beta}{2}) Y_2 + \sigma(\frac{1+\beta}{\pi} ln \frac{1+\beta}{2} - \frac{1-\beta}{\pi} ln \frac{1-\beta}{2}) \quad si\ \alpha = 1.$$

Prueba Supongamos que $\alpha \neq 1$, entonces como $\beta \in [-1, 1], 1+\beta \geq 0, y 1-\beta \geq 0$, asi que por la propiedad (3), tenemos que

$$(\frac{1+\beta}{2})^{1/\alpha} Y_1 \sim S_\alpha(\frac{1+\beta}{2}^{1/\alpha} \sigma, 1, 0)$$
$$-(\frac{1-\beta}{2})^{1/\alpha} Y_2 \sim S_\alpha(\frac{1-\beta}{2}^{1/\alpha} \sigma, -1, 0)$$

Para poder hacer uso de la propiedad (3), primero obtendremos las siguientes relaciones

$$\sigma_{Y_1}^\alpha = (\frac{1+\beta}{2}^{1/\alpha}\sigma)^\alpha = \frac{1+\beta}{2}\sigma^\alpha$$

de manera análoga,

$$\sigma_{Y_2}^\alpha = (\frac{1-\beta}{2}^{1/\alpha}\sigma)^\alpha = \frac{1-\beta}{2}\sigma^\alpha$$

asi que por lo anterior tenemos que

$$\sigma_{Y_1}^\alpha + \sigma_{Y_2}^\alpha = \frac{1+\beta}{2}\sigma^\alpha + \frac{1-\beta}{2}\sigma^\alpha = \sigma^\alpha$$
$$\sigma_{Y_1}^\alpha - \sigma_{Y_2}^\alpha = \frac{1+\beta}{2}\sigma^\alpha - \frac{1-\beta}{2}\sigma^\alpha = \beta\sigma^\alpha$$

Ahora por la propiedad (3), dado que Y_1 y Y_2 son independientes, tenemos

$$(\frac{1+\beta}{2})^{1/\alpha}Y_1 - (\frac{1-\beta}{2})^{1/\alpha}Y_2 \sim S_\alpha(\sigma,\beta,0)$$

Supongamos que $\alpha = 1$, entonces

$$(\frac{1+\beta}{2})Y_1 \sim S_1(\frac{1+\beta}{2}\sigma, 1, -\frac{2}{\pi}(\frac{1+\beta}{2})ln(\frac{1+\beta}{2})\sigma)$$
$$-(\frac{1-\beta}{2})Y_2 \sim S_1(\frac{1-\beta}{2}\sigma, -1, -\frac{2}{\pi}(\frac{1-\beta}{2})ln(\frac{1-\beta}{2})\sigma)$$

Al proceder como en el caso $\alpha \neq 1$ tenemos que

$$\sigma_{Y_1} = \frac{1+\beta}{2}\sigma$$

de manera análoga,

$$\sigma_{Y_2} = \frac{1-\beta}{2}\sigma$$

asi que por lo anterior tenemos que

$$\sigma_{Y_1} + \sigma_{Y_2} = \frac{1+\beta}{2}\sigma + \frac{1-\beta}{2}\sigma = \sigma$$
$$\sigma_{Y_1} - \sigma_{Y_2} = \frac{1+\beta}{2}\sigma - \frac{1-\beta}{2}\sigma = \beta\sigma$$

por otro lado

$$\mu_{Y_1} + \mu_{Y_2} = -\frac{2}{\pi}(\frac{1+\beta}{2})ln(\frac{1+\beta}{2})\sigma - \frac{2}{\pi}(\frac{1-\beta}{2})ln(\frac{1-\beta}{2})\sigma$$
$$= -\sigma(\frac{1+\beta}{\pi}ln(\frac{1+\beta}{2}) - \frac{1-\beta}{\pi}ln(\frac{1-\beta}{2}))$$

Por lo que por la propiedad (3) tenemos que

$$(\frac{1+\beta}{2})Y_1 - (\frac{1-\beta}{2})Y_2 \sim S_1(\sigma,\beta,-\sigma(\frac{1+\beta}{\pi}ln(\frac{1+\beta}{2}) - \frac{1-\beta}{\pi}ln(\frac{1-\beta}{2}))$$

Y por ultimo al hacer uso de la propiedad (2), obtenemos que

$$(\frac{1+\beta}{2})Y_1 - (\frac{1-\beta}{2})Y_2 + \sigma(\frac{1+\beta}{\pi}ln(\frac{1+\beta}{2}) - \frac{1-\beta}{\pi}ln(\frac{1-\beta}{2})) \sim S_1(\sigma, \beta, 0)$$

Lo que finaliza la demostración.
Como $-Y_2 \sim S_\alpha(\sigma, -1, 0)$ esta concentrada en el eje real negativo, cuando $\alpha < 1$, tenemos por la propiedad (6) la siguiente propiedad

Propiedad 8 *Para $\alpha < 1$ y σ fija, la familia de distribuciones $S_\alpha(\sigma, \beta, 0)$ esta estocásticamente ordenada en $-1 \leq \beta \leq 1$; es decir, si $X_\beta \sim S_\alpha(\sigma, \beta, 0)$ y $\beta_1 \leq \beta_2$, entonces $P\{X_{\beta_1} \geq x\} \leq P\{X_{\beta_2} \geq x\}$ para toda x, Mas aún, $S_\alpha(\sigma, \beta, 0)$ tiene soporte en todo el eje real para $-1 < \beta < 1$.*

Hemos visto que X es $S\alpha S$ (simetrica α-estable) si y solo si $X \sim S_\alpha(\sigma, 0, 0)$ (propiedad 5). Por lo que de ((3.1)), observamos que si $X \sim S_\alpha S$, entonces su función característica toma la particular forma de

$$E[exp\{i\theta X\}] = e^{-\sigma^\alpha|\theta|^\alpha} \tag{3.8}$$

Asi que una distribución $S\alpha S$ esta caracterizada solo por el parámetro de escala σ. Una variable aleatoria X es llamada *estándar* $S\alpha S$ si $\sigma = 1$. Las variables aleatorias $S\alpha S$ jugaran un papel importante en lo sucesivo. El siguiente resultado muestra que siempre podemos transformar una variable aleatoria $S\alpha' S$ en una variable aleatoria $S\alpha S$ para cualquier $0 < \alpha < \alpha'$.

Proposición 3 *Sea $X \sim S_\alpha(\sigma, 0, 0)$ con $0 < \alpha' \leq 2$ y sea $0 < \alpha < \alpha'$. Sea A una variable aleatoria α/α' − estable totalmente sesgada a la derecha con transformada de Laplace*

$$E[exp(-\gamma A)] = exp\{-\gamma^{\alpha/\alpha'}\}, \qquad \gamma > 0,$$

es decir, $A \sim S_{\alpha/\alpha'}((cos\frac{\pi\alpha}{2})^{\alpha'/\alpha}, 1, 0)$, y supongamos que X y A son independientes.
Entonces

$$Z = A^{\frac{1}{\alpha'}}X \sim S_\alpha(\sigma, 0, 0).$$

Prueba
Para cualquier real θ, tenemos que, por (3.8),

$$E[exp(i\theta Z)] = E[exp\{i\theta A^{\frac{1}{\alpha'}}X\}]$$
$$= E[E[exp\{i(\theta A^{\frac{1}{\alpha'}})X\}]|A]$$

Ahora como X y A son independientes

$$= \int_R E[exp\{i(\theta A^{\frac{1}{\alpha'}})x\}]dP_X(x)$$
$$= (\int_R E[exp\{i(\theta y^{\frac{1}{\alpha'}})x\}]dP_X(x)) \circ A$$

Pero por Fubini

$$= (E[\int_R exp\{i(\theta y^{\frac{1}{\alpha'}})x\}dP_X(x)]) \circ A$$

ahora por (3.8)

$$= (E[exp\{-\sigma^{\alpha'}|\theta|^{\alpha'}y]) \circ A$$
$$= E[exp\{-\sigma^{\alpha'}|\theta|^{\alpha'}A]$$
$$= exp\{-(\sigma^{\alpha'}|\theta|^{\alpha'})^{\frac{\alpha}{\alpha'}}\}$$
$$= exp\{-\sigma^{\alpha}|\theta|^{\alpha}\}.$$

En particular, esto implica que si X es una variable aleatoria Gaussiana con media cero y si A es una variable aleatoria $\frac{\alpha}{2}$ – *estable* independiente de X, entonces

$$Z = A^{\frac{1}{2}}X \sim S\alpha S.$$

Esto muestra que toda varaible aleatoria $S\alpha S$ es condicionalmente Gaussiana. La siguiente propiedad nos provee información sobre el comportamiento de las colas de las distribuciones estables.

Propiedad 9 *Sea* $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ *con* $0 < \alpha < 1$. *Entonces*

$$\begin{cases} \lim_{\lambda\to\infty} \lambda^\alpha P\{X > \lambda\} = C_\alpha \frac{1+\beta}{2}\sigma^\alpha, \\ \lim_{\lambda\to\infty} \lambda^\alpha P\{X < -\lambda\} = C_\alpha \frac{1-\beta}{2}\sigma^\alpha, \end{cases}$$

donde

$$C_\alpha = (\int_0^\infty x^{-\alpha} sinx dx)^{-1} = \begin{cases} \frac{1-\alpha}{\Gamma(2-\alpha)cos(\pi\alpha/2)} & si\ \alpha \neq 1, \\ 2/\pi \quad si\ \alpha = 1. \end{cases}$$

Prueba
Para el caso $\alpha < 1$, sea $X \sim S_\alpha(\sigma, 1, 0)$. Por la proposición 1, $E[e^{-\gamma X}] =$

$exp\{-a^\alpha\gamma^\alpha\}$, con $a^\alpha = \sigma^\alpha / cos(\frac{\pi\alpha}{2})$. Entonces

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty e^{-\gamma\lambda} P\{X > \lambda\} d\lambda \\
&= \frac{1 - E[e^{-\gamma X}]}{\gamma} \qquad \text{al integrar por partes} \\
&= \frac{1 - exp\{-a^\alpha\gamma^\alpha\}}{\gamma} \\
&\sim a^\alpha\gamma^\alpha
\end{aligned}$$

conforme $\gamma \to 0$, por el teorema de la densidad monótona (Apéndice) se tiene que,

$$\begin{aligned}
P\{X > \lambda\} &\sim \frac{a^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\lambda^{-\alpha} \\
&= \frac{\sigma^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)cos(\pi\alpha/2)}\lambda^{-\alpha} \\
&= \sigma^\alpha C_\alpha \lambda^{-\alpha}
\end{aligned}$$

conforme $\lambda \to \infty$. Esto demuestra la proposición para $\alpha < 1$ y $\beta = 1$. Y utilizando (3.7) obtenemos el resultado para $\alpha < 1$ y para toda $-1 \leq \beta \leq 1$. La proposición también resulta ser válida para toda $0 < \alpha < 2$, sin embargo la demostración es mucho mas complicada y escapa de los objetivos de este trabajo. Y por lo tanto se remite a la bibliografía en caso que se desee consultar la demostración.
El comportamiento de las colas de las distribuciones estables es muy utilizada, como veremos en la siguiente propiedad. Recordemos que $E[|X|^r] = \int_0^\infty P\{|X|^r > \lambda\}d\lambda$, lo que nos permitirá obtener el siguiente resultado:

Propiedad 10 *Sea $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ con $0 < \alpha < 1$. Entonces*

$$\begin{aligned}
E[|X|^p] &< \infty \qquad \textit{para toda } 0 < p < \alpha, \\
E[|X|^p] &= \infty \qquad \textit{para toda } p \geq \alpha.
\end{aligned}$$

Prueba
Supongamos que $0 < p < \alpha$ entonces por la propiedad (9) existe $K \in R$ tal que si $x \geq K$ tenemos que

$$P\{|X| > \lambda\} < \lambda^{-\alpha}(1 + C_\alpha\sigma^\alpha) \tag{3.9}$$

Asi que por la propiedad (9) se sigue que:

$$
\begin{aligned}
E[|X|^p] &= \int_0^\infty P\{|X|^p > \lambda\}d\lambda = \int_0^K P\{|X|^p > \lambda\}d\lambda + \int_K^\infty P\{|X|^p > \lambda\}d\lambda \\
&\leq K + \int_K^\infty P\{|X|^p > \lambda\}d\lambda \quad \text{dado que } P\{|X|^p > \lambda\} \leq 1 \text{ para toda } \lambda \\
&= K + \int_K^\infty p\lambda^{p-1}P\{|X| > \lambda\}d\lambda \quad \text{al hacer un cambio de variable,} \\
&\leq K + \int_K^\infty p\lambda^{p-1-\alpha}(1 + C_\alpha\sigma^\alpha)d\lambda \\
&\leq K + p(1 + C_\alpha\sigma^\alpha)\int_K^\infty \lambda^{p-1-\alpha}d\lambda \\
&= K + \frac{p(1 + C_\alpha\sigma^\alpha)}{p-\alpha}K^{p-\alpha} < \infty
\end{aligned}
$$

Ahora sea $p \geq \alpha$ y supongamos que $E[|X|^p] < \infty$ entonces

$$E[|X|^p] = \int_0^\infty P\{|X|^p > \lambda\}d\lambda = \int_0^\infty p\lambda^{p-1}P\{|X| > \lambda\}d\lambda < \infty$$

Entonces como la integral anterior es finita podemos concluir que

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{p-1}P\{|X| > \lambda\} = 0$$

De donde se sigue que

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^p P\{|X| > \lambda\} = 0$$

pero por hipótesis tenemos que $p \geq \alpha$ entonces

$$C_\alpha\sigma^\alpha = \lim_{\lambda\to\infty} \lambda^\alpha P\{|X| > \lambda\} = 0$$

Pero lo anterior es una contradicción ya que $C_\alpha\sigma > 0$ para toda $0 < \alpha < 2$. Entonces para $p \geq \alpha$, $E[|X|^p] = \infty$.
El hecho de que las variables aleatorias α-estables con $\alpha < 2$ tengan un segundo momento infinito implica que las tecnicas válidas para el caso gaussiano no se apliquen a este tipo de variables. Una complicación adicional surge del hecho de que incluso $E[|X|^\alpha]$ sea infinita, ya que en el caso $\alpha = 1$, uno tiene que $E[|X|] = \infty$, lo que impide el uso de esperanzas.

3.2 Vectores Aleatorios Estables

Recordemos que en la sección anterior ya hemos definido lo que es una distribución estable en R^n. Los vectores gaussianos, sin embargo, también pueden ser definidos de la siguiente forma: un vector aleatorio es gaussiano si y solo

si cualquier combinación lineal de sus componentes es una variable aleatoria gaussiana. Como en el caso gaussiano, cualquier combinación lineal de los componentes de un vector aleatorio estable es una variable aleatoria estable, sin embargo lo contrario no siempre es cierto. Como veremos mas adelante solamente sera válido cuando $\alpha \geq 1$.
Como en el caso univariado, las funciones de densidad usualmente no son conocidas en forma explícita y por ende uno trabaja con las funciones características. Recordemos que la función característica involucra una medida finita Γ en la esfera unitaria en R^d, y un vector de corrimiento μ^0 que desempeña un papel similar que el parámetro de corrimiento en el caso univariado. La medida Γ es conocida como medida espectral, y reemplaza a los parámetros de escala y de sesgo que entran en la descripción de la distribución estable univariada.
Las condiciones para la estabilidad estricta de X también se discuten en este capítulo. Cuando $\alpha \neq 1$, X es estrictamente estable si el vector de corrimiento $\mu^0 = 0$. Las condiciones para la estabilidad estricta en el caso cuando $\alpha = 1$ son mas complicadas porque involucran a la medida espectral Γ. Sin embargo, la estabilidad estricta resulta ser una propiedad de las componentes es decir: X es estrictamente estable si y solo si todas sus componentes son estrictamente estables.
Por último también se discutirán las condiciones para que X sea simétrico. En contraste con la estabilidad estricta, la simetria no es una propiedad de las componentes ya que: X es simetrico si y solo si el vector de corrimiento μ^0 es cero y la medida espectral Γ es simetrica (es decir, Γ da igual peso a cualquiera dos conjuntos antipodales). A continuación probaremos una equivalencia que nos será útil mas adelante

Teorema 13 *Un vector aleatorio es estable si y solo si para toda $n \geq 2$, existe $\alpha \in (0, 2]$ y un vector D_n tal que*

$$X^1 + X^2 + \cdots + X^n \stackrel{d}{=} n^{1/\alpha} X + D_n$$

donde $X^1, X^2, \ldots, X^n$ son copias independientes de X.

*Prueba*Como $X^1, X^2, \ldots, X^n$ son copias independientes de X, y si $\varphi(\theta)$ es la función característica de X, tenemos que

$$E[exp\{i(\sum_{j=1}^{n} X^j, \theta)\}] = E[exp\{i\sum_{j=1}^{n}(X^j, \theta)\}] = E[\prod_{j=1}^{n} exp\{i(X^j, \theta)\}]$$
$$= (E[exp\{i(X^j, \theta)\}])^n = \varphi(\theta)^n$$

Pero como X es un vector estable, entonces $\varphi(\theta)^n = \varphi(n^{1/\alpha}\theta)exp\{i\langle D_n, \theta\rangle\}$, y como

$$E[exp\{i(n^{1/\alpha}X + D_n)\}] = \varphi(n^{1/\alpha}\theta)exp\{i\langle D_n, \theta\rangle\}$$

Entonces por la unicidad de la función característica tenemos que

$$X^1 + X^2 + \cdots + X^n \stackrel{d}{=} n^{1/\alpha} X + D_n$$

Ahora supongamos que se cumple la relación anterior, entonces en términos de la función característica se sigue que

$$\varphi(\theta)^n = \varphi(n^{1/\alpha}\theta)exp\{i\langle D_n, \theta\rangle\} \tag{3.10}$$

Pero si en la relación anterior hacemos un cambio de variable y llamamos $\theta' = n^{1/\alpha}\theta$ tenemos que

$$\varphi(n^{-1/\alpha}\theta')^n = \varphi(\theta')exp\{i\langle D_n, (\theta'/n^{1/\alpha})\rangle\}$$

Por lo que al extraer raíz enésima

$$\varphi(\theta')^{1/n} = \varphi((1/n)^{1/\alpha}\theta')exp\{-i\langle D_n, (\theta'/n^{1/\alpha})\rangle\}$$

de lo anterior podemos concluir que 3.10 es válida para toda $r \in Q$. Consideremos $a > 0$ irracional, entonces existe una sucesión r_n de racionales tal que $r_n \to a$. Ahora como X es un vector aleatorio, su distribución es infinitamente divisible, y por ende su función característica no se anula; y por lo que por (3.10)

$$exp\{i\langle D_{r_n}, \theta\rangle\} = \frac{\varphi(\theta)^{r_n}}{\varphi(r_n^{1/\alpha}\theta)}$$

En particular para $\theta = e_i$, (donde $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0 \ldots, 0)$ con 1 en la posición i-ésima).

$$exp\{iD^i_{r_n}\} = \frac{\varphi(e_i)^{r_n}}{\varphi(r_n^{1/\alpha}e_i)}$$

donde $D^i_{r_n}$ denota a la componente i-ésima del vector D_{r_n}, por lo que al tomar logaritmo tenemos que

$$D^i_{r_n} = -ilog(\frac{\varphi(e_i)^{r_n}}{\varphi(r_n^{1/\alpha}e_i)})$$

y por último por la continuidad de la función característica y del logaritmo se sigue que

$$\begin{aligned} D^i_a = \lim_{n\to\infty} D^i_{r_n} &= \lim_{n\to\infty} -ilog(\frac{\varphi(e_i)^{r_n}}{i\varphi(r_n^{1/\alpha}e_i)}) \\ &= -ilog(\frac{\varphi(e_i)^a}{i\varphi(a^{1/\alpha}e_i)}) \end{aligned}$$

Entonces cada una de las componentes del vector D_{r_n} converge; esto nos permite afirmar que para toda $\theta \in R^d$ tenemos que
$\lim_{n\to\infty}\langle D_{r_n}, \theta\rangle = \langle D_a, \theta\rangle$.

$$\begin{aligned} \varphi(\theta)^a = \lim_{n\to\infty} \varphi(\theta)^{r_n} &= \lim_{n\to\infty} \varphi(r_n^{1/\alpha}\theta)exp\{i\langle D_{r_n}, \theta\rangle\} \\ &= \varphi(a^{1/\alpha}\theta)exp\{i\langle D_a, \theta\rangle\} \end{aligned}$$

Y como la relación anterior es válida para toda $a > 0$, tenemos que X es un vector estable.

El siguiente teorema caracteriza a todas las combinaciones lineales de las componentes de un vector estable.

Teorema 14 *Sea $X = (X_1, X_2, \ldots, X_d)$ un vector estable (respectivamente, estrictamente estable, simetrico estable) en R^d. Entonces cualquier combinación lineal de las componentes de X del tipo $Y = \sum_{k=1}^{d} b_k X_k$ es una variable aleatoria α-estable (respectivamente, estrictamente α-estable, simetrica α-estable).*

Prueba Como X es un vector aleatorio estable para todo real $a > 0$, existe $c = (c_1, \ldots, c_d) \in R^d$, tal que

$$(E[exp\{i\langle z, X\rangle\}])^a = (E[exp\{i\langle (a^{1/\alpha})z, X\rangle\}])exp\{i\langle c, z\rangle\}$$

Ahora sea $\theta \in R$ y se hace $z = (b_1\theta, \ldots, b_d\theta)$ en la ecuación anterior. Obtenemos que

$$\begin{aligned}
(E[exp\{iY\theta\}])^a &= (E[exp\{i\theta(\sum_{k=1}^{d} b_k X_k)\}])^a = (E[exp\{i\langle z, X\rangle\}])^a \\
&= (E[exp\{i\langle (a^{1/\alpha})z, X\rangle\}])exp\{i\langle c, z\rangle\} \\
&= (E[exp\{i(a^{1/\alpha})\theta(\sum_{k=1}^{d} b_k X_k)\}])exp\{i\theta(\sum_{k=1}^{d} b_k c_k)\} \\
&= (E[exp\{i(a^{1/\alpha})\theta Y\}])exp\{i\theta\mu\} \qquad \text{donde } \mu = \sum_{k=1}^{d} b_k c_k
\end{aligned}$$

Por lo que podemos concluir que para todo real $a > 0$ existe $c \in R$ tal que

$$(E[exp\{iY\theta\}])^a = (E[exp\{i(a^{1/\alpha})\theta Y\}])exp\{i\theta\mu\}$$

Lo que demuestra que $Y = \sum_{k=1}^{d} b_k X_k$ es una variable aleatoria α-estable. Obviamente en el caso en el que X sea estrictamente α-estable tenemos que $c = 0$, para todo real $a > 0$. Y como $\mu = \sum_{k=1}^{d} b_k c_k$, entonces $\mu = 0$, lo que implica que Y es una variable aleatoria estrictamente α-estable.

Y por último si además X es un vector aleatorio simétrico entonces $X \stackrel{d}{=} -X$, por lo que términos de su función característica tenemos

$$E[exp\{i\langle z, X\rangle\}] = E[exp\{i\langle z, -X\rangle\}]$$

Por lo que al hacer $z = (b_1\theta, \ldots, b_d\theta)$ en la ecuación anterior obtenemos que

$$\begin{aligned}
E[exp\{iY\theta] &= E[exp\{i\theta(\sum_{k=1}^{d} b_k X_k)\}] = E[exp\{i\langle z, X\rangle\}] \\
&= E[exp\{i\langle z, -X\rangle\}] = E[exp\{i\theta(\sum_{k=1}^{d} b_k(-X_k))\}] \\
&= E[exp\{i\theta - (\sum_{k=1}^{d} b_k X_k)\}] = E[exp\{i - Y\theta\}]
\end{aligned}$$

Y por ende podemos concluir queY es una variable aleatoria simétrica.
El teorema anterior establece que si X es un vector aleatorio α-estable, entonces todas las combinaciones lineales $(b, X) = \sum_{k=1}^{d} b_k X_k$ son variables aleatorias α-estables. Pero se cumplirá lo contrario? si todas las combinaciones lineales de las componentes de un vector aleatorio X son α-estables, es necesariamente el vector X α-estable? La pregunta surge de manera natural dado que en el caso gaussiano $\alpha = 2$, la respuesta es afirmativa. Desgraciadamente, cuando $\alpha < 2$, la respuesta es, en general que no, ya que solo se cumple como veremos en el siguiente teorema si todas las combinaciones lineales son estrictamente estables, o si $\alpha \geq 1$.

Teorema 15 *Sea X un vector aleatorio en R^d.*
a)Si todas las combinaciones $Y = \sum_{k=1}^{d} b_k X_k$ tienen una distribución estrictamente estable, entonces X es un vector estrictamente estable en R^d.
b)Si todas las combinaciones son simetricamente estables, enonces X es un vector aleatorio simetrico estable en R^d.
c)Si todas las combinaciones son estables con índice de estabilidad mayor o igual a uno, entonces X es un vector estable en R^d.

Prueba El índice de estabilidad de la combinación lineal $Y = \sum_{k=1}^{d} b_k X_k = (b, X)$ puede a priori depender de b. Entonces lo primero que haremos es mostrar que si todas las combinaciones lineales son estables, entonces todas aquellas que sean no degeneradas tienen el mismo índice de estabilidad.
Asi que supongamos que esto no es cierto, es decir que existen vectores $b \in R^d$ y $c \in R^d$ distintos de cero tal que, $Y_b = (b, X)$, y $Y_c = (c, X)$ son variables aleatorias no degeneradas, y tal que Y_b tiene índice de estabilidad α_1 y Y_c tiene índice de estabilidad α_2 con $0 < \alpha_1 < \alpha_2 \leq 2$. Sea ρ_1, ρ_2 numeros reales distintos de cero y fijemos $a = \rho_1 b + \rho_2 c$.
Consideremos la variable aleatoria Y_a. Por hipótesis, Y_a tiene que ser estable con un índice de estabilidad, α_3. Asi que para toda $\lambda > 0$,

$$
\begin{aligned}
P(|Y_a| > \lambda) &= P(|(a, X)| > \lambda) \\
&= P(|\rho_1(b, X) + \rho_2(c, X)| > \lambda) \\
&= P(|\rho_1 Y_b + \rho_2 Y_c| > \lambda) \\
&= P(|\rho_1 Y_b| > 2\lambda) - P(|\rho_2 Y_c| > \lambda) \\
&\text{Ahora por la propiedad (9) tenemos que} \\
&\sim const.\lambda^{-\alpha_1} - const.\lambda^{-\alpha_2} \quad \text{Pero dado que } \alpha_1 < \alpha_2 \\
&\sim const.\lambda^{-\alpha_1}
\end{aligned}
$$

conforme $\lambda \to \infty$. (si $\alpha_2 = 2$, como nos encontramos con el caso gaussiano podemos reemplazar $\lambda^{-\alpha_2}$ por $\lambda^{-1} exp\{-\lambda^2/4\sigma^2\}$.)Esto implica que $\alpha_3 \leq min(\alpha_1, \alpha_2)$ (pues de lo contrario $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{\alpha_3} P(|Y_a| > \lambda) = 0$ lo que contradice la proposición (9)). Asi que el índice de estabilidad de Y_a es, por lo tanto no mayor que el mínimo entre α_1 y α_2. Pero como Y_b y Y_c son no degeneradas, entonces existe una sucesión de numeros reales distintos de cero $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, que convergen a 0 conforme $n \to \infty$, tal que para toda n, $Z_n = A_n Y_b + Y_c$ es distinta de cero en distribución. Entonces $Z_n \sim S_{\alpha(n)}(\sigma_n, \beta_n, \mu_n)$, $n = 1, 2, \ldots$ Asi que por lo demostrado anteriormente,

$$\alpha(n) \leq \alpha_1 \leq \alpha_2, \quad \text{n=1,2,...}$$

Claramente, $Z_n \to Y_c$ en distribución conforme $n \to \infty$. La convergencia de la parte real de la función característica de Z_n a la de Y_c implica

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n^{\alpha(n)} |\theta|^{\alpha(n)} = \sigma_2^{\alpha_2} |\theta|^{\alpha_2}, \quad \theta \in R,$$

donde σ_2 es el parámetro de escala de Y_c. Asi que $\lim_{n\to\infty} \sigma_n^{\alpha(n)} |\theta|^{\alpha(n)-\alpha_2} = \sigma_2^{\alpha_2}$. Entonces como es válido para toda $\theta \in R$, tenemos que al hacer $\theta = 1$.

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n^{\alpha(n)} = \sigma_2^{\alpha_2}$$

pero lo anterior implica que

$$\lim_{n\to\infty} |\theta|^{\alpha(n)-\alpha_2} = 1$$

entonces si $\theta \neq 0$, al aplicar logaritmo obtenemos que

$$(\lim_{n\to\infty} (\alpha(n) - \alpha_2)) ln|\theta| = 0 \qquad \text{para toda } \theta \in R,$$

y por lo tanto $\lim_{n\to\infty}(\alpha(n) - \alpha_2) = 0$, lo cual contradice el hecho de que $\alpha(n) - \alpha_2 < \alpha(1) - \alpha_2 < 0$. Asi que podemos concluir que $\sigma_2 = 0$, es decir Y_c es degenerada, lo cual es una contradicción. Por ende todas las combinaciones lineales de la forma (b,X) tienen que tener el mismo índice de estabilidad.
Ahora para establecer la primera parte del teorema, supondremos que todas las combinaciones lineales (b,X) son variables aleatoria estrictamente estables con índice de estabilidad α. Entonces sea $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_d)$ un vector arbitrario en R^d distinto de cero, entonces existe $n = 1, 2, \ldots, d$ tal que $\theta_n \neq 0$, por lo que a θ lo podemos expresar como $\theta = \theta_n(\theta'1, \theta'_2, \ldots, \theta'_d)$ donde $\theta'_k = \theta_k/\theta_n$ para $k = 1, 2, \ldots, d$.
Entonces por hipótesis al hacer $\theta' = (\theta'1, \theta'_2, \ldots, \theta'_d)$, se tiene que $Y = (\theta', X)$ es una variable aleatoria estrictamente estable; es decir para todo número real $a > 0$

$$(E[exp\{iY\theta_n\}])^a = E[exp\{iYa^{1/\alpha}\theta_n\}]$$

pero como $\theta_n Y = (\theta, X)$, entonces al sustituir en la ecuación anterior obtenemos que

$$(E[exp\{i(\theta, X)\}])^a = E[exp\{ia^{1/\alpha}(\theta, X)\}] = E[exp\{i(a^{1/\alpha}\theta, X)\}]$$

obviamente si $\theta = 0$ la relación anterior también se cumple; por lo que al ser válida para toda $\theta \in R^d$, podemos concluir que X es un vector aleatorio estrictamente estable.

b)Ahora supongamos que todas las combinaciones lineales (b,X) son variables aleatorias estables simétricas. Entonces como una variable aleatoria simétrica estable es estricatmente estable, podemos concluir por la primera parte del teorema que X es un vector estrictamente estable. Por lo que lo único que hay que probar es que X es un vector simétrico.
Entonces sea $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_d)$ un vector arbitrario en R^d distinto de cero, entonces existe $n = 1, 2, \ldots, d$ tal que $\theta_n \neq 0$, por lo que a θ lo podemos expresar como $\theta = \theta_n(\theta'_1, \theta'_2, \ldots, \theta'_d)$ donde $\theta'_k = \theta_k/\theta_n$ para $k = 1, 2, \ldots, d$. Entonces por hipótesis haciendo $\theta' = (\theta'_1, \theta'_2, \ldots, \theta'_d)$, tenemos que $Y = (\theta', X)$ es una variable aleatoria simétrica, por lo que

$$E[exp\{iY\theta_n\}] = E[exp\{i(-Y)\theta_n\}] = E[exp\{-iY\theta_n\}]$$

pero como $\theta_n Y = (\theta, X)$, entonces al sustituir en la ecuación anterior obtenemos que

$$E[exp\{i(\theta, X)\}] = E[exp\{-i(\theta, X)\}] = E[exp\{i(\theta, -X)\}]$$

y por lo anterior podemos concluir que $X \stackrel{d}{=} -X$. Es decir X es un vector aleatorio estable simétrico.
c)Ahora supongamos que todas las combinaciones lineales son variables aleatorias estables con índice de estabilidad $\alpha \geq 1$. primero supongamos que $\alpha = 1$. Por hipótesis, para todo $b \in R^d$,

$$Y_b = (b, X) \sim S_1(\sigma(b), \beta(b), \mu(b))$$

para algún $\sigma(b) > 0$, $\beta(b) \in [-1, 1]$, y $\mu(b) \in$ R. Si σ_k, β_k, y μ_k denotan, respectivamente, $\sigma(e_k), \beta(e_k), \mu(e_k)$, correspondientes al vector $e_k = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ con 1 en la k-ésima posición, entonces

$$X_k \sim S_1(\sigma_k, \beta_k, \mu_k), \qquad \text{k=1,...,d.}$$

Sean $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots$ copias independientes e idénticamente distribuidas de X y definamos, para toda $n \geq 1$,

$$S^{(n)} = (\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X^j) - \frac{2}{\pi}(ln(n))(\sigma \times \beta),$$

donde $\sigma \times \beta = (\sigma_1\beta_1, \sigma_2\beta_2, \ldots, \sigma_d\beta_d)$. Asi que $X_k \sim S_1(\sigma_k, \beta_k, \mu_k)$ implica que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} X_k^{(j)} &\sim S_1(n\sigma_k, \beta_k, n\mu_k) \qquad \text{utilizando la propiedad (1)}, \\ \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_k^{(j)} &\sim S_1(\sigma_k, \beta_k, \mu_k + \frac{2}{\pi}(ln(n))\sigma_k\beta_k) \qquad \text{utilizando la propiedad (3)}, \end{aligned} \tag{3.11}$$

Por otro lado como

$$
\begin{aligned}
S_k^n = (e_k, S^n) &= (\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(e_k, X^j)) - \frac{2}{\pi}(ln(n))(e_k, \sigma \times \beta) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_k^{(j)} - \frac{2}{\pi}(ln(n))(\sigma_k\beta_k)
\end{aligned}
$$

Pero como $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_k^{(j)} \sim S_1(\sigma_k, \beta_k, \mu_k + \frac{2}{\pi}(ln(n))\sigma_k\beta_k)$, entonces por la relación anterior y la propiedad (2) tenemos que

$$S_k^{(n)} \sim S_1(\sigma_k, \beta_k, \mu_k)$$

y por ende tenemos que $S_k^n \stackrel{d}{=} X_k$ para cada $k = 1, \ldots, n$. Entonces dado que la distribución de S_k^n no depende de n, la sucesión $\{S_k^n, n \geq 1\}$ es tensa; es decir, para toda $\epsilon > 0$, existe un conjunto acotado [a,b] tal que $P(a \leq S_k^n \leq b) > 1 - \epsilon$ se cumple para toda n. La sucesión de vectores $\{S^n, n \geq 1\}$ es por ende tensa, y por lo tanto, existe una subsucesión $\{S^{n_i}, n \geq 1\}$ que converge débilmente a una medida de probabilidad en R^d. En particular, (b, S^{n_i}) converge débilmente para todo vector $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ en R^d. Pero el teorema 1 implica que

$$\sum_{j=1}^{n}(b, X^j) \sim S_1(n\sigma(b), \beta(b), n\mu(b)), \qquad \text{por la propiedad (1),}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(b, X^j) \sim S_1(\sigma(b), \beta(b), \mu(b) + \frac{2}{\pi}(ln(n))(\sigma(b)\beta(b)))$$

por la propiedad (3),

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(b, X^j) - \frac{2}{\pi}(ln(n))(b, \sigma \times \beta) \\
&\sim S_1(\sigma(b), \beta(b), \mu(b) + \frac{2}{\pi}(ln(n))(\sigma(b)\beta(b) - (b, \sigma \times \beta)))
\end{aligned}
$$

por la propiedad (2).

Y como $(b, \sigma \times \beta) = \sum_{j=1}^{d} b_k\sigma_k\beta_k$, entonces por (3.11)

$$(b, S^n) \sim S_1(\sigma(b), \beta(b), \mu(b) + \frac{2}{\pi}(ln(n))(\sigma(b)\beta(b) - \sum_{j=1}^{d} b_k\sigma_k\beta_k)). \tag{3.12}$$

Pero para que $(b, S^{(n_i)})$ pueda converger debilmente, el coeficiente de ln(n) tiene que ser cero, es decir

$$\sigma(b)\beta(b) = \sum_{j=1}^{d} b_k\sigma_k\beta_k \qquad \text{para toda } b \in R^d. \tag{3.13}$$

Asi que por el teorema 1, (3.14), y (3.13) tenemos que $(b, S^{(n)}) \stackrel{d}{=} (b, x)$ para toda $b \in R^d$ y toda $n \geq 1$. Y por lo tanto $X \stackrel{d}{=} S^{(n)}$ para toda $n \geq 1$. Entonces por (3.11)

$$\sum_{j=1}^{n} X^{(j)} = nX + \frac{2}{\pi} n(ln(n))(\sigma \times \beta)$$

lo que implica que X es una vector aleatorio 1-estable.
Una prueba similar es válida para el caso $1 < \alpha \leq 2$, sea

$$S^{(n)} = (\frac{1}{n^{1/\alpha}} \sum_{j=1}^{n} X^{(j)}) - n^{1-1/\alpha}\mu + \mu$$

entonces

$$(b, S^{(n)}) \sim S_\alpha(\sigma(b), \beta(b), n^{1-1/\alpha}(\mu(b) - \sum_{j=1}^{d} b_k\mu_k) + \sum_{j=1}^{d} b_k\mu_k).$$

Y de manera análoga al caso $\alpha = 1$, el resultado se sigue del hecho de que $n^{1-1/\alpha} \to \infty$ conforme $n \to \infty$. Es importante notar que la prueba falla cuando $0 < \alpha < 1$ dado que $n^{1-1/\alpha} \to 0$ conforme $n \to \infty$.

Observación

Recordemos que en la sección anterior encontramos que si $0 < \alpha < 2$. Entonces el vector aleatorio $X = (X_1, X_2, \ldots, X_d)$ es un vector aleatorio α-estable en R^d si y solo si existe una medida finita Γ en la esfera unitaria S_d y un vector μ^0 en R^d tal que:

a)Si $\alpha \neq 1$,

$$E[exp\{i\theta X\}] = exp\{-\int_{S_d} |(\theta, s)|^\alpha (1 - isign((\theta, s))tan\frac{\pi\alpha}{2})\Gamma(ds) + i(\theta, \mu^0)$$

b) Si $\alpha = 1$,

$$E[exp\{i\theta X\}] = exp\{-\int_{S_d} |(\theta, s)|(1 + i\frac{2}{\pi}sign((\theta, s))ln|(\theta, s)|)\Gamma(ds) + i(\theta, \mu^0)$$

Ahora consideremos a X un vector aleatorio α-estable, entonces sabemos por el Teorema 2 que cualquier combinación lineal $Y_b = \sum_{j=1}^{d} b_k X_k$ es una variable aleatoria α-estable. Entonces a continuación determinaremos los parámetros σ_b, β_b, y μ_b que caracterizan a la distribución. Para eso sea γ cualquier número real y sea $\theta = \gamma b$; asi que al sustituir en las expresiones anteriores obtenemos que la funció característica de Y_b es la siguiente a)Si $\alpha \neq 1$ tenemos

$$
\begin{aligned}
&E[exp\{i\gamma Y_b\}] = E[exp\{i(\gamma b, X)\}] \\
&= exp\{-\int_{S_d} |(\gamma b, s)|^\alpha (1 - isign[(\gamma b, s)]tan\frac{\pi\alpha}{2})\Gamma(ds) + i(\gamma b, \mu^0)\} \\
&= exp\{-|\gamma|^\alpha [\int_{S_d} |(b, s)|^\alpha \Gamma(ds) - isign(\gamma)(\int_{S_d} |(b, s)|^\alpha sign[(\gamma b, s)]\Gamma(ds)) \\
&\qquad tan\frac{\pi\alpha}{2})] + i\gamma(b, \mu^0)\} \\
&= exp\{-|\gamma|^\alpha \int_{S_d} |(b, s)|^\alpha \Gamma(ds)(1 - isign(\gamma)\frac{\int_{S_d} |(b, s)|^\alpha sign[(\gamma b, s)]\Gamma(ds)}{\int_{S_d} |(b, s)|^\alpha \Gamma(ds)} \\
&\qquad tan\frac{\pi\alpha}{2}) + i\gamma(b, \mu^0)\}
\end{aligned}
$$

b)Si $\alpha = 1$ tenemos

$$
\begin{aligned}
&E[exp\{i\gamma Y_b\}] = E[exp\{i(\gamma b, X)\}] = \\
&= exp\{-\int_{S_d} |(\gamma b, s)|(1 + i\frac{2}{\pi}sign[(\gamma b, s)]ln|(\gamma b, s)|)\Gamma(ds) + i(\gamma b, \mu^0)\} \\
&= exp\{-|\gamma|[\int_{S_d} |(b, s)|\Gamma(ds) + i\frac{2}{\pi}sign(\gamma)(\int_{S_d} |(b, s)|sign[(b, s)]ln|(\gamma b, s)|\Gamma(ds))] \\
&+ i\gamma(b, \mu^0)\} \\
&= exp\{-|\gamma|[\int_{S_d} |(b, s)|\Gamma(ds) + i\frac{2}{\pi}sign(\gamma)(\int_{S_d} |(b, s)|sign[(b, s)]\Gamma(ds))ln|\gamma|] \\
&+ i\gamma((b, \mu^0) - \frac{2}{\pi}\int_{S_d} (b, s)sign[(b, s)]\Gamma(ds))\} \\
&= exp\{-|\gamma| \int_{S_d} |(b, s)|\Gamma(ds)(1 + i\frac{2}{\pi}sign(\gamma)\frac{\int_{S_d} |(b, s)|sign[(b, s)]\Gamma(ds)}{\int_{S_d} |(b, s)|\Gamma(ds)}ln|\gamma|] \\
&+ i\gamma((b, \mu^0) \\
&- \frac{2}{\pi}\int_{S_d} (b, s)sign[(b, s)]\Gamma(ds))\}
\end{aligned}
$$

por lo que al comparar con (3.1) tenemos que $Y_b \sim S_\alpha(\sigma_b, \beta_b, \mu_b)$ con

$$
\begin{aligned}
\sigma_b &= (\int_{S_d} |(b, s)|^\alpha \Gamma(ds))^{1/\alpha}, \\
\beta_b &= \frac{\int_{S_d} |(b, s)|^\alpha sign[(b, s)]\Gamma(ds)}{\int_{S_d} |(b, s)|^\alpha \Gamma(ds)}, \\
\mu_b &= \begin{cases} (b, \mu^0) & \text{si } \alpha \neq 1, \\ (b, \mu^0) - \frac{2}{\pi}\int_{S_d} (b, s)sign[(b, s)]\Gamma(ds) & \text{si } \alpha = 1. \end{cases}
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

Eligiendo b's adecuadas podemos fácilmente obtener las distribuciones (marginales) de las componentes X_k, $k = 1, 2, \ldots, d$, del vector X. Es fácil ver, por ejemplo, que el parámetro de corrimiento de X_k es μ_k^0 cuando $\alpha \neq 1$ pero $\mu_k^0 - \frac{2}{\pi}\int_{S_d}(b,s)ln|(b,s)|\Gamma(ds)$ si $\alpha = 1$.

Teorema 16 *La medida espectral Γ_d de un vector α-estable $X = (X_1, X_2, \ldots, X_d)$ esta concentrada en un número finito de puntos en la esfera unitaria S_d si $X = (X_1, X_2, \ldots, X_d)$ puede ser expresada como una transformación lineal de variables aleatorias independientes α-estables.*

Suponga que $X = (X_1, X_2, \ldots, X_d)$ puede ser expresada como una transformación lineal de variables aleatorias independientes α-estables. Asi que sean $Y_k \sim S_\alpha(\sigma_k, \beta_k, \mu_k)$, $k = 1, \ldots, m$, variables aleatorias independientes y sea $A = \{a_{jk}\}$, $j = 1, \ldots, m$, una matriz real. Consideremos que las componentes de X son combinaciones lineales de la siguiente forma

$$X_j = \sum_{k=1}^{m} a_{jk}Y_k, j = 1, \ldots, d,$$

Entonces la función caracteristica de X es la siguiente

$$E[exp\{i\sum_{j=1}^{d}\theta_j X_j\}] = E[exp\{i\sum_{k=1}^{m}(\sum_{j=1}^{d}\theta_j a_{jk})Y_k\}] = \prod_{k=1}^{m} E[exp\{i\sum_{j=1}^{d}\theta_j a_{jk}Y_k\}] \tag{3.15}$$

Asi que cuando $\alpha \neq 1$, como $Y_k \sim S_\alpha(\sigma_k, \beta_k, \mu_k)$, la relación anterior es igual a

$$\begin{aligned}
&\prod_{k=1}^{m} exp\{-\sigma_k^\alpha|\sum_{j=1}^{d}\theta_j a_{jk}|^\alpha(1 - i\beta_k sign(\sum_{j=1}^{d}\theta_j a_{jk})tan\frac{\pi\alpha}{2}) + i\mu_k\sum_{j=1}^{d}\theta_j a_{jk}\} \\
&= exp\{-\sum_{k=1}^{m}\sigma_k^\alpha|\sum_{j=1}^{d}\theta_j a_{jk}|^\alpha(1 - i\beta_k sign(\sum_{j=1}^{d}\theta_j a_{jk})tan\frac{\pi\alpha}{2}) + i\sum_{k=1}^{m}\mu_k\sum_{j=1}^{d}\theta_j a_{jk}\} \\
&= exp\{-\int_{S_d}|\sum_{j=1}^{d}\theta_j s_j|^\alpha(1 - isign(\sum_{j=1}^{d}\theta_j s_j)tan\frac{\pi\alpha}{2}\Gamma(ds)) + i\sum_{j=1}^{d}\theta_j\mu_j^0\},
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\Gamma = \sum_{k=1}^{m}[&\frac{1+\beta_k}{2}\sigma_k^\alpha(\sum_{j=1}^{d}a_{jk}^2)^{\alpha/2}\delta((\frac{a_{1k}}{(\sum_{j=1}^{d}a_{jk}^2)^{1/2}}, \ldots, \frac{a_{dk}}{(\sum_{j=1}^{d}a_{jk}^2)^{1/2}})) \\
&+ \frac{1-\beta_k}{2}\sigma_k^\alpha(\sum_{j=1}^{d}a_{jk}^2)^{\alpha/2}\delta((\frac{-a_{1k}}{(\sum_{j=1}^{d}a_{jk}^2)^{1/2}}, \ldots, \frac{-a_{dk}}{(\sum_{j=1}^{d}a_{jk}^2)^{1/2}}))]
\end{aligned}$$

y

$$\mu_j^0 = \sum_{k=1}^{m} a_{jk}\mu_k \tag{3.16}$$

Ahora si $\alpha = 1$, la relación (2.3.6) se convierte en

$$\prod_{k=1}^{m} exp\{-\sigma_k|\sum_{j=1}^{d}\theta_j a_{jk}|(1+i\frac{2}{\pi}\beta_k sign(\sum_{j=1}^{d}\theta_j a_{jk})ln|\sum_{j=1}^{d}\theta_j a_{jk}|)+i\mu_k\sum_{j=1}^{d}\theta_j a_{jk}\}$$

$$= exp\{-\sum_{k=1}^{m}\sigma_k|\sum_{j=1}^{d}\theta_j a_{jk}|(1+i\frac{2}{\pi}\beta_k sign(\sum_{j=1}^{d}\theta_j a_{jk})ln|\sum_{j=1}^{d}\theta_j a_{jk}|)$$

$$+i\sum_{k=1}^{m}\mu_k\sum_{j=1}^{d}\theta_j a_{jk}\}$$

$$= exp\{-\int_{S_d}|\sum_{j=1}^{d}\theta_j s_j|(1+i\frac{2}{\pi}sign(\sum_{j=1}^{d}\theta_j s_j)ln|\sum_{j=1}^{d}\theta_j s_j|\Gamma(ds))+i\sum_{j=1}^{d}\theta_j\mu_j^0\},$$

con Γ como se definió anteriormente y

$$\mu_j^0 = \sum_{k=1}^{m} a_{jk}(\mu_k - \frac{1}{\pi}\sigma_k\beta_k ln(\sum_{n=1}^{d} a_{nk}^2)).$$

Notemos que para ambos casos la función característica de X es la de un vector aleatorio α-estable, y que la medida espectral Γ es discreta y concentrada en m pares simetricos de puntos $(s^{(k)}, -s^{(k)}), k = 1, \ldots, m$, en S_d.

Capítulo 4

Procesos Estocásticos Estables e Integrales Estables

Un proceso α-estable es un elemento aleatorio cuyas distribuciones finito dimensionales son vectores α-estables. En este capítulo introduciremos la noción de integral estocástica estable, es decir según la definición que daremos mas adelante, integrales de funciones no aleatorias con respecto a alguna medida aleatoria α-estable. Es conveniente el ver a estas integrales como procesos estocásticos α-estables parametrizados por sus integrandos. De este modo los podemos especificar a través de sus distribuciones finito-dimensionales. En este cápitulo procederemos en tres pasos: introduciremos las medidas α-estables, construiremos la integral de funciones simples con respecto a estas medidas y mostraremos que la integral estable es el limite en (probabilidad) de integrales de funciones simples. También incluiremos algunos ejemplos de integrales estocásticas; estos incluyen el proceso de Lévy $S\alpha S$, que es el análogo del movimiento Browniano para $\alpha < 2$, el proceso ($S\alpha S$) de Ornstein-Uhlenbeck, el proceso ($S\alpha S$) de Ornstein-Uhlenbeck reverso, el proceso lineal fraccionario estable, y el proceso estable log-fraccionario. Como mencionamos al principio del capítulo empezaremos especificando las distribuciones finito-dimensionales. Entonces sea (E, ϵ, m) un espacio de medida y sea

$$\beta : E \to [-1, 1]$$

una función medible. Elijamos

$$F = \begin{cases} L^\alpha(E, \epsilon, m) & \text{si } \alpha \neq 1, \\ F(m, \beta) & \text{si } \alpha = 1. \end{cases} \tag{4.1}$$

donde

$$L^{\alpha}(E,\epsilon,m) = \{f : f \quad es \quad medible, \quad \int_E |f(x)|^{\alpha} m(dx) < \infty\},$$
$$F(m,\beta) = \{f : f \quad \in L^1(E,\epsilon,m) \quad y \quad \int_E |f(x)\beta(x) ln|f(x)||m(dx) < \infty\}.$$

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que m es $\sigma - finita$, ya que $f \in F$ implica que el soporte de F esta contenido en una región de E donde m es $\sigma - finita$.

4.1 Especificación de las Distribuciones Finito-Dimensionales:

Dadas $f_1, \ldots, f_d \in F$, definimos una medida de probabilidad $P_{f_1,\ldots,f_d}$ en R^d por la vía de dar explícitamente su función característica, como sigue:
i)Si $\alpha \neq 1$:

$$\phi_{f_1,\ldots,f_d}(\theta_1,\ldots,\theta_d) =$$
$$exp\{-\int_E |\sum_{j=1}^{d} \theta_j f_j(x)|^{\alpha} (1 - i\beta(x) sign(\sum_{j=1}^{d} \theta_j f_j(x)) tan\frac{\pi\alpha}{2}) m(dx)\};$$

ii)Si $\alpha = 1$:

$$\phi_{f_1,\ldots,f_d}(\theta_1,\ldots,\theta_d) =$$
$$exp\{-\int_E |\sum_{j=1}^{d} \theta_j f_j(x)| (1 + i\frac{2}{\pi}\beta(x) sign(\sum_{j=1}^{d} \theta_j f_j(x)) ln|\sum_{j=1}^{d} \theta_j f_j(x)|) m(dx)\}. \tag{4.2}$$

Ahora necesitamos probar que $\phi_{f_1,\ldots,f_d}(\theta_1,\ldots,\theta_d)$ es efectivamente la función característica de una medida de probabilidad en R^d; a continuación mostraremos que es la función característica de una distribución α-estable. Esto lo conseguiremos con un cambio de variable que transformará la integral sobre E a una integral sobre la esfera unitaria S_d en R^d. Notemos que m no es necesariamente la medida espectral de una distribución α-estable dado que E no es necesariamente la esfera unitaria S_d (recordemos que en la función caracteristica de una distribución α-estable la medida espectral esta definida en S_d). En realidad tenemos la ventaja de que la medida m es utilizada para todos los valores de d y todas las funciones $f_1, \ldots, f_d$ en F. Denotemos por $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_d)$, $f = (f_1, \ldots, f_d)$ y sea $u_{\alpha}(\theta, f, \beta(x))$ elintegrando en (4.2) es decir,

$$u_{\alpha}(\theta, f, \beta(x)) = |\sum_{j=1}^{d} \theta_j f_j(x)|^{\alpha} (1 - i\beta(x) sign(\sum_{j=1}^{d} \theta_j f_j(x)) tan\frac{\pi\alpha}{2})$$

si $\alpha \neq 1$, y

$$u_\alpha(\theta, f, \beta(x)) = |\sum_{j=1}^{d} \theta j f_j(x)|(1 + i\frac{2}{\pi}\beta(x) sign(\sum_{j=1}^{d} \theta_j f_j(x)) ln|\sum_{j=1}^{d} \theta_j f_j(x)|)$$

Si $\alpha = 1$.
Sea tambien

$$E_+ = \{x \in E : \sum_{j=1}^{d} f_j(x)^2 > 0\}.$$

Supongamos primero que $\alpha \neq 1$. Es claro que si $x \in E - E_+$ entonces $f_j(x) = 0$ para toda $j = 1, \ldots, d$ y en consecuencia $u_\alpha(\theta, f, \beta(x)) = 0$.

$$\phi_{f_1,\ldots,f_d}(\theta_1, \ldots, \theta_d) =$$

$$= exp\{-\int_{E_+} u_\alpha(\theta, f, \beta(x)) m(dx)\}$$

y al dividir y multiplicar por $(\sum_{j=1}^{d} f_j(x)^2)^{\frac{\alpha}{2}}$ con $x \in E_+$

$$= exp\{-\int_{E_+} u_\alpha(\theta, \frac{f}{(\sum_{j=1}^{d} f_j(x)^2)^{\frac{1}{2}}}, \beta(x))(\sum_{j=1}^{d} f_j(x)^2)^{\frac{\alpha}{2}}(m(dx)\}$$

$$= exp\{-\int_{E_+} u_\alpha(\theta, g, \beta(x)) m_1(dx)\}$$

donde

$$g_j(x) = \frac{f_j(x)}{(\sum_{j=1}^{d} f_j(x)^2)^{\frac{1}{2}}}, j = 1, \ldots, d,$$

y

$$m_1(dx) = (\sum_{j=1}^{d} f_j(x)^2)^{\frac{\alpha}{2}}(m(dx)).$$

Hay que notar que m_1 es una medida finita en (E_+, ϵ) dado que

$$\begin{aligned}\int_{E_+} m_1(dx) &= \int_{E_+} (\sum_{j=1}^{d} f_j(x)^2)^{\frac{\alpha}{2}} m(dx) \\ &\leq \int_{E_+} (\sum_{j=1}^{d} (f_j(x)^2)^{\alpha/2}) m(dx) \\ &\leq \int_{E_+} (\sum_{j=1}^{d} |f_j(x)|^\alpha m(dx) \\ &= \sum_{j=1}^{d} (\int_{E_+} |f_j(x)|^\alpha m(dx)) < \infty\end{aligned}$$

dado que $f_k \in L^\alpha(E, \epsilon, m)$ para $k = 1, \ldots, d$.

Por otro lado, $\sum_{j=1}^{d} g_j(x)^2 = 1$, para toda $x \in E_+$. Entonces:

$$\begin{aligned}\phi_{f_1,\ldots,f_d}(\theta_1, \ldots, \theta_d) &= \\ &= exp\{-\int_{E_+} u_\alpha(\theta, g(x), 1)\frac{1+\beta(x)}{2} m_1(dx) \\ &+ exp\{-\int_{E_+} u_\alpha(\theta, -g(x), 1)\frac{1-\beta(x)}{2} m_1(dx)\},\end{aligned}$$

Ahora utilizaremos el teorema de cambio de variable que se encuentra en el apéndice para cambiar la integral sobre E_+ en una sobre la esfera unitaria S_d; al hacer $s_j = g_j(x)$ en la primera integral y $s_j = -g_j(x)$ en la segunda, podemos concluir que

$$\begin{aligned}\phi_{f_1,\ldots,f_d}(\theta_1, \ldots, \theta_d) &= \\ &= exp\{-\int_{S_d} |\sum_{j=1}^{d} \theta_j s_j|^\alpha (1 - isign(\sum_{j=1}^{d} \theta_j s_j) tan\frac{\pi\alpha}{2})\Gamma(ds)\},\end{aligned}$$

donde Γ es una medida finita en S_d dada por

$$\Gamma(A) = \int_{g^{-1}(A)} \frac{1+\beta(x)}{2} m_1(dx) + \int_{g^{-1}(-A)} \frac{1-\beta(x)}{2} m_1(dx),$$

donde A es un conjunto de Borel en S_d y

$$g^{-1}(A) = \{x \in E_+ : (g_1(x), \ldots, g_d(x)) \in A\}.$$

Esto muestra que (4.2) es la función característica de una distribución α-estable en R^d cuando $\alpha \neq 1$.

En el caso $\alpha = 1$, tenemos que poner especial atención con la presencia del logaritmo, dado que

$$ln|\sum_{j=1}^{d} \theta_j f_j(x)| = ln|\sum_{j=1}^{d} \theta_j \frac{f_j}{(\sum_{k=1}^{d} f_k(x)^2)^{\frac{1}{2}}}| + ln(\sum_{k=1}^{d} f_k(x)^2)^{\frac{1}{2}},$$

al proceder de manera similar al caso anterior concluimos que:

$$\phi_{f_1,\dots,f_d}(\theta_1,\dots,\theta_d) = exp\{-\int_{E_+} u_\alpha(\theta, g(x), \beta(x)) m_1(dx) + i\sum_{j=1}^{d} \theta_j \mu_j^0\},$$

donde $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_d)$ y m_1 estan definidas igual que en el caso $\alpha \neq 1$ y donde

$$\mu_j^0 = -\frac{1}{\pi}\int_{E_+} f_j(x)\beta(x) ln(\sum_{k=1}^{d} f_k(x)^2) m(dx), j = 1, \dots, d.$$

Y al hacer un desarrollo análogo al efectuado en el caso $\alpha \neq 1$, se conclutye que

$$\phi_{f_1,\dots,f_d}(\theta_1,\dots,\theta_d) =$$
$$= exp\{-\int_{S_d} |\sum_{j=1}^{d} \theta_j s_j|(1 + i\frac{2}{\pi} sign(\sum_{j=1}^{d} \theta_j s_j) ln|\sum_{j=1}^{d} \theta_j s_j|)\Gamma(ds) + i\sum_{j=1}^{d} \theta_j \mu_j^0\}.$$

Esto muestra que (4.2) es también la función característica de una distribución α-estable en R^d para el caso $\alpha = 1$.
Ahora para poder recurrir al teorema de Kolmogorov tenemos que mostrar la consistencia de las medidas de probabilidad $P_{f_1,\dots,f_d}$. Para hacerlo notamos que para cualquier permutación $(\pi(1), \dots, \pi(d))$ de $(1, \dots, d)$, tenemos que

$$\phi_{f_{\pi(1)},\dots,f_{\pi(d)}}(\theta_{\pi(1)}, \dots, \theta_{\pi(d)}) = \phi_{f_1,\dots,f_d}(\theta_1, \dots, \theta_d)$$

lo cual es inmediato del hecho que en la función característica de las medidas de probabilidad $P_{f_1,\dots,f_d}$ solo intervienen sumas de productos de la forma $f_j(x)\theta_j$ para $j = 1, \dots, d$, las cuales son invariantes bajo permutaciones de los sumandos.
Ahora para $n \leq d$,

$$\phi_{f_1,\dots,f_n}(\theta_1, \dots, \theta_n) = \phi_{f_1,\dots,f_d}(\theta_1, \dots, \theta_n, 0, \dots, 0).$$

Lo cual demuestra la consistencia. Ahora gracias a la versión del Teorema de Kolmogorov para función característica, tenemos que existe un proceso estocástico con valores en R que denotaremos por $\{I(f), f \in F\}$ cuyas distribuciones finito dimensionales estan dadas por (4.2).
A I(f) se le conoce como integral α-estable de f. La medida m es llamada medida control y la función β es llamada intensidad del sesgo. A continuación estableceremos algunas propiedades elementales de la integral. Diremos que una función f es integrable si pertenece al conjunto de indices F en (4.1).

Propiedad 11 *Para $f_1, f_2, \ldots, f_d$ integrables, las integrales $I(f_1), I(f_2), \ldots, I(f_d)$ forman un vector α-estable con función característica conjunta dada por (4.2); o un vector $S\alpha S$ si la intensidad del sesgo es cero.*

Propiedad 12 *Sea f integrable. Entonces $I(f) \sim S_\alpha(\sigma_f, \beta_f, \mu_f)$ donde*

$$\sigma_f = \left(\int_E |f(x)|^\alpha m(dx)\right)^{1/\alpha},$$

$$\beta_f = \frac{\int_E f(x)^{\langle\alpha\rangle}\beta(x)m(dx)}{\int_E |f(x)|^\alpha m(dx)},$$

$$\mu_f = \begin{cases} 0 & si\ \alpha \neq 1, \\ -\frac{2}{\pi}\int_E f(x)\beta(x) ln|f(x)| m(dx) & si\ \alpha = 1. \end{cases}$$

La propiedad (11) se sigue de la definición del proceso $\{I(f), f \in F\}$. La propiedad (12) es inmediata (al sustituir $\theta_2 = \cdots = \theta_d = 0$ en (4.2). Hay que notar que cuando $\alpha \neq 1$, I(f) tiene parametro de corrimiento cero, y es por lo tanto, estable estricta, pero usualmente no es estrictamente estable cuando $\alpha = 1$. I(f) es simetricamente α-estable cuando $\beta(.) = 0$.
La siguiente propiedad establece que la integral I(.) es una funcional lineal.

Propiedad 13 *Si f_1 y f_2 son integrables, entonces*

$$I(a_1 f_1 + a_2 f_2) = a_1 I(f_1) + a_2 I(f_2) \qquad c.s. \tag{4.3}$$

para cualquier par de números reales a_1 y a_2.

Prueba
Tenemos que mostrar que

$$I(a_1 f_1 + a_2 f_2) - I(a_1 f_1) - I(a_2 f_2) = 0 \qquad c.s.$$

Entonces basta probar para todo real θ

$$E[exp\{i\theta[I(a_1 f_1 + a_2 f_2) - a_1 I(f_1) + a_2 I(f_2]\}] = 1$$

Por lo que

$$\begin{aligned} & E[exp\{i\theta[I(a_1 f_1 + a_2 f_2) - a_1 I(f_1) + a_2 I(f_2]\}] \\ & \quad = E[exp\{i[\theta I(a_1 f_1 + a_2 f_2) - (\theta a_1) I(f_1) - (\theta a_2) I(f_2)]\}] \\ & \quad \text{por } (4.2) \\ & \quad = \phi_{a_1 f_1 + a_2 f_2, f_1, f_2}(\theta, a_1\theta, a_2\theta) \\ & \quad = 1 \end{aligned}$$

dado que

$$\theta(a_1 f_1 + a_2 f_2) - (a_1\theta) f_1 - (a_2\theta) f_2 = 0$$

4.2 Medidas Aleatorias α-Estables

Es conveniente el considerar a las medidas aleatorias como procesos estocásticos indexados por conjuntos A. Se les conoce como medidas aleatorias por que por un lado: $(M(A_1), \ldots, M(A_d))$ es un vector aleatorio y por el hecho de que M es aditiva, es decir $M(\cup_i A_i) = \sum_i M(A_i)$ c.s. si los conjuntos A_j son disjuntos. La última relación no implica que M es una medida ordinaria con signo para casi toda realización de ω ya que, por ejemplo, $M(.,\omega)$ puede no tener variación acotada. Como podremos ver mas adelante, M aun puede servir como integrador en una definición alternativa de la integral estable.
Denotemos por (Ω, F, P) al espacio de probabilidad subyacente y por $L^0(\Omega)$ al conjunto de todas las variables aleatorias definidas en el. Sea (E, ϵ, m) un espacio de medida,

$$\beta : E \to [-1, 1]$$

una función medible, y sea

$$\epsilon_0 = \{A \in \epsilon : m(A) < \infty\}$$

la subfamilia de ϵ de conjuntos de medida-m finita.
Por independientemente dispersa entenderemos que si $A_1, A_2, \ldots, A_k$ pertenecen a ϵ_0 y son disjuntas, entonces las variables aleatorias $M(A_1), M(A_2), \ldots, M(A_k)$ son independientes. Y obviamente por $\sigma - aditividad$ entendemos que si $A_1, A_2, \ldots, A_k$ pertenecen a ϵ_0, son disjuntos y $\cup_{j=1}^{\infty} A_j \in \epsilon_0$, entonces

$$M(\cup_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} M(A_j) \qquad \text{c.s.}$$

Definición 5 *Una función conjuntista $\sigma - aditiva$ independientemente dispersada*

$$M : \epsilon_0 \to L^0(\Omega) \tag{4.4}$$

tal que para cada $A \in \epsilon_0$,

$$M(A) \sim S_\alpha((m(A))^{1/\alpha}, \frac{\int_A \beta(x) m(dx)}{m(A)}, 0) \tag{4.5}$$

es llamada una medida aleatoria α-estable en (E, ϵ) con medida de control m e intensidad de sesgamiento β.

Es importante notar que el parámetro de corrimiento μ es igual a cero para cada $M(A)$. Esto significa que la medida aleatoria M esta caracterizada por una medida (no aleatoria) m y una función β.

Teorema 17 *Dado una espacio de medida (E, ϵ, m), y una función $\beta : E \to [-1, 1]$, entonces existe una medida aleatoria α-estable en (E, ϵ) con medida de control m e intensidad de sesgamiento β.*

Prueba
Para poder mostrar que la medida aleatoria M existe, definimos

$$\{M(A), A \in \epsilon_0\}$$

como un proceso estocástico. Si utilizó la existencia del proceso estocástico $\{I(f), f \in F\}$ establecido anteriormente y si defino $M(A) = I(1_A)$ para $A \in \epsilon_0$, obtenemos la existencia del proceso estocástico $\{M(A), A \in \epsilon_0\}$ con las siguientes distribuciones finito-dimensionales: para $A_1, A_2, \ldots, A_k \in \epsilon_0$ y $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_d$ números reales,

$$\sum_{j=1}^{d} \theta_j M(A_j) \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu),$$

donde

$$\sigma^\alpha = \int_E |\sum_{j=1}^{d} \theta_j 1_{A_j}(x)|^\alpha m(dx),$$

$$\beta = \frac{\int_E \beta(x)(\sum_{j=1}^{d} \theta_j 1_{A_j}(x))^{\langle\alpha\rangle} m(dx)}{\int_E |\sum_{j=1}^{d} \theta_j 1_{A_j}(x)|^\alpha m(dx)},$$

$$\mu = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \neq 1, \\ -\frac{2}{\pi} \int_E \sum_{j=1}^{d} \theta_j 1_{A_j}(x) \beta(x) ln |\sum_{j=1}^{d} \theta_j 1_{A_j}(x)| m(dx) & \text{si } \alpha = 1. \end{cases}$$

A continuación demostraremos que M definida como se hizo anteriormente en realidad es independientemente dispersada.Consideremos $A_1, A_2, \ldots, A_k \in \epsilon_0$

disjuntos, entonces para $\alpha \neq 1$, por (4.5) tenemos,

$$
\begin{aligned}
&E[exp\{i\sum_{j=1}^{d}\theta_j M(A_j)\}]\\
&= exp\{-\int_E |\sum_{j=1}^{d}\theta_j 1_{A_j}(x)|^{\alpha}(1-i\beta(x)sign(\sum_{j=1}^{d}\theta_j 1_{A_j}(x))tan\frac{\pi\alpha}{2})m(dx)\}
\end{aligned}
$$

ahora notamos que como los A_js son disjuntos entonces

$$
\begin{aligned}
&= exp\{-\int_E \sum_{j=1}^{d}|\theta_j|^{\alpha}1_{A_j}(x)(1-i\beta(x)\sum_{j=1}^{d}sign(\theta_j)1_{A_j}tan\frac{\pi\alpha}{2})m(dx)\}\\
&= exp\{-\int_E (\sum_{j=1}^{d}|\theta_j|^{\alpha}1_{A_j}(x)-i\beta(x)\sum_{j=1}^{d}\sum_{i=1}^{d}sign(\theta_i)1_{A_i}1_{A_j}|\theta_j|^{\alpha}tan\frac{\pi\alpha}{2})m(dx)\\
&= exp\{-\int_E (\sum_{j=1}^{d}|\theta_j|^{\alpha}1_{A_j}(x)-i\beta(x)\sum_{j=1}^{d}sign(\theta_j)1_{A_j}|\theta_j|^{\alpha}tan\frac{\pi\alpha}{2})m(dx)\\
&= exp\{-(\sum_{j=1}^{d}|\theta_j|^{\alpha}m(A_j)-i\sum_{j=1}^{d}|\theta_j|^{\alpha}sign(\theta_j)tan\frac{\pi\alpha}{2}\int_{A_j}\beta(x)m(dx))\}\\
&= exp\{-\sum_{j=1}^{d}|\theta_j|^{\alpha}m(A_j)(1-i\frac{\int_{A_j}\beta(x)m(dx)}{m(A_j)}sign(\theta_j)tan\frac{\pi\alpha}{2})\}\\
&= \prod_{j=1}^{d}exp\{-|\theta_j|^{\alpha}m(A_j)(1-i\frac{\int_{A_j}\beta(x)m(dx)}{m(A_j)}sign(\theta_j)tan\frac{\pi\alpha}{2})\}\\
&= \prod_{j=1}^{d}E[exp\{i\theta_j M(A_j)\}].
\end{aligned}
$$

Esto muestra que M es independientemente dispersa. El argumento para $\alpha \neq 1$ es similar.
Por otro lado tenemos que a aditividad finita se sigue de la linealidad de la integral (Propiedad (3)), ya que

$$
\begin{aligned}
M(\cup_{j=1}^{d}A_j) &= I(1_{\cup_{j=1}^{d}A_j}) = I(\sum_{j=1}^{d}1_{A_j})\\
&= \sum_{j=1}^{d}I(1_{A_j}) = \sum_{j=1}^{d}M(A_j)
\end{aligned}
$$

La aditividad finita, permitirá probar la $\sigma - aditividad$, sean $A_1, A_2, \cdots \in \epsilon_0$, y $B = \cup_{j=1}^{\infty} A_j \in \epsilon_0$. Tenemos que probar que

$$M(B) = \sum_{j=1}^{\infty} M(A_j) \qquad c.s.,$$

es decir

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} M(A_j) = M(B) \qquad c.s.$$

o

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} M(A_j) = M(B) \qquad en \quad probabilidad$$

ya que como la serie $\sum_{j=1}^{n} M(A_j)$ tiene sumandos independientes, la convergencia de la serie en probabilidad es equivalente a la convergencia casi donde sea (ver apéndice). Por la aditividad finita, tenemos que $\sum_{j=1}^{n} M(A_j) = M(\cup_{j=1}^{d} A_j)$ c.s. y, por lo tanto, casi seguramente

$$M(B) - \sum_{j=1}^{n} M(A_j) = M(B) - M(\cup_{j=1}^{n} A_j) = M(\cup_{j=n+1}^{\infty} A_j),$$

se utlizó otra vez la aditividad finita. Pero por otro lado sabemos que $M(\cup_{j=n+1}^{\infty} A_j) \sim S_\alpha(\sigma_n, \beta_n, 0)$, donde

$$\begin{aligned}
\sigma_n^\alpha &= m(\cup_{j=n+1}^{\infty} A_j) \\
&= \sum_{j=n+1}^{\infty} m(A_j) && \text{(por la } \sigma - \textit{aditividad} \text{ de la medida m)} \\
&< \infty && \text{(dado que } \cup_{j=n+1}^{\infty} A_j \subset B \in \epsilon_0\text{).}
\end{aligned}$$

A continución se mostrará que σ_n converge a cero conforme n tiende a infinito, es decir que la función característica de $M(\cup_{j=n+1}^{\infty} A_j)$ converge puntualmente a 1. Lo que por el teorema de continuidad de Lévy implica que $M(\cup_{j=n+1}^{\infty} A_j)$

converge a cero en distribución. Entonces:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sigma_n &= \lim_{n\to\infty}(m(\cup_{j=n+1}^{\infty}A_j))^{1/\alpha}\\
&= (\lim_{n\to\infty} m(\cup_{j=n+1}^{\infty}A_j))^{1/\alpha}\\
&\text{por la continuidad de la medida m}\\
&= (m(\cap_{i=n+1}^{\infty}\cup_{j=i}^{\infty}A_i))^{1/\alpha}\\
&\text{haciendo } i' = i-n\\
&= (m(\cap_{i'=1}^{\infty}\cup_{j=i}^{\infty}A_i))^{1/\alpha}\\
&= (m(\limsup A_j))^{1/\alpha} = 0\\
&\text{por el teorema de Borel-Cantelli dado que } \sum_{j=n+1}^{\infty} m(A_j) < \infty
\end{aligned}$$

Entonces como $\lim_{n\to\infty}\sigma_n = 0$, tenemos que $M(\cup_{j=n+1}^{\infty}A_j) \to 0$ en distribución. Pero como la convergencia a cero en distribución es equivalente a convergencia a cero en probabilidad tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} M(\cup_{j=n+1}^{\infty}A_j) = 0 \qquad \textit{en probabilidad}$$

y por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n} M(A_j) = M(B) \qquad \textit{en probabilidad}$$

Lo que prueba que M es $\sigma-$*aditiva.*

Definición 6 *M es llamada una medida SαS aleatoria si la intensidad de sesgo β es cero.*

Ejemplo 3 *Sea M una medida α-estable en* $([0,\infty], B)$ *con medida de control de Lebesgue e intensidad de sesgo constante* $\beta(x) = \beta, 0 \le x < \infty$. *Entonces sea*

$$X(t) = M([0,t]) \sim S_\alpha((m([0,t]))^{1/\alpha}, \beta, 0) \qquad 0 \le t < \infty.$$

tenemos que M([0,t]) esta bien definida dado que $m([0,t]) < \infty$ *para toda* $t > 0$. *Entonces* $\{X(t), 0 \le t < \infty\}$ *cumple lo siguiente:*

$$i) X(0) = 0 \quad \textit{c.s. dado que } m(\{0\})=0$$

Ahora sean $t_1 \le t_2 \le \cdots \le t_n$ *entonces*

$$X(t_k) - X(t_{k-1}) = M([0,t_k]) - M([0,t_{k-1}]) = M([t_k, t_{k-1})) \quad c.s$$

Los conjuntos $[t_k, t_{k-1})k = 2, \ldots, n$ *son disjuntos y como M es independientemente dispersa, las variables* $M([t_k, t_{k-1}))k = 2, \ldots, n$ *son independientes y por lo tanto*

$$ii) X(t) \quad \textit{tiene incrementios independientes}$$

Y por ultimo tenemos que si $0 \leq s < t < \infty$, *entonces*

$$iii) X(t) - X(s) = M([0,t]) - M([0,s]) = M([t,s)) \sim S_\alpha((t-s)^{1/\alpha}, \beta, 0)$$

Por lo que por lo anterior podemos concluir que el proceso estocástico $\{X(t), 0 \leq t < \infty\}$ es un Proceso de Lévy α-estable.

4.3 Construcción de la Integral Estable

Las integrales α-estables I(f) se definieron al principio del cápitulo como un proceso estocástico indexado por los integrandos f. A continuación mostraremos que I(f) puede ser construida como una integral con respecto a una medida aleatoria α-estable M, a la que denotamos por $\int_E f(x)M(dx)$. Para poder definir $\int_E f(x)M(dx)$, procederemos de la siguiente forma: definiremos $\int_E f(x)M(dx)$ para funciones simples, y luego aproximaremos a cualquier función $f \in F$, por funciones simples $f^{(n)}$ y tomaremos el limite en probabilidad conforme $n \to \infty$ de $\int_E f^{(n)}(x)M(dx)$. Este limite es denotado por $\int_E f(x)M(dx)$. Y finalmente demostraremos que esta definición coincide con la definición de la integral dada al inicio del capítulo.
Sea M una medida aleatoria α-estable en (E, ϵ) con medida de control m e intensidad de sesgo β, y sea $\epsilon_0 = \{A \in \epsilon : m(A) < \infty\}$. Recordemos que queremos definir

$$I(f) = \int_E f(x)M(dx)$$

para todas las funciones medibles $f : E \to R$ que pertenecen a F (definido en 4.1). Hay que observar que F es un espacio lineal. Como es usual, para cualquier función simple de la forma $f(x) = \sum_{j=1}^{d} c_j 1_{A_j}$ donde A_j son conjuntos disjuntos que pertenecen a ϵ_0, definimos

$$I(f) = \int_E f(x)M(dx) = \sum_{j=1}^{d} c_j M(A_j). \tag{4.6}$$

Como M es una medida aleatoria, es independientemente esparcida, asi que las variables aleatorias α-estables $M(A_1), \ldots, M(A_n)$ son independientes. Y como la suma de variables aleatorias independientes α-estables es α-estable, entonces $I(f) \sim S_\alpha(\sigma_f, \beta_f, \mu_f)$
Ahora por la propiedades (1) y (2), y como

$M(A_j) \sim S_\alpha\big((m(A_j))^{1/\alpha}, \frac{\int_{A_j}\beta(x)m(dx)}{m(A_j)}, 0\big)$ $j = 1, \ldots, n$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\sigma_f &= (\sum_{j=1}^{d} |c_j|^\alpha m(A_j))^{1/\alpha} \\
&= (\sum_{j=1}^{d} |c_j|^\alpha (\int_E 1_{A_j} m(dx)))^{1/\alpha} \\
&= (\int_E \sum_{j=1}^{d} |c_j|^\alpha 1_{A_j} m(dx))^{1/\alpha} \\
&= (\int_E |f(x)|^\alpha m(dx))^{1/\alpha} \qquad (4.7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_f &= \frac{\sum_{j=1}^{d}(\frac{\int_{A_j}\beta(x)m(dx)}{m(A_j)})sign(c_j)|c_j|^\alpha m(A_j)}{\sum_{j=1}^{d}|c_j|^\alpha m(A_j)} \\
&= \frac{\sum_{j=1}^{d}(\int_E \beta(x)1_{A_j}m(dx))|c_j|^{\langle\alpha\rangle}}{\sum_{j=1}^{d}|c_j|^\alpha(\int_E 1_{A_j}m(dx))} \\
&= \frac{\int_E \beta(x)\sum_{j=1}^{d}|c_j|^{\langle\alpha\rangle}1_{A_j}m(dx)}{\int_E \sum_{j=1}^{d}|c_j|^\alpha 1_{A_j}m(dx)} \\
&= \frac{\int_E \beta(x)(f(x))^{\langle\alpha\rangle}}{\int_E |f(x)|^\alpha m(dx)} \qquad (4.8)
\end{aligned}$$

Ahora, para $\alpha = 1$

$$\begin{aligned}
\mu_f &= \sum_{j=1}^{d}(-\frac{2}{\pi}|c_j|ln|c_j|(m(A_j))\frac{\int_{A_j}\beta(x)m(dx)}{m(A_j)} \\
&= \sum_{j=1}^{d}(-\frac{2}{\pi}|c_j|ln|c_j|\int_{A_j}\beta(x)m(dx) \\
&= \sum_{j=1}^{d}(-\frac{2}{\pi}|c_j|ln|c_j|\int_E \beta(x)1_{A_j}m(dx) \\
&= -\frac{2}{\pi}(\int_E \beta(x)\sum_{j=1}^{d}|c_j|ln|c_j|1_{A_j}m(dx) \\
&= -\frac{2}{\pi}\int_E \beta(x)|f(x)|ln|f(x)|m(dx) \qquad (4.9)
\end{aligned}$$

Obviamente para el caso $\alpha \neq 1$ tenemos que $\mu_f = 0$. Entonces

$$\mu_f = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \neq 1, \\ -\frac{2}{\pi}\int_E \beta(x)|f(x)|ln|f(x)|m(dx) & \text{si } \alpha = 1. \end{cases}$$

Asi que la definición para la integral estable (4.6) coincide con la dada en la sección anterior. Entonces por la propiedad (3), podemos concluir que la integral estable es lineal para funciones simples. Ahora consideremos $f \in F$. Entonces podemos elegir una sucesión de funciones simples $\{f^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ que posean las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} &f^{(n)}(x) \to f(x) && \text{para casi toda } x \in \text{E}, \\ &|f^{(n)}(x)| \leq \theta(x) && \text{para toda } n, x, \text{ y alguna } \theta \in \text{F}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

La sucesión anterior siempre existe, ya que podemos tomar, por ejemplo,

$$f^{(n)} = \begin{cases} \frac{i}{n} & \text{si } \frac{i}{n} \leq f(x) < \frac{i+1}{n}, i = 0, 1, \dots, n^2 - 1, \\ \frac{-i}{n} & \text{si } \frac{-(i+1)}{n} < f(x) \leq \frac{-i}{n}, i = 0, 1, \dots, n^2 - 1, \\ 0 & \text{si } |f(x)| \geq n, \end{cases}$$

Y para este caso tenemos que $\theta = |f|$. Entonces tenemos que por (4.6) la sucesión de integrales $I(f^{(n)}), n = 1, 2, \dots$, esta bien definida, y demostraremos que converge en probabilidad. Para hacerlo, probaremos que $\{I(f^{(n)})\}_{n \geq 1}$ es de Cauchy en probabilidad.

$$I(f^{(n)}) - I(f^{(m)}) = I(f^{(n)} - f^{(m)}) \sim S_\alpha(\sigma_{n,m}, \beta_{n,m}, \mu_{n,m}),$$

y por la propiedad (4.2) tenemos que

$$\sigma_{n,m} = \left(\int_E |f^{(n)} - f^{(m)}|^\alpha m(dx)\right)^{1/\alpha},$$

$-1 \leq \beta \leq 1$ y

$$\mu_{n,m} = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \neq 1, \\ -\frac{2}{\pi} \int_E (f^{(n)} - f^{(m)}) \beta(x) ln|f^{(n)} - f^{(m)}| m(dx) & \text{si } \alpha = 1. \end{cases}$$

Ahora tenemos por (4.10) que $|f^{(n)} - f^{(m)}| \leq 2\theta(x)$, asi que por el teorema de convergencia dominada, como $|f| \in F$, entonces

$$\begin{aligned} \lim_{n,m\to\infty} \sigma_{n,m} &= \lim_{n,m\to\infty} \left(\int_E |f^{(n)} - f^{(m)}|^\alpha m(dx)\right)^{1/\alpha} \\ &= \left(\int_E \lim_{n,m\to\infty} |f^{(n)} - f^{(m)}|^\alpha m(dx)\right)^{1/\alpha} = 0 \end{aligned}$$

Ahora para mostrar que $\mu_{n,m} \to 0$ en el caso $\alpha = 1$, definamos la siguiente función

$$\psi(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y = 0, \\ y|ln(y)| & \text{si } 0 < y \leq e^{-1}, \\ e^{-1} & \text{si } e^{-1} < y \leq \tau, \\ yln(y) & \text{si } y > \tau, \end{cases}$$

donde τ es la solución de la ecuación t ln(t)=e^{-1}. Obviamente, ψ es una función continua no decreciente y, además es fácil demostrar que

$$\psi(y) \geq y|ln(y)| \tag{4.11}$$

para toda $y > 0$. Notemos que para cualquier $\theta \in F$,

$$\begin{aligned}
&\int_E \psi(|\theta(x)|)|\beta(x)|m(dx) \\
&= \int_{\{|\theta(x)|\in(e^{-1},\tau]\}} \psi(|\theta(x)|)|\beta(x)|m(dx) + \int_{\{|\theta(x)|\notin(e^{-1},\tau]\}} \psi(|\theta(x)|)|\beta(x)|m(dx) \\
&= e^{-1}\int_{\{|\theta(x)|\notin(e^{-1},\tau]\}} |\beta(x)|m(dx) + \int_{\{|\theta(x)|\notin(e^{-1},\tau]\}} |\theta(x)(ln|\theta(x)|)\beta(x)|m(dx)
\end{aligned}$$

Ahora como $|\beta(x)| \leq 1$,

$$\leq e^{-1}m\{x : |\theta(x)| \in (e^{-1},\tau]\} + \int_E |\theta(x)(ln|\theta(x)|)\beta(x)|m(dx),$$

Sin embargo como $\theta \in F$ por (4.1) tenemos que

$$\begin{aligned}
e^{-\alpha}m\{x : |\theta(x)| \in (e^{-1},\tau]\} &\leq \int_{\{|\theta(x)|\notin(e^{-1},\tau]\}} |\theta(x)|^{\alpha}m(dx) \\
&\leq \int_E |\theta(x)|^{\alpha}m(dx) < \infty
\end{aligned}$$

Por lo que tenemos que $m\{x : |\theta(x)| \in (e^{-1},\tau]\} < \infty$, y por (4.1) concluimos que $\int_E \psi(|\theta(x)|)|\beta(x)|m(dx) < \infty$. Asi que por 4.11,

$$(f^{(n)} - f^{(m)})ln|f^{(n)} - f^{(m)}| \leq \psi(f^{(n)} - f^{(m)})$$

Por otro lado como ψ es no decreciente y por (4.10) tenemos

$$\psi(f^{(n)} - f^{(m)}) \leq \psi(2\theta)$$

Ahora como $2\theta \in F$ entonces $\int_E \psi(|2\theta(x)|)|\beta(x)|m(dx) < \infty$, asi que el teorema de convergencia dominada implica que

$$\int_E \psi(|f^{(n)} - f^{(m)}|)|\beta(x)|m(dx) \to 0 \quad \text{conforme n,m} \to \infty,$$

y por ende

$$\int_E (|f^{(n)} - f^{(m)}|)ln|f^{(n)} - f^{(m)}|\beta(x)|m(dx) \to 0 \quad \text{conforme n,m} \to \infty,$$

Asi que para $\alpha = 1$ tenemos que $\mu_{n,m} \to 0$ conforme $n, m \to \infty$. Entonces hemos demostrado que $\mu_{n,m}, \sigma_{n,m} \to 0$ conforme $n, m \to \infty$, lo que implica que la sucesión de integrales $I(f^{(n)} - f^{(m)}) \to 0$ conforme $n, m \to \infty$ en distribución.

Pero como la convergencia a cero en distribución es equivalente a la convergencia a cero en probabilidad tenemos que

$$I(f^{(n)} - f^{(m)}) \to 0 \quad \text{conforme } n, m \to \infty \text{ en probabilidad,}$$

Lo anterior implica que la sucesión $\{I(f^{(n)}), n = 1, 2, \ldots\}$ es de Cauchy en probabilidad, entonces existe una función $I(f)$ ϵ-medible (ver Billingsley[3]) tal que

$$I(f) = p - \lim_{n\to\infty} I(f^{(n)}),$$

Por otro lado hay que notar que el limite anterior no depende de la elección de la sucesión $f^{(n)}$. Ya que si ambas $f^{(n)}$ y $g^{(n)}$ convergen a f y satisface (4.10), entonces haciendo

$$h^{(n)} = \begin{cases} f^{(m)} & \text{si n=2m,} \\ g^{(m)} & \text{si n=2m-1,} \end{cases}$$

obtenemos que $I(h^{(n)}) \to I(f)$ en probabilidad, lo que muestra que los límites de $I(f^{(n)})$ y $I(g^{(n)})$ coinciden. Ahora como la convergencia en probabilidad implica convergencia en distribución, tenemos que

Proposición 4 *Sea σ_f, β_f, μ_f definidas, respectivamentes, como en (4.7),(4.8) y (4.9). Entonces*

$$I(f) \sim S_\alpha(\sigma_f, \beta_f, \mu_f), \tag{4.12}$$

es decir,
i)si $\alpha \neq 1$:

$$E[exp(i\theta I(f))]$$
$$= exp\{-\int_E |\theta f(x)|^\alpha (1 - i\beta(x) sign(\theta f(x)) tan\frac{\pi\alpha}{2}) m(dx)\};$$

ii)si $\alpha = 1$:

$$E[exp(i\theta I(f))]$$
$$= exp\{-\int_E |\theta f(x)|(1 + i\frac{2}{\pi}\beta(x) sign(\theta f(x)) ln|\theta f(x)|) m(dx)\}.$$

Ahora mostraremos que $I(f)$ es lineal en f. Sean $f \in F$, $g \in F$ y $\{f^{(n)}\}_{n=1}^\infty$, $\{g^{(n)}\}_{n=1}^\infty$ dos sucesiones de funciones simples que satisfacen (4.10) para f y g, respectivamente. Hagamos $h = af + bg$ y $h^{(n)} = af^{(n)} + bg^{(n)}$, donde a y b son dos números reales. Claramente, $\{h^{(n)}\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión de funciones simples tal que $h^{(n)}(x) \to h(x)$ conforme $n \to \infty$ para casi toda x, y

$$\begin{aligned} |h^{(n)}(x)| &\leq |a||f^{(n)}(x)| + |b||g^{(n)}(x)| \\ &\leq |a|\theta_1(x) + |b|\theta_2(x) \end{aligned}$$

para alguna θ_1 y θ_2 en F. Asi que la sucesión $\{h^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ satisface (4.10) para h. Por lo que

$$\begin{aligned}I(h) &= p - \lim_{n\to\infty} I(h^{(n)})\\ &= p - \lim_{n\to\infty} I(af^{(n)} + bg^{(n)})\\ &= p - \lim_{n\to\infty} aI(f^{(n)}) + bI(g^{(n)})\end{aligned}$$

dado que la integral es lineal para funciones simples

$$\begin{aligned}&= ap - \lim_{n\to\infty} I(f^{(n)}) + bp - \lim_{n\to\infty} I(g^{(n)})\\ &= aI(f) + bI(g),\end{aligned}$$

Lo que prueba la linealidad. Ahora utilizando la linealidad de la integral y la proposición (4) tenemos

Proposición 5 *Para cualquier $f_1, \ldots, f_d$ en F, la función característica del vector aleatorio $(I(f_1), \ldots, I(f_d))$ esta dada por (4.2).*

Prueba.
Consideremos la función característica del vector aleatorio $I(f) = (I(f_1), \ldots, I(f_d))$,

$$E[exp\{i\langle\theta, I(f)\rangle\}] = E[exp\{i\sum_{j=1}^{d}\theta_j I(f_j)\}]$$

pero por la linealidad de la integral

$$= E[exp\{i\theta I(\sum_{j=1}^{d}\theta_j' f_j)\}]$$

donde $\theta_j' = \theta^{-1}\theta_j$

Ahora por la proposición (4) tenemos que
i)si $\alpha \neq 1$:

$$E[exp(i\theta I(\sum_{j=1}^{d}\theta_j' f_j))]$$

$$= exp\{-\int_E |\sum_{j=1}^{d}\theta_j f_j|^{\alpha}(1 - i\beta(x)sign(\sum_{j=1}^{d}\theta_j f_j)tan\frac{\pi\alpha}{2})m(dx)\};$$

ii)si $\alpha = 1$:

$$E[exp(i\theta I(f))]$$

$$= exp\{-\int_E |\sum_{j=1}^{d}\theta_j f_j|(1 + i\frac{2}{\pi}\beta(x)sign(\sum_{j=1}^{d}\theta_j f_j)ln|\sum_{j=1}^{d}\theta_j f_j|)m(dx)\}.$$

Lo que demuestra la proposición.

4.4 Propiedades de las integrales estables

Proposición 6 *Sea $X_j = \int_E f_j(x)M(dx), j = 1, 2, \ldots,$ y $X = \int_E f(x)M(dx)$, donde M es una medida aleatoria α-estable con medida de control* m *e intensidad de sesgo β. Entonces*

$$p - \lim_{j\to\infty} X_j = X$$

si y solo si

$$\lim_{j\to\infty} \int_E |f_j(x) - f(x)|^\alpha m(dx) = 0$$

y en el caso $\alpha = 1$, si se tiene la siguiente hipótesis adicional

$$\lim_{j\to\infty} \int_E (f_j(x) - f(x)) ln|f_j(x) - f(x)|\beta(x)m(dx) = 0$$

también se da la equivalencia anterior

Prueba.
Tenemos que la convergencia $p - \lim_{j\to\infty} X_j = X$ es equivalente a que $p - \lim_{j\to\infty}(X_j - X) = 0$, y por lo tanto a la convergencia en distribución a cero de la sucesión $\{X_j - X, j = 1, 2, \ldots\}$ (dado que la convergencia en probabilidad a cero es equivalente a la convergencia en distribución). Ahora por la linealidad de la integral tenemos que

$$X_j - X = \int_E f_j(x)M(dx) - \int_E f(x)M(dx) = \int_E (f_j(x) - f(x))M(dx) \quad (4.13)$$

Pero la proposición (4) implica que $X_j - X \sim S_\alpha(\sigma_j, \beta_j, \mu_j)$, donde

$$\sigma_j = (\int_E |f_j(x) - f(x)|^\alpha m(dx))^{1/\alpha} \qquad \text{j=1,2,\ldots,}$$

y

$$\mu_j = \begin{cases} 0, & \text{si } \alpha \neq 1, \\ -\frac{2}{\pi}\int_E (f_j(x) - f(x)) ln|f_j(x) - f(x)|\beta(x)m(dx), & \text{si } \alpha = 1. \end{cases}$$

Pero la convergencia en distribución es equivalente a la convergencia puntual de la funciones caracteristicas, por lo que $\lim_{j\to\infty}(X_j - X) = 0$ en distribución si y solo si $\lim_{j\to\infty} E[exp\{i\theta I(f_j - f)\}] = 1$. Por lo que la convergencia $p - \lim_{j\to\infty} X_j = X$ es equivalente a la convergencia de la sucesiones $\{\sigma_j, j = 1, 2, \ldots\}$ y $\{\mu_j, 1, 2, \ldots\}$ a cero, lo que establece la proposición.

Teorema 18 *Sea $X_1 = \int_E f_1(x)M(dx)$ y $X_2 = \int_E f_2(x)M(dx)$ dos integrales α-estables con respecto a una medida aleatoria α-estable M con $0 < \alpha < 2$ y medida de control m, Entonces X_1 y X_2 son independientes si y solo si*

$$f_1(x)f_2(x) \equiv 0 \quad m\text{-c.s. en } E.$$

Prueba.
Por conveniencia, supongamos $\alpha \neq 1$, ya que el caso $\alpha = 1$ se demuestra de manera análoga. Entonces X_1 y X_2 son independientes si y solo si para toda pareja de reales $\theta_1 y \theta_2$,

$$E[exp\{i(\theta_1 X_1 + \theta_2 X_2)\}] = E[exp\{i\theta_1 X_1\}]E[exp\{i\theta_2 X_2\}].$$

Pero

$$E[exp\{i(\theta_1 X_1 + \theta_2 X_2)\}] =$$
$$exp\{-\int_E |\sum_{k=1}^{2} \theta_k f_k(x)|^\alpha [1 - i\beta(x) sign(\sum_{k=1}^{2} \theta_k f_k(x)) tan\frac{\pi\alpha}{2}] m(dx)\},$$

donde

$$\begin{aligned} &E[exp\{i\theta_1 X_1\}]E[exp\{i\theta_2 X_2\}] = \\ &exp\{-\int_E |\theta_1 f_1(x)|^\alpha [1 - i\beta(x) sign(\theta_1 f_1(x)) tan\frac{\pi\alpha}{2}] m(dx) \\ &\quad - \int_E |\theta_2 f_2(x)|^\alpha [1 - i\beta(x) sign(\theta_2 f_2(x)) tan\frac{\pi\alpha}{2}] m(dx)\}. \end{aligned}$$

Por lo que al igualar los módulos tenemos que

$$\begin{aligned} &\int_E |\theta_1 f_1(x) + \theta_2 f_2(x)|^\alpha \\ &\qquad = |\theta_1|^\alpha \int_E |f_1(x)|^\alpha m(dx) + |\theta_2|^\alpha \int_E |f_2(x)|^\alpha m(dx), \end{aligned}$$

Lo cual se cumple para cualquier pareja de reales θ_1 y θ_2 solo si

$$f_1(x) f_2(x) = 0 \quad \text{m-c.s.}$$

Ahora supongamos que $f_1(x)f_2(x) = 0$ m-c.s., entonces

$$E[exp\{i(\theta_1 X_1 + \theta_2 X_2)\}]$$

$$= exp\{-\int_E |\sum_{k=1}^{2} \theta_k f_k(x)|^\alpha [1 - i\beta(x) sign(\sum_{k=1}^{2} \theta_k f_k(x)) tan\frac{\pi\alpha}{2}] m(dx)\}$$

$$= exp\{-\int_{\{f_1(x)=0\}} |\sum_{k=1}^{2} \theta_k f_k(x)|^\alpha [1 - i\beta(x) sign(\sum_{k=1}^{2} \theta_k f_k(x)) tan\frac{\pi\alpha}{2}] m(dx)$$

$$- \int_{\{f_1(x)\neq 0\}} |\sum_{k=1}^{2} \theta_k f_k(x)|^\alpha [1 - i\beta(x) sign(\sum_{k=1}^{2} \theta_k f_k(x)) tan\frac{\pi\alpha}{2}] m(dx)\}$$

Ahora como $f_1(x)f_2(x) = 0$ m-c.s.

$$= exp\{-\int_{\{f_1(x)=0\}} |\sum_{k=1}^{2} \theta_k f_k(x)|^\alpha [1 - i\beta(x) sign(\sum_{k=1}^{2} \theta_k f_k(x)) tan\frac{\pi\alpha}{2}] m(dx)$$

$$- \int_{\{f_2(x)=0\}} |\sum_{k=1}^{2} \theta_k f_k(x)|^\alpha [1 - i\beta(x) sign(\sum_{k=1}^{2} \theta_k f_k(x)) tan\frac{\pi\alpha}{2}] m(dx)\}$$

$$= exp\{-\int_E |\theta_2 f_2(x)|^\alpha [1 - i\beta(x) sign(\theta_2 f_2(x)) tan\frac{\pi\alpha}{2}] m(dx)$$

$$- \int_E |\theta_1 f_1(x)|^\alpha [1 - i\beta(x) sign(\theta_1 f_1(x)) tan\frac{\pi\alpha}{2}] m(dx)\}$$

$$= (exp\{-\int_E |\theta_1 f_1(x)|^\alpha [1 - i\beta(x) sign(\theta_1 f_1(x)) tan\frac{\pi\alpha}{2}] m(dx)\})$$

$$(exp\{-\int_E |\theta_2 f_2(x)|^\alpha [1 - i\beta(x) sign(\theta_2 f_2(x)) tan\frac{\pi\alpha}{2}] m(dx)\})$$

$$= E[exp\{i\theta_1 X_1\}] E[exp\{i\theta_2 X_2\}]$$

Y por ende X_1 y X_2 son independientes, lo que finaliza la prueba.

Proposición 7 *(Cambio de Variable). Sean M_m y M_ν dos medidas aleatorias α-estables con $0 < \alpha \leq 2, \alpha \neq 1$ o dos medidas aleatorias S1S; con intensidad de sesgo igual y medidas de control m y ν, respectivamente, y que satisfacen:*

$$\frac{m(dx)}{\nu(dx)} = (r(x))^\alpha, \qquad x \in E,$$

donde $r(x) \geq 0$. Entonces

$$\int_E f(x) M_m(dx) = \int_E f(x) r(x) M_\nu(dx)$$

para toda $f \in L^\alpha(E, m)$.

Prueba.
Sea $\beta(x)$, $x \in E$ la intensidad de sesgo de las medidas aleatorias M_m y M_ν. Y

sea σ_m el parámetro de escala de la integral de $f(x)$ con respecto a M_m y $\sigma_{r\nu}$ el de la integral $f(x)r(x)$ con respecto a M_ν; entonces

$$\begin{aligned}\sigma_m &= (\int_E |f(x)|^\alpha m(dx))^{1/\alpha} \\ &= (\int_E |f(x)|^\alpha (r(x))^\alpha \nu(dx))^{1/\alpha} \\ &= (\int_E |f(x)r(x)|^\alpha \nu(dx))^{1/\alpha} \\ &= \sigma_{r\nu}\end{aligned}$$

Del mismo modo si denotamos por β_m, a la intensidad de sesgo de la integral de $f(x)$ con respecto a M_m y por $\beta_{r\nu}$ a la intensidad de sesgo de la integral de $r(x)f(x)$ con respecto a M_ν, tenemos que

$$\begin{aligned}\beta_m &= \frac{\int_E (sign f(x))|f(x)|^\alpha \beta(x) m(dx)}{\int_E |f(x)|^\alpha m(dx)} \\ &= \frac{\int_E (sign f(x))|f(x)|^\alpha \beta(x) r(x)^\alpha \nu(dx)}{\int_E |f(x)|^\alpha r(x)^\alpha m(dx)} \\ &\text{pero como } r(x) \leq 0 \text{ entonces} \\ &= \frac{\int_E (sign f(x)r(x))|f(x)r(x)|^\alpha \beta(x) \nu(dx)}{\int_E |f(x)r(x)|^\alpha m(dx)} \\ &= \beta_{r\nu}\end{aligned}$$

Ahora dado que la integral de f(x) con respecto a M_m y la integral de r(x)f(x) con respecto a M_ν son estrictamente α-estables (ver proposición (4)). Entonces el parametro de corrimiento de ambas es cero.
Por lo que podemos concluir que ambas integrales son iguales en distribución al tener los tres parámetros que definen a una variable aleatoria α-estable idénticos (por coincidir sus funciones características).

Ejemplo 4 *El movimiento de Lévy $S\alpha S$.*
Sea

$$X(t) = \int_0^\infty 1_{\{x \leq t\}} M(dx) = \int_0^t M(dx), \quad t \geq 0,$$

donde M es $S\alpha S$ en $[0, \infty]$ con medida de control $m(dx) = dx$. Entonces

$$X(0) = 0 \qquad \textit{c.s.},$$

$$X(t) - X(0) = \int_s^t M(dx) = M([s,t]) \sim S_\alpha(|t-s|^{1/\alpha}, 0, 0).$$

Si $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, entonces

$$\begin{aligned}&(X(t_2) - X(t_1), X(t_3) - X(t_2), \ldots, X(t_n) - X(t_{n-1})) \\ &\qquad = (\int_{t_1}^{t_2} M(dx), \int_{t_2}^{t_3} M(dx), \ldots, \int_{t_n}^{t_{n-1}} M(dx)).\end{aligned}$$

Las componentes de este vector aleatorio son independientes dado que los integrandos tienen soportes disjuntos. Entonces, $\{X(t), t \geq 0\}$ *es un proceso que comienza en 0, tiene incrementos estacionarios independientes y distribuciones finto-dimensionales* $S\alpha S$.

Capítulo 5

Resultados Posteriores

En este capítulo se presentarán algunos resultados que surgieron durante el desarrollo de este trabajo. Estos resultados son inéditos, y representan la culminación del contenido y propósito de esta tesis. La idea central detrás del siguiente trabajo es la de demostrar un teorema de Radon-Nikodým para medidas aleatorias α-estables. Para ello se va a generalizar el concepto de continuidad absoluta en medidas deterministas a medidas aleatorias.
Hay que hacer notar que los siguientes resultados constituyen una posible nueva ruta de investigación y establecen una continuación al trabajo hasta ahora desarrollado.

5.1 Teorema de Radon-Nikodým para Medidas Aleatorias α-Estables

Definición 7 *Sean M_1 y M_2 dos medidas aleatorias α-estables en (E, ε) con $0 < \alpha \leq 2$, $\alpha \neq 1$, con intensidades de sesgo idénticas y con medidas de control m_1 y m_2, respectivamente, entonces decimos que M_1 es absolutamente continua con respecto a M_2 (o $M_1 \ll M_2$) si para todo $A \in \varepsilon$ tal que*

$$M_2(A) \stackrel{d}{=} 0$$

Entonces

$$M_1(A) \stackrel{d}{=} 0$$

La definición anterior nos permite extender la idea de continuidad absoluta a medidas aleatorias, a continuación probaremos un lema que nos será muy útil en la demostración del teorema de Radon-Nikodým.

Lema 5 *Sea una M una medida aleatoria α-estable en (E, ε) con $0 < \alpha \leq 2$ $\alpha \neq 1$, medida de control m e intensidad de sesgo β, entonces para toda $A \in \varepsilon_0$*

$$M(A) \stackrel{d}{=} 0$$

si y solo si

$$m(A) = 0$$

Prueba
Recordemos que si $A \in \varepsilon_0$, $M(A) \sim S_\alpha\big((m(A))^{1/\alpha}, \frac{\int_A \beta(x)m(dx)}{m(A)}, 0\big)$, entonces su función caracteristica es la siguiente

$$\begin{aligned}\varphi_A(\theta) &= exp\{-m(A)|\theta|^\alpha(1 - i\frac{\int_A \beta(x)m(dx)}{m(A)}(sign(\theta))tan(\frac{\pi\alpha}{2})\} \\ &= exp\{-m(A)|\theta|^\alpha - i(\int_A \beta(x)m(dx))(sign(\theta))tan(\frac{\pi\alpha}{2})|\theta|^\alpha\} \qquad (5.1)\end{aligned}$$

Ahora supongamos que $M(A) \stackrel{d}{=} 0$, entonces por la unicidad de la función característica $\varphi_A = 1$, entonces por (5.1)

$$exp\{-m(A)|\theta|^\alpha - i(\int_A \beta(x)m(dx))(sign(\theta))tan(\frac{\pi\alpha}{2})|\theta|^\alpha\} = 1$$

Pero al tomar la norma en ambos lados de la desigualdad anterior tenemos

$$exp\{-m(A)|\theta|^\alpha\} = 1$$

Y al tomar logaritmo

$$-m(A)|\theta|^\alpha = 0$$

Pero como la igualdad anterior es válida para toda $\theta \in R$, se sigue que $m(a) = 0$. Por otro lado si $m(a) = 0$, entonces $\int_A \beta(x)m(dx)$ por lo que al sustituir en (5.1) obtenemos que $\varphi_A = 1$, y por ende que $M(A) \stackrel{d}{=} 0$. Lo que finaliza la prueba.

A continuación demostraremos el teorema de Radon-Nikodým para medidas aleatorias α-estables con $0 < \alpha \leq 2$, y $\alpha \neq 1$.
Para esto definamos $\varepsilon_i = \{A \in \varepsilon : m_i(A) < \infty\}$ para $i = 1, 2$.

Teorema 19 *Sean M_1 y M_2 dos medidas aleatorias α-estables en (E, ε) con $0 < \alpha \leq 2$, $\alpha \neq 1$, con intensidades de sesgo idénticas $\beta(x)$ y con medidas de control m_1 y m_2, respectivamente. Si M_1 es absolutamente continua con respecto a M_2, entonces existe una funcón ε-medible y positiva f tal que*

$$M_1(A) \stackrel{d}{=} \int 1_A f(x)M_2(dx) \equiv \int_A f(x)M_2(dx) \qquad \text{para toda } A \in \varepsilon_1. \qquad (5.2)$$

Si además m_2 es finita, entonces f esta unívocamente determinada m_2-c.s.

Prueba
Tomemos $A \in \varepsilon$ de tal forma que $m_2(A) = 0$; por el lema probado anteriormente tenemos que $M_2(A) \stackrel{d}{=} 0$. Pero como M_1 es absolutamente continua con respecto

a M_2, tenemos que $M_1(A) = 0$. De nuevo por el lema anterior se sigue que $m_1(A) = \mathbf{0}$.
Es decir se ha probado que m_1 es absolutamente continua con respecto a m_2, y como m_1 y m_2 son medidas σ-finitas (ver Capítulo 4) entonces por el teorema de Radon-Nikodým para medidas deterministas tenemos que existe f ε-medible y positiva tal que:

$$m_1(A) = \int_A f(x) m_2(dx) \qquad \text{para toda } A \in \varepsilon \tag{5.3}$$

Para $A \in \varepsilon_1$, al definir $g(x) = f(x)^{1/\alpha}$ tenemos que

$$\begin{aligned} m_1(A) &= \int_A |g(x)|^\alpha m_2(dx) \\ &= \int |1_A(x) g(x)|^\alpha m_2(dx) \\ \int_A \beta(x) m_1(dx) &= \int_A g(x)^\alpha m_2(dx) \qquad (5.4) \\ &= \int_A g(x)^{\langle\alpha\rangle} m_2(dx) \\ &= \int (1_A(x) g(x))^{\langle\alpha\rangle} m_2(dx) \end{aligned}$$

Y como $M_1(A) \sim S_\alpha\big((m_1(A))^{1/\alpha}, \frac{\int_A \beta(x) m_1(dx)}{m_1(A)}, 0\big)$, por (5.4)

$$M_1(A) \sim S_\alpha\Big(\big(\int |1_A g(x)|^\alpha m_2(dx)\big)^{1/\alpha}, \frac{\int (1_A(x) g(x))^{\langle\alpha\rangle} m_2(dx)}{\int |1_A(x) g(x)|^\alpha m_2(dx)}, 0\Big)$$

Y por la propiedad (12) se sigue que

$$M_1(A) \stackrel{d}{=} \int 1_A(x) g(x) M_2(dx) \equiv \int_A g(x) M_2(dx)$$

Si además tenemos que m_2 es una medida finita, entonces $\varepsilon_2 = \varepsilon$. Asi que sea $A \in \varepsilon$, y supongamos que existen f y g ε-medibles y positivas tal que

$$\begin{aligned} M_1(A) &\stackrel{d}{=} \int_A f(x) M_2(dx) \qquad \text{para toda } A \in \varepsilon_1 \\ M_1(A) &\stackrel{d}{=} \int_A g(x) M_2(dx) \qquad \text{para toda } A \in \varepsilon_1 \end{aligned}$$

De lo anterior tenemos que

$$\int_A f(x) M_2(dx) \stackrel{d}{=} \int_A g(x) M_2(dx) \qquad \text{para toda } A \in \varepsilon_1$$

Si además tenemos que m_2 es una medida finita, entonces $E \in \varepsilon_2$ y por ende podemos definir $M_2(E)$. Ahora supongamos que existen f y g ε-medibles y positivas tal que

$$M_1(A) \stackrel{d}{=} \int_A f(x)M_2(dx) \qquad \text{para toda } A \in \varepsilon_1$$
$$M_1(A) \stackrel{d}{=} \int_A g(x)M_2(dx) \qquad \text{para toda } A \in \varepsilon_1$$

De lo anterior tenemos que

$$\int_A f(x)M_2(dx) \stackrel{d}{=} \int_A g(x)M_2(dx) \qquad \text{para toda } A \in \varepsilon_1$$

Ahora supongamos que

$$\int_A f(x)M_2(dx) \sim S_\alpha(\sigma_f, \beta_f, 0)$$
$$\int_A g(x)M_2(dx) \sim S_\alpha(\sigma_g, \beta_g, 0)$$

Por lo que al igualar las funciones características respectivas tenemos por (3.1) que para toda $\theta \in R$

$$exp\{-\sigma_f^\alpha|\theta|^\alpha(1 - i\beta_f(sign\theta)tan\frac{\pi\alpha}{2}\} = exp\{-\sigma_g^\alpha|\theta|^\alpha(1 - i\beta_g(sign\theta)tan\frac{\pi\alpha}{2}\}$$

entonces al igualar las normas

$$exp\{-\sigma_f^\alpha|\theta|^\alpha\} = exp\{-\sigma_g^\alpha|\theta|^\alpha\} \qquad \text{para toda } \theta \in R$$

Por lo que al aplicar logaritmo de ambos lados de la igualdad anterior, se obtiene que $\sigma_f^\alpha|\theta|^\alpha = \sigma_g^\alpha|\theta|^\alpha$ para toda $\theta \in R$, lo que implica que $\sigma_f^\alpha = \sigma_g^\alpha$. Pero por la propiedad (12)

$$\sigma_f^\alpha = \int_A f(x)^\alpha m_2(dx)$$
$$\sigma_g^\alpha = \int_A g(x)^\alpha m_2(dx)$$

y por ende

$$\int_A (f(x)^\alpha - g(x)^\alpha)m_2(dx) \tag{5.5}$$

Y como (5.5) se cumple para toda $A \in \varepsilon$, entonces $f(x) = g(x)$ m_2-c.s., lo que finaliza la prueba.

5.2 Representación de Martingalas Continuas por medio de Integrales Estocásticas Estables

Sea (Ω, F, P) el espacio de probabilidad en el que se encuentran definidas las integrales estocásticas estables, definidas en el capítulo 4. El siguiente resultado nos permitirá representar ciertas martingalas continuas definidas en este espacio por medio de integrales estocásticas estables.

Teorema 20 *Si M es una (F,P)-martingala local continua (con la filtración natural) que se anula en cero y tal que $\langle M, M\rangle_\infty = \infty$ (donde $\langle M, M\rangle_x$ representa al bracket de M). Entonces*

$$M_t = \int 1_{[0,t]} \circ g^{-1}(\omega, x) M(dx)$$

donde M es S_2S en $[0, \infty)$ con la medida de Lebesgue como medida de control.

Sea $g(\omega, x) = \langle M, M\rangle_x(\omega)$ entonces como para $\omega \in \Omega$ fija, el bracket de M es una función creciente, continua, que se anula en cero, entonces podemos definir la inversa de g como función de x. Y tenemos que para ω fija

$$1_{[0,t]} \circ g^{-1}(\omega, x) = 1_{[0,g(\omega,t)]}$$

Por otro lado como $m([0, g(\omega, t)]) = g(\omega, t) < \infty$ entonces $1_{[0,g(\omega,t)]} \in L^2(R, B, m)$ y por ende podemos definir la integral estocástica 2-estable de $1_{[0,t]} \circ g^{-1}(\omega, x)$, asi que

$$\int 1_{[0,t]} \circ g^{-1}(\omega, x) M(dx) = \int 1_{[0,g(\omega,t)]} M(dx)$$

Sin embargo por el ejemplo 4 se sigue que

$$B_{g(\omega,t)} = \int 1_{[0,g(\omega,t)]} M(dx) = \int 1_{[0,t]} \circ g^{-1}(\omega, x) M(dx) \tag{5.6}$$

Pero por el teorema de (Dambis, Dubins-Schwarz) como $g(\omega, x) = \langle M, M\rangle_x$ se sigue que

$$B_{g(\omega,t)} = M_t \tag{5.7}$$

Entonces por (5.6) y (5.7) se concluye que

$$M_t = \int 1_{[0,t]} \circ g^{-1}(\omega, x) M(dx)$$

Lo que finaliza la demostración.

Apéndice

En este apéndice estan reunidos los teoremas que se utilizaron en el desarrollo de este trabajo. Muchos de estos teoremas se presentan sin demostración, pero con la referencia correspondiente para su consulta. A continuación se enunciará una definición que nos va a permitir, el definir un proceso de Lévy.

Definición 8 *Un proceso estocástico $\{X_t\}$ en R^d es estocásticamente continuo o continuo en probabilidad si, para toda $t \geq 0$ y $\epsilon > 0$,*

$$\lim_{s \to t} P[|X_s - X_t| > \epsilon] = 0$$

El proceso estocástico mas básico utilizado para modelar movimientos aleatorios continuos es el movimiento Browniano, y para los movimientos aleatorios con saltos es el proceso Poisson. Estos dos pertenencen a una clase conocida como procesos de Lévy. Los procesos de Lévy son en escencia procesos estocásticos con incrementos estacionarios e independientes.

Definición 9 *Un proceso estocástico $\{X_t : t \geq 0\}$ en R^d es un proceso de Lévy si las siguientes condiciones se satisafacen.*
1)Para cualquier elección de $n \geq 1$ y $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, las variables aleatorias $X_{t_o}, X_{t_1} - X_{t_0}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ son independientes (propiedad de los incrementos independientes).
2)$X_0 = 0$ c.s.
3)La distribución de $X_{s+t} - X_s$ no depende de s (homogeneidad temporal o propiedad de incrementos estacionarios).
4)Es estocásticamente continuo
5)Existe $\Omega_0 \in \mathrm{F}$ con $P[\Omega_0] = 1$ tal que, para toda $\omega \in \Omega_0$, $X_t(\omega)$ es continuo por la derecha en $t \geq 0$ i tiene límites por la izquierda en $t > 0$.
Un proceso de Lévy en R^d es llamado un proceso de Lévy d-dimensional. Omitiendo la condición 5, se conoce a un proceso que satisface las primeras cuatro condiciones como un proceso de Lévy en ley.

Observación
Vale la pena mencionar que Jean Bertoin en su libro *Procesos de Lévy* define a un proceso de Lévy como un proceso estocástico que satisface las condiciones (1),(2),(3),y (5) enunciadas en el teorema anterior. Sin embargo esta diferencia no influye mucho en el desarrollo de este trabajo. Sabemos que un proceso

estocástico es una colección $\{X_t : t \in T\}$ de variables aleatorias en espacio de probabilidad (Ω, F, P). Un proceso esta descrito en términos de las distribuciones que induce en los espacios Euclidianos. Para cada conjunto $(t_1, \ldots, t_k)$ de elementos distitos en T, el vector aleatorio $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_k})$ tiene sobre $(R^d)^k$ una distribución $\mu_{t_1,\ldots,t_k}$:

$$\mu_{t_1,\ldots,t_k} = P[(X_{t_1}, \ldots, X_{t_k}) \in H], \qquad H \in (R^d)^k \tag{5.8}$$

Estas medidas de probabilidad $\mu_{t_1,\ldots,t_k}$ son las distribuciones finito-dimensionales del proceso estocástico $\{X_t : t \in T\}$. El sistema de las distribuciones finito-dimensionales no determina completamente las propiedades del proceso.
Ahora 5.8 implica dos propiedades de consistencia del sistema $\mu_{t_1,\ldots,t_k}$. Supongamos que H en 5.8 tiene la forma $H = H_1 \times \cdots \times H_k$ $(H_i \in (R^d)^k)$ y consideremos una permutación π de $(1, 2, \ldots, k)$. Como $[(X_{t_1}, \ldots, X_{t_k}) \in (H_1 \times \cdots \times H_k)]$ y $[(X_{t_{\pi 1}}, \ldots, X_{t_{\pi k}}) \in (H_{\pi 1} \times \cdots \times H_{\pi k})]$ es el mismo evento entonces se sigue de 5.8 que

$$\mu_{t_1,\ldots,t_k}(H_1 \times \cdots \times H_k) = \mu_{t_{\pi 1},\ldots,t_{\pi k}}(H_{\pi 1} \times \cdots \times H_{\pi k}). \tag{5.9}$$

La segunda condición de consistencia es

$$\mu_{t_1,\ldots,t_{k-1}}(H_1 \times \cdots \times H_{k-1}) = \mu_{t_1,\ldots,t_{k-1},t_k}(H_1 \times \cdots \times H_{k-1} \times R^d) \tag{5.10}$$

Las medidas $\mu_{t_1,\ldots,t_k}$ que provienen de un proceso $\{X_t : t \in T\}$ por medio de 5.8 necesariamente satisfacen 5.9 y 5.10. De manera recíproca el teorema de existencia de Kolmogorov que enunciaremos a continuación establece que si un sistema de medidas satisface las dos condiciones de consistencia, entonces existe un proceso estocástico con esas distribuciones finito-dimensionales.

Teorema 21 *Si $\mu_{t_1,\ldots,t_k}$ es un sistema de distribuciones que satisfacen las condiciones de consistencia 5.9 y 5.10, entonces existe en un espacio de probabilidad (Ω, F, P) un proceso estocástico $\{X_t : t \in T\}$ que tiene a $\mu_{t_1,\ldots,t_k}$ como sus distribuciones finito-dimensionales.*

La prueba se puede encontrar en Breiman [5] y Billingsley [3]. A continuación enunciaremos el lema de Dynkin, que se utilizó al obtener la representación de Lévy-Khintchine para las distribuciones estables.

Proposición 8 *Sea $\boldsymbol{A}$ una colección de subconjuntos de Ω tal que*
1)$A \in \boldsymbol{A}$ y $B \in \boldsymbol{A}$ implica $A \cap B \in \boldsymbol{A}$.
Sea $\boldsymbol{C} \supset \boldsymbol{A}$ tal que satisface lo siguiente.
2)Si $A_n \in \boldsymbol{C}$, $n = 1, 2, \ldots,$ y $\{A_n\}$ es creciente, entonces $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \boldsymbol{C}$.
3)Si $A \in \boldsymbol{C}$, $B \in \boldsymbol{C}$, y $A \supset B$, entonces $A - B \in \boldsymbol{C}$.
4)$\Omega \in \boldsymbol{C}$.
Entonces $\boldsymbol{C} \supset \sigma(\boldsymbol{A})$.

La demostración de esta proposición se puede encontrar en Jacod, Protter[6].

El siguiente lema de variable compleja nos permite conocer explícitamente el valor de ciertas integrales, que se obtuvieron al hacer el cambio de variable en la medida de Lévy de la representación de Lévy-Khintchine para la función característica de las distribuciones estables.

Lema 6

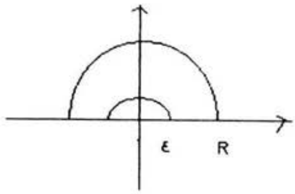
$$\int_0^\infty (e^{ir}-1)r^{-1-\alpha}dr = \Gamma(-\alpha)e^{-i\pi\alpha/2} \qquad para \quad 0<\alpha<1, \tag{5.11}$$

$$\int_0^\infty (e^{ir}-1-ir)r^{-1-\alpha}dr = \Gamma(-\alpha)e^{-i\pi\alpha/2} \qquad para \quad 1<\alpha<2, \tag{5.12}$$

$$\int_0^\infty (e^{izr}-1-izr1_{(0,1]}(r))r^{-2}dr = -\frac{\pi z}{2} - izlog(z) + icz \quad para \quad z>0 \quad con \tag{5.13}$$

$$c = \int_1^\infty r^{-2}sen(r)dr + \int_0^1 r^{-2}(sen(r)-r)dr.$$

Prueba Sea $0<\alpha<1$. Para demostrar 5.11 utilizaré el teorema del residuo integrando la función $f(z)=\frac{e^z-1}{z^{1+\alpha}}$ sobre el siguiente contorno γ:



Tenemos que como la función $f(z)=\frac{e^z-1}{z^{1+\alpha}}$ es analítica dentro del contorno γ la suma de los residuos dentro del contorno es cero, por lo que por el teorema del residuo:

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz + \int_{\gamma_3} f(z)dz + \int_{\gamma_4} f(z)dz = 0 \tag{5.14}$$

A continuación se demostrará que las integrales sobre γ_2 y γ_4 son cero. A lo largo de γ_2 tenemos que $z=Re^{i\theta}$ por lo que:

$$\begin{aligned}
|\int_{\gamma_2} \frac{e^z-1}{z^{1+\alpha}}dz| &\leq \int_{\gamma_2} \frac{|e^z-1|}{|z|^{1+\alpha}}|dz| \\
&\leq \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{|e^{Re^{i\theta}}-1|}{R^\alpha}d\theta \\
&\leq \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{|e^{Re^{i\theta}}|+1}{R^\alpha}d\theta \\
&\leq \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{2}{R^\alpha}d\theta \\
&= \frac{\pi}{R^\alpha}
\end{aligned}$$

Asi que tomando el límite cuando R tiende a infinito se sigue que:

$$\lim_{R\to\infty} |\int_{\gamma_2} \frac{e^z-1}{z^{1+\alpha}}dz| \leq \lim_{R\to\infty} \frac{\pi}{R^\alpha} = 0 \tag{5.15}$$

Para la integral sobre γ_4, $z = \epsilon e^{i\theta}$ asi que manera análoga al caso anterior:

$$\begin{aligned} |\int_{\gamma_4} \frac{e^z-1}{z^{1+\alpha}}dz| &\leq \int_{\gamma_2} \frac{|e^z-1|}{|z|^{1+\alpha}}|dz| \\ &\leq -\int_{\pi}^{\pi/2} \frac{e^\epsilon-1}{\epsilon^\alpha}d\theta \\ &= \frac{\pi}{2}(\frac{e^\epsilon-1}{\epsilon^\alpha}) \end{aligned}$$

Tomando el límite cuando ϵ tiende a cero:

$$\lim_{\epsilon\to 0} |\int_{\gamma_4} \frac{e^z-1}{z^{1+\alpha}}dz| \leq \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\pi}{2}(\frac{e^\epsilon-1}{\epsilon^\alpha}) = 0 \tag{5.16}$$

Entonces por 5.15 y 5.16 al tomar límite en 5.14 cuando ϵ tiende a cero, y R tiene a infinito, se sigue que:

$$\lim_{(\epsilon,R)\to(0,\infty)} \int_{\gamma_1} f(z)dz = \lim_{(\epsilon,R)\to(0,\infty)} \int_{\gamma_4} f(z)dz \tag{5.17}$$

Pero a lo largo de γ_1 tenemos que $z = ir$ con $r > 0$, por lo que:

$$\begin{aligned} \lim_{(\epsilon,R)\to(0,\infty)} \int_{\gamma_1} \frac{e^z-1}{z^{1+\alpha}}dz &= \lim_{(\epsilon,R)\to(0,\infty)} \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{e^{ir}-1}{(ir)^{1+\alpha}}idr \\ &= \int_0^\infty \frac{(e^{ir}-1)}{r^{1+\alpha}}idr \\ &= (i)^{-\alpha} \int_0^\infty (e^{ir}-1)r^{-(1+\alpha)}dr \\ &= e^{-i\alpha\pi/2} \int_0^\infty (e^{ir}-1)r^{-(1+\alpha)}dr \end{aligned} \tag{5.18}$$

Por otro lado a lo largo de γ_2 tenemos que $z = -r$ con $r > 0$, asi que:

$$
\begin{aligned}
\lim_{(\epsilon,R)\to(0,\infty)} \int_{\gamma_1} \frac{e^z - 1}{z^{1+\alpha}} dz &= \lim_{(\epsilon,R)\to(0,\infty)} - \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{e^{-r} - 1}{(-r)^{1+\alpha}} dr \\
&= \int_0^{\infty} \frac{(e^{-r} - 1)}{(-r)^{1+\alpha}} idr \\
&= (-1)^{-\alpha} \int_0^{\infty} (e^{-r} - 1) r^{-(1+\alpha)} dr \\
&= e^{-i\alpha\pi} \int_0^{\infty} (e^{-r} - 1) r^{-(1+\alpha)} dr \\
&= -e^{-i\alpha\pi} \int_0^{\infty} r^{-(1+\alpha)} dr \int_0^{r} e^{-y} dy
\end{aligned}
$$

haciendo un cambio en el orden de integración

$$
\begin{aligned}
&= -e^{-i\alpha\pi} \int_0^{\infty} e^{-y} dy \int_y^{\infty} r^{-(1+\alpha)} dr \\
&= -e^{-i\alpha\pi} \int_0^{\infty} e^{-y} \alpha^{-1} y^{-\alpha} dy \\
&= -e^{-i\alpha\pi} \alpha^{-1} \int_0^{\infty} e^{-y} y^{-\alpha} dy \\
&= -e^{-i\alpha\pi} \alpha^{-1} \Gamma(1 - \alpha) \\
&= -e^{-i\alpha\pi} \Gamma(-\alpha) \qquad (5.19)
\end{aligned}
$$

Asi que al sustituir 5.18 y 5.19 en 5.17 se sigue que:

$$
\int_0^{\infty} (e^{ir} - 1) r^{-(1+\alpha)} dr = e^{-i\alpha\pi/2} \Gamma(-\alpha)
$$

Y asi se obtiene 5.11.
Por otro lado si $1 < \alpha < 2$, integrando por partes 5.11 obtenemos 5.12 como sigue:

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\infty} (e^{ir} - 1 - ir) r^{-1-\alpha} dr &= -\alpha^{-1} \int_0^{\infty} (e^{ir} - 1 - ir) d(r^{-\alpha}) \\
&= \alpha^{-1} \int_0^{\infty} r^{-\alpha} i (e^{ir} - 1) dr = i\alpha^{-1} \Gamma(1 - \alpha) e^{-i\pi(\alpha-1)/2} \\
&= \Gamma(-\alpha) e^{-i\pi\alpha/2}
\end{aligned}
$$

por último utilizando que $\int_0^\infty r^{-2}(1-cos(r))dr = \pi/2$, tenemos que:

$$\int_0^\infty (e^{izr} - 1 - izr1_{(0,1]}(r))r^{-2}dr$$
$$= \int_0^\infty r^{-2}(cos(zr)-1)dr + i\int_0^1 r^{-2}(sin(zr)-zr)dr + i\int_1^\infty r^{-1}sin(zr)dr$$
$$= z\int_0^\infty r^{-2}(cos(r)-1)dr + i\int_0^{1/z} r^{-2}(sin(zr)-zr)dr$$
$$+ i\int_{1/z}^\infty r^{-2}sin(zr)dr - i\int_{1/z}^1 r^{-2}zrdr$$
$$= -\frac{\pi z}{2} + iz(\int_0^1 r^{-2}(sin(r)-r)dr + \int_1^\infty r^{-2}sin(r)dr - log(z)).$$

lo que demuestra 5.13.
A continuación se enunciará un resultado que se desprende del teorema Tauberiano de Karamata, utilizado al analizar el comportamiento de las colas de las distribuciones de las variables aleatorias estables.

Teorema 22 *(Teorema de la densidad monótona). Sea $0 < \rho < \infty$. Si U es una medida concentrada en $[0,\infty)$ que admite una densidad eventualmente monótona u y tal que la transformada de Laplace φ de U existe en $(0,\infty)$ entonces*

$$\varphi(\tau) \sim \frac{1}{\tau^\rho}L(1/\tau) \qquad (\tau \to 0^+)$$

si y sólo si

$$u(x) \sim \frac{1}{\Gamma(\rho)}x^\rho L(x) \qquad (x \to \infty)$$

donde L es una función de variación lenta.

La demostración de este teorema se puede encontrar en [11].

Lema 7 *Sean u y v números reales. Si $0 < p \le 1$, entonces*

$$|u+v|^p \le |u|^p + |v|^p$$

Por otro lado si $1 \le p < \infty$, entonces

$$|u+v|^p \le 2^{p-1}(|u|^p + |v|^p).$$

Prueba
Como $(|u+v|)^p \le (|u|+|v|)^p$, entonces podemos suponer que $u \ge 0$ y $v \ge 0$. Si $0 < p \le 1$, entonces, para $v > 0$ fija y para cualquier $u \ge 0$, tenemos que $g_v(u) = u^p + v^p - (u+v)^p \ge 0$, dado que $g_v(0) = 0$ y $g_v'(u) > 0$ para $u > 0$. Por otro lado si $1 \le p < \infty$, entonces, por la desigualdad de Jensen

$$(u+v)^p = 2^p(\frac{u+v}{2})^p \le 2^{p-1}(u^p + v^p)$$

Con lo que finaliza la demostración.

Teorema 23 *Para una sucesión de variables aleatorias independientes* $\{X_n\}$, $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_n$ *converge casi seguramente si y solo si converge en probabilidad.*

La prueba del teorema anterior se puede encontrar en Billingsley[3].
Los dos siguientes teoremas relacionan la convergencia en probabilidad con la converegncia en distribución.

Teorema 24 *Sean* $(X_n)_{n\geq 1}$, X *definidas en un espacio de probabilidad fijo y dado* (Ω, A, P). *Si* X_n *converge a* X *en probabilidad, entonces* X_n *converge a* X *en distribución.*

Teorema 25 *Sean* $(X_n)_{n\geq 1}$, X *definidas en un espacio de probabilidad fijo y dado* (Ω, A, P). *Si* X_n *converge a* X *en distribución, y si* X *es una variable aleatoria casi seguramente igual a una constante, entonces* X_n *converge a* X *en probabilidad.*

La demostración de estos dos teoremas se puede encontar en Jacod, Protter[6].

Bibliografía

[1] Ken-Iti Sato, *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*, Primera edición, Cambridge University Press, 1990.

[2] Gennady Samorodnitsky y Murad S. Taqqu, *Stable Non-Gaussian Random Processes*, Primera edición, Chapman & Hall, 1994.

[3] Patrick Billingsley, *Probability and Measure*, Tercera edición, John Wiley & Sons, 1995.

[4] Daniel Revuz y Marc Yor, *Continuos Martingales and Brownian Motion*, Primera edición, Springer-Verlag, 1990.

[5] L. Breiman, *Probability*, Addison-Wesley, 1992.

[6] Jean Jacod y Philip Protter, *Probability Essentials*, Primera Edición Springer, 1987.

[7] Jean Bertoin, *Lévy Processes*, Cambridge University Press 1996.

[8] R.G. Laha y V.K. Rohatgi, *Probability Theory*, Primera edición, John Wiley & Sons 1979.

[9] Ma. Emilia Caballero y Géronimo Uribe, *Probabilidad Condicional*, Notas para un curso avanzado de procesos estocásticos.

[10] Constantin Tudor, *Procesos Estocásticos*, Segunda edición, Sociedad Matemática Mexicana, 1997.

[11] Géronimo Uribe, *Variación Regular y el teorema tauberiano de Karamata*, Capítulo 1, Tesis de Licenciatura, Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM, 2003

[12] Lars V. Ahlfors *Complex Analysis*, Primera edición, McGraw-Hill Book Company, 1953.