

879316



UNIVERSIDAD LASALLISTA BENAVENTE



ESCUELA DE INGENIERÍA EN COMPUTACIÓN
CON ESTUDIOS INCORPORADOS A LA
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
CLAVE: 8793-16

“MATLAB PARA EL DISEÑO Y LA SIMULACIÓN DE SISTEMAS DE CONTROL ANALÓGICO”

T E S I S

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

INGENIERA EN COMPUTACIÓN

PRESENTA

YOLANDA GUIRETTE ZAVALA

ASESOR: ING. ANSELMO RAMÍREZ GONZÁLEZ

CELAYA, GTO..

OCTUBRE 2004



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

ESTA TESIS NO SALA
DE LA BIBLIOTECA

AGRADECIMIENTOS

A DIOS:

Por la vida que me ha regalado y todo lo que con ella he recibido, principalmente por mi familia y amigos.

A MIS PADRES:

Por su apoyo incondicional, fe y amor puestos en mi dándome la oportunidad de seguir estudiando con sus grandes esfuerzos para darme todo lo mejor de ellos.

A MI HERMANO:

Por su cariño y comprensión y ser un buen amigo a pesar de los tiempos difíciles.

A MI FAMILIA:

Por estar presente en los momentos más importantes y darme su cariño y comprensión.

A MIS AMIGAS:

Por ser para mí el apoyo en los buenos y malos momentos, y ser parte de mi vida.

A MIS MAESTROS:

Por proporcionarme siempre algo más que sus conocimientos a lo largo de toda mi vida.

NOMBRE: Yolanda Guirette ZAVALA

FECHA: 17 - Nov - 04

FIRMA: P.A. B...

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

CAPÍTULO 1 ¿QUÉ ES MATLAB?

1.1. Fundamentos de MATLAB	2
1.2. Características básicas	2
1.2.1. Espacio de trabajo de MATLAB	3
1.2.2. ¿Cómo iniciar los cálculos?	3
1.2.3. Almacenar y recuperar datos	5
1.2.4. Formatos de visualización	6
1.2.5. Acerca de las variables	7
1.3. Funciones matemáticas de MATLAB	8
1.4. Gráficos con MATLAB	10
1.4.1. Graficación simple	11
1.5. Archivos M	17
1.6. ¿Qué es el Simulink?	20

CAPÍTULO 2 SISTEMAS DE CONTROL

2.1 ¿Qué es un sistema de control?	25
2.2 Ventajas de un sistema de control	26
2.3 Características de respuesta y configuraciones de un sistema	27
2.3.1 Entrada y salida	27
2.3.2 Sistema en lazo abierto	28
2.3.3 Sistema en lazo cerrado	29
2.3.4 Sistemas controlados por computadora	31
2.4 Acciones básicas de control	32

CAPÍTULO 3 ANÁLISIS Y DISEÑO

3.1	Tipos de respuesta	37
3.1.1	Respuesta transitoria y respuesta estable	38
3.1.2	Respuesta libre	41
3.1.3	Respuesta forzada	45
3.1.4	Respuesta total	49
3.1.5	Respuesta permanente	52
3.2	Estabilidad	55
3.2.1	Concepto BIBO de estabilidad	56
3.2.2	Criterio de Routh – Hurwitz	61
3.2.3	Lugar geométrico de las raíces	64
3.2.4	Criterio de estabilidad de Nyquist	76
3.2.5	Carta de Nichols	80

CAPÍTULO 4 MATLAB PARA EL DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL

4.1	Análisis de respuesta transitoria con MATLAB	84
4.1.1	Respuestas libre, forzada, total y permanente	93
4.2	Gráficas del lugar geométrico de las raíces con MATLAB	100
4.3	Análisis de la respuesta en frecuencia con MATLAB	106
4.3.1	Obtención de trazas de Nyquist con MATLAB	111
	Ejercicios Propuestos	115

CAPÍTULO 5 SIMULINK PARA LA SIMULACIÓN DE SISTEMAS DE CONTROL

5.1	Biblioteca de SIMULINK	118
5.2	Pasos para el uso de SIMULINK	123
5.3	Simulación de sistemas	125
	Ejercicios Propuestos	135

CONCLUSIONES

BIBLIOGRAFÍA

INTRODUCCIÓN

La presente tesis está basada en la necesidad de hacer más simples y prácticas algunas de las materias de la carrera de Ingeniería en Computación, que son difíciles por su modelaje, demostración y prácticas de laboratorio.

Elegí este tema porque a lo largo de mi carrera he tenido dificultades con los cálculos y la graficación de éstos. Sin embargo cuando empecé a tomar clase de Análisis de Sistemas y Señales, se nos recomendaba el uso del MATLAB para la solución de ecuaciones con varias incógnitas.

En mi opinión el tema se me hizo interesante, el hecho de implementar las diferentes herramientas con las que cuenta el MATLAB para la solución de los problemas de los Sistemas de Control, y para la observación de los diferentes gráficos que se pueden realizar con los datos obtenidos con el mismo MATLAB.

Este tema es de gran utilidad principalmente para aquellos que sean estudiantes de ingeniería, o para aquellos que necesitan de la realización de operaciones matemáticas y representar de forma confiable estas operaciones en gráficas.

MATLAB es de utilidad para cualquier persona que tenga la necesidad de realizar operaciones, desde la más básica hasta el manejo de funciones, puesto que MATLAB está hecho para resolver casi cualquier tipo de problema matemático.

Aunque originalmente fue hecho sólo para la resolución de matrices, poco a poco se fue mejorando para diferentes áreas de las matemáticas, ahora se

considera como una de las herramientas más poderosas para la resolución de problemas en diferentes ámbitos en donde intervengan las matemáticas.

El objetivo primordial es el de conocer el manejo del MATLAB en el diseño de Sistemas de Control, con el fin de observar y comprobar por medio de cálculos exactos y gráficas en el diseño de los Sistemas de Control.

Como objetivos particulares puedo enumerar los siguientes:

- 1) Implementar el uso del MATLAB como herramienta básica en los sistemas de control, para poder tener acceso a la práctica de los mismos.
- 2) Manejar las herramientas del MATLAB, para poder resolver los problemas de los sistemas de control.
- 3) Reducir el tiempo invertido en el análisis y diseño de Sistemas de Control, con el fin de optimizar el trabajo realizado en este proceso.
- 4) Realizar diferentes alternativas de solución en sistemas de control, para poder elegir la más conveniente entre ellas.
- 5) Crear gráficas de las entradas y las salidas de los sistemas de control, con el fin de comparar las entradas y salidas del sistema.
- 6) Simular los diseños de sistemas de control, con el fin de observar el funcionamiento de los sistemas de control, en todas sus fases.

Para empezar, el primer capítulo se trata de conocer y manejar el ambiente de MATLAB, con sus herramientas y funciones principales del manejo de operaciones y gráficos, con el fin de que se pueda utilizar eficientemente más adelante para el diseño de sistemas de control.

En el segundo capítulo se definen las bases de las diferentes características de las que están compuestos los sistemas de control, con el fin de poder conocerlos y comprender su funcionamiento, sin el apoyo de la computadora.

En el tercer capítulo se analiza y diseña sistemas de control en sus diferentes tipos de respuesta, con el fin de poder hacer sistemas estables y se pueda manejar el marco teórico que envuelve el ámbito de los sistemas de control.

En el cuarto capítulo se plantea la forma de cómo el MATLAB es un programa eficaz para la realización de sistemas de control, con el fin de implementar las acciones de control por medio de la computadora, en específico con el MATLAB, y así observar claramente el resultado del uso del MATLAB en el control.

Para finalizar en el quinto capítulo se hace una pequeña guía de cómo utilizar el SIMULINK para la simulación de sistemas de control, este se usa como otra herramienta muy eficiente de MATLAB.

Este trabajo es realmente útil para todo aquel que desee tener un encuentro más cercano con los sistemas de control y su fácil uso por medio del MATLAB, y para aquel que nunca ha escuchado del MATLAB tendrá una ventana abierta de averiguarlo de manera fácil y amigable puesto que cuenta con figuras que llevan paso a paso los procedimientos necesarios para su uso.

Todo este esfuerzo es para que aquellos que necesiten tener más claro lo que es el control y su implementación en MATLAB. Con la presente tesis trata de demostrar que para el estudio eficiente de los sistemas de control, es necesario observar en el laboratorio y con el equipo adecuado, las diferentes prácticas, pero a falta de un laboratorio, el mejor reemplazo es el uso del MATLAB.

CAPÍTULO 1

¿QUÉ ES MATLAB?

1.1 FUNDAMENTOS DE MATLAB

Al hablar de MATLAB¹ no estamos hablando de un programa de aplicación científica, sino también es una herramienta muy versátil, puesto que se puede usar como una simple calculadora hasta como lenguaje de programación como C.

Tomando en cuenta que es un software de aplicación muy completo podemos mencionar como características:

Programación simple

- Gráficos
- Amplia gama de funciones
- Manejo accesible de las matemáticas

Con esto podemos observar que puede tener varias aplicaciones el uso del MATLAB en la vida de cualquiera que requiera la solución de ecuaciones, problemas matemáticos y su representación.

1.2 CARACTERÍSTICAS BÁSICAS

Para poder entender el potencial con el que cuenta MATLAB es necesario tener en cuenta las diferentes herramientas a las cuales se tiene acceso al contar con MATLAB.

Las características básicas se mencionan en los puntos siguientes.

¹ Matrix Laboratory, de aquí vienen sus siglas, que en español quiere decir Matriz de Controles. Definición tomada de: www.mathworks.es/

1.2.1 ESPACIO DE TRABAJO

Primero que nada al ejecutar el programa de MATLAB crea una ventana de trabajo como el de la Fig. 1.1.

Donde se puede observar que cuenta con un menú muy parecido al de otros programas de ambiente Windows. Otra de las cosas que se muestra es el área de trabajo, que es donde se le darán las ordenes a ejecutar después del símbolo: >>.

Una de las partes importantes dentro de la ventana es la barra de herramientas, puesto que cuenta con accesos rápidos a las opciones más utilizadas dentro del MATLAB, como son: Nuevo Archivo, Abrir, Cortar, Copiar, Pegar, Deshacer, Espacio de trabajo, Path, Librería de Simulink y la ayuda.

Como se ve, es una ventana muy sencilla y de fácil identificación de cada uno de sus elementos.

1.2.2 ¿CÓMO INICIAR LOS CÁLCULOS?

Para iniciar los cálculos dentro de MATLAB basta con empezar a escribir las instrucciones después del símbolo: >>, se escribe como si fuera en una calculadora, y finalizando la instrucción se da enter. Después se verá la respuesta con las letras "ans" que quieren decir "answer", en español respuesta. Ahora se puede observar un simple ejemplo de ello en la Fig. 1.2.

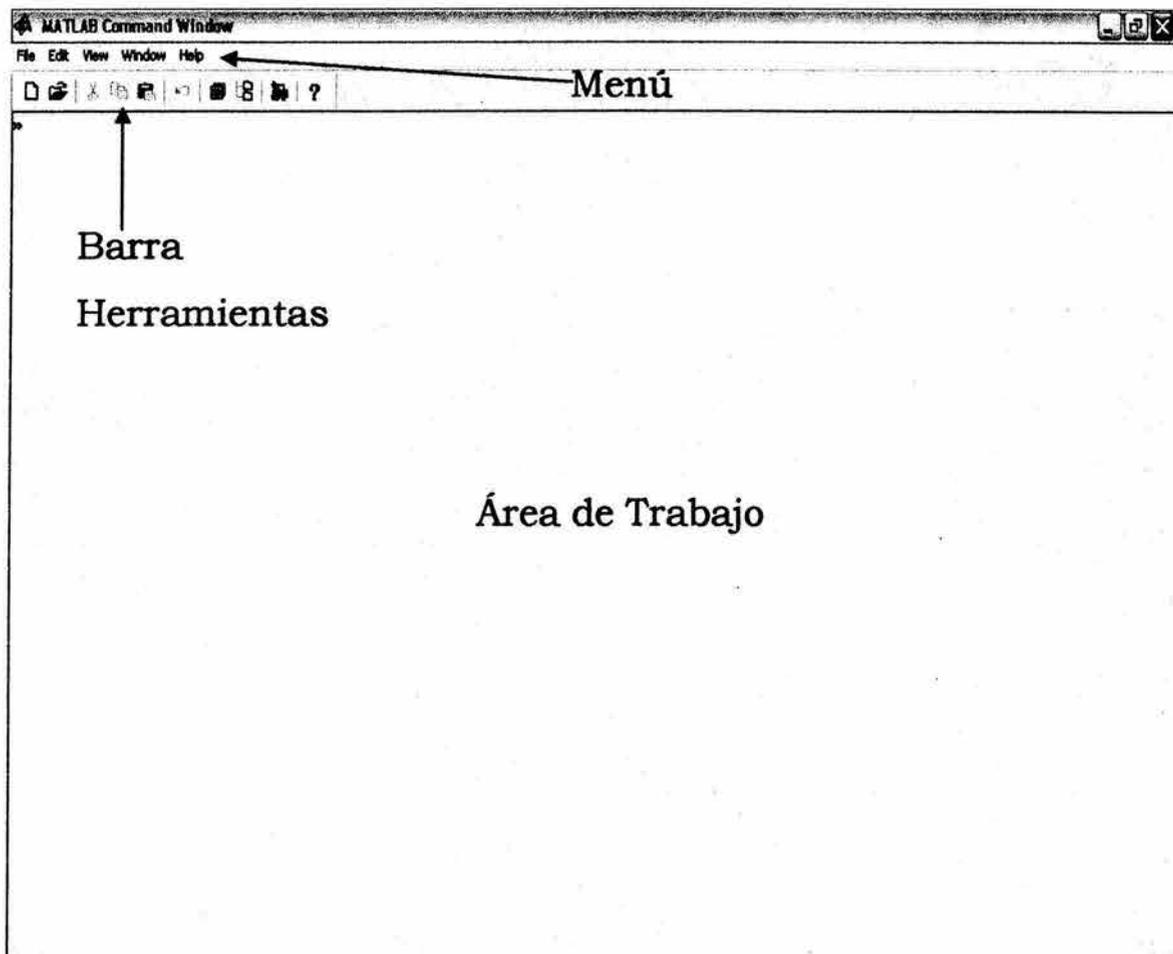


Fig. 1.1 Ventana principal de MATLAB²

Es así que se observa dentro del área de trabajo la realización de una simple operación.

Para observar las variables anteriores o las operaciones realizadas con anterioridad en MATLAB solo se necesita pulsar las teclas de cursor ←, ↑, →, ↓. Por ejemplo al teclear ↑ se obtendrá la operación anterior, y así sucesivamente al teclear cada una de ellas.

² Figura realizada por la autora

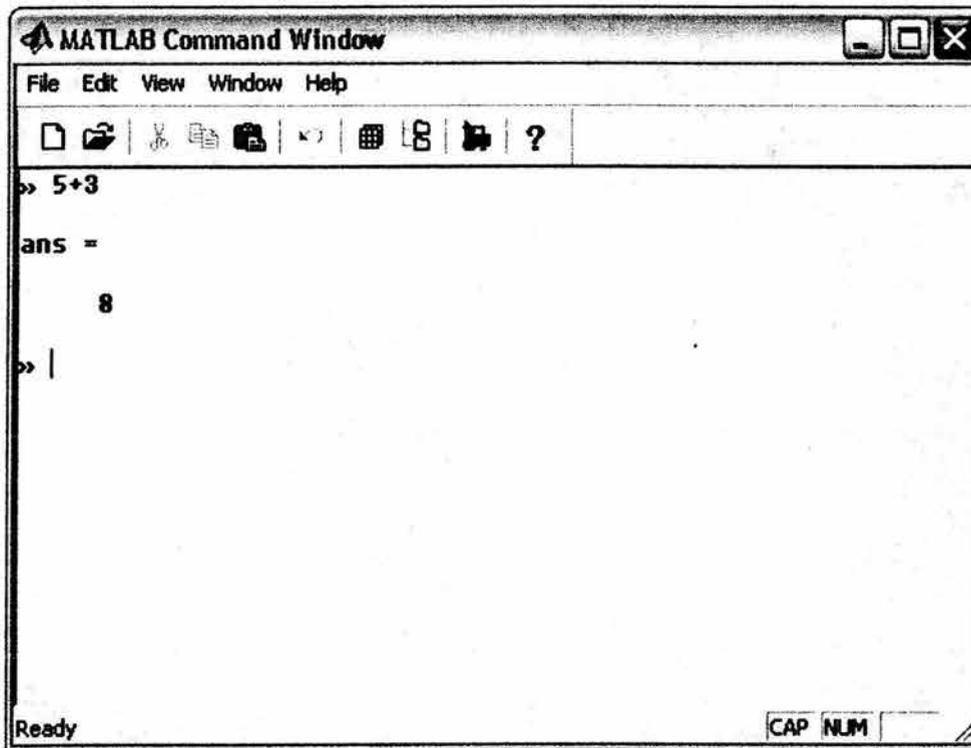


Fig. 1.2 Operación suma en MATLAB³

1.2.3 ALMACENAR Y RECUPERAR DATOS

Además de “recordar variables”, con MATLAB se tiene la opción de guardarlas y volver a verlas cuando así sea requerido.

Con la opción Save Workspace as... del menú File, nos permite guardar las variables utilizadas dentro del área de trabajo del MATLAB. Y por consiguiente para poder acceder a ellas se tiene la opción de Load Workspace... en el menú File.⁴

³ Figura realizada por la autora

⁴ Véase PEREZ, Cesar, *MATLAB y sus aplicaciones en las ciencias y la ingeniería*, Editorial Pearson Educación, España, 2000, p. 36.

Al guardar las variables MATLAB no borra el espacio de trabajo actual, es decir al guardar las variables sólo nos aseguramos de que estarán cuando sean necesarias.

1.2.4 FORMATOS DE VISUALIZACIÓN DE NÚMEROS

En MATLAB como en otros lenguajes de programación existen diferentes formas de ver un número especialmente si se trata de uno real, puesto que el entero sólo lo podemos ver con o sin signo.

Para ver lo diferentes formatos de un número sólo se requiere dar una orden en particular y ver su resultado. Para ello es necesario ver la tabla 1.1.

Es importante mencionar que esto es sólo la forma en que se verá el número, y no cambia en lo absoluto su valor real.

Tabla 1.1 Visualización de formatos⁵

Orden de MATLAB	Visualización	Comentarios
format long	35.83333333333334	16 dígitos
format short e	3.5833e+01	5 dígitos más exponente
format long e	3.5833333333333334e+01	16 dígitos más exponente
format hex	4041eaaaaaaaaaab	Hexadecimal
format bank	35.83	2 dígitos decimales
format +	+	Positivo, negativo o cero
format rat	215/6	Aproximación

⁵ Esta tabla fue tomada SHUMWAY, Dan y otros, *MATLAB edición para estudiante*, Editorial Prentice Hall Hispanoamericana, S.A., México, 2001, p. 47.

format short	35.8333	Racional Visualización por defecto
--------------	---------	--

1.2.5 ACERCA DE LAS VARIABLES

Las variables en MATLAB como en cualquier otro lenguaje tiene sus especificaciones que se deben seguir como son:

- ◆ Las variables que digan lo mismo pero se escriben con diferencias de mayúsculas y minúsculas serán diferentes.
- ◆ Solo pueden contener hasta 19 caracteres.
- ◆ Se debe comenzar con una letra, seguido puede ser un número, guión o cualquier letra.
- ◆ No deben usarse signos de puntuación, puesto que para MATLAB algunos tienen un significado especial.

Además, MATLAB cuenta con sus propias variables especiales, que se tienen que tomar en cuenta a la hora de hacer las propias.

Las variables de MATLAB son:

Tabla 1.2 Variables de MATLAB⁶

Variable	Valor
Ans	Nombre por defecto de la variable usada para los resultados

⁶ Ibidem, p.48

Pi	Razón de una circunferencia a su diámetro
Eps	Número más pequeño tal que, cuando se le suma 1, crea un número en punto flotante en la computadora mayor que 1
Inf	Infinito, p. e., 1/0
NaN	Magnitud no numérica (Not-a-Number), p. e., 0/0
i y j	$i = j = \sqrt{-1}$
Realmin	El número real positivo más pequeño que es utilizable
Realmax	El número real positivo más grande que es utilizable

Las variables van a contener diversos valores asignados, entonces cada vez que se le asigne un valor este será con el que se trabajará y el anterior será eliminado.

1.3 FUNCIONES MATEMÁTICAS DEL MATLAB

Como ya se había mencionado, MATLAB también cuenta con una gama de funciones muy extensa, como las que se utilizan en una calculadora científica, y se emplean de igual forma.

Entre las más comunes se tienen las que se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 1.3 Funciones de MATLAB⁷

Funciones matemáticas especiales	
abs (x)	Valor absoluto o magnitud de un número complejo
acos (x)	Inversa del coseno
angle (x)	Ángulo de un número complejo
asin (x)	Inversa del seno
atan (x)	Inverso de la tangente
ceil (x)	Redondea hacia más infinito
conj (x)	Complejo conjugado
cos (x)	Coseno
exp (x)	Exponencial: e^x
fix (x)	Redondea hacia cero
floor (x)	Redondea hacia menos infinito
imag (x)	Parte imaginaria de un número complejo
log (x)	Logaritmo natural
log 10 (x)	Logaritmo decimal
real (x)	Parte real de un número complejo
rem (x, y)	Resto después de la división: rem (x, y) da el resto de x/y
round (x)	Redondea hacia el entero más próximo
sign (x)	Función que devuelve el signo del argumento
sin (x)	Seno
sqrt (x)	Raíz cuadrada
tan (x)	Tangente

1.4 GRÁFICAS CON MATLAB

Cuando se habla de gráficas es mucho más fácil la identificación del problema y su solución. En general, el hombre deduce y entiende más fácilmente cuando se le muestra con “dibujos” la explicación de algún

⁷ Ibidem, p.52 y 53.

problema, así también cuando se habla de ecuaciones, su resolución es más clara al graficar su resultado.

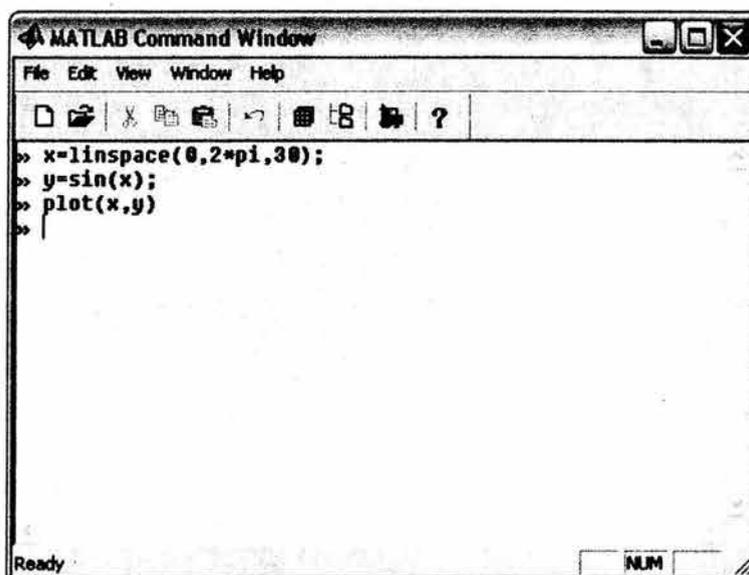
MATLAB cuenta con la posibilidad de realizar gráficas de las diferentes funciones matemáticas y de las ecuaciones que se resuelvan en MATLAB.

Anteriormente era muy difícil la graficación de ecuaciones de 3 o más incógnitas, pero ahora con esta herramienta basta con dar la función adecuada, se resolverá el problema de graficar a mano cualquier ecuación o función.⁸

1.4.1 GRÁFICAS SIMPLES

Cuando se habla de la graficación en MATLAB, se habla de funciones que realizan una magnífica representación gráfica de las ecuaciones que se resuelven, una de estas se llama: plot. De las más sencillas y más utilizada, como ejemplo se tiene:

Consideremos $y = \sin(x)$ para $0 \leq x \leq 2\pi$, esto es lo que veremos en la pantalla de trabajo de MATLAB:

The image shows a screenshot of the MATLAB Command Window. The window title is "MATLAB Command Window". It has a menu bar with "File", "Edit", "View", "Window", and "Help". Below the menu bar is a toolbar with various icons. The main area of the window contains the following MATLAB code:

```
>> x=linspace(0,2*pi,30);  
>> y=sin(x);  
>> plot(x,y)  
>>
```

The status bar at the bottom left says "Ready" and at the bottom right says "NUM".

Fig. 1.3 Operación de graficación en MATLAB⁹

⁸ Véase www.mathworks.es/products/controldesign

⁹ Figura elaborada por la autora.

Al dar *enter* después de la última orden, se tendrá como resultado una nueva ventana con la gráfica de la función anterior (Fig. 1.3) como se observa en la Fig. 1.4.

Esta nueva ventana cuenta con su propia barra de menús y barra de herramientas, las cuales son las básicas conocidas, las más importantes son: Nuevo, Abrir, Guardar, Imprimir. También cuenta herramientas para modificar a la grafica, como son: Selección, Añadir etiquetas, Dibujar flechas, Añadir líneas, Aumentar el tamaño de la gráfica, Reducirlo y Rotar la gráfica.

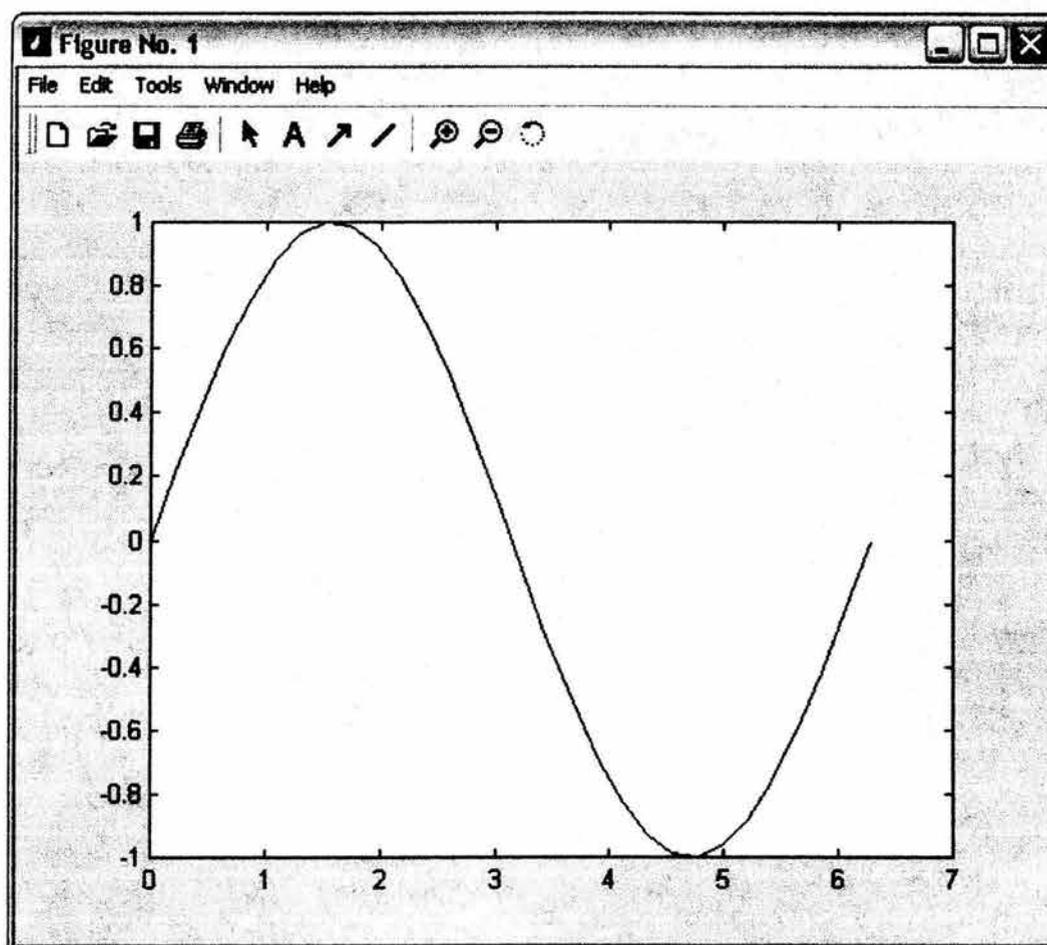


Fig. 1.4 Gráfica de la función $y = \sin(x)^{10}$

¹⁰ Figura elaborada por la autora en MATLAB.

La función **plot** tiene variaciones en su utilización, puesto que en ocasiones no sólo se gráfica una función, y se requiere graficar más, y para diferenciarlas se cuenta con la opción de poner diferentes símbolos para su distinción, esto se puede observar en el siguiente ejemplo, donde se ilustra la identidad trigonométrica $2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2 \theta$.

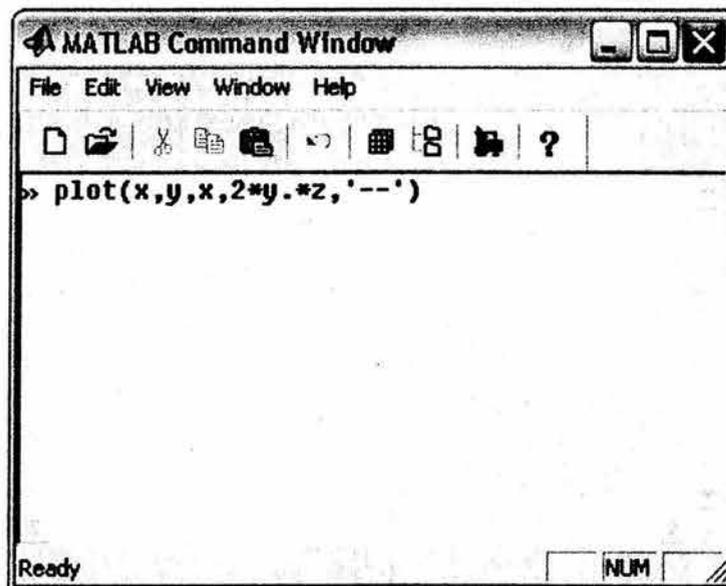


Fig. 1.5 Operación en MATLAB¹¹

Y la ventana resultante es la de la figura 1.6, donde se ilustra la gráfica con ambas funciones, sólo que una en línea seguida y la otra con línea punteada.

Entre otras opciones con las que cuenta el MATLAB en su ventana de gráficos, es el de poder cambiar las propiedades de la misma como son:

- ⊕ Color de la línea
- ⊕ Grosor de la línea
- ⊕ Tipo de línea
- ⊕ Etiquetas de los ejes

¹¹ Figura realizada por la autora en MATLAB

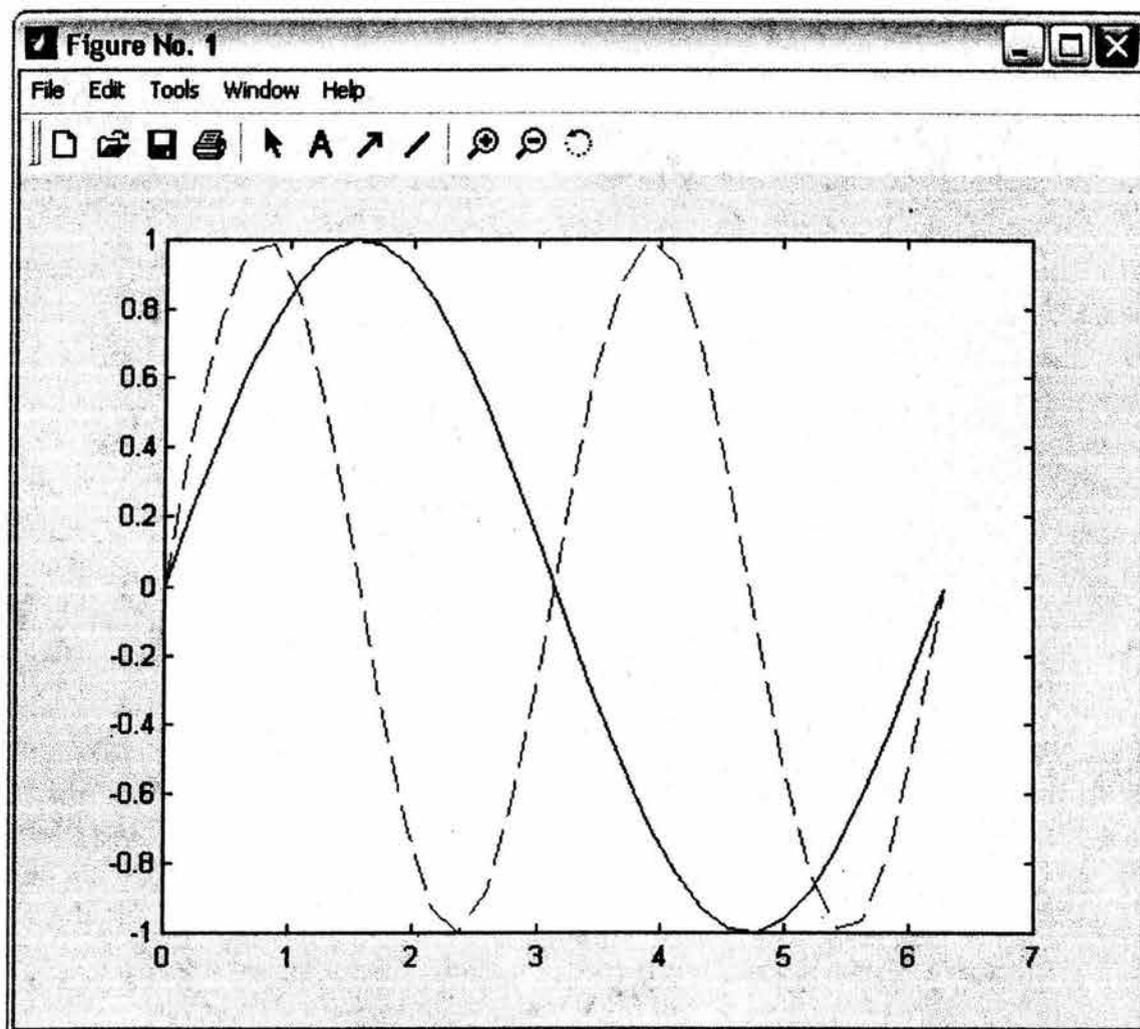


Fig. 1.6 Gráfica de las funciones $y = \sin(x)$, $2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta = \operatorname{sen} 2 \theta$ ¹²

Dando clic derecho sobre la línea aparecerá un menú donde se pueden hacer todas modificaciones anteriores.

La función tiene gran cantidad de propiedades, la cual vale la pena mencionar es la que realiza gráficos en 3-D, se observa en la Fig. 1.7, donde también se le agregó una rejilla de referencia de los puntos marcados en los ejes del plano graficado.

¹² Figura realizada por la autora en MATLAB

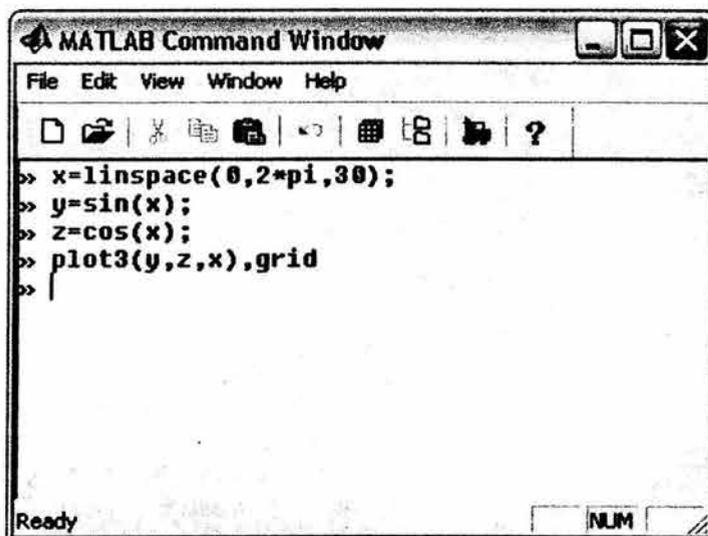


Fig. 1.7 Operaciones en MATLAB para diferentes funciones¹³

En la Fig. 1.8 se ilustra la gráfica de las operaciones realizadas en la Fig. 1.7, se observa que se trata de un gráfico en tercera dimensión (3-D).

Ahora que se han visto algunos de los usos de los gráficos en MATLAB, es de importancia tener presente otras funciones orientadas a los gráficos, como se muestran en la tabla 1.4.

Tabla 1.1 Algunas funciones para gráficos¹⁴

Funciones para Gráficos	
fill	Colorea polígonos 2-D
plot	Gráfico lineal
bar	Gráfico de barras
hist	Gráfico de histograma
grid	Rejilla
legend	Añade leyenda al gráfico
title	Título del gráfico
xlabel	Etiqueta del eje x

¹³ Figura realizada por la autora en MATLAB

¹⁴ Tabla tomada del libro mencionado en la cita 4, p.315

1.5 ARCHIVOS M

Estos archivos también son conocidos como archivos “script” puesto que en MATLAB se utilizan para realizar funciones propias del usuario, ya que MATLAB al mandar llamar a estos archivos los ejecuta como si estuvieran escritos en línea de orden.

Para realizar un archivo-M sólo se necesita ir al menú File y seleccionar M-File, dará como resultado una nueva ventana de edición de texto donde se escribirán las ordenes a MATLAB, esta ventana se muestra en la Fig.1.9.

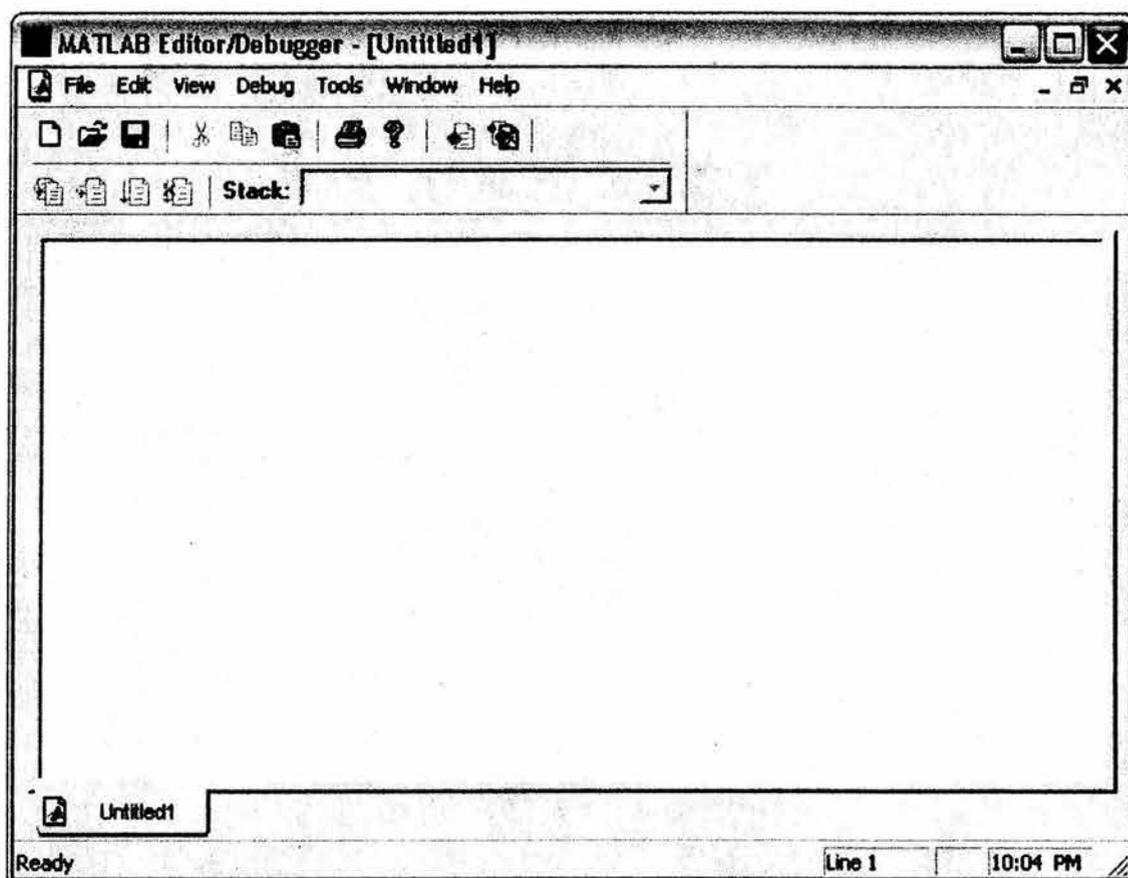
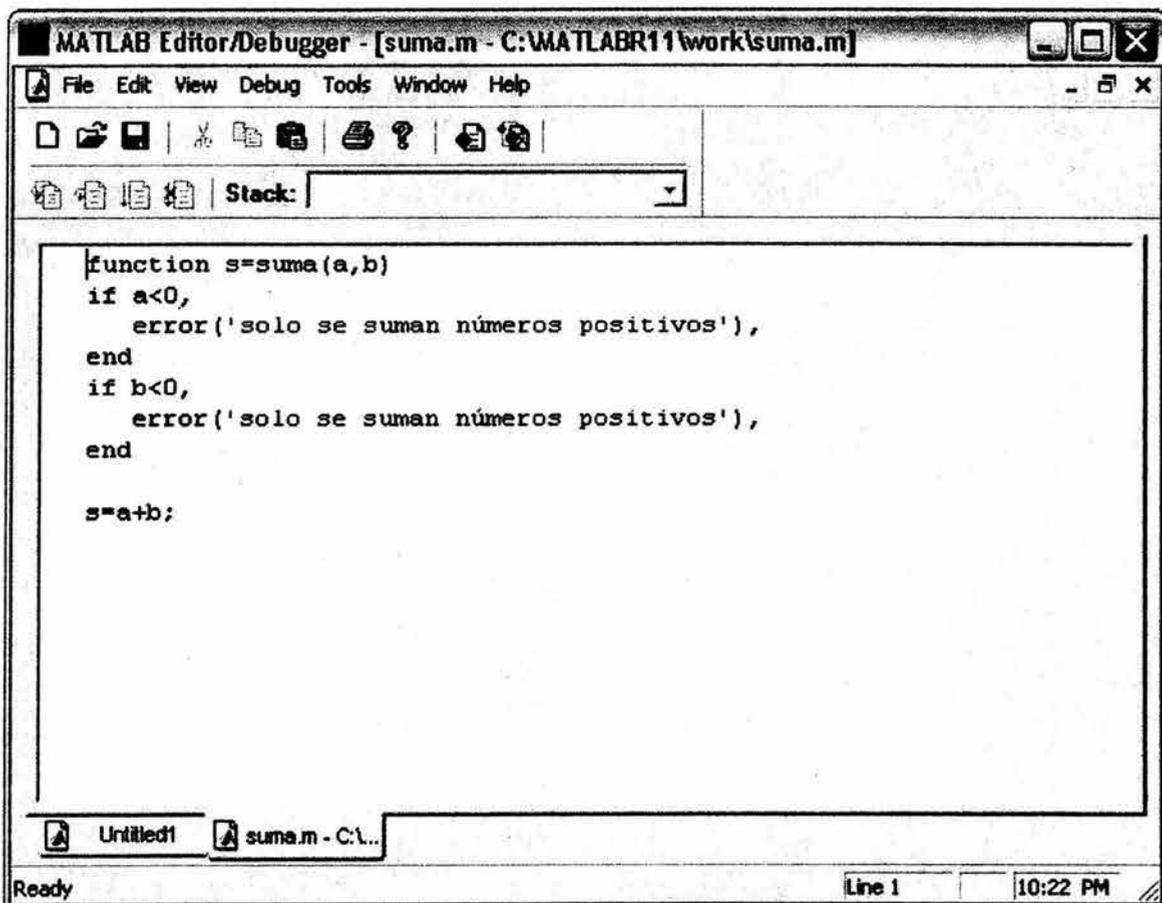


Fig. 1.9 Ventana del editor de archivos-M¹⁶

¹⁶ Figura realizada por la autora en MATLAB

Al guardar el archivo con extensión M, se debe hacer dentro de la carpeta “work” de MATLAB, es ahí donde se buscan las funciones realizadas como archivo-M. Se puede tener acceso a las órdenes del archivo desde la línea de orden simplemente dando el nombre del archivo.

En el siguiente ejemplo todo esto quedará más claro, primero en la ventana del editor de archivos-M se escribe el código como se muestra en la Fig. 1.10.



The screenshot shows the MATLAB Editor/Debugger window. The title bar reads "MATLAB Editor/Debugger - [suma.m - C:\MATLABR11\work\suma.m]". The menu bar includes "File", "Edit", "View", "Debug", "Tools", "Window", and "Help". Below the menu bar is a toolbar with various icons. A "Stack:" window is visible on the right side. The main editor area contains the following MATLAB code:

```
function s=suma(a,b)
if a<0,
    error('solo se suman números positivos'),
end
if b<0,
    error('solo se suman números positivos'),
end

s=a+b;
```

The status bar at the bottom shows "Ready", "Line 1", and "10:22 PM".

Fig. 1.10 Función realizada en el editor de MATLAB¹⁷

Se puede observar que se trata de una función de suma de dos números que sean positivos, puesto que de lo contrario se tendrá como resultado un

¹⁷ Figura realizada por la autora en MATLAB

error. Ahora se verá cómo se manda llamar a la función desde la línea de orden, en la Fig. 1.11.

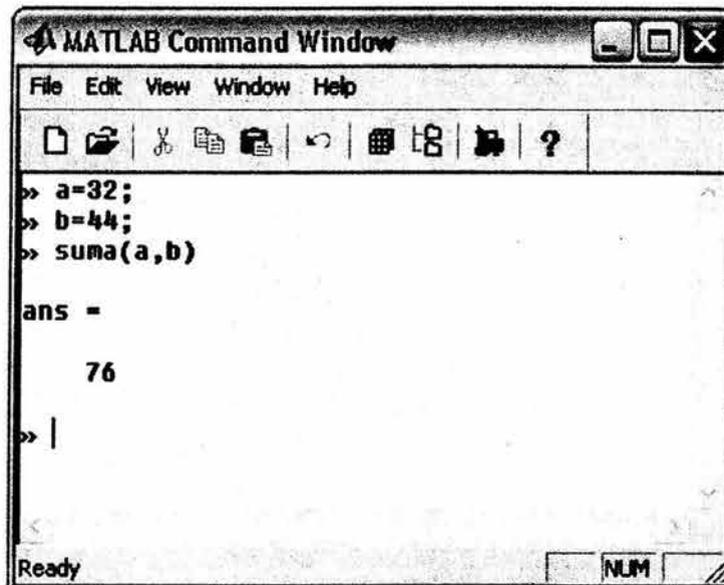


Fig. 1.11 Llamado de la función *suma*¹⁸

Para comprobar que las restricciones hechas a la función no sean omitidas, se realizará el llamado a la función con números negativos (Fig. 1.12).

Como se observó, un archivo M es muy práctico en su utilización, y para escribirlo basta con tener algún conocimiento de programación en cualquier lenguaje, y simplemente señalar lo que se requiere. Al igual que si se necesita cambiar algún punto dentro de la función (archivo-M), se puede acceder a ella y hacerle las modificaciones pertinentes.

¹⁸ Figura realizada por la autora en MATLAB

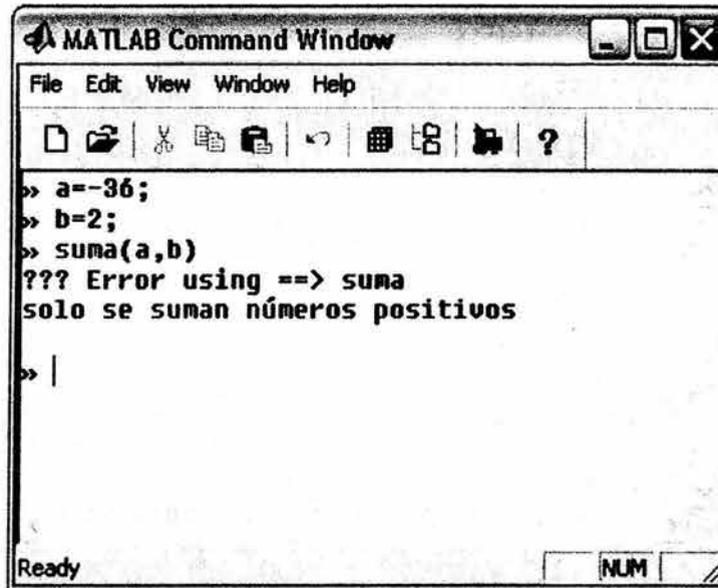


Fig. 1.12 Llamado de la función suma con error¹⁹

1.6 ¿QUÉ ES SIMULINK?

“Es una extensión a MATLAB que añade el entorno gráfico para modelar, simular, y analizar sistemas dinámicos lineales y no lineales. Admite sistemas de tiempo continuos, de tiempo discreto, multifrecuencia e híbridos”.²⁰

Para poder trabajar en SIMULINK, desde el área de trabajo de MATLAB, se tienen varias opciones: Una es escribiendo el comando `simulink`, de esta forma se abrirá sólo una ventana con las librerías disponibles; otra manera es desde la barra de menú `File` y elegir la opción `New Model`, de esta forma se abren no sólo las librerías sino también el entorno donde se va a trabajar (Fig.1.15), y por último, existe un botón de acceso directo a las librerías tanto en el entorno de trabajo de MATLAB como en el de SIMULINK (Fig.1.13).

¹⁹ Figura realizada por la autora en MATLAB

²⁰ Cita tomada de la página www.math.ufl.edu/help/matlab-tutorial



Fig. 1.13 Icono de Simulink²¹

Dentro de la librería Simulink se encuentran los elementos que vamos a utilizar organizados en sublibrerías (Fig. 1.14). Las sublibrerías que aparecen son:

- Ⓢ Continuous (Bloques para sistemas en tiempo continuo)
- Ⓢ Discrete: (Bloques para sistemas en tiempo discretos)
- Ⓢ Functions & Tables
- Ⓢ Math (Sumadores, Ganancias matriciales o constantes, etc.)
- Ⓢ Nonlinear
- Ⓢ Signals & Systems (múltiplexores, demúltiplexores, etc.)
- Ⓢ Sinks (Graficadores, etc.)
- Ⓢ Sources (Varias fuentes de entradas)

Con un doble click sobre la librería se visualizarán los elementos que contiene. Por ejemplo, si se da clic a Continuous, entre los elementos disponibles a utilizar se enlistan los siguientes:

- ⊕ Derivative: Bloque derivador, es decir du / dt .
- ⊕ Indice: General Introducción a MATLAB y SIMULINK.
- ⊕ Integrator: Bloque integrador, función transferencia.
- ⊕ State-Space: Bloque para expresar al sistema en modelo de estados.

²¹ Figura tomada de la ventana de MATLAB

- ⊕ Transfer Fnc: Bloque para expresar al sistema como cociente de polinomios.
- ⊕ Zero-pole: Bloque para expresar al sistema con ceros, polos y una ganancia.

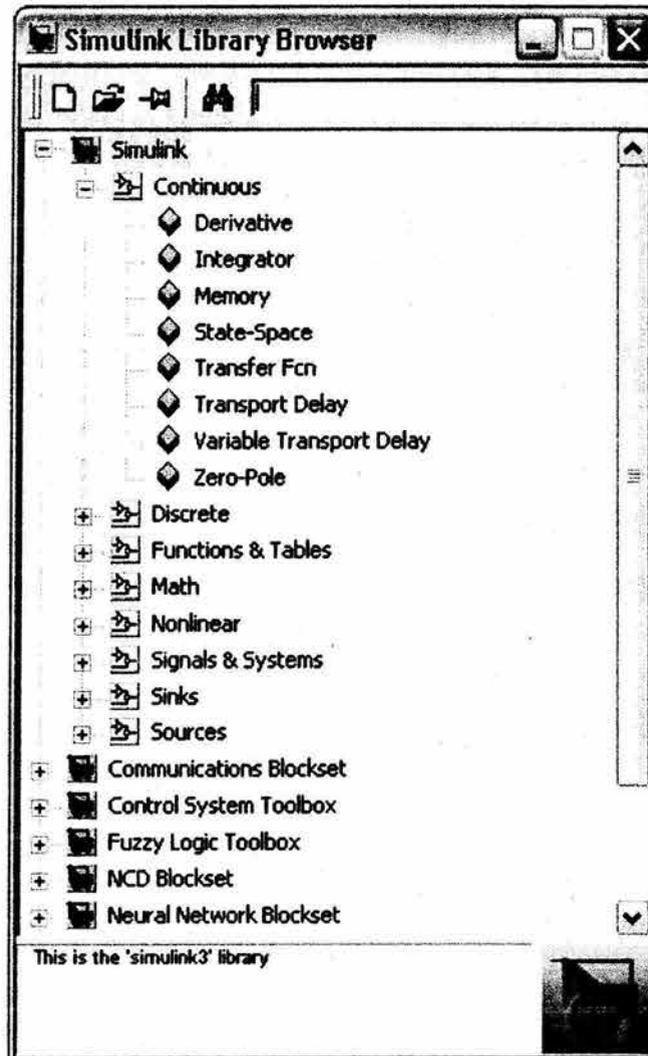


Fig. 1.14 Ventana de las librerías y sublibrerías de Simulink²²

Simulink cuenta con una gama extensa de librerías a utilizar, y al igual que en la ventana de MATLAB, se tiene una ventana muy similar y sencilla en Simulink (Fig. 1.15).

²² Figura tomada de la ventana de Simulink

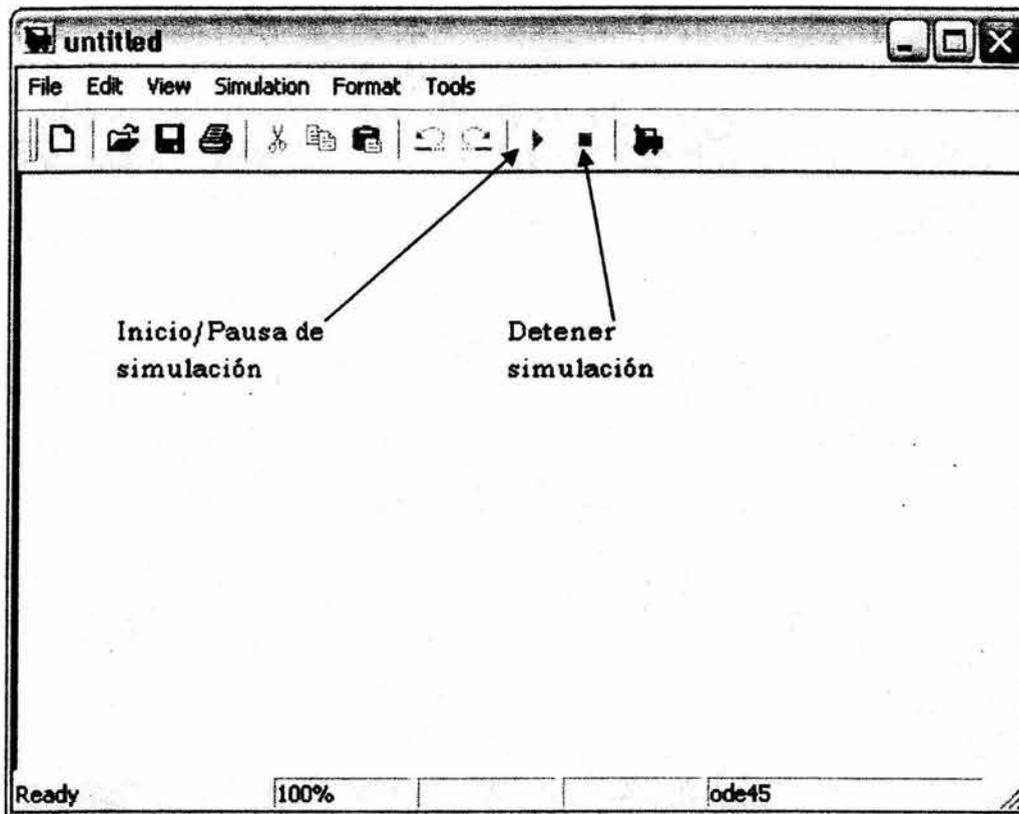


Fig. 1.15 Ventana de modelo²³

Ahora sólo queda empezar a construir los modelos que se requieran, simplemente arrastrando los componentes de la ventana de las librerías a la ventana de modelo.

Ya teniendo hecho el modelo se inicia en el botón ►, o en el menú Simulation en la opción *Start* y se detendrá con el botón ■, o en el menú Simulation en la opción *Stop*.

Más adelante se mostrarán ejemplos del uso del Simulink en aplicaciones de control.

²³ Figura tomada de la ventana de Simulink

CAPÍTULO 2

SISTEMAS

DE

CONTROL

2.1 ¿QUÉ ES UN SISTEMA DE CONTROL?

Primeramente se definirá el significado de la palabra control:

“Proceso para asegurar que las actividades reales se ajusten a las actividades planificadas. Permite mantener a la organización o sistema en buen camino.”²⁴

La palabra control ha sido utilizada con varios y diferentes sentidos. “Control como función coercitiva y restrictiva, para inhibir o impedir conductas indeseables, como llegar con atraso al trabajo o a clases, hacer escándalos, etc. Control como verificación de alguna cosa, para apreciar si está correcto, como verificar pruebas o notas. Control como comparación con algún estándar de referencia como pensar una mercadería en otra balanza, comparar notas de alumnos, etc. Control como función administrativa, esto es, como la cuarta etapa del proceso administrativo”.²⁵

“Un sistema de control esta conformado por subsistemas y procesos unidos con el fin de controlar las salidas de los procesos”.²⁶

“Un sistema de control tiene como objetivo controlar las salidas en alguna forma prescrita mediante entradas a través de los elementos del sistema de control”.²⁷

Componentes básicos de un sistema de control:

- **Objetivos:** Son todos puntos que se plantean a realizar por el sistema
- **Sistema de Control:** Es el que va asegurar que los objetivos se lleven a cabo
- **Resultados:** Son los que se espera haya realizado el sistema

²⁴ Esa definición fue tomada de KUO, Benjamín C., *Sistemas de control automático*, Editorial Prentice Hall Hispanoamericana, S.A., México, 1996, p. 12

²⁵ Esta definición fue tomada de www.engin.umich.edu/group/ctm

²⁶ Esta definición fue tomada de www.monografias.com/trabajos6/sicox/sicox.shtml

²⁷ Ídem

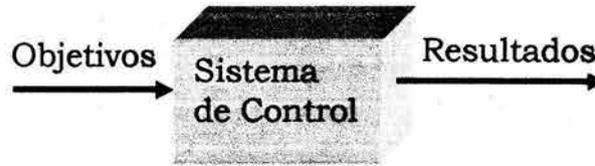


Fig. 2.1 Componentes básicos de un sistema de control²⁸

También podemos decir que un sistema de control es un arreglo de componentes físicos conectados de tal manera que el arreglo se pueda comandar, dirigir o regular a sí mismo o a otro sistema.

Ahora que se tiene un concepto concreto de lo que es control, se puede observar que es aplicado a toda clase de ámbitos, la vida diaria es el mejor ejemplo que se puede dar, puesto que para las actividades a realizar si no se lleva un “control” del tiempo se puede hacer tarde y “descontrolar” los planes ya establecidos.

2.2 VENTAJAS DE LOS SISTEMAS DE CONTROL

Los sistemas de control aportan una gran cantidad de cosas que existen; sin embargo, no siempre es un punto que se observe con facilidad.

Por ejemplo, gracias a los sistemas de control se pueden maniobrar equipos grandes, como las maquinarias de construcción, los elevadores o antenas de radio que simplemente el hombre por si solo no podría realizar.

Básicamente se construyen sistemas de control por:²⁹

- ◆ Amplificación de potencia
- ◆ Control remoto

²⁸ Figura tomada de: www.monografias.com/trabajos6/sicox/sicox.shtml

²⁹ Puntos tomados de la obra: NISE, Norman S., **Sistemas de control para ingeniería**, Editorial Continental, S.A., México, 2002, p. 3.

- ◆ Comodidad de forma de entrada
- ◆ Compensación por perturbaciones

Cuando se habla de amplificación de potencia, se refiere a que cuando el sistema requiera de mayor ganancia, el sistema de control tiene que ser capaz de amplificar lo necesario para que tenga un buen funcionamiento.

Los sistemas de control son muy útiles en lugares remotos o muy peligrosos para el hombre.

También los sistemas de control por la comodidad de cambiar la entrada sin necesidad de que el hombre intervenga físicamente.

Al decir que un sistema de control compensa las perturbaciones, es porque el puede corregir cualquier factor que cambie la entrada al sistema, es decir que si una perturbación o ruido entra al sistema éste debe detectarlo corregirlo para su buen funcionamiento.

2.3 CARACTERÍSTICAS DE RESPUESTA Y CONFIGURACIONES DE UN SISTEMA

Cuando se habla de sistemas de control, se tienen que tomar en cuenta sus características, puesto que son parte de lo que se llama un sistema, puesto así se tienen los siguientes puntos.

2.3.1 ENTRADA Y SALIDA

En un sistema de control se encuentra constituido básicamente por una entrada y por una salida (Fig. 2.2).

- ⊕ **Entrada:** Representa la respuesta deseada. Es el estímulo o excitación que se aplica a un sistema de control desde una fuente de energía externa, generalmente con el propósito de producir una respuesta específica.
- ⊕ **Salida:** Es la respuesta real. Puede ser o no igual a la respuesta especificada que la entrada implica.



Fig. 2.2 Diagrama a bloques de un sistema de control³⁰

Como se puede observar que los sistemas de control van a dar como resultado lo que se requiere, dependiendo de si es o no un sistema defectuoso. Puesto que se puede dar lo que se llama *error estable*, que es aquel que se presenta en el sistema de control, éste puede o no ser tolerable dependiendo de la situación y el tipo de sistema que se este manejando.

Ahora se tomará en cuenta dos configuraciones de sistemas de control: Lazo abierto y lazo cerrado.

2.3.2 SISTEMA EN LAZO ABIERTO

Cuando se habla de un sistema de control de lazo abierto, es cuando la acción del control es independiente de la salida.

Un ejemplo de un sistema de lazo abierto se puede observar en la Fig. 2.3.

³⁰ Figura realizada por la autora



Fig. 2.3 Diagrama a bloques de un sistema abierto³¹

Una característica muy marcada de un sistema de lazo abierto, es que no tiene la capacidad de compensar perturbaciones, puesto que si el ruido llega a entrar en la Perturbación 1 (Fig. 2.3), entonces la salida del sistema abierto se ve afectada por la suma de este ruido dentro del sistema.

Entonces se puede concluir que un sistema de lazo abierto no es capaz de corregir las perturbaciones (ruido) y simplemente se rigen por la entrada y son vulnerables a lo que suceda en su exterior.

2.3.3 SISTEMA DE LAZO CERRADO

Como se vio anteriormente, los sistemas de lazo abierto tienen la desventaja de no poder corregir las perturbaciones, cosa que afecta en el resultado que se tenía esperado, pero al hablar de un sistema de lazo cerrado se habla de un sistema retroalimentado.

Cuando se dice que es retroalimentado es por que al tener la parte del *Transductor de Salida o Detector* (Fig. 2.4) hace la parte de realimentar al sistema comparando la *Salida* con la *Entrada* en el primer *Punto de Suma*, si existe alguna variación o diferencia entre las dos respuestas, el sistema reacciona y acciona la Planta por medio de una señal de actuación, para hacer la corrección.

³¹ Figura tomada del libro mencionado en la cita 27, p.12

La función del *Transductor de Entrada* es el de convertir la entrada a la forma en que se maneja en el sistema, y el del *Transductor de Salida* es el de convertir la salida de forma en que se utiliza fuera del sistema.

Se pueden mencionar algunas características de la retroalimentación en un sistema de lazo cerrado:

- Ⓢ Aumento de la exactitud, habilidad para reproducir la entrada fielmente.
- Ⓢ Sensibilidad reducida a las variaciones
- Ⓢ Efectos reducidos de la distorsión
- Ⓢ Aumento del ancho de banda
- Ⓢ Tendencia a la inestabilidad

Tomando en cuenta todo esto, y que los sistemas de lazo cerrado son menos sensibles al ruido, a perturbaciones y al ambiente, tienen una amplia ventaja sobre los sistemas de lazo abierto.

También cuando se habla del error en estado estable en un sistema de lazo cerrado, es más sencillo de controlar mediante un ajuste de la ganancia en el lazo, y a veces un rediseño en el controlador.

Al rediseño se le llama compensación del sistema y al hardware resultante, compensador.

Por otra parte, los sistemas de lazo cerrado son más costosos que los de lazo abierto. Lógicamente, puesto que un sistema de lazo cerrado contiene más componentes que uno de lazo abierto.

Se puede deducir entonces que un sistema abierto es aquel no tiene la propiedad de medición y corrección, caso contrario a un sistema de lazo cerrado.

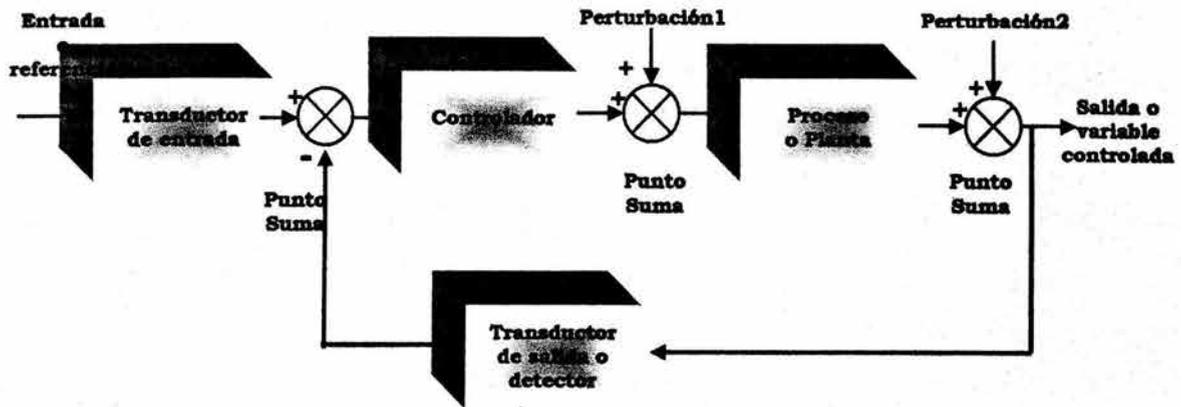


Fig. 2.4 Diagrama a bloques de un sistema lazo cerrado³²

2.3.4 SISTEMAS CONTROLADOS POR COMPUTADORA

Como se ve, en la vida diaria la computadora ha tomado el puesto de muchos, pero también ha facilitado y perfeccionado el de otros tantos.

En los sistemas de control la computadora toma el lugar del *Controlador* (o compensador).

La ventaja de usar la computadora dentro de un sistema de control, es que muchos lazos pueden ser controlados por la misma computadora.

Además que en el uso del software es mucho más fácil hacer ajustes (más que en el hardware), en todos los parámetros para lograr los resultados deseados.

Otra función muy importante que la computadora puede desempeñar, es el de supervisar que se este realizando las aplicaciones requeridas por el sistema.

Se puede concluir que en el caso de los sistemas de control, la computadora es una herramienta de gran ayuda y eleva la eficacia del sistema en muchos aspectos en que el hombre suele cometer errores o imperfecciones que la computadora no.

³² Ídem

2.4 ACCIONES BÁSICAS DEL CONTROL

Existen diversas técnicas de compensación, que pueden ser: Compensación en Cascada (Fig. 2.5) y Compensación mediante retroalimentación (Fig. 2.6).

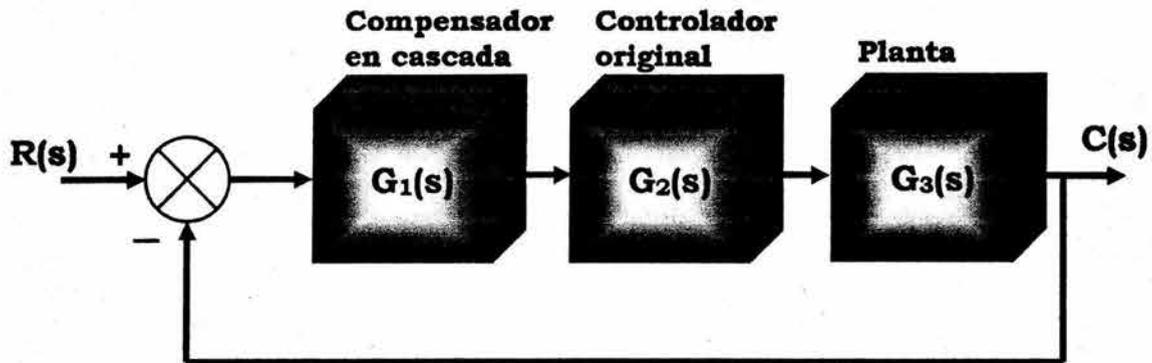


Fig. 2.5 Compensación en cascada³³

Cuando se utiliza la configuración en cascada es que se está utilizando un sistema de lazo abierto.

La configuración mediante retroalimentación es para cuando es un sistema de lazo cerrado.

Clasificación de los controladores o compensadores de acuerdo con sus acciones de control:

1. De dos posiciones de encendido y apagado (on/off)
2. Proporcionales
3. Integrales
4. Proporcionales – Integrales
5. Proporcionales – Derivativos
6. Proporcionales – Integrales – Derivativos

³³ Ibidem p.498

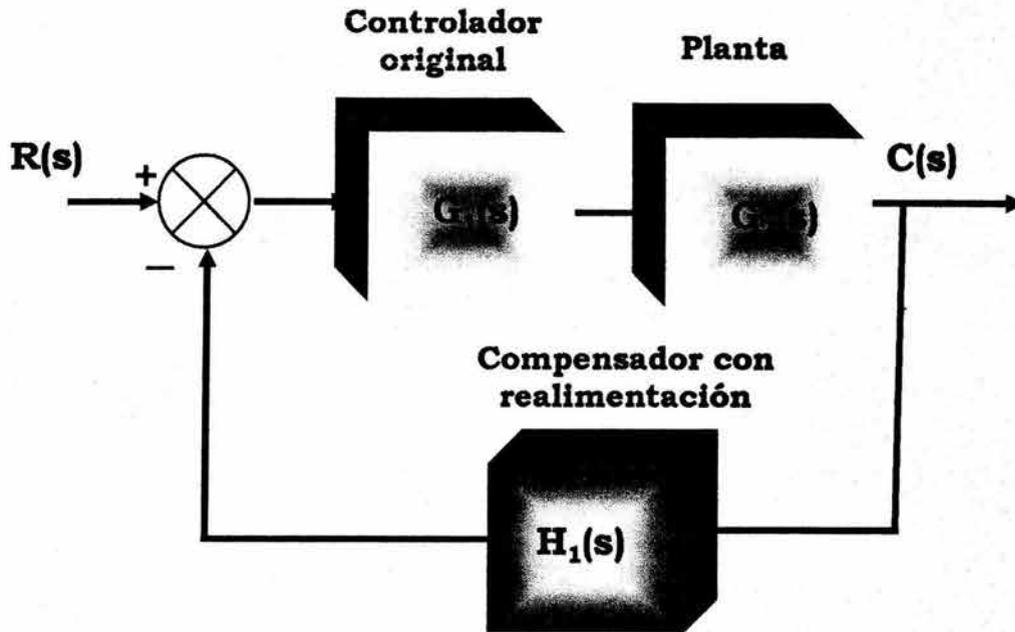


Fig. 2.6 Compensación Mediante Retroalimentación³⁴

Casi todos los controladores industriales emplean como fuente de energía la electricidad o un fluido presurizado, tal como aceite o el aire.

También pueden clasificarse de acuerdo al tipo de energía que utilizan para su operación:

- Neumáticos
- Hidráulicos
- Electrónicos

Debe seleccionarse alguno de ellos, dependiendo de la planta que se este hablando, tomando en cuenta también sus condiciones operacionales, seguridad, costo, disponibilidad, confiabilidad, presión, peso y tamaño.

Como ejemplo de un controlador industrial se tiene el mostrado en la Fig. 2.7. Este cuenta con: Controlador automático, un acumulador, una planta y un sensor.

³⁴ Ídem

Se puede observar en la figura 2.7 que un sistema de control industrial es más complejo y completo, puesto que ya cubre las necesidades específicas de una fabrica en particular.

En general, las acciones de un sistema de control se definen dependiendo de las necesidades de la planta, no se puede estandarizar una en particular, puesto lo que es bueno para una no lo es para otra. Sin embargo, cada una cumple con un objetivo en general, *compensar* un sistema de control.

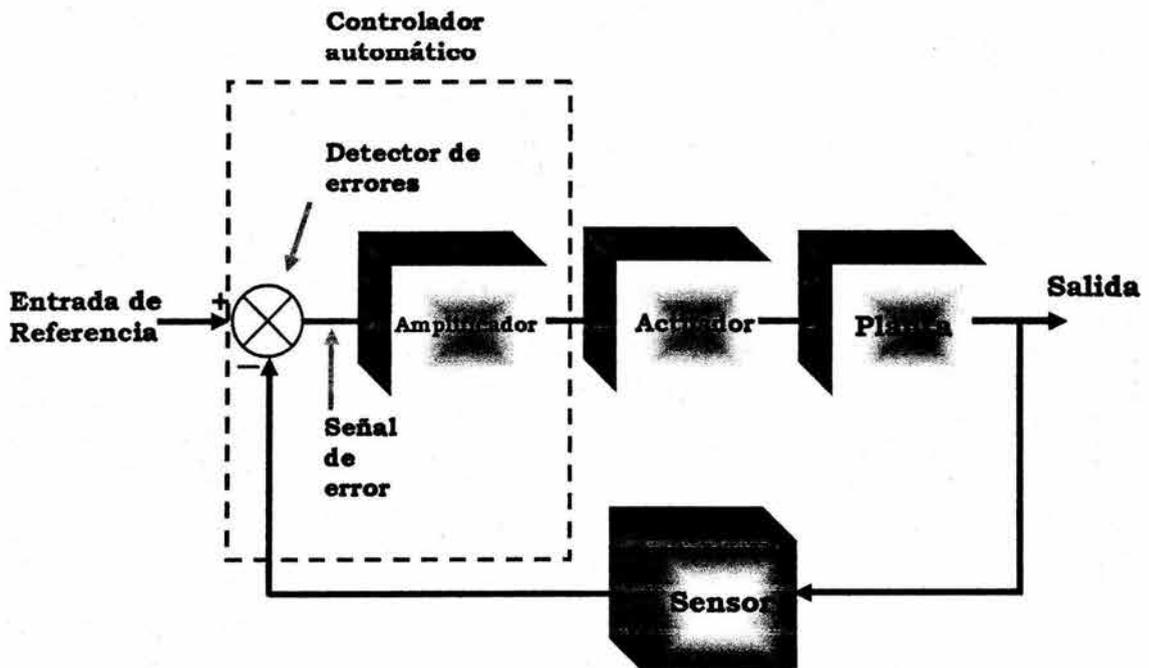


Fig. 2.7 Sistema de Control Industrial³⁵

³⁵ Figura tomada del libro de la cita 26, p. 489

Análisis y Diseño

3.1 TIPOS DE RESPUESTA

En la práctica es necesario aclarar que realmente no es posible que se conozca la señal de entrada, en casos muy especiales es posible saber la señal de entrada y expresarla en forma analítica o de curva.

En el análisis y diseño de sistemas de control es necesario tener la base de una comparación de esta señal con otros sistemas de control. Para ello es recomendable utilizar señales de entrada de prueba para comparar las respuestas de distintos sistemas a estas señales de entrada.

Sin embargo cabe mencionar que no siempre es necesario basar un sistema en señales de prueba, puesto que éste también puede ser en base en la respuesta del sistema a los cambios iniciales.

Se hace necesario conceptuar el término **Señales de Prueba Típicas**:

“Las señales de prueba que se usan regularmente son funciones escalón, rampa, parábola, impulso, senoidales, etc. Con estas señales es posible realizar con facilidad análisis matemáticos y experimentales de sistemas de control, puesto que las señales son funciones del tiempo muy simples.”³⁶

El uso de las señales de prueba fundamenta la relación existente entre la respuesta para una señal común y el sistema de señales de entrada reales. Teniendo en cuenta lo anterior se deduce que las señales de prueba son auxiliares en el análisis y diseño de sistemas de control, para poder realizar una buena comparación de las respuestas obtenidas por los diferentes sistemas evaluados.

³⁶ Véase en OGATA, Katsuhiko, *Ingeniería de Control Moderna*, 3ª ed., Editorial Prentice Hall Hispanoamericana, S.A., México, 1998, p. 134.

3.1.1 RESPUESTA TRANSITORIA Y RESPUESTA EN ESTADO ESTABLE

La respuesta en un sistema de control se divide en dos partes: La respuesta transitoria y la respuesta en estado estable.

Cuando se esta hablando de respuesta, se esta refiriendo al resultado que arroja el sistema de control, pero cuando se habla de la palabra **Transitoria** se refiere a: "Pasajero, temporal, caduco, perecedero, fugaz."³⁷

Entonces se entiende por respuesta transitoria por la que va del estado inicial al estado final. Y cuando se refiere a la respuesta en estado estable "es el comportamiento del sistema a su salida conforme el tiempo t tiende a infinito, o sea que el sistema es constante".³⁸

La **Respuesta en Estado Estable** es la que se consigue después que la respuesta transitoria a caído a cero, es decir, la respuesta transitoria ya no existe.

En general para conocer la respuesta transitoria de un sistema de control ya sea eléctrico, automático, electromecánico, químico, etc., se estimulará la entrada del sistema con una entrada escalón, al observar la salida de dicho sistema se podrá deducir de mejor forma el funcionamiento y el contenido del sistema.

Ahora se puede deducir que ambas respuestas son esenciales para el conocimiento de un sistema, su comportamiento y lo que se necesite saber acerca de él. Corresponde dar una breve explicación del cómo obtener la respuesta transitoria de un sistema de control.

³⁷ Definición tomada de: www.rae.es

³⁸ Véase el libro de la cita 34, p.135.

Respuesta Transitoria de un Circuito RC

Se considerará un sistema de primer orden de la Fig. 3.1, el diagrama a bloques simplificado (Fig. 3.2) físicamente este será un circuito RC³⁹ (Fig. 3.3).

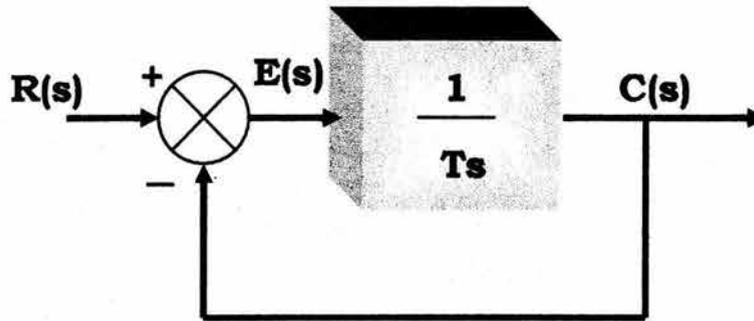


Fig. 3.1 Diagrama a bloques de un sistema de primer orden⁴⁰

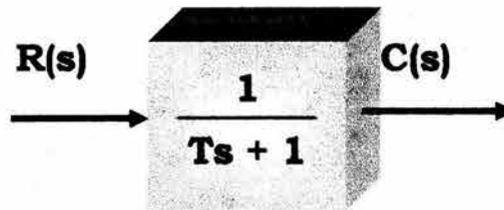


Fig. 3.2 Diagrama a bloques simplificado⁴¹

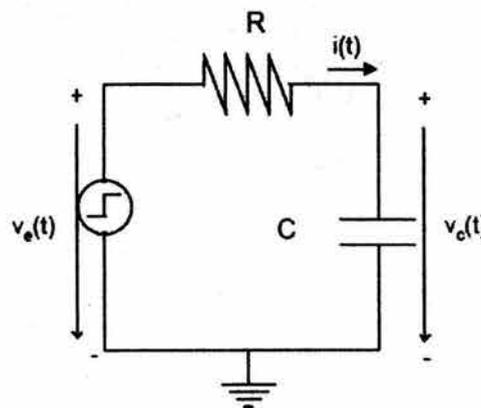


Fig. 3.3 Circuito RC⁴²

³⁹ Significa que es un circuito conformado de resistencia y capacitor armado en serie.

⁴⁰ Véase el libro de la cita 34, p.136.

⁴¹ Ídem

Entonces tomando en cuenta la relación de entrada-salida (Fig.3.2), se tiene:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts+1} \quad (3.1)$$

Se tiene que tomar en cuenta que las condiciones iniciales son igual a cero. A continuación se analizará las respuestas del sistema a entradas de función escalón unitario, rampa unitaria e impulso unitario.

a) Respuesta escalón unitario de sistemas de primer orden

La función escalón unitario es $1/s$, según la transformada de Laplace se sustituye $R(s) = 1/s$ y despejando $C(s)$ en la ecuación 3.1, se obtiene⁴³

$$C(s) = \left[\frac{1}{Ts+1} \right] \frac{1}{s} \quad (3.2)$$

Expandiendo $C(s)$ con fracciones parciales produce:

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{Ts+1} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+(1/T)} \quad (3.3)$$

Realizando la transformada inversa de Laplace de la ecuación 3.3, se obtiene:

$$c(t) = 1 - e^{-t/T}, \text{ para } t \geq 0 \quad (3.4)$$

La ecuación 3.4 establece que la salida $c(t)$ es inicialmente cero y al final se vuelve unitaria. Una característica es que, para $t = T$, el valor de $c(t)$ es 0.632, o interpretándolo de otra manera, que alcanzó el 63.2% de su cambio total. Sustituyendo $t = T$,

⁴² Figura realizada por la autora

⁴³ Ejemplo tomado de la cita 34, p.136

$$c(t) = 1 - e^{-1} = 0.632 \quad (3.5)$$

Una característica importante de la respuesta exponencial es que la pendiente de la línea tangente en $t = 0$ es $1/T$, dado que

$$\frac{dc}{dt} = \frac{1}{T} e^{-t/T} \Big|_{t=0} = \frac{1}{T} \quad (3.6)$$

La respuesta alcanzaría el valor final en $t = T$ si mantuviera su velocidad de respuesta inicial. La curva de respuesta exponencial $c(t)$ es obtenida mediante la ecuación 3.4 y aparece en la Fig. 3.4

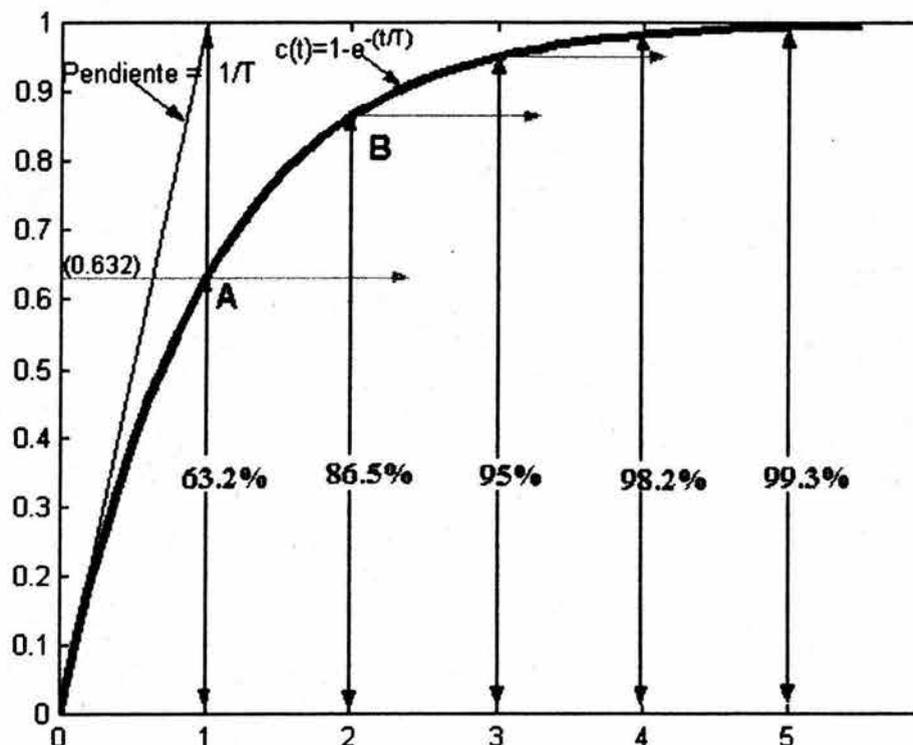


Fig. 3.4 Curva de respuesta exponencial⁴⁴

Se puede observar que la curva de la respuesta exponencial va de 0 a 63.2% del valor final. En dos constantes de tiempo, la respuesta alcanza

⁴⁴ Véase la cita 34, p.137

86.5% del valor final. En $t = 3T$, $4T$ y $5T$ la respuesta alcanza 95%, 98.2% y 99.3% respectivamente, del valor final. Entonces para $t \geq 4T$, la respuesta permanece dentro del 2% del valor final. Matemáticamente el estado estable se alcanza sólo con un tiempo infinito, sin embargo, una estimación del tiempo de respuesta es la longitud de tiempo que necesita la curva de respuesta para alcanzar la línea de 2% del valor final, o cuatro constantes de tiempo.

b) Respuesta rampa unitaria de sistemas de primer orden

Dado que la transformada de Laplace de la función rampa unitaria es $1/s^2$, la salida del sistema (Fig. 3.1) obtendrá mediante,

$$C(s) = \frac{1}{s^2(Ts + 1)} \quad (3.7)$$

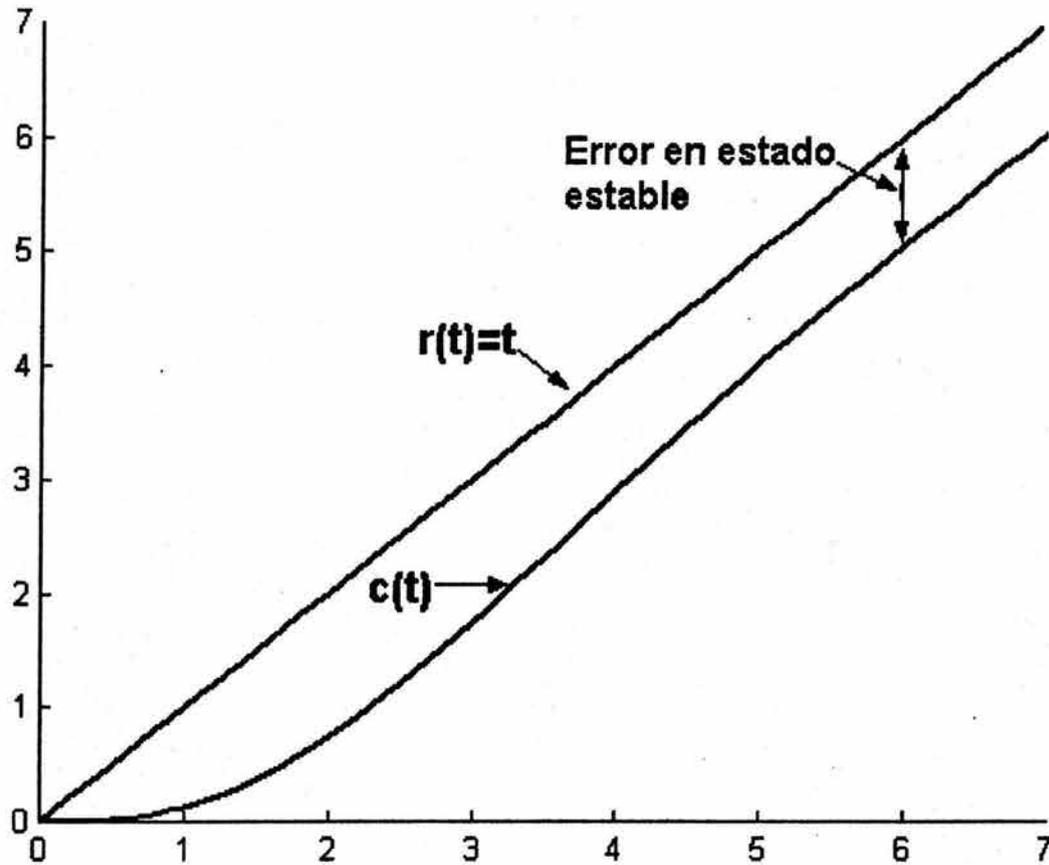
Obteniendo las fracciones parciales de la ecuación anterior se tiene,

$$C(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T^2}{Ts + 1} \quad (3.8)$$

Tomando la transformada inversa de Laplace de la ecuación 3.8,

$$c(t) = t - T + Te^{-t/T}, \text{ para } t \geq 0 \quad (3.9)$$

La entrada rampa unitaria y la salida del sistema se muestran en la Fig. 3.5. El error después de la entrada unitaria es igual a T para un tiempo t suficientemente grande. Entre más pequeña es la constante de tiempo T , más pequeño será el error en estado estable después de la entrada rampa.

Fig. 3.5 Respuesta rampa unitaria⁴⁵

c) Respuesta impulso unitario de sistemas de primer orden

Para la entrada impulso unitario, $R(s) = 1$ y la salida del sistema (Fig. 3.1) puede obtenerse mediante,

$$C(s) = \frac{1}{Ts + 1} \quad (3.10)$$

o bien,

$$c(t) = \frac{1}{T} e^{-t/T}, \text{ para } t \geq 0 \quad (3.11)$$

⁴⁵ Véase la cita 34, p.139

La curva de la respuesta obtenida mediante la ecuación 3.11 y se observa en a Fig. 3.6.

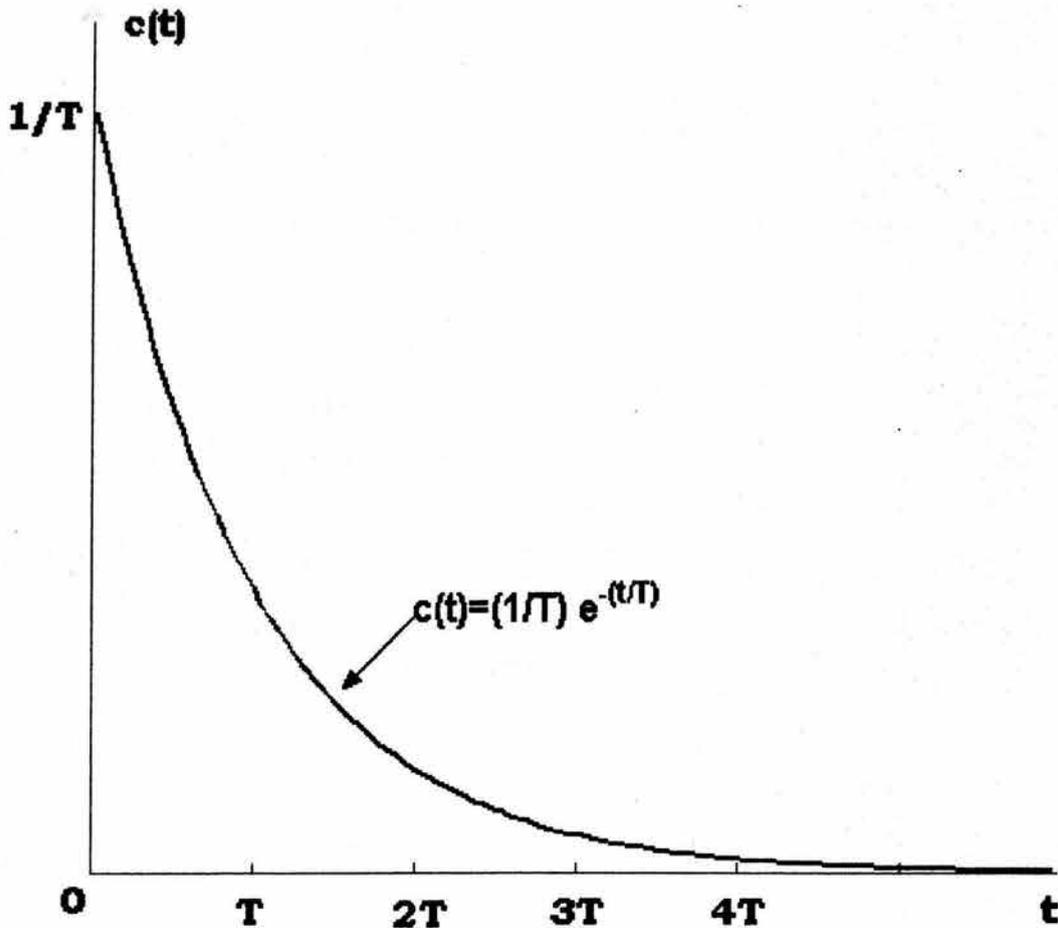


Fig. 3.6 Respuesta impulso unitario⁴⁶

Hasta aquí solo se ha mencionado la forma en como calcular manualmente la respuesta transitoria con diferentes técnicas, sin embargo no son las únicas, y existen otras formas de realizarlas.

⁴⁶ Véase la cita 34, p.139

3.1.2 RESPUESTA LIBRE

Es aquella que produce el sistema cuando la entrada o excitación externa aplicada es cero y su estado inicial es diferente a cero, esto lo vemos en la Fig. 3.7.

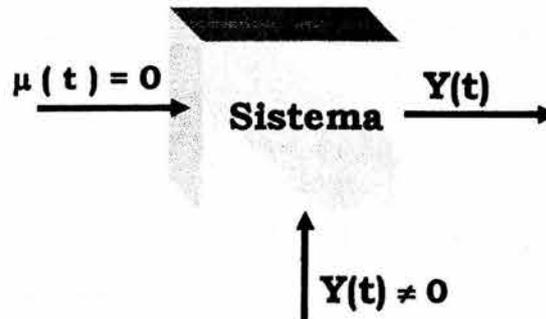


Fig. 3.7 Respuesta Libre⁴⁷

Por lo tanto, la respuesta libre del sistema depende únicamente de su estado inicial. Y las literales utilizadas se refieren a:

$u(t) \Rightarrow$ Fuente ó señal de excitación

$y(t_0) \Rightarrow$ Condición inicial

$y(t) \Rightarrow$ Respuesta ó salida

Como ejemplo de la respuesta libre se tiene un sistema eléctrico en la Fig. 3.8.

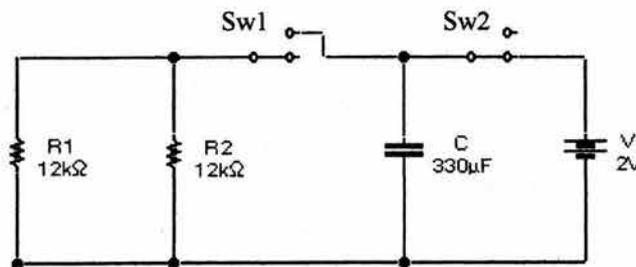


Fig. 3.8 Sistema eléctrico⁴⁸

⁴⁷ Véase RODRÍGUEZ, Francisco R., *Dinámica de sistemas*, Editorial Trillas, S.A. de C.V., México, 1989, p.171

⁴⁸ Ídem

El circuito resultante de la Fig. 3.8 se observa en la Fig. 3.9.

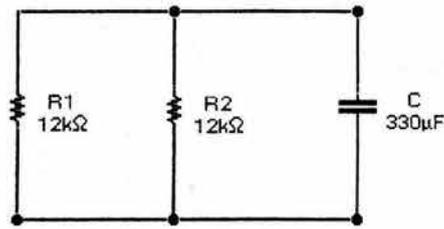


Fig. 3.9 Circuito resultante de la Fig. 3.8⁴⁹

Tomando en cuenta las condiciones iniciales se puede deducir que:

PARA $t < 0$ segundos:

Sw1 → Abierto ∴ $v_c = 2 \text{ v}$
Sw2 → Cerrado

PARA $t \geq 0$ segundos:

Sw1 → Cerrado ∴ $v_c = ?$
Sw2 → Abierto

Tabla. 3.1 Modelo matemático del sistema y solución homogénea

$i_1 + i_2 + i_c = 0$ $i_1 = \frac{v_c}{R_1}$ $i_2 = \frac{v_c}{R_2}$ $i_c = C \frac{d}{dt} v_c$ $\frac{v_c}{R_1} + \frac{v_c}{R_2} + C \frac{d}{dt} v_c = 0$ $\frac{d}{dt} v_c + \frac{1}{c} \left[\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \right] v_c = 0$	<p>Sol. Homogénea:</p> $v_c(t)_h = K_1 e^{-\frac{1}{c} \left[\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \right] t}$ <p>Determinando K_1 para condición inicial:</p> $v_c(0)_h = K_1 e^0 = 2 \quad \therefore K_1 = 2$ $v_c(t)_h = 2e^{-0.505t}$
---	--

⁴⁹ Ídem

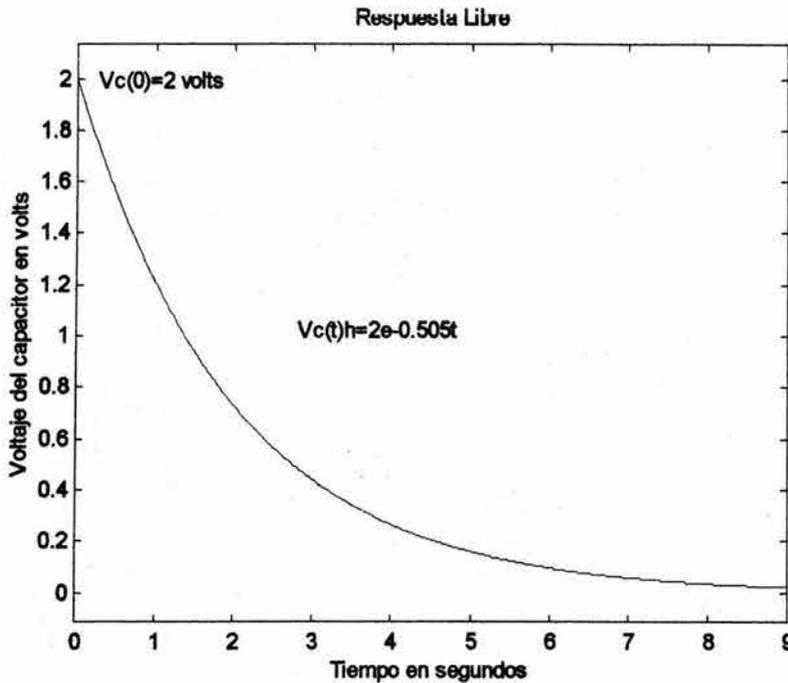


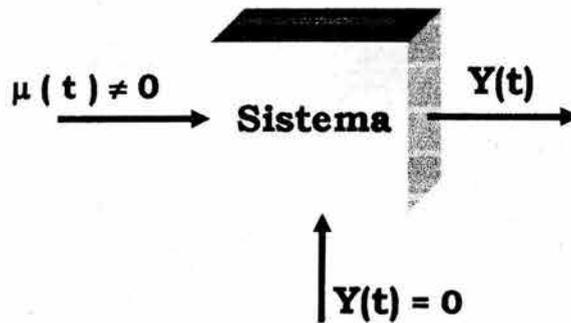
Fig. 3.10 Gráfica de la respuesta libre⁵⁰

En la Tabla 3.1 se puede observar la resolución del modelo matemático tomando en cuenta las condiciones iniciales del sistema, y la respuesta libre solo cuenta con solución homogénea que es la que se observa en la misma tabla. Y en la Fig. 3.10 se muestra la gráfica resultante de la respuesta libre.

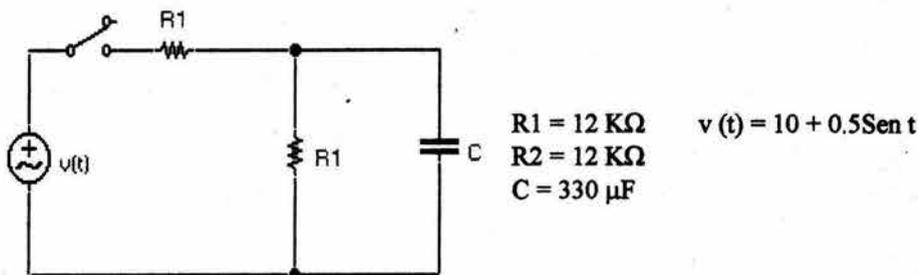
3.1.3 RESPUESTA FORZADA

Es aquella que produce el sistema cuando la entrada o excitación externa aplicada a éste es distinta de cero y su entrada inicial es nula, esto se puede observar

⁵⁰ Ídem

Fig. 3.11 Respuesta forzada⁵¹

Por lo tanto, la respuesta forzada del sistema depende únicamente de la entrada o excitación externa aplicada.

Fig. 3.12 Sistema eléctrico⁵²

Ahora se obtendrá la respuesta forzada para un sistema eléctrico que se puede observar en la Fig. 3.12.

En la Tabla 3.2 se puede observar la resolución del modelo matemático tomando en cuenta las condiciones iniciales del sistema, en este caso primeramente se realiza la respuesta libre del sistema puesto que ésta nos lleva más rápidamente a la solución homogénea del sistema. Esta última ecuación se queda en espera de los valores de K , para encontrar la respuesta forzada.

⁵¹ Ibidem p.176

⁵² Idem

Tabla. 3.2 Modelo matemático del sistema y solución homogénea

$i_t = i_2 + i_c$	$\frac{d}{dt} v_c + \frac{1}{C} \left[\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \right] v_c = 0$
$i_t = \frac{v(t) - v_c}{R_1}$	
$i_2 = \frac{v_c}{R_2}$	$m + \frac{1}{C} \left[\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \right] = 0$
$i_c = C \frac{d}{dt} v_c$	<i>Por lo que la Respuesta Natural del sistema es:</i>
$\frac{v(t) - v_c}{R_1} = \frac{v_c}{R_2} + C \frac{d}{dt} v_c$	$m = \frac{1}{C} \left[\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \right]$
$\frac{v(t)}{R_1} - \frac{v_c}{R_1} = \frac{v_c}{R_2} + C \frac{d}{dt} v_c$	<i>Y la solución homogénea es</i>
$C \frac{d}{dt} v_c + \frac{v_c}{R_1} + \frac{v_c}{R_2} = \frac{v(t)}{R_1}$	$v_c(t)_h = K_1 e^{\frac{1}{C} \left[\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \right] t}$
$C \frac{d}{dt} v_c + v_c \left[\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \right] = \frac{v(t)}{R_1}$	<i>En espera el calculo de K₁</i>
$\frac{d}{dt} v_c + \frac{1}{C} \left[\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \right] v_c = \frac{1}{C R_1} v(t)$	

La solución particular del sistema se da debido a la excitación externa que es la suma lineal de una constante y una función de la cual se parte se puede observar en la Tabla 3.3.

Como se puede observar en la Tabla 3.3, la solución simultánea del sistema en la última ecuación, teniendo como resultado los valores de K₂, K₃ y K₄.

Tabla. 3.3 Solución simultánea del sistema

$$v_c(t)_p = K_2 + K_3 \text{sen } t + K_4 \text{cos } t$$

derivando :

$$\frac{d}{dt} v_{cp} = K_3 \text{cos } t - K_4 \text{sen } t$$

Sustituyendo en Ec. Dif. :

$$\frac{d}{dt} v_c + \frac{1}{C} \left[\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \right] v_c = \frac{1}{CR_1} v(t)$$

$$K_3 \text{cos } t - K_4 \text{sen } t + \frac{1}{C} \left[\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \right] [K_2 + K_3 \text{sen } t + K_4 \text{cos } t] = \frac{1}{CR_1} [10 + 0.5 \text{sen } t]$$

$$\left[\frac{R_1 + R_2}{CR_1 R_2} K_3 - K_4 \right] \text{sen } t + \left[K_3 + \frac{R_1 + R_2}{CR_1 R_2} K_4 \right] \text{cos } t + \frac{R_1 + R_2}{CR_1 R_2} K_2 = \frac{10}{CR_1} + \frac{0.5}{CR_1} \text{sen } t$$

$$\left[\frac{R_1 + R_2}{CR_1 R_2} K_3 - K_4 \right] \text{sen } t = \frac{0.5}{CR_1} \text{sen } t$$

$$\left[K_3 + \frac{R_1 + R_2}{CR_1 R_2} K_4 \right] \text{cos } t = 0 \quad \frac{R_1 + R_2}{CR_1 R_2} K_2 = \frac{10}{CR_1}$$

Resolviendo simultáneamente

$$K_2 = 5 \quad K_3 = 0.051 \quad K_4 = -0.1$$

$$v_c(t)_p = 5 + 0.051 \text{sen } t - 0.1 \text{cos } t$$

Para obtener la respuesta forzada del sistema, es necesario evaluar la constante K_1 empleando las condiciones iniciales, que en este caso es cero y se tiene que:

$$v_{C(\text{forzada})} = v_{ch} + v_{cp} = K_1 e^{\frac{1}{C} \left[\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \right] t} + 5 + 0.051 \text{sen } t - 0.1 \text{cos } t = 0$$

para $t = 0$

$$K_1 = -4.9$$

FINALMENTE LA RESPUESTA FORZADA ES:

$$v_{C(\text{forzada})} = 5 - 4.9e^{-0.505t} + 0.051 \text{sen } t - 0.1 \text{cos } t$$

Gráficamente se puede observar la respuesta forzada en la Fig. 3.13.

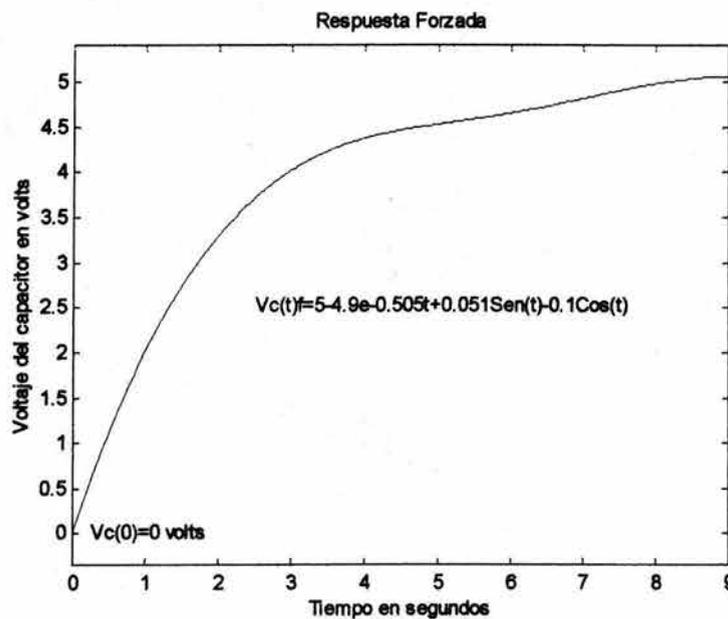
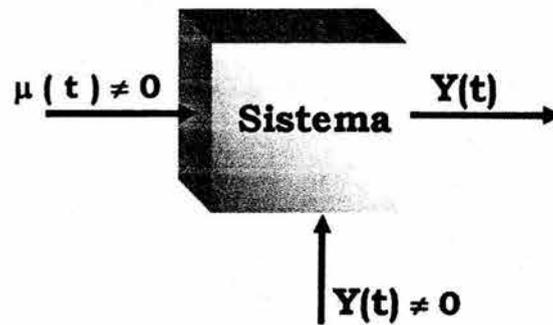


Fig. 3.13 Gráfica de la respuesta forzada ⁵³

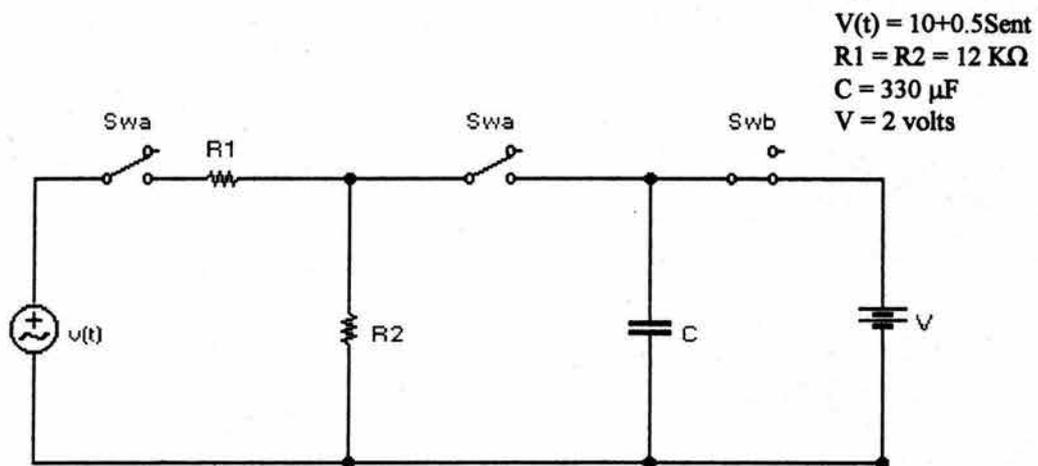
3.1.4 RESPUESTA TOTAL

Es aquella producida por el sistema cuando la entrada o excitación externa aplicada y su estado inicial son distintos de cero, como se puede observar en la Fig. 3.14.

⁵³ Ibidem p.179

Fig. 3.14 Respuesta total ⁵⁴

Por lo tanto, la respuesta total del sistema depende de la entrada aplicada y de su estado inicial. Como ejemplo de la respuesta total se obtendrá del circuito de la Fig. 3.15.

Fig. 3.15 Sistema eléctrico ⁵⁵

Tomando en cuenta lo siguiente:

<p>Para $t < 0$: Swa permanece abierto y Swb Permanece Cerrado</p>	<p>Para $t \geq 0$: Swa se cierran y Swb se abre</p>
---	--

⁵⁴ Ibidem p.180

⁵⁵ Ídem

Tabla. 3.4 Modelo matemático del sistema y solución homogénea

$i_t = i_2 + i_c$ $i_t = \frac{v(t) - v_c}{R_1}$ $i_2 = \frac{v_c}{R_2}$ $i_c = C \frac{d}{dt} v_c$ $\frac{v(t) - v_c}{R_1} = \frac{v_c}{R_2} + C \frac{d}{dt} v_c$ $\frac{v(t)}{R_1} - \frac{v_c}{R_1} = \frac{v_c}{R_2} + C \frac{d}{dt} v_c$ $C \frac{d}{dt} v_c + \frac{v_c}{R_1} + \frac{v_c}{R_2} = \frac{v(t)}{R_1}$ $C \frac{d}{dt} v_c + v_c \left[\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \right] = \frac{v(t)}{R_1}$ $\frac{d}{dt} v_c + \frac{1}{C} \left[\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \right] v_c = \frac{1}{C R_1} v(t) \dots \dots \dots 1)$	<p>Como solución homogénea tenemos:</p> $\frac{d}{dt} v_c + \frac{1}{C} \left[\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \right] v_c = 0$ $m + \frac{1}{C} \left[\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \right] = 0$ <p>Por lo que la Respuesta Natural del sistema es:</p> $m = - \frac{1}{C} \left[\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \right]$ <p>Y la solución homogénea es</p> $v_c(t)_h = K_1 e^{-\frac{1}{C} \left[\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \right] t}$ <p>En espera el calculo de K_1</p>
--	---

Se observa en la Tabla 3.4 el modelado matemático del sistema para la respuesta total, del cual se calcula la solución homogénea del sistema, de allí se va sacar el valor de K_1 .

Por lo que nos queda la siguiente expresión para realizar la solución particular del sistema.

Como se puede observar en la Tabla 3.5, la solución simultánea del sistema en la última ecuación, teniendo como resultado los valores de K_2 , K_3 y K_4 .

Tabla. 3.5 Solución simultánea del sistema

$$v_c(t)_p = K_2 + K_3 \text{sent} + K_4 \text{cost}$$

derivando:

$$\frac{d}{dt} v_c = K_3 \text{cost} - K_4 \text{sent}$$

Sustituyendo en Ec. Dif.:

$$\frac{d}{dt} v_c + \frac{1}{C} \begin{bmatrix} R_1 + R_2 \\ R_1 R_2 \end{bmatrix} v_c = \frac{1}{CR_1} v(t) \dots \dots \dots 1)$$

$$K_3 \text{cost} - K_4 \text{sent} + \frac{1}{C} \begin{bmatrix} R_1 + R_2 \\ R_1 R_2 \end{bmatrix} [K_2 + K_3 \text{sent} + K_4 \text{cost}] = \frac{1}{CR_1} [10 + 0.5 \text{sent}]$$

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 \\ CR_1 R_2 \end{bmatrix} K_3 \quad K_4 \text{sent} + \begin{bmatrix} K_3 \quad R_1 + R_2 \\ CR_1 R_2 \quad K_4 \end{bmatrix} \text{cost} + \frac{R_1 + R_2}{CR_1 R_2} K_2 = \frac{10}{CR_1} + \frac{0.5}{CR_1} \text{sent} \dots \dots \dots 2)$$

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 \\ CR_1 R_2 \end{bmatrix} K_3 \quad K_4 \text{sent} = \frac{0.5}{CR_1} \text{sent}$$

$$\begin{bmatrix} K_3 \quad R_1 + R_2 \\ CR_1 R_2 \quad K_4 \end{bmatrix} \text{cost} = 0 \quad \frac{R_1 + R_2}{CR_1 R_2} K_2 = \frac{10}{CR_1} \dots \dots \dots$$

Resolviendo simultáneamente

$$K_2 = 5 \quad K_3 = 0.051 \quad K_4 = -0.1$$

$$v_c(t)_p = 5 + 0.051 \text{sent} - 0.1 \text{cost}$$

Para obtener la respuesta total del sistema, es necesario evaluar la constante K_1 empleando las condiciones iniciales, que en este caso es diferente de cero y se tiene que:

Representado en diagrama a bloques se puede observar en la Fig. 3.17.

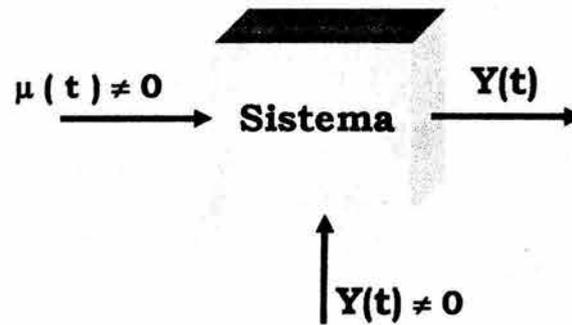


Fig. 3.17 Respuesta permanente

La respuesta permanente se puede obtener por diversos métodos, en este caso se utilizará la siguiente:

$$y(t)_{\text{permanente}} = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)_{\text{total}}$$

Por lo tanto, se puede afirmar que la respuesta permanente depende de la entrada aplicada al sistema, en su estado inicial y de tiempos muy grandes.

Como ejemplo se tomará en cuenta el sistema eléctrico de la Fig. 3.18.

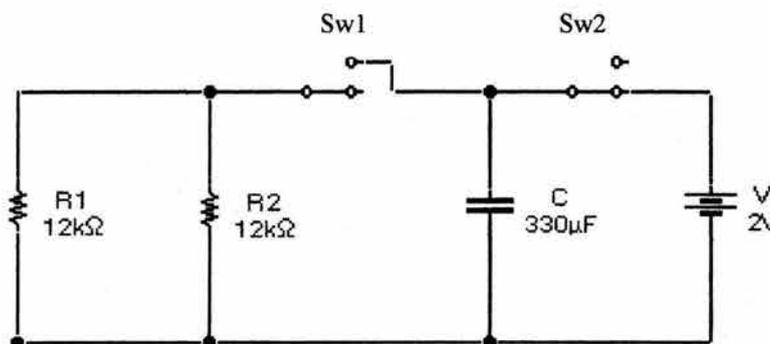


Fig. 3.18 Sistema eléctrico

A continuación se observa el modelo matemático :

$$v_{C(Total)} = v_{ch} + v_{cp} = K_1 e^{\frac{1}{C} \left[\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \right] t} + 5 + 0.051 \text{sen} t - 0.1 \text{cos} t = 2 \dots \dots \dots \text{para } t = 0$$

$$K_1 = -2.9$$

La resolución de la respuesta permanente del sistema es:

$$v_c(Total) = 5 + 0.051 \text{sen} t - 0.1 \text{cos} t$$

La vista gráfica de la respuesta permanente se observa en la Fig. 3.19.

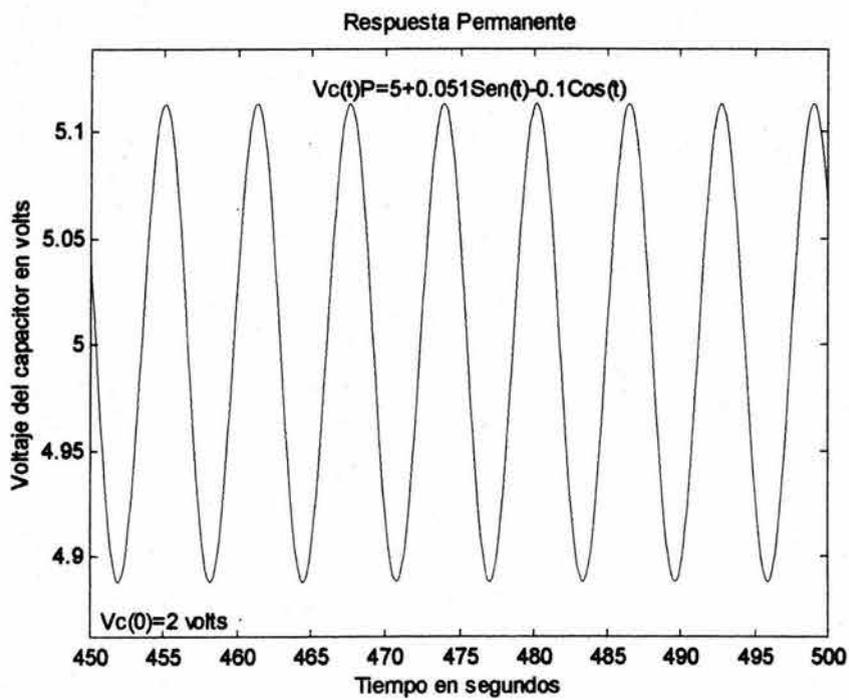


Fig. 3.19 Gráfica de la respuesta permanente

3.2 ESTABILIDAD

La razón por la cual se estudia la respuesta transitoria y el error en estado estable de un sistema, es cuando el sistema carece de *estabilidad*.

Ahora bien, para poder dar una explicación de estabilidad se tiene que regresar un poco a la respuesta total de un sistema, que consta de la suma de la *respuesta libre* y la *respuesta forzada*.

Una *respuesta libre* “describe la forma en que el sistema disipa o adquiere energía, esta sólo depende del sistema, no de la entrada”.⁵⁶

La respuesta forzada por el contrario de la respuesta libre, está si depende de la entrada al sistema. Entonces para un sistema lineal se tiene que,

$$\text{Respuesta Total} = \text{Respuesta Libre} + \text{Respuesta Forzada}$$

Expuesto lo anterior, entonces se puede dar la definición de los siguientes términos:⁵⁷

1. “Un sistema lineal e invariante con el tiempo, es estable si la respuesta libre tiende a cero conforme el tiempo tiende a infinito”.
2. “Un sistema lineal e invariante con el tiempo, es inestable si la respuesta libre crece sin límite conforme el tiempo tiende a infinito”.
3. “Un sistema lineal e invariante con el tiempo es marginalmente estable si la respuesta libre no decae ni crece, sino que permanece constante o varía a medida que el tiempo tiende a infinito”.

Todos los términos anteriores se basan en la respuesta libre, sin embargo cuando se ve la respuesta total es de igual forma involucrada.

⁵⁶ Ver cita 27, p. 14

⁵⁷ Ibidem p.325

3.2.1 CONCEPTO BIBO EN LA ESTABILIDAD

Hablando de estabilidad, otro concepto necesario de mencionar es “Un sistema es estable si toda entrada acotada produce una salida acotada”, a esta definición le corresponden las siglas en inglés de BIBO (Bounded-Input, Bounded-Output).⁵⁸

Un sistema inestable que tenga una respuesta libre crece sin límite puede causar daños al sistema o a las personas que estén cerca de él o que dependan de él.

Si bien se tiene presente, que un sistema lineal e invariante con el tiempo sólo es estable si su respuesta libre tiende a cero, también se debe aclarar que, si la respuesta forzada crece sin límite, pero la respuesta libre tiende a cero, el sistema sigue siendo estable.

Para entender un poco mejor la definición de estabilidad BIBO, habrá que tomar en cuenta los conceptos de *Polos y Ceros*.

Diagrama de Polos y Ceros

Los polos de una función de transferencia son los valores de la variable en la transformada de Laplace, que hacen que la función de transferencia se vuelva infinita. Los ceros de una función de transferencia son los valores de la variable en la transformada de Laplace que hacen que la función se convierta en cero.

Teniendo en cuenta la función de transferencia de la Fig. 3.20, mientras en la Fig. 3.21 se observa el patrón de polos y ceros del sistema dentro del plano.

⁵⁸ Ídem

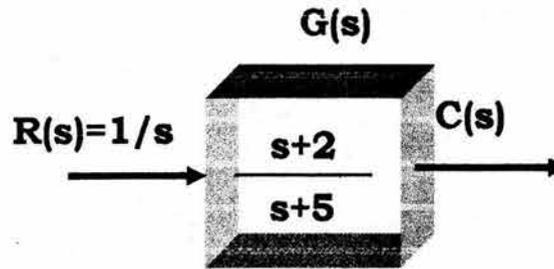


Fig. 3.20 Sistema mostrando la entrada y la salida⁵⁹

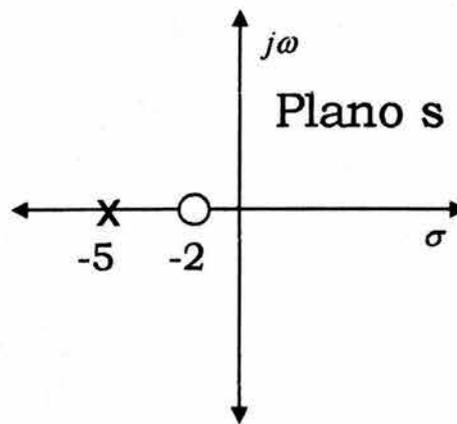


Fig. 3.21 Polos y ceros del sistema⁶⁰

Si multiplicamos la función escalón de la Fig. 3.20 por una función escalón, resulta

$$C(s) = \frac{(s+2)}{s(s+5)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+5} = \frac{2/5}{s} + \frac{3/5}{s+5} \quad (3.12)$$

Donde

$$A = \frac{(s+2)}{(s+5)} \Big|_{s \rightarrow 0} = \frac{2}{5} \quad (3.13)$$

$$B = \frac{(s+2)}{s} \Big|_{s \rightarrow -5} = \frac{3}{5} \quad (3.14)$$

⁵⁹ Véase la cita 34, p.176

⁶⁰ Figura realizada por la autora

Entonces

$$c(t) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5}e^{-5t} \quad (3.15)$$

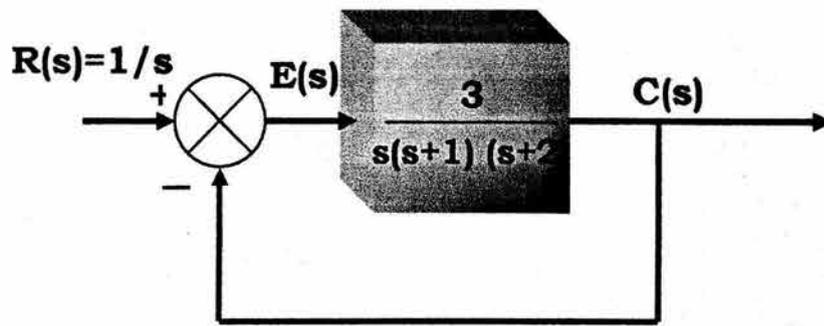
De lo anterior se puede decir que:

1. Un polo de la función de entrada genera la forma de respuesta forzada, es decir el polo produjo una función escalón de salida.
2. Un polo de la función de transferencia genera la forma de la respuesta libre, es decir, el polo en -5 produjo e^{-5t} .
3. Cuanto más alejado a la izquierda esté un polo sobre el eje real negativo, con más rapidez decaerá a cero la respuesta transitoria exponencial.
4. Los polos y ceros generan las amplitudes para las respuestas forzada y libre (esto se ve en el cálculo de A y B de la ecuación 3.12).

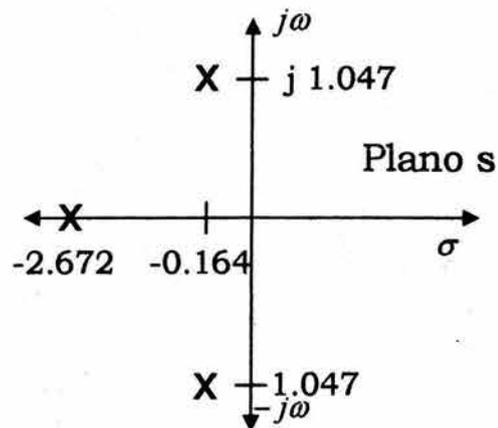
Después de ver los conceptos básicos de polos y ceros, ahora hay que tomar en cuenta los siguientes puntos de los polos para saber si un sistema es estable o inestable.

Los sistemas **estables** tienen funciones de transferencia en lazo cerrado con polos sólo en el semiplano izquierdo, esto significa que los sistemas **inestables** tienen por lo menos un polo en el semiplano derecho y su multiplicidad o amplitud es mayor a uno. Ahora bien los sistemas **marginalmente estables** tienen funciones de transferencia en el semiplano izquierdo y polos sobre el eje imaginario de multiplicidad 1.

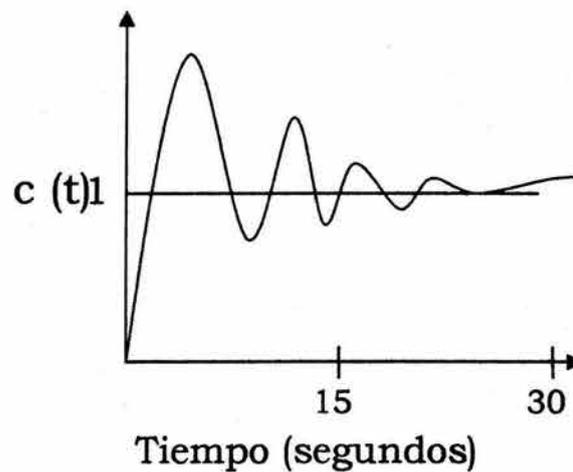
Ahora se observará un ejemplo de un sistema estable (Fig. 3.22) y el de un sistema inestable (Fig. 3.23).



a) Sistema estable

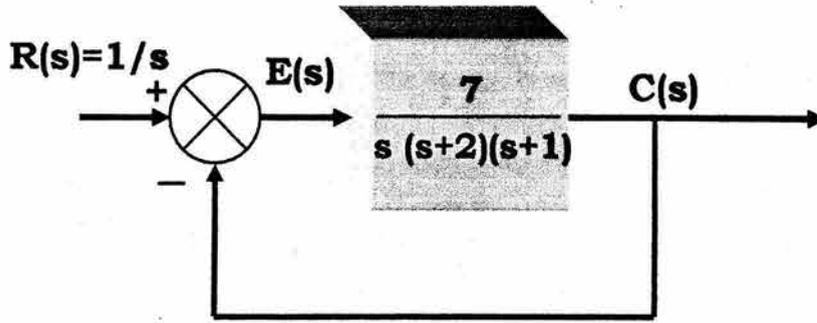


b) Polos del sistema

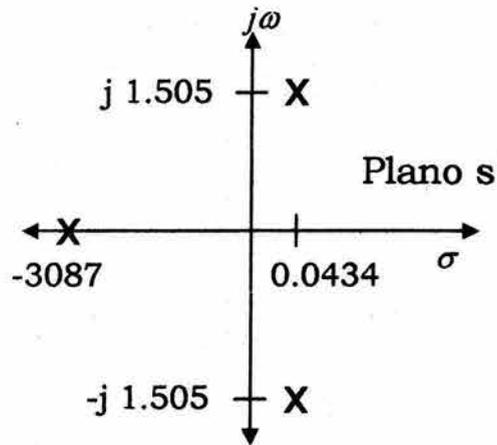


c) Respuesta del sistema

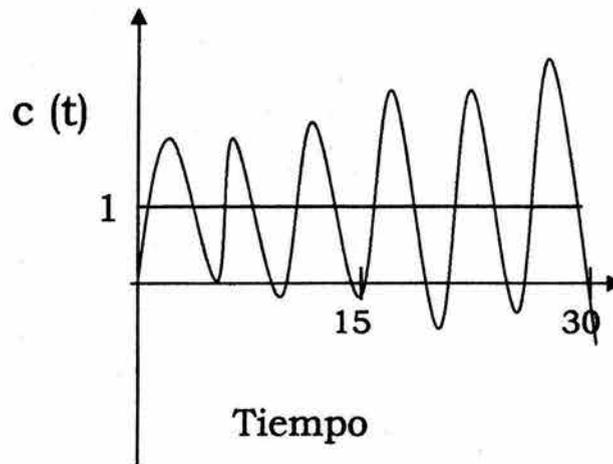
3.22 Polos y Respuesta de un Sistema estable en lazo cerrado⁶¹⁶¹ Cita 34, p.328



a) Sistema inestable



b) Polos del sistema



c) Respuesta del sistema

3.23 Polos y Respuesta de un Sistema inestable en lazo cerrado⁶²⁶² Cita 34, p.328

Esté es un método analítico que la mayoría de las veces no es suficiente para calcular la estabilidad de un sistema, puesto así, en el siguiente capítulo se describirá otro método que conllevará el uso de un programa de computadora (MATLAB) y así se podrá dar una comparación de los métodos utilizados hasta ahora con otro referenciado a la tecnología actual.

3.2.2 CRITERIO DE ROUTH-HURWITZ

Este método también nos da información acerca de la estabilidad de un sistema de lazo cerrado, en este no es necesario el cálculo de los polos del sistema.

Este método consta de dos pasos:

- 1) Generar una tabla de datos llamada arreglo de Routh
- 2) Interpretar el arreglo del Routh para saber cuántos polos del sistema del sistema en lazo cerrado hay en cada semiplano y sobre el eje $j\omega$.

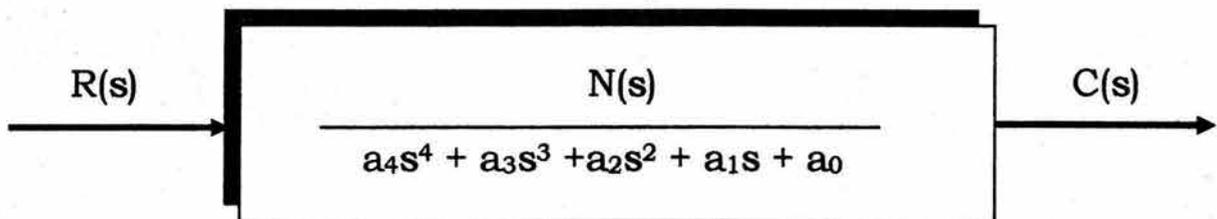
A continuación se dará una breve explicación de los puntos para llevar a cabo el Criterio de Routh-Hurwitz.

Generación de un Arreglo Básico de Routh

Primero se realiza un arreglo de Routh, como se ilustra en la tabla 3.1, tomando en cuenta la ecuación resultante de la Fig. 3.24. Solo se tomará en cuenta el denominador de la función de transferencia de lazo cerrado, puesto que es quien nos proporciona los polos de la función.

Tabla 3.6 Distribución inicial para el arreglo de Routh.

s^4	a_4	a_2	a_0
s^3	a_3	a_1	0
s^2			
s^1			
s^0			



3.24 Función de transferencia equivalente en lazo cerrado

El arreglo de Routh de la tabla 3.6, se empezó con marcas en los renglones con potencias de s desde la potencia de mayor orden hasta de s^0 de la función de transferencia en lazo cerrado.

Después de lo anterior, empezando por la s de orden mayor se hace una lista horizontal comenzando con el coeficiente de mayor potencia de orden más alto de en el denominador, se hace una lista horizontal en el primer renglón, de un coeficiente sí y otro no. En el siguiente renglón se hace una lista horizontal comenzando con la siguiente potencia de s de orden más alto, de todo coeficiente que se haya saltado en el primer renglón.

Los términos restantes se llenan como sigue: Cada término es un determinante negativo de términos, de los dos renglones previos, dividido entre el término de la primera columna directamente arriba del renglón calculado. La columna de la izquierda del determinante es siempre la primera columna de los dos renglones previos, y la columna de la derecha es de los términos de la columna arriba y a la derecha.

El arreglo esta terminado hasta que se hayan completado todos los renglones hasta s^0 . La tabla 3.7 es un arreglo de Routh completado.

Tabla 3.7 Arreglo de Routh completado⁶³

s^4	a_4	a_2	a_0
s^3	a_3	a_1	0
s^2	$-\frac{\begin{vmatrix} a_4 & a_2 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix}}{a_3} = b_1$	$-\frac{\begin{vmatrix} a_4 & a_0 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix}}{a_3} = b_2$	$-\frac{\begin{vmatrix} a_4 & 0 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix}}{a_3} = 0$
s^1	$-\frac{\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1} = c_1$	$-\frac{\begin{vmatrix} a_3 & 0 \\ b_1 & 0 \end{vmatrix}}{b_1} = 0$	$-\frac{\begin{vmatrix} a_3 & 0 \\ b_1 & 0 \end{vmatrix}}{b_1} = 0$
s^0	$-\frac{\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = d_1$	$-\frac{\begin{vmatrix} b_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = 0$	$-\frac{\begin{vmatrix} b_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = 0$

Como ya se observo el método de Routh, ahora se dará la interpretación al criterio de **Routh-Hurwitz**, "Expresa que el número de raíces del polinomio que están en el semiplano derecho es igual al número de cambios de signo de la primera columna"⁶⁴

Esto quiere decir que por si solo el arreglo básico de Routh es a los sistemas con polos en los semiplanos izquierdo y derecho, y con el criterio de Routh-Hurwitz sólo obtenemos el número de raíces del polinomio.

El criterio de Routh-Hurwitz es más aplicable en casos especiales tales como:

⁶³ Véase cita 27, p.330

⁶⁴ Véase cita 27, p.332

1. El arreglo de Routh tendrá a veces un cero sólo en la primer columna de un renglón.
2. El arreglo de Routh tendrá a veces todo un renglón formado por ceros.

Como ya se menciona, el criterio de Routh-Hurwitz será utilizado en casos especiales en que el arreglo de Routh no es suficiente para determinar el número de raíces de un polinomio.

3.2.3 LUGAR GEOMÉTRICO DE LAS RAÍCES

El lugar geométrico de las raíces es “una representación gráfica de los polos en lazo cerrado cuando varía un parámetro de un sistema, es un método de análisis y diseño para estabilidad y respuesta transitoria de un sistema en lazo cerrado”.⁶⁵

Como ya se ha mencionado en otras ocasiones los sistemas de control realimentados no son muy fáciles de comprender desde el punto de vista cualitativo, por lo tanto las matemáticas son un auxiliar confiable para su mejor comprensión.

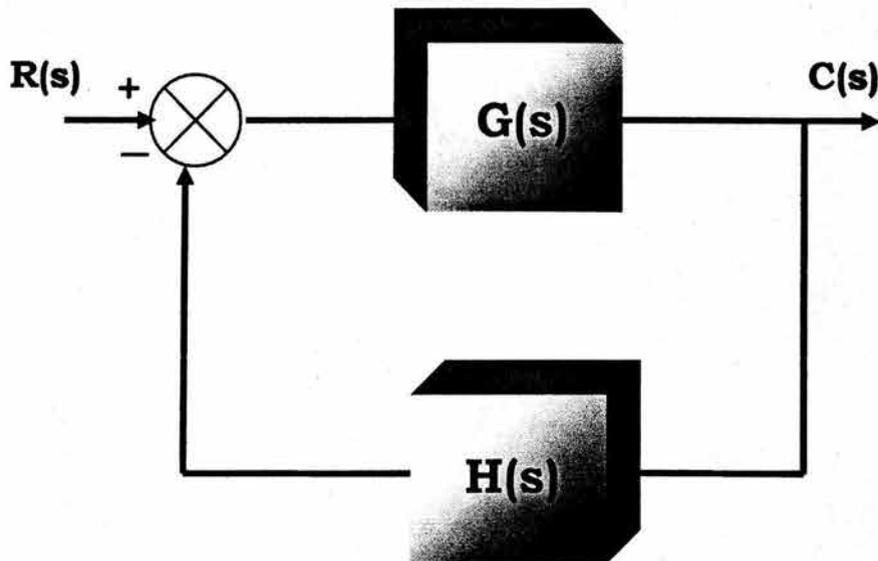
Con este método se puede observar con claridad la estabilidad del sistema. Otras de las cosas observables son los márgenes de estabilidad, márgenes de inestabilidad y las condiciones que ocasionan que un sistema se descomponga en oscilaciones.

Utilizando el lugar de la raíz se encuentra gráficamente las soluciones de la ecuación característica $1 + G(s)H(s) = 0$.

Considerándose el sistema de control a lazo cerrado de la Fig. 3.25, la función de transferencia a lazo cerrado es:

⁶⁵ Véase cita 27, p.423

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (3.16)$$

3.25 Sistema de Control⁶⁶

La ecuación característica para este sistema en lazo cerrado se obtiene haciendo que el denominador del segundo miembro sea igual a cero, como es:

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

ó bien

$$G(s)H(s) = -1 \quad (3.17)$$

Teniendo en cuenta que $G(s)H(s)$ es una cantidad compleja, la ecuación 3.17 se divide en dos ecuaciones igualando los ángulos y las magnitudes de ambos miembros, para obtener lo siguiente:

Condición de ángulo:

$$\angle G(s)H(s) = \pm 180^\circ(2k + 1) \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.18)$$

⁶⁶ Figura realizada por la autora

Condición de magnitud:

$$|G(s)H(s)|=1 \quad (3.19)$$

Tomando en cuenta las condiciones anteriores, los valores de s que cumplen tanto las condiciones de ángulo como las de magnitud son las **raíces de la ecuación característica**, o los polos en lazo cerrado.

Entonces el “**lugar geométrico de las raíces** es una gráfica de los puntos del plano complejo que sólo satisfacen las condiciones de ángulo”.⁶⁷

Tomando en cuenta la ecuación 3.17, en muchas ocasiones viene acompañada de un parámetro de ganancia K , y la ecuación quedaría de la siguiente forma:

$$G(s)H(s) = 1 + \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\dots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_n)} = 0 \quad (3.20)$$

Luego entonces, los lugares geométricos de las raíces para el sistema son los lugares geométricos de polos en lazo cerrado conforme la ganancia K varía a cero infinito.

A continuación se verá un ejemplo para localizar el lugar geométrico de la raíz del sistema de la Fig. 3.26.⁶⁸

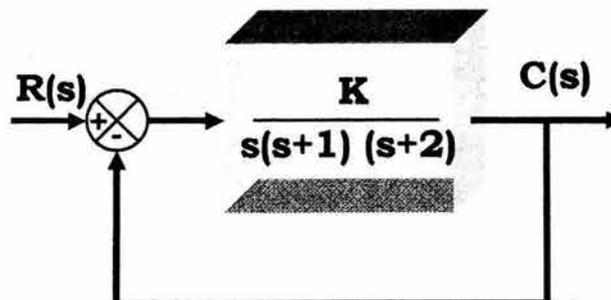


Fig. 3.26 Sistema de control⁶⁹

⁶⁷ Véase cita 34, p.319

⁶⁸ Ejemplo tomado del libro de la cita 34, p. 321

⁶⁹ Véase cita 34, p. 321

Suponiendo que el valor de la ganancia K no es negativo, la ecuación sería:

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}, \quad H(s)=1 \quad (3.21)$$

Se trazará la gráfica del lugar geométrico de las raíces y después se determinará el valor de K , con un factor de amortiguamiento relativo ζ de los polos en lazo abierto sea de 0.5.

La condición de ángulo se convierte en:

$$\begin{aligned} \angle G(s) &= \angle \frac{K}{s(s+1)(s+2)} \\ &= -\angle s - \angle(s+1) - \angle(s+2) \\ &= \pm 180^\circ(2k+1) \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (3.22)$$

La condición de magnitud es:

$$|G(s)| = \left| \frac{K}{s(s+1)(s+2)} \right| = 1 \quad (3.23)$$

El procedimiento común para trazar la gráfica del lugar geométrico de las raíces es el siguiente:

1. **Determine los lugares geométricos de las raíces sobre el eje real.** El primer paso es ubicar los polos en lazo abierto, $s = 0$, $s = -1$ y $s = -2$, en el plano complejo. En este sistema no hay ceros en lazo abierto, puesto que en el numerador no se encuentra ningún elemento (s) que así lo indique.

Los lugares geométricos de raíces individuales para este sistema son tres, lo cual que es igual al número de polos en lazo abierto.

Para determinar los lugares geométricos de las raíces sobre el eje real, se seleccionará un punto de prueba s . Si el punto está en el eje positivo, entonces:

$$\angle s = \angle(s+1) = \angle(s+2) = 0^\circ \quad (3.24)$$

Esto demuestra que no es posible satisfacer la condición de ángulo. Por tanto, no hay un lugar geométrico de las raíces sobre el eje real positivo. Ahora se seleccionará un punto de prueba sobre el eje real negativo entre 0 y -1:

$$\angle s = 180^\circ, \angle(s+1) = \angle(s+2) = 0^\circ \quad (3.25)$$

Por tanto:

$$-\angle s - \angle(s+1) - \angle(s+2) = -180^\circ \quad (3.26)$$

Y se satisface la condición de ángulo. Así, la parte del eje real negativo entre 0 y -1 forma parte del lugar geométrico de las raíces.

Si se selecciona un punto de prueba entre -1 y -2, entonces:

$$\angle s = \angle(s+1) = 180^\circ, \angle(s+2) = 0^\circ \quad (3.27)$$

y

$$-\angle s - \angle(s+1) - \angle(s+2) = 360^\circ \quad (3.28)$$

Se observa que no satisface la condición de ángulo. Por tanto, el eje real negativo de -1 a -2 no es parte del lugar geométrico de las raíces.

2. **Determinar las asíntotas de los lugares geométricos de las raíces.** Las asíntotas de los lugares geométricos de las raíces, conforme s tiende a infinito, se determinan del modo siguiente: si se selecciona un punto de prueba muy lejano al origen se tiene:

$$\lim_{s \rightarrow \alpha} G(s) = \lim_{s \rightarrow \alpha} \frac{K}{s(s+1)(s+2)} = \lim_{s \rightarrow \alpha} \frac{K}{s^3} \quad (3.29)$$

Y la condición del ángulo se convierte en

$$-3\angle s = \pm 180^\circ(2k+1) \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.30)$$

o bien

$$\text{Ángulos de asintotas} = \frac{\pm 180^\circ(2k+1)}{3} \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.31)$$

Dado que el ángulo se repite a sí mismo conforme K varía, los ángulos distintos para las asintotas se determinan como 60° , -60° y 180° . Por tanto, hay tres asintotas, la única que tiene el ángulo de 180° es el eje real negativo.

Antes de dibujar estas asintotas en el plano complejo, debemos encontrar el punto en el cual intercede el eje real, dado que:

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)} \quad (3.32)$$

si un punto de prueba se ubica muy lejos del origen, $G(s)$ se escribe como:

$$G(s) = \frac{K}{s^3 + 3s^2 + \dots} \quad (3.33)$$

dado que la ecuación característica:

$$G(s) = -1 \quad (3.34)$$

Regresándose a la ecuación 3.33, la ecuación característica puede escribirse:

$$s^3 + 3s^2 + \dots - -K \quad (3.35)$$

Para un valor grande de s , esta última ecuación se aproxima mediante:

$$(s+1)^3 = 0 \quad (3.36)$$

Si la abscisa de la intersección de las asíntotas y el eje real se representa mediante $s = -\sigma_a$, entonces:

$$\sigma_a = -1 \quad (3.37)$$

Y el punto de origen de las asíntotas es $(-1, 0)$. Las asíntotas son casi parte de los lugares geométricos de las raíces en regiones muy lejanas al origen.

3. **Determinar el punto de ruptura o desprendimiento.** Para trazar con precisión los lugares geométricos de las raíces, se debe encontrar el punto de desprendimiento, a partir del cual las ramificaciones del lugar geométrico que se originan en los polos en 0 y 1 (conforme K aumenta) se alejan del eje real y se mueven sobre el plano complejo. El punto de desprendimiento corresponde a un punto en el plano s en el cual ocurren raíces múltiples de la ecuación característica.

Para encontrar el punto de desprendimiento, primeramente se escribe la ecuación característica como sigue:

$$f(s) = B(s) + KA(s) = 0 \quad (3.38)$$

en donde $A(s)$ y $B(s)$ no contienen K . Observe que $f(s) = 0$ tiene raíces múltiples en los punto donde:

$$\frac{df(s)}{ds} = 0 \quad (3.39)$$

Esto se observa del modo siguiente: suponga que $f(s)$ tiene raíces múltiples de un orden r . En este caso, $f(s)$ se escribe como:

$$f(s) = (s - s_1)^r (s - s_2) \dots (s - s_n) \quad (3.40)$$

Si se diferencia esta ecuación con respecto a s y establecemos $s = s_1$, se obtiene:

$$\left. \frac{df(s)}{ds} \right|_{s=s_1} = 0 \quad (3.41)$$

Esto significa que múltiples raíces de $f(s)$ van a satisfacer la ecuación 3.38, y se tiene:

$$\frac{df(s)}{ds} = B'(s) + KA'(s) = 0 \quad (3.42)$$

en donde,

$$A'(s) = \frac{dA(s)}{ds}, \quad B'(s) = \frac{dB(s)}{ds} \quad (3.43)$$

El valor específico de K que produciría raíces múltiples características se obtiene la ecuación 3.42 como:

$$K = -\frac{B'(s)}{A'(s)} \quad (3.44)$$

Sustituyendo el valor de K (3.44) en la ecuación 3.40, se obtiene:

$$f(s) = B(s) - \frac{B'(s)}{A'(s)} A(s) = 0 \quad (3.45)$$

o bien

$$B(s)A'(s) - B'(s)A(s) = 0 \quad (3.46)$$

Si se despeja la ecuación anterior (3.46) para s , se tienen los puntos en los que ocurren raíces múltiples. De la ecuación 3.38 se obtiene:

$$K = -\frac{B(s)}{A(s)} \quad \text{y} \quad \frac{dK}{ds} = \frac{B'(s)A(s) - B(s)A'(s)}{A^2(s)} \quad (3.47)$$

Los puntos de desprendimiento se determinan a partir de las raíces de:

$$\frac{dK}{ds} = 0 \quad (3.48)$$

Debe tomarse en cuenta que los puntos de desprendimiento no siempre son las soluciones de las ecuaciones 3.46 y 3.48. Si un punto en el cual $df(s) / ds = 0$, el valor de K adquiere un valor positivo real, entonces es un punto de desprendimiento o punto de ingreso real.

La ecuación característica de $G(s) + 1 = 0$ se obtiene mediante:

$$\frac{K}{s(s+1)(s+2)} + 1 = 0$$

o bien

$$K = -(s^3 + 3s^2 + 2s)$$

Haciendo $dK / ds = 0$ se tiene:

$$\frac{dK}{ds} = -(3s^2 + 6s + 2) = 0$$

o bien

$$s = -0.4226, s = -1.5774$$

Como ya se ha mencionado el punto de desprendimiento se debe encontrar en el lugar geométrico de las raíces entre 0 y -1, es muy claro que el valor de $s = -0.4226$ corresponde al punto de desprendimiento real; mientras que el valor de $s = -1.5774$ no está sobre el lugar geométrico de las raíces.

Entonces los valores de K que corresponden a:

$$K = 0.3849, \text{ para } s = -0.4226$$

$$K = -0.3849, \text{ para } s = -1.5774$$

4. **Determinar los puntos en donde los lugares geométricos de las raíces cruzan el eje imaginario.** Estos puntos se encuentran mediante el criterio de estabilidad de Routh, del modo siguiente:

Dada la ecuación característica para el sistema actual que es:

$$s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$$

El arreglo de Routh es:

s^3	1	2
s^2	3	K
s^1	$\frac{6-K}{3}$	
s^0	K	

Tabla 3.8 Arreglo de Routh

Si se observa el arreglo de Routh, el valor de K que iguala con cero el término s^1 de la primera columna es $K = 6$. Los puntos de cruce con el eje imaginario se encuentran después despejando la ecuación auxiliar obtenida del renglón s^2 , es decir:

$$3s^2 + K = 3s^2 + 6 = 0$$

Lo cual produce:

$$s = \pm j\sqrt{2}$$

Las frecuencias en los puntos de cruce con el eje imaginario son, por tanto, $\omega = \pm\sqrt{2}$. El valor de ganancia que corresponde a los puntos de cruce es $K = 6$.

5. **Seleccione un punto de prueba en una vecindad amplia del eje $j\omega$ y el origen.** El punto de prueba es como el mostrado en la Fig. 3.27, es ahí donde se aplicará la condición de ángulo. Si el punto de

prueba se encuentra sobre los lugares geométricos de las raíces, la suma de los tres ángulos $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 180^\circ$.

Si el punto de prueba no satisface la condición de ángulo, seleccione otro hasta que satisfaga la condición.

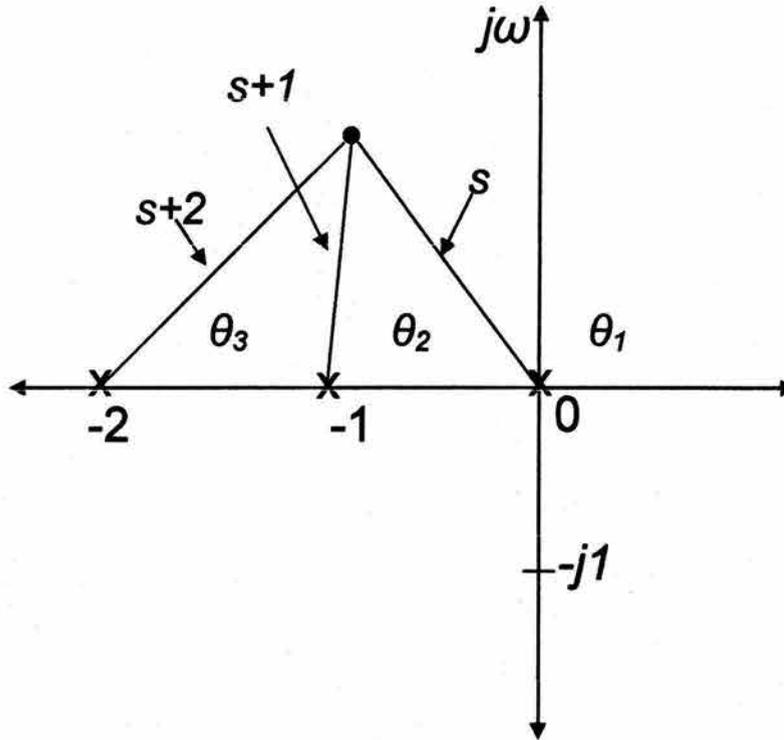


Fig. 3.27 Construcción del lugar geométrico de las raíces

6. **Dibujar los lugares geométricos de las raíces.** Ahora con la información sacada en los pasos anteriores se procederá a dibujar los lugares geométricos de las raíces como se muestra en la Fig. 3.28.
7. **Determinar un par de polos dominantes complejos conjugados en lazo cerrado tales que su factor de amortiguamiento relativo ζ sea 0.5.** Los polos en lazo cerrado con $\zeta = 0.5$ se encuentran sobre las líneas que pasan por el origen y forman los ángulos $\pm \cos^{-1}\zeta = \pm \cos^{-1}0.5 = \pm 60^\circ$ con el eje real negativo.

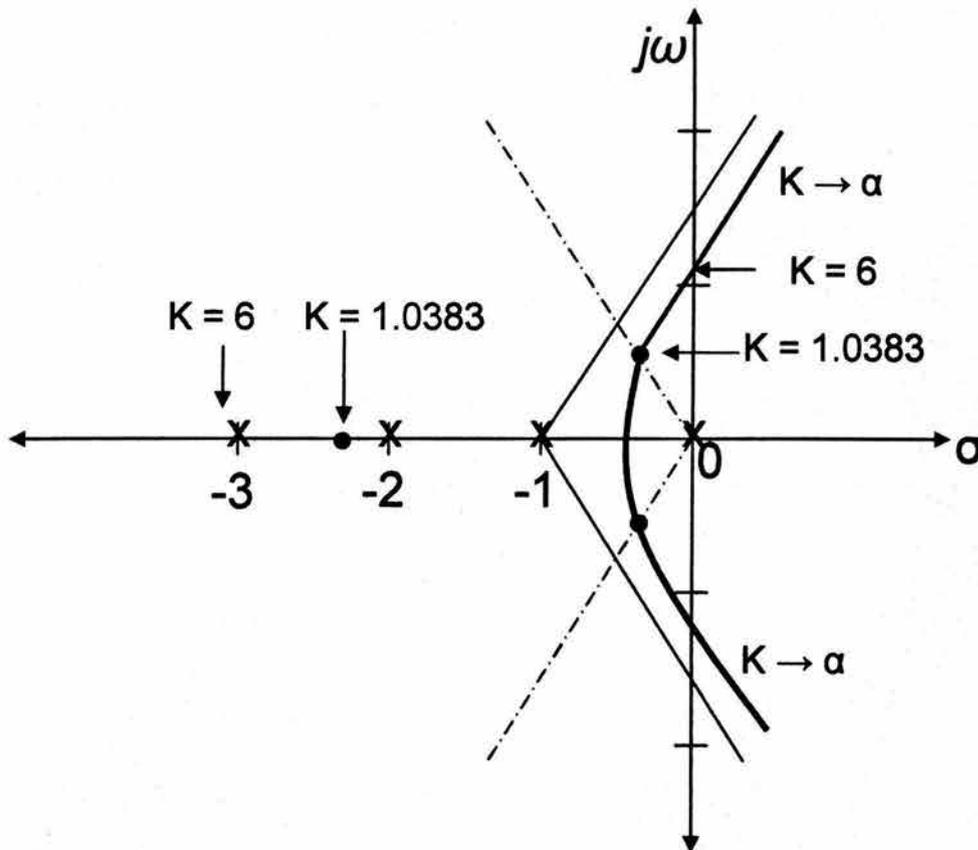


Fig. 3.28 Gráfica del lugar geométrico de las raíces⁷⁰

A partir de la Fig. 3.28, tales polos en lazo cerrado con $\zeta = 0.5$ se obtiene del modo siguiente:

$$s_1 = -0.3337 + j0.5780, \quad s_2 = -0.3337 - j0.5780$$

El valor de K que producen tales polos se encuentran a partir de la condición de magnitud, del modo siguiente:

$$K = \left| s(s+1)(s+2) \right|_{s=-0.3337+j0.5780} = 1.0383$$

Usando este valor de K, el tercer polo se encuentra en $s = -2.3326$.

⁷⁰ Figura realizada por la autora

Como se puede observar estos pasos son metódicos, y conllevan una gran cantidad de cálculos matemáticos, puesto que así es necesario ver la gran cantidad de tiempo invertido en ello, puesto que tan solo el hecho de comprender el tema es necesario pero al dominarlo es tedioso y llega a incurrir en errores de calculo o comúnmente llamados "errores de dedo".

3.2.4 CRITERIO DE ESTABILIDAD DE NYQUIST

Un diseñador de sistemas debe asegurarse que el sistema que ha diseñado es estable. Cuando se conoce la planta y se utiliza, por ejemplo, lugar de la raíz, es relativamente fácil determinar la estabilidad del sistema verificando que no existan polos de lazo cerrado en el semiplano derecho. Sin embargo, cuando se conocen solo las curvas de respuesta de frecuencia de la función de lazo abierto $G(s)H(s)$ no se puede visualizar fácilmente la posición de los polos de lazo cerrado. En este caso se acostumbra a utilizar el criterio de estabilidad de Nyquist. Para un sistema estable, las raíces de la ecuación característica:

$$B(s) = 1 + G(s)H(s) = 0 \quad (3.49)$$

No pueden estar en el semiplano derecho o en el eje $j\omega$. Si se utiliza $G(s) = N_1(s)/D_1(s)$ y $H(s) = N_2(s)/D_2(s)$, entonces la ecuación (3.49) se puede escribir:

$$B(s) = 1 + \frac{N_1(s)N_2(s)}{D_1(s)D_2(s)} = \frac{D_1(s)D_2(s) + N_1(s)N_2(s)}{D_1(s)D_2(s)} \quad (3.50)$$

Nótese que el numerador y el denominador de $B(s)$ tienen el mismo grado. Además, los polos de la función de transferencia $G(s)H(s)$ son los polos de $B(s)$. La función de transferencia a lazo cerrado puede escribirse como:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{N_1(s)D_2(s)}{D_1(s)D_2(s) + N_1(s)N_2(s)} \quad (3.51)$$

El denominador de (3.51) es idéntico al numerador de $B(s)$ (en 3.50). La condición de estabilidad puede ser cambiada a: "Para un sistema estable ninguno de los ceros de $B(s)$ puede encontrarse en el semiplano derecho o en el eje imaginario $j\omega$ ". El criterio de estabilidad de Nyquist relaciona el número de polos y ceros de $B(s)$ en el semiplano derecho, con el gráfico polar de $G(s)H(s)$.

Bases matemáticas para el criterio de estabilidad de Nyquist

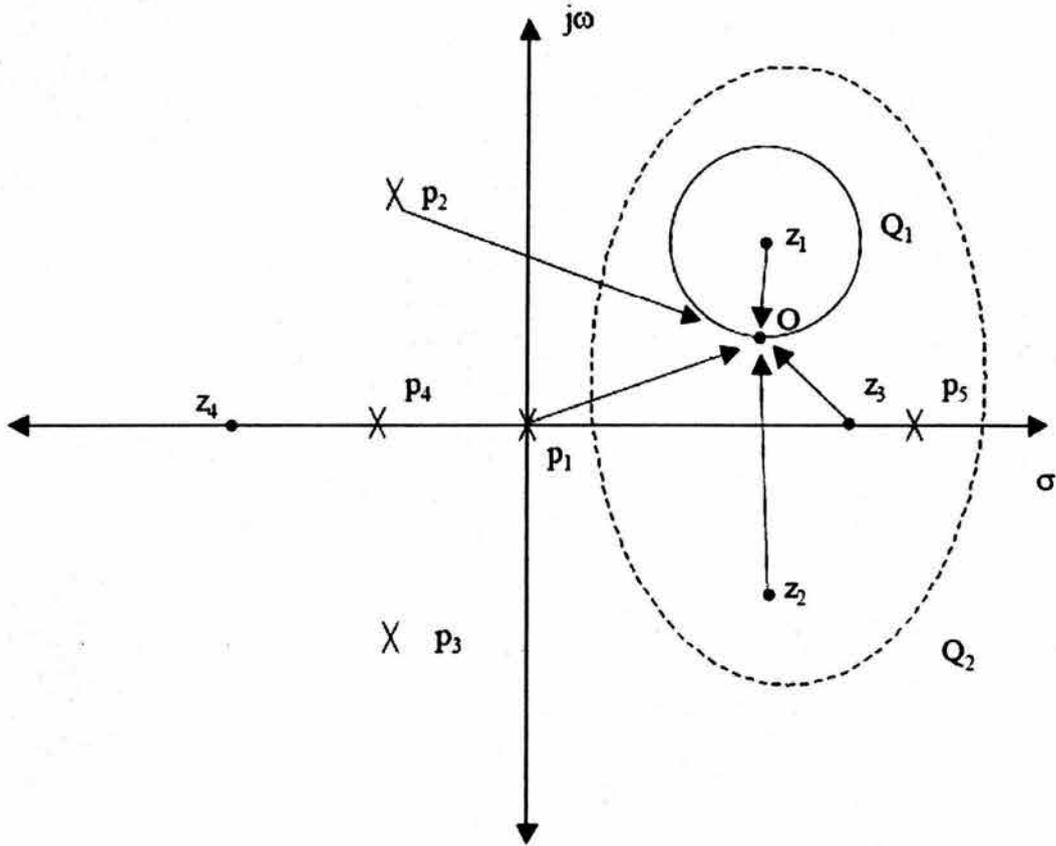
En este análisis se asume que el sistema de control es lineal. Además se asume que la función de transferencia es propia, es decir que el orden del denominador de $G(s)H(s)$ es mayor o igual que el orden del numerador. Un análisis "riguroso" del criterio de estabilidad de Nyquist utiliza matemáticas complejas.

La función característica $B(s)$ puede ser racionalizada y factorizada para llevarla a la forma:

$$B(s) = \frac{(s - Z_1)(s - Z_2)(s - Z_3) \dots (s - Z_n)}{(s - P_1)(s - P_2)(s - P_3) \dots (s - P_n)} \quad (3.52)$$

Donde $Z_1 \dots Z_n$ son los ceros y $p_1 \dots p_n$ son los polos. Nótese que los ceros de $B(s)$ no son idénticos a los ceros de la función de transferencia de lazo abierto $G(s)H(s)$. En cambio los polos de $G(s)H(s)$ son idénticos a los polos de $B(s)$. Fig. 3.16, muestra los polos y ceros de la función de transferencia $B(s)$ que son ubicados arbitrariamente en el plano s . Un contorno, también arbitrario, Q_1 es utilizado. Nótese que este contorno encierra el cero Z_1 . Ahora que el ángulo total de la función $B(s)$ es calculado a lo largo del contorno Q_1 en el sentido de los punteros del reloj. Esto significa que para todos los valores $s = \sigma + j\omega$ en el contorno Q_1 el, valor de la función $B(s)$ es calculada y el ángulo obtenido. Para realizar esto se debe recordar dos cosas. Primero que el ángulo puede ser calculado gráficamente, sumando y

restando los ángulos que tienen cada uno de los polos y ceros en la Fig. 3.29.



ESTA TESIS NO SALE
DE LA BIBLIOTECA

Fig.3.29 Polos y ceros de una función generalizada $B(s)$.⁷¹

Lo segundo que se debe tomar en consideración, son las nociones básicas de variable compleja. **“Una función compleja tiene dos variables en el dominio y dos variables en la imagen”**⁷². Por este motivo una función compleja debe ser representada por dos gráficos (σ , $j\omega$). El primero, el de la Fig. 3.29, muestra solo el dominio $\sigma + j\omega$ de la función. Para la imagen $\sigma' + j\omega'$ se debe utilizar otro gráfico. A medida que el punto O en la Fig. 3.29 se rota en el sentido de los punteros del reloj, solamente el vector correspondiente a Z_1 realiza una rotación de 360 grados. Todos los otros vectores correspondientes a los otros polos y ceros realizan una rotación

⁷¹ Véase <http://ona.fi.umag.cl/~rcd/ramo2.html>

⁷² Ídem

neta de 0 grados. Si el vector debido a Z_1 realiza una rotación de 360 grados cuando se sigue la trayectoria Q_1 , significa que el ángulo de la imagen de $B(s)$ realiza una rotación de 360 grados cuando se sigue la trayectoria Q_1 . En otras palabras, **la imagen de $B(s)$ rota alrededor del origen del plano $\sigma' + j\omega'$ cuando el dominio de $B(s)$ se mueve en los sentidos del puntero del reloj en la trayectoria Q_1 .**

Se considerará ahora una trayectoria mas grande, la que incluye los ceros Z_1, Z_2, Z_3 y el polo p_5 . A medida que un punto en la trayectoria Q_2 se mueve en el sentido de los punteros del reloj, cada uno de los vectores, de los polos y ceros encerrados por la trayectoria, rota un ángulo neto de 360 grados.

Como se encuentran varios ceros y un polo encerrados en la trayectoria, el ángulo neto de rotación, para la imagen de $B(s)$ es igual a la rotación del ángulo debido al polo p_5 menos la rotación angular neta producida por los ceros Z_1, Z_2 y Z_3 .

En otras palabras la rotación neta experimentada por la imagen de $B(s) = 1 + G(s)H(s)$ es igual a $360 - (3) \times 360 = 720$ grados. Por lo tanto el número de rotaciones alrededor del origen experimentado por $B(s)$ es igual a -2 . Por convención se utiliza el signo “-“, para indicar rotaciones en sentido de las manecillas del reloj. Se observa que si el contorno Q_2 incluyera solo el polo p_5 , la imagen de $B(s)$ tendría solo una rotación en sentido contrario de las manecillas del reloj.

“Para cualquier trayectoria, todos los polos y ceros que están ubicados fuera de la trayectoria (no envueltos por está) contribuyen con un ángulo neto de 0 grados a la imagen de $B(s)$ cuando se mueve un punto alrededor del contorno”.⁷³

⁷³ Ídem

3.2.5 CARTA DE NICHOLS

La Carta de Nichols, Fig. 3.31, “está formada por una serie de gráficas de magnitud M en decibelios y ángulo de fase N en grados para un sistema en lazo cerrado con retroalimentación unitaria”.⁷⁴

Los datos de entrada a la Carta de Nichols están en función de la frecuencia y son: para la ordenada la magnitud de lazo abierto expresada en decibelios y en la abscisa el ángulo de fase de lazo abierto en grados.

Como salida se tiene para cada frecuencia con diferentes pares de coordenadas, los valores correspondientes de M y N con el cruce de la coordenadas de entrada y consultando los valores correspondientes en cada curva.

Los valores de M y N obtenidos de esta manera, junto con la frecuencia, forman una tabla que sirve para construir los diagramas de Bode de lazo cerrado.

Estos diagramas, en coordenadas semi-logarítmicas, constan de gráficas de magnitud de lazo cerrado M en db y de ángulo de fase de lazo cerrado N en grados.

Para obtener las fórmulas con las que se construye la Carta de Nichols se parte de un sistema de control con retroalimentación unitaria, representado en forma canónica, Fig.3.30de la cual se obtiene la función de transferencia de lazo cerrado (Ec. 3.53):

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)} \quad (3.53)$$

⁷⁴ Ver <http://lorca.umh.es/isa/es/assignaturas/asc/>

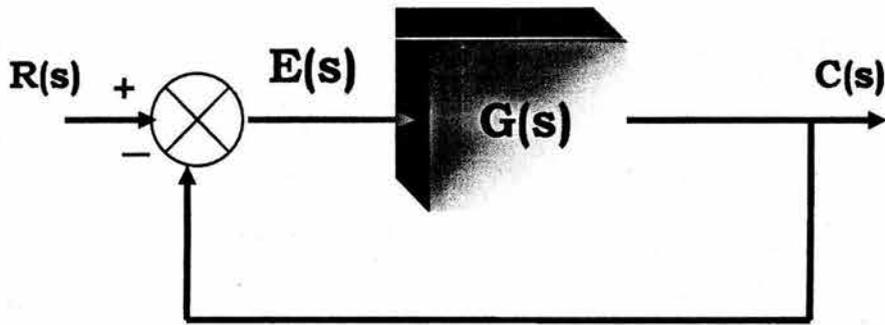


Fig.3.30 Forma canónica de un sistema de control con retroalimentación unitaria⁷⁵

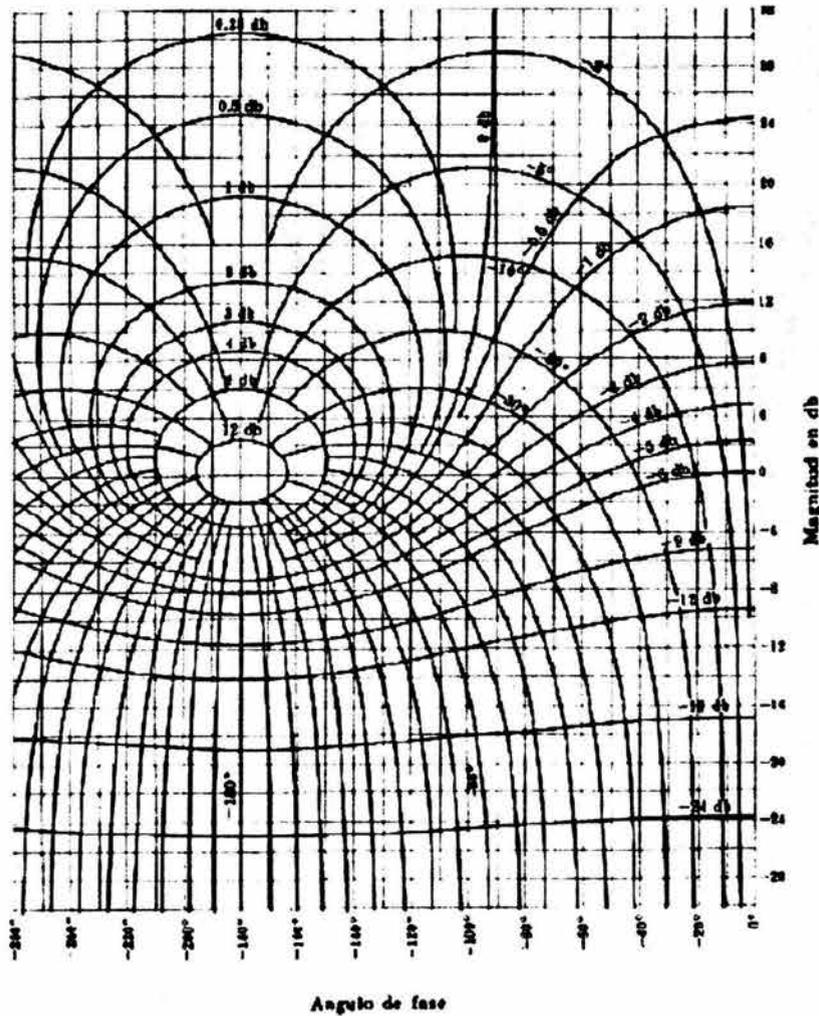


Fig.3.31 Carta de Nichols⁷⁶

De las ecuaciones 3.54, 3.55 y 3.56 se obtiene la magnitud y el ángulo de lazo cerrado normalizado para $s = j\omega$.

⁷⁵ Ver <http://lorca.umh.es/isa/es/asignaturas/asc/>

⁷⁶ Ídem

$$\frac{C}{R}(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)} \quad (3.54)$$

$$M(j\omega) = \left| \frac{C}{R}(j\omega) \right| = \left| \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)} \right| \quad (3.55)$$

$$N(j\omega) = \left\langle \frac{C}{R}(j\omega) \right\rangle = \left\langle \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)} \right\rangle \quad (3.56)$$

Tomando en cuenta las ecuaciones anteriores se puede llegar a la carta de Nichols, es decir, dando valores reales a las ecuaciones sólo basta graficar los datos obtenidos de los cálculos, y la carta quedará dibujada de manera similar a la de la Fig. 3.31.

En general los diferentes métodos para encontrar la estabilidad dentro de un sistema de control a lazo cerrado, conllevan un minucioso cálculo, es decir se tiene que tomar enguanta muchos factores para poder llegar a tener un sistema estable, y sólo es necesario llevar a cabo los cuantiosos pasos de cada método.

**MATLAB PARA EL
DISEÑO DE SISTEMAS
DE CONTROL**

4.1 ANÁLISIS DE RESPUESTA TRANSITORIA CON MATLAB

Primeramente se debe tomar en cuenta lo básico de los sistemas de control en lazo cerrado, y eso es la función de transferencia, para ello se verá la representación de sistemas lineales en MATLAB.⁷⁷

La función de transferencia de un sistema se representa mediante dos arreglos de números, considerándose este sistema:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{25}{s^2 + 4s + 25} \quad (4.1)$$

Este sistema se representa como dos arreglos, cada uno de los cuales contiene los coeficientes de los polinomios en potencias de s del modo siguiente:

$$\text{num} = [0 \ 0 \ 25]$$

$$\text{den} = [1 \ 4 \ 25]$$

Debe considerarse que donde es necesario se rellenan con ceros, es decir cuando no se tenga completo el número de coeficientes.

Ya teniendo el numerador y el denominador de la función de transferencia (num, den) los comandos:

$$\text{step}(\text{num}, \text{den})$$

$$\text{step}(\text{num}, \text{den}, t)$$

Estos permiten la generación de gráficas de respuesta escalón unitario, en el segundo comando t es el tiempo especificado por el usuario.

Ahora se puede observar en la Fig. 4.1 como se ve el código ingresado en MATLAB.

⁷⁷ Véase NAKAMURA, Shoichiro, *Análisis numérico y visualización con MATLAB*, Editorial Prentice Hall Hispanoamericana, S.A., México, 1999, p.125.

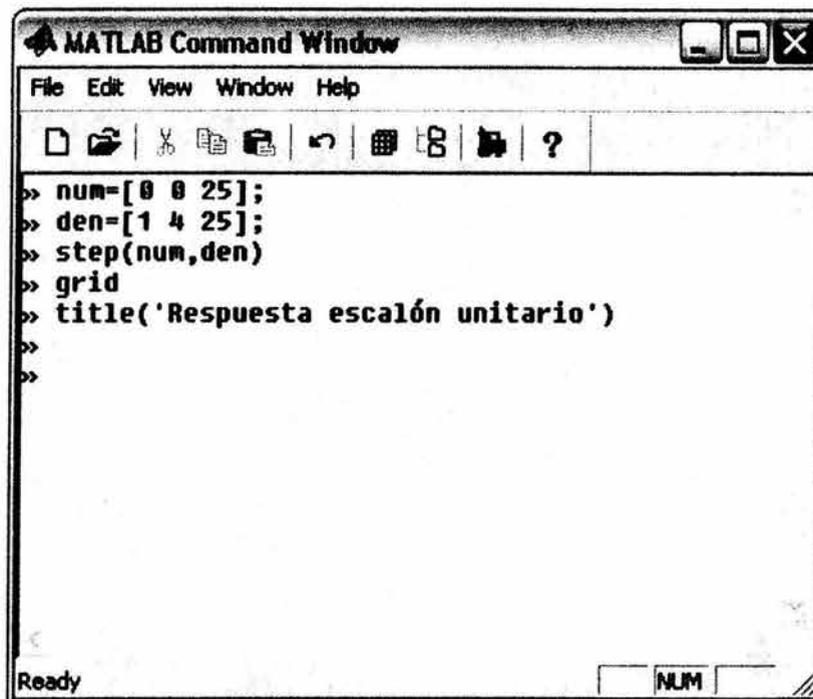


Fig.4.1 Cálculo de la respuesta escalón unitario⁷⁸

También se puede observar en la Fig. 4.2 la gráfica que realiza MATLAB con las instrucciones anteriores (Fig. 4.1).

Se puede ver que con las instrucciones que MATLAB tiene prediseñadas se pueden realizar estas tareas, sólo con el hecho de conocer estas instrucciones.

Ahora se debe obtener la respuesta impulso unitario del sistema siguiente:⁷⁹

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (4.2)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u \quad (4.3)$$

⁷⁸ Ejercicio realizado en MATLAB por la autora

⁷⁹ Ejemplo tomado del libro de la cita 27 p.166, realizado en MATLAB por la autora

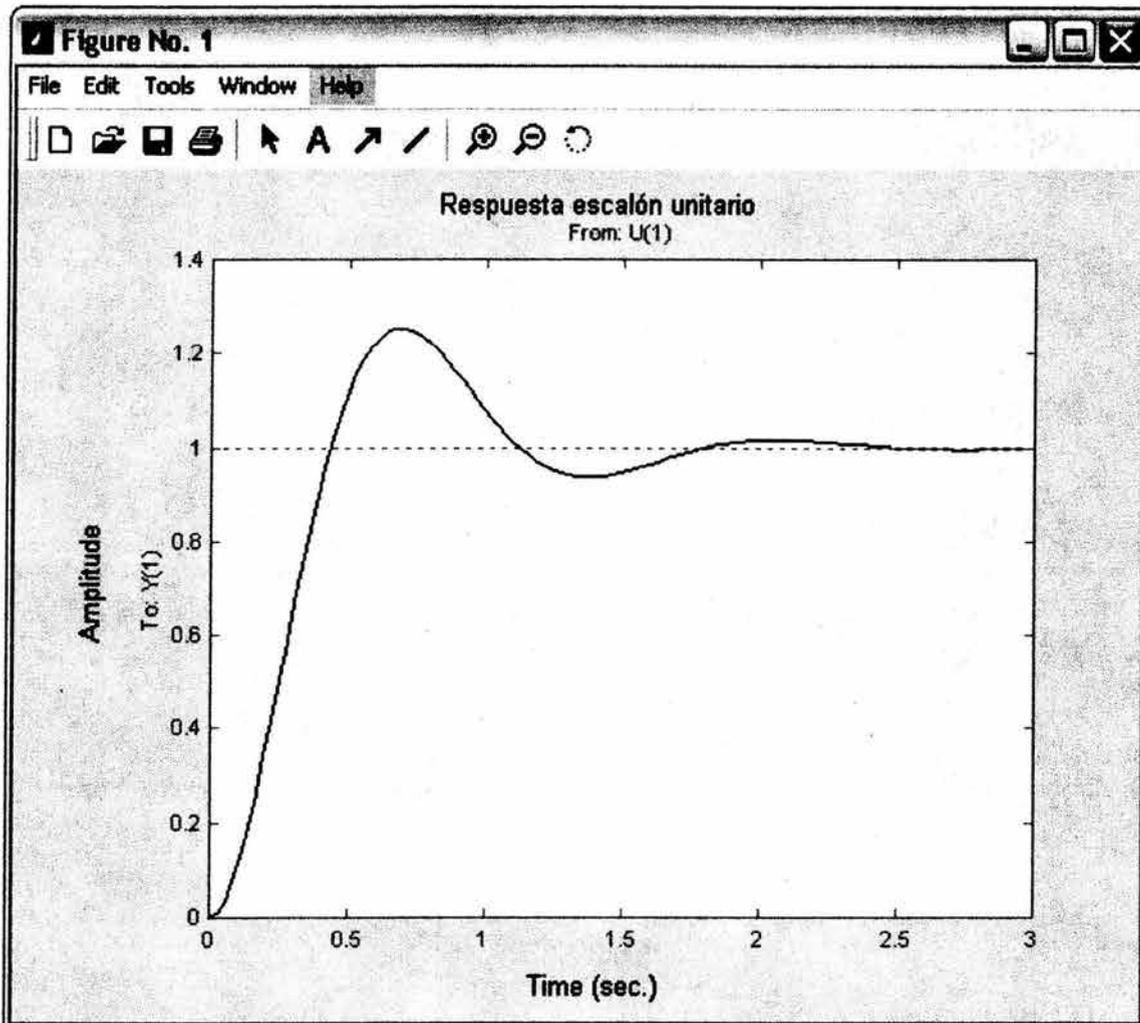
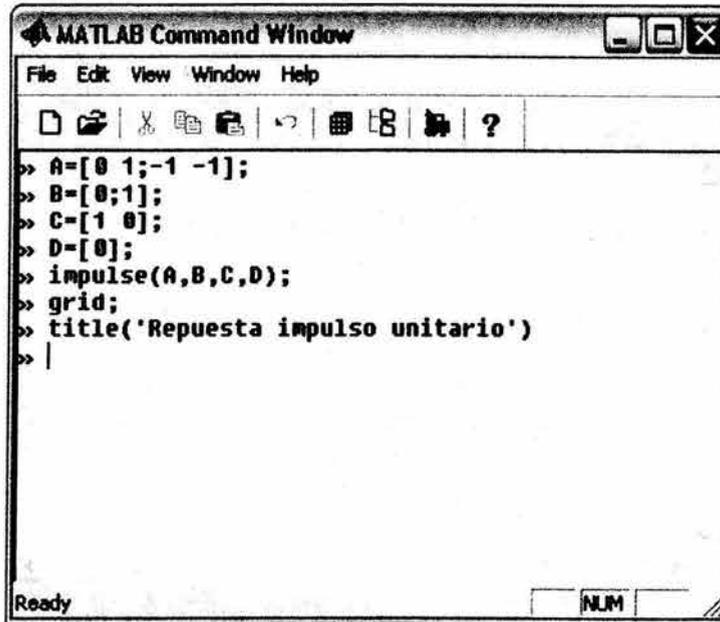


Fig.4.2 Gráfica de la respuesta escalón unitario⁸⁰

Se puede ver que las instrucciones en MATLAB son los nombres de las respuestas en inglés, puesto así si se tiene alguna duda de si existe una instrucción para algo en específico, sería bueno que se revisara la ayuda con el nombre de lo deseado en inglés y se tienen muchas posibilidades de encontrarla.

⁸⁰ Ejercicio realizado en MATLAB por la autora



```

MATLAB Command Window
File Edit View Window Help
[Icons]
>> A=[0 1;-1 -1];
>> B=[0;1];
>> C=[1 0];
>> D=[0];
>> impulse(A,B,C,D);
>> grid;
>> title('Respuesta impulso unitario')
>> |
Ready
NUM

```

Fig.4.3 Cálculo de la respuesta impulso unitario⁸¹

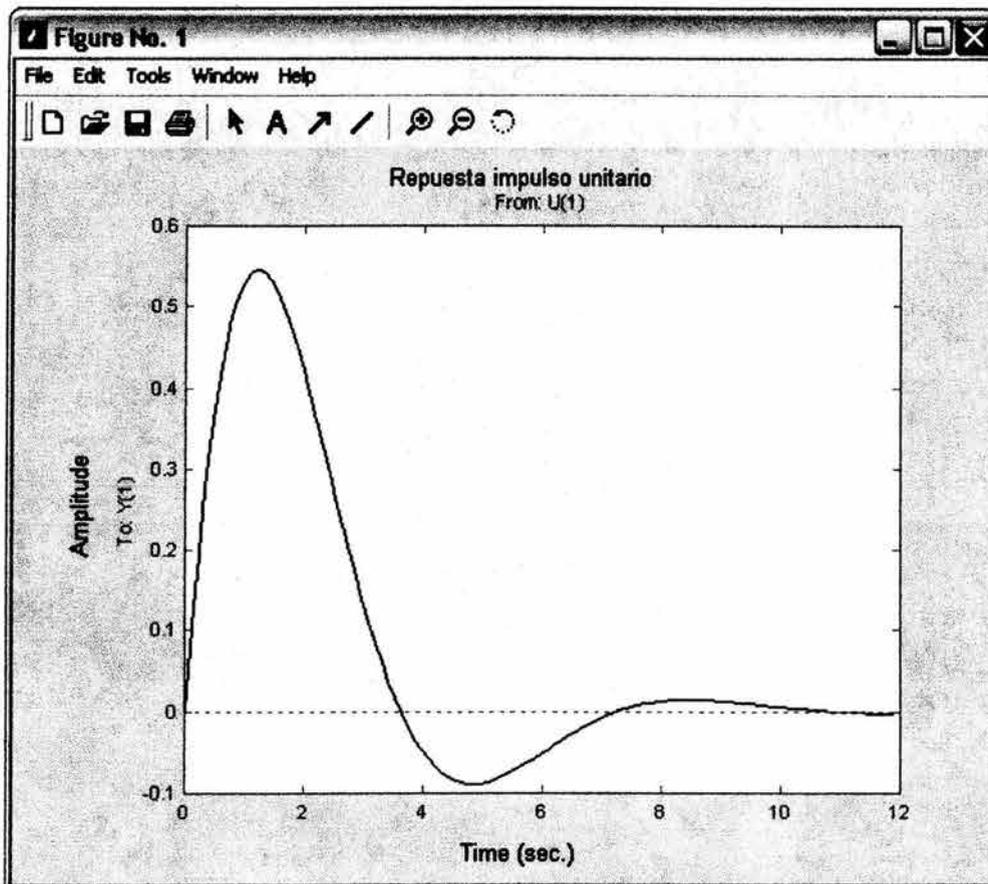


Fig.4.4 Gráfica de la respuesta impulso unitario⁸²

⁸¹ Ejercicio realizado en MATLAB por la autora

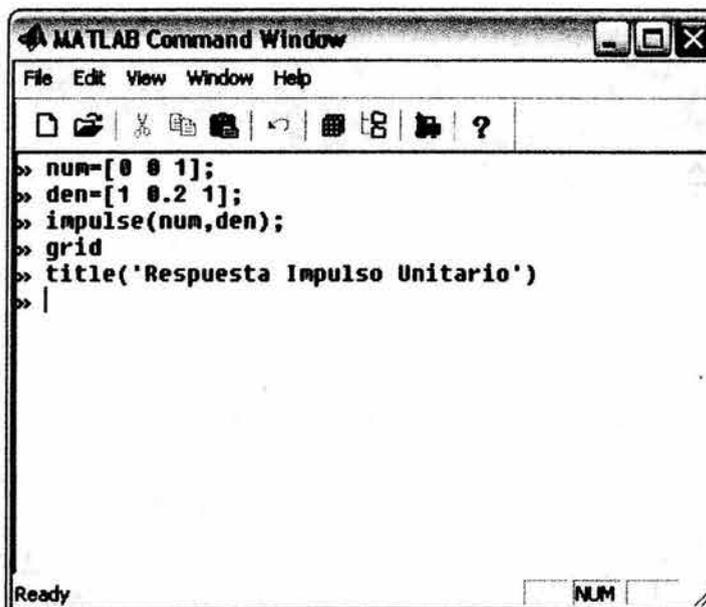
Como se muestra en la Fig. 4.3 las operaciones que se tienen que hacer primeramente la declaración de las matrices, y posteriormente dar la instrucción para realizar la respuesta impulso unitario que es: “**impulse**”⁸³. Nótese que para realizar la función escalón unitario la función fue: “**step**”⁸⁴.

Después en la Fig. 4.4 se puede observar la gráfica de la respuesta impulso unitario, se puede notar que es una simple instrucción de “**grid**” la que realiza la graficación, siendo que al realizar las operaciones a “mano” se lleva una gran cantidad de tiempo, y con MATLAB no es necesario tanto cálculo.

Ahora se obtendrá la respuesta impulso unitario del siguiente sistema:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = G(s) = \frac{1}{s^2 + 0.2s + 1} \quad (4.4)$$

Las operaciones en MATLAB se muestran en la Fig. 4.5 y la gráfica resultante en la Fig. 4.6.



```

MATLAB Command Window
File Edit View Window Help
[Icons]
>> num=[0 0 1];
>> den=[1 0.2 1];
>> impulse(num,den);
>> grid
>> title('Respuesta Impulso Unitario')
>> |
Ready NUM

```

Fig.4.5 Cálculos de la respuesta impulso unitario⁸⁵

⁸² Ejercicio realizado en MATLAB por la autora

⁸³ Véase apéndice del libro de la cita 4

⁸⁴ Véase apéndice del libro de la cita 4

⁸⁵ Ejercicio realizado en MATLAB por la autora

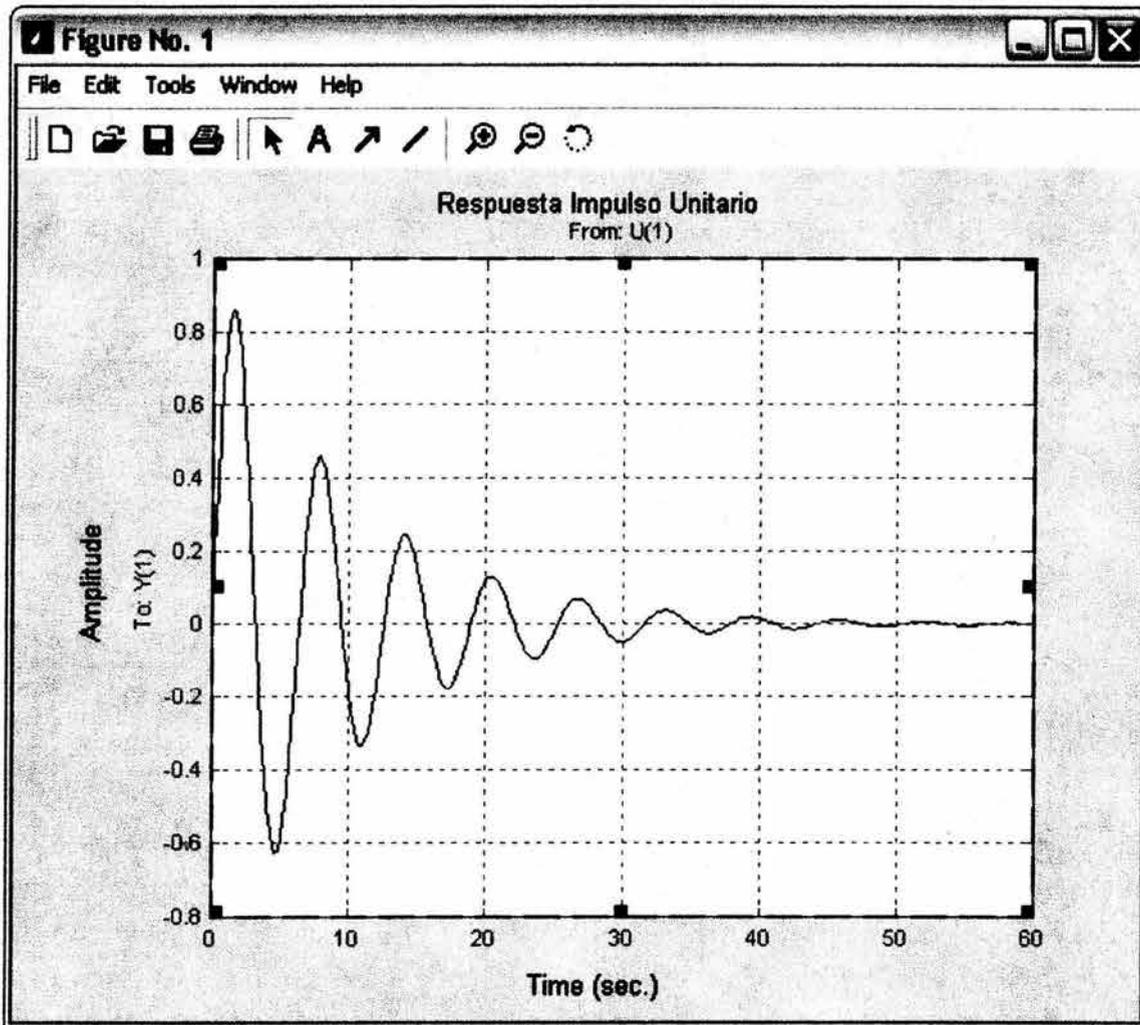


Fig.4.6 Gráfica de la respuesta impulso unitario⁸⁶

Puede observarse que, cuando las condiciones especiales son cero, la respuesta impulso unitario $G(s)$ es igual a la respuesta escalón unitario de $sG(s)$.

Tomando como referencia el sistema de la ecuación 4.4, dado que $R(s) = 1$ para la entrada impulso unitario, se tiene que:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = C(s) = G(s) = \frac{1}{s^2 + 0.2s + 1} = \left(\frac{s}{s^2 + 0.2s + 1} \right) \left(\frac{1}{s} \right) \quad (4.5)$$

⁸⁶ Ejercicio realizado en MATLAB por la autora

Por tanto se convirtió la respuesta impulso unitario de $G(s)$ en la respuesta impulso unitario de $sG(s)$.

Al introducirse los valores num y den siguiente es MATLAB:

$$\text{num} = [0 \ 1 \ 0]$$
$$\text{den} = [1 \ 0.2 \ 1]$$


```
>> num=[0 1 0];
>> den=[1 0.2 1];
>> step(num,den);
>> grid;
>> title('Respuesta escalón untario de sG(s)')
>> |
```

Fig.4.7 Cálculos de la respuesta escalón unitario $sG(s)$ ⁸⁷

En la Fig. 4.7 se muestran los cálculos de la respuesta escalón unitario, y si se observa con detenimiento la Fig. 4.8 comparada con la Fig. 4.6 son iguales, y una es respuesta impulso unitario y la otra respuesta escalón unitario respectivamente, cuando ambas tienen condiciones iniciales iguales a cero.

⁸⁷ Ejercicio realizado en MATLAB por la autora

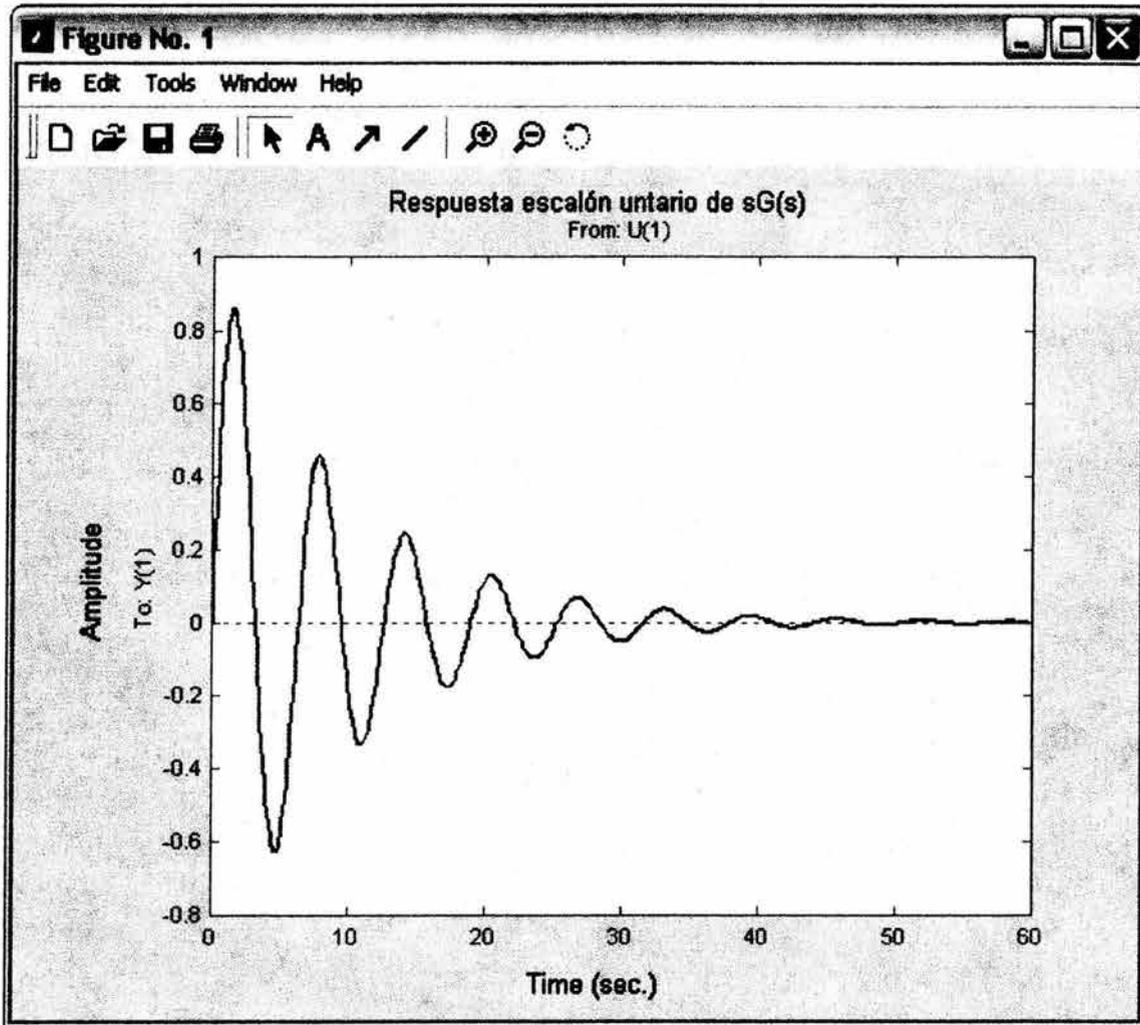


Fig.4.8 Gráfica de la respuesta impulso unitario, obtenida como Respuesta Impulso Unitario de $sG(s)$ ⁸⁸

Para la **“Respuesta Rampa”** no hay un comando en MATLAB, pero se puede realizar su cálculo utilizando el comando **“step”**. Específicamente. Para obtener la respuesta rampa del sistema con función de transferencia $G(s)$, dividida $G(s)$ entre s y usando el comando de respuesta escalón.

Considerando el sistema en lazo cerrado:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^2 + s + 1} \tag{4.6}$$

⁸⁸ Ejercicio realizado en MATLAB por la autora

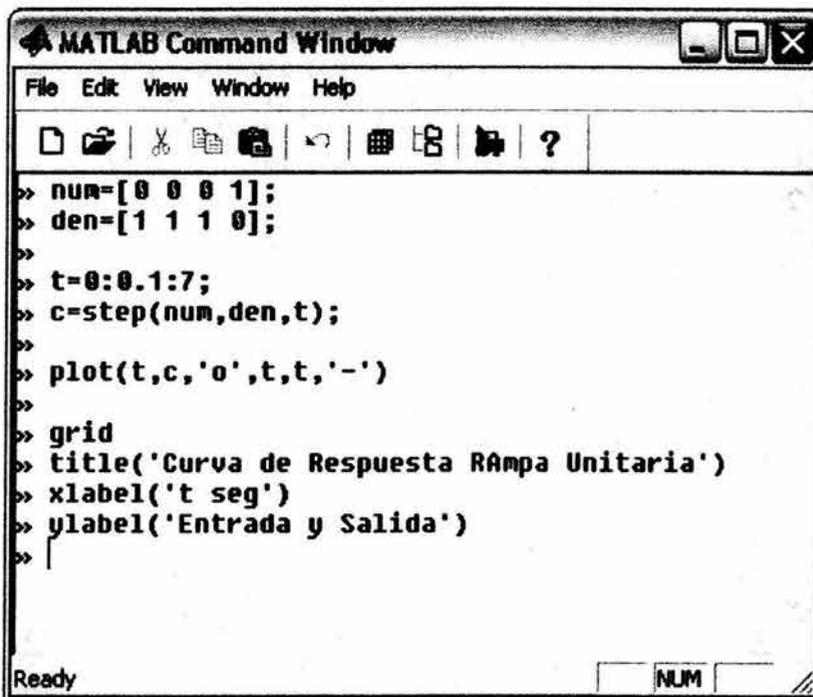
Para una entrada rampa unitaria, $R(s) = 1/(s^2)$, entonces se tiene:

$$C(s) = \left(\frac{1}{s^2 + s + 1} \right) \left(\frac{1}{s^2} \right) = \left(\frac{1}{s^3 + s^2 + s} \right) \left(\frac{1}{s} \right) \quad (4.7)$$

Sólo queda introducir los siguientes valores de num y den en MATLAB:

num = [0 0 0 1]

den = [1 1 1 0]



```

MATLAB Command Window
File Edit View Window Help
[Icons]
>> num=[0 0 0 1];
>> den=[1 1 1 0];
>>
>> t=0:0.1:7;
>> c=step(num,den,t);
>>
>> plot(t,c,'o',t,t,'-')
>>
>> grid
>> title('Curva de Respuesta Rampa Unitaria')
>> xlabel('t seg')
>> ylabel('Entrada y Salida')
>>
Ready
NUM

```

Fig.4.9 Cálculos de la respuesta rampa unitaria $G(s)/s^{89}$

En la Fig. 4.9, primero se declaran las matrices determinadas por la ecuación 4.7. Luego se estipula el tiempo en el cual ha de ser evaluada la respuesta ($t = 0:0.1:7$), después se asigna la respuesta escalón a la variable **c**. Con el comando “**plot**”⁹⁰ se manda a graficar la curva de

⁸⁹ Ejercicio realizado en MATLAB por la autora

⁹⁰ Véase apéndice del libro de la cita 4

respuesta rampa unitaria, y se agrega la entrada de referencia de entrada t .

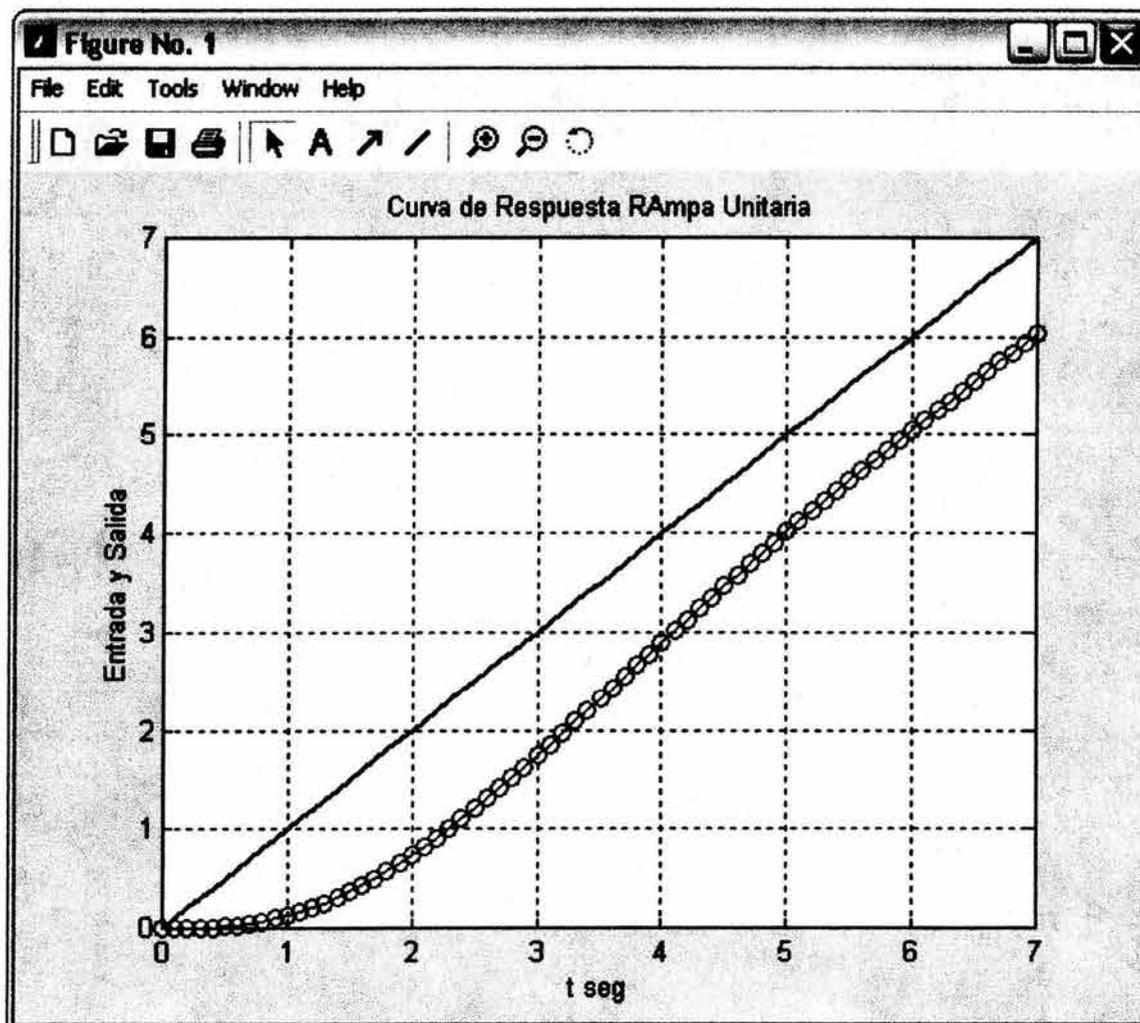


Fig.4.10 Gráfica de la respuesta rampa unitaria $G(s)/s^{91}$

4.1.1 RESPUESTA LIBRE, FORZADA, TOTAL Y PERMANENTE

La **respuesta libre** de un sistema también puede ser graficada con la ayuda de MATLAB, para ello se utilizará una función llamada "**dsolve**", lo que realiza esta función es que al especificarle la ecuación diferencial de la respuesta libre del sistema, da una solución simbólica de la misma.

⁹¹ Ejercicio realizado en MATLAB por la autora

Como una sintaxis para el uso del **dsolve** se tiene:

$$\text{dsolve('Dy=1+y^2')}$$

Donde Dy quiere decir la diferencial con respecto a y, y como no se le especifica condiciones iniciales dará una solución general. Y para especificar las condiciones iniciales se hace de la siguiente manera:

$$\text{dsolve('Dy=1+y^2','y(0)=1')}$$

Ahora bien, se usa un convenio que para D representa:

$$\frac{d}{dx}$$

Dy representa:

$$\frac{dy}{dx}$$

D2 representa:

$$\frac{d^2}{dx}$$

El ejemplo de la respuesta libre realizado manualmente en el Capítulo 3, ahora se realizará con MATLAB. Se puede observar en la Fig. 4.11 los cálculos y el uso del **dsolve**.

```

MATLAB Command Window
File Edit View Window Help
[Icons]
>> y=dsolve('Dy+0.505*y=0','y(0)=2');
>> pretty(y)
                101
          2 exp(- --- t)
                200

>> ezplot(y,[0 10]);
>> ylabel('Voltaje del capacitor en volts')
>> xlabel('Tiempo en segundos')
>> title('Respuesta Libre')
>>
Ready
NUM

```

Fig.4.11 Operaciones de la respuesta libre⁹²

⁹² Este y todos los ejercicios de respuestas han sido realizados en MATLAB por la autora

La función “pretty” nos da una mejor vista de la ecuación diferenciada. Y con “ezplot” se grafica. El resultado de la graficación se muestra en la Fig. 4.12

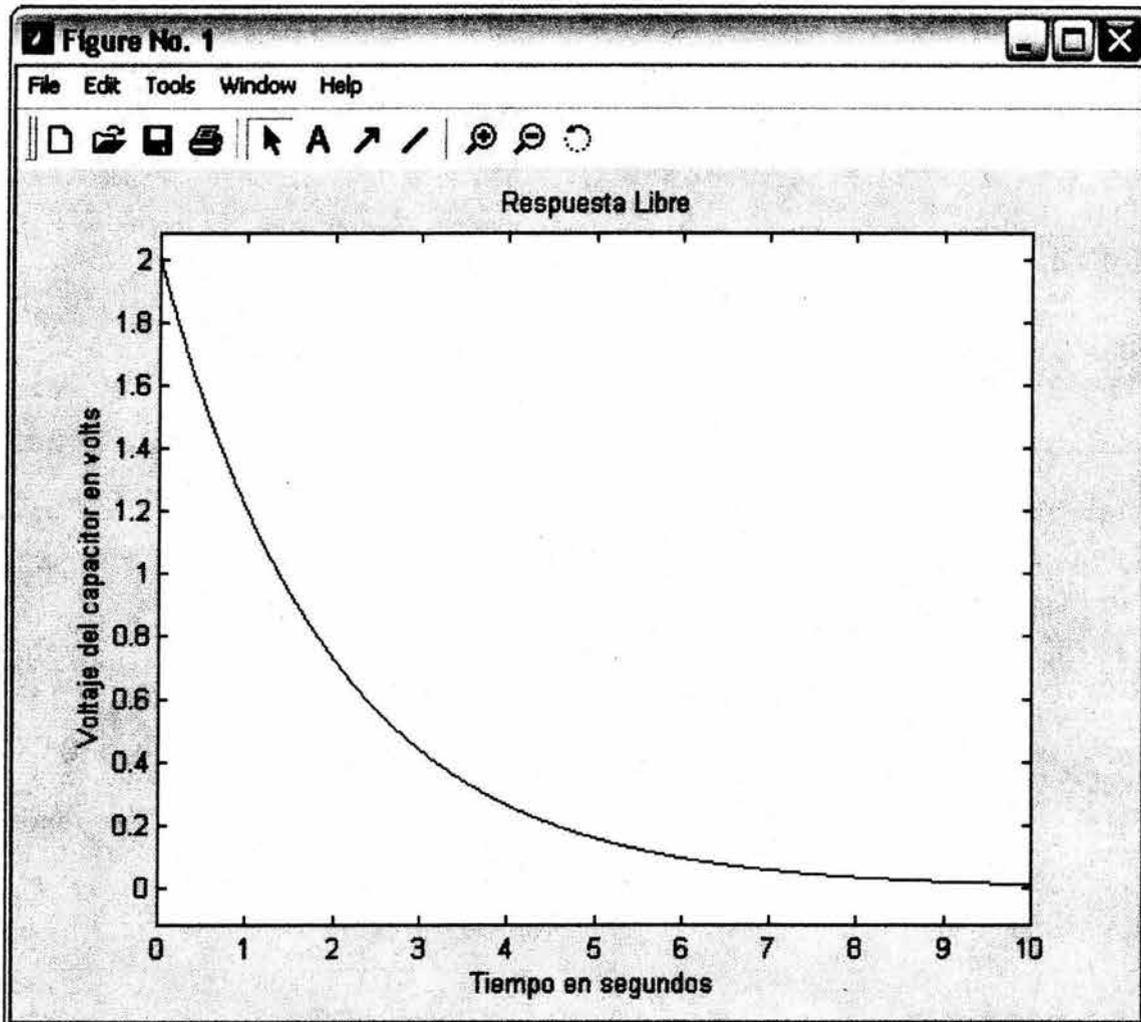
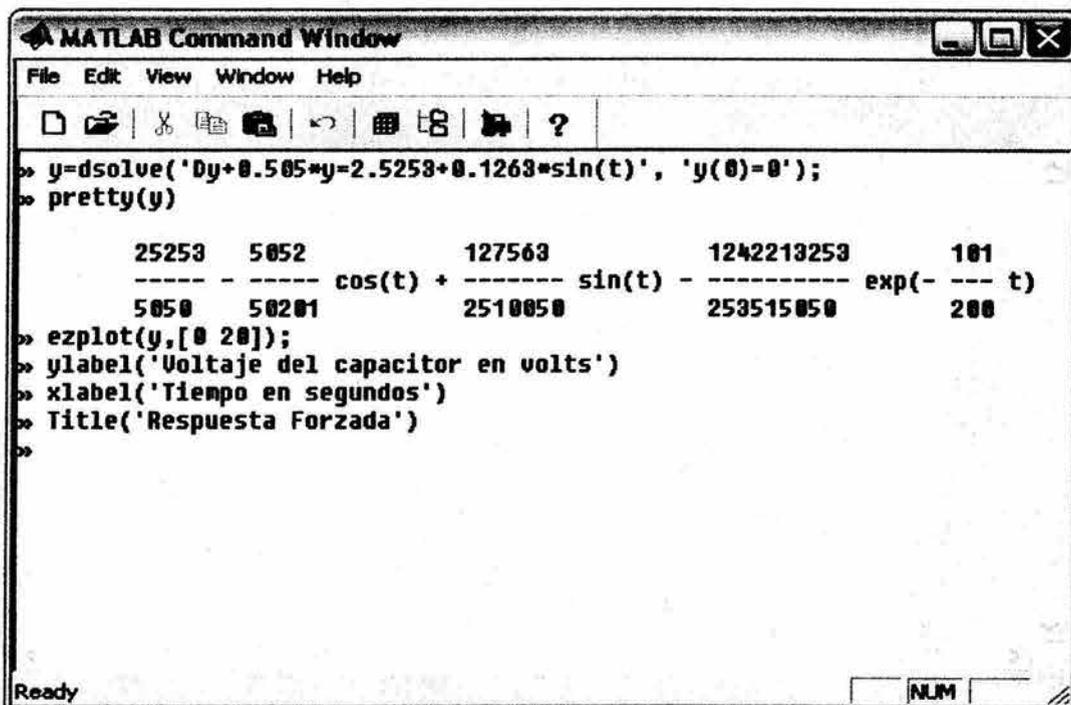


Fig.4.12 Gráfica de la respuesta libre

La **respuesta forzada** de un sistema eléctrico, realizado en el Capítulo 3, se puede observar resuelto con MATLAB en la Fig. 4.13. Se denota que se utilizan las mismas instrucciones que en la respuesta libre, puesto que se siguen tratando de ecuaciones diferenciales todas las respuestas se van a obtener del mismo modo.

La gráfica de la respuesta forzada se ve en la Fig. 4.14.



```

MATLAB Command Window
File Edit View Window Help
[Icons]
>> y=dsolve('Dy+0.505*y=2.5253+0.1263*sin(t)', 'y(0)=0');
>> pretty(y)
      25253   5052      127563      1242213253      101
      ---- - ---- cos(t) + ---- sin(t) - ---- exp(- --- t)
      5050   50201      2510050      253515050      200
>> ezplot(y,[0 20]);
>> ylabel('Voltaje del capacitor en volts')
>> xlabel('Tiempo en segundos')
>> Title('Respuesta Forzada')
>>
Ready
NUM

```

Fig.4.13 Cálculos de la respuesta forzada

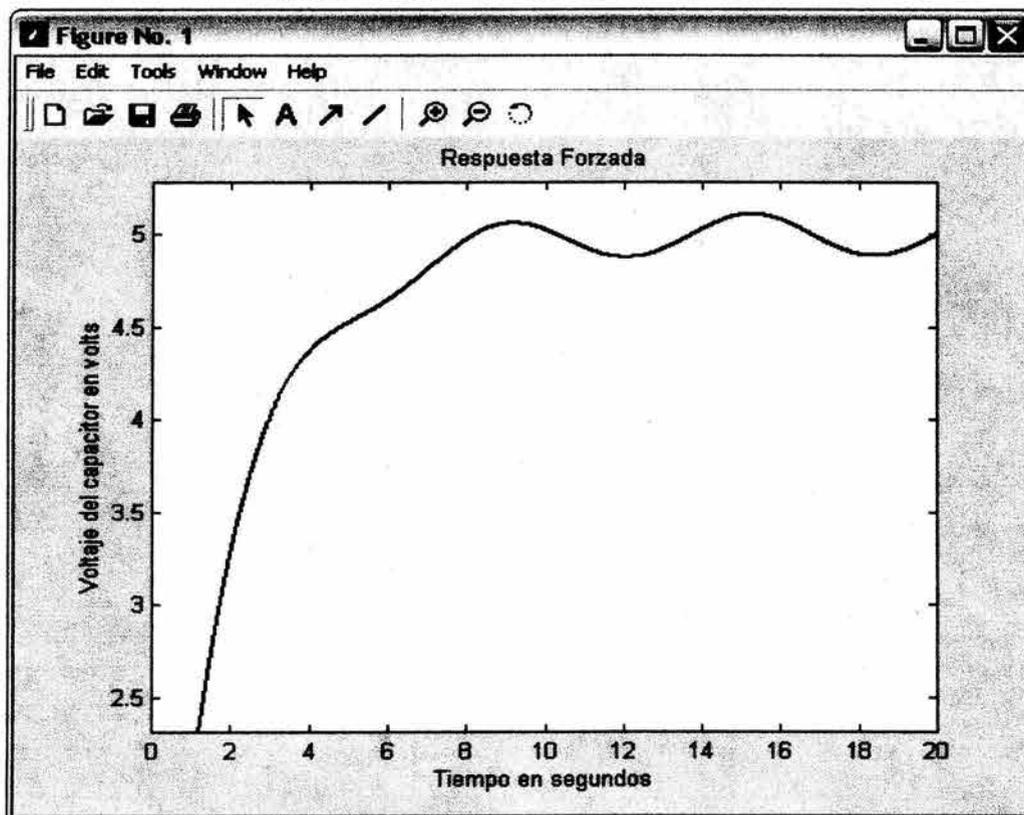


Fig.4.14 Gráfica de la respuesta forzada

La **respuesta total** de un sistema eléctrico, del capítulo anterior se realizó ahora con la ayuda de MATLAB, los cálculos se pueden ver en la Fig. 4.15 y la gráfica resultante en la Fig. 4.16.

```

MATLAB Command Window
File Edit View Window Help
y=dsolve('Dy+0.505*y=2.5253+0.1263*sin(t)', 'y(0)=2');
pretty(y)
      25253   5052           127563           735189153           101
      ----- - ----- cos(t) + ----- sin(t) - ----- exp(- --- t)
      5050    50201          2510050         253515050         200
ezplot(y,[0 10]);
ylabel('Voltaje del capacitor en volts')
xlabel('Tiempo en segundos')
Title('Respuesta Total')
Ready
NUM

```

Fig.4.15 Cálculos de la respuesta forzada

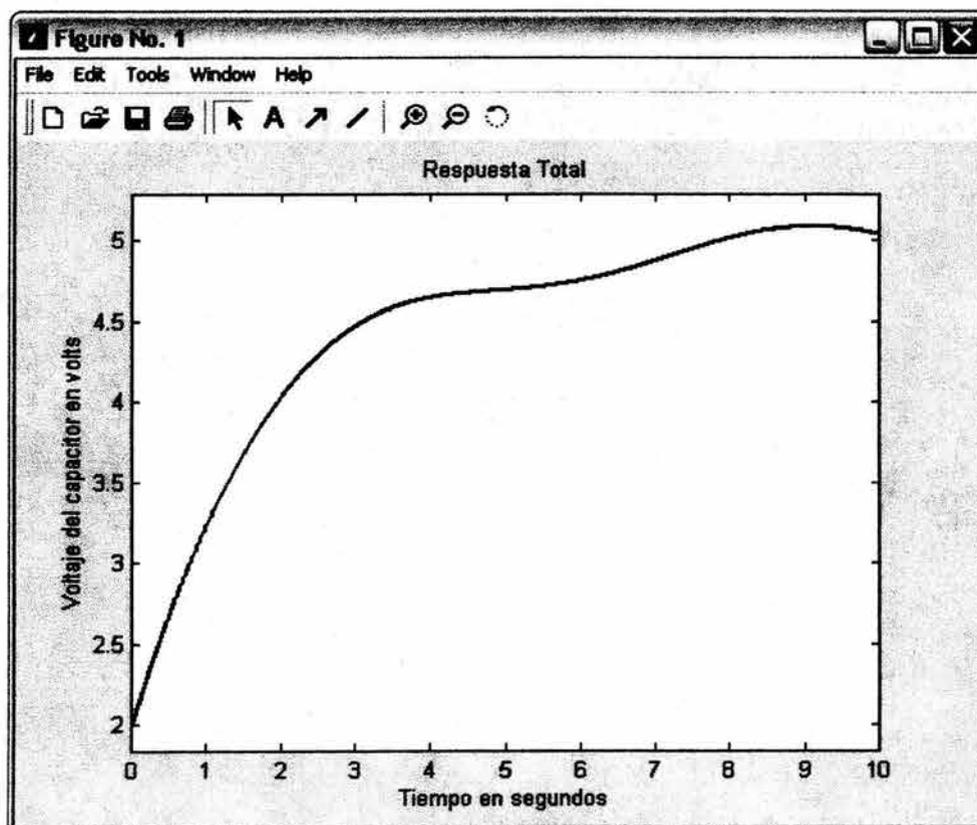
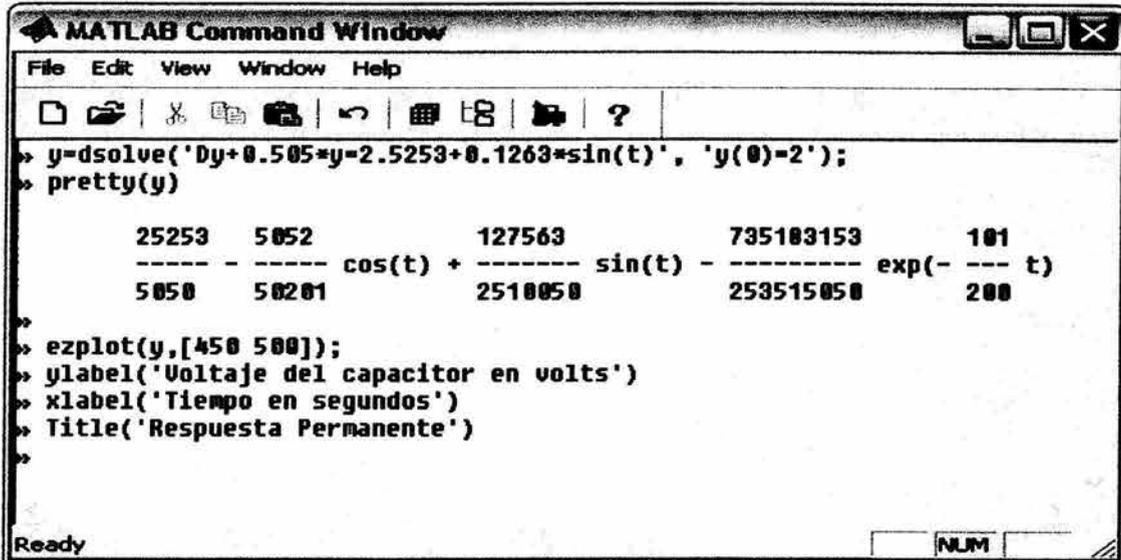


Fig.4.16 Gráfica de la respuesta forzada

La **respuesta permanente** de un sistema eléctrico, del capítulo anterior se realizó ahora con la ayuda de MATLAB, los cálculos se pueden ver en la Fig. 4.17 donde se nota el gran rango de tiempo que requiere la respuesta permanente o estable y la gráfica resultante en la Fig. 4.18.



```

MATLAB Command Window
File Edit View Window Help
y=dsolve('Dy+0.505*y=2.5253+0.1263*sin(t)', 'y(0)=2');
pretty(y)
      25253   5052      127563      735103153      101
      ---- - ---- cos(t) + ---- sin(t) - ---- exp(- --- t)
      5050   50201      2510050      253515050      200
ezplot(y,[450 500]);
ylabel('Voltaje del capacitor en volts')
xlabel('Tiempo en segundos')
Title('Respuesta Permanente')
Ready
NUM

```

Fig.4.15 Cálculos de la respuesta permanente

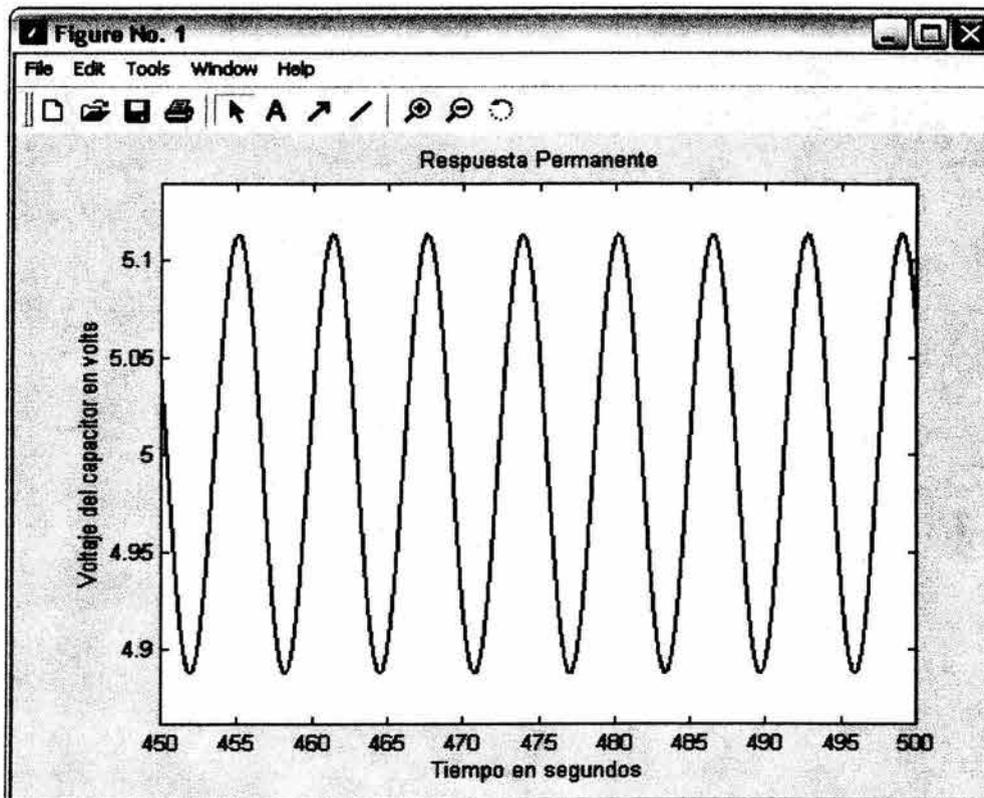


Fig.4.18 Gráfica de la respuesta permanente

4.2 GRÁFICAS DEL LUGAR GEOMÉTRICO DE LAS RAÍCES CON MATLAB

Para la graficación de los lugares geométricos de las raíces con MATLAB, es necesario retomar la ecuación 3.20 (capítulo 3):

$$G(s)H(s) = 1 + \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\dots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_n)} = 0$$

Que para efectos de llevarlo a MATLAB se puede escribir como:

$$1 + K \frac{\text{num}}{\text{den}} = 0 \quad (4.8)$$

Donde num es el polinomio numerador y den es el polinomio denominador. Es decir:

$$\begin{aligned} \text{num} &= (s_1 + z_1)(s_2 + z_2)\dots(s + z_m) \\ &= s^m + (z_1 + z_2 + \dots + z_m)s^{m-1} + \dots + z_1 z_2 \dots z_m \\ \text{den} &= (s_1 + p_1)(s_2 + p_2)\dots(s + p_n) \\ &= s^n + (p_1 + p_2 + \dots + p_n)s^{n-1} + \dots + p_1 p_2 \dots p_n \end{aligned}$$

El comando de MATLAB que se usa para graficar los lugares geométricos de las raíces es:

$$\text{rlocus}^{93}(\text{num}, \text{den})$$

Este comando realiza la gráfica del lugar geométrico de las raíces, el factor de ganancias K se calcula automáticamente. Sin embargo el usuario puede especificar el valor de K.

Para graficar el lugar geométrico de las raíces se utiliza la instrucción "plot", se recomienda especificar al comando cuando grafique polos (x) y cuando se grafiquen ceros (o), por ejemplo:

⁹³ Véase apéndice del libro de la cita 4

```
r = rlocus(num, den)
plot(r,'o') ó plot(r,'x')
```

Ahora se puede ver más fácilmente todas estas instrucciones con un ejemplo. Considerándose el sistema de lazo abierto siguiente:⁹⁴

$$\frac{K(s^2 + 2s + 4)}{s(s+4)(s+6)(s^2 + 1.4s + 1)} \quad (4.9)$$

El numerador del sistema está dado como un polinomio en s . Sin embargo el denominador está dado por un producto de polinomios, lo cual implica que se tenga que obtener términos para obtener un polinomio de s . Este producto de polinomios se realiza fácilmente mediante el comando de convolución (**conv**)⁹⁵ de MATLAB, como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} a = s(s + 4) = s^2 + 4s & : a = [1 \ 4 \ 0] \\ b = s + 6 & : b = [1 \ 6] \\ c = s^2 + 1.4s + 1 & : c = [1 \ 1.4 \ 1] \end{aligned}$$

Después se usa el comando **conv** de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} d &= \text{conv}(a,b) \\ e &= \text{conv}(c,d) \end{aligned}$$

El valor arrojado para e (Fig. 4.19), es el valor del denominador que se usará para el cálculo del lugar geométrico de las raíces. Entonces:

$$\text{den} = [1 \ 11.4 \ 39 \ 43.6 \ 24 \ 0]$$

Para encontrar los polos en lazo abierto de la función de transferencia determinada, se usa el comando "**roots**"⁹⁶, cabe recordar que los polos de una función están definidos por el numerador de la función de transferencia (Fig. 4.20):

⁹⁴ Ejemplo de la cita 34, p.340, hecho en MATLAB por la autora

⁹⁵ Véase apéndice del libro de la cita 4

⁹⁶ Véase apéndice del libro de la cita 4

$$p = [1 \ 2 \ 4]$$

$$r = \text{roots}(p)$$

A screenshot of the MATLAB Command Window. The window title is "MATLAB Command Window". The menu bar includes "File", "Edit", "View", "Window", and "Help". Below the menu bar is a toolbar with icons for file operations and editing. The command prompt shows the following sequence of commands and outputs:

```

>> a=[1 4 0];
>> b = [1 6];
>> c = [1 1.4 1];
>> d=conv(a,b)

d =

     1     10     24     0

>> e=conv(c,d)

e =

     1.0000     11.4000     39.0000     43.6000     24.0000     0

>> |

```

The status bar at the bottom left shows "Ready" and at the bottom right shows "NUM".

Fig.4.19 Cálculos para encontrar el producto de polinomios⁹⁷

A screenshot of the MATLAB Command Window. The window title is "MATLAB Command Window". The menu bar includes "File", "Edit", "View", "Window", and "Help". Below the menu bar is a toolbar with icons for file operations and editing. The command prompt shows the following sequence of commands and outputs:

```

>> p = [1 2 4];
>> r=roots(p)

r =

    -1.0000 + 1.7321i
    -1.0000 - 1.7321i

>>

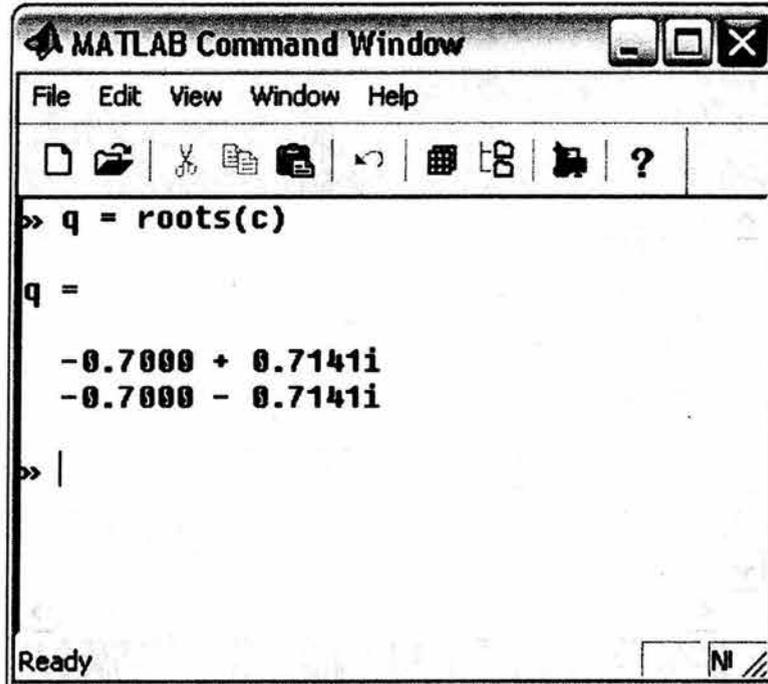
```

The status bar at the bottom left shows "Ready" and at the bottom right shows "N".

Fig.4.20 Cálculos para encontrar los polos de la función de transferencia⁹⁸

⁹⁷ Ejercicio realizado en MATLAB por la autora

Para encontrar los polos complejos conjugados en lazo abierto (las raíces de $s^2 + 1.4s + 1 = 0$), se introduce el comando de la manera que se muestra en la Fig. 4.21.



```

MATLAB Command Window
File Edit View Window Help
[Icons]
>> q = roots(c)
q =
    -0.7000 + 0.7141i
    -0.7000 - 0.7141i
>> |
Ready
  
```

Fig.4.21 Cálculos para encontrar los polos complejos conjugados en lazo abierto⁹⁸

Por lo tanto el sistema cuenta con los siguientes polos y ceros en lazo abierto:

$$\text{Ceros: } s = -1 + j1.7321, s = -1 - j1.7321$$

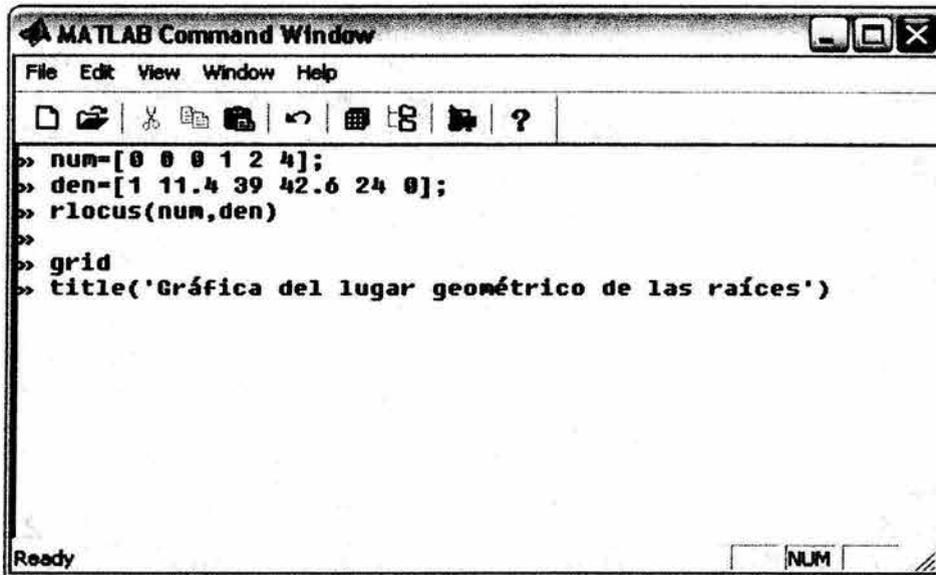
$$\text{Polos: } s = -0.7 + j0.7141, s = -0.7 - j0.7141$$

$$s = 0, s = -4, s = -6$$

Ahora sólo resta crear la gráfica del diagrama del lugar geométrico de las raíces para este sistema. Los comandos aparecen en la Fig. 4.22 y la gráfica en la Fig. 4.23.

⁹⁸ Ejercicio realizado en MATLAB por la autora

⁹⁹ Ejercicio realizado en MATLAB por la autora



```
MATLAB Command Window
File Edit View Window Help
[Icons]
>> num=[0 0 0 1 2 4];
>> den=[1 11.4 39 42.6 24 0];
>> rlocus(num,den)
>>
>> grid
>> title('Gráfica del lugar geométrico de las raíces')
Ready [NUM]
```

Fig.4.22 Cálculos para la graficación del lugar geométrico de la raíz ¹⁰⁰

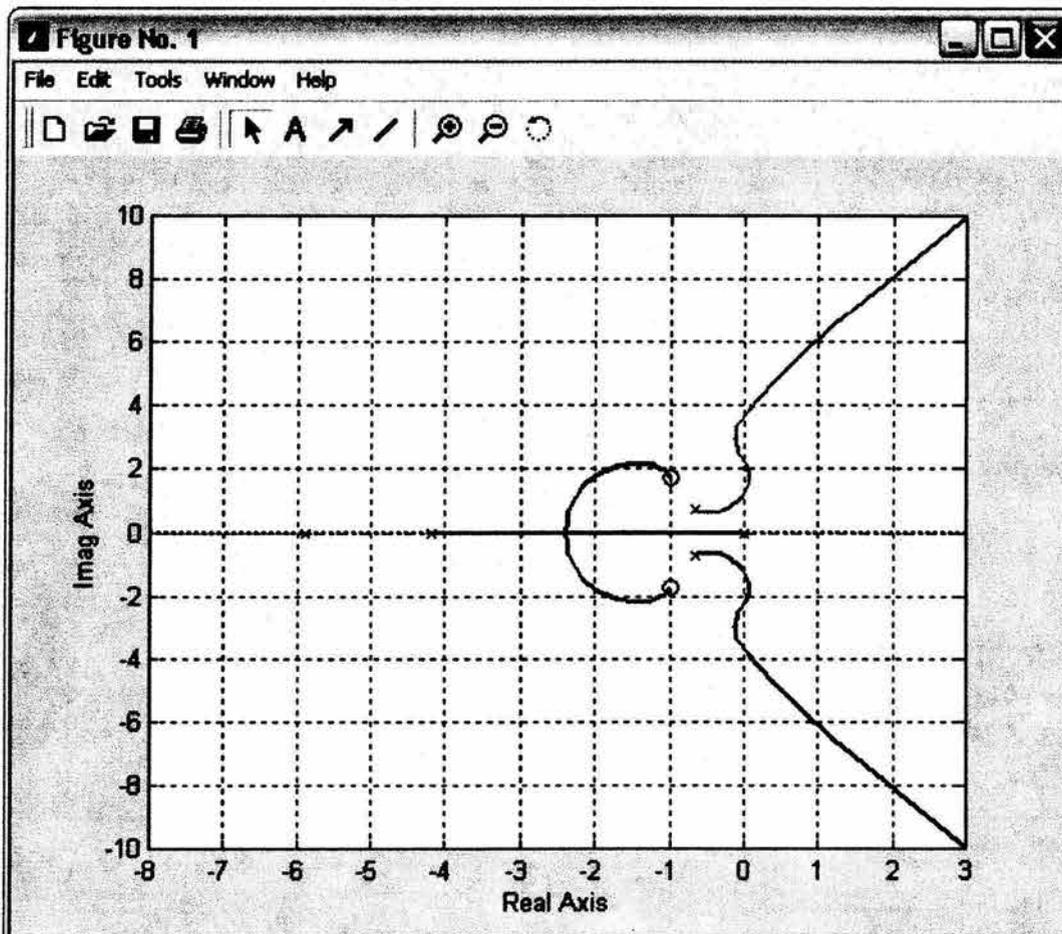


Fig.4.23 Gráfica del lugar geométrico de las raíces ¹⁰¹

¹⁰⁰ Ejercicio realizado en MATLAB por la autora

Otro ejemplo para encontrar el lugar geométrico de las raíces, es el siguiente, tomando en cuenta la función de transferencia en lazo abierto:

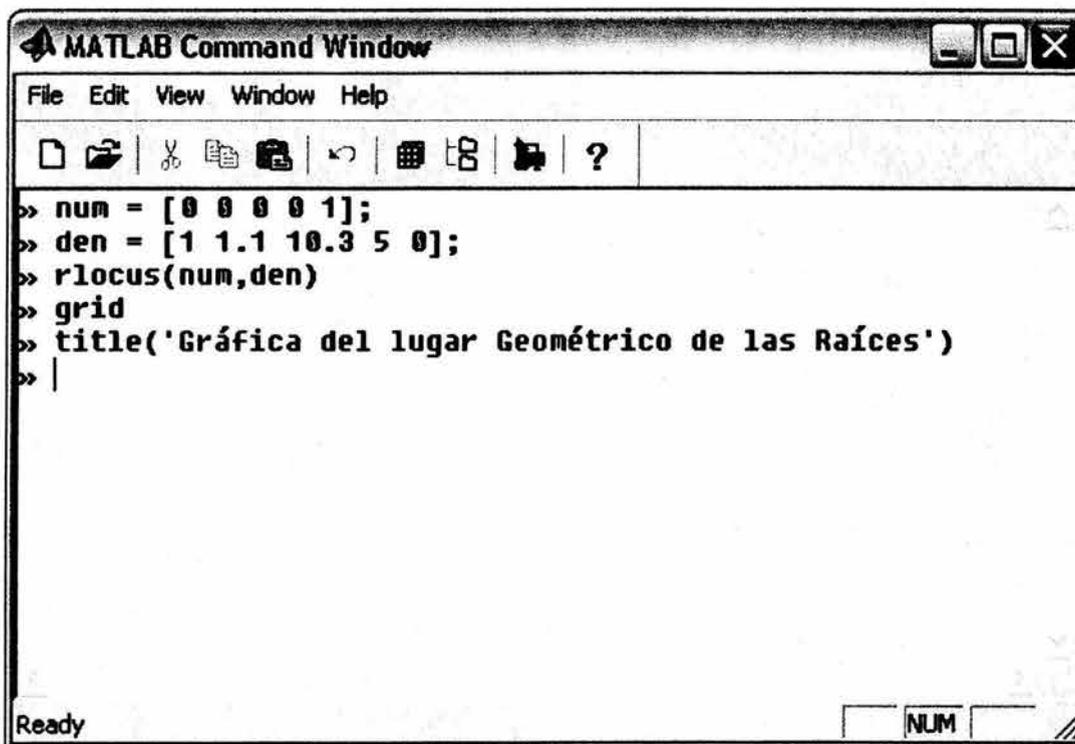
$$G(s)H(s) = \frac{K}{s^4 + 1.1s^3 + 10.3s^2 + 5s} \quad (4.10)$$

Los valores para num y den son:

```
num = [0 0 0 0 1];
```

```
den = [1 1.1 10.3 5 0];
```

Los cálculos introducidos en MATLAB se observan en la Fig. 4.24 y la gráfica que arroja se muestra en la Fig. 4.25.



```
MATLAB Command Window
File Edit View Window Help
[Icons]
>> num = [0 0 0 0 1];
>> den = [1 1.1 10.3 5 0];
>> rlocus(num,den)
>> grid
>> title('Gráfica del lugar Geométrico de las Raíces')
>> |
Ready NUM
```

Fig.4.24 Cálculos del lugar geométrico de las raíces ¹⁰²

¹⁰¹ Ejercicio realizado en MATLAB por la autora

¹⁰² Ejercicio realizado en MATLAB por la autora

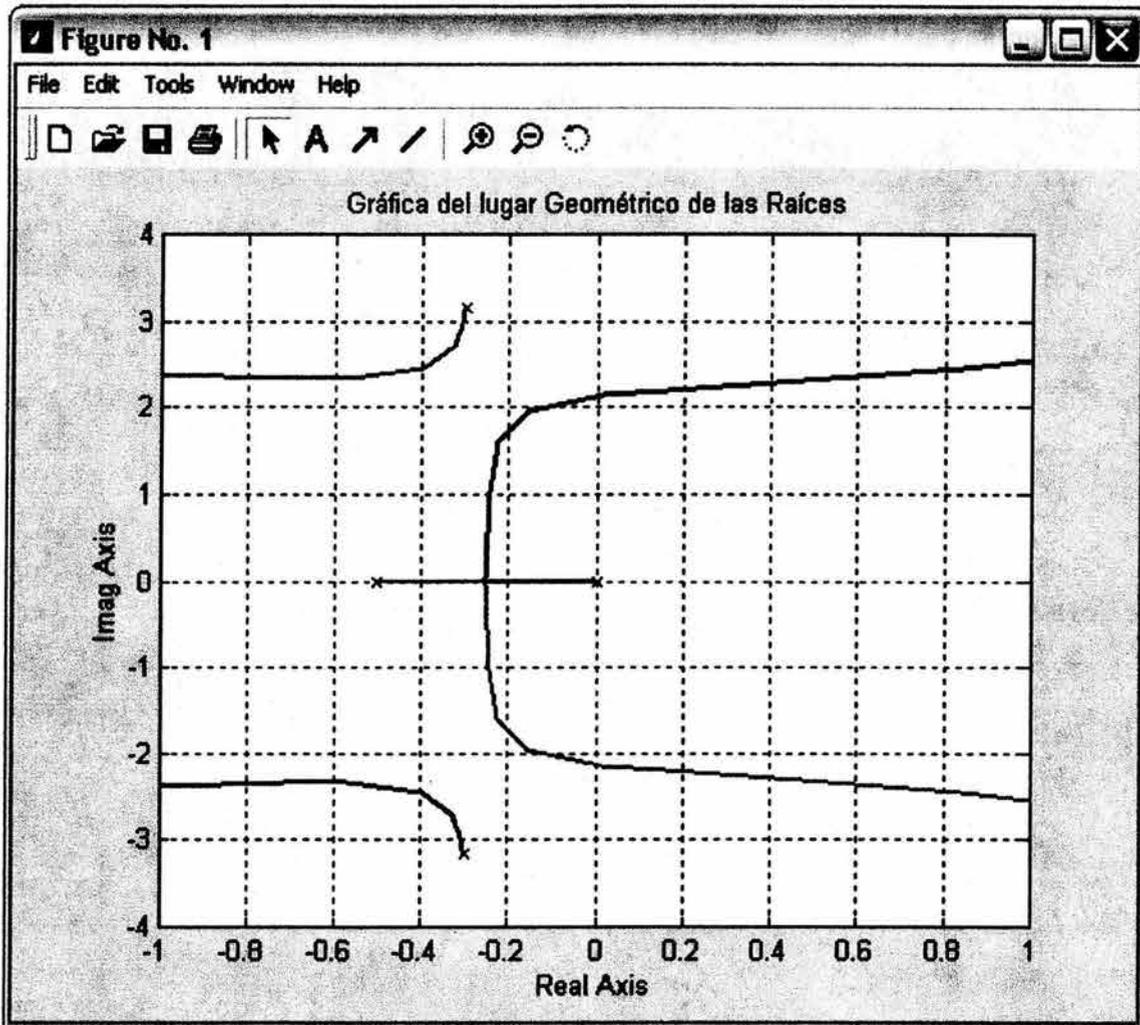


Fig.4.25 Gráfica del lugar geométrico de las raíces ¹⁰³

4.3 ANÁLISIS DE LA RESPUESTA EN FRECUENCIA CON MATLAB

El comando “**bode**” ¹⁰⁴ calcula las magnitudes y los ángulos de fase de la respuesta en frecuencia de un sistema en tiempo continuo, lineal e invariante con el tiempo.

¹⁰³ Ejercicio realizado en MATLAB por la autora

¹⁰⁴ Véase apéndice del libro de la cita 4

Cuando se introduce la función “**bode**” sin argumentos, MATLAB produce las trazas de Bode en la pantalla (Fig. 4.26).

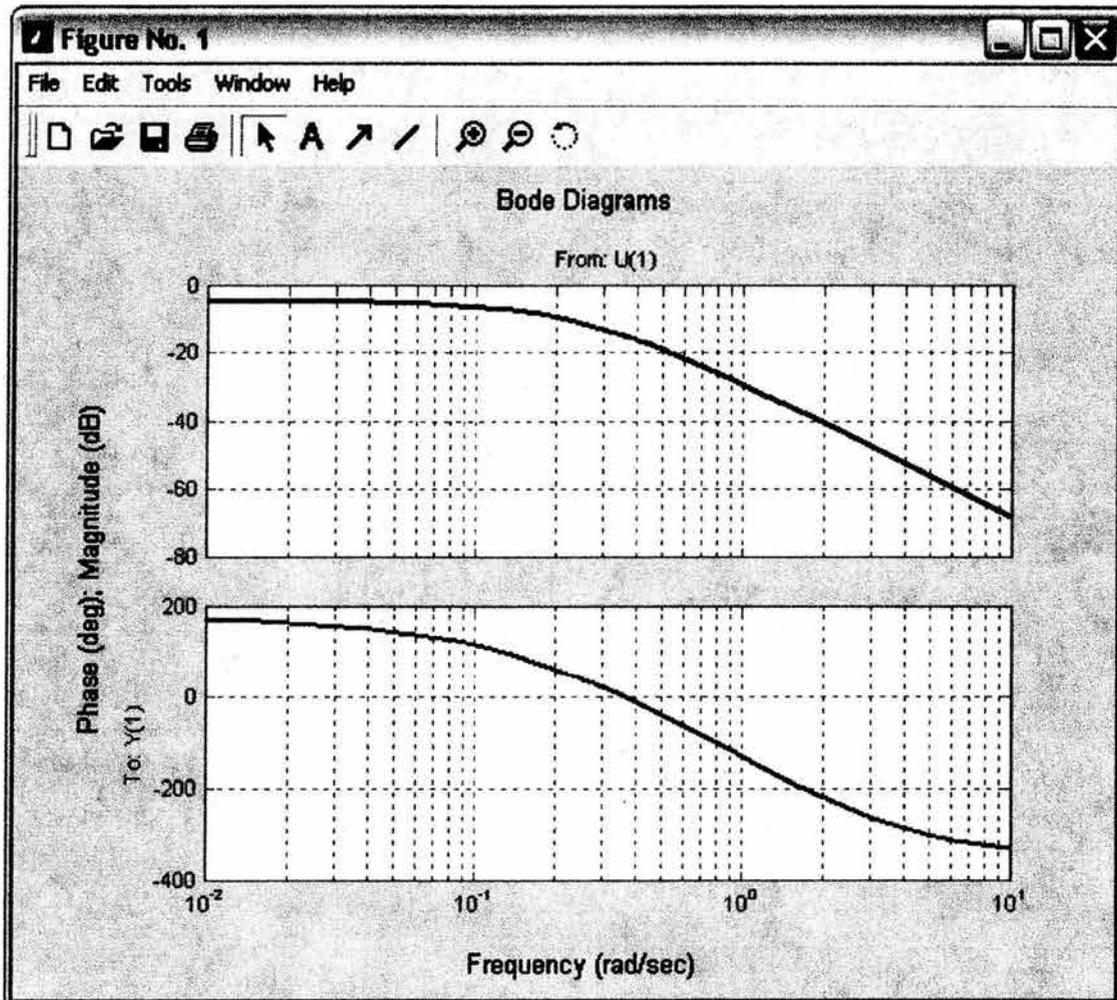


Fig.4.26 Gráfica del lugar geométrico de las raíces ¹⁰⁵

Para ver más claro el funcionamiento de este comando, se considerará la siguiente función de transferencia:

$$G(s) = \frac{25}{s^2 + 4s + 25} \quad (4.11)$$

Definiendo num y den:

$$\text{num} = [0 \ 0 \ 25]$$

$$\text{den} = [1 \ 4 \ 25]$$

¹⁰⁵ Ejemplo realizado en MATLAB por la autora

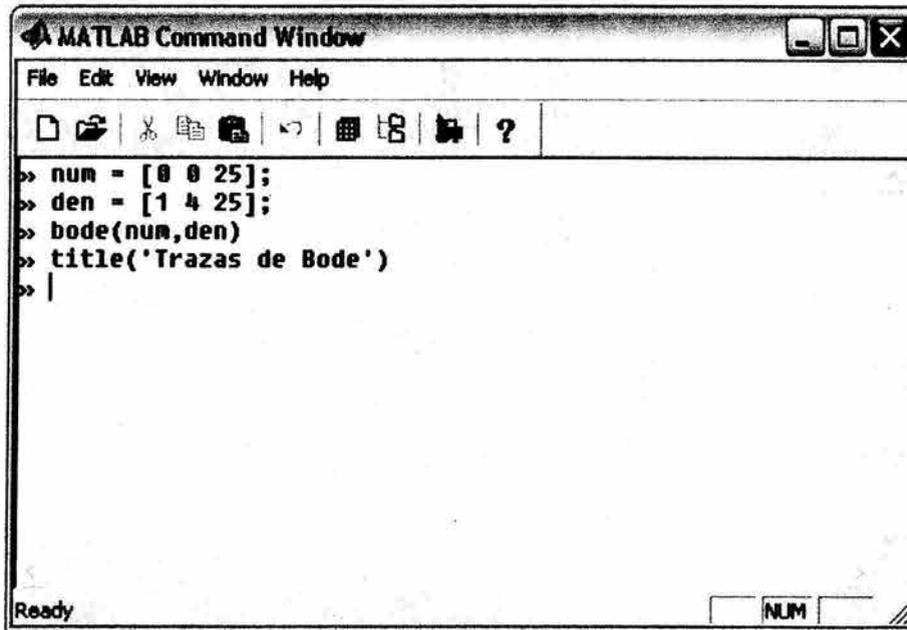


Fig.4.27 Cálculos para obtener la respuesta en frecuencia ¹⁰⁶

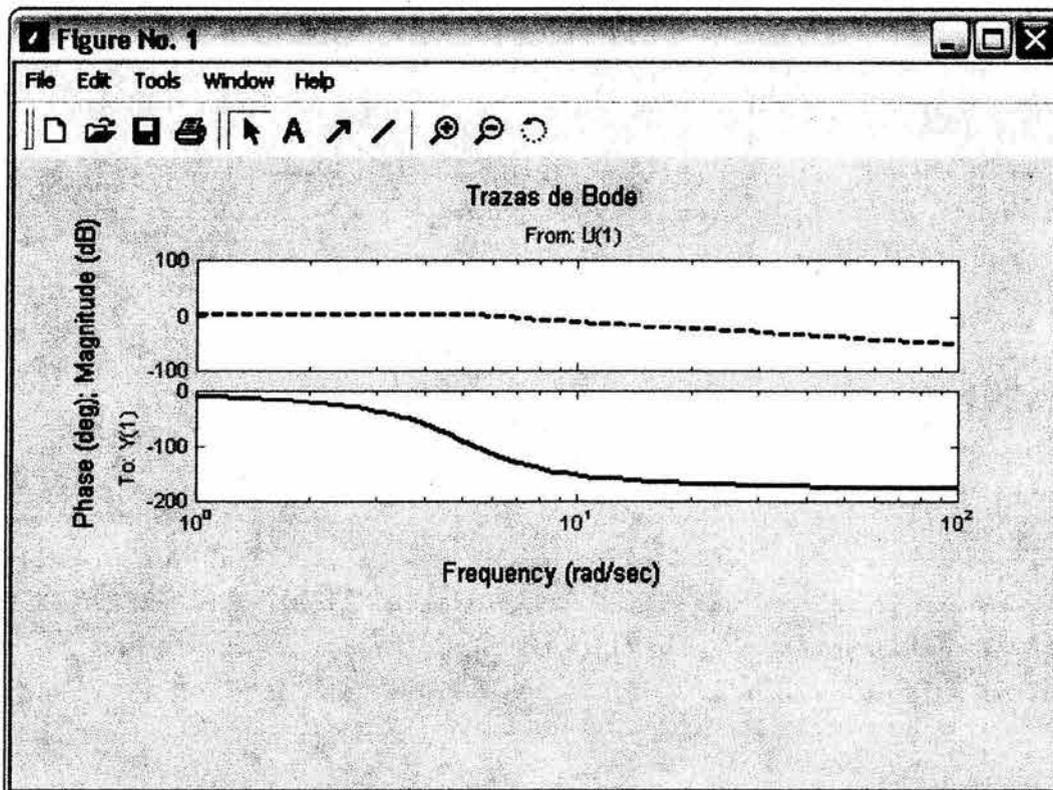


Fig.4.28 Gráfica de trazas de Bode ¹⁰⁷

¹⁰⁶ Ejemplo realizado en MATLAB por la autora

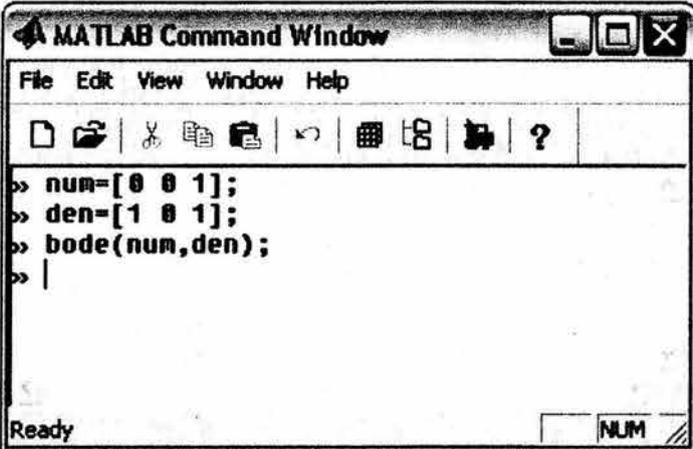
¹⁰⁷ Ejemplo realizado en MATLAB por la autora

Lo mostrado en la Fig. 4.28 denota las trazas de Bode, en la respuesta en frecuencia del sistema en lazo abierto.

Considerando otro sistema en lazo abierto,

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 1} \quad (4.12)$$

Esta función de transferencia tiene polos en el eje $j\omega$ en $\pm j$.



```

MATLAB Command Window
File Edit View Window Help
[Icons]
>> num=[0 0 1];
>> den=[1 0 1];
>> bode(num,den);
>> |
Ready NUM

```

Fig.4.29 Cálculos de trazas de Bode ¹⁰⁸

En teoría la magnitud se vuelve infinita en un punto de frecuencia en el que $\omega = 1$ rad/seg.

Este punto de frecuencia no está entre los puntos de frecuencia que se calculan, en la gráfica la magnitud de cumbre aparece aproximadamente 50 db. Este valor se calcula cercano pero no exacto a $\omega = 1$ rad/seg.

Sin embargo, si uno de los puntos de frecuencia que se calculan coincide con el polo en $\omega = 1$, la magnitud se vuelve infinita en este punto.

Pero si se le hacen algunas modificaciones a las instrucciones para la construcción de las trazas de Bode, como darle las especificaciones de $\omega = 1$, y que se calcules 101 puntos, ver la Fig. 4.22, donde MATLAB manda

¹⁰⁸ Ejemplo realizado en MATLAB por la autora

mensajes de advertencia, puesto que la magnitud tiende a infinito como se muestra en la Fig. 4.23.

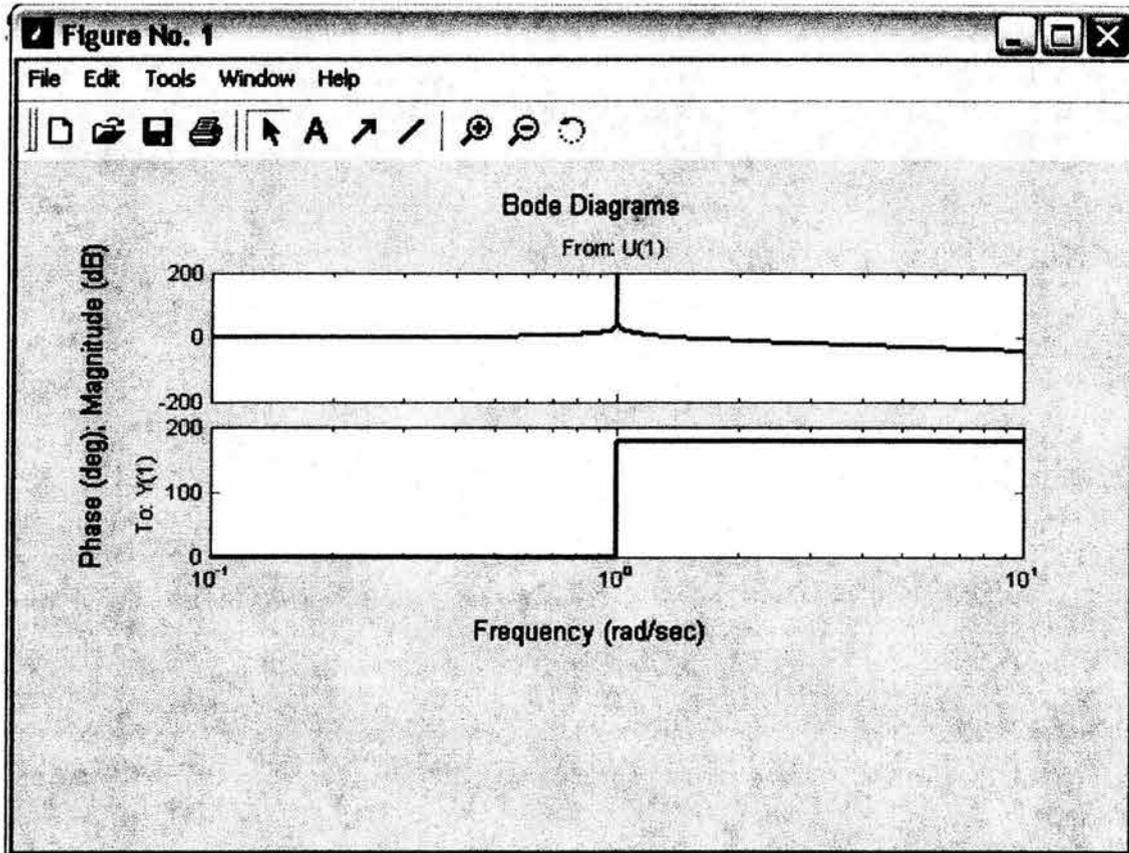


Fig.4.30 Gráfica de trazas de Bode Correcta ¹⁰⁹

```

MATLAB Command Window
File Edit View Window Help
[Icons]
>> num=[0 0 1];
>> den=[1 0 1];
>> w=logspace(-1,1,101);
>> bode(num,den,w)
Warning: Singularity in frequency response due to jw-axis or unit-circle poles.
> In C:\MATLABR11\toolbox\control\@tf\freqresp.m at line 73
  In C:\MATLABR11\toolbox\control\@lti\boderesp.m at line 51
  In C:\MATLABR11\toolbox\control\@lti\bode.m at line 160
  In C:\MATLABR11\toolbox\control\bode.m at line 123
>> |
Ready
NUM

```

Fig.4.31 Cálculos de trazas incorrectas de Bode ¹¹⁰

¹⁰⁹ Ejemplo realizado en MATLAB por la autora

¹¹⁰ Ejemplo realizado en MATLAB por la autora

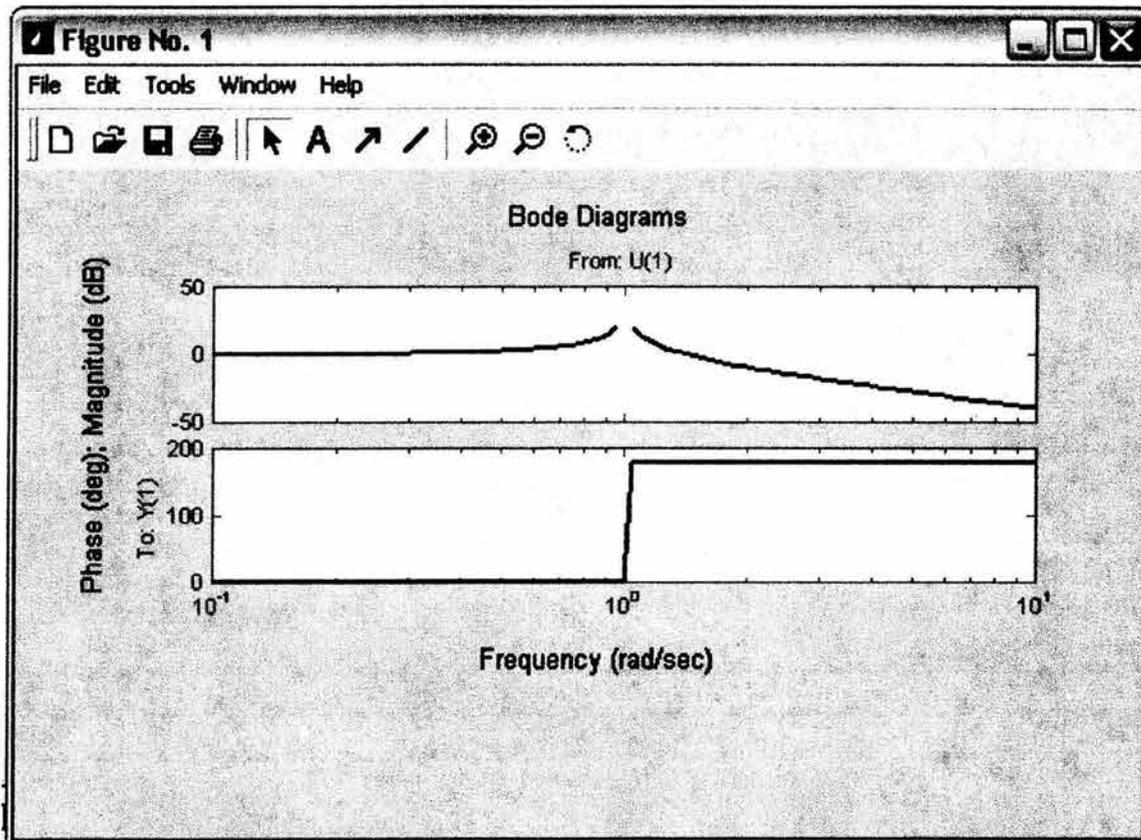


Fig.4.32 Gráfica de trazas incorrectas de Bode ¹¹¹

4.3.1 OBTENCIÓN DE TRAZAS DE NYQUIST CON MATLAB

Las trazas de Nyquist al igual que las trazas de Bode, se usan para la representación de la respuesta en frecuencia de sistemas de control lineales realimentados e invariantes con el tiempo.

Las trazas de Nyquist son gráficas polares, en tanto que las trazas de Bode son gráficas rectangulares.

El comando **"nyquist"** ¹¹² calcula la respuesta en frecuencia para sistemas en tiempo continuo, lineales e invariantes con el tiempo.

¹¹¹ Ejemplo realizado en MATLAB por la autora

¹¹² Véase apéndice del libro de la cita 4

Para la siguiente función de transferencia se calculará la traza de Nyquist:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 0.8s + 1} \quad (4.13)$$

Los valores que van a tomar num y den:

$$\text{num} = [0 \ 0 \ 1]$$

$$\text{den} = [1 \ 0.8 \ 1]$$

```

MATLAB Command Window
File Edit View Window Help
[Icons]
>> num = [0 0 1];
>> den = [1 0.8 1];
>> nyquist(num,den)
>> grid
>> title('Traza de Nyquist')
>> |
Ready
NUM

```

Fig.4.33 Cálculos de trazas de Nyquist ¹¹³

Como en cualquier cálculo matemático, se tiene que tener cuidado de que las operaciones nunca lleguen a ser una división por cero, puesto que esto generará un error y graficas erróneas.

Otro ejemplo de la traza de Nyquist, para la función de transferencia:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)} \quad (4.14)$$

El programa de la Fig. 4.33 producirá una traza de Nyquist correcta (4.34).

¹¹³ Ejemplo realizado en MATLAB por la autora

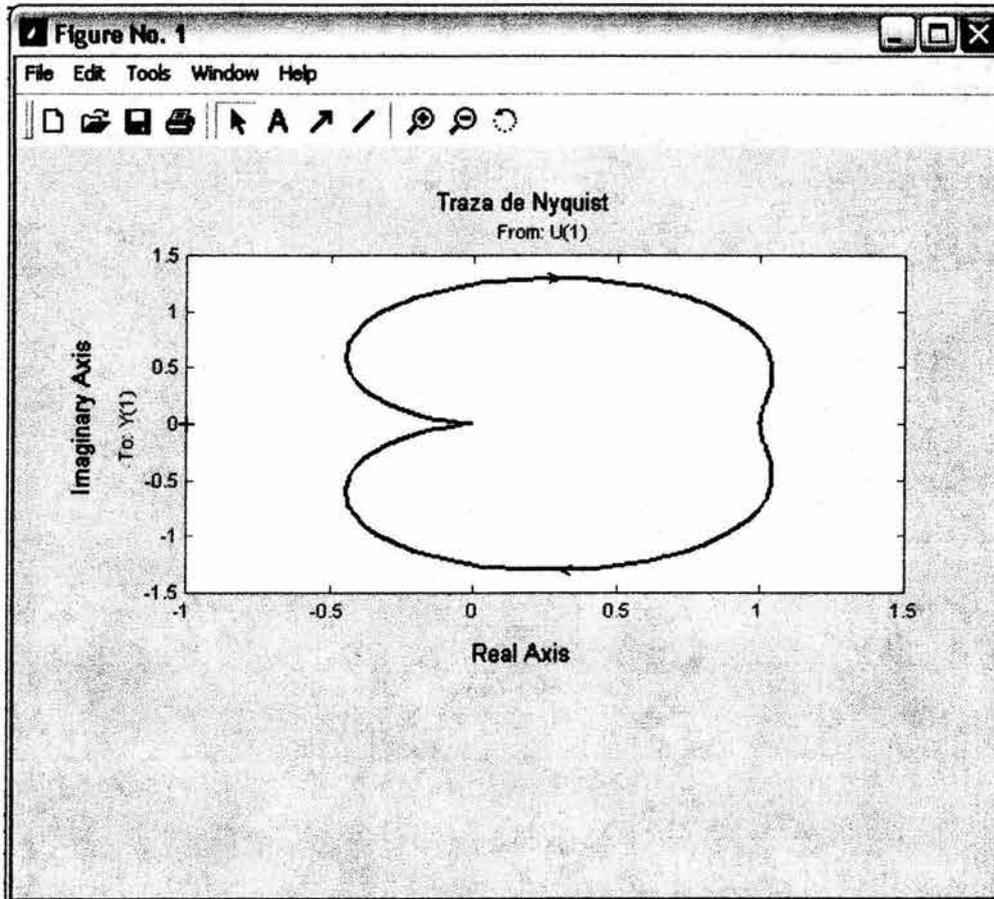


Fig.4.34 Gráfica de trazas de Nyquist ¹¹⁴

```

MATLAB Command Window
File Edit View Window Help
>> num=[0 0 1];
>> den=[1 1 0];
>> nyquist(num,den)
>> v=[-2 2 -5 5];axis(v)
>> grid
>> title('Traza de Nyquist')
>>
Ready
NUM

```

Fig.4.35 Cálculos de trazas de Nyquist ¹¹⁵

¹¹⁴ Ejemplo realizado en MATLAB por la autora

¹¹⁵ Ejemplo realizado en MATLAB por la autora

El comando "axis" hace la función de combinar las líneas resultantes en la gráfica de la Fig. 4.36.

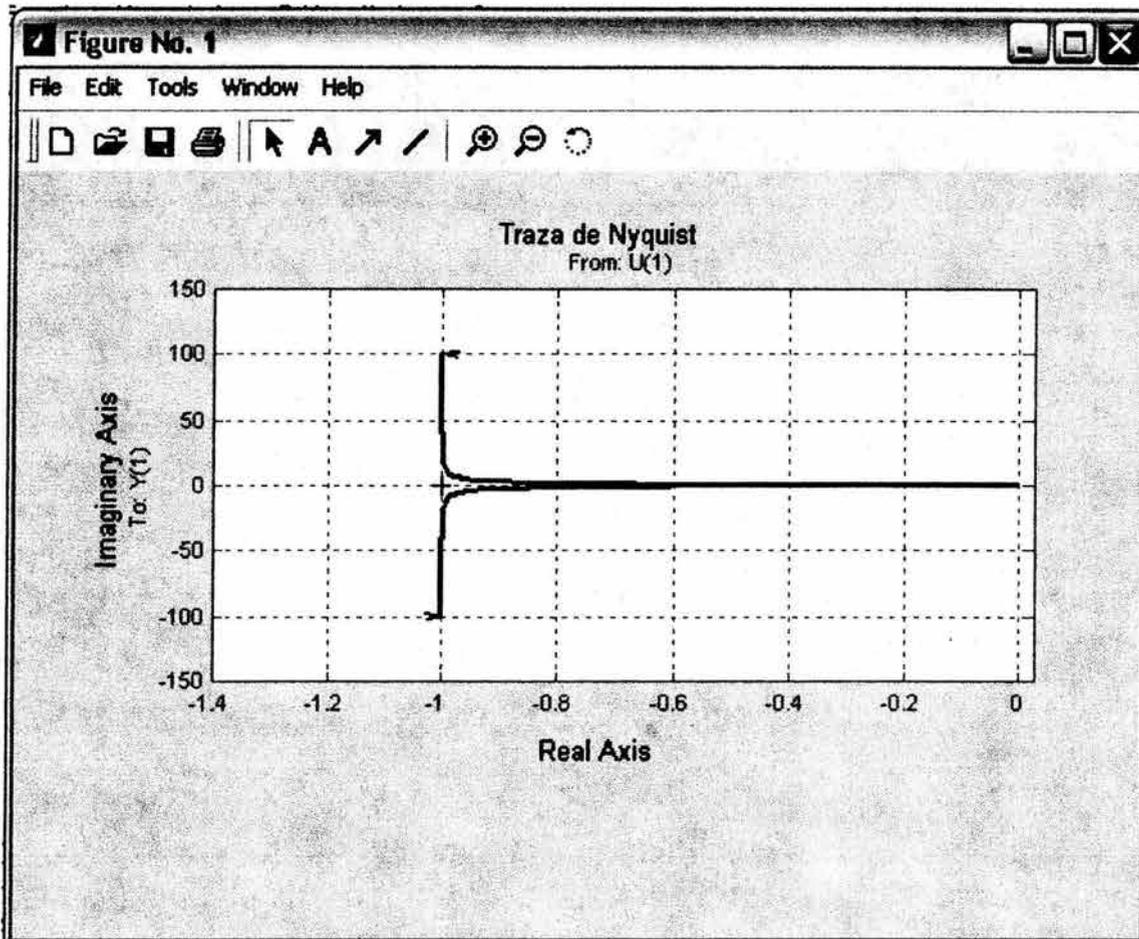


Fig.4.36 Gráfica de trazas de Nyquist ¹¹⁶

Como se puede observar, el uso de las diferentes funciones con las que cuenta MATLAB son de gran utilidad en el análisis de sistemas de control, claro que tomando en cuenta que se tiene que tener nociones de la teoría básica del control de lo contrario estos comandos y sus resultados no tienen ningún significado.

¹¹⁶ Ejemplo realizado en MATLAB por la autora

EJERCICIOS PROPUESTOS

- 4.1 Obtener la respuesta escalón unitario de un sistema realimentado unitariamente con la ayuda de MATLAB, cuya función de transferencia en lazo abierto es:

$$G(s) = \frac{4}{s(s+4)}$$

- 4.2 Obtener la respuesta impulso unitario y la respuesta escalón unitario de un sistema realimentado unitariamente en MATLAB, cuya función de transferencia en lazo abierto sea:

$$G(s) = \frac{2s+1}{s^2}$$

- 4.3 Usando MATLAB obtener la respuesta escalón, la respuesta rampa unitaria y la respuesta impulso unitario del siguiente sistema:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{10}{s^2 + 2s + 10}$$

- 4.4 Considerando el sistema cuya función de transferencia en lazo abierto $G(s)H(s)$ se obtiene mediante:

$$G(s)H(s) = \frac{36}{(s^2 + 2s + 2)(s^2 + 2s + 5)}$$

Graficar un diagrama del lugar geométrico de las raíces con MATLAB

- 4.5 Graficar las trazas de Bode con MATLAB de:

$$G(s) = \frac{10(s^2 + 0.4s + 1)}{s(s^2 + 0.8s + 9)}$$

- 4.6 Graficar un lugar geométrico de Nyquist en MATLAB para el sistema de control:

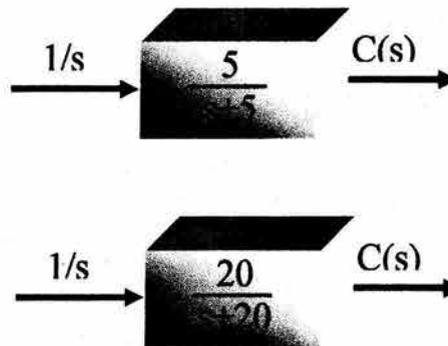
$$G(s) = \frac{(1-s)}{(s+1)}$$

- 4.7 Un ser humano responde a un indicio visual con una respuesta física. La función de transferencia que relaciona la respuesta física de salida $P(s)$, con el comando de entrada visual $V(s)$ es:

$$G(s) = \frac{P(s)}{V(s)} = \frac{(s+0.5)}{(s+2)(s+5)}$$

Utilizar MATLAB para simular el sistema y obtener una grafica de la respuesta escalón.

- 4.8 Graficar las respuestas escalón en MATLAB de:



- 4.9 Determinar la respuesta rampa unitaria en MATLAB de la función de transferencia:

$$G(s) = \frac{185.71}{(s+6.5)(s+10)(s+20)}$$

- 4.10 Determinar la respuesta impulso unitari en MATLAB de la función de transferencia:

$$G(s) = \frac{197.14}{(s+7)(s+15)}$$

**SIMULINK PARA LA
SIMULACIÓN DE
SISTEMAS DE CONTROL**

5.1 BIBLIOTECA DE SIMULINK

El ambiente de trabajo de SIMULINK ya ha sido comentado en el primer capítulo, ahora se dará énfasis al como utilizarlo orientado al control.

La librería o biblioteca de SIMULINK se encuentra una gama muy completa de herramientas para la implementación y simulación de sistemas de control. Primero se observa que al abrir SIMULINK abre automáticamente las librerías como se muestra en la Fig. 5.1.

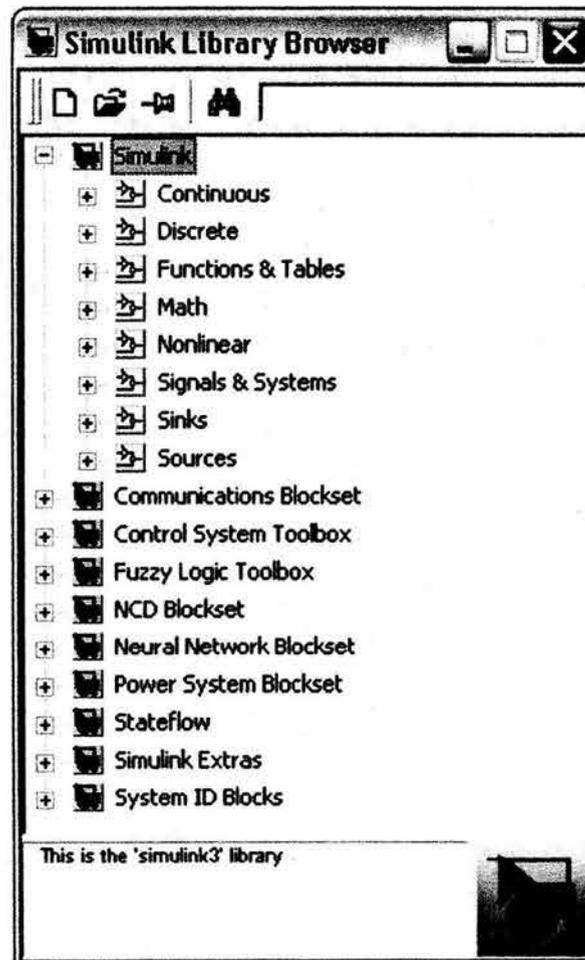


Fig.5.1 Librerías de SIMULINK¹¹⁷

¹¹⁷ Ventana tomada de SIMULINK por la autora

Ahora se muestra en forma general cada una de las librerías de SIMULINK.

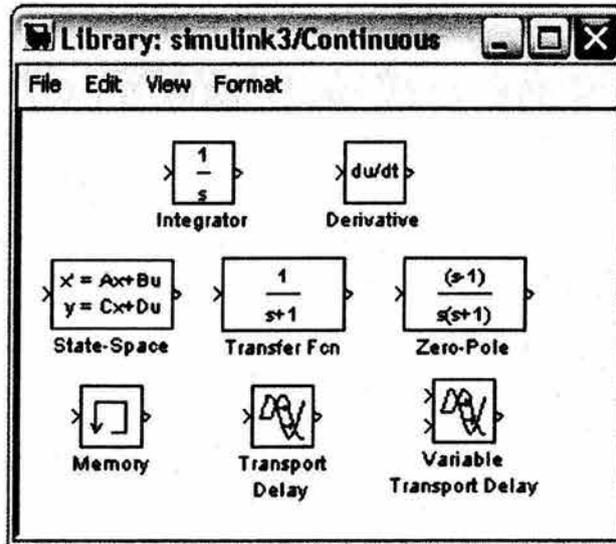


Fig.5.2 Ventana de la librería de señales continuas (Continuous)

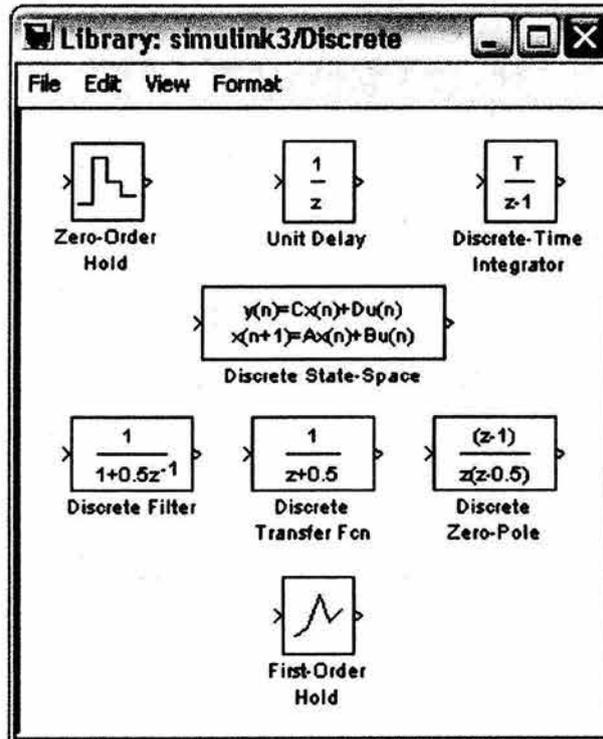


Fig. 5.3 Ventana de la librería de señales discretas (Discrete)

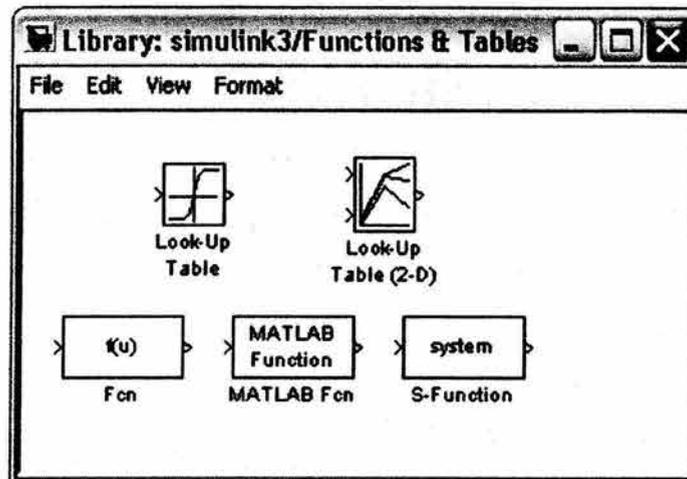


Fig. 5.4 Ventana de la librería de funciones y tablas (Functions & Tables)

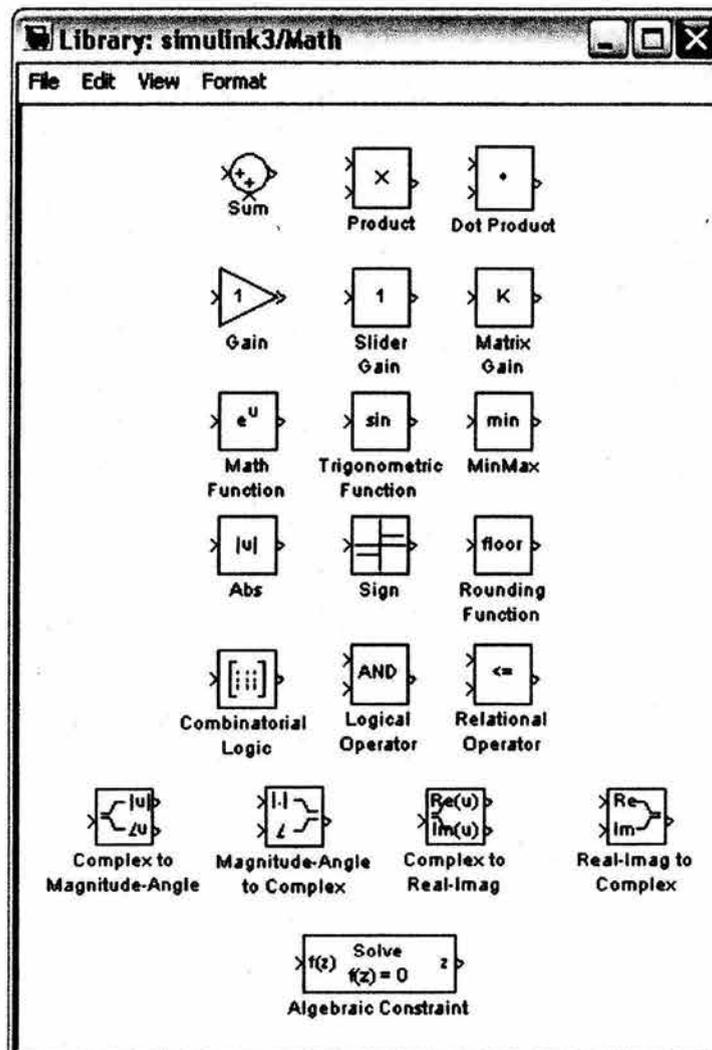


Fig. 5.5 Ventana de la librería matemática (Math)

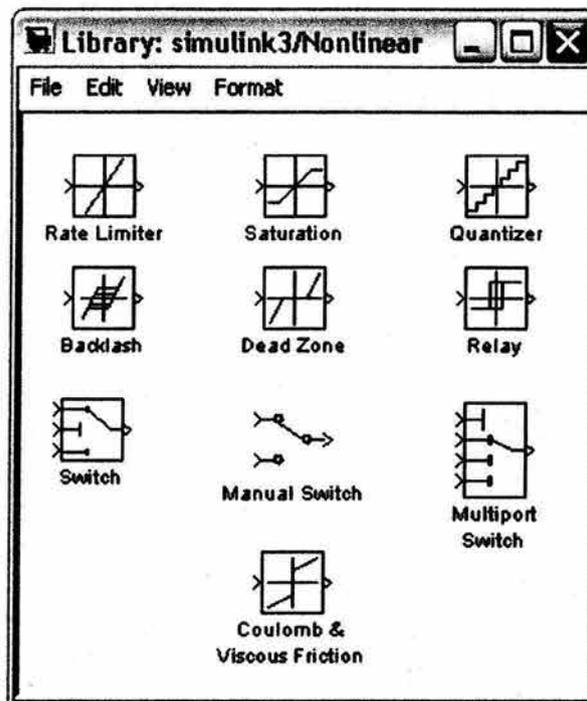


Fig. 5.6 Ventana de la librería de señales no lineales (Nonlinear)

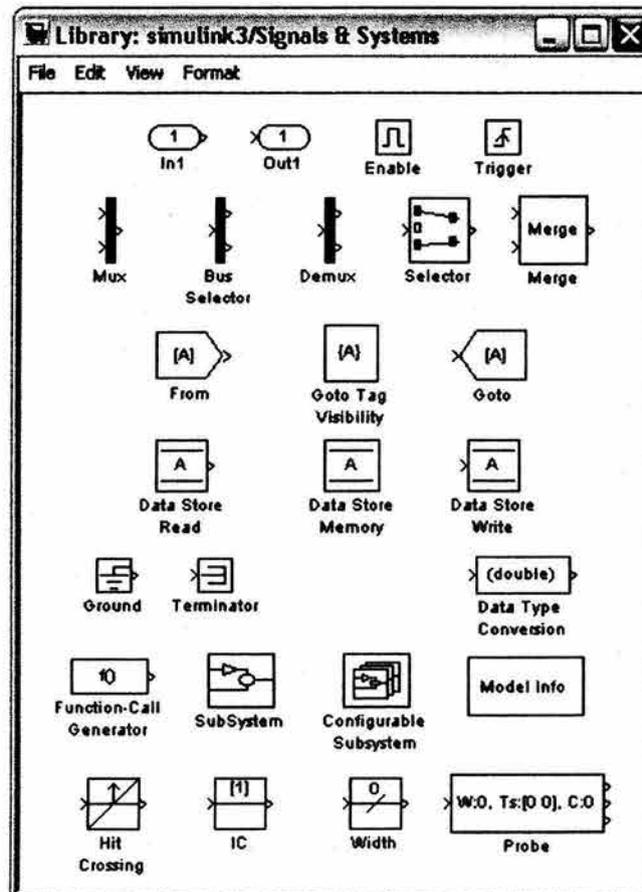


Fig.5.7 Ventana de la librería de señales y sistemas (Signal & Systems)

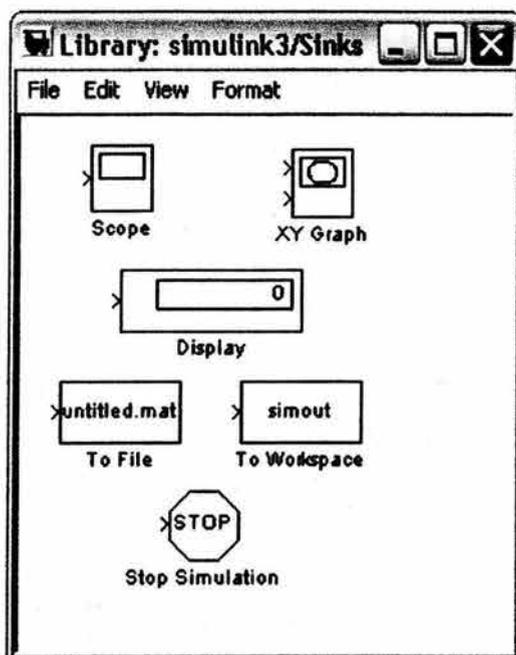


Fig. 5.8 Ventana de la librería de salidas (Sinks)

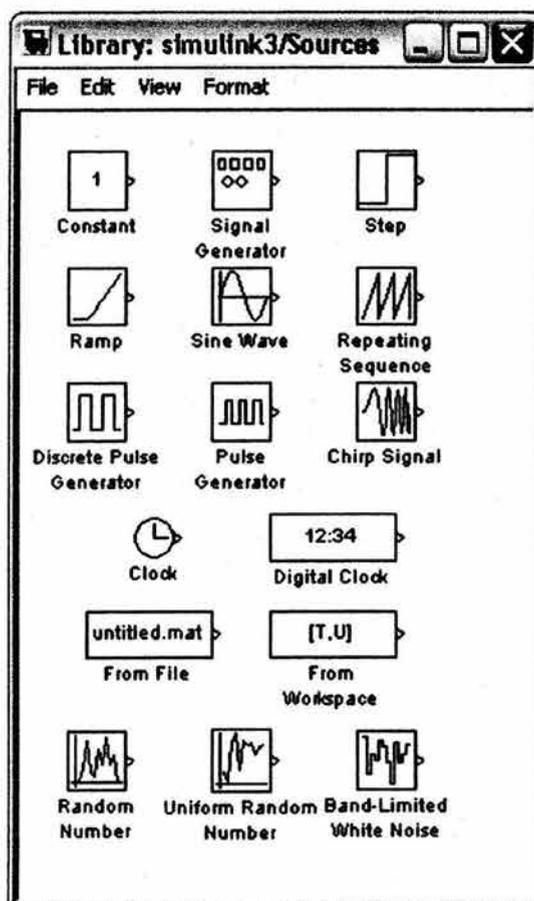


Fig. 5.9 Ventana de la librería de fuentes (Sources)

Todas estas bibliotecas se darán uso al tiempo que se vayan haciendo los ejemplos, así se verá más claro su funcionamiento, pero ya se tendrá de referencia sus respectivas ventanas.

5.2 PASOS PARA EL USO DE SIMULINK

A continuación se enumerarán los pasos a seguir para el uso de SIMULINK, claro que es sólo una guía, en un principio se necesitará hacerlos, después será cuestión de tiempo el cómo se use SIMULINK según las necesidades.

- 1) *Entrar a SIMULINK.* Existen dos formas de acceder a SIMULINK, por medio del botón "SIMULINK Library Browser", o dando el comando de "simulink" de la ventana principal de MATLAB. Por ambos caminos dará como resultado la ventana de las librerías de SIMULINK que se observa en la Fig. 5.1. Para poder realizar un modelo nuevo se da clic en el primer icono que se muestra en la Fig. 5.10.



Fig. 5.10 Botón para Crear Nuevo Modelo

- 2) *Seleccionar los subsistemas.* Solo es necesario dar doble clic sobre cualquier icono principal para ver desplegar cada una de las bibliotecas de SIMULINK. Al tener ya expandida la biblioteca es posible observar en el caso de la de SIMULINK las diferentes librerías como la de Continuous, Integrator, Memory, etc. Esta también se puede observar en bloques dando clic derecho sobre Continuous y dando clic en la única opción dada abrirá una ventana como la de la Fig. 5.2

- 3) *Armado de subsistemas.* Es necesario para el armado de un subsistema arrastrar de la ventana de la biblioteca de SIMULINK a la hoja de trabajo nueva realizada en el paso 1. El bloque arrastrado puede cambiar de tamaño, de etiqueta y de posición las veces que sea necesario.
- 4) *Interconexión de subsistemas.* Se debe posicionar el puntero del ratón en el costado del bloque dando clic y arrastrando hacia el bloque al que ha de ser conectado y aparecerá la flecha de unión, esto se puede hacer entre dos o más bloques.
- 5) *Parámetros del subsistema.* Se tiene que dar doble clic sobre el bloque al cual se requiere hacer un cambio en sus parámetros, y aparecerá una ventana que dará opción a cambiarlo dependiendo del bloque de que se trata.
- 6) *Parámetros para la simulación.* Eligiendo la opción “parameters” del menú *simulation* de la hoja de trabajo de SIMULINK se pueden cambiar parámetros como el tiempo para el subsistema en su simulación.
- 7) *Inicio de simulación.* Se debe tener terminado el subsistema, por lo general para poder observar la simulación se utiliza el bloque “scope” de la librería “sinks” que se observa en la Fig. 5.8. Se da doble clic sobre el *scope* y *start* de la barra de herramientas o del menú *simulation*, y se observará el resultado de la simulación en la ventana que se abrió al dar doble clic sobre *scope*.
- 8) *Cambiar la gráfica.* Se puede cambiar la escala con la que se observa el resultado de la simulación dando clic sobre la gráfica.
- 9) *Guardar el subsistema.* Sólo es necesario dar la opción “save” del menú *file*. Este se guarda con extensión MDL y se puede abrir en cualquier momento que se requiera.

Todos estos pasos son básicos, ya aplicados a un ejemplo se pueden entender mejor, como se verá en los siguientes puntos.

5.3 SIMULACIÓN DE SISTEMAS

En el primer ejemplo se simula la respuesta escalón de tres sistemas lineales, para comparar su respuesta, tomando en cuenta sus ecuaciones de transferencia:

$$T_1(s) = \frac{24.542}{s^2 + 4s + 24.542} \quad (5.1)$$

$$T_2(s) = \frac{245.42}{(s+10)(s^2 + 4s + 24.542)} \quad (5.2)$$

$$T_3(s) = \frac{73.626}{(s+3)(s^2 + 4s + 24.542)} \quad (5.3)$$

Para construir el subsistema se partirá de realizar los pasos sugeridos en el punto anterior, ya estando en el área de trabajo se arrastrarán los bloques de las respectivas bibliotecas de SIMULINK como se ve en la Fig. 5.11.

Primero de la ventana de Source (Fig. 5.9) se arrastra el bloque de Step, que es la fuente de entrada escalón de 1 volt y sus parámetros deben quedar como se muestran en la Fig. 5.12.

El primer sistema consta de 2 bloques, el primero de Gain que es el número multiplicador de la función de transferencia 5.1, que este bloque se arrastra de la ventana de la Fig. 5.5 Math, esta da por default un valor de 1, y para cambiarlo por el deseado solo es necesario dar doble clic sobre él y sale la ventana (Fig. 5.13) donde se hace el cambio.

Para la función de transferencia 5.1 se arrastra el bloque Transfer Fcn de la ventana Continuous (Fig. 5.2). Para cambiar sus parámetros es

necesario dar doble clic sobre ella y aparecerá la ventana de la Fig. 5.14 donde es posible cambiarlos.

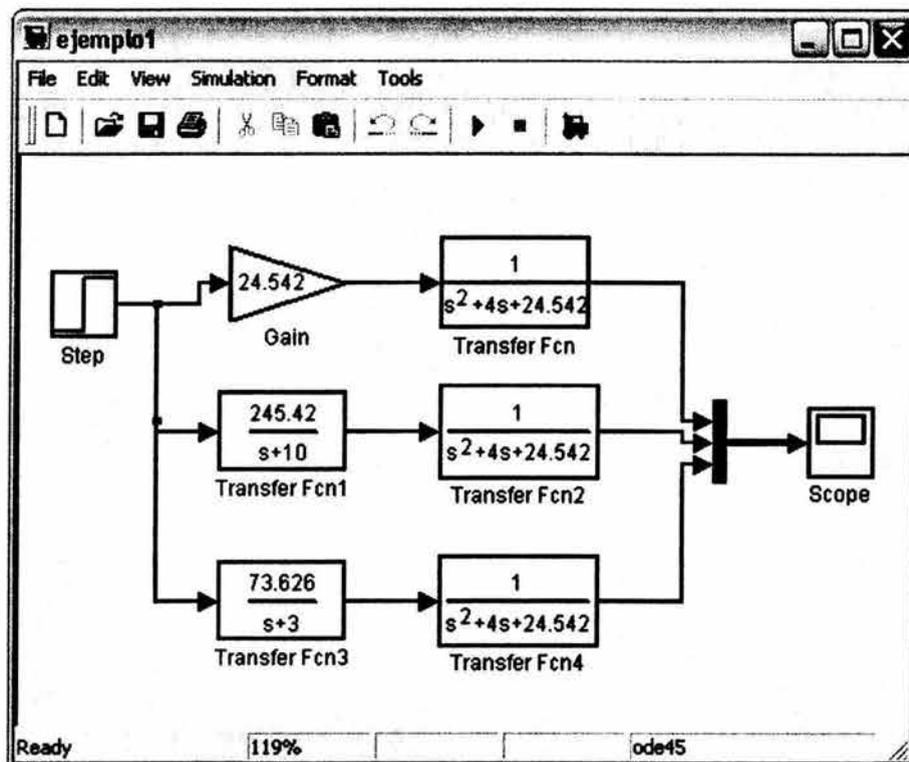


Fig. 5.11 Sistema armado en SIMULINK¹¹⁸

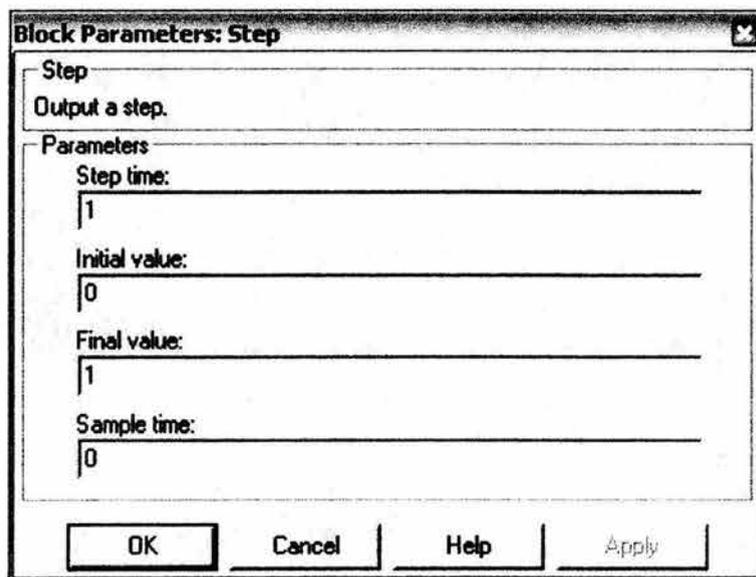


Fig. 5.12 Parámetros de la fuente (Step)

¹¹⁸ Sistema realizado por la autora en SIMULINK

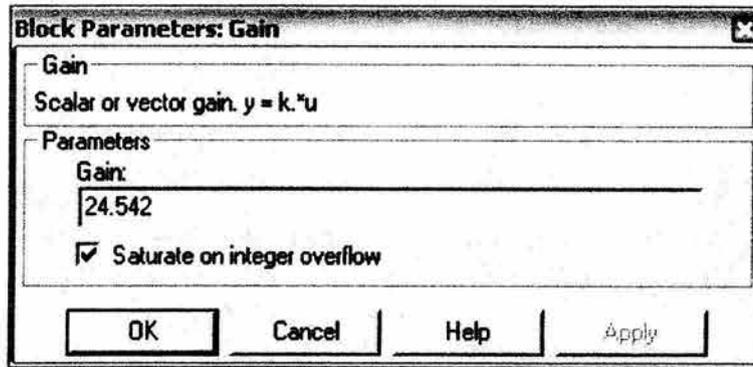


Fig. 5.13 Ventana de parámetros de Gain

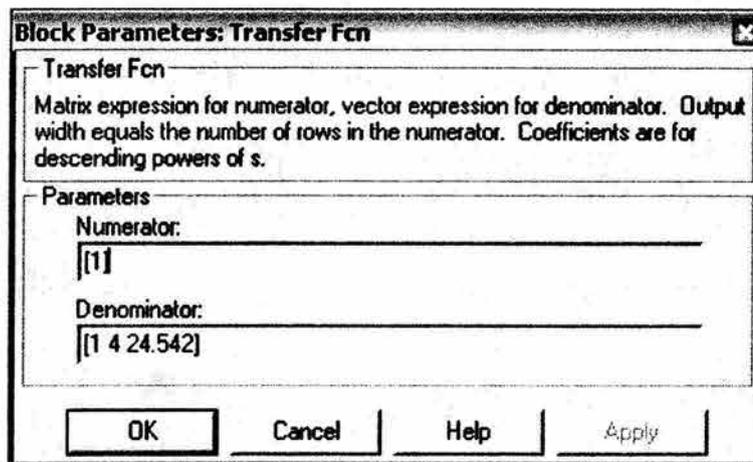


Fig. 5.14 Ventana de parámetros de Transfer Fcn

Se repite la operación anterior con todas las funciones de transferencia restantes. Para poder observar la salida del sistema es necesario conjuntar las tres funciones, por medio de un multiplexor (Mux) que es arrastrado de la ventana Signals & Systems (Fig. 5.7) que viene solo para dos funciones, pero esto es cambiado dando doble clic sobre él y cambiando el 2 por un 3 (Fig. 5.14).

Por ultimo se coloca el bloque Scope de la ventana Sinks (Fig. 5.8), el cual nos permitirá ver la simulación del sistema dando doble clic sobre el aparecerá una ventana en negro hasta cuando se empieza la simulación del sistema se observará el resultado.

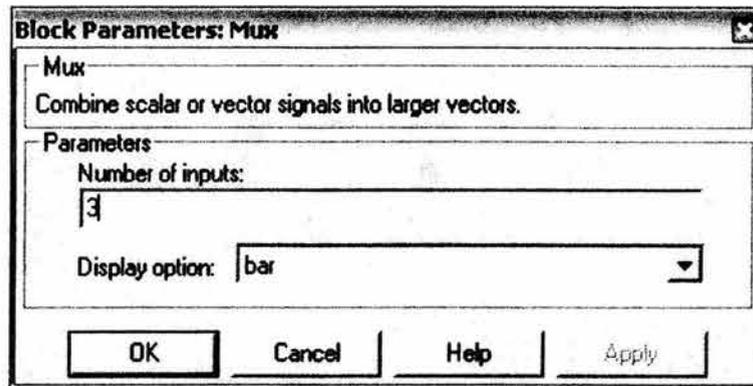


Fig. 5.15 Ventana de parámetros de Mux

Ahora bien, en ocasiones es necesario cambiar alguno parámetros de la simulación, para ello se debe ir al menú Simulation de la hoja de trabajo de SIMULINK y dar clic en la opción Parameters, y abrirá una ventana como la de la Fig. 5.16. Ya modificando los parámetros necesarios como puede ser el tiempo de parar (Stop Time), ya es posible empezar la simulación dando clic en Start.

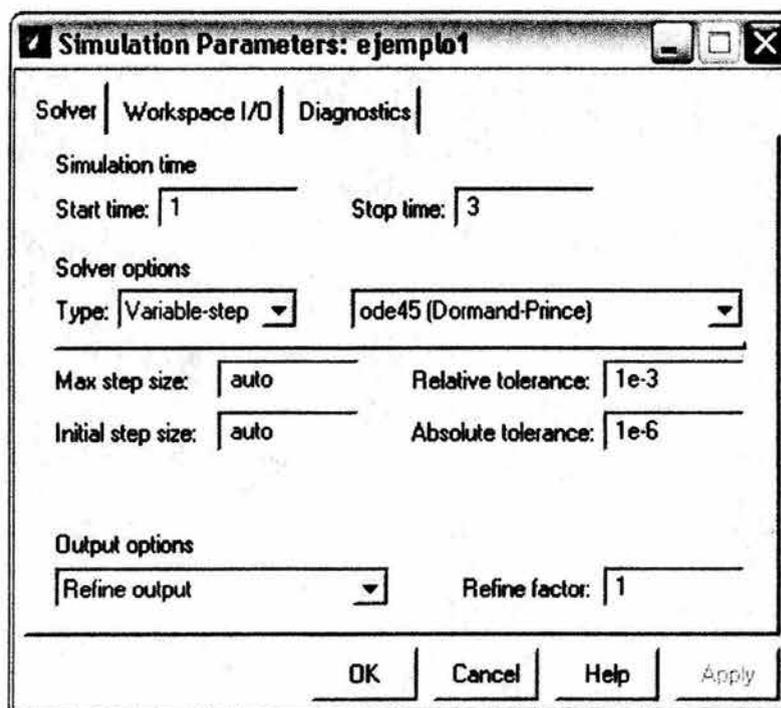


Fig. 5.16 Ventana de parámetros de la simulación

Es necesario que se vayan chocando los pasos anteriores. La simulación obtenida de los tres sistemas en forma simultánea se ve en la Fig. 5.17.

Las gráficas se codifican en colores en el orden en el que éstas aparecen en las entradas del Mux, de la forma en que sigue: amarillo, magenta, cian, rojo, verde y azul. Si el Mux tiene más de una entrada los colores se recirculan.

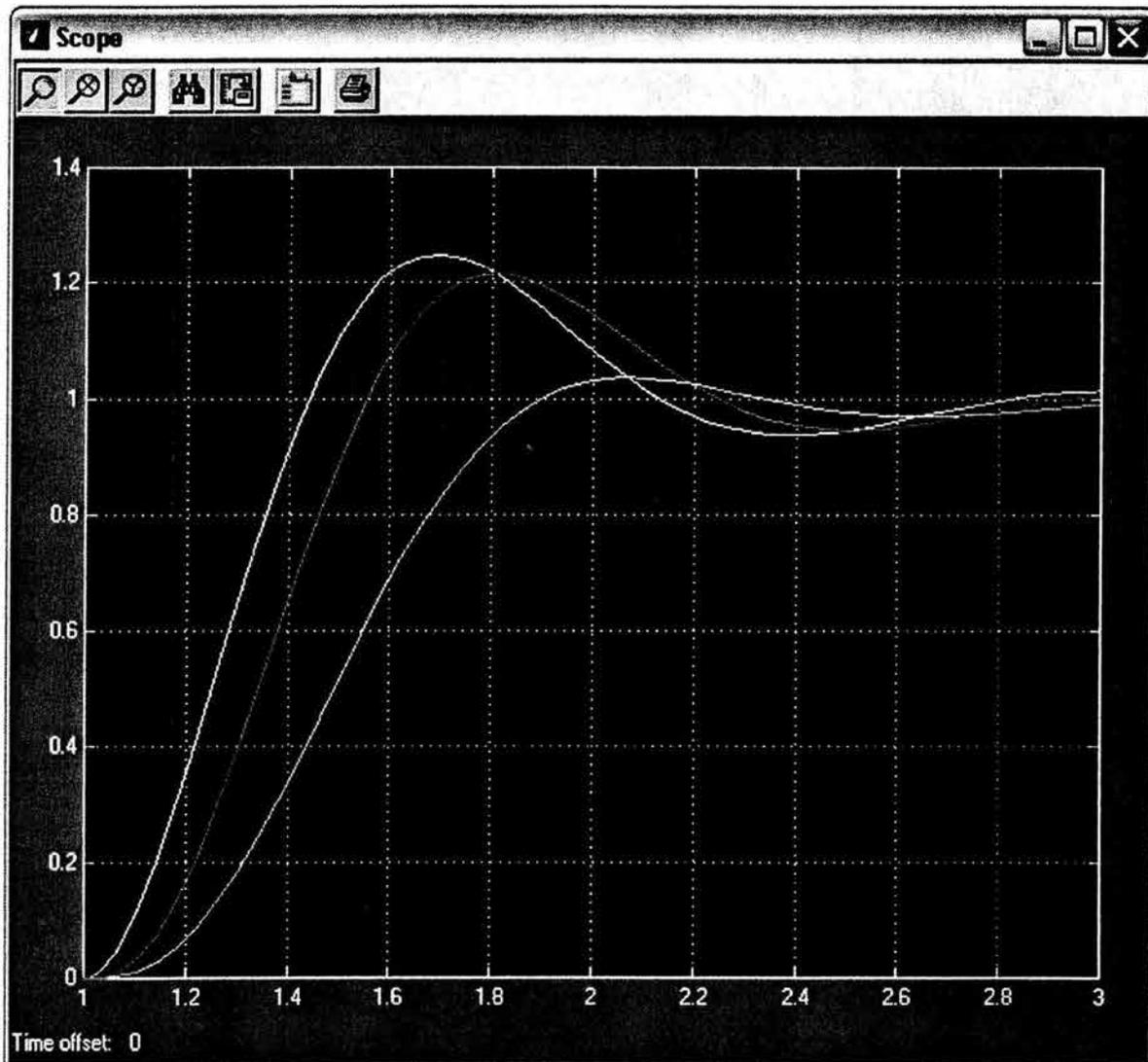


Fig. 5.17 Ventana de la simulación del Scope

No esta de más mencionar que la ventana Scope cuenta con algunos botones con los cuales es posible interactuar con la gráfica como son:

Botón 1: permite aumentar o reducir cualquier área de la gráfica.

Botón 2: expande o reduce la gráfica sólo en dirección de x.

Botón 3: expande o reduce la gráfica sólo en dirección de y.

Botón 4: regresa a la gráfica original.

Botón 5: guarda los parámetros actuales de la gráfica.

Botón 6: sirve para fijar los parámetros de visualización.

Botón 7: realiza la impresión de la gráfica.

Otro ejemplo del funcionamiento de SIMULINK, es la simulación del sistema en lazo cerrado mostrado estable en la Fig. 3.9(a)

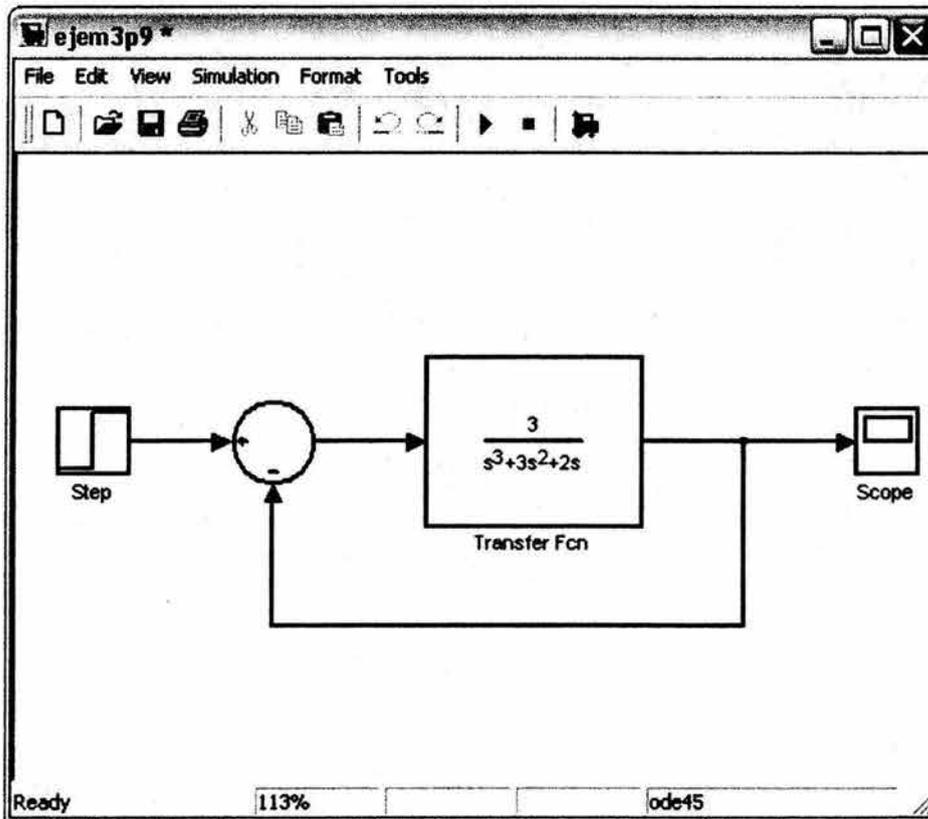


Fig. 5.18 Sistema armado en SIMULINK ¹¹⁹

¹¹⁹ Realizado por la autora

Como se puede observar el armado es básicamente igual que en el anterior, con un elemento diferente, el punto sumador que se obtiene de la ventana Math (Fig. 5.5) y la simulación de este se observa en la Fig. 5.19.

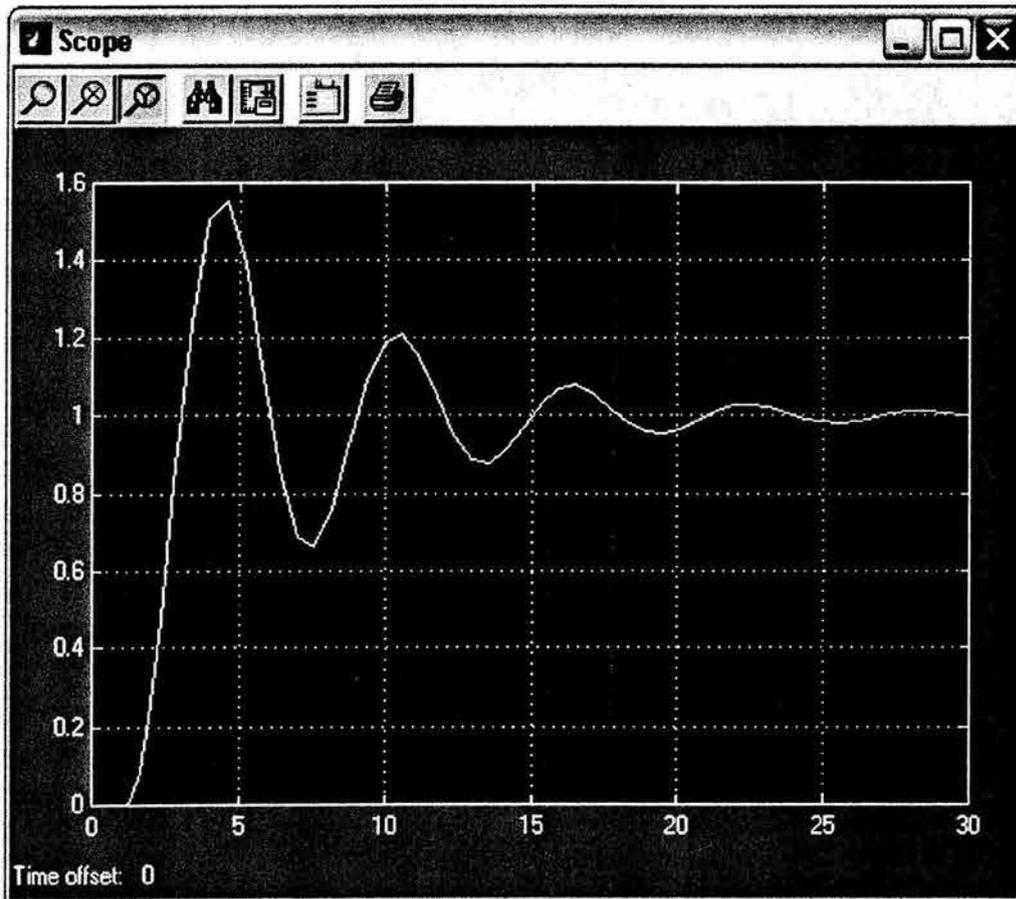


Fig. 5.19 Simulación de un sistema estable¹²⁰

El ejemplo siguiente es de un sistema inestable que se encuentra en la Fig. 3.10 (a), el armado de este sistema es muy similar que el anterior.

La función de transferencia es:

$$T(s) = \frac{3}{s(s+1)(s+2)} \quad (5.4)$$

¹²⁰ Realizado por la autora en SIMULINK

En este caso se hizo la multiplicación de los componentes del denominador, pero también se pueden colocar diferentes bloques, segmentando la ecuación y el resultado es el mismo, el de la Fig. 5.22.

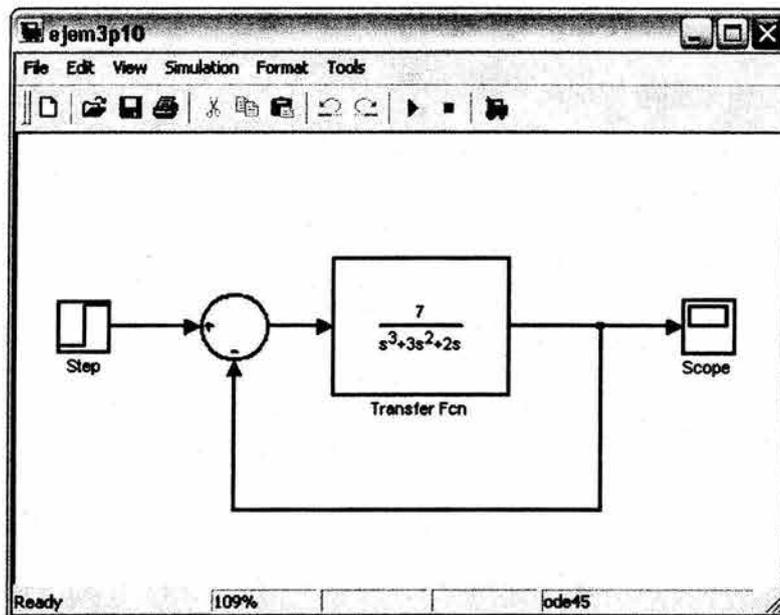


Fig. 5.20 Sistema armado en SIMULINK ¹²¹

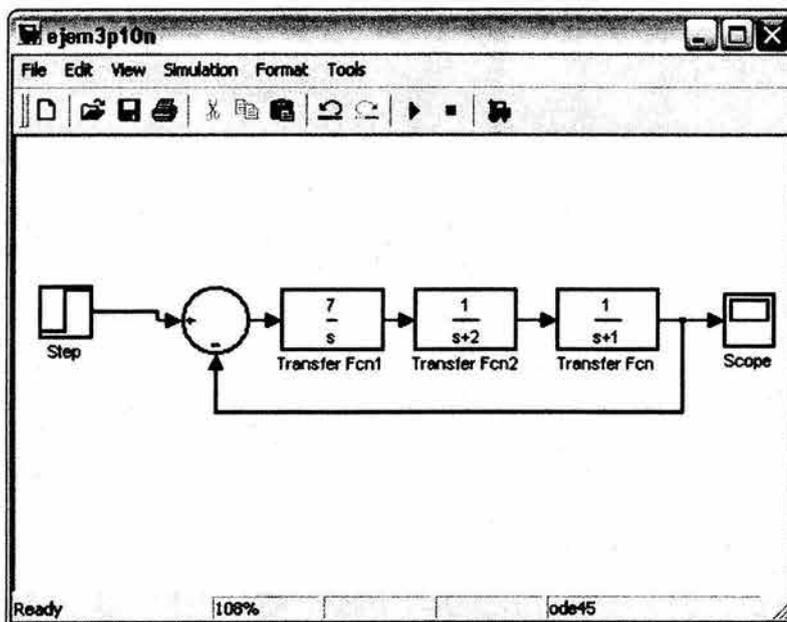


Fig. 5.21 Sistema armado en SIMULINK ¹²²

¹²¹ Realizado por la autora

¹²² Realizado por la autora

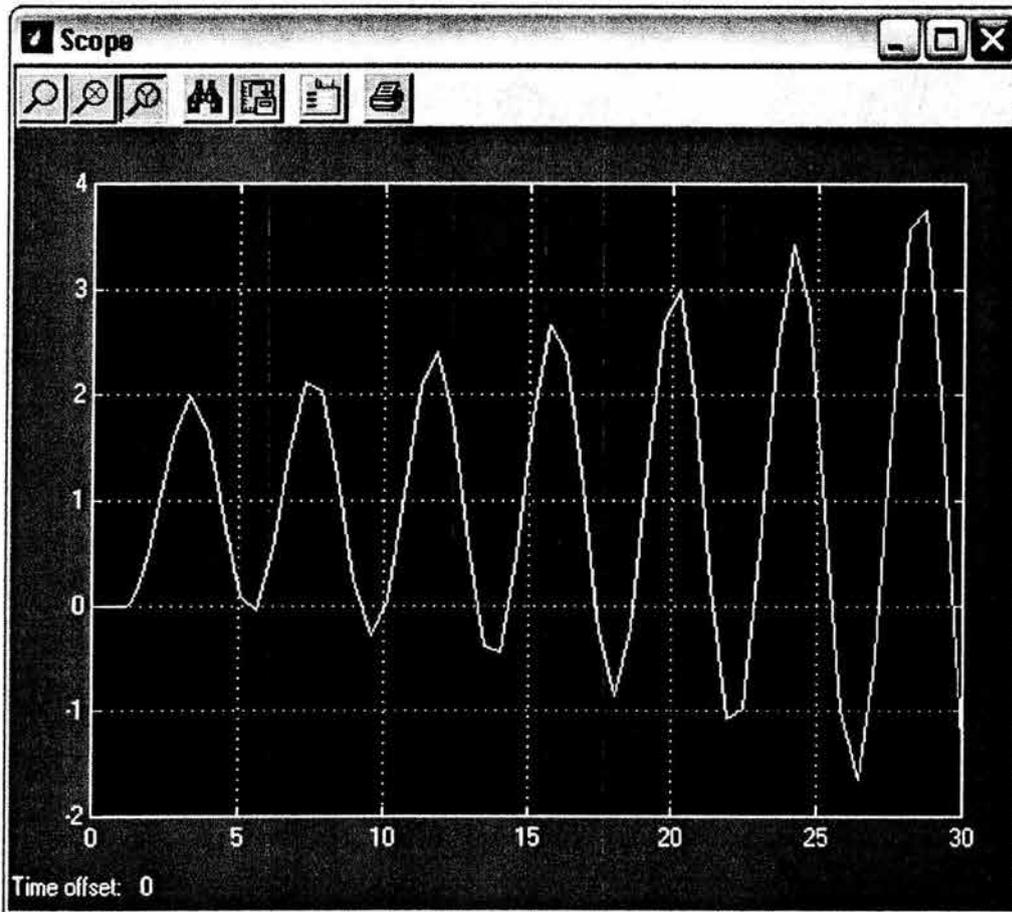


Fig. 5.22 Simulación de un sistema inestable ¹²³

Otros de los ejemplos realizados anteriormente, pero sin la ayuda del SIMULINK se observan a continuación en la Fig. 5.23, este fue realizado en el capítulo 4 cuando se utilizó la instrucción “step” de MATLAB. En esta ocasión se realizó este ejemplo de la respuesta escalón unitario con los diagramas a bloques y la fuente “step” de SIMULINK, su gráfica generada se ve en la Fig. 5.24 si se compara con el ejemplo de la Fig. 4.8 dan una respuesta igual a la función de transferencia:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 0.2s + 1} \quad (5.5)$$

¹²³ Realizado por la autora en SIMULINK

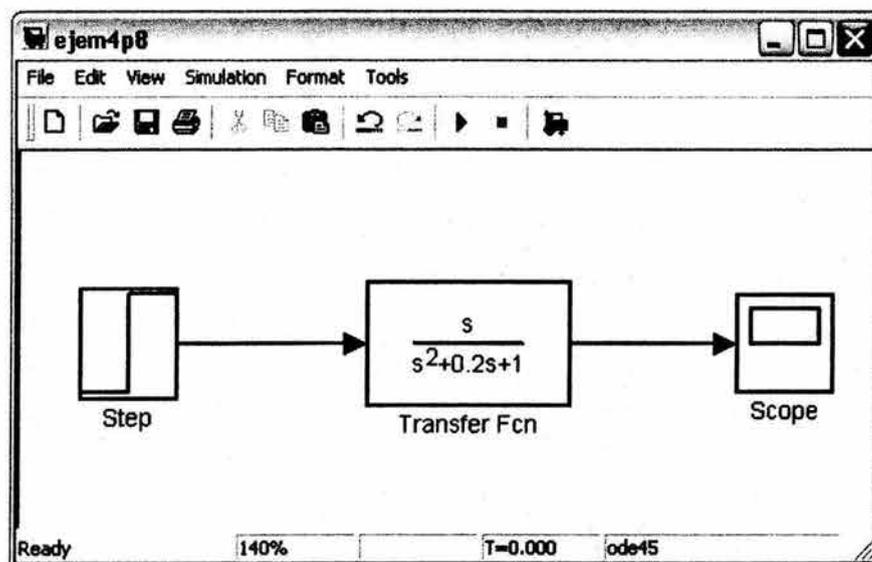


Fig. 5.23 Sistema armado en SIMULINK ¹²⁴

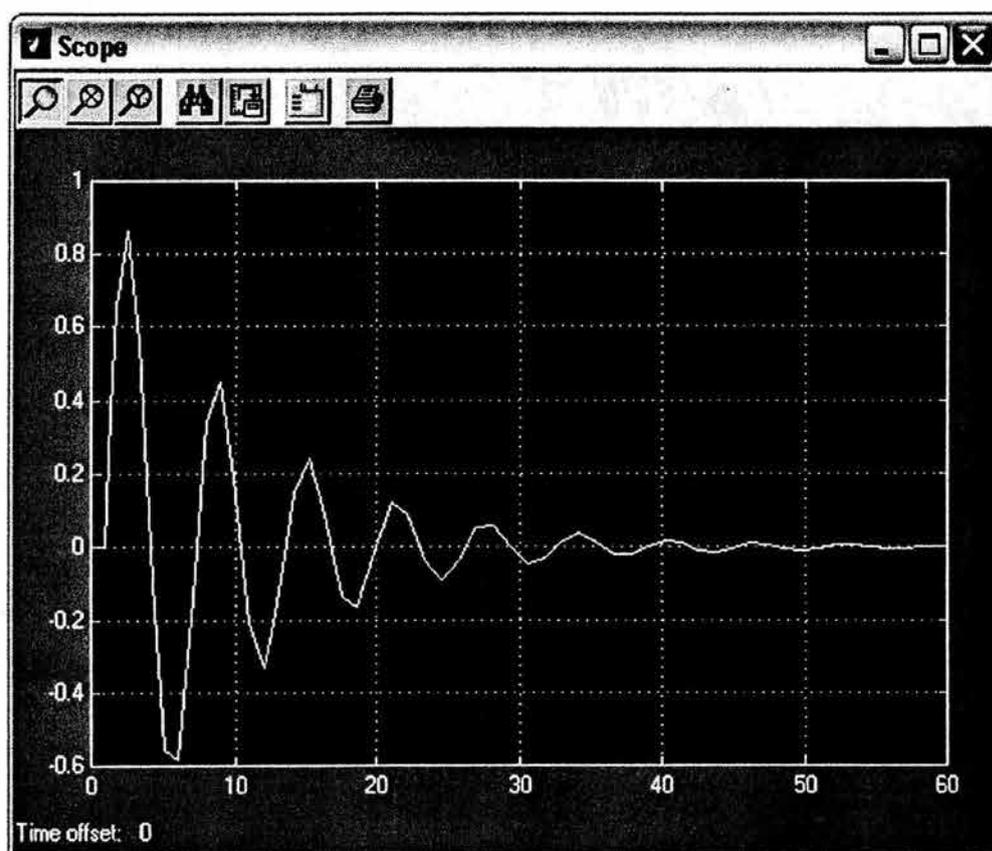


Fig. 5.24 Simulación de un sistema ¹²⁵

¹²⁴ Realizado por la autora en SIMULINK

¹²⁵ Realizado por la autora en SIMULINK

Se puede apreciar que el uso del SIMULINK es muy práctico, solo es cuestión de familiarizarse con el ambiente y las herramientas para realizar la simulación de cualquier sistema de control tanto analógico como digital. La versión del MATLAB utilizado es la 5.3, ha salido una nueva versión, que diferencia un poco en su ambiente gráfico, pero por lo demás su utilización es básicamente la misma tanto en la ventana de trabajo como en el SIMULINK.

EJERCICIOS PROPUESTOS

- 5.1 Realizar la simulación en SIMULINK de la respuesta escalón unitario del sistema siguiente:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 15s + 10}$$

- 5.2 Obtener la simulación en SIMULINK de la respuesta rampa unitaria de la función de transferencia siguiente:

$$G(s) = \frac{16}{s + 0.8}$$

- 5.3 Utilizar SIMULINK para obtener la respuesta escalón de un sistema,

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 10}$$

Bajo las siguientes condiciones:

- El sistema es lineal y excitada por un amplificador cuya ganancia es 10.
 - El amplificador se satura a ± 0.25 volts. Describir el efecto de la saturación sobre la salida del sistema.
- 5.4 Obtener la simulación en SIMULINK del sistema,

$$G(s) = \frac{10}{(s+1)(s+4)(s+5)(s+6)}$$

- 5.5 Dado un sistema realimentado unitariamente, utilizar SIMULINK para observar su representación. Con una función de transferencia,

$$G(s) = \frac{7}{s(s+9)(s+12)}$$

- 5.6 Realizar la simulación del ejercicio 4.7 en SIMULINK. Compare los resultados de MATLAB y SIMULINK.
- 5.7 Simular la respuesta escalón en SIMULINK, de las funciones de transferencias:

$$\text{a) } T_1(s) = \frac{121}{s^2 + 13.2s + 121} \quad \text{b) } T_2(s) = \frac{0.04}{s^2 + 0.02s + 0.04} \quad \text{c) } T_3(s) = \frac{1.05}{s^2 + 1.6s + 1.05}$$

- 5.8 Simular las respuestas escalón en SIMULINK del ejercicio 4.8, comparando los resultados de MATLAB.
- 5.9 Simular las respuestas escalón en SIMULINK del ejercicio 4.9, comparando los resultados de MATLAB.
- 5.10 Simular las respuestas escalón en SIMULINK del ejercicio 4.10, comparando los resultados de MATLAB.

CONCLUSIONES

Después de haber realizado esta tesis, que lleva consigo tanto en el campo del software de uso específico como del control analógico, campos que no son opuestos si no que se complementan, puedo decir que es necesario tener paciencia con lo que respecta a encontrar información concerniente al MATLAB, puesto que a pesar de ser un software conocido, no es el más documentado.

Esta tesis tenía como hipótesis que si sería posible que un programa como lo es el MATLAB sería capaz de sustituir a un laboratorio físico de control analógico, y se puede decir que se probó la hipótesis, puesto que con lo que respecta a los temas que se deben de ver en dicha materia, no existió ningún problema en que se utilizará MATLAB en cada uno de ellos.

El implementar MATLAB en casi cualquier computadora es factible, puesto que para su instalación sólo requiere de 128 Mb en RAM y 600 Mb de disco duro, se puede decir que en una maquina de mediana capacidad es idónea para ser instalado el MATLAB.

Hablando de la factibilidad de que la gente pueda usarlo, es de más fácil acceso para quienes les es familiar el ámbito de la programación y las matemáticas, sin embargo no excluye a las personas que no tengan estos conocimientos, pero no tendrán la misma ventaja.

Al terminar de hacer los diferentes ejercicios de aplicación de los temas de sistemas de control, se vio que todos fueron satisfechos con los comandos y funciones con los que cuenta MATLAB, por ello puedo afirmar que MATLAB aplicado a sistemas de control analógico es una buena opción para que los alumnos de de dicha materia acudan a él como un software de apoyo y complemento de lo que se ve en clase, puesto que lo que se aprende en el

aula es la base pero también hay que recordar que afuera de ella existe un universo lleno de conocimiento y alternativas de aprendizaje.

BIBLIOGRAFÍA

- 1) NAKAMURA, Shoichiro, **Análisis numérico y visualización con *MATLAB***, Editorial Prentice Hall Hispanoamericana, S.A., México, 1999, 476 pp.
- 2) NISE, Norman S., **Sistemas de control para ingeniería**, Editorial Continental, S.A., México, 2002, 970 pp.
- 3) OGATA, Katsuhiko, **Ingeniería de control moderna**, 3ª ed., Editorial Prentice Hall Hispanoamericana, S.A., México, 1998, 997 pp.
- 4) PÉREZ, Cesar, **MATLAB y sus aplicaciones en las ciencias y la ingeniería**, Editorial Pearson Educación, España, 2000, 632 pp.
- 5) RODRÍGUEZ, Francisco R., **Dinámica de sistemas**, Editorial Trillas, S.A. de C.V., México, 1989, 665 pp.
- 6) SHUMWAY, Dan y otros, **MATLAB edición para estudiante**, Editorial Prentice Hall Hispanoamericana, S.A., México, 2001, 820 pp.

Otras fuentes

- 1) Universidad de Michigan: www.engin.umich.edu/group/ctm
- 2) Universidad de Florida: www.math.ufl.edu/help/matlab-tutorial
- 3) The MathWorks International: www.mathworks.com
- 4) The MathWorks España: www.mathworks.es/products/controldesign
- 5) Monografías: www.monografias.com/trabajos6/sicox/sicox.shtml
- 6) Real Academia Española: www.rae.es