UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"Modelo de Selección de cartera de crecimiento óptimo para fondos del retiro"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

A C T U A R I A

P R E S E N T A:

Norma Rodríguez Aguilar

DIRECTORA DE TESIS:
Act. Yolanda Silvia Calixto García

2004

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"Modelo de Selección de cartera de crecimiento óptimo para fondos del retiro."

realizado por Norma Rodríguez Aguilar

con número de cuenta 8922020-9 , quien cubrió los créditos de la carrera de: Actuaría.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Act. Yolanda Silvia Calixto García	
Propietario	Act. María Aurora Valdés Michell	
Propietario	Act. Carlos Flavio Espinosa López	Carlos F. Espinosa L.
Suplente	Act. Benigna Cuevas Pinzón	Benigna Cuevas P.
Suplente	Act. Marina Castillo Garduño	M. Castillo G.

Consejo Departamental de Matemáticas

Act. Jaime Vázquez Alamilla

CONSEJO DEPARTAMENTAL DE MATEMÁTICAS

AGRADECIMIENTOS:

A LA UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO: Gracias por permitirme estudiar en esta máxima casa de estudios.

A LA ACT. YOLANDA SILVIA CALIXTO: Por su motivación y apoyo incondicional en la elaboración de este trabajo, es un honor haber trabajado con alguien como usted. Muchas gracias por todo.

A LOS ACTUARIOS AURORA VALDÉS, FLAVIO ESPINOSA, BENIGNA CUEVAS Y MARINA CASTILLO: Por su apoyo y paciencia en el trayecto de este trabajo. Gracias por compartir sus conocimientos.

MIRIAM, MARÍA, IVÁN y ROMÁN: Les dedico el final de este ciclo que me llevó muchas horas de desvelo y preocupaciones pero también de inmensas satisfacciones, ustedes me han dado el ejemplo para terminar lo que se ha iniciado. Estoy orgullosa de ser su hermana.

A MIS PADRES: No existen palabras de agradecimiento para el regalo que me dieron.

MAGDALENA: Compañía fiel en todo momento, estás en mi mente en cada decisión importante de mi vida.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

ANTECEDENTES

En 1992, el sistema de seguridad social en México estaba compuesto básicamente por las siguientes instituciones:
1.- El Instituto del Fondo Nacional para la Vivienda de los Trabajadores (INFONAVIT), creado con el objeto de proporcionar vivienda al mayor número posible de trabajadores , además de complementar el ingreso de los trabajadores a los que no se les hubieran otorgado créditos para vivienda en alguna fecha anterior a la de su retiro.

2.- El Instituto Mexicano del Seguro Social (IMSS), el Instituto de Seguridad y Servicios Sociales para los Trabajadores del Estado (ISSSTE), y algunas otras instituciones gubernamentales y privadas (por ejemplo el Fondo de retiro para trabajadores del Banco de México) fundadas con el fin de otorgar servicios médicos, programas de pensión por jubilación y seguros de vida, accidente e invalidez a sus afiliados.
El 24 de febrero de 1992, sin embargo, y a raíz de la severa crisis financiera en la que se encontraban la mayoría de los fondos de vivienda y de retiro creados por estos organismos, como consecuencia de la existencia de un marco regulatorio obsoleto, una mayor esperanza de vida del trabajador, una mala administración en el manejo de fondos y proyectos y un entorno macroeconómico distinto al prevaleciente hace 20 años, aparecieron en el Diario Oficial de la Federación las reformas a las Leyes del IMSS y del INFONAVIT, en las que se estableció el marco jurídico y conceptual del Sistema de Ahorro para el Retiro (S.A.R.), el cual se construyó como una prestación adicional al Seguro Social.

Descripción del SAR

En el SAR, los patrones están obligados a realizar depósitos mensuales a favor de cada uno de sus trabajadores en dos subcuentas individuales, denominadas subcuenta del INFOVAVIT y subcuenta de seguro de retiro, las cuales se abren en instituciones de crédito que se hacen responsables de la recepción de las cuotas y de la operación de las cuentas. Debido a la naturaleza del SAR, los fondos que se acumulen en las cuentas individuales, solamente se podrán retirar (liquidar) en los casos en que el trabajador cumpla 65 años de edad, o tenga derecho a recibir una pensión del Instituto Mexicano del Seguro Social ó de la empresa para la que trabaje, por lo que estas cuentas constituyen en realidad un fondo de inversión revolvente.

De esta forma, el SAR consiste en un sistema de cuentas individualizadas, el cual permite que el trabajador pueda estar al tanto de sus estados de cuenta de manera que pueda detectar cualquier anomalía ó violación a la ley en el manejo de sus fondos ó en el de las aportaciones a las que tiene derecho. Además, este sistema facilitará la movilidad de la fuerza laboral, al no hacer dependiente la pensión de un trabajador, del requisito de tener que laborar en un mismo lugar un mínimo número de años.

Los fondos que se depositen en la subcuenta del fondo nacional de la vivienda, pueden ser invertidos solamente en créditos de la vivienda, sin que los trabajadores puedan tomar una decisión al respecto. Por otro lado, los saldos de las subcuentas del seguro de retiro se ajustan periódicamente en función del Índice Nacional de Precios al Consumidor publicado por el

Banco de México y deben causar intereses, pagaderos mensualmente a una tasa real no menor al 2% anual.

Posteriormente la situación financiera del seguro de Invalidez, Vejez, Cesantía y Muerte (IVCM) del IMSS hizo imprescindible un cambio en el sistema de pensiones que, conservando que la participación del Estado garantizara viabilidad financiera, pensiones decorosas y protegidas de la inflación, al mismo tiempo que permitiera la utilización de los recursos provisionales como ahorro interno disponible para la inversión productiva y la generación de empleos.

Con la reforma de la seguridad social y del sistema pensionario, el seguro de IVCM se divide en dos seguros según la naturaleza de las contingencias cubiertas:

- Invalidez y vida (IV) y
- Retiro, Cesantía en edad avanzada y Vejez (RCV)

Este cambio implica una modificación en la forma de otorgar las prestaciones, a fin de garantizar su congruencia con los dos seguros y una reparación de las prestaciones derivadas por contingencias durante la vida laboral activa de aquellas que son estrictamente provisionales para el retiro.

En lo que se refiere al seguro de RCV la reforma busca otorgar pensiones más dignas, así como contar con un sistema transparente en el que el trabajador, al ser propietario de los recursos para su retiro, no pierda las aportaciones hechas por él mismo, así como las que hicieron su patrón y el Estado.

En este sentido la Reforma establece un sistema de pensiones de contribuciones definidas y capitalización individual, donde los participantes reciben en su jubilación el producto de sus aportaciones, para lo cual se prevé la apertura de cuentas individuales a favor de cada asegurado. Dichas cuentas serán administradas por nuevas instituciones financieras de giro exclusivo denominadas Administradoras de Fondos para el Retiro (AFORE).

Objetivo de la tesis

El objetivo de este trabajo es el de estudiar el problema de selección de cartera de los fondos del seguro de retiro, bajo un esquema en que el trabajador (inversionista) no puede disfrutar del beneficio de su ahorro, ni de los intereses que se generen, sino hasta la fecha de su jubilación. Dentro de este esquema, el trabajador podrá decidir sobre la composición de su cartera en fechas anteriores a la de su retiro, ya sea por su actitud hacia el riesgo, ó con el fin de buscar alcanzar mayores rendimientos a su inversión.

Como se verá a lo largo de este estudio, el problema de selección de cartera de fondos de retiro posee características únicas que lo distinguen del problema de inversión de otro tipo de activos, y que por lo tanto, su estudio e investigación no se puede realizar con los modelos más convencionales de selección de cartera. Así algunas de las preguntas que se busca responder con este trabajo son: ¿Es el modelo de media-varianza un enfoque adecuado para el problema de inversión de fondos de retiro? ¿Cómo afecta la reinversión de los intereses el comportamiento del valor del fondo (riqueza en el tiempo? ¿Qué definición del rendimiento esperado de una cartera es un buen indicador del comportamiento de la riqueza acumulada en el tiempo? ¿Una cartera de fondos de retiro debe integrarse por activos que representen el menor riesgo de tasa posible (Cetes, Papel Comercial, etc.) ó debe estar orientado hacia instrumentos que ofrezcan altas tasas de rendimiento real, aunque esto implique un mayor riesgo (acciones bursátiles)?

Esta tesis se encuentra dividida en 6 capítulos: en el primer capítulo se explica la teoría de los fondos de pensiones poniendo especial énfasis en los tipos de inversión adecuados para los fondos.

El segundo capítulo muestra una metodología de cálculo de un indicador de rendimiento de las SIEFORES.

El tercer capítulo analiza el desempeño que han tenido las distintas SIEFORES a través de ejemplos en los que se representan los tres indicadores de rentabilidad: Rendimiento de las SIEFORES, Rendimiento de Gestión y Rendimiento Neto del Trabajador.

El capítulo número cuatro expone los fundamentos del modelo de media-varianza y se desarrolla el planteamiento teórico del problema de inversión de fondos de retiro a través de un esquema de selección de cartera intertemporal el cual se soluciona en base a un enfoque de programación dinámica. Se expone además, el concepto de función de utilidad derivada y el de miopía de las funciones de utilidad, los cuales resultan fundamentales para analizar el comportamiento óptimo de un individuo que posee un fondo de inversión revolvente, se desarrolla la solución que se obtiene al problema de selección intertemporal bajo dos definiciones alternativas del ordenamiento de preferencias del inversionista (función de utilidad cuadrática y función de utilidad logarítmica). Por último, se introduce el concepto de rendimiento compuesto promedio y se analiza el efecto de la reinversión de los intereses sobre el valor acumulado de la cartera.

En el capítulo cinco se utilizan las herramientas y conceptos expuestos en el capítulo anterior, se propone un criterio para obtener la composición de la cartera óptima de un fondo de retiro, el cual se utiliza como base para el desarrollo de un modelo con un grado de aplicación empírica similar al de los modelos más comunes de selección de cartera.

En el capítulo seis se aplica el modelo desarrollado a una cartera compuesta por instrumentos de mercado mexicano de valores, buscando con ello dar una respuesta a la interrogante relacionada con la proporción que un fondo de retiro debe destinar a la inversión de instrumentos con mayor riesgo y rendimiento esperado por periodo (acciones).

CAPÍTULO 1

LA PROBLEMÁTICA DE LA INVERSIÓN DE LOS FONDOS DE PENSIONES

En este capítulo estudiaremos, en primer lugar, las características más importantes de los fondos privados de pensiones en lo que se refiere a su inversión. En base a estas características, se analizarán las ventajas e inconvenientes de los diferentes tipos de inversión que tradicionalmente han sido utilizados para los fondos de pensiones. Por último, se comentará la necesidad de elaborar una política de inversión, compatible con los objetivos y la naturaleza actuarial del plan.

1.1 Características de los fondos de pensiones

Los planes de pensiones suponen obligaciones permanentes a largo plazo. Es claro que todo plan de pensiones garantiza el pago de una pensión de jubilación a los empleados, una vez que los mismos se hayan jubilado, es decir, se hayan retirado de la empresa y hayan dejado de trabajar. Dado que muchos empleados adscritos al plan pueden ser relativamente jóvenes (entre 20 y 40 años), en muchos casos han de transcurrir períodos de 30 e incluso de 40 años antes de que los mismos se jubilen y tengan derecho a percibir los mencionados beneficios.

Por otro lado, y en relación con los empleados que ya se han jubilado, el pago de las correspondientes pensiones suele igualmente realizarse a lo largo de un período dilatado de tiempo, que normalmente puede durar de 15 a 20 años. Por ello, e incluso en relación con aquellos planes de pensiones a los que no se incorporasen empleados jóvenes, podrían transcurrir de 40 a 50 años antes de que la última pensión fuera pagada al último sobreviviente del plan. En los planes de pensiones de la vida real, en los cuales se produce la entrada de nuevos empleados que a largo plazo compensa la jubilación de los que alcanzan la edad de retiro, el carácter permanente del plan de pensiones se hace muy claro. Podemos concluir, por tanto, que todo plan de pensiones supone la existencia de unas obligaciones a muy largo plazo, y en muchos casos permanentes.

Otra característica de los planes de pensiones estriba en la limitación que normalmente se efectúa en el derecho de propiedad de los fondos acumulados en el plan, y en relación con la empresa que lo ha patrocinado. Así, en aquellos países en los cuales los planes de pensiones están regulados por la ley, se suele establecer la imposibilidad de que, una vez que los fondos del plan de pensiones han sido invertidos, los mismos pueden ser liquidados y retirados por la empresa que ha establecido el plan.

Esto no significa, sin embargo, que la empresa patrocinadora del plan, pierda todos los derechos en relación con la disposición del fondo. Y a menudo sus patrocinadores conservan el derecho a transferir los fondos de una a otra institución financiera. Es más, en muchos casos no se considera adecuado transferir totalmente a un tercero la gestión financiera del fondo, de manera que la empresa que lo ha establecido interviene de forma directa a la hora de decidir en qué tipo de inversiones se va a materializar el fondo constituido por el plan de pensiones.

Una tercera característica importante en relación con la inversión de los fondos de pensiones, radica en las reducidas necesidades de liquidez que suelen experimentar los mismos. Y es que, todo fondo de pensiones recibe unos ingresos (contribuciones de la empresa y rendimientos financieros de las inversiones), que son bastante bien previsibles de un año para otro. Por otro lado, en lo que se refiere a las salidas o gastos del fondo, también son en gran medida previsibles, en base a las estimaciones que ha de realizar el actuario para calcular las contribuciones que ha de efectuar la empresa contratante. Desde luego que los gastos a que se ve sometido el fondo son previsibles con menor exactitud que los ingresos financieros del mismo. Sin embargo, puede esperarse que a lo largo de un período de tiempo suficientemente prolongado, estos gastos se correspondan muy de cerca con las estimaciones realizadas por el actuario, especialmente si éstas se modifican, cuando la experiencia del plan así lo aconseje.

Otra característica de los fondos de pensiones radica en que los mismos tienden a crecer de forma constante a lo largo del tiempo. Significa ello que son muy pocos los que han alcanzado el punto en el cual los ingresos (contribuciones y rendimientos financieros) se equilibran con los gastos (pensiones pagados a los beneficiarios). Son muy pocos los fondos de pensiones que han alcanzado la “etapa de madurez” y, como consecuencia, en la mayor parte de los mismos existe un flujo continuo de tesorería, que está disponible para la inversión. Esto es importante, ya que permite cambiar la estrategia de la inversión del fondo, modificando la proporción en que se encuentran los distintos tipos de inversión, simplemente invirtiendo los nuevos ingresos de la forma deseada, sin afectar para ello la proporción entre las distintas inversiones ya realizadas en el fondo. La flexibilidad que se consigue en la cartera de inversión del fondo es, de esta forma relativamente grande.

A pesar de que, en general, la cuantía de los fondos tiende siempre a crecer, hemos de hacer la importante salvedad de que, en numerosas ocasiones y debido a violentas fluctuaciones económicas, pueden producirse a veces situaciones de dificultad financiera para un fondo de pensiones. Así, en las etapas de recesión suelen disminuir las contribuciones realizadas por las empresas a los fondos de pensiones, ya que las mismas se encuentran en peor situación económica. A este efecto se añade el incremento en los gastos que muchas veces se produce en este tipo de situaciones económicas, como consecuencia de las jubilaciones anticipadas, gastos por invalidez o simples retiradas de grupos. Además, el cuadro se completa con la tendencia observada en estas circunstancias hacia una reducción considerable en el valor de mercado de los títulos financieros y valores reales en que suelen estar invertidos los fondos de pensiones. Estas circunstancias aconsejan, como luego veremos, establecer unas reservas de seguridad en todo plan de pensiones, para asegurar la solvencia del mismo en las etapas de depresión económica.

1.2 Sistema Financiero

CONCEPTOS GENERALES

Al explicar el esquema general sobre la operación de los fondos de pensiones en el marco de la nueva LSS (Ley del Seguro Social) que entró en vigor el 1 de enero de 1997, resulta indispensable estudiar los elementos básicos sobre el mercado de valores, que es el ámbito que absorbe las pensiones, los pensionados, sus sueños y sus riesgos.

En nuestro país, como en cualquier otra economía existen personas físicas o morales que tienen dinero que por el momento no tienen necesidad de gastar o utilizar; en el otro extremo existen personas físicas y morales que necesitan dinero con más o menos urgencia para sacar adelante sus planes, sus empresas o satisfacer sus necesidades.

En medio del ahorrador y el necesitado de recursos, cuya función es poner en contacto a ambos sujetos en las mejores condiciones posibles, están los llamados intermediarios financieros. Es decir, son los comerciantes que en lugar de vender zapatos o jitomates, reciben y ofrecen al público, venden dinero, acciones, etcétera.

SISTEMA FINANCIERO. Al conjunto de operaciones y relaciones que se dan entre ahorradores, necesitados de ahorro e intermediarios financieros, en el marco de las instituciones y leyes que regulan y supervisan tales relaciones, se le conoce como sistema financiero. En términos más técnicos, el sistema financiero es el "conjunto de instituciones y organismos que generan, administran, orientan y dirigen el ahorro y la inversión dentro de la gran unidad político-económica que es nuestro país". (Guía de la entonces Comisión Nacional de Valores).

Como observamos, esta definición se enfoca a partir de los intermediarios financieros, no del pueblo que es el que da el ahorro y quien al contratarlo paga por su uso, lo que confirma la tesis que se maneja en este medio "el poder no pertenece a los que tienen dinero, sino a quienes lo manejan".

1.2.1 Mercado de Valores

En el sistema financiero las operaciones de ahorro-inversión no sólo se hace por conducto de las casas de bolsa, Bolsa Mexicana de Valores, etcétera, sino a través de la banca y de las empresas de seguros y fianzas.

Ahora, enfoquemos a las operaciones que usan como mercancía a las acciones y demás valores o títulos de crédito que se emiten en masa. Es decir, abordaremos la parte del sistema financiero que gira en torno de los valores, y que es llamado mercado de valores.

Para su comprensión, precisaremos los siguientes conceptos:

Invertir: Es cuando el ahorrador aplica sus fondos en operaciones a plazos más o menos largos, con un riesgo relativamente bajo y en consecuencia recibirá rendimientos moderados.

Para comprender lo anterior, veamos el concepto contrario:

Especular: Es la acción de aplicar el dinero en operaciones con un riesgo relativamente alto, a cambio de rendimientos altos en un corto plazo.

En el mercado de valores se hacen operaciones de ambos tipos, de inversión y especulación. De acuerdo con la nueva LSAR, las Siefores son entidades de inversión, no de especulación.

Título de crédito: Es un documento (pagaré, letra de cambio, acción, etcétera) que es representativo de un valor (obligación de que una persona entregue en cierta fecha cierta cantidad de dinero, cantidad de producto, etcétera) de manera que para reclamar ese valor se requiere necesariamente tener, contar o exhibir dicho papel, documento o título.

Valor: Son los pagarés, acciones, obligaciones, bonos, entre otros, emitidos por las empresas o el gobierno para obtener fondos para su operación y, en general, todos los títulos de crédito que se producen, se emiten en masa.

En masa: Es decir, no se emiten uno o dos, sino en serie, otorgando los mismos derechos a sus dueños titulares y sus cualidades son las mismas (acciones de Telmex series "Q", "L", del 001 al 10,000 por ejemplo).

Con los conceptos previos, definamos al mercado de valores como un conjunto de instituciones (SHCP, Banco de México, Comisión Nacional Bancaria y de Valores), gobierno o empresas (necesitadas de recursos) e inversionistas (ahorradores) que intervienen en la compra y venta de valores.

SOBRE LOS VALORES QUE SE COMPRAN Y SE VENDEN

1. ¿Requieren autorización o permiso del gobierno? Sí, lo otorga la Comisión Nacional Bancaria y de Valores.

2. ¿Ya autorizados deben inscribirse en algún lugar? Sí, en el Registro Nacional de Valores e Intermediarios.

3. ¿Dónde se venden? En la Bolsa Mexicana de Valores.

4. ¿Qué es la Bolsa Mexicana de Valores? Es un organismo de la iniciativa privada que no compra ni vende valores, su función consiste en facilitar a los intermediarios el local e instalaciones que permitan y faciliten las operaciones de compraventa de valores; asimismo, proporciona al público información sobre las fases de dichas operaciones y vela porque las actividades se desarrollen en apego a derecho (artículo 29, Ley Mercado de Valores).

Para decirlo de manera sencilla, la bolsa de valores equivale al mercado con su respectiva administración. Quien compra y vende no son el mercado y la administración sino los intermediarios y los clientes.

INVERSIONISTAS Y EMISORAS

Inversionista. Es la persona que pretende adquirir valores para aplicar en ellos sus ahorros en el ánimo de obtener un rendimiento que aunque no sea alto tampoco le signifique un alto riesgo tal inversión.

Las emisoras. Son las empresas o el propio Gobierno Federal, que para obtener recursos emiten títulos en serie o valores, los que según sus características ofrecen a los inversionistas rendimientos fijos, o variables rodeados del riesgo de que el inversionista no sólo obtenga el rendimiento esperado sino sufra pérdidas en el dinero que ha invertido en la operación, en la compra del valor.

MERCADO PRIMARIO Y MERCADO SECUNDARIO

Ahora bien, la compraventa de los valores de una emisora se puede realizar en dos mercados:

MERCADO PRIMARIO. Es la venta que la emisora realiza de una nueva emisión de valores, de manera que el inversionista que los adquiere tendrá el carácter de comprador inicial.

De esta manera la emisora obtiene nuevos recursos. En esta venta inicial, interviene igualmente un agente de valores (un intermediario entre emisor e inversionista, generalmente una casa de bolsa).

Ejemplo: Telmex ofrece al público 10,000 nuevas acciones.

El inversionista inicial, según su interés, podrá a su vez vender a otro inversionista, total o parcialmente los valores que ha adquirido, para comprar otros valores. A su vez, el inversionista que adquirió valores del inversionista inicial podrá efectuar posteriormente operaciones de compraventa sobre estos valores.

MERCADO SECUNDARIO. Es el conjunto de operaciones de compraventa donde no hay una relación directa entre emisor e inversionista. Este mercado abarca toda la compraventa de valores por lo que se sustituye a los compradores o tenedores iniciales.

Las Siefores deberán conformar su cartera de valores, preferencialmente mediante operaciones en el mercado primario.

Abordaremos el tema de las sociedades de inversión, ya que estos intermediarios son los encargados de invertir los fondos de retiro, cesantía y vejez en el mercado de valores.

1.3 Sociedades de Inversión

Para hacer una inversión en valores se requiere una cantidad importante de dinero hasta estructurar una inversión que permita reducir el riesgo y contratar a un profesional del mercado de valores que maneje con eficacia tal inversión.

Esto provoca que el mercado de valores, la inversión en acciones y demás valores, esté en principio cerrado para los pequeños y medianos ahorradores.

Para impedir lo anterior y permitir que los fondos de pequeños y medianos ahorradores tengan una alternativa diversa al colchón o a las cuentas tradicionales de los bancos o instituciones de crédito – lo que a su vez permite la absorción hasta de esos pequeños ahorros por los intermediarios (comisiones) y las empresas para su desarrollo –, por todo lo anterior se creó un nuevo tipo especial de intermediarios financieros llamados sociedades o fondos de inversión.

Definición: Las sociedades de inversión son instituciones financieras, especializadas en el análisis y administración de una o varias carteras de valores que concentran el dinero de pequeños y medianos inversionistas, interesados en diversificar su riesgo y aumentar su capital, el cual invierten por cuenta y a beneficio de éstos entre un amplio y selecto grupo de valores, sin pretender intervenir en la gestión administrativa de las empresas en las que intervienen.

1.3.1 Características de las Sociedades de Inversión

a) Inversión masiva. Con el dinero proveniente de gran cantidad de pequeños y medianos inversionistas forman un fondo común, con ese dinero compra valores respecto a los cuales estos inversionistas tienen derecho en proporción a lo que han invertido o entregado. Obviamente también tienen derecho a una parte alícuota sobre los rendimientos que produzcan tales valores y con relación al dinero que tienen invertido.

b) Diversificación y disminución de riesgo. Es decir, la sociedad de inversión invierte los fondos recaudados en una variedad de valores de diversas emisoras y características, lo que les permite reducir el riesgo. Esto es, no se depende de un solo valor en el que se concentra todo el fondo colectivo de inversión, sino al distribuirse en valores diversificados se depende de un rendimiento medio, generado por tales valores. Es importante aclarar que se reduce pero no se suprime el riesgo que bajo ciertas condiciones económicas y políticas puede aumentar.

c) Liquidez: Esto significa que la inversión realizada por los ahorradores, puede reconvertirse en dinero de manera fácil y permanente, para lo cual la propia sociedad de inversión puede recomprar sus propias acciones, es decir el inversionista vende su acción a la propia sociedad de inversión, quien le paga en efectivo su valor.

d) Gestión profesional: El fondo de inversión de los ahorradores, por lo general modestos, tendrá un elemento clave: una gestión a cargo de gente altamente calificada en todo lo que implica el mercado de valores y temas accesorios, con el apoyo de la infraestructura material requerida.

e) Sociedad anónima: La sociedad de inversión se debe constituir como una sociedad anónima cuyo capital se invierte en valores (portafolio, es el nombre que se da al conjunto de valores), con respaldo en tales valores expide acciones que se venden entre los inversionistas modestos, de manera que no sólo pueden recomprar a estos inversionistas sus acciones, sino más adelante podrá emitir más acciones.

Es decir, las sociedades de inversión son empresas que en lugar de producir refrigeradores o prestar un servicio educativo, médico, etcétera, se dedican a invertir los recursos de la mejor y más profesional manera repartiendo entre sus accionistas los rendimientos derivados de las inversiones realizadas.

1.3.2 Estructura de una Sociedad de Inversión

Un fondo es estructurado por un consejo de administración, un consejo financiero responsable de la administración de la cartera y una organización de distribución y ventas. Los fondos realizan contratos con un consejero financiero para administrar el fondo, la cual es una compañía que se especializa en la administración de fondos. El consejero puede ser una subsidiaria de una empresa de corredores, una compañía de seguros, una empresa de administración de inversiones o un banco.

El consejero financiero del fondo carga una cuota de consejería. Esta cuota, es uno de los mayores costos de la administración de un fondo, por lo general del 0.4 al 1.5 % de los activos promedio del fondo, pero la cuota puede ser determinada por una escala deslizante que disminuye conforme aumenta el monto del fondo. La cuota de consjería debe reflejar la dificultad de manejo de un fondo particular.

Los fondos incurren en otros costos aparte de la cuota de consejería, como costos de venta y mercadeo en el caso de un fondo abierto. Aparte de eso, al fondo se le cargan cuotas por servicios de custodia y contabilización y por cuotas del consejo de administración. Por supuesto, existen costos de transacción asociados con la implementación de la estrategia de inversión del fondo. Toda la información sobre los costos de administración y operación de un fondo en particular están disponibles públicamente.

1.3.3 Tipos de Sociedades de Inversión

La clasificación de las sociedades de inversión, requiere para su comprensión la exposición de los siguientes conceptos:

Valor de renta fija (o instrumentos de deuda). Este tipo de inversión proporciona un rendimiento predeterminado en un plazo predeterminado (Cetes, pagarés, petrobonos, obligaciones emitidas por empresas, bonos, etcétera).

Valor de renta variable. Se caracteriza por un rendimiento variable dependiendo de las utilidades en las empresas, por excelencia este tipo de valores son las acciones.

Mercado de dinero. Son inversiones a corto plazo, menor a un año por lo que el inversionista recupera sus fondos con prontitud (Cetes, petropagaré, pagarés, entre otros).

Mercado de capitales. Son inversiones a largo plazo, mayor de un año (obligaciones, acciones, acciones de sociedades de inversión).

a) *Sociedades de renta fija (o en instrumentos de deuda).* Los recursos del fondo colectivo se invierten en valores de renta fija (mayores rendimientos y seguridad) y en instrumentos del mercado de dinero.

   Las sociedades de inversión de renta fija cobraron un impulso notable a raíz de la introducción, en los E.U.A. de la CMA (Cash Management Account –Cuenta de Manejo en Efectivo) en 1977.

   Una sociedad de inversión de renta fija es, en esencia, similar en su funcionamiento a una sociedad de renta variable, excepto, que los valores que una sociedad de inversión de renta fija adquiere son obligaciones y principalmente los diversos instrumentos que existen en el mercado de dinero, tales como CETES, papel comercial y aceptaciones bancarias.

   Los objetivos de ambos tipos de sociedad de inversión son muy distintos entre sí. La renta variable busca apreciación del capital (plusvalía) a través de plazos largos y riesgos mayores. La fluctuación en los precios suele ser sustancial, en ambas direcciones. En cambio las sociedades de inversión en renta fija tienen como objetivo la obtención de plusvalía, pero vía interés. Los plazos de inversión típicamente son muy cortos y los rendimientos obtenidos son usualmente muy seguros y constantes.

b) *Sociedades de inversión comunes.* Las inversiones se efectúan tanto en documentos de renta fija como de renta variable.

   SIEFORES. Por su régimen de inversión , a las que más se asemejan, son a las sociedades de inversión comunes.

c) *Sociedades de inversión de capitales.* Invierten en valores emitidos por empresas que para su promoción requieran recursos a largo plazo. Luego los rendimientos que pueda obtener este tipo de sociedad de inversión dependen del éxito que lleguen a tener los proyectos de la empresa promovida.

d) *Sociedades de inversión especializadas.* Son aquéllas que autorregulan, de acuerdo con su "prospecto de información", lo relativo a su régimen de información, de adquisición y selección de valores, sin menoscabo de sujetarse a la Ley de Sociedades de Inversión (las SIEFORES se sujetarán a la nueva LSAR).

Prospecto de información: Es el documento que las SIEFORES (en general las sociedades de inversión) deben hacer llegar al público inversionista, para mostrar de manera clara y precisa, la situación patrimonial de su operadora (Afore), así como sus políticas de información y por tanto el riesgo que corren tales inversionistas.

Pero fuera de estas diferencias, la esencia es la misma que la del resto de las sociedades de inversión. Diferencias que parten, entre otras cosas, de que los trabajadores no son inversionistas voluntarios.

1.3.4 Sociedades Operadoras de Sociedades de Inversión

Las sociedades operadoras de las sociedades de inversión del SAR son las AFORES, por esta razón es indispensable explicar esta figura jurídica.

Sociedad operadora: Es decir, la sociedad de inversión cuyo personal e infraestructura están reducidas al mínimo (incluso carecen de personal) para reducir costos, pone en manos de otra sociedad llamada operadora, las tareas administrativas y operativas: operaciones de compra y venta de valores por orden de la sociedad de inversión, promoción de sus acciones entre inversionistas, contabilidad, manejo patrimonial (cobro, etcétera) de la cartera de valores, elaboración de información sobre el país, el mercado de valores y emisoras, por citar algunas. Al efecto, la sociedad de inversión y la sociedad operadora realizan un contrato que especifica los detalles al respecto; como contraprestación la sociedad operadora recibirá una comisión sobre las operaciones realizadas.

La sociedad operadora también requiere autorización de la Comisión Nacional Bancaria y de Valores y debe constituirse como sociedad anónima. Las casas de bolsa son las que por excelencia se desempeñan como sociedades operadoras.

Casa de bolsa: Son sociedades mercantiles que actúan como agentes de bolsa, es decir están autorizadas para efectuar la compra-venta de valores cotizados en la bolsa de valores, al mismo tiempo prestan asesoría tanto a las empresas emisoras como al inversionista.

1.4 Las Sociedades de Inversión y las SIEFORES

Las sociedades de inversión son empresas constituidas en sociedades anónimas de capital variable, cuyo propósito es el de optimizar los recursos de sus inversionistas, esto es de tratar de ganar los mayores rendimientos posibles para todos los socios.

Los inversionistas de una sociedad de inversión tienen la posibilidad de invertir en varios instrumentos de inversión a la vez, sin necesidad de hacerlo con grandes sumas de dinero ya que formar una cartera individual se convierte en algo muy costoso y con un alto grado de riesgo si no se tiene la información suficiente para saberla manejar adecuadamente.

Al invertir en las sociedades de inversión se tiene además de la vigilancia de las autoridades correspondientes, la Comisión Nacional Bancaria y de Valores para las sociedades de inversión tradicionales y a la Comisión Nacional de los Sistemas de Ahorro para el Retiro y por supuesto los reglamentos y circulares emitidos por las autoridades reguladoras.

1.4.1 ¿Cómo funcionan?

Al invertir en una sociedad de inversión, estamos comprando acciones de una empresa que a su vez invierte en instrumentos emitidos ya sea por el Gobierno Federal, como son los Cetes, Bondes, etc. O por la iniciativa privada (empresas) como son las Acciones, pagarés de mediano plazo, papel comercial, etc. O los emitidos por la banca por ejemplo: los Certificados de Depósito, Las Aceptaciones Bancarias, etc., además todas las emisoras que operan en la Bolsa Mexicana de Valores están exentas del Impuesto sobre la renta, (no del I.V.A.).

Otra de las ventajas de invertir en las sociedades de inversión, es que, por Ley, nadie puede tener una inversión que rebase el 10 por ciento del valor total de la cartera, lo que impide que alguien tenga el control de las decisiones de la sociedad. Esto es lo mismo para todos los tipos de sociedades que existen.

Al unirse el dinero de muchos inversionistas se pueden invertir diversificando en múltiples instrumentos de inversión, de los cuales, todos son dueños en forma proporcional, es decir, todos son dueños en parte proporcional de la cartera.

Esto funciona igual que cuando compramos un edificio, somos dueños en proporción de nuestra inversión, pero con la ventaja de que en caso de una emergencia económica podemos vender un par de acciones de nuestra sociedad de inversión, pero no podemos vender un metro de nuestro edificio, además de que la Administradora de las sociedades de inversión puede recomprar nuestras acciones, en condiciones normales de mercado (esto es hasta donde alcance la liquidez; si la oferta de acciones es mucha se tendrá que vender la cartera en medida de lo posible para seguir dando liquidez a los socios).

También, se tiene un comité de inversión, que con base a un área de análisis tomará la mejor decisión para hacer los movimientos de inversión y existe un comité de valuación entre otros.

Las sociedades de inversión no tiene empleados, ni bienes inmuebles etc., son manejadas por una operadora de sociedades de inversión que puede ser bancaria, bursátil o independiente (ajena a un grupo financiero), con quien la sociedad tiene un contrato de administración y de distribución, con esto en el caso de quiebra o de cierre por cualquier causa de la operadora los accionistas de las sociedades de inversión, pueden simplemente cambiar a otra operadora, ya que los dueños de la cartera son los accionistas.

1.4.2 Aportaciones vs Rendimientos

Aunque los rendimientos de las SIEFORES son totalmente transparentes al tener un precio diario de valuación a través de la Bolsa Mexicana de Valores, al revisar las aportaciones se tiene que los resultados son muy distintos.

Cada trabajador tiene un patrimonio y un rendimiento individual, el cual varía según su edad, las aportaciones que ha hecho en el SAR 92 y en el nuevo sistema de pensiones, así como de la fecha en la que se traspasa el dinero de uno a otro sistema. En este sentido no es el mismo patrimonio y rendimiento de un trabajador que se incorporó hace 40 años, el cual desconoce totalmente, que aquel que se incorporó al SAR 92 (con tasas de dos puntos reales) o el nuevo, cuyo patrimonio queda transparente a través de las SIEFORES.

A pesar de lo poco realista que de manera individual resultan estas comparaciones es interesante tomar en cuenta el efecto de las comisiones que cobran las AFORES, poniendo de manifiesto aquel comercial de BanCrecer y la manzana mordida.

1.4.3 El Efecto de las Comisiones

Si se revisa la tabla adjunta, el efecto de las comisiones sobre las aportaciones y los rendimientos de las SIEFORES, se hace mucho más sensible en Banamex, BanCrecer-Dresdner e Inbursa. Cien pesos que se hayan invertido entre el 1° de julio con el fin de aminorar el efecto de las comisiones.

Si se ven los resultados en el corto plazo y desde el punto de vista de las aportaciones (seis meses) es obvio decir que estas tres SIEFORES son las mejores, sin embargo en la medida que el tiempo aumenta (por lo menos 10 años de afiliación en el nuevo sistema), realmente se verá quien es quien en el nuevo sistema de pensiones.

La existencia de tres diferentes formas de cobrar comisión en las SIEFORES ocasiona esta confusión en los resultados ya que si se evalúan los resultados desde el punto de vista de las aportaciones las más rentables son Banamex, BanCrecer e Inbursa, mientras que si se considera tan solo el rendimiento de las SIEFORES comparando los precios de valuación que publica todos los días en la Bolsa Mexicana de Valores, estas SIEFORES pasan a otro lugar, desde esta perspectiva las más productivas han sido Inbursa, Tepeyac, Atlántico y Capitaliza.

Las comisiones establecidas son sobre salario base de cotización, sobre saldo y sobre rendimiento real. Esta diversidad de comisiones ocasiona estas discrepancias.

Las diferencias en los resultados tanto para unas como para otros está dando diversas pláticas con las autoridades con el afán de presentar las dos caras de la moneda en forma objetiva.

1.4.4 Instrumentos de Inversión

Las Sociedades de Inversión Especializadas en Fondos para el Retiro (Siefores) podrán invertir hasta el 10% de su activo total en títulos de deuda emitidos y avalados en instituciones de banca múltiple.

Este monto de inversión, podrá ser también aplicable a títulos de deuda de otras instituciones financieras como almacenes generales de depósito, arrendadoras financieras, empresas de factoraje financiero, casas de cambio, instituciones de seguros y fianzas, casas de bolsa y sociedades financieras de objeto limitado.

De acuerdo con el proyecto (denominado Reglas Generales del Régimen de Inversión para las Siefores y el cual fue concensado entre las Afores y avalado por las autoridades hacendarias antes de ser presentado ante la Junta de Gobierno de la Comisión Nacional del Sistema de Ahorro para el Retiro), se podrá destinar el 35 por ciento del activo total de las Siefores a títulos de deuda de empresas privadas, incluidos en este porcentaje los bancos y las otras instituciones financieras mencionadas.

El documento especifica en su capítulo I que "se entenderá por títulos a todos los valores de deuda, emitidos por el Gobierno Federal, las instituciones de crédito o por empresas privadas en términos de la Ley de Mercado de Valores".

Cuando se trate de este tipo de papeles o de los emitidos por instituciones de banca múltiple o similares se deberán observar las siguientes calificaciones:

Títulos con vencimiento mayor a un año, solo si se encuentran dentro de los dos primeros niveles de calificación de una empresa calificadora, y títulos con vencimiento menor a un año, dentro de los tres primeros niveles de calificación.

Para ello, las empresas calificadoras que estarán autorizadas para avalar los títulos de deuda serán Duff and Phelps, Clase y Standard and Poros, cuya metodología para las emisiones de corto y mediano plazo se incluyen en el proyecto.

Se destaca que las sociedades de inversión que operarán las Afores, deberán mantener cuando menos el 51 por ciento de su activo total en instrumentos y títulos avalados por el Gobierno, y su rendimento debe ajustarse al crecimiento inflacionario o estar denominado en UDI's.

Las Siefores podrán también invertir hasta el 90 por ciento de sus activos totales en títulos o instrumentos avalados por el Gobierno Federal y hasta un 10 por ciento en instrumentos de deuda denominados en moneda extranjera. En este caso, no se incluye los títulos emitidos por la banca de desarrollo.

Para proteger los recursos de los trabajadores, las reglas establecen límites en la diversificación de las inversiones.

En este sentido, se permitirá la inversión de hasta un 10 por ciento en títulos de un solo emisor, excepto cuando se trate de instrumentos emitidos por una institución de crédito que cuenten con inscripción genérica.

Las reglas preveen que las sociedades de inversión puedan adquirir títulos de deuda de empresas privadas o bancos con los que la administradora tenga nexos patrimoniales en un 5 por ciento de su activo total o hasta el 10 por ciento, previa autorización de la Consar.

Sin prejuicio a lo anterior, señala el proyecto, las Siefores podrán destinar hasta el 15 por ciento de su activo total en papeles emitidos, avalados o aceptados por empresas de un mismo grupo.

Las reglas establecen la obligación de observar diariamente el régimen de inversión, de acuerdo con la participación promedio diaria de los últimos 30 días de saldos.

Cuando se presente minusvalía por exceso o defecto de régimen de inversión, deberá ser cubierta por la Administradora que maneja la Siefore-el día siguiente de su conocimiento, sin importar que posteriormente se corrija por razones de mercado.

1.5 Inversión de los recursos de los fondos de pensiones

Los recursos de los Fondos de Pensiones sólo pueden invertirse en aquellos instrumentos expresamente autorizados por la ley. El fin del marco normativo que rige las inversiones de los Sistemas de Pensiones es dar estabilidad a los tipos de activos en los cuales pueden invertirse los recursos, clasificando instrumentos y emisores elegibles, determinando criterios de calificación en cuanto a calidad y riesgo, estableciendo parámetros de diversificación, concentración y límites de inversión, para asegurar una adecuada rentabilidad y seguridad de los portafolios.

CLASIFICACIÓN DE RIESGO

La clasificación de riesgos es de vital importancia para el funcionamiento y transparencia del mercado de capitales. Desde el punto de vista del Sistema de Pensiones, este proceso cumple dos objetivos, fundamentales para su operación:

Por un lado, disponer de una medida de riesgo que permita a los agentes involucrados distinguir entre los instrumentos elegibles y no elegibles y, por otro lado, hacer operativos los límites a la composición del portafolios de los Fondos de Pensiones, que están en función de la categoría de riesgos de los instrumentos.

En el proceso intervienen sociedades privadas de clasificación de riesgos, un requisito formal para cualquier sociedad que comercia sus instrumentos en el mercado secundario. Basándose en ellas, la Comisión Nacional de Clasificación de Riesgos, con la evaluación de al menos dos clasificadoras privadas, asigna una clasificación a los instrumentos para el uso de las Administradoras de los Fondos de Pensiones.

Las sociedades clasificadoras de riesgo privadas se introdujeron en la mayoría de los países donde se han implantado los Fondos de Pensiones con base en el Sistema de Capitalización individual. Con ellas se pretende perfeccionar la evaluación de riesgo financiero.

1.6 Tipos de Inversión adecuados para los fondos

Los tipos de inversión para los fondos de un plan de pensiones deben de reunir las siguientes características:

1 Liquidez. Sin embargo, dado que en general los fondos de pensiones tienen poca necesidad de tesorería, una liquidez inmediata de las inversiones no es estrictamente necesaria.

2 Proporcionar a largo plazo un alto nivel de seguridad en lo que se refiere a valor capital y al rendimiento financiero. Debido a las reducidas necesidades de liquidez, las fluctuaciones a corto plazo de los valores de capital y de los ingresos financieros no tienen mayor trascendencia. Sin embargo, a largo plazo las inversiones han de ser tales que proporcionen una rentabilidad segura y predecible.

3 Proporcionar la mayor estabilidad posible en lo que se refiere a la capacidad adquisitiva de las cantidades invertidas, y que sea compatible con la necesaria seguridad que ha de caracterizar a las inversiones de un plan de pensiones.

Teniendo en cuenta estos tres requisitos, las principales inversiones en las que se han materializado los fondos provenientes de planes de pensiones han sido, tradicionalmente los siguientes:

- Títulos de renta fija públicos y privados.
- Títulos de renta variable.
- Bienes inmuebles.
- Títulos a corto plazo, representativos de tesorería y otros instrumentos del mercado monetario.

TÍTULOS DE RENTA FIJA Y DE RENTA VARIABLE

Hay que señalar que, con gran diferencia, la mayor proporción de inversiones de fondos de pensiones en todo el mundo, está constituida por acciones y obligaciones. Sin embargo, y como consecuencia de la actual recesión económica, se está empezando a dar más atención a las inversiones en bienes inmuebles.

Tradicionalmente, se venía considerando que los títulos de renta variable constituían una inversión más adecuada para los fondos de planes de pensiones. Se argumentaba que la rentabilidad financiera procedente de las acciones excedía de forma significativa, a la rentabilidad financiera de los títulos de renta fija, a lo largo de un período de tiempo suficientemente largo. Igualmente se argumentaba que las acciones constituían un tipo de inversión que era más fácilmente defendible de las desvalorizaciones monetarias. Sin embargo las experiencias más recientes han puesto en dudad todas estas reglas prácticas. En concreto distintos estudios de teoría económica han demostrado que los títulos de renta variable tan solo proporcionan una defensa contra la inflación durante las primeras etapas expansivas del ciclo económico. De manera que una vez que se ha entrado en el proceso de recesión económica, los tipos de interés del mercado crecen de una forma incontrolada, produciéndose una desvalorización generalizada en los títulos de renta variable, cuyo valor de mercado en términos reales muchas veces se reduce a una fracción del que tenía al comienzo de la fase expansiva del ciclo.

Los títulos de renta fija, por su parte, tienen la ventaja de que garantizan el valor del capital de la inversión, aún cuando históricamente su rentabilidad financiera haya quedado muchas veces por debajo de la rentabilidad real que podía obtenerse en el mercado (especialmente en relación con las obligaciones a un plazo de tiempo muy prolongado, y durante períodos de alta inflación). De ahí la tendencia hacia la inversión en títulos de renta fija, cuyo vencimiento se produce en períodos de tiempo más cortos. Y es que la inversión en obligaciones con un plazo de amortización de cinco a diez años, se ha convertido en la base de la inversión de los fondos procedentes de los planes de pensiones, de acuerdo con el método del <<nuevo dinero>>. Sin embargo hay que señalar que ningún título de renta fija supone una defensa segura contra la inflación , en lo que a su valor de mercado se refiere. Solamente un título de renta fija cuya rentabilidad estuviera indexada de acuerdo contra la inflación , podría ser considerado como óptimo desde el punto de vista de la inversión de los fondos de un plan de pensiones. Tan solo el Estado podría emitir este tipo de títulos, y hasta ahora se ha mostrado muy reacio a hacerlo.

En lo que se refiere a los títulos de renta fija emitidos por instituciones privadas, hay que señalar que son de muy variado tipo (cédulas hipotecarias, obligaciones emitidas por empresas comerciales, etc.). La característica más importante de este tipo de títulos es que poseen un riesgo mayor que los títulos de la deuda pública del Estado, por lo que suelen proporcionar una rentabilidad más alta. Es necesario señalar que en algunos países la emisión de obligaciones por parte de las entidades privadas no se producen con el volumen que sería necesario para satisfacer las necesidades de inversión de los fondos de pensiones, que de esta forma han de recurrir principalmente a la inversión en títulos de renta fija emitidos por el Estado.

BIENES INMUEBLES

En lo que respecta a la inversión de una parte de los fondos de los planes de pensiones en bienes inmuebles, hasta ahora ésta no ha sido importante, sobre todo debido a la falta de experiencia en la administración de este tipo de bienes, así como a la dificultad de convertirlos rápidamente en tesorería si es que ello fuera necesario. Sin embargo recientemente se ha comenzado a dar una mayor importancia a este tipo de inversiones, especialmente porque se piensa que la inversión en bienes reales puede dar lugar a una diversificación gradual de los fondos del plan de pensiones, que es muy favorable a largo plazo. Además se tiene la impresión de que las inversiones en bienes inmuebles constituyen un medio muy adecuado para preservar el valor real de lo invertido en los mismos, y está muy generalizada la idea de que los bienes inmuebles se revalorizan cada año, al menos en la cuantía del índice medio de inflación.

Sin embargo, la inversión en bienes reales sigue suponiendo un problema de cara a los fondos de pensiones. Por un lado, el tamaño de la <<unidad de inversión>> suele ser demasiado grande para que se invierta una parte del fondo del mismo, si es que la inversión no se realiza por una compañía de seguros o a través de un fondo de inversión inmobiliaria. Por otro lado, existen complicaciones de naturaleza adicional: la propiedad inmueble que existe en el mercado es muy variada, y en realidad podría decirse que no existen dos propiedades exactamente iguales. Además, los bienes inmuebles están sometidos a grandes influencias imprevisibles, de naturaleza local (evolución de las ciudades, plan urbano de las mismas) o nacional (una ley de control de rentas podría poner en claro peligro la rentabilidad financiera de una inversión en bienes de naturaleza inmueble). Finalmente, los bienes reales son más difíciles de vender y de comprar, su mercado es más complejo, y una equivocación en lo que se refiere a la transmisión de los mismos podría dar lugar a consecuencias financieramente muy dolorosas para el fondo de pensiones.

1.7 Límites de Inversión

En todos los Sistemas de Capitalización Individual, la conformación del portafolios de inversiones de los Fondos de Pensiones está sujeta a ciertos límites determinados por la "Autoridad Financiera" y la Superintendencia o Comisión de Administradoras de Fondos de Pensiones, dentro de los rangos establecidos en la Ley.

Estos límites son máximos, es decir, no existen documentos obligatorios.

Con la normatividad se busca, en general, que los recursos de los fondos de pensiones se invierta con el objeto de asegurar una rentabilidad y una seguridad adecuadas.

- LÍMITES POR INSTRUMENTOS: Los límites por instrumentos se crearon para lograr una adecuada diversificación de carteras de los Fondos de Pensiones, acotando las combinaciones de retorno y riesgo que pueden alcanzar.

- LÍMITES POR EMISOR: En este caso, el objetivo es doble. Por una parte, se establece un límite como un porcentaje del valor del fondo, acotando la concentración de las inversiones en instrumentos emitidos por una misma institución. Por otra, se establece un límite como porcentaje del patrimonio del emisor, evitando que el fondo adquiera un peso significativo en las decisiones del emisor.

  Además se establecen límites por emisor dependiendo del sector económico de que se trate: el sector financiero (bancos comerciales, de fomento, empresas de arrendamiento financiero, etc.), el Estado, las empresas, los fondos de inversión y el sector externo.

- LIMITES POR RIESGOS ESPECIFICOS: Para limitar la exposición de los fondos de pensiones a ciertos riesgos específicos, se establecen límites especiales, por ejemplo, a instrumentos restringidos o de mayor riesgos relativo, emisores cuyo emisor tenga poco tiempo de operación.

- LIMITES POR GRUPOS DE INSTRUMENTOS: Con este límite se coloca un nivel máximo para el porcentaje de los fondos de pensiones invertidos en cierto grupo de instrumentos. Por ejemplo, la suma de inversiones en instrumentos de renta variable.

1.8 Mercados Autorizados

En atención a la necesidad de dar transparencia y equidad a las transacciones de títulos con recursos de los Fondos de Pensiones, las transacciones que involucren recursos de los fondos sólo se pueden efectuar en mercados expresamente autorizados para ello y que cumplan requisitos mínimos, básicamente la concurrencia simultánea de compradores y vendedores de instrumentos para la determinación de los precios, información de instrumento, la infraestructura necesaria y reglamentación interna.

En general, todas las transacciones de títulos efectuadas con los recursos de un Fondo de Pensiones deben realizarse en un mercado secundario formal. Existen ciertas transacciones autorizadas para la adquisición de instrumentos en mercados primarios, siempre que reúnan los requisitos establecidos.

RENTABILIDAD MÍNIMA

Todos los regímenes existentes garantizan a los afiliados que los fondos invertidos por los Fondos de Pensiones obtendrán una rentabilidad mínima, de la cual es responsable en primera instancia, la Administradora y en segunda instancia, el Estado. Las principales razones que justifican la existencia de este mecanismo son:

- la necesidad de resguardar la seguridad de los ahorros provisionales
- ofrecer pensiones "razonables" en relación con la remuneración imponible.
- disminuir el costo de la garantía estatal de pensión mínima.

VALORACIÓN DE LOS INSTRUMENTOS

La existencia de criterios y definiciones precisas para la valoración de las inversiones manejadas por los Fondos de Pensiones resulta de vital importancia para medir la rentabilidad, gestión y evitar transferencias indeseadas de riqueza entre los actores del sistema.

Todas las metodologías coinciden con el criterio de valoración de los diferentes instrumentos elegibles para los Fondos de Pensiones se pueden clasificar en tres grupos: únicos, de renta fija y de capital.

INSTRUMENTOS ÚNICOS

Los instrumentos con pago de amortización e intereses al vencimiento se valoran de acuerdo con su valor devengado diariamente, considerando como tasa de devengamiento la de adquisición y la tasa ajustada del instrumento.

INSTRUMENTOS SERIADOS DE RENTA FIJA

Los instrumentos seriados de renta fija se valoran al valor presente de los futuros flujos de caja, descontados a la tasa de mercado relevante. La tasa relevante es la que corresponde a un mismo emisor, tipo de instrumento y categoría.

INSTRUMENTOS DE CAPITAL

Entre los instrumentos de capital, se distinguen las acciones y las cuotas de fondos de inversión.

1.9 La definición de una política de inversiones para el fondo

Es claro que en última instancia, la definición de una política adecuada de inversiones para el fondo, depende de la empresa que ha constituido el plan de pensiones. Esta empresa puede haber decidido financiar su plan de pensiones a través de una compañía aseguradora. En este caso será la compañía aseguradora la que habrá de resolver el problema de la inversión de los fondos procedentes del plan de pensiones, de acuerdo con los objetivos del mismo, la legislación vigente en materia de seguros, las características típicas de un plan de pensiones y las de las distintas clases de inversión. También es posible que el fondo esté gestionado por un fideicomiso, que haya delegado total o parcialmente las funciones de inversión a un banco o a otra institución de naturaleza financiera.

Sea quien sea quien en última instancia tome las decisiones en los que a la inversión del fondo se refiere es claro que el objetivo esencial puede definirse de la siguiente forma: conseguir la máxima rentabilidad financiera compatible con un grado de riesgo conservador. Lo que se entiende por grado de riesgo conservador variará, desde luego, de empresa a empresa, y se manifestará, entre otras cosas, por el sistema de financiamiento del plan de pensiones elegido (por ejemplo utilizando o no una compañía de seguros). Sin embargo, los especialistas en la inversión de fondo de pensiones saben que las bandas de riesgo entre las que puede moverse la inversión de un plan de pensiones, son en general bastante conservadoras. Y es que, así como el futuro de la mayor parte de las inversiones, es en gran medida incierto en lo que se refiere a su rentabilidad financiera y al mantenimiento del correspondiente valor capital, el valor de las pensiones que se van garantizando a los miembros del plan, es completamente cierto y seguro. De manera que sería fatal que llegara la época de pagar las pensiones garantizadas y no se tuviera los medios financieros necesarios para ello, como consecuencia de las pérdidas producidas en las inversiones del fondo. De ahí que exista la sensación de que es preferible sacrificar una parte significativa de los posibles ingresos financieros para conseguir una mayor seguridad en las inversiones.

Las decisiones que en concreto deberían tomarse a la hora de definir una política estratégica de inversiones para un fondo de pensiones, implicarían el dar respuesta adecuada a las siguientes cuestiones:

a) ¿Qué proporción del fondo se invertirán en títulos de renta fija y cuál se invertirá en títulos de renta variable y bienes inmuebles?

b) ¿Qué parte de los títulos de renta fija estarán emitidos por el Gobierno y cuáles estarán emitidos por empresas privadas?

c) ¿Qué período de duración hasta la amortización se elegirá para los títulos de renta fija?

d) En lo que se refiere a la inversión en bienes reales, ¿qué parte de la misma se realizará en terrenos?, ¿qué parte de la misma se realizará en pisos y edificios?. ¿Qué parte de la misma se realizará a través de participaciones en fondos de inversión inmobiliaria y cédulas hipotecarias?

e) ¿Qué tipo y clases de títulos de renta variable habrán de comprarse?

f) ¿Qué sectores de la economía habrán de ser evitados?

g) ¿En qué momento habrán de realizarse las compras necesarias?

A la hora de responder a todas estas preguntas habrá que tener en cuenta los factores de riesgo implicados, y en concreto la posibilidad de que haya que vender de forma inesperada una parte de las inversiones del fondo para atender a pagos derivados del plan de pensiones. Otro factor de riesgo es el posible impacto de la inflación, que reduce el valor capital de la inversión a la vez que presiona para que aumenten los beneficios garantizados a los empleados. También hay que señalar las condiciones generales de la economía que pueden dar lugar a caídas pronunciadas en los valores bursátiles durante períodos de tiempo más o menos prolongados.

En base a estos factores de riesgo y a las circunstancias concretas del plan de pensiones y de la empresa que lo haya patrocinado, habrá que decidir la cuantía necesaria de la reserva de seguridad con que se dotará al fondo.

Esta reserva estará constituida por un porcentaje significativo de las inversiones del fondo, invertido en títulos de renta fija, fácilmente liquidables, con una alta garantía y un período de maduración no muy prolongado. La razón de esta reserva radica en la necesidad de dotar al fondo con una inversión fácilmente liquidable, y cuyo valor capital no sufra grandes oscilaciones. Sólo de esta manera se podrá hacer frente a incrementos imprevistos en los gastos derivados del fondo, sin tener necesidad de liquidar otras inversiones del plan que sean más arriesgadas.

En lo que se refiere al porcentaje de inversión en títulos de renta variable, es imprescindible la utilización de las modernas técnicas de la teoria de el análisis de portafolios. Estas técnicas permiten una eficaz apreciación del riesgo inherente a distintas combinaciones de valores mobiliarios, permitiendo una diversificación de la cartera compatible con los grados de riesgo que han sido previamente elegidos como adecuados. Por último, habrá que considerar detenidamente cuáles son las preferencias y necesidades en lo que se refiere a la inversión de aquellos valores que más previsiblemente proporcionen una protección contra la inflación futura esperada.

CAPÍTULO 2

INDICADORES DE RENDIMIENTO DE LAS SIEFORES

2.1 Tasa Interna de Retorno (TIR)

Definición.- La tasa interna de rendimiento, es un índice de rentabilidad ampliamente aceptado. Esta definida como la tasa de interés que reduce a cero el valor presente, el valor futuro o el valor anual equivalente de una serie de ingresos y egresos. Es decir, la tasa interna de rendimiento de una propuesta de inversión, es aquella tasa de interés i* que satisface cualquiera de las siguientes ecuaciones:

$$\sum_{t=0}^{n} \frac{S_t}{(1+i*)^t} = 0$$

$$\sum_{t=0}^{n} S_t (1+i*)^{n-t} = 0$$

Donde:

St = Flujo de efectivo neto del periodo t.

n = Vida de la propuesta de inversión.

En la mayoría de las situaciones prácticas es suficiente considerar el intervalo $-1 < i^* < \infty$ como ámbito de la tasa interna de rendimiento, ya que es muy poco probable que en un proyecto de inversión se pierda más de la cantidad que se invirtió.

En términos económicos la tasa interna de rendimiento representa el porcentaje o la tasa de interés que se gana sobre el saldo no recuperado de una inversión. El saldo no recuperado de una inversión en cualquier punto del tiempo de la vida del proyecto, puede ser visto como la porción de la inversión original que aun permanece sin recuperar en ese tiempo. El saldo no recuperado de una inversión en el tiempo t, se evalúa de acuerdo a la siguiente expresión:

$$F_T = \sum_{j=0}^{t} S_j (1+i*)^{t-j}$$

El saldo no recuperado de una propuesta de inversión en el tiempo t, es el valor futuro de la propuesta en ese tiempo.

En conclusión el significado fundamental de la TIR: " Es la tasa de interés que se gana sobre el saldo no recuperado de una inversión, de tal modo que el saldo al final de la vida de la propuesta es cero".

La tasa interna de retorno será enfocada al Indicador de Rendimiento Neto del trabajador (IRN).

2.2 Rentabilidad de las SIEFORES

La CONSAR publica dos indicadores de rendimiento de las SIEFORES. Estos permitirán conocer, además del rendimiento de sus acciones, cual fue el rendimiento antes y después del cobro de comisiones.

El rendimiento de las SIEFORES se calcula con base en el incremento observado en los precios de las acciones de las SIEFORES para el periodo de referencia, que es la práctica común del mercado.

- El rendimiento antes de comisiones, muestra la información sobre el desempeño de las administradoras de los fondos.
- El rendimiento después de comisiones, permite contar con un indicador del beneficio recibido por los trabajadores tomando en cuenta el pago de comisiones.

La rentabilidad de bolsa, la cual muestra el rendimiento que se obtiene por cada peso invertido en la SIEFORE, es un indicador que muestra la rentabilidad después del cobra sobre saldo.

Por lo que comparar la rentabilidad de las SIEFORES de acuerdo a este criterio es erróneo, debido a que en las Afores que cobran sobre saldo, el rendimiento se ve afectado, mientras que para una Afore que cobra solo sobre flujo el rendimiento de la SIEFORE no se ve alterado.

Analizaremos los distintos indicadores de rendimiento de las SIEFORES.

2.2.1 Cálculo de Rendimiento de las SIEFORES

Actualmente, el rendimiento nominal de las SIEFORES, al igual que el de cualquier sociedad de inversión, se obtiene a partir de la variación que registran diariamente los precios de sus acciones registrados en la Bolsa Mexicana de Valores.

El precio de la acción de una SIEFORE es resultado de dividir el valor de los activos netos (total de activos menos el total de los pasivos) entre el número de acciones en circulación. Este precio de valuación de sus acciones, debe registrarse diariamente en la Bolsa Mexicana de Valores (BMV), quien lo difunde al mercado a través de sus medios de información. El precio calculado de la contabilidad en las SIEFORES en el día t corresponde al precio publicado en la BMV en t+1.

El precio de valuación de la acción de cada sociedad de inversión, se obtiene mediante la siguiente expresión:

$$PB_{t+1} = \frac{\left(\sum_{j=1}^{n} V_{j,t} P_{j,t}\right) + OA_t - P_t}{N_t}$$

Donde:

PB_M = Precio de la acción de la SIEFORE en la BMV en $t+1$.

V_{jt} = Cantidad total de valores en t, del j-ésimo título en que se invirtió

P_{jt} = Precio en t, del j-ésimo título en que invirtió la Sociedad de Inversión, resultado de la valuación del vector de la BMV.

N_t = Número de acciones en circulación de la SIEFORE en t.

OA_t = Otros activos de la SIEFORE en t.

P_t = Pasivos de la SIEFORE en t.

A su vez, el rendimiento de cada SIEFORE (R_t)en un periodo determinado se obtiene de la siguiente forma:

$$R_t = \frac{PB_t - PB_{t-m}}{PB_{t-m}} = \frac{PB_t}{PB_{t-m}} - 1$$

Donde:

R_t =Rendimiento de la SIEFORE en el periodo t.

PB $_t$ = Precio de SIEFORE en la BMV en el día t.

PB $_{t-m}$ = Precio de la SIEFORE en la BMV en el día t-m

Con la finalidad de homologar las tasas de rendimiento de las SIEFORES con los rendimientos que se presentan en el mercado es necesario anualizarlos; para ello se aplica el procedimiento siguiente:

$$RA_t = R_t\left(\frac{360}{d}\right)$$

Donde:

RA_t = Rendimiento Anualizado de la SIEFORE en t.

d = Número de días naturales del periodo.

No obstante lo anterior, para el caso de la industria de los Fondos de Pensiones, la rentabilidad calculada con los métodos tradicionales no arroja un indicador de referencia adecuado para medir la gestión de las SIEFORES[1]. Ello se debe a que, en la rentabilidad de los precios de las SIEFORES que cobran comisiones sobre saldo, se encuentra reflejado el cobro de la comisión, por lo que el valor de la cartera y los activos netos que sirven para el cálculo del precio y rentabilidad de la sociedad de inversión especializada se ven reducidos.

El problema que se presenta es que dos SIEFORES, con la misma gestión, pero distinto esquema de comisiones tendrán una rentabilidad diferente. La Afore que cobre sobre el saldo reflejara un rendimiento menor al que obtendría una Afore que cobre únicamente sobre flujo.

2.2.2 Cálculo del rendimiento de Gestión

Para poder comparar el desempeño de dos SIEFORES se debe tomar la rentabilidad sin considerar el cobro de comisiones, para esto se requiere un indicador de gestión, calculado con una metodología que muestre cual es el rendimiento que obtiene la SIEFORE antes de provisionar el cobro de la comisión sobre saldo [2].

La metodología que se propone a continuación calcula el rendimiento de gestión diario. Esto se hace dividiendo el valor de los activos netos antes de provisión de un día entre los activos netos antes de provisión del día anterior. Los activos de cada día son divididos entre el número de acciones correspondiente, de tal forma que el efecto de entrada y salida de recursos no afecte el rendimiento.

En esta metodología se toman los activos netos antes de provisión que tiene la SIEFORE en el día *t-1* y los activos netos antes de provisión que tendría el fondo, sin importar si fue cancelada la provisión, para el día t. De esta forma cada día se inicia con los activos que efectivamente tiene el fondo y se calculan los que tendría el fondo el día siguiente, de tal forma que la diferencia es el rendimiento de gestión de la SIEFORE.

Para obtener la formula de rendimiento de gestión se siguió la trayectoria de movimiento de los activos netos antes de provisión (ANP):

1 El rendimiento de gestión mide la calidad de la administración del fondo y es comparable entre las distintas Afores.

2 Cabe mencionar que la rentabilidad obtenida por la variación de los precios representa la rentabilidad de los recursos canalizados a una Siefore determinada, mientras que la rentabilidad de gestión es un indicador de la capacidad de la Siefore para manejar su cartera de inversión.

$$ANP_t = ANP_{t-1}(1+g_t)$$

Donde:

g_t = gestión de la SIEFORE en el día t.

Suponiendo la gestión constante, la provisión no fue cancelada y que no existen entrada o salida de recursos, podemos resolver la ecuación anterior:

$$ANP_t = ANP_0(1+g)^t$$

Sabemos que los activos netos antes de provisión (ANP) son iguales a los activos netos más la provisión acumulada a ese día, por lo que:

$$AN_t + \sum_{i=0}^{t} prov_i = AN_0 * (1+g)^t$$

Donde:

$PROV_t$ = la provisión acumulada al día t. Esto es igual a la suma de las provisiones diarias.

Despejando la gestión tenemos:

$$g = \left[\frac{AN_t + \sum_{i=0}^{t} prov_i}{AN_0}\right]^{1/t} - 1$$

La fórmula anterior calcula la gestión en un periodo determinado, suponiendo que no existen entrada o salida de recurso. Debido a que diariamente se calcula la provisión y existen entradas y salidas de recursos el cálculo de la gestión se debe hacer diariamente para evitar que el rendimiento se afecte por los efectos mencionados.

$$ANP_{t-1}(1+g_t)=ANP_t$$

Despejando la gestión diario tenemos:

$$g_t=\frac{ANP_t}{ANP_{t-1}}-1$$

A continuación se presenta la fórmula para el cálculo de la gestión cuando no existen entradas de acciones, sustituyendo la Provisión acumulada por la suma de las provisiones diarias:

$$g_t=\frac{AN_{t-1}+\sum_{i=1}^{t-1}prov_i}{AN_{t-2}+\sum_{i=1}^{t-2}prov_i}-1$$

En esta fórmula el tiempo i* = 1 es el día en que se cancela la provisión del periodo anterior.

Es importante tomar en cuenta que el día en que se cancela la provisión no es conocido con anticipación, por lo que la fórmula debe contemplar este problema. Para resolver el problema mencionado para el día t se tomara la provisión acumulada al día t-1 y se le sumará la provisión del día t.

En la siguiente fórmula se presenta la metodología para el cálculo y se calcula el activo neto mediante la multiplicación de los precios en bolsa por el número de acciones en circulación:

$$g_t=\frac{(PB_t * N_{t-1})+PP_{t-2}+prov_{t-1}}{(PB_{t-1} * N_{t-2})+PP_{t-2}}-1$$

Donde:

PB_t = Precio de la SIEFORE registrado en bolsa en el dia t.

PP_t =Pasivo por provisiones de la SIEFORE en t.

$prov_t$ = Provisión del día t.

N_t = Número de acciones en el dia t.

La entrada y salida de acciones altera el nivel de los activos de la SIEFORE, sin embargo el cobro de la provisión se realiza sobre los activos del día anterior, por lo que para el cálculo de la gestión debemos quitar el efecto del cambio en el activo neto por la entrada y salida de recursos, de esta forma los activos pueden ser comparables y el efecto mostrado sea únicamente por la gestión de la SIEFORE.

Para estos efectos se divide cada una de las partes entre el número de acciones al que corresponden, teniendo la siguiente fórmula.

$$g_t = \frac{\dfrac{(P_t * N_{t-1}) + prov_{t-1}}{N_{t-1}} + \dfrac{PP_{t-2}}{N_{t-2}}}{\dfrac{(P_{t-1} * N_{t-2}) + PP_{t-2}}{N_{t-2}}} - 1$$

Para obtener el rendimiento acumulado de un periodo se componen los rendimientos diarios para los días del periodo:

$$G_{i,n} = \prod_{t=i}^{n} (1 + g_t)$$

Donde:

Gi,n = Gestión del portafolio en el periodo de i hasta n.

2.2.3 Cálculo del Rendimiento del Trabajador

Es necesario realizar una comparación de los rendimientos que cada una de las Afores otorgan a los trabajadores inscritos al nuevo sistema pensionario una vez descontadas las comisiones en un periodo determinado.

PB_t = Precio de la SIEFORE registrado en bolsa en el dia t.

PP_t =Pasivo por provisiones de la SIEFORE en t.

$prov_t$ = Provisión del día t.

N_t = Número de acciones en el dia t.

La entrada y salida de acciones altera el nivel de los activos de la SIEFORE, sin embargo el cobro de la provisión se realiza sobre los activos del día anterior, por lo que para el cálculo de la gestión debemos quitar el efecto del cambio en el activo neto por la entrada y salida de recursos, de esta forma los activos pueden ser comparables y el efecto mostrado sea únicamente por la gestión de la SIEFORE.

Para estos efectos se divide cada una de las partes entre el número de acciones al que corresponden, teniendo la siguiente fórmula.

$$g_t = \frac{\dfrac{(P_t * N_{t-1}) + prov_{t-1}}{N_{t-1}} + \dfrac{PP_{t-2}}{N_{t-2}}}{\dfrac{(P_{t-1} * N_{t-2}) + PP_{t-2}}{N_{t-2}}} - 1$$

Para obtener el rendimiento acumulado de un periodo se componen los rendimientos diarios para los días del periodo:

$$G_{i,n} = \prod_{t=i}^{n} (1 + g_t)$$

Donde:

Gi,n = Gestión del portafolio en el periodo de i hasta n.

2.2.3 Cálculo del Rendimiento del Trabajador

Es necesario realizar una comparación de los rendimientos que cada una de las Afores otorgan a los trabajadores inscritos al nuevo sistema pensionario una vez descontadas las comisiones en un periodo determinado.

A continuación se presenta la metodología de cálculo de una tasa de interés que refleje el rendimiento del trabajador una vez descontadas las comisiones que cobran las Afores.

En el nuevo sistema de pensiones el rendimiento del trabajador es la tasa interna de rendimiento de sus aportaciones, la cual representa la tasa de rendimiento que recibe el trabajador tomando en cuenta todas las comisiones al participar en una Afore en un periodo determinado.

Esta TIR representa la tasa de interés, tomando en cuenta el cobro de las comisiones. Al aplicarla a las aportaciones y al saldo del SAR "92" de los trabajadores se obtiene el mismo saldo obtenido con la tasa de gestión de cada una de las Afores, suponiendo que la gestión y la estructura de comisiones se mantienen constante durante el periodo de análisis.

De esta forma la TIR se puede definir como la tasa que hace que el valor de los flujos de entrada (aportaciones brutas del trabajador) sea igual al flujo de salida (saldo acumulado en la cuenta individual en un determinado tiempo, t).

La ecuación de movimiento del saldo, de acuerdo a la metodología que se aplica es la siguiente:

$$Saldo_t = \left[Saldo_{t-1} + \left(aporta \cdot \left(1 - comap_1\right)\right) + cs\right] \cdot \left(1 + g_t \cdot \left(1 - comren_t\right)\right) \cdot \left(1 - \left(comsal_t / 2\right)\right)$$

Donde:

Saldo t = Saldo de la cuenta individual en el periodo t.

aporta t = Aportaciones anuales en t a la cuenta individual (6.5 % del salario base de cotización).

cs = Cuota social en t, equivalente al 5.5 % de un salario mínimo general del D.F.

comap t = Comisión sobre aportación (flujo) de cada Afore en t

comren t = Comisión sobre el rendimiento real de cada Afore en t.

comsal t = Comisión anual sobre saldo de cada Afore en t.

gt = Rendimiento de gestión obtenido por la Afore en t (se mantiene constante durante el periodo de análisis).

La TIR es una tasa tal que al acumular un saldo inicial SAR 92-97, en su caso, más las aportaciones del trabajador a su cuenta individual a dicha tasa, éste sea igual al saldo alcanzado después de T años, calculado conforme a la fórmula anterior, con t = T, donde T es el tiempo total de cotización en años, esto es:

$$\text{Saldo}_T = \left[\text{Saldo}_0 \cdot (1+TIR)^T\right] + aporta\left[\frac{(1+TIR)^T - 1}{TIR}\right] \cdot (1+TIR)$$

Para efectos de este estudio se considera que el salario tiene un incremento de 0% real anual, por lo que las aportaciones permanecen constantes en el tiempo.

Cabe mencionar que el saldo en t = 0 es igual al saldo inicial SAR 92-97 en caso de que exista.

CAPÍTULO 3

EJEMPLOS NUMÉRICOS

El Nuevo Sistema de Pensiones depende primordialmente del sistema financiero y operativo de las distintas AFORES. Al elegir una AFORE los trabajadores contratan los servicios de administración de su cuenta individual y al mismo tiempo contrata el servicio de administración financiera de sus recursos.

Al conocer la metodología de cálculo de un indicador de rentabilidad de la gestión de las SIEFORES a continuación se mostrará una comparación entre las diferentes administradoras.

3.1 Rentabilidad de las SIEFORES

El desempeño que tienen las SIEFORES se pueden mostrar con los siguientes indicadores de rentabilidad: Rendimiento de las SIEFORES, Rendimiento de gestión y Rendimiento del trabajador, cada uno aplica dependiendo de lo que se quiera comparar.

En este trabajo se mostrarán ejemplos sobre los indicadores de rendimiento.

A continuación se presentarán los rendimientos históricos considerando 4 años posteriores a la fecha en que se realizó la reforma al Sistema de Pensiones del Seguro Social, es decir se calculará la rentabilidad acumulada del 2 de Julio de 1997 al 30 de marzo del 2001.

3.2 Rendimiento de la SIEFORE Nominal y Real (Rendimientos históricos)

Se entiende como el rendimiento calculado en base a la variación del precio de la acción de la SIEFORE.

Rendimiento de la SIEFORE

Rentabilidad acumulada del 2 de julio de 1997 al 30 de marzo del 2001

SIEFORE	Nominal (%)	Real(%)
Banamex	31.32	10.55
Bancomer Real	31.10	10.41
Bital S1 de Renta Real	31.72	10.80
Garante 1	30.86	10.25
Inbursa	25.46	6.80
Fondo Profuturo	31.36	10.57

SIEFORE	Nominal (%)	Real(%)
Ahorro Santander Mexicano	28.42	8.69
Tepeyac	28.41	8.69
XXI	29.88	9.63
Zurich	29.13	9.15

El rendimiento real de las SIEFORES es el rendimiento que obtuvieron los activos de las SIEFORES antes de cobro de comisiones sobre saldo, descontando la inflación.

Los datos del cuadro anterior se obtuvieron de la siguiente forma:

SIEFORE Banamex:

Para calcular el Rendimiento nominal utilizamos la siguiente fórmula:

$$\textbf{\textit{Rendimiento nominal}} = \frac{(Precio\ actual\ de\ la\ acción)}{(Precio\ anterior\ de\ la\ acción)} - 1$$

Para este estudio se tomó el rango de fechas del 2 de julio de 1997 al 30 de marzo del 2001.

$$\text{Rendimiento nominal} = \frac{2.3732551}{1.0839520} - 1 = 2.1894467 - 1 = 1.1894467$$

Por lo tanto, el rendimiento nominal es de 1.1894467

Ahora anualizamos para obtener la rentabilidad nominal

$$\text{Rentabilidad nominal} = \frac{(Rendimiento\ nominal)}{(Num.\ dias\ del\ periodo)} * 360$$

El número de días del periodo se calculó contando los días desde el 2 de julio de 1997 hasta el 30 de marzo del 2001, obteniendo un total de 1367 días.

$$\textbf{\textit{Rentabilidad nominal}} = \frac{1.1894467}{1367} * 360 = 0.3132412$$

Por lo tanto, la rentabilidad nominal es 31.32%

Para obtener el rendimiento real primero obtenemos la inflación:

Para calcular la inflación tomamos los datos del Indice Nacional de Precios al Consumidor (ver anexo) correspondientes a las fechas desde junio de 1997 hasta marzo del 2001.

$$\text{Inflación} = \frac{340.3810}{217.7490} - 1 = 1.5631805 - 1 = 0.5631805$$

$$\textbf{Rendimiento real} = \frac{(1 + \textit{rendimento nominal})}{(1 + \textit{Inflación})} - 1$$

$$\text{Rendimiento real} = \frac{(1 + 1.1894467)}{(1 + 0.5631805)} - 1 = \frac{2.1894467}{1.5631805} - 1 = 1.4006359 - 1$$

$$= 0.4006358$$

Por lo tanto, el rendimiento real es 40.06%

Una vez obtenido el rendimiento nominal se anualiza de la siguiente forma:

$$\textbf{Rentabilidad real = Rendimiento Real *} \frac{360}{(\textit{Num. dias del periodo})}$$

El número de días del periodo se calculó contando los días del periodo del 2 de julio de 1997 al 30 de marzo del 2001, obteniendo un total de 1367 días.

$$\text{Rentabilidad real} = 40.06\% * \frac{360}{1367} = 40.06\% * 0.2633504 = 10.5498$$

Por lo tanto, la rentabilidad real es 10.55%

SIEFORE Bancomer Real:

Para calcular el Rendimiento nominal utilizamos la siguiente fórmula:

$$\textbf{\textit{Rendimiento nominal}} = \frac{(Precio\ actual\ de\ la\ acción)}{(Precio\ anterior\ de\ la\ acción)} - 1$$

Para este estudio se tomó el rango de fechas del 2 de julio de 1997 al 30 de marzo del 2001.

$$\text{Rendimiento nominal} = \frac{2.400338}{1.1005980} - 1 \ = 2.1809398 - 1 = 1.1809398$$

Por lo tanto, el rendimiento nominal es 1.1809398

Ahora anualizamos para obtener la rentabilidad nominal

$$\text{Rentabilidad nominal} = \frac{(Rendimiento\ nominal)}{(Num.\ días\ del\ periodo)} * 360$$

El número de días del periodo se calculó contando los días desde el 2 de julio de 1997 hasta el 30 de marzo del 2001, obteniendo un total de 1367 días.

$$\textbf{\textit{Rentabilidad nominal}} = \frac{1.1809398}{1367} * 360 \ = 0.3110009$$

Por lo tanto, la rentabilidad nominal es 31.10%

Para obtener el rendimiento real primero obtenemos la inflación:

Para calcular la inflación tomamos los datos del Indice Nacional de Precios al Consumidor (ver anexo) correspondientes a las fechas desde junio de 1997 hasta marzo del 2001.

$$\text{Inflación} = \frac{340.3810}{217.7490} - 1 = 1.5631805 - 1 = 0.5631805$$

$$\textbf{Rendimiento real} = \frac{(1 + \mathit{rendimento\ nominal})}{(1 + \mathit{Inflación})} - 1$$

$$\text{Rendimiento real} = \frac{(1+1.1809398)}{(1+0.5631805)} - 1 = \frac{2.1809398}{1.5631805} - 1 = 1.3951398 - 1$$

$$= 0.3951938$$

Por lo tanto, el rendimiento real es 39.51%

Una vez obtenido el rendimiento nominal se anualiza de la siguiente forma:

$$\textbf{Rentabilidad real = Rendimiento Real} * \frac{360}{(\mathit{Num.\ dias\ del\ periodo})}$$

El número de días del periodo se calculó contando los días del periodo del 2 de julio de 1997 al 30 de marzo del 2001, obteniendo un total de 1367 días.

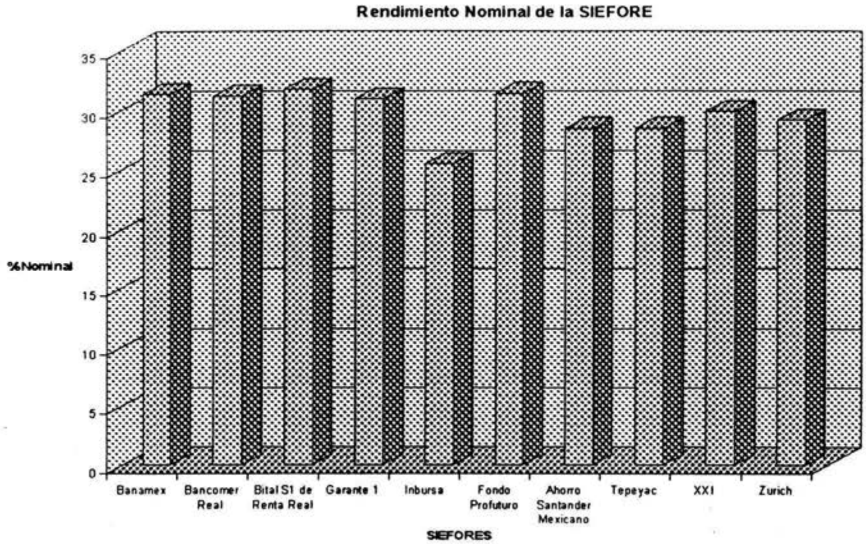
$$\text{Rentabilidad real} = 39.51\% * \frac{360}{1367} = 39.51\% * 0.26335040 = 10.404974304$$

Por lo tanto, la rentabilidad real es 10.41%

Las SIEFORES del cuadro anterior se calculan siguiendo el mismo procedimiento.

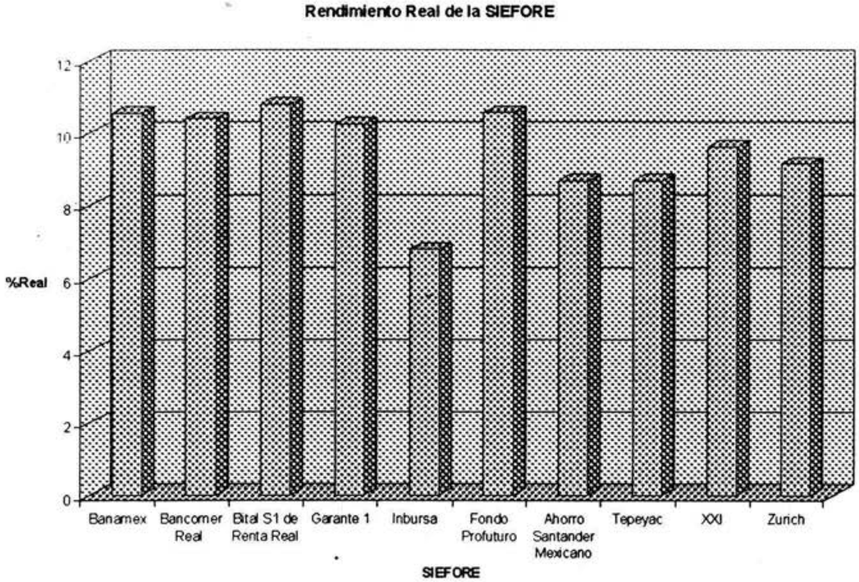
Es importante mencionar que las cifras son porcentajes de rendimientos en términos anualizados. Por lo tanto, el rendimiento observado en el pasado no es garantía de desempeño futuro.

La siguiente gráfica representa el Rendimiento Nominal de la SIEFORE acumulada del 2 de julio de 1997 al 30 de marzo del 2001.



Como se muestra en la gráfica el rendimiento nominal de la SIEFORE que tiene mayor porcentaje es BITAL S1 de Renta Real 31.72 % y la que tiene menor porcentaje es Inbursa con 25.46 %

La siguiente gráfica representa el Rendimiento Real Acumulado del 2 de julio de 1997 al 30 de marzo del 2001.



Respecto al rendimiento real, la SIEFORE Bital S1 de Renta Real es la que tiene mayor porcentaje con 10.80% y el rendimiento más bajo lo obtuvo la SIEFORE Inbursa con 6.80%.

Respecto al rendimiento real, la SIEFORE Bital S1 de Renta Real es la que tiene mayor porcentaje con 10.80% y el rendimiento más bajo lo obtuvo la SIEFORE Inbursa con 6.80%

3.3 Rendimiento de Gestión Nominal y Real (Rendimientos históricos)

Respecto al rendimiento de gestión se considera como el rendimiento que obtuvieron los activos de las SIEFORES antes de cobro de comisiones sobre saldo, a continuación se muestra el siguiente cuadro:

Rendimiento de Gestión:

Rentabilidad acumulada del 2 de julio de 1997 al 30 de marzo del 2001

SIEFORE	Nominal (%)	Real(%)
Banamex	31.32	10.55
Bancomer Real	31.10	10.41
Bital S1 de Renta Real	31.72	10.80
Garante 1	31.33	10.55
Inbursa	31.30	10.53
Fondo Profuturo	32.58	11.36
Ahorro Santander Mexicano	30.36	9.94
Tepeyac	29.45	9.35
XXI	30.63	10.11
Zurich	31.04	10.37

Para obtener los rendimientos de gestión aplicamos el siguiente procedimiento:

<u>SIEFORE Banamex</u>

Para calcular el rendimiento de gestión nominal primero se calcula la gestión diario.

Fórmula de gestión diario:

$$\frac{\left(\frac{(saldo\ en\ provisiones\ en\ t_0(\ pensiones\ ))}{(Num.\ de\ acciones\ t_0(\ dia\ anterior))}+\frac{(Activo\ neto\ t_1+\ provisiones\ (t_1-t_0))}{(Num.\ de\ acciones\ t_1(\ dia\ actual))}\right)}{\left(\frac{(Activo\ neto\ t_0+\ provisiones\ t_0)}{(Num\ de\ accionest_0)}\right)}-1$$

donde:

Activo neto = Precio de la acción actual del día t * Número de acción del día anterior t-1

En este ejemplo se consideran los días 28,29 y 30 de marzo del 2001.

Activo neto t_1 (actual) = 2.3732551 * 12034449505 = 28560818663.43

Activo neto t_0 (anterior) = 2.372768 * 11780341831 = 27952018125.66

Sustituyendo valores en la fórmula de Gestión diario tomados de la base de datos proporcionada por CONSAR obtenemos lo siguente:

$$\text{Gestión diario} = \frac{\left(\left(\frac{0}{11780341831}\right)+\left(\frac{(28560818663.43+(0-0))}{12034449505}\right)\right)}{\left(\frac{(27952018125.66+0)}{11780341831}\right)}-1$$

$$= \frac{(0+2.3732551)}{2.3727682}-1$$

$$= 1.0002052-1$$

$$= 0.000205$$

Multiplicando por 100 tenemos:

0.000205 * 100 = 0.0205 %

Por lo tanto la Gestión diario es igual a 0.0205 %

Para calcular la gestión acumulada:

Gestión acumulada = [(1 + gestión del día t-1) (1 + gestión del día t)] – 1

= [(1 + 118.89973%) (1 + 0.02053%)] - 1

= [(1 + 1.1889973) (1 + 0.0002053)] – 1

= [(2.1889973) (1.0002053)] – 1

= 1.1894467

Por lo tanto la gestión acumulada es de 118.94437 %

Ahora obtenemos el rendimiento nominal:

$$\textbf{Rendimiento nominal} = \text{Gestión acumulada} * \frac{360}{(\textit{Num. de dias del periodo})}$$

El número de días del periodo se calculó contando los días del periodo del 2 de julio de 1997 al 30 de marzo del 2001, obteniendo un total de 1367 días.

$$\text{Rendimiento nominal} = 118.94467 * \frac{360}{1367}$$

= 118.94467 * 0.263350402

= 31.324127

Por lo tanto el rendimiento de gestión nominal es de 31.32 %

Para obtener el rendimiento real se utilizan las siguientes fórmulas:

$$\textbf{Rendimiento real} = \text{Gestión acumulada deflactada} * \frac{360}{(\textit{Num. de dias del periodo})}$$

El número de días del periodo se calculó contando los días del periodo del 2 de julio de 1997 al 30 de marzo del 2001, obteniendo un total de 1367 días.

$$Gestión\ acumulada\ deflactada = \frac{(1 + gestión\ acumulada)}{(1 + inflación)} - 1$$

Para calcular la inflación tomamos los datos del Indice Nacional de Precios al Consumidor (ver anexo) correspondientes al periodo de julio de 1997 a marzo del 2001.

$$\text{Inflación} = \frac{340.3810}{217.7490} - 1 = 1.5631805 - 1 = 0.5631805$$

$$Gestión\ acumulada\ deflactada = \frac{(1+1.1894)}{(1+0.5631805)} - 1$$

$$= \frac{2.1894}{1.5631805} - 1$$

$$= 0.400606$$

Por lo tanto, la gestión acumulada deflactada es de 40.06%

Sustituyendo los datos en la fórmula de Rendimiento Real tenemos:

$$\textbf{Rendimiento Real} = 40.06\% * \frac{360}{1367}$$

$$= 0.400606 * 0.2633504$$

$$= 10.549817$$

Por lo tanto, el rendimiento de gestión real es de 10.55%

<u>**SIEFORE Bancomer Real:**</u>

Para calcular el rendimiento de gestión nominal primero se calcula la gestión diario.

Fórmula de gestión diario:

$$\frac{\left(\frac{(saldo\ en\ provisiones\ en\ t_0(pensiones))}{(Num.\ de\ acciones\ t_0(dia\ anterior))}+\frac{(Activo\ neto\ t_1+provisiones\ (t_1-t_0))}{(Num.\ de\ acciones\ t_1(dia\ actual))}\right)}{\left(\frac{(Activo\ neto\ t_0+provisiones\ t_0)}{(Num\ de\ acciones t_0)}\right)}-1$$

donde:

Activo neto = Precio de la acción actual del día t * Número de acción del día anterior t-1

En este ejemplo se consideran los días 28,29 y 30 de marzo del 2001.

Activo neto t_1 (actual) = 2.400338 * 16947563077 = 40679879661.12

Activo neto t_0 (anterior) = 2.396743 * 16586259802 = 39753002076.62

Sustituyendo valores en la fórmula de Gestión diario tomados de la base de datos proporcionada por CONSAR obtenemos lo siguente:

$$\text{Gestión diario} = \frac{\left(\left(\frac{0}{16586259802}\right)+\left(\frac{40679879661.12}{16947563077}\right)\right)}{\left(\frac{39753002076.62}{16586259802}\right)} -1$$

$$= \frac{(0+2.40033)}{2.39674} - 1$$

$$= 1.014978 - 1$$

$$= 0.0014978$$

Multiplicando por 100 y redondeando:

0.0014978 * 100 = 0.14978 = 0.1500

Por lo tanto la Gestión diario es igual a 0.15 %

Para calcular la gestión acumulada:

$$\textbf{Gestión acumulada} = [(1 + \text{gestión del día t-1})\ (1 + \text{gestión del día t})] - 1$$

$$= [(1 + 117.76734\%)\ (1 + 0.1499\%)] - 1$$

$$= [(1 + 1.11776734)\ (1 + 0.001499)] - 1$$

$$= [(2.11776734)\ (1.001499)] - 1$$

$$= 1.1809377$$

Por lo tanto la gestión acumulada es de 118.09 %

Ahora obtenemos el rendimiento nominal:

$$\textbf{Rendimiento nominal} = \text{Gestión acumulada} * \frac{360}{(\textit{Num. de días del periodo})}$$

El número de días del periodo se calculó contando los días del periodo del 2 de julio de 1997 al 30 de marzo del 2001, obteniendo un total de 1367 días.

$$\text{Rendimiento nominal} = 118.09 * \frac{360}{1367}$$

$$= 118.09 * 0.263350402$$

$$= 31.10$$

Por lo tanto el rendimiento de gestión nominal es de 31.10 %

Para obtener el rendimiento real se utilizan las siguientes fórmulas:

$$\textbf{Rendimiento real} = \text{Gestión acumulada deflactada} * \frac{360}{(\textit{Num. de días del periodo})}$$

El número de días del periodo se calculó contando los días del periodo del 2 de julio de 1997 al 30 de marzo del 2001, obteniendo un total de 1367 días.

$$\textit{Gestión acumulada deflactada} = \frac{(1+\textit{gestión acumulada})}{(1+\textit{inflación})} - 1$$

Para calcular la inflación tomamos los datos del Indice Nacional de Precios al Consumidor (ver anexo) correspondientes al periodo de julio de 1997 a marzo del 2001.

$$\textbf{Inflación} = \frac{340.3810}{217.7490} - 1 = 1.5631805 - 1 = 0.5631805$$

$$\textit{Gestión acumulada deflactada} = \frac{(1+1.1809)}{(1+0.5631805)} - 1$$

$$= \frac{2.1809}{1.5631805} - 1$$

$$= 0.3951683$$

Por lo tanto, la gestión acumulada deflactada es de 39.52%

Sustituyendo los datos en la fórmula de Rendimiento Real tenemos:

$$\textbf{Rendimiento Real} = 39.52\ \% * \frac{360}{1367}$$

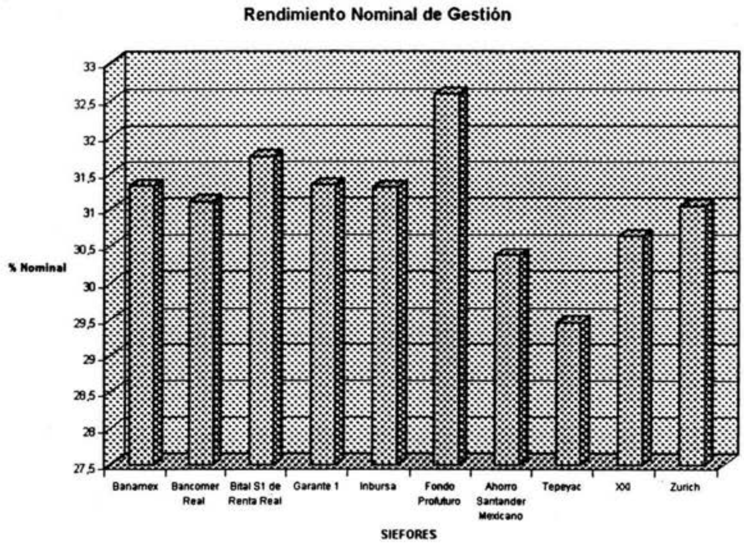
$$= 0.3952 * 0.2633504$$

$$= 10.407608$$

Por lo tanto, el rendimiento de gestión real es de 10.41%

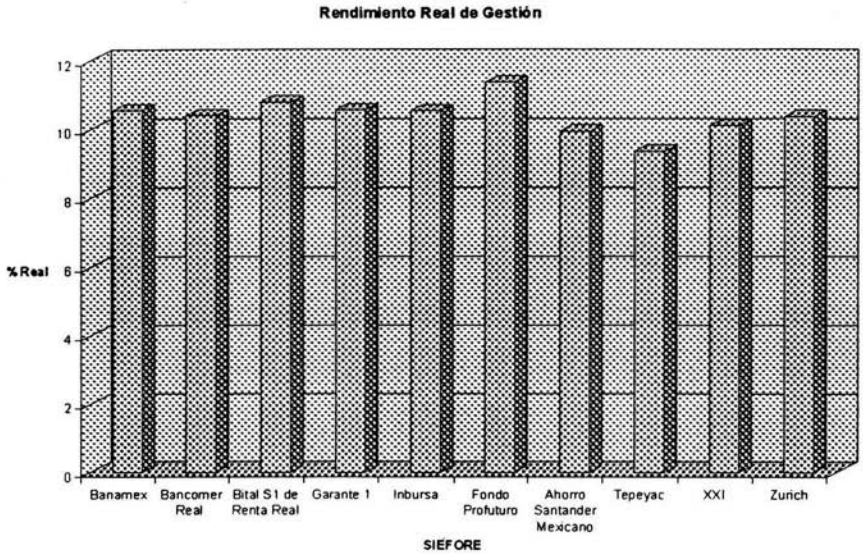
Las SIEFORES del cuadro anterior se calculan siguiendo el mismo procedimiento.

La siguiente gráfica representa el Rendimiento Nominal de Gestión acumulada del 2 de julio de 1997 al 30 de marzo del 2001.



Como se observa en la gráfica, la SIEFORE con mayor porcentaje nominal es Fondo Profuturo con 32.58% y la SIEFORE con menor porcentaje es Tepeyac con 29.45%.

Respecto al rendimiento real que obtuvieron los activos de las SIEFORES antes de cobro de comisiones sobre saldo (real%), tenemos la siguiente gráfica de Rendimiento Real de Gestión acumulada del 2 de julio de 1997 al 30 de marzo del 2001.



Observamos que la SIEFORE que tiene mayor rendimiento real (%) es Fondo Profuturo con 11.36% y la que tiene menor porcentaje es la SIEFORE Tepeyac con 9.35%.

Por lo tanto, podemos concluir que el desempeño financiero entre las administradoras se compara a través de su rendimiento de gestión, el cual muestra el rendimiento obtenido por las SIEFORES antes del cobro de comisiones.

En el nuevo Sistema de Pensiones del Seguro Social el rendimiento del trabajador es la tasa interna de rendimiento de sus aportaciones, la cual representa la tasa de rendimiento que recibe el trabajador tomando en cuenta todas las comisiones al participar en una AFORE en un periodo determinado.

Es importante mencionar que este indicador muestra la ganancia que tendría una aportación después de un cierto periodo determinado de tiempo, los resultados pueden ser comparables entre las distintas SIEFORES, sin embargo, podemos decir que pueden variar dependiendo de diversos factores como los siguientes: el nivel de ingreso de trabajador, el tiempo que permanezca en la AFORE y también de los rendimientos que en el futuro otorguen las AFORES. Debido a estos factores no es muy factible construir indicadores para cada trabajador.

Cabe mencionar que los rendimientos están sujetos a cambios diarios, dependiendo de la estructura de la cartera de valores de las SIEFORES, por lo tanto se reflejará en el indicador al momento de su publicación.

CAPÍTULO 4

PLANTEAMIENTO TEÓRICO DEL PROBLEMA

4.1 Presentación

En las últimas tres décadas se han realizado notables avances en la teoría moderna de selección de cartera. De todas las metodologías y modelos que se han desarrollado, sin duda alguna, el que de mayor popularidad goza ha sido el modelo de media-varianza, el cual se ha utilizado por muchos años para analizar, rigurosa y exitosamente, problemas de inversión de activos de diversa índole. No sería del todo aventurado decir que gran parte del desarrollo que se ha dado a la teoría moderna de selección de cartera, se debe a la investigación que se ha realizado por muchos años con el fin de mejorar los métodos de estimación y grado de aplicabilidad del modelo de media-varianza. El gran éxito que ha tenido este modelo se puede atribuir, sin duda alguna, a la gran flexibilidad que brinda su estructura teórica, la cual permite poder aplicarlo a problemas que involucran una gran variedad de instrumentos y restricciones.

Debido a esta gran flexibilidad, no sería difícil inclinarse por pensar que el problema de selección de cartera de los fondos de pensión se puede analizar en base al modelo de media-varianza, de la misma manera en que se podría analizar cualquier otro tipo de sociedad de inversión. Si este fuera el caso, el problema de la inversión de los fondos de retiro podría ser ampliamente simplificado, y este trabajo sería simplemente una extensión de trabajos realizados anteriormente.

El problema de selección de cartera de los fondos de retiro, sin embargo, presenta rasgos únicos que lo distinguen de la gran mayoría de los problemas que comunmente se estudian en la teoría moderna de portafolios, por lo que su análisis difícilmente se puede realizar en base a una extensión del modelo de media-varianza. De esta manera, el objetivo principal de este capítulo es el de distinguir y resaltar estos rasgos a través de la exposición de los aspectos y dificultades teóricas que se presentan al momento de plantear un problema de selección de cartera de fondos de pensión, buscando a la vez mostrar las propiedades que debe poseer todo modelo que pretenda esta solución.

4.2 Modelo de Media-Varianza

El problema de selección de cartera ha sido uno de los temas centrales de la literatura financiera en los últimos cuarenta años. En 1952 H. Markowitz publicó un artículo en el cual desarrolló un modelo en que el horizonte de inversión de los individuos es de solamente un período, y en el que la media y la varianza del rendimiento de las carteras, y la actitud (aversión) de los inversionistas hacia el riesgo, constituyen los únicos parámetros relevantes en las decisiones de inversión en activos riesgosos. Markowitz estableció que es la maximización de la utilidad esperada del inversionista, cuya función debe mostrar preferencia por un mayor rendimiento esperado y aversión por un mayor riesgo, y no la maximización del rendimiento de la cartera, el criterio que debe ser utilizado en el planteamiento de todo problema de selección de cartera. Para poder hacer este supuesto, Markowitz tuvo que solucionar el problema de definir la forma de la función de utilidad que, utilizando a la media y varianza de las carteras, y la aversión al riesgo del inversionista como sus únicos argumentos, fuera compatible con las propiedades del teorema de utilidad esperada. Para este fin, Markowitz propuso como candidato ideal a la función de utilidad cuadrática, la cual, además de satisfacer el teorema de la utilidad esperada, permite la existencia de una solución única (máximo global). Así, el modelo típico de media-varianza quedó planteado como un problema de maximización de una función de utilidad cuadrática, con un horizonte de inversión equivalente a un período (como quiera que éste sea definido), en el que no se incluye la posibilidad de que existan períodos intermedios de reinversión de intereses, y por lo tanto, no se le permite al inversionista el poder modificar la composición de su cartera entre t0 y t1.

De una manera más formal, el modelo de Markowitz se puede plantear como:

(1) $\text{MAX } E(U(x;e,a)) = E(x^t r) - (a/2)((E x^t r)) + Var(x^t r))$

$x^t u = R_0$

$x \geqslant 0$

Donde:

x = Vector de montos de la riqueza inicial invertido en cada uno de los i activos

u = Vector columna unitario

r = Vector columna compuesto por la variable equivalente a uno más el rendimiento de los activos.

Var = Varianza del argumento

R_0 = Riqueza inicial

0 = Vector columna de ceros

x^t r = Riqueza al final del período de inversión

a = Parámetro de aversión al riesgo

E( ) = Operador esperanza

$(E(x^t r)) + Var (x^t r) = E((x^t r))$

t = denota el vector transpuesto

Este problema generalmente se soluciona a partir de técnicas de programación no lineal, obteniéndose como resultado el monto que se deberá invertir en cada uno de los activos que componen la cartera que maximiza la utilidad del inversionista (cartera óptima), dado un cierto nivel de aversión al riesgo. Esta cartera óptima, sin embargo, será solamente un elemento de un conjunto más amplio compuesto por todas aquellas carteras que se originan de solucionar (1), al variar el valor del parámetro de aversión al riesgo a. Cada una de las carteras que pertenecen a este conjunto tiene la propiedad de ser la de menor riesgo respecto a todas aquellas carteras que ofrezcan el mismo rendimiento esperado, por lo que a este conjunto se le denomina comúnmente conjunto o "frontera" de carteras eficientes.

Debido a esta propiedad, la estimación de la frontera eficiente puede realizarse independientemente de la definición que se suponga respecto al ordenamiento de preferencias (función de utilidad), a través de un problema de optimización cuadrática de la siguiente forma:

(2) $$min_x \ \mathrm{Var}(x^t \mathrm{r})$$

$$\mathrm{E}(x^t \mathrm{r}) = \mathrm{E}(r_c)$$

$$x^t \mathrm{u} = R_0$$

$$x \geq 0$$

Donde:

$\mathrm{E}(r_c)$ = Rendimiento esperado de la cartera

Así, el problema de optimización en (2) consiste en minimizar la varianza de la cartera de activos, a través de variar el valor esperado de la cartera ($\mathrm{E}(e_p)$)

Es además importante observar que, aunque ni en (1) ni en (2) se permite la posibilidad de poder prestar ni pedir prestado a una tasa libre de riesgo, o de poder realizar ventas en corto, ninguna de estas restricciones son inherentes al planteamiento del modelo de media-varianza, por lo que cualquiera de ellas (o ambas) se puede fácilmente modificar al momento de solucionar el modelo. En todo caso, el efecto de la modificación de alguna de estas restricciones se observará en el conjunto solución de carteras que forman la frontera eficiente, cuya forma dependerá de las restricciones que se incluyan en el problema.

Así una vez identificadas las carteras que conforman el conjunto eficiente, la elección de la cartera "óptima" dependerá de las características de ordenamiento de preferencias del inversionista, y específicamente, de su nivel de aversión al riesgo.

Analizando (1) y (2), podemos ver que para solucionar un problema de media-varianza, es necesario estimar solamente el rendimiento esperado y la matriz de varianza-covarianza del rendimiento de los activos contemplados (si lo único que se desea es obtener la frontera eficientes de carteras), y el parámetro de aversión al riesgo del inversionista (si lo que se desea es obtener la cartera óptima sobre la frontera eficiente de un inversionista en particular). Sin embargo, el plantear el problema de optimización en base a este número limitado de parámetros, implica necesariamente tener que restringir las funciones de utilidad y/o la distribución de los rendimientos de los activos, a funciones (formas) que queden completamente representadas por la media y la varianza del rendimiento de los activos.

4.2.1 Supuestos del Modelo de Media-Varianza

Para solucionar un problema de selección de cartera en base al modelo de media-varianza, es necesario y suficiente realizar cualquiera de los siguientes dos supuestos:

1) Cuando en un problema de media-varianza se supone una distribución de probabilidad arbitraria para el rendimiento de los activos, forzosamente se tiene que definir el ordenamiento de preferencias en base a la función de utilidad cuadrática. Esto se puede demostrar si se realiza una expansión de la expresión general de la función de utilidad de un individuo en base a una serie de Taylor alrededor de la riqueza esperada de fin de periodo:

$$(3) \qquad U(R) = U(E(R)) + U'(E(R))(R-E(R)) + (\tfrac{1}{2})U''(E(R))(R-E(R)) + \sum_{i=3}^{\infty} (1/i!) \quad U^{(i)} \; (E(R))\,(R-E(R)) \; (R-E(R))^{i}$$

Y luego aplicando el operador esperanza a la expresión anterior obtenemos:

$$(4) \qquad E(U(R)) = U(E(R)) + (1/2)U''(E(R))V(R) + \sum_{i=3}^{\infty} (1/i!) \quad U^{(i)} \; (E(R)) \; m^{i} \; (R)$$

Donde:

R = Riqueza de final de periodo (variable aleatoria)

V = Varianza de R

U(R) = Utilidad del individuo

$U^{(i)}$ = i-ésima derivada de la función de utilidad

m^i = i-ésimo momento central de R

Como se puede observar, la función de utilidad esperada, generalmente no se puede definir únicamente en términos del valor esperado y la varianza de la riqueza final, tal y como lo indica la presencia de momentos de orden mayor a 2 en la expresión (4). En el caso de la función de utilidad cuadrática, sin embargo, el valor esperado de la utilidad depende solamente de la media y la varianza, debido a que sus derivadas de orden mayor a 2 son iguales a cero.

Cabe mencionar sin embargo, que a pesar de esta atractiva propiedad, la función de utilidad cuadrática presenta el inconveniente de mostrar una aversión absoluta al riesgo creciente respecto al nivel de riqueza del individuo, por lo que en ocasiones se puede llegar al absurdo de que el inversionista va a preferir menos a más. Esta falla ha sido generalmente solucionada a través de plantear el problema de manera que en el dominio de la función, nunca se llegue más allá del punto en que la utilidad marginal de la riqueza se vuelva negativa.

2) Si al momento de plantear el problema de selección de cartera no se define ningún tipo específico para la función de utilidad, su solución se tendrá que obtener bajo el supuesto de normalidad en la distribución de probabilidad de los rendimientos. Esto se debe a que la distribución normal de probabilidades posee la propiedad de poder quedar completamente definida con conocer solamente el valor de su media y su varianza, además de tener la cualidad de que la tasa de rendimiento de una cartera compuesta de activos cuyos rendimientos se distribuyen conjuntamente como una normal multivariada, también se comporta como una normal.

De esta manera, la inclusión del supuesto de normalidad (multivariada) en el rendimiento de los activos en un problema de selección de cartera, constituye una condición necesaria para que las carteras que se obtengan en el conjunto solución posean la propiedad de eficiencia (de acuerdo a como se ha definido anteriormente).

Por otro lado, es importante hacer notar que si el problema de cartera se plantea sin especificar ningún tipo de función de utilidad, la solución del modelo de media-varianza se limita a encontrar el conjunto de carteras que constituyen la frontera eficiente, por lo que en realidad, no se está encontrando una solución única al problema del inversionista. Esta característica del modelo de media-varianza, representa una seria limitante al intentar ser aplicado en un contexto de inversión en períodos múltiples, no solo porque en realidad no se estaría definiendo una trayectoria única y definida de comportamiento para el inversionista, sino además, como se verá más adelante, porque al momento en que se pasa de un esquema de un período a un problema de selección de cartera en períodos consecutivos en el que se supone reinversión de los intereses, es posible definir, independientemente del nivel de aversión al riesgo del inversionista, un criterio de preferencia y de selección entre las carteras que componen la frontera eficiente.

4.3 Funciones de Utilidad

En esta sección, se analizará el papel que juega la función de utilidad en un problema intertemporal de selección de cartera y se explicarán los conceptos de "función de utilidad derivada" y de "miopía en las funciones de utilidad", los cuales resultan clave para desarrollar un modelo de selección de cartera que permita solucionar el problema de inversión de los fondos de retiro, y se desorrollará y aplicará a los casos de la función de utilidad cuadrática y de la función de utilidad logarítmica, una metodología que permite obtener la trayectoria óptima de decisiones de un inversionista.

4.3.1 Función de Utilidad Derivada ó Indirecta

El problema de selección de cartera de fondos de retiro se puede expresar como el de un individuo que tiene que decidir la manera en que deberá distribuir su riqueza tanto en el período inicial (t_0) , como al inicio de cada uno de los períodos de reinversión (t1, t2,.....,tn-1), buscando con ello maximizar la utilidad esperada de su cartera al final del horizonte de inversión (t_n)[12] , sujeto a la restricción de no poder retirar en ninguna fecha anterior a (t_n) , ni el principal ni los interéses que su fondo de inversión vaya generando.

En esta sección se desarrollará una metodología que permite solucionar este problema bajo el supuesto que el individuo no recibirá flujos intermedios de capital en ninguno de los períodos de reinversión.

De esta manera, el inversionista se enfrenta a un problema intertemporal de decisión de cartera en períodos múltiples consecutivos, en el que el valor de su riqueza dependerá, a lo largo de su horizonte de inversión, de las decisiones de cartera y del valor de rendimiento de los activos que se hayan observado en períodos anteriores.

La solución de un problema intertemporal de este tipo se puede obtener con el siguiente razonamiento, a través de una técnica denominada "programación dinámica"

CUADRO 1:

t_0 t_{n-2} t_{n-1} t_n

Periodo: I----I----I----I-----------------I-----I------I------I

1 2 3 n-2 n-1 n

Riqueza: $R_0\ R_1\ R_2\ R_3$ $R_{n-2}R_{n-1}R_n$

Para poder encontrar la composición de la cartera que en (t_0) maximice su utilidad esperada en (t_n) el inversionista podría partir por encontrar, en base a la función de densidad de los rendimientos del último período y a la riqueza (R_{n-1}) disponible, la composición de la cartera que al inicio de su último periodo de reinversión (t_{n-1}) le permitiera maximizar la utilidad esperada de su riqueza al final del horizonte de inversión (t_n) ; sin embargo, el inversionista no puede saber cual será el valor de (R_{n-1}) , no solo porque no conoce el valor definitivo que tomará el rendimiento de los activos de su cartera durante ese periodo, sino además porque (R_{n-1}) dependerá de la decisión de cartera que hubiera tomado al inicio (t_{n-2}) del penúltimo periodo de reinversión, por lo cual el inversionista se vería en la necesidad de definir, al igual que en (t_{n-1}) , la composición óptima de su cartera en (t_{n-2}) . Pero el nivel de riqueza del inversionista en (t_{n-2}) estará de nueva cuenta en función de la decisión y del comportamiento de los rendimientos del periodo de reinversión anterior (t_{n-3}) , por lo que el inversionista tendría también que decidir la composición de su cartera en (t_{n-3}) .

Así, debido a la interrelación que existe entre cada uno de los períodos de reinversión (a través de hacer dependiente el valor de la riqueza de las decisiones y de los resultados que se hayan observado en períodos anteriores), el inversionista tendría que decidir la composición de su cartera óptima en todos y cada uno de los períodos entre (t_{n-1}) y (t_1) , de manera que finalmente pudiera llegar a una solución para el problema de selección de cartera en t_0 (en el que la riqueza inicial es conocida).

De esta manera, con la decisión de cartera que realizara en t_0 , el inversionista estaría maximizando, de manera indirecta, su utilidad esperada al final del último periodo de reinversión. Por otro lado, es importante señalar que la trayectoria de decisiones que resulta de resolver este problema, varía de acuerdo a la función de utilidad que se defina para dar forma al ordenamiento de preferencias del inversionista; sin embargo, para casi todos los casos las soluciones óptimas que se obtengan quedarán como función de los parámetros que definan la distribución de probabilidades de los rendimientos en períodos futuros debido a la dependencia que existe en la decisión de cartera de cada periodo, con las decisiones tomadas en períodos anteriores. Esta dependencia tendrá como resultado, como se verá posteriormente, que para poder obtener un valor definitivo para la composición de la cartera en t_0 , el inversionista deberá conocer los parámetros y la forma de la distribución de los rendimientos para todos los períodos futuros que se encuentran considerados en el horizonte, y que, aun en el caso de que el inversionista posea dicha información, la decisión de cartera de períodos posteriores a t_0 quedará en función de los valores finales (aleatorios) que adquiera el rendimiento de cada uno de los activos en períodos anteriores.

En base a lo anterior, la solución del problema intertemporal de decisión de cartera al que nos estamos concentrando, se puede plantear formalmente de la siguiente manera:

Dado que el fin del inversionista es el de encontrar en t_0 la composición de la cartera óptima, que le permita maximizar la utilidad que espera recibir de su riqueza acumulada hasta el final de su horizonte de inversión, su función objetivo se puede expresar como:

$$(4) \qquad \max \mathrm{E}\ t_0\ (\ U_n\ (\ R_n\ ))$$

Así, para solucionar este programa por programación dinámica, el primer paso que el inversionista deberá tomar será el de decidir como repartir en (t_{n-1}) su riqueza disponible (R_{n-1}), entre los distintos activos disponibles, de manera que con ello pueda maximizar el valor esperado de su riqueza final (max E(u(R_n))), sujeto a la distribución de probabilidades de los rendimientos de los activos en el periodo n:

$$(5) \qquad \max \mathrm{E}\ t_{n-1}\ (\ U_n\ (\ R_n\ ))$$

La solución que se obtenga al maximizar (5), sin embargo, dependerá generalmente del valor que adquiera la riqueza R_{n-1}, por lo que si una vez que se ha obtenido la composición óptima de cartera en t_{n-1}, ésta se utiliza para dar un valor máximo a la función de utilidad que fue objeto de la maximización, se podrá obtener una función (D) que tiene por argumento a la riqueza del periodo anterior:

$$(6) \qquad \mathrm{E}^*\ t_{n-1}\ (\ U_n\ (\ R_n\ )) = \mathrm{D}\ t_{n-1}\ (\ R_{n-1}\ )$$

Donde E* t_{n-1} U_n (R_n)) se obtiene de evaluar la E t_{n-1} U_n (R_n)) con los valores de la cartera óptima que resulta de la maximización de (5) que se conoce como "función de utilidad derivada o indirecta", la cual posee la propiedad de permitir ordenar los posibles valores que pueda tomar R_{n-1}, en base a la utilidad máxima que se espera poder alcanzar con ellos al final del horizonte de inversión.

De igual forma, el valor definitivo que adquiera R_{n-1}, dependerá de la decisión de cartera que se haya realizado en t_{n-2}, y del valor que en ese periodo adquiera el rendimiento de los activos incluidos en la cartera, por lo que el problema de selección de cartera al inicio de t_{n-2}, se puede plantear a la vez como la maximización de la expresión:

$$(7) \qquad \mathrm{E}\ t_{n-2}\ (\mathrm{E}^*\ t_{n-1}\ (\ U_n\ ((\ R_n\ ))) = \mathrm{E}\ t_{n-2}\ (\mathrm{D}\ t_{n-1}\ (\ R_{n-1}\ ))$$

Analizando (7), se puede observar que el problema de selección de cartera que tendrá que resolver el inversionista en t_{n-2}, con el fin de maximizar de manera indirecta la utilidad de la riqueza que espera obtener al final de su horizonte de inversión, se puede plantear de hecho como un problema de un periodo, siempre y cuando la función objetivo sea apropiadamente definida en términos de la función de utilidad derivada.

Es importante notar además, que el valor que resulte para R_{n-1} en (7), estará en función del valor que adquiera R_{n-2}, el cual a su vez dependerá del valor que adquiera R_{n-3}, R_{n-4}, R_{n-5}, R_{n-6} y así sucesivamente hasta llegar hasta R_0, por lo que en base a esta dependencia es posible definir al problema de la maximización de la utilidad esperada de la riqueza del final del horizonte de inversión, como un problema de selección de cartera de "un periodo", siempre y cuando la función objetivo (función de utilidad) del periodo inicial, incorpore en su expresión las reglas óptimas de decisión de cartera que deberán de seguirse en períodos posteriores.

4.3.2 Propiedad de Miopía en las Funciones de Utilidad

Es un problema de inversión en períodos múltiples, se dice que una función de utilidad posee la propiedad de miopía si permite encontrar una secuencia o trayectoria óptima de decisiones de cartera, en la que cada decisión se pueda realizar independientemente de las otras. De este modo, existirá miopía si se puede solucionar el problema de selección de cartera en cada punto en el tiempo, sin tener que tomar en cuenta lo que pueda suceder en el futuro o lo que haya sucedido en períodos anteriores.

Para analizar las condiciones en las que una función de utilidad no posee la propiedad de miopía, consideremos el caso de una función de utilidad del final del horizonte de inversión que no se pueda expresar como una transformación lineal de la expresión que se obtenga para la función de utilidad derivada del periodo inicial de inversión. Bajo estas circunstancias, ambas funciones de utilidad representarán composición de cartera que se obtenga al maximizar la primera, no será la misma que resulte de maximizar la segunda; de esta manera, la decisión de cartera óptima del primer periodo no representará, por sí sola, una condición suficiente, sino tan solo necesaria (en el sentido de que formaría parte de la trayectoria óptima de decisiones del inversionista), para lograr la maximización de la utilidad esperada del individuo al final del horizonte de inversión.

4.3.3 Ejemplos de Funciones de Utilidad

FUNCIÓN DE UTILIDAD CUADRÁTICA

Para ilustrar el concepto de miopía y de funciones de utilidad derivada, se recurrirá primero a un ejemplo numérico en el que se estudiará el caso de la función de utilidad cuadrática. Por facilidad de exposición, se realizará el supuesto de que el horizonte de inversión consta solamente de dos períodos (un periodo inicial (t_0) y un periodo de reinversión (t_1)), en los que existen únicamente dos posibles activos independientes, y cuya distribución de probabilidad se supondrá constante en el tiempo y libre de autocorrelación seriada.

Bajo este contexto, el problema del inversionista será el de encontrar en t_0 , la composición de cartera en la que se tiene:

(8) $$\max E_{t_0} (u(R_2)) = \max E_{t_0} (R_2 - \eta R_2)$$

Donde $R_2 - \eta R_2$ representa la función de utilidad que el sujeto espera recibir del valor de su riqueza al final de su horizonte de inversión R_2 , y η simboliza el parámetro de aversión al riesgo.

Así de acuerdo a (5), la primera etapa (el problema de selección de cartera en el último de los periodos considerados), se puede plantear como:

(9) $$\max\{Z_{11}\}_{t_1} (u(R_2)) = \max E_{t_1} (R_2 - \eta R_2)$$

sujeto a:

(9.1) $$R_2 = (1+X1) Z_{11} + (1+X2) Z_{21}$$

(9.2) $$R_1 = Z_{11} + Z_{21}$$

(9.3) $$Z_{11} , Z_{21} >= 0$$

Donde:

Z_{11} = Monto invertido en el activo 1 en el periodo de reinversión

Z_{21} = Monto invertido en el activo 2 en el periodo de reinversión

η = Parámetro de aversión al riesgo igual a 1/2000

X1 = Rendimiento del activo 1

X2 = Rendimiento del activo 2

R_1 = Riqueza al final del periodo inicial

R_2 = Riqueza al final del periodo de reinversión

y si se introducen las restricciones (9.1) y (9.2) en la función objetivo, (9) se puede replantear como:

(10) $\max\{Z_{11}\} E_{t_1}(u(R_2)) = \max E(((1+X2)R_1 + (X1-X2)Z_{11}) - \eta((1+x2)R_1 + (X1-X2)Z_{11}))$

De esta manera, si se define que la distribución de probabilidades de los rendimientos de los activos de acuerdo a las siguientes tablas:

Activo	Rendimiento	Probabilidad
X1	5%	0.6
	20%	0.4
X2	-100%	0.2
	50%	0.8

Distribución conjunta:

$X1_i$	$X2_i$	Pr{X1= $X1_i$, X2= $X2_i$ }=
5%	-100%	0.12
5%	50%	0.48
20%	-100%	0.08
20%	50%	0.32

(10) se puede solucionar como un problema de optimización clásica, en el que se obtiene como resultado una expresión para la solución óptima de Z_{11} * y Z_{21} *, cuyo valor quedará en función del valor no conocido de la riqueza final del periodo inicial (R_1),

Z_{11} * = (0.46R1 - 90) / 0.37

Z_{21} * = R_1 - Z_{12} *

Una vez obtenidos estos valores, se sustituyen en la función objetivo (10), llegando con ello a la expresión de la función de utilidad derivada, la cual toma la siguiente forma:

(11) max { Z_{11} }E t_1 (u(R_2)) = E(u(Z_{11} *, Z_{21} *)) = D_1 (R_1)
= 1.087(R_1 -(1/1791.7) R_1) + 10.84

El segundo paso del problema de programación dinámica, consiste de acuerdo a (7), en maximizar, respecto de la proporción de los activos en el periodo inicial, la expresión encontrada para la función de utilidad derivada (11). Ahora bien, si se observa esta expresión con detenimiento, se podrá ver que para maximizar la función de utilidad derivada, no es necesario incluir en la función objetivo ninguna de las dos constantes que se encuentran fuera de los paréntesis que contienen a los términos de R1 (debido a que ambas constantes desaparecen al momento de obtener las condiciones de primer orden), por lo que la maximización se puede realizar sobre una expresión alternativa (despejadas de constantes) de la función de utilidad derivada. De esta manera, esta segunda etapa del problema de optimización dinámica se puede replantear como:

(12) max E t_0 (R_1 - (1/1791.7) R_1)

sujeto a :

(12.1) R_1 = (1+X1) Z_{10} + (1+X2) Z_{20}

(12.2) R_1 = Z_{10} + Z_{20}

(12.3) Z_{10} , Z_{20} >=0

Así de la solución de (12), se obtiene una función que determina, (dado que R_0 es conocido), el monto óptimo a ser invertido en el activo 2 durante el período inicial:

Z_{10} * = (0.52 R_0 - 90)/0.41 = 97.38

Por lo que si el valor de la riqueza inicial (R_0) se supuso igual a 250, la decisión que debe ser tomada en el periodo inicial (t_0) con el fin de maximizar la utilidad del final del horizonte de inversión, deberá ser la de invertir el 38.9% de la riqueza inicial en el activo 1.

El siguiente paso en el desarrollo de este ejemplo, consiste en utilizar los resultados obtenidos para determinar si la función de utilidad cuadrática posee o no la propiedad de miopía. Como se mencionó en la sección anterior, la propiedad de miopía en una función de utilidad permite que la decisión que se tome en un periodo (en este caso t_0) sea óptima respecto a la maximización de la utilidad de la riqueza al final del horizonte de inversión. Esto solo se cumplirá si la función objetivo definida para la maximización en t_0 posee las siguientes propiedades:

- Que represente el mismo ordenamiento de preferencias que la función de utilidad esperada de la riqueza del final del horizonte de inversión.
- No dependa de parámetros de la distribución de rendimientos de períodos futuros, de manera que la decisión inicial se pueda realizar independientemente de lo que suceda en el futuro.

Para el caso de nuestro ejemplo, la función objetivo para el periodo inicial del inversionista fue definida como la maximización en (12) de la esperanza de la función de utilidad derivada:

$$u = R_1 - (1/1791.7)\ R_1$$

Sin embargo, si esta expresión se compara con la de la función de utilidad planteada para la maximización de la utilidad esperada de la riqueza final:

$$u = R_1 - (1/2000)\ R_1$$

Se puede observar que en lo único en que difieren es en el valor del parámetro de aversión al riesgo. Esta leve modificación, sin embargo, es suficiente para no poderlas expresar como una transformación lineal la una de la otra, por lo que la decisión de óptima cartera que se realice en t0, no maximizará por sí sola la utilidad esperada de la riqueza al final del horizonte de inversión.

Este resultado se debe a que, el parámetro de aversión al riesgo (1/1791.7) de la función de utilidad derivada, difiere del parámetro de aversión al riesgo de la función original, debido a que queda en función de los parámetros de la distribución de probabilidades que prevalecerá en el período de reinversión, lo que provoca que la decisión en t_0 no se pueda realizar independientemente de lo que suceda en períodos futuros de reinversión.

De esta manera, si bien en este ejemplo un inversionista que sea "racional" optará por elegir a Z_{10} * y Z_{20} * como su decisión óptima en t_0 , no con ello logrará necesariamente maximizar su utilidad esperada al final del horizonte de inversión. Esto dependerá de una vez que haya pasado el periodo inicial de inversión, el inversionista se apegue a la regla de decisión establecida para Z_{11} * y Z_{21} *, de la cual no se puede definir un valor específico de antemano (para la composición de la cartera), debido a que tanto Z_{11} * como Z_{21} * depende del valor de la riqueza al inicio de t_1 , el cual no se puede conocer en t_0 .

FUNCIÓN DE UTILIDAD LOGARÍTMICA

En esta sección, se planteará el mismo problema que en el ejemplo anterior, pero esta vez suponiendo que el ordenamiento de preferencias del individuo se puede modelar como una función de utilidad logarítmica.

Usando este supuesto, (9) se puede replantear como:

(13) $\max E\ t_1\ (u) = \max\ E\ t_1\ (\ln(\ R_2\ )$

(13.1) $R_2 = R_1\ (\ (1{+}X2) + (X1{-}X2)\ K_{11}$

(13.2) $1 = K_{11} + K_{21}$

(13.3) $K_{11}\ ,\ K_{21} >= 0$

Donde:

K_{11} : Porcentaje de la riqueza (R_1) invertido en el activo 1 en el periodo de reinversión.

K_{21} : Porcentaje de la riqueza (R_2) invertido en el activo 2 en el período de reinversión.

X1: Rendimiento del activo 1.

X2: Rendimiento del activo 2.

R_1 : Riqueza al final del periodo inicial

R_2 : Riqueza al final del periodo de reinversión.

Al igual que en la sección anterior, este problema se puede resolver por programación dinámica " hacia atrás", por lo que de acuerdo a (5), y a (13), (13.1), (13.2) y (13.3), la primera etapa de la solución se puede plantear como:

$$\max K_{11} \; E \; t_1 \; (u) = \max K_{11} \; E \; t_1 \; (\ln(R_1 \; ((1+X2) + (X1-X2) \; K_{11} \;))$$

K_{11} : variable aleatoria

$$\max K_{11} \; E \; t_1 \; (u) = \max K_{11} \; E \; t_1 \; (\ln(R_1 \;) + \ln((1+X2) + (X1-X2) \; K_{11} \;))$$

(14)

$$\max K_{11} \; E \; t_1 \; (u) = \ln (R_1 \;) + \max K_{11} \; E \; t_1 \; (\ln((1+X2) + (X1-X2) \; K_{11} \;))$$

De esta manera, maximizando (14) respecto a la proporción a ser invertida en cada uno de los activos, y sujeto a (13.3) y a los valores de la distribución conjunta de probabilidades de los rendimientos del problema anterior, se obtiene que:

K_{11} * = 76.25%

K_{21} * = 23.75%

Por lo que sustituyendo estos valores en (14), se puede evaluar el valor máximo de la utilidad esperada para el periodo de reinversión:

(15) $$D_{t_0} , \; K_{10} \; (R_1 \;) = E^*(u(R_2 \;)) = \ln(R_1 \;) + \delta$$

Donde: $\delta = \ln(((1+X2) + (X1\text{-}X2)\ K_{11}\ *)) = cte$

Así al igual que en el ejemplo anterior, (15) constituye la función de utilidad derivada, la cual se utiliza como criterio de maximización para la segunda etapa de la solución del problema, por lo que de acuerdo a (7), el problema del inversionista al comienzo del periodo inicial será el de:

(16)

$$\max\ K_{10}\ (E\ t_0\ (u)^*)= \max\ K_{10}\ E\ t_0\ (\ln(\ R_0\ ((1+X2) + (X1\text{-}X2)\ K_{10}\ ))+\delta$$

De manera que solucionando (16), se obtiene un valor óptimo para k11, lo cual determinará el comportamiento óptimo que el inversionista debe mostrar en t0:

$K_{10}\ * = 76.25\%$

$K_{20}\ * = 23.75\%$

Es importante notar que la proporción a ser invertida en cada uno de los activos resultó ser la misma para la decisión del periodo inicial y la del periodo de reinversión debido a que la distribución de probabilidades de los rendimientos de los activos se mantuvo constante en el tiempo, y a que las reglas de decisión de cartera que se obtuvieron para ambos períodos se pudieron definir de manera independiente respecto al nivel de la riqueza del inicio del periodo y a los parámetros de la distribución de rendimientos de otros períodos.

Una vez hecho esto, cabe analizar si la función de utilidad logarítmica posee o no la propiedad de miopía. Así, comparando la función de utilidad derivada con la función de utilidad original (u = ln(R_2)), se puede apreciar que la función de utilidad derivada sí constituye una transformación lineal de la función de utilidad original, debido a que ambas difieren solamente por la presencia de una constante, cuyo valor, si bien depende de los parámetros de la distribución de los rendimientos del periodo de reinversión, no afecta la regla de decisión óptima de cartera al momento en que se efectúa la maximización de la función de utilidad derivada, teniendo como consecuencia que la decisión que se tome en el periodo inicial sea independiente de lo que suceda en el periodo de reinversión, por lo que se puede concluir que la función de utilidad logarítmica si posee la propiedad de miopía.

Para demostrar lo anterior, solamente hay que considerar que si la definición de una transformación lineal entre dos funciones de utilidad establece que:

$$(17) \qquad U(R_2) = \beta\, U(R_1)\, \xi$$

Donde: β, ξ son constantes

y si se supone que ni β ni ξ dependen de R_1 y que $\beta=1$, $\xi=\delta$ y $U(R) = \ln(R)$, entonces (17) se puede redefinir como:

$$(18) \qquad \ln(R_2) = \ln(R_1) + \delta$$

Lo que implica que la función de utilidad derivada (lado izquierdo de (17)), es una transformación lineal de la función de utilidad de la riqueza del final del horizonte de inversión (lado derecho de (17)). Así aplicando el operador esperanza a ambos lados de (18) se obtiene:

$$(19) \qquad E(\ln(R_2)) = E(\ln(R_1)) + \delta$$

Se puede deducir que la composición de cartera que maximice el valor esperado de una, también maximizará el valor esperado de la otra, sin tener que tomar en cuenta información referente a otros períodos del horizonte de inversión, por lo que se puede concluir que la función de utilidad logarítmica si presenta la propiedad de miopía.

4.3.4 Causa de la propiedad de Miopia en algunas Funciones de Utilidad.

En base a los dos ejemplos anteriormente desarrollados, se pudo concluir que la función de utilidad logarítmica, a diferencia de la función de utilidad cuadrática sí presenta la propiedad de miopía. Sin embargo, en ninguno de los dos casos, se hizo mención alguna acerca del factor o característica que origina que la propiedad de miopía se presente en una función de utilidad y no en la otra.

Para investigar qué factor o parámetro es éste, recordemos la definición, la miopía implica que las reglas de decisión que se obtengan para la inversión de los activos deberán ser independiente de los resultados que se obtengan en otros períodos del horizonte de inversión; ahora bien, en base a los dos ejercicios que hemos desarrollado, sabemos que para que esto suceda, es necesario que:

i) la función que sea objeto de la maximización (función objetivo) es un determinado periodo del horizonte de inversión, no lleve incorporados en su expresión los parámetros de la distribución de probabilidades de periodos futuros, de manera que dicha función de utilidad se pueda definir como una transformación lineal de la función del final del horizonte de inversión.

ii) que la regla de decisión de cartera de dicho periodo no dependa del valor de la riqueza acumulada hasta dicho periodo.

Para el caso de un problema de inversión en dos períodos, la condición de que la función de utilidad que dependa de la riqueza en cada periodo (U(R_0) y U(R_1)) se pueda expresar como una transformación lineal de la función de utilidad del final del horizonte de inversión (U(R_2)) se reduce a:

(20) $U(R_2) = \Upsilon 1 \ U(R_1) + \kappa 1$

y

(21) $U(R_2) = \Upsilon 0 \ U(R_0) + \kappa 0$

Donde $\Upsilon 0, \Upsilon 1, \kappa 0, \kappa 1$ son constantes

Sin embargo, si (20) y (21) se cumplen, entonces necesariamente (igualando (20) y (21)):

$$U(R_1) = \omega U(R_0) + X$$

(22) $$U(r R_0) = \omega U(R_0) + X$$

Donde:

$U(R_1) = U(r R_0)$

r = uno más el rendimientode la cartera durante el primer periodo

$\omega = \Upsilon 1 \ \Upsilon 0$

$X = (\kappa 0 - \kappa 1)\gamma 1$

U(R_0) se podrá expresar como una transformación lineal de U(R1). De igual manera, si este razonamiento se realiza partiendo de (20) y (22), el cumplimiento de estas dos condiciones necesariamente implica el cumplimiento de (21), por lo que se puede deducir que si en un problema intertemporal se puede definir a la función de utilidad de t_0 y de cada uno de los periodos de reinversión como una transformación lineal de la función de utilidad del periodo posterior, implícitamente se podrá definir a la función de utilidad de t_0, como una transformación lineal de la función que depende de la riqueza al final del horizonte de inversión.

Por otro lado, el cumplimiento de la segunda condición tiene como consecuencia que el ordenamiento de preferencias que un individuo realice sobre el "resultado" de la decisión que se tome (riqueza al final de dicho período), deberá ser independiente del nivel de la riqueza inicial del periodo en que se esté realizando dicha decisión, de forma que el único factor que se deba tomar en cuenta para obtener la composición de la cartera debe ser el rendimiento esperado de los activos. Así, el ordenamiento de preferencias que se realice respecto a los valores del rendimiento de la cartera, deberá ser mismo, o una transformación lineal, del que se realice sobre el valor de la cartera al final del periodo:

(23) $$U(R_1) = U(r\ R_0) = \theta\ U(r) + \tau$$

De esta manera, en base a (22) y (23) hemos podido definir, de una manera formal, las condiciones que garantizan que una función de utilidad goce de la propiedad de miopía.

Sin embargo, si (22) se sustituye en (23), se llega a que:

(24) $$U(R_0) = \lambda\ U(r) + \psi$$

Donde $\psi = (\tau - X)/\omega$ y $\lambda = \theta/\omega$

La cual, si se observa cuidadosamente, constituye una expresión idéntica a (23), pero en esta ocasión definida sobre R_0. Este resultado significa que si un individuo posee una función de utilidad en un periodo t, que no dependa del nivel de su riqueza al inicio de dicho periodo (condición 2), y que sea una transformación lineal de su función de utilidad en t+1 (condición 1), necesariamente el ordenamiento de las preferencias de dicho individuo respecto al valor de su cartera en t+1, será una transformación lineal del ordenamiento de preferencias que dicho individuo tenga sobre los posibles valores del rendimiento de su inversión. (expresión (23)).

De esta manera, diferenciando (23) respecto a r, y tomando en cuenta que las constantes θ y τ son independientes de r, aunque pueden depender de R_0 :

(25) $U'(r\ R_0)\ R_0 = \theta U'(r)$

y luego se realiza la diferenciación de (25) respecto a R_0 , de esta forma se obtiene:

(26) $U''(r\ R_0)r\ R_0 + U'(r\ R_0) = \theta' U'(r)$

Donde θ` es la derivada de θ respecto a R_0 .

Así sustituyendo (25) en (26) y recordando que $R_1 = r\ R_0$, se puede formular la condición que debe cumplir toda función de utilidad que presente la característica de miopía:

$$U''(R_1)\ R_1 + U'(R_1) = (\theta'\ R_0 / \theta)\ U'(r\ R_0)$$

(27)

$$-(U''(R_1)\ R_1 / U'(R_1)) = 1 - (\theta'\ R_0 / \theta)$$

Para poder interpretar lo que significa la expresión (27), apliquemos la expresión (23) y (25) a la función de utilidad logarítmica, (la cual si posee la propiedad de miopía):

De esta manera, si Ut = ln (Rt), y t=1:

De (23): (28) $\ln(r\ R_0) = \theta(\ln(r)) + \tau$

$\ln(r) + \ln(R_0) = \tau \ln(r) + \tau$

y de (23): (29) $(1/r) = (\gamma/r)$

Lo que implica que $\gamma = 1$ y por lo tanto $\gamma = 0$. Así sustituyendo en (27) estos valores se llega a que:

$$-U''(R1)R1/U'(R1) = 1$$

El significado de esta expresión se puede entender una vez que se identifica el lado izquierdo con la definición de aversión relativa al riesgo de una función de utilidad. De esta manera, podemos llegar a la conclusión de que para que una función de utilidad presente la propiedad de miopía en presencia de activos cuyos rendimientos no presentan autocorrelación, es necesario que su aversión relativa al riesgo sea constante. Intuitivamente, este resultado es muy lógico, dado que la aversión relativa al riesgo constante elimina por completo el efecto que pudiera tener el valor acumulado de la cartera, al hacer que la proporción que se invierta en un determinado activo en cada periodo sea independiente por completo del valor de su riqueza, haciendo de esta manera independiente su decisión de los eventos que hayan ocurrido en períodos anteriores. Por otro lado, el que la aversión relativa al riesgo sea constante en una función de utilidad en un contexto de inversión de la riqueza en períodos múltiples, implica que si los rendimientos se distribuyeran de igual forma en cada uno de los periodos que conforman el horizonte de inversión considerado en el problema, la proporción de la riqueza que se invertiría en cada uno de los activos, sería la misma en todos y cada uno de los períodos, por lo que la regla de decisión de inversión de los activos sería constante a lo largo de todo el horizonte de inversión.

4.3.5 Efecto de la propiedad de Miopía sobre la decisión de cartera al permitir depósitos intermedio en el fondo de inversión

Como último punto a analizar referente al papel que juegan las funciones de utilidad en un problema intertemporal de selección de cartera, es necesario analizar como se afectaría la proporción a ser invertida en cada uno de los activos, al momento en que se permite que el inversionista pueda realizar depósitos a su fondo de retiro en fechas intermedias en su horizonte de inversión.

Como se recordará, al suponer en el planteamiento del problema intertemporal, que el ordenamiento de preferencias de un individuo se podía representar como una función de utilidad cuadrática, la regla de inversión para cada periodo de decisión del inversionista quedó en función de la riqueza inicial de dicho periodo. Este resultado implica, sin embargo, que la decisión de cartera en cada periodo dependa de igual manera de posibles adiciones que se realicen al valor de la cartera; así, los depósitos que se efectúen en fechas intermedias en el horizonte de inversión, tendrán el efecto de que el inversionista se incline por invertir cada vez menos en los activos que tengan mayor riesgo, debido a que la aversión absoluta al riesgo del inversionista aumenta conforme se incrementa el nivel de su riqueza.

Por otro lado, al suponer que el ordenamiento de preferencias del inversionista se podía modelar como una función de utilidad logarítmica, se pudo llegar, gracias a que dicha función de utilidad posee la propiedad de miopía, a un resultado en el que la regla de decisión de cada periodo se pudo definir independientemente del nivel de monto de la riqueza inicial en cada periodo de reinversión. De esta manera, la propiedad de miopía permite que las adiciones (depósitos) que se realicen al valor de la cartera en fechas intermedias, no afecten la proporción de la riqueza que se invertirá en cada uno de los activos, debido a que la aversión relativa al riesgo del inversionista se mantiene constante a cualquier nivel de la riqueza.

4.4 Rendimien Compuesto Promedio y Crecimiento del valor de la Cartera en el tiempo

En esta sección, se explicarán en base a la exposición de un ejemplo muy sencillo, los conceptos de "rendimiento compuesto promedio" y de "crecimiento" del valor de una cartera, los cuales resultan fundamentales para entender el desarrollo del modelo de cartera del siguiente capítulo.

4.4.1 Ejemplo:

Supongamos que un inversionista cuenta con $1,000.00 en su fondo de retiro, los cuales tendrán que invertir a un plazo no menor a 30 años en uno de los dos únicos activos que existen en el mercado financiero. Dicho inversionista estará sujeto a la restricción de no poder retirar centavo alguno de su fondo durante esos 30 años, por lo que mes a mes tendrá que reinvertir el monto principal y los intereses que se vayan generando por inversión de su cartera. De esta manera, si las características de los activos que forman su conjunto de elección son las siguientes:

	Rendimiento	Probabilidad
Activo A	+120%	50%
	-70%	50%
Activo B	+0.00005%	100%

¿Cuál de dichos activos será el que elija el inversionista buscando maximizar el valor de su cartera al final de los 30 años con el menor riesgo posible? (suponiendo que la distribución de probabilidad de dichos activos se mantiene constante en el tiempo).

Analizando ambas alternativas de inversión, podemos ver que el valor esperado del activo A es de +25% mientras que el del activo B es de tan solo +0.00005% (5,000 veces más pequeño). Por otro lado, aunque la varianza del activo A es más alta, sabemos que por la definición de valor esperado el activo A presentará un rendimiento de +120% aproximadamente el mismo número de meses que muestre un rendimiento de –70%, mientras que, por otro lado, el rendimiento del activo B será solamente del 0.00005% cada mes. De esta forma, el inversionista podrá inclinarse por depositar todo su dinero en el activo A, simplemente porque el valor esperado de los rendimientos del activo A es 5,000 veces más grande que el del activo B.

Sin embargo como se demostrará en unos instantes, si el inversionista optara de hecho por invertir el total de sus fondos en el activo A, el valor de su cartera en un futuro lejano terminaría siendo igual a cero, una probabilidad igual a uno, a pesar de que, en efecto, el rendimiento promedio de su cartera termine siendo aproximadamente igual a 25%.

Antes de realizar una demostración formal de lo anterior, desarrollemos un experimento relativamente sencillo con el doble fin de observar cual sería el comportamiento en el tiempo del valor de la cartera de dicho inversionista, en caso de haberse invertido el total de los fondos en el activo A, y de introducir la definición del concepto de "rendimiento compuesto promedio". Con este ejercicio se verá que la clave de la aparente contradicción entre el valor en el tiempo y el rendimiento esperado de su cartera, se encuentra en el supuesto que se hizo respecto a la reinversión de los intereses:

Pensemos que existe una variable aleatoria Θ_t , t = 1,2,3.....360 que solamente puede tomar valores de 0 y 1 en cada uno de los períodos de reinversión (t), de manera que cada uno de los valores tienen la misma probabilidad de ocurrencia. De esta forma, si:

(30) $$\Theta_t = 0 \quad \Theta_t \sim \text{i.i.d uniforme}$$

el rendimiento del activo A (X_t) el periodo t será igual a 120%, y si

(31) $$\Theta_t = 1$$

X_t adquirirá un valor de -70% .

En base a lo anterior, si se realiza el supuesto de reinversión de los intereses, entonces el valor de la cartera al término de n meses será:

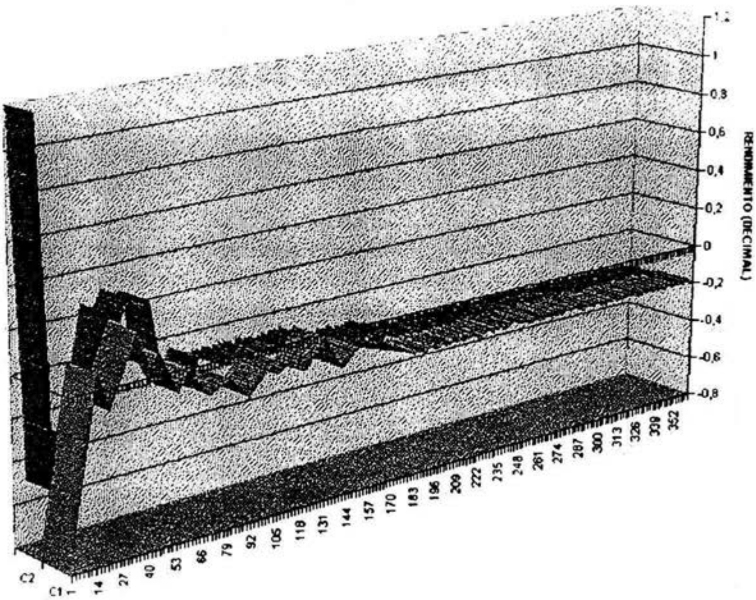
(32) $$R_n = (1000)\prod_{t=1}^{n}(1+X_t)$$

y su rendimiento compuesto promedio se podrá expresar como:

(33) $$C_n = \prod_{t=1}^{n}(1+A_t)^{(1/n)}$$

Una vez definidos estos conceptos, el ejercicio se realiza dando (generando) valores, independiente y aleatoramiente a la variable Θ_t, para cada uno de los 360 meses (t) que se encuentran en el horizonte de inversión considerando en el problema, y aplicando a cada punto en el tiempo (periodo), las fórmulas arriba desarrolladas, de manera que con esto podemos "observar" y el rendimiento compuesto promedio que la cartera que se va generando (en base al valor acumulado de la cartera) en cada uno de los periodos del horizonte de inversión:

RENDIMIENTO COMPUESTO PROMEDIO



En la gráfica de arriba se encuentran representadas dos simulaciones realizadas de acuerdo a los supuestos y procedimientos anteriormente definidos. Como se puede observar en la gráfica, aunque durante la simulación 2 (línea más oscura), la cartera presentó durante algunos meses rendimientos positivos sumamente altos, evemtualmente la pérdida del 60% del valor acumulado de la cartera, que necesariamente se dará en aproximadamente la mitad de los meses provoca que el valor de la cartera se vaya desvaneciendo en el tiempo. Es importante además, mencionar que si observa con detenimiento la gráfica, se puede apreciar que el rendimiento compuesto promedio de la cartera en las dos simulaciones, converge a un valor de largo plazo, sin importar el comportamiento de la cartera en períodos anteriores.

Este resultado se puede entender más fácilmente si se considera el caso cuando el inversionista gana 120% sobre $1,000.00 durante el primer periodo, para luego perder en el segundo periodo, el 70% de los $2,200.00 que ya había acumulado. De esta manera, aunque en esta caso el rendimiento promedio de la cartera en los dos períodos sería de 20%, el rendimiento compuesto promedio observado sería igual a:

$$C_2=((1+1.2)(1-.7))^{(1/2)}-1=-18.75 \tag{34}$$

Así, la clave para entender este problema radica en que la acumulación de la riqueza modifica el monto invertido a cada periodo, produciendo que el rendimiento positivo de la mitad de los períodos no compense la pérdida de otros.

4.4.2 Convergencia del Rendimiento Compuesto Promedio de un Activo a su valor esperado

Como se mencionó en el párrafo anterior, el rendimiento compuesto promedio de la cartera que se deriva de haber invertido todo el capital en el activo A, converge a un valor constante de largo plazo. A pesar de la simplicidad de este ejemplo, los resultados obtenidos son sumamente ilustrativos, debido a que indican que siempre que se pueda suponer que la distribución de los rendimientos de un activo se mantiene constante en el tiempo, el rendimiento compuesto promedio de un activo, y en términos generales de una cartera, tenderá en el tiempo a converger a una constante.

Para encontrar el valor al cual converge el rendimiento compuesto promedio de una cartera de inversión, consideremos el caso de una cartera, con un valor inicial de $1.00, que se planea mantener y reinvertir a lo largo de n períodos. El rendimiento de esta cartera varía periodo a periodo, de manera que puede tomar M valores distintos $(a_1, a_2 .... a_M)$, con una probabilidad que se mantiene constante en el tiempo $(p_1, p2, ... pM)$, por lo que después de n períodos, el rendimiento compuesto promedio de esta cartera (R_n) se define como:

$$C^n=(1)(a_1)^{(n_1)}(a_2)^{(n_2)}(a_3)^{(n_3)} \; \cdots\cdots \; (a_M)^{(n_M)} \tag{35}$$

Donde a_M = uno más la tasa de rendimiento del activo M.

n_M = número de períodos en n en los que la cartera mostró un rendimiento igual a a_M .

$\sum n_M$ = n

Ahora bien, como lo que nos interesa es poder encontrar una expresión que nos permita conocer el valor al que converge el rendimiento compuesto promedio cuando n tiende a infinito, el siguiente paso consiste en evaluar la expesión anterior cuando n tiende a infinito. Para hacer esto, nos podemos ayudar por la"ley de los grandes números" aplicada a los logaritmos de los rendimientos por periodo, por lo que:

Cuando n→infinito:

(36) $$n_i/n \rightarrow p_i$$

(37) $$n_i/n \ \ln(a_i) \rightarrow (p_i)\ln(a_i)$$

Así aplicando este resultado al logaritmo de la expresión (35):

$$C^n = (1)(a_1)^{(n_1)}(a_2)^{(n_2)}(a_3)^{(n_3)} \cdots (a_M)^{(n_M)} \Rightarrow$$

$$n \ln C = n_1\ln(a_1)+n_2\ln(a_2)+n_3\ln(a_3) + \cdots + n_M\ln(a_M) \Rightarrow$$

(38) $$\ln C = ((n_1/n)\ln(a_1)+(n_2/n)\ln(a_2)+(n_3/n)\ln(a_3) + \cdots + (n_M/n)\ln(a_M)$$

se obtiene que el valor C^n al cual cual converge el rendimiento compuesto de la cartera en el infinito, con probabilidad igual a uno equivale a:

(39) $$\ln C = (p_1)\ln(a_1)+(p_2)\ln(a_2)+(p_3)\ln(a_3) + \cdots + (p_M)\ln(a_M) \Rightarrow$$

(40) $$\ln(C) = \sum_{n=1}^{M}(p_n)\ln(a_n) = E(\ln(C))$$

Así el valor del rendimiento compuesto promedio tiende a su valor esperado cuando el número de períodos que se mantiene un activo ó una cartera tiende a infinito, por lo que:

$$C = e^{(E(\ln(C)))} = (a_1)^{(p_1)}(a_2)^{(p_2)}(a_3)^{(p_3)} \cdots (a_k)^{(p_M)} \Rightarrow$$

$$C^n = e^{(E(\ln(a))n)} = (a_1)^{(p_1 n)}(a_2)^{(p_2 n)}(a_3)^{(p_3 n)} \cdots (a_k)^{(p_M n)} \tag{41}$$

Por último, vale la pena hacer notar en base al ejercicio desarrollado en esta sección, que el rendimiento promedio de una cartera no es un buen parámetro para medir el comportamiento del valor de una cartera al final del horizonte de inversión, cuando se realiza el supuesto de reinversión de los interéses. De hecho, puede darse el caso de que carteras que pudieran ser ineficientes desde un punto de vista de media-varianza, en realidad poseen mejores propiedades de largo plazo que aquéllas incuidas en la frontera eficiente. De esta manera, el rendimiento compuesto promedio de las carteras constituye en sí un criterio que permite poder seleccionar, por sus propiedades de largo plazo (crecimiento), una cartera eficiente dentro del conjunto de oportunidades disponibles para el inversionista.

CAPÍTULO 5

DISEÑO DEL MODELO DE SELECCIÓN DE CARTERA

5.1. INTRODUCCIÓN

En el capítulo anterior, el problema de inversión de los fondos de retiro se definió como un problema de asignación de recursos bajo incertidumbre en el que el objetivo del inversionista es el de alcanzar el mayor bienestar posible del valor de su riqueza al final de su horizonte de inversión, sujeto a cierto nivel de riqueza inicial y a un conjunto de oportunidades de inversión.

Así, al estudiar el papel que juegan las funciones de utilidad cuadrática y logarítmica en un problema de selección de cartera intertemporal, desarrollamos una metodología con la que fué posible definir el fin último del inversionista en términos de un fin inmediato, expresado como la maximización de la función de utilidad derivada. De esta forma, vimos que la composición de la cartera óptima que resulta de alcanzar este fin inmediato, queda casi siempre en función de las decisiones de cartera realizadas en otros períodos, por lo que generalmente un inversionista que desee maximizar el bienestar proveniente de su riqueza al momento de su retiro, no podrá decidir la composición óptima de su cartera sin antes poseer información relativa al comportamiento futuro del rendimiento de los activos. Sin embargo, también encontramos que existen ciertas funciones de utilidad (entre las que se incluye la función de utilidad logarítmica), para las que si es óptimo que un inversionista decida la composición de su cartera óptima independientemente de la información que posea respecto al comportamiento del rendimiento de la cartera en períodos futuros de reinversión, y preocupándose solamente por maximizar su utilidad al final de cada periodo. De esta manera, demostramos que en este tipo de funciones de utilidad, las cuales se caracterizan por presentar una aversión relativa al riesgo constante, la decisión de cartera se puede realizar tomando en consideración solamente el rendimiento esperado de la cartera en dicho periodo.

Por otro lado, al analizar las características del conjunto de oportunidades (activos) con que cuenta el inversionista, fué posible comprobar que debido al efecto que la reinversión de los intereses tiene sobre el valor acumulado de la riqueza, ni la media ni la varianza de la función de densidad del rendimiento de una cartera (o activo) constituyen los parámetros adecuados para medir su comportamiento de largo plazo, dado que puede darse el caso de que existan carteras que presenten un rendimiento esperado por periodo sumamente alto, y que terminen por erosionar el valor de la riqueza. Así, bajo contexto, demostramos que el rendimiento compuesto promedio, a diferencia de la media y la varianza, constituye una mejor medida del comportamiento de una cartera en el largo plazo, debido a que es función del valor acumulado de la riqueza en el tiempo, y a que presenta la propiedad de converger a su valor esperado conforme el plazo (longitud) del horizonte de inversión aumenta.

De esta forma, el análisis del capítulo anterior nos permitió concluir que el rendimiento compuesto promedio de una cartera, y la función de utilidad logarítmica, representan respectivamente, el parámetro del rendimiento de una cartera y el ordenamiento de preferencias del inversionista más adecuados para estudiar un problema intertemporal de selección de cartera en el que se realice el supuesto de reinversión de los intereses.

5.2 CONSTRUCCIÓN DEL MODELO

5.2.1 Supuestos y notación del modelo

La presencia de supuestos en cualquier modelo se justifica por la complejidad de los fenómenos o situaciones reales que pretende analizar. El problema de inversión de los fondos de retiro no es la excepción, por lo que para la construcción de nuestro modelo realizaremos los siguientes supuestos:

A) Se excluye la existencia de un instrumento con el que se pueda prestar o pedir prestado a una tasa sin riesgo. Además, los activos disponibles al inversionista no cambian a lo largo del horizonte de inversión.

B) Se supone perfecta liquidez y divisibilidad de los activos, así como ausencia de costos de transacción y de impuestos.

C) No se permite que el inversionista pueda realizar retiros o depósitos al valor de su cartera en ninguna fecha anterior a la del final del horizonte de inversión

D) Por último, la función de densidad del rendimiento de los activos presenta las siguientes propiedades:

1. El rendimiento de los activos puede o no mostrar autocorrelación con sus rezagos o con los de otros activos, siempre y cuando:

   i)su media y su varianza no dependa del tiempo, de manera que se mantenga constante para cada periodo de reinversión. (es decir que sus series sean estacionarias).

   ii)el número de rezagos de la serie sea un número finito y no varíe en el tiempo.

2. La distribución conjunta del rendimiento de los activos se encuentra definida para todo valor que pueda adquirir el rendimiento de la cartera, el cual puede tomar cualquier valor contenido en el intervalo abierto $(-1, \infty)$.

Por otro lado, a continuación se presenta la notación y la definición de los principales conceptos que utilizaremos para el desarrollo de nuestro modelo:

$$X_{ij} = Rendimiento\ del\ activo\ i\ al\ final\ del\ periodo\ j$$
$$a_{ij} = (1 + X_{ij}) = Uno\ mas\ el\ rendimiento\ del\ activo\ i\ al\ final\ del\ periodo\ j$$
$$M = Número\ de\ activos\ disponibles\ para\ el\ inversionista$$
$$Z_{ij} = Monto\ a\ ser\ invertido\ en\ el\ activo\ i\ al\ inicio\ del\ periodo\ j$$
$$N = Número\ de\ periodos\ del\ horizonte\ de\ inversión$$
$$K_{ij} = Proporción\ de\ la\ riqueza\ a\ ser\ invertida\ en\ el\ activo\ i\ al\ inicio\ del\ periodo\ j$$
$$F_j = F_j(h_1, h_2, \ldots, h_{Mj}) = Pr(a_{1j} < h_1, a2j < h2 \ldots.. a_{Mj} < hMj) = Distribución\ de\ probabilid\text{c}$$
$$conjunta\ del\ rendimiento\ de\ los\ activos\ de\ la\ cartera$$

$\{\ K_j\ \} = \{\ K_{1j}\ ,\ \ K_{2j}\ \ldots..\ K_{Mj}\ \}$ = Composición de la cartera que se mantiene en el periodo j

{{K}} = Trayectoria de decisiones a lo largo del horizonte de inversión

t_j = Periodo j de decisión de cartera.

{t} = Puntos de decisión a lo largo del horizonte de inversión.

* = Óptimo

W_j = Rendimiento de la cartera mantenida durante el periodo j

(42) $W_j = \sum_{i=1}^{M} X_{ij} K_{ij}$

(43) $A_j = 1 + W_j$

$R_{j+1} = Riqueza\ al\ inicio\ del\ periodo\ j+1\ =$

(44) $R_{j+1} = R_0 \prod_{n=0}^{J} A_n$

Donde:

$$\prod_{n=0}^{j} A_n = (A_0)(A_1)(A_2).....(A_j)$$

C_j = Rendimiento compuesto de la cartera al final del periodo j.

(45) $C_j = (\prod_{n=0}^{j} A_n)^{(1/j)}$

Sj = Rendimiento compuesto de la cartera al final del periodo j, expresado en forma logarítmica:

$$Sj = \ln(\ (\prod_{n=0}^{j} A_n)^{(1/j)} = (1/j)(\ln(\ A_0\ ) + \ln(\ A_1\ ) + ... + \ln(\ A_j\ ))$$

(46) $Sj = \dfrac{(\sum_{n=0}^{j} \ln(An))}{j}$ tal que

(47) $Cj = e^{Sj}$

5.2.2 Equivalencia entre la maximización del valor esperado del rendimiento compuesto promedio y el de la función de utilidad logarítmica.

De acuerdo a lo previsto en la introducción de este capítulo, en esta sección se demostrará que la decisión óptima de cartera que se obtiene en base a la maximización del valor esperado del rendimiento compuesto promedio, es similar a la que se obtendría de maximizar la función de utilidad derivada de dicho periodo.

Con este fin, consideremos el caso de un inversionista en t_0 , que desea encontrar la composición de su cartera inicial que le permita maximizar el valor esperado de su riqueza al final de su horizonte de inversión, la cual usando las ecuaciones (44), (45) y (47), podemos expresar en función del rendimiento compuesto promedio:

$$Rj+1 = Ro \quad e^{J}(Sj)$$

(48) $\ln(R_N) = \ln(R_0) + (S_{N-1})(N-1)$

Donde:

S_{N-1} = Rendimiento compuesto acumulado al final de N-1

R_0 = Riqueza inicial (conocida)

R_N = Riqueza al fnal del horizonte de inversión

Para poder resolver el problema inicial de selección de cartera, la única información con la que cuenta este inversionista, es la correspondiente a la de los "eventos" que hayan sucedido en períodos anteriores; así, el problema se plantea entonces como el de la maximización de la esperanza condicional en t_0 del valor de la riqueza al final del horizonte de inversión:

(49) Max {{K}} E_{t0} (ln(R_N)) = ln(R_0) + (N-1) Max {{K}} E_{t0} ((S_{N-1}))

De esta forma, en base a la ecuación (49), podemos ver que para maximizar el valor esperado de la riqueza final del inversionista, bastará con maximizar el valor esperado del rendimiento compuesto promedio de la cartera, por lo que sustituyendo la ecuación (45) en (49) obtenemos que:

Max {{K}} E_{t0} (ln(R_N)) = ln(R_0) + Max {{K}} E_{t0} $\sum_{j=0}^{N-1} \ln(AjKj)$

(50) Max {{K}} E_{t0} (ln(R_N)) = ln(R_0) + Max {Ko} E_{t0} (ln (Ao{Ko})) + δ'

Donde:

δ' = Max{K1} E_{t0} (ln (A1{K1}))) +...+ Max{ K_{N-1} } E_{t0} (ln (A_{N-1} { K_{N-1} }))

Si observamos la ecuación (50) con detenimiento, podemos apreciar que la selección de la cartera óptima en el periodo inicial, depende solamente del rendimiento esperado de la cartera en dicho periodo; así, la mejor decisión que el inversionista pueda tomar para la composición de su cartera inicial, será aquella que:

Max{K0} E_{t0} (ln (Ao{Ko}))

Sin embargo, si comparamos este criterio de selección de la cartera óptima del inversionista en to, con el que se obtuvo en el capítulo anterior como estrategia óptima de un inversionista cuyo objetivo era el de maximizar su bienestar al final del horizonte de inversión:

(16)

max K_{10} (E t_0 (u)*)= max K_{10} E t_0 (ln(R_0 ((1+X2) + (X1-X2) K_{10}))+δ

y tomamos en cuenta que por (43):

ln (Ao({Ko})) = ln (((1+X2) + (X1-X2) K_{10})

Entonces podemos ver que la solución óptima de la cartera inicial para ambos problemas será exactamente la misma. De esta manera, la estrategia óptima que maximice la esperanza condicional en t_0 del valor esperado del rendimiento compuesto promedio, será exactamente la misma que maximiza la función de utilidad derivada del periodo inicial del inversionista, la cual, como se recordará, constituye el medio por el cual la decisión de cada periodo conduce a la maximización del bienestar del inversionista al final de su horizonte de inversión.

Una vez demostrado que la decisión de cartera que se basa en la maximización del rendimiento compuesto promedio esperado representa, a la vez, una decisión que involucra las preferencias y por lo tanto, la utilidad del inversionista, ahora encontraremos una expresión más general que permita solucionar el problema de selección de cartera para cualquier periodo de reinversión j, sin tener que condicionar el valor esperado del rendimiento compuesto de la cartera a la información que se disponga en un determinado periodo. Con este fin, apliquemos el operador esperanza a la definición de S_{N-1} :

(51) Max {{K}} E(S_{N-1}) = (1/N-1) Max{Ko} E (ln(Ao{Ko})) +

Max{K1}E(ln(A1{K1})) + ...+ Max{ K_{N-1} }E(ln(A_{N-1} { K_{N-1} }))

Así, debido a que se hizo el supuesto de que la media y la varianza de la función de densidad de los rendimientos se mantienen constante en el tiempo, y de que el grado de autocorrelación de aquellas series que la presenten se puede definir en base a un número finito e invariable de rezagos, la esperanza no condicionada del rendimiento de la cartera, expresada en forma logarítmica, necesariamente será constante a lo largo del horizonte de inversión, lo que implica que:

(52) E(ln(Ao{Ko})) =.....= E(ln(A_{N-1} { K_{N-1} })) = E(ln(A{k}))

Por lo que la ecuación (51) es equivalente a:

(53) Max{{K}}E(ln(S_{N-1})) = Max{K}E(ln(A{K}))

Para todo N

De esta forma, la ecuación (53), define el criterio de selección de cartera de un inversionista que desee maximizar el valor esperado del rendimiento compuesto promedio de su cartera, y representa, al igual que la función de utilidad derivada, una transformación lineal de la función de utilidad logarítmica de la riqueza al final del horizonte de inversión. De esta manera, la cartera que se obtenga de solucionar (53), será aquélla que muestre mejores perspectivas de crecimiento, por lo que se le denominará Cartera de Crecimiento Óptimo.

Es además importante señalar que la ecuación (52), tiene por implicación que la proporción de la riqueza a ser invertida en cada uno de los activos que componen la cartera, sea la misma para todos los periodos que componen el horizonte de inversión, lo cual explica el resultado que obtuvimos en el capítulo anterior para el caso de un individuo que buscaba maximizar su bienestar representado por una función de utilidad logarítmica.

5.2.3 Comportamiento de largo plazo del rendimiento compuesto promedio.

Antes de continuar con el desarrollo del modelo que se deriva del criterio de selección de cartera propuesto en la ecuación (53), vale la pena dedicar unas líneas a analizar el comportamiento de largo plazo (asintótico) que muestra el rendimiento compuesto promedio de una cartera. De esta forma, lo que nos interesa es poder determinar bajo que condiciones el rendimiento compuesto de una cartera termina por ofrecer su valor esperado.

Con este fin, apoyémonos en el análisis que desarrollamos en la última sección del capítulo anterior (ecuaciones (35) a (41)), en la que pudimos demostrar en base a la aplicación de la ley de los grandes números al logaritmo de los rendimientos, que el valor del rendimiento compuesto promedio de una cartera converge a su valor esperado (constante), conforme el número de períodos de reinversión de la cartera tiende a infinito. De esta forma, para otener este resultado tuvimos que realizar solamente los siguientes dos supuestos:

1. Que la distribución de probabilidades estaba definida para cada posible resultado del rendimiento de la cartera.

2. Que la probabilidad asignada a cada posible resultado se mantenía constante en el tiempo.

Estos dos supuestos, sin embargo, coinciden con los que se hicieron para la distribución de probabilidad de los rendimientos al inicio de este capítulo. Así, al igual que en el ejemplo del capítulo anterior, el rendimiento compuesto promedio de la cartera S, esta vez definido en base a la ecuación (46), se aproximará a su valor esperado conforme N tiende al infinito, de manera que:

(54) $Pr S_N - E(S_N) > \Psi \rightarrow 0 \quad \text{si} \quad N \rightarrow \infty \quad \Rightarrow$

(55) $Pr S_N - E(S_N) = 0 \rightarrow 1 \quad \text{si} \quad N \rightarrow \infty$

Donde:

$E(C_N)$ = Esperanza no condicionada del rendimiento compuesto promedio

$\Psi > 0$, y Ψ es un valor arbitrario.

De esta forma, la importancia de (52) y (53), radica en que la convergencia que existe entre el rendimiento compuesto promedio de una cartera y su valor de largo plazo, garantiza que siempre que nos encontremos en un problema de selección de cartera en donde el número de períodos de reinversión (N) sea relativamente grande, la estrategia de inversión que maximice E(S) será necesariamente la misma que maximice S. Por la misma razón, aquellas estrategias de inversión en las que el rendimiento de la cartera expresado como un logaritmo sea persistentemente negativo, terminarán necesariamente por ofrecer una disminución en el valor de la riqueza.

5.2.4 Aproximación al criterio de maximización del valor esperado del rendimiento compuesto promedio bajo el supuesto de normalidad en la función de densidad.

El siguiente y último paso en la construcción del modelo, consistirá en definir una forma específica para el criterio de selección de cartera propuesto en la ecuación (53).

Sabemos que por definición, el valor esperado de una función g(X) que depende de una variable aleatoria X, la cual se distribuye de acuerdo a f_X (x), es igual a:

$$(56) \quad \sum_{i=1}^{J} g(X\,i)\,fx(X\,i) \quad \text{tal que} \quad X_i = X_{1\ldots}X_J$$

para el caso en que X sea una variable aleatoria discreta, y

$$(57) \quad \int_{-\infty}^{\infty} g(X)\,f_X(X)\,dX$$

en caso que X es una variable aleatoria continua.

Así la forma específica que adquiera

E(ln(A))

dependerá del supuesto que se haga respecto a la función de la distribución de los rendimientos de la cartera. Dicha función, además, deberá de cumplir con los supuestos realizados al inicio de este capítulo para la obtención del criterio de selección de cartera.

En busca de brindar un mayor grado de aplicabilidad al modelo, es deseable, sin embargo, que la forma que se asigne a la función de densidad, constituya una buena aproximación del comportamiento del rendimiento (nominal o real) de los activos que se operen en el mercado financiero que sea objeto de estudio. Con este fin, en este trabajo se realizará el supuesto de que la distribución del rendimiento de los activos que componen la cartera del inversionista se comporta como una función de densidad multivariada, lo que sabemos, tiene por implicación que exista normalidad en la función de densidad del rendimiento de la cartera.

De esta manera, para encontrar el modelo que permita analizar el problema de inversión de cartera bajo el supuesto de normalidad, redefinamos primero el criterio de selección de cartera, en base a la definición del rendimiento de la cartera por periodo (W):

(58) $Max_{\{k\}}$ E(ln(1+W))

Donde:

$$W= \sum_{i=1}^{M} X\,i K\,i$$

Una vez hecho esto, obtengamos, en base a (57), la expresión del valor esperado de (58), bajo el supuesto de que W se distribuye como una normal con media y varianza μ_c σ_c :

(59) $Max_{\{k\}} \quad \int_{-1}^{\infty} \ln(1+W)\, f_W\, dW$

Donde

(60.1) $f_W(W>-1)=(2\pi\,\sigma_c)^{-1/2}\mathrm{e}^{(-(W-\mu_c)^2 \,¿\, 2\sigma_c^2)}$

(60.2) $f_w(w\leq -1)=0$

(61) $\mu_c=\sum_{i=1}^{M} \mu_i\, k_i = Media\ de\ W$

(62) $\sigma_c^2=\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M} k_i\,\sigma_{ij}\,k_j = Varianza\ de\ W$

De esta forma, para definir una expresión del valor esperado de la función ln(1+ W), de cuyas condiciones de primer orden podamos obtener la proporción óptima a ser invertida en cada activo de la cartera, es necesario encontrar una solución a la integral definida contenida en (59), sujeto a las restricciones (60.1), (60.2), (61) y (62). Sin embargo, hasta donde el autor de este trabajo pudo investigar, no existe una solución cerrada para dicha integral, por lo que en su lugar, desarrollaremos una aproximación polinomial de la función logarítmica contenida en la ecuación (58), buscando con ello encontrar, por la propiedad de sumatoria de integrales, una expresión que constituya una aproximación a la solución a (59).

Así, si la aproximación polinomial se define como:

(63) $$\ln(1+W) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{(1+i)} (W^i / i)$$

tal que $-1 < W \leq 1$

entonces el criterio de selección de cartera se podrá redefinir como:

(64)
$$Max_{\{k\}} \int_{-1}^{1} \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{(1+i)} (W^i / i) f_W \, dW \approx Max_{\{k\}}$$
$$\int_{-1}^{1} W f_W \, dW - \int_{-1}^{1} (W^2/2) f_W \, dW$$
$$+ \int_{-1}^{1} (W^3/3) f_W \, dW - \int_{-1}^{1} (W^4/4) f_W \, dW + \ldots\ldots + \int_{-1}^{1} (-1)^{(N+1)} (W^N / N) f_W \, dW$$

sujeto a (56), (57) y (58) tal que Nes un número arbitrario que indica el grado de aproximación del polinomio.

El grado de la aproximación del polinomio (N) quedará en función de que tan grande o pequeña sea la dispersión de los datos de la distribución alrededor de la media; no obstante, en términos generales, una aproximación de sexto grado será sumamente aceptable para el caso del rendimiento real de una cartera.

Si analizamos la expresión (64), podremos apreciar que el uso de la aproximación polinomial, sugiere que se tenga que cambiar el límite superior de la integral, lo que a la vez tiene por consecuencia que tengamos que realizar el supuesto de que la variable W se encuentra completamente definida entre los valores -1 y 1, es decir:

$$f_W(W \geqslant 1) = 0$$

$$f_W(W \leqslant -1) = 0$$

Este supuesto, sin embargo, nos permite encontrar una solución para cada una de las integrales que se encuentran dentro de los corchetes. Más aún, si la constante que divide W se coloca fuera de las integrales, podremos ver que la expresión que queda para cada integral corresponde a la definición del i-ésimo momento de W bajo el supuesto de normalidad de la función de densidad de W, por lo que así es posible resolver cada una de ellas en base a la función generadora de momentos de la distribución normal. Así, si el problema se define como en base a una aproximación polinomial de sexto grado, el modelo de selección de cartera en base al criterio definido en (53) quedará finalmente planteado como:

$$(65) \qquad Max_{\{K\}} \int_{-1}^{\infty} \ln(1+W)\, f_W\, dW \approx ¿$$

$$\begin{aligned} Max_{\{K\}}\, \mu_c - (1/2)(\mu_c^2+\sigma_c^2) + (1/3)(\mu_c^3+3\,\mu_c\sigma_c^2) \\ -(1/4)(\mu_c^4+6\,\mu_c^2\sigma_c^2+3(\sigma_c^2)^2) + (1/5)(\mu_c^5+10\,\mu_c^3\sigma_c^2+15\,\mu_c(\sigma_c^2)^2) \\ -(1/6)(\mu_c^6+15\,\mu_c^4\sigma_c^2+45\,\mu_c^2(\sigma_c^2)^2+15\,\mu_c(\sigma_c^2)^3) \end{aligned}$$

$$(65.1) \qquad \mu_c = \sum_{i=1}^{M} \mu_i K_i = Media\,de\,W$$

$$(65.2) \qquad \sigma_c^2 = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{M} K_i \sigma_{ij} K_j$$

$$(65.3) \qquad \sum_{i=1}^{M} K_i = 1$$

$$(65.4) \qquad K_i \geqslant 0 \quad i = 1 \ldots \mathrm{M}$$

Donde (65.1) y (65.2) equivalen a la media y la varianza de la cartera respectivamente, (65.3) es la restricción que impide el poder prestar o pedir prestado a una tasa fija (sin riesgo) y (65.4) excluye la posibilidad de realizar ventas en corto.

CAPÍTULO 6

APLICACIÓN DEL MODELO DE SELECCIÓN DE CARTERA

Como vimos en capítulos anteriores, el concepto de cartera crecimiento óptimo tiene una aplicación directa en el problema de inversión de fondos de retiro, debido a que en ambos casos el objetivo del inversionista es el de maximizar el bienestar derivado del valor acumulado de una cartera de la cual no se puede sustraer centavo alguno en ninguna fecha anterior a la de la liquidación del fondo.

En este último capítulo, aplicaremos el modelo desarrollado de carteras de crecimiento óptimo para estimar cual sería la composición óptima de la cartera de un individuo que fuera contribuyente del S.A.R, y cuyo seguro de retiro se pudiera invertir en acciones operadas en la Bolsa Mexicana de Valores y en papel de deuda emitido por el gobierno mexicano, empresas comerciales y sistema bancario. Existen muchas teorías referentes a la proporción de la cartera de un pensionado que se debe invertir en cada uno de los activos que existen en un sistema financiero; por un lado, existen aquéllos que argumentan que un fondo destinado a proveer financiamiento a los trabajadores al momento de su retiro necesariamente debe ser invertido en activos que ofrezcan una tasa garantizada y sin riesgo de rendimiento por periodo; por otro lado, existe la idea de que una cartera de retiro debe invertirse solamente en acciones y activos que presenten altas tasas de rendimiento esperado, debido a que siempre habrá tiempo de que la cartera se "recupere" de periodos en los que se registren pérdidas en su valor.

De esta manera el objetivo de este capítulo es el de verificar la validez de los argumentos que apoyan a estos dos puntos de vista, basándonos en la teoría y en el modelo desarrollado en este trabajo. De hecho el concepto de **cartera de crecimiento óptimo** contiene, de alguna manera, un poco de ambos puntos de vista, dado que representa la alternativa de inversión que ofrece el mayor valor de largo plazo de la riqueza del inversionista, con una probabilidad que se acerca a uno conforme aumenta el horizonte de inversión.

6.1 Periodo Histórico de Referencia

El supuesto realizado a lo largo del trabajo respecto a mantener constante en el tiempo la distribución de probabilidad del rendimiento de los activos, impone restricciones al periodo histórico del cual se obtenga la distribución muestral. Por un lado, el período considerado necesitará ser lo suficientemente grande para que la distribución tome en cuenta la actitud de los inversionistas tanto en épocas de crisis como en épocas de bonanza. Sin embargo, dicho periodo deberá incluir solamente las observaciones de aquellos años en los que el marco económico e institucional que haya prevalecido, sea el mismo que se espera se presente en el futuro.

En este trabajo utilizaremos como periodo muestral la información registrada entre enero de 1987 y mayo de 1993, debido a que durante estos años, el sistema financiero atravesó tanto por severas crisis como por épocas de crecimiento, además de que se realizaron reformas económicas y legislativas (v. gr S.A.R, reforma educativa, apertura comercial, reducción del tamaño estatal, privatización del sistema bancario etc...) que determinaron el marco institucional sobre el cual se desarrolla la economía mexicana.

6.2 Plazo del periodo de Reinversión

La estructura y los resultados del modelo de selección de cartera propuesto en este trabajo no se han condicionado a suponer un plazo específico para el periodo de reinversión de la cartera. Sin embargo, existe evidencia que indica que la diferencia que pueda existir en el grado de autocorrelación del rendimiento de los activos que componen la cartera, y la reinversión de los activos dentro de cada periodo de reinversión, puede llegar a tener efectos en el riesgo relativo entre los activos conforme varía la longitud del horizonte de inversión, aún para el caso de políticas de inversión en las que no importa la longitud del horizonte de inversión. De esta manera, la estimación de la cartera óptima de acuerdo al criterio de maximización del rendimiento compuesto promedio la realizaremos bajo dos distintos supuestos respecto a la longitud del periodo de reinversión de la cartera:

1. Periodo de reinversión mensual (28 dias)

2. Periodo de reinversión trimestral.

6.3 Estimación del Rendimiento Real de los activos

Como hemos visto en este trabajo, el problema de selección de cartera de fondos de retiro involucra la maximización de la utilidad que el inversionista espera recibir por el valor acumulado de su riqueza. Sin embargo, la riqueza acumulada expresada como una variable nominal no equivale necesariamente al poder adquisitivo que un individuo tendrá al final de su horizonte de inversión, por lo que es necesario que la selección de la composición de la cartera se realice tomando en cuenta el rendimiento real de los activos que la componen.

Los activos que utilizaremos para la estimación de la cartera óptima serán: CETES, Papel comercial y Aceptaciones Bancarias con un rendimiento a 28 días, el Índice de Precios y Cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores y el Índice Banamex 30. De esta forma, excluiremos a aquellos activos (CETES a 180 y 360 días, Pagafes, Ajustabonos, Bondes, etc...) que no se hayan empezado a emitir desde enero de 1987, o que su emisión se haya visto interrumpida por periodos prolongados.

Con el fin de aumentar el número de las observaciones comprendidas entre enero de 1987 y mayo de 1993, las series del rendimiento nominal de los activos se analizarán bajo una periodicidad semanal. Esto implica, sin embargo, que para obtener el rendimiento real (semanal) de los activos, tenemos que realizar un supuesto respecto al comportamiento semanal del índice de precios al consumidor, el cual como es sabido, presenta una periodicidad mensual. Con este fin, suponemos que:

1. El valor del índice nacional de precios al consumidor de final de cada mes corresponde al valor del índice a la fecha del anuncio de la última subasta del mes.

2. El INPC varía de forma lineal entre mes y mes.

Así por ejemplo, si la fecha del anuncio de la última subasta del mes de marzo fue el 28-marzo y la fecha del anuncio de la última subasta del mes de abril fué el 28-abril, y si entre dichas fechas se realizan tres subastas cuyos anuncios se realizan el 7-abril, 14-abril y 21-abril, y el INPC entre marzo y abril pasó de 100 a120, entonces el valor del índice para cada una de estas fechas hubiera sido el siguiente:

28-marzo	100
7-abril	105
14-abril	110
21-abril	115
28-abril	120

Así, las series del rendimiento real de los activos en el periodo enero-1987 a mayo-1993, bajo los dos supuestos referentes a la longitud del periodo de reinversión, las calcularemos de acuerdo a la siguiente metodología:

1) ***Periodo de inversión a 28 días***:

a) Rendimiento real por periodo de CETES a 28 días:

(83) $$CET_{t_i} = 1 + \frac{(R_{CET,t_i} x(28/360))}{(INPC_{t_{i+4}} / INPC\, t_i)} -1$$

Donde:

CET_{t_i} = Rendimiento real de los CETES a 28 días con una fecha valor t_i

R_{CET,t_i} = Rendimiento nominal de los CETES a 28 días con fecha valor t_i

$INPC_{t_i}$ = Valor del índice nacional de precios al consumidor en t_i

t_i = Fecha valor de los CETES a 28 días subastados semanalmente.

b) Rendimiento real por periodo de Papel Comercial (PC) y Aceptaciones Bancarias (AB) a 28 días.

$$(84) \qquad PC_{t_i} = 1 + \frac{(R_{PC,t_i} x(28/360))}{(INPC_{t_{i+4}} / INPC\, t_i)} - 1$$

$$(85) \qquad AB_{t_i} = 1 + \frac{(R_{AB,t_i} x(28/360))}{(INPC_{t_{i+4}} / INPC\, t_i)} - 1$$

Donde:

PC_{t_i} = Rendimiento real del Papel Comercial a 28 días con una fecha valor t_i .

AB_{t_i} = Rendimiento real de las Aceptaciones Bancarias a 28 días con una fecha valor t_i .

R_{PC,t_i} = Rendimiento nominal del Papel Comercial a 28 días con fecha valor t_i .

R_{AB,t_i} = Rendimiento nominal de las Aceptaciones Bancarias a 28 días con fecha valor t_i .

c) Rendimiento real por periodo (a 28 días) por el Indice de Precios y Cotizaciones de la Bolsa (BOL) y el Indice Banamex 30 (BAN)

$$(86) \quad BOL_{t_i} = \frac{IBOL_{t_{i+4}} / IBOL_{t_i}}{(INPC_{t_{i+4}} / INPC_{t_i})} - 1$$

$$(87) \quad BAN_{t_i} = \frac{IBAN_{t_{i+4}} / IBAN_{t_i}}{(INPC_{t_{i+4}} / INPC_{t_i})} -1$$

Donde:

BOL_{t_i} = Rendimiento real a 28 días que se obtendría de invertir en una canasta diversificada de acuerdo al índice de precios y cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores.

BAN_{t_i} = Rendimiento real a 28 días que se obtendría de invertir en una canasta diversificada de acuerdo al índice Banamex de 30 acciones.

$IBOL_{t_i}$ = Valor del índice de la Bolsa Mexicana de Valores al cierre de t_i .

$IBAN_{t_i}$ = Valor del índice Banamex 30 al cierre de t_i .

2) Periodo de reinversión trimestral.

a) Rendimiento trimestral real de Cetes a 28 días:

El rendimiento real de una estrategia de inversión trimestral compuesta por una cartera de Cetes a 28 días $(CET3t_i)$, lo calcularemos bajo el supuesto de reinversión del principal y los intereses dentro del periodo de reinversión. De esta manera

(88)

$$(CET3t_i) = \frac{((1+R_{CET,t_i}x(28/360))(1+R_{CET,t_{i+4}})*(28/360)(1+R_{CET,t_{i+8}}*(28/360)))}{(INPC_{t_{i+12}}/INPC\,t_i)} - 1$$

b) Rendimiento trimestral real de Papel Comercial $(PC3t_i)$ y Aceptaciones Bancarias $(AB3t_i)$ a 28 días.

(89)

$$(PC3t_i) = \frac{((1+R_{PC,t_i}x(28/360))(1+R_{PC,t_{i+4}})*(28/360)(1+R_{PC,t_{i+8}}*(28/360)))}{(INPC_{t_{i+12}}/INPC\,t_i)} - 1$$

(90)

$$(AB3\,t_i) = \frac{((1+R_{AB,t_i}x(28/360))(1+R_{AB,t_{i+4}})*(28/360)(1+R_{AB,t_{i+8}}*(28/360)))}{(INPC_{t_{i+12}}/INPC\,t_i)} \;\text{-1}$$

c) Rendimiento real por periodo (a 28 días) para el Indice de Precios y Cotizaciones de la Bolsa (RBOL) y el Indice Banamex 30 (RBAN).

(91) $$BOL3\,t_i = \frac{IBOL_{t_{i+12}}/IBOL_{t_i}}{(INPC_{t_{i+12}}/INPC_{t_i})} - 1$$

(92) $$BAN3\,t_i = \frac{IBAN_{t_{i+12}}/IBAN_{t_i}}{(INPC_{t_{i+12}}/INPC_{t_i})} - 1$$

6.4 Valores Esperados y Matrices de Varianza-Covarianza

En base a las series de rendimiento reales obtenidas en base a la metodología explicada en la sección anterior, podemos calcular el vector de rendimientos esperados y la matriz de varianza covarianza de los activos, bajo los dos periodos de reinversión considerados:

A) Periodo mensual de reinversión:

CUADRO 3

	Rendimiento promedio	Desviación estándar
CET	0.0089606	0.0132998
PC	0.0125362	0.0146064

AB	0.0114143	0.0148844
BAN	0.0350434	0.1709516
BOL	0.0276579	0.1360233

Matriz de Varianza-Covarianza.

	CET	PC	AB	BAN	BOL
CET	0.0001763	0.0001883	0.0001922	0.0001715	0.0002128
PC	0.0001883	0.0002127	0.0002152	0.0001458	0.0002014
AB	0.0001922	0.0002152	0.0002208	0.0001019	0.0001658
BAN	0.0001715	0.0001458	0.0001019	0.0291323	0.0215315
BOL	0.0002128	0.0002014	0.0001658	0.0215315	0.0184440

Matriz de correlaciones

	CET	PC	AB	BAN	BOL
CET	1.0000000	0.9723717	0.9739203	0.0756769	0.1179998
PC	0.9723717	1.0000000	0.9931666	0.0585786	0.1016774
AB	0.9739203	0.9931666	1.0000000	0.0401680	0.0821359
BAN	0.0756769	0.0585786	0.0401680	1.0000000	0.9288813
BOL	0.1179998	0.1016774	0.0821359	0.9288813	1.0000000

B) Periodo trimestral de reinversión:

CUADRO 4

	Rendimiento promedio	Desviación estándar
CET	0.0368627	0.0390612
PC	0.0478847	0.0395813
AB	0.0442040	0.0407881
BAN	0.1133201	0.2892145
BOL	0.0925840	0.2586129

Matriz de Varianza-Covarianza

	CET3	PC3	AB3	BAN3	BOL3
CET3	0.0015208	0.0015258	0.0015781	0.0019604	0.0017493
PC3	0.0015258	0.0015616	0.0016033	0.0018249	0.0017709
AB3	0.0015781	0.0016033	0.0016583	0.0017610	0.0016664
BAN3	0.0019604	0.0018249	0.0017610	0.0836450	0.0677923
BOL3	0.0017493	0.0017709	0.0016664	0.0677923	0.0666642

Matriz de Correlaciones

	CET3	PC3	AB3	BAN3	BOL3
CET3	1.0000000	0.9900819	0.9937449	0.1735348	0.1737264
PC3	0.9900819	1.0000000	0.9931666	0.1594154	0.1735673

AB3	0.9937449	0.9962914	1.0000000	0.1492867	0.1584908
BAN3	0.1735348	0.1594154	0.1492867	1.0000000	0.9063803
BOL3	0.1737264	0.1735673	0.1584908	0.9063803	1.0000000

En los cuadros 3 y 4 se muestra que el índice Banamex 30 y el índice de precios y cotizaciones de la bolsa son los instrumentos que reportan mayores rendimientos reales promedio tanto para 28 días como para tres meses. Por otro lado, los CETES presentan el menor rendimiento real promedio. En cuanto a la desviación estándar, la varianza del rendimiento real de los CETES a 28 días, Papel Comercial y Aceptaciones Bancarias es mucho menor, como era de esperarse, a la varianza del rendimiento real del índice Banamex 30 y el índice de precios y cotizaciones de la Bolsa. Además, la correlación que existe entre los instrumentos de mercado de dinero por un lado y los índices bursátiles por el otro, es muy alta, debido a que se trata de instrumentos con un riesgo muy similar.

Por último, es importante recordar que para el desarrollo del modelo se hizo el supuesto de normalidad y estacionariedad en la serie del rendimiento de los activos que componen la cartera.

6.5 Estimación de la Composición de las Carteras Óptimas

Una vez estimados los parámetros de la distribución conjunta de probabilidades del rendimiento de los activos y probada la estacionariedad de las series, podemos aplicar el modelo desarrollado en las ecuaciones (65), (65.1), (65.2), (65.3) y (65.4) bajo las dos estrategias de inversión (plazos del periodo de reinversión) consideradas:

1) Periodo de reinversión de 28 días

En base a un programa en GAMS podemos calcular la composición que maximiza el rendimiento compuesto promedio de la cartera cuando el periodo de reiversión equivale a 28 días. Es importante resaltar que en este caso, la varianza de las series del rendimiento real de los activos permite que podamos hacer uso de una aproximación de sexto grado como la considerada en el modelo expuesto en (65), ya que como podemos ver en los cuadros anteriores, la mayor dispersión que podrá tener el rendimiento de la cartera se dará cuando se invierta toda la riqueza en el índice Banamex 30, en cuyo caso los valores del rendimiento por periodo de la cartera que se encontrarían a +- 3 desviación estándar correspondiente a + 55% y - - 48% los cuales se encuentran dentro de un rango aceptable de error en la aproximación.

Así, aplicando el modelo descrito por las ecuaciones (65), (65.1), (65.2), (65.3) y (65.4) a los datos del valor esperado y de la matriz varianza-covarianza del rendimiento de los activos representado en el cuadro 3, obtendríamos que la cartera óptima deberá estar integrada de acuerdo a las siguientes proporciones de los activos:

Activo	Proporción en la cartera óptima
CET	0.0%
PC	22.8%
AB	0.0%
BAN	77.2%
BOL	0.0%

La poca diversificación de la cartera de crecimiento óptimo se explica por la alta correlación y la gran similitud en el valor esperado y la varianza de los rendimientos que existe entre CET, AB y PC (grupo 1) por un lado y entre BAN y BOL (grupo 2) por el otro. Como podemos ver en el cuadro 3, existe una correlación cercana a 0.0 y 0.1 entre los activos de grupo 1 y los activos del grupo 2, lo que explica que la cartera de crecimiento óptimo tome activos de ambos grupos con el fin de capturar el beneficio de la diversificación, sin embargo, dado que la correlación que existe entre los instrumentos de un mismo grupo es cercana a uno, es lógico que la cartera de crecimiento óptimo se incline por elegir al que muestre mejores perspectivas de crecimiento, que en este caso fueron BAN y CET para el grupo 1 y 2 respectivamente.

Esto se ve más claramente si el problema se selección de cartera lo planteamos como la selección de instrumentos de un conjunto formado solamente por dos de los cinco activos considerados. Así, bajo distintas combinaciones de activos (que integren el conjunto de selección), la cartera de crecimiento óptimo sería la siguiente:

CUADRO 5

Activos		**Coeficiente**	**Proporción**		**Rendimiento compuesto**
1	**2**	**de correlación**	**1**	**2**	**promedio esperado**
CET	BAN	0.0756	11.4%	88.6%	2.06%
CET	BOL	0.1179	0.0%	100.0%	1.84%

AB	BAN	0.0401	19.3%	80.7%	2.10%
AB	BOL	0.0821	11.5%	88.5%	1.82%
PC	BAN	0.0585	22.8%	77.2%	2.13%
PC	BOL	0.1016	17.2%	82.8%	1.87%
BAN	BOL	0.9288	91.2%	8.8%	2.04%
CET	PC	0.9723	0.0%	100.0%	1.24%

Como se muestra en este cuadro la proporción a ser invertida en el activo más riesgoso reacciona en el mismo sentido que el coeficiente de correlación, lo cual se ve claramente para el caso de las parejas CET, BOL y BAN, BOL. Además, de todas las parejas posibles la la cartera que muestra el mayor rendimiento compuesto promedio esperado es a la vez la que se encuentra más diversificada, siendo su rendimiento superior aunque para el caso de aquella integrada por BAN y BOL, los cuales constituyen los activos con el mayor rendimiento esperado por periodo. Es importante señalar que estos resultados se obtienen haciendo caso omiso a consideraciones tales como liquidez en el mercado ó riesgo crediticio del emisor, los cuales no se incorporan explícitamente en el modelo y que de hecho constituyen una severa restricción a tomar en consideración al momento de decidir la composición de la cartera.

2) Periodo de reinversión trimestral

Al igual que en el caso en que el plazo del periodo de reiversión equivale a 28 días el problema de selección de cartera cuando se supone un periodo de reinversión trimestral lo podemos plantear en base a un modelo como el de las ecuaciones (65), (65.1), (65.2) y (65.3) cuya solución se puede obtener por medio de un programa en GAMS. Sin embargo, en este caso la mayor dispersión del rendimiento real de los activos (en específico, de BAN3) evita que podamos seguir utilizando un polinomio de sexto grado como una buena aproximación del valor de la función ln(1+W). De esta forma, utilizaremos en su lugar un polinomio de décimo grado, para lo cual tendremos que redefinir la expresión (65) como:

$$(94) \quad Max_{\{K\}} \int_{-1}^{1} (-1)^{(1+i)} (W^i / i) f_W \, dW$$

$$
\begin{gathered}
Max_{\{X\}}\, \mu_c - (1/2)(\mu_c^2 + \sigma_c^2) + (1/3)(\mu_c^3 + 3\,\mu_c \sigma_c^2) \\
-(1/4)(\mu_c^4 + 6\,\mu_c^2 \sigma_c^2 + 3(\sigma_c^2)^2) + (1/5)(\mu_c^5 + 10\,\mu_c^3 \sigma_c^2 + 15\,\mu_c (\sigma_c^2)^2) \\
-(1/6)(\mu_c^6 + 15\,\mu_c^4 \sigma_c^2 + 45\,\mu_c^4 (\sigma_c^2)^2 + 15(\sigma_c^2)^3) \\
+(1/7)(\mu_c^7 + 21\,\mu_c^5 \sigma_c^2 + 105\,\mu_c^4 (\sigma_c^2)^2 + 105\,\mu_c (\sigma_c^2)^3) \\
-(1/8)(\mu_c^8 + 28\,\mu_c^6 \sigma_c^2 + 210\,\mu_c^4 (\sigma_c^2)^2 + 420\,\mu_c^2 (\sigma_c^2)^3 + 105(\sigma_c^2)^4) \\
+(1/9)(\mu_c^9 + 36\,\mu_c^7 \sigma_c^2 + 378\,\mu_c^5 (\sigma_c^2)^2 + 1260\,\mu_c^3 (\sigma_c^2)^3 + 945\,\mu_c (\sigma_c^2)^4) \\
-(1/10)(\mu_c^{10} + 45\,\mu_c^8 \sigma_c^2 + 630\,\mu_c^6 (\sigma_c^2)^2 + 3150\,\mu_c^4 (\sigma_c^2)^3 + 4725\,\mu_c^4 (\sigma_c^2)^4 + 945(\sigma_c^2)^5)
\end{gathered}
$$

De esta manera, planteando el modelo en base a la expresión (94), sujeto a (65.1), (65.2), (65.3) se obtiene que la siguiente composición de la cartera óptima para el caso del periodo de reinversión trimestral:

Activo	**Proporción en la cartera óptima**
CET	0.0%
PC	34.9%
AB	0.0%
BAN	65.1%
BOL	0.0%

Al igual que en el caso del periodo de reinversión a 28 días, la cartera óptima correspondiente al supuesto de un periodo de reinversión trimestral se compone solamente de dos activos: Papel Comercial e Indice Banamex 30. Sin embargo, a pesar de que el coeficiente de correlación entre dichos activos aumentó de 0.0585 (periodo de reinversión a 28 días) a 0.1594, la proporción a ser invertida en el Papel Comercial aumentó aproximadamente en 13% del total de la riqueza invertida. La razón de este cambio en la composición de la cartera resulta del incremento que se observa en el coeficiente formado por la razón del rendimiento compuesto promedio esperado (r.c.p.) del Indice Banamex 30 dividido por el r.c.p. del Papel Comercial, el cual pasa de 1.64 para el periodo de reinversión a 28 días, a 1.28 para el periodo de reinversión trimestral, lo cual refleja el premio en rendimiento que se le debe dar al inversionista por mantener tres meses consecutivos un instrumento con un plazo a vencimiento a 28 días.

CONCLUSIONES

En este trabajo se analizó el problema de fondos de retiro bajo un esquema de decisión secuencial (intertemporal) de composición de cartera, en el que el individuo busca en cada periodo de reinversión maximizar una función objetivo que depende del valor esperado de su riqueza acumulada en una fecha futura. Este planteamiento difiere del que generalmente se establece para analizar otros problemas de selección de cartera, en los que se supone que el horizonte de inversión del individuo consta únicamente de un periodo y que no existe reinversión revolvente, de tal forma que la decisión de cartera en cada punto en el tiempo no se ve afectada por las decisiones de periodos anteriores.

Observamos así que en general no es óptimo que el individuo tome la decisión de cartera en cada periodo de manera independiente de lo que suceda en otros periodos (propiedad de miopía), debido a que la regla de inversión óptima obtenida en base a solucionar por programación dinámica el problema de inversión de fondos de retiro quedará expresada casi siempre en función del valor acumulado del monto invertido y de la distribución de probabilidades de los rendimientos de periodos futuros. Sin embargo, esto último no es aplicable al caso en que el fin último del inversionista corresponda a la maximización del valor acumulado del monto al final del horizonte de inversión, debido a que para lograr esto, bastará que el inversionista busque maximizar el valor del rendimiento compuesto promedio de su cartera al final de cada periodo de reinversión.

Así la cartera cuya composición se determina en base a este criterio le denominamos cartera de crecimiento óptimo.

Por otro lado, dado que en realidad lo que le interesa al inversionista es maximizar su utilidad proveniente de la riqueza y no el valor de ésta, la cartera de crecimiento óptimo se podrá calificar como un criterio de selección erróneo. Sin embargo, tal y como se demostró en este trabajo, la estrategia de inversión que se obtiene a partir de la maximización del valor esperado del rendimiento compuesto promedio es equivalente a la que se deriva del comportamiento racional de un inversionista cuyo ordenamiento de preferencias se define en base a la función de utilidad logarítmica, lo que significa que la cartera de crecimiento óptimo refleja las preferencias de un inversionista que actúa de acuerdo a los postulados del teorema de la utilidad esperada, el cual constituye el axioma más aceptado para definir el comportamiento de un inversionista racional.

Utilizar esta definición del ordenamiento de preferencias puede prestarse a que se concluya que la cartera de crecimiento óptimo representa solamente la estrategia de inversión que seguirían individuos cuya aversión relativa al riesgo fuera constante, y no la que mostrarían individuos con otro tipo de aversión al riesgo, por lo que se podría pensar que la decisión de elegir uno u otro ordenamiento de preferencias se remite a una estimación empírica (econométrica) de la aversión de los inversionistas. Sin embargo, gracias a que la función de utilidad logarítmica es doblemente diferenciable y monótona creciente, existe solamente una cartera de crecimiento óptimo dentro del conjunto de oportunidades del inversionista, que maximiza el valor esperado de la riqueza acumulada al final del horizonte de inversión, por lo que debido a ésto y a la convergencia del rendimiento compuesto promedio a su valor esperado, la cartera de crecimiento óptimo deberá de ser elegida por cualquier inversionista que prefiere más a menos (suponiendo que la riqueza es un bien), independientemente de su aversión al riesgo. Lo anterior se observa en la gráfica del capítulo IV, en la que se muestra que existe solamente una cartera que maximiza el valor esperado del rendimiento compuesto promedio dentro de todo el conjunto de alternativas de inversión (representado de acuerdo a su media y varianza).

En base al desarrollo teórico expuesto en el cuarto y quinto capítulos se propuso a la maximización del valor esperado del rendimiento compuesto promedio de la cartera como un criterio de selección de cartera adecuado para analizar el problema de inversión de fondos de retiro. Sin embargo, este criterio quedó definido de una manera muy general, debido a que la expresión del valor esperado de una función que depende de una variable aleatoria depende de la forma que se asigne a la función de densidad de dicha variable aleatoria, por lo que se procedió a derivar un modelo que permite ser aplicado bajo el supuesto de normalidad en la función de densidad multivariada del rendimiento de los activos de la cartera. No obstante, debido a la imposibilidad de encontrar una solución cerrada al valor esperado del rendimiento compuesto promedio bajo el supuesto de normalidad, se tuvo que realizar una aproximación polinomial, cuyo orden depende del grado de dispersión del rendimiento de los activos que componen la cartera. Esta aproximación resultó ser lo suficientemente buena en las simulaciones realizadas en el ejercicio descrito en el capítulo cuatro, en el que se puede apreciar la convergencia que muestra el rendimiento compuesto promedio de la cartera de su valor esperado.

Este ejercicio nos sirvió además para analizar el comportamiento de la cartera de crecimiento óptimo bajo distintos valores del coeficiente de correlación del rendimiento esperado de los activos que integran la cartera, permitiéndonos concluir que la cartera óptima toma ventaja de la diversificación de los activos que componen la cartera conforme va disminuyendo la correlación del rendimiento esperado de éstos.

Por otro lado, se pudo verificar que la cartera de crecimiento óptimo es superior a su comportamiento de largo plazo, tanto en riesgo como en rendimiento compuesto promedio obtenido (a posteriori), a las estrategias de inversión que se derivan de solucionar de forma "miope" el problema de selección de cartera en base al criterio de media-varianza y que en realidad terminen por generar un valor acumulado de la riqueza más alto que muchas de las carteras que se incluyen en la frontera eficiente de media-varianza.

Además, como pudimos observar en los ejercicios desarrollados en el trabajo (capítulo IV y V), una característica importante de la cartera de crecimiento óptimo es que su composición se mantiene constante a lo largo del horizonte de inversión, bajo el supuesto de estacionariedad de los rendimientos de los activos que componen. A un nivel más práctico, esta propiedad implica que no es necesario que el trabajador tenga que revisar frecuentemente la composición de cartera de su seguro de retiro, lo cual puede resultar muy ventajoso si se toma en cuenta, por un lado, lo costoso que puede resultar para un individuo el estar bien informado de manera continua respecto al resultado de sus inversiones, y por el otro lado, las dificultades operativas y altos costos de transacción que representaría el tener que estar modificando continuamente la cartera de los fondos de retiro.

Por otro lado en el último capítulo aplicamos el criterio de la cartera de crecimiento óptimo a una cartera de activos negociables en el Sistema Financiero Mexicano, obteniendo como resultado una composición orientada hacia acciones operadas en el mercado bursátil. Cabe destacar que la cartera de crecimiento óptimo implica un alto porcentaje (35% para una estrategia de inversión trimestral) a ser invertido en instrumentos con una tasa de rendimiento nominal garantizada, lo que refleja el papel de los instrumentos de mercado de dinero como instrumentos que permiten "cubrir" el valor de la cartera ante variaciones negativas en los rendimientos de las acciones.

De esta manera, la cartera compuesta solamente por activos que representan un mayor rendimiento esperado por periodo (en este caso el índice Banamex 30 y/o el índice de precios y cotizaciones de la bolsa de valores), no es la que brinda las mejores perspectivas del crecimiento del capital a largo plazo, como comúnmente se arguye en los círculos financieros. Además, resulta interesante comparar los resultados del modelo con las prácticas que se observan en otros países para la inversión de fondos de retiro. Así, por ejemplo, si consideramos el caso de Chile podemos ver (refiriéndonos al cuadro expuesto en la Introducción) que aunque el Banco Central de Chile permite invertir hasta un 40% de los fondos en instrumentos que se podrían catalogar como de "renta variable", la ley permite que el Banco Central de Chile pueda incrementar dicho porcentaje hasta en un 60%. De hecho, como vimos en la introducción de este trabajo, la tendencia en lo concerniente a la legislación del régimen de inversión de fondos de retiro en este país ha sido la de incrementar la participación de las acciones en la composición de las carteras de inversión. Por otro lado, Logue en su libro "Managing Corporate Pension Plans"presenta un cuadro descriptivo de la diversificación de la cartera de los fondos de pensiones corporativos, estatales y sindicales en los Estados Unidos en 1988, en el que se muestra que los fondos de retiro administrados por las empresas privadas invirtieron en dicho año hasta un 57.6% de sus carteras en instrumentos de renta variable, lo que indica al igual que en el caso de Chile, una tendencia hacia la inversión en acciones.

Cabe hacer notar, que los resultados obtenidos se basan en las propiedades de largo plazo del modelo desarrollado, por lo que para poder obtener conclusiones más definitivas respecto a la composición de la cartera de fondos de retiro a distintos plazos de inversión y sobre todo en el corto plazo es necesario realizar un ejercicio en el que a partir de la identificación del proceso de series de tiempo (autoregresivo, promedios móviles) que de manera conjunta muestren el rendimiento de los activos que se incluyan en la cartera, se realicen simulaciones (por ejemplo, en base a vectores autoregresivos) con el objeto de estimar el número de períodos a partir del cual se puede inferir estadísticamente la convergencia del rendimiento compuesto promedio de una cartera a su valor esperado. Realizar un ejercicio de este tipo, permitiría obtener el número de períodos que componen el horizonte de inversión a partir del cual la cartera de crecimiento óptimo constituye en realidad la mejor alternativa de inversión, así como verificar si es posible obtener un plazo óptimo para la longitud del horizonte de reinversión.

Finalmente, es importante señalar que en esta tesis no se pretende establecer un criterio absoluto y rígido de selección de cartera para el problema de inversión de fondos de retiro, sino el de explicar, investigar y abrir líneas alternativas para la investigación de este fenómeno. Así, el criterio de selección de cartera que se propone es lo suficientemente flexible como para permitir la existencia de ventas en corto y suponer definiciones alternativas en la forma de la función de densidad del rendimiento de los activos. Incluso, el concepto de carteras de crecimiento óptimo se puede aplicar al caso de fondos revolventes con un horizonte de inversión de largo plazo no determinado ("infinito"), tal como es el caso de la inversión de las reservas internacionales de un Banco Central.

ANEXO

INDICE NACIONAL DE PRECIOS AL CONSUMIDOR							
AÑO / MES	ENE	FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL
90	54,1815	55,4084	56,3852	57,2434	58,2423	59,5251	60,6106
91	68,8684	70,0707	71,07	71,8145	72,5165	73,2774	73,925
92	81,2285	82,1909	83,0274	83,7675	84,3199	84,8906	85,4266
93	90,4228	91,1615	91,6928	92,2216	92,7487	93,2689	93,7172
94	97,2028	97,7027	98,205	98,6861	99,1629	99,6591	100,101
95	107,1431	111,6841	118,27	127,69	133,029	137,251	140,049
96	162,556	166,35	170,012	174,845	178,032	180,931	183,503
97	205,541	208,995	211,569	213,882	215,834	217,749	219,646
98	236,931	241,079	243,903	246,185	248,146	251,079	253,5
99	281,983	285,773	288,428	291,075	292,826	294,75	296,698
2000	313,067	315,844	317,595	319,402	320,596	322,495	323,753
2001	338,462	338,238	340,381	342,098	342,883	343,694	342,801

INDICE NACIONAL DE PRECIOS AL CONSUMIDOR						
AÑO / MES	AGO	SEP	OCT	NOV	DIC	PROMEDIO
90	61,6434	62,5221	63,4209	65,1048	67,1567	60,12037
91	74,4395	75,181	76,0554	77,9439	79,7786	73,74508
92	85,9514	86,6991	87,3233	88,0489	89,3026	85,18139
93	94,2188	94,9166	95,3084	95,7251	96,455	93,48812
94	100,5676	101,2828	101,8145	102,3588	103,2566	99,99999
95	142,372	145,317	148,307	151,964	156,915	134,99927
96	185,942	188,915	191,273	194,171	200,388	181,40983
97	221,599	224,359	226,152	228,682	231,886	218,82675
98	255,937	260,088	263,815	268,487	275,038	253,68233
99	298,368	301,251	303,159	305,855	308,919	295,75708
2000	325,532	327,91	330,168	332,991	336,596	323,92908
2001						

INFLACIÓN							
AÑO / MES	ENE	FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL
91	0,27107	0,26462	0,2604	0,25455	0,24508	0,23103	0,21967
92	0,17947	0,17297	0,1682	0,16644	0,16277	0,15848	0,15558
93	0,11319	0,10914	0,1044	0,10092	0,09996	0,0987	0,09705
94	0,07498	0,07175	0,071	0,0701	0,06916	0,06851	0,06812
95	0,10226	0,1431	0,2043	0,29399	0,34152	0,3772	0,39908
96	0,51719	0,48947	0,4375	0,36929	0,33829	0,31825	0,31028
97	0,26443	0,25636	0,2446	0,22327	0,21233	0,20349	0,19696
98	0,15272	0,15352	0,1527	0,15103	0,14971	0,15307	0,15413
99	0,19015	0,18539	0,1826	0,18234	0,18006	0,17393	0,17041
2000	0,11023	0,10523	0,1011	0,09732	0,09483	0,09413	0,09119
2001	0,08112	0,0709	0,07175	0,07106	0,06952	0,06573	0,05883

INFLACIÓN AÑO / MES	AGO	SEP	OCT	NOV	DIC	PROMEDIO
92	0,15465	0,1532	0,14815	0,12964	0,11938	0,15575
93	0,09619	0,09478	0,09144	0,08718	0,08009	0,09775
94	0,06738	0,06707	0,06826	0,0693	0,07052	0,06968
95	0,41568	0,43476	0,45664	0,48462	0,51966	0,34773
96	0,30603	0,30002	0,28971	0,27774	0,27705	0,35257
97	0,19176	0,18762	0,18235	0,17774	0,15719	0,20817
98	0,15496	0,15925	0,16654	0,17406	0,18609	0,15898
99	0,16579	0,15827	0,14913	0,13918	0,12319	0,1667
2000	0,09104	0,08849	0,08909	0,08872	0,08959	0,09508
2001						
INFLACIÓN ACUMULADA		1,51483				

INFLACIÓN AÑO / MES	ENE	FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL
92	1,8%	1,2%	1,0%	0,9%	0,7%	0,7%	0,6%
93	1,3%	0,8%	0,6%	0,6%	0,6%	0,6%	0,5%
94	0,8%	0,5%	0,5%	0,5%	0,5%	0,5%	0,4%
95	3,8%	4,2%	5,9%	8,0%	4,2%	3,2%	2,0%
96	3,6%	2,3%	2,2%	2,8%	1,8%	1,6%	1,4%
97	2,6%	1,7%	1,2%	1,1%	0,9%	0,9%	0,9%
98	2,2%	1,8%	1,2%	0,9%	0,8%	1,2%	1,0%
99	2,5%	1,3%	0,9%	0,9%	0,6%	0,7%	0,7%
2000	1,3%	0,9%	0,6%	0,6%	0,4%	0,6%	0,4%
2001	0,6%	-0,07%	0,6%	0,5%	0,2%	0,24%	-0,26%

INFLACIÓN AÑO / MES	SEP	OCT	NOV	DIC	PROMEDIO
91	1,0%	1,2%	2,5%	2,4%	1,4%
92	0,9%	0,7%	0,8%	1,4%	0,9%
93	0,7%	0,4%	0,4%	0,8%	0,6%
94	0,7%	0,5%	0,5%	0,9%	0,6%
95	2,1%	2,1%	2,5%	3,3%	3,6%
96	1,6%	1,2%	1,5%	3,2%	2,1%
97	1,2%	0,8%	1,1%	1,4%	1,2%
98	1,6%	1,4%	1,8%	2,4%	1,4%
99	1,0%	0,6%	0,9%	1,0%	1,0%
2000	0,7%	0,7%	0,9%	1,1%	0,7%
2001					
INFLACIÓN ACUMULADA		2,11%			

BIBLIOGRAFÍA

Elton y Gruber. "Modern Portfolio Theory and Investment Analysis". John Wiley & Sons Inc. 1991.

Borja Ma. Teresa y Cortina Jaime J. "La diversificación óptima de activos internacionales de un Banco Central; El caso de México". Tesis I.T.A.M., 1989.

Gradshteyn I. S. y Ryzhik I.M. "Tabla de Integrales, Series y Productos". Apuntes Académicos, 1965.

Hakansson Nils H. "Capital Growt and the Mean-Variance approach to Portfolio Selection".Periódico de Análisis Financiero y Cuantitativo. 1971.

Hakansson Nils H. "Multiperiod mean-variance analysis: toward a general theory of portfolio choice".Periódico de Finanzas 26. 1970 pgs. 324-334.

Johnston J. "Métodos Econométricos". Mcgraw-Hill, 1984.

Layard y Walters. "Teoría Microeconómica". Mcgraw-Hill, 1987.

Coss Bu Raúl. "Análisis y Evaluación de Proyectos de Inversión". Limusa.

Análisis de la Rentabilidad de los Fondos Previsionales, Superintendencia de Administradoras Privadas de Fondos de Pensiones-Perú (SAFP).

Comisión Nacional del Sistema de Ahorro para el Retiro (CONSAR), "Reforma al Sistema de Pensiones: el caso mexicano". Elaborado por: Carlos Sarrapy, Fernando Solís Soberón y Alejandro Villagómez Amezcua.

Comisión Nacional del Sistema de Ahorro para el Retiro (CONSAR), "Reforma al Sistema de Pensiones del Seguro Social". Elaborado por: Ma. Del Carmen Fernández Reyes.

Comisión Nacional del Sistema de Ahorro para el Retiro (CONSAR), "Nota Técnica del Cálculo de los Indicadores de Rendimiento Neto para el Trabajador (IRN)". Dirección de Estudios Actuariales. México, junio 1999.