UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES
CUAUTITLÁN

UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MEXICO

MANUAL DE APOYO DIDÁCTICO PARA LA ASIGNATURA DE CINEMÁTICA QUE SE IMPARTE EN LA CARRERA DE INGENIERO MECÁNICO ELECTRICISTA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

INGENIERO MECÁNICO ELECTRICISTA

P R E S E N T A :

ALBERTO JUÁREZ CARMEN

ASESOR: ING. JUAN MANUEL TORRES MERINO

CUAUTITLÁN IZCALLI, EDO. DE MÉX. 2004

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES CUAUTITLAN
UNIDAD DE LA ADMINISTRACION ESCOLAR
DEPARTAMENTO DE EXAMENES PROFESIONALES

ASUNTO: VOTOS APROBATORIOS

DR. JUAN ANTONIO MONTARAZ CRESPO
DIRECTOR DE LA FES CUAUTITLAN
PRESENTE

ATN: Q. Ma. del Carmen García Mijares
Jefe del Departamento de Exámenes
Profesionales de la FES Cuautitlán

Con base en el art. 28 del Reglamento General de Exámenes, nos permitimos comunicar a usted que revisamos la TESIS:

"Manual de apoyo didáctico para la asignatura de cinemática que se imparte en la carrera de Ingeniero Mecánico Electricista".

que presenta el pasante: Alberto Juárez Carmen
con número de cuenta: 9757270-5 para obtener el título de :
Ingeniero Mecánico Electricista

Considerando que dicho trabajo reúne los requisitos necesarios para ser discutido en el EXAMEN PROFESIONAL correspondiente, otorgamos nuestro VOTO APROBATORIO.

ATENTAMENTE
"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"
Cuautitlán Izcalli, Méx. a 17 de mayo de 2004

PRESIDENTE	Fís. José de Jesús Cruz Guzmán	
VOCAL	Ing. Jaime Rodríguez Martínez	
SECRETARIO	Ing. Juan Manuel Torres Merino	
PRIMER SUPLENTE	Ing. Armando Morales	
SEGUNDO SUPLENTE	Ing. José Frías Flores	

A Dios: Por darme la fe

A mi padre: † In Memory of †

A mi madre: Por todo su amor y apoyo, que me ha dado.
A quien debo todo lo que soy, a quien dedico este trabajo de tesis.

A mis hermanos: Magdalena, Juan, Irma, Asunción.
Por su apoyo y comprensión incondicional.

A mi asesor: I.M.E. Juan Manuel Torres Merino.
Por su apoyo en el desarrollo de esta tesis.

A mis Amigos: Por estar siempre ahí en las buenas y las malas.
Alejandro, Jaime, Víctor, Abimeal, Francisco, Marcos, Saúl, Juan Manuel.
A todos ellos gracias.

Con Admiración y respeto
"Alberto"

CAPITULO 3. MOVIMIENTO PLANO.

CAPITULO 4. CINEMÁTICA DEL CUERPO RÍGIDO.

INTRODUCCIÓN:

La asignatura de cinemática se imparte en el 3er. Semestre de la carrera de Ingeniería Mecánica- Eléctrica de la Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán. UNAM asignatura común para las áreas de mecánica, eléctrica- electrónica y el área industrial.

Este manual se realizó con la finalidad de contar con un material sencillo de manera que el lector entienda cada concento y se complementa con ejercicios resueltos en clase, pero de ninguna manera se pretende que sea un sustituto de ningún libro de texto, sino solo como un elemento más de apoyo auxiliar al estudiante, al cual pueda tener acceso y consultar sus dudas. Además de servir como una guía para resolver un problema determinado.

Este manual cuenta con teoría básica y una serie de ejercicios resueltos al final de cada capitulo, sin tener la ambigüedad de algunos textos. Pues posee la característica distintiva de contener notas que generalmente no se encuentran en libros de texto. Las cuales son comentarios, de la explicación que el académico da al desarrollar su clase, donde se desarrollan paso a paso. Hasta llegar a la solución que la mayoría de las veces los estudiantes no toman nota, debido a la naturaleza de la clase.

Se han agregado en los problemas resueltos un problema hecho por computadora en lenguaje de programación Visual Basic, estos programas se dan con su formulario y su código, que aunque sencillo. Será de apoyo al estudiante que no ha tenido contacto con este lenguaje y le sea de utilidad para resolver algún otro problema que quiera realizar en este lenguaje ya que en la actualidad el uso de la computadora es una gran herramienta para el estudiante de ingeniería que realiza cálculos repetitivos, aunque el estudiante puede realizar los programas en algún otro lenguaje de programación.

Cabe hacer mencionar que el tratamiento de un curso de cinemática para ingeniería se fundamenta en la teoría, pero la mayoría de sus ejercicios y problemas son de tipo algebraico y numérico. Para que de esta manera se puede cuantificar el avance de los estudiantes.

Los temas que se abordan en este trabajo de tesis están contenidos dentro de los capítulos siguientes:

1. — Cinemática de partículas.
2. - Movimiento en sistemas de referencias inerciales.
3. — Movimiento Plano.
4. — Cinemática del cuerpo rígido.

El capitulo 1: Al principio del tema se dan los conceptos básicos manejados en la mecánica clásica o Newtoniana, los cuales son utilizados en la cinemática.

Se maneja los conceptos de modelos de cuerpo o partículas para analizar los conceptos del movimiento en un sistema de referencia.

Se da una definición de cinemática, la cual menciona que es el estudio del movimiento de los cuerpos, sin importar las causas que la producen.

En este tema se analiza a la partícula, que es la forma más fácil de analizar el movimiento.

Se estudia a la partícula usando ilustraciones que complementen su comprensión y mostrar como se obtienen sus ecuaciones: de posición, velocidad y aceleración, las cuales definen la cinemática del movimiento de una partícula. En un sistema de referencia fijo.

Se estudia el movimiento angular de manera general ya que en el capitulo 3 se tratara mas a fondo. En donde las partículas se mueven a lo largo de una trayectoria curva, en un eje de referencia fijo, este estudio se complementa igualmente con ilustraciones de apoyo, para desarrollar las ecuaciones de posición, velocidad angular, y aceleración angular, en donde el tiempo es un factor fundamental para el movimiento en la cinemática.

Al final del tema emplearemos las ecuaciones obtenidas para resolver ejercicios, en donde la partícula esta involucrada. Se hace la prueba escrita de un problema por computadora, dándose la ilustración del formulario y el código de este.
Con lo que se refuerza la teoría estudiada en este tema.

El capitulo 2. En este se estudia el movimiento rectilíneo de la partícula. Así como también se dan los casos cuando el movimiento es rectilíneo uniforme. Y rectilíneo uniformemente acelerado.
Se tratan los casos particulares del movimiento rectilíneo, como lo son la caída libre, tiro vertical y el horizontal.
El estudio del movimiento rectilíneo uniforme acelerado, se analizará, considerando que la aceleración es constante, o sea que la velocidad se mantiene uniforme a través del tiempo, obteniéndose la ecuación cinemática de la posición y la velocidad.

Se estudia el caso del movimiento dependiente que se presenta en las poleas. Que se encuentran unidas por una cuerda o cable, y presentan un movimiento rectilíneo, por medio de las ilustraciones dadas, se realizará la obtención de sus ecuaciones, donde primeramente se obtiene las longitudes de los cables que los unen, tomando un eje de referencia fijo.

Capitulo 3: En este tema se trata el movimiento plano, que es el movimiento que presenta una trayectoria curva que se encuentra en un plano fijo, casos particulares de este movimiento son; el movimiento parabólico, el movimiento circular y angular.
El movimiento angular se estudia partiendo de que la aceleración es constante, de las ilustraciones que se dan en este tema se deducen las ecuaciones de posición, velocidad angular, respecto al tiempo.

El movimiento circular, se estudiara considerando una circunferencia con radio constante y usando vectores unitarios tangencial y normal para obtener las ecuaciones cinemáticas de aceleración y velocidad con respecto al tiempo.

Se analizará con detalle las relaciones cinemáticas relativas, este caso cuando la partícula que se mueve con respecto a un sistema de movimiento animado de movimiento en rotación, lo que implica que gira con velocidad angular, se da la aceleración de Coriolis, que es debida a la interacción que tiene la velocidad angular del sistema coordenado móvil y la velocidad relativa de la partícula en movimiento

Capitulo 4: El estudio del cuerpo rígido se estudia considerando un marco de referencia fijo y otro móvil, cuyo origen puede estar o no en dicho cuerpo, pero que esta ligado a el.

El cuerpo rígido se analiza cuando para dos instantes t_1 y t_2 este tiene desplazamiento lineal y angular.

Se analizara los movimientos del cuerpo rígido como lo son:

- Translación plana y no plana (curvilínea y rectilínea y caracterizado porque las partículas describen trayectorias paralelas, además de conservar su dirección durante el movimiento.
- Rotación en torno a un eje, caracterizado porque todo punto del cuerpo conserva su distancia con respecto al eje, al transcurrir el tiempo.

- Rotación excéntrica, se presenta cuando el eje de rotación queda fuera del centro de gravedad del sólido.
- Movimiento plano general. Se analiza como la superposición de dos tipos de movimiento, translación plana y de rotación en torno a un eje perpendicular al plano del movimiento.

OBJETIVOS

1.— Preparar material didáctico con el objeto de auxiliar en el estudio de la asignatura de cinemática a toda la comunidad estudiantil de la carrera de Ingeniería Mecánica- Eléctrica, de la FESC.

2.- Desarrollar material no contemplado en otros textos, para complementar la formación del estudiante de la carrera de Ingeniero Mecánica Electricista.

3.- Preparar material que sirva como guía de estudio para los diferentes interesados en el tema.

CAPITULO 1

CINEMÁTICA DE LA PARTÍCULA

1.1 INTRODUCCIÓN A LA CINEMÁTICA.

La ingeniería: Es la capacidad de utilizar herramientas básicas para estudiar, comprender, desarrollar, explicar diversas formas, así como aplicarlas en la solución de problemas que nuestra sociedad demanda.
La física tiene en su haber una rama de estudio que es la mecánica clásica o Newtoniana, la cual tiene como postulados las leyes de Newton, se divide en las siguientes ramas: Estática, (Cinemática y Cinética) siendo estas dos últimas las que corresponden a dinámica. En este trabajo en particular nos interesa estudiar a la cinemática la cual estudia el movimiento de los cuerpos al transcurrir el tiempo, en donde las causas que lo producen no son significativas.

Las mediciones se expresan en valores de unidad o unidades, las cuales son unidades estándar, un grupo o combinación de estas unidades, se llama un sistema de unidades. En la actualidad se usan dos sistemas de unidades: El sistema métrico o sistema internacional de unidades y el sistema británico. El sistema métrico es el más utilizado en la actualidad.
La longitud, la masa y el tiempo son magnitudes físicas que describen numerosos objetos y fenómenos. De hecho el estudio del movimiento, requiere solo de estas magnitudes físicas.

LONGITUD: Comúnmente se dice que es la distancia que hay entre dos puntos, la magnitud fundamental para medir distancias o dimensión en el espacio. Es la unidad en el SI el metro (m). Actualmente el metro se refiere en términos de la velocidad de la luz en el vacío. (13)

() Referencia de bibliografía.

MASA: Es una medida de la inercia de los cuerpos, entendiéndose por inercia la propiedad de la materia que mide la resistencia de modificar el estado de movimiento de dichos cuerpos. La unidad SI de masa es el kilogramo (Kg.) Se refiere a un estándar material específico; de la masa de un cilindro de platino e iridio prototipo. (3)

TIEMPO: Es un concepto difícil de definir. Por lo que se toman los eventos que tienen un flujo hacia delante, es decir que tomaremos los eventos para marcar las mediciones del tiempo, estos son análogos a las marcas de una cinta métrica utilizada para medir la longitud. La unidad SI de tiempo es el segundo (s). Se da en términos de la frecuencia de radiación asociada con una transición atómica del átomo de cesio-133. (13)

SISTEMAS DE REFERENCIA

Sistema coordenado lineal: Esquema por medio del cual se establece una correspondencia biunívoca entre puntos de una recta y los números reales y los puntos que la forman están sobre esta misma recta. (Llamamos línea recta al lugar geométrico de los puntos que tienen la misma pendiente, calculada por $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$, $x_1 \neq x_2$) (12)

Este esquema se le conoce como sistema coordenado lineal. Fig. (I.0.0)

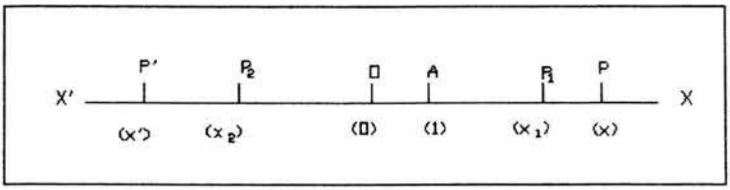


Figura (I.0.0) Sistema coordenado lineal

Sistema de coordenadas rectangulares: Esquema que esta representado por 2 rectas dirigidas X'X y Y'Y perpendiculares entre si y su punto de intersección O, el origen, de estas dos rectas llamadas ejes de coordenadas, que además dividen el plano en 4

() Referencia de bibliografía.

regiones llamadas cuadrantes, en donde la dirección positiva del eje x es hacia la derecha y la dirección positiva del eje y, es hacia arriba, en donde un punto en el plano se representa por un par ordenado de números reales (x, y). [12] Tal y como se muestra en la Fig. (I.0.1)

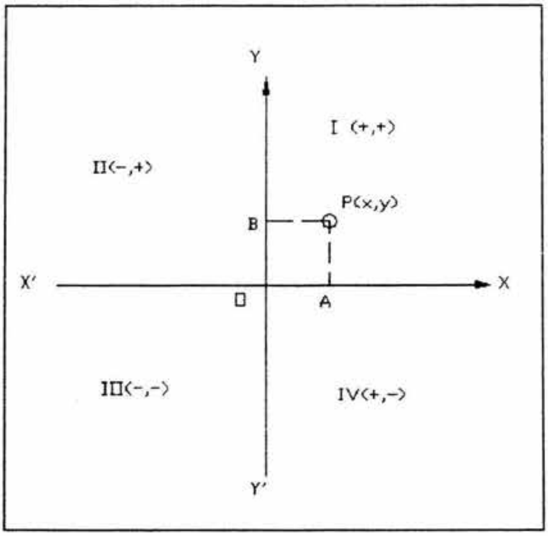


Fig. (I.0.1) Sistema rectangular de coordenadas

Sistema coordenado rectangular en el espacio: Este esquema esta representado por tres planos perpendiculares que se cortan en un punto común O, tal como se indica en la Fig. (1.0.2), un punto en el espacio se localiza con referencia a estos elementos, los planos se llaman planos coordenados, las rectas de intersección de estos planos, ejes coordenados (X'X, Y'Y, y Z'Z) x, y, z. Respectivamente, estos ejes son rectas dirigidas cuya dirección positiva está indicada por una flecha. Y el punto O, origen del sistema.
Un punto en el espacio P tiene una y solamente una terna de coordenadas (x, y, z) y una terna de números reales, relativa a un sistema de coordenadas rectangulares. [12]

[ ] Referencia de bibliografía.

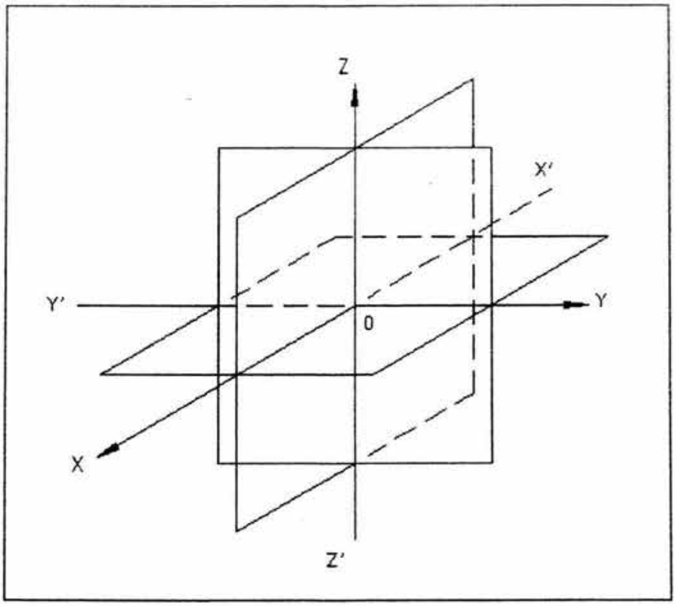


Fig. (1.0.2)Sistema coordenado en el espacio.

Las cantidades cinemáticas, tales como posición, velocidad y aceleración se expresan con respecto a un sistema de ejes de referencia.

Cuando un sistema de referencia se encuentra fijo a la tierra, el movimiento se denomina absoluto, a diferencia del movimiento relativo que se mide con respecto a ejes en movimiento.

Aunque estrictamente un movimiento absoluto es medido con respecto a un sistema de coordenadas fijo en el espacio; es decir un sistema de referencia inercial o Newtoniano (Se considera con velocidad constante). Como la tierra se encuentra en movimiento, cualquier movimiento que se determine con respecto a un sistema de coordenadas fijo a ella, es un movimiento relativo.

() Referencia de bibliografía.

Consideraremos como movimiento absoluto al determinado con respecto a un sistema de coordenadas fijo a la tierra. (4)

LAS CANTIDADES ESCALARES: Es toda aquella que por definición, están especificadas cuando se da su magnitud, es decir, su tamaño o número de unidades. Ejemplo de las cantidades de este tipo se tiene en la masa de un cuerpo, la resistencia de un resistor, el diámetro de un círculo, el área de un triángulo, tiempo, temperatura. etc. (8)

LAS CANTIDADES VECTORIALES: Son aquellas en la que sus magnitudes o unidades son compuestas y además suelen relacionarse cantidades que poseen magnitud y dirección, tales cantidades se representan geométricamente por un segmento rectilíneo dirigido o un vector, ejemplos de estas cantidades vectoriales son la velocidad, aceleración, la fuerza, campo eléctrico, cantidad de movimiento angular. etc.
Aunque algunas magnitudes no quedan determinadas completamente por su magnitud y dirección, sino que también importa su línea de acción y su punto de aplicación. (8)

VECTOR: Se le llama vector a la representación de una magnitud vectorial, representado por una flecha, de un análisis geométrico, en donde primeramente se define un segmento rectilíneo dirigido desde un punto 0 hasta un punto Q y lo representamos por $\vec{0Q}$, en donde 0 es el punto inicial o de aplicación en un eje de referencia fijo y el punto Q se llama punto terminal, el segmento rectilíneo $\vec{0Q}$, es el vector de 0 a Q. Un vector se representa por una letra negrita, tal como **A,** o también con una letra cursiva con una flecha arriba, ejemplo: $\vec{A}$

El vector se representa en la Fig. (I.1.0) gráficamente por medio de una flecha. La magnitud del vector se indica por la longitud de la flecha, la dirección por el ángulo entre el eje de referencia y la línea de acción de la flecha, y el sentido lo indica la punta de la flecha. (5)

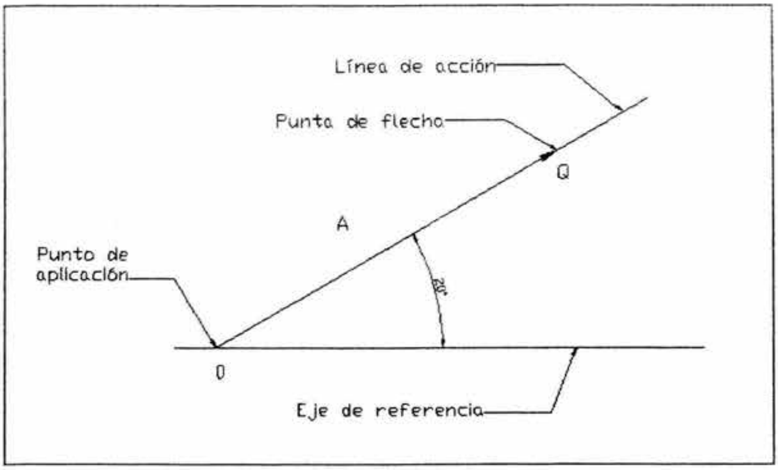


Fig. (I.1.0) Representación del vector

Para la aplicación de cualquier teoría, se requieren modelos que faciliten o simplifiquen la interpretación del comportamiento de un fenómeno, un sistema o una estructura; es decir que reflejen de algún modo su comportamiento. Así con los modelos es posible comprender aquello que la teoría desea explicar. Por lo que adoptaremos ciertas simplificaciones de los modelos de cuerpos, consistentes en idealizaciones que toman en cuenta las propiedades que de ellos se estudien. Los modelos que analizaremos para el estudio de la cinemática son los siguientes:

CUERPO: Se refiere a toda consideración material de lo que ocupa un lugar en el espació y que es susceptible de estar sujeta a la acción de fuerzas. [10]

PUNTO MASA O PARTÍCULA MATERIAL: Es la representación de un cuerpo al que se asocia masa. La idealización de punto masa se empleara en este trabajo, cuando las dimensiones del cuerpo son irrelevantes o pudiese representarse sin importar sus dimensiones. [10] Y cuerpo rígido cuando el cuerpo no puede considerarse como un punto o sus dimensiones intervienen en el planteamiento que se analiza.

[ ] Referencia de bibliografía.

CUERPO RIGIDO: Es un cuerpo que no acepta deformaciones, es decir, todas sus partículas se conservan a la misma distancia entre sí bajo cualquier condición. Si no se cumple esta característica, el cuerpo será deformable. (En realidad todos los cuerpos son deformables, de manera que el cuerpo rígido es solo una idealización). [(10)]

ESPACIO: Es la región geométrica ocupada por los cuerpos. La posición en el espacio se determina respecto a un cierto sistema geométrico de referencia mediante medidas lineales y angulares. [(10)]

TRAYECTORIAS DE UN CUERPO: La línea que une las diferentes posiciones sucesivas de un cuerpo, o sea el camino que este recorre en el espacio se llama trayectoria. [(10)]

El movimiento se clasifica según su trayectoria Fig. (I.1.0a):
Movimiento Rectilíneo: Cuando su trayectoria es una recta.
Movimiento Curvilíneo: Cuando la trayectoria es una curva. [(10)]

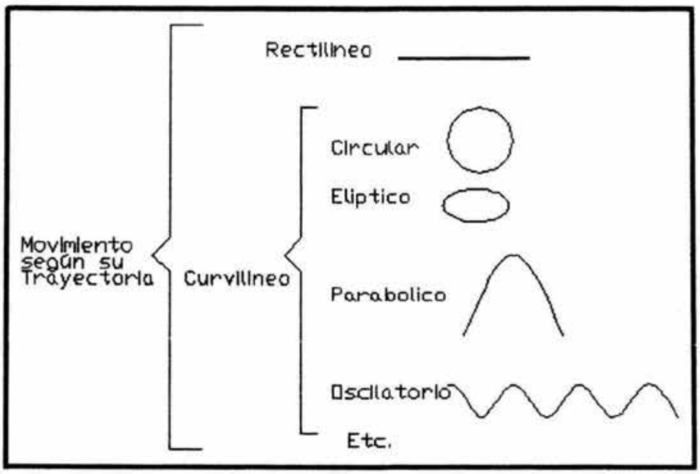


Fig. (I.1.0a) Esquema del Movimiento según su trayectoria

El movimiento también puede clasificarse por su forma en:

Uniforme: Cuando recorre distancias iguales en tiempos iguales.

Acelerado: Cuando en tiempos iguales recorre distancias diferentes. (10)

Otra forma de clasificar el movimiento es según el marco de referencia:

Absoluto: Cuando se compara el movimiento de un cuerpo respecto al otro que se considera fijo (en reposo).

Relativo: Cuando se compara el movimiento de un cuerpo con respecto a otro que también se mueve. (10)

DEFINICIÓN DE CINEMÁTICA: "Estudio de la geometría del movimiento en forma grafica y /o analítica de los cuerpos de manera tal que no importa las causas que lo producen".

Las cantidades cinemáticas empleadas para su estudio en este trabajo son:

$$\left\{\begin{array}{l}\rightarrow \text{Desplazamiento lineal.}\\ \rightarrow \text{Velocidad lineal.}\\ \rightarrow \text{Aceleración lineal.}\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l}\rightarrow \text{Desplazamiento angular.}\\ \rightarrow \text{Velocidad angular.}\\ \rightarrow \text{Aceleración angular.}\end{array}\right.$$

() Referencia de bibliografía.

1.2 CINEMÁTICA DE LAS PARTÍCULAS.

CINEMÁTICA DE LA PARTÍCULA

- Movimiento de una Partícula
  - Desplazamiento
  - Velocidad
  - Aceleración
- Movimiento de un segmento de recta
  - Desplazamiento angular
  - Velocidad angular
  - Aceleración angular

1.3 ECUACIONES CINEMÁTICAS DE LA PARTÍCULA.

Posición: La posición instantánea de una partícula que describe alguna trayectoria se describe mediante el vector de posición *r* definido desde el origen de un sistema de coordenadas fijo hasta la partícula Fig. (I.1.1) La posición de la partícula también puede especificarse mediante sus coordenadas o especificando la distancia *s*, medida sobre la trayectoria que describe, y desde un punto fijo sobre ella hasta la partícula.

Estas cantidades se expresan como funciones del tiempo. Es indispensable definir una convención de signo consistente que permita interpretar físicamente las soluciones algebraicas que se obtengan de los análisis. Las direcciones positivas son las de los ejes de coordenadas cuando éstos se especifican.

El desplazamiento lineal, Δr, de una partícula durante el intervalo de tiempo es el cambio de su posición durante el intervalo de tiempo considerado. Por tanto si la partícula de la Fig. (I.1.1) se mueve desde la posición P hasta la posición P' durante cierto intervalo de tiempo, su desplazamiento es.

$$\Delta r = r' - r \qquad (1.1.1)$$

Sus unidades del desplazamiento en el SI son metros.

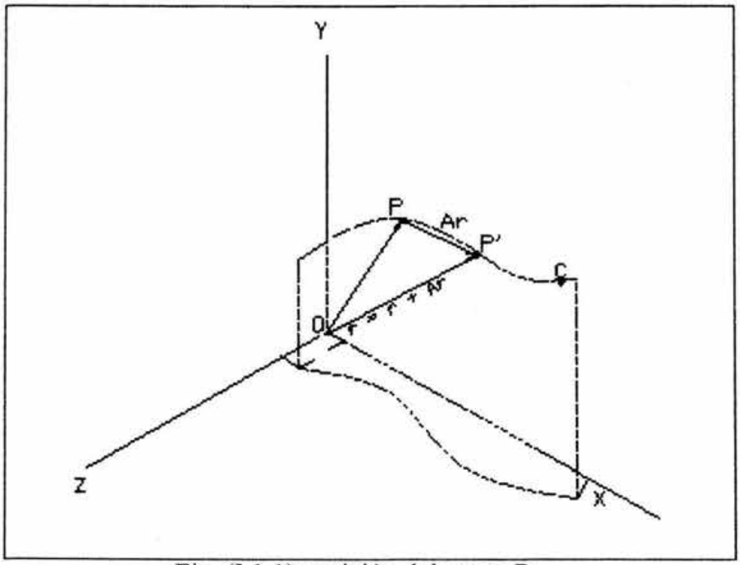


Fig. (I.1.1) posición del punto P.

La velocidad media: de un punto o partícula P durante un intervalo de tiempo entre t y (t + Δt), se desplaza o cambia de posición de r a (r + Δr), es decir su cambio de posición por unidad de tiempo.

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \qquad (1.1.1)$$

() Referencia de bibliografía.

Velocidad promedio: Es la suma de todas las velocidades medias entre el número de ellas.

$$[\vec{v}_p] = \frac{\vec{v}_{0\to1} + \vec{v}_{1\to2} + \vec{v}_{2\to3} + \vec{v}_{3\to4} + \vec{v}_{4\to5} + \ldots + \vec{v}_{m\to n}}{n} \qquad (1.1.1a)$$

La velocidad instantánea: ($\vec{v}$) del punto P en el instante t es el límite de la velocidad media cuando el incremento de tiempo tiende a cero como límite. Es decir.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} \qquad (1.1.2)$$

La magnitud de la velocidad, $\left|\vec{v}\right|$ se denomina rapidez = $\frac{\text{distancia recorrida}}{\text{tiempo}}$

Sus unidades en el SI son: Metros por segundo (m / s).

Se da una representación en la Fig. (I.1.2) de la velocidad y el incremento de esta.

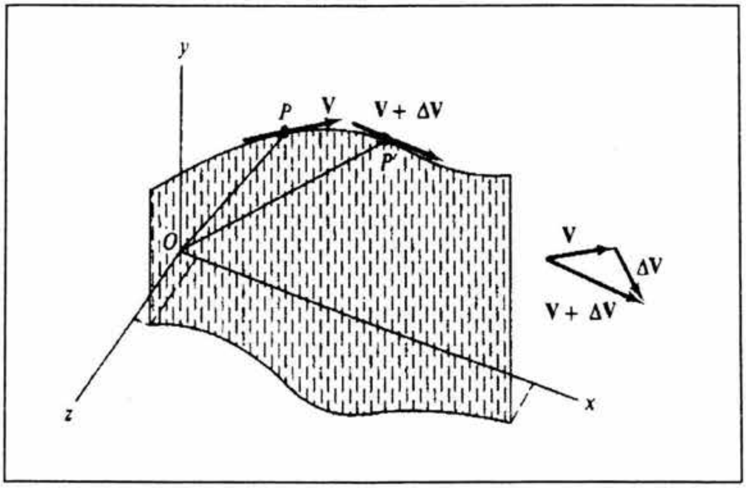


Fig. (I.1.2) Velocidad del punto P

La aceleración media: de un punto P durante el intervalo de tiempo entre t y $(t + \Delta t)$, durante el cual su velocidad varia de $\vec{v}$ y $\left(\vec{v} + \Delta\vec{v}\right)$ es decir: el cambio promedio por unidad de tiempo de la velocidad del punto P es:

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \qquad (1.1.3)$$

Representando esta en una pendiente por medio de un objeto que baja y sube como en la Fig. (I.1.2a)

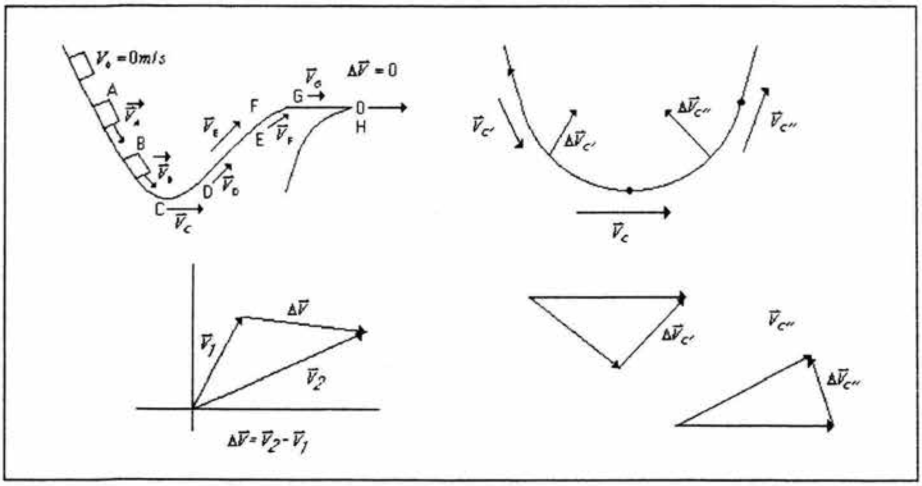


Fig. (I.1.2a) Cambio de velocidad de un cuerpo.

La aceleración instantánea del punto P en el instante t es el límite de la aceleración media cuando el incremento de tiempo tiende a cero como limite.

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$$

Tambien (1.1.4)

$$\vec{a} = \frac{(d\vec{v})}{(dt)}\frac{d\vec{r}}{d\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt}\frac{d\vec{v}}{dr} = \vec{v}\frac{d\vec{v}}{d\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}$$

Donde sus unidades en el SI son metros por segundo al cuadrado (m / s^2). En algunas ocasiones las aceleraciones se expresan en términos de g, donde g es la aceleración de la gravedad (9.81 m / s^2 aproximadamente) en la superficie de la tierra.

1.4 ECUACIONES DE LA VELOCIDAD Y LA POSICIÓN EN FUNCIÓN DEL TIEMPO.

Si se conoce la abscisa x de una partícula que se mueve sobre el eje Ox en función del tiempo, puede hallarse la velocidad por derivación, partir de la ecuación $\vec{v} = dx/dt$. Una segunda derivación da la aceleración, ya que $\vec{a} = d\vec{v}/dt$. Considerando el proceso inverso: dada la aceleración, hallar la velocidad y la posición. Esto se hace por los métodos de integración de cálculo integral. Daremos primeramente la integral indefinida y posteriormente la integral definida.

Supongamos que se conoce la aceleración a (t) en función del tiempo. Entonces, dado que $d\vec{v}/dt = \vec{a}(t)$, separando variables:

$$d\vec{v} = \vec{a}\,(t)dt, \quad I\ ntegrando$$

$$\int d\vec{v} = \int \vec{a}\,(t)dt$$

$$\vec{v} = \int \vec{a}(t)dt + C_1 \qquad [1.1.5]$$

Donde C_1 es una constante de integración cuyo valor puede determinarse si se conoce la velocidad en un cierto instante. Generalmente se expresa C_1 en función de la velocidad $\vec{v}_O$ cuando $t = 0$. Una vez calculada la integral anterior, obtenemos la velocidad $\vec{v}(t)$ en función del tiempo. Entonces, puesto que $dx/dt = \vec{v}(t)$, separando variables.

() Referencia de bibliografía.

$$dx = \vec{v}(t)dt,$$

$$\int dx = \int \vec{v}(t)dt$$

$$x = \int \vec{v}(t)dt + C_2 \qquad [1.1.6]$$

Donde C_2 es una constante de integración cuyo valor puede determinarse si se conoce la abscisa en un cierto instante. Es costumbre expresar C_2 en función de la abscisa $\boldsymbol{x_0}$ para $\boldsymbol{t = 0}$. Si la aceleración viene expresada en función de $\boldsymbol{x}$, se utilizará la ecuación:

$$\vec{v}\frac{d\vec{v}}{dx} = \vec{a}(x)$$

Entonces

$$\int \vec{v}\, d\vec{v} = \int \vec{a}(x)dx, \qquad [1.1.7]$$

$$\frac{\vec{v}^2}{2} = \int \vec{a}(x)dx + C_3.$$

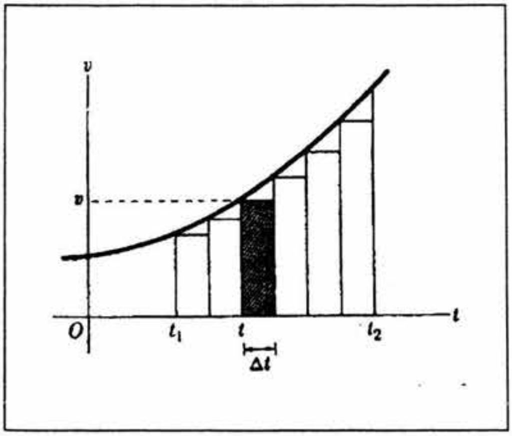


Fig. (I.1.3) Gráfica velocidad – tiempo.

Consideremos ahora la integral definida. Dividamos el área comprendida entre la curva velocidad-tiempo y las ordenadas correspondientes a $\boldsymbol{t_1}$ y $\boldsymbol{t_2}$ Fig. (I.1.3)

En franjas estrechas rectangulares de anchura Δt. la ordenada correspondiente a un instante cualquiera t es igual a la velocidad instantánea v en dicho instante. Si la velocidad permanece constante durante el intervalo Δt. El desplazamiento Δx en este intervalo de tiempo sería $v\ \Delta t$. Pero esto es el área de la zona rayada, ya que su altura es v y su base Δt. La suma de las áreas de todos esos rectángulos, desde t_1 a t_2, es igual, al desplazamiento total x_2-x_1 en este intervalo de tiempo:

$$x_2 - x_1 \approx \sum \vec{v}\,\Delta t.$$

Cuanto menores son los intervalos de tiempo, Δt. tanto más aproximado es el valor $(v\Delta t)$ al desplazamiento. En el límite, cuando Δt. Tiende a cero, la suma de las áreas se hace igual al total del área situada bajo la curva, o sea, al desplazamiento total $(x_2 - x_1)$ el limite de la suma de las áreas es la integral definida desde t_1 a t_2; así,

$$x_2 - x_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}\,dt \qquad [1.1.8]$$

El desplazamiento en cualquier intervalo de tiempo es igual, por tanto al área comprendida entre la curva velocidad – tiempo y el eje de el tiempo, limitada por las ordenadas correspondientes a los instantes inicial y final del intervalo.
Del mismo modo, el área que se encuentra bajo la gráfica aceleración – tiempo puede dividirse en franjas verticales de altura a y anchura Δt. Si la aceleración permaneciese constante, la variación de velocidad Δv en el intervalo Δt será igual a $(\bar{a}\Delta t)$, que es el área de una franja rectangular. La variación total $v_2 - v_1$ de la velocidad, en un intervalo de tiempo comprendido entre t_1 y t_2, es aproximadamente igual a la suma de todas las áreas:

$$\vec{v}_2 - \vec{v}_1 \approx \sum \vec{a}\,\Delta t.$$

En el límite, cuando Δt tiende a cero:

$$\vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{a}\,dt \qquad [1.1.9]$$

La variación de velocidad en un intervalo de tiempo cualquiera es igual, por tanto, al área comprendida entre la curva aceleración – tiempo y el eje del tiempo, limitada por las ordenadas correspondientes a los instantes inicial y final del intervalo.

1.5 ECUACIONES DEL MOVIMIENTO ANGULAR

MOVIMIENTO ANGULAR

Un segmento de recta posee movimiento angular cuando cambia el ángulo que forma con respecto a un eje de referencia fijo. Fig. (I.1.4) Considérese en un instante en particular el Segmento de recta, se puede definir por sus coordenadas cartesianas x y y. No obstante, la posición se pude designar por sus coordenadas polares r y θ, donde r es la distancia del punto de origen del sistema coordenado, al punto final del segmento de recta, y θ se mide por convención en el sentido contrario de lasa manecillas del reloj, a partir del eje horizontal del sistema coordenado a la línea de acción del segmento de recta. La relación que existe entre el conjunto de coordenadas es la siguiente.

$$x = \mathrm{r} \cos \theta, \; y = \mathrm{r} \operatorname{sen} \theta, \; r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

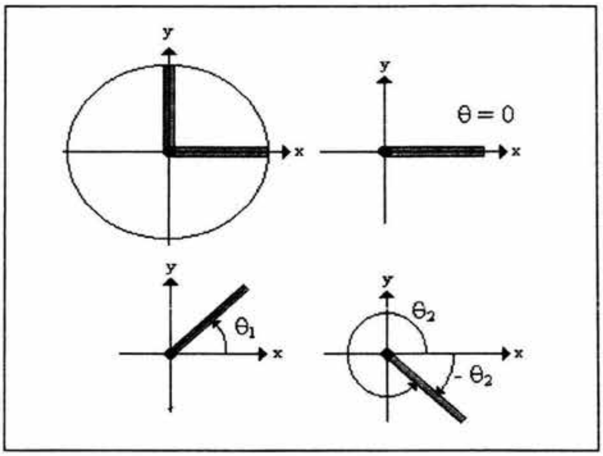


Fig. (I.1.4) Posiciones Angulares

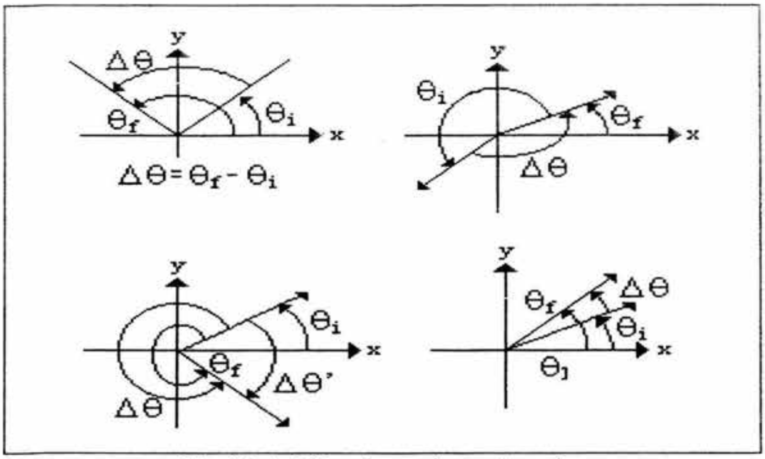


Fig. (I.1.4a) Desplazamiento Angular

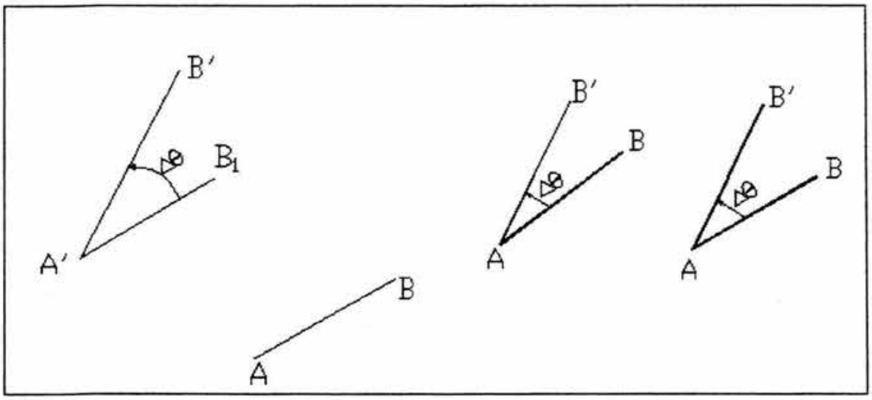


Fig. (I.1.4b) Segmento de recta

Consideremos un segmento de recta $\overline{AB}$, que considerado como un vector de posición, a partir de un punto de referencia A, hacia cualquier otro punto B, con la misma pendiente, o como una sucesión de partículas de un cuerpo a lo largo del segmento de recta $\overline{AB}$. Fig. (I.1.4b)

La posición angular del segmento de recta $\overline{AB}$ la define en cualquier instante, el ángulo (θ), la función de posición angular es una función escalar del tiempo es decir:

$$\theta = f(t) \qquad (1.2.0)$$

Donde θ tiene como unidades los grados o también, el radian.

Definimos ahora Δθ como el desplazamiento angular del segmento de recta $\overline{AB}$ durante el intervalo de tiempo Δt es decir, como una cantidad vectorial con magnitud, dirección y sentido, como sigue:

Magnitud: Del segmento $\overline{AB}$ representado por:

$\left\|\vec{A}\right\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, en donde $\langle a_1, a_2 \rangle$ son las componentes del vector $\vec{A}$

Dirección: Si el vector es distinto de cero, es el ángulo θ que se mide desde el lado positivo del eje x en sentido contrario al del reloj hasta la representación de posición del vector. Fig. (I.1.4),

Sentido: El avance del eje de acuerdo con la regla de la mano derecha.

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 \qquad (1.2.1)$$

Si ω es función del tiempo t, el ángulo barrido en un tiempo Δt, dado de la forma siguiente:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d\theta}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \omega(t) dt \qquad (1.2.2)$$

La velocidad angular tiene dimensiones de ángulo por unidad de tiempo, las unidades mas comunes en que es expresada la velocidad angular es radianes por segundo (rad/s) revoluciones por minuto (rev. / min.) etc.

() Referencia de bibliografía.

De donde, el radián es la medida del ángulo subtendido por un arco cuya longitud es el radio del círculo. Puesto que la circunferencia de un círculo de radio R es un arco de longitud ($2\pi R$), habrá (2π) radianes en una revolución de 360°. Si θ es el ángulo que subtiende en el centro de un círculo de radio R, un arco de longitud S, su valor expresado en radianes es:

$$\theta = \frac{s}{R} \tag{1.2.3}$$

De este modo, θ es la razón entre dos longitudes y, por tanto, es una cantidad adimensional, esto es, un número puro.

La relación entre radianes y grados es:

$$\begin{aligned} 360^{\circ} &= 2\pi\,\mathrm{rad} \\ 1\,\mathrm{rad} &= \frac{360^{\circ}}{2\pi} = 57.3\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} \end{aligned} \tag{1.2.4}$$

Velocidad angular media: Si en el instante t_1, la posición angular del punto es θ_1, y en el instante t_2 es θ_2 la velocidad angular media esta dada por:

$$\vec{\omega} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \tag{1.2.5}$$

La velocidad angular ($\vec{\omega}$), de un segmento de recta se define como el cambio por unidad de tiempo de su posición angular. La velocidad angular es una cantidad vectorial libre que puede representarse mediante un vector perpendicular al plano del movimiento de un segmento de recta y su sentido lo define la regla de la mano derecha Fig.(I.1.5)

Cuando el movimiento de un segmento de recta es coplanar, la magnitud de la velocidad angular es:

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \tag{1.2.6}$$

() Referencia de bibliografía.

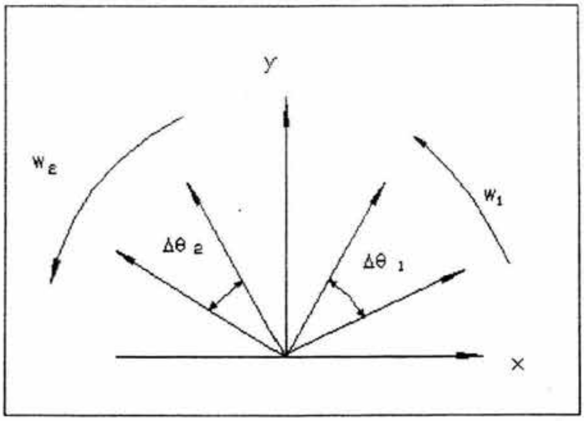


Fig. (I.1.5) Velocidad angular

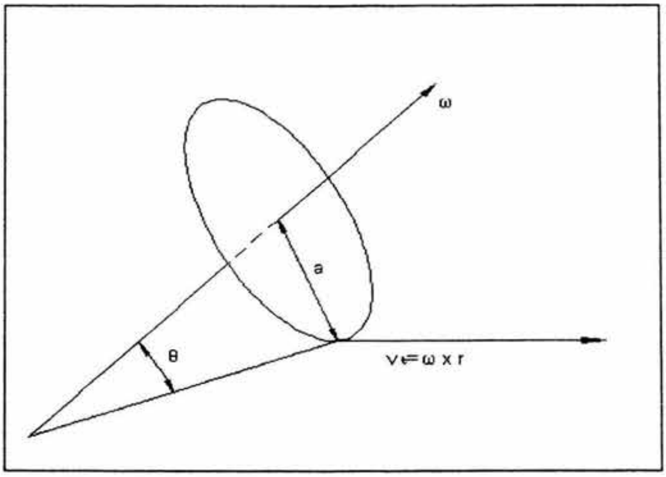


Fig. (I.1.6) Vector velocidad angular.

La aceleración angular ($\vec{\alpha}$), de una línea se define como el cambio por unidad de tiempo de su velocidad angular. Como es una cantidad vectorial, puede cambiar en magnitud y en dirección. Como en este tema solo se considera el movimiento coplanar, la velocidad angular puede cambiar únicamente en magnitud y sentido.

La magnitud de la aceleración angular de una línea es:

$$\vec{\alpha} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta} \qquad (1.2.7)$$

La aceleración angular de una línea puede representarse mediante un vector libre, y en el caso del movimiento coplanar de una línea, el vector es perpendicular al plano del movimiento y su sentido se define mediante la regla de la mano derecha.

Cuando el movimiento es coplanar la aceleración angular se representa mediante un arco dirigido en sentido horario u antihorario según corresponda.

La aceleración angular tiene unidades comunes como son:

Radianes por segundo al cuadrado (Rad. /s^2)

Revoluciones por segundo al cuadrado (Rev. /s^2)

ACELERACIÓN ANGULAR MEDIA.

Si en el instante t_1, la velocidad angular es ω_1, y en el instante t_2, es ω_2, entonces la aceleración angular media es:

$$\vec{\alpha} = \frac{\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t} \qquad (1.2.8)$$

VELOCIDAD TANGENCIAL

Cuando la posición angular, de un punto que se mueve en un círculo de radio r, cambia en $\Delta\theta$, el punto recorre, a lo largo del círculo, una distancia r $\Delta\theta$, tal como se indica en la figura (I.1.4), (nótese que r $\Delta\theta$ es la longitud del arco sólo si $\Delta\theta$ se expresa en

() Referencia de bibliografía.

radianes). De este modo, la velocidad tangencial, esto es, la velocidad del punto tangente al círculo, está dado por:

$$\vec{v}_t = \lim_{\Delta t \to 0} r \frac{\Delta \phi}{\Delta t}$$

Como $\lim_{\Delta t \to 0} r \frac{\Delta \phi}{\Delta t} = \vec{\omega}$, la velocidad tangencial es

$$\vec{v}_t = r\vec{\omega} \qquad (1.2.9)$$

Donde $\vec{\omega}$ se expresa en Rad. /seg.

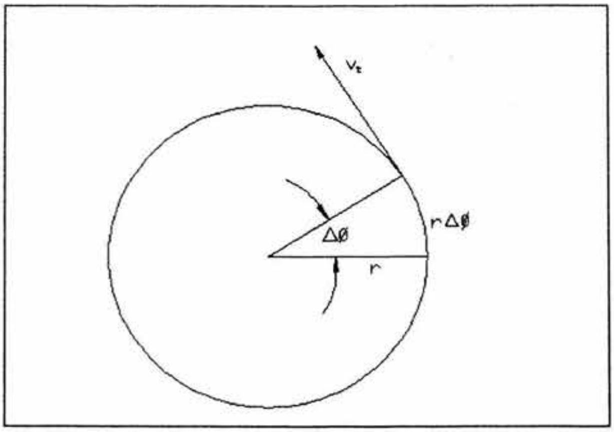


Fig. (I.1.7) Velocidad Tangencial

En la figura (I.1.7), la velocidad angular se representa por un vector $\vec{\omega}$ perpendicular al plano de movimiento. La dirección $\vec{\omega}$ de se obtiene mediante la regla de la mano derecha.

Por la ecuación (1.2.3), la velocidad tangencial $\vec{v}_t$ de un punto que se mueve en un círculo de radio a es:

$$\vec{v}_t = a\vec{\omega}$$

() Referencia de bibliografía.

En términos del vector de posición r, el radio a está dado por:

$$a = r\, sen\phi$$

Así,

$$\vec{v}_t = \vec{\omega}\, r\, sen\phi$$

En función de los vectores ω y r, el vector velocidad tangencial v_t tomara la forma.

$$\vec{v}_t = \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad (1.3.0)$$

Y su magnitud es:

$$\vec{v}_t = \left|\vec{v}_t\right| = \left|\vec{\omega} \times \vec{r}\right| = \vec{\omega}\, r\, sen\theta \qquad (1.3.1)$$

Siendo la dirección de $\omega \times r$ la correspondiente a v_t.

() Referencia de bibliografía.

1.5 Ejercicios referentes al capitulo I.

Ejercicio 1.

La magnitud de la aceleración de una partícula cuyo movimiento es rectilíneo se expresa como: $a = 12t - 8$

Donde a y t se expresan en metros por segundo por segundo, respectivamente. Cuando t = 0 la velocidad inicial es de 20 m/s y $x_0 = -10$ m

Calcule:

(a) La velocidad del punto cuando t = 2s

(b) La posición del punto a t = 2s.

Solución:

La solución a este ejercicio corresponde a un caso en donde la aceleración es función del tiempo, de tal manera que utilizaremos la expresión de la formula (1.1.4)

(a) la velocidad del punto en t = 2s

Tenemos que es un movimiento en una dimensión por lo que:

$$\vec{A} = \vec{a}\,\hat{i}$$

De nuestra ecuación (1.1.4) definida en el capitulo 1 la cual expresa que:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Separando variables obtenemos, la diferencial de la velocidad.

$$d\vec{v} = \vec{a}\,dt$$

() Referencia de bibliografía.

Integrando esta expresión con respecto al tiempo

$$\int d\vec{v} = \int \vec{a}\, dt$$

$$\vec{v} = \int \vec{a}\, dt + C_1$$

Sustituyendo el valor de la aceleración en nuestra ecuación anterior

$$\vec{v} = \int (12t - 8)dt + C_1,$$

Desarrollando.

$$\vec{v} = \int 12tdt - \int 8dt + C_1,$$

Integrando obtenemos.

$$\vec{v} = 6t^2 - 8t + C_1$$

Ahora evaluando y sustituyendo $t = 0$, en la ecuación anterior, obtenemos la velocidad en $t = 0$:

Calculando el valor de la constante con el valor correspondiente del tiempo despejando y evaluando obtenemos.

$$\vec{v}(0) = 6(0)^2 - 8(0) + C_1 = 20\left(m/s\right)$$

$$C_1 = v(0) = 20\left(m/s\right)$$

Ahora si en $t = 2s$, sustituimos y evaluamos en la ecuación de velocidad.

$$\vec{v}(2) = 6(2)^2 - 8(2) + 20$$

$$\vec{v}(2) = 24 - 16 + 20$$

$$\vec{v}(2) = 28\left(m/s\right)$$

(b) Para calcular la posición del punto en t = 2s, consideraremos la ecuación (1.1.2)

De la definición de velocidad instantánea la cual esta dice:

$\vec{v} = \frac{dx}{dt}$, Separando variables de nuestra ecuación de velocidad obtenemos la diferencial de la posición.

$dx = \vec{v}\,dt$, Integrando esta expresión;

$$\int dx = \int \vec{v}\,dt$$

$x = \int \vec{v}\,dt + C_2$, Se obtiene la ecuación de posición.

Sustituyendo la velocidad en función del tiempo, la cual expresa que:

$$\vec{v} = 6t^2 - 8t + 20$$

Por lo que sustituyendo lo anterior en nuestra ecuación de posición.

$$x = \int (6t^2 - 8t + 20)dt + C_2$$

Desarrollando la integral

$$x = \int 6t^2 dt - \int 8t\,dt + \int 20\,dt + C_2$$

Integrando.

$$x = 2t^3 - 4t^2 + 20t + C_2$$

Si en t = 0, x = -10, sustituyendo estos valores y evaluando en nuestra ecuación de posición anteriormente obtenida tenemos:

$$x(0) = 2(0)^3 - 4(0)^2 + 20(0) + C_2$$

( ) Referencia de bibliografía.

Despejando la constante y evaluando:

$$x(0) = C_2 = -10 \text{ (m)}$$

Ahora si en el intervalo de tiempo t = 2s, lo sustituimos y evaluamos en nuestra ecuación de posición:

$$x(2) = 2(2)^3 - 4(2)^2 + 20(2) - 10$$
$$x(2) = 16 - 16 + 40 - 10$$
$$x(2) = 30(\text{m})$$

Ejercicio 2.

Un punto se mueve en el espacio cuya posición esta definida por:

$$r = 3t^2\,\hat{i} - 5t^3\,\hat{j} + 10t\,\hat{k}$$

Donde r esta dado en metros y t en segundos.

(a) Calcule la posición del punto en $t = 2s$

(b) El desplazamiento del punto en el intervalo de $t = 2s$ y $t = 4s$

(c) La velocidad media en el intervalo de $t = 2s$ y $t = 4s$

(d) La velocidad instantánea en $t = 2s$

(e) La aceleración instantánea en $t = 2s$

La solución a este ejercicio implica una posición variable en el tiempo de tal manera que para calcular las funciones de velocidad y aceleración de esta partícula utilizaremos las ecuaciones (1.1.0),(1.1.1), (1.1.2) y (1.1.4) respectivamente

(a) Para este enciso donde el valor de tiempo $t = 2s$, lo sustituimos y evaluamos en nuestra ecuación de posición que expresada.

$$r = 3t^2\,\hat{i} - 5t^3\,\hat{j} + 10t\,\hat{k}, \qquad \text{Evaluando.}$$

$$r(2) = 3(2)^2\,\hat{i} - 5(2)^3\,\hat{j} + 10(2)\hat{k}$$

Por lo que la posición en $(t = 2s)$ es:

$$r(2) = 12\hat{i} - 40\hat{j} + 20\hat{k} \quad (m)$$

(b) El desplazamiento en el intervalo de tiempo en t = 4s, sustituimos y evaluamos en la ecuación de posición de la misma manera que en el paso anterior.

$$r(4) = 3(4)^2\,\hat{\imath} - 5(4)^3\,\hat{\jmath} + 10(4)\,\hat{k}$$

Realizando la operación obtenemos la posición en t = 4s.

$$r(4) = 48\,\hat{\imath} - 320\,\hat{\jmath} + 40\hat{k} \quad \text{(m)}$$

Para obtener el desplazamiento durante el intervalo de tiempo de t = 2s y t = 4s, utilizaremos la formula (1.1.0) la cual esta expresada de la siguiente manera:

$$\Delta r = r' - r$$

Por lo que el desplazamiento en t = 2s y t = 4s

$$r(4) = 48\,\hat{\imath} - 320\,\hat{\jmath} + 40\hat{k} \quad \text{(m)}$$

$$\Delta r\,(t) = r_{(4)} - r_{(2)}$$

Sustituyendo y evaluando, de las ecuaciones de posición obtenidas respectivamente para cada posición en el intervalo de tiempo.

$$\Delta r\,(t) = \left(48\,\hat{\imath} - 320\,\hat{\jmath} + 40\hat{k}\right) - \left(12\hat{\imath} - 40\hat{\jmath} + 20\hat{k}\right) \quad \text{(m)}$$

$$\Delta r = \left[(48 - 12)\hat{\imath} + (-320 + 40)\hat{\jmath} + (40 - 20)\hat{k}\right]$$

Realizando la operación obtenemos el desplazamiento:

$$\Delta r = 36\hat{i} - 280\hat{j} + 20\hat{k} \quad (m)$$

(c) La velocidad media en el intervalo de tiempo de t = 2s y t = 4s la obtendremos

De la ecuación (1.1.1) que esta dada por la expresión siguiente, $v_m = \frac{\Delta r}{\Delta t}$,

Sustituyendo y evaluando el desplazamiento en el intervalo de tiempo de la ecuación anteriormente obtenida.

$$v_m = \frac{36\hat{i} - 280\hat{j} + 20\hat{k}}{4-2}$$

Realizando la operación obtenemos:

$$v_m = 18\hat{i} - 140\hat{j} + 10\hat{k} \quad \left(\frac{m}{s}\right)$$

(d) La velocidad instantánea en t = 2s esta dada por la ecuación (1.1.2) la cual se expresa de la siguiente manera:

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt},$$

Utilizando esta ecuación y sustituyendo el valor de posición obtenemos.

$$\vec{v} = \frac{d\left(3t^2\,\hat{i} - 5t^3\,\hat{j} + 10t\,\hat{k}\right)}{dt}$$

Derivando la ecuación anterior.

$$\vec{v} = 6t\,\hat{i} - 15t^2\,\hat{j} + 10\hat{k}$$

() Referencia de bibliografía.

Ahora usando el valor t = 2s, y sustituyendo en la ecuación anterior.

$$\vec{v}(2) = 6(2)\hat{i} - 15(2)^2\hat{j} + 10\hat{k}$$

Evaluando esta expresión.

$$\vec{v}(2) = 12\hat{i} - 60\hat{j} + 10\hat{k} \quad \left(\frac{m}{s}\right)$$

(e) Usando la ecuación (1.1.4) para aceleración instantánea que esta dada de la siguiente manera:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt},$$

Como la velocidad esta dada por la expresión:

$$\vec{v} = 6t\hat{i} - 15t^2\hat{j} + 10\hat{k}$$

Sustituyendo el valor de velocidad en la ecuación (1.1.4)

$$\vec{a} = \frac{d(6t\,\hat{i} - 15t^2\,\hat{j} + 10\hat{k})}{dt}$$

Derivando esta expresión

$$\vec{a} = 6\hat{i} - 30t\,\hat{j} \quad \left(m/_{s^2}\right)$$

Ahora evaluando esta ecuación en t = 2s

$$\vec{a}(2) = 6\hat{i} - 30(2)\hat{j}$$

Realizando la operación obtenemos :

$$\vec{a}(2) = 6\hat{i} - 60\hat{j} \quad \left(m/_{s^2} \right)$$

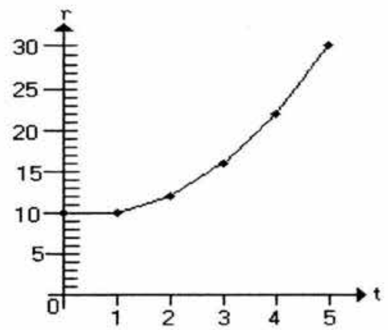
Ejercicio 3:

Para la siguiente ecuación r: (t^2 – t + 10) m, obtener su representación gráfica, velocidad media, velocidad instantánea, velocidad promedio.

Solución: Utilizando valores determinados para graficar la ecuación y ver su comportamiento de la trayectoria que sigue, obtenemos:

a) Método gráfico.

r	t
10	0
10	1
12	2
16	3
22	4
30	5



b) Solución de la velocidad media.

Utilizando la ecuación (1.1.1)

$$\Delta\vec{r} = [\vec{r}(t = 5s)] - [\vec{r}(t = 4s)] \quad \Rightarrow \quad \Delta\vec{r} = \ (t^2 - t + 10)\ \mathrm{m}$$

$$\Delta\vec{r} = [(5)^2 - 5 + 10] - [(4)^2 - 4 + 10](\ \mathrm{m}\ ) \quad \Rightarrow \quad \Delta\vec{r} = 30\ \mathrm{m} - 22\ \mathrm{m}$$

$$\Delta\vec{r} = 8\ \mathrm{m}$$

Sustituyendo valores en nuestra ecuación de velocidad media obtenemos:

$$\underline{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \underline{v} = \frac{8m}{5s - 4s} \quad \Rightarrow \quad \underline{v} = 8(m/s)$$

$\vec{r}(t = 4.5s) = (\ t^2 - t + 10\ )\ \text{m} \quad \Rightarrow \quad \vec{r} = [\ (4.5)^2 - 4.5 + 10\ ]\ \text{m} \quad \vec{r} = 25.75\ \text{m}$

$\vec{r}(t = 4.4s) = (\ t^2 - t + 10\ )\ \text{m} \quad \Rightarrow \quad \vec{r} = [\ (4.4)^2 - 4.4 + 10\ ]\ \text{m} \quad \vec{r} = 24.96\ \text{m}$

$\vec{r}(t = 4.6s) = (\ t^2 - t + 10\ )\ \text{m} \quad \Rightarrow \quad \vec{r} = [\ (4.6)^2 - 4.6 + 10\ ]\ \text{m} \quad \vec{r} = 26.56\ \text{m}$

$\Delta\vec{r} = [\vec{r}(t = 4.6s)] - [\vec{r}(t = 4.4s)] \Rightarrow \quad \Delta\vec{r} = [(4.6)^2 - 4.6 + 10] - [(4.4)^2 - 4.4 + 10](\ \text{m}\ )$

$\Delta\vec{r} = (26.56 - 24.96)m \quad \Rightarrow \quad \Delta\vec{r} = 1.6m$

Si el incremento del tiempo es:

$$\Delta t = (t_0 - t) \quad \Rightarrow \quad \Delta t = (4.6 - 4.4)s \quad \Rightarrow \quad \Delta t = 0.2s$$

Nuestra velocidad media es:

$$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \underline{v} = \frac{1.6m}{0.2s} \quad \Rightarrow \quad \underline{v} = 8m/s$$

Evaluando para *t = 4.55 s y t = 4.45 s:*

$\vec{r}(t = 4.55s) = (\ t^2 - t + 10\ )\ \text{m} \quad \Rightarrow \quad \vec{r} = [\ (4.55)^2 - 4.55 + 10\ ]\ \text{m} \quad \Rightarrow \quad \vec{r} = 26.1525\ \text{m}$

$\vec{r}(t = 4.45s) = (\ t^2 - t + 10\ )\ \text{m} \quad \Rightarrow \quad \vec{r} = [\ (4.45)^2 - 4.45 + 10\ ]\ \text{m} \quad \Rightarrow \quad \vec{r} = 25.3325\ \text{m}$

$\Delta\vec{r} = [\vec{r}(t = 4.55s)] - [\vec{r}(t = 4.45s)] \quad \Rightarrow \quad \Delta\vec{r} = (25.79 - 25.71)m \quad \Rightarrow \quad \Delta\vec{r} = 0.08m$

Ahora en un incremento de tiempo:

$$\Delta t = (t_0 - t) \quad \Rightarrow \quad \Delta t = (4.55 - 4.45)s \quad \Rightarrow \quad \Delta t = 0.1s$$

La velocidad media es:

$$\underline{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \underline{v} = \frac{0.8m}{0.1s} \quad \Rightarrow \quad \underline{v} = 8m/s$$

Evaluando para *t = 4.505 s y t = 4.495 s:*

$\vec{r}(t=4.505s) = (\,t^2 - t + 10\,)\,m \;\Rightarrow\; \vec{r} = [\,(4.505)^2 - 4.505 + 10\,]\,m \;\Rightarrow\; \vec{r} = 25.79\ m$

$\vec{r}(t=4.495s) = (\,t^2 - t + 10\,)\,m \;\Rightarrow\; \vec{r} = [\,(4.495)^2 - 4.495 + 10\,]\,m \;\Rightarrow\; \vec{r} = 25.71\ m$

$\Delta\vec{r} = [\vec{r}(t=4.505s)] - [\vec{r}(t=4.495s)] \;\Rightarrow\; \Delta\vec{r} = (25.79 - 25.71)m \;\Rightarrow\; \Delta\vec{r} = 0.08m$

El incremento de tiempo es:

$$\Delta t = (t_0 - t) \;\Rightarrow\; \Delta t = (4.505 - 4.495)s \;\Rightarrow\; \Delta t = 0.01s$$

La velocidad media es:

$$\underline{\vec{v}} = \frac{\Delta\vec{r}}{dt} \;\Rightarrow\; \underline{\vec{v}} = \frac{0.08m}{0.01s} \;\Rightarrow\; \underline{\vec{v}} = 8m/s$$

c) Solución de la velocidad instantánea: Utilizando la ecuación (1.1.2)

$$\vec{v} = \frac{dt^2}{dt} + \frac{d(-t)}{dt} + \frac{d10}{dt} \;\Rightarrow\; \vec{v} = 2t - 1$$

Evaluando para: $t = 1s$ y $t = 2s$

$$\vec{v}(t=0s) = 2(0) - 1 \;\Rightarrow\; \vec{v} = -1(m/s)$$

$$\vec{v}(t=1s) = 2(1) - 1 \;\Rightarrow\; \vec{v} = 1(m/s)$$

$$\vec{v}(t=2s) = 2(2) - 1 \;\Rightarrow\; \vec{v} = 3(m/s)$$

d) Solución de la velocidad promedio: Utilizando la ecuación (1.1.1a)

$$\underline{\vec{v}_{0\to1}} = \frac{\vec{r}(t=1s) - \vec{r}(t=0s)}{t_1 - t_0}$$

$\vec{r}(t=1s) = (\,1\,)^2 - 1 + 10\,(\,m\,) \qquad \vec{r} = 10\ m$

$\vec{r}(t=0s) = (\,0\,)^2 - 0 + 10\,(\,m\,) \qquad \vec{r} = 10\ m$

$$\underline{\bar{v}_{0\to5}} = \frac{(10-10)m}{(1-0)s} \qquad \underline{\bar{v}_{0\to5}} = \frac{(0)m}{(1)s} \qquad \underline{\bar{v}_{0\to1}} = 0m/s$$

Evaluando para $t = 2s$ *y* $t = 1s$

$$\underline{\bar{v}_{1\to2}} = \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t} \qquad \underline{\bar{v}_{1\to2}} = \frac{\bar{r}(t=2s)-\bar{r}(t=1s)}{t_2-t_1}$$

$$\bar{r}(t=2s) = (2)^2 - 2 + 10\ (\mathrm{m}) \qquad \bar{r} = 12\ \mathrm{m}$$

$$\bar{r}(t=1s) = (1)^2 - 1 + 10\ (\mathrm{m}) \qquad \bar{r} = 10\ \mathrm{m}$$

$$\underline{\bar{v}_{1\to2}} = \frac{(12-10)m}{(2-1)s} \qquad \underline{\bar{v}_{0\to5}} = \frac{(2)m}{(1)s} \qquad \underline{\bar{v}_{1\to2}} = 2m/s$$

Evaluando para $t = 3s$ *y* $t = 2s$

$$\underline{\bar{v}_{2\to3}} = \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t} \qquad \underline{\bar{v}_{2\to3}} = \frac{\bar{r}(t=3s)-\bar{r}(t=2s)}{t_3-t_2}$$

$$\bar{r}(t=3s) = (3)^2 - 3 + 10\ (\mathrm{m}) \qquad \bar{r} = 16\ \mathrm{m}$$

$$\bar{r}(t=2s) = (2)^2 - 2 + 10\ (\mathrm{m}) \qquad \bar{r} = 12\ \mathrm{m}$$

$$\underline{\bar{v}_{3\to2}} = \frac{(16-12)m}{(3-2)s} \qquad \underline{\bar{v}_{3\to2}} = \frac{(4)m}{(1)s} \qquad \underline{\bar{v}_{3\to2}} = 4m/s$$

Evaluando para $t = 4s$ *y* $t = 3s$

$$\underline{\bar{v}_{3\to4}} = \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t} \qquad \underline{\bar{v}_{3\to4}} = \frac{\bar{r}(t=4s)-\bar{r}(t=3s)}{t_4-t_3}$$

$$\bar{r}(t=3s) = (\ 3\ )^2 - 3 + 10\ (\ \mathrm{m}\ ) \qquad \bar{r} = 16\ \mathrm{m}$$

$$\bar{r}(t=4s) = (\ 4\ )^2 - 4 + 10\ (\ \mathrm{m}\ ) \qquad \bar{r} = 22\ \mathrm{m}$$

$$\underline{\bar{v}_{3\to4}} = \frac{(22-16)m}{(4-3)s} \qquad \underline{\bar{v}_{4\to3}} = \frac{(6)m}{(1)s} \qquad \underline{\bar{v}_{3\to2}} = 6m/s$$

Evaluando para *t =5s y t =4s*

$$\underline{\bar{v}_{4\to5}} = \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t} \qquad \underline{\bar{v}_{4\to5}} = \frac{\bar{r}(t=5s)-\bar{r}(t=4s)}{t_5-t_4}$$

$$\bar{r}(t=5s) = (\ 5\ )^2 - 5 + 10\ (\ \mathrm{m}\ ) \qquad \bar{r} = 30\ \mathrm{m}$$

$$\bar{r}(t=4s) = (\ 4\ )^2 - 4 + 10\ (\ \mathrm{m}\ ) \qquad \bar{r} = 22\ \mathrm{m}$$

$$\underline{\bar{v}_{4\to5}} = \frac{(30-22)m}{(5-4)s} \qquad \underline{\bar{v}_{5\to4}} = \frac{(8)m}{(1)s} \qquad \underline{\bar{v}_{3\to2}} = 8m/s$$

Calculamos la velocidad promedio:

$$[v] = \frac{v_{0\to1}+v_{1\to2}+v_{2\to3}+v_{3\to4}+v_{4\to5}}{5} \Rightarrow [v] = \frac{0+2(m/s)+4(m/s)+6(m/s)+8(m/s)}{5}$$

$$[v] = \frac{20}{5} \qquad [v] = 4(m/s)$$

Para t = 2.99s y t =3.01s :

$$\bar{r}(t = 2.99s) = (\ 2.99\ )^2 - 2.99 + 10\ (\ m\ ) \qquad \bar{r} = 15.9501\ m$$

$$\bar{r}(t = 3.01s) = (\ 3.01\ )^2 - 3.01 + 10\ (\ m\ ) \qquad \bar{r} = 16.0501\ m$$

$$\Delta\bar{r} = [\bar{r}(t = 3.01s)] - [\bar{r}(t = 2.99s)] \quad \Rightarrow \quad \Delta\bar{r} = (15.9501 - 16.0501)m \qquad \Rightarrow \quad \Delta\bar{r} = 0.1m$$

$$\Delta t = 3.01 - 2.99 \Rightarrow \quad \Delta t = 0.02s \quad ; \quad \bar{v} = \frac{\Delta r}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \bar{v} = \frac{0.1(m)}{0.02(s)} \quad \Rightarrow \qquad \bar{v} = 5(m/s)$$

Si lo anterior lo plantemos en una tabla, obtenemos:

t	r	$\vec{v}$	[v]
0.0	10		-1
0.5		0	
1.0	10		1
1.5		2	
2.0	12		3
2.5		4	
3.0	16		5

() Referencia de bibliografía.

Ejercicio 4.

Un segmento de recta gira en el plano *xy*, cuya posición angular esta definida por:

$$\theta = (3t^3 - 5t^2)\hat{k}$$

Donde θ se mide en radianes y t en segundos.

Calcule:

A) La posición angular del segmento de recta en t = 2s

B) El desplazamiento angular de la recta en el intervalo entre t = 2s y t = 4s

C) La velocidad angular instantánea en t = 2s

D) La aceleración angular instantánea en t = 2s.

La solución a este problema esta dado en función del tiempo por lo que será variable la posición con respecto a este.

Solución:

a) La posición al evaluarse en t = 2s será:

Al sustituir en nuestra ecuación de posición nos da que:

$$\theta\,(2) = \left[\left(3(2)^3\right) - \left(5(2)^2\right)\right]\hat{k}$$
$$\theta(2) = (24 - 20)\hat{k}$$

Por lo que la posición en θ en t = 2s es:

$$\theta(2) = 4\hat{k}\ \text{(Rad.)}$$

b) El desplazamiento entre t = 2s y t = 4s

En el paso anterior evaluamos la posición de θ en t = 2s, por lo que evaluando de la misma manera para t = 4s, en nuestra ecuación de posición:

$$\theta(4) = [3(4)^3 - 5(4)^2]\hat{k}$$
$$\theta(4) = (192 - 80)\hat{k}$$

La posición en t = 4s es:

$$\theta(4) = 112\hat{k} \text{ [Rad.]}$$

Ahora evaluamos el desplazamiento que hay con respecto al tiempo en t = 2s y t = 4s

$$\Delta\theta = \theta_4 - \theta_2 = (112 - 4)\hat{k}(rad.)$$
$$\Delta\theta = 108\,\hat{k}\,(rad)$$

c) La velocidad angular instantánea en t = 2s

De la ecuación (1.2.1) la cual expresa que:

$\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$, Por lo que derivando la ecuación, y evaluando

$$\omega = \frac{d(3t^3 - 5t^2)}{dt} = \omega = (9t^2 - 10t)\hat{k}$$
$$\omega(2) = [9(2)^2 - 10(2)]\hat{k} = \omega(2) = (36 - 20)\hat{k}$$
$$\omega(2) = 16\,\hat{k}\,[\text{Rad}/\text{s}.]$$

d) La aceleración instantánea en t = 2s la obtenemos. Usando la ecuación (1.2.2) la cual esta dada de la forma siguiente:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

, Derivando la ecuación de velocidad angular tenemos.

$$\alpha = \frac{d\left(9t^2 - 10t\right)}{dt}$$

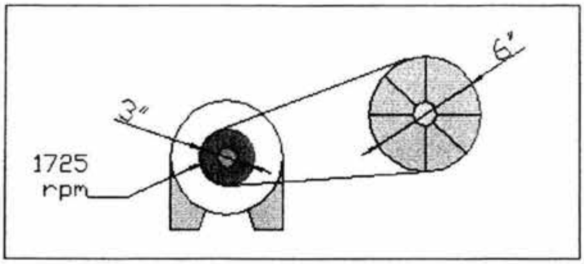
$$\alpha = \left(18t - 10\right)\hat{k}$$

$$\alpha\,(2) = \left[18(2) - 10\right]\hat{k}$$, Evaluando en t = 2 s

$$\alpha\,(2) = 26\ \hat{k}\ \left[\mathrm{Rad}/_{s^2}\right]$$

() Referencia de bibliografía.

Ejercicio 5, Resuelto por programa de computadora.



Se tiene una transmisión por banda, el motor gira a 1725 rpm y tiene una polea de 3 pulgadas de diámetro, si la polea inducida tiene 6 in de diámetro., calcule:

a) – La velocidad tangencial de las poleas.

b) – La velocidad angular de la polea inducida.

Solución:

Primeramente realizamos la transformación de (rev. / min.) A (rad / s).

$1\,rev = 2\pi\,rad$, por lo que realizando el calculo.

$$\frac{1725\dfrac{rev}{\min}}{2\pi} = 274.54\frac{rad}{\min}\times\frac{1\min}{60s} = 4.57\frac{rad}{s} = \omega_{MOTOR}$$

De la relación.

$$\frac{\text{Vel.motor}}{\text{Vel.}\,\textit{polea}\text{carga}} = \frac{\text{Diam.polea carga}}{\text{Diam. polea motor}} = \frac{4.57\dfrac{rad}{s}}{Vpc} = \frac{6in}{3in}$$

La velocidad angular de la polea inducida es:

$$\omega\text{pc} = \frac{3\text{ in}}{6\text{ in}}4.57\ \text{rad}/\text{s} = 2.28\ \text{rad}/\text{s}$$

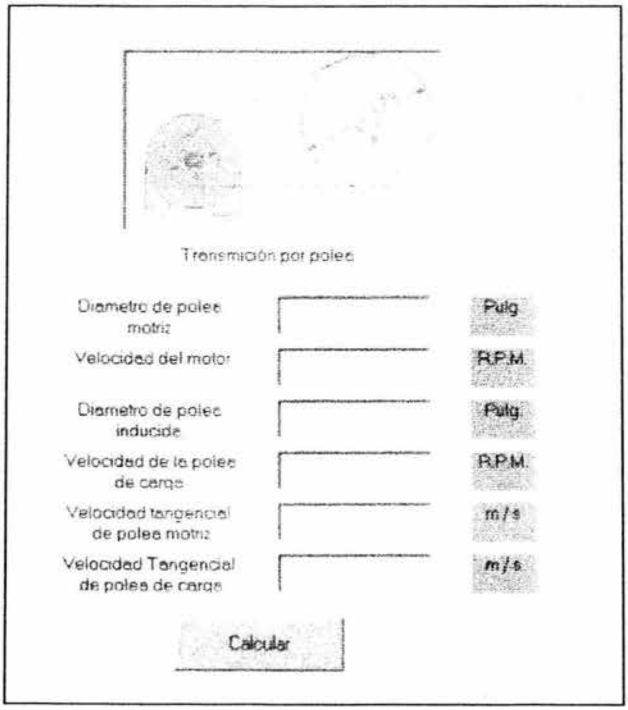
() Referencia de bibliografía.

De la ecuación (1.2.4) la velocidad tangencial es:

$$v_{t\ motor} = a\ \omega = 3 * 4.57 = 13.71\ in / s$$

$$v_{t\ carga} = a\ \omega = 6 * 2.28 = 13.71\ in / s$$

Realizaremos el programa de este ejercicio en Visual Basic por ser sencillo y de fácil comprensión. Primeramente se define los botones a usar, esto es los datos dados en el problema y el número de incógnitas a calcular, para posteriormente enlazarlos por medio de lenguaje de programación. Como se muestra a continuación.



Cuadro de formulario del programa

```
'PROGRAMA PARA VELOCIDAD TANGENCIAL

    Option Explicit
        Dim Dm As Double, Nm As Double
        Dim Dpi As Double, Nc As Double
        Dim Wa As Double, Wb As Double
        Dim Vpa As Double, Vpb As Double

'REALIZACIÓN DE LOS CALCULOS

    Private Sub Calculo_Click()
        Dm = Diapolmotor.Text
        Nm = Revmotor.Text
        Dpi = Diapolcarga.Text
        Const pi = 3.1416
        Nc = Nm * Dm / Dpi
        Wa = Nm / (2 * pi * 60) * 0.0254
        Vpa = (Dm / 2) * Wa
        Wb = Nc / (2 * pi * 60) * 0.0254
        Vpb = (Dpi / 2) * Wb
        Revpolcarga.Text = Format(Nc, "#,##0.000")
        Velpolea_A.Text = Format(Vpa, "#,##0.000")
        Velpolea_B.Text = Format(Vpb, "#,##0.000")
   End Sub
```

CAPITULO 2

MOVIMIENTO EN SISTEMAS DE REFERENCIA INERCIAL

2.0 MOVIMIENTO EN SISTEMAS DE REFERENCIAS INERCIALES.

Un sistema de referencia inercial: se define como aquel respecto al cual un cuerpo
permanece en reposo o se mueve uniformemente en línea recta cuando no actúa sobre él ninguna fuerza, o bien es nula la resultante de fuerzas aplicadas.
Análisis del movimiento rectilíneo a partir de valores conocidos de la velocidad o la aceleración.

2.1 MOVIMIENTO RECTILÍNEO.

Unos de los tipos más sencillos de movimiento lineal, de aplicación mas sencilla y al mismo tiempo más frecuente, el movimiento rectilíneo. En este caso la trayectoria es una recta. Antes de generalizar el estudio del movimiento rectilíneo consideraremos casos particulares:

2.2 MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME.

Este movimiento es en línea recta que se encuentra con frecuencia en aplicaciones prácticas. En este movimiento la aceleración de la partícula es cero para cualquier valor de ***t***, por consiguiente, la velocidad es constante y la ecuación (1.1.2) se transforma en:

$$\frac{dx}{dt} = \vec{v} = \text{constante}$$

La coordenada de posición x se obtiene integrando esta ecuación:

$$\int_{x_0}^{x} dx = \vec{v} \int_0^t dt$$

$$x - x_0 = \vec{v}\, t$$

$$x = x_0 + \vec{v}\, t \qquad [2.0.0]$$

Donde x_0 es el valor inicial de x, Esta ecuación se aplica si se sabe que la velocidad es constante.

2.3 MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME ACELERADO.

En este tipo de movimiento la aceleración es constante, esto es, aquel en el cual la velocidad se mantiene uniforme en el tiempo durante el movimiento.

De la ecuación [1.1.4] se transforma en:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} = \text{constante}.$$

De donde se obtiene la velocidad de la partícula integrando la ecuación anterior:

$$\int_{v_0}^{v} d\vec{v} = \vec{a}\int_0^t dt$$

$$\vec{v} - \vec{v}_0 = \vec{a}\,t$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}\,t \qquad [2.0.1]$$

Esta ecuación relaciona la velocidad, la aceleración y el tiempo, por lo que se usa cuando se quiere conocer la velocidad a un valor dado de $\boldsymbol{t}$. Donde $\boldsymbol{v_0}$ es la velocidad inicial.

Sustituyendo este valor de $\boldsymbol{v}$ en (1.1.2) escribimos:

$$\frac{dx}{dt} = \vec{v}_0 + \vec{a}\,t$$

Sea $\boldsymbol{x_0}$ el valor inicial de $\boldsymbol{x}$ e integrando:

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t \left(\vec{v}_0 + \vec{a}\, t \right) dt$$

$$x - x_0 = \vec{v}_0\, t + \frac{1}{2}\vec{a}\, t^2$$

$$x = x_0 + \vec{v}_0\, t + \frac{1}{2}\vec{a}\, t^2 \qquad [2.0.2]$$

Esta ecuación relaciona la posición y el tiempo.

También podemos usar la ecuación [1.1.4] y escribir:

$$\vec{v}\frac{d\vec{v}}{dx} = \vec{a} = \text{constante}$$

$$\vec{v}\, d\vec{v} = \vec{a}\, dx$$

Integrando ambos miembros encontramos que:

$$\int_{v_0}^{v} \vec{v}\, d\vec{v} = \vec{a} \int_{x_0}^{x} dx$$

$$\frac{1}{2}\left(\vec{v}^{\,2} - \vec{v}_0^{\,2} \right) = \vec{a}(x - x_0)$$

$$\vec{v}^{\,2} = \vec{v}_0^{\,2} + 2\vec{a}(x - x_0) \qquad [2.0.3]$$

Esta ecuación relaciona la velocidad y la posición.

Las tres ecuaciones anteriores nos proporcionan relaciones útiles entre la coordenada de posición, la velocidad y el tiempo. Por lo que se usan cuando la aceleración es constante.

Una de las aplicaciones es el movimiento de un cuerpo en caída libre y tiro vertical.

() Referencia de bibliografía.

2.4 CAÍDA LIBRE.

Usando el plano x-y, de donde una partícula que se deja caer Fig. (II.1.0), obtendremos sus ecuaciones de movimiento.

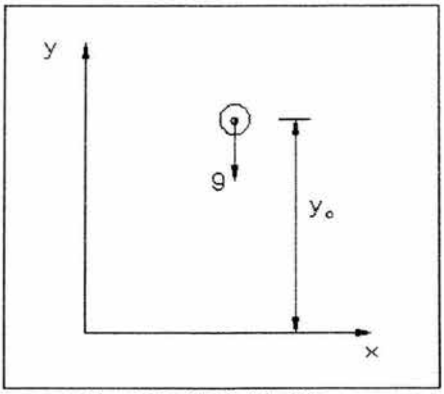


Fig. (II.1.0) Caída libre.

Donde la aceleración de la partícula es:

$$a = -g \qquad (2.0.4)$$

La posición en cualquier tiempo la obtenemos de la ecuación (2.0.2) y sustituimos las literales de posición esto es:

$\frac{dy}{dt} = \vec{v}_o + \vec{a}\,t$, separando variables e integrando.

$\int dy = \int \left(\vec{v}_o + \vec{a}\,t \right) dt$, resolviendo

$$y = y_o - \frac{1}{2} g t^2 \qquad (2.0.5)$$

La velocidad de la partícula en función del tiempo esta dada por:

$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}$, separando variables e integrando.

$\int d\vec{v} = \int \vec{a}\,dt$, integrando.

$$v_y = -g\,t \qquad (2.0.6)$$

Y la velocidad en función de la posición esta expresada:

Si de la ecuación (1.1.4) $\vec{v}\frac{d\vec{v}}{dy} = \vec{a}$, Separando variables e integrando.

$$\int_{v_o}^{v} \vec{v}\,d\vec{v} = \vec{a}\int_{y_o}^{y} dy$$

$$\frac{1}{2}\left(\vec{v}^{\,2} - \vec{v}_o^{\,2}\right) = \vec{a}(y - y_o)$$

$$\vec{v}^{\,2} = -2\vec{a}\,\Delta y$$

$$\vec{v}_y^{\,2} = -2g(y - y_o) \qquad (2.0.7)$$

2.5 TIRO HORIZONTAL

En este tipo de movimiento analizaremos sus ecuaciones de movimiento. De la figura (II.1.1)

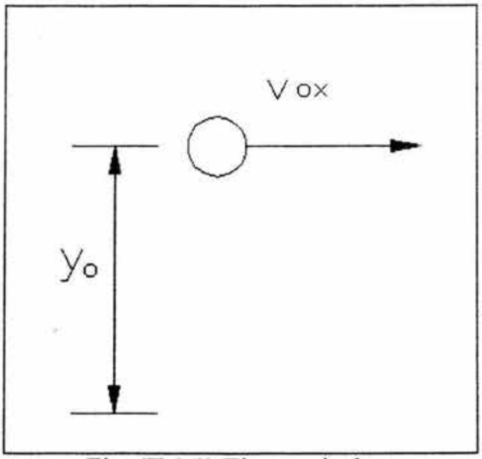


Fig. (II.1.1) Tiro vertical.

La ecuación para la posición en cualquier tiempo esta dada de la ecuación (2.0.2):

$$x = x_o + \vec{v}_{ox}(t - t_o) + \frac{1}{2}\vec{a}_x(t - t_o)^2 \qquad (2.0.8)$$

La velocidad en función del tiempo se expresa de la ecuación (2.0.1):

$$\vec{v}_x = \vec{v}_{ox} + \vec{a}_x(t - t_o) \qquad (2.0.9)$$

Y la velocidad en función de la posición es de la forma siguiente de la ecuación (2.0.3):

$$\vec{v}_x^{\,2} = \vec{v}_{ox}^{\,2} + 2\vec{a}_x(x - x_o) \qquad (2.1.0)$$

() Referencia de bibliografía.

2.6 TIRO VERTICAL

En este caso la partícula primeramente sube una altura máxima y después cae, por lo que es un caso de caída libre, lo ilustraremos por medio de una sencilla figura. (II.1.2)

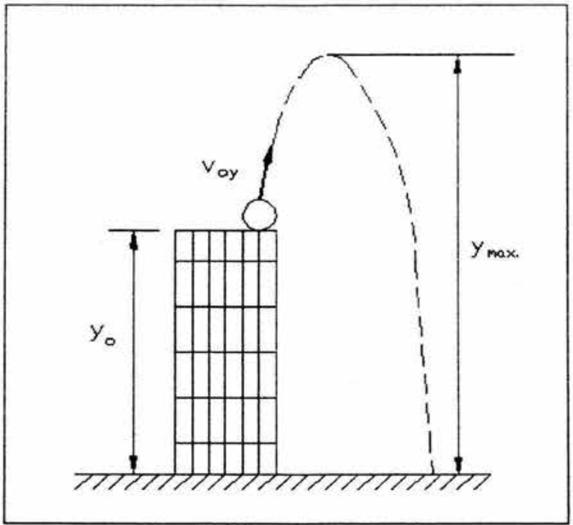


Fig. (II.1.2) Tiro vertical.

De donde las ecuaciones de movimiento están dadas de la siguiente manera.

Para la posición de la partícula en cualquier tiempo:

$$y = y_o + \vec{v}_{oy} + \frac{1}{2}\vec{a}_y t^2 \qquad (2.1.1)$$

En la ecuación de velocidad dada en función del tiempo, tenemos:

$$\vec{v}_y = \vec{v}_{oy} + \vec{a}_y t \qquad (2.1.2)$$

Y para la velocidad dada en función de la posición:

() Referencia de bibliografía.

$$\vec{v}_y^{\,2} = \vec{v}_{oy}^{\,2} + 2\vec{a}_y \,\Delta y \qquad (2.1.3)$$

Cuando $y_{\max.}$ la velocidad $v_y^2 = 0$. Por lo que en nuestra ecuación de velocidad.

$$0 = \vec{v}_{oy}^{\,2} - 2g(y_{\max.} - y_o)$$

$$\vec{v}_{oy} = \sqrt{2g\left(y_{\max.} - y_o\right)} \qquad (2.1.4)$$

2.7 MOVIMIENTO RELATIVO O DEPENDIENTE

Cuando dos o más partículas se encuentran simultáneamente en movimiento, sus movimientos pueden ser independientes, si las partículas se encuentran interconectadas mediante cuerdas barras, resortes, el movimiento de una partícula afectara a las otras. En la Fig. [II.1.3] se ilustran varios casos de este tipo de movimiento, en donde cada partícula o cuerpo de ellos posee movimiento rectilíneo, y están interconectados mediante cuerdas o cables.

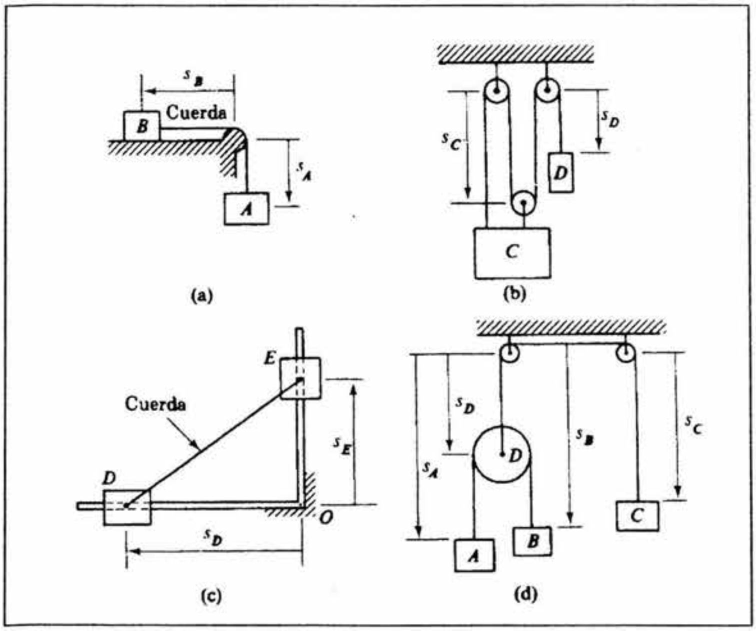


Fig. (II.1.3) Movimiento relativo movimiento de varias partículas.

Estos ejemplos ilustran la posición de cada uno de los cuerpos que se relaciona con la de otros cuerpos mediante la cuerda o cable de interconexión.

Las relaciones entre las velocidades y aceleraciones de los cuerpos interconectados se obtiene mediante diferenciación con respecto al tiempo de las expresiones que relacionan la posición de los cuerpos. Para interpretar la posición de cada cuerpo es indispensable definir o adoptar una convención de signos, como en la Fig. (II.1.) en donde la posición de cada cuerpo, la flecha identifica la dirección positiva. En estos ejemplos la posición se mide a partir de una referencia fija en lugar de un origen móvil. Como en la Fig. (d) en donde la posición de A se define desde las poleas fijas y no de la polea móvil D.

Las relaciones de velocidad y aceleración de la Fig. (b)

Obtenemos primeramente la relación de longitudes que conectan al cuerpo C y D.

$$L = 3\,S_C + S_D + \sum L_P$$

Donde $\sum L_p$, es la sumatoria de las longitudes de la cuerda arrollada en cada una de las poleas considerando que son del mismo diámetro, puesto que es constante, la expresaremos como:

$$3\,S_C + S_D = L - \sum L_P = L'$$

$$3S_C + S_D = L'$$

Donde L' es una constante. Diferenciando la ecuación con respecto al tiempo para obtener la ecuación de velocidad, esto es:

$$3\frac{ds_C}{dt} + \frac{ds_D}{dt} = 0$$

$$3v_C + v_D = 0$$

Lo que indica que si v_C es positiva (hacia abajo), v_D es negativa (hacia arriba)

Si volvemos a diferenciar la ecuación anterior obtenemos la aceleración:

$$3\frac{dv_C}{dt} + \frac{dv_D}{dt} = 0$$

$$3a_C + a_D = 0$$

2.8 ECUACIONES DEL MOVIMIENTO RELATIVO.

Para la solución de algunos problemas relativos al movimiento de una partícula, es conveniente analizar dicha partícula con respecto a otra partícula también móvil (que usualmente se hace coincidir con el origen de un marco de referencia móvil) en un marco de referencia considerado fijo.

Para el estudio del movimiento relativo utilizaremos los conceptos cinemáticos absolutos y relativos, o sea con un marco de referencia fijo o uno móvil según sea el caso.

Posición, velocidad y aceleración absolutas:

Considérese una partícula P y una O', en movimiento y ésta última coincidiendo con un marco de referencia que se traslada, como en la figura (II.1.4) mostrada.

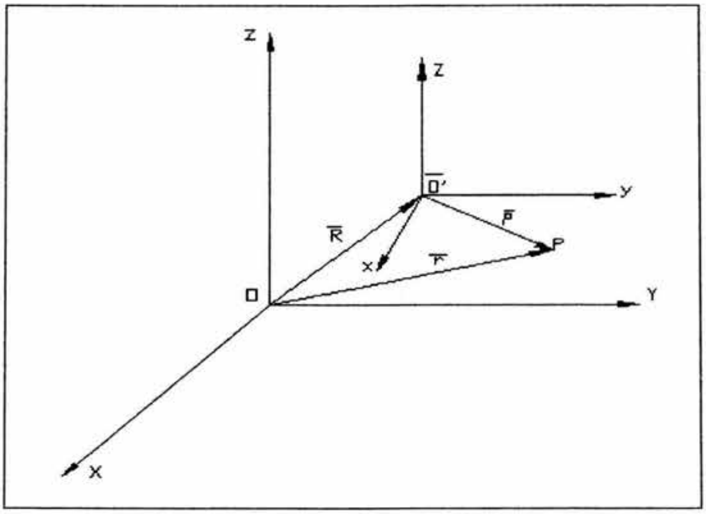


Fig. (II.1.4) Movimiento relativo

De acuerdo con la figura (II.1.4), la posición absoluta de la partícula P, referida en el marco de referencia fijo XYZ, queda expresada por la siguiente expresión cinemática.

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{\rho} \tag{2.1.5}$$

A partir de esta ecuación se obtienen la velocidad y la aceleración absolutas por derivaciones sucesivas, de la siguiente forma:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{R}} + \dot{\vec{\rho}} \tag{2.1.6}$$

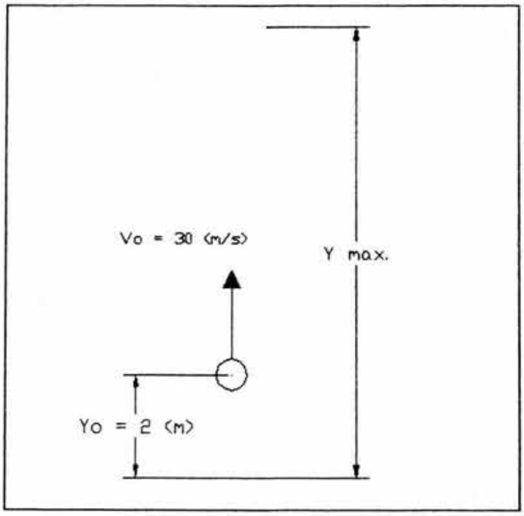
$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{R}} + \ddot{\vec{\rho}} \tag{2.1.7}$$

En estas ecuaciones empleamos la notación Newtoniana para indicar la primera y segunda derivada con respecto al tiempo.

2.9 Ejercicios referentes al capitulo II.

Ejercicio 1:

Se tiene un cuerpo que se lanza hacia arriba con una velocidad inicial de 30 m/s, si la persona que lanza tiene una estatura de 2 m. De altura, determine el tiempo de vuelo de la altura máxima y la altura que alcanza.



De las ecuaciones de tiro vertical. (2.1.2) y (2.1.3)

Usando la ecuación (2.1.2) que relaciona la velocidad con el tiempo.

$$v_y = v_{Oy} - g\,t; \;\Rightarrow\; 0 = 30\left(m/s\right) - (9.81)t$$

$$t = \left(\frac{-30\,m/s}{-9.81\,m/s^2}\right) = 3.058\ s$$

De la ecuación (2.1.8) de donde relacionamos la velocidad con la posición, obtenemos:

$v_y^2 = v_{oy}^2 - 2g(y - y_o)$; De donde

$v_y^2 = 0$, ya que se encuentra en su altura máxima.

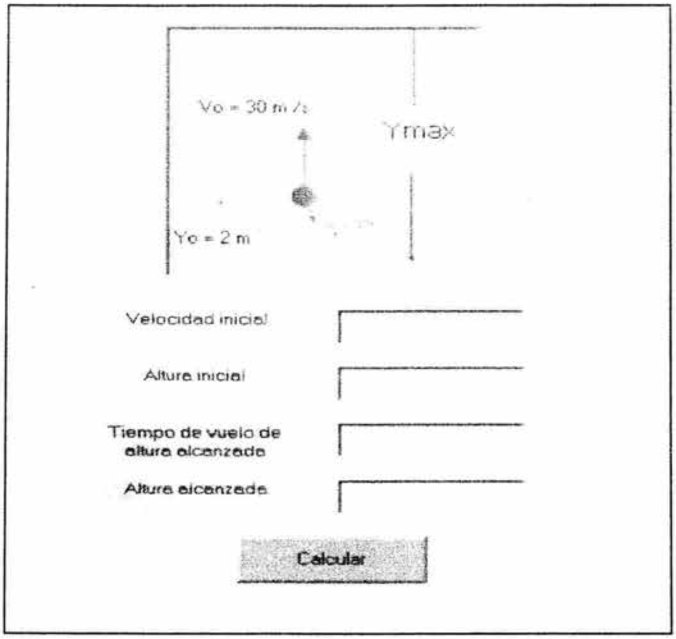
$$v_{oy}^2 = 2g(y - y_o), \quad \Rightarrow \quad \left(30\frac{m}{s}\right)^2 = 2\left(9.81\frac{m}{s}\right)(y - 2m)$$

$$y = \frac{900\left(m^2/s^2\right)}{19.62\left(m/s^2\right)} + 2m$$

$$y = 45.87m + 2m, \qquad \Rightarrow \qquad y = 45.87m$$

Que es la altura máxima que alcanza el cuerpo al ser lanzado.

Programa hecho por computadora

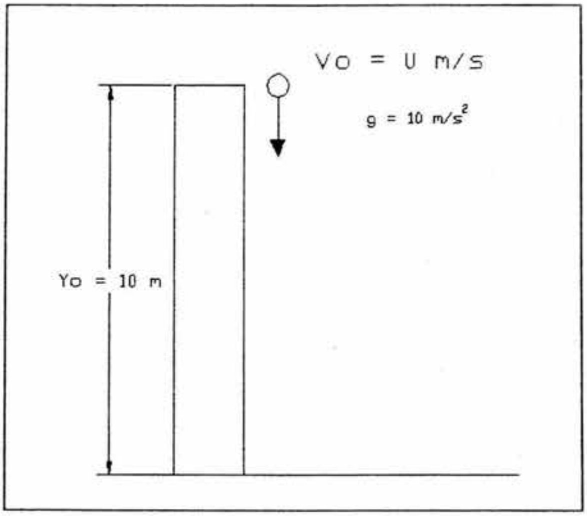


Formulario de Tiro vertical

```
'PROGRAMA DE TIRO VERTICAL
    Private Sub Calcular_Click()
        Dim Vo As Double, Yo As Double
        Dim Tiempo As Double, Ymax As Double
        Const g = 9.81
    'CALCULOS DEL PROBLEMA
        Vo = Velinicial.Text
        Yo = Altinicial.Text
        Tiempo = Vo / g
        Ymax = (Vo ^ 2 / (2 * g)) + Yo
        Time.Text = Format(Tiempo, "#,##0.00")
        Altmaxima.Text = Format(Ymax, "#,##0.00")
    End Sub
```

Ejercicio 2.

Se deja caer un objeto desde una altura de 10 m. con una velocidad inicial = 0, con una aceleración de la gravedad = 10 m/s^2., tal y como se ilustra en la figura.
Calcule el tiempo que tarda en tocar el piso y la velocidad, con la que llega.



Solución:
Se trata de un movimiento de caída libre. Por lo que usando las ecuaciones(2.0.5), (2.0.6) y (2.0.7).

Usaremos la ecuación (2.0.5) para calcular el tiempo de caída.

$y = y_o - \frac{1}{2} g t^2$, despejando el tiempo de la manera siguiente.

$$y - y_o = -\frac{1}{2} g t^2, \Rightarrow \quad -2(y - y_o) = g t^2, \Rightarrow -\frac{2(y - y_o)}{g} = t^2$$

De donde obtenemos la ecuación del tiempo.

$$t=\sqrt{\frac{-2(y-y_o)}{g}}$$, Sustituyendo los datos dados

$$t=\sqrt{\frac{-2(0-10)}{10}}, \quad \Rightarrow \quad t=\sqrt{2}\ s$$

Para calcular, la velocidad con la que toca el piso, procederemos a utilizar la ecuación (2.1.2)

$v_y^2=-2g(y-y_o)$, de donde despejaremos la velocidad,

$v_y=\sqrt{-2g(y-y_o)}$, Sustituyendo en la ecuación los valores dados.

$$v_y=\sqrt{-2(10)(0-10)}, \quad \Rightarrow \quad v_y=\sqrt{200\,m^2/s^2}=-14.142\ \left(m/s\right)$$

Donde el signo menos indica que va hacia abajo.

También obtenemos el mismo resultado, con la ecuación (2.1.1)

$v_y=-gt$, sustituyendo datos. $v_y=-10(\sqrt{2})=-14.142\,m/s$

Ejercicio 3.

El cuerpo A del sistema representado en la Fig.(A) posee una velocidad constante de 0.5 m. / s, hacia la derecha. Calcule el desplazamiento del cuerpo B relativo al cuerpo A durante un intervalo de 3 s.

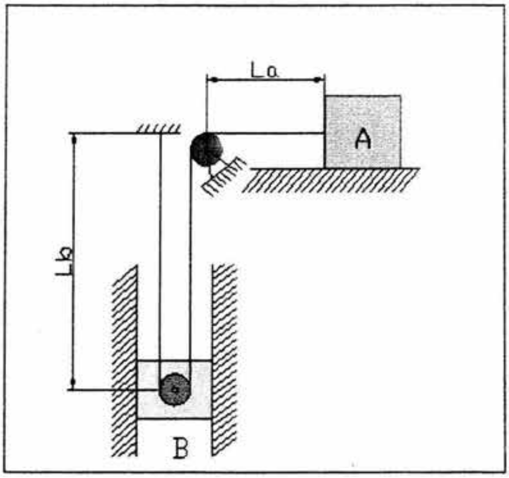


Fig. (A) Ejercicio de velocidad relativa

Solución:

Primeramente haremos la suma de la longitud de la cuerda que une a los cuerpos A y B

$$L = 2\,Lb + La + \Sigma Lp$$

Donde Lp = longitud de la cuerda en las poleas, considerando que son del mismo tamaño las poleas.

$$2Lb + La = L - \Sigma Lp = L'$$

$$2\,Lb + La = L'$$, Donde L' es constante.

Derivando esta Ecuación con respecto al tiempo, obtenemos las ecuaciones de velocidad.

() Referencia de bibliografía.

$$2\frac{dLb}{dt}+\frac{dLa}{dt}=0$$

$$2\ v_b + v_a = 0,\ \text{como } v_a = 0.5\ (m\ /\ s)$$

$$-v_b = v_a\ /\ 2 = 0.5\ /\ 2 = 0.25\ (m\ /\ s)$$

Y la velocidad relativa de B con respecto a A esta dada por:

$$v_{B/A} = v_B - v_A = -0.5\left(m/_s\right)\hat{i} - 0.25\left(m/_s\right)\hat{j}$$

$$v_{B/A} = -0.5\left(m/_s\right)\hat{i} - 0.25\left(m/_s\right)\hat{j}$$

$$v_{B/A} = \sqrt{(-0.5)^2+(-0.25)^2} = 0.559\left(m/_s\right)$$

El desplazamiento que tiene B respecto de A es:

$$D = (0.559)(3) = 1.677\ m.$$

CAPITULO 3

MOVIMIENTO PLANO

3.1 MOVIMIENTO PLANO.

Cuando una partícula se mueve en el plano x-y, lo expresamos por su vector de posición en función de sus componentes rectangulares, en dirección de los ejes fijos xy, Fig. (III.0.0)

$$R = x\hat{i} + y\hat{j} \qquad (3.0.0)$$

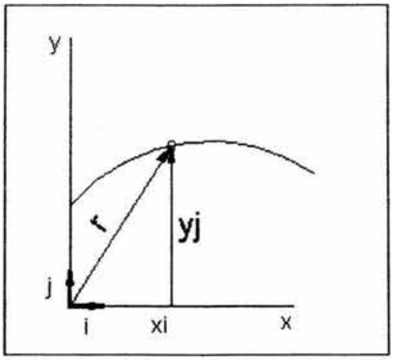


Fig. (III.0.0) Movimiento plano.

En la cual los vectores unitarios i, j, son a lo largo de los ejes $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ respectivamente. Debe observarse que como la partícula esta en movimiento, sus coordenadas $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$, son en función del tiempo ($\boldsymbol{t}$), sin embargo los vectores i y j no varían con el tiempo, ya que sus magnitudes permanecen constantes.

Derivando la ecuación (3.0.0) con respecto a (t), se obtiene el vector velocidad. En función de sus componentes rectangulares. Fig. (III.1.0)

$$\vec{v} = \dot{r} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} \qquad (3.1.0)$$

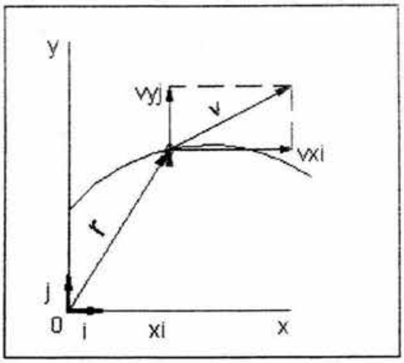


Fig. (III.1.0) Componentes rectangulares de la velocidad.

Si derivamos la ecuación (3.1.0) con respecto al tiempo obtenemos el vector aceleración en función de sus componentes rectangulares. Fig. (III.1.1)

$$\vec{a} = \dot{v} = \ddot{r} = \ddot{x}\, i + \ddot{y}\, j \qquad (3.1.2)$$

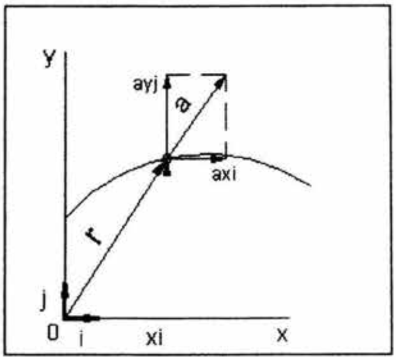


Fig. (III.1.1) Componentes rectangulares de la aceleración.

Las magnitudes de los vectores de posición, velocidad y aceleración están expresadas por:

$$\vec{r} = \sqrt{x^2 + y^2}\ ; \qquad \vec{v} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}\ ; \qquad \vec{a} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \qquad (3.1.3)$$

() Referencia de bibliografía.

3.2 MOVIMIENTO ANGULAR.

El movimiento periódico es aquel que se repite en forma idéntica, forma a intervalos iguales de tiempo. El período del movimiento periódico es el tiempo requerido para completar un ciclo o revolución. Así, en un movimiento circular, el periodo es el tiempo T requerido para que un objeto gire una vez alrededor del círculo.

La frecuencia (f) del movimiento periódico es el número de ciclos o revoluciones que se completan en un segundo, Así, si T es el número de segundos requeridos para completar un ciclo o revolución, la frecuencia está dada por:

$$f = \frac{1}{T} \tag{3.1.4}$$

Obsérvese que la frecuencia f tiene dimensiones de por segundo, esto es, s^{-1}

La relación entre velocidad angular ω del movimiento periódico (*f*) y el tiempo (T) es:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}\frac{rad}{s} = 2\pi\, f\, \frac{rad}{s} \tag{3.1.5}$$

ACELERACIÓN ANGULAR CONSTANTE.

Si en el instante t = 0, el desplazamiento angular y la velocidad angular de un punto, son θ_O y ω_O. Y si la aceleración angular es constante, deduciremos la posición angular y la velocidad angular para un instante posterior t.

De la ecuación $\alpha = {d\omega}/{dt}$, donde separando variables:

$$d\omega = \alpha\, dt$$

() Referencia de bibliografía.

Por lo tanto al integrar esta ecuación, utilizando las condiciones antes mencionadas:

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_{t=0}^{t} \alpha \, dt$$

Al resolver, la velocidad angular:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \tag{3.1.6}$$

Análogamente, para la posición angular:

$$d\theta = \omega \, dt = (\omega_0 + \alpha t) dt$$

Que integrando:

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{t=0}^{t} (\omega_0 + \alpha t) dt$$

Al resolver la integral anterior, encontramos posición angular:

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \tag{3.1.7}$$

De la relación $\alpha = \dfrac{d\omega}{dt}\dfrac{d\theta}{d\theta}$, Reagrupando términos:

$$\alpha = \frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}, \quad \text{Pero } \frac{d\theta}{dt} = \omega, \text{ Por lo que:}$$

$$\alpha = \omega \frac{d\omega}{d\theta}, \text{ Separando variables e integrando:}$$

() Referencia de bibliografía.

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \alpha \, d\theta = \int_{\omega_0}^{\omega} \omega \, d\omega$$, Resolviendo la integral.

$$\alpha(\theta)\Big|_{\theta_0}^{\theta} = \frac{1}{2}\omega^2 \Big|_{\omega_0}^{\omega}$$, Desarrollando:

$$\alpha(\theta - \theta_0) = \frac{1}{2}(\omega^2 - \omega_0^2)$$, Reagrupando términos:

$$2\alpha(\theta - \theta_0) = \omega^2 - \omega_0^2$$

Obtenemos la ecuación de velocidad angular:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0) \qquad (3.1.8)$$

Ecuaciones cuando la aceleración es constante

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$
$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$$
$$v^2 = v_0^2 + 2\alpha(r - r_0)$$
$$v = v_0 + \alpha(t - t_0)$$
$$\omega = \omega_0 + \alpha(t - t_0)$$

3.3 MOVIMIENTO CIRCULAR

Para relacionar la velocidad angular con la aceleración radial, en el movimiento circular de un punto, a velocidad constante.

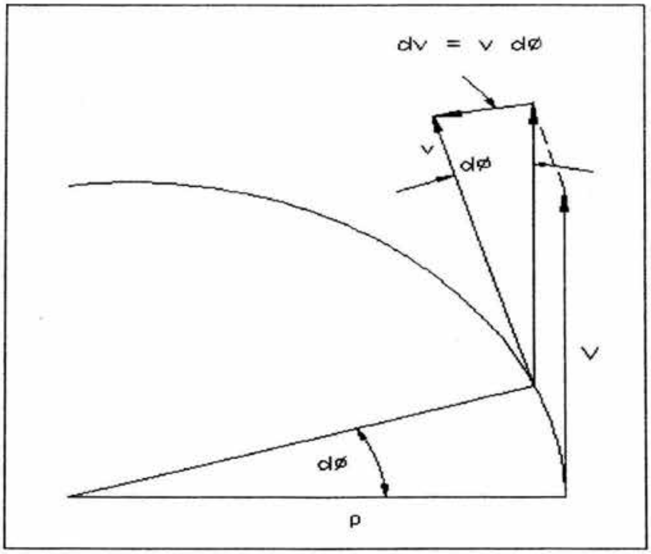


Fig. (III.1.2) Aceleración radial

Usaremos la Fig. (III.1.2) donde se observa que el cambio de dirección de $\vec{v}$ es $d\phi$; y el cambio en $\vec{v}$ es: $dv = v\,d\phi$

Dividiendo ambos miembros por ***dt***,

$$\frac{dv}{dt} = v\,\frac{d\phi}{dt}$$

Como *dv/dt* es una aceleración orientada a lo largo de ρ y hacia el centro del círculo, *dv/dt* será la aceleración radial (a_r), Puesto que v = ωρ;

Consecuentemente, el movimiento circular está caracterizado por las velocidades tangencial y angular (v_t, ω) y por las aceleraciones tangencial y radial (a_t, a_r) las cuales están dadas en términos de ω.

$$a_r = \frac{dv}{dt} = v\frac{d\phi}{dt} = v\omega = -\rho\omega^2 = \frac{v_t^2}{\rho} \qquad (3.1.9)$$

De la ecuación $v_t = \omega r\, sen\theta$ se ve que si ω cambia sólo en magnitud, entonces α está orientada a lo largo de ω, tal como se señala en la figura (II.1.3) la magnitud de la aceleración tangencial a_t es:

$$a_t = r\frac{d\omega}{dt} = r\alpha \qquad (3.2.0)$$

Y en forma vectorial: $a_t = \alpha \times r$ (3.2.1)

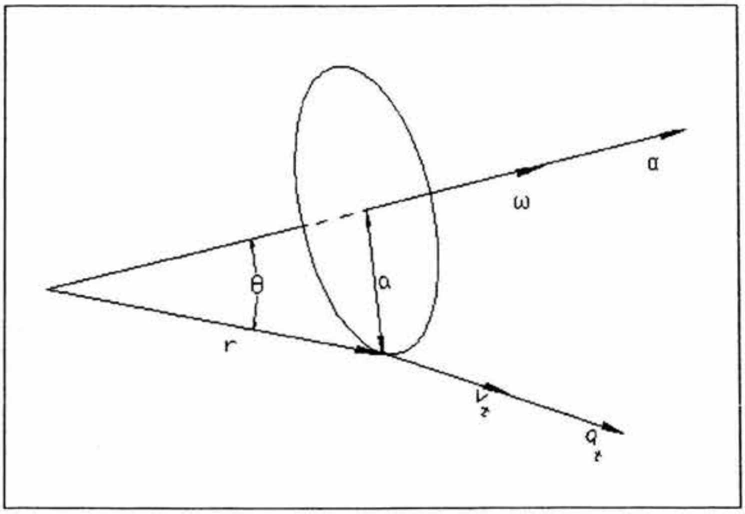


Fig. (III.1.3) Aceleración tangencial

3.4 COMPONENTES NORMALES Y TANGENCIALES

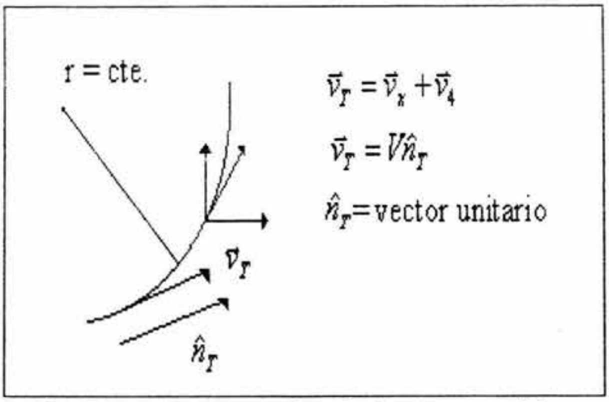


Fig. (III.1.4) Vectores de velocidad tangencial.

Si de la figura anterior analizamos un punto. Considerando lo siguiente.

r = Constante Y $\bar{v}$ = Constante

$$\bar{v} = v_x\,\hat{\mathbf{i}} + v_y\,\hat{\mathbf{j}} + v_z\,\hat{\mathbf{k}} \ \ [\,\mathrm{m/s}]$$

Por lo que si derivamos lo anterior, tenemos:

$$\bar{a} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\,(v_x\,\hat{\mathbf{i}} + v_y\,\hat{\mathbf{j}} + v_z\,\hat{\mathbf{k}}\ ) = \frac{dv_x}{dt}\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{dv_y}{dt}\,\hat{\mathbf{j}} + \frac{dv_z}{dt}\,\hat{\mathbf{k}}$$

$$\bar{a} = \hat{\mathbf{i}}\,\frac{dv_x}{dt} + \hat{\mathbf{j}}\,\frac{dv_y}{dt} + \hat{\mathbf{k}}\,\frac{dv_z}{dt}$$

$$a_X = \frac{dv_x}{dt}\ ; \quad a_Y = \frac{dv_y}{dt}\ ; \quad a_Z = \frac{dv_z}{dt}$$

Considerando la velocidad v_1 y v_2 como se muestra en la figura (III.1.5)

() Referencia de bibliografía.

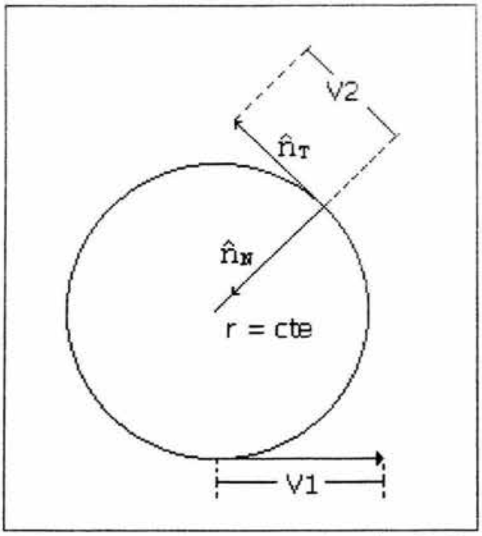


Fig. (III.1.5) Que muestra los vectores de velocidad unitarios.

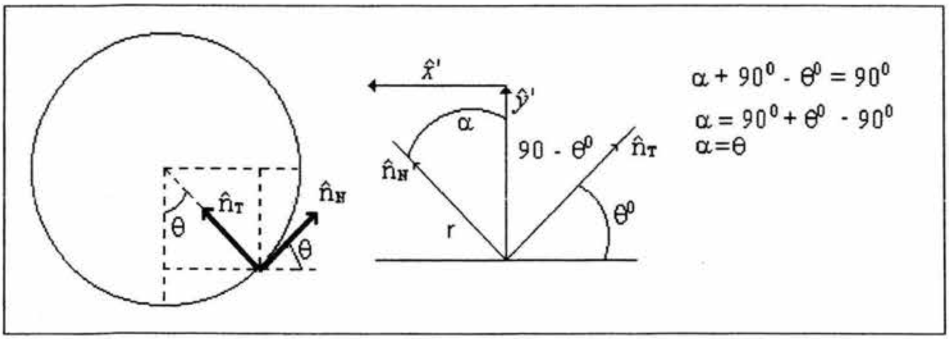
$|\bar{v}_1| = V_1$ $\quad |\bar{v}_2| = V_2$ $\quad V_1 = V_2 = V$

$\bar{v}_1 \neq \bar{v}_2$ $\quad \bar{v}_1 = V_1\,\hat{n}_T$ $\quad \bar{v}_2 = V_2\,\hat{n}_T$

Donde:

$\hat{n}_T$ = vector unitario tangencial, $\hat{n}_N$ = vector unitario normal.

Analizando los vectores normal y tangencial de la forma siguiente:

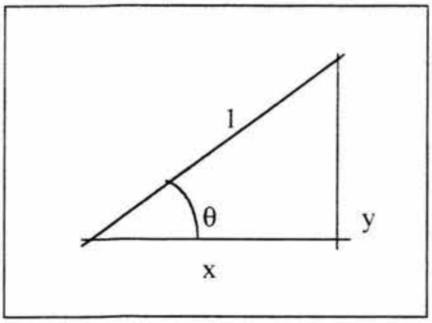


Por lo que nuestra velocidad y aceleración estén dadas por:

() Referencia de bibliografía.

$$\bar{v} = V\hat{n}_T \qquad a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{n}_T = \frac{dv}{dt}\hat{n}_T + V\frac{d}{dt}\hat{n}_T$$

Si desarrollamos:



$$\hat{n}_T = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath}$$

$$\hat{n}_T = \cos\theta\,\hat{\imath} + \operatorname{sen}\theta\,\hat{\jmath}$$

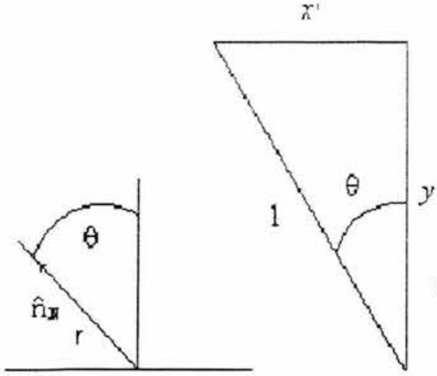
$$\operatorname{Cos}\theta = \frac{x}{1} = x\ ; \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{1} = y$$

Que sustituyendo las anteriores relaciones:

$$\frac{d}{dt}\hat{n}_T = \frac{d\cos\theta}{dt}\,\hat{\imath} + \frac{dsen\theta}{dt}\,\hat{\jmath} \quad\Rightarrow\quad \frac{d}{dt}\hat{n}_T = -\operatorname{sen}\theta\,\frac{d\theta}{dt}\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\frac{d\theta}{dt}\,\hat{\jmath}$$

$$\frac{d}{dt}\hat{n}_T = \frac{d\theta}{dt}\,(-\operatorname{sen}\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath}\,)$$

Analizando nuestro vector normal:



$$\hat{n}_N = -x'\hat{i} + y'\hat{j}$$

$$\hat{n}_N = -\text{sen}\,\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j}$$

$$\text{sen}\,\theta = \frac{x'}{1} = x' \;; \quad \cos\theta = \frac{y'}{1} = y'$$

$$\frac{x'}{1} = \ell \;; \qquad \text{Sen}\,\theta = r\theta \qquad v = \frac{d\ell}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} \;; \qquad \frac{v}{r} = \frac{d\theta}{dt}$$

Sustituyendo las relaciones anteriores:

$$\frac{d\hat{n}_T}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\hat{n}_N \qquad\qquad \frac{d}{dt}\hat{n}_T = \dot{\theta}\,\hat{n}_N = \frac{v}{r}\,\hat{n}_N$$

Sustituyendo lo anterior en la ecuación de aceleración obtenemos:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\hat{n}_T + V\frac{d}{dt}\hat{n}_T \;\Rightarrow\; \vec{a} = \frac{dv}{dt}\hat{n}_T + V\left(\frac{v}{r}\hat{n}_N\right) \;\Rightarrow\; \vec{a} = \dot{v}\,\hat{n}_T + (v^2/r)\,\hat{n}_N$$

$$\vec{a} = v\,\hat{n}_T + \left(v^2/r\right)\hat{n}_N \qquad (3.2.2)$$

Si consideramos una diferencial de arco como en la Fig. (III.1.6) siguiente:

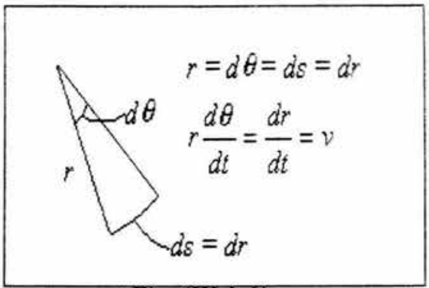
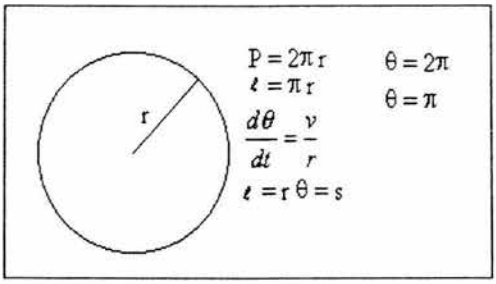


Fig. (III.1.6)



Si ahora consideramos la diferencial de arco de la Fig. (III.1.6) en la relación de

velocidad obtenemos: $$\frac{d(r\theta)}{dt} = \frac{ds}{dt} = v$$

$$\frac{d\hat{n}_T}{dt} = \frac{v}{r}\hat{n}_N \,, \qquad \vec{a} = \frac{dv}{dt}\hat{n}_T + v\left(\frac{v}{r}\hat{n}_N\right) \qquad (3.2.3)$$

Cuando *r* es constante:

$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\hat{n}_T + \frac{v^2}{r}\hat{n}_N$	$a_N = \frac{v^2}{r}$
$\vec{a} = a_T\hat{n}_T + a_N\hat{n}_N$	$a_T = \frac{dv}{dt}$

() Referencia de bibliografía.

3.5 TIRO PARABÓLICO

Un caso especial del movimiento curvilíneo plano, como por ejemplo una bala, un misil, una esfera o cualquier otro objeto que transite libremente por el aire. Determinaremos el movimiento de un proyectil desde que es disparado de una posición inicial.

$r_o = x_o i + y_o j$, Con velocidad inicial $v_o = v_{xo} i + v_{yo} j$. Fig. (III.1.7)

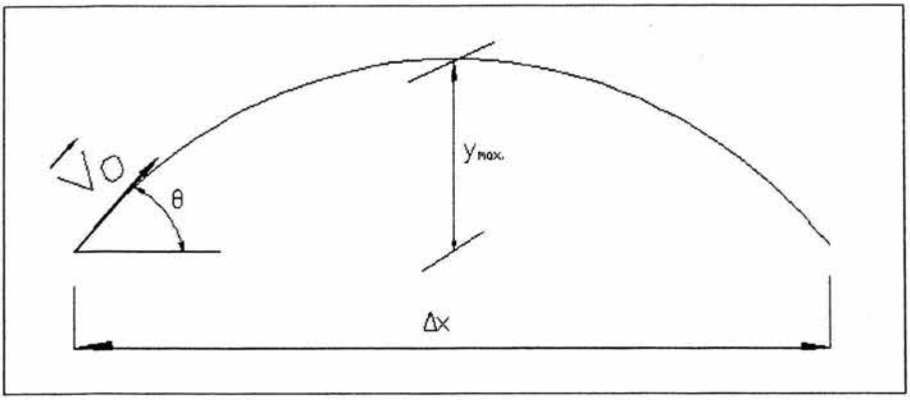


Fig. (III.1.7) Tiro parabólico simétrico.

$$v_o = v_o \cos\theta \hat{i} + v_o \, sen \, \theta \, \hat{j} \tag{3.2.4}$$

Dada en términos de un vector unitario. De las ecuaciones de aceleración constante, de donde es conocida la posición y velocidad inicial.

Si la $v_{ox} = cte.$ es constante.

$$v_{ox} = \frac{\Delta x}{t} \quad \Rightarrow v_o \cos\theta = \frac{\Delta x}{t} \tag{3.2.5}$$

La posición esta expresada de la forma siguiente:

$$y = y_o + v_{oy}\,t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad (3.2.6)$$

Pero y_o es cero. Por lo que:

$$\begin{aligned} y &= v_{oy}\,t - \frac{1}{2}g\,t^2 \\ y &= v_o\,sen\theta - g\,t \end{aligned} \qquad (3.2.7)$$

La velocidad de la partícula esta expresada:

$$\begin{aligned} v_y &= v_{oy}\,t - gt \\ v_y &= v_o\,sen\theta - gt \end{aligned} \qquad (3.2.8)$$

La otra ecuación de movimiento que expresa.

$$v_y^2 = v_{oy}^2 - 2g(y - y_o)$$

$$v_y^2 = v_{oy}^2 - 2g\,y$$

$$v_y^2 = v_o^2\,sen^2\theta - 2g\,y \qquad (3.2.9)$$

Para calcular el tiempo total de vuelo tenemos $y = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= v_0\,sen\theta\;t - \frac{1}{2}g\,t^2 \\ 0 &= t\left(v_o\,sen\theta - \frac{1}{2}g\,t\right) \end{aligned}$$

Si para $t_1 = 0$, Entonces

$v_o\,sen\theta = \frac{1}{2}g\,t$, Despejando ***t*** obtenemos el tiempo total:

$$t = \frac{2v_o\,sen\theta}{g} \qquad (3.3.0)$$

() Referencia de bibliografía.

De la expresión $v_o \cos\theta = \dfrac{\Delta x}{t}$,

Sustituimos el tiempo para obtener el desplazamiento en x.

$$\Delta x = (v_o \cos\theta)\left(\frac{2v_o\, sen\theta}{g}\right)$$

$$\Delta x = \frac{2v_o^2\, sen\theta\cos\theta}{g} \qquad (3.3.1)$$

De la relación trigonométrica sen $2\theta = 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta$, la cual sustituyendo en nuestra ecuación. Obtendremos el desplazamiento en ***x***:

$$\Delta x = \frac{v_o^2\, sen 2\theta}{g} \qquad (3.3.2)$$

Si sustituimos la ecuación (3.3.2) en la ecuación (3.2.8)

$v_y = v_o\, sen\,\theta - g\left(\dfrac{2v_o\, sen\theta}{g}\right)$, por lo que reagrupando términos:

$v_y = v_0\, sen\,\theta - 2v_o\, sen\,\theta$, La velocidad en y es:

$$v_y = -v_o\, sen\theta \qquad (3.3.3)$$

Sustituyendo la anterior en la ecuación (3.2.8) Tenemos:

$(-v_o\, sen\theta)^2 = v_o^2\, sen^2\theta - 2gy$, Como $v_y = 0$, cuando $y_{max.}$

$0 = v_o^2\, sen^2\theta - 2gy$, Despejando ***y***:

$$y_{max.} = \frac{v_o^2\, sen\theta}{2g} \qquad (3.3.4)$$

3.6 MOVIMIENTO ESPACIAL

Cuando el movimiento de una partícula tiene lugar según una curva del espacio tridimensional, como se ilustra en la Fig. (III.1.8)

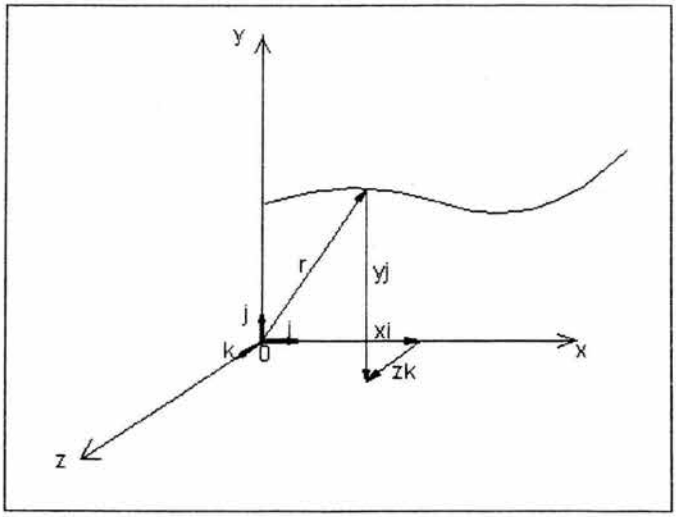


Fig. (III.1.8)

Los vectores de posición, velocidad y aceleración de una partícula, en cualquier momento del tiempo, pueden expresarse en función de sus componentes rectangulares:

$$\begin{aligned} r &= xi + yj + zk \\ v &= \dot{x}\, i + \dot{y}\, j + \dot{z}\, k \qquad (3.3.5) \\ a &= \ddot{x}\, i + \ddot{y}\, j + \ddot{z}\, k \end{aligned}$$

Las magnitudes de los vectores de posición, velocidad y aceleración se dan de la siguiente manera:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},\ v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2},\ a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \qquad (3.3.6)$$

() Referencia de bibliografía.

3.7 ECUACIONES DE LA POSICIÓN, VELOCIDAD Y ACELERACIÓN RELATIVAS.

Los conceptos cinemáticas relativos de una partícula en movimiento son aquellos que se refieren a la otra partícula móvil que en la figura (III.1.9) es a la vez el origen de un sistema coordenado móvil de referencia.

Así la posición relativa, con respecto al punto móvil O'. De la partícula P es $\vec{\rho}$, que se suele designar también como $\vec{r}_{P/O'}$ (posición de P con respecto a O') o bien $\vec{\rho}_{PO'}$.(vector desplazamiento de P hacia O') entonces la ecuación $\vec{R} = x\hat{i} + y\hat{j}$, expresa lo siguiente:

La posición absoluta $\vec{r}$ de la partícula P es igual a la posición absoluta $\vec{R}$ del móvil O', más la posición relativa de P con respecto a O'. Nótese que los conceptos absolutos están referidos al marco fijo, en tanto que los relativos lo están al sistema coordenado móvil.

De forma similar, la velocidad relativa de la partícula P cuyo movimiento se analiza, está representada por el término $\dot{\vec{\rho}}$ de la ecuación (3.1.0) que expresa: la velocidad absoluta $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ de una partícula que se mueve con respecto a otro móvil es igual a la velocidad absoluta $\dot{\vec{R}}$ de tal punto, más la velocidad relativa $\dot{\vec{\rho}}$ de P con respecto a O' (que también puede designarse como $\dot{\vec{r}}_{P/O'}$ *o bien* $\dot{\vec{\rho}}_{PO}$)

Finalmente, la ecuación (3.1.2) expresa la aceleración absoluta $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$ de una partícula en movimiento referido a otra, es igual a la aceleración absoluta de ésta $\ddot{\vec{R}}$, más la aceleración relativa $\ddot{\vec{\rho}}$ de P con respecto a O', según la figura (III.1.9).

Ahora estudiaremos el caso de una partícula que se mueve con respecto a un sistema animado de movimiento de rotación, lo cual implica que tal sistema gira con velocidad angular $\vec{\omega}$, para este caso se establecerán los conceptos cinemáticas absolutos y relativos y los correspondientes a velocidad y aceleración de arrastre, así como el de aceleración de Coriolis, basados en la figura (III.1.9)

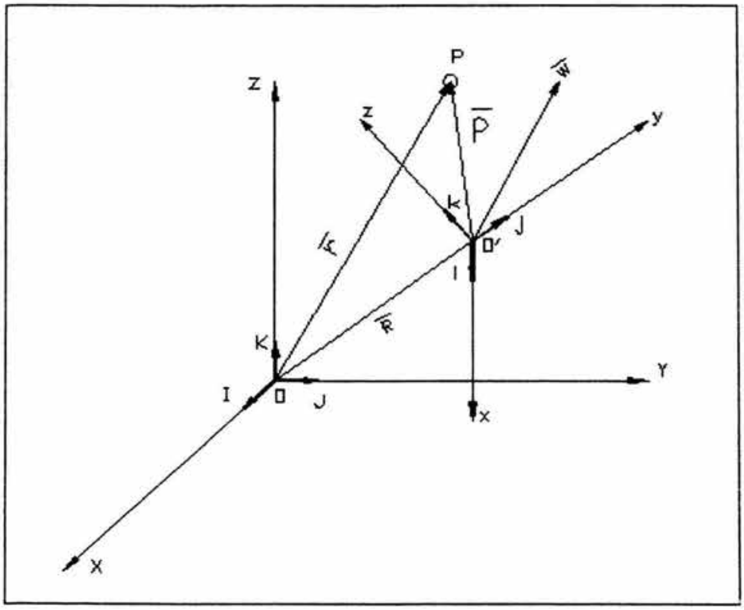


Fig. (III.1.9) Posición, velocidad, aceleración relativas.

De la figura se tiene:

P → Es la partícula móvil en estudio.

O' → Es un punto, también móvil, con respecto al cual se mueve la partícula P, y

Con el que coincide el origen del sistema coordenado móvil.

x, y, z $\rightarrow$ Es el sistema coordenado móvil al que corresponde una velocidad angular $\vec{\omega}$.

$\vec{R}$ $\rightarrow$ Es el vector de posición del punto móvil O', con respecto al origen del Marco fijo de referencia.

$\vec{r}$ y $\vec{\rho}$ $\rightarrow$ Son los vectores de posición de la partícula P en movimiento, con Relación a los sistemas coordenados fijo y móvil, respectivamente.

X, Y, Z $\rightarrow$ Es el marco de referencia considerado fijo con origen en O.

i, j, k $\rightarrow$ Son los vectores unitarios asociados a los ejes coordenados x, y, z Respectivamente.

I, J, K $\rightarrow$ Son los vectores unitarios asociados a los ejes coordenados X, Y, Z, Respectivamente.

VELOCIDAD Y ACELERACIÓN DE ARRASTRE.

De la misma forma que establecimos la ecuación (3.0.0) se puede establecer que:

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{\rho}$$

Pero

$$\vec{\rho} = ix + jy + kz,$$

Por lo que

$$\vec{r} = \vec{R} + ix + jy + kz \qquad (3.3.7)$$

Derivando la ecuación anterior con respecto del tiempo, se obtiene la ecuación cinemática de la velocidad.

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{R}} + \frac{d}{dt}(ix + jy + kz)$$

En este caso los vectores unitarios i, j y k han de considerarse variables pues cambian de dirección, en virtud de que el sistema coordenado al que están asociados gira con velocidad angular $\vec{\omega}$. Por lo que empleando la notación Newtoniana se tiene:

$$\frac{d}{dt}(ix + jy + kz) = \dot{i}x + i\dot{x} + \dot{j}y + j\dot{y} + \dot{k}z + k\dot{z}$$

Reagrupando términos:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{R}} + \dot{i}x + i\dot{x} + \dot{j}y + j\dot{y} + \dot{k}z + k\dot{z}$$

Ahora bien, de acuerdo con la fórmula de Poisson, la primera derivada de un vector variable respecto del tiempo es igual al producto vectorial de la velocidad angular por el propio vector variable. Es decir:

$$\frac{di}{dt} = \dot{i} = \vec{\omega} \times i \ ; \quad \frac{dj}{dt} = \dot{j} = \vec{\omega} \times j \ ; \quad \frac{dk}{dt} = \dot{k} = \vec{\omega} \times k$$

Por lo anterior:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{R}} + \vec{\omega} \times (ix + jy + kz) + \left(i\dot{x} + j\dot{y} + k\dot{z} \right)$$

Como:

$$\vec{\rho} = ix + jy + kz$$

$$\vec{\omega} \times (ix + jy + kz) = \vec{\omega} \times \vec{\rho}$$

Por otro lado, si

$$\dot{\vec{\rho}} = i\dot{x} + j\dot{y} + k\dot{z}$$

Nuestra ecuación de velocidad estará dada por la expresión:

() Referencia de bibliografía.

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v} = \dot{\vec{R}} + \vec{\omega} \times \vec{\rho} + \dot{\vec{\rho}} \qquad (3.3.8)$$

En donde:

$\dot{\vec{r}} = \vec{v}$ Es la velocidad absoluta de la partícula P en movimiento.

$\dot{\vec{\rho}}$ Es la velocidad relativa de la partícula móvil con respecto al origen del sistema coordenado móvil O'

$\dot{\vec{R}}$ Es la velocidad absoluta del origen del sistema móvil de referencia y es así mismo la velocidad de translación de tal sistema.

$\vec{\omega} \times \vec{\rho}$ Es la velocidad absoluta impuesta al sistema móvil por su rotación con respecto al marco fijo.

$\dot{\vec{R}} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}$ Es lo que se conoce como velocidad de arrastre.

ACELERACIÓN DE CORIOLIS

La ecuación cinemática de la aceleración se obtiene por la segunda derivada de $\vec{r}$ con respecto al tiempo, como sigue:

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{R}} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{\rho}} + \dot{i}x + i\dot{x} + \dot{j}y + j\dot{y} + \dot{k}z + k\dot{z}$$

Agrupando:

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{R}} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{\rho} + \dot{\vec{\rho}} \right) + \vec{\omega} \times \dot{\vec{\rho}} + \ddot{\vec{\rho}}$$

De donde se obtiene:

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{R}} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{\rho} \right) + 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{\rho}} + \ddot{\vec{\rho}} \qquad (3.3.9)$$

Por lo que:

$\ddot{\vec{r}}$ Es la aceleración absoluta de la partícula P en movimiento.

$\ddot{\vec{\rho}}$ Es la aceleración relativa de P con respecto al origen O' del sistema móvil de referencia del móvil.

$\ddot{\vec{R}}$ Es la aceleración absoluta del origen del sistema de referencia del sistema móvil.

$\dot{\vec{\omega}} \times \vec{\rho}$ Es la aceleración tangencial debida a la aceleración angular del sistema móvil.

$\vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{\rho} \right)$ Es la aceleración normal debida a la aceleración angular del sistema móvil de referencia.

$2\vec{\omega} \times \dot{\vec{\rho}}$ Es la aceleración de Coriolis debida a la interacción de la velocidad angular del sistema coordenado móvil y la velocidad relativa de la partícula P en movimiento y

$\ddot{\vec{R}} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{\rho} \right)$ Es la suma de vectores que se le conoce como aceleración de arrastre.

3.8 Ejercicios referentes al capitulo III.

Ejercicio 1:

Un automovilista esta viajando sobre una porción curva de una carretera de 350 m de radio, con una rapidez de 72 km/h. Se aplica repentinamente los frenos ocasionando una disminución en la rapidez a razón de 1.25 m/s^2. Determínese la magnitud de la aceleración total del automóvil.

a) Inmediatamente después de que los frenos se aplicaron.
b) 4 segundos después.

Solución: Usando la ecuación (3.2.3)

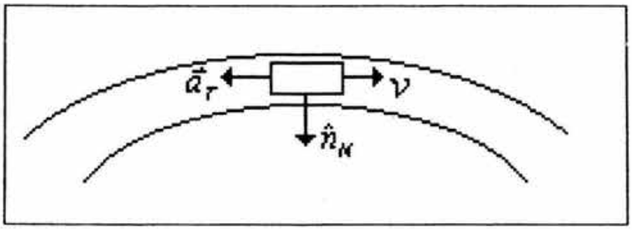
$$\vec{a} = a_T \hat{n}_T + a_N \hat{n}_N$$

$$72\frac{km}{h}\left(\frac{1000m}{1km}\right)\left(\frac{3600s}{1h}\right) = 20\ (m/s)$$

$$a = 1.25\ \text{m/s}^2 \Rightarrow a = -\ 1.25\ \hat{n}_T\,(\text{m/s}^2) \Rightarrow \vec{a} = a_T + a_N \Rightarrow a_N = \frac{v^2}{r}$$

$$a_N = \frac{(20m/s)^2}{350m} \Rightarrow a_N = \frac{400m}{350s^2} \Rightarrow a_N = \frac{400m}{350s^2} \Rightarrow a_N = \frac{8m}{7s^2}$$

$$\vec{a} = a_T + a_N \Rightarrow \vec{a} = -1.25\hat{n}_T + \frac{8}{7}\hat{n}_N$$



$$|\bar{a}| = \sqrt{\bar{a}_T^2 + a_N^2} \quad \Rightarrow \quad |\bar{a}| = \sqrt{(-1.25)^2 + (8/7)^2} \quad \Rightarrow \quad a = 1.6937(m/s^2)$$

$$v = v_0 + at \quad \Rightarrow v(t = 4s) = 20 + (-1.25 * 4) \quad \Rightarrow \quad v = 15(m/s)$$

$$s = s_0 + v_0 t + 1/2at^2 \Rightarrow s(t = 4s) = (0) + (20)(4) + 1/2(-1.25)(4)^2 \Rightarrow s = 80 - 10$$

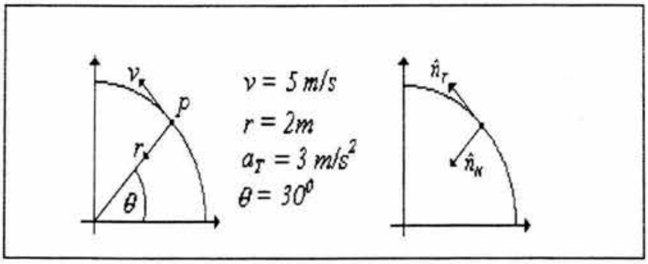
$$s = 70m$$

$$s = r\theta \Rightarrow \quad \theta = \frac{s}{r} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{70}{350} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{1}{5} rad$$

$$\frac{1}{5} rad \left(\frac{180^0}{\pi rad} \right) \quad \Rightarrow \quad \theta = 11.4592^{\,0}$$

Ejercicio 2.

Una partícula P se mueve en una trayectoria circular de radio $r = 2m$ con una velocidad $v = 5\ m/s$ en $\theta = 30^0$. La velocidad esta aumentando en la posición dada, a una razón de $3\ m/s^2$. Calcule la aceleración total de la partícula utilizando coordenadas polares.



Solución: Usando la ecuación (3.2.3) y (3.2.3a)

$$\bar{a} = a_T \hat{n}_T + a_N \hat{n}_N \quad \Rightarrow \quad a_N = \frac{v^2}{r} \;;\quad a_T = \frac{dv}{dt}$$

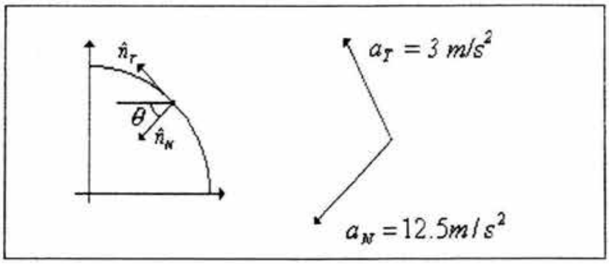
$$a_N = \frac{(5m/s)^2}{2m} \quad \Rightarrow \quad a_N = \frac{25m}{2s^2} \quad \Rightarrow \quad a_N = 12.5 m/s^2$$

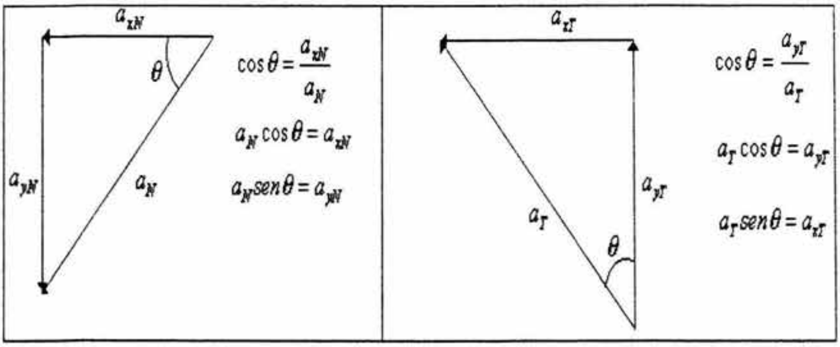
$$\bar{a} = a_T \hat{n}_T + a_N \hat{n}_N \quad \Rightarrow \quad \bar{a} = 3\hat{n}_T + 12.5\hat{n}_N \quad \Rightarrow \bar{a} = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} \quad \Rightarrow \quad \bar{a} = \sqrt{(12.5)^2 + (3)^2}$$

$$\bar{a} = \sqrt{(12.5)^2 + (3)^2} \quad \Rightarrow \quad \bar{a} = 12.8549 (m/s^2)$$

Ejercicio 3.

Una partícula P se mueve sobre una pista circular como se ilustra; calcule la máxima velocidad v si la aceleración total de la partícula no debe exceder de 300 ft/s^2.





Solución:

$$a_{yT} = a_T \cos\theta^0 \Rightarrow a_{yT} = 3\cos 30^0 \Rightarrow a_{yT} = 3*0.866 \Rightarrow a_{yT} = 2.5980(m/s^2)$$

$$a_{xT} = a_T sen\theta^0 \Rightarrow a_{xT} = 3sen30^0 \Rightarrow a_{xT} = 3*0.5 \Rightarrow a_{xT} = 1.5(m/s^2)$$

$$a_{yN} = a_N sen\theta^0 \Rightarrow a_{yN} = 12.5sen30^0 \Rightarrow a_{yN} = 12.5*0.5 \Rightarrow a_{yN} = 6.25(m/s^2)$$

$$a_{xN} = a_N \cos\theta^0 \Rightarrow a_{xN} = 12.5\cos 30^0 \Rightarrow a_{xT} = 12.5*0.866 \Rightarrow a_{xN} = 10.825(m/s^2)$$

$$\bar{a}_T = 3\hat{n}_T \Rightarrow \bar{a}_T = -a_{xT}\hat{i} + a_{yT}\hat{j} \ ; \quad \bar{a}_N = 12.5\hat{n}_N \Rightarrow \bar{a}_N = -a_{xN}\hat{i} - a_{yN}\hat{j}$$

$$\bar{a}_{TOTAL} = \bar{a}_T + \bar{a}_N \Rightarrow \bar{a}_{TOTAL} = 3\hat{n}_T + 12.5\hat{n}_N \Rightarrow \bar{a}_{TOTAL} = \hat{i}\left(-a_{xT} - a_{xN}\right) + \hat{j}\left(a_{yT} - a_{yN}\right)$$

$$\bar{a}_{TOTAL} = \hat{\imath}(-1.5-10.825)(m/s^2)+\hat{\jmath}(2.598-6.25)(m/s^2)$$

$$\bar{a}_{TOTAL} = \hat{\imath}(-12.325)(m/s^2)+\hat{\jmath}(-3.652)(m/s^2) \quad \Rightarrow \quad |a_{TOTAL}| = \sqrt{\bar{a}_T^2+\bar{a}_N^2}$$

$$|a_{TOTAL}| = \sqrt{(-12.325)^2+(-3.652)^2} \qquad |a_{TOTAL}| = \sqrt{165.2427} \qquad a_{TOTAL} =$$

$$a_{TOTAL} = 300(m/s^2) \quad \Rightarrow \quad a_{TOTAL} = \sqrt{a_T^2+a_N^2} \quad \Rightarrow \quad a_N = \frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad a_N^2 = (300m/s^2)^2 - a_T^2$$

$$a_N = \sqrt{a_T^2 - a_{TOTAL}} \qquad \frac{v^2}{r} = (a_T^2 - a_{TOTAL}^2)^{1/2} \qquad v = (a_T^2 - a_{TOTAL}^2)^{1/4} r^{1/2}$$

Ejercicio 4.

Un hombre esta a 60 ft. Del muro y lanza una pelota hacia arriba este con una rapidez

$v_o = 50 \, ft/s$, Determine:

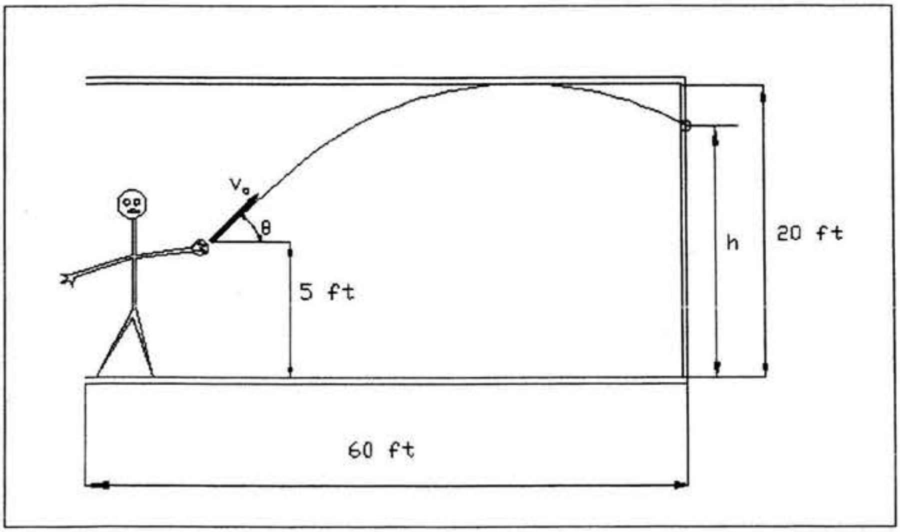
a) El ángulo θ en que deberá arrojar la pelota de modo que esta toque el muro en el punto mas elevado posible.

b) ¿Cuál es la altura de dicho punto?

Si la habitación tiene el techo a una altura de 20 ft.

Solución: La solución a este problema usaremos las ecuaciones de tiro parabólico

Utilizaremos un diagrama que nos ayude a visualizar el problema, para plantear nuestras incógnitas.



Para el enciso a).- Usando la ecuación de tiro parabólico (3.2.9) que expresa:

$v_y^2 = v_{oy}^2 - 2g(y - y_o)$, Donde $v_y = 0$, Por lo que:

$0 = v_o^2 \, sen^2 \theta - 2g(y - y_0)$, Despejando el seno de θ:

$sen^2 \theta = \dfrac{2g(y - y_o)}{v_o^2}$, despejando el cuadrado del seno.

$sen\theta = \dfrac{\sqrt{2g(y - y_o)}}{v_o}$, por lo que el ángulo buscado es:

$\theta = arc\,sen\left(\dfrac{\sqrt{2g(y - y_o)}}{v_o}\right)$, dándole valores a nuestra ecuación:

$\theta = arc\,sen\left[\dfrac{\sqrt{2(32.2\,{}^{ft}/_{s^2})(20-5)ft}}{50ft}\right]$, donde el ángulo buscado es:

$\theta = 38.4^{\circ}$

Solución enciso b).- De la ecuación (3.2.5) tenemos:

$v_{ox} = v_o \cos\theta$, Pero también:

$v_{ox} = \dfrac{x}{t}, \Rightarrow t = \dfrac{x}{v_{ox}}$, Por lo tanto evaluando en la primera relación.

$$v_{ox} = \left(50 \, ft/s\right) \cos 38.4^{\circ}$$
, Obtenemos la velocidad de la manera siguiente:
$$v_{ox} = 39.18 \, ft/s$$

Sustituyendo en nuestra segunda relación:

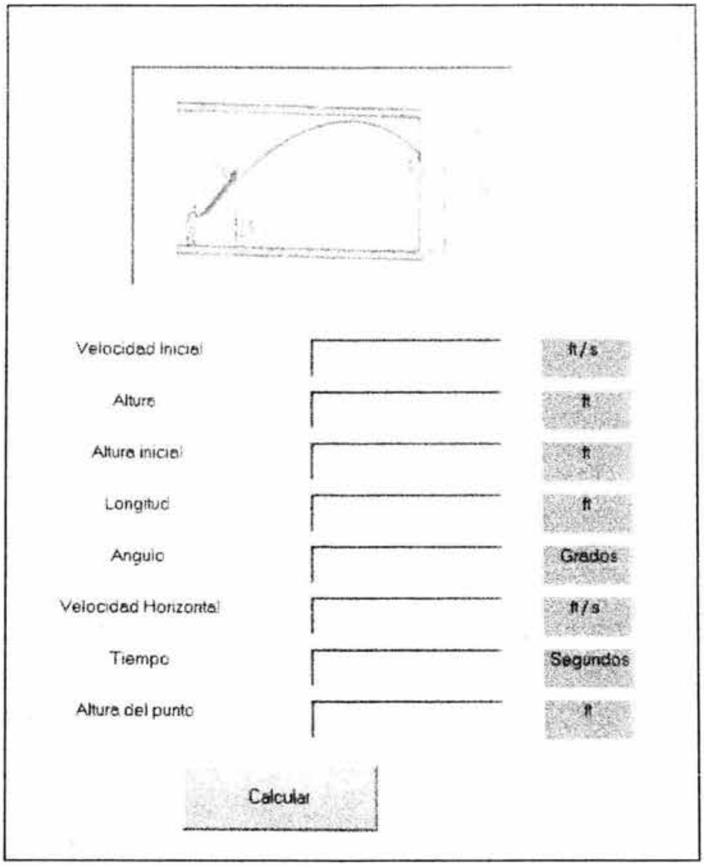
$$t = \frac{60 ft}{39.18 \, ft/s} = 1.5 s$$

De la ecuación (3.2.6) de tiro parabólico sustituimos el tiempo y los valores conocidos:

$$y = 5 ft + \left\{\left(50 \, ft/s\right)\{sen(38.4)\}(1.5 s)\right\} - \frac{1}{2}\left(32.2 \, ft/s^{2}\right)(1.5 s)^{2}$$
$$y = 15.36 ft$$

Que es la altura máxima en el muro que toca la pelota.

PROGRAMA DE TIRO PARABOLICO.



Formulario del programa

Código del programa.

```
'Programa para Tiro parabólico
        Option Explicit
        Dim Vel As Double, Alt As Double
        Dim Altin As Double, largo As Double
        Dim Rad As Double, grados As Double
        Dim Vox As Double, Tiem As Double
        Dim Punt As Double, Ang As Double

Private Sub Calcular_Click()
        Vel = Velocidad.Text
        Alt = Altura.Text
        Altin = Alturainicial.Text
        largo = Longitud.Text
        Const g = 32.2
        Const pi = 3.1416
'Calculos de los resultados
        Rad = Sqr(2 * g * (Alt - Altin)) / Vel
        Ang = Atn(Rad / Sqr(-Rad * Rad + 1))
        grados = Ang * 180 / pi
        Angulo.Text = Format(grados, "#,##0.00")
        Vox = Vel * Cos(Ang)
        Velhorizon.Text = Format(Vox, "#,##0.00")
        Tiem = largo / Vox
        Clock.Text = Format(Tiem, "#,##0.00")
        Punt = Altin + (Vel * Sin(Ang) * Tiem) - (0.5 * g * Tiem ^ 2)
        Altcal.Text = Format(Punt, "#,##0.00")
End Sub
```

CAPITULO 4

CINEMÁTICA DEL CUERPO RÍGIDO

4.1 CINEMÁTICA DEL CUERPO RÍGIDO.

El movimiento del cuerpo rígido se estudiara considerando un marco de referencia fijo x, y, z, y otro móvil x, y, z cuyo origen puede estar o no en dicho cuerpo, pero que siempre estará sólidamente ligado a él.

Si se analiza el movimiento general del cuerpo rígido, para dos instantes t_1 y t_2, éste sufre desplazamiento lineal y angular, como se muestra Fig. (IV.0.0)

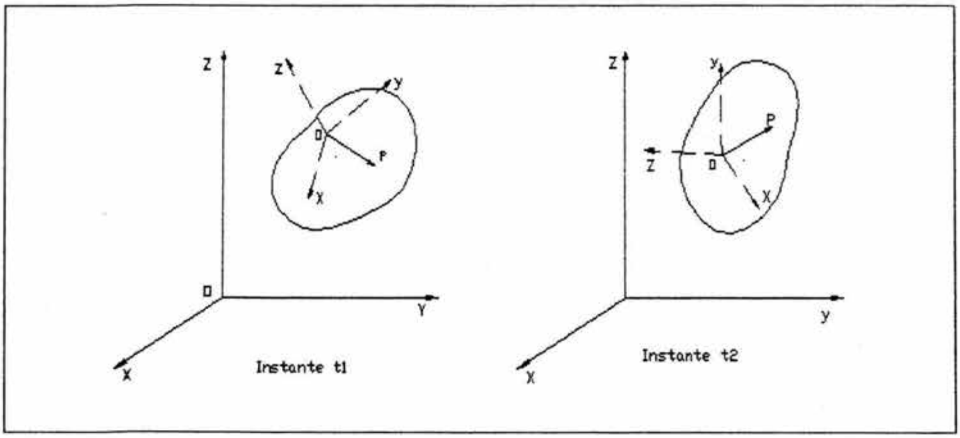


Fig. (IV.0.0)

Se distinguen los siguientes tipos de movimiento para el cuerpo rígido:

a) Translación.- plana y no plana; rectilínea o curvilínea.

b) Rotación en torno a un eje.- Concéntrica y excéntrica.

c) Rotación alrededor de un punto.- Concéntrica y excéntrica.

d) Movimiento plano general.

Trataremos por separado los movimientos del cuerpo rígido, de acuerdo con la figura (IV.0.0) y las consideraciones anteriores, observando en la figura que el segmento dirigido $\overline{OP}$, de magnitud constante, cambia de posición y dirección al transcurrir el tiempo.

4.2 TRANSLACIÓN PLANA Y NO PLANA, RECTILINEA Y CURVILÍNEA

El movimiento de translación se caracteriza porque todo segmento dirigido del cuerpo (tal como el $\overline{OP}$, de las figuras (IV.1.0) (a) y (b) conserva su dirección durante el movimiento; todas las partículas de dicho cuerpo describen trayectorias paralelas.
La translación, cuando ocurre en un plano, recibe el nombre de translación plana y las trayectorias descritas pueden ser rectilíneas o curvilíneas.

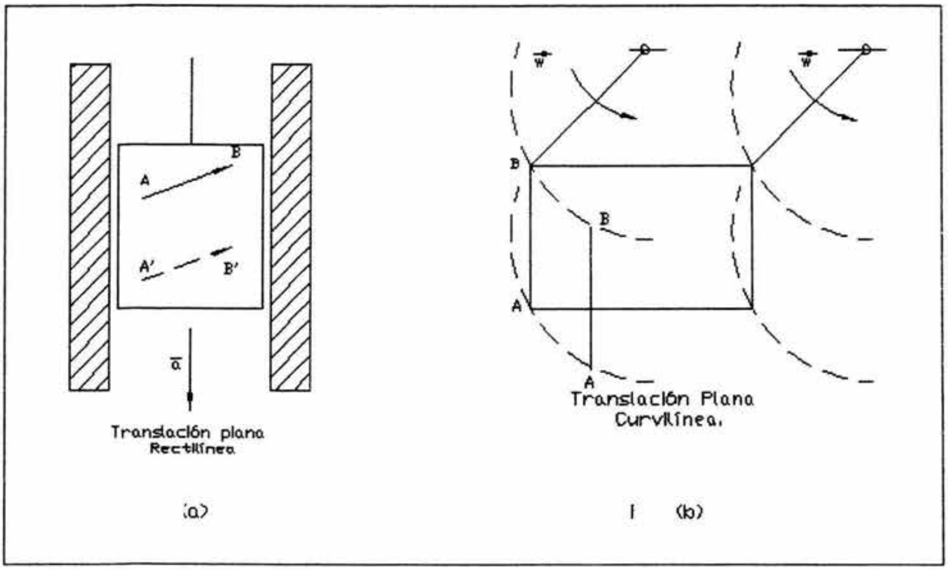


Fig. (IV.1.0) Translación plana

El movimiento de translación puede representarse en el espacio tridimensional, denominándose translación no plana, este se ilustra en la Fig. (IV.1.1)

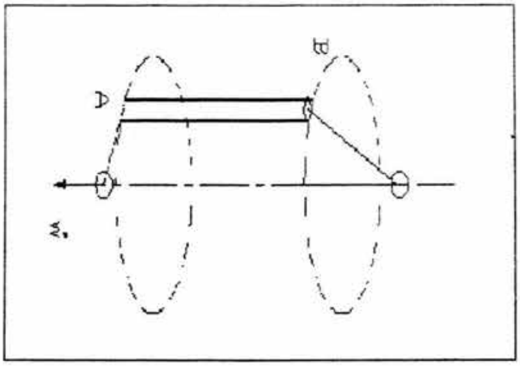


Fig. (IV.1.1)

4.3 ROTACIONES EN TORNO DE UN EJE Y ALREDEDOR DE UN PUNTO.

El movimiento de rotación de un cuerpo rígido en torno de un eje se caracteriza porque todo punto del cuerpo conserva constante su distancia con respecto al eje, al transcurrir el tiempo.
Si el eje con respecto al cual se estudia el movimiento del cuerpo rígido pertenece a éste, los puntos contenidos en dicho eje, denominado eje de rotación, permanecen fijos; todos los demás puntos del cuerpo describen trayectorias circunferenciales contenidas en planos perpendiculares a dicho eje. Cuando el eje de rotación contiene al centro de gravedad del cuerpo, a este movimiento se le denomina de rotación concéntrica, en torno de un eje.

También se presenta el movimiento de rotación excéntrica, que corresponde al caso para el cual el eje de rotación queda fuera del centro de gravedad del sólido, como se muestra en las figuras (IV.1.2) siguientes los casos antes descritos.

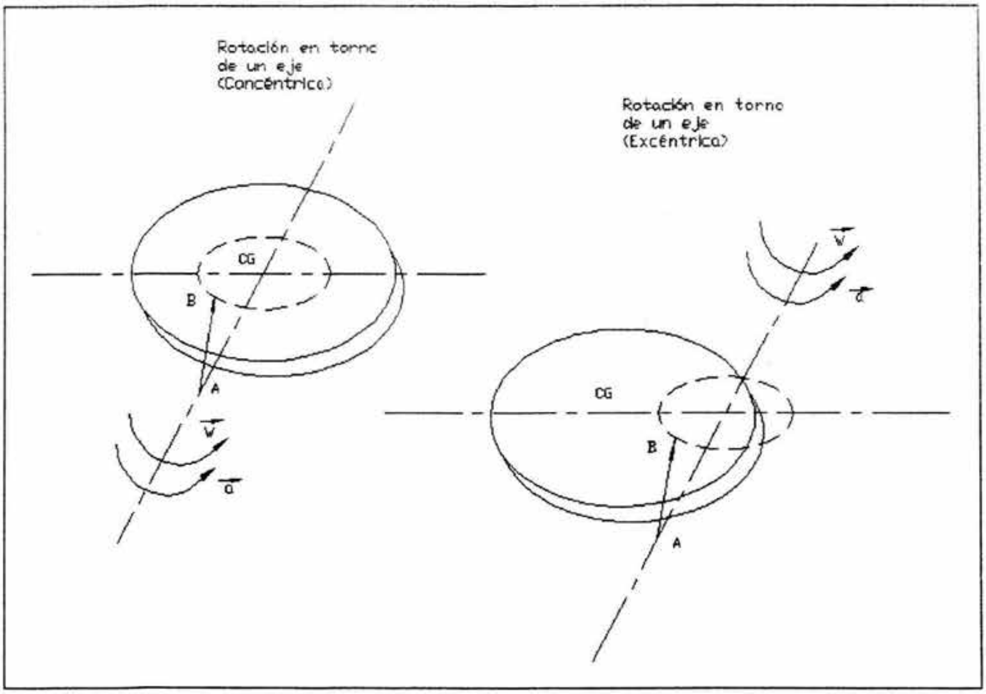


Fig. (IV.1.2)

El movimiento de rotación de un cuerpo rígido alrededor de un punto se caracteriza porque la distancia de un punto cualquiera de dicho cuerpo, con respecto al punto fijo de giro, es constante al transcurrir el tiempo.

Cuando el punto con respecto al cual gira el cuerpo contiene el centro de gravedad, se dice que el movimiento de rotación es concéntrico. Consecuentemente, la rotación excéntrica con respecto a un punto se presenta cuando éste no corresponde al centro de gravedad del cuerpo, se muestra en la Fig. (IV.1.3) el movimiento de un cuerpo alrededor de un punto.

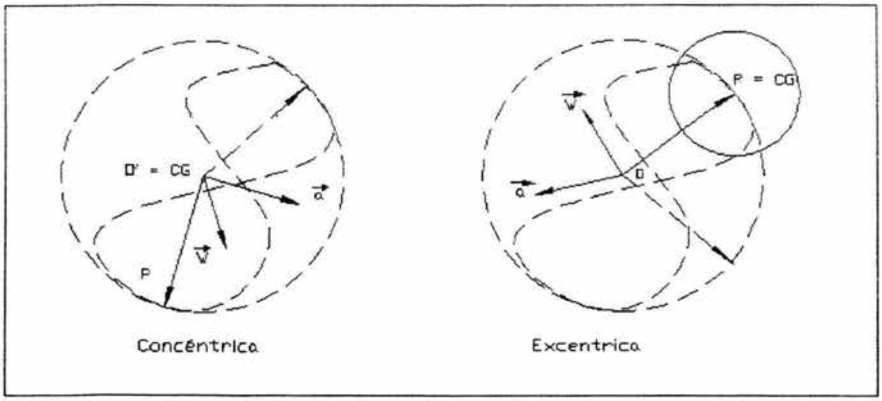


Fig. (IV.1.3) Movimiento alrededor de un punto.

4.4 MOVIMIENTO PLANO.

Este tipo de movimiento se caracteriza porque las trayectorias de todos los puntos de un cuerpo rígido son paralelas a un plano determinado; por ello, su estudio se puede llevar a cabo analizando una sección del cuerpo paralela a dicho plano, ya que todos los puntos contenidos en una recta normal a ese plano tienen idénticas características cinemáticas. En la figura (IV.1.4) (a) y (b) siguiente se ilustra el movimiento plano general:

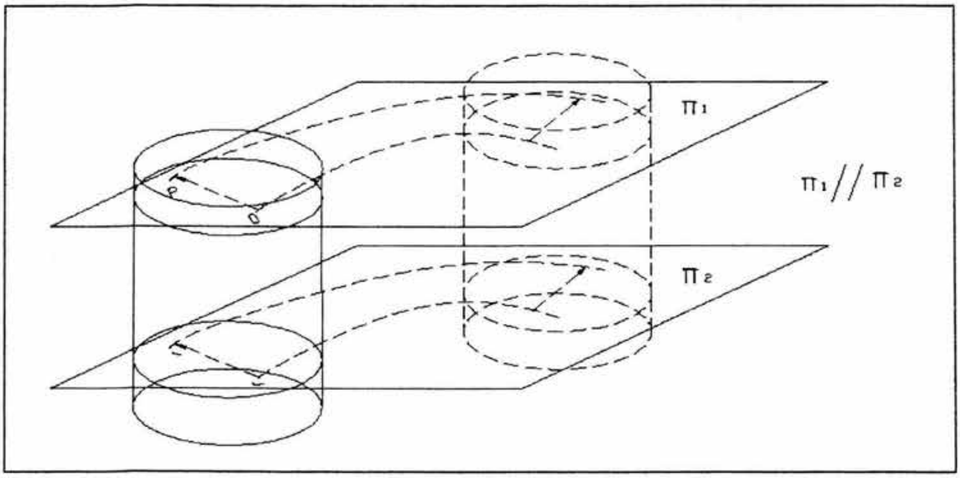


Fig. (IV.1.4) (a) Movimiento plano general

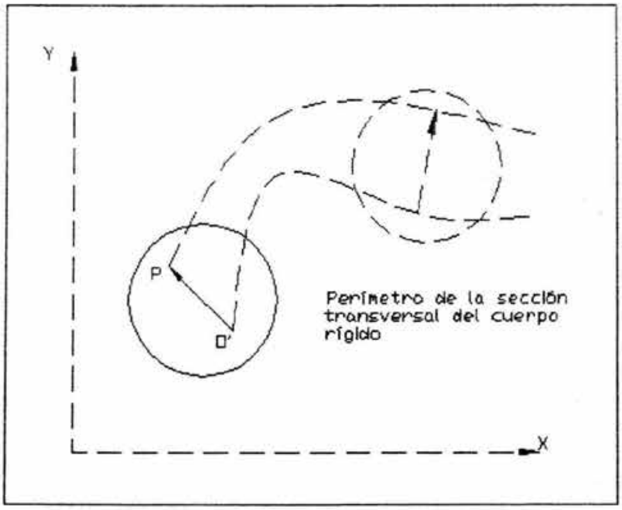


Fig. (IV.1.4) (b) Movimiento plano general.

El movimiento plano general puede analizarse como la superposición de dos tipos de movimiento: translación plana, y de rotación en torno de un eje perpendicular al plano del movimiento. Lo anterior se puede apreciar en la figura (IV.1.5) (a y b) siguiente, considerando como plano del movimiento el ***xy***:

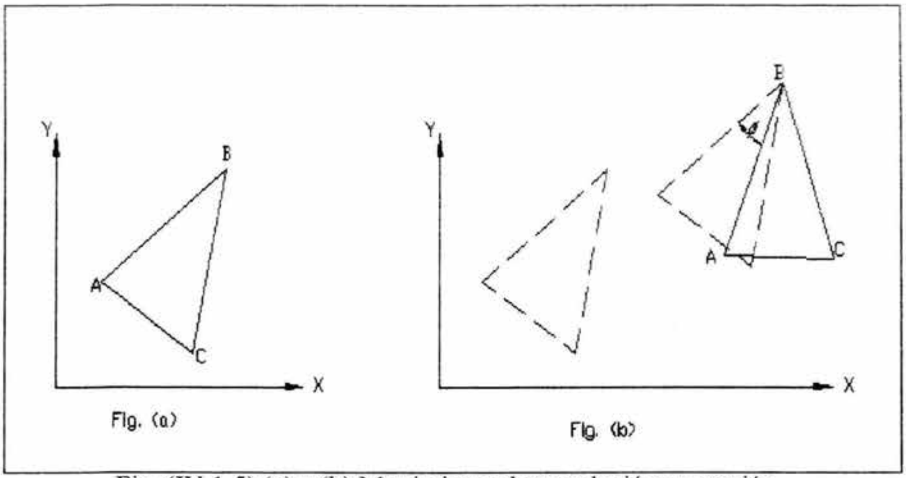


Fig. (IV.1.5) (a) y (b) Movimiento de translación y rotación

A la intersección del eje de rotación con el plano del movimiento se le denomina centro de rotación (CR). La siguiente figura (IV.1.6) aclara más el concepto de superposición:

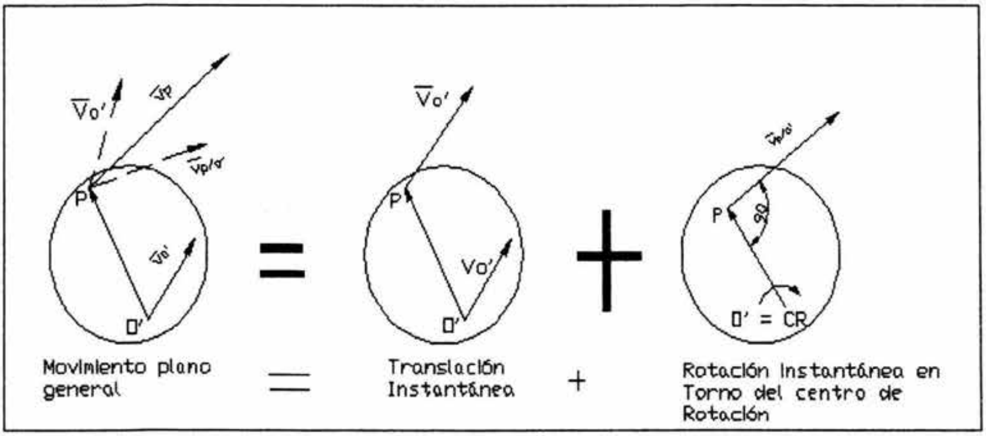


Fig. (IV.1.6)

() Referencia de bibliografía.

4.5 ECUACIONES PARA LOS MOVIMIENTOS PLANOS DEL CUERPO RIGIDO.

Analicemos el cuerpo rígido, en relación a un marco fijo de referencia, y a través de un sistema móvil que se mueve exactamente igual que el cuerpo en estudio, condición que implica que el vector $\vec{\rho}$ de cualquier punto del cuerpo de la figura (IV.1.7) sea constante

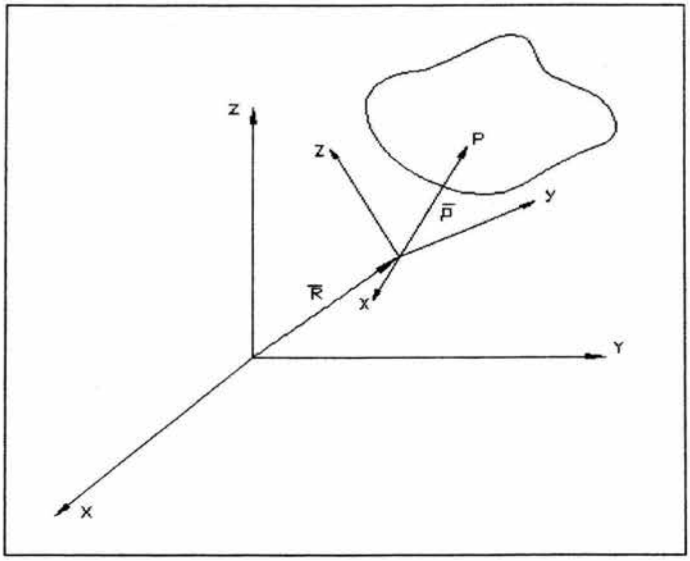


Fig. (IV.1.7)

Las ecuaciones que nos permiten determinar las características cinemáticas de un punto, relacionadas a un sistema fijo, y a través de un sistema móvil de referencia, se han estudiado en el tema de movimiento relativo y son:

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{\rho} \qquad (3.0.0)$$

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v} = \dot{\vec{R}} + \vec{\omega} \times \vec{\rho} + \dot{\vec{\rho}} \qquad (3.1.0)$$

() Referencia de bibliografía.

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{R}} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{\rho} \right) + 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{\rho}} + \ddot{\vec{\rho}} \qquad (3.1.2)$$

Ahora si consideramos que $\vec{\rho}$ es constante, se tiene:

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{\rho} \qquad (4.0.0)$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{R}} + \vec{\omega} \times \vec{\rho} \qquad (4.0.1)$$

$$\vec{a} = \ddot{\vec{R}} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{\rho} \right) \qquad (4.0.2)$$

Estas ecuaciones constituyen las ecuaciones generales que nos permiten conocer las características cinemáticas de cualquier punto de un cuerpo rígido.

TRASLACIONES RECTILÍNEA Y CURVILÍNEA

Tomando en cuenta que la traslación de un cuerpo se caracteriza por la constancia en la orientación de cualquier segmento dirigido determinado por dos puntos cualesquiera del cuerpo y debido a que el sistema móvil de referencia se mueve de la misma manera que el cuerpo, se tiene que $\vec{\omega} = 0$ y las ecuaciones generales de la cinemática del cuerpo rígido (4.0.0), (4.0.1) y (4.0.2) se simplifican de la forma siguiente:

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{\rho} \qquad (4.0.3)$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{R}} \qquad (4.0.4)$$

$$\vec{a} = \ddot{\vec{R}} \qquad (4.0.5)$$

() Referencia de bibliografía.

Al observar las ecuaciones anteriores, se concluye que tanto la velocidad como la aceleración de cualquier punto del cuerpo son las mismas de la velocidad y aceleración del origen del sistema móvil de referencia, es decir, que, en un cuerpo que se mueve con movimiento de translación, rectilínea o curvilínea, todas las características cinemáticas de sus puntos, a excepción obvia de su posición, son iguales.

ROTACIONES CONCÉNTRICAS Y EXCÉNTRICA

Un cuerpo tendrá movimiento de rotación concéntrica cuando el centro de rotación del movimiento coincida con el centro de gravedad del cuerpo, en caso contrario, la rotación será excéntrica.

Consideremos un cuerpo C con movimiento de rotación en torno al punto O' como se muestra en la figura (IV.1.9) (a)

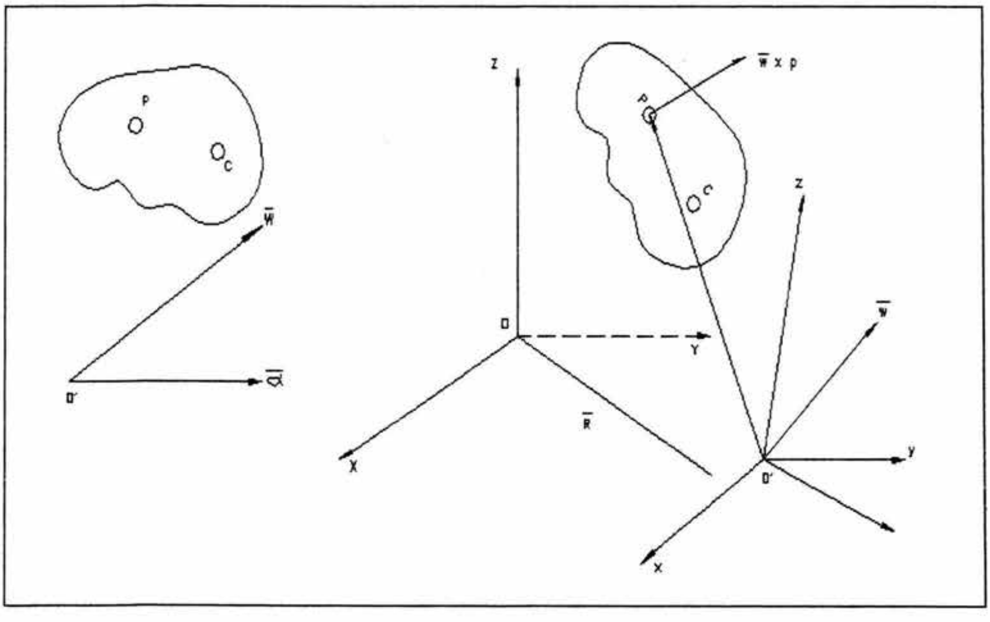


Fig. (IV.1.9) (a) y (b)

Situando los orígenes de los sistemas de referencia en el centro de rotación O' como se muestra en la figura (IV.1.9) (b), $\dot{\vec{R}} = \ddot{\vec{R}} = 0$ y las ecuaciones generales de la cinemática del cuerpo rígido (4.0.0), (4.0.1) y (4.0.2) quedaran de la siguiente forma:

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{\rho} \qquad (4.0.6)$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{\rho} \qquad (4.0.7)$$

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{\rho} \right) \qquad (4.0.8)$$

Siendo indistinta su utilización para movimientos de rotación concéntrica o excéntrica.

MOVIMIENTO PLANO GENERAL

Teniendo en cuenta que el movimiento plano de un cuerpo se puede descomponer en un movimiento de translación simple más un movimiento de rotación en torno a un punto llamado punto base, podemos efectuar en forma separada y en cualquier orden ambos movimientos. Así consideremos un cuerpo C, Fig. (IV.2.0) que se mueve con movimiento plano.

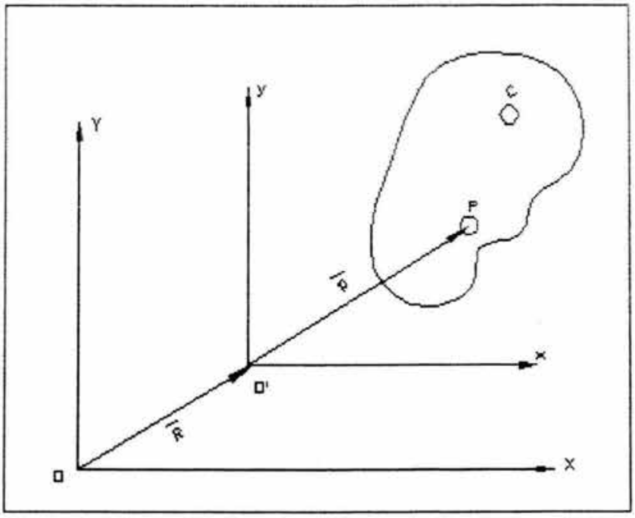


Fig. (IV.2.0)

Analizando las características cinemáticas del punto P del cuerpo tenemos:

a) Un movimiento de P debido a la translación del cuerpo C, caracterizado por el movimiento de translación de O'

$\vec{r} = \vec{R} + \vec{\rho}$

$\vec{v}_{P/T} = \dot{\vec{R}}$ Velocidad de P debida a traslación.

$\vec{a}_{P/T} = \ddot{\vec{R}}$ Aceleración de P debida a traslación.

b) Un movimiento de P debido a la rotación del cuerpo C, en torno del punto O', punto base.

$\vec{v}_{P/R} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}$ Velocidad de P debida a rotación.

$\vec{a}_{P/R} = \vec{\alpha} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{\rho} \right)$ Aceleración de P debida a rotación.

Es decir, que se tiene un movimiento debido a traslación y otro debido a rotación en torno a un punto, que al efectuarse conjuntamente caracterizan el movimiento plano general del cuerpo.

$$\vec{V} = \vec{V}_{\text{traslación}} + \vec{v}_{\textit{rotación}}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_{\text{traslación}} + \vec{a}_{\text{rotación}}$$

CENTRO INSTANTANEO DE ROTACIÓN

Supongamos un cuerpo con movimiento plano como el de la figura (IV.2.1) (a) en el cual se muestran las velocidades de dos puntos cualesquiera del cuerpo.

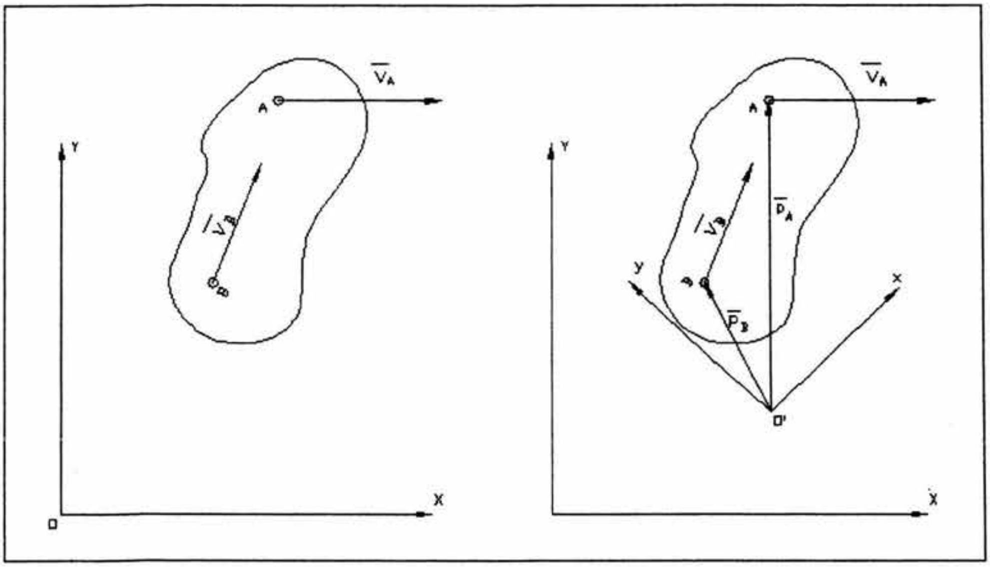


Fig. (IV.2.1) (a) y (b)

Si trazamos perpendiculares a los vectores velocidad $\vec{v}_A$ y $\vec{v}_B$ por los dos puntos A y B, estas se cortarán en un punto en el cual situamos el origen del sistema móvil de referencia Fig. (IV.2.1) (b) Así:

$$\vec{v}_A = \dot{\vec{R}} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_A$$

$$\vec{v}_B = \dot{\vec{R}} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_B$$

Como:

$$\vec{\omega} \times \vec{\rho}_A \parallel \vec{v}_A \,, \qquad \text{Entonces} \qquad \dot{\vec{R}} \parallel \vec{v}_A$$

Por otro lado,

$$\vec{\omega} \times \vec{\rho}_B \parallel \vec{v}_B \,, \quad \text{De tal manera} \qquad \dot{\vec{R}} \parallel \vec{v}_B$$

Como $\dot{\vec{R}}$ no puede ser al mismo tiempo paralelo a $\vec{v}_A$ y $\vec{v}_B$, necesariamente $\dot{\vec{R}} = 0$

Esto es, que en el instante de la configuración existe un punto (en donde hemos situado el origen del sistema móvil) que no tiene velocidad ($\dot{\vec{R}}$ = 0) llamado centro instantáneo de rotación o centro instantáneo de velocidad nula.

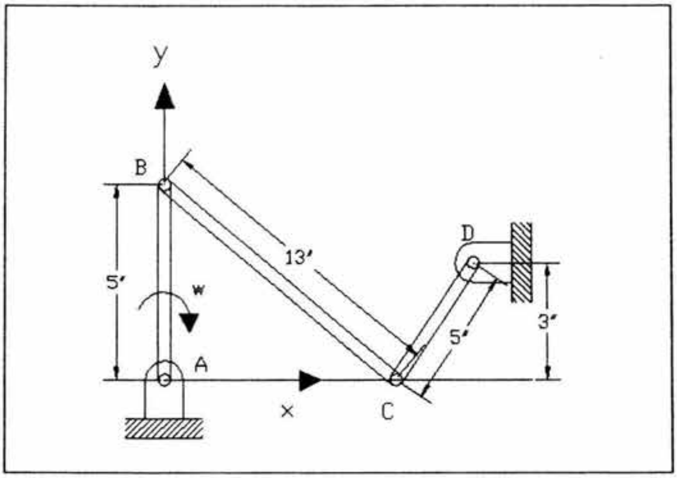
El centro instantáneo de rotación será de utilidad al hacerlo coincidir con el punto base al que se aludió en el movimiento plano general, pues en estas condiciones no existe velocidad debida a traslación, y la velocidad de cualquier punto del cuerpo será únicamente la debida a rotación en torno al centro instantáneo de rotación.

4.6 Ejercicios referentes al capitulo IV.

Ejercicio 1:

La barra AB del mecanismo tiene una velocidad angular de 8 s^{-1} con el sentido que se muestra en la figura.

Determine las velocidades angulares de las barras BC y CD así como la velocidad lineal del punto C.



Solución: Este ejercicio tiene la característica de los movimientos planos en general. Para la barra AB situamos el origen del sistema móvil en el punto A que se encuentra fijo.

De las ecuaciones de velocidad relativa tenemos:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \left(\vec{v}_{B/A} \times r_{B/A}\right),$$

$\vec{v}_A = 0$, usando los datos dados, la velocidad angular de la barra AB es:

$\vec{w}_{B/A} = -8\hat{k}\left(rad/_{s}\right)$ $\quad r_{B/A} = 5\,\hat{j}\,(in)$, que es la posición de B respecto a A.

Realizando el producto vectorial de nuestra ecuación de la forma siguiente:

$$\vec{w}_{B/A}\times r_{B/A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & -8 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 40i\left(in/_{s}\right)$$

Sustituyendo los valores obtenidos en la ecuación de velocidad, obtenemos:

$$\vec{v}_B = 40i\left(in/_{s}\right)$$

Para conocer la velocidad del punto C, localizamos nuestro eje de referencia en el punto B, y nuestra ecuación de velocidad relativa es la siguiente.

$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \left(\vec{w}_{C/B}\times\vec{r}_{C/B}\right),$$

De donde $\vec{w}_{C/B} = \vec{w}_{C/B}\,\hat{k}$ es la dirección de la velocidad angular

y la posición del punto C esta dado por:

$$\vec{r}_{C/B} = 12\,\hat{i} - 5\hat{j}$$

Sustituyendo en la ecuación de velocidad:

$$\vec{w}_{C/B}\times\vec{r}_{C/B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & w_{C/B} \\ 12 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 5\vec{w}_{C/B}\,\hat{i} + 12\vec{w}_{C/B}\,\hat{j}$$

$$\vec{v}_C = \left(40+5\vec{w}_{C/B}\right)i + 12\vec{w}_{C/B}\,j \qquad \text{(a)}$$

La velocidad del punto D, es cero ya que se encuentra fijo, como se muestra en la figura.

() Referencia de bibliografía.

Usaremos la siguiente ecuación para tener dos ecuaciones de la velocidad de C, que igualaremos con la ya obtenida.

$$\vec{v}_C = \vec{v}_D + \left(\vec{w}_{C/D} \times \vec{r}_{C/D}\right)$$

Obteniendo el producto vectorial y la posición del punto C con respecto a D.

$\vec{w}_{C/D} = \vec{w}_{C/D}\,\hat{k}$; y la posición, $\vec{r}_{C/D} = -\left(4\,\hat{i} + 3\,\hat{j}\right)$.

El producto vectorial nos da:

$$\vec{w}_{C/D} \times \vec{r}_{C/D} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & w_{C/D} \\ -4 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 3\vec{w}_{C/D}\,\hat{i} - 4\vec{w}_{C/D}\,\hat{j}$$

Sustituyendo en la ecuación de velocidad.

$$\vec{v}_C = 3\vec{w}_{C/D}\,\hat{i} - 4\vec{w}_{C/D}\,\hat{j} \qquad \text{(b)}$$

Igualando nuestras dos ecuaciones (a) y (b)

$$3\vec{w}_{C/D} = 40 + 5\vec{w}_{C/B}$$

$$12\,w_{C/B} = -4\,w_{C/B}; \quad \Rightarrow \quad w_{C/B} = -\frac{1}{3}w_{C/D}$$

Sustituyendo esta relación en la anterior.

$$3\vec{w}_{C/D} = 40 + 5\left(-\frac{1}{3}\vec{w}_{C/D}\right), \quad \Rightarrow 3\vec{w}_{C/D} = 40 - \frac{5}{3}\vec{w}_{C/D}$$

Agrupando términos:

$$\frac{9}{3}\vec{w}_{C/D}+\frac{5}{3}\vec{w}_{C/D}=40\,,\qquad \Rightarrow\qquad \frac{14}{3}\vec{w}_{C/D}=40,\ \text{despejando}\ w_{C/D},$$

$$w_{C/D}=\frac{60}{7}\hat{k}\ \left(\text{rad}/_{\text{s}}\right)$$

Sustituyendo en la relación de velocidad angular de B.

$$w_{C/B}=-\frac{1}{3}\left(\frac{60}{7}\right)=-2.86\ \hat{k}\ \left(rad/_{s}\right)$$

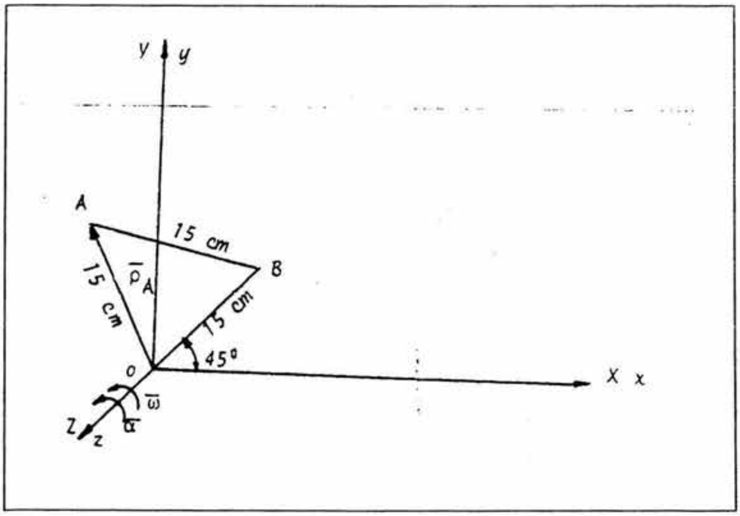
Sustituyendo en la ecuación (b) obtenemos la velocidad del punto C.

$$v_c=3\left(\frac{60}{7}\right)\hat{\imath}-4\left(\frac{60}{7}\right)\hat{\jmath}$$

$$v_C=25.71\hat{\imath}-34.28\hat{\jmath}\ \left(in/_{s}\right)$$

Ejercicio 2:

La placa triangular de la figura gira en el plano ***x o y*** en torno del punto O, con una rapidez angular w = 6 s^{-1} y aceleración angular $\alpha = 2\ s^{-2}$ en el mismo sentido que w. determine la velocidad y aceleración del punto A.



Solución: Usando las ecuaciones de cuerpo rígido y haciendo coincidir el origen de ambos sistemas en el centro de rotación.

La velocidad del punto A, esta dada por la ecuación:

$$\vec{v}_A = \vec{w}_O \times \vec{r}_{A/O}\text{; Donde } \vec{w}_O = 6\hat{k}\left(rad/_s\right) \text{ la posición de A es:}$$

$$\vec{r}_{A/O} = -15\cos(75°)\,\hat{i} + 15\,sen\,(75°)\,\hat{j}$$

$$\vec{r}_{A/O} = -3.88\,\hat{i} + 14.49\,\hat{j}$$

Realizando el producto vectorial:

$^{()}$ Referencia de bibliografía.

$$\vec{w}_O \times \vec{r}_{A/O} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 6 \\ -3.88 & 14.49 & 0 \end{vmatrix} = -86.94\hat{\imath} - 23.28\hat{\jmath}$$

Sustituyendo en la ecuación de velocidad.

$$\vec{v}_A = -86.94\hat{\imath} - 23.28\hat{\jmath} \left(cm/_s \right)$$

La ecuación de aceleración esta dada por:

$$\vec{a}_A = \vec{\alpha} \times \vec{r}_{A/O} + \vec{w}_O \times \left(\vec{w}_O \times \vec{r}_{A/O} \right)$$

Realizando el producto vectorial de la aceleración y el vector de posición del punto A

$$\vec{\alpha} \times \vec{r}_{A/O} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 6 \\ -3.88 & 14.49 & 0 \end{vmatrix} = -28.98\,\hat{\imath} - 7.76\,\hat{\jmath}$$

De igual manera realizamos el producto vectorial de los términos restantes de la ecuación de aceleración:

$$\vec{w}_O \times \left(\vec{w}_O \times \vec{r}_{A/O} \right) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 6 \\ -86.94 & -23.28 & 0 \end{vmatrix} = 139.68\hat{\imath} - 521.64\,\hat{\jmath}$$

Sustituyendo los resultados anteriores en nuestra ecuación de aceleración.

$$\vec{\alpha}_A = (-28.98 + 139.68)\hat{\imath} + (-7.76 - 521.64)\hat{\jmath}$$

$$\underline{\vec{\alpha}_A = 110.70\hat{\imath} - 529.40\,\hat{\jmath} \ \left(cm/_{s^2} \right)}$$

EJERCICIO 3.

En el sistema de biela – manivela mostrado, la barra AB tiene velocidad angular constante en el sentido de movimiento de las manecillas del reloj de 2000 rev. / min., para la posición de la manivela indicada, Determine:

a) – La velocidad angular de la biela BD.

c) – La velocidad del émbolo P.

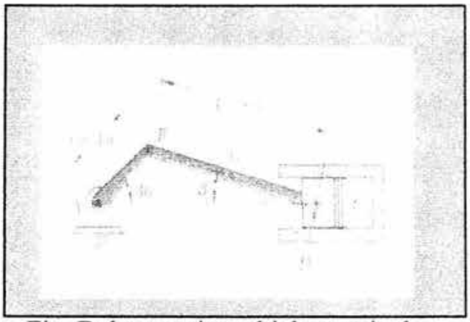


Fig. Del mecanismo biela-manivela.

Solución: Este ejercicio tiene la característica de los movimientos planos en general para la barra AB situamos el origen del sistema móvil en el punto A que se encuentra fijo.

De las ecuaciones de velocidad relativa.

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \left(\vec{\omega}_{BA} \times \vec{r}_{BA}\right),$$

$\vec{v}_A = 0$, usando los datos, la velocidad angular de la barra AB es:

$$\vec{\omega}_{AB} = \left(2000\frac{rev}{\min.}\right)\left(\frac{1\min}{60s}\right)\left(\frac{2\pi\, rad}{1 rev}\right) = 209\ \frac{rad}{s}$$

El vector de posición de $\vec{r}_{BA}$, esta dado por

$$r_{BA} = (3\cos 40)\hat{\imath} + (3\, sen 40)\hat{\jmath} = 2.298\hat{\imath} + 1.928\hat{\jmath}$$

Realizando el producto vectorial de la ecuación.

$$\vec{\omega}_{BA} \times \vec{r}_{BA} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 209 \\ 2.298 & 1.928 & 0 \end{vmatrix} = -402.952\hat{\imath} + 480.282\hat{\jmath}$$

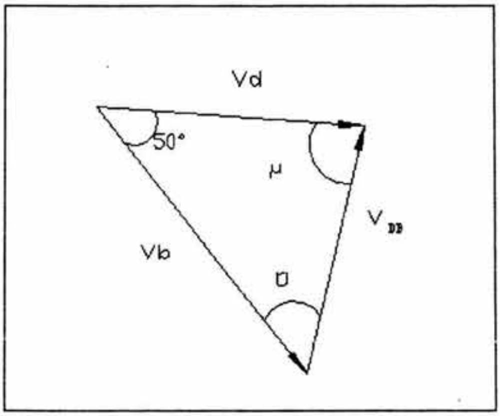
$$\vec{v}_B = -402.952\hat{\imath} + 480282\hat{\jmath} = \sqrt{(-402.952)^2 + (480.282)^2} = 626.9\ {in}/{s}$$

Con un ángulo de $\theta = arc\tan\left(480.282 / -402.952\right) = 50^{\circ}$

Ahora calcularemos la velocidad de la biela BD.

$$\vec{v}_D = \vec{v}_B + \vec{v}_{DB}$$

Realizando un diagrama vectorial de las velocidades como el mostrado en la Fig.



Calculando el ángulo ß, para conocer el ángulo μ y posteriormente el ángulo restante.

De la ley de los senos:

$$\frac{Sen\,40}{8in} = \frac{sen\,\beta}{3in} \Rightarrow sen\,\beta = \frac{sen\,40}{8\,in} \times 3\ in = 0.241,$$

ß = Arcsen (0.241) = 13.9 °, Por lo que μ = 90 – 13.9 = 76.1°

σ = 180-76.1-50 = 53.9°

De nuestro triangulo de velocidades, aplicando nuevamente la ley de senos.

$$\frac{626.9\ in/s}{sen\,76.1°} = \frac{V_{DB}}{sen\,50°} = \frac{Vd}{sen\ 53.9°},$$ De donde Vd es

$$Vd = \frac{626.9}{sen\,76.1} \times sen\,53.9 = 521.8\ in/s,$$ Es la velocidad del embolo P.

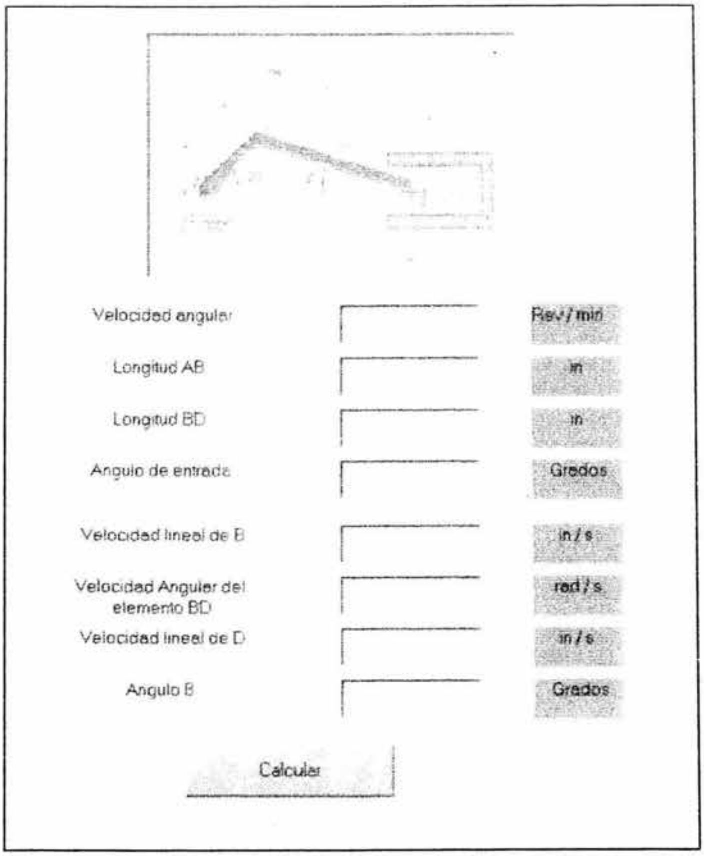
Y la velocidad V_{DB}

$$V_{DB} = \frac{626.9}{sen\,76.1} \times sen\,50 = 494.7\ in/s,$$

Y la velocidad angular de la biela BD es

$$\omega_{DB} = \frac{494.7}{8} = 61.8\ rad/s$$

Programa resuelto por computadora para el ejercicio anterior.



Formulario del programa biela-manivela

CÓDIGO DEL PROGRAMA BIELA – MANIVELA

```
Private Sub Calcular_Click()
        Dim Wa As Double, Lab As Double
        Dim Lbd As Double, Ang As Double
        Dim Vb As Double, Wbd As Double
        Dim Vd As Integer, Angß As Double
        Const pi = 3.1415
        Wa = Velangular_A.Text
        Lab = Long_AB.Text
        Lbd = Long_BD.Text
        Ang = Angulo.Text
        Wab = Wa * 2 * pi / 60
        Vb = Wab * Lab
        Rad = Ang * pi / 180
        Angß = Sin(Rad) / Lbd * Lab
        ß = Atn(Angß / Sqr(-Angß * Angß + 1))
        Gradß = ß * 180 / pi
        µ = (90 - Gradß) * pi / 180
        þ = (180 - 76.1 - 50) * pi / 180
        z = 50 * pi / 180
        Vd = Vb / Sin(µ) * Sin(þ)
        Vdb = Vb / Sin(µ) * Sin(z)
        Wbd = Vdb / Lbd
        Velocidad_B.Text = Format(Vb, "#,##0")
        Velangular_BD.Text = Format(Wbd, "#,##0.0")
        Velocidad_D.Text = Format(Vd, "#,##0.0")
        Angbeta.Text = Format(Gradß, "#,##0.0")
End Sub
```

Este trabajo reúne los temas básicos que un estudiante de cinemática debe conocer, la teoría que contiene es muy básica, la mayoría de problemas resueltos que presentamos en este escrito, permitirán al estudiante de ingeniería, que cursa la materia de cinemática, pueda poner a prueba su conocimiento para llegar a una solución correcta y satisfactoria, para que de esta manera se sienta motivado e impulsado al estudio de la cinemática.

Como se habrá notado, se requieren de otros conocimientos básicos que un estudiante de la carrera de Ingeniería Mecánica – Eléctrica debe haber adquirido, tales como el cálculo diferencial e integral, la estática, el álgebra vectorial, e incluso álgebra y trigonometría, y no hay que olvidar los factores de conversión, útiles en diversos desarrollos de algunos problemas. Así como tener conocimiento de programación por computadora, en este trabajo se utilizo el programa de Visual Basic V6 ya que es sencillo, aunque el estudiante puede realizar los ejercicios en algún otro lenguaje de programación de su elección.

Este manual será de utilidad al estudiante, ya sea como consulta o para la resolución de algún problema en particular. Ya que se dan puntos de vista diferentes sobre los temas, además se pueda complementar y enriquecer la formación académica de los estudiantes.

Por ultimo quiero concluir, que este trabajo de tesis sea uno de los muchos que se elaboren de este tipo, en los cuales el estudiante de IME, pueda recurrir a ellos, y encontrar la solución a sus dudas, aunque lo importante es que el estudiante no debe desechar, los conocimientos adquiridos. Y darle la importancia debida.

BIBLIOGRAFÍA

Titulo	Ingeniería Mecánica Dinámica
(1) Autor	Bele I. Sandor Y Karen J. Ritcher, 2ª. Edición
Editorial	Prentice Hall International.
Titulo	Mecánica Vectorial Para Ingenieros Dinámica
(2) Autor	Ferdinand P. Beer y E. Russell Jhonston Jr. 5ª Edición
Editorial	Mc Graw Hill.
Titulo	Mecánica Para Ingenieros Cinemática, Dinámica
(3) Autor	Russell C. Hibbeler. 6ª Edición
Editorial	CECSA
Titulo	Ingeniería Mecánica Vol. II Dinámica
(4) Autor	Archie Higdon y William B. Stiles. 3ª Edición
Editorial	Prentice Hall Internacional
Titulo	El cálculo con geometría analítica
(5) Autor	Louis Leithold
Editorial	HARLA.
Titulo	Mecánica II Dinámica
(6) Autor	J. L. Meriam. 2ª Edición.
Editorial	Prentice Hall Internacional.
Titulo	Mecánica Para Ingenieros Dinámica
(7) Autor	Ferdinand L. Singer. 3ª Edición.
Editorial	HARLA

Titulo	Mecánica, movimiento ondulatorio y calor.
(8) Autor	Francisco W. Sears.
Editorial	AGUILAR.
Titulo	Mecánica I
(9) Autor	Facultad De Ingeniería U.N.A.M. 2ª Edición.
Editorial	IMPOS, Editores, S.A.
Titulo	Antecedentes de mecánica.
(10) Autor	Facultad de Ingeniería U.N.A.M. 2ª Edición.
Editorial	Nueva Editorial Interamericana.
Titulo	Mecánica Para Estudiantes de Ingeniería.
(11) Autor	Lane K. Branson.
Editorial	Fondo Educativo Interamericano. S.A.
Titulo	Geometría analítica
(12) Autor	Charles H. Lehmann.
Editorial	LIMUSA
Titulo	Física.
(13) Autor	Jerry D. Wilson. Segunda Edición.
Editorial	PRENTICE HALL.
Titulo	Curso de programación de Visual Basic 6
(14) Autor	Francisco Javier Cevallos Sierra
Editorial	Alfaomega