



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

01162
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

MODELACIÓN BIDIMENSIONAL DEL DRENAJE
AGRÍCOLA CON LA ECUACIÓN DE BOUSSINESQ

TELLY LEÓN RODRÍGUEZ

T E S I S
PRESENTADA COMO REQUISITO
PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN INGENIERÍA
(HIDRÁULICA)

DIRIGIDA POR:

Dr. CARLOS FUENTES RUIZ

ASESORADA POR:

Dr. HEBER SAUCEDO ROJAS



CIUDAD UNIVERSITARIA
CAMPUS MORELOS

2004



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

AGRADECIMIENTOS

A la **UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO** por haberme permitido la realización del posgrado, permitiéndome estudiar fuera de las fronteras de mi país, y brindarme la oportunidad de aprender y perfeccionar mi formación de ingeniero. Asimismo a la Dirección General De Estudios de Posgrado Subdirección de Programas Institucionales de Apoyo al Posgrado por la beca que me fue otorgada.

El trabajo de esta tesis de maestría ha requerido un esfuerzo individual. Durante el desarrollo de mis estudios de maestría he aprendido de numerosas personas con quienes he compartido inquietudes y experiencias. Por tal razón quiero agradecer de manera especial y sinceramente Al **Dr. Carlos Fuentes Ruiz**, por su apoyo como director de esta tesis y conocimientos transmitidos.

Al **Dr. Heber Saucedo Rojas**, mi gratitud especial por asesorar esta tesis, y el interés concedido durante las diferentes fases de este trabajo.

A mis sinodales **Dr. Jaime Collado Moctezuma**, **Dr. Nahum Hamed García Villanueva** y al **M.C. Jorge Arturo Hidalgo Toledo**, por su colaboración para culminar este trabajo.

Al **INSTITUTO MEXICANO DE TECNOLOGÍA DEL AGUA**, por apoyarme en la realización de la investigación.

Por último es una enorme satisfacción agradecer a las personas que más de cerca han sobrellevado mi formación, mi familia y amigos.

RESUMEN

En este trabajo se desarrolla una solución numérica para la ecuación diferencial parcial no lineal de Boussinesq en su forma unidimensional y bidimensional con el método del elemento finito, utilizando una condición de frontera tipo radiación fractal para describir el comportamiento de la carga hidráulica y del gasto en la frontera del dren. La condición de frontera de radiación fractal estipula una forma funcional para el cálculo del coeficiente de conductancia en la interfaz suelo-dren, la inclusión de los efectos de la zona no saturada se hace a partir del parámetro de la porosidad drenada de Fragoza *et al.* (2003). La solución de elemento finito es aplicada en dos casos; en el primero se hace una comparación entre las aproximaciones unidimensional y bidimensional para describir el flujo del agua en sistemas de drenaje con colectores ranurados, la segunda aplicación se relaciona con la capacidad descriptiva del modelo para reproducir las observaciones realizadas en un sistema de drenaje instalado en la costa de Chiapas.

ÍNDICE GENERAL

AGRADECIMIENTOS	i
RESUMEN	ii
ÍNDICE	iii
LISTA DE ILUSTRACIONES	v
LISTA DE CUADROS	vii
CAPÍTULO I	1
INTRODUCCIÓN	1
1.1. Posición del Problema	2
1.2. Objetivos	4
CAPÍTULO DOS	5
ECUACIONES DE BASE	5
2.1. Ecuaciones fundamentales	5
2.1.1. Ecuación de continuidad	5
2.1.2. Ley de Darcy	5
2.2. La ecuación de Boussinesq	6
2.2.1. Ecuación bidimensional de Boussinesq para acuíferos libres	6
2.2.2. Forma unidimensional de la ecuación de Boussinesq	10
2.3. Sobre las características hidrodinámicas	11
2.3.1. Forma de cálculo para la porosidad drenable	11
2.3.2. Coeficiente de transmisibilidad	14
2.4. Método del Elemento Finito	15
2.4.1. Método de los residuos ponderados	15
2.4.1. Generalidades del método del elemento finito	16
2.4.3. Funciones de base	17
2.4.3.1. Forma unidimensional	17
2.4.3.2. Forma bidimensional	18
2.5. Condiciones Límite	18
2.5.1. Tipos de condiciones de frontera	18
2.5.2. La condición de radiación fractal en la ecuación de Boussinesq	20
2.5.2.1. Radiación de Newton	20
2.5.2.2. Sobre la radiación fractal en un sistema de drenaje agrícola	21
CAPÍTULO III	25
ESQUEMA NUMÉRICO PARA LA ECUACIÓN DE BOUSSINESQ	25

3.1. Una solución de elemento finito a la ecuación bidimensional de Boussinesq	25
3.1.1. Incorporación de las condiciones límite	27
3.1.2. Discretización espacial de la ecuación bidimensional de Boussinesq	28
3.1.3. Discretización temporal de la ecuación bidimensional de Boussinesq	32
3.2. Solución de elemento finito para la forma unidimensional de Boussinesq	33
3.3. Validación del esquema numérico de solución para la ecuación de Boussinesq	35
3.3.1. Solución analítica para la forma unidimensional de Boussinesq	35
3.3.1.1. Régimen transitorio	37
3.3.1.2. Régimen permanente	38
CAPÍTULO IV	40
APLICACIONES	40
4.1. Efecto de un colector ranurado en el flujo del agua en un sistema de drenaje agrícola	40
4.1.1 Caso colector cerrado	41
4.1.2 Caso colector ranurado	43
4.2. Aplicación en el experimento de drenaje subterráneo en el ingenio de Huixtla, costa de Chiapas	50
4.2.1. Características generales de la zona de Huixtla Chiapas	50
4.2.2. Evaluación hidráulica del sistema de drenaje agrícola instalado en Huixtla, Chiapas	52
CAPÍTULO V	59
CONCLUSIONES	59
REFERENCIAS	61

LISTA DE ILUSTRACIONES

Ilustración 2.1. Esquema general de la posición del manto freático en el perfil de suelo.	7
Ilustración 2.2. Esquema de la columna de suelo que se ubica encima del dren.	22
Ilustración 3.1. Dominio de solución para la forma bidimensional de Boussinesq.	26
Ilustración 3.2. Esquema para el sistema de drenaje. Corte AA de la ilustración 3.1.	26
Ilustración 3.3. Evolución de la superficie libre y la lámina drenada obtenida con la solución de elemento finito y la solución analítica para régimen transitorio.	38
Ilustración 3.4. Evolución de la superficie libre para régimen transitorio con la solución de elemento finito tiende a solución analítica para régimen permanente.	39
Ilustración 4.1. Sistema de drenaje agrícola utilizado para las simulaciones.	40
Ilustración 4.2. Malla de elemento finito para el escenario de drenaje del inciso 4.1.1.	41
Ilustración 4.3. Comparación unidimensional y bidimensional del esquema numérico de solución para la ecuación de Boussinesq y comportamiento del manto freático para la forma bidimensional con el colector principal cerrado.	42
Ilustración 4.4. Mallas de elementos finitos para los escenarios de drenaje del inciso 4.1.2. Separación entre drenes de 30m y 50m.	44
Ilustración 4.5. Comparación de la solución unidimensional y bidimensional de la carga hidráulica sobre el dren y al centro entre drenes bajo la incidencia del colector principal ranurado,. Suelo de la Arcilla de Yolo, $L = 50m$.	47
Ilustración 4.6. Comparación de la solución unidimensional y bidimensional de la carga hidráulica sobre el dren y al centro entre drenes bajo la incidencia del colector principal ranurado,. Suelo Franco Montecillo, $L = 50m$.	48
Ilustración 4.7. Comparación de la solución unidimensional y bidimensional de la carga hidráulica sobre el dren y al centro entre drenes bajo la incidencia del colector principal ranurado. Suelo de la Arcilla de Yolo, $L = 30m$.	49
Ilustración 4.8. Topografía y croquis de la localización de la parcela demostrativa del ingenio de Huixtla (Namuche <i>et al.</i> , 2003).	51
Ilustración 4.9. Textura de los suelos de la parcela demostrativa del ingenio de Huixtla, Chiapas.(Namuche <i>et al.</i> , 2003).	52

Ilustración 4.10. Esquema general del dren lateral evaluado en el sistema de drenaje experimental de Huixtla.	53
Ilustración 4.11. Registro de gastos drenados durante el periodo comprendido del 16 de septiembre al 30 de octubre de 2003.	54
Ilustración 4.12. División del subsistema de drenaje en las franjas de suelo	55
Ilustración 4.13. Comparación entre el hidrograma de salida experimental y el hidrograma de salida teórico del drenaje parcelario en el ingenio de Huixtla, Chiapas.	57
Ilustración 4.14. Evolución de la carga hidráulica en el centro interdrenes y sobre el dren para los datos observados y la reproducción numérica.	58

LISTA DE CUADROS

Cuadro 4.1. Resultados para la solución bidimensional para el escenario de drenaje con L=50m. Posición centro entre drenes.	45
Cuadro 4.2. Resultados para la solución bidimensional para el escenario de drenaje con L=50m. Posición sobre el dren.	45
Cuadro 4.3. Resultados para la solución bidimensional para el escenario de drenaje con L=30m. Posición centro entre drenes.	45
Cuadro 4.4. Resultados para la solución bidimensional para el escenario de drenaje con L=30m. Posición sobre el dren.	45
Cuadro 4.5. Relación entre la longitud de influencia (L_{INF}) y la separación entre drenes para los tres tipos de suelos y los dos escenarios de drenaje.	46
Cuadro 4.5. Características hidrodinámicas del subsistema de drenaje.	55

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

El entendimiento de los procesos que rigen la transferencia de agua en las zonas parcialmente saturada y no saturada del suelo es cada vez más necesario al incrementarse los problemas por la escasez de agua y la necesidad de un manejo más eficiente de este recurso. En el campo agrícola la necesidad de mejorar los procesos de riego y controlar los procesos de drenaje en las parcelas de riego ha incitado al estudio más profundo de los fenómenos físicos que tienen lugar en el suelo. El estudio del comportamiento del manto freático se hace importante en zonas de riego donde se presentan problemas de sobre-elevación de los niveles freáticos debido a un uso ineficiente del agua de riego o a una alta pluviosidad. El drenaje agrícola es el mecanismo para eliminar los excedentes de agua y el exceso de sales en la zona radical del suelo, una descripción rigurosa del proceso de evacuación de las aguas basado en el uso de modelos físico-matemáticos permite predecir su comportamiento en el espacio y en el tiempo.

El problema de la transferencia del agua en los sistemas de drenaje puede ser abordado con la ecuación de Richards (1931) la cual permite considerar explícitamente tanto la forma como la profundidad del dren. El estudio detallado requiere de la utilización de la ecuación tridimensional de Richards (1931), lo que dificulta la obtención de una solución numérica o analítica, la complejidad asociada con esta aproximación ha originado que el drenaje agrícola se aborde a partir de la ecuación de Boussinesq de los acuíferos libres.

En este trabajo se desarrolla una solución numérica para la ecuación bidimensional de Boussinesq con el método del elemento finito para describir el comportamiento de un sistema de drenaje agrícola, se utiliza una condición de frontera de radiación fractal (Zavala *et al.*, 2003) para la transferencia de agua del suelo hacia los drenes, ya que esta aproximación considera de forma simultánea la evolución de la carga hidráulica sobre el dren y el gasto drenado a partir de la variación de la resistencia al flujo en la interfaz suelo-dren, siendo esta resistencia inversamente proporcional a una potencia fractal de la carga hidráulica sobre el dren.

El trabajo se divide en cinco capítulos. En el primer capítulo se hace una introducción al problema de los mantos freáticos someros en los distritos de riego, también se hace un posicionamiento del problema dentro de un marco físico y se plantean los objetivos del trabajo. El segundo capítulo trata las ecuaciones básicas de la transferencia del agua en un medio poroso, con un particular interés en la ecuación diferencial parcial no lineal bidimensional de Boussinesq. En el tercer capítulo se desarrolla la solución numérica de la ecuación bidimensional de Boussinesq con el método del elemento finito al igual que para la forma unidimensional y son revisadas algunas soluciones analíticas en régimen permanente y transitorio. En el cuarto capítulo se presenta la simulación de dos escenarios para analizar y comparar la capacidad de reproducción para la forma unidimensional y bidimensional de la ecuación de Boussinesq en el comportamiento de los sistemas de drenaje agrícola, además se utiliza la aproximación bidimensional para la evaluación hidráulica del sistema de drenaje agrícola del experimento de drenaje en la parcela demostrativa en el ingenio de Huixtla, costa de Chiapas.

1.1. Posición del Problema

La comprensión del fenómeno de la transferencia del agua resulta compleja, ya que este tiene lugar en un medio que es susceptible a deformarse (Vauclin 1994). El fenómeno que tiene lugar en este medio puede ser tratado a partir de dos escalas de estudio, la primera es la escala macroscópica, en la cual se estudia al medio basándose en un volumen elemental representativo para este caso la ecuación correspondiente es la de Richards (1931), el problema asociado con esta escala se refleja en obtener una solución para la forma tridimensional de la ecuación que describe el movimiento del agua del suelo hacia el dren y además la dificultad asociada con la caracterización hidrodinámica del medio poroso. La segunda escala es la megascópica, siendo esta la más utilizada para el análisis del movimiento del agua en los sistemas de drenaje agrícola. La ecuación correspondiente para el análisis megascópico es la ecuación de Boussinesq dentro de esta escala se considera que la velocidad media se obtiene a partir de la aplicación promediada de la ley de Darcy. El uso de la ecuación de Boussinesq es justificado cuando se propone una caracterización hidrodinámica global del medio poroso y no se considera la variabilidad espacial de manera propicia.

El estudio del movimiento del agua en los sistemas de drenaje subterráneo ha sido ampliamente analizado a través de la ecuación de Boussinesq, diversos estudios han obtenido como resultado soluciones semi-analíticas de esta ecuación, no obstante estas soluciones se sustentan en el supuesto de considerar constantes los coeficientes que intervienen en la ecuación de Boussinesq (Dumm, 1954; Pandey *et al.*, 1992), como por ejemplo la capacidad de almacenamiento y la transmisibilidad del acuífero, además de una condición de frontera simplificada sobre los drenes que no consideran la resistencia de las paredes del dren al flujo de agua del suelo hacia el dren (Dumm, 1954; Pandey *et al.*, 1992; Gupta *et al.*, 1994). Recientemente Zavala *et al.* (2003) muestra que se puede hacer una mejor descripción de la transferencia del agua en un sistema de drenaje subterráneo cuando se considera que coeficientes como la capacidad de almacenamiento son función de la carga hidráulica y una condición de frontera sobre el dren que representa simultáneamente la evolución de la carga hidráulica sobre el dren y el gasto drenado.

Con ciertas simplificaciones en el proceso de drenaje la ecuación de Boussinesq unidimensional ha permitido obtener aproximaciones y fórmulas relativamente simples para estimar la separación entre drenes (Hooghoudt, 1940; Ernst, (1950; Dumm, 1954; De Zeeuw y Hellinga, 1958; Fipps y Skaags, 1986; Fuentes *et al.*, 1997), sin embargo su limitación se relaciona a la incapacidad que presenta la forma unidimensional para representar algunos dominios de solución, como cuando se tiene un colector ranurado formando parte del sistema de drenaje. La solución de la ecuación de Boussinesq sobre un dominio bidimensional no presenta limitaciones en lo relacionado a la geometría del dominio y puede captar la heterogeneidad de los suelos.

1.2. Objetivos

El objetivo general de este trabajo es simular el comportamiento de un sistema de drenaje agrícola mediante la ecuación de Boussinesq aplicando una condición de frontera tipo radiación fractal (Zavala *et al.*, 2003) y la forma de cálculo de la porosidad drenable de Fragoza *et al.* (2003). El modelo desarrollado se utiliza para comparar las aproximaciones unidimensional y bidimensional para describir el flujo del agua hacia un sistema de drenaje considerando la presencia de un colector ranurado, así como para evaluar hidráulicamente un sistema de drenaje.

CAPÍTULO DOS

ECUACIONES DE BASE

El presente apartado trata las ecuaciones básicas de la transferencia del agua en un medio poroso, con un particular interés en la ecuación diferencial parcial no lineal bidimensional de Boussinesq la cual describe el comportamiento de los acuíferos libres en la zona saturada. La descripción del fenómeno de la transferencia del agua en el suelo es atacada a un nivel megascópico empleando un enfoque mecanicista donde el análisis se hace a un nivel medio, siendo una buena alternativa en la descripción de la transferencia del agua en un medio poroso. A continuación se presentan las hipótesis y ecuaciones que lo fundamentan.

2.1. Ecuaciones fundamentales

2.1.1. Ecuación de continuidad

El principio de la conservación de masa aplicado a un volumen unitario de material poroso como el suelo, permite llegar a la ecuación de continuidad que describe en forma general el flujo del agua a través del suelo. Las hipótesis que fundamentan este resultado son: i) se considera a la matriz de suelo no deformable, ii) se asume que el agua tiene una compresibilidad despreciable. La forma general para la ecuación de continuidad en un medio poroso:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q} + S = 0 \quad (2.1)$$

donde \mathbf{q} es el vector de flujo unitario de agua, con componentes q_x, q_y, q_z , θ es el contenido de agua en el suelo, S es el término que representa la cantidad de masa extraída por las plantas, $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$, es el operador gradiente $[L^{-1}]$.

2.1.2. Ley de Darcy

La ley de Darcy describe la velocidad del flujo de un líquido a través de un material poroso, el campo de velocidades definido por la ecuación de Darcy se acepta como un concepto megascópico donde la velocidad del flujo es directamente proporcional al gradiente hidráulico siendo la constante de proporcionalidad la conductividad hidráulica y se asumen como valores medios del continuo. Aceptando las hipótesis de i) la conductividad hidráulica es una función de las características del medio poroso, ii) el flujo es ocasionado por los potenciales de presión y gravedad, se obtiene:

$$\mathbf{q} = -K(\psi)\nabla(\psi + z) \quad (2.2)$$

donde \mathbf{q} es el vector de flujo unitario (gasto por unidad de superficie de suelo perpendicular a la dirección del flujo) en las direcciones cartesianas x, y, z [L/T], $K(\psi)$ es la conductividad hidráulica del medio [L/T], z es el potencial gravitacional [L], ψ representa al potencial de presiones en el suelo.

2.2. La ecuación de Boussinesq

La transferencia del agua a través de los medios porosos no se trata en forma general en este trabajo, el estudio del movimiento del agua se hace dentro de la escala megascópica específicamente para la descripción del flujo de agua en la zona saturada del suelo. Se contempla en orden de importancia las ecuaciones que describen el comportamiento los mantos freáticos o acuíferos libres mediante la ecuación no lineal de Boussinesq para su forma bidimensional y unidimensional.

2.2.1. Ecuación bidimensional de Boussinesq para acuíferos libres

La obtención de la ecuación de Boussinesq de los acuíferos libres proviene de una integración de la ecuación de Richards sobre la vertical. La ecuación de Richards (1931) en forma general se escribe como:

$$\frac{\partial \theta(x, y, z, t)}{\partial t} = - \frac{\partial q_x(x, y, z, t)}{\partial x} - \frac{\partial q_y(x, y, z, t)}{\partial y} - \frac{\partial q_z(x, y, z, t)}{\partial z} - S \quad (2.3)$$

La integración en la vertical de la ecuación (2.3) para un dominio de flujo como el mostrado en la ilustración 2.1, donde $H = H(x, y, t)$ es la elevación del manto freático [L], $H_o = H_o(x, y)$ es la posición del estrato impermeable [L] se escribe como:

$$\int_{H_o}^H \frac{\partial \theta}{\partial t} dz = - \int_{H_o}^H \frac{\partial q_x}{\partial x} dz - \int_{H_o}^H \frac{\partial q_y}{\partial y} dz - \int_{H_o}^H \frac{\partial q_z}{\partial z} dz - \int_{H_o}^H S dz \quad (2.4)$$

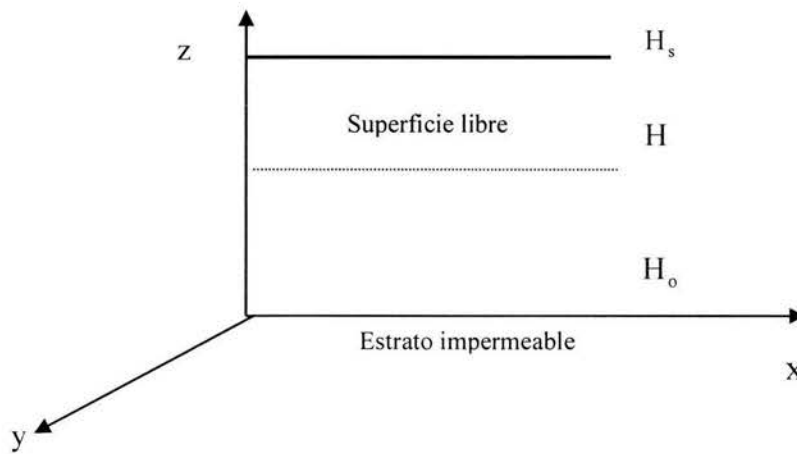


Ilustración 2.1. Esquema general de la posición del manto freático en el perfil de suelo.

la integración del tercer término del lado derecho de la ecuación (2.4) se puede hacer en forma directa, como:

$$\int_{H_o}^H \frac{\partial q_z}{\partial z} dz = q_z(x, y, H, t) - q_z(x, y, H_o, t) = q_{zH} - q_{zH_o} \quad (2.5)$$

donde q_{zH} y q_{zH_o} son los flujos de Darcy en la dirección de la coordenada espacial z en las elevaciones H y H_o respectivamente. las integrales restantes se expresan aplicando la regla de Leibniz. Se procede ahora con la primera integral del lado derecho de (2.4):

$$\int_{H_o}^H \frac{\partial q_x(x, y, z, t)}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{H_o}^H q_x(x, y, z, t) dz - q_{xH} \frac{\partial H}{\partial x} + q_{xH_o} \frac{\partial H_o}{\partial x} \quad (2.6)$$

donde el término integral del lado derecho de la ecuación (2.6), se puede representar de la siguiente forma:

$$\int_{H_o}^H q_x dz = \langle q_x \rangle [H - H_o] \quad (2.7)$$

$\langle q_x \rangle$ representa el flujo de Darcy promedio en la dirección x dentro de la zona saturada $[H - H_o]$; donde q_{xH} y q_{xH_o} son los flujos de Darcy en la dirección de la coordenada espacial en las elevaciones H y H_o . Aceptando una distribución de presiones hidrostática, es decir, $\psi(x, y, z, t) = H(x, y, t) - z$, entonces:

$$\langle q_x \rangle = -\frac{1}{H - H_o} \int K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial x} dz = -\langle K_s \rangle \frac{\partial H}{\partial x} \quad (2.8)$$

Aceptar una distribución de presiones hidrostática equivale a adoptar las hipótesis de Dupuit, es decir, considerar que el flujo es proporcional al gradiente hidráulico en la dirección del flujo siendo la constante de proporcionalidad el valor medio ponderado de la conductividad hidráulica a saturación $\langle K_s \rangle$. Para la dirección y se tienen resultados similares. Finalmente con la introducción de las ecuaciones (2.7) y (2.8) dentro de la ecuación (2.6) la evaluación de la integral resulta ser:

$$\int_{H_o}^H \frac{\partial q_x(x, y, z, t)}{\partial x} dz = -\frac{\partial}{\partial x} \left[\langle K_s \rangle [H - H_o] \frac{\partial H}{\partial x} \right] - q_{xH} \frac{\partial H}{\partial x} + q_{xH_o} \frac{\partial H_o}{\partial x} \quad (2.9)$$

$$\int_{H_o}^H \frac{\partial q_y(x, y, z, t)}{\partial y} dz = -\frac{\partial}{\partial y} \left[\langle K_s \rangle [H - H_o] \frac{\partial H}{\partial y} \right] - q_{yH} \frac{\partial H}{\partial y} + q_{yH_o} \frac{\partial H_o}{\partial y} \quad (2.10)$$

La integral del lado izquierdo de la ecuación (2.4) se realiza en forma similar:

$$\int_{H_0}^H \frac{\partial \theta}{\partial t} dz = \frac{\partial}{\partial t} \int_{H_0}^H \theta(x, y, z, t) dz - \theta(x, y, H, t) \frac{\partial H}{\partial t} \quad (2.11)$$

si se analiza el término integral del lado derecho se aprecia que para la región de integración θ se encuentra en la zona saturada, tomando un valor constante e igual a su valor a saturación θ_s y $\theta(x, y, H, t) = \theta_{ns}$ es el contenido volumétrico de agua medio en la zona no saturada, de forma tal q se puede definir a la capacidad de almacenamiento del acuífero (μ) como la diferencia entre ambos contenidos de humedad la ecuación (2.11) queda:

$$\int_{H_0}^H \frac{\partial \theta}{\partial t} dz = \mu(x, y, t) \frac{\partial H(x, y, t)}{\partial t} \quad (2.12)$$

Al sustituir las ecuaciones (2.5), (2.9), (2.10), (2.12) en la ecuación general (2.4) se llega a:

$$\begin{aligned} \langle \mu \rangle \frac{\partial H}{\partial t} = & - \left[\frac{\partial}{\partial x} [q_x] [H - H_0] + \frac{\partial}{\partial y} [q_y] [H - H_0] \right] \\ & - \left[-q_{xH} \frac{\partial H}{\partial x} - q_{yH} \frac{\partial H}{\partial y} + q_{xH_0} \frac{\partial H_0}{\partial x} + q_{yH_0} \frac{\partial H_0}{\partial y} - q_{zH} + q_{zH_0} \right] - \int_{H_0}^H S dz \end{aligned} \quad (2.13)$$

Al considerar que los flujos de Darcy en el estrato impermeable son despreciables y si se introduce un término R en el cual se concentren todos los aportes o extracciones verticales así como los movimientos del agua en la vecindad de la superficie freática, de tal forma que sea signo positivo cuando se trata de extracción y negativo en caso contrario.

$$R = - \left[q_{zH} - q_{xH} \frac{\partial H}{\partial x} - q_{yH} \frac{\partial H}{\partial y} \right] - \int_{H_0}^H S dz \quad (2.14)$$

La ecuación (2.13) se puede escribir como:

$$\langle \mu \rangle \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\langle K_s \rangle [H - H_o] \frac{\partial H}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\langle K_s \rangle [H - H_o] \frac{\partial H}{\partial y} \right] + R \quad (2.15)$$

Si se acepta una definición más general para introducir la característica hidrodinámica de la transmisibilidad de un acuífero, como:

$$T(H) = K_s [H - H_o] \quad (2.16)$$

Al incorporar la ecuación (2.16) en (2.15) se obtiene la ecuación bidimensional de Boussinesq que escrita en forma compacta como.

$$\mu(H) \frac{\partial H}{\partial t} = \nabla \cdot [T(H) \nabla H] + R \quad (2.17)$$

La ecuación (2.17) es una ecuación diferencial parcial no lineal, la falta de linealidad es debido a que los coeficientes $\mu = \mu(H)$ y $T = T(H)$ son función de la elevación del manto freático. Para la resolución numérica de la ecuación de Boussinesq se hace necesario conocer la conductividad hidráulica saturada, la capacidad de almacenamiento y el término de recarga.

2.2.2. Forma unidimensional de la ecuación de Boussinesq

El análisis del drenaje agrícola es más ampliamente difundido a partir de la ecuación unidimensional de Boussinesq de los acuíferos libres, y este enfoque ha permitido obtener formas simplificadas de solución para la descripción de los sistemas de drenaje tanto como para flujo permanente como transitorio (Dumm, 1954; Fipps y Skaags, 1986; Fuentes *et al.*, 1997). Al construir la forma unidimensional de Boussinesq en la descripción del flujo de agua en un sistema de drenaje agrícola, se

considera que las variaciones de la carga hidráulica en la dirección longitudinal de los drenes son despreciables ($\partial H/\partial y \approx 0$), en tal situación la ecuación que resulta es:

$$\mu(H) \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[T(H) \frac{\partial H}{\partial x} \right] + R \quad (2.18)$$

2.3. Sobre las características hidrodinámicas

2.3.1. Forma de cálculo para la porosidad drenable

La ecuación de Boussinesq es de gran aplicación en el estudio del comportamiento de los mantos freáticos en la zona saturada del suelo, para introducir los efectos de la zona no saturada de manera simplificada se utiliza la porosidad drenada (μ) también conocida como capacidad de almacenamiento. La porosidad drenable es definida como una fracción de la porosidad volumétrica del suelo que esta libre de agua. Recientemente Fragoza *et al.* (2003), a partir de la conceptualización de la relación entre la zona saturada y no saturada, proponen una relación funcional entre la porosidad drenable y la carga hidráulica, la cual requiere del conocimiento de la curva de retención del suelo que resulta de las características hidrodinámicas de Fujita *et al.* (1952) y Parlange *et al.* (1982). En la deducción de la ecuación de Boussinesq en el apartado 2.2 se concentran los efectos de la zona no saturada del suelo en la porosidad drenable o capacidad de almacenamiento. González *et al.* (1997) define a la porosidad drenable como:

$$\mu(H) = \theta_s - \theta_{ns}(H) \quad (2.19)$$

donde θ_s se define como el contenido volumétrico de agua medio dentro de la zona saturada y $\theta(x, y, H, t) = \theta_{ns}$ es el contenido volumétrico de agua medio en la zona no saturada. Lo anterior requiere del conocimiento de θ_{ns} para ello se introduce el concepto de lámina drenada, que supone que la superficie libre ubicada en $z=H$ estuvo en $z=H_s$, el volumen de agua drenado por unidad de superficie debido al abatimiento (λ), es proporcionado por:

$$\lambda(H) = \int_H^{H_s} [\theta_s - \theta_{PH}(z)] dz \quad (2.20)$$

en la zona saturada la lámina drenada es definida como:

$$\lambda(H) = W_s - W(H) \quad (2.21)$$

donde $\theta_{PH}(z)$ es el perfil de humedad y $W_s = W(H_s)$ la lámina drenable máxima. González *et al.* (1997) proponen calcular la porosidad drenada aceptando dos hipótesis: a) tomar θ_{ns} como el valor medio en la zona no saturada y b) considerar una distribución de presiones hidrostática $\psi = H - z$ para introducir la curva de retención $\theta(\psi) = \theta(H - z)$, en lugar de $\theta_{PH}(z)$ en la ecuación (2.20). Una definición de la porosidad drenada que relaciona las ecuaciones (2.20) y (2.21) es $\mu(H) = dW/dH = -d\lambda/dH$. Con la hipótesis de una distribución de presiones hidrostática, la lámina drenada es escrita como:

$$\lambda(H) = \int_H^{H_s} [\theta_s - \theta(H - z)] dz \quad (2.22)$$

por lo anterior se tiene que:

$$\mu(H) = \frac{dW}{dH} = -\frac{d\lambda}{dH} = \theta_s - \theta(H - H_s) \quad (2.23)$$

en la ecuación (2.23) se ha sustituido a $\theta_{ns} = \theta(H - H_s) = \theta_{sup}(H)$ que representa el contenido de humedad en la superficie. Para evaluar la integral (2.20) es necesario conocer la función θ , para esto se considera la difusividad de Fujita *et al.* (1952) y la conductividad hidráulica de Parlange *et al.* (1982), esto es la difusividad y la conductividad hidráulica como:

$$D(\Theta) = \frac{K_s \lambda_c}{\theta_s - \theta_r} \cdot \frac{1 - \alpha}{(1 - \alpha\Theta)^2} \quad (2.24)$$

$$K(\Theta) = K_s \frac{\Theta[1 - \beta + (\beta + \alpha)\Theta]}{1 - \alpha\Theta} \quad (2.25)$$

la expresión que describe el potencial de presiones en función del contenido de agua se calcula a partir de la definición de la difusividad: $D(\theta) = K(\theta)d\psi/d\theta$ y la ecuaciones (2.24) y (2.25):

$$\psi(\Theta) = \lambda_c \left[\frac{\alpha}{\beta} \ln \left(\frac{1 - \alpha\Theta}{(1 - \alpha)\Theta} \right) + \frac{\beta - \alpha}{\beta(1 - \beta)} \ln \left(\frac{1 - \beta + (\beta - \alpha)\Theta}{(1 - \alpha)\Theta} \right) \right] \quad (2.26)$$

donde en las ecuaciones (2.24) a (2.26) θ_r y θ_s son los contenidos de humedad residual y a saturación, α y β son parámetros adimensionales ($0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$) y λ_c es la escala integral de Bouwer (1964), Θ es el grado de saturación efectivo:

$$\Theta = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \quad (2.27)$$

y la función $\theta(\psi)$ se obtienen con la hipótesis de $\alpha = \beta$, esto es:

$$\frac{\theta(\psi) - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} = \frac{1}{\alpha + (1 - \alpha)\exp(\psi/\lambda_c)} \quad (2.28)$$

La introducción de $\theta(\psi) = \theta(H - z)$, definida por la ecuación (2.28) en la ecuación (2.25), permite deducir la siguiente expresión de la lámina drenada:

$$\lambda(H) = (\theta_s - \theta_r) \left[(H_s - H) - \frac{\lambda_c}{\alpha} \ln \left(\frac{1}{1 - \alpha + \alpha \exp[-(H_s - H)/\lambda_c]} \right) \right] \quad (2.29)$$

La porosidad drenable definida por la ecuación (2.23) con $\theta(\psi) = \theta(H - z)$ calculada con la ecuación (2.28) es la siguiente:

$$\mu(H) = (\theta_s - \theta_r) \left[1 - \frac{1}{\alpha + (1 - \alpha) \exp[-(H_s - H)/\lambda_c]} \right] \quad (2.30)$$

Lo importante de la fórmula de cálculo (2.30) obtenida por Fragoza *et al.* (2003) es que la formulación para la porosidad drenable se obtiene con la introducción de $\theta(x, y, H, t) = \theta_{ns}$ como una función de la carga hidráulica $\theta(\psi) = \theta(H - z)$ a diferencia de González *et al.* (1997) en la que se propone como el valor medio en la zona no saturada del contenido volumétrico de agua $\theta_{ns} = \theta(H)$. La aproximación de Fragoza *et al.* (2003) supone un comportamiento más próximo a la descripción del contenido de humedad en la zona no saturada en la proximidad de la superficie libre, lo que sugiere una mejor introducción del efecto de la zona no saturada en la ecuación de Boussinesq.

2.3.2 Coeficiente de transmisibilidad

Se acepta una definición más general para introducir la característica hidrodinámica de la transmisibilidad, se establece que el coeficiente de transmisibilidad es proporcional a una potencia de la carga hidráulica en el suelo escrita de la forma:

$$T(H) = T_t \left[\frac{H - H_o}{H_s - H_o} \right]^p; \quad T_t = K_s [H_s - H_o] \quad (2.31)$$

donde se define a H_t como la elevación de un nivel superior de referencia que puede ser la superficie del terreno en el caso de una acuífero libre o la elevación de la capa superior confinante para el acuífero confinado, la definición de p permite conocer la familia de funciones para definir la transmisibilidad. El rango de variación es de $0 \leq p \leq 1$ donde los valores extremos de $p = 1$ y $p = 0$ corresponde a la definición de la transmisibilidad para un acuífero libre y confinado respectivamente.

Acuífero libre: La función que define a la transmisibilidad para un acuífero libre se obtiene del valor extremo de $p = 1$ en la ecuación (2.31), en este caso el parámetro de la transmisibilidad es una función de la carga hidráulica, dado como:

$$T(H) = K_s (H - H_o) \quad (2.32)$$

Acuífero confinado: El segundo caso extremo para el valor del exponente $p = 0$ proporciona una ecuación que describe el comportamiento del parámetro de la transmisibilidad en un acuífero confinado, escrita como:

$$T(H) = K_s (H_s - H_o) \quad (2.33)$$

en la forma (2.33) la transmisibilidad no es función de la carga hidráulica, se aprecia que es constante, siendo $(H_s - H_o)$ el espesor del acuífero. [L]

2.4. Método del Elemento Finito

2.4.1. Método de los residuos ponderados

Cuando se propone una aproximación de funciones de base como solución a una ecuación diferencial, esta no satisface exactamente la ecuación diferencial dado que se utiliza un número finito de funciones de base en la solución, con lo que se produce un residual que se puede expresar como:

$$\varepsilon(x, y) = L(\hat{f}(x, y)) - F \neq 0 \quad (2.34)$$

donde L es un operador diferencial, $\hat{f}(x, y)$ es la solución de aproximación propuesta para la ecuación la diferencial y F es un término cualquiera.

Debido a que el error residual varía de punto a punto dentro del dominio, este puede ser minimizado con el requisito de que ε sea ortogonal a un grupo de funciones de peso mutuamente independientes. De la definición de funciones ortogonales se tiene:

$$\int_{\Omega} [\varepsilon(x, y)] v_i(x, y) d\Omega = 0 \quad (2.35)$$

El procedimiento de los residuos pesados tiene como finalidad lograr que el promedio pesado de todos los residuales sobre los nodos sea cero.

Las formas más usadas para la definición de las funciones de peso v_i se describen a continuación.

Método de Colocación Puntual. Este método limita el error residual a un conjunto de puntos seleccionados (x_i) dentro del dominio (Ω). Para ello se definen a las funciones de peso en base a la delta de Dirac:

$$v_i = \delta_i(X - x_i) ; \quad \int_{\varpi_1}^{\varpi_2} \delta_i(X - x_i) = 1, \quad \varpi_1 \leq x_i \leq \varpi_2 \quad (2.36)$$

Método de los Subdominios. Se minimiza el residuo ε al tratarse como un promedio en intervalos discretos del dominio que se conocen como subdominios Ω^e . Sobre los cuales las funciones de peso son definidas como:

$$v_i(x, y) = \begin{cases} 1, & ; x, y \in \Omega^e \\ 0, & ; x, y \in \Omega^e \end{cases} \quad (2.37)$$

Método de Galerking. El método de Galerking es una de las herramienta para la solución de los problemas físicos bajo el análisis del elemento finito, en este enfoque se considera la definición de las funciones de peso $v_i(x, y)$ igual a las funciones de base $\varphi_i(x, y)$.

2.4.1. Generalidades del método del elemento finito

El método del elemento finito es una técnica numérica que permite conocer el comportamiento de la variable de estudio sobre el dominio de solución, para esto, el dominio es dividido en subregiones conocidas como elementos que tradicionalmente son de forma rectangular o triangular y cuyas esquinas se llaman nodos, puntos sobre los cuales se tendrán los valores de la variable aproximada. El método del elemento finito consiste en proponer una solución para la ecuación diferencial como una combinación de funciones de base para reemplazar a f . Sea la solución propuesta de la forma:

$$f(x, y, t) = \hat{f}(x, y, t) = \sum_{j=1}^J a_j(t) \varphi_j(x, y) \quad (2.38)$$

se define a $\varphi_j(x, y)$ como las funciones de base o de forma, $a_j(t)$ son los valores de solución sobre los nodos del elemento dependientes del tiempo. El error que se genera por la solución de aproximación propuesta es tratado con el método de los residuos pesados tipo Galerking. Una vez definidas las funciones de peso, la sustitución de la aproximación de elemento finito $\hat{f}(x, y, t)$ en la forma integral pesada (2.35) permite obtener un sistema lineal de ecuaciones de la forma general siguiente:

$$\left\{ K_{ij} + M_{ij} \right\} f_i = g_i \quad (2.39)$$

se han definido tradicionalmente a K_{ij} y M_{ij} como las matrices de rigidez y de masa, g_i es el vector de términos conocidos y finalmente f_i es el vector de valores de solución sobre los nodos del elemento.

2.4.3. Funciones de base

2.4.3.1 Forma unidimensional

También conocidas como funciones de interpolación, son las funciones espaciales o polinomios sobre el dominio que permiten definir a la solución propuesta por el elemento finito $\hat{f}(x, y, t)$, para la definición de las funciones de interpolación es común usar polinomios cuadráticos, lineales y Lagrangianos. La solución (2.38) propuesta por el método presenta una relación directa entre los J valores de a_j y la solución desconocida f , razón por la cual es muy popular el uso de los interpolantes lineales de Lagrange como funciones de base sobre el dominio espacial. Para el caso unidimensional estos se denotan por $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, donde se define un interpolante de grado $(N - 1)$ para cada x_j ; $j = 1, \dots, N$ escrito como:

$$\varphi_j(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^N \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \quad (2.40)$$

donde $\varphi_j(x)$ representa al polinomio de Lagrange asociado con el nodo j , es evidente que la forma (2.40) presenta la propiedad de que para $i = j$, $\varphi(x) = 1$ y en el caso contrario esto es para $i \neq j$, $\varphi(x) = 0$.

2.4.3.2. Forma bidimensional

En el caso bidimensional las funciones de base toman la forma de pirámides sobre los elementos triangulares del dominio (Mori, 1983), por lo que las funciones de interpolación pueden ser definidas de la siguiente forma:

$$\varphi_j(x, y) = \frac{1}{2A^e} [\alpha_{kl} + \eta_{kl}x - \xi_{kl}y] \quad (2.41)$$

donde $\alpha_{kl} = x_k y_l - y_k x_l$, $\eta_{kl} = y_k - y_l$, $\xi_{kl} = x_k - x_l$, j, k, l representan los vértices de cada elemento triangular que corren sobre las tres permutaciones posibles. A^e es el área de cada elemento, las funciones de base presentan la propiedad de:

$$\varphi_p(x_j, y_j) = \begin{cases} 1, & p = j \\ 0, & p \neq j \end{cases} \quad (2.42)$$

donde (x_j, y_j) son las coordenadas del nodo J .

2.5. Condiciones Límite

Las condiciones límite están compuestas por la condición inicial y las condiciones de frontera. En la solución de ecuaciones diferenciales parciales es necesario satisfacer ciertas condiciones de frontera, las cuales son especificadas para valores de la variable dependiente. La condición de frontera es requerida desde un punto de vista físico y matemático para obtener la solución particular del problema.

2.5.1. Tipos de condiciones de frontera

En forma más general las condiciones de frontera desde un punto de vista físico representa el conocimiento de la variable dependiente en puntos sobre el dominio o el conocimiento del gradiente de la variable incógnita, matemáticamente la condición de frontera se puede escribir como:

$$v(x, y)u(x, y) + \tau(x, y)u_n(x, y) = \gamma(x, y) \quad (2.43)$$

donde $v(x, y)$ y $\tau(x, y)$ son los coeficientes de la forma (2.43) los cuales se consideran reales, $u_n = \partial u / \partial n$ es el gradiente en la dirección normal al dominio, según el valor de γ la condición puede ser homogénea ($\gamma = 0$) y no homogénea ($\gamma \neq 0$), de la ecuación (2.43) se derivan tres tipos de formas dependiendo de los valores que tomen los coeficientes y son: tipo Dirichlet, Neumann y tipo Robbins.

Tipo Dirichlet. Es definida cuando se conoce el valor de la variable dependiente sobre la frontera del dominio, también es conocida como condición tipo uno. Esta condición se tiene para $\tau(x, y) = 0$ y se escribe:

$$v(x, y)u(x, y) = \gamma(x, y) \quad (2.44)$$

la condición de frontera de Dirichlet puede ser homogénea o no homogénea según el caso.

Tipo Neumann. También se conoce como condición de segundo orden, la condición de Neumann se presenta cuando el valor del gradiente de la variable incógnita es conocido, se utiliza para representar la variación de flujo sobre la frontera del dominio y se expresa de la siguiente forma:

$$\tau(x, y)u_n(x, y) = \gamma(x, y) \quad (2.45)$$

la condición de segundo orden se presenta para $v(x, y) = 0$. Condiciones de no flujo (Neumann homogénea) y de impermeabilidad son un caso especial de Neumann.

Tipo Robbins. Este tipo de condición es una forma de aproximación particular la cual incluye a las dos formas anteriores. La condición de Robbins establece una relación lineal entre el gradiente de la variable dependiente y la misma variable, en este caso los coeficientes de la ecuación (2.43) son diferentes de cero:

$$v(x, y)u(x, y) + \tau(x, y)u_n(x, y) = \gamma(x, y) \quad (2.46)$$

2.5.2. La condición de radiación fractal en la ecuación de Boussinesq (Zavala *et al.*, 2003)

En la descripción de la transferencia agua del suelo hacia los drenes con la ecuación de Boussinesq se requiere de la definición del tipo de condición de frontera sobre el dren. Frecuentemente se ha considerado tratar el comportamiento de la carga sobre los drenes a través de una condición de frontera de carga nula, lo cual supone que la carga hidráulica sobre los drenes se abate de manera instantánea, consideración que implica que la pared del dren no ofrece resistencia al flujo del agua del suelo hacia los drenes. En la realidad el proceso que tiene lugar en la vecindad de los drenes no puede ser descrito por la condición anterior, debido a que en estricta medida la pared de los drenes presenta un número finito de perforaciones que impiden el abatimiento instantáneo de la carga hidráulica, en tal caso es más razonable proponer una condición de frontera sobre los drenes que considere la evolución en el tiempo de la carga hidráulica. Un tipo de condición que describa la evolución de la línea de carga hidráulica sobre los drenes y además se pueda cuantificar el gasto drenado es la condición de radiación de Newton, esto en analogía al proceso de transferencia de calor de un sólido hacia la atmósfera.

2.5.2.1. Radiación de Newton

El movimiento del agua sobre la frontera de los drenes es definido por una condición tipo radiación, la cual establece que el flujo de agua a través de los drenes $q(x, t) = -K_s \partial h(x, t) / \partial x$ descrito por la ley de Darcy es proporcional a la diferencia de carga en la vecindad del dren, suponiendo que la presión en el interior del dren es igual a la atmosférica se tiene $q \propto h$, según la ley de Ohm:

$$q_d = \frac{h}{R_{in}} \quad (2.47)$$

siendo R_{in} la resistencia al flujo en la interfaz suelo-dren, expresada como $R_{in} = L / \gamma K_s$, donde L es la separación entre drenes y γ es un coeficiente

adimensional de conductancia en la interfaz suelo-dren, en forma general la condición de radiación lineal de Newton se escribe como:

$$-K_s \frac{\partial h(x,t)}{\partial x} + \gamma \frac{K_s}{L} h = 0 \quad (2.48)$$

Para la forma (2.48) se considera que la resistencia al flujo en la interfaz suelo-dren γ es independiente de la carga hidráulica.

2.5.2.2. Sobre la radiación fractal en un sistema de drenaje agrícola

La condición de radiación lineal no considera a R_{in} como una función de la carga hidráulica, Recientemente Zavala *et al.* (2003) propone una aproximación para la condición de radiación definiendo una forma funcional para el coeficiente de resistencia al flujo en la interfaz suelo-dren a partir de la aplicación de conceptos de geometría fractal, establece que esta resistencia es inversamente proporcional a una potencia fractal de la carga hidráulica sobre el dren donde el exponente se define en función de la porosidad del suelo y de la pared del dren, dicha aproximación incluye la condición de radiación lineal de Newton. Para la radiación fractal y la forma funcional del coeficiente de resistencia R_{in} se considera una columna de suelo sobre el dren, donde la frontera del dren es representada por una placa porosa en la base de la columna, ver ilustración 2.2. Sobre la ilustración 2.2 se puede definir la siguiente característica; El volumen de la columna es $V_t = A_t P$, donde A_t es el área de la placa, el volumen de agua en la columna de suelo es $V_w = A_w h$, siendo A_w el área total de poros. Se define un volumen relativo de agua en la zona saturada como $V_* = A_*(h/P)$, donde $A_* = A_w / A_t$ es el área total de poros relativa al área total del suelo. Si se acepta que el conjunto de poros de la columna sea representado por un sistema de tubos capilares paralelos entonces $A_* = \phi$, siendo ϕ la porosidad total del suelo entonces se puede establecer que el flujo en el dren puede ser definido como $q_d \propto K_s (h/P)$, esta definición es similar a la forma (2.48) de la radiación lineal de Newton.

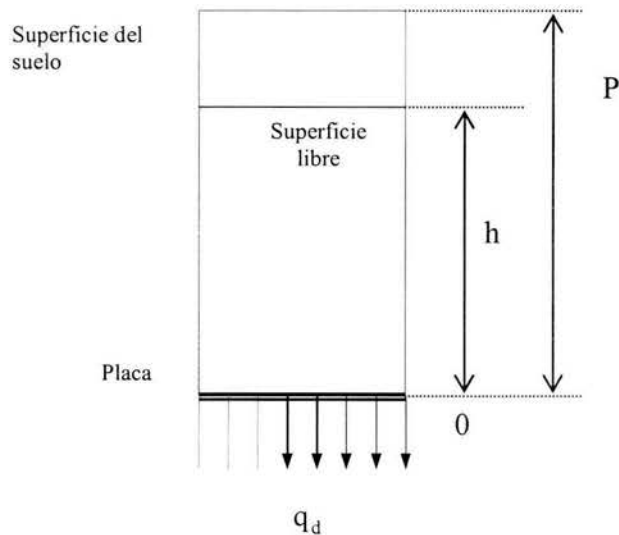


Ilustración 2.2. Esquema de la columna de suelo que se ubica encima del dren.

Se puede obtener otra expresión para el flujo si se utiliza el enfoque probabilístico de Childs y Collis-George (1950). Se realiza un corte perpendicular a la dirección macroscópica de flujo para obtener dos secciones de porosidad ϕ cada una, las cuales son ubicadas en las posiciones z_1 y z_2 ; en la columna estudiada $z_1 = 0$ y $z_2 = \delta P$ donde $\delta P = P$ es una pequeña cantidad positiva del orden del tamaño de poro ($\delta P = 0$). Una partícula de agua ubicada en un poro de la sección z_2 puede continuar su trayectoria por el mismo poro o cambiar a otro de diferente tamaño ubicado en la posición z_1 . La modelación de estas probabilidades de cambio se pueden realizar equivalentemente con la introducción de la probabilidad de encuentro de las secciones de un punto intermedio $z_{12} = \frac{1}{2} \delta P$. La probabilidad de que estas secciones se encuentren de manera completamente aleatoria en el punto intermedio es el producto $V.V. = \phi^2 (h/P)^2$, el cual representa el área efectiva de flujo. Puesto que en este modelo la conductividad hidráulica es proporcional a ϕ^2 , se obtiene la proporción $q_d \propto K_s (h/P)^2$.

Los modelos de Purcell (1964) y de Childs y Collis-George (1950) representan los modelos extremos posibles; el primero una correlación completa de los capilares (sistemas de capilares paralelos) y el segundo una decorrelación completa (encuentro completamente aleatorio de las partículas de agua). Se puede obtener un modelo intermedio al considerar que las trayectorias de las partículas de agua están determinadas por el arreglo estructural de las partículas sólidas del suelo.

De acuerdo con fuentes *et al.* (2001) la estructura de suelo puede ser bien representada cuando el suelo es considerado con un objeto fractal. Según Mandelbrot (1982) en la geometría fractal $A \propto V^{D/3}$, siendo D la dimensión fractal del objeto. En Fuentes *et al.* (2001) para representar las estructura del suelo se considera la relación entre la solidicidad areal (μ_s) y la solidicidad volumétrica ($\phi_s = 1 - \phi$) dada por $\mu_s = (1 - \phi)^s$, donde $s = D/3$. De manera similar se relacionan la porosidad areal y la porosidad volumétrica se obtiene, de acuerdo con la idea probabilística, como $\mu = \phi^s \phi^s = \phi^{2s}$ y como $\mu_s + \mu = 1$ se llega a la forma que define la relación entre el exponente s y la porosidad total, expresada de la forma:

$$(1 - \phi)^s + \phi^{2s} = 1 \quad (2.49)$$

Los valores extremos de la función $s(\phi)$ se tienen para los valores de $\phi \approx 0$ y $\phi \approx 1$ dada como $s = 1/2$ y $s=1$ respectivamente, por lo tanto $1/2 < s < 1$. El área relativa de flujo en la base de la columna se obtiene como $V.V. = \phi^2 (h/P)^2$. Dado que la conductividad hidráulica es proporcional a $\mu = \phi^{2s}$, se tiene $q \propto K_s (h/P)^{2s}$. Cuando los medios porosos ubicados en las posiciones z_1 y z_2 son diferentes, como ocurre en la base de la columna (suelo-pared del dren) la proporción anterior tiene que ser modificada. En la interfaz suelo-dren se definen las propiedades del suelo $\{\phi_1, s_1, \mu_1, K_1\}$ y para el dren $\{\phi_d, s_d, \mu_d, K_d\}$ se obtiene el área efectiva de flujo como $V^{s_1} V^{s_d} = \phi_1^{s_1} (h/P)^{s_1} \phi_d^{s_d} (h/P)^{s_d}$. Dado que $\phi_1^{s_1} \propto \sqrt{K_s}$ y $\phi_d^{s_d} \propto \sqrt{K_d}$, se obtiene la siguiente proporción para el flujo: $q_d \propto \sqrt{K_d K_s} (h/P)^{s_1 + s_d}$. Se puede establecer en consecuencia la siguiente igualdad:

$$q_d = \gamma \bar{K}_s \left(\frac{h}{P} \right)^{2s} \quad (2.50)$$

donde γ es un coeficiente adimensional, $\bar{K}_s = \sqrt{K_s K_d}$ y $s = \frac{1}{2}(s_1 + s_d)$. El gasto por unidad de longitud evacuado por un dren según la condición (2.50) es proporcionado por:

$$Q_d = \gamma \bar{K}_s \left(\frac{h}{P} \right)^{2s} (h + D_o) \quad (2.51)$$

La ecuación (2.50) representa la condición de radiación fractal que describe el flujo en la vecindad del dren en función de la evolución de la carga sobre el dren. Es notable que al comparar (2.47) con (2.50) el coeficiente de resistencia al flujo en la interfaz suelo-dren R_{in} se define como:

$$R_{in}(h) = \frac{P}{\gamma K_s (h/P)^{2s-1}} \quad (2.52)$$

La condición de radiación fractal para la ecuación de Boussinesq describe simultáneamente el comportamiento del gasto de agua drenado y la carga hidráulica en el dren a partir de una aproximación funcional para el coeficiente de resistencia al flujo en la interfaz suelo-dren, además considera la utilización del área efectiva de flujo en función de la porosidad total $\phi = A_*$ al tratar al conjunto de poros de la columna como un sistema de tubos capilares paralelos.

CAPÍTULO III

ESQUEMA NUMÉRICO PARA LA ECUACIÓN DE BOUSSINESQ

Las soluciones analíticas de la ecuación de Boussinesq son difundidas a partir de aproximaciones en una dimensión (Panagiotis *et al.*, 1984, Parlange *et al.*, 1971) y son aplicables a casos particulares, debido a que su obtención es complicada por la no-linealidad de las características hidrodinámicas que forman parte de la ecuación. Lo anterior motiva el uso de métodos de solución numéricos que permiten obtener soluciones aproximadas, en la actualidad los más utilizados son; los esquemas en diferencias finitas y en elemento finito. En este capítulo se presenta el desarrollo de una solución de elemento finito para la ecuación de Boussinesq en sus formas unidimensional y bidimensional.

3.1. Una solución de elemento finito a la ecuación bidimensional de Boussinesq

En el siguiente apartado se presenta una solución numérica para la ecuación bidimensional de Boussinesq planteada con el método del elemento finito tipo Galerking. Se construye la solución a partir de la ecuación reproducida en el apartado 2.2, en su forma de:

$$\mu(H) \frac{\partial H}{\partial t} = \nabla \cdot [T(H) \nabla H] + R \quad (3.1)$$

La anterior ecuación es resuelta en acoplada a un dominio particular representado en las ilustraciones 3.1. y 3.2., dominio sobre el cual se define la condición inicial y de frontera para la solución del problema.

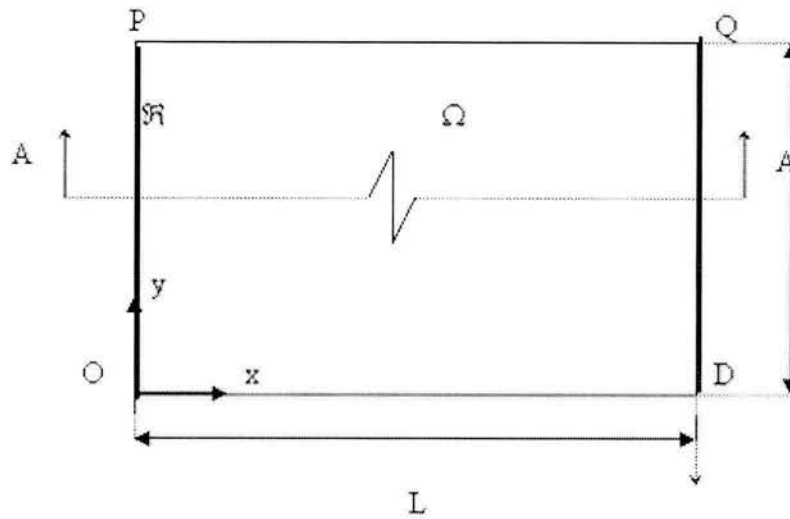


Ilustración 3.1. Dominio de solución para la forma bidimensional de Boussinesq.

La ecuación (3.1) se sujeta a un conjunto de condiciones límite conformado por: Una condición inicial de carga conocida, sobre la los drenes (\mathfrak{R}) se define una condición de radiación fractal para el sistema de drenaje mostrado en la ilustración 3.2., y la condición de flujo nulo (tipo Neumann) para los límites \overline{PQ} \overline{OD} del dominio de solución.

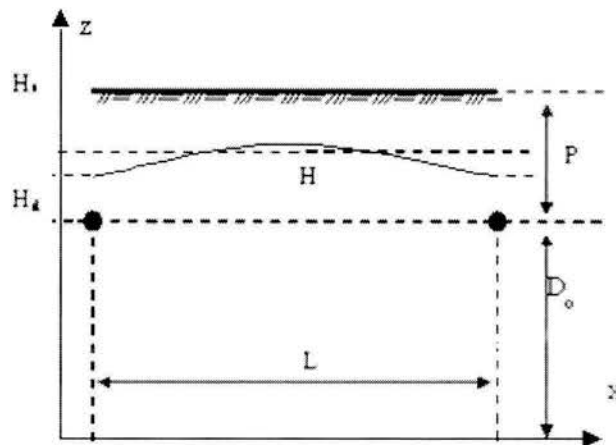


Ilustración 3.2. Esquema para el sistema de drenaje. Corte AA de la ilustración 3.1.

Para obtener el esquema numérico de solución el método propone una aproximación de la variable dependiente H como una combinación lineal de funciones de base (φ) de tipo:

$$H(x, y, t) = \hat{H}(x, y, t) = \sum_{j=1}^n a_j(t) \varphi_j(x, y), \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.2)$$

3.1.1. Incorporación de las condiciones límite

El conjunto de condiciones límite para la ecuación (3.1) es definido sobre el sistema de drenaje agrícola de la figura 3.1. Por lo general es más conveniente para la especificación de las condiciones límite si la posición de la superficie libre es referida a partir de la posición de los drenes como

$$H(x, y, t) = h(x, y, t) + D_o, \quad H \in \Omega \quad (3.3)$$

donde h es la carga hidráulica contada a partir de la elevación de los drenes (Zavala *et al.*, 2003).

Condición Inicial: Se utiliza una condición de carga conocida en el espacio para representar la distribución de elevaciones de la superficie freática:

$$H(x, y, t = 0) = h_f(x, y) \quad (3.4)$$

Condición en la frontera del dominio: Sobre la frontera PQ y OD del dominio ilustrado en la figura 3.1., el flujo es restringido a una condición tipo Neumann homogénea o de flujo nulo, se define conforme a la ley de Darcy y se restringe a cero. Lo anterior se expresa como:

$$-K_s \frac{\partial h}{\partial y} = 0, \quad 0 \leq x \leq L, \quad y = 0, \quad t > 0 \quad (3.5)$$

$$-K_s \frac{\partial h}{\partial y} = 0, \quad 0 \leq x \leq L, \quad y = \overline{OP}, \quad t > 0 \quad (3.6)$$

Condición sobre los drenes: Sobre la vecindad de los drenes se utiliza una condición de frontera tipo radiación fractal para describir la evolución de la carga sobre los drenes y de forma simultánea el gasto drenado. La forma matemática que representa la condición de radiación fractal es:

$$-\mathbf{q}_d + \gamma \overline{K}_s \left(\frac{h}{P} \right)^{2s} = 0 \quad 0 \leq y \leq \overline{OP} \quad x = 0 \quad (3.7)$$

donde \mathbf{q}_d representa el vector de flujos de Darcy definido como $\mathbf{q}_d = \overline{K}_s \partial H / \partial n$ siendo n el vector normal, $\overline{K}_s = \sqrt{K_s K_d}$ se define como la conductividad a saturación, $s(\phi)$ es el exponente fractal relacionado con la porosidad total del suelo $\frac{1}{2} < s < 1$, el valor del exponente se estima a partir de la relación funcional mostrada en la ecuación (2.49). P es la profundidad del dren.

3.1.2. Discretización espacial de la ecuación bidimensional de Boussinesq

Definida la solución de aproximación en elemento finito para la ecuación (3.1) se procede a desarrollar la formulación pesada de Galerking, la integral pesada de Galerking se obtiene de multiplicar la ecuación de Boussinesq por una función de peso y se escribe como:

$$\iint_{\Omega} \left[\mu(H) \frac{\partial H}{\partial t} - \nabla \cdot [T(H) \nabla H] - R \right] v_i d\Omega = 0 \quad (3.8)$$

con la aplicación del teorema de Green sobre el dominio de solución (Ω) limitado por las frontera (\mathcal{R}) se construye la forma débil de la integral de la ecuación bidimensional de Boussinesq, de esta forma se reducen los requerimientos de continuidad de las funciones de aproximación. La forma débil es:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \mu(H) \frac{\partial H}{\partial t} v d\Omega + \iint_{\Omega} T(H) \left(\frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) d\Omega \\ = \int_{\mathfrak{R}} T(H) \frac{\partial H}{\partial n} v d\mathfrak{R} + \iint_{\Omega} R v d\Omega \end{aligned} \quad (3.9)$$

donde n es el vector unitario perpendicular a la frontera, los dos términos del lado derecho de la ecuación (3.9) introducen el comportamiento de la frontera y de la recarga. Al introducir la aproximación del elemento finito de la variable dependiente H en la ecuación (3.9) y definiendo las funciones de peso iguales a las funciones de base como sugiere el método de Galerking la ecuación (3.9) se puede escribir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \left[\iint_{\Omega} \mu(\hat{H}) \varphi_i \varphi_j d\Omega \right] \frac{da_j}{dt} + \sum_{j=1}^n \left[\iint_{\Omega} T(\hat{H}) \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \right) d\Omega \right] a_j \\ = \int_{\mathfrak{R}} T(\hat{H}) \frac{\partial H}{\partial n} \varphi_i d\mathfrak{R} + \iint_{\Omega} R \varphi_i d\Omega \end{aligned} \quad (3.10)$$

donde a_j son los coeficientes que dependen del tiempo y representa la solución aproximada (3.2) sobre cada nodo del dominio (Ω), φ_i y φ_j son las funciones de base válidas para cada nodo del elemento, $i=1, \dots, n$ y $j=1, \dots, n$, donde n es el número de nodos. Sugiriendo una variación lineal para las características hidráulicas sobre cada elemento de forma que $T(\hat{H}) = \hat{T} = \varphi_g T_g$, se obtiene el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$M_{ij} \frac{da_j}{dt} + K_{ij} a_j = F_i + B_i; \quad i = 1, \dots, n \quad (3.11)$$

donde M y K han sido definidas como las matrices de masa y rigidez, F_i es el vector de términos conocidos relacionados con la frontera (\mathfrak{R}), B_i son los valores de recarga o descarga a los que esta sometido el acuífero introducidos en forma vectorial. La forma explícita compacta del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (3.11) es resultado de la definición de las matrices de masa y rigidez:

$$M_{ij} = \sum_{j=1}^n \left[\iint_{\Omega} \mu_i \varphi_i \varphi_j d\Omega \right] \quad (3.12)$$

$$K_{ij} = \sum_{j=1}^n \left[\iint_{\Omega} T_g \varphi_g \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \right) d\Omega \right] \quad (3.13)$$

y los vectores de flujo y recarga:

$$F_i = \int_{\mathcal{R}} \left[\hat{T} \frac{\partial H}{\partial n} \varphi_i \right] d\mathcal{R} \quad (3.14)$$

$$B_i = \iint_{\Omega} R \varphi_i d\Omega \quad (3.15)$$

Las contribuciones de las matrices y vectores de la ecuación (3.11) es más convenientes determinarlas en forma local para cada elemento triangular del dominio y posteriormente hacer el ensamble global. Al utilizar las funciones lineales de base para resolver las integrales (3.12) y (3.13) los coeficientes de las matrices se definen como:

$$M_{ij} = \begin{cases} \mu_j \frac{1}{6} A^e, & i = j \\ \mu_j \frac{1}{12} A^e & i \neq j \end{cases} \quad (3.16)$$

$$K_{ij} = \frac{\bar{T}}{4A^e} [b_i b_j + c_i c_j] \quad (3.17)$$

donde \bar{T} es la transmisibilidad en el elemento tomada como el promedio aritmético de acuerdo con las funciones de base, A^e es el área de cada elemento, μ_j es la porosidad drenable sobre el nodo j , b y c se definen como los factores geométricas del elemento calculados como; $b_i = y_j - y_k$, $c_i = x_j - x_k$, los subíndices i, j y k

representan las esquinas del elemento triangular y corren sobre las tres permutaciones posibles.

La forma (3.12) de la matriz de masa es definida para un sistema de Masa Consistente, en esta formulación la matriz de masa local sobre un elemento es tridiagonal, está puede ser cambiada por una matriz diagonal, ya que la integral que define cada entrada de la matriz de masa no incluye la derivada de las funciones de base ϕ_j . Las funciones de masa concentrada ($\hat{\phi}_j$) son definidas como funciones unitarias sobre la región baricéntrica de un nodo específico y cero en el resto del dominio (Mori, 1983), a saber:

$$\hat{\phi}_i \hat{\phi}_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (3.18)$$

Por lo anterior las formas integrales (3.12), (3.14) y (3.15) se puede escribir como:

$$M_{ij} = \sum_{j=1}^n \left[\iint_{\Omega} \mu_i \hat{\phi}_i \hat{\phi}_j d\Omega \right] = \begin{cases} \mu_i \frac{A^e}{3}, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (3.19)$$

$$F_i = \int_{\mathfrak{R}} \hat{Q} \hat{\phi}_i d\mathfrak{R} = \begin{cases} \gamma \bar{K}_s h \left(\frac{h - D_o}{P} \right)^{2S}, & i \in \mathfrak{R} \\ 0, & i \notin \mathfrak{R} \end{cases} \quad (3.20)$$

$$B_i = \iint_{\Omega} R \hat{\phi}_i d\Omega = R_i \frac{A^e}{3} \quad (3.21)$$

en la forma integral (3.20) se define a $\hat{Q} = \hat{\Gamma} \frac{\partial h}{\partial n}$, la introducción de la condición de frontera de radiación fractal en (3.20), permite la definición de los flujos en la frontera del dren (\mathfrak{R}). El reemplazo de ϕ_j por $\hat{\phi}_j$ en la definición de la matriz de masa es llamado concentración de masa, se ha comprobado que para la solución en elemento finito el sistema de masa concentrada produce soluciones más estables (Celia y Gray, 1992 y Mori, 1983).

3.1.3. Discretización temporal de la ecuación bidimensional de Boussinesq

En el apartado anterior se reprodujo la discretización espacial para la ecuación (3.1) mediante el método de Galerking resultando en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias en el tiempo. Se utiliza una aproximación en diferencias finitas para el tratamiento de la variable dependiente del tiempo, la forma más popular para la discretización temporal es un esquema de aproximación tipo Crank-Nicholson. En esta forma de aproximación el término de la diferencial en el tiempo y la variable a se aproximan como:

$$\left[\frac{da_j}{dt} \right]^{m+\omega} = \frac{a_j^{m+1} - a_j^m}{\Delta t} \quad (3.22)$$

$$a_j^{m+\omega} = \omega a_j^{m+1} + (1 - \omega) a_j^m \quad (3.23)$$

$$0 \leq \omega = \frac{t^{m+\omega} - t^m}{t^{m+1} - t^m} \leq 1 \quad (3.24)$$

donde ω es un factor de ponderación en el tiempo, si se utiliza $\omega = 1$ se tiene un esquema implícito para la solución de (3.11) obteniéndose un sistema lineal de ecuaciones algebraicas escrito como:

$$\left[\frac{M_{ij}^{m+1}}{\Delta t} + K_{ij}^{m+1} \right] a_j^{m+1} = \left[\frac{M_{ij}^{m+1}}{\Delta t} \right] a_j^m + F_i^{m+1} + B_i^{m+1}; \quad i = 1, \dots, n \quad (3.25)$$

en la forma (3.25) es claro que para cada paso de cálculo es necesario resolver el sistema lineal de ecuaciones algebraicas para encontrar los valores de a^{m+1} . La solución del sistema de ecuaciones (3.25) permite estimar el comportamiento de la elevación del manto sobre cada uno de los nodos del dominio.

3.2. Solución de elemento finito para la forma unidimensional de Boussinesq

Al construir la forma unidimensional de Boussinesq se considera que las variaciones de la carga hidráulica en la dirección longitudinal de los drenes son despreciables ($\partial H/\partial y \approx 0$) en tal situación, la ecuación que resulta es:

$$\mu(H) \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[T(H) \frac{\partial H}{\partial x} \right] + R \quad (3.26)$$

El dominio de solución es un corte transversal en la dirección de los drenes (corte AA de la ilustración 3.1.). El conjunto de condiciones límite para el caso unidimensional comprende una condición inicial de carga conocida y una condición de frontera sobre los drenes representada por la condición de radiación fractal.

La resolución numérica de la ecuación (3.26) con el método del elemento finito propone una aproximación de la variable dependiente H como una combinación lineal de funciones de base, de la forma:

$$H(x, t) = \hat{H}(x, t) = \sum_{j=1}^n a_j(t) \varphi_j(x), \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.27)$$

El esquema numérico para la ecuación de Boussinesq unidimensional no lineal se obtiene con un procedimiento similar al utilizado para la forma bidimensional de Boussinesq. Primero se sustituye la solución aproximada (3.27) en la ecuación (3.26) y el error generado por la aproximación se minimiza formando la integral pesada de éste sobre el dominio de solución $(0, L)$, integrando por partes la integral pesada se llega a la forma débil de la ecuación (3.26):

$$\int_{\Omega} \mu(H) \frac{\partial H}{\partial t} v dx + \int_{\Omega} T(H) \frac{\partial H}{\partial x} \frac{dv}{dx} dx = T(H) \frac{\partial H}{\partial x} v \Big|_{\mathcal{R}} + \int_{\Omega} R v dx \quad (3.28)$$

donde $v(x)$ son las funciones de peso. Definiendo las funciones de peso igual a las funciones de base como sugiere el método de Galerking y se asume una variación

lineal de las propiedades hidráulicas en el elemento ($\hat{\mu} = \varphi_g \mu_g$ y $\hat{T} = \varphi_g T_g$), se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$M_{ij} \frac{da_j}{dt} + K_{ij} a_j = F_i + B_i; \quad i = 1, \dots, n \quad (3.29)$$

donde a_j son los coeficientes que dependen del tiempo y representa la solución aproximada de la ecuación (3.27) sobre cada nodo del dominio(L). El uso de funciones de interpolación lineales (φ_j) permite calcular los coeficientes de las matrices y vectores, el resultado obtenido es:

$$M_{ij} = \sum_{j=1}^n \int_{Le} \hat{\mu}_g \hat{\varphi}_g \hat{\varphi}_i \hat{\varphi}_j dx = \begin{cases} 0 & , j = i - 1 \\ \mu(h_i) \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2} & , j = i \\ 0 & , j = i + 1 \end{cases} \quad (3.30)$$

$$K_{ij} = \sum_{j=1}^n \int_{Le} \hat{T}_g \hat{\varphi}_g \frac{d\varphi_i}{dx} \frac{d\varphi_j}{dx} dx = (-1)^{i+j} \frac{\bar{T}}{\Delta x} \quad (3.31)$$

$$B_i = \sum_{j=1}^n \int_{Le} R_g \hat{\varphi}_g \hat{\varphi}_i dx = R_i \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2} \quad , j = i \quad (3.32)$$

$$F_i = T(\hat{H}) \frac{\partial H}{\partial x} \varphi_i \Big|_{Le} = \begin{cases} \gamma K_s h \left[\frac{h - D_o}{P} \right]^{2S} & , i \in \mathfrak{R} \\ 0 & , i \notin \mathfrak{R} \end{cases} \quad (3.33)$$

donde \bar{T} es la transmisibilidad en el elemento tomada como el promedio aritmético de acuerdo con las funciones de base, $\hat{\varphi}$ son las funciones de base del sistema de masa concentrada y Δx es el tamaño del elemento.

De manera similar al desarrollo en elemento finito para la forma bidimensional de la ecuación de Boussinesq, se utiliza una discretización en diferencias finitas para tratar la derivada temporal del sistema (3.29) igual a las formas (3.22) a (3.23) resultando en un sistema de ecuaciones algebraicas lineal de la forma.

$$\left[\frac{M_{ij}^{m+1}}{\Delta t} + K_{ij}^{m+1} \right] a_j^{m+1} = \left[\frac{M_{ij}^{m+1}}{\Delta t} \right] a_j^m + F_i^{m+1} + B_i^{m+1}; \quad i = 1, \dots, n \quad (3.34)$$

Para la aplicación de la solución de elemento finito de la ecuación de Boussinesq es necesario encontrar una relación entre los pasos de tiempo (Δt) y del espacio (Δx), esto se logra con la introducción de variables adimensionales como: $x_* = x/L$, $t_* = t/\tau$, con las cuales la ecuación (3.26) permanece invariante. Se define un parámetro (M_*) adimensional que relaciona los pasos de tiempo y el espacio:

$$M_* = \frac{(\Delta x_*)}{\Delta t_*} = \left(\frac{v_s}{T_s} \right) \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} \quad (3.35)$$

donde $v_s = W_s/(H_s - H_o)$ y $T_s = K_s(H_s + H_o)$, el valor de M_* puede ser obtenido a partir de comparaciones de la solución numérica con soluciones analíticas de la ecuación de Boussinesq (Fragoza *et al.*, 1997).

3.3. Validación del esquema numérico de solución para la ecuación de Boussinesq

Para la validación del esquema numérico de la ecuación de Boussinesq unidimensional se compara la solución de elemento finito con soluciones analíticas reportadas en la literatura, tanto para el caso de régimen permanente como para el transitorio.

3.3.1. Solución analítica para la forma unidimensional de Boussinesq

Diferentes soluciones analíticas se encuentran reportadas en la literatura Hooghoudt, (1940), Parlange *et al.* (1971), Panagiotis *et al.* (1984), Fuentes *et al.* (1997) y Hogarth *et al.* (1999). En este trabajo se utiliza la solución analítica proporcionada por Fuentes *et al.* (1997), para validar el esquema numérico desarrollado con elemento finito para la ecuación de Boussinesq en una dimensión. Fuentes *et al.* (1997) propone una solución analítica para la forma unidimensional de Boussinesq bajo los supuestos de: a) porosidad drenable constante $\mu = \mu$; b)

transmisibilidad constante $T = \bar{T} = K_s(D_o + h_s)$; c) recarga nula $R = 0$. Además sugiere un conjunto de condiciones límite compuestos por una condición: $H = H_s = D_o + h_s$ como condición inicial, y condiciones de frontera sobre los drenes tipo radiación. La solución que representa el comportamiento de $h(x,t)$ es dada a partir del desarrollo de la serie de Fourier siguiente:

$$h(x,t) = h_s \sum \left\{ A_n \exp\left(-\alpha_n^2 \frac{t}{\tau}\right) \cdot \left[\cos\left(\alpha_n \frac{x}{L}\right) + \frac{\gamma}{\alpha_n} \sin\left(\alpha_n \frac{x}{L}\right) \right] \right\} \quad (3.36)$$

donde $\tau = \bar{\mu}L^2/\bar{T}$, los valores propios (α_n) son las raíces positivas de:

$$f(\alpha_n) = \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\gamma}{\alpha} - 2 \cot(\alpha) = 0 \quad (3.37)$$

las amplitudes correspondientes A_n se expresan como:

$$A_n = 2 \frac{\alpha_n \sin(\alpha_n) + \gamma[1 - \cos(\alpha_n)]}{\alpha_n^2 + \gamma^2 + 2\gamma} \quad (3.38)$$

El gasto drenado por unidad de longitud y la lámina drenada se calculan con las expresiones:

$$Q_i(t) = \frac{2\gamma\bar{T}}{L} h(0,t) = \frac{2\gamma\bar{T}}{L} h_s \sum_{n=0}^{\infty} A_n \exp\left(-\alpha_n^2 \frac{t}{\tau}\right) \quad (3.39)$$

$$\lambda(t) = \frac{1}{L} \int_0^t Q_i(t) dt = \lambda_{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} 2\gamma \frac{A_n}{\alpha_n} \left[1 - \exp\left(-\alpha_n^2 \frac{t}{\tau}\right) \right] \quad (3.40)$$

donde $\lambda_{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = \bar{\mu}h_s$ para el límite de la ecuación (3.40) la porosidad drenada y la transmisibilidad se recomiendan ser tomadas como:

$$\bar{\mu} = \frac{1}{h_s} \int_0^{h_s} \mu(h) dh \quad (3.41)$$

$$\bar{T} = K_s(D_o + \bar{h}) = \frac{2}{h_s^2} \int_0^{h_s} hT(h)dh \quad (3.42)$$

siendo $\bar{h} = \frac{2}{3} h_s$.

3.3.1.1. Régimen transitorio

Para comparar la solución analítica proporcionada por Fuentes *et al.* (1997) y la solución numérica desarrollada en este trabajo se utilizan los datos correspondientes a un sistema de drenaje instalado en el distrito de riego 076 del Valle del Carrizo, Sinaloa, México (Fuentes *et al.*, 1997; González *et al.*, 1997). Las características y parámetros son: a) características del sistema: $L = 50$ m, $P_d = 1.5$ m, $D_o = 3.5$ m, $H_i = 0$ m, $H_s = 5$ m; b) propiedades del suelo: $\theta_s = 0.5 \text{ m}^3/\text{m}^3$, $\theta_r = 0.0 \text{ m}^3/\text{m}^3$, $K_s = 0.557$ m/d, $\lambda_c = 0.45$ m, $\alpha = \beta = 0.95$; c) condición inicial: $h_s = P_d = 1.5$ m; b) condición de frontera $\gamma = 1.5$. De la ecuaciones (3.41) y (3.42) se deducen los valor de la transmisibilidad y de la porosidad drenada: $\mu = 0.1087 \text{ m}^3/\text{m}^3$ y $T = 2.5065 \text{ m}^2/\text{d}$; ($\bar{h} = 1$ m). Para la simulación se utilizo una discretización del dominio en N elementos de tamaño uniforme, para luego buscar el paso de tiempo que mejor permita reproducir la solución analítica. Para el caso se determinaron los siguientes valores: $N = 50000$, $\Delta x = L/N = 0.1$ cm, $\Delta t = 1$ seg con un valor para el parámetro M_* de 0.1. En la ilustración 3.3., se presenta los resultados obtenidos con la solución de elemento finito para régimen transitorio de la superficie libre y la lámina drenada. Estos resultados fueron comparados con los proporcionados por la solución analítica para régimen transitorio de Fuentes *et al.*, (1997). El comportamiento no oscilatorio de la solución en elemento finito justifica la selección del paso de espacio y de tiempo.

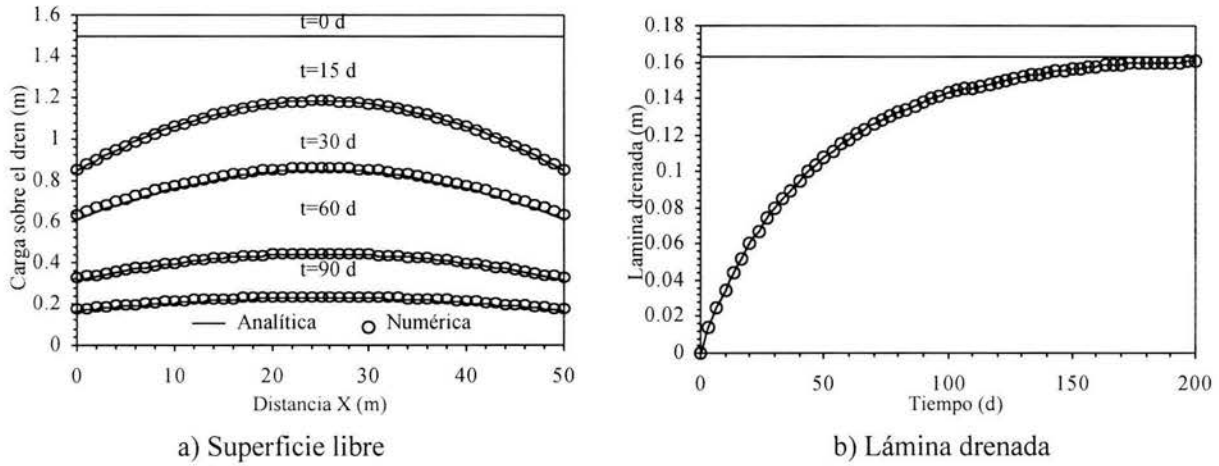


Ilustración 3.3. Evolución de la superficie libre y la lámina drenada obtenida con la solución de elemento finito y la solución analítica para régimen transitorio.

3.3.1.2. Régimen permanente

La solución de la ecuación de Boussinesq en estado permanente ($\partial H/\partial t = 0$) es proporcionada por la solución clásica de Hooghoudt, la cual utiliza las siguientes condiciones: 1) $H = H_d$ en $x = 0\text{m}$ y $x = L$, 2) $dH/dx = 0$ en el centro $x = L/2$. Es decir:

$$H^2(x) = H_d^2 + \frac{R_o}{K_s} x(L - x) \quad (3.43)$$

Aplicando la ecuación (3.43) al centro de separación entre drenes ($x = L/2$) y considerando la carga hidráulica escrita como $H(x,t) = h_o(x,t) + D_o$, con la carga en el centro de la separación y sobre el dren se deduce la siguiente expresión para la recarga:

$$R_o = 4K_s [h_c(h_c + 2D_o) - h_d(h_d + 2D_d)]/L \quad (3.44)$$

la cual se reduce a la forma clásica de Hooghoudt cuando $h_d = 0$. Para validar la solución de elemento finito se verifica que su comportamiento en el límite $t \rightarrow \infty$ corresponde con aquel que se obtiene haciendo uso de la solución de Hooghoudt. Se

selecciona una carga en el centro de la separación $h_c = 0.5\text{m}$ que conduce a $h_o \cong 0.365\text{m}$ y $R_o = 0.944 \times 10^{-3}\text{ m/d}$. La simulación de la evolución del manto freático se hace con la malla computacional de la validación precedente. En la ilustración 3.4 muestra que la solución de elemento finito para régimen transitorio tiende a la solución analítica en régimen permanente, definida por la ecuación (3.43) cuando $t \rightarrow \infty$.

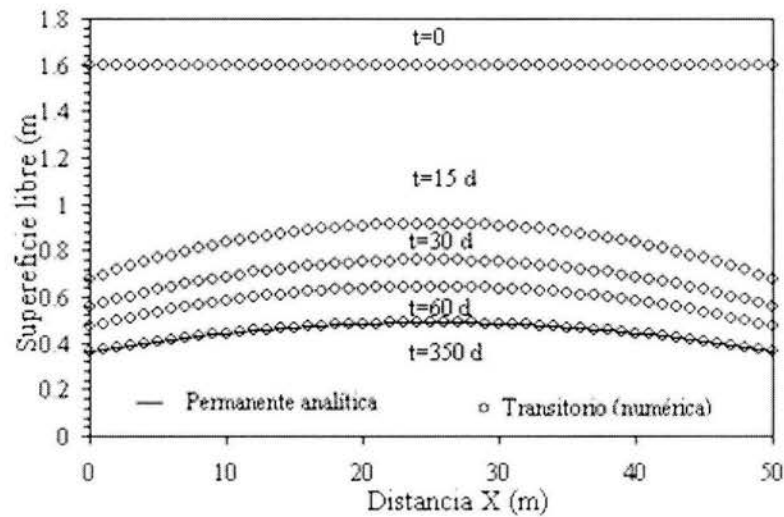


Ilustración 3.4. Evolución de la superficie libre para régimen transitorio con la solución de elemento finito tiende a solución analítica para régimen permanente.

CAPÍTULO IV

APLICACIONES

En este capítulo se presentan dos aplicaciones de la solución de elemento finito para la ecuación de Boussinesq. En la primera aplicación se estudia el flujo del agua en una y dos dimensiones sobre dos escenarios de drenaje, el primero consiste en un sistema de drenaje compuesto por dos drenes laterales y un colector cerrado y el segundo tiene la particularidad de incluir un colector ranurado. La segunda aplicación se realiza para describir el flujo del agua en un sistema drenaje agrícola instalado en la costa de Chiapas.

4.1. Efecto de un colector ranurado en el flujo del agua en un sistema de drenaje agrícola

Tradicionalmente se ha utilizado la aproximación unidimensional de la ecuación de Boussinesq para describir el comportamiento de los sistemas de drenaje agrícola, suponiendo que las variaciones en el sentido del dren son despreciables. La forma bidimensional de Boussinesq proporciona una mejor estimación del comportamiento de la superficie libre en un sistema de drenaje agrícola, debido a que para este caso el dominio de solución puede ser representado de mejor forma y se consideran los cambios en la dirección del dren, sin embargo, debido a la dificultad de cálculo que presenta la aproximación bidimensional su uso es poco difundido.

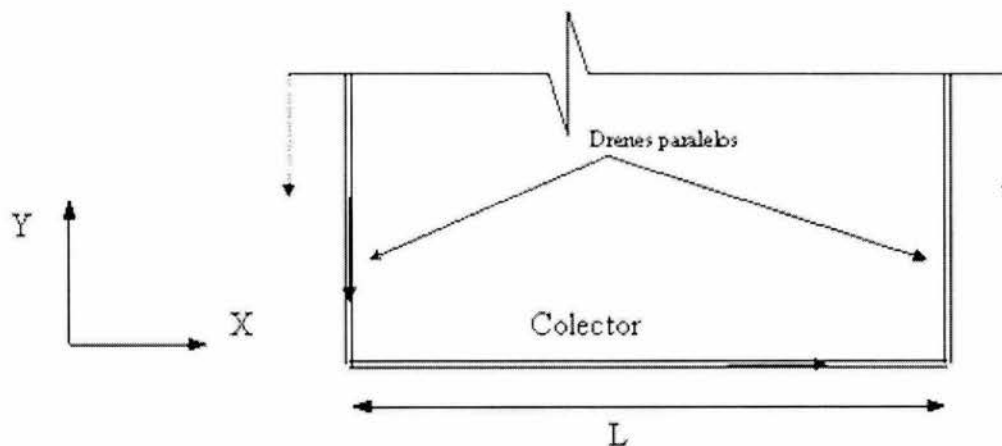


Ilustración 4.1. Sistema de drenaje agrícola utilizado para las simulaciones.

4.1.1 Caso colector cerrado

Este apartado se compara la solución en elemento finito de la ecuación de Boussinesq en dos dimensiones con la solución en una dimensión que ha sido validada en el apartado 3.3, para hacer la constatación del esquema en 1D y 2D se supone que la solución bidimensional de la ecuación de Boussinesq contiene la solución unidimensional. El escenario supuesto para hacer la comparación es el sistema de drenaje descrito en el inciso 3.3.1, sobre un dominio con las siguientes dimensiones: 200m de largo por 50m de ancho, en la discretización espacial del dominio se utilizó el paquete comercial Argus-one 4.0 la malla posee las siguientes características $\Delta x_{\min} = 0.8\text{m}$, $\Delta y_{\min} = 0.7\text{m}$, $\Delta x_{\max} = 1.8\text{m}$, $\Delta y_{\max} = 1.5\text{m}$, ver ilustración 4.2.

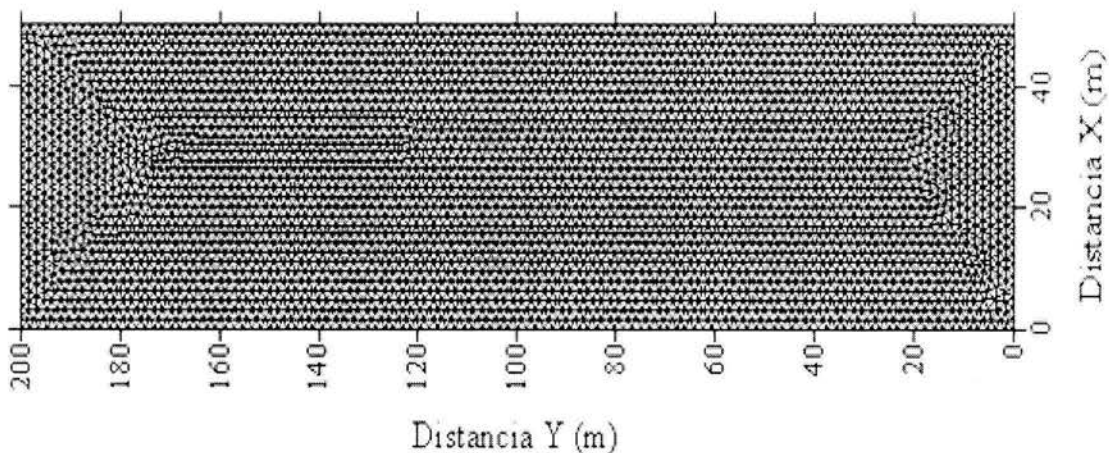
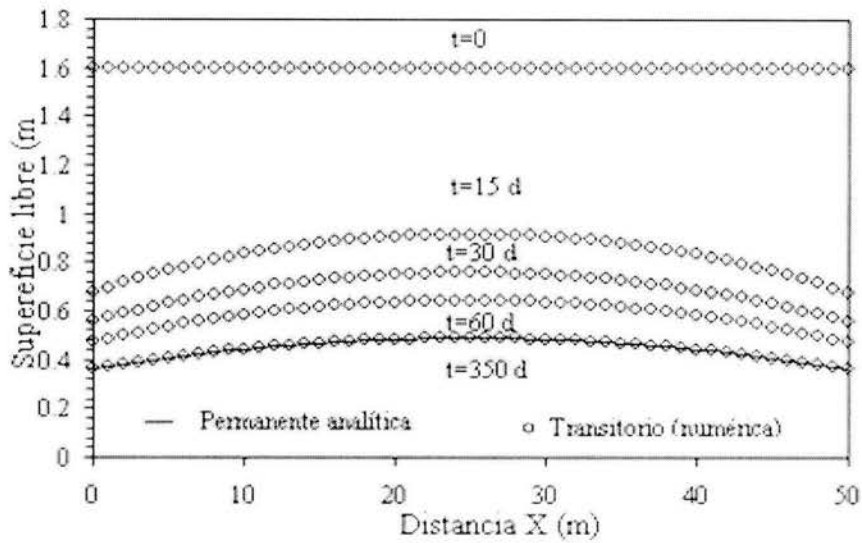
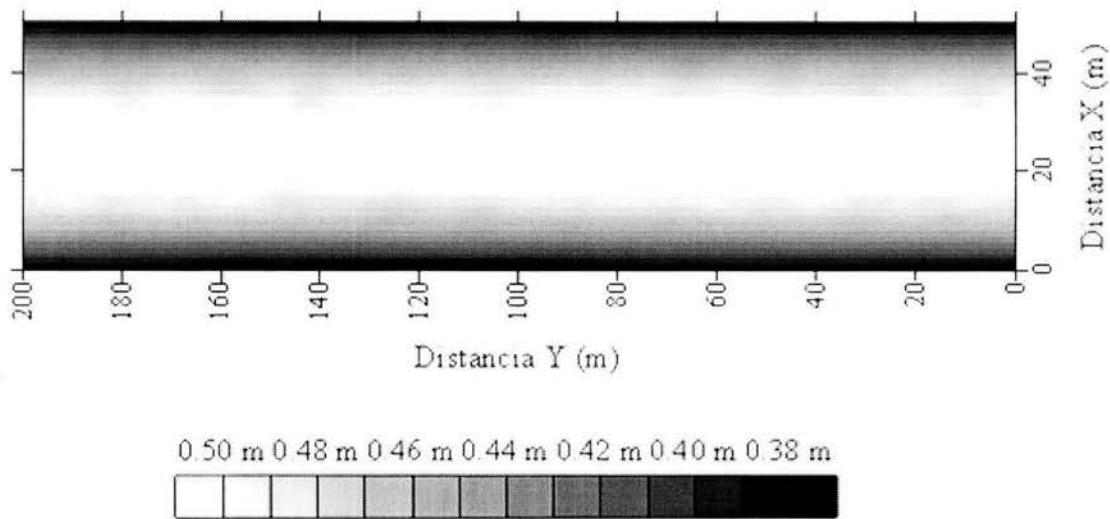


Ilustración 4.2. Malla de elemento finito para el escenario de drenaje del inciso 4.1.1.

En la ilustración 4.3-a se presenta la comparación de la evolución de la superficie libre proporcionada por la solución bidimensional con aquella que se obtiene al utilizar la solución unidimensional validada anteriormente, se aprecia que, la solución unidimensional se comporta como aquella correspondiente a un corte transversal del dominio bidimensional. Es notable que para dominios como el analizado donde no hay influencia del colector, el comportamiento de la carga hidráulica puede ser descrito por la aproximación unidimensional de manera correcta. La ilustración 4.3-b muestra la vista en planta de la superficie libre sobre el dominio de solución bidimensional para el colector cerrado en el estado permanente.



a) Evolución de la superficie libre con la solución unidimensional y bidimensional para el colector principal cerrado



b) Evolución en planta para la carga hidráulica sobre el dominio bidimensional con el colector principal cerrado (t=350 d).

Ilustración 4.3. Comparación unidimensional y bidimensional del esquema numérico de solución para la ecuación de Boussinesq y comportamiento del manto freático para la forma bidimensional con el colector principal cerrado.

4.1.2 Caso colector ranurado

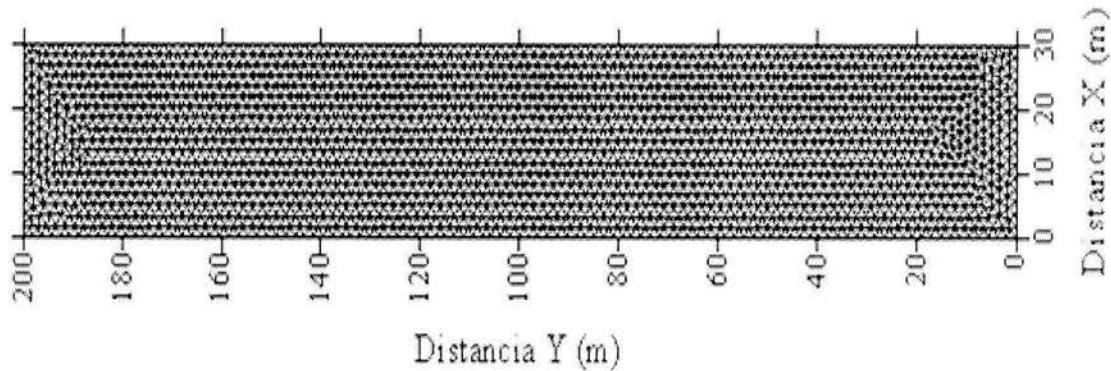
El modelo numérico desarrollado para la forma bidimensional de la ecuación de Boussinesq, es utilizado para la simulación hidráulica de un sistema de drenaje agrícola sobre un dominio bidimensional donde el colector funciona como dren. Lo anterior tiene como objetivo estimar la longitud de influencia del colector, que es la distancia medida perpendicularmente al colector a partir de la cual los efectos del colector ranurado no tienen incidencia sobre la posición de la superficie libre. Al establecer una relación entre la longitud de influencia y la longitud de los drenes laterales se puede definir un criterio de aplicabilidad para las soluciones en una y dos dimensiones de la ecuación de Boussinesq.

Para ilustrar el comportamiento del manto freático cuando el colector principal funciona como dren se propone utilizar tres tipos de suelo y dos sistemas de drenaje con diferente separación entre drenes, el primer sistema de drenaje corresponde a una separación entre drenes de 50m y el segundo de 30m. Las características de los sistemas de drenaje utilizados son: $L = 50\text{m}$, y $L = 30\text{m}$, $P_d = 1.5\text{m}$, $D_o = 3.5\text{m}$, $H_i = 0\text{m}$, $H_s = 5\text{m}$. La simulación se hace para régimen permanente con un valor de recarga constante $R_o = 0.944 \times 10^{-3}\text{m/d}$ y un paso de tiempo $\Delta t = 0.1\text{hr}$. A continuación se presentan las características para los tres tipos de suelo.

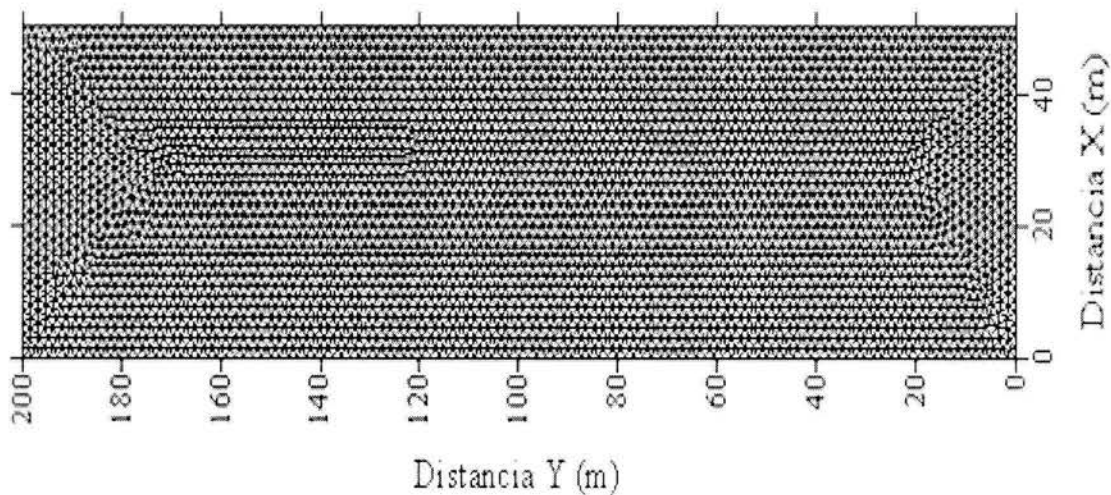
- Arcilla de Yolo: Propiedades del suelo $\theta_s = 0.495\text{m}^3/\text{m}^3$, $\theta_r = 0.2285\text{m}^3/\text{m}^3$, $K_s = 0.106\text{m/d}$, $\lambda_c = 0.2705\text{m}$, $\alpha = 0.8912$; (Saucedo *et al.*, 2002).
- Arena de Tezoyuca Morelos: Propiedades del suelo $\theta_s = 0.539\text{m}^3/\text{m}^3$, $\theta_r = 0.0\text{m}^3/\text{m}^3$, $K_s = 4.392\text{m/d}$, $\lambda_c = 0.311\text{m}$, $\alpha = 0.9$; (Zavala, 2003).
- Franco Montecillo: Propiedades del suelo $\theta_s = 0.4865\text{m}^3/\text{m}^3$, $\theta_r = 0.0\text{m}^3/\text{m}^3$, $K_s = 0.4416\text{m/d}$, $\lambda_c = 0.3275\text{m}$, $\alpha = 0.9$; (Fuentes, 1992).

La malla computacional correspondiente a la separación entre drenes de 50m fue descrita en el inciso para el primer caso, colector cerrado. La malla correspondiente

a la separación entre drenes de 30m tiene como pasos de espacio: $\Delta x_{\min} = 1.6\text{m}$, $\Delta y_{\min} = 1.0\text{m}$, $\Delta x_{\max} = 1.9\text{m}$, $\Delta y_{\max} = 2.0\text{m}$, (ilustración 4.4.).



a) Malla de elementos finitos del sistema de drenaje con una separación entre drenes de $L=30\text{m}$.



b) Malla de elementos finitos del sistema de drenaje con una separación entre drenes de $L=50\text{m}$.

Ilustración 4.4. Mallas de elementos finitos para los escenarios de drenaje del inciso 4.1.2. Separación entre drenes de 30m y 50m.

Las ilustraciones 4.5 a 4.7 muestran el comportamiento de la carga hidráulica tanto a lo largo del dren como en el centro interdrenes para el estado permanente, para ambos sistemas de drenaje. Conforme aumenta la distancia desde el colector la carga hidráulica sobre el dren y en el centro interdrenes tienden a un valor constante, el cual corresponde con la solución unidimensional calculada en la abscisa correspondiente. Al observar las ilustraciones 4.5 a 4.7 se aprecia que existe una distancia de influencia para colector ranurado a partir de la cual las líneas

equipotenciales pueden ser descritas en un corte transversal a los drenes conforme a la solución unidimensional. De las ilustraciones se define la longitud de influencia del colector principal para cada uno de los escenarios de drenaje y tipos de suelo utilizados, asimismo se estima el valor mínimo y máximo de la carga hidráulica sobre el dren y al centro interdrenes para la solución bidimensional y la unidimensional (Cuadros 4.1 a 4.4).

Cuadro 4.1. Resultados para la solución bidimensional para el escenario de drenaje con L=50m. Posición centro entre drenes.

Escenario L=50m Resultados entre drenes	Hmín (m)	Hmáx (m)	Solución 1D (m)	Longitud de influencia (m)
Arcilla de Yolo	0.5365	0.9538	0.9538	115
Franco Montecillo	0.3259	0.6185	0.6210	140
Arena de Tezoyuca	0.0914	0.1404	0.1404	165

Cuadro 4.2. Resultados para la solución bidimensional para el escenario de drenaje con L=50m. Posición sobre el dren.

Escenario L=50m Resultados sobre el dren	Hmín (m)	Hmáx (m)	Solución 1D (m)	Longitud de influencia (m)
Arcilla de Yolo	0.4188	0.7001	0.7001	110
Franco Montecillo	0.2542	0.4524	0.4530	141
Arena de Tezoyuca	0.0816	0.1221	0.1230	165

Cuadro 4.3. Resultados para la solución bidimensional para el escenario de drenaje con L=30m. Posición centro entre drenes.

Escenario L=30m Resultados entre drenes	Hmín (m)	Hmáx (m)	Solución 1D (m)	Longitud de influencia (m)
Arcilla de Yolo	0.4275	0.6245	0.6246	88
Franco Montecillo	0.1242	0.2396	0.2400	95
Arena de Tezoyuca	0.0337	0.0521	0.0523	106

Cuadro 4.4. Resultados para la solución bidimensional para el escenario de drenaje con L=30m. Posición sobre el dren.

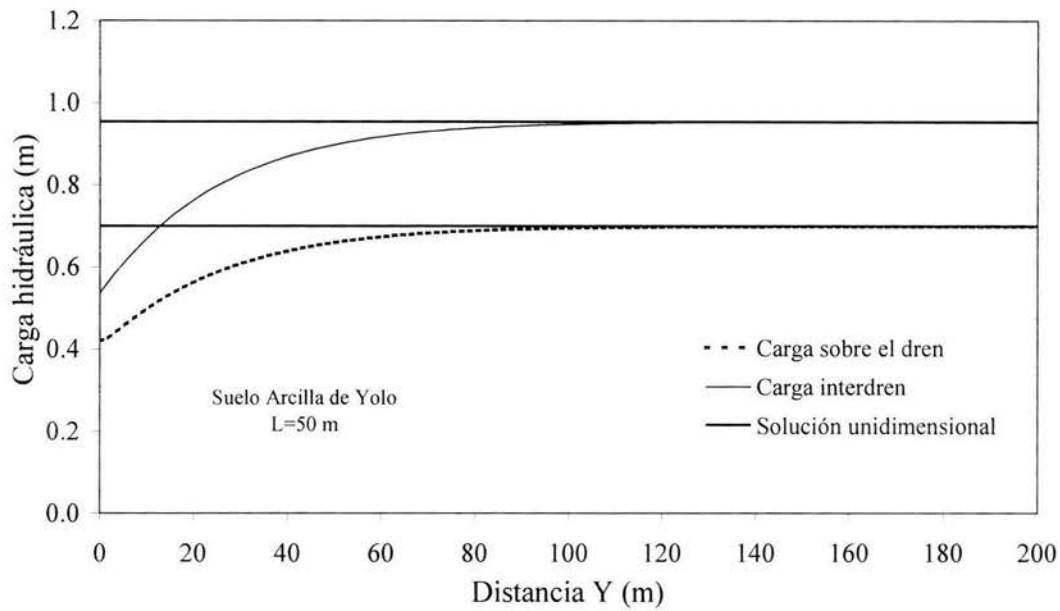
Escenario L=30m Resultados sobre el dren	Hmín (m)	Hmáx (m)	Solución 1D (m)	Longitud de influencia (m)
Arcilla de Yolo	0.3875	0.5348	0.5348	90
Franco Montecillo	0.0995	0.1746	0.1750	95
Arena de Tezoyuca	0.0305	0.0453	0.0454	107

Cuadro 4.5. Relación entre la longitud de influencia (L_{INF}) y la separación entre drenes para los tres tipos de suelos y los dos escenarios de drenaje.

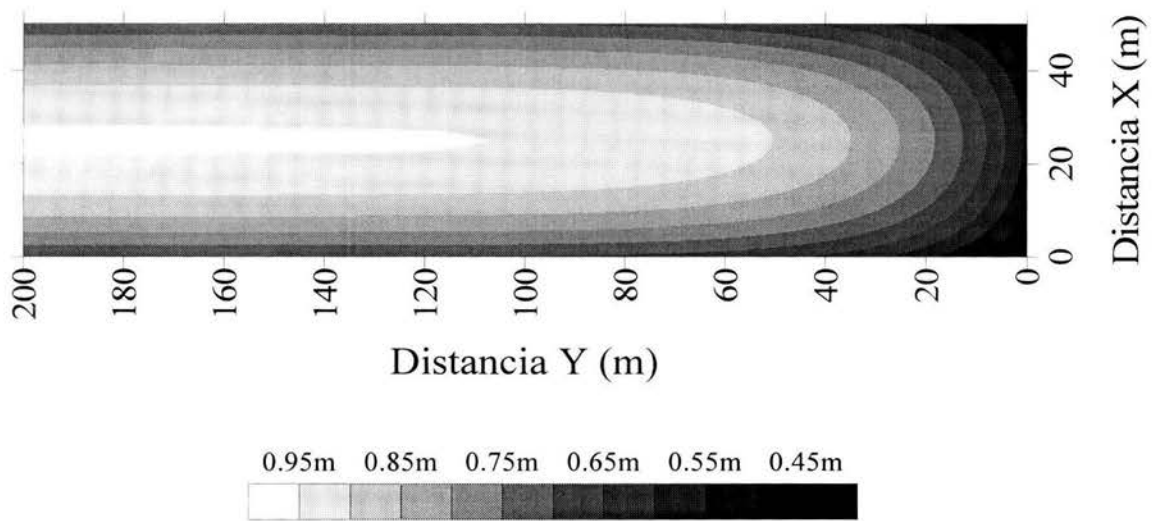
Escenario de simulación Resultado Final	Para L=50m L_{INF}	L_{INF} (m)	Para L=30m L_{INF}	L_{INF} (m)
Arcilla de Yolo	112	2.25*L	89	2.9*L
Franco Montecillo	140	2.80*L	95	3.1*L
Arena de Tezoyuca	165	3.30*L	106	3.5*L

Los resultados del comportamiento de la carga hidráulica sobre el dren y al centro interdrenes presentado en los cuadros 4.1 a 4.5 permiten estimar una longitud de influencia del colector ranurado, a partir de la cual los efectos del colector dejan de tener una incidencia apreciable sobre el comportamiento del manto freático. En sentido estricto, la longitud de influencia depende tanto del tipo de suelo como de la geometría del sistema de drenaje. Sin embargo para las separaciones típicas de instalación de sistemas de drenaje en zonas áridas y semiáridas de 30 y 50 metros, se puede establecer, a partir del análisis de tres suelos contrastantes, como cota superior de la longitud de influencia un valor de tres veces la separación entre drenes ($L_{INF} \cong 3L$).

De la definición de la longitud de influencia del colector ranurado puede concluirse que en sistemas de drenaje agrícola con colector ranurado, si la longitud de los drenes (L_d) es mayor que la longitud de influencia, esto es $L_d > L_{INF}$, entonces la solución unidimensional de Boussinesq es una aproximación correcta para describir el comportamiento del sistema de drenaje; para sistemas de drenaje agrícola donde la longitud de los drenes laterales sea menor o igual a la longitud de influencia $L_d \leq L_{INF}$, la solución adecuada para describir el comportamiento de la superficie libre es la forma bidimensional de Boussinesq.

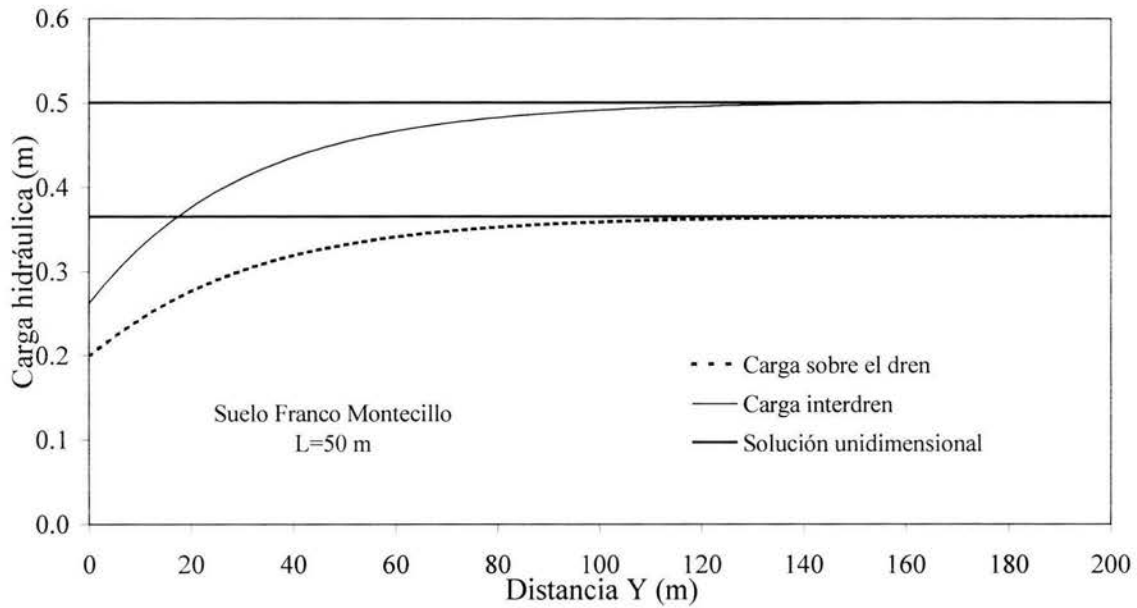


a) Evolución de la carga hidráulica sobre el dren y a una distancia entre drenes para la arcilla de Yolo, con el colector principal ranurado.

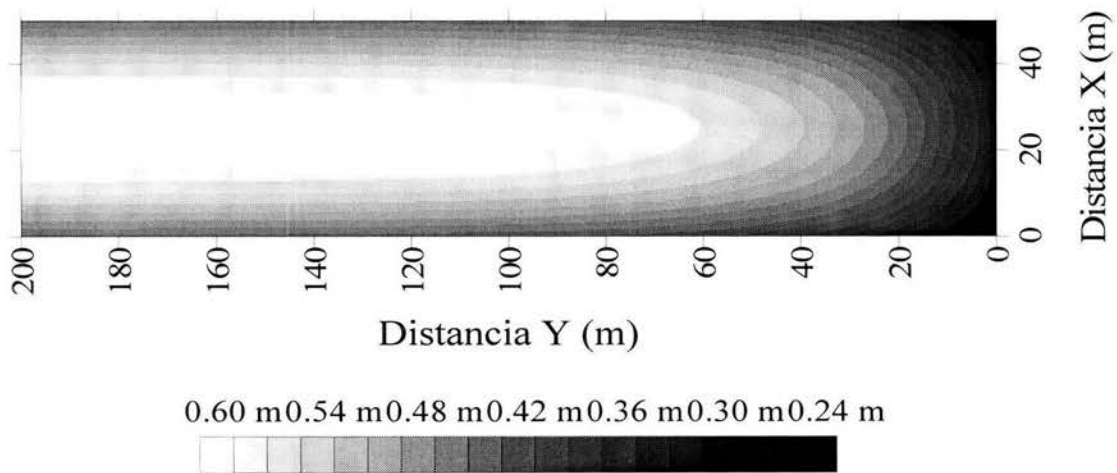


b) Comportamiento de la carga hidráulica sobre dominio bidimensional para el suelo de la arcilla de Yolo, con el colector principal ranurado.

Ilustración 4.5. Comparación de la solución unidimensional y bidimensional de la carga hidráulica sobre el dren y al centro entre drenes bajo la incidencia del colector principal ranurado, Suelo de la Arcilla de Yolo, $L = 50m$.

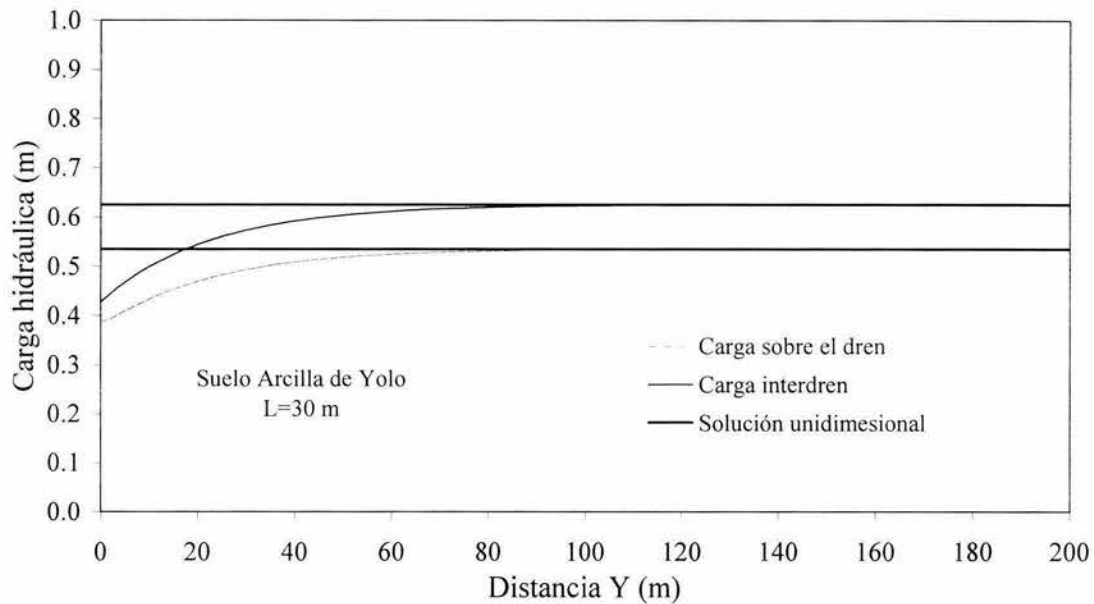


a) Evolución de la carga hidráulica sobre el dren y a una distancia entre drenes para tipo de suelo de franco Montecillo, con el colector principal ranurado.

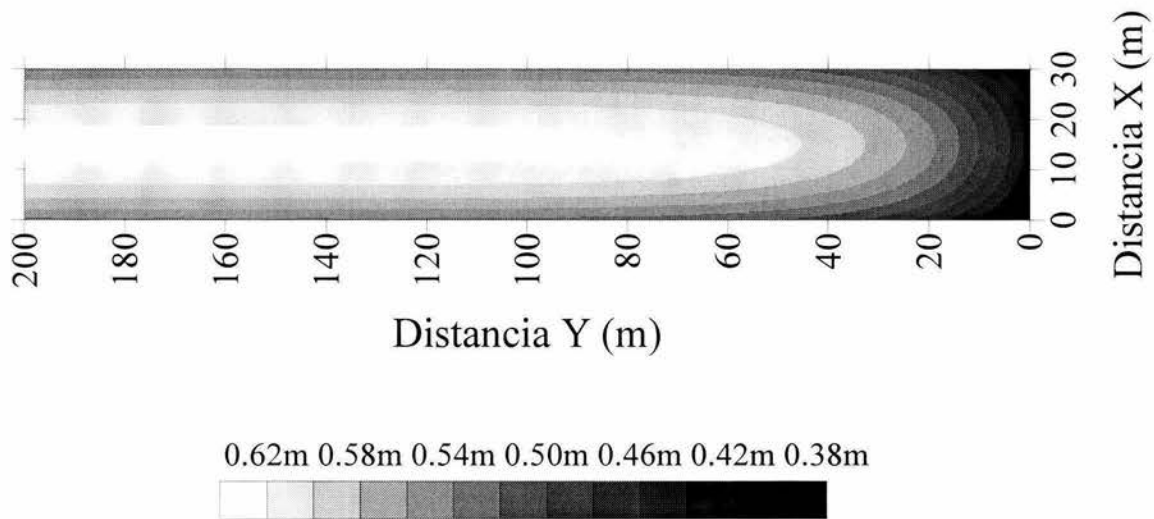


b) Comportamiento de la carga hidráulica sobre el dominio bidimensional para suelo de franco Montecillo, con el colector principal ranurado.

Ilustración 4.6. Comparación de la solución unidimensional y bidimensional de la carga hidráulica sobre el dren y al centro entre drenes bajo la incidencia del colector principal ranurado., Suelo Franco Montecillo, $L = 50\text{m}$.



a) Evolución de la carga hidráulica sobre el dren y a una distancia entre drenes para la arcilla de Yolo, con el colector principal ranurado.



b) Comportamiento de la carga hidráulica sobre el dominio bidimensional para el suelo de la arcilla de Yolo, con el colector principal ranurado.

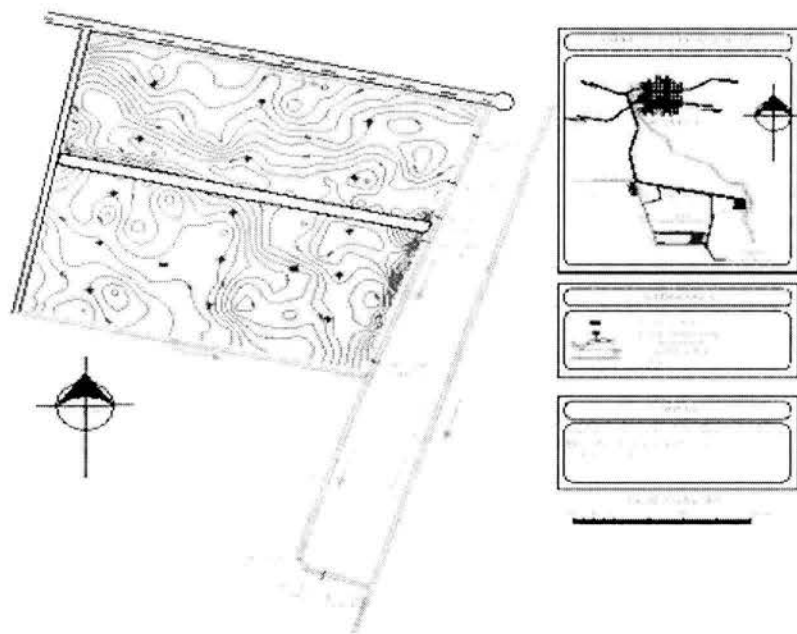
Ilustración 4.7. Comparación de la solución unidimensional y bidimensional de la carga hidráulica sobre el dren y al centro entre drenes bajo la incidencia del colector principal ranurado. Suelo de la Arcilla de Yolo, $L = 30m$.

4.2. Aplicación en el experimento de drenaje subterráneo en el ingenio de Huixtla, costa de Chiapas

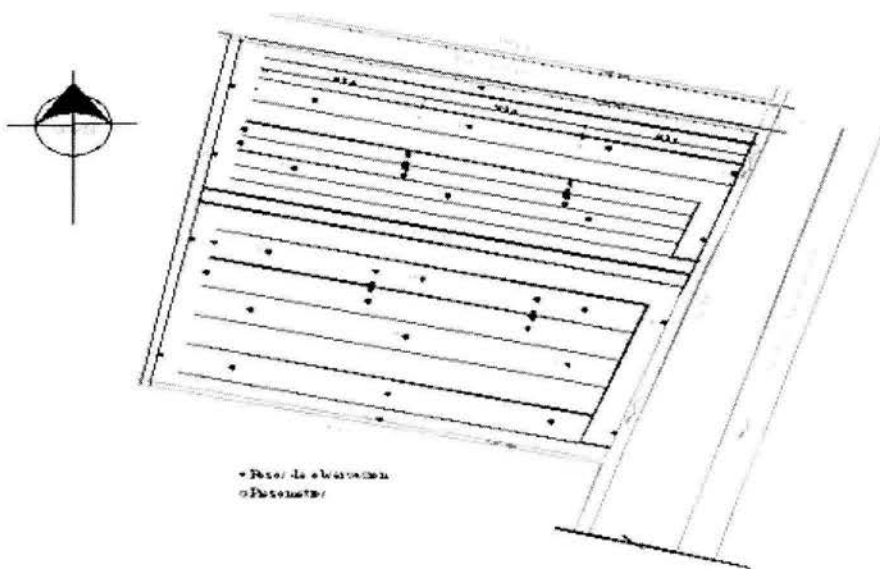
A continuación se evalúa la capacidad de descripción del esquema bidimensional para la ecuación de Boussinesq desarrollado en este trabajo, con fines de reproducir las observaciones registradas en un experimento de drenaje parcelario subterráneo de la parcela demostrativa en el campo experimental del ingenio de Huixtla Chiapas,

4.2.1. Características generales de la zona de Huixtla Chiapas

La parcela experimental se encuentra en el municipio de Huixtla Chiapas, el cual se ubica entre las coordenadas geográficas $14^{\circ}59'$ – $15^{\circ}18'$ de Latitud Norte y $92^{\circ}25'$ – $92^{\circ}43'$ de Longitud Oeste con respecto al meridiano de Greenwich, a una altitud promedio de 50msnm. El clima en la zona varía entre Am (cálido húmedo con abundantes lluvias en verano) a Acm (semicálido húmedo con abundantes lluvias en verano), la temperatura promedio anual es de 28.4°C y tiene una precipitación anual promedio de 2346mm. La parcela demostrativa de drenaje agrícola tiene una superficie de 6.5ha y se ubica en el área de influencia del ingenio de Huixtla, perteneciente al Distrito de Temporal Tecnificado 018 Huixtla Chiapas. La ilustración 4.8 muestra un croquis de la localización de la zona de estudio. Para definir las características de la zona se construyeron 15 pozos de observación hasta una profundidad máxima de 2.0m, del análisis de las muestras de suelo se obtuvo que las texturas predominantes de suelo para una profundidad de 0 a 100cm son franco limoso y franco arcilloso (ilustración 4.9) con la presencia de lentes de arcilla limosa y arcilla arenosa.



a) Topografía de la parcela demostrativa en el ingenio de Huixtla y croquis de localización.



b) Ubicación de los piezómetros y pozos de observación sobre el sistema de drenaje de huixtla.

Ilustración 4.8. Topografía y croquis de la localización de la parcela demostrativa del ingenio de Huixtla (Namucho *et al.*, 2003).

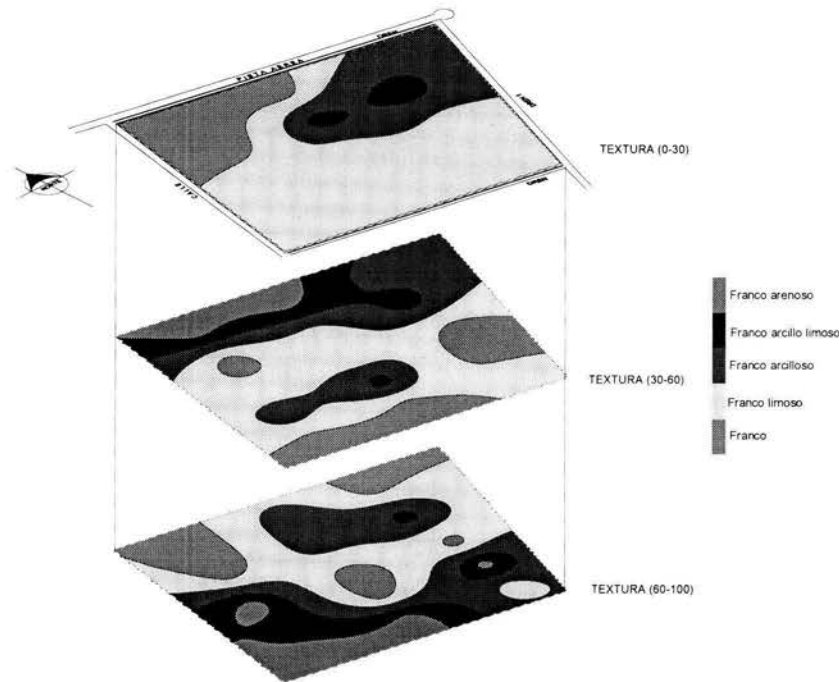


Ilustración 4.9. Textura de los suelos de la parcela demostrativa del ingenio de Huixtla, Chiapas.(Namucho *et al.*, 2003).

4.2.2. Evaluación hidráulica del sistema de drenaje agrícola instalado en Huixtla, Chiapas

La evaluación hidráulica del sistema de drenaje se realiza estudiando el comportamiento de las cargas hidráulicas registradas en los pozos de observación y de los gastos drenados medidos, para el periodo monitoreo comprendido entre el 16 de septiembre al 30 de octubre de 2003. Se seleccionó como elemento representativo del sistema de drenaje al subsistema compuesto por tres drenes identificados como dren C, D y E, el dominio de interés posee las siguientes características: 45m de ancho por 271.9m de largo, tiene una separación entre drenes de 15m, la profundidad media es de 1.2m y la pendiente longitudinal de 0.1%. El subsistema de drenaje cuenta con dos baterías de piezómetros ubicadas a uno y dos tercios de la longitud del dren, denominadas baterías C y D respectivamente, las cuales están compuestas de siete piezómetros (D1, D2,...,D7) ubicados a 7.5m, 2m y 1m hacia cada lado del dren D, (ilustración 4.10).

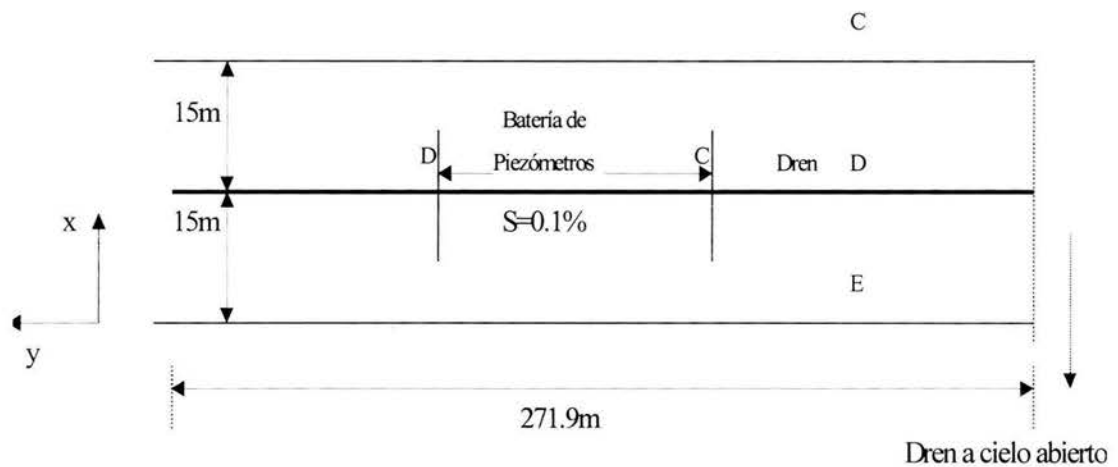


Ilustración 4.10. Esquema general del dren lateral evaluado en el sistema de drenaje experimental de Huixtla.

Dentro del periodo de tiempo en el cual fueron tomados los datos del experimento de drenaje se presentó un evento máximo de precipitación que produjo una lámina acumulada de 113mm, dicho evento sugiere ser una condición crítica para la capacidad de respuesta del sistema de drenaje subterráneo del ingenio de Huixtla por lo cual es importante estudiar el funcionamiento del sistema de drenaje para esta situación. El hidrograma de descarga asociado a dicho evento comprende del 1 al 10 de octubre de 2003, en la ilustración 4.11 se muestra el registro de gastos drenados durante el periodo de evaluación.

Para la evaluación hidráulica se utilizó un procedimiento inverso similar al presentado por Saucedo *et al.* (2002), haciendo uso de la ecuación bidimensional de Boussinesq y la fórmula de la porosidad drenable de Fragoza *et al.* (2003) para reproducir el hidrograma de drenaje observado en campo. El método inverso permite estimar el valor de la conductividad hidráulica a saturación global del suelo, los valores de las otras características hidrodinámicas del suelo se estimaron con base en la textura (Fuentes *et al.*, 1997).

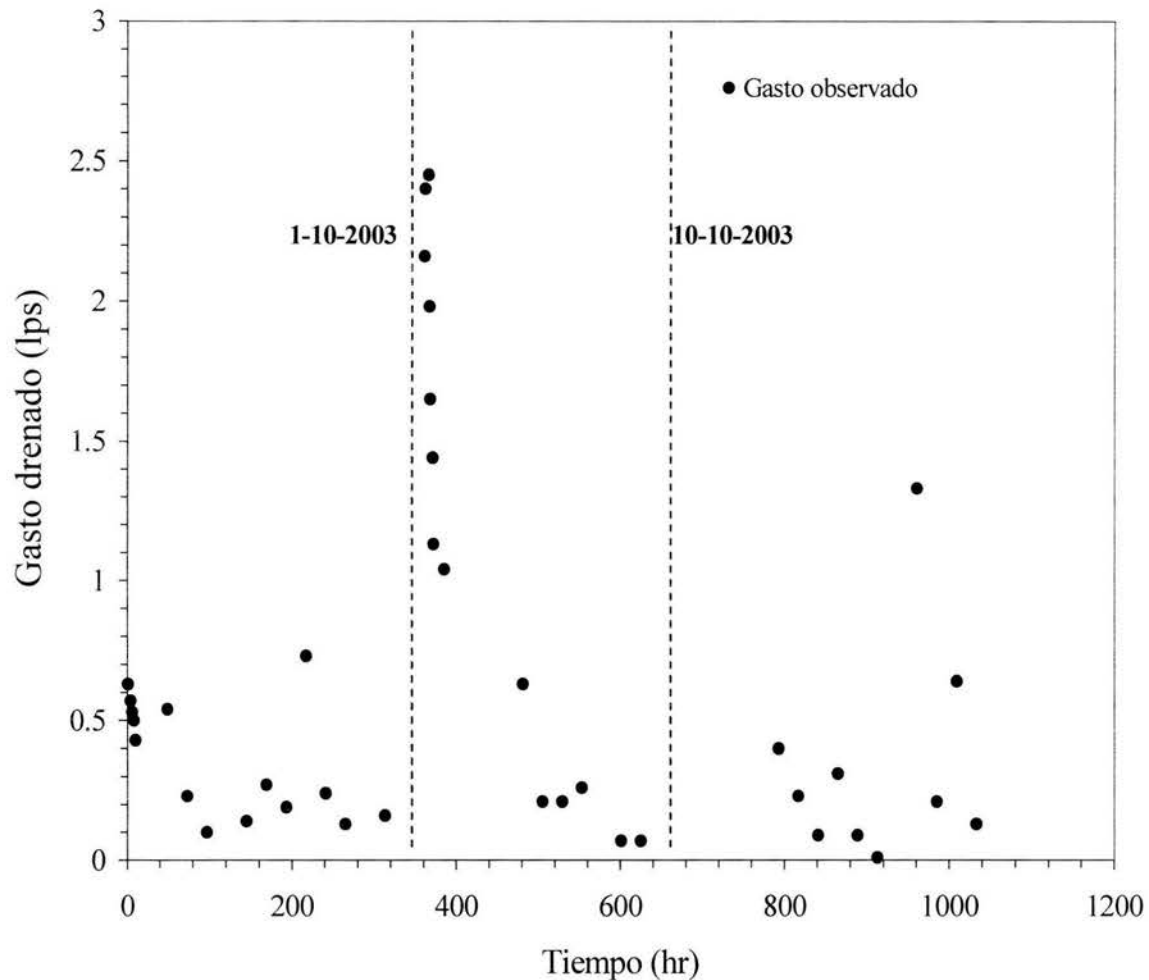


Ilustración 4.11. Registro de gastos drenados durante el periodo comprendido del 16 de septiembre al 30 de octubre de 2003.

Debido a la heterogeneidad que se presenta en el suelo de la parcela demostrativa de drenaje se propuso dividir el dominio de interés en zonas de diferente conductividad hidráulica a saturación, en base a las proyecciones en planta de la textura del suelo (ilustración 4.9), de la ilustración se aprecia que la textura media vertical, obtenida a partir de mediciones en tres horizontes del suelo, varía de franco arenosa a franco arcillosa en la zona donde se encuentra el subsistema de drenaje. Con fines de modelación se aproximaron las zonas de textura como se muestra en la ilustración 4.12. En el cuadro 4.5 se presentan las características hidrodinámicas del suelo en el subsistema de drenaje.

Cuadro 4.5. Características hidrodinámicas del subsistema de drenaje.

Suelo	Textura media	θ_s [cm ³ cm ⁻³]	θ_r [cm ³ cm ⁻³]	λ_c [m]	K_s [m d ⁻¹]
Zona 1	Franco arcilloso limoso	0.500	0.0	0.5780	0,0024
Zona 2	Franco Arcilloso	0.475	0.0	0.3415	0.086
Zona 3	Franco arcilloso arenoso	0.425	0.0	0.3335	1.2

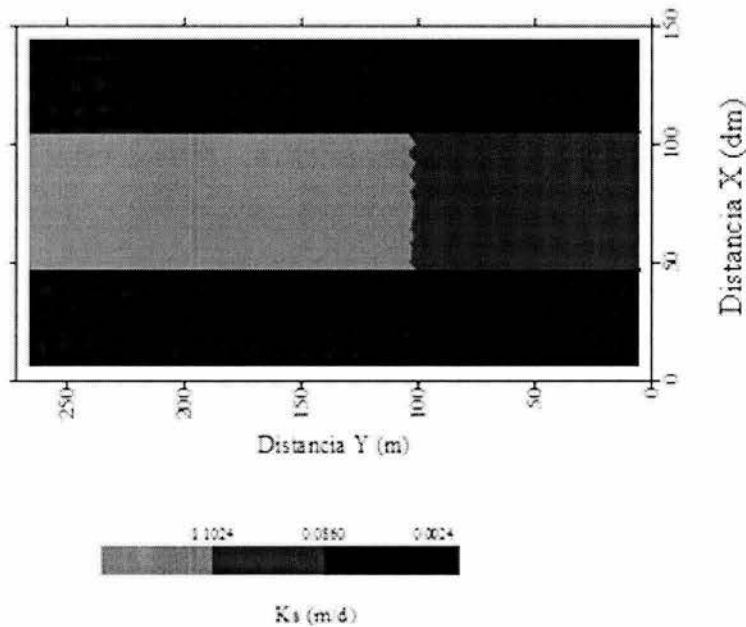
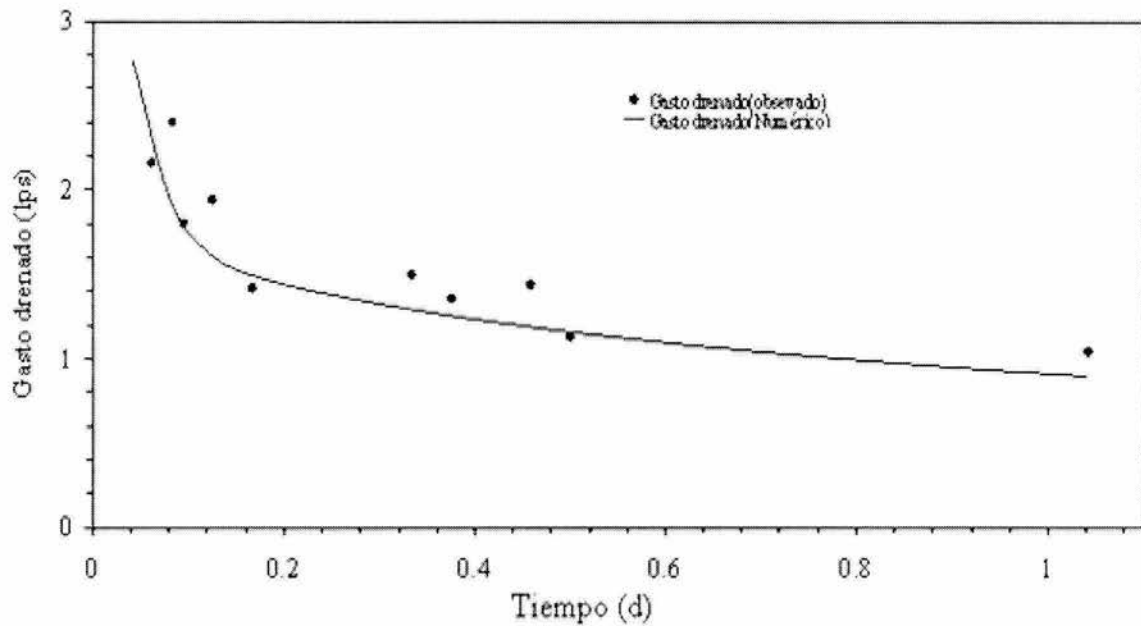


Ilustración 4.12. División del subsistema de drenaje en las franjas de suelo

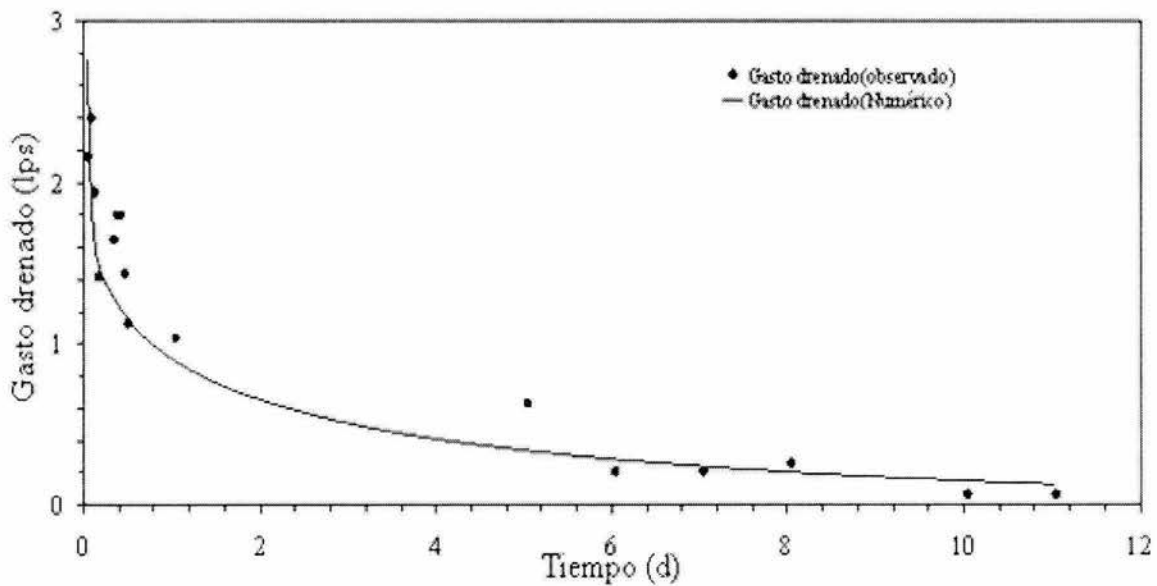
Es necesario definir los parámetros de la condición de radiación, es decir el exponente s y la conductancia de la interfaz suelo-dren (γ). El exponente s es estimado a partir de la relación funcional entre s y ϕ (ecuación 2.62) y el parámetro de conductancia se estimó analizando la relación entre las cargas hidráulicas y el gasto drenado. Para la simulación del sistema de drenaje se utiliza la solución de elemento finito de la ecuación bidimensional de Boussinesq considerando la transmisibilidad variable, la porosidad drenada proporcionada por la ecuación (2.42), la condición inicial y la condición de frontera sobre los drenes, representadas por las ecuaciones (3.4), (3.7) respectivamente. El escenario de simulación consiste en un sistema de drenaje que posee las características hidrodinámicas del suelo mostradas en el cuadro 4.5., asimismo se ha tenido en cuenta $L = 15\text{m}$, $P = 1.2\text{m}$, $D_o = 3.8\text{m}$, $H_i = 0\text{m}$, $H_s = 5\text{m}$; y los parámetros de la condición de frontera $s = 0.689$ y $\gamma = 0.2$. Para realizar la malla de elemento finito se utilizó el paquete

comercial Argus-one 4.0 la malla posee las siguientes características: $\Delta x_{\max} = 1.4\text{m}$, $\Delta y_{\max} = 1.5\text{m}$, $\Delta x_{\min} = 0.5\text{m}$, $\Delta y_{\min} = 0.4\text{m}$.

En la ilustración 4.13 se presenta el hidrograma observado y el obtenido con la solución de elemento finito de la ecuación bidimensional de Boussinesq. La buena concordancia entre el hidrograma experimental de salida y el teórico ($R^2 = 0.9803$), permitirá estudiar el funcionamiento hidráulico del sistema de drenaje subterráneo del ingenio de Huixtla para diferentes escenarios de funcionamiento. La ilustración 4.14 muestra el comportamiento de la carga hidráulica para el evento simulado ($R^2 = 0.9927$), los resultados permiten concluir que la ecuación bidimensional de Boussinesq sujeta a una condición de radiación fractal describe acertadamente el comportamiento de un sistema de drenaje.

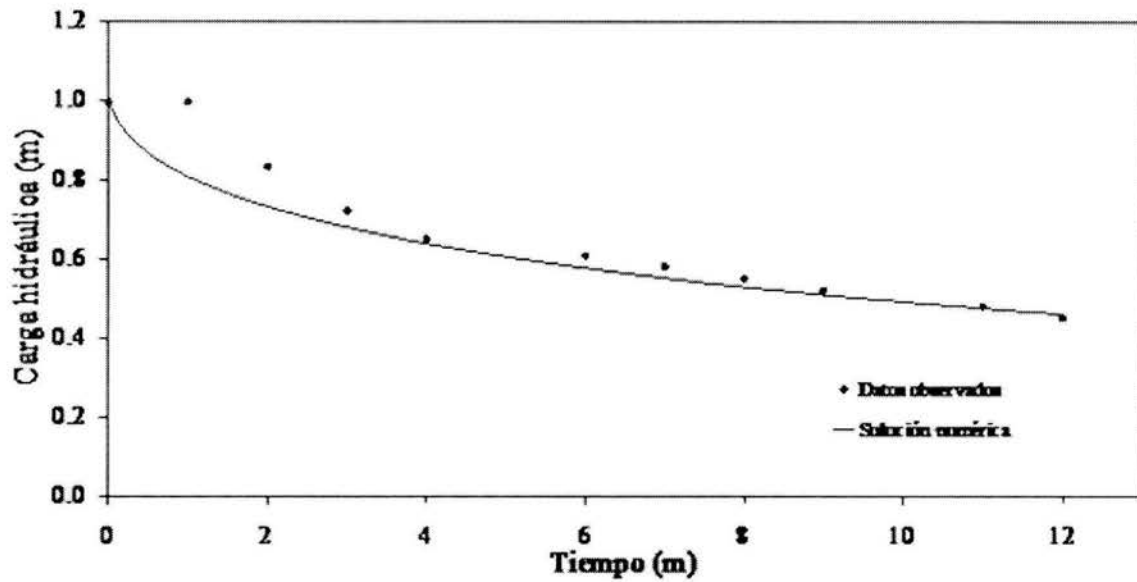


a) Comportamiento durante diez días para el gasto drenado durante el evento máximo, gastos medidos y teóricos.

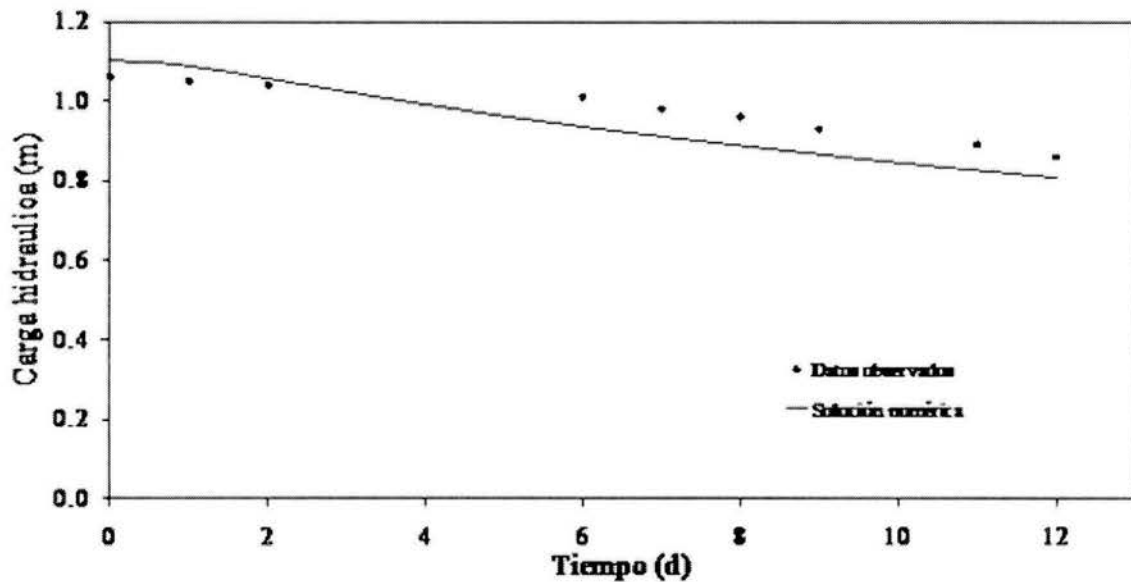


b) Detalle para el primer día del registro de gastos del evento máximo.

Ilustración 4.13. Comparación entre el hidrograma de salida experimental y el hidrograma de salida teórico del drenaje parcelario en el ingenio de Huixtla, Chiapas ($R^2 = 0.9803$).



a) Evolución de la carga sobre el dren para la simulación numérica y los datos observados



b) Evolución de la carga hidráulica entre drenes para la simulación numérica y los datos observados

Ilustración 4.14. Evolución de la carga hidráulica en el centro interdrenes y sobre el dren para los datos observados y la reproducción numérica ($R^2 = 0.9927$).

CAPÍTULO V

CONCLUSIONES

En este trabajo se desarrolla una solución numérica para la ecuación diferencial parcial no lineal de Boussinesq en su forma unidimensional y bidimensional con el método del elemento finito, utilizando una condición de frontera tipo radiación fractal para describir el comportamiento de la carga hidráulica y del gasto en la frontera del dren. La condición de frontera de radiación fractal estipula una forma funcional para el cálculo del coeficiente de conductancia en la interfaz suelo-dren, la inclusión de los efectos de la zona no saturada se hace a partir del parámetro de la porosidad drenada de Fragoza *et al.* (2003). La solución de elemento finito es aplicada en dos casos; en el primero se hace una comparación entre las aproximaciones unidimensional y bidimensional para describir el flujo del agua en sistemas de drenaje con colectores ranurados, la segunda aplicación se relaciona con la capacidad descriptiva del modelo para reproducir las observaciones realizadas en un sistema de drenaje instalado en la costa de Chiapas.

De los resultados obtenidos en este trabajo se desprenden las siguientes conclusiones:

La ecuación bidimensional no lineal de Boussinesq sujeta a una condición de frontera tipo radiación fractal utilizada en este trabajo, es una herramienta para el estudio, descripción y análisis del funcionamiento de los sistemas de drenaje agrícola durante su fase de recesión. Con los resultados obtenidos para este tipo de condición de frontera en este trabajo y en trabajos anteriores (González *et al.*, 1997; Fragoza *et al.*, 2003; Zavala, 2003; Zavala *et al.*, 2003) se evidencia que el suponer un abatimiento instantáneo de la carga hidráulica en la vecindad del dren es una aproximación limitada del fenómeno de la transferencia del agua del suelo hacia el dren.

La consideración de la heterogeneidad de las características hidrodinámicas en la ecuación bidimensional de Boussinesq permite simular el funcionamiento hidráulico de los sistemas de drenaje agrícola en suelos con variabilidad espacial.

El análisis del funcionamiento hidráulico de sistemas de drenaje agrícola en tres suelos contrastantes para las separaciones típicas de instalación en zonas áridas y semiáridas de 30 y 50 metros, ha permitido definir la longitud de influencia del colector ranurado, entendida como la distancia a la cual la influencia de dicho colector en la posición de la superficie libre del agua es despreciable. Se estimó un valor de cota superior igual a tres veces la separación entre drenes para la longitud de influencia. De lo anterior se deriva que en sistemas de drenaje agrícola con colector ranurado, si la longitud de los drenes laterales es mayor que la longitud de influencia, entonces la solución unidimensional de Boussinesq es una aproximación correcta para describir el comportamiento del sistema de drenaje; en caso contrario, es decir, para sistemas de drenaje agrícola donde la longitud de los drenes laterales sea menor o igual a la longitud de influencia, la forma correcta para describir el funcionamiento hidráulico del sistema, es la ecuación de Boussinesq bidimensional.

REFERENCIAS

1. Aparicio, F. J., Berezouwsky, M., 1989. Las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento en la hidráulica. *Ingeniería Hidráulica en México*. 5, 40-45.
2. Bouwer H., 1964. Rapid field measurement of air entry value and hydraulic conductivity of soil as significant parameters in flow system analysis. *Water resources research*, 36, 411-424.
3. Celia, M., Gray, W., 1992. *Numerical Method for Differential Equations, Fundamental Concepts for Scientific and Engineering Applications*. Prentice Hall. Inc. USA.
4. Childs, E. C. Y N. Collis-George, 1950. The permeability of porous materials. *Proc. Roy. Soc., Ser. A201*, 392-405.
5. De Zeeuw, J. W., y F. Hellinga, 1958. Neerslag en afvoer. *Landbouwkundig Tijdschrift*. 70, 405-422.
6. Dumm, L. F., 1954. Drain spacing formula. *Agricultural Engineering*. 35, 726-730.
7. Fipps, G., Skaggs, W., 1986. Drains as a boundary conditions in finite elements. *Water Resources Research*. 22, 1613-1621.
8. Fragoza, F., *et al.* 2003. Drenaje agrícola con capacidad de almacenamiento variable. *Ingeniería Hidráulica en México*. 18(3).
9. Fuentes, C., 1992. *Approche fractale des transferts hydriques dans les sols non saturés*. Tesis de Doctorado de la Universidad Joseph Fourier de Grenoble, Francia. 267 pp.

10. Fuentes, C., Brambila, F., Vauclin, M., Parlange, J.-Y., Haverkamp, R., 2001. Modelación fractal de la conductividad hidráulica de los suelos no saturados. *Ingeniería Hidráulica en México*. 2, 119-137.
11. Fuentes, C., Haverkamp, R., Parlange J.-Y., 1992. Parameter constraints on closed-form soilwater relationships. *Journal of hydrology*. 134, 117-142.
12. Genuchten, V., 1982. A comparison of numerical solutions of the one-dimensional unsaturated-saturated flow and mass transport equations. *Water resources*, 5, 47-55.
13. González, A., Fuentes, C., Rendón, L., 1997. Sobre la ecuación de Richards y la ecuación de Boussinesq de los acuíferos libres: La porosidad drenable. VII congreso Nacional de Irrigación. Hermosillo, Sonora. 141-145.
14. Gupta, R., A. Bhattacharya, y P. Chandra., 1994. Unsteady drainage with variable drainage porosity. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*. Vol. 120, No. 4, 703-715.
15. Hooghoudt, S. B., 1940. Algemeene beschouwing van het problem de detailontwatering en de infiltratie door middle van parallel loopende drains, greppels, slooten, en kanalen *Versl. Landbouwk. Onderz.* 46 (14) B. Algemeene Landsdrukkerij, s-Gravenhage, 193 p.
16. Hogarth, W., Parlange, J.-Y., 1999. Approximate analytical solution of the Boussinesq equation with numerical validation. *Water resources research*, Vol. 30, No 10, 3193-3197.
17. Huyakorn, P., Pinder, G., 1983. *Computational Methods in subsurface flow*. Academic Press, Inc. LTD. USA.
18. Lázaro, P., Fuentes, C., 2000. Dinámica de los mantos freáticos someros en los distritos de riego. *Agrociencia*. Vol. 34, No 4, 387-401.
19. Lockington, D. A., Parlange, J.-Y., 2000. Similarity solution of the Boussinesq equation. *Advances in water resources*. 23, 725-729

20. Mori, M., 1983. *The Finite Element Method and Its Applications*. Macmillan Publishing Company, USA.
21. Namuche, R., *et al.* 2003. Diseño, construcción y evaluación de un sistema de drenaje parcelario subterráneo controlado en la costa de Chiapas. *Subordinación de Contaminación y Drenaje Agrícola.*, IMTA. México.
22. Panagiotis, K., 1984. A Simple Analytical Solutions for the Boussinesq One-Dimensional Groundwater Flow Equations. *Water Resources Research*. Vol 20, No 1, 24 –28.
23. Parlange, H., 1971. Theory of water- movement in soil, One Dimensional absorption. *Soil Sci.*, 111(2), 134 –137.
24. Pandey, R. A., A. Bhattacharya, O. Singh y S. Gupta, 1992. Drawdown solution with variable drainable porosity. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*. Vol. 118, No. 3, 382-396.
25. Saucedo, H., Fuentes, C., 2002. Una solución de elemento finito para la transferencia de agua en un sistema de drenaje agrícola subterráneo. *Ingeniería hidráulica en México*. Vol. 17, No. 1, 93 –105.
26. Saucedo, H. 2003. Acoplamiento de las ecuaciones de Saint-Venant y Richards en el riego por melgas. Tesis de Doctorado por la Universidad Nacional Autónoma de México. 97 pp.
27. Vauclin, M., 1994. Modélisation du transport de solutés dans la zone non saturée du sol, *Reveu- état de l'art. Reveu des sciences de l'eau*. 7, 81-102
28. Zavala, M., Fuentes, C., Saucedo, H., 2003. Las ecuaciones de Richards y de Boussinesq en el drenaje agrícola subterráneo. XII Congreso Nacional de Irrigación, Zacatecas México. Mesa 8, 1-9.

29. Zavala, M., Fuentes, C., Saucedo, H., 2003. La radiación fractal en la ecuación de Boussinesq del drenaje agrícola. *Ingeniería Hidráulica en México*. 2, 119-137.
30. Zavala, M., Fuentes, C., Saucedo, H., 2003. Sobre la condición de radiación en el drenaje de una columna de suelo inicialmente saturado. *Ingeniería Hidráulica en México*. 2, 121-131.
31. Zavala, M. 2003. Sobre la condición de radiación no lineal en el drenaje agrícola subterráneo. Tesis de Doctorado por la Universidad Nacional Autónoma de México. 162 pp.