

01174



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO DE LA FACULTAD DE INGENIERIA**

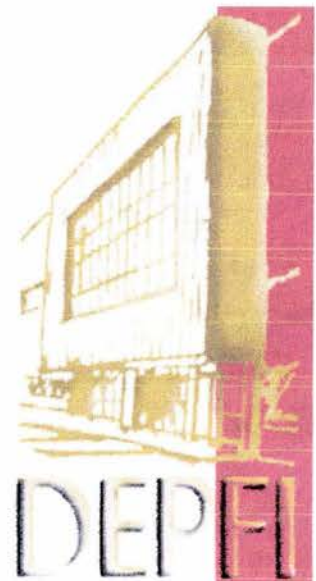
**DISEÑO DE SARTAS DE VARILLAS EN POZOS DE BOMBEOMECÁNICO
UTILIZANDO VARILLAS DE LASTRE (SINKERBARS).**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE MAESTRO EN INGENIERÍA

**PRESENTA:
ING. JAVIER ESPINOSA RIVERA**

Tutores: Ing. Horacio Zúñiga Puente.
Dr. Fernando Samaniego Verduzco.



2004



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Dedicado a ...

Mis padres †

Mi tía Andrea, mi hermana Lulú y mi hermana Gabriela.

Mi familia Espinosa y Rivera.

Mis amigos.

Agradecimientos...

La Universidad Nacional Autónoma de México.

La división de Estudios de Posgrado de la FI.

Al Ing. Horacio Zúñiga Puente: Por el tiempo dedicado a la elaboración de este trabajo, por ser uno de los mejores profesores de la DEPFI.

A todos los amigos de la Maestría. A los camaradas T. Iván y Edgar.

INDICE

	Página
LISTA DE FIGURAS	III
RESUMEN	1
I. INTRODUCCIÓN	3
II. SISTEMA DE BOMBEO MECÁNICO	
II.1 Descripción del sistema	6
II.2 Unidad de bombeo	10
II.3 Reductor de velocidad	11
II.4 Motor	12
II.5 Sarta de varillas	13
II.6 Bomba subsuperficial	14
II.7 Sinkerbars	17
III. MÉTODOS DE DISEÑO DE SARTAS DE VARILLAS	
III.1 Convencional	19
III.2 API-RP11L	20
III.3 Deficiencias de ambos métodos	24
IV. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	
IV.1 Factores de falla en sartas de varillas de Bombeo Mecánico	26
IV.2 Diagrama de Goodman modificado	27
IV.3 Planteamiento del problema	29
IV.4 Modelo matemático de Gibbs	32
IV.5 Propuesta de solución	34

**V. MÉTODO DE DISEÑO PROPUESTO DE SARTAS DE VARILLAS,
UTILIZANDO VARILLAS DE LASTRE (SINKERBARS).**

V.1 Procedimiento de diseño	37
V.2 Ejemplos de aplicación	44
CONCLUSIONES	52
NOMENCLATURA	53
REFERENCIAS	58
APÉNDICE A	60
APENDICE B	61
APENDICE C	66

LISTA DE FIGURAS

Figura		Página
Fig.II.1	Partes principales del sistema superficial del equipo de bombeo mecánico convencional	7
Fig.II.2	Partes principales que constituyen una bomba subsuperficial.	9
Fig.II.3	Fotografía de una unidad de Bombeo Mecánico Convencional	10
Fig.II.4	Fotografía de unidades UBM Aerobalanceada y Mark II.	11
Fig.II.5	Reductor de engranes típico de una unidad de Bombeo Mecánico	12
Fig.II.6	Tipo de varilla y cople para el sistema de bombeo mecánico ¹	14
Fig.II.7	Ciclo Ideal de Bombeo	17
Fig.IV.1	Diagrama de Goodman Modificado.	28
Fig.IV.2	Carga de compresión generada por el desplazamiento del émbolo dentro del barril, en carrera descendente	30
Fig.IV.4	Carta dinamométrica ideal.	34
Fig.IV.5	Secuencia de cálculo de la inversión del método de Gibbs.	35
Fig.V.1	Representación del desplazamiento del émbolo en función del ángulo de la manivela.	40
Fig.V.2	Diagrama de flujo del procedimiento de cálculo utilizado en el programa de cómputo.	42
Fig.V.1	Datos de entrada del programa.	44

Figura		Página
Fig.V.2	Cálculo de la longitud de cada tramo de la sarta de varillas.	45
Fig.V.3	Diagrama de Goodman modificado.	45
Fig.V.4	Carta dinamométrica de fondo y superficie.	46
Fig.V.5	Diseño final de la sarta de varillas.	47
Fig. V.6	Datos de entrada del programa	48
Fig.V.7	Longitudes y esfuerzos en la sarta de varillas.	49
Fig. V.8	Diagrama de Goodman modificado.	49
Fig. V.9	Carta dinamométrica de fondo y superficie.	50
Fig. V.10	Diseño final de la sarta de varillas.	51

RESUMEN

En este trabajo se presenta un nuevo método para el diseño de la sarta de varillas del sistema de Bombeo Mecánico utilizando varillas de acero en combinación con varillas de lastre (sinker bars).

El modelo matemático utilizado en este trabajo es la solución de la ecuación de onda con amortiguamiento viscoso, considerando que la sarta de varillas se comporta como una línea de transmisión de ondas de esfuerzos. La propagación de las ondas de esfuerzo se ven afectadas por las propiedades físicas del material y la longitud de recorrido (longitud de la sarta de varillas). No se toman en cuenta pérdidas de energía en el sistema, es decir, se considera despreciable la fricción y el efecto de la fuerza gravitacional.

El método de diseño parte de la suposición de que la bomba en el fondo del pozo opera idealmente al cien por ciento de eficiencia, esta operación es representada por un rectángulo en una grafica de carga contra desplazamiento (carta dinamométrica).

El procedimiento de cálculo se basa en la inversión del modelo, es decir, se realiza el cálculo de cartas dinamométricas a diferentes longitudes L , medidas de la profundidad de la bomba hacia la superficie, para determinar la profundidad de la sarta en la cual aparecen cargas de compresión que puedan romper la sarta de varillas.

El método desarrollado puede aplicarse para sartas de varillas telescopiadas con 2 y 3 secciones, incluyendo condiciones de trabajo normales o aquellas en las que se presenta ácido sulfhídrico o producción de agua en el pozo. Cabe mencionar que el diseño únicamente incluye unidades de Bombeo Mecánico Convencionales.

Se presentan 2 ejemplos reales para demostrar la validez del modelo mostrando los resultados de forma grafica, obtenidos a su vez de un programa de cómputo realizado ex profeso para el diseño de la sarta, los diámetros manejados en el diseño de la sarta de varillas y el émbolo de producción son los convencionales (utilizados por el API).

Si se considera que la sarta de varillas está comprendida por miles de pies de longitud, es de gran relevancia considerar que debido a su diámetro la sarta se convierte prácticamente en un elemento de gran flexibilidad, que no puede soportar cargas repetitivas de compresión.

Por lo anterior, es importante asegurar que la sarta de varillas trabaje adecuadamente para impedir su rompimiento y la falla en el sistema de Bombeo Mecánico.

CAPITULO I. INTRODUCCION

El bombeo mecánico es uno de los sistemas artificiales que tiene una amplia aplicación en la industria petrolera como una alternativa para continuar la explotación de los pozos que dejan de ser fluyentes por la pérdida de presión en la formación. Considerando el número de pozos de bombeo mecánico en operación, resulta de gran importancia optimizar y mejorar el funcionamiento de todos los componentes que lo conforman.

De los componentes del bombeo mecánico, la sarta de varillas es uno de los más importantes ya que a través de ella se transmite el movimiento y la potencia de la unidad de bombeo a la bomba subsuperficial.

Por lo anterior, el diseño correcto de la sarta de varillas es una problemática constante en la industria petrolera. Se han desarrollado diversos métodos de diseño para mejorar el funcionamiento de la sarta de varillas con la finalidad de evitar el desgaste y rompimiento de la sarta y así evitar la falla de todo el equipo; sin embargo, los métodos actualmente utilizados para el diseño de la sarta de varillas no han evitado su ruptura y se siguen presentando problemas en los equipos de bombeo. Las causas principales de falla de la sarta de varillas es la acción corrosiva de los fluidos del pozo los cuales deterioran el acero y la debilitan hasta causar la falla. Otro factor es la fatiga del material causada por cargas cíclicas.

Otra causa de falla que no ha sido considerada en el sistema y que es objeto de esta tesis es la ruptura frecuente de la sección inferior de la sarta ocasionada por esfuerzos de compresión y tensión durante el ciclo de bombeo.

El objetivo de este trabajo es desarrollar un procedimiento de diseño de la sarta de varillas de bombeo mecánico que evite que la sarta se rompa por esfuerzos de compresión a las que se ve sujeta durante su funcionamiento, cuidando la estabilidad estructural de la misma, evitando problemas de fatiga del material y los problemas de corrosión.

En el diseño se contempla la utilización de varillas de lastre (sinker bars) para evitar el pandeo de las varillas de la sección inferior durante la carrera descendente. Las varillas

lastre evitarán esfuerzos de compresión y sólo se tendrán esfuerzos de tensión en las varillas de la sección inferior, evitando de esta manera el pandeo y falla prematura por fatiga.

El problema consiste en determinar el punto dentro de la sarta de varillas en donde el esfuerzo de compresión sea cero, a partir del cual se colocarían las varillas de lastre hasta la bomba.

El problema puede resolverse utilizando el modelo matemático de Gibbs¹ invirtiendo el cálculo de abajo hacia arriba, partiendo de una carta dinamométrica de la bomba ideal y determinando el punto dentro de la sarta en que el esfuerzo de compresión sea nulo.

Una vez determinada esta profundidad, la sarta de varillas diseñada previamente con el método del API², será modificada al considerar las varillas de lastre.

En este trabajo se desarrolla un modelo de diseño de la sarta que contempla la carga dinámica en carrera ascendente y descendente de la sarta, las cargas cíclicas, los esfuerzos de resonancia inducidos por la velocidad de bombeo, las propiedades mecánicas a la tensión y la compresión de la sarta, los esfuerzos por fatiga del material, los efectos de corrosión ocasionados por el fluido del pozo y el cálculo de la carga de compresión en la sarta por medio de la carta dinamométrica.

En la parte inicial de este trabajo se enlistan las partes principales del Bombeo Mecánico, además de mencionar sus características más importantes, después se mencionan los métodos más importantes encargados de diseñar la sarta de varillas, señalando sus desventajas en cuanto a las consideraciones de diseño.

Con lo anterior, se hace un análisis de las fuerzas actuantes en el sistema, estimando el tiempo de operación óptima, verificando que las varillas de la sarta cumplan con el diagrama de Goodman³, para así encontrar la carga de compresión máxima que soporta la sarta por pandeo. Por último se utiliza el modelo de Gibbs¹ para determinar las cargas y desplazamientos en la sarta de varillas, encontrando la profundidad del pozo a la cual se generan cargas por compresión, el modelo se comprueba con algunos casos de campo.

Al final del trabajo se presentan ejemplos desarrollados con un programa de cómputo realizado ex profeso para calcular lo antes mencionado.

La importancia de este trabajo radica en que aún cuando existen muchos criterios de diseño de equipos de bombeo mecánico, el diseño de la sarta de varillas que lo conforma, pasa a segundo término y no existe un método de diseño que considere el cálculo de las cargas por compresión que sufre la sarta, en el diseño de la misma.

CAPITULO II. SISTEMA DE BOMBEO MECÁNICO

II.1 Descripción del sistema.

El sistema de Bombeo Mecánico se divide en equipo superficial y subsuperficial. A continuación se explica el funcionamiento de cada uno de ellos.

Equipo Superficial

La función principal es transferir energía del motor principal a la sarta de varillas de succión, y de ésta a la bomba. Para lograr lo anterior, el equipo debe cambiar el movimiento rotatorio del motor principal a un movimiento reciprocante en las varillas de succión y reducir la velocidad del motor principal a una velocidad adecuada de bombeo. La reducción de velocidad se logra a través del reductor de engranes y al resto del equipo le concierne el cambio del movimiento rotatorio en reciprocante.

La unión directa entre la sarta de varillas de succión y el equipo superficial, es la varilla pulida. El diámetro de la varilla pulida depende de la carga máxima que soporta la unidad de bombeo.

La varilla pulida pasa a través de un estopero y el fluido que ha sido elevado pasa a la línea de flujo (descarga) a través de una conexión tipo "T".

Cerca del extremo superior de la varilla pulida hay una mordaza (grampa) que está soportada por un elevador. Éste a su vez, está soportado por el cable colgador que pasa sobre la cabeza de caballo colocada en el extremo del balancín. El diseño apropiado de estos componentes asegura el viaje vertical de la varilla pulida a través del estopero, reduciendo el desgaste de éste. Además, se mantiene un buen sello para evitar fugas de fluidos en la superficie.

El balancín está soportado cerca de su centro de gravedad por el poste Sampson (poste maestro). El movimiento se transmite al balancín por medio de la biela y manivela, la distancia de articulación de la manivela con la biela define la longitud de la carrera de la varilla pulida. La mayoría de las unidades tienen de 3 a 4 orificios

a lo largo de la manivela que corresponden a diferentes longitudes de carrera de la varilla pulida.

La figura siguiente muestra los componentes principales del sistema superficial del equipo de bombeo mecánico.

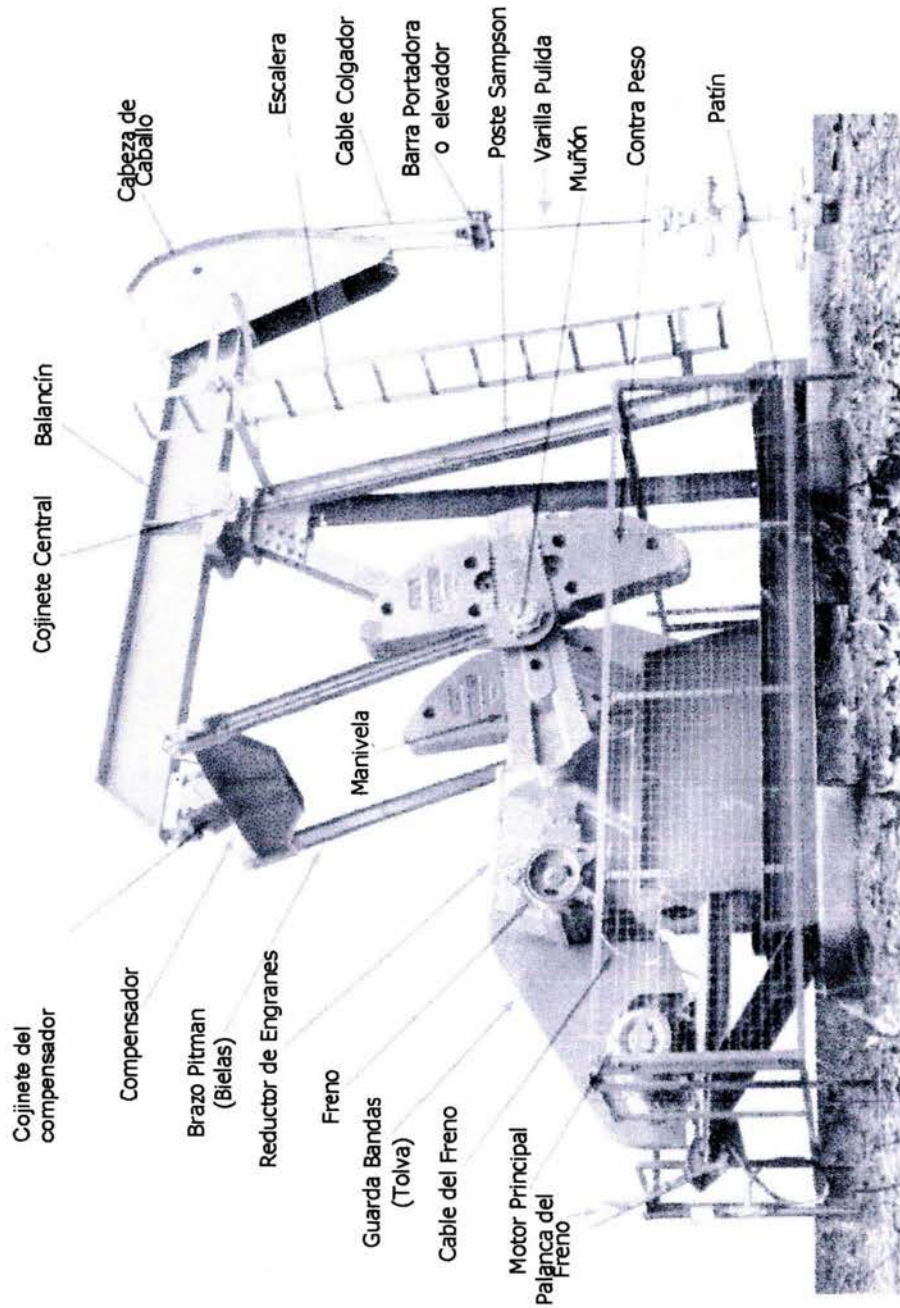


Fig.II.1 Partes principales del sistema superficial del equipo de bombeo mecánico convencional¹.

Equipo Subsuperficial

Es el equipo con sus accesorios adicionales que van alojados en el interior del pozo y son los siguientes:

1. Sarta de Varillas

La función de la sarta de varillas de succión es transmitir el movimiento de vaivén de la unidad de bombeo a la bomba subsuperficial.

Su diseño consiste esencialmente en determinar la sarta más ligera y por lo tanto, la más económica que pueda utilizarse sin exceder el esfuerzo de trabajo de las propias varillas.

Las varillas de acero tienen una longitud aproximada de 25 pies.

2. Bomba Subsuperficial

Su función es admitir fluido de la formación al interior de ésta y elevar el fluido admitido hasta la superficie, la bomba subsuperficial más usual es la de inserción.- Se le denomina bomba de inserción, porque el conjunto en total de la bomba (barril, émbolo con válvula viajera, válvula de pie y nariz de anclaje) va conectado en el extremo inferior de la sarta de varillas. Se inserta en un niple asiento (zapata candado) instalado en la tubería de producción; esto es una ventaja sobre las bombas de tubería de producción, ya que para cualquier reparación de la bomba no es necesario extraer la tubería de producción, la bomba de inserción se desancla y se extrae con la sarta de varillas.

3. Accesorios Adicionales

Son utilizados para auxiliar al sistema de Bombeo Mecánico en el desarrollo normal de su funcionamiento para que éste opere a su capacidad total, y son los siguientes:

A) Válvula Eliminadora de Candados de Gas

Esta es un accesorio que va instalado en el extremo superior de la bomba subsuperficial y cuya finalidad principal es la de eliminar los candados de gas y tratar de evitar el golpe de fluido.

B) Barril

El barril es una de las partes que constituyen una bomba subsuperficial y dentro de él se aloja el fluido del pozo en cada ciclo de bombeo.

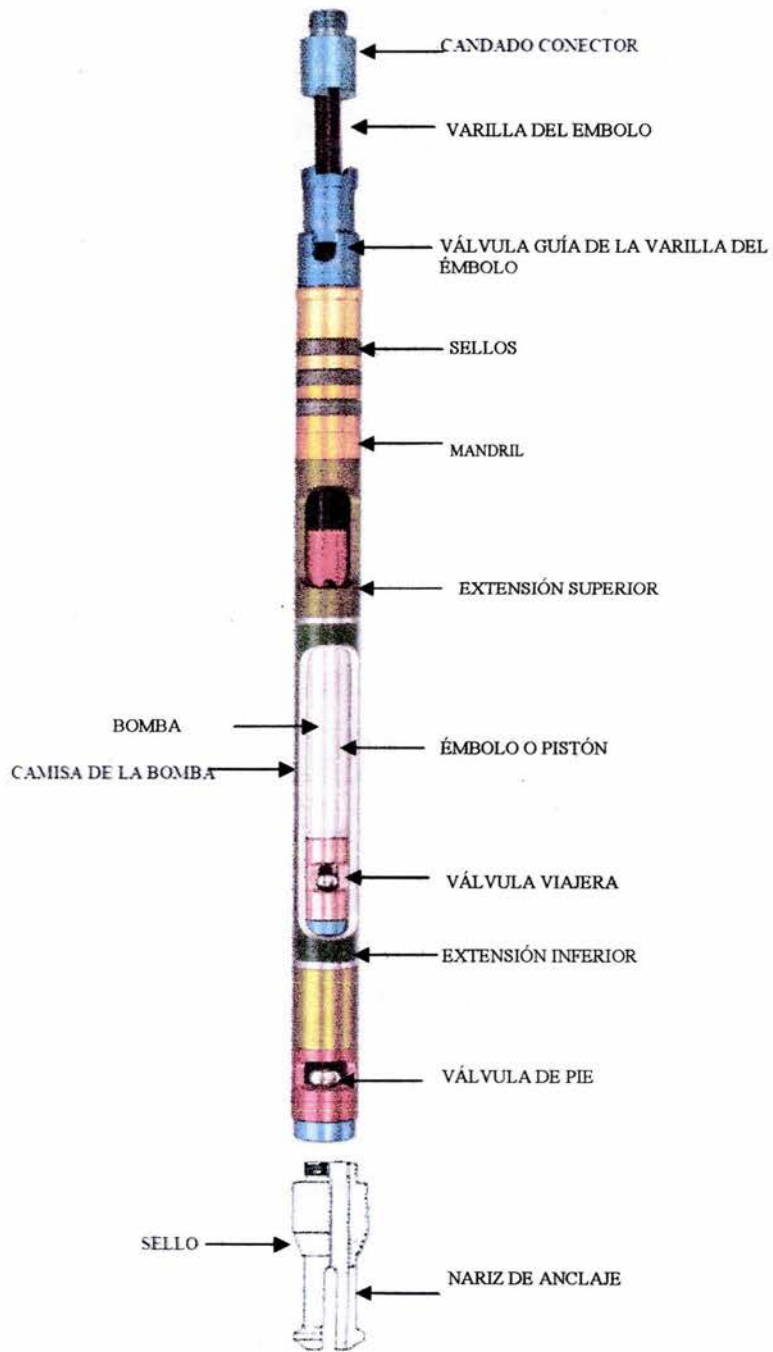


Fig.II.2 Partes principales que constituyen una bomba subsuperficial¹.

II.2 Unidad de bombeo

Unidad Convencional

En la unidad convencional (ver Fig. 2.3) el balanceo se lleva a cabo a través de contrapesos y su rotación es en el sentido de las manecillas del reloj si la cabeza de caballo se encuentra a la derecha de la unidad, puede operar en sentido contrario pero no es recomendable, ya que la rotación en el sentido correcto lubrica los engranes del reductor.

Unidad de Bombeo Mecánico Mark II

En la unidad Mark II (ver Fig. 2.4) el balanceo es a través de contrapesos y su rotación correcta es en sentido contrario a las manecillas si la cabeza de caballo se encuentra a la derecha de la unidad. Esta unidad no debe operarse en sentido inverso porque podría causarse severo daño al reductor

Unidad de Bombeo Mecánico Aerobalanceada

En la unidad aerobalanceada (ver Fig. 2.4) su balanceo es a través de aire suministrado por un motocompresor hacia un cilindro amortiguador. El motocompresor se calibra a un paro y a un arranque automático de tal manera que la presión del aire dentro del cilindro se mantenga para proporcionar el balanceo adecuado de la unidad.

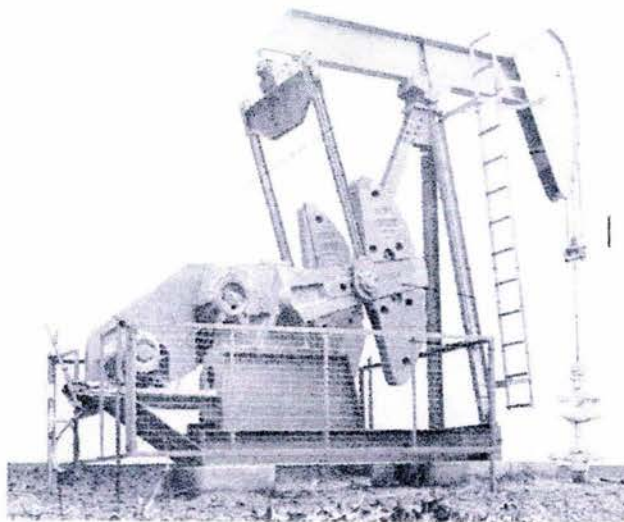


Fig.II.3 Fotografía de una unidad de Bombeo Mecánico Convencional¹.

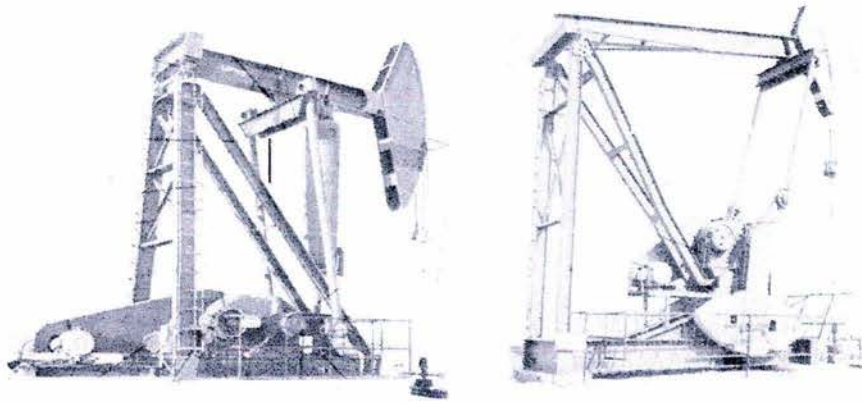


Fig.II.4 Fotografía de unidades UBM Aerobalanceada y Mark II¹.

II.3 Reductor de velocidad

Su función es reducir la velocidad a una velocidad de bombeo adecuada. Es necesario determinar la torsión máxima a la que estará sujeto el reductor de engranes, ya que el API³ usa la torsión máxima como base para definir el tamaño de las unidades de bombeo. (Ver Fig.II.5)

La designación del API³ para una unidad es simplemente la torsión máxima permisible en el reductor de engranes en miles de libras-pulgadas. Por ejemplo, una unidad API³ tamaño 114 tiene un rango de torsión máxima de 114 000 lb-pg. La polea del reductor, es el elemento que recibe la potencia del motor principal a través de bandas. La relación del diámetro de la polea del reductor de engranes al diámetro de la polea del motor, y la reducción de velocidad en el reductor de engranes, determinan la reducción total de velocidad del motor principal hasta la varilla pulida. Los tamaños disponibles de poleas de la unidad, el número y tipos de bandas que deben de usarse, pueden determinarse de la literatura del fabricante de unidades de bombeo.

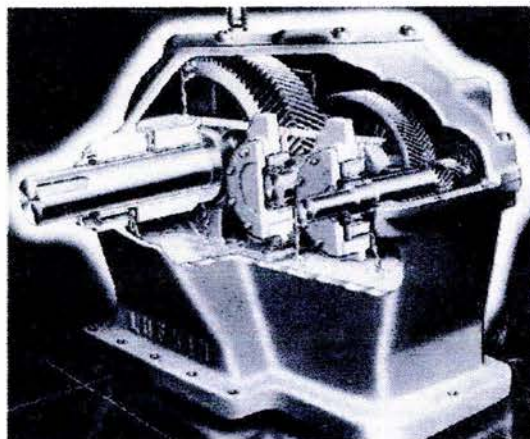


Fig.II.5 Reductor de engranes típico de una unidad de bombeo mecánico².

II.4 Motor

La función del motor principal es proporcionar a la instalación energía mecánica, que es transmitida a la bomba y es usada para elevar el fluido. El motor principal seleccionado para una unidad dada, debe tener suficiente potencia para elevar el fluido al ritmo deseado, desde el nivel de trabajo de fluido en el pozo. El motor principal puede ser una máquina de combustión interna o puede ser un motor eléctrico.

Cualquier diseño para la instalación de bombeo mecánico, debe considerar el comportamiento de todos los elementos del sistema y las interacciones entre ellos. Sin embargo, aún existen aspectos de ingeniería de este sistema de producción artificial, que no han sido resueltos satisfactoriamente, por lo que es necesario comprender el proceso de bombeo, debido también a la tendencia de bombear pozos cada vez más profundos.

En un principio se utilizaron motores de combustión interna, usando el mismo gas del pozo como combustible; sin embargo, a los constantes paros que se presentaban por las lluvias, debido a lo vulnerable de su sistema de encendido, se empezaron a sustituir por motores eléctricos.

Actualmente, el motor usado es eléctrico (trifásico) de alto deslizamiento; la ventaja principal de los motores reside en su bajo costo de mantenimiento, el cual consiste básicamente en proporcionar lubricación periódicamente a las chumaceras del mismo. El motor de alto deslizamiento tiene la ventaja adicional de que es capaz de variar su velocidad hasta en un 60%, aumentando al mismo tiempo su par motriz; esto hace que durante la carrera ascendente (tiempo en el cual se tienen las cargas máximas) se levante la sarta más lentamente, disminuyendo los esfuerzos en varillas, y reductor de engranes, con lo que se aumenta la vida útil de los mismos y se reduce la potencia del motor.

II.5 Sarta de varillas

Como se mencionó anteriormente la función de la sarta de varillas es transmitir el movimiento de la unidad de bombeo y la potencia, a la bomba subsuperficial. Su diseño consiste esencialmente en determinar la sarta más ligera y por lo tanto, la más económica, que pueda utilizarse sin exceder el esfuerzo de trabajo de las propias varillas.

El máximo esfuerzo de trabajo para las varillas depende de su composición química y propiedades mecánicas, además de la naturaleza de fluido bombeado, es decir, si éste es o no corrosivo. Como regla general es deseable evitar las cargas de compresión en la sarta y así, evitar el pandeo de la sarta. Cuando las bombas están colocadas a profundidades mayores de 1000 metros, generalmente es deseable usar sartas telescopiadas, es decir, en diferentes diámetros de varillas. Las varillas de diámetro más pequeño se colocan en el fondo de la sarta, inmediatamente arriba del émbolo, ya que la carga en las varillas es menor en ese punto. A menores profundidades donde la carga en las varillas es más grande se usan mayores diámetros. Este arreglo resulta en peso más pequeño en el equipo superficial que el que se obtendría con una sarta de un solo diámetro, y representa un ahorro en el costo de las varillas de succión.

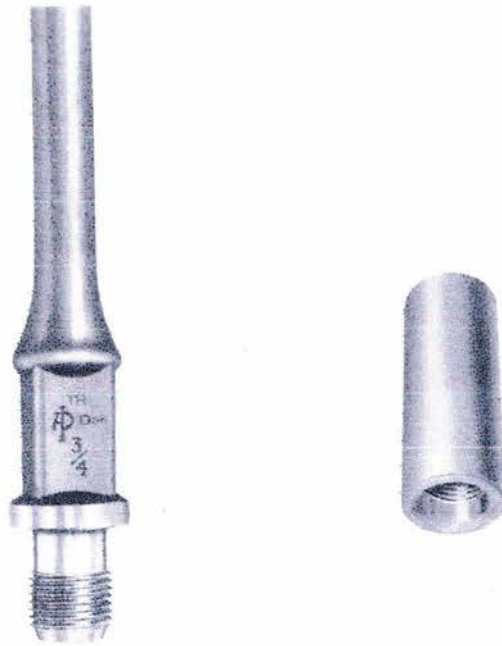


Fig.II.6 Tipo de varilla y cople para el sistema de bombeo mecánico¹.

II.6 Bomba Subsuperficial

Sus funciones son admitir fluido de la formación al interior de ésta y elevar el fluido admitido hasta la superficie. Y sus tipos son los siguientes:

a) Bombas de Tubería de Producción.

Las bombas de tubería de producción, por ser de un diámetro mayor, pueden manejar volúmenes mayores de líquidos que las bombas de inserción, sin embargo, la carga del fluido sobre la unidad de bombeo es mayor.

Las desventajas de estas bombas estriban en que el barril forma parte de la misma tubería de producción, para efectuar alguna reparación o reposición de partes, es necesario extraer la tubería de producción completa, lo que significa una operación más complicada, y por consiguiente más costosa.

Un factor importante que debe tomarse en cuenta es la elongación de las varillas por la carga de fluidos, lo que se traduce en una disminución en la carrera efectiva del émbolo, siendo más crítica a medida que aumenta la profundidad del pozo.

Las bombas de tubería de producción operan mejor en pozos que tienen alto nivel de fluidos y un buen índice de productividad para manejar altos gastos.

b) Bombas de Inserción.

Se le denomina bomba de inserción, porque el conjunto total de la bomba (barril, émbolo con válvula viajera, válvula de pie y nariz de anclaje) va conectado en el extremo inferior de la sarta de varillas, se inserta en un niple de asiento (zapata candado) instalado en la tubería de producción. Esto representa una ventaja sobre las bombas de tubería de producción, ya que para hacer una reparación o sustitución de la bomba, no es necesario extraer la tubería de producción. La bomba de inserción se desancla y se extrae con la sarta de varillas).

c) Bombas de Tubería de Revestimiento.

Este tipo de bombas son sólo una versión más grande de las bombas de tubería. Dentro de estos tres tipos de bombas, la más usual, es la bomba de inserción que a continuación profundizamos en su descripción y funcionamiento.

En términos generales el ciclo de bombeo puede describirse de la siguiente manera:

Ciclo de Bombeo

La bomba subsuperficial usada en el bombeo mecánico trabaja bajo el principio de desplazamiento positivo, y es del tipo cilindro-pistón. Los componentes clave para levantar el fluido de la formación es el barril, el émbolo y las válvulas de pie y viajera.

La válvula de pie desarrolla la función de succionar el aceite de la formación, y la válvula viajera se encarga de la descarga del mismo. Las dos válvulas operan como válvulas check y estas abren y cierran en un movimiento alternado debido al movimiento desplazamiento del embolo.

Al comenzar la carrera ascendente (A), después de que el embolo ha alcanzado su posición más baja, la válvula viajera cierra debido a la alta

presión hidrostática causada por la columna de fluido contenido en la tubería de producción. El fluido contenido en la tubería de producción por encima de la válvula viajera sube durante la carrera ascendente del embolo (B).

Al mismo tiempo, la presión disminuye entre la válvula viajera y de pie, causando que la válvula de pie abra, la presión de la formación hace que el fluido pase a través de la válvula de pie por debajo del embolo (C).

El ascenso de la columna de líquido y el llenado del barril con el fluido de la formación continúa hasta que termina la carrera ascendente. Es importante señalar que durante toda la carrera ascendente, todo el peso de la columna de líquido es soportado por la sarta de varillas.

Después de que el émbolo alcanza el nivel máximo en carrera ascendente, se inicia la carrera descendente, abriendo la válvula viajera y cerrándose la válvula de pie (D). Esta operación entre las válvulas es debido a la incompresibilidad del líquido contenido en el barril. Cuando la válvula viajera abre, el peso del fluido es transferido del embolo a la válvula de pie, causando que la tubería de producción se alargue (E).

Durante la carrera descendente, el embolo desciende con la válvula viajera abierta llenando el barril con el fluido de la formación (F), al final de la carrera descendente, la dirección del movimiento se invierte y empieza otro ciclo de bombeo.

La figura siguiente muestra los pasos antes señalados.

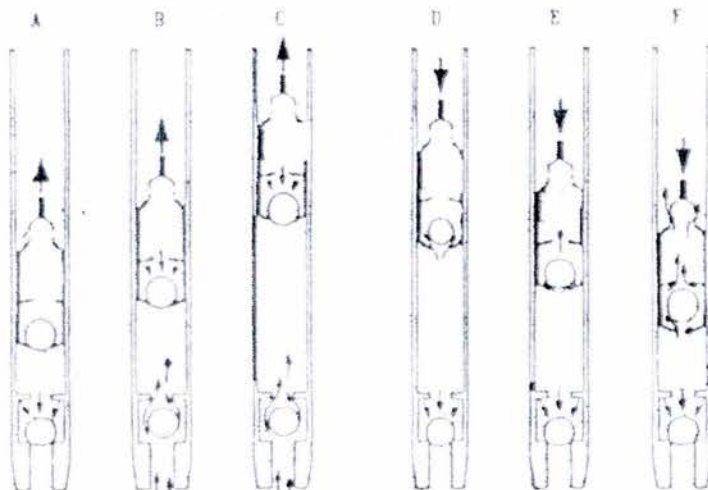


Fig.II.7 Ciclo Ideal de Bombeo¹.

II.7 Sinkerbars.

Bajo ciertas condiciones de operación de pozos en B.M como es la producción de aceite viscoso, pueden originarse esfuerzos indeseables en la sarta durante la carrera descendente, en estos casos la sección de la sarta de varillas cercana a la bomba puede verse afectada por pandeo debido a la carga de compresión generada en ese punto de la sarta. Un problema que se origina muy comúnmente en las unidades de Bombeo Mecánico es que la válvula viajera no abre exactamente cuando empieza la carrera descendente, debido a que el fluido dentro del barril contiene gas por lo que es necesario incrementar la presión dentro del barril hasta una presión mayor que la ejercida por la columna de fluido para que esta válvula abra.

En el caso de varillas telescopiadas es absolutamente factible utilizar sinker bars en el extremo inferior de la sarta a fin de eliminar el esfuerzo de compresión y por consiguiente el pandeo de las varillas de menor diámetro y evitar la falla por fatiga en esta sección de la sarta.

Los diámetros comerciales de las sinker bars son ($1 \frac{3}{8}$, $1 \frac{1}{2}$, $1 \frac{5}{8}$, $1 \frac{3}{4}$), por lo general el esfuerzo máximo a la tensión al cual están fabricadas es de 140000 lb/pg², sin embargo

puede ser mayor dependiendo del fabricante, siendo las sinker bars más pesadas que las varillas comunes y teniendo un esfuerzo a la tensión mayor, pueden dar peso a la sarta y contrarrestar las cargas de compresión.

CAPITULO III METODOS DE DISEÑO DE SARTAS DE VARILLAS.

III.1 Convencional.

El método considera que las longitudes de las secciones individuales deben ser seleccionados de tal manera que el esfuerzo en la parte superior de cada sección sea el máximo permisible, o que el esfuerzo en la parte superior de cada sección de la sarga sean iguales⁴.

En la determinación del esfuerzo en la parte superior de cada sección se considera la carga del fluido sobre el área total del émbolo y el peso propio de las varillas abajo del punto en consideración. El método hace 4 consideraciones: 1) condiciones estáticas, no se consideran cargas por aceleración; 2) la gravedad específica del fluido es 1; 3) la carga del fluido actúa sobre el área del émbolo; 4) la bomba es colocada a la profundidad del nivel dinámico del fluido.

Considerando una sarga de varillas formada por dos secciones, la sección inferior consiste de L_1 pies de varillas de área de sección transversal A_1 y peso por pie M_1 , y la siguiente sección estará constituida por L_2 , A_2 y M_2 respectivamente.

Considerando que R_1 y R_2 representan un porcentaje de la longitud total de la sarga, se tiene que:

$$R_1 = \frac{L_1}{L}, \quad (3.1)$$

$$R_2 = \frac{L_2}{L}, \quad (3.2)$$

Donde:

$$L = L_1 + L_2, \quad (3.3)$$

Siendo igual el esfuerzo en la parte superior de cada sección, por lo tanto

$$\frac{0.433LA_p + L_1M_1}{A_1} = \frac{0.433LA_p + LR_1M_1}{A_1}, \quad (3.4)$$

Asimismo el esfuerzo en la parte superior de la segunda sección es:

$$\frac{0.433LA_p + L_1M_1 + L_2M_2}{A_2} = \frac{0.433LA_p + LR_1M_1 + LR_2M_2}{A_2}, \quad (3.5)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.2) y (3.4) en (3.5) tenemos:

$$\frac{0.433A_p + R_1M_1}{A_1} = \frac{0.433A_p + R_1M_1 + R_2M_2}{A_2} \quad (3.6)$$

Por otra parte

$$R_1 + R_2 = 1. \quad (3.7)$$

Resolviendo ambas ecuaciones (3.6) y (3.7) se determinan los valores de R_1 y R_2 en función del área del émbolo.

Siguiendo el mismo procedimiento se pueden diseñar sartas de varillas combinadas para 3 ó 4 secciones de diferente diámetro.

Las varillas de acero empleadas en el sistema de bombeo mecánico, se fabrican con incrementos de diámetro de $1/8$ de pg, a partir de un diámetro mínimo de $3/8$ de pg, y hasta un diámetro máximo de $1 \frac{1}{2}$ pg.

En el diseño de sartas combinadas la diferencia entre una sección y la que le sigue no debe ser mayor a $1/8$ de pg, colocando siempre la varilla de mayor diámetro en la parte superior de la sarta. Así por ejemplo una sarta constituida de 4 secciones podría ser: $1 \frac{1}{8}$ - $1 \frac{7}{8}$ - $3/4$.

III.2 API-RP 11L³

En 1954 un grupo de fabricantes de equipos de bombeo mecánico estudiaron los problemas asociados con la producción y fallas operativas de las unidades empleadas en pozos de Estados Unidos, los estudios arrojaron correlaciones para el dimensionamiento de los equipos, obtenidas de pruebas de campo.

Las correlaciones fueron publicadas en el American Petroleum Institute³, la cual llevo por nombre Recomendad Practice for the Design Calculations of Sucker Rod Pumping Systems³.

El trabajo publicado fue desarrollado con base en una recopilación aproximada de 1100 cartas dinamométricas generadas con computadoras analógicas, las cuales manejaron parámetros adimensionales, las pruebas de campo incluyeron profundidades de 2000 a 12000 pies y variaciones de producción de 100 a 1500 barriles por día.

Estas pruebas de campo son la base para lo que hoy se conoce como código API-RP 11L³.

En 1976 el API³ adopta el método propuesto por Neely⁵ para el diseño de sarta de varillas, el cual considera que la longitud de cada sección de la sarta de varillas es un porcentaje de la profundidad total del pozo, o profundidad a la cual se encuentra colocada la bomba.

Las ecuaciones principales son las siguientes:

$$F_{\min} = Lw_r(2 - f). \quad (3.8)$$

$$F_{\max} = Lw_r f + F_o. \quad (3.9)$$

El diseño de la longitud de cada sección de la sarta involucra un procedimiento iterativo, una vez que la relación de esfuerzos permisibles máximos es determinada, R no puede ser determinado en cualquier sección sin saber la longitud de la sección de la sarta.

Entonces el esfuerzo asumiendo el porcentaje del peso de las varillas de la sarta es el siguiente:

$$R = \frac{F_o + L_{total} w_{avg} f}{A_n \frac{T_a}{4} + 0.5625 L_{total} w_{avg} (2 - f)}, \quad \dots \quad (3.10)$$

El valor calculado de R es comparado con el factor de servicio, si $R > SF$, entonces se asume un nuevo peso promedio de la sarta y se repite el calculo de R, si no se encuentra un valor de R menor que SF, entonces se elige un material más resistente.

El valor de SF se determina del diagrama de Goodman⁶:

Una vez calculado el valor de R, se puede determinar la longitud de cada sección de la sarta con la siguiente expresión:

$$L_i = \frac{F_{\max(i-1)} - R \left[A_i \frac{T_a}{4} + 0.5625 F_{\min(i-1)} \right]}{w_i [0.5625 R (2 - f) - f]} \quad (3.11)$$

Si la suma del valor calculado de L_i difiere del valor de la longitud total L_{total} el proceso se repite con un nuevo valor del porcentaje en peso de las varillas.

Neely⁵ introdujo un concepto llamado el esfuerzo modificado y se define de la siguiente manera:

$$S_{mod} = S_{max} - 0.5625S_{min} \quad (3.12)$$

El esfuerzo modificado simplifica la intercepción del eje vertical del diagrama de Goodman⁶ con una línea que puede dibujarse a partir del valor actual del esfuerzo modificado y llevándolo hasta el valor de SF=1, con una línea paralela. Neely⁵ ideó un procedimiento para calcular el esfuerzo modificado en la sección más alta de cada sección de la sarta. Neely⁵ utilizó el peso por flotación de la sarta en el cálculo del esfuerzo, incluso creó un procedimiento para calcular las fuerzas dinámicas. Propuso una correlación empírica para calcular la fuerza dinámica, la cual es función de la velocidad de bombeo, carga del fluido, longitud de la varilla pulida y una constante de elasticidad para la sarta de varillas. El concepto de esfuerzo modificado es un concepto que aparece en el artículo de Neely⁵ y se define de la siguiente manera:

Cuando el esfuerzo máximo y el esfuerzo mínimo ha sido calculado o medido sobre la sarta durante un ciclo de bombeo, el esfuerzo modificado es el nivel de esfuerzos para el cual dada una carga equivalente, el esfuerzo mínimo durante el ciclo de bombeo es cero.

La carga por flotación y la carga del fluido se calcularon con base en el gradiente de agua, es decir considerando como fluido de la formación, agua. Se utilizó además el factor de aceleración de Mills⁷. Se realizaron las siguientes consideraciones:

1) La correlación empírica para la carga dinámica es :

$$Dyn.Force = [0.6 * (N / No) / (Fo / Sk_r)] * Fo . \quad (3.13)$$

- 2) Se asume que la fuerza dinámica en la carrera ascendente y en la descendente es la misma, aunque ésta no es estrictamente cierta, la correlación asume que las cargas máximas y mínima es la misma.

- 3) Se asume que el valor máximo de carga disminuye proporcionalmente con la profundidad del pozo hasta alcanzar un valor de cero a la altura del émbolo.

III.3 Deficiencias de ambos métodos.

Método convencional

El método convencional⁴ es el primer intento por dimensionar la sarta de varillas de Bombeo Mecánico, aunque muestra muchas deficiencias es muy útil cuando se requiere una aproximación rápida en campo de las longitudes que debe tener cada sección de la sarta de varillas. En el procedimiento de diseño se hacen las siguientes suposiciones:

- 1.** Esfuerzos iguales en la parte superior de cada sección de la sarta de varillas.
- 2.** Condiciones estáticas. Es decir no se consideran cargas por aceleración a lo largo de la sarta de varillas.
- 3.** La densidad relativa del fluido a levantar es igual a 1.
- 4.** El peso del fluido actúa sobre el área total del émbolo.
- 5.** La profundidad del nivel dinámico se encuentra a la profundidad de la bomba.
- 6.** No se considera ningún esfuerzo por fricción.

Método API-RP 11L³

El método de diseño propuesto por el API (American Petroleum Institute) ha sido ampliamente utilizado en el diseño de unidades de Bombeo Mecánico, sin embargo en cuanto al diseño de la sarta no se han propuesto nuevas alternativas de diseño y todo se reduce a encontrar un porcentaje de la longitud total del pozo, para cada sección o tramo de la sarta.

En 1990 Gault y Takács⁹, retoman el trabajo de Neely⁵ y proponen un nuevo diseño de la sarta, sin embargo no ha sido tomado este trabajo por el API³ para hacer una nueva consideración en el diseño. Entre las deficiencias del método del API³ se encuentran las siguientes:

- 1.** Se asume que la tubería de producción está anclada, es decir, no se considera el pandeo ocurrido en la tubería de producción en carrera ascendente.
- 2.** La carga decrece con la profundidad y se hace cero a la profundidad del embolo.
- 3.** No se consideran condiciones inusuales de operación como: inclinación o desviación en el pozo, fluidos de producción altamente viscosos, presencia de arena en el fluido producido y una excesiva producción de gas a través de la bomba.
- 4.** No se consideran diámetros y arreglos de la sarta de varillas distintos a los manejados por el API.

CAPITULO IV. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.

IV.1 Factores de falla en las sargas de varillas de Bombeo Mecánico.

En muchos pozos, los reemplazos frecuentes de sargas de varillas constituyen un problema económico serio. En efecto, el comportamiento mecánico de la sarga de varillas se considera como un indicador directo de la eficiencia del sistema de bombeo mecánico, por tal razón es conveniente analizar las causas más probables de falla de la sarga⁴.

1. Asumiendo que el equipo de Bombeo Mecánico ha sido bien diseñado quizás el factor más importante en la prevención de fallas innecesarias es el manejo y armado de la sarga.

2. Se ha demostrado que un buen manejo, transporte y armado de la sarga juega un papel muy importante en la vida de operación dentro del pozo.

3. En muchos casos, las fallas excesivas de la sarga se deben a la fricción generada por la sarga y la tubería de producción. Este tipo de fallas eran atribuidas a la desviación original del pozo, es decir, si el pozo estaba desviado de la vertical se podían considerar fallas en la sarga, sin embargo, estudios recientes han demostrado que el pandeo juega un papel fundamental en los daños. Estos pandeos de la sarga de varillas se deben principalmente a las cargas de compresión a las que se ve afectada la sarga. Cuando se presentan esfuerzos de compresión la sarga se patea y sufre daños o rompimientos.

Para evitar el pandeo se utilizan varillas de lastre (sinker bars), colocadas en el extremo inferior de la sarga.

Al colocar varillas de lastre en el extremo inferior de la sarga, se evita que ésta trabaje a la compresión en la carrera descendente, evitando a la vez el pandeo y falla por fatiga.

4. Si la tubería de producción no está anclada se genera pandeo en carrera ascendente, provocando la ruptura prematura de la sarga de varillas.

IV.2 Diagrama de Goodman⁶ modificado.

El diagrama de Goodman⁶ fue desarrollado para diseñar elementos estructurales de acero sujetos a cargas cíclicas, en donde el límite elástico, punto de cedencia y límite de resistencia a la tensión no pueden utilizarse en el diseño de elementos sujetos a esfuerzos cíclicos de tensión-compresión.

A. A Hardy⁶ realizó una modificación al Diagrama de Goodman⁶, para utilizarlo en el diseño de sargas de varillas, las tres modificaciones fundamentales son las siguientes:

1. El esfuerzo máximo a la tensión permisible deberá ser menor que el esfuerzo a la tensión del material, para evitar la deformación plástica del material.
2. La sarga de varillas no debe trabajar a la compresión, debido a que se generará pandeo en la sarga y a su vez una falla estructural prematura.
3. Se adicionará un factor de seguridad para contrarrestar los efectos corrosivos que dañen la operación de la sarga, este factor es denominado factor de servicio.

Con estas modificaciones al Diagrama de Goodman⁶ surge el Diagrama de Goodman⁶ Modificado, adoptado por el API³ para el diseño de sargas de varillas de Bombeo Mecánico. El límite permisible por fatiga, denominado esfuerzo permisible por el API³, puede ser calculado con la siguiente expresión:

$$S_a = SF \left(\frac{T_a}{4} + 0.5625 S_{\min} \right). \quad (4.1)$$

El Diagrama de Goodman⁶ modificado es el siguiente:

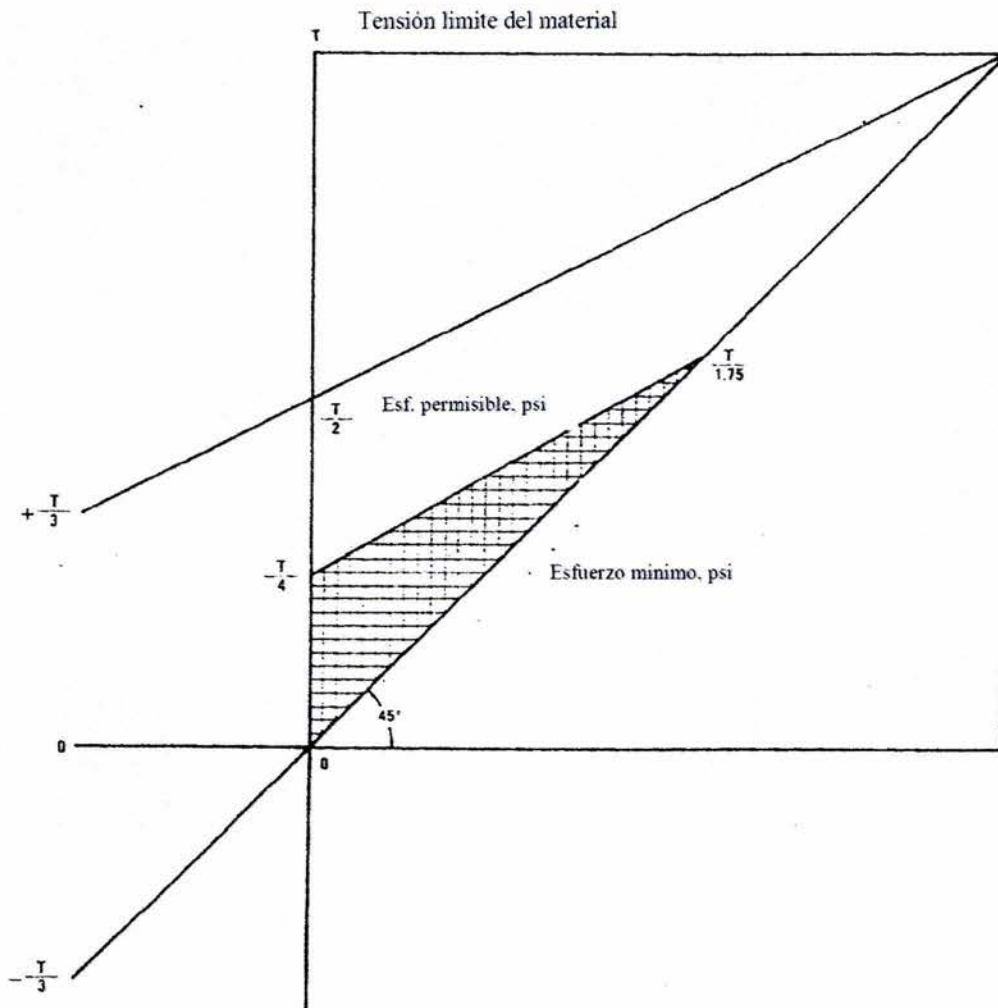


Fig. IV.1 Diagrama de Goodman⁶ Modificado.

Los factores de servicio son los siguientes:

Ambiente	Factores de servicio	
	Grado C	Grado D
Sin corrosión	1	1
Agua Salada	0.65	0.9
Ácido sulfhídrico	0.5	0.7

Tabla. IV.1 Factores de servicio para sartas de varillas.¹⁰

IV.3 Planteamiento del problema

Como se mencionó anteriormente, la sarta de varillas es un elemento importante del equipo de Bombeo Mecánico, y está conformada por uno o varios diámetros de secciones de varillas que van conectadas de mayor a menor diámetro de la superficie al fondo. Siendo la propiedad básica de las sertas su comportamiento elástico, es de gran importancia determinar las cargas actuantes en la sarta que puedan minimizar sus características mecánicas propias para soportar cargas en tensión y así evitar que el sistema trabaje a compresión, o en su defecto proporcionar elementos mecánicos (sinkerbars) para contrarrestar esta carga.

Debido a que la sarta de varillas transfiere el movimiento de la unidad de bombeo a la bomba subsuperficial es vital mantenerla sin daño para evitar fallas en el sistema. Si consideramos que la sarta de varillas está comprendida por miles de pies de longitud, es de gran relevancia considerar que debido a su diámetro la sarta se convierte prácticamente en un elemento de gran flexibilidad, que no puede soportar cargas a compresión.

En carrera ascendente toda la sarta de varillas trabaja a la tensión levantando el peso de la columna de fluido sobre el émbolo, en carrera descendente cuando la válvula viajera abre y el peso del fluido es transferido del émbolo a la válvula de pie, el émbolo desciende con la válvula viajera abierta y el fluido se transfiere a la parte superior de esta válvula. En la carrera ascendente al cerrarse la válvula viajera el peso del fluido se transfiere a la sarta de varillas y se hace el desplazamiento del fluido contenido en el barril de la bomba.

Con referencia en la Fig IV.2 se puede observar que la presión en el punto B es mayor que la del punto A en la válvula viajera, ocasionando una carga de compresión soportada por la sarta de varillas, si a esto se le suma la fricción entre el émbolo y el barril que impide el desplazamiento, se pueden generar esfuerzos importantes de compresión que son directamente soportados por la sarta.

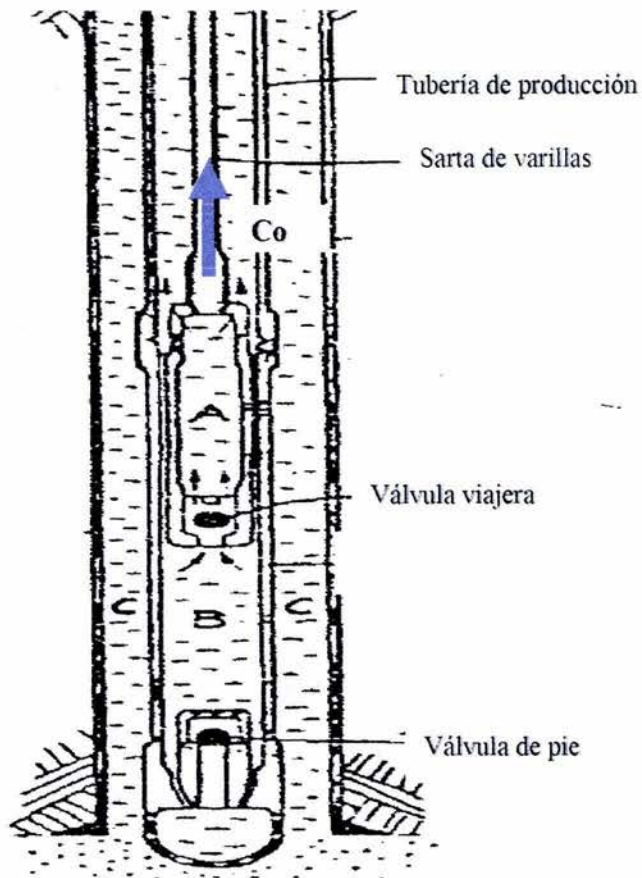


Fig.IV.2 Carga de compresión generada por el desplazamiento del émbolo dentro del barril, en carrera descendente¹.

Si la presión en el punto B es mayor que la presión en A, entonces se genera la carga de compresión C_o soportada por la sarta de varillas, ocasionando problemas de fatiga del material y la ruptura prematura de la sarta.

El problema a resolver en este trabajo es cuantificar el esfuerzo de compresión generado en la carrera descendente y determinar la profundidad en la cual ocurre.

Se propone contrarrestar la compresión en la sarta con varillas de lastre colocadas en el extremo inferior. El problema consiste en determinar la longitud de las varillas de lastre para evitar el pandeo de las varillas que conforman la sarta.

Cabe señalar que para efecto de este trabajo la fuerza de fricción entre el émbolo y el barril, que es una de las causantes del pandeo de la sarta no se conoce y sería muy difícil determinarla porque depende del ajuste del émbolo con el barril, de la cantidad de

sedimento que se haya alojado entre el émbolo y el barril y de la velocidad de bombeo principalmente.

De experiencias de campo en pozos de Poza Rica, Ver. y otras áreas¹⁷ en donde se tomaron registros de carga y desplazamiento en la varilla pulida con el dinamómetro electrónico Delta II y haciendo uso del modelo matemático desarrollado por Gibbs¹¹, se determinaron las cartas dinamométricas a la profundidad de la bomba .

En la mayoría de estas cartas se puede observar que la magnitud de las fuerzas de compresión ocurren de la mitad de la gráfica hacia abajo, es decir, la fuerza de compresión es $\frac{1}{2}$ de la carga de fluido en el pozo (W_f).

El problema consiste ahora en suponer una carta dinamométrica ideal a la profundidad de la bomba con valores de cargas negativas de la mitad hacia abajo y calcular valores de carga y desplazamiento del fondo hacia la superficie considerando diversas longitudes de varillas de lastre hasta el punto en que sólo se tengan valores positivos de carga. Esto indicará el punto a partir del cual deberán colocarse las varillas de lastre.

Como método de solución se utilizará el modelo de Gibbs¹¹ para determinar las cargas y desplazamientos a cualquier profundidad de la sarta de varillas, el modelo se explicará a continuación.

IV.4 Modelo matemático de Gibbs¹¹.

En 1966 Gibbs¹¹ presentó un modelo matemático para calcular valores de carga y desplazamiento en cualquier punto de la sarta de varillas, incluyendo la bomba subsuperficial a partir de información obtenida en la superficie. Cabe señalar que el modelo se utiliza para el diagnóstico de instalaciones existentes.

El modelo está fundamentado en la solución de la ecuación de onda con amortiguamiento viscoso en una dimensión, la ecuación se expresa de la siguiente forma:

$$\frac{\partial^2 z(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z(x,t)}{\partial x^2} - c \frac{\partial z(x,t)}{\partial t}. \quad (4.2)$$

El modelo de Gibbs¹¹ está orientado para obtener cartas dinamométricas de fondo (a la profundidad de la bomba subsuperficial), las cuales son determinadas con datos de carga y desplazamiento en función del tiempo de la varilla pulida. Esta información puede ser obtenida con un dinamómetro instalado en superficie.

Para entender el modelo es necesario considerar a la sarta de varillas como una línea de transmisión, la información de cargas y desplazamientos son emitidos de un emisor (cargas y desplazamientos a la profundidad de la bomba) a un receptor (dinamómetro en la superficie), la información a lo largo de la sarta de varillas es transmitida en forma de ondas de esfuerzo.

Estas ondas viajan a la velocidad de propagación del material, la velocidad de propagación de las ondas de esfuerzo en el acero es 16000 pies/seg⁴.

Al ser una línea de transmisión la sarta de varillas continuamente transmite información del fondo a la superficie, por lo cual esta información deberá ser decodificada para obtener la carta dinamométrica a la profundidad de interés.

Las condiciones de frontera de la ecuación de onda son las expresiones en series de Fourier¹², que resultan de representar los valores de carga $D(wt)$ y desplazamiento $U(wt)$, de la varilla pulida en función del tiempo, las condiciones de frontera son las siguientes:

$$D(wt) = \frac{\sigma_o}{2} + \sum_{n=1}^{\tilde{n}} \sigma_n \cos(mwt) + \tau_n \text{sen}(mwt) . \quad (4.3)$$

$$U(wt) = \frac{\gamma_o}{2} + \sum_{n=1}^{\tilde{n}} \gamma_n \cos(mwt) + \delta_n \text{sen}(mwt) . \quad (4.4)$$

La ecuación diferencial parcial con sus condiciones de frontera asociadas, se soluciona con el método de separación de variables, en el apéndice de este trabajo se presenta la solución a detalle del modelo matemático¹⁵.

IV.5 Propuesta de solución

Como propuesta de solución, se utilizará la inversión del modelo de Gibbs¹¹ para determinar la carta dinamométrica a cualquier profundidad de la sarta de varillas. Lo anterior permitirá detectar valores negativos de carga indicando esfuerzos de compresión. Cuando éstos desaparezcan, se tendrá la profundidad a la cual ya no ocurren esfuerzos de compresión. A partir de este punto hacia abajo se colocarán las varillas de lastre hasta la profundidad de la bomba, dando solución al problema. La carta dinamométrica ideal con valores de carga negativos de la mitad hacia abajo es el punto de partida del método de solución, la figura siguiente muestra la carta dinamométrica ideal propuesta:

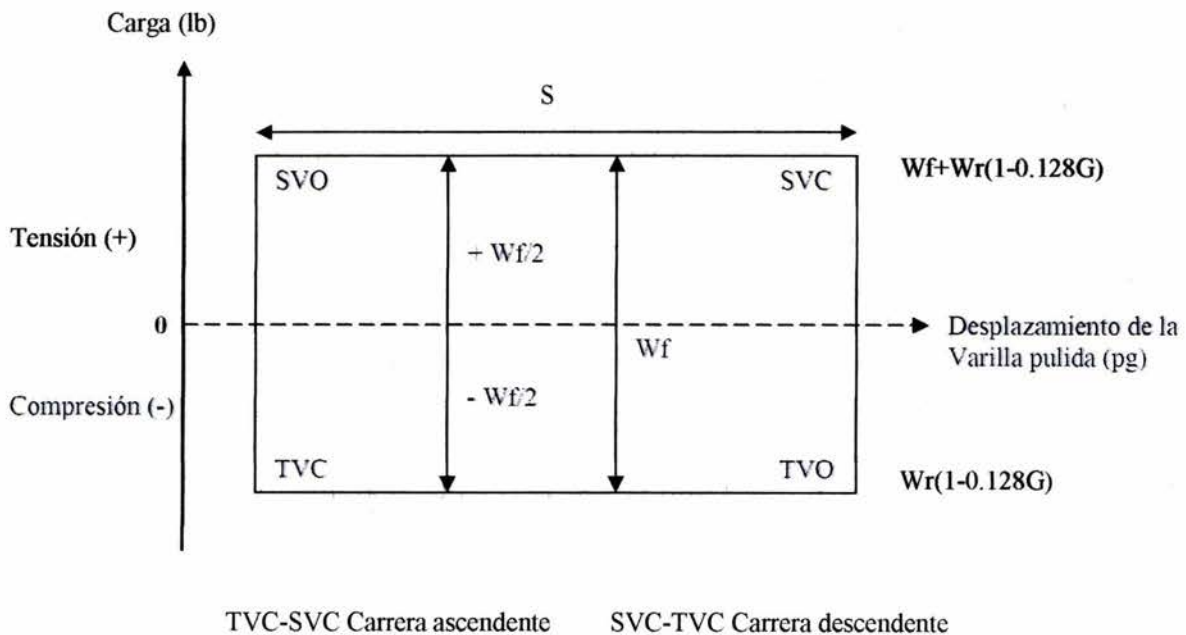


Fig. IV.4 Carta dinamométrica ideal.

Al considerar que la compresión ocurre a la mitad de la grafica de la bomba, y suponiendo un comportamiento ideal se tendrá un solo valor negativo que corresponde a $(-Wf/2)$ para todos los puntos de desplazamiento del émbolo en la carrera descendente y para la carrera ascendente se tendrá también un solo valor para todos los puntos de desplazamiento del émbolo que corresponde a $+(Wf/2)$.

Como emisor se tendrá ahora la carta dinamométrica ideal, y el receptor será ejemplificado por la carta dinamométrica a la profundidad de interés, es decir, se partirá de la profundidad de colocación de la bomba hasta una distancia L , medida del fondo hacia la superficie. El hecho de que no se incluya la aceleración de la gravedad en el desarrollo se debe a que siempre se trabaja con cargas dinámicas, sin considerar el peso de las varillas.

La propuesta de solución se muestra en la siguiente figura:

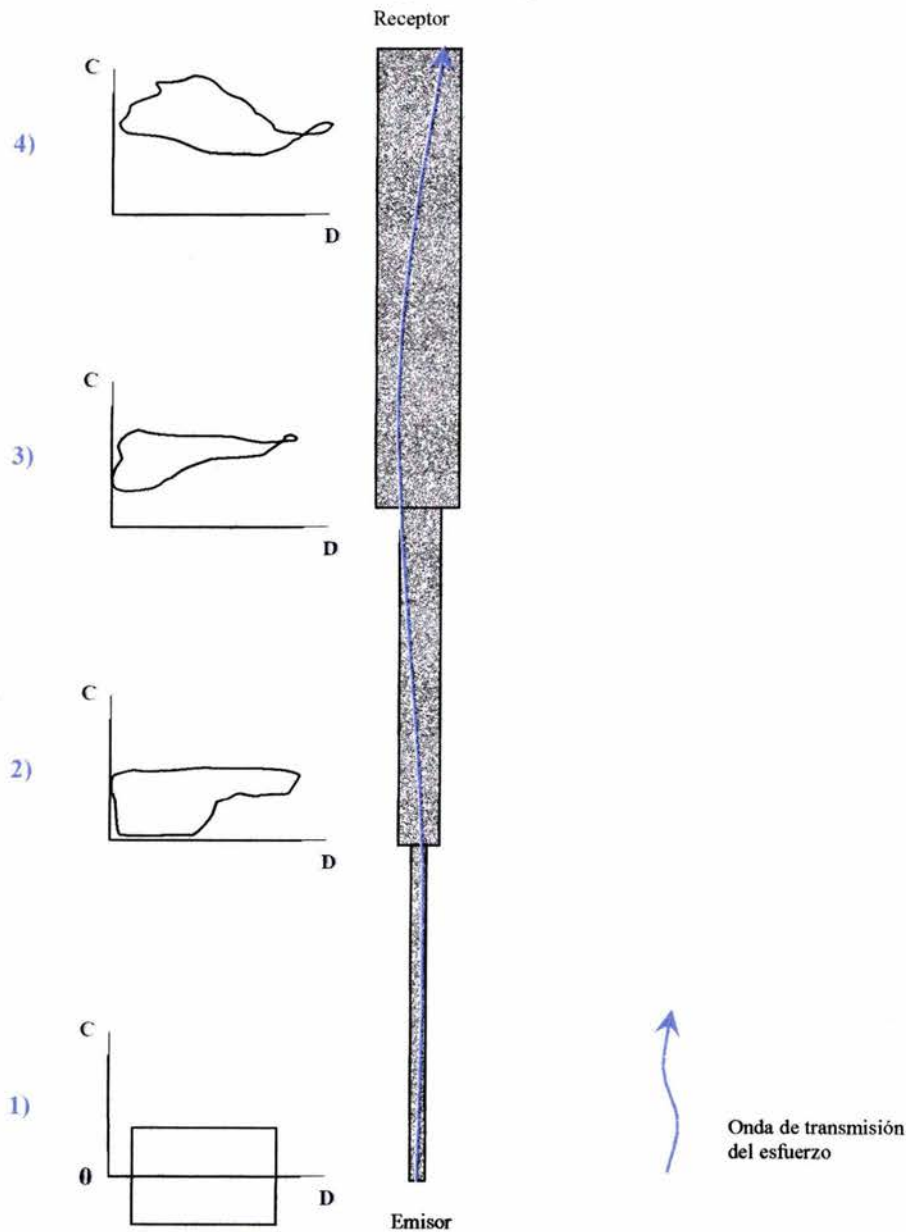


Fig. IV.5 Secuencia de cálculo de la inversión del método de Gibbs.

La propuesta de solución de la figura anterior es la siguiente:

En el paso **1)** para iniciar el cálculo se propone la carta dinamométrica ideal, los datos necesarios para determinarla son: la velocidad de bombeo y los valores de carga y desplazamiento del émbolo en función del tiempo. Esto representa las condiciones de frontera de la ecuación de onda.

En **2)** se determina la carta dinamométrica a la distancia L (medida del fondo a la superficie) haciendo pruebas de ensaye y error hasta que desaparezcan las cargas compresivas. A partir de este punto se colocarán las varillas de lastre hasta la profundidad de la bomba

En **3)** se obtiene la carta dinamométrica superficial la cual muestra los valores de carga máxima y mínima. Se calcula la torsión máxima para definir la UBM.

En **4)** se puede hacer la comparación entre los valores obtenidos con el modelo de Gibbs¹¹ y los obtenidos con un dinamómetro colocado en la superficie.

Los cálculos necesarios para la solución del modelo serán llevados a cabo con el programa SartaBM, programa de cómputo realizado ex profeso en este trabajo, el programa de cómputo fue construido en el lenguaje de programación Visual Basic 6.0¹³.

CAPITULO V. MÉTODO DE DISEÑO PROPUESTO DE SARTAS DE VARILLAS, UTILIZANDO VARILLAS DE LASTRE (SINKER BARS).

V.1 Procedimiento de diseño

1. El método de diseño empieza con la determinación de los datos siguientes: profundidad de la bomba (pie), diámetro del émbolo (pg), velocidad de bombeo (S), longitud de carrera del equipo existente (pg), viscosidad del aceite de la formación (SSU)¹⁴, número de secciones en la sarta de varilla, gasto de aceite (bopd), densidad relativa del fluido, y la elección del grado de las varillas de la sarta.

2 Una vez determinados los datos anteriores se elige una sección de armado API³ para iniciar el diseño, los esfuerzos máximos y mínimos en la parte superior de cada sección constitutiva de la sarta se realiza con el método desarrollado por Gault y Takács⁹.

El método de Gault y Takács⁹ incluye una distribución de fuerzas dinámicas eficiente a lo largo de la sarta, es decir no considera la carga dinámica igual en carrera ascendente y descendente como lo hace el método del API³. Se incluye además en el desarrollo de las ecuaciones la carga por compresión de Euler⁸ que es una carga opuesta a la compresión de la sarta, que se genera en carrera descendente. Las ecuaciones del método de Gault y Takács⁹ son las siguientes:

$$PPRL = W_{rf} + F_o + F_{du} \quad , \quad (5.1)$$

$$MPRL = W_{rf} - F_{dd} \quad , \quad (5.2)$$

Una vez conocidas las fuerzas $PPRL$ y $MPRL$ las componentes de la fuerza dinámica máxima son las siguientes:

$$F_{du} = PPRL - W_{rf} - F_o \quad , \quad (5.3)$$

$$F_{dd} = W_{rf} - MPRL \quad , \quad (5.4)$$

Las fuerzas máximas en el nivel más alto de cada sección de la sarta son:

$$F_{\max(i)} = F_o + \sum_{j=1}^i W_j L_j (1 - 0.128 S_p Gr) + \frac{F_{du}}{W_r} \sum_{j=1}^i W_j L_j, \quad (5.5)$$

$$F_{\min(i)} = \sum_{j=1}^i W_j L_j (1 - 0.128 S_p Gr) - \frac{F_{dd}}{W_r} \sum_{j=1}^i W_j L_j, \quad (5.6)$$

El cálculo de los esfuerzos máximo y mínimo es:

$$S_{\max(i)} = \frac{1}{A_i} \left\{ F_o + \left[\frac{F_{du}}{W_r} + 1 - 0.128 S_p Gr \right] \sum_{j=1}^i W_j L_j + \left(\frac{4\pi^2 EI}{L_j^2} \right) \right\}, \quad (5.7)$$

$$S_{\min(i)} = \frac{1}{A_i} \left\{ \left[1 - 0.128 S_p Gr - \frac{F_{dd}}{W_r} \right] \sum_{j=1}^i W_j L_j \right\}, \quad (5.8)$$

El término $\left(\frac{4\pi^2 EI}{L_j^2} \right)$ incluido en la ecuación (5.7) es el término llamado carga crítica de Euler⁸, este término se explicará a detalle en el Apéndice de este trabajo.

Si se sustituyen las ecuaciones (5.5) y (5.6) en (5.7) tenemos:

$$S_{\max(i)} = \frac{F_o}{A_i} + S_{\min(i)} \frac{\frac{F_{du}}{W_r} + 1 - 0.128 S_p Gr}{1 - 0.128 S_p Gr - \frac{F_{dd}}{W_r}}, \quad \dots (5.9)$$

La ecuación anterior determina el esfuerzo máximo para cada sección de la sarga de varillas, en función de las cargas dinámicas y el peso de la sarga.

Una vez conocidos los esfuerzos máximo y mínimo en las distintas secciones de la sarga y utilizando el diagrama de Goodman⁶ modificado, se obtiene el factor de servicio para asegurarse de que los rangos de esfuerzo máximo y mínimo cumplan con el Diagrama de Goodman⁶, la ecuación es la siguiente:

$$SF_{act} = \frac{S_{max}}{\frac{T}{4} + 0.5625S_{min}}, \quad \dots (5.10)$$

Usando este valor podemos hacer $SF = SF_{act}$ dibujar la línea a través del punto correspondiente al nivel más alto de la sarga. Teniendo que el factor de servicio es el mismo para todas las secciones de la sarga. La ecuación siguiente determina el esfuerzo mínimo para cada sección de sarga.

$$S_{i^*} = \frac{SF_{act} \frac{T}{4} - \frac{F_o}{A_i}}{\frac{F_{du}}{W_r} + 1 - 0.128SpGr - \frac{F_{dd}}{W_r} - 0.5625SF_{act}}, \quad \dots (5.11)$$

Para encontrar la longitud de cada sección de sarga se sustituye el valor de S_{i^*} en la ecuación (5.12), solucionando dicha ecuación para cada sección de la sarga se llega a la siguiente expresión:

$$L_i = \frac{1}{W_i} \left\{ \frac{A_i S_{i^*}}{1 - 0.128SpGr - \frac{F_{dd}}{W_r}} - \sum_{j=1}^{i-1} W_j L_j \right\}. \quad \dots (5.12)$$

3. Una vez obtenidas las longitudes de cada sección con las ecuaciones anteriores, se determina con el programa de cómputo las cartas dinamométricas desarrolladas con la solución del modelo de Gibbs¹¹. Las consideraciones para solución del método son las siguientes:

a) En el procedimiento de diseño de este trabajo, se considera que la carga del fluido está actuando sobre el área total del émbolo en el fondo del pozo.

b) La dirección de cálculo como ya se mencionó será de cero pies en el fondo (la profundidad de colocación de la bomba) a L, que es la profundidad de interés medida de abajo hacia arriba, este proceso se hace recursivamente hasta llegar a la superficie.

c) El desplazamiento del émbolo en el fondo del pozo se supone que es representado por un movimiento armónico simple en función del ángulo de la manivela con respecto a la vertical. En el inicio del movimiento, cuando la sarta se encuentre en el punto más bajo, el ángulo es 0 y 180 cuando la sarta se encuentra en su punto más alto, de manera que un ciclo de bombeo corresponderá a la longitud de carrera del émbolo en el pozo, lo anterior se ilustra en la siguiente figura:

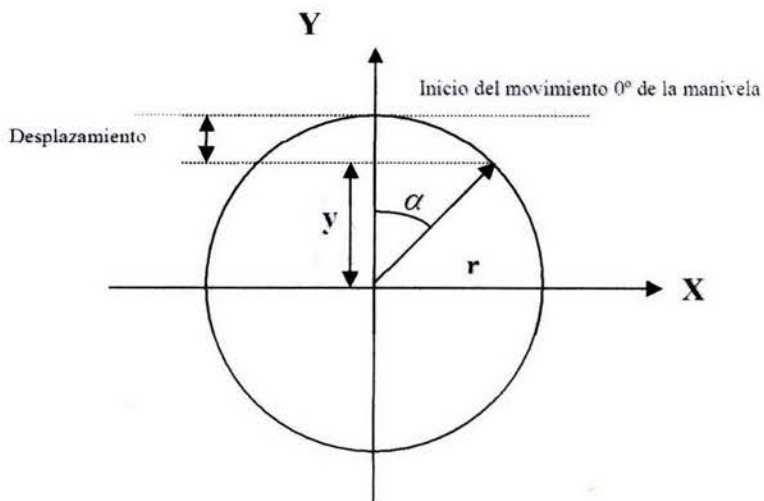


Fig.V.1 Representación del desplazamiento del émbolo en función del ángulo de la manivela.

De la figura anterior tenemos:

$$y = r \cos \alpha , \quad (5.13)$$

Por lo que el desplazamiento será

$$Desp = r - y , \quad (5.14)$$

Si consideramos que:

$$r = \frac{Sp}{2} , \quad (5.15)$$

Sustituyendo (5.15) en (5.14) tenemos:

$$Desp = \frac{Sp}{2} (1 - \cos \alpha) . \quad (5.16)$$

La velocidad angular, se considera constante y está dada por la siguiente expresión:

$$w = \frac{2\pi N}{60} . \quad (5.17)$$

El tiempo en segundos de un ciclo de bombeo en función de la velocidad se expresa con la siguiente expresión:

$$t = \frac{60}{N} . \quad (5.18)$$

Es necesario conocer los coeficientes a y c en la ecuación (4.2), para conocer a (definida como la velocidad de transmisión del esfuerzo en pie/seg) se utiliza la siguiente expresión¹⁶:

$$a = \sqrt{\frac{144Eg}{\rho_m}} . \quad (5.19)$$

El siguiente coeficiente a calcular es el de amortiguamiento viscoso, el cual puede determinarse de la siguiente forma:

$$c = \frac{2550240 (PRHP - HP_{hyd})T^2}{\sqrt{2\pi} (\sum \rho_i A_i X_i) S^2} \quad (5.20)$$

En donde:

$$HP_{hyd} = 7.36E^{-6} VGL_{NET} \quad (5.21)$$

Una vez obtenidos estos coeficientes y las longitudes de cada tramo de sarga de varillas con los valores de distancia L, se obtiene la carta dinamométrica en la cual se obtienen cargas de compresión, y la profundidad a la cual ocurren estas cargas será la longitud de varillas de lastre en la sarga de varillas.

En la siguiente figura se muestra el procedimiento de cálculo utilizado en el programa de cómputo:

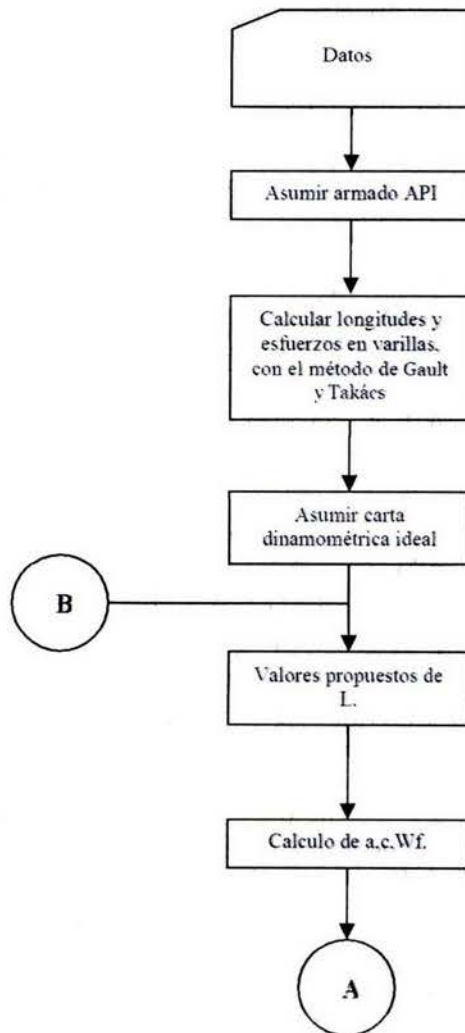


Fig.V.2 Diagrama de flujo del procedimiento de cálculo utilizado en el programa de cómputo.

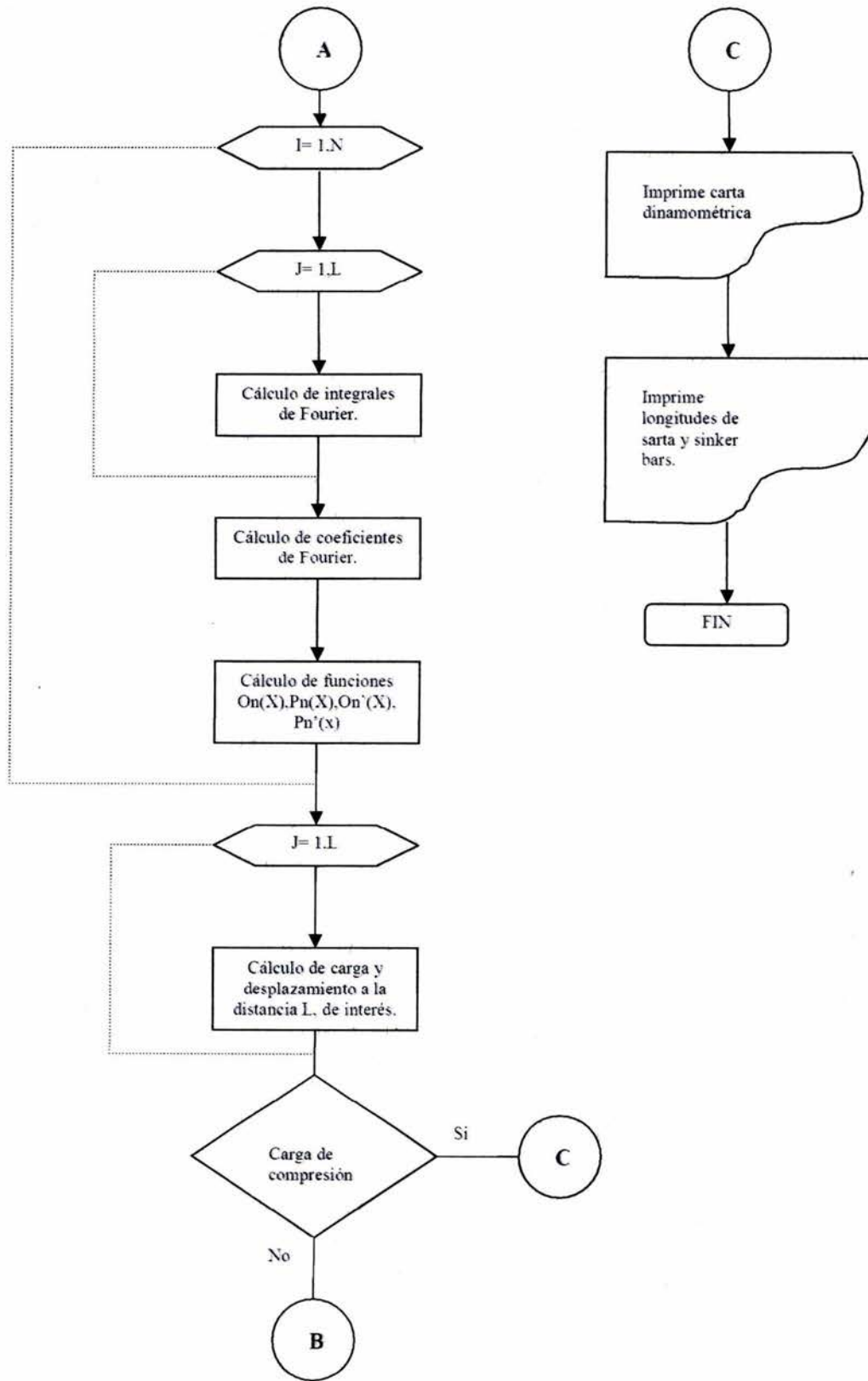


Fig.V.2 Diagrama de flujo del procedimiento de cálculo utilizado en el programa de computo (continuación).

V.2 Ejemplos de aplicación

- Profundidad 7000 pies.
- Longitud de carrera de la varilla pulida 100 pg.
- Velocidad de bombeo 11 emb/min.
- Diámetro del émbolo 1.5 pg.
- Gasto total de fluidos 230 bl.
- Viscosidad del aceite 31 SSU.
- Diámetros de la sarta de varillas 1 pg, 7/8 pg, 3/4 pg, 86.
- Carga de fluido en el pozo (para determinación de la carta dinamométrica ideal) 2678 lb.
- El pozo produce agua de la formación.

Los resultados mostrados en los dos ejemplos siguientes, son las pantallas de resultados del programa SartaBM.

1. Datos

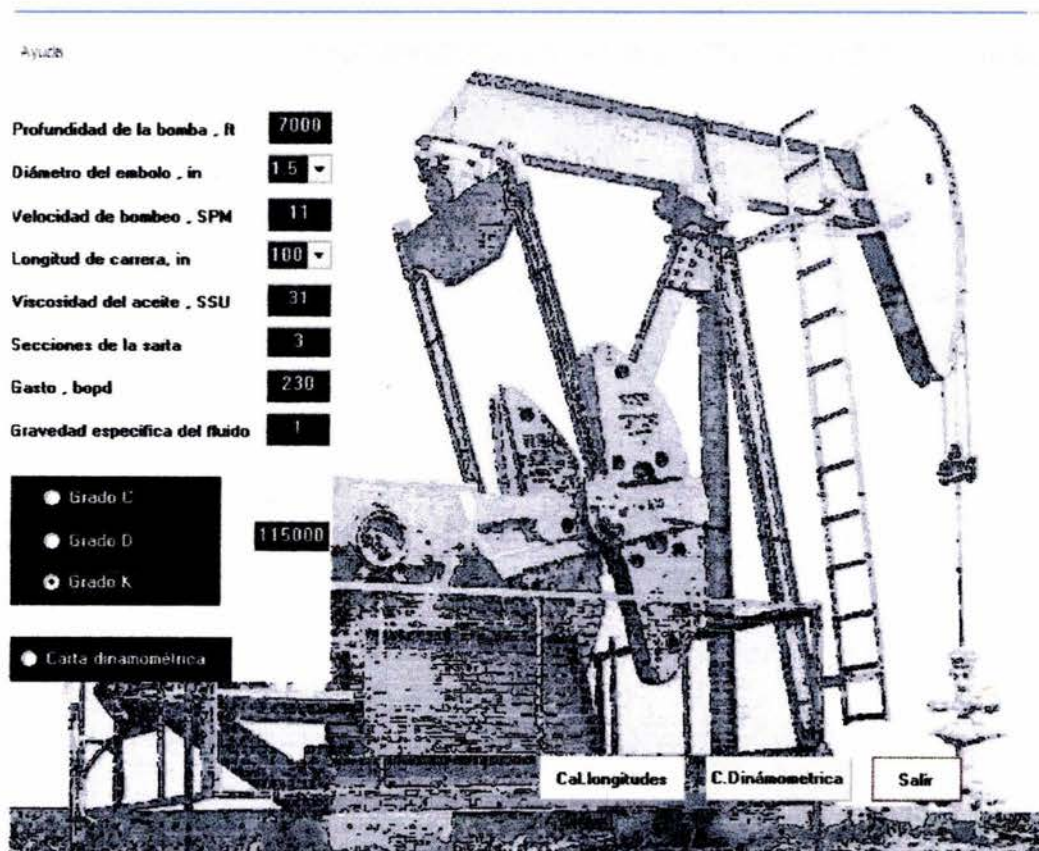


Fig.V.1 Datos de entrada del programa.

2. Cálculo de esfuerzos y longitudes preliminares.

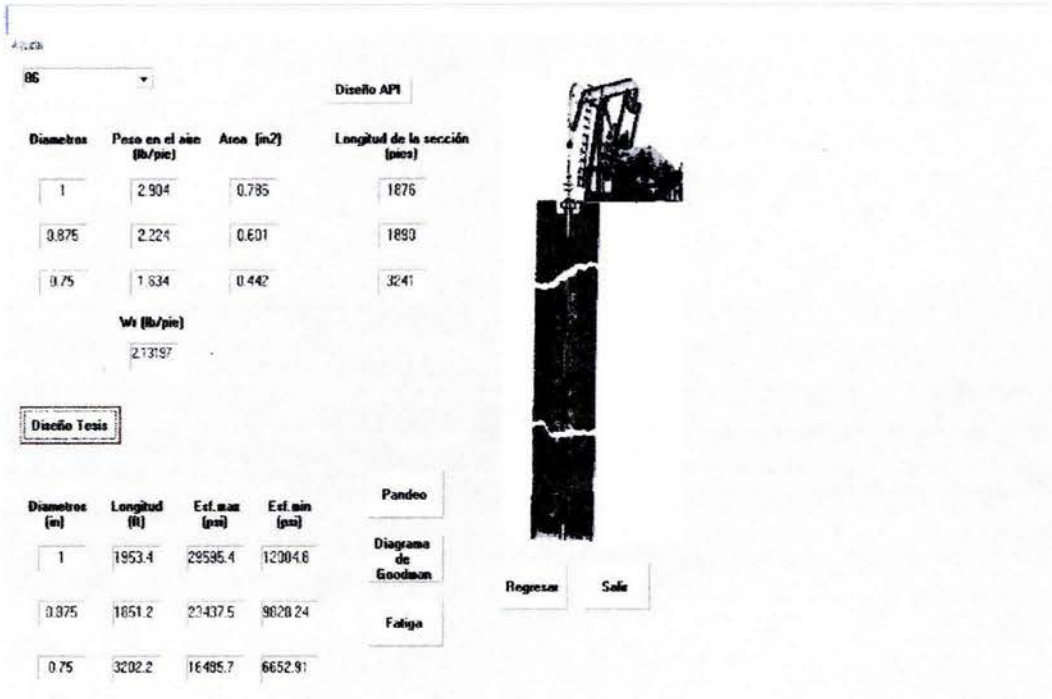


Fig.V.2 Cálculo de la longitud de cada tramo de la sarta de varillas.

3. Esfuerzos máximo y mínimo en la sarta según el diagrama de Goodman

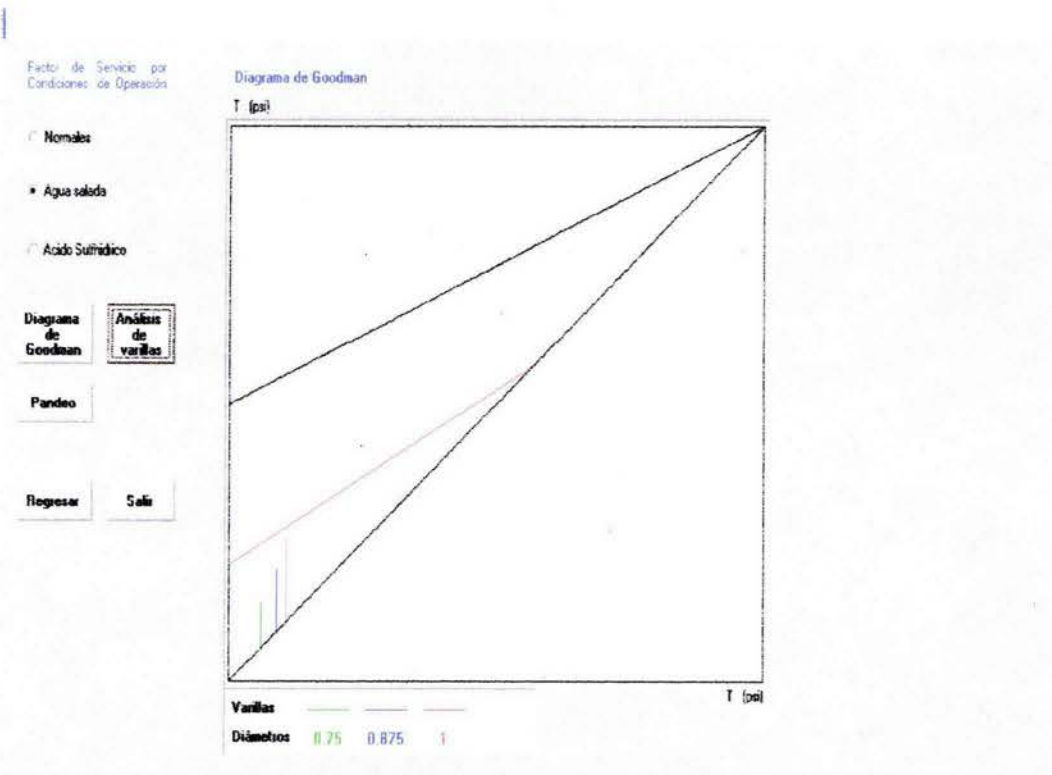


Fig.V.3 Diagrama de Goodman modificado.

4. Comparación de carta dinamométrica de fondo y en superficie.

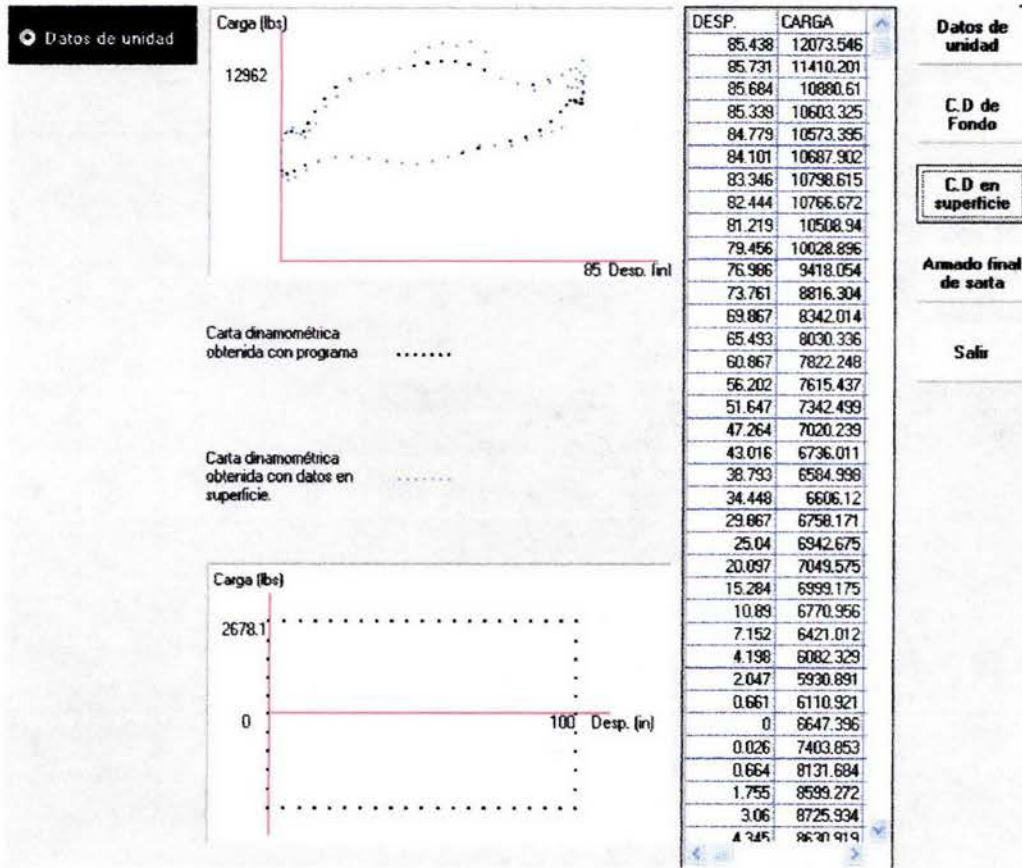


Fig.V.4 Carta dinamométrica de fondo y superficie.

5. Carta dinamométrica sin cargas de compresión y armado final de la sarta de varillas.

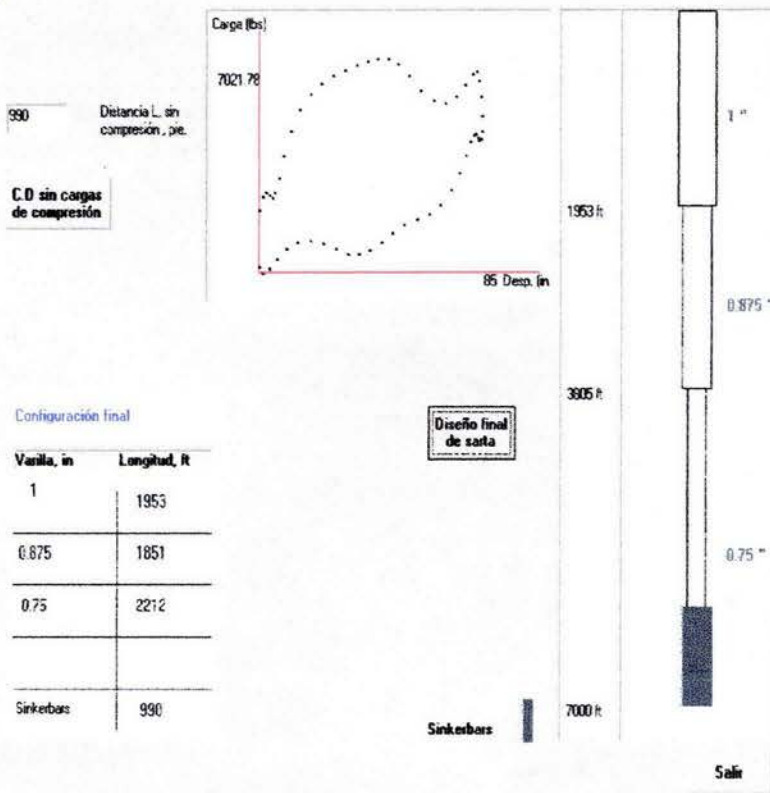


Fig.V.5 Diseño final de la sarta de varillas.

2. Profundidad 5500 pies.

- Longitud de carrera de la varilla pulida 86 pg.
- Velocidad de bombeo 9 emb/min.
- Diámetro del émbolo 2 pg.
- Gasto total de fluidos 100 bl.
- Viscosidad del aceite 30 SSU.
- Diámetros de la sarta de varillas 1 pg, 7/8 pg, 87.
- El pozo presenta problemas de ácido sulfhídrico.
- Carga de fluido en el pozo (para determinación de la carta dinamométrica ideal) 3367 lb.

Siguiendo los pasos antes señalados, y utilizando el programa se obtienen la siguiente configuración y armado de la sarta:

1. Datos

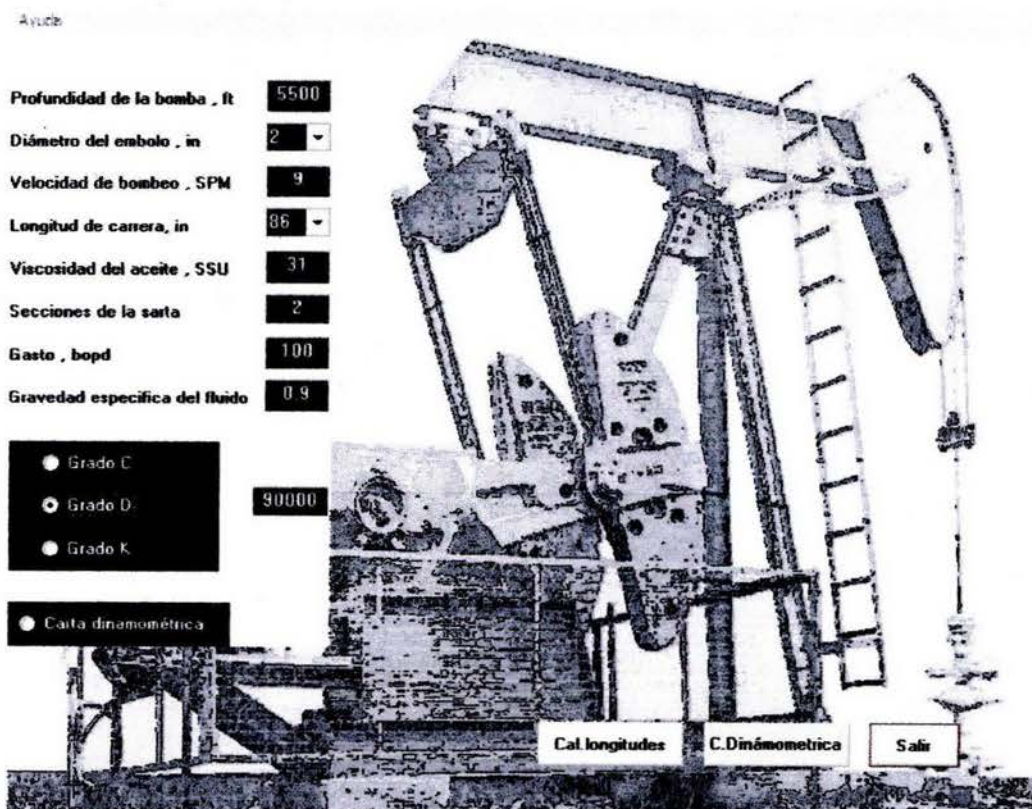


Fig. V.6 Datos de entrada del programa

2. Cálculo de esfuerzos y longitudes.

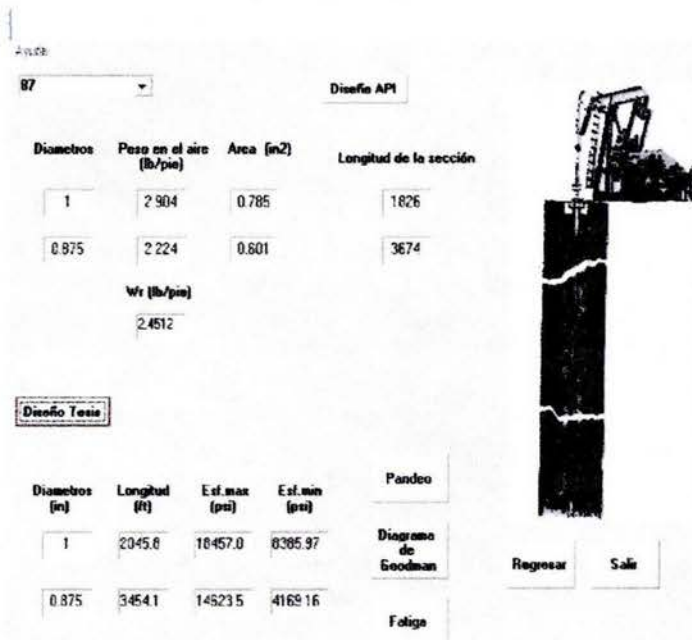


Fig.V.7 Longitudes y esfuerzos en la sarta de varillas.

3. Diagrama de Goodman

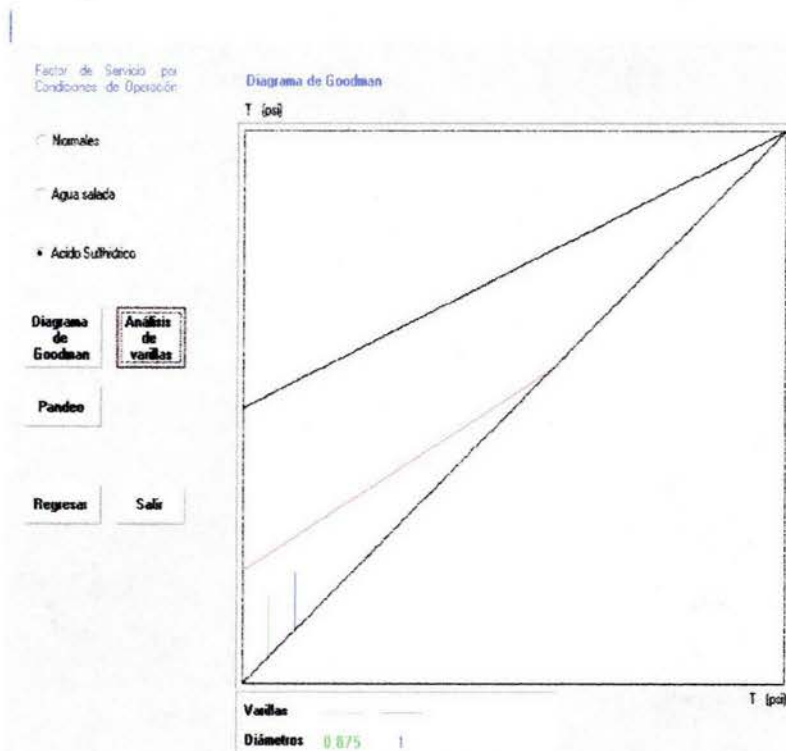


Fig. V.8 Diagrama de Goodman modificado.

4. Carta dinamoétrica de fondo y superficie.

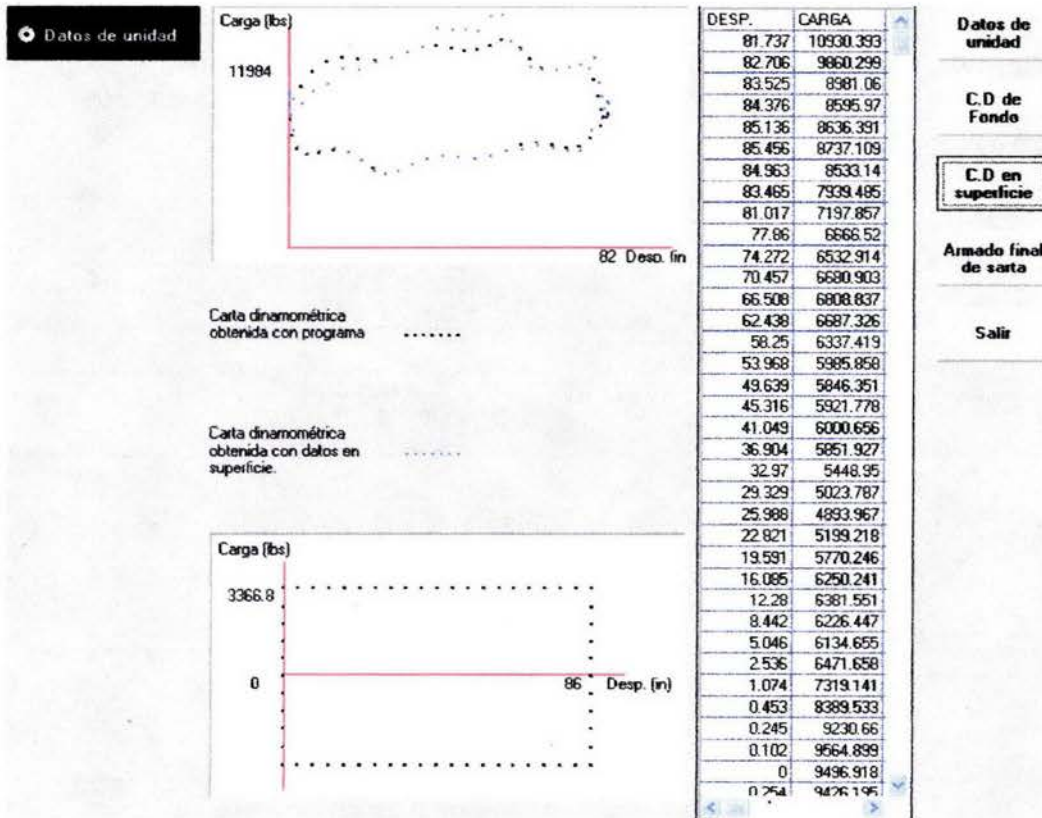


Fig. V.9 Carta dinamoétrica de fondo y superficie.

5. Diseño final de la sarta de varillas.

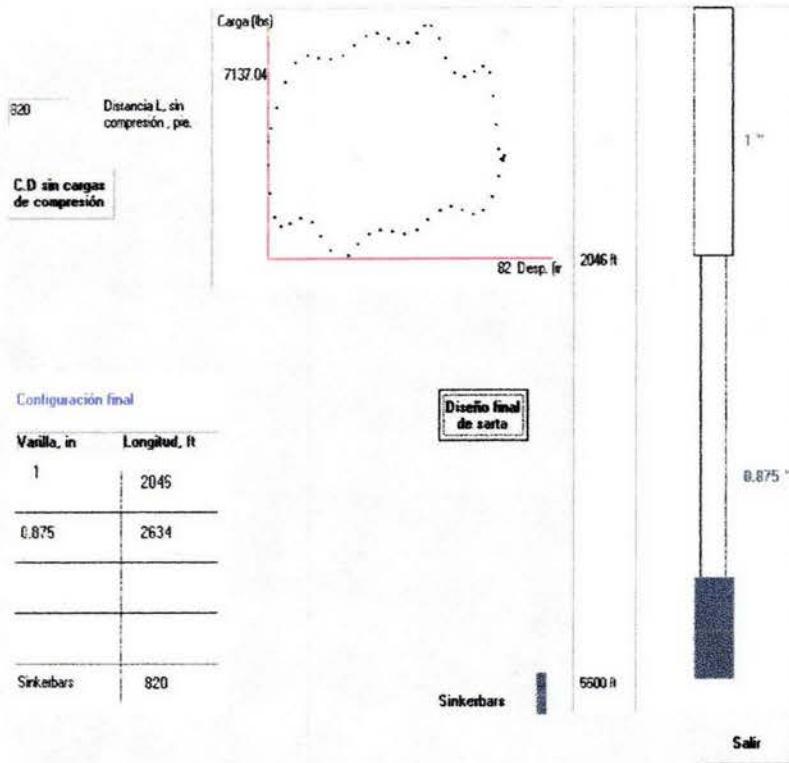


Fig. V.10 Diseño final de la sarta de varillas.

La figura anterior muestra los resultados del segundo ejemplo de aplicación, la exactitud en la aplicación del método de diseño desarrollado en este trabajo, depende de la calidad de los datos de entrada dados al programa. Una posible extensión de este trabajo es cuantificar la fuerza de fricción entre el émbolo y el barril, con esto se completarían todas las cargas actuantes en el sistema; sin embargo, esta información está ligada a datos de laboratorio los cuales no están disponibles.

CONCLUSIONES

1. Es posible utilizar el modelo matemático desarrollado para el diseño y diagnóstico de la sarta de varillas del equipo de Bombeo Mecánico.
2. Con la utilización de varillas de lastre en el armado de la sarta, se contrarrestan los esfuerzos de compresión del sistema. La sarta estará sometida únicamente a esfuerzos de tensión, prolongando la vida de trabajo del sistema de Bombeo Mecánico.
3. El factor principal de la carga dinámica desarrollada en la sarta de varillas, es la columna de fluido a levantar y las propiedades constitutivas del material por donde se transmite el esfuerzo.
4. Las cargas por pandeo pueden acelerar la falla por fatiga de la sarta de varillas, el pandeo es proporcional a la longitud, sin embargo, el pandeo máximo está limitado a la mitad del diámetro de la tubería de producción.
5. Los esfuerzos de compresión calculados a partir del modelo de Gibbs se incrementan en función de la longitud analizada. Longitudes mayores de sarta de varillas presentan mayores problemas de fatiga y falla prematura.
6. La carga en la sarta disminuye con la velocidad de bombeo de la unidad, a medida que disminuye la velocidad de bombeo la carta dinamométrica obtenida adquiere la geometría característica de la carta dinamométrica ideal.
7. Las gráficas de superficie calculadas con el modelo matemático son similares a las obtenidas en los pozos con un dinamómetro.

NOMENCLATURA

A_i - área transversal de la sección actual de sarta,	pg ² .
A_n - área de la sección transversal de la parte superior de la sarta,	pg ² .
A_p - área transversal del émbolo,	pg ²
A_1 - área de la sección transversal de la primer sección de la sarta de varillas	pg ²
A_2 - área de la sección transversal de la segunda sección de la sarta de varillas	pg ²
a - velocidad de propagación de la onda de esfuerzo,	pie/seg.
Co- carga de compresión generada en la sarta en carrera descendente,	lb.
c - coeficiente de amortiguamiento,	seg ⁻¹ .
$Desp$ - proyección a movimiento armónico simple del desplazamiento del émbolo,	pg.
D_i - diámetro de cada sección de la sarta,	pg.
$Dyn.Force$ - carga dinámica en carrera ascendente y descendente en la sarta,	lb.
$D(wt)$ - representación en series de Fourier ¹² del desplazamiento de la varilla pulida, adim.	
E - Módulo de elasticidad del acero,	lb/pg ² .
F - fuerza de tensión generada por la unidad de bombeo en carrera descendente,	lb.
F_{dd} - carga dinámica en carrera ascendente,	lb.
F_{du} - carga dinámica en carrera descendente,	lb.
F_f - fuerza de fricción entre el émbolo y el barril,	lb.
F_{FLOT} - fuerza de flotación de las varillas sumergidas en el aceite,	lb.
F_{max} - carga máxima actuante en la parte superior de cada sección de la sarta,	lb.
F_{min} - carga mínima actuante en la parte superior de cada sección de la sarta,	lb.
$F_{max(i-1)}$ - carga máxima en la sección anterior de la sarta de varillas,	lb.
$F_{min(i-1)}$ - carga mínima en la sección anterior de la sarta de varillas,	lb.

F_o - peso del fluido sobre el embolo,	lb.
F_o / Sk_r - Variable adimensional = Libras/(pulg*Libras/pulg)=1	
G - densidad relativa del fluido,	adim.
g - aceleración de la gravedad,	pie/seg ² .
HP_{hyd} - potencia hidráulica de la bomba,	HP.
I - momento de inercia del material,	pg ⁴ .
L - longitud total de la sarta de varillas,	pie.
L_i - longitud de cada sección de la sarta,	pie.
L_j - longitud de cada una de las secciones de la sarta,	pie.
L_{NET} - profundidad de levantamiento neto de fluidos,	pie.
L_{total} - longitud total de la sarta de varillas,	pie.
L_1 - longitud de la primer sección de la sarta medida de la superficie al fondo,	pie.
L_2 - longitud de la segunda sección de la sarta medida de la superficie al fondo,	pie.
$MPRL$ - carga mínima en la varilla pulida,	lb.
M_1 - peso de la primer varilla de la sarta medida de la superficie al fondo,	lb/pie.
M_2 - peso de la segunda varilla de la sarta medida de la superficie al fondo,	lb/pie.
N - velocidad de bombeo de la unidad,	rpm.
N / N_o - Variable adimensional = SPM/SPM=1	
P_{cr} - carga critica de Euler ⁸ ,	lb.
$PPRL$ - carga máxima en la varilla pulida,	lb.
$PRHP$ - potencia hidráulica sobre la varilla pulida,	HP.
R_1 - porcentaje de la longitud de la primer sección de la sarta de varillas,	adim.
R_2 - porcentaje de la longitud de la segunda sección de la sarta de varillas,	adim.
r - radio en la proyección a movimiento armónico simple,	pg.
S - longitud de la varilla pulida,	pg.

S_a - esfuerzo limite de fatiga del material,	lb/pg ² .
SF - factor de servicio del diagrama de Goodman ⁶ ,	adim.
SF_{act} - factor de servicio que utiliza Gault R.H. and Takacs G ⁹ ,	adim.
Sp - desplazamiento del émbolo en el fondo,	pg.
S_i - esfuerzo mínimo en cada sección de la sarta de varillas,	lb/pg ² .
S_{mod} - esfuerzo modificado en la sarta de varillas ⁵ ,	lb/pg ² .
S_{max} - esfuerzo máximo en la sarta de varillas ⁵ ,	lb/pg ² .
S_{min} - esfuerzo mínimo en la sarta de varillas ⁵ ,	lb/pg ² .
$SpGr$ - gravedad específica del líquido producido,	adim.
T - esfuerzo mínimo en tensión del material,	lb/pg ² .
T_a - esfuerzo mínimo a la tensión del material,	lb/pg ² .
t - tiempo,	seg.
$U(wt)$ - representación en series de Fourier ¹² de las cargas recibidas en superficie,adim	
$u(x, t)$ - desplazamiento de las varillas a una profundidad y tiempo arbitrarios,	pie.
x - distancia medida desde la parte inferior de la sarta de varillas no deformada,	pie.
W_j - peso de cada una de las secciones de la sarta,	lb.
W_r - peso de la sarta de varillas,	lb.
W_{rf} - carga total por flotación,	lb.
w - frecuencia angular,	emb/seg.
w_{avg} - porcentaje del peso de la sarta,	lb/pie.
w_i - porcentaje del peso en el aire de la sección actual de la sarta,	lb/pie.
w_r - peso promedio de la cada sección de la sarta de varillas,	lb./pie.

y - desplazamiento en la proyección a movimiento armónico simple,

pg.

$z(x, t)$ - forma compleja de $u(x, t)$,

pie.

Símbolos griegos

α - ángulo medido respecto a la vertical del crack,	grados o rad.
α_G, β_G - coeficientes de Gibbs ¹¹ para simular diferentes condiciones de bomba.	
α_n, β_n - parte real y compleja de los valores característicos.	
δ_n - coeficiente de Fourier ¹² para el desplazamiento,	pie.
γ_n - coeficiente de Fourier ¹² para el desplazamiento,	pie.
σ - coeficiente de Fourier ¹² para la carga,	lb.
τ - coeficiente de Fourier ¹² para la carga,	lb.
κ_n - parte real del coeficiente complejo de Fourier ¹² .	
ρ - densidad,	lb/pie ³ .
\sum - sumatoria de términos.	
μ_n - parte imaginaria del coeficiente complejo de Fourier ¹² .	
ν - coeficiente adimensional de amortiguamiento viscoso.	
f - factor de aceleración de Mills ⁷ , $f = 1 + \frac{(SN^2)}{70500}$,	adim.
Δt - intervalo de tiempo,	seg.

REFERENCIAS

- 1.** Operación de Explotación, Activo de Producción Poza Rica. PEMEX Exploración y Producción (1996).
- 2.** Catalogo LUFKIN INDUSTRIES, INC. Lufkin, Texas.
- 3.** "API Recommended Practice for Design Calculations for Sucker Rod Pumping Systems (Conventional Units)", API RP 11L, Third edition, Washington DC, (1977),25 p.
- 4.** Craft B.C , Holden W.R, and Graves E.D, "Well Design: Drilling and Production", Prentice-Hall, Inc, NJ, (1962), 281-367 p.
- 5.** Neely A.B., "Sucker Rod String Design", paper presented at Petroleum Engineer, March,(1976), 4 p.
- 6.** Hardy A.A "Sucker-Rod String Design and the Goodman Diagram", Paper 64-pet-2, presented at the Petroleum Mechanical Conference of the American Society of Mechanical Engineers, Los Angeles, September 20-23, (1964), 8 p.
- 7.** Mills,K.N. "Factors Influencing Well Loads Combined in a New Formula", The petroleum Engineer (1939).
- 8.** Scott W. Long, P.E., "Euler Loads and Measured Sucker Rod/Sinkerbar Buckling" SPE 35214 paper prepared for presentation at the Permian Basin Oil and Gas Recovery Conference held in Midland, TX 27-29 March (1996), 12 p.
- 9.** Gault R.H. and Takacs G., "Improved Rod String Taper Design" SPE 20676 presented at the 65th Annual Technical Conference, New Orleans, Sept. 23-26, (1990), 10 p.
- 10.** Takacs G., "Modern Sucker-Rod Pumping" Petroleum Engineering Department University of Miskolc, Hungary. (1993) Ed.PennWell Books, 230 p.
- 11.** Gibbs S.G.and Neely, A.B., "Computer Diagnosis of Down-Hole Conditions in Sucker Rod Pumping Wells", Journal of Petroleum Technology, January (1966), 8 p.

-
- 12.** Boyce W.E and Diprima R.C, "Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems" John Wiley and Sons, (1977), 347 p.
 - 13.** Schneider D, "An Introduction to Programming Using Visual Basic 6.0", Fourth Edition, Ed. Prentice Hall, Inc. New Jersey (1999), 813 p.
 - 14.** Juvinal C, Marshek K. "Fundamentals of Machine Component Design", John Wiley , Inc. (2000), 888 p.
 - 15.** Marcus D, "Ecuaciones Diferenciales", Ed. Continental, México (1995), 693 p.
 - 16.** Ramírez G, "Diseño de Unidades de Bombeo Mecánico Utilizando Varillas de Fibra de Vidrio", Universidad Nacional Autónoma de México, División de Estudios de Posgrado, México DF, (1997), 93 p.
 - 17.** Zúñiga P.H. et al, "Estudio de Registros del Dinamómetro Electrónico Delta II", Proyecto 3350, IMP, Reporte de avance No. 1, 1976.

APÉNDICE A

Carga de Euler.

Sea una viga simplemente apoyada como se muestra en la figura siguiente:

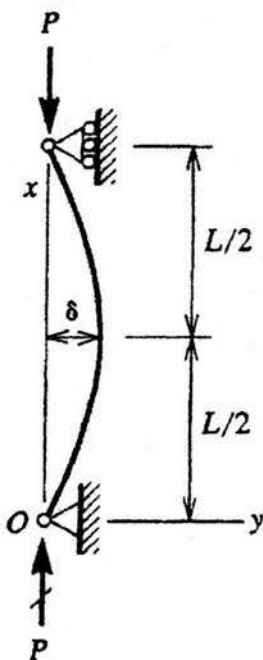


Figura. a1. Diagrama de cuerpo libre que muestra las cargas de compresión a las que se ve sometida una viga simplemente apoyada, en este trabajo se considera a la sarta como una viga simplemente apoyada.

Si existen dos cargas axiales actuando en sentido opuesto a cada una de ellas, en los extremos del elemento generando una compresión, la carga de pandeo máxima será:

$$P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2} \quad (a.1)$$

En este trabajo se considera a cada tramo de varilla como una viga simplemente apoyada, siendo los apoyos cada conexión entre las varillas.

APÉNDICE B

Velocidad de bombeo sincrónica

Un posible factor en la falla prematura de la sarta de varillas, es la velocidad sincrónica de bombeo. El primer trabajo realizado al respecto lo realizó Slonneger⁴ atendiendo serios problemas dentro del bombeo de hidrocarburos. Por lo cual es necesario comparar la velocidad de bombeo con la frecuencia natural de la sarta de varillas por un posible problema de velocidad sincrónica.

Considérese un sarta de longitud L anclada (es decir que la TP está anclada), al punto p como se muestra en la figura de abajo.

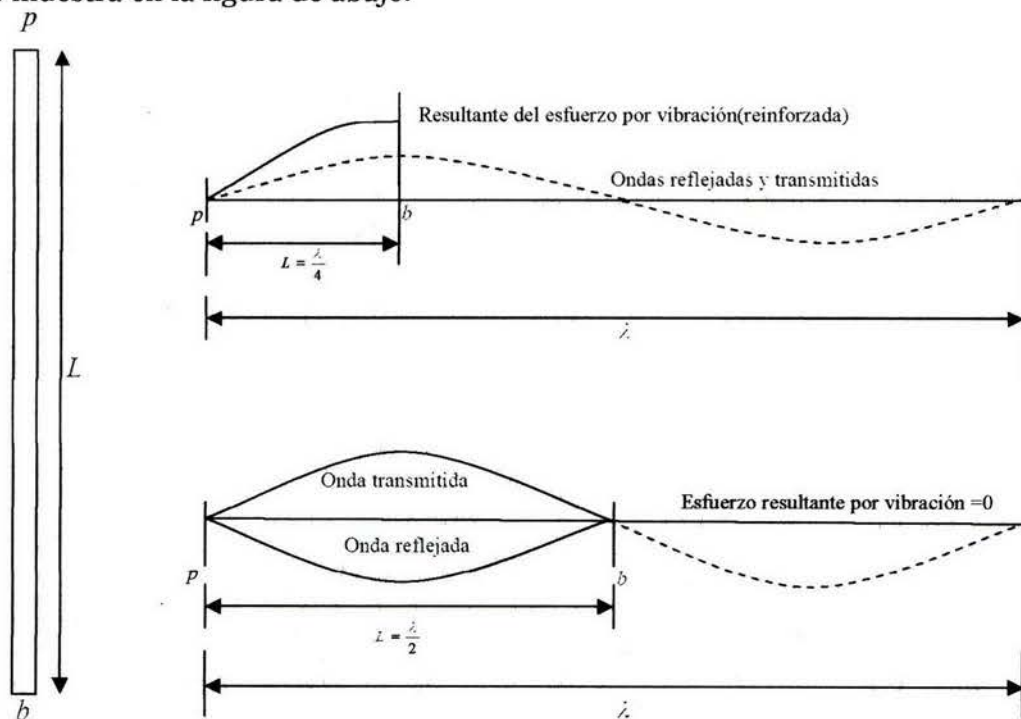


Figura a.2 Transmisión del esfuerzo a través de una varilla de acero, relación entre la longitud de sarta y la longitud de onda de impulso por velocidad sincrónica (arriba) y velocidad no asincrónica (abajo).

Donde:

p - Origen del impulso transmitido.

b - Punto de reflexión del impulso.

L - Longitud de la sarta.

λ - Longitud de onda de transmisión (y reflexión) del impulso.

Esta corresponde a una sarta de longitud L , el punto b es el inicio del embolo y p es el punto en donde la sarta para a través del espacio de la varilla pulida. Si se suministra un impulso al punto p, podrá viajar al punto b (a la velocidad del sonido en el metal) y ser reflejado. Si el punto b, es un antitodo, la reflexión de la onda será en una fase con la onda de transferencia, y la sarta se reforzará. Si el punto b es un nodo, la reflexión de la onda será de 180° fuera de la fase con la transferencia de onda, y la suma del vector de amplitudes a cualquier punto será cero.

Dentro del primer caso (reforzado) la sarta vibrará a una frecuencia natural, y cualquier esfuerzo de vibración será incrementado y más severo.

El caso simple de reforzamiento, es cuando aparece el primer antitodo, siendo la expresión:

$$\lambda = \frac{4}{L} \quad L = \frac{\lambda}{4}, \quad (\text{b.1})$$

donde λ es la longitud de onda del impulso (y reflexión) transmitido. La velocidad de onda, la velocidad de transmisión del esfuerzo v , y la frecuencia f se relacionan de la siguiente manera²:

$$v = f\lambda \quad \lambda = \frac{v}{f}, \quad (\text{b.2})$$

Para el caso descrito en la ecuación (b.2) tenemos:

$$\frac{v}{f} = 4L \quad \text{ó} \quad f = \frac{v}{4L}, \quad (\text{b.3})$$

Tomando la velocidad de transmisión del esfuerzo en la sarta (la velocidad del sonido en el acero) como $15800 \frac{\text{pies}}{\text{seg}}$ el valor de la frecuencia toma el valor siguiente:

$$f = \frac{15800 \frac{\text{pies}}{\text{seg}} \times \frac{60 \text{seg}}{1 \text{min}}}{4L} = \frac{237000}{\frac{L \text{vibraciones}}{\text{min}}}, \quad (\text{b.4})$$

La ecuación anterior proporciona la frecuencia fundamental de la sarta, si los impulsos son transmitidos a la sarta como una frecuencia f definida por la ecuación anterior, si la velocidad de bombeo para el pozo fue f emboladas por minuto, la sarta podría situarse dentro de una vibración como la frecuencia natural del material, y puede ocurrir la resonancia.

Dejando t_1 como el tiempo requerido por un impulso que viaja una distancia L a una velocidad v :

$$L = vt_1, \quad (\text{b.5})$$

Si la velocidad de bombeo N_1 , es tal que el tiempo entre los impulsos es t_1 . Entonces si la sarta vibra a la frecuencia natural tenemos:

$$N_1 = \frac{237000}{L} = \frac{237000}{vt_1}, \quad (\text{b.6})$$

Si la velocidad de bombeo es N_2 es tal que el tiempo entre los impulsos es $t_2 = 2t_1$, un impulso será esparcido en la sarta cuando el impulso previo ha viajado una distancia de $2L$ y la sarta entrará en resonancia. Siendo

$$N_2 = \frac{237000}{vt_2} = \frac{237000}{2vt_1} = \frac{237000}{2L}, \quad (\text{b.7})$$

En general, N representa una velocidad de bombeo sincrónica si:

$$N = \frac{237000}{nL}. \quad (\text{b.8})$$

Donde n es cualquier entero.

La discusión de este punto ha sido confiada para el caso donde la sarta vibra a la frecuencia fundamental, o armónico simple.

El siguiente caso o reesfuerzo ocurre cuando el punto b es el segundo antinodo. En este caso:

$$L = \frac{3\lambda}{4} \qquad \lambda = \frac{4L}{3}, \qquad (b.9)$$

La resonancia ocurrirá si la relación entre la velocidad de bombeo y la frecuencia natural de la sarta es tal que:

$$f = nN, \qquad (b.10)$$

La resonancia ocurre cuando

$$\lambda = \frac{v}{nN}, \qquad (b.11)$$

Combinando las ecuaciones (a.9) y (a.11) tenemos:

$$\frac{4L}{3} = \frac{v}{nN}, \qquad (b.12)$$

$$N = \frac{3v}{4nL} = \frac{3(15800)(60)}{4nL} = \frac{237000}{nN} (3). \qquad (b.13)$$

El siguiente caso de resonancia ocurre cuando el punto b cae en el tercer antinodo, el cual será:

$$L = \frac{5\lambda}{4} \qquad \lambda = \frac{4L}{5}, \qquad (b.14)$$

La línea de resonancia sigue con:

$$N = \frac{237000}{nN} (5), \quad (\text{b.15})$$

La resonancia ocurre si:

$$N = \frac{237000m}{nL}, \quad (\text{b.16})$$

Cuando m es cualquier impar entero habrá resonancia. Sin embargo, los efectos de causan la amplitud de la reflexión de la onda son insignificantes en el caso de la vibración a la frecuencia fundamental. En este caso si $m = 1$, es necesario para definir la velocidad sincrónica.

Si el comportamiento sincrónico es considerado como un factor de falla de la sarta, una velocidad indeseable de bombeo será cuando n sea un entero dentro de la expresión.

$$n = \frac{237000}{NL} . \quad (\text{b.17})$$

Cualquier velocidad de bombeo en la cual el valor de n no es un entero será asincrónica.

Sin embargo para mantenerse lejos de una posible velocidad sincrónica, los valores de n recomendados para evitar la velocidad sincrónica son:

$$n = 1.5, 2.5, 3.5, \text{ etc}$$

APÉNDICE C

Modelado y solución de la ecuación diferencial de onda.

El modelo matemático utilizado para la evaluación de carga y desplazamiento es la ecuación de onda con amortiguamiento viscoso en una dimensión, este modelo fue propuesto por Gibbs⁵, para predecir el comportamiento del sistema de bombeo mecánico. El principal problema del modelo consiste en simular el comportamiento en el fondo del pozo, ya que esta en función de la apertura y cierre de la válvula viajera y la válvula de pie, por ello Gibbs⁵ presentó una ecuación ex profeso para simular lo anterior.

El modelo es el siguiente:

$$\frac{\partial^2 z(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z(x,t)}{\partial x^2} - c \frac{\partial z(x,t)}{\partial t} \quad (c.1)$$

Siendo a y c

$$\frac{\partial^2 z(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\pi \nu v}{2L} \frac{\partial z(x,t)}{\partial t}, \quad (c.2)$$

Donde:

$z(x,t)$ - es el desplazamiento a lo largo de la sarta, pies

t - es el tiempo, seg.

x - es la distancia de referencia de pozo, pies

a - es la velocidad de transmisión del esfuerzo, pie/seg.

L - es la profundidad de colocación de la bomba, pies

ν - es el coeficiente de amortiguamiento viscoso, adim.

La solución detallada es la siguiente:

Resolviendo por separación de variables:

$$z(x,t) = X(x) * T(t) \quad , \quad (c.3)$$

$$\frac{\partial z(x,t)}{\partial t} = X(x) * T'(t), \quad (c.4)$$

$$\frac{\partial^2 z(x,t)}{\partial t^2} = X(x) * T''(t), \quad (\text{c.5})$$

$$\frac{\partial z(x,t)}{\partial x} = X'(x) * T(t), \quad (\text{c.6})$$

$$\frac{\partial^2 z(x,t)}{\partial x^2} = X''(x) * T(t), \quad (\text{c.7})$$

Sustituyendo las ecuaciones anteriores en (c.1), e igualando a $-\lambda^2$ obtenemos:

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} + \frac{cT'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2, \quad (\text{c.8})$$

Separando e igualando a cero se tiene

$$T''(t) + cT'(t) + a^2 \lambda^2 T(t) = 0, \quad (\text{c.9})$$

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad (\text{c.10})$$

Proponiendo como solución

$$T(t) = e^{imwt}, \quad (\text{c.11})$$

Derivando dos veces:

$$T'(t) = imwe^{imwt}, \quad (\text{c.12})$$

$$T''(t) = i^2 n^2 w^2 e^{imwt}, \quad (\text{c.13})$$

Sustituyendo en (c.9) y resolviendo para lambda

$$\lambda^2 = \frac{n^2 w^2 - c n w}{a^2}, \quad (\text{c.14})$$

$$\lambda^2 = \frac{n^2 w^2}{a^2} - \frac{icmw}{a^2}. \quad (\text{c.15})$$

Siendo lambda un complejo, se debe obtener la raíz cuadrada del mismo, con la siguiente expresión:

$$\sqrt{\alpha + i\beta} = \pm \left[\sqrt{\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}} + i \frac{\beta}{|\beta|} \sqrt{\frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}} \right]. \quad (\text{c.16})$$

Resolviendo se tiene

$$\alpha = \frac{n^2 w^2}{a^2}, \quad (\text{c.17})$$

$$\beta = \frac{c n w}{a^2}, \quad (\text{c.18})$$

$$\lambda_n = \pm \left[\sqrt{\frac{\frac{n^2 w^2}{a^2} + \sqrt{\frac{n^4 w^4}{a^4} + \frac{c^2 n^2 w^2}{a^4}}}{2}} + i \frac{\frac{c n w}{a^2}}{\frac{c n w}{a^2}} \sqrt{\frac{-\frac{n^2 w^2}{a^2} + \sqrt{\frac{n^4 w^4}{a^4} + \frac{c^2 n^2 w^2}{a^4}}}{2}} \right], \quad (\text{c.19})$$

Haciendo operaciones algebraicas

$$\lambda_n = \pm \left[\frac{n w}{a \sqrt{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{c}{n w}\right)^2}} + i \frac{n w}{a \sqrt{2}} \sqrt{-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{c}{n w}\right)^2}} \right], \quad (\text{c.20})$$

$$-\alpha_n = \frac{nw}{a\sqrt{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{c}{nw}\right)^2}}, \quad ; n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{c.21})$$

$$\beta_n = \frac{nw}{a\sqrt{2}} \sqrt{-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{c}{nw}\right)^2}}, \quad ; n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{c.22})$$

En forma compleja se tiene

$$\lambda_n = -\alpha_n + i\beta_n \quad ; n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{c.23})$$

Para $n = 0$ $\lambda_n = 0$

$$T''(t) + cT'(t) = 0. \quad (\text{c.25})$$

Una solución es:

$$T(t) = \xi \quad \text{Donde } \xi = \text{cte. real.}$$

La solución de la ecuación (c.10) se satisface con la ecuación lineal de $\text{sen } \lambda_n x$ y $\text{cos } \lambda_n x$.

$$X(x) = \Phi_n \text{sen } \lambda_n x + \Theta_n \text{cos } \lambda_n x. \quad (\text{c.26})$$

Para $n = 0$ $\lambda_n = 0$ en la ecuación (c.5)

$$X''(x) = 0$$

Cuya solución es:

$$X(x) = \eta x + \zeta. \quad (\text{c.27})$$

**ESTA TESIS NO SALE
DE LA BIBLIOTECA**

Donde: η y ζ son constantes reales y Φ , Θ son constantes complejas que pueden expresarse como:

$$\Phi_n = -k_n - i\mu_n. \quad (c.28)$$

$$\Theta_n = \nu_n - i\delta_n. \quad (c.29)$$

Sustituyendo las soluciones en la ecuación (c.2)

$$z(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (\Phi_n \text{sen} \lambda_n x + \Theta_n \text{cos} \lambda_n x) e^{in\omega t}. \quad (c.30)$$

$$z(x, t) = (\eta x + \zeta) \xi. \quad (c.31)$$

Sumando las soluciones, se encuentra la solución general:

$$z(x, t) = \xi \eta x + \zeta \xi + \sum_{n=1}^{\infty} (\Phi_n \text{sen} \lambda_n x + \Theta_n \text{cos} \lambda_n x) e^{in\omega t}, \quad (c.32)$$

La señal de carga vs. Tiempo en el fondo (carga de fluido), $D(\omega t)$, puede representarse por series truncadas de Fourier:

$$D(\omega t) = \frac{\sigma_o}{2} + \sum_{n=1}^{\tilde{n}} \sigma_n \text{cos} n\omega t + \tau_n \text{sen} n\omega t, \quad (c.33)$$

Los coeficientes de Fourier σ_n y τ_n que corresponden a la curva de carga vs. Tiempo en el fondo, se determine como:

$$\sigma_n = \frac{w}{\pi} \int_0^p D(wt) \cos(nwt) dt \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3... \quad (c.34)$$

$$\tau_n = \frac{w}{\pi} \int_0^p D(wt) \text{sen}(nwt) dt \quad , \quad n = 1, 2, 3... \quad (c.35)$$

La curva de desplazamiento vs. Tiempo supuesto en el fondo, puede aproximarse por series del mismo tipo

$$U(wt) = \frac{\gamma_0}{2} + \sum_{n=1}^{\tilde{n}} \gamma_n \cos(nwt) + \delta_n \text{sen}(nwt) \quad . \quad (c.36)$$

Donde:

$$\gamma_n = \frac{w}{\pi} \int_0^p U(wt) \cos(nwt) dt \quad , \quad n = 0, 1, 2, 3... \quad (c.37)$$

$$\delta_n = \frac{w}{\pi} \int_0^p U(wt) \text{sen}(nwt) dt \quad , \quad n = 1, 2, 3... \quad (c.38)$$

Para que la solución general cumpla las condiciones de carga en la varilla pulida es necesario determinar el valor de las constantes para esas condiciones.

De la ley de Hooke, la carga por arriba del émbolo puede expresarse:

$$D(wt) = \text{Real} \left[EA \frac{\partial z(0,t)}{\partial x} \right] \quad , \quad (c.39)$$

Para encontrar la derivada $\frac{\partial z(0,t)}{\partial x}$, derivando la solución general, de la ecuación (b.8), con respecto a x

$$\frac{\partial z(x,t)}{\partial x} = \xi\eta + \sum_{n=1}^{\infty} (\Phi_n \lambda_n \cos \lambda_n x - \Theta_n \lambda_n \text{sen} \lambda_n x) e^{inwt}. \quad (\text{c.40})$$

Evaluando para $x=0$

$$\frac{\partial z(0,t)}{\partial x} = \xi\eta + \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n \lambda_n e^{inwt}. \quad (\text{c.41})$$

Haciendo uso de la identidad trigonométrica de Euler:

$$e^{inwt} = \cos(nwt) + i \text{sen}(nwt), \quad (\text{c.42})$$

$$\frac{\partial z(0,t)}{\partial x} = \xi\eta + \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n \lambda_n \cos(nwt) + i \Phi_n \lambda_n \text{sen}(nwt), \quad (\text{c.43})$$

De las ecuaciones (c.5) y (c.6)

$$\Phi_n \lambda_n = (-k_n - i\mu_n)(-\alpha_n + i\beta_n), \quad (\text{c.44})$$

$$\Phi_n \lambda_n = k_n \alpha_n + \mu_n \beta_n + i(\mu_n \alpha_n - k_n \beta_n), \quad (\text{c.45})$$

$$i \Phi_n \lambda_n = k_n \beta_n - \mu_n \alpha_n + i(\mu_n \beta_n + k_n \alpha_n), \quad (\text{c.46})$$

Considerando sólo la parte real y sustituyendo en la ecuación (c.12)

$$\frac{\partial z(0,t)}{\partial x} = \xi\eta + \sum_{n=1}^{\infty} (k_n \alpha_n + \mu_n \beta_n) \cos(nwt) + (k_n \beta_n - \mu_n \alpha_n) \text{sen}(nwt). \quad (\text{c.47})$$

Sustituyendo la derivada en la ley de Hooke, es decir, en la ecuación (c.11), para obtener la carga en la varilla pulida

$$D(wt) = EA\xi\eta + EA \sum_{n=1}^{\infty} (k_n \alpha_n + \mu_n \beta_n) \cos(nwt) + (k_n \beta_n - \mu_n \alpha_n) \text{sen}(nwt). \quad (\text{c.48})$$

Al comparar los términos de esta ecuación con los coeficientes de la expresión para la carga en la superficie, en la ecuación (c.9), se deducen las siguientes relaciones:

$$\frac{\sigma_o}{2} = EA\xi\eta \quad . \quad (c.49)$$

$$\sigma_n = EA(k_n\alpha_n + \mu_n\beta_n), \quad (b.14) \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (c.50)$$

$$\tau_n = EA(k_n\beta_n - \mu_n\alpha_n), \quad (b.15) \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (c.51)$$

Resolviendo por simultaneas las ecuaciones (c.14) y (c.15) para k_n y μ_n

$$k_n = \frac{\tau_n\beta_n + \sigma_n\alpha_n}{EA(\beta_n^2 + \alpha_n^2)} \quad , \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (c.52)$$

$$k_n = \frac{\sigma_n\beta_n - \tau_n\alpha_n}{EA(\beta_n^2 + \alpha_n^2)} \quad , \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (c.53)$$

De manera similar, para que la solución general cumpla con la condición de desplazamiento en el émbolo:

$$U(\omega t) = \text{Real}[z(0,t)], \quad (c.54)$$

Evaluando en $x=0$ en la solución general, es decir, la ecuación (b.8) nos queda:

$$z(0,t) = \zeta\zeta + \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_n e^{in\omega t} \quad , \quad (c.55)$$

Sustituyendo la identidad de Euler:

$$z(0,t) = \zeta \xi + \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_n (\cos(mwt) + i \operatorname{sen}(mwt)), \quad (\text{c.56})$$

Sustituyendo (c.13) en el desarrollo

$$z(0,t) = \zeta \xi + \sum_{n=1}^{\infty} (v_n - i \delta_n) (\cos(mwt) + i \operatorname{sen}(mwt)), \quad (\text{c.57})$$

Desarrollando y tomando sólo la parte real:

$$U(wt) = z(0,t) = \zeta \xi + \sum_{n=1}^{\infty} v_n \cos(mwt) + \delta_n \operatorname{sen}(mwt), \quad (\text{c.58})$$

Al comparar términos con la representación en series de Fourier del desplazamiento del émbolo en la ecuación (c.10), se deducen las siguientes relaciones:

$$\frac{\gamma_o}{2} = \zeta \xi \quad ; \quad \gamma_n = v_n \quad , \quad (\text{c.59})$$

Para calcular el desplazamiento a cualquier profundidad y tiempo arbitrarios se obtiene de la parte real de la solución general, es decir, la ecuación (c.8)

Sustituyendo en la ecuación (c.8) la identidad de Euler así como las definiciones de Φ_n ec.(c.1), Θ_n ec.(c.2), λ_n ec.(c.5), desarrollando y agrupando términos semejantes:

$$z(x,t) = \xi \eta x + \zeta \xi + \sum_{n=1}^{\infty} (-k_n \operatorname{sen}(-\alpha_n x + i \beta_n x) - i \mu_n \operatorname{sen}(-\alpha_n x + i \beta_n x) +$$

$$v_n \cos(-\alpha_n x + i \beta_n x) - i \delta_n \cos(-\alpha_n x + i \beta_n x)) \cos(mwt) +$$

$$i k_n \operatorname{sen}(-\alpha_n x + i \beta_n x) + \mu_n \operatorname{sen}(-\alpha_n x + i \beta_n x) + i v_n \cos(-\alpha_n x + i \beta_n x) +$$

$$\delta_n \cos(-\alpha_n x + i\beta_n x) \text{sen}(m\omega t), \quad (\text{c.60})$$

Utilizando las siguientes identidades trigonométricas complejas:

$$\text{sen}(-\alpha_n x + i\beta_n x) = \cos(-\alpha_n x) \text{sen}(i\beta_n x) + \text{sen}(-\alpha_n x) \cos(i\beta_n x), \quad (\text{c.61})$$

$$\cos(-\alpha_n x + i\beta_n x) = \cos(-\alpha_n x) \cos(i\beta_n x) - \text{sen}(-\alpha_n x) \text{sen}(i\beta_n x), \quad (\text{c.62})$$

$$\cos(i\beta_n x) = \cosh(\beta_n x), \quad (\text{c.63})$$

$$-i \text{sen}(i\beta_n x) = \text{senh}(\beta_n x), \quad (\text{c.64})$$

$$\cos(-\alpha_n x) = \cos(\alpha_n x), \quad (\text{c.65})$$

$$\text{sen}(-\alpha_n x) = -\text{sen}(\alpha_n x), \quad (\text{c.66})$$

Eliminando los términos imaginarios y agrupando términos:

$$\begin{aligned} \mu(x, t) = \xi \eta x + \zeta \xi + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\begin{aligned} &(k_n \cosh(\beta_n x) + \delta_n \text{senh}(\beta_n x)) \text{sen}(\alpha_n x) + (\mu_n \text{senh}(\beta_n x) \\ &+ \gamma_n \cosh(\beta_n x)) \cos(\alpha_n x) \end{aligned} \right] \cos(m\omega t) + \\ [(k_n \text{senh}(\beta_n x) + \delta_n \cosh(\beta_n x)) \cos(\alpha_n x) - \mu_n \cosh(\beta_n x) + \gamma_n \text{senh}(\beta_n x)] \text{sen}(\alpha_n x) \text{sen}(m\omega t) \quad (\text{c.67}) \end{aligned}$$

De las ecuaciones (c.13) y (c.16)

$$\xi \eta = \frac{\sigma_o}{2EA}, \quad (\text{c.68})$$

$$\zeta \xi = \frac{\gamma_o}{2}, \quad (\text{c.69})$$

Por tanto, la expresión anterior queda:

$$\mu(x,t) = \frac{\sigma_o}{2EA}x + \frac{\gamma_o}{2} + \sum_{n=1}^{\bar{n}} O_n(x) \cos(mwt) + P_n(x) \text{sen}(mwt). \quad (\text{c.70})$$

Donde:

$$O_n(x) = [k_n \cosh(\beta_n x) + \delta_n \text{senh}(\beta_n x)] \text{sen}(\alpha_n x) + [\mu_n \text{senh}(\beta_n x) + \gamma_n \cosh(\beta_n x)] \cos(\alpha_n x) \quad (\text{c.71})$$

$$P_n(x) = [k_n \text{senh}(\beta_n x) + \delta_n \cosh(\beta_n x)] \cos(\alpha_n x) - [\mu_n \cosh(\beta_n x) + \gamma_n \text{senh}(\beta_n x)] \text{sen}(\alpha_n x). \quad (\text{c.72})$$

Para calcular la carga dinámica a cualquier profundidad y tiempo arbitrario se hace uso de la ley de Hooke:

$$F(x,t) = EA \frac{\partial \mu(x,t)}{\partial x}, \quad (\text{c.73})$$

Derivando la ecuación (c.17) con respecto a x:

$$\frac{\partial \mu(x,t)}{\partial x} = \frac{\sigma_o}{2EA} + \sum_{n=1}^{\bar{n}} O_n'(x) \cos(mwt) + P_n'(x) \text{sen}(mwt), \quad (\text{c.74})$$

Derivando (c.18) y haciendo uso de las relaciones (c.14) y (c.9)

$$O_n'(x) = \left[\frac{\tau_n}{EA} \text{senh}(\beta_n x) + (\delta_n \beta_n - \gamma_n \alpha_n) \cosh(\beta_n x) \right] \text{sen}(\alpha_n x) +$$

$$\left[\frac{\sigma_n}{EA} \cosh(\beta_n x) + (\gamma_n \beta_n + \delta_n \alpha_n) \sinh(\beta_n x) \right] \cos(\alpha_n x), \quad (c.75)$$

$$P_n'(x) = \left[\frac{\tau_n}{EA} \cosh(\beta_n x) + (\delta_n \beta_n - \gamma_n \alpha_n) \sinh(\beta_n x) \right] \cos(\alpha_n x) -$$

$$\left[\frac{\sigma_n}{EA} \sinh(\beta_n x) + (\gamma_n \beta_n + \delta_n \alpha_n) \cosh(\beta_n x) \right] \sin(\alpha_n x). \quad (c.76)$$

Sustituyendo la derivada (c.20), en (c.19) queda:

$$F(x,t) = \frac{\sigma_o}{2} + EA \sum_{n=1}^{\tilde{n}} O_n'(x) \cos(n\omega t) + P_n'(x) \sin(n\omega t). \quad (c.77)$$

En la generalización para diferentes diámetros de varillas sólo cambian los coeficientes de Fourier:

$${}_{j+1}\gamma_o = \frac{{}_j\sigma_o x_j}{EA_j} + {}_j\gamma_o. \quad (c.78)$$

$${}_{j+1}\gamma_n = {}_j O_n(x_j). \quad (c.79)$$

$${}_{j+1}\delta_n = P_n(x_j). \quad (c.80)$$

$${}_{j+1}\sigma_o = {}_j\sigma_o. \quad (c.81)$$

$${}_{j+1}\sigma_n = EA_j O_n'(x_j). \quad (c.82)$$

$${}_{j+1}\tau_n = EA_{j_j} P'_n(x_j) \quad . \quad (c.83)$$

$${}_{j+1}k_n = \frac{{}_{j+1}\sigma_n \alpha_n + {}_{j+1}\tau_n \beta_n}{EA_{j+1}(\beta_n^2 + \alpha_n^2)} \quad . \quad (c.84)$$

$${}_{j+1}\mu_n = \frac{{}_{j+1}\sigma_n \beta_n - {}_{j+1}\tau_n \alpha_n}{EA_{j+1}(\beta_n^2 + \alpha_n^2)} \quad . \quad (c.85)$$

Donde. $j-1, 2, 3, \dots, m-1$; $m=N_0$ de tramos de varillas.