



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

"ANÁLISIS DE LA PRESIÓN PARA YACIMIENTOS DE
DOBLE POROSIDAD, MEDIANTE EL
ALGORITMO DE DE HOOQ"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

I N G E N I E R O P E T R O L E R O

P R E S E N T A N :

**APANCO HERNÁNDEZ JOSÉ JUAN
RAMÍREZ NESTOSO KEYLA**

DIRECTOR: DR. RAFAEL RODRÍGUEZ NIETO



MÉXICO, D.F.

2004



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA
DIRECCIÓN
60-I-375

SR. JOSÉ JUAN APANCO HERNÁNDEZ
Presente

En atención a su solicitud, me es grato hacer de su conocimiento el tema que propuso el profesor Dr. Rafael Rodríguez Nieto y que aprobó esta Dirección para que lo desarrolle usted como tesis de su examen profesional de Ingeniero Petrolero:

**ANÁLISIS DE LA PRESIÓN PARA YACIMIENTOS DE DOBLE POROSIDAD, POR
MEDIO DEL ALGORITMO DE DE HOOG**

	RESUMEN
I	INTRODUCCIÓN
II	YACIMIENTOS NATURALMENTE FRACTURADOS
III	REVISIÓN DE LA LITERATURA
IV	PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA
V	ESTABLECIMIENTO DEL MODELO. ALGORITMO DE DE HOOG
VI	APLICACIÓN Y RESULTADOS
VII	CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES
	NOMENCLATURA
	BIBLIOGRAFÍA
	REFERENCIAS

Ruego a usted cumplir con la disposición de la Dirección General de la Administración Escolar en el sentido de que se imprima en lugar visible de cada ejemplar de la tesis el título de ésta.

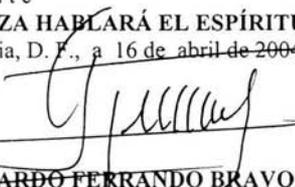
Asimismo, le recuerdo que la Ley de Profesiones estipula que se deberá prestar servicio social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito para sustentar examen profesional.

Atentamente

"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"

Cd. Universitaria, D. F., a 16 de abril de 2004

EL DIRECTOR


M. en C. GERARDO FERRANDO BRAVO

GFB*JAGC*gtg



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA
DIRECCIÓN
60-I-350

SRITA. KEYLA RAMÍREZ NESTOSO

Presente

En atención a su solicitud, me es grato hacer de su conocimiento el tema que propuso el profesor Dr. Rafael Rodríguez Nieto y que aprobó esta Dirección para que lo desarrolle usted como tesis de su examen profesional de Ingeniero Petrolero:

**ANÁLISIS DE LA PRESIÓN PARA YACIMIENTOS DE DOBLE POROSIDAD, POR
MEDIO DEL ALGORITMO DE DE HOOG**

- RESUMEN
- I INTRODUCCIÓN
- II YACIMIENTOS NATURALMENTE FRACTURADOS
- III REVISIÓN DE LA LITERATURA
- IV PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA
- V ESTABLECIMIENTO DEL MODELO. ALGORITMO DE DE HOOG
- VI APLICACIÓN Y RESULTADOS
- VII CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES
- NOMENCLATURA
- BIBLIOGRAFÍA
- REFERENCIAS

Ruego a usted cumplir con la disposición de la Dirección General de la Administración Escolar en el sentido de que se imprima en lugar visible de cada ejemplar de la tesis el título de ésta.

Asimismo, le recuerdo que la Ley de Profesiones estipula que se deberá prestar servicio social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito para sustentar examen profesional.

Atentamente

“POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU”

Cd. Universitaria, D.F., a 16 de abril de 2004
EL DIRECTOR

M. en C. GERARDO FERRANDO BRAVO

GFB*JAGC*gtg

**FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE INGENIERÍA EN CIENCIAS DE LA TIERRA
DEPARTAMENTO DE EXPLOTACIÓN DEL PETRÓLEO**

**ANÁLISIS DE LA PRESIÓN PARA YACIMIENTOS DE
DOBLE POROSIDAD MEDIANTE EL ALGORITMO DE
DE HOOQ**

DIRECTOR: DR. RAFAEL RODRÍGUEZ NIETO

JURADO:

Pte. : Ing. MANUEL VILLAMAR VIGUERAS

Vocal: Dr. RAFAEL RODRÍGUEZ NIETO

Srio.: Ing. JAVIER ARELLANO GIL

1er. Sup.: Ing. BLANCA M. ARROYO VENTURA

2do. Sup.: M.I. MARTÍN TERRAZAS ROMERO



Blanca M. Arroyo V.

*A la UeNAM, por aceptarme y a la Facultad de
Ingeniería por crecer en ella...*

A mamá, por su amor, comprensión y espera. . .

A papá(+), porque siempre estarás en mi corazón. . .

A Marcela, por tu ayuda incondicional. . .

A Cristián, por tu cariño. . .

A Elizabeth, por su apoyo. . .

A Gilberto, mi hermano por siempre. . .

*Al Dr. Rafael Rodríguez N., por su tiempo, disposición,
asesoramiento y dirección en el desarrollo de este trabajo. . .*

¡GRACIAS!

José Juan

Con toda mi gratitud

Primeramente a un Dios bondadoso, por darme la oportunidad de vivir y progresar en esta tierra.

A mis padres, Bertha y José, por permitirme y sobre todo, apoyarme para que yo tuviera una generosa educación, aunque esto implicara muchos sacrificios de su parte, gracias especialmente a ti mamita, por ser un gran ejemplo de lucha y constancia para mí, y por que me has demostrado que lo mejor de esta vida, solo se consigue trabajando.

A mis hermanos, Silvia y Roberto, por que esta vida no hubiera sido tan maravillosa si no estuvieran conmigo, recuerden que siempre serán mis hermanos favoritos.

A doña Silveria[†] y don Bartolo[†], gracias por todos los cuidados que me brindaron en mi niñez, y por haberme enseñado que al final de esta vida, lo que no debe morir es nuestra fe.

Gracias a toooda mi gran familia por que su ejemplo constante ha sido muy importante para mí.

A ti Miguel, por tu amor, tu apoyo y por estar conmigo en las buenas, en las malas y en las peores.

A todos los amigos que conocí en la F.I., especialmente a ustedes, los que fueron amigos y compañeros de clases, gracias por que me dieron recuerdos que espero nunca olvidar.

Un agradecimiento muy especial al Dr. Rodríguez Nieto por ser, más que un director de tesis, un amigo.

Y por último y no por eso menos importante, a la UNAM, por brindarme la mejor educación que pude haber recibido.

Keyla

**ANÁLISIS DE LA PRESIÓN PARA YACIMIENTOS DE
DOBLE POROSIDAD, MEDIANTE EL
ALGORITMO DE DE HOOG**

	PÁGINA
LISTA DE FIGURAS	<i>i</i>
LISTA DE TABLAS	<i>iii</i>
RESUMEN	<i>iv</i>
CAPÍTULO 1 INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO 2 YACIMIENTOS NATURALMENTE FRACTURADOS	3
2.1 <i>Introducción</i>	3
2.2 <i>Conceptos Fundamentales</i>	6
- Porosidad	6
- Permeabilidad	9
- Coeficiente de Almacenamiento (ω)	9
- Coeficiente de Flujo Matriz-Fractura (λ)	10
- Difusividad Hidráulica de la Matriz (η)	11
- Función Densidad de Probabilidad	12
2.3 <i>Análisis de Periodos de Flujo</i>	13
- Primer Período: Flujo de Fracturas	13
- Segundo Período: Zona de Transición	15
- Tercer Período: Flujo Matriz-Fracturas	19
2.4 <i>Análisis Convencional</i>	21
2.5 <i>Análisis Mediante Curvas Tipo</i>	30
2.6 <i>Función Derivada</i>	35
CAPÍTULO 3 REVISIÓN DE LA LITERATURA	43
3.1 <i>Antecedentes</i>	43
3.2 <i>Estado Actual de las Investigaciones</i>	50

3.3	Obtención de la Transformada de Laplace	51
CAPÍTULO 4	PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	57
4.1	<i>Objetivo</i>	57
4.2	<i>Alcances del Trabajo</i>	58
4.3	<i>Inversión Numérica de la Transformada de Laplace para YNF</i>	61
CAPÍTULO 5	ESTABLECIMIENTO DEL MODELO.	
	ALGORITMO DE DE HOOG	64
5.1	<i>Algoritmo de De Hoog</i>	64
5.2	<i>Aplicación y Comparación de Resultados</i>	66
5.3	<i>Aplicación de la Transformada de Laplace a Problemas de Flujo en Yacimientos</i>	74
5.4	<i>Análisis y Conclusiones</i>	78
CAPÍTULO 6	APLICACIÓN Y RESULTADOS PARA YNF	82
6.1	<i>Introducción</i>	82
6.2	<i>Resultados Obtenidos para un Yacimiento Homogéneo</i>	86
6.3	<i>Resultados Obtenidos Considerando un Solo Tamaño de Bloques</i>	88
6.4	<i>Resultados Obtenidos Considerando Variabilidad de Tamaño de Bloques</i>	89
CAPÍTULO 7	CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	91
	NOMENCLATURA	95
	BIBLIOGRAFÍA	97
	REFERENCIAS	98

LISTA DE FIGURAS:

FIGURA	PÁGINA	
2.1	Períodos de flujo en un YNF.	16
2.2	Gráfica log-log de p_D vs t_D/C_D , para flujos transitorio y pseudoestacionario.	18
2.3	Influencia de ω , para el modelo pseudoestacionario.	19
2.4	Prueba de decremento de presión.	23
2.5	Prueba de incremento de presión.	24
2.6	Presión medida en el fondo del pozo, una vez finalizado el efecto de almacenamiento.	27
2.7	Método MDH.	28
2.8	Gráfica de Δp_{MDH} vs Δt	29
2.9	Curvas tipo para un pozo con almacenamiento y daño, en yacimiento de doble porosidad, flujo interporoso en régimen pseudoestacionario.	39
2.10	Curvas tipo para un pozo con almacenamiento y daño en un yacimiento de doble porosidad, flujo interporoso en régimen transitorio.	40
2.11	Derivadas de curvas tipo para flujo interporoso en régimen pseudoestacionario.	41
2.12	Derivadas de curvas tipo para flujo interporoso en régimen transitorio.	42
5.1	Soluciones analítica y numérica de $F(s) = 1/s^2$ correspondiente a la función identidad, por medio del algoritmo de De Hoog	68
5.2	Inversión de la función $F(s) = 1/s^4$, por medio de los algoritmos de Stehfest, Crump y De Hoog, así como la solución analítica de la función.	70
5.3	Soluciones analítica y numérica a la ecuación $f(t) = \text{sen}(t)$, por medio de los algoritmos de Stehfest, Crump y De Hoog	72
5.4	Porcentajes de error obtenidos de los resultados mostrados por los algoritmos de Stehfest y Crump (Solares ³¹) y los correspondientes a De Hoog.	73

5.5	Porcentajes de error obtenidos de los resultados mostrados por Everdingen (Tabla I de esta referencia) y los correspondientes a De Hoog.	78
6.1	Comparación de los resultados obtenidos por medio del algoritmo de De Hoog, para los tres tipos de yacimientos planteados.	90

LISTA DE TABLAS:

TABLA	PÁGINA
5.1 Comparación de resultados analíticos para la función identidad, con los correspondientes al algoritmo de De Hoog, para la función $F(s) = 1/s^2$.	67
5.2 Comparación de resultados para $F(s) = 1/s^4$, con los correspondientes a la solución analítica.	69
5.3 Comparación de resultados para $F(s) = 1/(s^2 + 1)$, con los correspondientes a la solución analítica.	71
5.4 Comparación de resultados de la Tabla I de Everdingen ³⁶ , con los obtenidos por el algoritmo de De Hoog para el caso de gasto constante.	77
5.5 Comparación de resultados de la Tabla I de Everdingen ³⁶ , con los obtenidos por el algoritmo de De Hoog para el caso de presión constante.	79
6.1 Comparación de resultados de p_{wf} , obtenidos por medio del algoritmo de De Hoog y Cols, y los obtenidos de la tesis de Rodríguez ⁴⁹ (Stehfest) y del trabajo de Agarwal y Cols ⁴ (Tabla 3).	87
6.2 Comparación del porcentaje de error entre los resultados obtenidos por los métodos de Stehfest y De Hoog.	87
6.3 Comparación de resultados de p_{wf} , obtenidos por medio del algoritmo de De Hoog y Cols, y los obtenidos de la tesis de Rodríguez ⁴⁹ (Stehfest) y del trabajo de Cinco y Cols ¹⁹ (Fig. 6 de esta referencia).	88
6.4 Comparación de resultados de p_{wf} , obtenidos por medio del algoritmo de De Hoog y Cols, y los obtenidos de la tesis de Rodríguez ⁴⁹ (Stehfest) y del trabajo de Cinco y Cols ¹⁹ (Fig. 15 de esta referencia).	89

RESUMEN

Hoy en día a nivel nacional, gran parte de las formaciones productoras de hidrocarburos del Cretácico se encuentran en Yacimientos Naturalmente Fracturados, de aquí que surja la necesidad del desarrollo de modelos matemáticos que representen de manera adecuada el sistema en el subsuelo y que sean lo más cercanos a la realidad, para establecer una óptima explotación de dichas formaciones; a la vez se incrementará la recuperación final de los hidrocarburos a bajos costos, con seguridad y preservando el medio ambiente.

Se realizó una revisión de la literatura sobre Yacimientos Naturalmente Fracturados, desde los modelos más simples que dieron origen al desarrollo de las investigaciones sobre Yacimientos de Doble Porosidad, hasta llegar a los modelos más actuales, incluyendo el modelo desarrollado por Rodríguez y Cols., que considera la variabilidad continua del tamaño de bloques de matriz, las ecuaciones de flujo y los parámetros involucrados.

Para tener un conocimiento más profundo de un Yacimiento Naturalmente Fracturado, se parte de conceptos fundamentales manejados en la Ingeniería de Yacimientos, desde los más básicos hasta los más desarrollados recientemente, incluyendo una revisión al análisis de pruebas de variación de presión mediante curvas tipo. Posteriormente se cubre el tema referente a la función derivada para dichos sistemas .

El modelo considerado para el objetivo del presente trabajo, toma en cuenta soluciones de ecuaciones de flujo en términos de la Transformada de Laplace , que en la Ingeniería de Yacimientos es una herramienta de uso frecuente, debido a la necesidad de resolver ecuaciones diferenciales con

valores iniciales y de frontera; para la solución en el espacio real, se requiere de un método o invertidor numérico como herramienta idónea.

Se hace uso de un algoritmo, en el que hasta ahora no se han encontrado aplicaciones en la Ingeniería de Yacimientos, sobre todo en pruebas de variación de presión. Los resultados se comparan con soluciones obtenidas de funciones probadas en el trabajo desarrollado por Solares, posteriormente se prueba el caso de Yacimientos Naturalmente Fracturados, en el trabajo desarrollado por Rodríguez y Cols.

Por lo anterior, de la comparación de resultados de ambas fuentes y los obtenidos por el invertidor numérico, se considera la necesidad de utilizar dicho algoritmo como una nueva opción para la solución del modelo establecido. Se observa que las soluciones obtenidas mediante la aplicación del método propuesto, son de gran confiabilidad, mostrando en algunas ocasiones porcentajes de error muy pequeños (cerca de cero) en comparación con las soluciones obtenidas por otros métodos de inversión que se consideran en el trabajo de Solares.

CAPÍTULO 1 INTRODUCCIÓN

Actualmente, una parte importante, tanto de la producción de hidrocarburos, como de las reservas a niveles mundial y nacional, se encuentran en yacimientos naturalmente fracturados^{13,26*} (YNF), también conocidos como yacimientos de doble porosidad. En México, los conceptos correspondientes son alrededor del 90 y 70%, respectivamente.

Los yacimientos de este tipo se componen de bloques de matriz y fracturas, en los que en forma general, el flujo de fluidos se realiza de los bloques, que poseen baja permeabilidad, a las fracturas que son canales altamente conductivos²⁸.

En este tipo de yacimientos, la respuesta de la presión está constituida por tres períodos de flujo^{1,19,29,28}: el primero tiene un comportamiento de yacimiento homogéneo y corresponde sólo al sistema de fracturas, ya que a tiempos pequeños los bloques de matriz no contribuyen a la producción, debido al contraste de permeabilidades entre ambos sistemas de porosidad; el segundo período, llamado zona de transición, describe el flujo de fluidos de los bloques de la matriz hacia el sistema de fracturas y, finalmente, el tercer período, que inicia cuando la variación de presiones entre ambos sistemas es similar, presentándose nuevamente el comportamiento de un yacimiento homogéneo (debido a la expansión total del sistema matriz-fracturas).

Por diversos estudios,^{19,21,26} se ha mostrado la no uniformidad en la intensidad de fracturamiento en muchos yacimientos, que da lugar a una variación en el tamaño de los bloques.

* Referencias al final.

Debido a lo anterior, es conveniente desarrollar un modelo que considere la variación del tamaño múltiple de bloques y la contribución de fluidos al sistema de fracturas, que refleje de manera adecuada la realidad en este caso.

Diversos autores han estudiado el comportamiento de estos yacimientos, mediante pruebas de variación de presión, pero en la mayoría de los trabajos publicados,^{1-3,7,16,17,24,27} se supone un solo tamaño de los bloques.

Cinco, Samaniego y Kuchuk²⁰, fueron los primeros en presentar un trabajo en el que se considera el tamaño múltiple de los bloques de matriz. Por otra parte, Rodríguez⁴⁹ desarrolla en su tesis doctoral, un modelo para obtener la respuesta de la presión tomando en cuenta la variabilidad del tamaño de los bloques, tanto para distribuciones discretas como para distribuciones continuas.

El propósito de estas tesis es realizar un análisis comparativo entre los resultados obtenidos por Rodríguez, de la presión adimensional p_wD a partir de la solución del problema en el espacio de Laplace, aplicando el algoritmo de Stehfest³⁰ para realizar la antitransformada, y los resultados obtenidos utilizando el algoritmo de De Hoog y Cols.³², **que para nuestro conocimiento, no ha sido aplicado en el análisis de pruebas de variación de presión.**

El programa se corrió en MATLAB, que es un sistema interactivo y con lenguaje de programación para cómputo científico y técnico, cuyo elemento básico es el uso de matrices, además de que es una potente herramienta de cálculo matemático que ofrece una amplia capacidad para la generación de gráficas. Su uso se debe a que se dispone de una subrutina (INVLAP), que se obtuvo a través de búsqueda electrónica (internet), y que nos permite realizar la inversión numérica de la Transformada de Laplace al espacio real con una excelente aproximación al comparar los resultados con las soluciones analíticas de funciones disponibles.

CAPÍTULO 2 YACIMIENTOS NATURALMENTE FRACTURADOS

2.1 Introducción

Un yacimiento corresponde con la porción de una trampa geológica que contiene hidrocarburos, la cual se comporta como un sistema interconectado hidráulicamente. Los hidrocarburos ocupan los poros o espacios de la roca almacenadora y están a alta presión y alta temperatura, debido a la profundidad en la que se encuentra el yacimiento^{50*}.

Un yacimiento naturalmente fracturado (YNF)⁴¹, es un sistema formado por poros intercomunicados y canales, donde los poros forman el sistema de matriz y los canales el sistema de fracturas, extendiéndose a través del yacimiento. El sistema de fracturas podrá desarrollar una superficie de contacto considerable con el sistema de matriz y así drenar fácilmente los fluidos contenidos hacia los pozos; por lo anterior, un yacimiento de este tipo puede identificarse en la etapa inicial de producción, pero su confirmación sólo es posible después de un período relativamente largo de su vida productiva¹.

Los yacimientos naturalmente fracturados pueden clasificarse⁴¹ en dos grandes grupos, basados en la contribución de la matriz y de las fracturas a las reservas recuperables:

- 1) Las reservas recuperables están principalmente en las fracturas. Este grupo de yacimientos fracturados tiene muy baja porosidad y/o permeabilidad en la matriz.
- 2) Las reservas recuperables están principalmente en los bloques de matriz. En este grupo, las fracturas poseen una gran superficie de

* Referencias al final.

contacto con los bloques de matriz, aumentando la comunicación entre los mismos y el pozo, elevando así la contribución de las reservas totales.

Las características principales de los Yacimientos Naturalmente Fracturados son:

1. Pérdida de lodo: en la etapa de perforación se pueden detectar zonas ladronas.
2. Alto índice de productividad: el límite inferior de productividad de un pozo es de aproximadamente 500 (bl/día-lb/pg²) o mayor, mientras que una productividad de 1000 es poco usual. La principal contribución de flujo al pozo es a través de las fracturas (probablemente más del 95% del flujo total).
3. Gradiente de presión: el gradiente de presión horizontal en el yacimiento y en la cercanía al pozo es muy pequeño, debido a la alta permeabilidad del sistema de fracturas.
4. Composición uniforme de fluidos: debida al movimiento de convección de los fluidos en la fractura.
5. Nivel agua-aceite uniforme: el nivel agua-aceite puede mantenerse uniforme a través del yacimiento o al menos en una región del mismo cuando se tiene un yacimiento grande.
6. Relación gas-aceite: disminuye durante la historia de producción del yacimiento, ya que el gas producido por la roca fluye al casquete de gas a través de las fracturas.
7. La relación agua-aceite es principalmente una función de gasto de producción.
8. Existe una pequeña diferencia de presión entre la presión de las fracturas y la presión de la matriz.

Las fracturas naturales que se encuentran en los yacimientos, fueron formadas por esfuerzos internos sobre las formaciones, debidos a movimientos tectónicos de la corteza terrestre durante cierta etapa geológica.

Cuando los depósitos están sometidos a esfuerzos demasiado grandes, tienden a plegarse y si los esfuerzos continúan, las rocas ya no son capaces de plegarse, por lo que se originan las fracturas. El fracturamiento puede originarse por esfuerzos verticales o por compresión. Este tipo de fracturas puede encontrarse en formaciones profundas.

La geometría y distribución de los bloques de matriz, es uno de los principales factores a considerar en la evaluación de un yacimiento fracturado. Por lo anterior, existen diversos métodos para la determinación de estos factores:

1. Estudios de afloramientos: es posible dar una estimación acerca del tamaño de bloques y la orientación de la fractura si se dispone de suficiente información geológica y de registros geofísicos para una adecuada interpretación.
2. Medidores de flujo: al realizar un estudio de medición de flujo en un pozo, con o sin TR, la distancia entre las fracturas puede determinarse, así como la distribución relativa de cada una de las fracturas por medio del registro de los gastos. De esta información se puede determinar el tamaño relativo de la fractura y de los bloques.
3. Gradiomanómetro: herramienta que mide el gradiente de presión en el pozo, por medio de la diferencia de presión entre dos puntos, usando un dispositivo especial sensible a la presión. La localización de las fracturas puede detectarse debido a un desequilibrio en la presión causada por el incremento en el gasto que proporcionan las fracturas.

4. Resonancia magnética: se obtiene con un equipo que opera de manera similar al utilizado en el diagnóstico médico. La limitación del equipo es la presencia del lodo en el pozo.
5. Trazador: un trazador radioactivo es inyectado a la formación, seguido por la inyección de líquido sin trazador, utilizando esferas para limitar el volumen del trazador en las fracturas. El pozo es puesto a producción y la localización de las fracturas, así como el volumen de las mismas puede ser medido por un detector radiactivo.
6. Interpretación de registros: en base a datos disponibles de registros de pozos que se hayan realizado, ya sea durante la perforación o en la etapa de producción, puede estimarse la distribución del tamaño de bloques que conforman el yacimiento, discontinuidades del mismo, ya sea por litología o debido a fracturas, además de la saturación de agua congénita, posible migración de fluidos, etc..
7. Difusión: cuando se tiene una disminución en la presión de burbujeo, debido a la convección de los fluidos en los bloques de matriz, el tamaño promedio de los bloques puede estimarse dentro de la columna de aceite, conociendo con anterioridad el coeficiente de difusión entre el equilibrio gas-aceite.

2.2 Conceptos Fundamentales

- ***Porosidad***⁴²

Los sistemas de fracturas y de bloques de matriz, muestran porosidades completamente diferentes. Los espacios ocupados por las redes de poros, están definidos por sus volúmenes relativos:

Volumen relativo de fracturas $V_{rf} = \frac{\text{volumen total de fracturas}}{\text{volumen total de roca}}, \quad (2.1)$

Volumen relativo de roca $V_{rm} = \frac{\text{volumen total de la matriz}}{\text{volumen total de roca}}, \quad (2.2)$

de las cuales se tiene que: $V_{rf} + V_{rm} = 1 ; \quad (2.3)$

además:

$$\phi_f = \frac{\text{volumen de fracturas}}{\text{volumen de roca}}, \quad (2.4)$$

$$\phi_m = \frac{\text{volumen poroso en matriz}}{\text{volumen total de matriz}}. \quad (2.5)$$

En términos del volumen de muestra, se tiene:

Fractura $\phi_f V_{rf} = \frac{V_{pf}}{V_R}$

Matriz $\phi_m V_{rm} = \frac{V_{pm}}{V_R}$

La porosidad de la fractura, ϕ_f , es generalmente cercana a la unidad, pero su volumen relativo es muy pequeño; esto significa que en términos del volumen total de la roca, la porosidad de la fractura es muy pequeña (menor al 1%).

La compresibilidad total de cada sistema es igual a:

$$c_{tm} = c_o S_o + c_w S_w + c_{pm} \quad (2.6)$$

$$c_{if} = c_o + c_{pf}, \quad (2.7)$$

de las cuales, c_{pf} y c_{pm} , son compresibilidades de las fracturas y de la matriz, respectivamente.

La capacidad para cada sistema está definida por:

$$C_m = \phi_m V_{rm} c_{tm} \quad , \text{para la matriz} \quad (2.8)$$

con su almacenamiento adimensional:

$$C_{Dm} = \frac{\beta C}{C_m h r_w^2} \quad ; \quad (2.9)$$

y para las fracturas:

$$C_f = \phi_f V_{rf} c_{tf} \quad , \quad (2.10)$$

con su almacenamiento adimensional:

$$C_{Df} = \frac{\beta C}{C_f h r_w^2} \quad . \quad (2.11)$$

Para el yacimiento, tomado como un todo, la capacidad total es la suma de la capacidad de fracturas y la capacidad de la matriz:

$$C_{f+m} = \phi_f V_f c_{tf} + \phi_m V_m c_{tm} \quad , \quad (2.12)$$

$$C_{D_{f+m}} = \frac{\beta C}{C_{f+m} h r_w^2} \quad . \quad (2.13)$$

La porosidad de la fractura es generalmente insignificante, comparada con la porosidad de la matriz; sin embargo, no es común encontrar capacidades del mismo orden de magnitud. Esto es debido al alto grado de compresibilidad de las fracturas, c_{tf} .

La compresibilidad de las fracturas, C_{Df} , es generalmente de diez a cien veces mayor a la correspondiente a la matriz, C_{pm} .

- **Permeabilidad⁴²**

La permeabilidad de las fracturas es mucho más alta que la permeabilidad de la matriz, por lo que el flujo de fluidos hacia los pozos es a través de las mismas. Su valor puede determinarse mediante pruebas de pozos.

Del análisis de una prueba de variación de presión, no se puede determinar la permeabilidad del yacimiento de forma directa, sino que sólo se obtiene el producto de la permeabilidad por el espesor de la formación, por lo que es necesario conocer el mismo para determinar la permeabilidad del yacimiento.

En el caso de un yacimiento fracturado, es necesario conocer el espesor acumulativo de las fracturas, para determinar la permeabilidad intrínseca de las mismas.

- **Coficiente de almacenamiento (ω)**

Warren y Root¹ mostraron que uno de los parámetros que controlan el comportamiento de un sistema de doble porosidad es “ ω ”, conocido como el coeficiente adimensional de almacenamiento⁴:

$$\omega^{9,18,24} = \frac{(C_D e^{2s})_{f+m}}{(C_D e^{2s})_f}, \quad (2.14)$$

por lo que:

$$\omega^{18,24} = \frac{\phi V_{rf} c_{if}}{(\phi V_{rf} c_{if}) + (\phi V_{rm} c_{im})}, \quad (2.15)$$

de la cual, el almacenamiento de fracturas^{13,19}:

$$\omega = \frac{(\phi c_i)_f}{(\phi c_i)_m + (\phi c_i)_f}, \quad (2.16)$$

almacenamiento de la matriz:

$$\omega_m = \frac{\phi_m c_{im}}{\phi_m c_{im} + \phi_f c_{if}}, \quad (2.17)$$

de lo anterior se tiene: $\omega_f = 1 - \omega_m$;

con $\omega = 1$, el sistema se comporta como un yacimiento homogéneo.

En yacimientos bajosaturados, la Ec. 2.17 calcula la cantidad de aceite producido por las fracturas, expresado como una fracción de la producción total. Los valores típicos de “ ω ” están entre 0.001 y 0.5; en otras palabras, el coeficiente de almacenamiento define, en porcentaje, la contribución del sistema de fracturas con respecto al almacenamiento del yacimiento, por lo que relaciona los dos regímenes de flujo: el de las fracturas y el del sistema total.

- **Coeficiente de flujo matriz-fracturas (λ)**⁴²

Es otro de los parámetros introducidos por Warren y Root¹, que controla el comportamiento de un sistema de doble porosidad y que

considera las permeabilidades de la matriz y de las fracturas. La relación con la cual los fluidos son intercambiados entre la matriz y el sistema de

fracturas, depende de dos factores: la geometría de los bloques de matriz y la relación de permeabilidades entre la matriz y fracturas^{19,24}:

$$\lambda = \alpha r_w^2 \frac{k_m}{k_f}, \quad (2.18)$$

en la cual, α , es un factor de forma, que caracteriza la influencia de la geometría de bloques de matriz (tamaño y forma) sobre el intercambio matriz-fractura; a mayores valores de λ , se facilita más el intercambio de fluidos en el sistema matriz-fracturas, debido a altos valores de k_m , o a valores grandes de α (pequeños valores de r_m , o “ n ” grandes):

$$\alpha = \frac{n(n+2)}{r_w^2} \quad (2.19)$$

El rango más común para valores de λ , están entre 10^{-4} y 10^{-8} .

El coeficiente de flujo indica cuando inicia el régimen de transición y es una función de la relación de permeabilidades entre los dos medios y la geometría de los bloques de matriz.

- **Difusividad hidráulica de la matriz (η)**

$$\eta = \frac{k_{mi}(\phi c_i)_i r_w^2}{k_{fb}(\phi c_i)_{mi} h_{mi}^2}, \quad (2.20)$$

Es el parámetro que considera permeabilidades, porosidades y compresibilidades de bloques y fracturas, así como también el tamaño múltiple de bloques, y en donde :

$$(\phi c_i)_i = \phi_{fb} c_{if} + \phi_{mh} c_{im} \quad (2.21)$$

• **Función Densidad de Probabilidad (FDP)**²⁶

La predicción de la respuesta de presión de un yacimiento, requiere que el tipo de distribución del tamaño de bloques de matriz, sea supuesto o conocido.

Cuando se selecciona una FDP, la intensidad de fracturamiento puede inferirse de los datos de presión registrados durante el estudio. Dos tipos de FDP se utilizan para representar la variabilidad del tamaño de bloques de matriz en un YNF: la exponencial y la lineal.

La distribución implica la intensidad de fracturamiento, y a medida que este se incrementa, el tamaño de los bloques disminuye y la FDP, representada por $p(h)$, tiende al tamaño pequeño de bloques. Cuando el fracturamiento se hace uniforme, $F_h \rightarrow 1$ y $p(h)$ disminuye. Cuando el fracturamiento no es uniforme, $F_h \rightarrow 0$, y $p(h)$ aumenta.

La FDP exponencial está dada por:

$$p(h_D) = \frac{a(e^{-ah_D})}{e^{-ah_D} - e^{-a}} \quad (2.22)$$

en la cual " a " es la constante exponencial.

La FDP lineal está determinada por:

$$p(h_D) = \frac{mh_D + b}{0.5m(1 - F_h^2) + b(1 - F_h)} \quad (2.23)$$

en la cual, " m " es la pendiente y " b ", la ordenada al origen en una gráfica de $p(h)$ vs. h_D .

Una FDP debe ser positiva y tener un área igual a la unidad. Cuando $m=0$ (FDP lineal) o cuando $a=0$ (FDP exponencial), ambas se reducen a la distribución rectangular:

$$p(h_D) = \frac{1}{1 - F_h} \quad (2.24)$$

y cuando m ó $a \rightarrow 0$, la distribución se reduce a :

$$P(h_D) = \delta(h_D - 1) = \begin{cases} 0 & h_D \neq 1 \\ \infty & h_D = 1 \end{cases}$$

La distribución Delta Dirac, describe fracturas perfectamente ordenadas, como en el modelo de Warren y Root¹. La distribución rectangular, sin embargo, representa fracturas que están desordenadas con un tamaño continuo de bloques de matriz, teniendo la misma probabilidad de presentar tamaño mínimo, h_{\min} , a tener el tamaño máximo, h_{\max} .

2.3 Análisis de Períodos de Flujo⁴²

Cuando un yacimiento naturalmente fracturado es puesto a producción, se presentan tres períodos de flujo, uno después de otro, con características especiales cada uno de ellos:

- Primer Período: Flujo de las Fracturas

Al inicio de la producción, las fracturas aportan fluidos al pozo, debido a su alta permeabilidad: durante este período, el yacimiento fracturado se comporta como un yacimiento homogéneo, con una k_f y una C_f .

Cinco y Cols.¹⁹, en su modelo desarrollado, determinan que para pequeños valores de t_D , la contribución de los bloques de matriz es insignificante y el fluido producido se debe principalmente a la expansión del

mismo en la red de fracturas. Bajo esta condición consideran que el daño tiende a infinito y la transformada de la presión adimensional es:

$$p_{FD} = \frac{K_v \left(r_D s^{1/2} \omega^{1/2} \right)}{s^{1/2} \omega K_1 \left(s^{1/2} \omega^{1/2} \right)}, \quad (2.25)$$

similar a la solución para flujo radial en un sistema homogéneo; esto es, si se consideran grandes valores de r_D :

$$p_D(r_D, \omega, t_D) = \frac{1}{2} E_i \left(\frac{r_D^2}{4 \left(\frac{t_D}{\omega} \right)} \right). \quad (2.26)$$

La caída de presión en el pozo, para valores prácticos de t_D es:

$$p_{wD}(\omega, t_D) = \frac{1}{2} \left(\ln \left(\frac{t_D}{\omega} \right) + 0.80907 \right), \quad (2.27)$$

ecuación que describe el comportamiento de la recta en una gráfica semilog. Las Ecs. 2.26 y 2.27 determinan el comportamiento de presión en el período de flujo dominado por la red de fracturas.

Curvas Tipo.

Las variaciones de presión durante este período de flujo, pueden describirse por medio de curvas tipo para yacimiento homogéneo, aunque la producción de fluidos se debe principalmente al aporte de las fracturas:

$$C_D e^{2s} = C_{Df} e^{2s}. \quad (2.28)$$

Análisis Convencional

Si el almacenamiento del pozo termina en el inicio del período de transición, el flujo hacia las fracturas corresponde a la recta semilog con la ecuación:

$$p_i - p_{wf} = \frac{\delta q B \mu}{h_f} \left(\log t + \log \frac{k_f}{c_f \mu r_w^2} - \beta + 0.87S \right), \quad (2.29)$$

en la cual :

$$\delta = 162.6 \quad \beta = 3.23 \quad \text{en unidades prácticas.}$$

Derivada

La estabilización a un valor de 0.5 de la derivada de la presión adimensional, corresponde a la primera recta semilog, aunque casi nunca se observa. El efecto de almacenamiento es en ocasiones muy grande como para permitir la observación.

- Segundo Período: Zona de Transición

En este período, la matriz de roca inicia su contribución a la producción, aportando fluidos al sistema de fracturas.

Un análisis del agotamiento de aportación de los bloques de matriz en un sistema fracturado, muestra que después de un período de flujo transitorio, se establece en los bloques de matriz un régimen pseudoestacionario.

En la literatura sobre YNF, se proponen dos aproximaciones para describir el flujo matriz-fractura:

1. El modelo de Warren y Root¹, que considera un flujo interporoso bajo régimen pseudoestacionario, y
2. El modelo propuesto por De Swaan²⁹, que supone un flujo bajo régimen transitorio.

El efecto de almacenamiento del pozo puede ocultar el período de transición; sin embargo, cuando el período de transición es visible, es caracterizado por la declinación típica de la derivada:

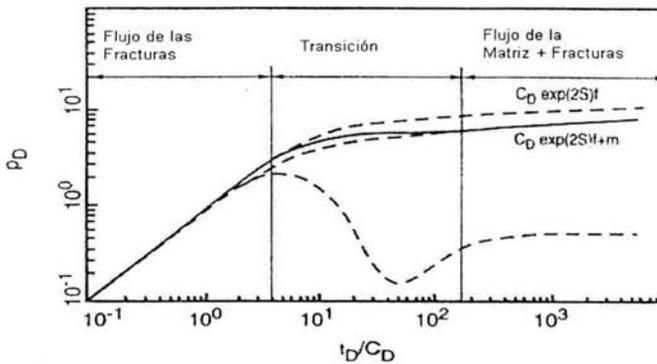


Fig. 2.1 Períodos de flujo en un YNF.

La posición y la amplitud de la declinación de la curva, dependen de la facilidad del flujo matriz-fractura (λ), y del coeficiente de almacenamiento (ω).

Influencia del parámetro λ : intercambio matriz-fractura.

El flujo matriz-fractura es caracterizado distintamente, dependiendo del modelo utilizado para describirlo.

-Modelo pseudoestacionario¹⁸

Otro tipo de modelo de doble porosidad, considerado por De Swaan, que hace uso de las curvas tipo en términos de las curvas componentes¹⁶, la familia de curvas β^s , que son semejantes a las curvas $C_D e^{2s}$ para un medio homogéneo.

El flujo matriz-fractura es caracterizado por el parámetro λ :

$$\lambda = \alpha r_w^2 \frac{k_m}{k_f}, \quad (2.30)$$

o por el parámetro λe^{2s} , cuando se utiliza el radio efectivo del pozo:

$$r_w' = r_w e^{-s}.$$

-Modelo para flujo transitorio¹⁸

En este modelo, el flujo no sólo depende de λ , sino también de la geometría de los bloques de matriz, medidos por el parámetro β^s :

$$\beta^s = a \frac{(C_D e^{2s})_{f+m}}{\lambda e^{-2s}}, \quad (2.31)$$

en donde " a " depende de la geometría de los bloques de matriz. Para estratos $a=1.8914$ y para bloques cúbicos o esféricos, $a=1.0508$.

En una gráfica log-log de p_D vs t_D/C_D , para el flujo transitorio, se tiene que casi no existe diferencia entre ambos valores de "a", para el mismo valor de λ . En la misma gráfica se puede ver que existe una amplia diferencia entre los modelos pseudoestacionario y transitorio:

- La curvatura de la derivada es más acentuada con el modelo pseudoestacionario
- Con el modelo transitorio, la derivada se estabiliza a un valor de 0.25, es decir, la mitad del valor observado durante el flujo matriz-fractura.

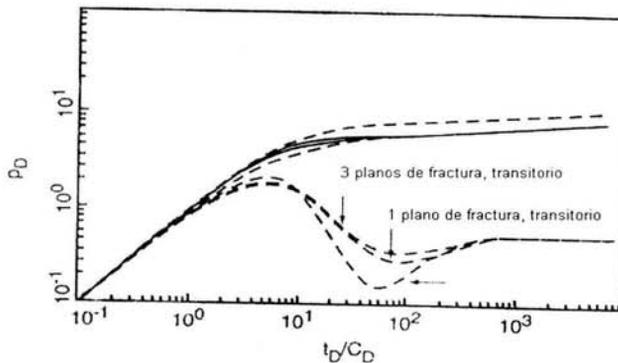


Fig. 2.2 Gráfica log-log de p_D vs t_D/C_D , para flujos transitorio y pseudoestacionario.

Influencia del parámetro ω

El coeficiente de almacenamiento es el parámetro que considera el contraste de capacidades existentes entre las fracturas y el sistema total matriz-fracturas (yacimientos):

$$\omega = \frac{(C_D e^{2S})_{f+m}}{(C_D e^{2S})_f} \quad (2.32)$$

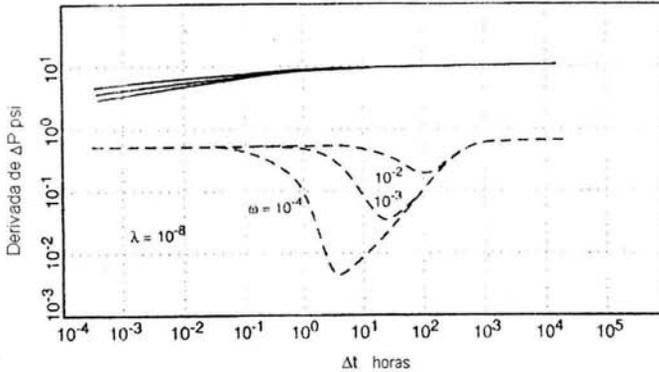


Fig. 2.3 Influencia de ω , para el modelo pseudoestacionario.

En la Figura 2.3 se muestra la influencia de ω en una curva tipo y su derivada para los modelos de flujo matriz-fracturas. El almacenamiento del pozo es despreciable a fin de destacar el efecto de parámetro ω .

Con el modelo para régimen transitorio, la declinación de la curva derivada se estabiliza a un valor de 0.25. Con el modelo pseudoestacionario, a menor valor de ω , más acentuada es la declinación de la curva.

- Tercer Período: Flujo matriz-fracturas¹⁸

Una vez que el período de transición finaliza, el yacimiento fracturado se comporta como un yacimiento homogéneo.

Curvas tipo

Las variaciones de presión durante este flujo, están descritas por curvas tipo para un yacimiento homogéneo, correspondientes a $C_D e^{2s} = C_{Df,m} e^{2s}$

Análisis Convencional

El flujo total matriz-fractura, corresponde a una recta semilog paralela a la que se observa al inicio de la producción:

$$p_i - p_f = \frac{\delta q B \mu}{k_f h} \left(\log t + \log \frac{k_f}{C_{f+m} \mu r_w^2} - \beta + 0.87 S \right), \quad (2.33)$$

$$\delta = 162.6 \quad \beta = 3.23 \quad \text{en unidades prácticas.}$$

Derivada

La segunda recta semilog, corresponde a la estabilización a una recta de valor 0.5, de la derivada la presión adimensional.

En el modelo establecido por Cinco y Cols¹⁹., determinan que para tiempos grandes, la expansión total del sistema contribuye en la producción de fluidos y el flujo en la matriz-fracturas, alcanza una condición de estado pseudoestacionario, bajo esta condición:

$$p_D(r_D, s) = \frac{K_0 (r_D s^{1/2})}{s^{2/3} K_1 (s^{1/2})}. \quad (2.34)$$

La inversión de Laplace de esta ecuación, es la solución para flujo radial en un yacimiento homogéneo infinito, la cual para valores grandes de r_D , produce la solución fuente lineal:

$$p_D(r_D, t_D) = \frac{1}{2} E_1 \left(\frac{r_D}{4t_D} \right). \quad (2.35)$$

Para valores prácticos de tiempo, la presión en el pozo está dada por:

$$p_{wD} = \frac{1}{2} (\ln t_D + 0.80907), \quad (2.36)$$

la cual es la ecuación de una recta semilog. Las Ecs. 2.27 y 2.36, son similares, excepto por el parámetro ω .

2.4 Análisis Convencional ^{44,12}

Los métodos convencionales de análisis de pruebas de variación de presión, se desarrollaron en los años treinta del siglo pasado, y permanecieron como los únicos disponibles, hasta los años setentas; consisten en la identificación de diferentes períodos de flujo mediante el registro de incremento o decremento de presiones del yacimiento en estudio.

Pruebas de decremento de presión.

La etapa ideal para efectuar una prueba de decremento de presión es el inicio de la explotación del yacimiento. A partir de esta prueba, se pueden obtener valores de parámetros tales como la permeabilidad de la formación, k , el daño, S , y el volumen drenado del pozo, entre otros. La ventaja de la realización de la prueba es que no hay cierre del pozo, pero con la desventaja de la dificultad de mantener un gasto constante de producción para su desarrollo.

La ecuación que describe la variación de la presión contra el tiempo y distancia al pozo, después de ser abierto a producción a un gasto constante, es:

$$p_i - p_{(r,t)} = -\frac{q B \mu}{4 \pi k h} E_i \left(-\frac{r^2}{4 \eta t} \right), \quad (2.37)$$

en donde $\eta = \frac{k}{\phi \mu c_i}$, es la constante de difusividad hidráulica.

Considerando que se puede utilizar la aproximación logarítmica evaluando en $r = r_w$, con \log_{10} , unidades del sistema inglés e incluyendo el factor de daño⁴⁵:

$$p_i - p_{wf} = 162.6 \frac{q B \mu}{k h} \left(\log t + \log \frac{k}{\phi \mu c_i r_w^2} - 3.23 + 0.87 S \right), \quad (2.38)$$

o en forma adimensional:

$$p_D = \frac{1}{2} (\ln t_D + 0.81 + 2 S) . \quad (2.39)$$

Donde p_D es la presión adimensional durante la prueba de decremento y t_D es el tiempo adimensional; $t_D = 0.000264 \frac{k}{\phi \mu c_i r_w^2} \Delta t$.

De lo anterior, se puede observar que la presión de fondo fluyendo varía linealmente contra el tiempo, en una gráfica semilog.

Si la presión medida en el fondo del pozo es graficada contra el tiempo, una línea recta de pendiente " m " se presenta, una vez que los efectos de almacenamiento han finalizado:

$$m = 162.6 \frac{q B \mu}{k h}, \quad (2.40)$$

de aquí se tiene:

$$k h = 162.6 \frac{q B \mu}{m} \quad (2.41)$$

El valor del daño, generalmente es calculado utilizando el valor de la presión a una hora sobre la recta semi-log; para este punto $\log t = 0$:

$$S = 1.15 \left(\frac{p_i - p_{1h}}{m} - \log \frac{k}{\phi \mu c_i r_w^2} + 3.23 \right) \quad (2.42)$$

El valor de p_{1h} sobre la recta semi-log, no debe ser un valor interpolado sobre los puntos. Como se observa en la Fig. 2.4, después de una hora, los datos pueden ser afectados todavía por el efecto de almacenamiento del pozo. En este caso, no se verifica la ecuación de línea recta semi-log.

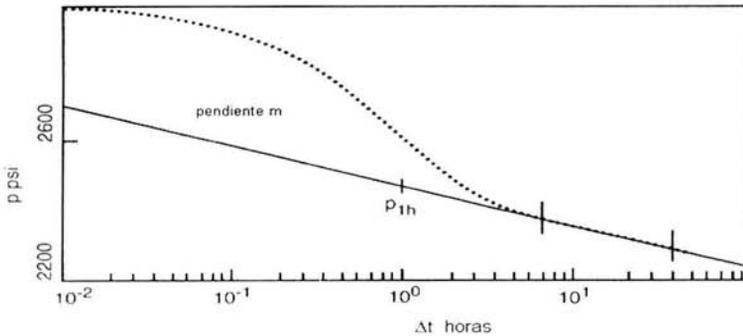


Fig. 2.4 Prueba de decremento de presión.

Prueba de incremento de presión.

Las pruebas de incremento son ampliamente tratadas en la literatura^{41,42,45}. Se realizan para conocer las propiedades del yacimiento y las condiciones del pozo.

Presentan la desventaja de que se tiene que cerrar el pozo, además de que hay dificultad para mantener un gasto constante antes del cierre (si existe una variación del 20% o más en el gasto, se utilizan métodos de análisis de gasto variable).

Para una prueba de incremento de presión, se recomienda⁴⁵ hacer el análisis con la gráfica log-log para evitar el riesgo de una mala identificación de la porción recta de la gráfica.

- Método de Horner

Gran parte de la información de pruebas de pozos, proviene de la interpretación del registro del incremento de presiones.

Las pruebas de decremento de presión son muy limitadas, ya que se presentan fluctuaciones en el gasto de producción, que generan variaciones en las presiones, y que por lo general, son mayores al final de la prueba, mientras que al inicio se deben al cambio de gastos.

Para un gasto cero, que corresponde a una prueba de incremento de presión, no se origina este problema.

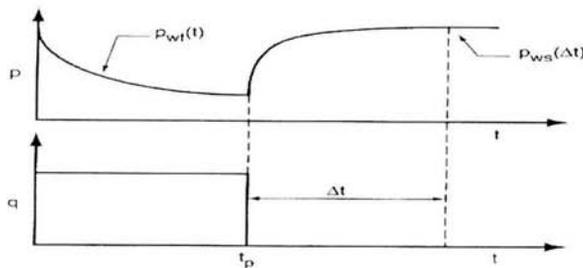


Fig. 2.5 Prueba de incremento de presión.

En la Fig. 2.5, $p_{wf}(t)$ es la presión de fondo fluyendo al inicio de la producción; $p_{ws}(\Delta t)$ es la presión durante el incremento de presión, contando el tiempo desde el inicio de producción, hasta el cierre del pozo, t_p ; se cumple que:

$$p_{ws}(\Delta t = 0) = p_{wf}(t_p) .$$

El incremento de presión se analiza utilizando el principio de superposición⁴⁵:

$$\Delta p(t) = \frac{q_1 \mu B}{2\pi k h} p_D(t) + \frac{(q_2 - q_1) \mu B}{2\pi k h} p_D(t - t_1) \quad ; \quad (2.43)$$

en este caso, $q_1 = q$; $q_2 = 0$; $t - t_1 = \Delta t = t - t_p$; $t = t_p + \Delta t$, entonces:

$$\Delta p(t_p + \Delta t) = \frac{q B \mu}{2\pi k h} p_D(t_p + \Delta t) - \frac{q B \mu}{2\pi k h} p_D(\Delta t) , \quad (2.44)$$

$$= \frac{q B \mu}{2\pi k h} [p_D(t_p + \Delta t) - p_D(\Delta t)] . \quad (2.45)$$

Considerando que se puede utilizar la aproximación logarítmica, usando \log_{10} y unidades del sistema inglés, se tiene:

$$p_i - p_{ws}(\Delta t) = 162.6 \frac{q B \mu}{k h} \log \frac{t_p + \Delta t}{\Delta t} . \quad (2.46)$$

Esta ecuación muestra que la presión varía linealmente contra $\log \frac{t_p + \Delta t}{\Delta t}$. Si el valor de la presión, medida en el fondo del pozo, es graficada contra $\log \frac{t_p + \Delta t}{\Delta t}$, en una gráfica semi-log, una vez que el efecto de almacenamiento ha finalizado, se presenta una recta de pendiente " m ":

$$m = 162.6 \frac{qB\mu}{kh}, \quad (2.47)$$

de esta última:

$$kh = 162.6 \frac{qB\mu}{m}. \quad (2.48)$$

El daño, puede calcularse de la diferencia entre:

- el valor de la presión registrada después de una hora de incremento en la recta semi-log:

$$p_i - p_{1h} = 162.6 \frac{qB\mu}{kh} \log(t_p + 1), \quad (2.49)$$

Al inicio de la prueba, la cantidad de fluido producido antes del cierre es generalmente despreciable en comparación a la cantidad de aceite almacenado.

Si la presión de incremento fuera aumentando indefinidamente, la presión de fondo se igualaría a la presión inicial del yacimiento.

La presión inicial del yacimiento puede leerse sobre la curva de incremento de presión para $\Delta t = \infty$, es decir: $\frac{t_p + \Delta t}{\Delta t} = 1$, como se observa en la Fig. 2.6.

El valor de presión estimado es conocido como presión extrapolada o p^* , como esta en la Fig. 2.6, y es igual a la presión inicial del yacimiento en la mayoría de las pruebas.

- y el valor de la presión al cierre:

$$p_i - p_{wf}(t_p) = 162.6 \frac{qB\mu}{kh} \left(\log t_p + \log \frac{k}{\phi \mu c_i r_w^2} - 3.23 + 0.87S \right); \quad (2.50)$$

restando las dos expresiones, término a término, se obtiene:

$$S = 1.15 \left(\frac{p_{1h} - p_{wf}(t_p)}{m} + \log \frac{t_p + 1}{t_p} - \log \frac{k}{\phi \mu c_r r_w^2} + 3.23 \right). \quad (2.51)$$

El término $\log \frac{t_p + 1}{t_p}$ es generalmente despreciable, comparado con los otros términos.

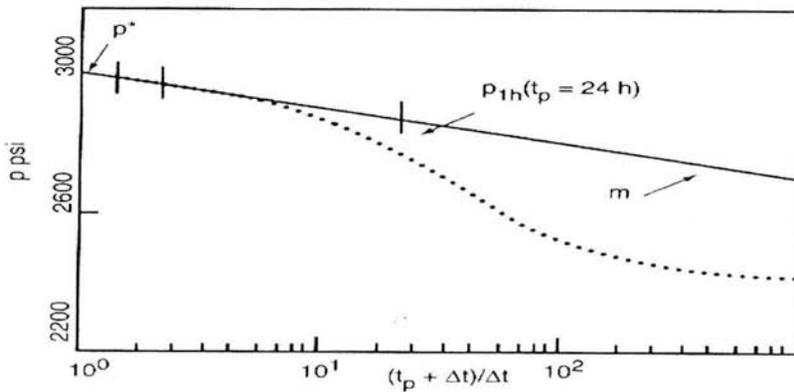


Fig. 2.6 Presión medida en el fondo del pozo, una vez finalizado el efecto de almacenamiento.

• Método MDH

Este método muestra que las presiones varían linealmente contra el $\log \frac{t_p + \Delta t}{\Delta t}$. Si t_p es muy grande, comparado con Δt :

$$\log \frac{t_p + \Delta t}{\Delta t} \approx \log t_p - \log \Delta t,$$

por lo que usando este resultado:

$$p_i - p_{wf} = - \frac{qB\mu}{4\pi k h} (\ln \Delta t - \ln t_p) \quad (2.52)$$

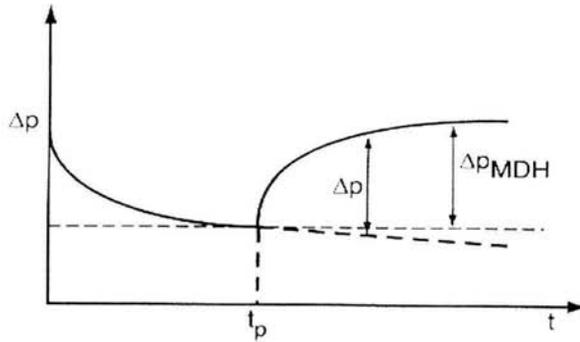


Fig. 2.7 Método MDH.

La diferencia entre Δp y Δp_{MDH} , es despreciable cuando Δt es pequeña, comparada con t_p ; es decir, al inicio del incremento y después de un período grande de producción a gasto constante:

$$m = 162.6 \frac{qB\mu}{kh} \quad (2.53)$$

de la cual:

$$kh = 162.6 \frac{qB\mu}{m} \quad (2.54)$$

$$S = 1.15 \left(\frac{p_{1h} - p_{wf}(t_p)}{m} - \log \frac{k}{\phi \mu c_t r_w^2} + 3.23 \right). \quad (2.55)$$

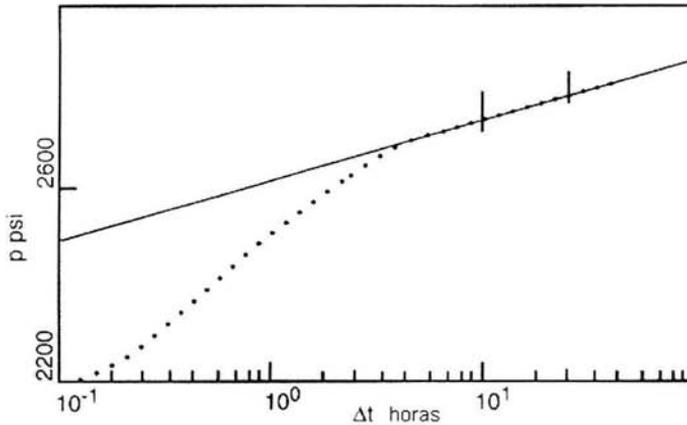


Fig. 2.8 Gráfica de Δp_{MDH} vs Δt .

La ventaja del método es la facilidad; sin embargo, tiene dos desventajas: no se puede utilizar para encontrar la presión extrapolada y sólo puede usarse para valores de Δt que son pequeños, comparados con t_p .

El uso del método convencional para el análisis de pruebas de pozos tiene las siguientes desventajas:

- Algunas veces es difícil diagnosticar el flujo; en estos casos no es posible una interpretación convencional, debido a que la línea recta existe sólo si los flujos son separados.
- La interpretación sólo considera los puntos localizados sobre la línea recta; los puntos correspondientes a la transición entre flujos no se utilizan, por lo que solamente una pequeña porción de datos se utilizan en el análisis convencional.
- Algunas veces es difícil ajustar la línea recta; en algunas interpretaciones, varias rectas se pueden presentar, por lo que se hace difícil determinar la recta de mejor ajuste que corresponde al análisis.

2.5 *Análisis Mediante Curvas Tipo*⁴²

Las curvas tipo que se utilizan para analizar pruebas de variación de presión en YNF, fueron desarrolladas por Greengarten¹⁶, Bourdet y Cols.²⁴, que reflejan el comportamiento de la presión en el yacimiento.

Existen dos clases de curvas tipo, adaptadas al flujo matriz-fracturas: para flujo pseudoestacionario y para flujo transitorio, en las cuales se tienen varios puntos en común con las curvas tipo para yacimientos homogéneos:

- Escala log-log
- Ejes coordenados p_D vs t_D/C_D
- Cada una de las curvas que las compone, tienen un valor característico de $C_D e^{2S}$.

Las curvas tipo para yacimientos fracturados, tienen un juego extra de curvas que muestran el comportamiento del yacimiento durante el flujo matriz-fracturas (ver gráficas al final del capítulo):

- λe^{-2S} , Para modelo pseudoestacionario
- β' , Para modelo transitorio.

Pasos para el ajuste mediante curvas tipo:

El método de interpretación es similar al que se utiliza para un yacimiento homogéneo y consiste de los siguientes pasos:

1. Graficar los datos de presión en un papel que tenga igual escala que las curvas tipo
2. Deslizar la gráfica, manteniendo los ejes de forma paralela, sobre la curva tipo que se ajuste mejor a la curva de los puntos graficados:

- Para los primeros puntos, al inicio de la producción, se tiene una curva debida a la producción de las fracturas, la curva tipo $C_D e^{2S}$.
 - Inmediatamente después, se tiene en la zona de transición, una curva λe^{-2S} para flujo pseudoestacionario, o una curva β' para flujo transitorio, para los puntos intermedios, que corresponden al período de transición.
 - Posteriormente se tienen los últimos puntos, para una curva $C_D e^{2S}$, correspondientes al flujo total matriz-fractura.
3. Anotar los valores correspondientes de $C_D e^{2S}$, y λe^{-2S} (en su caso β').
 4. Anotar las coordenadas del punto de ajuste elegido " **M** " para ambas gráficas $(p_D \text{ vs } t_D/C_D)$ y $(\Delta p \text{ vs } \Delta t)$.

Interpretación

- Permeabilidad

La razón de proporcionalidad entre coordenadas p_D y Δp del punto "M", es utilizado para determinar el producto $k_f h$ del yacimiento:

$$k_f h = 141.2 q B \mu \frac{(p_D)_M}{(\Delta p)_M}, \quad (2.56)$$

de la cual, se puede obtener la permeabilidad de las fracturas, dividiendo el producto $k_f h$ por el espesor neto del yacimiento.

- Almacenamiento del pozo

El factor de proporcionalidad entre las coordenadas t_D/C_D y Δt del punto de ajuste "M", es utilizado para determinar el almacenamiento del pozo:

$$C = \frac{0.000295 k_f h (\Delta t)_M}{\mu \left(\frac{t_D}{C_D} \right)_M} \quad (2.57)$$

- Coeficiente de almacenamiento ω

El valor de $C_D e^{2s}$ de los primeros puntos, etapa inicial, y de los últimos puntos graficados, etapa final, corresponden a las curvas $(C_D e^{2s})_f$ y $(C_D e^{2s})_{f+m}$, respectivamente.

La relación entre estos dos valores, determina el coeficiente de almacenamiento (contraste de capacidades entre el yacimiento y las fracturas)^{7,18}:

$$\omega = \frac{(C_D e^{2s})_{f+m}}{(C_D e^{2s})_f} \quad (2.58)$$

- Daño

El valor de la curva tipo de los últimos puntos graficados, corresponden al valor de $(C_D e^{2s})_{f+m}$, del yacimiento.

La capacidad C_m de la matriz, puede determinarse, al igual que en un yacimiento homogéneo, por registros de pozos y análisis de núcleos. La capacidad del yacimiento, puede obtenerse utilizando el valor de la ω calculada por:

$$\omega = \frac{C_f}{C_{f+m}} \quad (2.59)$$

por lo que:
$$C_{f+m} = \frac{C_m}{1-\omega} \quad (2.60)$$

Una vez que el almacenamiento del pozo se ha determinado, se calcula :

$$C_{D_{f+m}} = \frac{0.89 C}{C_{f+m} h r_w^2} \quad (2.61)$$

Los valores de $C_{D_{f+m}}$ y de $(C_D e^{2s})_{f+m}$ se utilizan para calcular el daño en el pozo:

$$S = \frac{1}{2} \ln \frac{(C_D e^{2s})_{f+m}}{C_{D_{f+m}}} \quad (2.62)$$

- Parámetro matriz-fractura

El valor de la curva λe^{-2s} , de la zona de transición, es utilizado para determinar el parámetro λ , que caracteriza la facilidad de intercambio que se presenta entre la matriz y las fracturas:

$$\lambda = (\lambda e^{-2s}) e^{2s} \quad (2.63)$$

En el modelo transitorio, las curvas de transición están especificadas por β' :

$$\beta' = a \frac{(C_D e^{2s})_{f+m}}{\lambda e^{-2s}}, \quad (2.64)$$

en donde " a ", depende de la geometría de los bloques de matriz; para estratos ($n=1$), $a=1.89$; para cubos ($n=3$), $a=1.05$.

$$\lambda = \frac{a (C_D e^{2s})_{f+m} e^{2s}}{\beta'} \quad (2.65)$$

Limitaciones de curvas tipo para yacimientos fracturados.

- Pueden utilizarse directamente, sólo si la historia de los gastos permite asumir que el flujo es en una sola fase (monofásico).
- Pueden usarse directamente en pruebas de incremento de presión, de tal manera que antes del cierre del pozo, se tenga una producción a gasto constante, con un tiempo muy grande en comparación al tiempo de cierre.
- Cuando la prueba de decremento de presión es de corta duración, el método de Agarwal y Cols.⁴ puede aplicarse, con las restricciones similares a las de un yacimiento homogéneo. El término del efecto de almacenamiento y el término del período de transición, deben alcanzarse durante el decremento, antes del cierre.

2.6 *Función Derivada*⁴²

Las derivadas de curvas tipo, fueron desarrolladas por Bourdet y Cols^{24,25}, para el análisis de pruebas de variación de presión en YNF.

Dos clases de curvas existen, dependiendo el régimen de flujo matriz-fractura:

- Régimen pseudoestacionario²⁴.

Su interpretación tiene similitud con el procedimiento utilizado en yacimientos homogéneos. Del análisis de pruebas de pozos, los comportamientos que se encuentran con mayor frecuencia son el almacenamiento del pozo y el daño en el yacimiento. Las curvas son graficadas en escalas log-log, en términos de presión adimensional, p_D ,

contra tiempo adimensional, dividido entre el almacenamiento del pozo

t_D/C_D (ver Fig. 2.11):

$$p_D = \frac{k h \Delta p}{141.2 q B \mu} \quad , \quad (2.66)$$

$$t_D/C_D = \frac{0.000295 k h \Delta t}{\mu C} \quad . \quad (2.67)$$

Cada curva está etiquetada por el grupo adimensional $C_D e^{2S}$, el cual define la forma de la curva:

$$C_D e^{2S} = \frac{0.8936 C e^{2S}}{\phi C_r h r_w^2} \quad . \quad (2.68)$$

Para tiempos pequeños, todas las curvas parten de una curva de pendiente unitaria, correspondiente al flujo por el almacenamiento de las fracturas:

$$p_D = t_D/C_D \quad ; \quad (2.69)$$

derivando:

$$p'_D = \frac{dp_D}{d\left(\frac{t_D}{C_D}\right)} = 1 \quad (2.70)$$

Para tiempos grandes, las curvas corresponden al flujo radial, cuando los efectos de almacenamiento han desaparecido:

$$p_D = \frac{1}{2} \left(\ln \left(\frac{t_D}{C_D} \right) + 0.80907 + \ln C_D e^{2S} \right) ; \quad (2.71)$$

derivando:

$$p_D' = \frac{dp_D}{d\left(\frac{t_D}{C_D}\right)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t_D/C_D} \quad (2.72)$$

Desde el punto de vista práctico, es preferible graficar las curvas tipo para la derivada como $p_D'(t_D/C_D)$ vs (t_D/C_D) :

$$p_D'(t_D/C_D) = \frac{\Delta t \Delta p' k h}{141.2 q B \mu} \quad (2.73)$$

Ver Fig. 2.12

Inicialmente, debido al efecto de almacenamiento del pozo, la curva derivada correspondiente a $C_D e^{2S} = 1$. Posteriormente, el flujo radial se presenta en el sistema de fracturas y la derivada alcanza la recta de valor igual a 0.5, marcándose una inflexión en la curva. El período de transición comienza y la derivada disminuye a lo largo de una curva etiquetada como $(\lambda C_D)/\omega(1-\omega)$, hasta que alcanza un mínimo y posteriormente sigue la curva $(\lambda C_D)/(1-\omega)$, antes de retomar el valor de 0.5 de la recta correspondiente al flujo radial del sistema total $C_D e^{2S}$.

El período de transición está definido por las dos familias de curvas $(\lambda C_D)/\omega(1-\omega)$ y $(\lambda C_D)/(1-\omega)$, para el inicio y el término del período, respectivamente.

El uso de la derivada de curvas tipo, revela sin lugar a dudas el comportamiento de doble porosidad del sistema, y define mejor los límites de sus tres regímenes característicos, por lo que aumenta la confianza en los resultados del análisis de pruebas de yacimientos fracturados.

- Régimen transitorio²⁵

El régimen de transición es el modelo de doble porosidad considerado por De Swaan²⁹, y está descrito por la familia de curvas β , las cuales son semejantes a las curvas para el sistema homogéneo $C_D e^{2S}$, con la diferencia de que la presión y el tiempo están divididos entre dos (ver Fig. 2.12). Como resultado, el sistema desarrolla una recta semi log de pendiente 0.5 como la derivada para flujo radial.

El grupo adimensional β' está dado por:

$$\beta' = \delta' \frac{(C_D e^{2S})_{f+m}}{\lambda e^{-2S}} \quad , \quad (2.74)$$

de la cual:

$$\delta' = 1.8914 \quad \text{para estratos como bloques de matriz.}$$

En una gráfica⁹ log-log de $p_D' (h/c_D)$ vs t_D/c_D , se tiene la derivada de las tres curvas componentes: $(C_D e^{2S})_f$ para las fracturas, β' para la zona de transición, y $(C_D e^{2S})_{f+m}$ para el sistema total matriz-fracturas. Para el inicio del comportamiento, se presenta la aportación de las fracturas, con una recta de pendiente unitaria; posteriormente una zona de inflexión o declive de la curva para la zona de transición, y finalmente, una recta con valor de 0.5, cuando se alcanza el flujo radial en el sistema. La curva de transición β' , obtenida por el reemplazo de la curva $C_D e^{2S}$ por un factor de dos a lo largo de los ejes de presión y tiempo, presenta características similares a las utilizadas para flujo pseudoestacionario, y la derivada de 0.5 cambia al valor de 0.25.

De acuerdo a lo anterior, la representación por medio de la derivada, muestra claramente la naturaleza heterogénea del yacimiento, por lo que se mejora el análisis de variación de la presión para un

yacimiento de doble porosidad, haciendo más fácil la identificación del comportamiento de transición. Adicionalmente, se utilizan las curvas¹¹ $\lambda C_D(1-\omega)^2$, que muestran el término del período de transición, y la horizontal con valor de 0.5, que corresponde a la estabilización final alcanzada por el flujo matriz-fracturas.

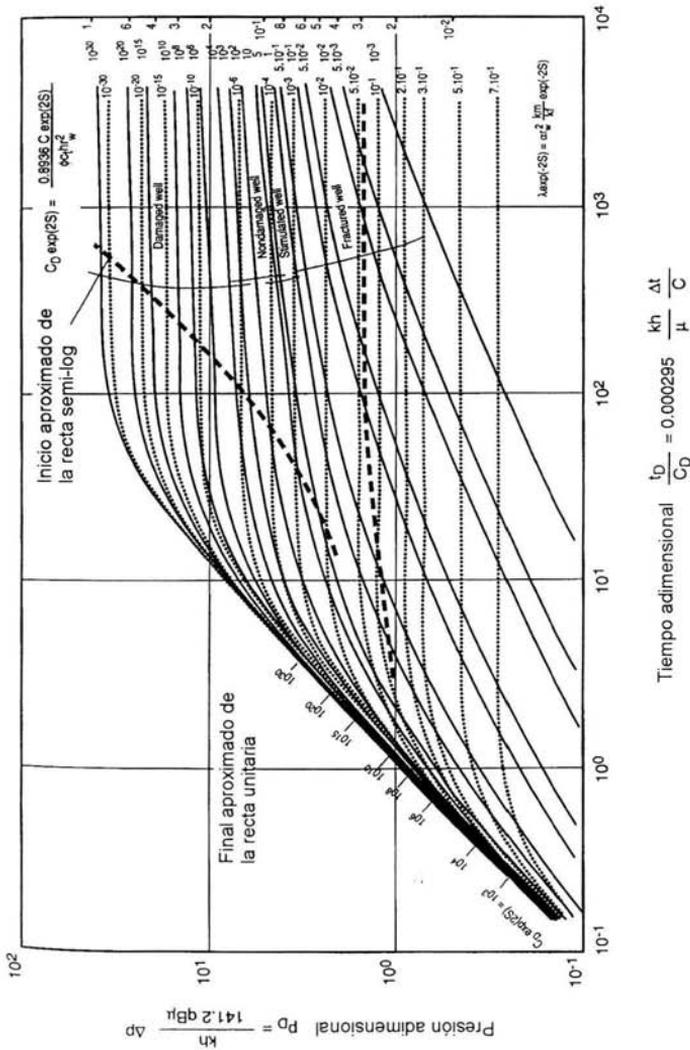


Fig. 2.9 Curvas tipo para un pozo con almacenamiento y daño, en yacimiento de doble porosidad, flujo interporoso en régimen pseudostacionario.

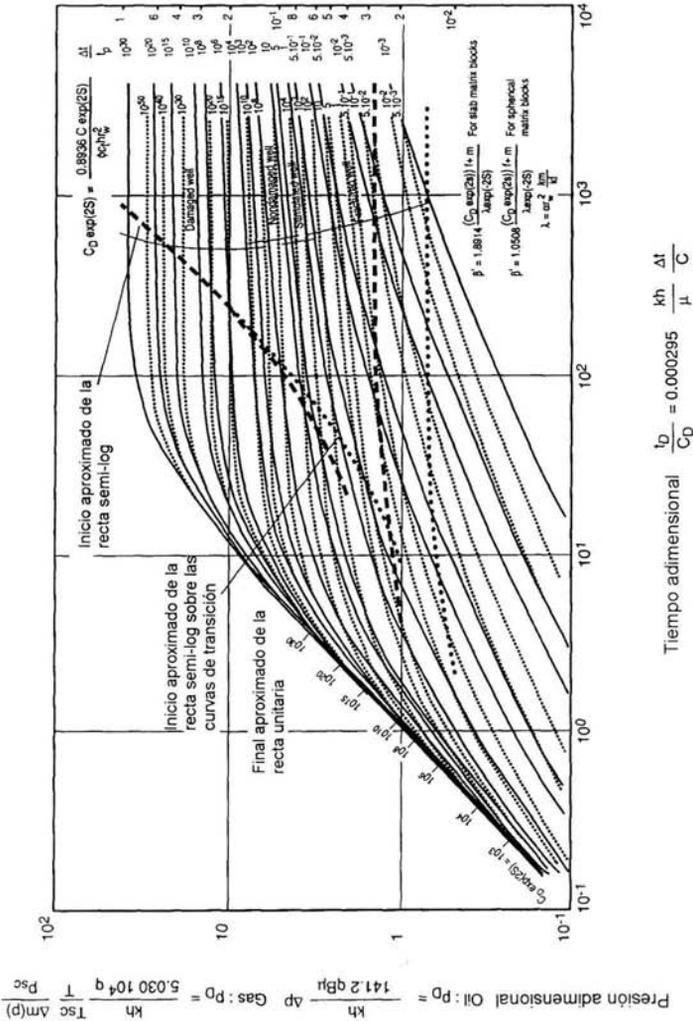


Fig. 2.10 Curvas tipo para pozo con almacenamiento y daño en un yacimiento de doble porosidad, flujo interporoso en régimen transitorio.

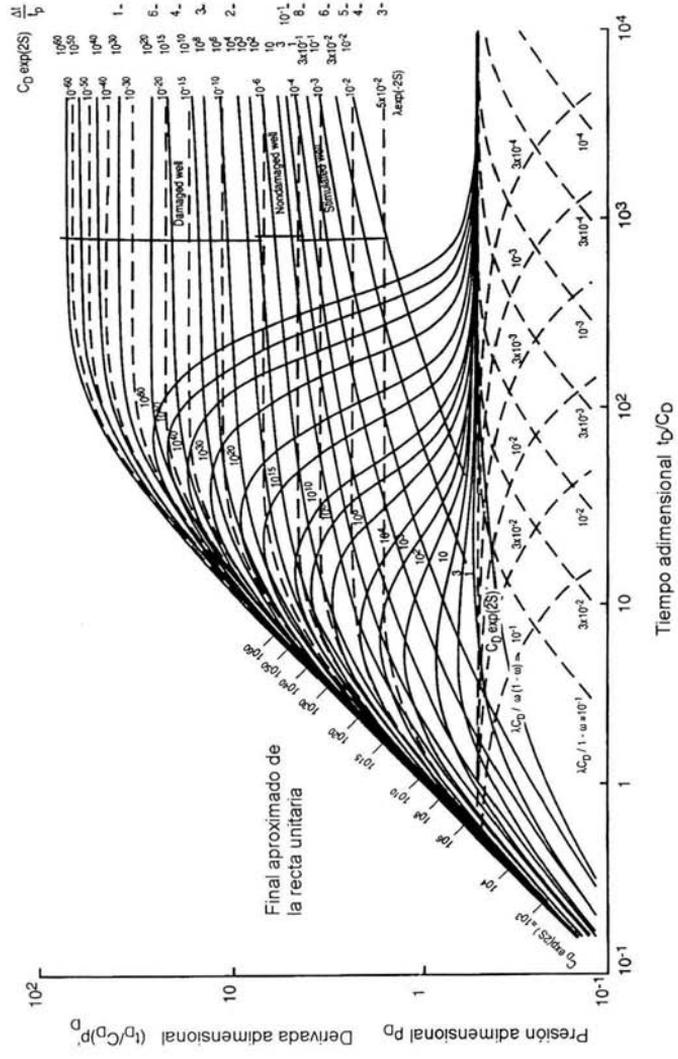


Fig. 2.11 Derivadas de curvas tipo para flujo interporoso en régimen pseudostacionario

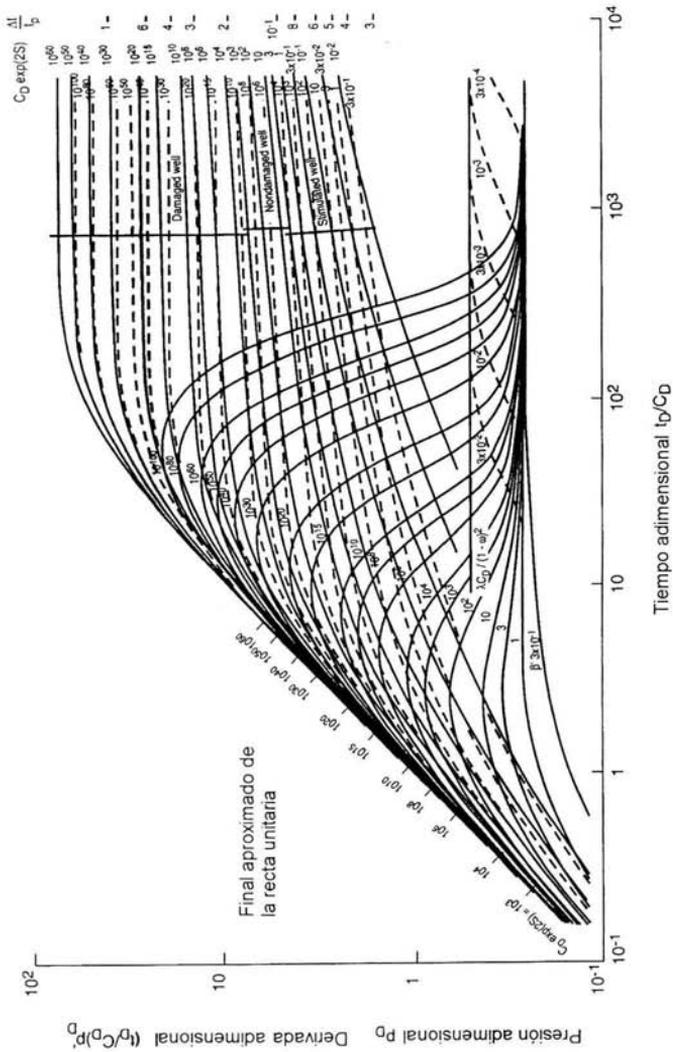


Fig. 2.12 Derivadas de curvas tipo para flujo interporoso en régimen transitorio.

CAPÍTULO 3 REVISIÓN DE LA LITERATURA

3.1 Antecedentes

En este capítulo, se comentan los trabajos en los que se toma en consideración la variación del tamaño de los bloques de los yacimientos naturalmente fracturados, además de algunos que pueden tomarse como complemento del tema en estudio.

Modelo de Warren, J. E. y Root, P. J. ^{1*}

Ellos toman como referencia el trabajo previo de Barenblat y Cols., del sistema de doble porosidad, para designar un yacimiento naturalmente fracturado y lo representan por bloques de caras rectangulares, limitados por una red ortogonal de fracturas uniformes y continuas. Consideran que el flujo de la matriz a las fracturas se presenta bajo régimen pseudoestacionario y hacen una relación del gasto de fluidos producidos con la diferencia de presión entre la matriz de roca y las fracturas. El flujo hacia el pozo es a través de la red de fracturas, actuando la matriz como una fuente que suministra el fluido.

Describen los resultados de pruebas de decremento e incremento de presión, a través de la introducción de dos parámetros: " ω ", conocido como almacenamiento fraccional de las fracturas y " λ ", como coeficiente de flujo entre matriz-fracturas, estableciendo la existencia de tres períodos de flujo en una gráfica semilog de p_D vs t_D : el primero, exhibe un comportamiento de yacimiento homogéneo que corresponde solamente al sistema de fracturas, ya que a tiempos pequeños los bloques de matriz no contribuyen a la producción

* Referencias al final.

debido al contraste de permeabilidades entre ambos sistemas de porosidad; el segundo período, llamado zona de transición, describe el flujo de fluidos de la matriz hacia las fracturas; y el tercero, que inicia cuando la variación de presiones en la matriz y en las fracturas es similar, presentándose nuevamente un comportamiento homogéneo, debido a la expansión total del sistema matriz-fracturas.

Modelo de Kazemi, H.³ y De Swan, A.²⁹

El modelo establecido por estos autores, considera que el flujo matriz-fracturas se presenta bajo régimen transitorio. Se toma en cuenta la posibilidad de que parte de la producción en el pozo provenga de los bloques y fracturas (considerando que el bloque es de baja permeabilidad, en comparación con la fractura). Suponen una configuración geométrica de matrices de bloques, separadas por fracturas horizontales, observando que el período de transición entre las rectas paralelas, se presenta como una línea recta.

La respuesta de presión obtenida aplicando la integración numérica, Kazemi la compara con los resultados obtenidos por Warren y Root¹, concluyendo que el modelo de estos autores es válido en yacimientos con distribución uniforme de fracturas y con un gran contraste de capacidades de flujo entre la matriz y las fracturas.

De Swan caracterizó el comportamiento de la presión del yacimiento naturalmente fracturado, utilizando los parámetros introducidos por Warren y Root: ω , η (difusividad hidráulica de la matriz) y A_{fb} (área de las fracturas por volumen de roca) y supone que los bloques de matriz son de un solo tamaño.

Modelo de Braster, C.²⁷

Analiza el tamaño de los bloques de matriz en la gráfica semilog de p_D vs t_D para el segundo período; es decir, en la zona de transición. Para el análisis considera dos modelos: (1) un yacimiento con bloques alternados, con espesor h , por fracturas, con espesor B_2 , dispuestos de manera horizontal. Supone que la ley de Darcy es aplicable, tanto para el flujo en la matriz, como para el flujo en las fracturas, considerando flujo bifásico tomando en cuenta las compresibilidades de los fluidos, así como también la de la formación. La solución numérica que obtuvo fue para el gasto y potencial del pozo uniforme. El modelo (2) considera al yacimiento rodeado por una red ortogonal de fracturas de altura h y B de ancho, paralelas al eje del pozo. Para el estudio se calcularon las respuestas de una prueba de decremento de presión, considerando dos fracturas con espesor de 5.4 m y amplitud de 15.24 mm y diferentes valores de espesor de bloque: desde 1.1 hasta 5.5 m .

De los resultados de ambos modelos, concluyó que por el rango limitado de los parámetros en consideración, la prueba de decremento de presión no proporciona una información real y confiable sobre el tamaño de bloques, es decir, la respuesta de presión no es lo suficientemente sensible a los diferentes tamaños de bloques.

Modelo de Jalali-Yazdi, Y. y Ersaghi, I.²⁰

Desarrollan un modelo con el cual analizan la zona de transición observada en la gráfica semilog de p_D vs t_D , que presenta una pendiente característica entre las dos rectas paralelas.

Su modelo está compuesto por dos estratos horizontales, cada uno con sus respectivos valores de porosidad, permeabilidad, compresibilidad, espesor y régimen de flujo, además de considerar tres variaciones del modelo en lo

que respecta al flujo: los dos estratos tienen flujo pseudoestacionario, ambos obedecen al flujo transitorio; el tercero implica que uno tenga flujo pseudoestacionario y otro flujo transitorio.

La solución al problema se obtiene en el espacio de Laplace y se aplica el algoritmo de Stehfest³⁰ como invertidor numérico (para transformarla al espacio real).

Modelo de Cinco L, H., Samaniego V., F. y Kuchuk, F.¹⁹

Es el primer trabajo en el que se desarrolla un modelo analítico para estudiar el comportamiento de presión, en un yacimiento de doble porosidad, compuesto de bloques de matriz de tamaño múltiple uniformemente distribuidos a través del medio.

El modelo de análisis lo consideran constituido por estratos, bajo ciertas condiciones: el flujo de fluidos hacia el pozo se realiza sólo a través de las fracturas, obedeciendo la Ley de Darcy, con gradientes de presión pequeños a través del yacimiento y efectos gravitacionales despreciables, además de que el sistema de fracturas se comporta como un medio homogéneo e isótropo.

Asumen la existencia del flujo transitorio y establecen el modelo matemático en coordenadas cilíndricas para flujo radial en términos de variables adimensionales: r_D , p_{fD} , t_D , ω , y η_{maDi} (difusividad hidráulica adimensional de la matriz), además del desarrollo de soluciones aproximadas para tiempos adimensionales pequeños (en los que el flujo de fluidos es dominado por la red de fracturas), medianos (en el cual predomina el flujo lineal de los bloques de matriz) y grandes (en donde predomina la expansión total del sistema).

Se maneja un factor de daño que justifica la aplicación del modelo de flujo pseudoestacionario de Warren y Root¹ de la matriz a la fractura, y que se debe a la depositación de minerales en la cara de las fracturas, reduciendo la interacción entre las mismas y los bloques de matriz.

La solución al modelo es evaluada utilizando el invertidor numérico de Stehfest³⁰, como solución a la Transformada de Laplace, encontrando que, diez términos en la serie del mismo, proporciona excelentes resultados .

En su análisis concluyen que la naturaleza del tamaño múltiple de bloques en un yacimiento naturalmente fracturado, no se puede identificar sólo con el análisis del comportamiento de la presión; sin embargo, con la utilización de la función derivada es posible identificar la naturaleza del tamaño múltiple de bloques.

Modelo de Belani, A. K. y Jalali-Yazdi, Y.²¹

Consideran que el flujo interporoso que se presenta en yacimientos naturalmente fracturados, se presenta a la variabilidad del tamaño de bloques, que es inversamente proporcional a la intensidad de fracturamiento. Analizan la respuesta de la variación de presión para distribución uniforme o rectangular, en la cual todos los tamaños de bloques tienen la misma posibilidad de existir en el medio fracturado, y para distribución bimodal de bloques, que se presenta cuando existen dos grupos predominantes de tamaño de bloques: uno de h_{ma1} a h_{ma2} y otro de h_{ma3} a h_{ma4} .

Realizan el análisis considerando flujos pseudoestacionario y transitorio para el modelo, además de que los resultados para la presión y su primera derivada pueden proporcionar la distribución del tamaño de los bloques, conjuntamente con otras fuentes de información como son los datos geológicos y registros geofísicos. Presentan la solución del problema en el

espacio de Laplace, introduciendo conceptos como p_{wD} , x , $g(s)$, para flujos pseudoestacionario y transitorio, h_d , ω_{ma} , ω_{fa} , λ (parámetro que considera el tamaño de bloques). Concluyen que la distribución del tamaño de bloques afectan de manera significativa la respuesta de la presión.

Modelo de Johns, R.T. y Jalali-Yazdi, Y.²⁶

Desarrollan un modelo analítico para cuantificar el comportamiento de la presión para un yacimiento naturalmente fracturado, con variación en la distribución del tamaño de bloques y daño interporoso, basándose en pruebas de decremento e incremento de presión. Utilizan una función de densidad de probabilidad (FDP) rectangular para estimar el tamaño de bloques de matriz, a partir de los datos de variación de presión, con el objeto de mostrar que las pruebas de decremento de presión y las de interferencia pueden proporcionar una indicación del grado de intensidad de fracturamiento y su uniformidad.

El planteamiento del modelo parte de la ecuación de difusión para un yacimiento de doble porosidad, que incluye una distribución de probabilidad $p(h)$, aplicada a un yacimiento infinito que produce a un gasto constante; se establece la solución en el espacio de Laplace para una prueba de interferencia y para una de decremento de presión. Utilizan la función $f(s)$, que comprende los parámetros del yacimiento, además de la distribución del tamaño de bloques de matriz, como parte del argumento de la función de Bessel; se introduce el efecto del factor de daño S_{iD} , que es función de la distribución del tamaño de bloques de matriz. La solución en el espacio de Laplace, la transforman numéricamente con el algoritmo de Stehfest³⁰.

Mediante la selección de una FDP, $p(h)$, se puede inferir la intensidad de fracturamiento, a partir de los datos de la prueba de presión, y se establecen las relaciones:

$$F_h = \frac{h_{\min}}{h_{\max}} \quad , \quad (3.1)$$

$$S_{iD} = \frac{k_{ma} h_s}{k_s h} \quad . \quad (3.2)$$

Si el valor de F_h tiende a la unidad, se tiene fracturamiento uniforme; si tiende a cero, se tiene un fracturamiento no uniforme. A medida que la intensidad de fracturamiento se incrementa, el tamaño de los bloques disminuye y $p(h)$ tiende hacia bloques pequeños, mientras que si la intensidad de fracturamiento disminuye, $p(h)$, tiende hacia tamaño de bloques grandes.

$$p(h_D) = \frac{\alpha(e^{-ah_D})}{(e^{-aF_h} - e^{-a})} \quad \text{Exponencial} \quad , \quad (3.3)$$

$$p(h_D) = \frac{(mh_D + b)}{(0.5m(1 - F_h^2) + b(1 - F_h))} \quad \text{Lineal} \quad . \quad (3.4)$$

Para incrementos positivos de los valores de “ a ” la intensidad de fracturamiento se incrementa, aumentando la probabilidad de la existencia de bloques pequeños; por el contrario, para incrementos negativos de “ a ”, aumenta la posibilidad de la existencia de bloques de matriz grandes. Si $m=0$ (lineal) o $a=0$ (exponencial), la FDP se reduce a la distribución rectangular (o uniforme):

$$p(h_D) = \frac{1}{(1 - F_h)} \quad , \quad (3.5)$$

La intensidad de fracturamiento determina la posición en el tiempo de la respuesta de presión, sin embargo, la uniformidad de fracturamiento afecta la forma de la respuesta de presión.

3.2 Estado actual de las investigaciones

Hasta la fecha, sólo se han publicado tres investigaciones^{19,21,26,49} en las que se considera el tamaño múltiple de bloques de matriz, para el estudio del comportamiento de la presión en yacimientos naturalmente fracturados, mediante pruebas de variación de presión.

Se cuenta con un modelo analítico¹⁹ que considera que los bloques están distribuidos uniformemente en un yacimiento de extensión infinita. De un estudio amplio para diferentes tamaños de bloques, se concluye que la variabilidad en el tamaño de los bloques no puede identificarse solamente a través del análisis de la presión. Se propone el uso de la función derivada como herramienta para identificar la variabilidad en el tamaño de bloques para un yacimiento naturalmente fracturado.

Recientemente, Rodríguez y Cols.²², presentaron un modelo de variabilidad de tamaño de bloques, en el que utilizan FDP normales, exponenciales y continuas, como una extensión al trabajo desarrollado por Cinco y Cols.¹⁹. Desarrollaron nuevas herramientas de diagnóstico para determinar el tamaño de bloques de matriz, correspondientes a determinadas formas de curvas en gráficas log-log, a través de funciones derivadas. Las soluciones contenidas se realizan en el espacio de Laplace, incluyendo una integral que es resuelta numéricamente.

Camacho y Cols.⁵² desarrollaron un nuevo modelo para YNF cugulares; en este trabajo presentan resultados analíticos aplicando el algoritmo de Stehfest a la solución de la ecuación en el espacio de Laplace, en terminos de variables adimensionales, derivan nuevas soluciones analíticas como una extensión a las soluciones propuestas en investigaciones anteriores.

3.3 Obtención de la Transformada de Laplace

Es frecuente encontrar modelos matemáticos que representan problemas de Ingeniería de Yacimientos,^{17,26,28,36} cuya solución está en términos de la Transformada de Laplace; su inversión analítica no es fácil de obtener, por lo que se requiere de un método numérico para su inversión al espacio real.

Se han probado un gran número de métodos^{30-32,34-36} para la inversión numérica de la Transformada de Laplace y evaluado en base a criterios de aplicabilidad a problemas reales de inversión, aplicación a varias funciones, aproximación numérica, eficiencia computacional y facilidad de programación e implementación.

El método de la Transformada de Laplace⁴⁴, es una herramienta para resolver ecuaciones diferenciales, con sus correspondientes valores iniciales y de frontera. El proceso de solución consiste de tres etapas principales:

1. El problema difícil es transformado a una ecuación simple (ecuación subsidiaria).
2. La ecuación subsidiaria es resuelta por manipulación algebraica.
3. La solución de la ecuación subsidiaria es retransformada, para obtener la solución de la ecuación original.

De esta manera, la Transformada de Laplace reduce el problema de resolver la ecuación diferencial a un problema algebraico. El intercambio de operaciones de cálculo a operaciones algebraicas sobre transformadas, llamado cálculo operacional, es una característica importante de dicho

método, además de que resuelve problemas de manera directa, sin determinar inicialmente una solución general.

La Transformada de Laplace de una función $f(t)$, $t \geq 0$, está definida^{31,32,44} como:

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad (3.6)$$

y su transformada inversa está dada por:³²

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} F(s) ds; \quad (3.7)$$

la transformación inversa⁴⁴ es la operación mediante la cual, a partir de la función transformada, se obtiene la función original, por lo que se requiere tener conocimientos de integración en el plano complejo para evaluar la integral involucrada en esta transformación.

- **Linealidad de la Transformada de Laplace.** *La Transformada de Laplace es una operación lineal; esto es, para funciones $f(t)$ y $g(t)$ cualesquiera cuya transformada exista y para las constantes a y b :*

$$L\{af(t) + bg(t)\} = aL\{f(t)\} + bL\{g(t)\}. \quad (3.8)$$

- **Existencia de la Transformada de Laplace.** *Sea $f(t)$ una función que es seccionalmente continua en todo un intervalo finito para $t \geq 0$ y satisface:*

$$|f(t)| \leq M e^{\gamma t}; \quad (3.9)$$

para las constantes γ y M . La Transformada de Laplace de $f(t)$ existe para toda $s > \gamma$.

Ejemplos. Encontrar $F(s)$:

1. $f(t) = 1$, para $t \geq 0$.

De la Ec. 3.6 por integración:

$$L\{f\} = L\{1\} = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} ;$$

por lo tanto, cuando $s > 0$:

$$L\{1\} = \frac{1}{s} \cdot$$

2. $f(t) = e^{at}$ cuando $t \geq 0$, donde " a " es constante.

De la Ec. 3.6 se tiene:

$$L\{e^{at}\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot e^{at} dt = \frac{1}{a-s} e^{-(s-a)t} \Big|_0^{\infty} ;$$

por lo tanto, cuando $(s-a) > 0$:

$$L\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a} \cdot$$

3. $f(t) = \cosh at = \frac{e^{at} + e^{-at}}{2}$.

De la propiedad de linealidad de la transformada y de ejemplo 2:

$$L\{\cosh at\} = \frac{1}{2} L\{e^{at}\} + \frac{1}{2} L\{e^{-at}\} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a} \right) ;$$

esto es, cuando $s > a$ ($a \geq 0$):

$$L\{\cosh at\} = \frac{s}{s^2 + a^2} \cdot$$

Transformada de Laplace de derivadas.

La propiedad más importante de la Transformada de Laplace, es la diferenciación de funciones, que corresponde a la multiplicación de la transformada por la variable de Laplace " s ", y la integración de funciones corresponde a la división de la transformada por la variable " s ". Por lo anterior, la Transformada de Laplace reemplaza operaciones de cálculo por operaciones de álgebra sobre transformadas.

Sea una función $f(t)$ continua para $t \geq 0$, que existe y tiene una derivada $f'(t)$ que es seccionalmente continua en todo intervalo finito para $t \geq 0$. La transformada de Laplace de la derivada $f'(t)$ existe cuando $s > \gamma$, y

$$L\{f'\} = sL\{f\} - f(0) \quad (s > \gamma) ;$$

Aplicando la propiedad de la segunda derivada $f''(t)$, se obtiene:

$$\begin{aligned} L\{f''\} &= sL\{f'\} - f'(0) \\ &= s[sL\{f\} - f(0)] - f'(0) \quad ; \end{aligned}$$

esto es: $L\{f''\} = s^2 L\{f\} - s f(0) - f'(0)$.

De manera similar:

$$L\{f'''\} = s^3 L\{f\} - s^2 f(0) - s f'(0) - f''(0) .$$

Por inducción se obtiene el siguiente complemento a lo anterior:

Sea $f(t)$ y sus derivadas $f'(t), f''(t), \dots, f^{(n-1)}(t)$, funciones continuas para toda $t \geq 0$, existen para γ y M , y sea la derivada $f^{(n)}(t)$ una función seccionalmente continua para todo intervalo finito $t \geq 0$. La Transformada de Laplace de $f^{(n)}(t)$ existe cuando $s > \gamma$, y está dada por:

$$L\{f^{(n)}\} = s^n L\{f\} - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

Ejemplos. Encontrar $L\{f\}$.

1. $f(t) = t^2$.

Sea $f(0) = 0, f'(0) = 0, f''(t) = 2$ y $L\{2\} = 2L\{1\} = \frac{2}{s}$, se tiene:

$$L\{f''\} = L\{2\} = \frac{2}{s} = s^2 L\{f\},$$

por lo que: $L\{t^2\} = \frac{2}{s^3}$ •

2. $f(t) = \cos wt$.

$$f''(t) = -w^2 \cos wt = -w^2 f(t); \quad f(0) = 1, f'(0) = 0$$

$$-w^2 L\{f\} = L\{f''\} = s^2 L\{f\} - s,$$

por lo tanto: $L\{f\} = L\{\cos wt\} = \frac{s}{s^2 + w^2}$ •

De manera semejante: $L\{f\} = L\{\sin wt\} = \frac{w}{s^2 + w^2}$ •

3. $f(t) = t \sin wt$

$$f(0) = 0, f'(t) = \sin wt + wt \cos wt; \quad f'(0) = 0$$

$$\begin{aligned}
 f''(t) &= 2w \cos wt - w^2 t \operatorname{sen} wt \\
 &= 2w \cos wt - w^2 f(t) \quad , \\
 L\{f''\} &= 2w L\{\cos wt\} - w^2 L\{f\} = s^2 L\{f\}
 \end{aligned}$$

utilizando la fórmula de la Transformada de Laplace de $(\cos wt)$, se obtiene:

$$(s^2 - w^2) L\{f\} = 2w L\{\cos wt\} = \frac{2ws}{s^2 + w^2} \quad ,$$

por lo que la solución es:

$$L\{t \operatorname{sen} wt\} = \frac{2ws}{(s^2 + w^2)^2} \quad \bullet$$

CAPÍTULO 4 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

4.1 Objetivo

Para un óptimo desarrollo de exploración de los yacimientos naturalmente fracturados, que contiene una porción significativa de hidrocarburos en el mundo, se requiere de una completa caracterización de estos sistemas.

Uno de los métodos más importantes⁴² para el logro de este objetivo, son las pruebas de variación de presión, las cuales son utilizadas para determinar el grado de comunicación entre pozos y las características del fracturamiento de los yacimientos, entre otras.

Se han desarrollado diversos modelos⁹ para el análisis de datos, registrados a través de esta clase de pruebas; estos modelos incluyen el medio anisótropo, la zona de medios múltiples, el sistema de fracturas y el sistema llamado de doble porosidad^{1-3,9,15-17,24,30}.

En general, un sistema de doble porosidad, está constituido por bloques de matriz y una red de fracturas distribuidas a lo largo del medio. Aunque la matriz posee una permeabilidad propia, tal que el fluido es transmitido a las fracturas, generalmente se supone que el flujo de fluidos hacia el pozo se realiza sólo a través de la red de fracturas.

Se ha demostrado que el comportamiento de la presión en este tipo de sistemas, es drásticamente afectado por la forma en la que el fluido es transferido de la matriz a las fracturas: modelo en flujo pseudoestacionario (Modelo de Warren y Root¹) y el modelo el flujo transitorio (Modelo de De Swaan y Kazemi³). Lo anterior caracteriza el comportamiento del sistema

mediante el uso de parámetros adimensionales: ω (coeficiente de almacenamiento de las fracturas) y λ (coeficiente de flujo matriz-fracturas), además de η_{maD} (difusividad adimensional).

Una de las principales suposiciones de estos modelos, es que los bloques de matriz son del mismo tamaño y forma, en todo el yacimiento. El objetivo del presente trabajo es analizar el comportamiento de la presión de un yacimiento de doble porosidad, **con tamaño múltiple de bloques, a través de algoritmo de De Hoog.**

Hasta el momento, se cuenta con tres investigaciones^{19,26,29} que tratan la variabilidad del tamaño de bloques en un yacimiento de doble porosidad, pero en nuestro conocimiento, no se ha aplicado el algoritmo mencionado en pruebas de variación de presión.

4.2 Alcances del Trabajo

Las pruebas de variación de presión²¹ para yacimientos naturalmente fracturados, han sido analizadas utilizando una aproximación continua del modelo del yacimiento, es decir, los sistemas de bloques de matriz y de fracturas se suponen continuos a través del yacimiento.

La matriz de roca tiene una permeabilidad muy baja, en comparación con el sistema de fracturas, pero almacena gran parte de los fluidos del yacimiento en su interior; por otra parte, el sistema de fracturas tiene muy baja porosidad, pero posee un alto valor de permeabilidad, en comparación con los bloques de matriz.

Cuando un pozo se localiza en un yacimiento de este tipo y es puesto a producir, se presenta una súbita respuesta de presión en la red de

fracturas, debido a su alta difusividad; esto origina una diferencia de presiones entre la matriz y el sistema de fracturas, presentándose un flujo interporoso entre ambos. A medida que el flujo se desarrolla, la presión en ambos sistemas se equilibra y la respuesta del flujo de fracturas se observa nuevamente, en éste caso, los fluidos producidos provienen de un almacenamiento compuesto de la matriz y de las fracturas.

La interacción matriz-fracturas es afectada fuertemente por la distribución geométrica de las fracturas y la forma en que se transfieren los fluidos hacia estas; para caracterizar esta relación, se consideran dos parámetros: ω_m , relación de almacenamiento de la matriz y λ , que es el coeficiente de flujo interporoso, el cual soporta los efectos de las propiedades de flujo entre ambos medios, así como su geometría.

La mayoría de los modelos disponibles en la literatura, suponen que el fracturamiento es uniforme y por lo tanto, que el tamaño de los bloques es constante.

Estudios geológicos han demostrado la no uniformidad en la intensidad de fracturas en la mayoría de los yacimientos^{19,21,26,28,40,47}, que va desde muy intensa hasta un fracturamiento escaso. Por lo anterior, es necesario el desarrollo de un modelo que considere la distribución de los elementos de la matriz o bloques, dependiendo de su tamaño.

Braester²⁷ concluyó que el tamaño de los bloques no afecta significativamente la respuesta de decremento de presión en yacimientos naturalmente fracturados. Cinco y Cols.¹⁹, sugieren una distribución discreta del tamaño de bloques de matriz, con un flujo en régimen transitorio entre los mismos y muestra que la derivada de la presión es fuertemente

afectada. Jalali-Yazdi y Belani²¹, muestran que la variabilidad del tamaño de bloques afecta marcadamente la respuesta de la presión.

Para el análisis del comportamiento de la presión para yacimientos de doble porosidad, se considera que sólo se tiene el desarrollo completo de la solución para el caso de distribución discreta de NB tamaño de bloques²⁶, con análisis de resultados para NB desde uno hasta cinco, por lo que se ha extendido la teoría para una distribución continua del tamaño de bloques^{19,21,26,48,49}, es decir, se han desarrollado soluciones que toman en cuenta la variabilidad del tamaño de bloques de matriz de manera continua, para tener mejores herramientas de diagnóstico en la caracterización de yacimientos naturalmente fracturados.

El alcance principal del presente trabajo, consiste en realizar el análisis de la presión de un yacimiento de doble porosidad con variabilidad del tamaño de bloques, a partir de las ecuaciones de flujo desarrolladas para yacimientos naturalmente fracturados, cuya solución se encuentra en términos de la Transformada de Laplace. Se utiliza un método de inversión numérica para la Transformada de Laplace, y pasarla al espacio real: el algoritmo de De Hoog y Cols.³², el cual se prueba en primer lugar con funciones sencillas desarrolladas en el espacio de Laplace; se realiza una comparación de soluciones analíticas y numéricas que se obtuvieron por algoritmos diferentes: el de Stehfest³⁰, y el de Crump³¹. En su caso, se presentan tablas comparativas de resultados y porcentajes de error, además de algunas gráficas, así como también conclusiones.

También se presenta una comparación de resultados para la solución de un yacimiento naturalmente fracturado, obtenidos en el trabajo desarrollado por Rodríguez²² en su tesis doctoral, y los obtenidos mediante la aplicación del algoritmo de De Hoog; de igual manera, se presenta una

comparación de resultados obtenidos por van Everdingen y Hurst³⁶, uno de los primeros trabajos en el que se aplica la Transformada de Laplace.

Cabe mencionar que el desarrollo teórico del modelo matemático establecido por De Hoog y Cols., no se cubre con profundidad en el trabajo, puesto que no es parte del objetivo y sólo se realiza la aplicación del mismo para pruebas de variación de presión en yacimientos de doble porosidad, con variación en el tamaño de bloques y se analizan los resultados obtenidos.

Para una futura investigación o extensión del presente trabajo de tesis, en las referencias se encuentran los datos completos de la fuente, además de que a través de medios electrónicos se han encontrado recientemente más aplicaciones del invertidor, así como también su codificación en otros lenguajes (FORTRAN).

4.3 Inversión Numérica de la Transformada de Laplace, para Yacimientos Naturalmente Fracturados.

Un gran número de métodos de solución de la inversión numérica de la Transformada de Laplace³⁴ se han probado y evaluado en base a los criterios de aplicación a problemas de inversión reales, aplicación a varios tipos de funciones, aproximación numérica, eficiencia computacional y la facilidad de programación y aplicación.

Davies y Martin³⁴ en su trabajo desarrollado, presentan una evaluación de métodos para su solución, clasificándolos en diferentes grupos, uno de ellos son los métodos basados en series de Fourier: el algoritmo de Sthefest³⁰, y el algoritmo de Crump³¹.

El algoritmo de Stehfest ha tenido un gran impacto en el análisis de pruebas de variación de presión^{19,20,22,26,49}, y propone un modelo de inversión numérica a partir del trabajo desarrollado por Gaver (1966), mediante el uso de una secuencia delta y la aplicación de una fórmula de extrapolación; el tiempo de cálculo depende del número de términos N , de $F(s)$ de la función para cada valor de t y se concluye que el método da una buena aproximación para un rango amplio de funciones.

Crump³¹ presenta un método mejorado basado en la investigación de Dubner y Abate³⁵, cuyo desarrollo se basa en la transformada del coseno de la serie de Fourier. El método contiene términos adicionales de la serie de Fourier, incluyendo la función seno, tal que el error en la aproximación es menor al del método de Dubner y Abate, además de que la serie de Fourier aproxima la función inversa en un intervalo del doble de tamaño al intervalo utilizado por los autores. Otro aspecto importante del método de Crump, es que incorpora una transformación de la aproximación de las series a una que converge rápidamente: propone el uso de una técnica de aceleración de convergencia basada en la aplicación del algoritmo epsilon (McDonald, 1964), que proporciona una aproximación excelente en un rango amplio de funciones, reduciendo el error de redondeo generado en el proceso.

Otro método propuesto para la inversión numérica de la Transformada de Laplace es el desarrollado por De Hoog y Cols.³², que se basa en la aceleración de convergencia de las series de Fourier, obtenida de una inversión de la integral usando la regla trapezoidal. En el trabajo presente, se aplica dicho método en el análisis del comportamiento de las presiones, haciendo uso del programa de cómputo escrito en Matlab desarrollado por Hollenbeck³³.

En los capítulos posteriores, se presenta la aplicación del algoritmo de De Hoog a funciones probadas por Stehfest y Crump, como forma de comparación, así como también su aplicación a las funciones que se encuentran en espacio de Laplace para **yacimientos fracturados con tamaño múltiple de bloques de matriz.**

CAPÍTULO 5 ESTABLECIMIENTO DEL MODELO. ALGORITMO DE DE HOOG

5.1 Algoritmo de De Hoog

El método de Inversión numérica de la Transformada de Laplace, desarrollado por De Hoog y Cols³², se basa en la aceleración de la convergencia de las series de Fourier, obtenida de la inversión de la integral utilizando la regla trapezoidal.

De la definición de la Transformada de Laplace, de una función $f(t)$, para $t \geq 0$:

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad (5.1)$$

y de su transformada inversa dada por:

$$f(t) = \frac{2}{\pi} e^{(\gamma t)} \int_0^{\infty} \operatorname{Re}\{F(s)\} \cos(\omega t) d\omega, \quad (5.2)$$

se obtienen tres formas de calcular $f(t)$, matemáticamente equivalentes, manipulando las partes real e imaginaria:

$$f(t) = \frac{2}{\pi} e^{(\gamma t)} \int_0^{\infty} \operatorname{Re}\{F(s)\} \cos(\omega t) d\omega, \quad (5.3)$$

$$= -\frac{2}{\pi} e^{(\gamma t)} \int_0^{\infty} \operatorname{Im}\{F(s)\} \operatorname{sen}(\omega t) d\omega, \quad (5.4)$$

$$= \frac{1}{\pi} e^{(\gamma t)} \int_0^{\infty} \operatorname{Re}\{F(s)\} e^{i\omega t} d\omega, \quad (5.5)$$

en las cuales $s = \gamma + i w$.

Utilizando la regla trapezoidal con un intervalo de π/T , discretizan las Ecs. 5.3 a 5.5 para obtener las aproximaciones:

$$f_1(t) = \frac{2}{T} e^{(\gamma t)} \left[\frac{F(\gamma)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} \left\{ F \left(\gamma + \frac{i k \pi}{T} \right) \right\} \cos \left(\frac{k \pi t}{T} \right) \right] , \quad (5.6)$$

$$f_2(t) = -\frac{2}{T} e^{(\gamma t)} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} \left\{ F \left(\gamma + \frac{i k \pi}{T} \right) \right\} \operatorname{sen} \left(\frac{k \pi t}{T} \right) \right] , \quad (5.7)$$

$$f_3(t) = \frac{1}{T} e^{(\gamma t)} \left[\frac{F(\gamma)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} \left\{ F \left(\gamma + \frac{i k t}{T} \right) \right\} \exp \left(\frac{i k \pi t}{T} \right) \right] , \quad (5.8)$$

de las cuales para $0 \leq t \leq 2T$, se tiene:

$$f_1(t) = f(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-2\gamma kT) [f(2kT+t) + \exp(2\gamma t) f(2kT-t)] , \quad (5.9)$$

$$f_2(t) = f(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-2\gamma kT) [f(2kT+t) - \exp(2\gamma t) f(2kT-t)] , \quad (5.10)$$

$$f_3(t) = f(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-2\gamma kT) f(2kT+t) . \quad (5.11)$$

En estas ecuaciones, si γT es grande, el error de discretización que se comete cuando la integral es aproximada por las series de Fourier es pequeño, para f_1 y f_2 cuando $0 \leq t \leq T$ y para f_3 cuando $0 \leq t \leq 2T$.

De las últimas expresiones, desarrollan fracciones continuas que se obtienen de la aplicación de un procedimiento de aceleración a las series de potencias y desarrollan cuatro estimaciones, cada una de ellas con características específicas.

Para los resultados numéricos obtenidos, consideran que las principales fuentes de error en la aproximación de $f(t)$ por la suma de las series de Fourier, en lugar de la integral en la Ec. 5.5, son: el error de discretización, gobernado por el valor de los parámetros γ y T ; el error de truncamiento, originado por considerar sólo una suma finita de elementos; y el error de redondeo. El error de truncamiento es el objetivo a mejorar durante el proceso, de manera que se realiza la prueba en dos transformadas, con sus inversas conocidas para evaluar la aceleración del método.

De los resultados obtenidos y comparados mediante tablas, se concluye que la estimación de una fracción continua doblemente acelerada brinda los mejores resultados, siendo su evaluación más estable que si se aplicara el algoritmo epsilon a la suma parcial de las series de potencias de Fourier, método desarrollado por Crump³¹.

5.2 Comparación de Resultados

Una de las formas con la que se puede evaluar la aproximación de un determinado método de inversión numérica de la Transformada de Laplace, es a través de la comparación de las soluciones numérica y analítica de una función para un rango de tiempos establecidos. Para el desarrollo de la investigación, se prueba primeramente con un par de funciones que están expresadas en espacio real y en términos de la Transformada de Laplace, para diferentes valores de la variable independiente en ambos casos, y se realiza una comparación de resultados de algunos ejemplos desarrollados por Solares⁵¹ en los que utilizan los algoritmos de Crump³¹ y de Stehfest³⁰, con la solución numérica obtenida por medio del algoritmo de De Hoog³².

Para comenzar se realiza una comparación con la función identidad, obteniéndose los resultados de la Tabla 5.1.

Tabla. 5.1 Comparación de resultados analíticos para la función identidad, con los correspondientes al algoritmo de De Hoog, para la función $F(s) = \frac{1}{s^2}$.

	Solución analítica	Solución por De Hoog	error
t	$f(t) = t$	$F(s) = \frac{1}{s^2}$	En porcentaje
1	1	1.00000002	2E-06
5	5	5.00000003	6E-07
10	10	10.00000004	4E-06
15	15	15.00000004	2.6667E-06
20	20	20.00000004	2E-06
30	30	30.00000004	1.3333E-06
40	40	40.00000004	1E-06
50	50	50.00000004	8E-07
60	60	60.00000004	6.6667E-07
70	70	70.00000004	5.7143E-07
80	80	80.00000004	5E-07
90	90	90.00000005	5.5556E-07
100	100	100.000001	1E-06

El error se calculó con la siguiente ecuación:

$$error = ((Sol. analítica - Sol. algoritmo) / Sol. analítica) * 100 \quad (5.12)$$

Con los valores observados en la Tabla 5.1, se puede concluir que para la función identidad, $f(t) = t$, el algoritmo de De Hoog, tiene una muy buena aproximación y por lo tanto un alto grado de confiabilidad.

Otra forma de evaluar la aproximación de los resultados obtenidos, es a través del método gráfico, que para la función identidad está dado por la figura siguiente:

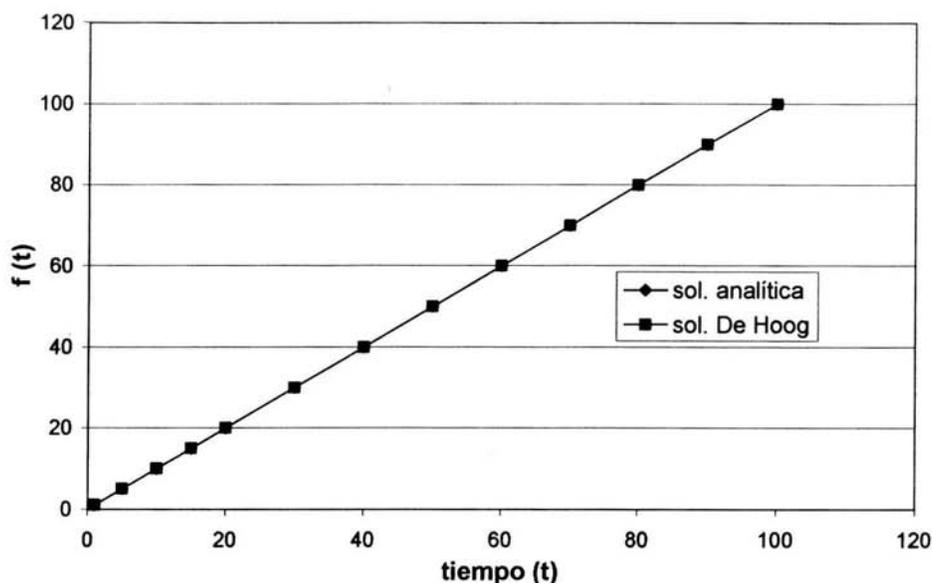


Fig. 5.1 Soluciones analítica y numérica de $F(s) = 1/s^2$ correspondiente a la función identidad, por medio del algoritmo de De Hoog.

Se puede ver en la Fig. 5.1 que la solución analítica para la función $f(t) = t$, comparada con la solución numérica obtenida por medio del algoritmo de De Hoog³², es prácticamente el mismo, por lo que, en forma gráfica no se observa alguna diferencia.

La Tabla 5.2 presenta los resultados del Ejemplo 2, con $F(s) = 1/s^4$, $f(t) = t^3/6$ de la tesis de Solares⁵¹ y los resultados obtenidos por medio del algoritmo de De Hoog.

Tabla 5.2 Comparación de resultados para $F(s) = 1/s^4$, con los correspondientes a la solución analítica.

	Sol. analítica	Stehfest	Crump	De Hoog	Stehfest	Crump	De Hoog
t	$f(t) = t^3/6$	$F(s) = 1/s^4$					
		Porcentaje de error					
1	0.166666667	0.167	0.17	0.16666821	0.2	2	9.26E-04
5	20.833333333	20.709	21.201	20.83333594	0.5968	1.7648	1.25E-05
10	166.6666667	165.67	169.608	166.6751066	0.598	1.7648	5.06E-03
15	562.5	559.137	572.428	562.5087889	0.5978667	1.7649778	1.56E-03
20	1333.3333333	1325.361	1356.867	1333.342479	0.597925	1.765025	6.86E-04
30	4500	4473.094	4579.426	4500.009887	0.5979111	1.7650222	2.20E-04
40	10666.66667	10602.889	10854.936	10666.67733	0.5979156	1.765025	1.00E-04
50	20833.33333	20708.769	21201.048	20833.34482	0.5979088	1.7650304	5.51E-05
60	36000	35784.752	36335.41	36000.01235	0.5979111	0.9316944	3.43E-05
70	57166.66667	56824.861	58175.675	57166.67992	0.5979108	1.7650292	2.32E-05

En esta Tabla se puede observar que sí existe diferencia de resultados en los tres métodos, aunque estas diferencias resulten pequeñas, siendo el algoritmo de Crump³¹ el que tiene el porcentaje mayor de error, y el menor es el algoritmo de De Hoog.

La siguiente figura muestra gráficamente el comportamiento de los resultados de la Tabla 5.2.

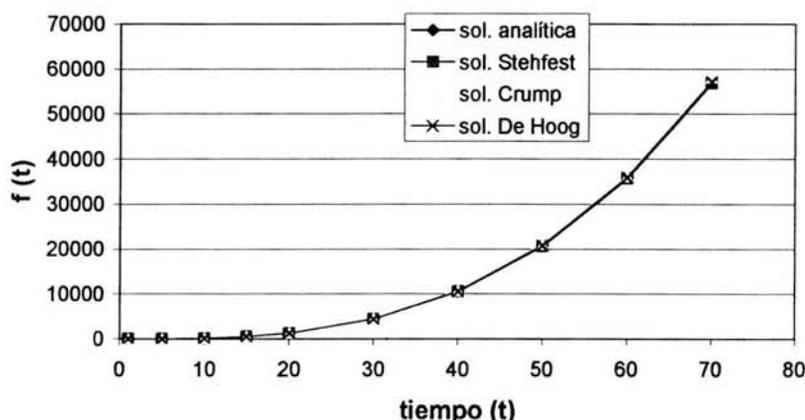


Fig. 5.2 Inversión de la función $F(s) = \frac{1}{s^4}$, por medio de los algoritmos de Stehfest, Crump y De Hoog, así como la solución analítica de la función.

Se puede observar en la Fig. 5.2, que los tres algoritmos presentan resultados satisfactorios, porque no existe prácticamente diferencia entre los resultados obtenidos por medio de los tres algoritmos y la solución analítica; sin embargo, las pequeñas diferencias numéricas que sí existen, se presentan en la Tabla 5.2.

El ejemplo que a continuación se presenta, también fue tomado de la tesis de Solares⁵¹ (Num. 4). Este ejemplo corresponde a la función $f(t) = \text{sen}(t)$ la cual tiene como su Transformada de Laplace a:

$$F(s) = \frac{1}{(s^2 + 1)}.$$

Tabla 5.3 Comparación de resultados para $F(s) = \frac{1}{(s^2 + 1)}$, con los correspondientes a la solución analítica.

t	Sol. analítica.	Stehfest	Crump	De Hoog	Error Sthefest	Error Crump	Error De Hoog
	$f(t) = \text{sen}(t)$		$F(s) = \frac{1}{(s^2 + 1)}$		<i>porcentaje de error</i>		
0.5	0.479425539	0.47942	0.48039	0.479425539	0.001155341	0.20117013	0
1	0.841470985	0.8396	0.84199	0.841471231	0.222346942	0.06167949	2.92345E-05
1.5	0.997494987	0.99808	0.99681	0.997495004	0.058648215	0.06867072	1.70427E-06
2	0.909297427	0.94459	0.90841	0.909297426	3.881301316	0.0975948	1.09975E-07
2.5	0.598472144	0.61119	0.59889	0.598472144	2.125053981	0.03640203	0
3	0.141120008	0.03203	0.14212	0.141120008	77.30300582	0.70861107	0
3.5	-0.350783228	-0.52919	-0.35046	-0.35078323	50.85955022	0.09214466	5.70153E-07
4	-0.756802495	-0.82005	-0.75763	-0.7568025	8.35720091	0.10934227	6.60674E-07
4.5	-0.977530118	-0.7925	-0.97829	-0.97753012	18.92832912	0.07773489	2.04597E-07
5	-0.958924275	-0.55999	-0.9585	-0.95892428	41.60227094	0.04424489	5.21418E-07
5.5	-0.705540326	-0.26966	-0.70455	-0.70554033	61.77964745	0.1403642	5.66941E-07
6	-0.279415498	0.01058	-0.27931	-0.2794155	103.7864757	0.03775667	7.1578E-07
6.5	0.215119988	0.26233	0.21419	0.215119989	21.94589747	0.43231129	4.64857E-07
7	0.656986599	0.37925	0.65638	0.6569866	42.27431723	0.0923305	1.5221E-07
7.5	0.937999977	0.38666	0.93861	0.937999978	58.77825059	0.06503444	1.0661E-07
8	0.989358247	0.32631	0.99029	0.989358248	67.01801385	0.09417751	1.01076E-07
8.5	0.798487113	0.23668	0.79838	0.798487113	70.35894554	0.01341449	0
9	0.412118485	0.14488	0.41113	0.412118485	64.84506149	0.239885457	0
9.5	-0.07515112	0.06612	-0.07557	-0.07515112	187.9827207	0.55738958	0
10	-0.54402111	-0.07956	-0.54326	-0.54402111	85.37556753	0.13990468	1.83816E-07

Solares evaluó los métodos de Stehfest³⁰ y Crump³¹; en la Tabla 5.3 se presentan los resultados que obtuvo Solares, así como los obtenidos por medio del algoritmo de De Hoog³².

En este ejemplo, se puede observar que para algunos valores de tiempo, el algoritmo de Stehfest genera resultados diferentes al obtenido por medio de la solución analítica y los otros dos métodos, generando un porcentaje de error muy significativo, lo que se puede apreciar un poco mejor por medio de la siguiente gráfica:

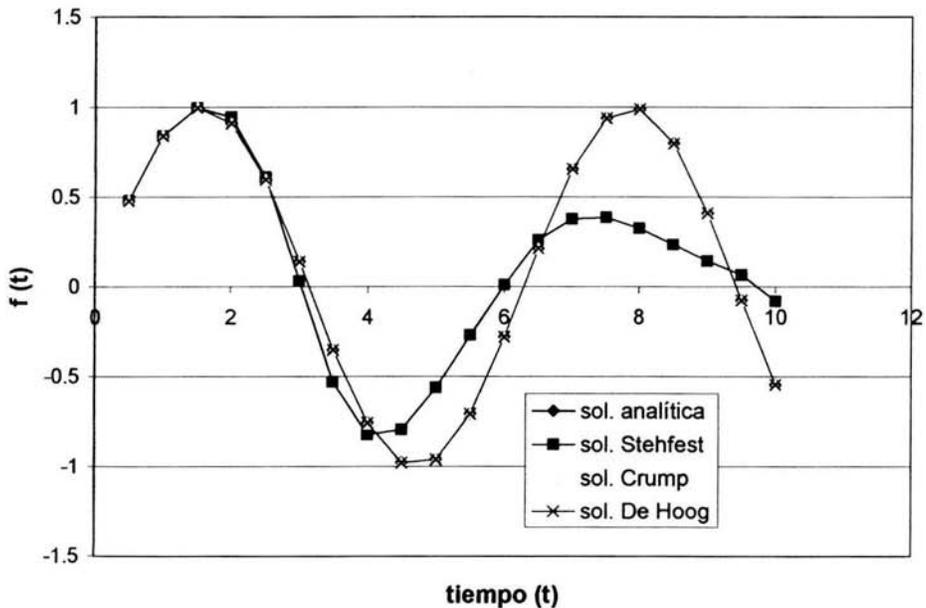


Fig. 5.3 Soluciones analítica y numéricas a la ecuación $f(t) = \text{sen}(t)$ por medio de los algoritmos de Stehfest, Crump y De Hoog.

Para este caso en especial, se puede observar en la Fig. 5.3, que existe una separación entre la curva generada por los resultados obtenidos del algoritmo de Stehfest y los obtenidos por los otros dos métodos. Por lo

que se puede concluir para este caso, que los algoritmos de Crump y de De Hoog generan una mejor aproximación.

Otra forma de ver esta aproximación es por medio de una gráfica que muestre los porcentajes de error generados por cada uno de los métodos evaluados, para este caso en especial.

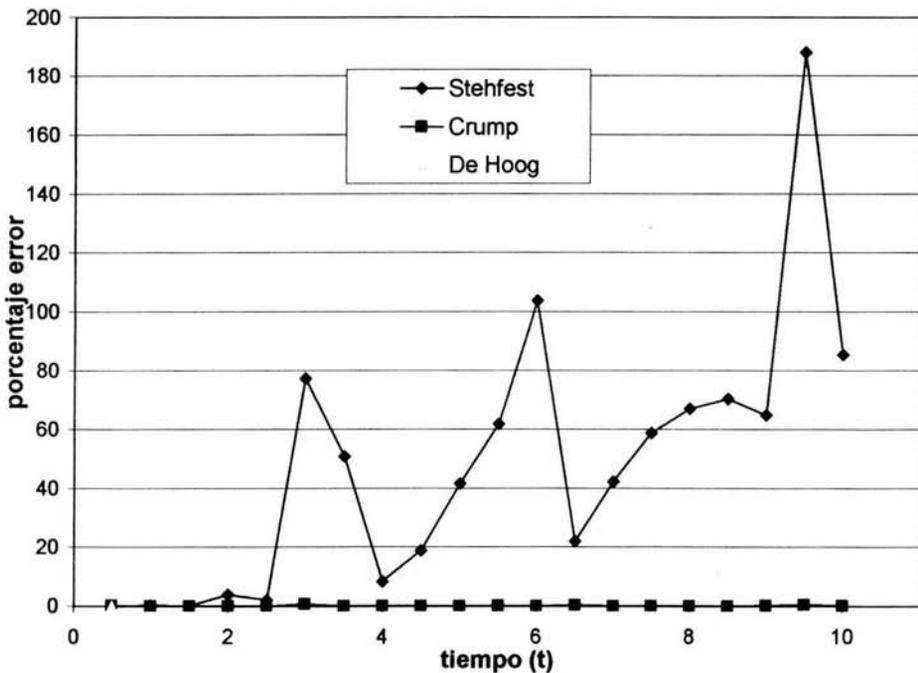


Fig. 5.4 Porcentajes de error obtenidos de los resultados mostrados por los algoritmos de Stehfest y Crump (Solares⁵¹) y los correspondientes a De Hoog.

En esta figura se observa claramente que el error obtenido por el método de Stehfest, es muy grande para el rango de tiempo evaluado, lo que indica que para este caso, el método de Stehfest no es el más apropiado para la evaluación de esta Transformada, no así los métodos de Crump y de De Hoog, los cuales tienen un error de prácticamente cero.

5.3 Aplicación de la Transformada de Laplace a Problemas de Flujo en Yacimientos

El siguiente ejemplo fue tomado de un artículo publicado en 1949, por A. F. Van Everdingen y Cols.³⁶, en el que se tiene la aplicación de la Transformada de Laplace a problemas de flujo en yacimientos. El estudio se limita a condiciones donde el flujo del fluido obedece a la ecuación de difusividad, Everdingen y Cols., dividen su estudio en dos partes, la primera, llamada caso de gasto constante y, segundo, caso de presión constante, los cuales no son independientes uno del otro.

Como el desarrollo de la teoría, y las ecuaciones utilizadas por A. F. Everdingen, no son parte del objetivo de ésta tesis, solo nos limitaremos a utilizar lo que sea necesario para nuestro propósito.

Para el caso de gasto constante y partiendo de la ecuación de difusividad, Everdingen y Cols. llegan a la solución general de este caso (Ec. VI-1 de ésta referencia):

$$\bar{P}_{(r,s)} = A I_0(r\sqrt{s}) + B K_0(r\sqrt{s}), \quad (5.13)$$

Donde $I_0(r\sqrt{s})$ y $K_0(r\sqrt{s})$, son las funciones modificadas de Bessel de primer y segunda clase, respectivamente, y de orden cero. A y B , son constantes que satisfacen una ecuación diferencial de segundo orden. $\bar{P}_{(r,s)}$, es la Transformada de Laplace de la caída de presión en un punto de la formación. Como primera condición se tiene: $A = 0$, y como segunda, se tiene la siguiente relación:

$$B = \left(\frac{1}{s^{3/2}} \right) K_1(\sqrt{s}), \quad (5.14)$$

Por lo tanto, la Transformada de Laplace para la caída de presión a gasto constante, para un medio infinito, queda como:

$$P(r,s) = \frac{K_0(r\sqrt{s})}{s^{3/2} K_1(r\sqrt{s})}, \quad (5.15)$$

Partiendo de esta ecuación, se tiene, para tiempos pequeños, y considerando un radio unitario, la siguiente ecuación (VI-6 de esta referencia):

$$\bar{P}(t,s) = \frac{1}{s^{3/2}}, \quad (5.16)$$

Para determinar la Transformada Inversa, de esta nueva ecuación, Everdingen y cols.³⁹, utilizaron las tablas de transformación de Campbell y Foster.

$$P(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} t^{1/2}. \quad (5.17)$$

Para tiempos grandes, (Everdingen y cols., lo consideran a partir de $t > 100$) y haciendo a:

$$K_0(x) \cong -\left[\ln \frac{x}{2} + 0.5772 \right],$$

$$K_1(x) \cong \frac{1}{x}, \quad (5.18)$$

se llega a la siguiente expresión:

$$\bar{P}(t,s) = \frac{-\ln s}{2s} + \frac{(\ln 2 - 0.5772)}{s}, \quad (5.19)$$

Utilizando las tablas de Campbell y Foster³⁶, se obtiene su Transformada Inversa:

$$P(t) = \frac{1}{2} [\log t + 0.80907]. \quad (5.20)$$

Para el caso de presión constante, siguiendo un procedimiento similar que para el caso de gasto constante, se llega a la ecuación (VI-27 de esta misma referencia):

$$\bar{Q}_{(s)} = \frac{K_1(\sqrt{s})}{s^{3/2} K_0(\sqrt{s})}, \quad (5.21)$$

Para la obtención de la Transformada Inversa, Everdingen y Col. utilizaron la formula de inversión de Mellin³⁶,

$$Q_{(t)} = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{(1 - e^{-u^2 t}) du}{u^3 [J_0^2(u) + Y_0^2(u)]}, \quad (5.22)$$

La simplificación de $\bar{Q}_{(s)}$ para tiempos pequeños

$$\bar{Q}_{(s)} = \frac{1}{s^{3/2}}, \quad (5.23)$$

y su Transformada Inversa:

$$Q_{(t)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} t^{1/2}, \quad (5.24)$$

En la Tabla 5.4 podemos observar la comparación de algunos de los resultados que obtuvieron Everdingen y Col. (Tabla I de esta referencia) con los obtenidos por medio del algoritmo de De Hoog, para el caso de gasto constante.

En esta Tabla se muestra el resultado de evaluar las Ecs. 5.19 y 5.20, (en donde la Ec. 5.20 es la solución analítica de 5.19, para diferentes valores de tiempo ($t > 100$) para corroborar lo expresado por Everdingen, de que a tiempos mayores de 100, es conveniente usar la Ec. 5.19.

Tabla 5.4 Comparación de resultados de la Tabla I de Everdingen³⁶, con los obtenidos por el algoritmo de De Hoog para el caso de gasto constante.

	Everdingen	Solución analítica	Solución por De Hoog
t	$p(t)$ Tabla I	Ec. 5.19	Ec. 5.20
100	2.723	2.7071187	2.70712009
150	2.921	2.90985266	2.90985265
200	3.046	3.0536937	3.05369368
250	3.173	3.16526548	3.16526546
300	3.263	3.25642625	3.25642624
400	3.406	3.40026729	3.40026727
500	3.516	3.51183907	3.51183905
600	3.608	3.60299985	3.60299983
700	3.684	3.68007519	3.68007517
800	3.75	3.74684088	3.74684086
900	3.809	3.8057324	3.80573238
1000	3.86	3.85841266	3.85841264

De la Tabla 5.4 se puede observar que conforme aumenta el tiempo, los resultados que se obtienen por medio del algoritmo de De Hoog son mucho más parecidos a los obtenidos de la Tabla I de Everdingen. Lo cual muestra que el algoritmo de De Hoog, puede utilizarse en este tipo de problemas de la Ingeniería de Yacimientos.

En una gráfica de los porcentajes de error obtenidos por medio de la solución analítica y los obtenidos por Everdingen y De Hoog, se puede observar que el porcentaje de error que se obtiene por medio del algoritmo de De Hoog, es prácticamente cero.

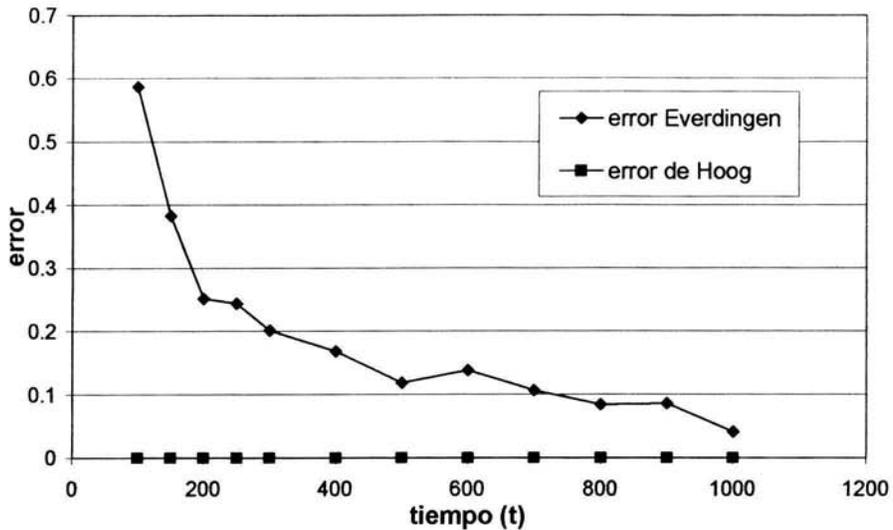


Fig. 5.5 Porcentajes de error obtenidos de los resultados mostrados por Everdingen (Tabla I de esta referencia) y los correspondientes a De Hoog.

Para los resultados obtenidos por Everdingen se observa que a medida que el tiempo aumenta, el porcentaje de error disminuye, mientras que para el algoritmo de De Hoog, el porcentaje de error es constante y muy cercano a cero.

Para el caso de presión constante, se utilizaron nuevamente algunos de los datos obtenidos en la Tabla I de Everdingen, y se compararon con los resultados que se obtuvieron aplicando el algoritmo de De Hoog a la Ec. 5.21.

Tabla 5.5 Comparación de resultados de la Tabla I de Everdingen³⁶, con los obtenidos por el algoritmo de De Hoog para el caso de presión constante.

	Everdingen	Solución por De Hoog
t	$Q_{(t)}$ Tabla I	Ec. 5.21
100	43.01	4.37E+01
150	59.8	6.04E+01
200	75.86	7.63E+01
250	91.2	9.15E+01
300	105.8	1.06E+02
400	134.8	1.35E+02
500	162.4	1.63E+02
600	189.7	1.90E+02
700	216	2.16E+02
800	242.3	2.42E+02
900	267.7	2.68E+02
1000	293.1	2.93E+02
1500	413.6	4.16E+02
2000	531.5	5.33E+02
10000	2196	2.20E+03
15000	3146	3.16E+03
20000	4079	4.09E+03

ESTA TESIS NO SALE DE LA BIBLIOTECA

De la Tabla 5.5 se puede concluir que a medida que el tiempo aumenta, la aproximación en los resultados también aumenta.

Para tiempos pequeños Everdingen y Col.³⁶ recomiendan el uso de la misma ecuación que se utiliza para tiempos pequeños en el caso de gasto constante (Ec. 5.23).

5.4 Análisis y Conclusiones

La aplicación de algunos métodos de inversión numérica a funciones que están en términos de la Transformada de Laplace, además de la solución en el espacio real, nos lleva a concluir lo siguiente:

1. El uso del algoritmo de De Hoog y Cols³², en la función identidad, $f(t)=t$, muestra resultados muy aproximados a la solución analítica, con un error de 10^{-6} en promedio, por lo que se puede considerar de un alto grado de confiabilidad la solución obtenida por este algoritmo, en comparación con los resultados obtenidos por Stehfest³⁰ y Crump³¹, los cuales muestran una aproximación menor.
2. Para el segundo ejemplo comparativo, se observa de la Tabla 5.2 que las soluciones numéricas obtenida por los tres métodos de inversión son semejantes a su solución analítica, con excepción de los resultados obtenidos por Crump, que en términos del porcentaje de error, es el método que tiene mayor error en comparación con las soluciones obtenidas por Stehfest y De Hoog, siendo los resultados de este último los de menor error, que es del orden de 10^{-4} . Los datos obtenidos por el método de Stehfest muestran aproximadamente un error del 30% al generado por Crump; gráficamente no se observa gran diferencia entre la solución analítica y las soluciones numéricas obtenidas por los tres métodos. Por lo mismo se recomienda la aplicación del algoritmo de De Hoog a funciones que se encuentran en el espacio de Laplace, debido a que se genera menor error en los resultados.
3. Para la función trigonométrica $f(t)=sen(t)$, donde t está en radianes, se observa gráficamente que la solución obtenida por el Algoritmo de Stehfest se separa de las soluciones obtenidas por Crump y De Hoog, generando valores de error demasiado grandes en comparación con

los otros dos métodos. El error generado por la aplicación del Algoritmo de De Hoog es muy pequeño, del orden de 10^{-7} , incluso para algunos valores de " t " se llegan a tener valores de cero. Los valores obtenidos por el método de Crump tienen una gran aproximación a la solución analítica, con un error pequeño; los resultados mostrados por Stehfest para este caso son los menos confiables, ya que tienen un mayor error. Por lo anterior se concluye que el algoritmo de De Hoog, seguido por el algoritmo de Crump ofrecen gran confiabilidad en los resultados obtenidos, en particular en la aplicación a esta función.

4. Por lo anteriormente visto, se tienen bases suficientes para la aplicación del algoritmo de De Hoog a problemas de YNF, en el caso particular a la investigación realizada por van Everdingen y Hurst³⁶, que para nuestro conocimiento fue una de las primeras investigaciones en utilizar la Transformada de Laplace en problemas de flujo en yacimientos.

CAPÍTULO 6 APLICACIÓN Y RESULTADOS PARA YNF

6.1 Introducción

El Yacimiento Naturalmente Fracturado que se utiliza como modelo, se considera compuesto por bloques horizontales de espesor variable h_{mai} , el cual puede tener un número finito NB de tamaños de bloques de matriz $h_{ma1}, h_{ma2}, \dots, h_{maNB}$, o bien la variación de h_{ma} puede ser continua, estando los bloques separados por fracturas de espesor h_f .

Cuando se tiene un número finito NB de tamaños de bloques se cumple que:

$$\sum_{i=1}^{NB} f_i(h_{mai}) = 1 \quad (6.1)$$

donde la función f_i representa el volumen de los bloques de tamaño h_{mai} , expresado en fracción del volumen total de la matriz del medio poroso fracturado. Si la variación de h_{ma} es continua⁴⁴, se tiene

$$\int_{h_{D\min}}^{h_{D\max}} f_D(h_D) dh_D = 1; \quad (6.2)$$

donde $h_D = h_{ma} / h_{m\acute{a}x}$ es el espesor variable de los bloques, en forma adimensional, que varía desde $h_{D\min} = h_{mi\ n} / h_{m\acute{a}x}$ hasta $h_{D\max} = 1$ y $f_D(h_D)$ es la función densidad de probabilidad de la variable aleatoria h_D y describe la forma en la que se presenta la variabilidad del tamaño de bloques de la matriz.

La red de fracturas tiene una permeabilidad equivalente k_{fb} , una compresibilidad total c_{jf} y una porosidad ϕ_{fb} , donde el subíndice b indica que el parámetro correspondiente se define usando el volumen total (fracturas y matriz) del medio poroso fracturado. Por otro lado, los bloques tienen una permeabilidad k_{ma} , una porosidad ϕ_{ma} y una compresibilidad total c_{ima} .

Se suponen las siguientes características de flujo:

- El fluido se mueve hacia el pozo sólo a través de la red de fracturas.
- El flujo en las fracturas obedece a la ley de Darcy.
- Los gradientes de presión en los yacimientos son pequeños, excepto cerca de los pozos.
- Los efectos gravitacionales son despreciables.
- La red de fracturas se comporta como un medio poroso homogéneo e isotrópico.
- El flujo hacia el pozo es radial.
- Una vez que se establece una diferencia de presiones en el sistema matriz-fracturas debido a la producción de los pozos, los bloques de matriz actúan como una fuente que provee de fluido a las fracturas. El flujo en este sistema ocurre en régimen transitorio y es afectado por el tamaño h_{ma} variable de los bloques.
- El yacimiento es infinito en la dirección radial, la presión inicial es uniforme y el gasto es constante en los pozos.

La ecuación de flujo correspondiente para el caso de un yacimiento naturalmente fracturado con un número finito de tamaños de bloques es¹⁹:

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial p_{f,D}}{\partial r_D} \right) - \frac{k_{ma}}{k_{fb}} r_w^2 \sum_{i=1}^{NB} f_i A_{fi} \frac{2hk_{fb}\pi}{q\mu} (\nabla \Delta p_{mat}(h_{mai}))_{surf} = \frac{\phi_{fb} c_{jf}}{(\phi c_i)_i} \frac{\partial p_{f,D}}{\partial t_D}, \quad (6.3)$$

con la condición inicial:

$$p_{fd}(r_D, 0) = 0, \quad 1 < r_D < \infty, \quad (6.4)$$

y condiciones de frontera:

$$\left(r_D \frac{\partial p_{fd}}{\partial r_D} \right)_{r_D=1} = -1, \quad t_D > 0$$

$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} p_{fd}(r_D, t_D) = 0, \quad t_D > 0$$
(6.5)

en donde $(\nabla \Delta p_{mai}(h_{mai}))_{surf}$, es el gradiente de la diferencia de presiones en la cara de un bloque de tamaño h_{mai} , y los grupos adimensionales se definen como:

Radio adimensional, r_D :

$$r_D = \frac{r}{r_w} \quad (6.6)$$

Presión adimensional en las fracturas, p_{fd} :

$$p_{fd} = k_{fb} h \Delta p_f / (\alpha B q \mu) \quad (6.7)$$

Tiempo adimensional, t_D :

$$t_D = \frac{\beta t k_{fb}}{(c_i \phi)_i r_w^2 \mu} \quad (6.8)$$

y por último

$$(c_i \phi)_i = \phi_{fb} c_{fi} + \phi_{nkb} c_{ima} \quad (6.9)$$

La solución, en el espacio de Laplace⁴⁹ es:

$$p_{wD} = \frac{K_0(x)}{s x K_1(x)} \quad (6.10)$$

donde \bar{p}_{wD} es la transformada de Laplace de la presión en el pozo, en forma adimensional, y K_0, K_1 son las funciones de Bessel modificadas de segunda clase, de orden cero y uno⁴⁴; para valores pequeños del argumento x , K_0, K_1 se pueden aproximar como¹⁹:

$$K_0(x) = -\left(\ln \frac{x}{2} + 0.577216\right) \quad , \quad (6.11)$$

$$K_1(x) = \frac{1}{x} \quad (6.12)$$

Sustituyendo en la Ec. 6.10:

$$\bar{p}_{wD} = -\left(\ln \frac{x}{2} + 0.577216\right) / s = -\frac{1}{s} \left\{ \ln \left[s^{1/2} [\omega + (1-\omega)g]^{1/2} \right] - 0.115934 \right\} \quad (6.13)$$

En estas ecuaciones:

$$x = s^{1/2} [\omega + (1-\omega)g]^{1/2} \quad (6.14)$$

$$g(f_i, \eta_{mD_i}, s) = 2 \sum_{i=1}^{NB} f_i \sqrt{\eta_{mD_i}} / s \tanh \left(\frac{1}{2} \sqrt{s / \eta_{mD_i}} \right) \quad (6.15)$$

$$\omega = \phi_{fb} c_{gf} / (\phi c_t)_i \quad (6.16)$$

$$\eta_{mD_i} = k_{ma} (\phi c_t)_i r_w^2 / k_{fb} (\phi c_t)_{mi} h_{mci}^2 \quad (6.17)$$

Ahora bien, si se incluyen los efectos de almacenamiento C_D y daño en el pozo S , la solución se obtiene a partir de la ecuación¹⁹:

$$\bar{p}_{wD} = (\bar{p}_{wD} + S/s) / (1 + sSC_D + s^2 C_D \bar{p}_{wD}) \quad (6.18)$$

Sustituyendo el resultado de la Ec. 6.10 en la Ec. 6.18:

$$P_{wdl} = \frac{K_0(x) + SxK_1(x)}{s\{C_D s[K_0(x) + SxK_1(x)] + xK_1(x)\}} \quad (6.19)$$

La obtención de la presión adimensional p_{wd} a partir de la Ec. 6.10 se obtiene mediante el algoritmo de De Hoog y Cols³², y se realiza un análisis de estos resultados, comparándolos con los obtenidos⁴⁹ por medio del algoritmo de Stehfest.

Cabe mencionar que, durante la investigación realizada sobre el algoritmo de De Hoog, no se encontró aplicación alguna en el área de la Ingeniería de Yacimientos, por lo que consideramos que este algoritmo, abre un amplio campo de investigación y aplicaciones, en lo que se refiere a problemas que involucren la Transformada de Laplace y su solución al espacio real.

6.2 Resultados Obtenidos para un Yacimiento Homogéneo

Cuando se considera un yacimiento homogéneo, el valor de ω es igual a 1; con lo cual la Ec. 6.14 se simplifica a: $x = s^{1/2}$; con esto, el modelo se reduce a la ecuación desarrollada por Agarwal y Cols⁴, para este tipo de yacimientos, Ec. 6.19.

Para el ejemplo que se presenta, se utilizaron los datos de Agarwal y Cols⁴, y los resultados de estos autores (Tabla 3) y los de la tesis de Rodríguez⁴⁹, estos obtenidos con el algoritmo de Stehfest.

Tabla 6.1 Comparación de resultados de $p_{w(t)}$ obtenidos por medio del algoritmo de De Hoog y Cols³² y los obtenidos de la tesis de Rodríguez⁴⁹ (Stehfest) y del trabajo de Agarwal y Cols⁴.

t_D	$p_{w(t)}$		
	Tabla 3	Stehfest	De Hoog
10^2	0.7975	0.7998	0.792872
10^3	3.2681	3.2637	3.263479
10^4	4.9567	4.9578	4.956353
10^5	6.1548	6.1554	6.154792
10^6	7.3116	7.3121	7.311562
10^7	8.4635	8.4640	8.463502
10^8	9.6149	9.6154	9.61487

Se observa que de los resultados obtenidos por medio del algoritmo de De Hoog, comparados con los de otras dos referencias^{49,4}, se obtiene una muy buena aproximación; esto se puede apreciar mejor con la siguiente tabla:

Tabla 6.2 Comparación del porcentaje de error entre los resultados obtenidos por los métodos de Stehfest y De Hoog.

t_D	Error	
	Stehfest	De Hoog
10^2	0.28840125	0.58031348
10^3	0.1346348	0.14139714
10^4	0.02219218	0.00700063
10^5	0.00974849	0.00012998
10^6	0.00683845	0.00051972
10^7	0.00590772	2.3631E-05
10^8	0.00520026	0.00031202

El error se calculó tomando como base los valores propuestos por Agarwal y Cols⁴. Se observa que el error involucrado en la aplicación del Algoritmo de De Hoog, es mucho menor a partir de $t_D=10^4$.

6.3 Resultados Obtenidos Considerando un Solo Tamaño de Bloques

La comparación se realizó utilizando datos obtenidos del trabajo de Cinco y Cols.¹⁹, en el que se toma en cuenta el tamaño de bloques; sin embargo, para este ejemplo se utilizaran los datos correspondientes a $NB=1$ (Fig. 6 de esta referencia), al igual que los resultados obtenidos por Rodríguez⁴⁹, para este mismo caso, en donde se tiene: $S=1$ y $\eta_{maD}=10^{-8}$.

Tabla 6.3 Comparación de resultados de p_{wD} obtenidos por medio del algoritmo de De Hoog y Cols, y los obtenidos de la tesis de Rodríguez⁴⁹(Stehfest) y del trabajo de Cinco y Cols¹⁹ (Fig. 6 de esta referencia).

t_D	p_{wD}		
	Ref. 19	Stehfest	De Hoog
10^2	4.95	4.975	4.82739504
10^3	5.95	6.005	5.91645799
10^4	6.80	6.916	6.90497149
10^5	7.45	7.658	7.72753234
10^6	8.10	8.294	8.42395238
10^7	8.75	8.880	9.46810962
10^8	9.65	9.630	10.6193948
10^9	10.80	10.767	11.7706923

De la Tabla 6.3, se puede observar que para valores de t_D menores a 10^7 , los resultados obtenidos en las tres columnas son muy parecidos, no

así con los últimos tres ($t_D > 10^7$), lo cual probablemente se deba a la precisión en cada uno de los métodos usados.

6.4 Resultados Obtenidos Considerando Variabilidad en el Tamaño de Bloques

Para este ejemplo, se tomaron los datos y resultados de la Fig. 15 de Cinco¹⁹, en el cual, se tiene para una distribución continua, cinco diferentes tamaños de bloque ($NB = 5$), con sus respectivos valores de η_{mal} ($\eta_{mal_i} = 10^{-8}, 5 \times 10^{-8}, 10^{-7}, 5 \times 10^{-7}, 10^{-6}$) y de f_i ($f_1 = f_2 = \dots = f_5 = 0.2$), estos últimos valores significan que el mismo tamaño de bloques ocupan el mismo espacio de poros, también cuenta con el valor $w = 10^{-2}$. Rodríguez⁴⁹ comparó estos resultados, con los que él obtuvo para los mismos datos, por medio del algoritmo de Stehfest. Estos dos resultados se muestran en la siguiente tabla, haciendo la respectiva comparación con el algoritmo de De Hoog.

Tabla 6.4 Comparación de resultados de p_{wD} obtenidos por medio del algoritmo de De Hoog y Cols, y los obtenidos de la tesis de Rodríguez⁴⁹ (Stehfest) y del trabajo de Cinco y Cols¹⁹.

t_D	p_{wD}		
	Ref. 19	Stehfest	De Hoog
10^4	6.03	6.02	6.045782
10^5	6.60	6.46	6.634683
10^6	7.45	7.40	7.482149
10^7	8.50	8.55	8.491799

Podemos decir, en términos generales, que los resultados tienen una buena aproximación entre sí, ya que muestran resultados muy parecidos.

A continuación se muestra la relación que existe entre los resultados de los tres tipos de yacimientos planteados

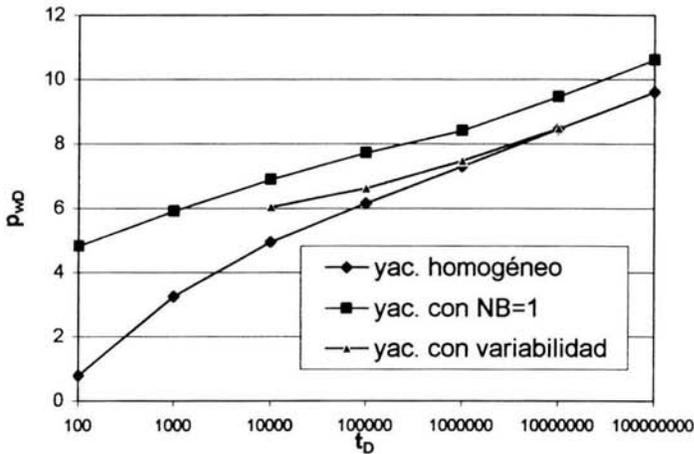


Fig. 6.1 Comparación de los resultados obtenidos por medio del algoritmo de De Hoog, para los tres tipos de yacimientos planteados.

En esta figura se observa que a medida que t_D aumenta, es posible que las tres líneas converjan en una sola, lo cual se debe probablemente a que, para los tres casos se pasa de una zona de transición, a una zona de comportamiento homogéneo, en el que los tres tipos de yacimientos se comporten de forma muy parecida. También se puede observar que para el yacimiento homogéneo, se tienen las menores caídas de presión y para el caso del yacimiento con $NB=1$, se tienen las mayores, que afectan de manera directa la recuperación de hidrocarburos.

CAPÍTULO 7 CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Con base en la teoría y resultados presentados en el trabajo, se pueden establecer las conclusiones y recomendaciones siguientes:

1. En la literatura se encontró que en el área de la Ingeniería de Yacimientos, el método comúnmente usado para la solución de la inversión de la Transformada de Laplace, es el método de Stehfest y sólo en una tesis de licenciatura⁵¹ y en otro trabajo³³ se encontró un algoritmo diferente.
2. La utilización del Algoritmo de De Hoog, como invertidor numérico, no se ha aplicado en el área de Ingeniería de Yacimientos, sobre todo en pruebas de variación de presión.
3. Los resultados obtenidos mediante la aplicación del Algoritmo de De Hoog, muestran gran aproximación a la solución analítica de funciones probadas con anterioridad y finalmente probadas en ecuaciones de flujo para YNF, mostrando excelentes resultados, por lo que lleva a concluir que el método empleado en la investigación es muy recomendable para su aplicación, debido a su aproximación, aumentando los niveles de confiabilidad y mejorando de esta forma la evaluación cualitativa y cuantitativa de las formaciones y por consiguiente la interpretación del comportamiento del yacimiento para su explotación.
4. El análisis adecuado de toda información disponible de un yacimiento, como la de geología, registros geofísicos, datos sismológicos, datos de producción, de núcleos de laboratorio, así como la aplicación de sistemas sofisticados de cómputo, en complemento con lo datos de

pruebas de variación de presión realizadas en un pozo, y el uso de modelos matemáticos que representan el comportamiento de las formaciones productoras, aumentan la calidad del diagnóstico de los comportamientos primario y secundario de un YNF, a la vez que contribuye a una explotación racional de los hidrocarburos contenidos en los mismos.

5. En una gráfica log-log de p_D vs t_D/C_D , para tiempos cortos, los datos obtenidos están totalmente controlados por el almacenamiento del pozo; la producción que se obtiene es debida a la descarga del mismo, por lo que los datos no describen el comportamiento del yacimiento y no se pueden analizar para realizar una evaluación cualitativa y cuantitativa de las propiedades de la formación. La zona de transición, que se presenta entre la zona de flujo de fracturas y la zona de flujo total del sistema, es la que permite llevar a cabo una evaluación de las propiedades del sistema, incluyendo el tamaño y distribución de bloques.
6. El uso de la función derivada sobre datos de presiones adimensionales, como herramienta complementaria en el análisis de pruebas de variación de presión para YNF, es de gran importancia, ya que revela de mejor manera el comportamiento de doble porosidad del sistema y define mejor los límites de los regímenes característicos, por lo que aumenta la confianza en los resultados del análisis de pruebas en este tipo de formaciones.
7. La representación gráfica de los modelos en términos de la primera y segunda derivadas, simplifica el procedimiento de análisis y proporciona una mejor definición en la determinación de los parámetros característicos de un YNF.

8. Las herramientas de alta resolución (registros de producción, etc.) y de alta densidad de muestreo utilizadas en la actualidad, en pruebas de variación de presión, brindan una ventaja significativa en la caracterización de un yacimiento de doble porosidad, puesto que permiten la aplicación de modelos matemáticos y computacionales sofisticados a los datos e información recopilados.
9. La introducción de parámetros de flujo, ω y λ , para YNF, ha sido de vital importancia en la evaluación del comportamiento de dichas formaciones productoras, ya que han contribuido de manera significativa en el análisis de pruebas de variación de presión.
10. El comportamiento de presión de un pozo en un sistema homogéneo puede ser similar al de un YNF con un solo tamaño de bloques de matriz, así como también al de un YNF con tamaño de bloques múltiples, como se puede observar en la Fig. 6.1, en la que se muestran los valores obtenidos por medio del Algoritmo de De Hoog, tendiendo a ser semejante conforme el tiempo, t_D , aumenta. De la Fig. 6.1 se puede deducir que no se puede identificar la naturaleza o tamaño de los bloques de matriz únicamente con un análisis de la primera derivada de variación de presión, por lo que es necesario información adicional de otras fuentes.

Recomendaciones

1. Para un desarrollo futuro de esta investigación, se recomienda hacer uso de herramientas más útiles, como el uso del algoritmo de De Hoog, para la determinación de heterogeneidades en un YNF: la aplicación de la primera y segunda derivadas a las ecuaciones de flujo consideradas.

2. Aplicar el método de De Hoog al resultado del punto anterior y determinar la aproximación y su grado de confianza sobre el resultado obtenido para el análisis de pruebas de variación de presión que se está evaluando.
3. Comprobar de una manera real el método de De Hoog, con datos de pruebas hipotéticas que hayan sido analizadas por otros métodos o sobre pruebas de campo realizadas, con el fin de desarrollar una evaluación cualitativa y cuantitativa del método y posteriormente una adecuada interpretación del comportamiento del yacimiento para los procesos de explotación, como recuperación secundaria y mejorada de los hidrocarburos.

NOMENCLATURA:

A_{fb}	Área de las fracturas por volumen total de roca, 1/pies.
A_{fD}	Área adimensional de las fracturas.
A_{fma}	Área de las fracturas por volumen de matriz, 1/pies.
c	Compresibilidad, pg^2/lb .
c_{fb}, c_{pf}	Compresibilidad total de la red de fracturas, pg^2/lb .
c_{ma}, c_{pm}	Compresibilidad total de la matriz, pg^2/lb .
C_D	Constante de almacenamiento en forma adimensional.
C_f	Capacidad de almacenamiento de fracturas.
C_{Df}	Capacidad de almacenamiento adimensional de fracturas.
C_m	Capacidad de almacenamiento de matriz.
C_{Dm}	Capacidad de almacenamiento adimensional de matriz.
e	Constante de Euler.
$f(h_{ma})$	Función frecuencia del tamaño de bloques, 1/pies.
$f_D(h_D)$	Función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria h_D , en forma adimensional.
$F(s)$	Función en el espacio de Laplace.
F_h	Cociente $h_{\text{mín}}/h_{\text{máx}}$.
h_D	Espesor del bloque en forma adimensional.
h_f	Espesor de las fracturas, pies.
$h_{\text{máx}}$	Espesor máximo de los bloques, pies.
$h_{\text{mín}}$	Espesor mínimo de los bloques, pies.
k_f	Permeabilidad de las fracturas, mD.
k_{ma}	Permeabilidad de la matriz, mD.
K_0	Función de Bessel de segunda clase de orden cero.
K_1	Función de Bessel de segunda clase de orden uno.
N	Número de términos de la expresión de Stehfest.
NB	Número de tamaños de bloques de una distribución discreta.
$p(h_D)$	Función de densidad de probabilidad.
p_i	Presión inicial (lb/pg^2) en el pozo.

p_{wD}	Presión adimensional en el pozo.
p'_{wD}	Derivada de p_{wD} .
p''_{wD}	Segunda derivada de p_{wD} .
P_{wD}	Transformada de Laplace de p_{wD} .
P_{wf}	Presión de fondo fluyendo en el pozo (lb/pg ²).
$P_{(r,s)}$	Transformada de Laplace de la caída de presión en un punto de la formación.
q	Gasto superficial.
r_D	Radio adimensional.
s	Variable en el espacio de Laplace.
S	Daño en la formación, adimensional.
S_o	Saturación de aceite, adimensional.
S_w	Saturación de agua, adimensional.
t	Vector columna del tiempo
t_D	Tiempo adimensional.
V_i	Función en el algoritmo de Stehfest.
V_{rf}	Volumen relativo de fracturas.
V_{rm}	Volumen relativo de roca.
V_R	Volumen de roca.
η_{maD}	Difusividad hidráulica de la matriz, en forma adimensional.
λ	Coefficiente de flujo matriz-fracturas.
μ	Viscosidad del fluido, cp.
ϕ	Porosidad.
ω	Almacenamiento de las fracturas.
ω_{ma}	Almacenamiento de la matriz.

BIBLIOGRAFÍA:

- ❖ Abramowitz M., Stegun A. I.: Handbook of Mathematical Functions, with Formulas, Graphs and Mathematical Tables, Ed. Dover, New York, 1965, 1046 págs.
- ❖ Aguilera R.: Naturally Fractured Reservoirs, Ed. Penwell Publishing Company, Tulsa, 1980, 703 págs.
- ❖ Earlougher R. C.: Advances in Well Test Analysis, Ed. Society of Petroleum Engineers of Aime, New York, 1977, 264 págs.
- ❖ Kreyszig E.: Advanced Engineering Mathematics, Ed. J. Wiley, New York, 5a. Edición, 1983, 1080 págs.
- ❖ Raghavan R.: Well Test Analysis, Ed. Prentice Hall, New Jersey, 1993. 558 págs.
- ❖ Saidi A. M.: Reservoir Engineering of Fractured Reservoirs: Fundamental and Practical Aspects, Ed. Total, Paris, 1987, 864 págs.

REFERENCIAS

1. Warren, J.E. y Root, J.R.: "The Behavior of Naturally Fractured Reservoirs", SPEJ (Septiembre, 1963) 245-255.
2. Odeh, A.S.: "Unsteady-State Behavior of Naturally Fractured Reservoirs", SPEJ (Marzo, 1965) 60-65.
3. Kazemi, H.: "Pressure Transient Analysis of Naturally Fractured Reservoirs With Uniform Fracture Distribution", SPEJ (Diciembre, 1969) 451-462.
4. Agarwal, R.G., Al-Hussainy, R. y Ramey. H.J.: "An Investigation of Wellbore Storage and Skin Effect in Unsteady Liquid Flow: I. Analytical Treatment", SPEJ (Septiembre, 1970) 279-290.
5. Gringarten, A.C., Ramey Jr., H.J. y Raghavan, R.: "Applied Pressure Analysis for Fractured Wells", JPT (Julio, 1975) 887-892.
6. Crawford, G.E., Hagedorn, A.R. y Pierce, A.E.: "Analysis of Pressure Buildup Tests in a Naturally Fractured Reservoir", JPT (Noviembre, 1976) 1295-1300.
7. Najurieta, H.L.: "Theory for Pressure Transient Analysis in Naturally Fractured Reservoirs", JPT (Julio, 1980) 1241-1250.
8. Serra, K., Reynolds, A.C. y Raghavan, R.: "New Pressure Transient Analysis Methods for Naturally Fractured Reservoirs", JPT (Diciembre, 1983) 2271-2283.
9. Gringarten, A.C.: "Interpretation of Tests in Fissured and Multilayered Reservoirs With Double-Porosity Behavior: Theory and Practice", JPT (Abril, 1984) 549-564.
10. Ershaghi, I. y Aflaki, R.: "Problems in Characterization of Naturally Fractured Reservoirs From Well Test Data", JPT (Junio, 1985) 445-450.

11. Gringarten, A.C.: "Type-Curve Analysis. What it Can and Cannot Do", JPT (Enero, 1987) 11-13.
12. Gringarten, A.C.: "How to Recognize Double-Porosity Systems From Well Tests", JPT (Junio, 1987) 631-633.
13. Cinco, L., H.: "Well Test Analysis for Naturally Fractured Reservoirs", JPT (Enero, 1996) 51-54.
14. Kuchuk, F. J.: "A New Method for Determination of Reservoir Pressure", JPT (Noviembre, 1999) 62-63.
15. Mavor, M.J. y Cinco L., H.: "Transient Pressure Behavior of Naturally Fractured Reservoirs", artículo SPE 7977, presentado en el "1979 SPE California Regional Meeting", Ventura, California. (Abril 18-20 de 1979).
16. Gringarten, A.C. y Bourdet, D.: "Determination of Fissure Volume and Block Size in Fractured Reservoirs by the Type-Curve Analysis", artículo SPE 9293, presentado en la "1980 SPE Annual Technical Conference and Exhibition", Dallas, Texas. (Septiembre 21-24 de 1980).
17. Cinco, L., H. y Samaniego V.,F.: "Pressure Transient Analysis for Naturally Fractured Reservoirs", artículo SPE 11026, presentado en la "1982 SPE Annual Fall Technical Conference and Exhibition", New Orleans, Louisiana. (Septiembre 26-29 de 1982).
18. Bourdet, D., Ayoub, J.A. y Pirard, Y.M.: "Use of Pressure Derivative in Well Test Interpretation", artículo SPE 12777, presentado en la "1984 SPE California Regional Meeting", Long Beach, California. (Abril 11-13 de 1984).
19. Cinco, L.,H., Samaniego V., F. y Kuchuk, F.: "The Pressure Transient Behavior for Naturally Fractured Reservoir With Multiple Block Size", artículo SPE 14168, presentado en la "1985 SPE Annual Technical

- Conference and Exhibition", Las Vegas, Nevada. (Septiembre 22-25 de 1985).
20. Jalali-Yazdi, Y. y Ershaghi, I.: "Pressure Transient Analysis of Heterogeneous Naturally Fractured Reservoirs", artículo SPE 16341, presentado en la "1987 SPE California Regional Meeting", Ventura, California. (Abril 8-10 de 1987).
 21. Belani, A.K. y Jalali-Yazdi, Y.: "Estimation of Matrix Block Size Distribution in Naturally Fractured Reservoirs", artículo SPE 18171, presentado en la "1988 Annual Technical Conference and Exhibition", Houston, Texas. (Octubre 2-5 de 1988).
 22. Rodríguez N., R., Cinco L., H. y Samaniego V., F.: "A Variable Block Size Model for the Characterization of Naturally Fractured Reservoirs", artículo SPE 71570, presentado en la "2001 SPE Annual Technical Conference and Exhibition", New Orleans, Louisiana, (Septiembre 30 al 3 de Octubre del 2001).
 23. Bourdet, D., Whittle, T.M. y Douglas, A.A.: "A New Set of Type Curves Simplifies Well Test Analysis", World Oil (Mayo, 1983) 95-106.
 24. Bourdet, D., Ayoub, J.A., Whittle, T.M., Pirard, Y.M. y Kniazeff, V.: "Interpreting Well Tests in Fractured Reservoirs", World Oil (Octubre, 1983) 77-87.
 25. Bourdet, D., Alagoa, A., Ayoub, J.A. y Pirard, Y.M.: "New Type Curve Analysis of Fissured of Fissured Zone Well Tests", World Oil (Abril, 1984) 111-124.
 26. Johns, R.T. y Jalali-Yazdi, Y.: "Comparison of Pressure-Transient Response in Intensely and Sparsely Fractured Reservoirs", SPEFE (Diciembre, 1991) 513-518.
 27. Braster, C.: "Influence of Block Size on the Transition Curve for a Drowdown Test in a Naturally Fractured Reservoir", SPEJ (Octubre, 1984) 498-504.

28. Sánchez, B., J.L. y Cinco, L., H.: "Análisis de Pruebas de Presión en Yacimientos Naturalmente Fracturados", Ingeniería Petrolera (Abril, 1990) 27-33.
29. De Swaan, A.O.: "Analytic Solutions for Determining Naturally Fractured Reservoir Properties by Well Testing", SPEJ (Junio,1976) 117-122.
30. Sthefest, H.: Algorithm 368 "Numerical Inversion of Laplace Transforms", Communication of ACM, V-13 No. 1 (Enero, 1970) 47-49.
31. Crump, K. S.: "Numerical Inversion of Laplace Transforms Using a Fourier Series Approximation", Journal of the ACM V-23, No.1 (Enero, 1976) 89-96.
32. De Hoog, F.R., Knight, J.H. y Stokes, A.N.: "An Improved Method for Numerical Inversion of Laplace Transforms", SIAM Journal of Science, and Statistical Comput., V-3, No.3 (Septiembre,1982) 357-366.
33. Hollenbeck, K.J.: "INVLAP.m: "A Matlab Function of Numerical Inversion of Laplace Transforms by the De Hoog Algorithm". Dep. of Hydrodynamics and Water Resources. Technical University of Denmark (1998).
34. Davies, B. y Martin, B.: "Numerical Inversion of the Laplace Transform: A Survey and Comparison of Methods", Journal of Computational Physics , V-33, 1979, 1-32.
35. Dubner, H., Abate, J.: "Numerical Inversion of Laplace Transforms by Relating Them to the Finite Fourier Cosine Transforms". Journal of ACM, V15, No.1 (Enero, 1968) 115-123.
36. van Everdingen, A.F. y Hurst, W.: "The Application of the Laplace Transformation to Flow Problems in Reservoirs", Petroleum Transaction , AIME (1949) 305-326.
37. Allain, O.F. y Horne, R.N.: "Use of Artificial Intelligence in Well-Test Interpretation", JPT (Marzo, 1990) 342-349.

38. Ramey jr., H.J.: "Advances in Practical Well-Test Analysis", JPT (Junio, 1992) 650-659.
39. Samaniego, V., F. y Villalobos H., L.: "Transient Pressure Analysis of Pressure-Dependent Naturally Fractured Reservoirs", Journal of Pet. Science and Engineering, V39 (2003), 45-56.
40. Babadagli, T.: "Evaluation of EOR Methods for Heavy-Oil Recovery in Naturally Fractured Reservoirs", Journal of Pet. Science and Engineering, V37 (2003) 25-37.
41. Saidi, A. M.: Reservoir Engineering of Fractured Reservoirs. Fundamental and Practical Aspects, (1987).
42. Bourdarot, G.: Well Testing: Interpretation Methods. Editions Technip, Paris, France, (1998).
43. Earlougher, R.C. jr.: Advances in Well Test Analysis. Monograph Series. SPE of AIME. Dallas , Texas (1977).
44. Kreyszig, E.: Advanced Engineering Mathematics. John Wiley & Sons Inc., USA (1993).
45. Rodríguez, N., R.: Matemáticas Aplicadas a la Ingeniería de Yacimientos. IMP(1972).
46. Valderrábano, H., A., Rayón, C. R., Osorno M, J. A., y Rodríguez, N. R.: Apuntes de Evaluación de la Producción. DICT, FI, UNAM, (1984).
47. Etter, Delores M.: Solución de Problemas de Ingeniería con Matlab. Ed. Pearson Educación, México (1997), 2ª edición.
48. Aguilera, R.: Naturally Fractured Reservoirs. Penwell Books, Tulsa, Oklahoma, 1995.
49. Rodríguez, N., R.: Caracterización de Yacimientos de Doble Porosidad con Tamaño Múltiple de Bloques. Tesis Doctoral. FI, UNAM. Febrero, (2000).

50. Rodríguez, N., R.: Apuntes de Principios de Mecánica de Yacimientos. DICT, FI, UNAM (1984).
51. Solares A., J.: Metodología Empleada en la Interpretación Pruebas de Trazadores. Tesis de Licenciatura . FI, UNAM, (2001).
52. Camacho, V. R. G., Vásquez, C. M. A., Castrejón A. R., y Arana O. V. H.: "Análisis transitorio de pruebas de variación de presión en yacimientos naturalmente fracturados vugulares". Ingeniería Petrolera, (Octubre 2003) 27-35.