01168

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

SISTEMA PARA VALUAR INSTRUMENTOS DE RENTA FIJA A TRAVÉS DEL MODELO HO & LEE

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL GRADO EN:
MAESTRÍA EN INGENIERÍA
(INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES)
P R E S E N T A

EUGENIA LUGO CHÁVEZ

DIRECTOR DE TESIS: DR. SERGIO FUENTES MAYA

MÉXICO D.F. 2004

AGRADECIMIENTOS

A mi familia, a la que se ha sumado recientemente mi pequeña Andrea Sofía, quien es mi inspiración.

A la Universidad Nacional Autónoma de México que durante muchos años fue mi casa.

A todos aquellos que estuvieron y están en mi corazón.

Al Dr. Sergio Fuentes Maya por todo su apoyo para la conclusión de este trabajo y por sus excelentes clases.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Los mercados financieros se han visto altamente beneficiados con los Instrumentos Derivados. Su función principal es la de asegurar precios futuros en los mercados con grandes fluctuaciones, neutralizar los riegos ocasionados por las variaciones en las tasas de interés empleando portafolios; así como la compraventa de riesgos asociados a la tenencia, producción y/o uso de activos y productos. Su uso también permite reducir costos de transacciones y costos de reasignación de activos y crear vías para el arbitraje entre mercados; permitiendo alinear precios de los instrumentos de deuda, acciones y derivados, incrementando la eficiencia y la liquidez de dichos mercados

En México la historia de estos productos es reciente, sin embargo es rica y diversa. De 1978-1982 se cotizaron contratos de futuros sobre el peso en el Chicago Mercatile Exchage. De 1983 a 1987 se operaron contratos a futuro sobre acciones individuales y Petrobonos en la Bolsa Mexicana de Valores. Desde 1987 se realizan contratos forward sobre el dólar denominados Contratos de Coberturas Cambiarias cuyo registro realiza el Banco de México. A partir de 1992 se operaban en la Bolsa Mexicana de Valores títulos opcionales (warrants) sobre acciones individuales, canastas de acciones e índices accionarios, y posteriormente se han incorporado otros subyacentes: índice nacional de precios al consumidor, CPO's e índices accionarios de mercados extranjeros.

A partir de 1998 se crea el MexDer, Mercado Mexicano de Derivados, S.A. de C.V. que es la Bolsa de Derivados de México, la cual inició operaciones el 15 de diciembre de 1998 al listar contratos de futuros sobre subyacentes financieros, siendo constituida como una sociedad anónima de capital variable, autorizada por la Secretaría de Hacienda y Crédito Público (SHCP). Este hecho, constituye uno de los avances más significativos en el proceso de desarrollo e internacionalización del Sistema Financiero Mexicano.

El esfuerzo constante de equipos multidisciplinarios integrados por profesionales de la Bolsa Mexicana de Valores (BMV), la Asociación Mexicana de Intermediarios Bursátiles (AMIB) y la S.D. Indeval, permitió el desarrollo de la arquitectura operativa, legal y de sistemas necesaria para el cumplimiento de los requisitos jurídicos, operativos, tecnológicos y prudenciales, establecidos de manera conjunta por la Secretaría de Hacienda y Crédito Público, la Comisión Nacional Bancaria y de Valores y el Banco de México (las Autoridades Financieras).

La importancia de que países como México cuenten con productos derivados, cotizados en una bolsa, ha sido destacada por organismos financieros internacionales como el International Monetary Fund (IMF) y la International Finance Corporation (IFC), quienes han recomendado el establecimiento de mercados de productos derivados listados para promover esquemas de estabilidad macroeconómica y facilitar el control de riesgos en intermediarios financieros y entidades económicas.

La creación del Mercado de Derivados listados, inició en 1994 cuando la BMV y la S.D. Indeval asumieron el compromiso de crear este mercado. La BMV financió el proyecto de crear la bolsa de opciones y futuros que se denomina MexDer, Mercado Mexicano de Derivados, S.A. de C.V. Por su parte Indeval tomó la responsabilidad de promover la creación de la cámara de compensación de derivados que se denomina Asigna, Compensación y Liquidación, realizando las erogaciones correspondientes desde 1994 hasta las fechas de constitución de las empresas.

Motivación

La variedad de estos instrumentos y su valuación, así como los diversos métodos empleados para valuarlos, despertaron el interés que motivó el desarrollo de este trabajo. En particular el estudio de un método conocido como Ho & Lee, en honor a sus creadores, el cual no es de uso común en la literatura, y que cumple con la misma función que un Black & Scholes y un modelo Binomial. El producto de ese estudio finalmente se ve concretado en el desarrollo de un sistema de cómputo, que si bien está limitado, permite obtener el valor de ciertos instrumentos derivados comunes hasta en un intervalo de 6 años y que ejemplifica de manera clara el uso del modelo matemático Ho & Lee.

Objetivo

El objetivo de este trabajo consiste en presentar un software, desarrollado con base en el método matemático Ho & Lee, que permite valuar instrumentos, títulos, valores o productos derivados (estos términos se utilizarán indistintamente de aquí en adelante) sobre instrumentos de renta fija. El modelo es de no arbitraje en la evolución de las tasas de interés, donde se asume que dichas tasas están distribuidas normalmente.

Este trabajo se desarrolla conforme a lo siguiente:

El capítulo 1 (MARCO CONCEPTUAL) tiene como objetivo introducir al lector en conceptos empleados en el ámbito financiero, como son: Mercados, Instrumentos de renta fija y renta variable, el Mercado de valores mexicano, el Mercado de valores americano y sus múltiples instrumentos incluyendo su clasificación; para terminar con una breve introducción de lo que son los instrumentos derivados.

El capítulo 2 (INSTRUMENTOS DERIVADOS) nos introduce al concepto de opciones, que son instrumentos derivados ampliamente utilizados. Este tema es de interés particular porque trata de lleno los productos que estaremos valuando mediante el modelo Ho & Lee.

El capítulo 3 (VALUACION DE INSTRUMENTOS DE RENTA FIJA. TEORÍA DE BONOS) presenta lo que son los instrumentos de renta fija, cómo se definen y cuáles son las características que los hacen llamarse así. Se trata el tema particular de bonos por ser los instrumentos de renta fija más utilizados en el mercado financiero. En este mismo capítulo también se tratan algunos conceptos adicionales necesarios para entender el resto de este trabajo; en específico: tasa spot y tasa forward.

El capítulo 4 (VALUACIÓN DE ACTIVOS DERIVADOS (OPCIONES)). Ya que en el capítulo 2 se presenta una introducción del concepto de opciones, ahora se necesita valuar este tipo de instrumentos. Para tal fin se estudian dos modelos comunes en la valuación: el modelo Binomial y el modelo Black & Scholes que, como veremos, son los antecesores del Ho & Lee.

El capítulo 5 (MODELO HO & LEE). En este apartado se tratan los conceptos relacionados con el modelo en cuestión, así como algunos ejemplos y sus soluciones. Ya que el objetivo de este trabajo es el desarrollo de un software de valuación empleando el modelo Ho & Lee, este capítulo termina con la presentación del manual de usuario, el cual puede ser empleado para comprobar la validez de los ejemplos propuestos.

El capítulo 6 (CONCLUSIONES) se explica de manera breve cuáles son los resultados de la realización de este trabajo.

CAPÍTULO 1. MARCO CONCEPTUAL

Este capítulo tiene como objetivo presentar de manera breve algunos conceptos básicos empleados en el sector financiero, especialmente aquellos relacionados con lo que se conoce como instrumentos de renta fija, tema central de este trabajo. Se divide en 4 secciones:

La primera de ellas (Mercados Organizados) describe los tipos de mercados financieros y qué es lo que se comercializa en ellos.

La segunda parte (Instrumentos de renta fija y renta variable) describe cuáles son estos instrumentos y cómo se diferencian unos de otros.

La tercera sección (Mercado de Valores (el caso mexicano)) muestra como están divididos los mercados financieros en México y qué tipo de instrumentos se comercializan en este país.

La cuarta y última parte (Mercado de Valores (el caso estadounidense)) presenta el caso de los mercados financieros en Estados Unidos y qué tipo de instrumentos se comercializan en ese país.

1.1. Mercados organizados.

Durante los últimos años ha surgido un interés desmedido por la economía y las finanzas, de tal forma que alrededor de éstas se ha creado todo un aparato, tanto gubernamental como privado, cuyo fin ha sido regular las inversiones con el propósito de controlar la inflación, las tasas de interés y el tipo de cambio.

Esta regulación ha obligado a la creación de mercados organizados en los cuales se puedan llevar a cabo las actividades de compra - venta de bienes, tanto tangibles como intangibles, bajo estricto control, evitando abusos en las operaciones comerciales.

Un mercado organizado, para ser considerado como tal, requiere cumplir con ciertas características, las cuales son:

1. Un lugar físico donde realizar la compra o venta (en la actualidad esta condición ya no es tan necesaria).

2. Intermediarios autorizados para llevar a cabo las operaciones.

3. Reglas bajo las cuales se compra o vende el bien comercializado.

4. Autoridades encargadas de vigilar el cumplimiento de las reglas. Éstas pueden ser elegidas por los intermediarios (autorregulación) o por el gobierno (regulación legal o estatutaria).

Mercados financieros.

A partir de los mercados organizados surge el mercado financiero, el cual es un medio que permite a individuos, empresas y gobiernos modificar patrones de inversión[1] y de consumo[2] en activos reales. Su actividad principal consiste en canalizar los fondos de aquellos que desean y tienen para invertir (unidades económicas superavitarias), a aquellos que están necesitados de dichos fondos (unidades económicas deficitarias); su objetivo fundamental es distribuir eficientemente los ahorros de una economía. En éstos, las actividades de financiamiento son formalizadas a través de documentos emitidos por las entidades necesitadas de fondos (EMISORAS), y son conocidos como títulos, valores o instrumentos financieros.

Mercados primarios y secundarios.

Los *mercados primarios* son aquellos donde una emisora otorga títulos a cambio de fondos, ya sea como préstamos o como aportaciones de capital, estas transacciones son conocidas como colocación o venta de mercado primario y los títulos se denominan títulos primarios. Su característica principal es que los fondos llegan directamente a la emisora.

La operación en la cual una entidad (inversionista financiero) adquiere títulos a cambio de fondos se conoce como compra o inversión en títulos o valores.

Para poder adquirir un título primario en un mercado primario, un inversionista o ahorrador tiene que acoplar sus necesidades al monto y plazo de vencimiento del título en cuestión. Una de las grandes revoluciones fue el surgimiento de los *mercados secundarios* ya que en ellos los valores pueden ser vendidos antes de su fecha de vencimiento; esta compra-venta (reventa) de títulos primarios y/o secundarios, no es una actividad que financie a las emisoras, sino que simplemente ***da mayor liquidez[3] y disminuye el riesgo del inversionista o tenedor del instrumento.***

Para identificar y conectar a las emisoras y a los ahorradores, existen los intermediarios financieros, los cuales realizan su actividad a través de instituciones financieras.

En general, los títulos o instrumentos de inversión dependiendo del plazo de su vencimiento se clasifican en títulos del Mercado de Dinero y títulos del Mercado de Capitales.

Mercado de Dinero. Incluyen instrumentos, títulos financieros o valores de corto plazo (vencimiento menor a un año). Son altamente comercializables y suelen ser instrumentos de deuda.

Mercado de Capitales. Incluyen instrumentos, títulos financieros o valores de mediano y largo plazo (vencimiento mayor a un año). Son de comercialización variable.

Existe un tercer grupo, el *Mercado de Metales Amonedados*. Integra el mercado de metales; los más conocidos son: centenarios, onzas troy de plata y ceplatas. Tienen una comercialización

[1] Inversión. Es el acto de aportar recursos en algo para obtener un beneficio a futuro

[2] Consumo. Es el acto de aportar recursos en algo para obtener un beneficio hoy.

[3] Por liquidez se entiende que la inversión financiera en cuestión se puede comprar o vender con facilidad.

variable y un vencimiento indeterminado.

1.2. Instrumentos de renta fija y renta variable.

Hasta ahora hemos estudiado los instrumentos de inversión bajo el esquema de los mercados financieros, sin embargo, antes de continuar es necesario introducir una división mucho más utilizada. Ésta está basada en la vida y rendimiento de los títulos financieros y los clasifica en:

Instrumentos de renta fija. Son contratos o acuerdos que tienen un plazo determinado de vida y pago, cuyos rendimientos[4] pueden ser fijos o variables, los cuales deben forzosamente quedar especificados en el momento de la adquisición. A este grupo pertenecen los títulos del Mercado de Dinero y la mayoría de los del Mercado de Capitales (siendo los bonos los instrumentos de renta fija de mayor uso en los mercados financieros).

Instrumentos de renta variable. Son contratos o acuerdos que no tienen una fecha de vencimiento determinada, cuyos rendimientos no pueden predeterminarse a través de un cálculo, ya que éste queda en función del desempeño económico-financiero del emisor, de las fluctuaciones del mercado (oferta-demanda) o de ambos. Entre éstos se encuentran las acciones y los Metales Amonedados.

Tanto instrumentos de renta fija como de renta variable representan una deuda desde el punto de vista de la emisora y un crédito desde el punto de vista de los inversionistas.

1.3. Mercado de valores (el caso mexicano).

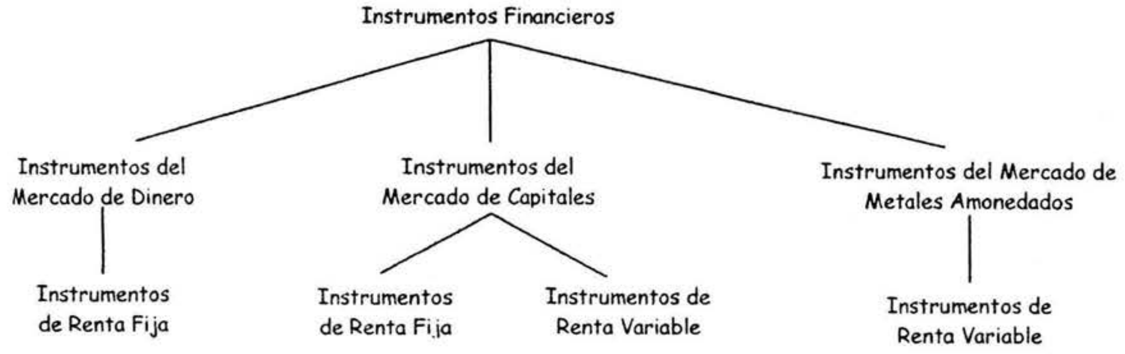
En México la Bolsa Mexicana de Valores es el lugar donde se llevan a cabo las transacciones financieras por las casas de bolsa (intermediarios) y los corredores de valores autorizados por la misma bolsa, así como por la Comisión Nacional de Valores (CNV). Las reglas de operación son dictadas a través de la Bolsa y la Comisión Nacional de Valores a través de la Ley del Mercado de Valores. Las autoridades son la Bolsa y la Comisión Nacional de Valores (órgano dependiente de la Secretaría de Hacienda y Crédito Público), encargado de vigilar el cumplimiento de la Ley del Mercado de Valores).

En nuestro país los instrumentos financieros se dividen según el tipo de mercado donde se comercializan en:

Instrumentos del Mercado de Dinero.
Instrumentos del Mercado de Capitales.
Instrumentos del Mercado de Metales Amonedados.

[4] El rendimiento que se deriva de una inversión financiera se expresa como un porcentaje de lo invertido (a dicho porcentaje también se le conoce como beneficio). En México dicho rendimiento puede recibirse en forma de intereses, ganancias de capital, dividendos o sus combinaciones; pero en general se expresa en términos de un porcentaje anual.

Diagrama 1.



Instrumentos del Mercado de Dinero.

En general son instrumentos a corto plazo, que representan una deuda o un crédito colectivo y que generalmente se venden a descuento (el precio es menor al nominal). En México, la CNV incluye dentro de esta clasificación algunos instrumentos de mediano plazo como los BONDES y los AJUSTABONOS, cuyo plazo excede el año.

- CETES. Certificados de la Tesorería de la Federación.
- BONDES. Bonos de Desarrollo del Gobierno Federal.
- TESOBONOS. Bonos de la Tesorería de la Federación.
- AJUSTABONOS. Bonos Ajustables del Gobierno Federal.
- Bonos Bancarios.
- AB's Aceptaciones Bancarias.
- CEDES. Certificados de Depósito Bancario a Plazo.
- PRLV. Pagaré con Rendimiento Liquidable al Vencimiento.
- Bonos de Prenda.
- Papel Comercial con Aval Bancario.
- Papel Comercial Emitido por Empresas de Factoraje Financiero[5].

[5] El **factoraje financiero** consiste en la adquisición de títulos financieros antes de su vencimiento a un precio menor que el establecido, por parte de empresas dedicadas a esta actividad, para posteriormente cambiar dicho instrumento al precio de vencimiento.

- Papel Comercial.
- Certificado Bursátil de Corto Plazo.

Instrumentos del Mercado de Capitales.

Instrumentos de Renta Fija.

- Udibonos.
- Pagaré de Indemnización Carretero.
- Bonos BPAS.
- Obligaciones.
- Obligaciones Quirografarias de Arrendadoras Financieras.
- Obligaciones Subordinadas.
- Pagarés de Mediano Plazo.
- CPI's. Certificados de Participación Inmobiliaria.
- CPO's. Certificados de Participación Ordinarios.
- Pagarés Financieros.
- Certificado Bursátil.
- Pagaré con Rendimiento Liquidable al Vencimiento a Plazo Mayor a un Año.

Instrumentos de Renta Variable.

- Acciones de Sociedades de Inversión de Renta Fija.

Emisor	Mercado de Dinero	Mercado de Capitales	
	Instrumentos de Renta Fija		Instrumentos de Renta Variable
Gobierno Federal	CETES (a 28, 91, 180 y 360 días)	CPO's	
	BONDES (6 meses)	BORES	
	TESOBONOS (1 y 2 años)	Udibonos	
	AJUSTABONOS (3 años)	Pagaré de indemnización carretero	
		Bonos BPAS	
Sociedades Mercantiles	Papel Comercial con Aval Bancario	Obligaciones (3-8 años)	Acciones de Sociedades de Inversión de Renta Fija.
	Papel Comercial emitido por Empresas de Factoraje Financiero (28-360 días)	Obligaciones Quirografarias de Arrendadoras Financieras (su vencimiento no deberá ser menor a 3 años)	
	Papel Comercial	Pagaré Financiero (1-3 años)	
		Obligaciones Subordinadas	
Bancos	Bonos Bancarios	Pagaré a Mediano Plazo (3 años)	
	AB'S (360 días máximo)	CPI's (3-8 años)	
	PRLV (1, 3, 6, 9 y 12 meses)	CPO´s (3-8 años)	
	Certificado Bursátil de Corto Plazo	PRLV (más de 1 año)	
	CEDES	Certificado Bursátil	
Almacenes Generales de Depósito	Bonos de Prenda (180 días máximo)		

1.4. Mercado de valores (el caso estadounidense).

En los Estados Unidos existe un mercado similar al mexicano, el de la Bolsa de Nueva York, la cual existe físicamente, con intermediarios autorizados, reglas de operación y autoridades pertenecientes a la misma bolsa y a la ***Securities and Exchange Commision***, esta última fue establecida por el gobierno americano para regular el cumplimiento de las ***Securities Laws***. Siendo así, resulta obvio que los instrumentos estadounidenses se comercialicen en mercados organizados a través de mercados primarios y/o secundarios con características similares a las mexicanas.

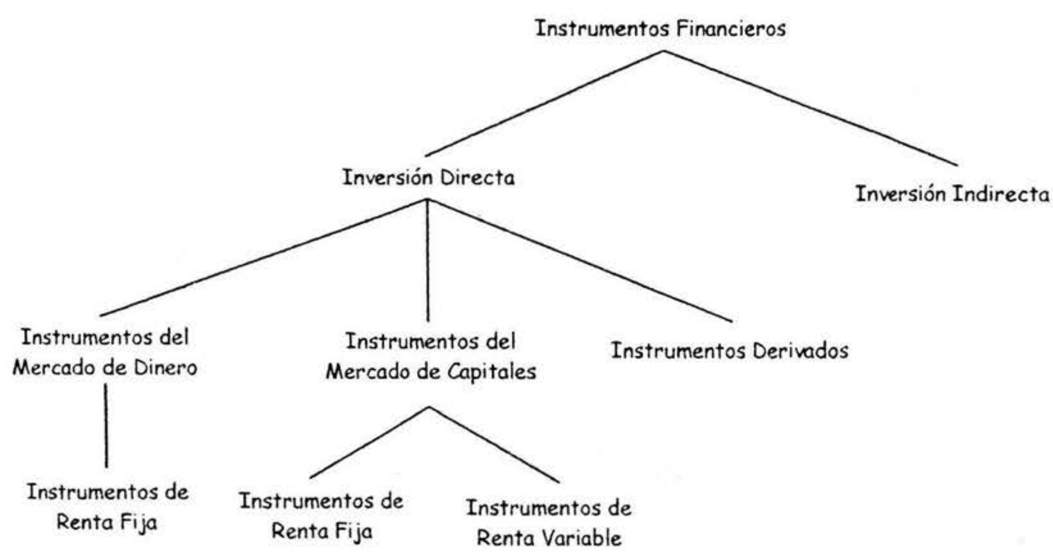
En los Estados Unidos los instrumentos financieros se dividen en:

a) Instrumentos de Inversión Directa.

Instrumentos del Mercado de Dinero.
Instrumentos del Mercado de Capitales.
Instrumentos Derivados.

b) Instrumentos de Inversión Indirecta.

Diagrama 2.



Instrumentos del Mercado de Dinero. Son, al igual que en México, instrumentos de deuda a corto plazo (menores a 1 año) emitidos por el gobierno, instituciones financieras y corporaciones. Estos son:

- Treasury Bills.
- Acuerdos de Recompra (REPOS-Repurchase Agreement).

- CD's (Negotiable Certificates of Deposit). Certificados de Depósito.
- Papel Comercial.
- Aceptaciones Bancarias.
- Eurodólares.

Tasa LIBOR (The London Interbank Offered Rate). Es la tasa a la cual los grandes bancos internacionales en Londres prestan dinero. Esta tasa merece una mención especial debido a que sirve como base para préstamos a largo plazo, inclusive en los mercados de EUA.

Instrumentos del Mercado de Capitales. Comprenden instrumentos con madurez mayor a un año (instrumentos de renta fija) o no definida del todo (instrumentos de renta variable).

Instrumentos de renta fija. Se caracterizan por tener un tiempo definido de pago. La mayoría son bonos tradicionales con promesa de pagos específicos en tiempos específicos. Connotan deuda. Son emisiones del sector público y privado que pueden presentar una de las características siguientes:

pago de una suma fija por periodo,
pago de una suma que será determinada por una fórmula,
pago de una suma fija garantizada al alcanzar el instrumento el vencimiento (madurez).

La primera característica está permitida para deuda con tasas de interés fija y para acciones preferenciales[6] , el segundo se emplea para deuda con tasas de interés variable y el tercero para bonos cupón cero.

Los instrumentos de renta fija de mediano y largo plazo incluyen pagarés y bonos.

- Treasury Bonds & Treasury Notes (Bonos del Tesoro y Pagarés del Tesoro).
- Instrumentos de Agencias Federales.
- Instrumentos Municipales.
- Bonos Corporativos.

Instrumentos de renta no tan fija. Debido a la exigibilidad, algunos instrumentos no siempre pagan al tenedor lo prometido; esto implica una variabilidad en los flujos de efectivo recibidos por el inversionista. Existen 2 clases de instrumentos de renta fija con una gran variabilidad en el pago de sus flujos de efectivo, las acciones preferenciales e hipotecas.

---

[6] Las acciones preferenciales son un caso especial en los EUA, ya que presentan características, tanto de renta fija como de renta variable. De renta variable porque connotan propiedad (aunque generalmente no tienen derecho a voto) y de renta fija porque pagan un dividendo en periodos establecidos de antemano.

- Acciones Preferenciales[7]. Se pueden definir como bonos de vida infinita, connotan propiedad de una corporación (aunque no siempre derecho de voto), prometen pagos periódicos a los tenedores llamados dividendos. La falta de pago de dichos cupones no implica insolvencia y son acumulativos.

- Instrumentos Hipotecarios.

Instrumentos de renta variable.

- Acciones Comunes. Pertenecen al mercado de renta variable; los accionistas son propietarios de las ganancias y activos de la corporación; así, una vez cubiertas las deudas corporativas, el excedente puede pagarse como dividendos a los inversionistas o bien reinvertirse en la corporación. Las acciones comunes se distinguen de las acciones preferenciales, en que las primeras tienen derecho de voto y los dividendos a pagar los determina el consejo de administración; este órgano corporativo puede decidir no pagar dividendos en cierto periodo, con la característica de que los pagos no son acumulativos.

Emisor	**Mercado de Dinero**	**Mercado de Capitales**		
	Instrumentos de Renta Fija		Instrumentos de Renta no tan Fija	Instrumentos de Renta Variable
Gobierno Federal	Treasury Bills	Treasury Notes and Bonds	Instrumentos Hipotecarios	
	Acuerdos de Recompra (REPOS)	Instrumentos de Agencias Federales		
		Instrumentos Municipales		
Sociedades Mercantiles	Papel Comercial	Bonos Corporativos	Acciones Preferenciales	Acciones Comunes
Bancos	CD's Certificados de Depósito			
	AB'S Aceptaciones Bancarias			
	Eurodólares			

Instrumentos Derivados.

Son instrumentos cuyo valor se encuentra en función de un bien subyacente (acciones, valores o bienes capitales) o de un portafolio de instrumentos. A éstos también se les conoce como contingentes demandables, ya que sus valores dependen del funcionamiento del bien subyacente. Se clasifican en: futuros, opciones, forwards y swaps entre otros.

Los instrumentos derivados aparecieron recientemente en el mercado de América Latina, sin embargo, han adquirido una gran fuerza en el mercado financiero.

La mayor parte de los instrumentos derivados se mueven en el mercado "over - the - counter"

[7] En EUA al pago periódico de acciones preferenciales se le da mayor importancia que la connotación de propiedad, debido a esto, las acciones preferenciales se clasifican dentro de los instrumentos de renta fija y no de renta variable.

(OTC) o "hecho a la medida" en el que 2 de los 4 tipos, swaps y opciones, se suelen negociar individualmente entre los bancos y sus clientes y entre banco y banco.

En este trabajo las opciones abarcan el siguiente capítulo, debido a que una gran cantidad de instrumentos de renta fija se comercializan a través de estos instrumentos derivados.

CAPÍTULO 2. INSTRUMENTOS DERIVADOS.

Las últimas décadas han visto una verdadera explosión en el número y volumen de nuevos instrumentos financieros en todos los mercados mundiales que se ha hecho notar, en especial con los llamados instrumentos derivados (ID), gracias a los cuales ha habido una verdadera revolución en el ámbito de lo que es posible hacer para responder a los cambios y al riesgo[8] presente en los mercados financieros.

El riesgo puede tener muchas formas, como puede ser el riesgo de tasas de interés, el riesgo del tipo de cambio que tiene un exportador, importador o inversionista en países extranjeros, el riesgo de variación en el precio de materia prima que tiene un productor o consumidor e incluso el riesgo de instrumentos, tanto de renta fija como de renta variable.

Todas estas formas han aumentado en los últimos años, y al igual que las economías de todos los países el riesgo también se ha internacionalizado, con lo que no sólo nos vemos afectados por lo que pasa en nuestro mercado financiero local, sino también por lo que pasa en los mercados del resto del mundo. Sin embargo, los ID pueden liberarnos de este riesgo, eliminarlo, transformarlo, tomar sólo el que nos parezca atractivo u oportuno y en general convertirlo en oportunidad.

Un instrumento financiero derivado (ID) es cualquier instrumento financiero cuyo valor es una función (se "deriva") de otras variables que son en cierta medida más fundamentales.

La gama de aplicación de los ID abarca todas las áreas de la actividad financiera en una empresa. La mayor parte del uso de ID es en operaciones financieras de cobertura o transformación del riesgo de mercado, ya sea para eliminar riesgo en movimientos adversos en las tasas de interés, el nivel de la bolsa, el precio de una materia prima, el precio de una divisa externa o cualquier otra variable externa que afecte los resultados de una empresa o particular.

Uno de los instrumentos derivados más comunes en los mercados financieros son las opciones, las cuales por su utilidad se han difundido por todo el mundo y juegan un papel fundamental en las finanzas internacionales. Ya que su entendimiento es indispensable en el estudio de la valuación de instrumentos de renta fija, este capítulo está dedicado a ese fin.

El presente capítulo se divide en 2 secciones:

La primera de ellas (Antecedentes históricos. Opciones) presenta una breve historia de cómo nacieron las opciones en el mundo.

La segunda sección (Opciones) presenta toda la teoría para valuar opciones, qué son y algunos de los tipos que existen.

[8] A la posibilidad de no obtener el rendimiento que se espera de una inversión se le llama riesgo. La práctica ha demostrado que el rendimiento o ganancia es consistente con el riesgo, es decir, que a mayor riesgo mayor rendimiento y viceversa.

2.1. Antecedentes históricos. Opciones.

Algunos ID, como las opciones, tienen una larga historia la cual se remonta a la edad media en Japón. Sin embargo, la primera referencia escrita data del año 1688 en el que un español asentado en Amsterdam (José de la Vega), publicó el libro "Confusión de Confusiones", en el que describe las costumbres y prácticas en vigor en la bolsa de Amsterdam y en el que nos ofrece el testimonio escrito sobre la etimología de la palabra opción.

Por desgracia y a pesar de los esfuerzos de José de la Vega, España entró por aquellas fechas en un declive tan profundo que el desarrollo del sistema financiero moderno ocurrió en Inglaterra y Holanda, para posteriormente pasar a los EUA con tendencias mucho más mercantilistas. Así, a mediados del siglo XIX aparecen los mercados de opciones, como instrumentos de control y modificación del riesgo, en New York y Chicago, que existen en la actualidad y son los principales mercados de opciones en el mundo.

A finales del siglo XIX los avances matemáticos desencadenaron en los primeros intentos serios de calcular el precio de una opción desde el punto de vista teórico, no fue hasta 1900 que el eminente matemático Louis Bachelier presenta en Francia la fórmula seria que pretende calcular el precio de una opción, pero hasta Black & Scholes[9] y Merton[10], en 1973, no hubo teoría satisfactoria que explicase como calcular el valor de ésta.

2.2. Opciones.

Una **opción** es un contrato entre dos partes en el cual una parte tiene el derecho, pero no la obligación de hacer algo (usualmente comprar o vender algún activo, valor o bien subyacente) en una fecha predeterminada (o antes) y a un precio preestablecido, mientras que quien emite la opción adquiere la obligación de tomar la parte contraria (vender o comprar el bien subyacente). A veces, el derecho que la opción concede no es el derecho de comprar o vender un activo, sino simplemente el derecho a efectuar una transacción determinada en un periodo de tiempo dado.

Por el derecho que otorga la opción al comprador de la misma, existen dos tipos:

- Opciones de compra (calls)
- Opciones de venta (puts)

Opciones de compra (calls).

Una opción de compra otorga a su comprador, llamado el poseedor de la opción, el derecho más no la obligación, de comprar un número específico de unidades de algún bien (**bien subyacente**) del vendedor o emisor de la opción, hasta una fecha predeterminada y a un precio preestablecido[11].

[9] F. Black and M. Scholes "The pricing of Options on Corporate Liabilities" Journal of Political Economy Vol. 81 (1973), pp 637 - 654.
[10] Merton R.C. "Theory of Rational Option Pricing", Bell Journal of Economics and Management Science Vol. 4 (1973), pp 141 - 183.
[11] DIAZ TINOCO y Hernández Trillo, Futuros y Opciones financieras, Limusa, pág. 75.

El derecho es válido solamente para un periodo de tiempo prescrito en el futuro, llamado de expiración, esto es, la fecha precisa en la cual el derecho vence **(fecha de expiración)**. El precio al cual el poseedor de la opción puede comprar el bien capital del tenedor de la opción se conoce como **precio del ejercicio o strike**, dicho precio es conocido como el valor en el cual la opción puede ser ejercida, sin que el tenedor registre una pérdida.

El cambio en el precio de las opciones se establece como respuesta al cambio en el precio del bien subyacente, efecto conocido como gearing. Así, el valor de un call hoy depende del precio del bien hoy.

Opciones de venta (puts).

En las opciones de venta, el comprador tiene el derecho a vender ("colocar") el bien, y sus propiedades son opuestas a las del call. Una opción put da al tenedor el derecho de vender en una cierta fecha a un monto determinado, mientras que el emisor está entonces obligado a comprar el bien.

Cualquiera que sea su mecanismo, una opción será un call cuando su poseedor gana si el subyacente sube, y un put cuando su poseedor gana si el subyacente baja.

Ejemplo 1. El comprador de un call con un precio del ejercicio (strike) de $105 gana dinero si el bien subyacente sube de precio por arriba de $105, ya que lo puede comprar a $105 gracias a la opción y después venderlo a precio de mercado. De manera análoga, el comprador de un put a $105 gana dinero si el bien subyacente baja de precio por debajo de $105 ya que puede comprarlo por debajo de los $105 en el mercado y luego venderlo a $105.

Posiciones.

Existen dos conceptos importantes relacionados con las opciones: posición corta o ir en corto (to go short) y posición larga o ir en largo (to go long). El ir en corto significa que el emisor o el tenedor de la opción recibe dinero hoy, mientras que su contraparte, el tenedor o el emisor, tendrá que esperar para ejercer su derecho u obligación, lo cual significa ir en largo.

Por lo tanto:

- Ir en corto. Se refiere a recibir efectivo hoy con la promesa de pago en el futuro.
- Ir en largo. Se refiere a la salida de efectivo hoy, y esperar recuperarlo en el futuro.

Si se estudia desde el punto de vista contable, el ir en corto va asociado con la parte de los activos de un balance, mientras que el ir en largo se asocia a la parte de los pasivos.

Flujo de Efectivo		
	t=0	t=1
Corto	+	-
Largo	-	+

Valor intrínseco.

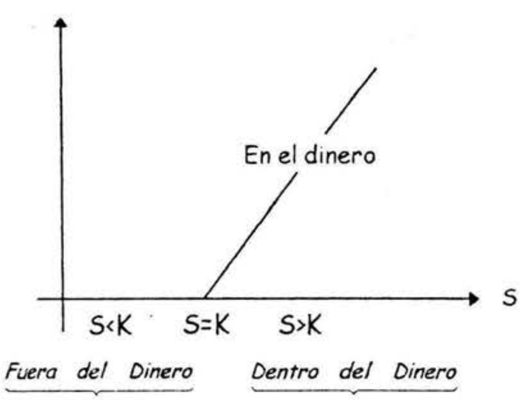
Supongamos que el precio de un activo está a $100 hoy, si tenemos una opción que permite comprar el bien a $90, la opción tiene 10 unidades de valor intrínseco, esto es el valor que una opción tendría si la ejerciésemos hoy. Cuando un call tiene un precio del ejercicio que está por debajo del precio actual del subyacente o cuando un put tiene un precio del ejercicio que está por encima del precio actual del subyacente, se dice que están in the money (dentro el dinero) y tienen valor intrínseco, ya que si ejerciésemos hoy recibiríamos dinero.

Una opción está at the money (en el dinero) cuando su precio del ejercicio es igual al precio del subyacente, y out of the money (fuera del dinero) cuando está alejado del subyacente de manera que ejercer la opción daría lugar a una pérdida.

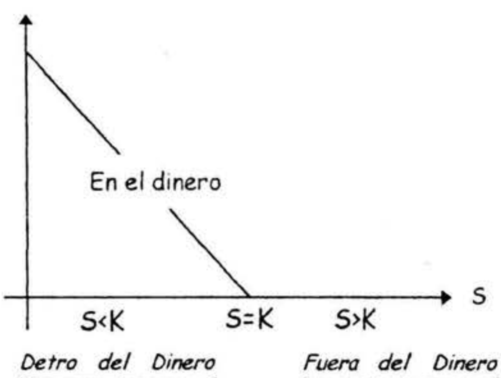
Relación	Opciones de Compra	Opciones de Venta
S>K	Dentro del dinero	Fuera del dinero
S=K	En el dinero	En el dinero
S<K	Fuera del dinero	Dentro del Dinero

Donde K es el precio del ejercicio (strike) y
S es el precio del activo subyacente.

Call



Put



Así pues, se intuye que las opciones tienen dos usos primarios: **especulación y cobertura**. Un inversionista puede tener un punto de vista particular sobre un activo X, de si irá a la alza o a la baja. Si él está en lo correcto, hará dinero, si no, lo perderá. El inversionista está especulando. Una opción puede ser un camino barato para cubrir un portafolio.

Por otro lado, el emisor de la opción espera tener un beneficio. Su beneficio proviene de vender escasamente por arriba del "valor real" y comprarlo escasamente por abajo; obviamente el menor riesgo asociado a esta política es el mejor. Esta idea de reducir el riesgo trae a colación inmediatamente el concepto de cobertura (hedging). Ya que si un corredor puede vender una opción por más que su precio y cubrir todo el riesgo por el resto de la vida de la opción, él ha amarrado una garantía, un beneficio libre de riesgo.

Otros tipos de Opción

Hasta ahora hemos visto las opciones de compra (calls) y venta (puts), las cuales dependiendo de la fecha en la que está permitido ejercer los derechos que la opción otorga se clasifican en: opciones europeas y americanas. Así, una opción europea puede ser ejercida únicamente en una sola fecha, su fecha de vencimiento. Mientras que una opción americana puede ser ejercida en cualquier fecha hasta su fecha de vencimiento.

Otros tipos de opciones incluyen las opciones llamadas exóticas, cuyo valor depende del precio histórico del activo y no sólo del valor del ejercicio.

Otros tipos son:

- Opciones de barrera (la opción puede estar en existencia o llegar a tener una caída de precio si el valor del activo subyacente reacciona sobre el valor prescrito antes de expirar);
- Opciones asiáticas (el precio depende de alguna forma de promedio);
- Opciones looback (el precio depende del valor mínimo o máximo del bien subyacente).

Para cualquier caso, el precio de la opción se establece y se reporta por unidad del bien subyacente sin tomar en cuenta el número de bienes cubiertos por la opción.

Ejemplo 2. Si se quisieran adquirir 100 bienes subyacentes de IBM en un mes X en el que el ejercicio es de 90 y cuyo precio por unidad del bien cubierto por la opción es de $8.375 US; el precio de la opción sería de $837.5 US.

Teoría para la valuación de opciones.

Uno de los puntos más importantes cuando se estudian opciones es el de la valuación. Como ya se había mencionado, el precio de una opción es aquél que fue negociado entre su comprador y su vendedor; en otras palabras, es determinado por las leyes del mercado. Sin embargo, para comprender el funcionamiento de las opciones y así tomar posiciones adecuadas se necesitan conocer los factores que determinan su precio. De la misma manera que nos interesa saber de qué depende la demanda y la oferta de cualquier bien (el café, por ejemplo), también nos interesa saber de qué depende el precio de una opción.

En general el precio de una opción está en función de:

1. El precio del ejercicio.
2. El tiempo de expiración de la opción.
3. Tipo de opción (americana, europea, etc.)
4. Volatilidad. Esta es una propiedad de aleatoriedad del precio del bien subyacente.
5. Tasas de Interés en el mercado.

Volatilidad. Es una medida del movimiento esperado en el precio de un activo subyacente durante un cierto periodo de tiempo. Se expresa normalmente como un porcentaje anual sobre el precio del activo.

La volatilidad es un concepto subjetivo debido a que es una medida de los acontecimientos esperados y, por ello, no puede ser calculada con un alto grado de certeza. Puede ser obtenida ya sea analizando los precios actuales de las opciones (volatilidad implícita) o analizando los últimos movimientos del tipo de cambio (volatilidad histórica).

La volatilidad implícita se calcula utilizando una fórmula que tiene en cuenta factores conocidos (como son: el tipo de cambio, la vida de la opción y el precio del ejercicio), para terminar obteniendo una volatilidad media del valor actual de la prima. Esta volatilidad se utiliza para calcular el valor ideal de la opción, de tal manera que si se compara con el valor de mercado, se sabrá si la opción está en precio o no. El cálculo sin embargo, asume la existencia de un mercado perfecto donde las primas de las opciones son, por término medio, las correctas.

La volatilidad histórica implica el cálculo de las variaciones en los tipos de cambio en periodos recientes de tiempo. La desventaja de este tipo de cálculo estriba en que no se pueden tener en cuenta acontecimientos futuros que pudiesen alterar fuertemente el tipo de cambio.

Valuación de una opción de compra.

Como cualquier producto o mercancía, el valor de las opciones se encuentra entre determinados límites, uno superior y uno inferior; de tal forma que si el día de la expiración el precio del ejercicio es mayor o igual al precio del bien subyacente ($S \leq K$), entonces en el caso de un call, su valor sería igual a $C = 0$.

Por otra parte, si el precio del bien subyacente es mayor al precio del ejercicio en el vencimiento, entonces el valor de la opción es igual a su diferencia, $C = S - K$.

donde:

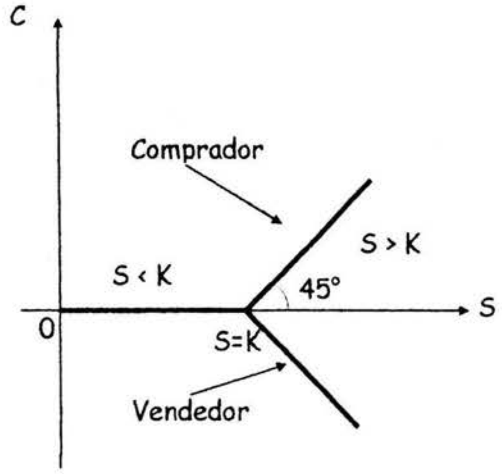
C es el valor de la opción de compra a la fecha de expiración
S es el precio del bien o activo subyacente en la fecha de expiración y
K como se menciona antes, es el precio del ejercicio.

Valor de una opción de compra

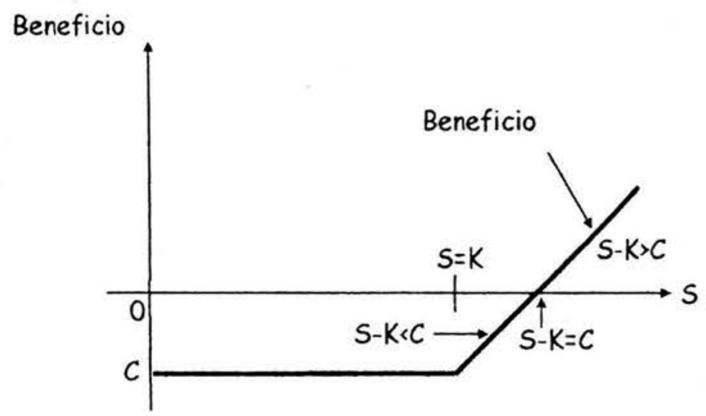
$$\text{Call} = \text{máx}[S-K,\ 0]$$

Gráficamente:

a) Diagrama de valor para una opción de compra europea en largo.



b) Pérdidas y ganancias obtenidas por una opción de compra europea en largo.



Beneficio = máx[S-K, 0] - C

Comprador

Caso 1: Si $S<K$, entonces Beneficio < 0, ya que C tiene que ser mayor a 0. Ej: Sea S=8, K=9 y C=1

Beneficio = máx[8-9,0]-1 = -1

Caso 2: Si $S=K$, entonces Beneficio < 0, ya que C tiene que ser mayor a 0. Ej: Sea S=9, K=9 y C=1

Beneficio = máx[9-9,0]-1=-1

Caso 3a: Si $S>K$ y $S-K= C$, entonces Beneficio = 0. Ej: S=9, K=8 y C=1

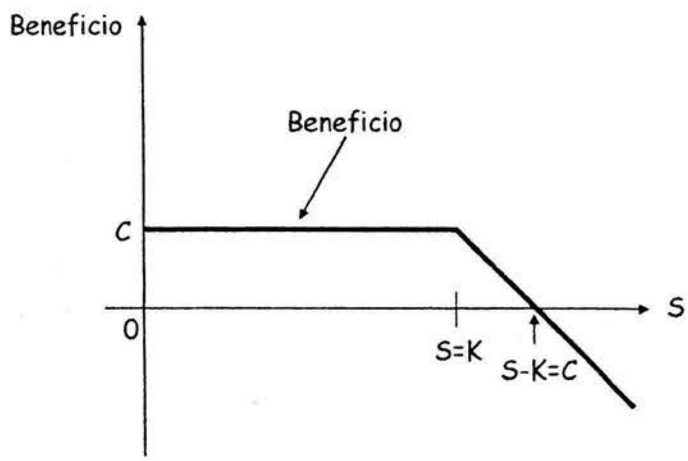
$$\text{Beneficio} = \text{máx}[9-8,0]-1=0$$

Caso 3b: Si S>K y S-K > C, entonces Beneficio > 0. Ej: S=10, K=8 y C=1

$$\text{Beneficio} = \text{máx}[10-8,0]-1=1$$

Caso contrario sucede desde el punto de vista del vendedor de la opción.

C) Pérdidas y ganancias obtenidas por una opción de compra europea en corto.



Valuación de una opción de venta.

De manera análoga está la opción de venta o put, cuya valuación es opuesta a la de la opción de compra. Donde:

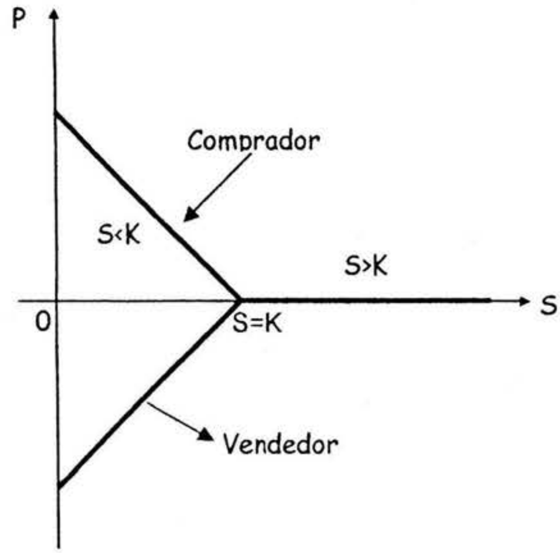
P es una opción de venta a la fecha de expiración.

Valor de una opción de venta

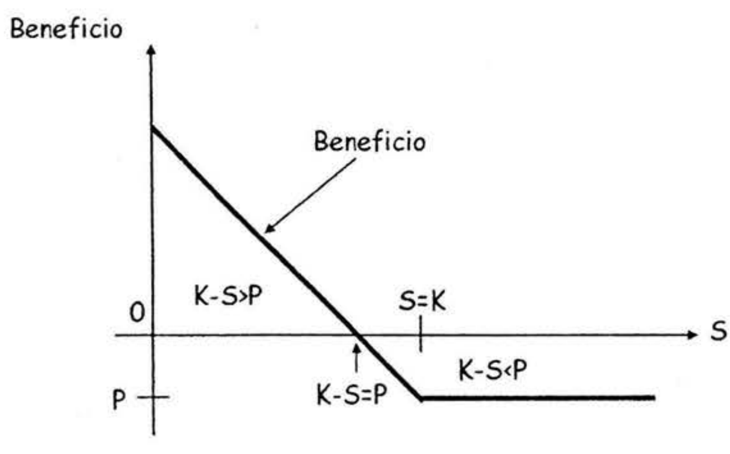
$$\text{Put} = \text{máx}[K-S,\ 0]$$

Gráficamente:

a) Diagrama de valor para una opción de venta europea en largo.



b) Pérdidas y ganancias obtenidas por una opción de venta europea en largo.



Beneficio =máx[K-S, 0] - P

Comprador

Caso 1a: Si $S<K$ y $K-S > P$, entonces Beneficio > 0. Ej: $S=9$, $K=11$ y $P=1$

$$\text{Beneficio} = \text{máx}[11-9,0] - 1 = 1$$

Caso 1b: Si $S<K$ y $K-S = P$, entonces Beneficio = 0. Ej: $S=9$, $K=10$ y $P=1$

$$\text{Beneficio} = \text{máx}[10-9,0] - 1 = 0$$

Caso 2: Si S=K, entonces Beneficio < 0, ya que P tiene que ser mayor a 0. Ej: S=10, K=10 y P=1

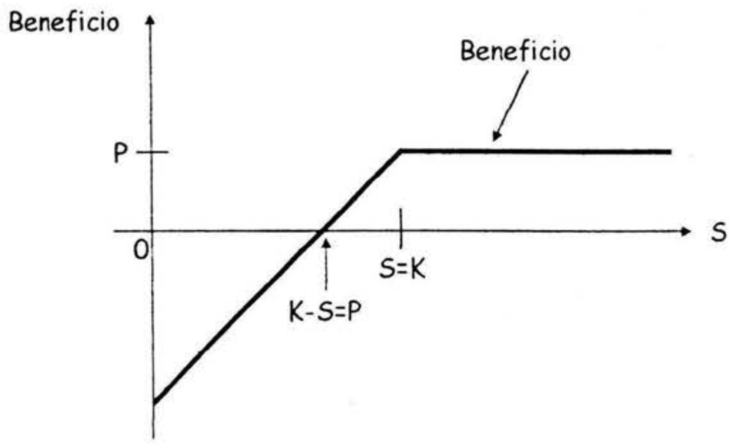
$$\text{Beneficio} = \text{máx}[10\text{-}10{,}0]\text{-}1 = -1$$

Caso 3: Si S>K, entonces Beneficio < 0, ya que P tiene que ser mayor a 0. Ej: S=10, K=9 y P=1

$$\text{Beneficio} = \text{máx}[9\text{-}10{,}0] - 1 = -1$$

Caso contrario sucede desde el punto de vista del vendedor de la opción.

C) Beneficio de una opción de venta europea en corto.



Hasta aquí hemos analizado qué son y para qué sirven las opciones, más adelante en el capítulo 4 se estudiarán algunos métodos para determinar el precio de estos instrumentos derivados. Aunque dichos métodos son generales, es decir, no importa el tipo del bien subyacente sobre el que se emite la opción, para fines de este trabajo todos los ejemplos se desarrollan sobre bienes subyacentes de renta fija o sobre aquellos que cumplan con esas características.

CAPÍTULO 3. VALUACIÓN DE INSTRUMENTOS DE RENTA FIJA. TEORÍA DE BONOS.

En la sección anterior se describió lo que es un instrumento de renta fija, así como sus características, entre éstas destacan dos que distinguen a este tipo de instrumentos y que son pilares para entender su valuación:

1. Proporcionan un rendimiento predeterminado.
2. Dicho rendimiento es a plazo predeterminado.

Así pues, en inversiones de renta fija el rendimiento se determina según el nivel de las tasas de interés en el sistema financiero y su porcentaje debe ser mayor que la tasa de inflación del periodo correspondiente para que la inversión resulte atractiva.

A continuación se tratarán las técnicas para valuar los instrumentos de renta fija más comunes en el mercado (bonos), así como la valuación de las distintas tasas de interés, esperando que eso aclare las dudas que puedan existir.

Este capítulo se divide en una sola sección (Bonos) ya que es un análisis del comportamiento de estos instrumentos de renta fija ampliamente utilizados en todos los mercados bursátiles.

3.1. Bonos.

Los bonos son instrumentos de renta fija con madurez variable, se emiten con el propósito de reunir fondos que serán empleados para cubrir deuda previa, o bien para cambiar la razón deuda/capital de una empresa. Otras emisiones son empleadas para financiar adquisiciones específicas u otras formas de inversión corporativa.

Los bonos se clasifican, grosso modo, dependiendo de: el emisor, el propósito de la emisión, el tipo de garantía ofrecida por el emisor, la forma de pago del interés y la de repago; sin embargo, debe quedar claro que existen muchas maneras de agruparlos.

En función a la forma de pago del interés existen dos tipos de bonos ampliamente difundidos, los bonos cupón, que se caracterizan por un pago periódico de montos fijos de interés conocido como cupón, y los bonos cupón cero, los cuales como su nombre lo indica, no pagan cupón alguno obteniéndose el beneficio de la inversión al final de la vida (madurez) del bono.

La liquidez de la emisión de bonos es medida por el volumen de contratos en la emisión y por el tamaño de la oferta y la demanda.

Beneficio en la madurez.

El valor teórico de un bono está determinado por el valor presente de todos los flujos de efectivo futuros generados por el bono descontados a su correspondiente tasa de interés (rendimiento). Inversamente, se puede calcular la tasa interna de retorno TIR[12](beneficio en la

[12] La TIR es la tasa de descuento a la cual el valor presente neto de una inversión es cero.

madurez YTM del inglés Yield Time Maturity) del bono sobre la base de su precio actual en el mercado y de su promesa de pago.

Esto trae a colación el hecho de que si se conoce la tasa de inflación (I) y la de rendimiento (tasa nominal TN), es posible calcular la tasa real (ganancia o rendimiento real) de la inversión; siendo la tasa nominal la tasa anualizada que paga un instrumento de inversión sobre su valor nominal, mientras que la tasa real puede definirse como $\frac{(1+TN)}{(1+I)}-1$. Nótese que la tasa real puede ser positiva si el rendimiento es mayor a la inflación, o negativa en caso contrario.

Se le llama **madurez** a la fecha de vencimiento de un bono, en la cual se paga el beneficio pactado en el contrato, por convención se dice que un bono madura mientras que una opción expira, sin embargo, para fines prácticos ambas palabras significan lo mismo.

Ejemplo 3. Un bono tiene una promesa de pago de F_1=\$110 en un año a partir de ahora, con un valor actual en el mercado de P=\$100; entonces su beneficio en la madurez será la tasa de interés obtenida de:

$$P=\frac{F_1}{1+r} \quad ...(1)$$

sustituyendo:

$$100=\frac{110}{1+r}$$

donde: r = 0.10 = 10%

De manera similar, se puede emplear la misma fórmula para calcular el beneficio en la madurez de bonos cupón cero en t años:

$$P=\frac{F_t}{(1+r)^t} \quad ...(2)$$

en donde r se expresa como una tasa de interés anual.

El término $\frac{1}{(1+r)^t}$ es conocido como el factor de descuento[13] para el año t (t = 0,...n); mientras que P y F_t se conocen como el valor presente y el valor futuro del bono, respectivamente. El beneficio en la madurez se define como la tasa de interés en la cual P pesos podrían ser invertidos hoy, con el fin de obtener F_t pesos en t años a partir de ahora.

[13] *Factor de descuento*. Es el valor presente de un bono de descuento (o cupón cero) de \$1 de principal. Este factor de descuento se emplea para hacer valuaciones.

$$P(1+r)^t = F_t \ldots(3)$$

Ejemplo 4. Un bono cupón cero a dos años que paga un valor de F_2=$100 al final de los dos años a partir de hoy, y cuyo valor actual es de P=$81.16, tiene un beneficio en la madurez r de:

$$81.16 = \frac{100}{(1+r)^2}$$

donde: r = 0.11 = 11%.

Ejemplo 5. Considérese un bono cupón a dos años, cuyo valor presente es de $946.93, que paga un cupón del 5% anual y tiene un valor futuro de $1000. Calcular su beneficio en la madurez. Para resolver este ejercicio, debe aclararse que el pago de un cupón consiste de un monto obtenido de un porcentaje establecido durante el contrato, sobre el valor futuro que pagará dicho bono. En este caso, el cupón es de (0.05)(1000) = $50 anuales. Así se tiene que:

$$P_2 = \frac{C}{(1+r)} + \frac{F_2 + C}{(1+r)^2} \ldots(4)$$

$$946.93 = \frac{50}{(1+r)} + \frac{1050}{(1+r)^2}$$

en donde r=7.975%.

El beneficio en la madurez es una de las medidas más comunes para calcular *la tasa de interés*[14] o *tasa de retorno* para un bono.

Tasa de interés Spot.

La tasa spot es el rendimiento que hoy promete un bono cupón cero en cierta madurez. Una tasa spot se mide al establecer un punto en el tiempo sobre el beneficio en la madurez de un instrumento de descuento y puede considerarse como la tasa de interés asociada a un contrato, como en cualquier contrato, éste incluye un préstamo de dinero de una parte a otra. El préstamo junto con sus intereses es repagado completamente en un tiempo futuro.

De ahora en adelante cuando se hable de tasa spot, se estará haciendo referencia exclusivamente a bonos.

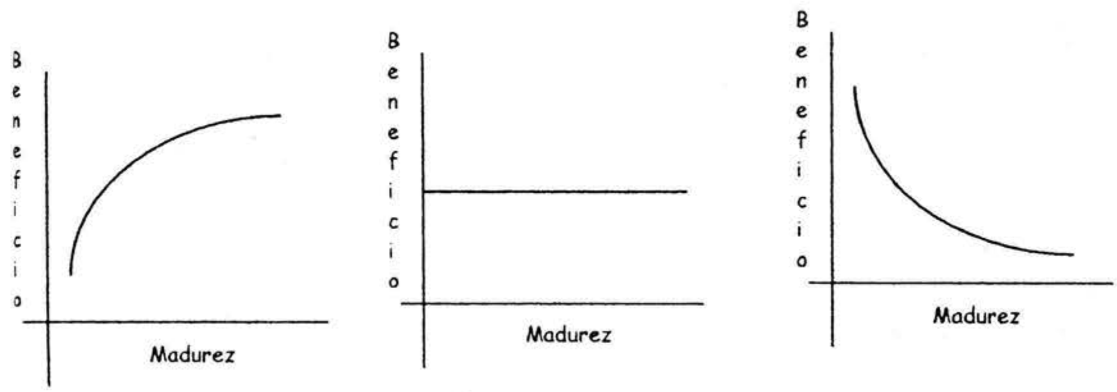
Curvas de rendimiento. El beneficio en la madurez de dos bonos cupón cero con el mismo valor actual, pero con tiempo de madurez distinto suele ser distinto. Sin embargo, los bonos con características similares (riesgo, cupón y madurez) deberán dar el mismo rendimiento porque

[14] La tasa de interés es el rendimiento que promete una inversión sobre su valor actual a través del tiempo.

si no, se presentarían oportunidades de arbitraje[15] al vender el bono más caro y comprar el más barato.

Una curva de rendimiento se puede generar trazando la gráfica de los rendimientos de bonos con madurez diferente (sobre el eje de vertical), quedando la curva en función de la fecha especificada en los bonos, es decir, su madurez (sobre el eje horizontal x). Esto provee de un valor actual estimado de la estructura de las tasas de interés, y cambiará diariamente en cuanto los beneficios en la madurez cambien. De hecho, un curva beneficio debe ser graficada empleando bonos con características idénticas, excepto por su madurez.

Curvas Beneficio Típicas



a) Ascendente b) Plana c) Descendente

Tasa de interés Forward[16].

El beneficio en la madurez asume tasas de interés constantes en la vida del bono, por lo que r podría expresarse como un promedio de las distintas tasas involucradas hasta la fecha de madurez del instrumento; sin embargo, esto no es así, ya que el beneficio en la madurez sobre bonos cupón a uno y dos años es distinto. De tal forma, el beneficio en la madurez r_t de un bono en el año t, puede calcularse como si se invirtiera cada año hasta que el bono expirara.

Las tasas de interés forward son tasas de interés futuras a diferentes plazos, empleadas para calcular tasas de interés a largo plazo. En la literatura poco convencional se le llama tasa

[15] La posibilidad de obtener ventaja comercial únicamente de realizar una transacción, sin haber invertido, ni haber arriesgado nada se conoce como arbitraje.
[16] *Precio Forward.* Es un concepto que guarda gran relación con la tasa forward y será ampliamente utilizado. Este se puede definir como el valor futuro de un activo a una tasa fija libre de riesgo r en un periodo específico de tiempo. La ecuación que expresa dicha relación es:

$$F_{(\text{Precio Forward})} = S(t)_{(\text{Precio del activo al momento de realizarse el contrato})} e^{r(T-t)}$$

En donde T indica la fecha de madurez, t es el periodo que se valúa y r es la tasa de interés.

forward al retorno extra o adicional que se obtiene por haber invertido a más de un año en vez de hacerlo a uno.

El valor de las tasas de interés forward se determina empleando la ecuación:

$$(1+R(t))^t\left[1+{}_tf_{t+k}\right]^k = (1+R(t+k))^{t+k} \ldots(5)$$

donde: ${}_tf_{t+k}$ es la tasa forward desde t (fecha de inicio), hasta t+k (fecha de término), mientras que R(t) es la tasa spot del periodo indicado entre paréntesis. De esta fórmula se concluye que ${}_0f_1$ debe ser igual a R(1), así como ${}_1f_2$ sería:

$$(1+R(1))(1+{}_1f_2) = (1+R(2))^2$$

de donde:

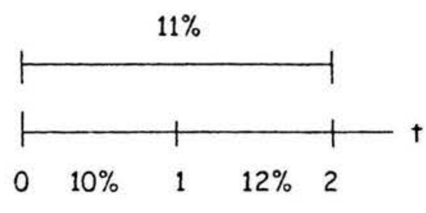
$${}_1f_2 = \frac{(1+R(2))^2}{(1+R(1))} - 1$$

y así sucesivamente.

Retomando los ejemplos anteriores se tiene que la tasa forward para un año a partir de hoy es:

$${}_1f_2 = \frac{(1.11)^2}{1.10} = 1.12009 - 1$$

donde: ${}_1f_2$ = 12%, cuando r_1 = 10% y r_2 = 11%.



Esto lleva a la conclusión de que la tasa de interés a un año deberá moverse a 12% en el año uno para que un inversionista sea indiferente a comprar un bono a dos años o a comprar un bono a un año y reinvertirlo al final de ese año.

Valuación de bonos con cupones.

El valor teórico de un bono cupón puede ser considerado como el valor presente de flujos de efectivo consistentes del pago de cada cupón y la reinversión del capital. Ya que los pagos se hacen en periodos distintos, deben descontarse a la tasa de interés correspondiente a su fecha de desembolso, de tal forma que el cupón pagado en un año deberá ser descontado a la tasa de interés de ese año:

$$\left(\frac{C}{1+r_1}\right)$$

El cupón pagado en dos años deberá ser descontado a la tasa de dos años:

$$\left(\frac{C}{1+r_2}\right)$$

y así sucesivamente. En esencia, el pago del cupón es la combinación de bonos cupón cero con madurez diferente.

Ejemplo 6. Un bono a 10 años que paga un cupón de \$10 anualmente y cuyo principal[17] es de \$100, es una combinación de 10 bonos con valor nominal de \$10 y madurez de 1, 2, 3,... hasta 10 años respectivamente, más un bono con valor nominal de \$100 y madurez de 10 años. De tal forma que la **duración de este bono cupón** es un promedio ponderado de la madurez de la combinación de los bonos.

De lo anterior se concluye que, el beneficio en la madurez de un bono cupón puede ser definido como la tasa interna de retorno r, la cual iguala los flujos de efectivo descontados al precio actual de un bono en el mercado. Así, si el cupón fuera anual se tendría que:

$$P = \frac{C_1}{1+r} + \frac{C_2}{(1+r)^2} + \dots \frac{C_n}{(1+r)^n} \quad \dots(6)$$

en donde C_1, $C_2 \dots, C_n$ son los flujos de efectivo en el año 1,2,... hasta n años incluyendo el pago final del principal. En la práctica los cupones pueden ser pagados: semestralmente, trimestralmente, etc.; y su valuación puede realizarse en cualquier momento durante su vida. Esto es:

$$P = \frac{C_{t_1}}{(1+r)^{t_1}} + \frac{C_{t_2}}{(1+r)^{t_2}} + \dots \frac{C_{t_n}}{(1+r)^{t_n}} \quad \dots(7)$$

en donde r es el beneficio anualizado en su madurez y $t_1, t_2, \dots, t_n$ son las fechas en las que se paga el cupón, estas fechas generalmente son fraccionarias.

Ejemplo 7. Sea un bono con un cupón semestral pagado en 3 meses a partir de hoy. El primer pago será en $t_1 = 0.25$, el segundo en $t_2 = 0.50$ y así sucesivamente.

Este método es usado en casi todo el mundo excepto en los EUA, donde lo tradicional es calcular un beneficio a la madurez sobre un semestre y multiplicarlo por 2 para reportar un beneficio anualizado.

[17] Valor de carátula del instrumento.

La apelación a un "beneficio semianual" es algo confusa, ya que hace referencia a un beneficio anualizado calculado con un método semianual. Para reducir la confusión se empleará el término de ***beneficio semestral*** para hacer referencia a un beneficio en un periodo de 6 meses, mientras que el término de ***beneficio semianual*** para el método empleado en los EUA, el cual se expresa mediante la fórmula:

$$P=\frac{C_{t_1}}{\left(1+\frac{r'}{2}\right)^{2t_1}}+\frac{C_{t_2}}{\left(1+\frac{r'}{2}\right)^{2t_2}}+\ldots\frac{C_{t_n}}{\left(1+\frac{r'}{2}\right)^{2t_n}}\ldots(8)$$

en donde r' es un beneficio semianual, mientras que las fechas de pago del cupón se expresan en años. Se puede verificar que se emplea un beneficio semestral de r'/2 para descontar el flujo de efectivo y que los exponentes ($2t_1$, $2t_2$,...,$2t_n$) es el número de semestres de la fecha de valuación. La diferencia de ambos métodos radica en que el método europeo capitaliza el beneficio, mientras que el americano es lineal.

Ejemplo 8. Sea una tasa semestral del 4%, el método americano reportará entonces un beneficio semianual de r' = 2*0.04 = 0.08; mientras que el método europeo reportará un beneficio anual de r = (1.04)(1.04)-1 = 0.0816.

Es importante no confundir esta metodología. El método semianual estadounidense puede ser aplicado a bonos cuyos cupones son pagados anualmente, mientras que el método europeo puede aplicarse a bonos cuyos cupones son pagados semestralmente.

Teoremas del precio de un bono[18].

Estos teoremas indican como se mueven los precios de los bonos en respuesta a cambios en su beneficio en la madurez, recordando que el beneficio en la madurez se define como la tasa de descuento que hace el valor presente de todos los flujos de efectivo iguales al precio de mercado del bono.

Si un bono tiene un precio de mercado igual a su valor a la par[19], entonces su beneficio en la madurez será igual a su tasa cupón. Sin embargo, si el precio de mercado es menor que su valor a la par (el bono es vendido con descuento), el bono tendrá un beneficio en la madurez mayor que su tasa cupón. Inversamente, si el precio del mercado es mayor que su valor a la par (el bono es vendido con premio), el bono tendrá un beneficio en la madurez menor que la tasa cupón.

$$\text{Caso 1: } 1000=\frac{50}{(1+r)}+\frac{1050}{(1+r)^2}\Rightarrow r=5\%$$

[18] HEATH David, Robert Jarrow and Andrew Morton, "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A Discrete Time Approximation, Journal of Financial and Quantitative Analysis Vol 25, 1990, 419-440pp.

[19] Se dice que un bono está a la par si en la fecha de madurez se paga al tenedor del instrumento (bono) el monto especificado como valor a la par independientemente del pago del cupón.

$$Caso\ 2:\ 900 = \frac{50}{(1+r)} + \frac{1050}{(1+r)^2} \Rightarrow r > 5\%, r = 10.826\%$$

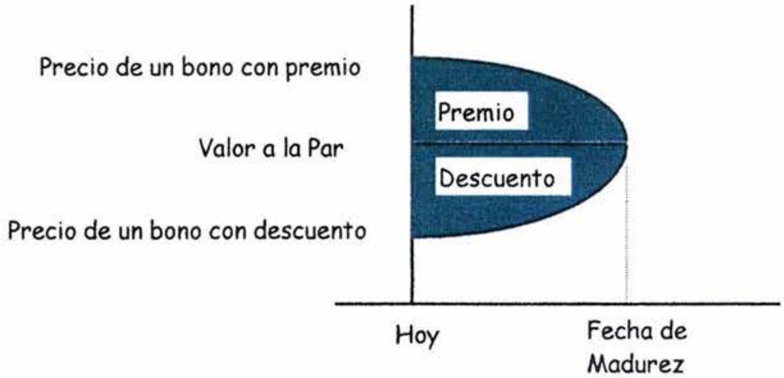
$$Caso\ 3:\ 1050 = \frac{50}{(1+r)} + \frac{1050}{(1+r)^2} \Rightarrow r < 5\%, r = 2.409\%$$

A partir de aquí han surgido cinco teoremas, los cuales se analizan bajo el supuesto de que el pago es anual.

1. Si el precio de mercado de un bono se incrementa, entonces su beneficio debe decrementarse; inversamente, si el precio de mercado de un bono se decrementa, entonces su beneficio debe incrementarse.

Ejemplo 9. Sea un bono con vida de cinco años y un valor a la par de $1000, y paga cupones anuales de $80. Su beneficio es del 8% debido a que su valor de venta actual (precio) es por $1000. Sin embargo, si su precio se incrementa a $1100 entonces su beneficio caerá a 5.66%, ya que $\$1100 = \frac{80}{(1+.0566)} + \frac{80}{(1+.0566)^2} + \frac{80}{(1+.0566)^3} + \frac{80}{(1+.0566)^4} + \frac{1080}{(1+.0566)^5}$; en caso contrario, si el precio cae a $900, entonces su beneficio se incrementará a 10.68%.

2. Si el beneficio de un bono no cambia durante su vida, entonces el monto de su descuento o premio se decrementará conforme su vida se haga más corta.



Ejemplo 10. Sea un bono con vida de cinco años, un valor a la par de $1000 y paga un cupón anual de $60. Su precio de mercado actual es de $883.31, lo que indica que tiene un beneficio del 9% $\frac{60}{(1+.09)} + \frac{60}{(1+.09)^2} + \frac{60}{(1+.09)^3} + \frac{60}{(1+.09)^4} + \frac{1060}{(1+.09)^5} = \$883.31$. Al año tendrá un beneficio todavía de 9% y se venderá en $\frac{60}{(1+.09)} + \frac{60}{(1+.09)^2} + \frac{60}{(1+.09)^3} + \frac{1060}{(1+.09)^4} = \$902.81$.

Esto arroja que su valor se decrementó de $1000-$883.31=$116.69 (ganancia hoy) a $1000-$902.81=$97.19 (ganancia dentro de un año) habiendo un cambio de $116.69-$97.19=$19.5.

3. Si la tasa interna de retorno (TIR) de un bono no cambia durante su vida, entonces el descuento o premio decrece cada vez más a medida que la vida del bono se va acortando.

4. El porcentaje de variación entre el precio de un bono al que se le decrementa la tasa de rendimiento será mayor en proporción al correspondiente precio del mismo bono que pudiese ocurrir si hubiese un incremento de la misma magnitud en su rendimiento.

Ejemplo 11. Sea un bono con vida a cinco años y una tasa cupón del 7%. Está siendo vendido por su valor a la par en $1000 con un beneficio del 7%. Si el beneficio cae en 1% a 6%, entonces el bono será vendido en $\frac{70}{(1+.06)}+\frac{70}{(1+.06)^2}+\frac{70}{(1+.06)^3}+\frac{70}{(1+.06)^4}+\frac{1070}{(1+.06)^5}=\$1042.15$, con un cambio de $42.12 (1042.15-1000=42.15). Alternativamente, si su beneficio se incrementa en 1% hasta un 8%, entonces el bono será vendido por $\frac{70}{(1+.08)}+\frac{70}{(1+.08)^2}+\frac{70}{(1+.08)^3}+\frac{70}{(1+.08)^4}+\frac{1070}{(1+.08)^5}=\$960.07$ con un decremento de $39.93 (1000-960.07=39.93); siendo 42.15 > 39. 93.

5. El cambio en el porcentaje del precio de un bono debido al cambio en su beneficio o rendimiento, será más pequeño si la tasa del cupón es mayor. Este teorema no es aplicable a bonos con madurez de 1 año o a bonos sin fecha de madurez, conocidos como consols o perpetuidades.

Ejemplo 12. Sea un bono cuyo principal es de $1000, un beneficio del 7%, vida de 5 años y un cupón del 9%. Compárese con otro bono cuyo beneficio y vida es igual al anterior, pero su cupón es del 7%. El precio de mercado del primer bono es de $\frac{90}{(1+.07)}+\frac{90}{(1+.07)^2}+\frac{90}{(1+.07)^3}+\frac{90}{(1+.07)^4}+\frac{1090}{(1+.07)^5}=\$1082$, y el del segundo es de $1000. Ahora, si el beneficio sobre ambos bonos se incrementa al 8%, entonces sus precios serán de $\frac{90}{(1+.08)}+\frac{90}{(1+.08)^2}+\frac{90}{(1+.08)^3}+\frac{90}{(1+.08)^4}+\frac{1090}{(1+.08)^5}=\$1039.93$ para el primer bono y $\frac{70}{(1+.08)}+\frac{70}{(1+.08)^2}+\frac{70}{(1+.08)^3}+\frac{70}{(1+.08)^4}+\frac{1070}{(1+.08)^5}=\$960.07$ para el último. Esto representa un decremento en el precio del primero de $1082-$1039.93=$42.07 ó 4.045%. Para el segundo bono, el decremento en el precio es igual a $1000-$960.07=$39.93 ó 4.16%; como este bono tiene un cupón más bajo su porcentaje en el cambio del precio es mayor.

Duración. La duración es una definición más precisa de la madurez promedio de un bono cupón. La duración depende de tres variables: la tasa del cupón, el término a su madurez y el beneficio en la madurez. El numerador de la ecuación calcula el valor presente de cada uno de los flujos de efectivo realizados en un tiempo t, es decir $\frac{C_t}{(1+r)^t}$ donde C_t es el pago en el periodo t. Si P es el precio del bono, entonces la fracción del valor presente de cada pago es

$\frac{\left[\frac{C_t}{(1+r)^t}\right]}{P}$. Cada fracción (ponderación) es multiplicada por la duración de cada periodo de pago. Entonces la duración de un bono de T periodos, con un pago en cada periodo, es la suma de las ponderaciones o fracciones del valor presente de cada pago hasta su madurez:

$$D = \frac{1}{P}\left(1\frac{C_1}{1+r} + 2\frac{C_2}{(1+r)^2} + \ldots + t\frac{C_t}{(1+r)^t} + \ldots + T\frac{C_T}{(1+r)^T}\right) \ldots(9)$$

donde el flujo final C_T, incluye el pago del cupón y el principal. De manera general,

$$D = \frac{\sum_{t=1}^{T} \frac{tC_t}{(1+r)^t}}{P} \ldots(10)$$

donde:
D= duración
P = el precio del bono
C_t = el flujo de efectivo del bono ocurrido en el tiempo t
r = el beneficio en la madurez del bono
t = el tiempo medido en el presente hasta que uno de los pagos se realiza.

Ejemplo 13. Considere un bono a cinco años que paga un cupón anual del 10%. El beneficio del bono es del 14% y tiene un valor a la par de \$1000. El precio del bono es \$862.69. Obtenga la duración de dicho bono.

	T				
	1	2	3	4	5
C_t	\$100	\$100	\$100	\$100	\$1100
$C_t/(1+r)^t$	87.72	76.95	67.5	59.21	571.31
$t[C_t/(1+r)^t]$	87.72	153.9	202.5	236.84	2856.55
D= (87.72+153.9+202.5+236.84+2856.55)/862.69 = 3537.51/862.69 = 4.1					

La duración mide, además, la sensibilidad del precio del bono a los movimientos de la tasa de interés. El cambio en el porcentaje del precio inducido por un pequeño cambio en la tasa de interés, se expresa como la elasticidad negativa del precio de un bono con respecto al cambio en el factor de descuento (1+r).

$$D = -\frac{\frac{dP}{P}}{\frac{d(1+r)}{(1+r)}} \ldots(11)$$

donde dP es igual al cambio en el precio y d(1+r) es el cambio en la tasa de interés. Esencialmente como medida de la elasticidad, la duración es un valor de cómo cambia el precio del bono cuando lo hace el factor de descuento (1+r). Esto se expresa:

$$dP_i = -D_i\left(\frac{d(1+r_i)}{(1+r_i)}\right)P_i \ldots(12)$$

La aplicación de esta última ecuación requiere de un conocimiento del nivel original de las tasas de interés, el precio original, el cambio en las tasas y la duración del bono.

Ejemplo 14. Sea el bono anteriormente considerado, este bono tiene un cupón anual a 5 años del 10%, con un beneficio del 14% y una duración de 4.1 años. Si los beneficios repentinamente caen del 14 al 12%, el precio del bono subirá y el monto de ajuste será de:

$$dP = -4.1\left(\frac{-.02}{1.14}\right)\$862.69 = \$62.05$$

con este cambio en el precio, el nuevo precio debería ser el precio anterior más el cambio en el mismo:

Nuevo Precio = 862.69 + 62.05 = $924.74

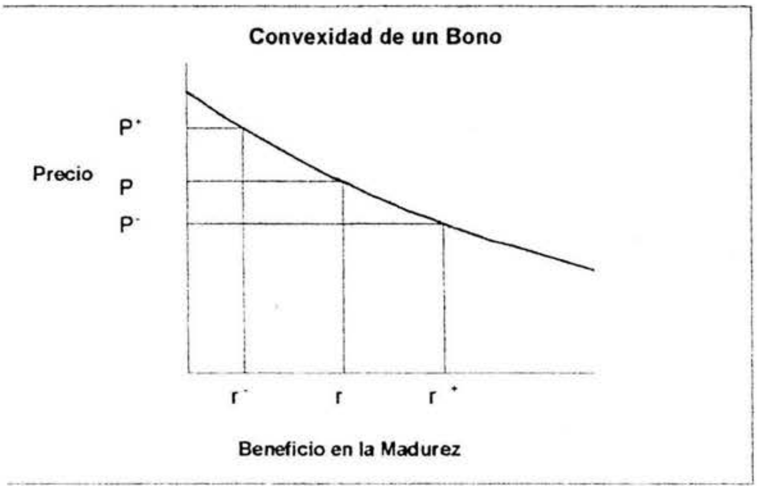
Se puede confirmar, aplicando la fórmula del precio del bono, que éste con un beneficio del 12% arroja un precio de $\frac{100}{(1+.12)} + \frac{100}{(1+.12)^2} + \frac{100}{(1+.12)^3} + \frac{100}{(1+.12)^4} + \frac{1100}{(1+.12)^5} = \$927.9$, el cual no es el mismo que el obtenido con anterioridad. Hay dos razones para esto. La primera es que todos los cálculos están sometidos a error. *La segunda, la fórmula de la duración para obtener el nuevo precio emplea conceptos derivados del cálculo, los cuales no consideran cambios infinitesimales en las variables.*

La duración es una herramienta muy empleada debido a que provee una medida convincente de las tres variables que determinan el precio de un bono y facilita la comparación del cambio de los bonos debido a la sensibilidad.

Convexidad. Esta propiedad está basada en dos conceptos asociados a bonos, estos son:

1. Si el precio de un bono se incrementa en el mercado, entonces su beneficio debe decrementarse, inversamente, si el precio de un bono se decrementa, entonces su beneficio debe incrementarse.

2. El decremento en el beneficio de un bono(r^-), incrementará su precio(P^+) por un monto mayor que el correspondiente a la caída de precio del bono(P^-) que pudiese ocurrir si hubiese un incremento de igual magnitud en el beneficio del bono(r^+).



De acuerdo con estas propiedades, el precio del bono y su beneficio están inversamente relacionados.

El beneficio en la madurez del precio del bono se denota por 'r' y 'P', respectivamente. Considérese qué ocurriría con el precio del bono si el beneficio se incrementase o decrementase en un monto fijo (por ejemplo un %) denotado por r^+ e r^- , donde el precio asociado al bono se denota respectivamente por P^- y P^+.

Mediante la figura anterior se puede concluir que: el incremento en el beneficio de r^+ está asociado a una caída en el precio del bono P^- , mientras que el decremento en el beneficio de r^- se encuentra asociado al incremento en el precio del bono en P^+. Nótese que el tamaño del incremento en el precio del bono (P^+ - P) es mayor que el tamaño de la caída en el precio del bono (P-P^-).

La curva en la figura muestra que la relación entre el precio de los bonos y los beneficios es **convexa**. Ésta es válida para tipos de bonos estándar, sin embargo, el grado de curvatura (o convexidad) no es igual para todos los bonos. Éste depende entre otros de: el monto de los pagos del cupón, la vida del bono y su valor corriente en el mercado. Al análisis de esta propiedad en los bonos se le llama convexidad.

Elasticidad. La variación de la tasa de interés de un bono puede ser medida mediante su elasticidad.

EL = Porcentaje de cambio en el precio de un bono/ Porcentaje de cambio en 1 de su beneficio en la madurez

$$EL = \frac{\Delta P / P}{\Delta TIR(1 + TIR)} < 0 \ldots (13)$$

donde EL es la elasticidad, P es el precio del bono y TIR es el rendimiento o beneficio en su madurez.

Ejemplo 15. Sea un bono que paga un cupón del 10% con igual rendimiento y tiene un valor principal de \$1000. Suponga que el valor del bono tiene un incremento en su madurez del 1%. Como resultado el valor del bono caerá a:

$$982.87 = \frac{100}{1.11} + \frac{1100}{(1.11)^2}$$

El decremento será de (1000-982.87) = \$17.13, esto equivale a 1.713% de su beneficio en la madurez inicial.

$$\text{Porcentaje de cambio en el precio} = \frac{\Delta P}{\text{precio inicial}} = \frac{-17.13}{1000} = -1.713\%$$

El cambio en el beneficio en la madurez es de .11-.10 = 0.01. Por lo tanto:

$$\text{Porcentaje de cambio del beneficio en la madurez} = \frac{\Delta TIR}{1 + TIR} = \frac{0.01}{1.10} = 0.0090909$$

De la ecuación para la elasticidad, se obtiene que:

$$EL = \frac{\Delta P / P}{\Delta TIR(1 + TIR)} = \frac{-0.01713}{0.00909} = -1.9$$

La medida de elasticidad de -1.9 indica que un cambio del beneficio en la madurez del bono de 9/10, ocasionará un cambio en sentido inverso sobre el precio del bono de 1.9 veces. Esto es, el precio del bono cae en 1.713% que es igual a $\left[\frac{\left|-1.9 * \frac{9}{10}\right|}{100}\right] = 0.0171$.

Hasta aquí hemos estudiado la forma de valuar bonos, que son los instrumentos de renta fija más comunes en el mercado. En el siguiente capítulo veremos cómo valuar instrumentos derivados sobre éste y otro tipo de activos de renta fija.

CAPÍTULO 4. VALUACIÓN DE INSTRUMENTOS DERIVADOS (OPCIONES)

En este capítulo se abordarán dos modelos convencionales empleados para valuar instrumentos de inversión derivados de renta fija (opciones): el modelo Binomial y el modelo Black & Scholes.

El modelo Binomial se utiliza para variables discretas y es el más simple, ya que se ayuda de la creación de árboles de decisión para ilustrar el comportamiento de los activos subyacentes; mientras que el modelo Black & Scholes (B&S) supone un tiempo infinitesimal para calcular el valor de estos activos.

Este capítulo se divide en dos secciones:

La primera de ellas (El modelo Binomial) muestra como se valúan los activos derivados utilizando el método Binomial.

En la segunda parte (El modelo Black & Scholes) también se muestra como valuar activos derivados, pero ahora empleando el método de Black & Scholes.

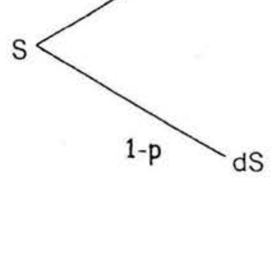
Los modelos Binomial y B&S sentarán las bases para comprender el modelo Ho & Lee, por tal motivo es recomendable que si el lector no está familiarizado con estos dos modelos preste atención especial a este capítulo.

4.1. El modelo Binomial.

Existen distintos métodos para valuar instrumentos incluyendo los de renta fija, hasta aquí sólo se han presentado aquellos que se emplean para bonos, sin embargo, hay otros que se aplican a instrumentos o activos derivados sobre instrumentos de renta fija, cuyo valor está en función de un bien o activo subyacente o un portafolio de instrumentos. El modelo Binomial es uno de ellos y se sustenta bajo dos ideas principales. La primera de ellas es que un camino aleatorio continuo puede ser modelado como discreto con las siguientes propiedades:

1. El precio del subyacente S cambia únicamente en tiempos discretos hasta el momento de la expiración T.

2. Si el precio del subyacente es S^t en el tiempo t, entonces en el tiempo (t+1) sólo podrá tomar uno de dos valores posibles, $uS^t > S^t$, o bien, $dS^t < S^t$. Esto implica que durante un intervalo de tiempo corto el precio del subyacente puede colocarse por arriba (upper u o a la alza) o, en su defecto, por abajo (down d o a la baja) de su valor original.



Esto es equivalente a decir que sólo hay dos tipos de rendimiento en cada paso y que $u-1>0$ mientras que $d-1<0$ y ambos rendimientos son los mismos para cada paso de tiempo.

3. La probabilidad de S moviéndose hacia arriba uS se denota con p **(también denominada pi o π)**; así como la probabilidad de S moviéndose hacia abajo dS se define como (1-p).

Aunque hasta ahora se ha asumido que u,d y p son independientes del tiempo y del precio del subyacente, esto no es un rasgo distintivo del modelo Binomial.

Si se inicia dando un valor al precio del subyacente, por ejemplo su valor hoy, el resto de la vida del mismo puede dividirse en pasos de tiempo t (periodo a evaluar) hasta T (fecha de madurez).

Se asume que el precio del subyacente se moverá en el tiempo t para t=1,2,...,T. De esta forma se puede construir un árbol, comenzando por dar un valor de S, y posteriormente generar dos posibles precios del subyacente en el primer paso de tiempo y así sucesivamente, hasta que el subyacente expire.

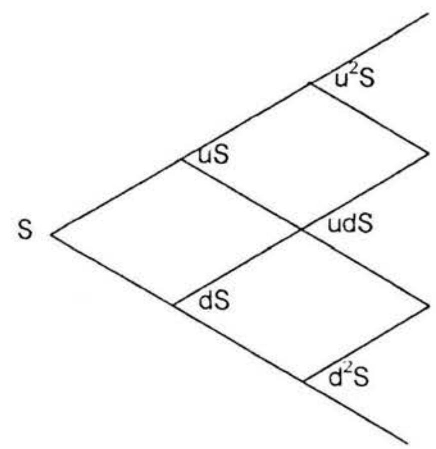


Figura A

La segunda suposición es que todo esto sucede en un mundo neutral al riesgo, esto es, en uno donde las preferencias al riesgo del inversionista son irrelevantes para la valuación del valor derivado. Esta suposición puede ser hecha, siempre y cuando sea posible generar un portafolio sin riesgo. Bajo estas circunstancias se asume que los inversionistas tienen una actitud neutral al riesgo y que el rendimiento sobre el subyacente está sujeto a una tasa libre de riesgo.

Así, en un mundo neutral al riesgo, se observa que el valor del subyacente S_n^t en el tiempo t es el valor esperado del mismo en el tiempo (t+1) descontado a la tasa libre de riesgo.

En el modelo Binomial, primero se construye un árbol de posibles precios del subyacente y sus probabilidades, dando un precio inicial para el subyacente, de tal forma que se usa este árbol para determinar los posibles precios del subyacente en su fecha de expiración y las probabilidades de que esos precios se realicen.

Sea t=0, y supóngase que en ese momento se conoce el precio del subyacente $S_n^t = S_0^0$ (el superíndice denota el tiempo, y el subíndice el estado, ya sea a la alza o a la baja). Entonces para el siguiente tiempo habrá dos posibles precios, $S_1^1 = u\,S_0^0$ y $S_0^1 = d\,S_0^0$. Para el siguiente paso en el tiempo se tendrán tres posibles precios del subyacente $S_2^2 = u^2\ S_0^0$, $S_1^2 = ud\,S_0^0$ = $du\,S_0^0$ y $S_0^2 = d^2\ S_0^0$. En el tercer paso en el tiempo hay cuatro posibles precios y así sucesivamente, hasta que en el paso t habrá t+1 posibles precios. Así, el proceso Binomial en el tiempo t queda especificado por:

$$S_n^t(\bullet) \begin{cases} S_{n+1}^{t+1}(\bullet) & \text{alza} \\ S_n^{t+1}(\bullet) & \text{baja} \end{cases}$$

Como ya se observó en la figura A, el árbol se reconecta. Esto tiene dos consecuencias importantes; la primera es que la historia del subyacente en particular se pierde, por tal motivo la dependencia del activo derivado no puede ser valuada usando los árboles. La segunda es, que el número total de puntos se incrementa proporcionalmente al número de pasos en el tiempo.

Una vez calculados los precios del subyacente y dando marcha atrás sobre el árbol, se puede valuar el precio del activo derivado como podría ser una opción. Más adelante se ejemplificará este método y se introducirán algunas fórmulas cómodas para obtener el valor justo de un activo derivado.

Determinación de p, u y d[20]

Los parámetros p, u y d deben proporcionar valores correctos para el instrumento y varianza en los cambios del precio del subyacente durante un intervalo de tiempo Δt. Ya que se está en un mundo neutral al riesgo, el rendimiento esperado de un bien subyacente es la tasa de interés libre de riesgo r[21]. Así el valor esperado del activo subyacente al final de un intervalo de tiempo Δt es $Se^{r\Delta t}$, donde S es el precio del subyacente al inicio del intervalo de tiempo. Esto implica que:

$$Se^{r\Delta t} = pSu + (1-p)Sd \,...(a)$$

o

$$e^{r\Delta t} = pu + (1-p)d \,...(b)$$

[20] John C.Hull, Options, Futures & Other Derivative Securities, "Numerical Procedures", 336-340pp.

[21] En la práctica, r se usa como una constante igual al beneficio de un bono cupón cero con una madurez igual a la de la opción valuada.

La varianza en el cambio del precio de una opción en un intervalo pequeño de tiempo Δt es $S^2\sigma^2\Delta t$. Siendo que la varianza de una variable Q se define como $E(Q^2)-[E(Q^2)]$, donde E denota el valor esperado, esto implica que

$$S^2\sigma^2\Delta t = pS^2u^2 + (1-p)S^2d^2 - S^2[pu + (1-p)d]^2$$

o

$$\sigma^2\Delta t = pu^2 + (1-p)d^2 - [pu + (1-p)d]^2 \ldots(c)$$

Las ecuaciones (b) y (c) imponen dos condiciones sobre p, u y d. Una tercera condición que usualmente se usa es:

$$u = \frac{1}{d}$$

Las tres condiciones implican:

$$p = \frac{R-d}{u-d}$$

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

donde:

$$R = e^{r\Delta t}$$

siempre y cuando Δt es pequeña.

Trabajando hacia atrás en el árbol

Las opciones se valúan iniciando al final del árbol (tiempo T) yendo hacia atrás ya que el valor o precio de la opción es conocido en ese momento. Por ejemplo una opción de venta se valúa como el $\text{máx}[K - S_n^t, 0]$[22] y una opción de compra como el $\text{máx}[S_n^t - K, 0]$, donde S_n^t es el valor del subyacente en t y K es el precio del ejercicio (lo que nos cuesta tener la opción). Ya que se asume que es un mundo neutral al riesgo, el valor de cada nodo en el tiempo T-Δt se puede obtener como el valor esperado en el tiempo T a la tasa r libre de riesgo para un periodo de tiempo Δt. De manera similar el valor de cada nodo en el tiempo T-2Δt se obtiene como el valor esperado en el tiempo T-Δt descontado en un tiempo Δt a una tasa r, y así sucesivamente. Si la opción es americana, es necesario revisar en cada nodo y observar si es

[22] Vea capítulo 2.

preferible ejercer la opción en ese periodo o esperar a uno posterior. Eventualmente trabajando hacia atrás sobre los nodos se obtiene el valor de la opción en el tiempo cero.

Valuación de una opción.

Suponiendo que se conoce la función de pago para el valor derivado y que éste depende únicamente de valor del activo subyacente en el momento de su expiración, se puede valuar el bien derivado en cualquier paso de tiempo t.

Opción de venta europea

Supóngase que se cuenta con una opción de venta europea. Esto es:

$$P_n^t = \text{máx}\left[K - S_n^t, 0\right] \text{ para } t=1,2,\ldots,T,\ n=0,1,\ldots,T \text{ y } t \geq n \ldots(1)$$

P_n^t denota el enésimo posible valor de la opción de venta en el tiempo t.

Opción de compra europea

Para una opción de compra europea:

$$C_n^t = \text{máx}\left[S_n^t - K, 0\right] \text{ para } t=1,2,\ldots,T,\ n=0,1,\ldots T \text{ y } t \geq n \ldots(2)$$

De igual forma para un flujo de efectivo con precio del ejercicio K y beneficio B se tiene: $C_n^t = \begin{cases} 0 & S_n^t < K \\ B & S_n^t \geq K \end{cases} \quad t = 0,1,\ldots,T, \quad n = 0,1,\ldots,T \text{ y } t \geq n \ldots(3)$

donde, en todos los casos, T es el periodo de expiración de la opción.

Se puede encontrar el valor esperado del bien derivado en un momento del tiempo anterior al de expiración, T-1, y el posible precio del activo S_n^{T-1}, a partir de que la probabilidad del precio de un activo en S_n^t hacia S_{n+1}^{t+1} durante un intervalo de tiempo es p o pi o π, y la probabilidad de este movimiento a S_n^{t+1} es (1-p) o (1-pi) o (1-π). Si se emplea el concepto de probabilidad neutral al riesgo se puede calcular el valor del bien derivado para cada posible precio del activo en el paso (T-1); de igual forma se puede calcular para (T-2) y así sucesivamente hasta t=0.

Opciones europeas

Sea C_n^t el valor de una opción de compra en el tiempo t. Se calcula el valor esperado de la opción en el tiempo t=0 a partir de los valores en el tiempo t+1 y descontando éstos para obtener el valor presente de la opción usando la tasa r libre de riesgo:

$$C_n^t = \frac{(p)C_{n+1}^{t+1} + (1-p)C_n^{t+1}}{r+1} \text{ para t=0 y n=0} \ldots(4)$$

donde p está en función de u, d, r y Δt (b).

$$pu + (1-p)d = e^{r\Delta t}$$

despejando:

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} \quad ...(5)$$

por simplicidad $e^{r\Delta t} = R$ ...(6). Sustituyendo (6) en (5):

$$p = \frac{R - d}{u - d} \quad ...(7)$$

en la que R = 1+r (siendo r la tasa libre de riesgo). Así, para una opción de venta en t=0 y n=0 queda:

$$P_n^t = \frac{(p)P_{n+1}^{t+1} + (1-p)P_n^{t+1}}{R} \quad ...(8)$$

mientras que para una opción de compra será:

$$C_n^t = \frac{(p)C_{n+1}^{t+1} + (1-p)C_n^{t+1}}{R} \quad ...(9)$$

En las opciones de venta o compra europeas se aplican las ecuaciones 1 ó 2 respectivamente cuando se valúan periodos mayores a cero (t>=1), posteriormente se emplean las ecuaciones 8 ó 9, según sea el caso, para obtener el valor justo de la opción en t=0.

Ejemplo 16. Sea C_0^0 = valor de una opción de compra = ?

K = precio del ejercicio de la opción = \$80

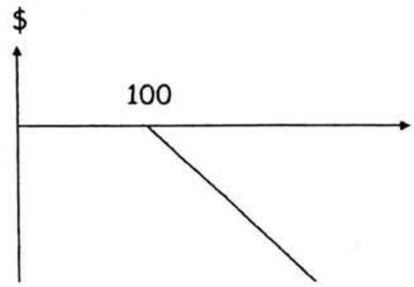
S_0^0 = valor del bien subyacente = \$100

r = 10%

Calcular el precio justo de la opción de compra en t=0, si se realiza para dos periodos y u=1.2, mientras que d=0.6. Realice el análisis gráfico de la opción y construya el árbol para la opción y para el bien subyacente.

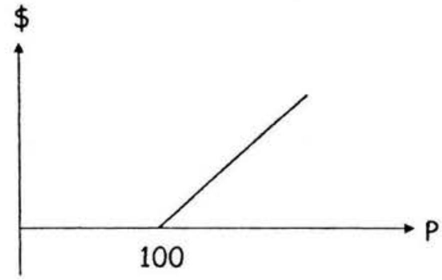
a) Análisis gráfico para la opción de compra en t=T=2 (en su vencimiento).

Si la opción es en corto (posición del emisor).



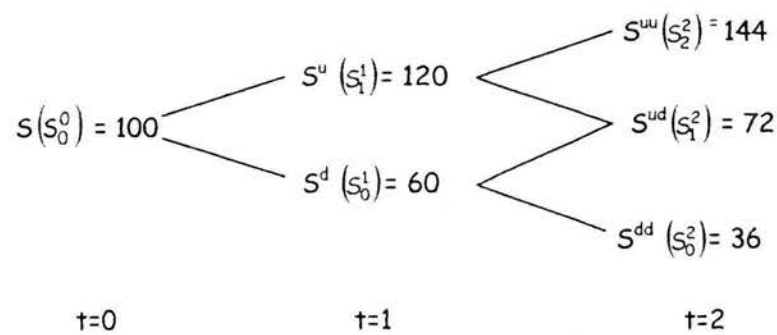
$C_0^0 = K - S_0^0$

Si la opción es en largo



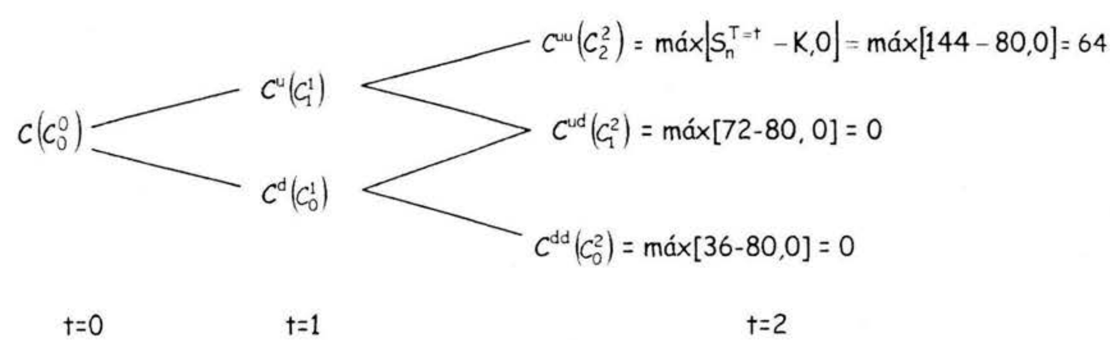
$C_0^0 = S_0^0 - K$

b) Construcción del árbol para el bien subyacente.



Una vez que se ha construido el árbol para obtener el valor de S en t=T=2 se deberá, como primer paso, obtener el valor de p y de (1-p); de (7):

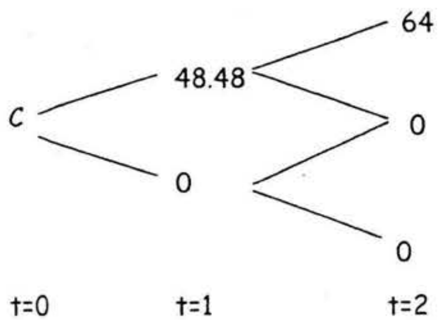
$p = \dfrac{1.10 - 0.6}{1.2 - 0.6} = 0.8333$ y $(1 - p) = 0.1666$. Empezando en t=2 y en retroceso:



Para t=1,

$$C^{u} = \frac{1}{R}\left[(p)C^{uu} + (1-p)C^{ud}\right] = \frac{1}{1.10}\left[0.8333(64) + 0.1666(0)\right] = 48.48$$

$$C^{d} = \frac{1}{R}\left[(p)C^{ud} + (1-p)C^{dd}\right] = \frac{1}{1.10}\left[0.8333(0) + 0.1666(0)\right] = 0$$



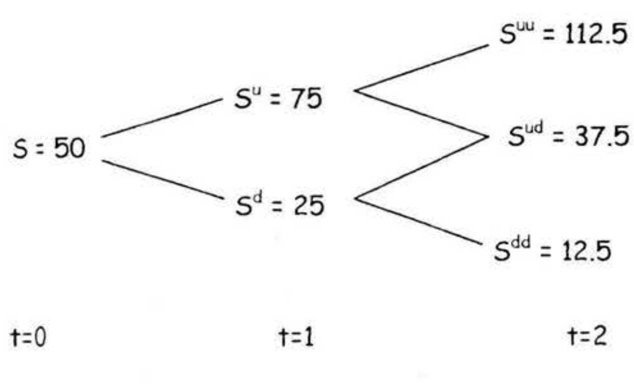
Finalmente se calculará el valor justo para la opción de compra en t=0.

$$C = \frac{1}{R}\left[(p)C^{u} + (1-p)C^{d}\right] = \frac{1}{1.10}\left[0.8333(48.48) + 0.1666(0)\right] = \$36.72$$

Este resultado arroja el valor que se debe pagar por la opción de compra bajo las condiciones citadas al inicio del ejercicio.

Ejemplo 17. El precio de un bien subyacente es de \$50, el precio de éste puede aumentar en un 50% o disminuir en un 50%; mientras que el precio del ejercicio es de \$60 y la tasa de interés es del 20% anual. Considérese que se emite una opción europea sobre el bien, tal que en la fecha del ejercicio, el poseedor de la opción tiene derecho a venderla. ¿Cuál es el valor de la opción a dos periodos en la fecha del ejercicio?.

Volatilidad del bien o activo subyacente:



Obtenemos el valor de p y (1-p) de (7);

$R = 1 + r;$

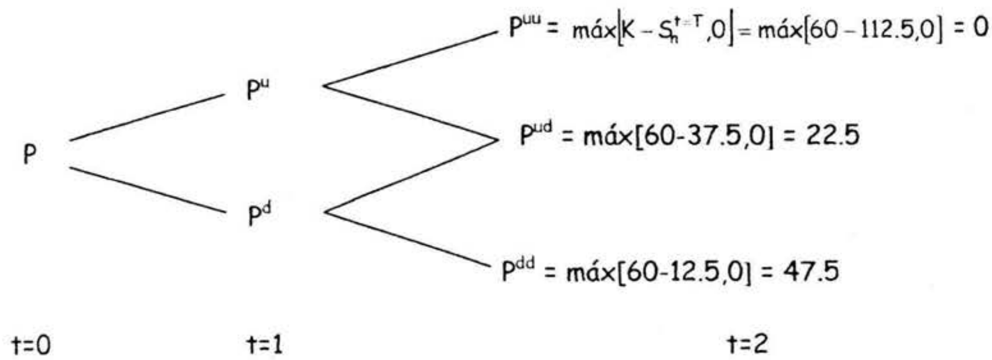
$R = 1+0.2 = 1.2$

$u = 1.5$

$d = 0.5$

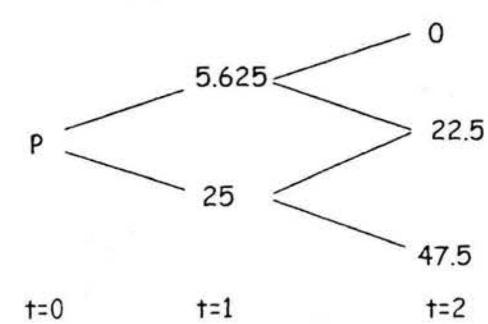
$$p = \frac{1.2 - 0.5}{1.5 - 0.5} = 0.7 \text{ y } (1\text{-}p) = 0.3$$

Valuación de la opción de venta:



Para t = 1;

$$P^u = \frac{1}{R}\left[(p)P^{uu} + (1-p)P^{ud}\right] = \frac{1}{1.2}[0.7(0) + 0.3(22.5)] = 5.625$$
$$P^d = \frac{1}{R}\left[(p)P^{ud} + (1-p)P^{dd}\right] = \frac{1}{1.2}[0.7(22.5) + 0.3(47.5)] = 25$$



El valor justo para la opción de venta en t = 0, es:

$$P = \frac{1}{R}\left[(p)P^{u} + (1-p)P^{d}\right] = \frac{1}{1.2}[0.7(5.625) + 0.3(25)] = \$9.5312$$

$$P = \frac{1}{R}\left[(p)P^u + (1-p)P^d\right] = \frac{1}{1.2}[0.7(5.625) + 0.3(25)] = \$9.5312$$

Opciones americanas

Así como es posible valuar opciones europeas empleando el método Binomial, es posible valuar otros tipos de opciones derivadas, entre ellas las americanas.

En este tipo de opciones, la valuación inicial y final hacen uso de las ecuaciones empleadas para las opciones europeas, sin embargo el proceso de cálculo intermedio es distinto ya que la opción puede ser ejercida en cualquier periodo de tiempo.

Opción de compra

$$C_n^t = \text{máx}\left[S_n^t - K, \frac{(p)C_{n+1}^{t+1} + (1-p)C_n^{t+1}}{R}\right] \text{ para } t=1,2,\ldots,T-1,\ n=0,1,\ldots,T-1 \text{ y } t \geq n \ldots.(10)$$

Opción de venta

$$P_n^t = \text{máx}\left[K - S_n^t, \frac{(p)P_{n+1}^{t+1} + (1-p)P_n^{t+1}}{R}\right] \text{ para } t=1,2,\ldots,T-1,\ n=0,1,\ldots,T-1 \text{ y } t \geq n \ldots.(11)$$

donde, en todos los casos, T es el periodo de expiración de la opción.

Ejemplo 18. Considere una opción de venta americana a 5 meses sobre una acción que no paga dividendos. Cuando el precio de la acción es de \$50 el precio del ejercicio también lo es, la tasa de interés es del 10% por año y la volatilidad es de 40% anual. Esto es:

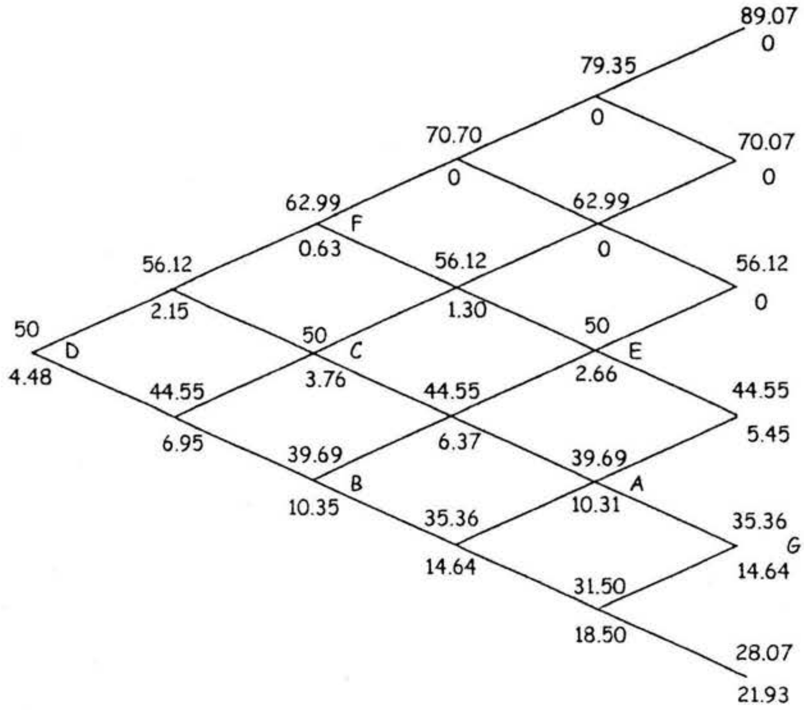
K=\$50
S=\$50
r=0.10
σ=0.40
T=0.4167

Supóngase que la vida de la opción se divide en intervalos de 1 mes (0.0833); esto es Δt=0.0833.

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = 1.1224 \qquad d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} = 0.8909$$

$$R = e^{r\Delta t} = 1.0084 \qquad p = \frac{R-d}{u-d} = 0.5076$$

$$1 - p = 0.4924$$



Cada nodo tiene dos números. Los de arriba muestran el precio de la acción y los inferiores muestran el valor de la opción. La probabilidad de un movimiento a la alza siempre es de 0.5076 mientras que la probabilidad de un movimiento a la baja siempre es de 0.4924.

El precio de la acción en el nodo j (j=0,1,...i) en el periodo iΔt se calcula como $Su^j d^{i-j}$. Así, el precio de la acción en el nodo A (i=4, j=1) será $50x1.224x0.8909^3 = \$39.69$.

Los precios de la opción al final de cada nodo se calculan como $\text{máx}\left[K - S_n^{\dagger}, 0\right]$. Así el precio de la opción en el nodo G será 50-35.36=14.64.

Los precios de la opción en los penúltimos nodos se calculan a partir de los precios de la opción de los nodos finales. Primero, se asume el no ejercicio de la opción en los nodos. Esto significa que el precio de la opción se calcula como el valor presente del precio esperado de la opción en el tiempo Δt. Así, en el nodo E, el precio de la opción se calcula como $(0.5076x0 + 0.4924x5.45)e^{-0.10x0.0833} = 2.66$ mientras que en el nodo A se calcula como $(0.5076x5.45 + 0.4924x14.64)e^{-0.10x0.0833} = 9.90$.

Entonces se decide si se ejerce la opción o es preferible esperar. Para el nodo E un ejercicio previo daría un valor para la opción de cero ya que tanto la acción como el precio del ejercicio son de $50, por lo tanto es preferible esperar. El valor de la opción en el nodo E es $2.66. En el nodo A es diferente. Si la opción se ejerce su valor será de $50-$39.69 ó $10.31. Esto es más que $9.90. Si se llega al nodo A, la opción se ejercerá y su valor será de $10.31. Los demás precios de la opción se calculan de manera similar.

Se observa que no siempre lo mejor es ejercer la opción de forma adelantada cuando ésta está en el dinero. Considere el nodo B. Si la opción se ejerce, su valor será de \$50-39.69 ó \$10.31. Sin embargo, su valor real es de $(0.5076x6.37 + 0.4924x14.64)e^{-0.10x0.0833} = \$10.35$.

La opción entonces no debe ser ejercida en este nodo, ya que su valor correcto es de \$10.35.

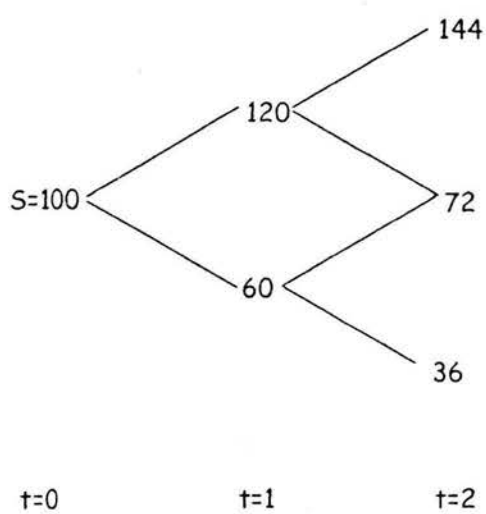
Trabajando hacia atrás en el árbol, se encuentra que el valor de la opción en el nodo inicial será de \$4.48.

Ejemplo 19 (igual al 16 pero para una opción de compra americana).

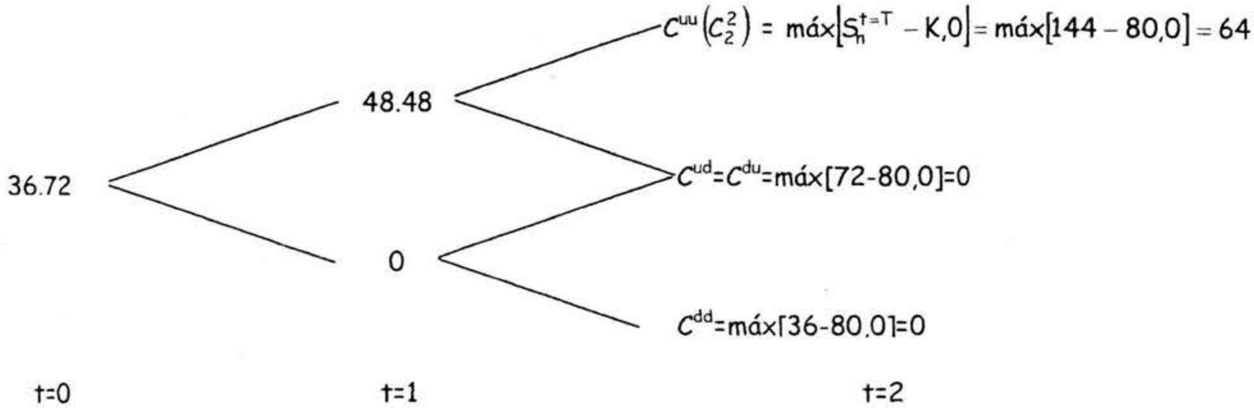
Sea C = valor de una opción de compra americana = ?
K = precio del ejercicio de la opción = \$80
S = valor del bien subyacente = \$100
r = 10%

Calcular el precio justo de la opción de compra americana en t=0, si se realiza para dos periodos en los que la opción puede ser ejercida en t=1 ó en t=2 y u=1.2, mientras que d=0.6.

Volatilidad para el bien subyacente.



Siendo p=0.8333 y (1-p)=0.1666. Empezando en t=2 y en retroceso:



$$C^u = \text{máx}\left[S_n^t - K, \frac{(p)C_{n+1}^{t+1} + (1-p)C_n^{t+1}}{R}\right] = \text{máx}[120 - 80, \frac{1}{1.10}(0.8333(64) + 0.1666(0))] = 48.48$$

$$C^d = \text{máx}[60 - 80, \frac{1}{1.10}(0.8333(0) + 0.1666(0))] = 0$$

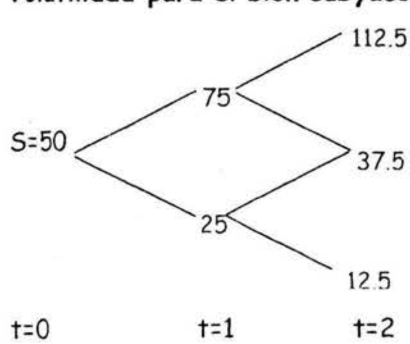
El valor justo de la opción de compra americana en t=0 es:

$$C = \frac{1}{1.10}[0.8333(48.48) + 0.1666(0)] = \$36.72$$

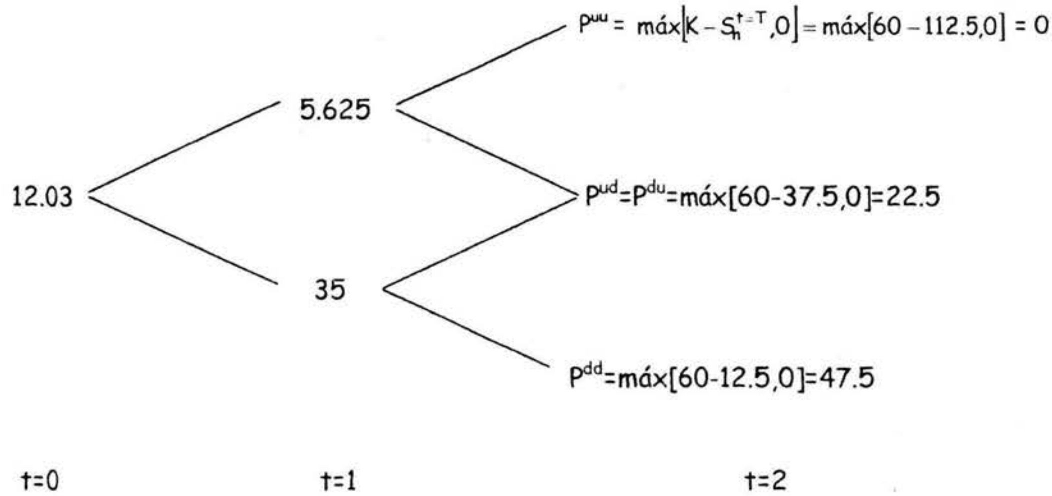
Observe que el valor justo tanto de la opción europea como americana es el mismo, sin embargo esto no es regla, y la mayoría de las veces el valor de la opción de compra americana es mayor al de la europea, debido a la factibilidad de la americana de poder ser ejercida en cualquier periodo de tiempo.

Ejemplo 20 (igual al 17 pero para una opción de venta americana). El precio de un bien subyacente es de \$50, el precio de éste puede aumentar en un 50% o disminuir en un 50%; mientras que el precio del ejercicio es de \$60 y la tasa de interés es del 20% anual. Considérese que se emite una opción americana sobre el bien, tal que en t=1 ó t=2, el poseedor de la opción tiene el derecho a vender por el precio del bien más alto ocurrido durante la vida de la opción. ¿Cuál es el valor de la opción?

Volatilidad para el bien subyacente.



Siendo p=0.7 y (1-p)=0.3. Empezando en t=2 y en retroceso:



$$P^u = \text{máx}\left[K - S_n^t, \frac{(p)P_{n+1}^{t+1} + (1-p)P_n^{t+1}}{R}\right] = \text{máx}[60 - 75, \frac{1}{1.2}(0.7(0) + 0.3(22.5))] = 5.625$$

$$P^d = \text{máx}[60 - 25, \frac{1}{1.2}(0.7(22.5) + 0.3(47.5))] = 35$$

El valor justo de la opción de venta americana en t=0 es:

$$P = \frac{1}{1.2}[0.7(5.625) + 0.3(35)] = \$12.03$$

Observe que el valor justo de la opción de venta americana es mayor a la europea para el mismo escenario.

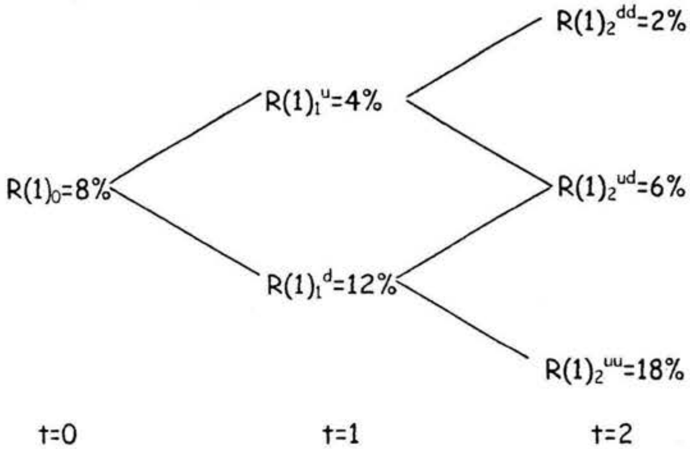
Callables y putables

Otros instrumentos derivados son los callables y putables, los cuales son empleados para recompra de bonos. Tanto el callable como el putable tienen un valor, callexer o putexer, respectivamente y pueden ser ejercidos antes del vencimiento del bono sobre el que se comercializan.

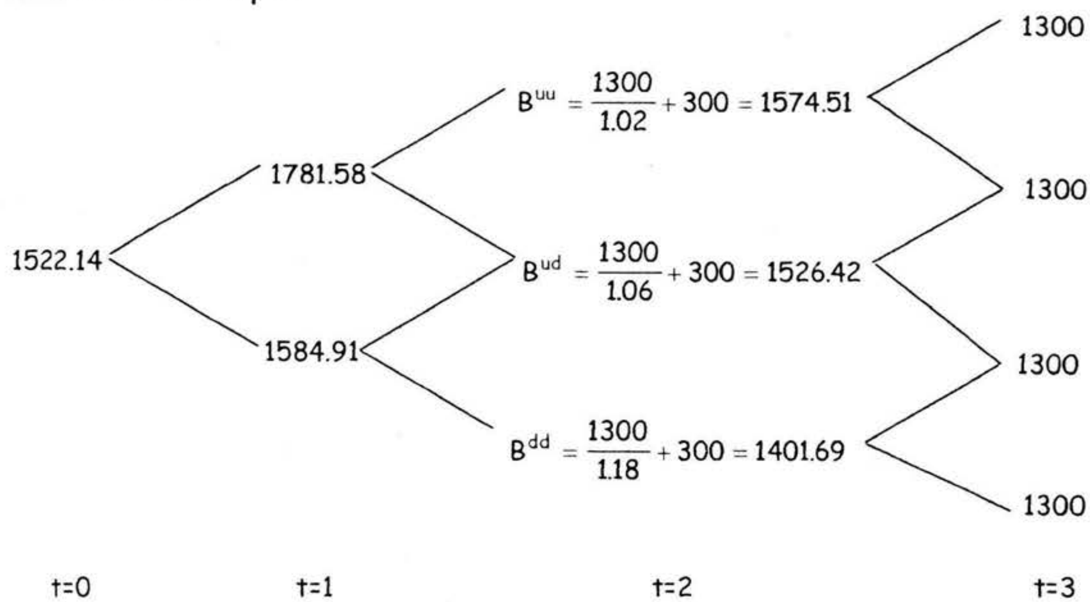
Su función es permitir comprar, en el caso del callable, un bono a un precio menor que en el mercado; o bien venderlo, en el caso del putable, a un precio mayor que en el mercado.

Ejemplo 21. Sea un bono cupón a 3 años, que paga un cupón de 30%, $1000 de principal y cuyo esquema de tasas se muestra a continuación. Siendo p=0.3 y (1-p)=0.7.

Esquema de tasas.



Precios del bono cupón.



$$B^u=\frac{1}{0.04}[0.3(1574.51)+0.7(1526.42)]+300=1781.58$$

$$B^d=\frac{1}{0.12}[0.3(1526.42)+0.7(1401.69)]+300=1584.91$$

Siendo el precio del bono en t=0:

$$B_0=\frac{1}{0.08}[0.3(1781.58)+0.7(1584.91)]=\$1522.14$$

Una vez obtenido el precio del bono y siendo que los callables y putables se valúan bajo el esquema de estos instrumentos se tiene:

Callable

$$Ca_n^t = \text{cupón} \quad \text{del} \quad \text{bono} + \text{mín}\left[\text{callexer}, \frac{1}{R(1)_n^t}\left[(p)Ca_{n+1}^{t+1} + (1-p)Ca_n^{t+1}\right]\right] \quad \text{para} \quad t=1,2,\ldots,T-1,$$

$n=0,1,\ldots,T-1$ y $t \geq n$ ...(12)

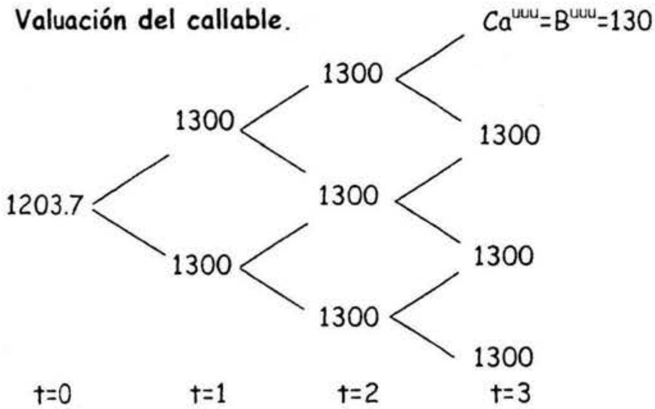
donde $R(1)_n^t$ corresponde al esquema de tasas del bono sobre el que se valúa el instrumento y en todos los casos T es el periodo de expiración de la opción.

Obteniéndose el precio justo del callable en t=0 mediante:

$$Ca = \frac{1}{R(1)_0}\left[(p)Ca^u + (1-p)Ca^d\right] \ldots(13)$$

Ejemplo 22. Sea el bono del ejemplo anterior que puede ser retirado (callable) por el emisor en 1 ó en 2 años después del pago del cupón. Siendo su valor de recompra (callexer) de \$1000, p=0.3 y (1-p)=0.7.

Valuación del callable.



$$Ca^{uu} = \text{cupón} + \text{mín}\left[\text{callexer}, \frac{1}{1+\text{tasa}}\left((p)Ca^{uuu} + (1-p)Ca^{uud}\right)\right] = 300 + \text{mín}\left[1000, \frac{1300}{1.02}\right] = 1300$$

$$Ca^{ud} = 300 + \text{mín}\left[1000, \frac{1}{1.06}(0.3(1300) + 0.7(1300))\right] = 300 + \text{mín}\left[1000, \frac{1300}{1.06}\right] = 1300$$

$$Ca^{ud} = 300 + \text{mín}\left[1000, \frac{1}{1.18}(0.3(1300) + 0.7(1300))\right] = 300 + \text{mín}\left[1000, \frac{1300}{1.18}\right] = 1300$$

$$Ca^{u} = 300 + \text{mín}[1000, \frac{1}{1.04}(0.3(1300) + 0.7(1300))] = 1300$$

$$Ca^{d} = 300 + \text{mín}[1000, \frac{1}{1.12}(0.3(1300) + 0.7(1300))] = 1300$$

El valor justo del callable en t=0 es:

$$Ca = \frac{1}{1.08}[0.3(1300) + 0.7(1300)] = \$1203.70$$

Lo mismo sucede para la valuación de un putable.

Putable

Pu_n^t = cupón del bono + $\text{máx}\left[\text{putexer}, \frac{1}{R(1)_n^t}\left[(p)Pu_{n+1}^{t+1} + (1-p)Pu_n^{t+1}\right]\right]$ para t=1,2,...,T-1, n=0,1,...T-1 y $t \geq n$ ...(14)

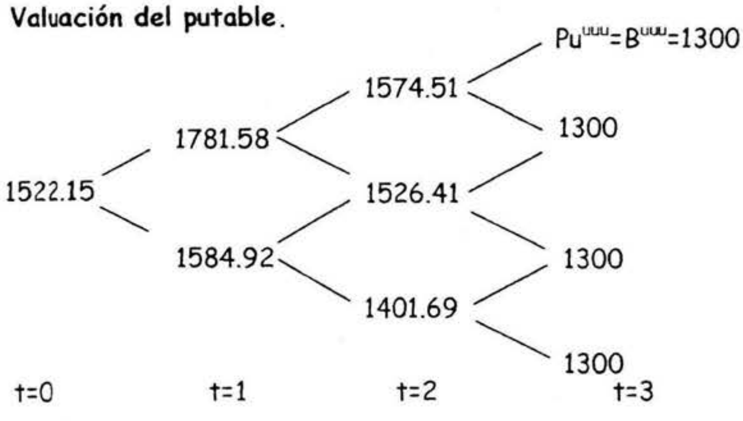
donde $R(1)_n^t$ corresponde al esquema de tasas del bono sobre el que se valúa el instrumento y en todos los casos T es el periodo de expiración de la opción .

Obteniéndose el precio justo del putable mediante:

$$Pu = \frac{1}{R(1)_0}\left[(p)Pu^u + (1-p)Pu^d\right] \text{...(15)}$$

Ejemplo 23. Sea el bono del ejemplo 20 y cuyo esquema de tasas es el mismo. Calcular un putable si su valor de reventa (putexer) es de $1000. Siendo p=0.3 y (1-p)=0.7 y puede ser revendido en t=1 ó t=2 justo después del pago del cupón.

Valuación del putable.



$$Pu^{uu} = \text{cupón} + \text{máx}[\text{putexer}, \frac{1}{1+\text{tasa}}((p)Pu^{uuu} + (1-p)Pu^{uud})] = 300 + \text{máx}[1000, \frac{1300}{1.02}] = 1574.51$$

$$Pu^{ud} = 300 + \text{máx}[1000, \frac{1}{1.06}(0.3(1300) + 0.7(1300))] = 300 + \text{máx}[1000, \frac{1300}{1.06}] = 1526.41$$

$$Pu^{dd} = 300 + \text{máx}[1000, \frac{1}{1.18}(0.3(1300) + 0.7(1300))] = 300 + \text{máx}[1000, \frac{1300}{1.18}] = 1401.69$$

$$Pu^{u} = 300 + \text{máx}[1000, \frac{1}{1.04}(0.3(1574.51) + 0.7(1526.41))] = 300 + \text{máx}[1000, \frac{1540.84}{1.04}] = 1781.58$$

$$Pu^{d} = 300 + \text{máx}[1000, \frac{1}{1.12}(0.3(1526.41) + 0.7(1401.69))] = 300 + \text{máx}[1000, \frac{1439.11}{1.12}] = 1584.92$$

El valor justo del putable en t=0 es:

$$Pu = \frac{1}{1.08}[0.3(1781.58) + 0.7(1584.92)] = \$1522.15$$

Combinación de opciones.

Las opciones rara vez se usan de una en una. En especial, en los mercados organizados es muy frecuente encontrar una desconcertante variedad de combinación de opciones que no son más que combinación de varios calls y puts.

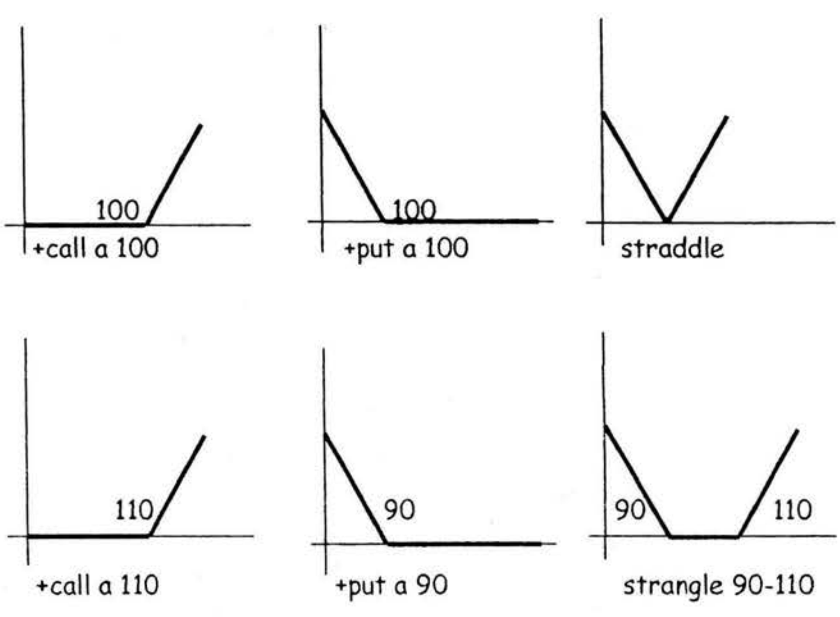
Los motivos que llevan a la aparición de este tipo de estructuras suelen caer bajo dos grandes apartados:

- Reducir o aumentar la primera opción.
- Concentrar el riesgo de la estructura sobre un parámetro específico y reducir el impacto de otros parámetros.

Straddles y Strangles

Un straddle es una estructura en la que se compra (o vende) simultáneamente un call y un put al mismo plazo y precio del ejercicio (strike).

Un strangle es una estructura en la que se compra (o vende) simultáneamente un call y un put al mismo plazo, con el call a un precio del ejercicio (strike) superior al put.

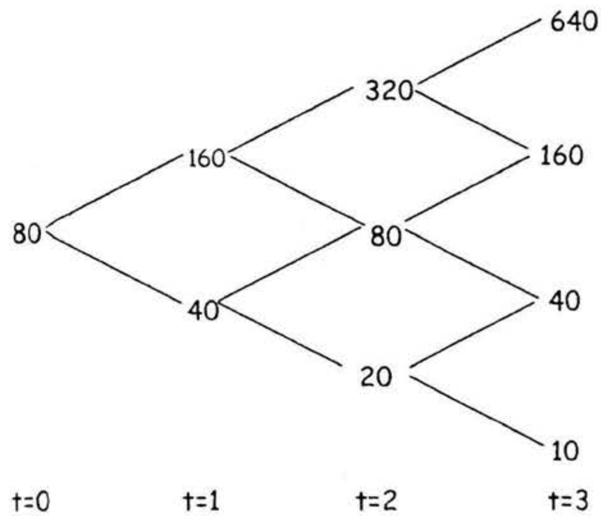


Si alguien en el mercado cree que los niveles de volatilidad implícitos en los precios actuales de opciones en el mercado son demasiado bajos, pero no tiene opinión acerca de la dirección del mercado, puede comprar un straddle o un strangle. Si la volatilidad en el mercado aumenta y suben las volatilidades implícitas de las opciones, el straddle o strangle comprado subirá de precio. Por supuesto también se puede hacer lo contrario; vender un straddle o un strangle cuando se cree que la volatilidad implícita en el mercado es demasiado alta. Si se tiene razón el mercado se moverá poco y el straddle vencerá con muy poco valor intrínseco, perdiendo por supuesto todo su valor tiempo.

Ejemplo 24. Un straddle americano es una combinación de un call y un put americanos sobre el mismo bien, con el mismo precio del ejercicio y la misma fecha de vencimiento. Normalmente cada opción se puede ejercer de manera separada.

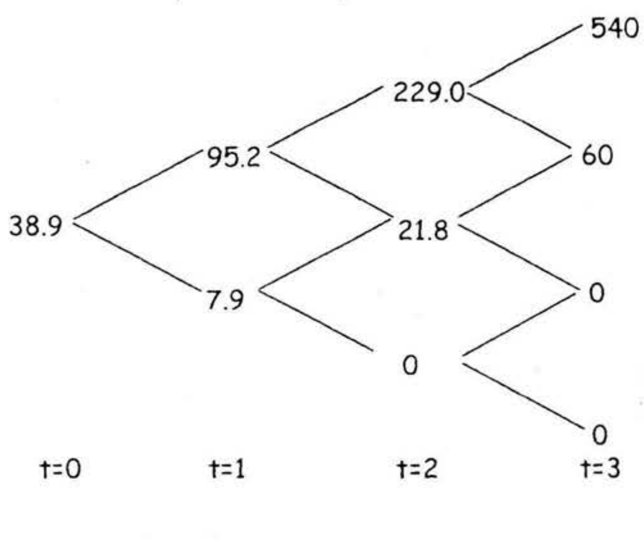
La cotización del bien es de $80 y en cada período el bien aumenta en un 100% o disminuye en un 50%. La tasa de interés es del 10% anual. ¿Cuál es el valor de un straddle americano normal con precio del ejercicio de $100 y tres periodos hasta la fecha de vencimiento?.

Modelo de volatilidad del bien.



Valuación del straddle normal.(La suma de una opción de compra y una de venta sobre el mismo bien y al mismo precio del ejercicio)

Valuación de la opción de compra americana



Cálculos: R=1.1, K=\$100, u=2, d=0.5, p=0.4, (1-p)=0.6

C^{uuu}=máx(640-100,0)=540
C^{uud}=máx(160-100,0)=60
C^{udd}=máx(40-100,0)=0
C^{ddd}=máx(10-100,0)=0

$$C^{uu} = \text{máx}\left[S^{uu} - K, \frac{1}{R}((p)C^{uuu} + (1-p)C^{uud})\right] = \text{máx}\left[320 - 100, \frac{1}{1.1}(0.4(540) + 0.6(60))\right] = 229.09$$

$$C^{ud} = \text{máx}\left[S^{ud} - K, \frac{1}{R}((p)C^{uud} + (1-p)C^{udd})\right] = \text{máx}\left[80 - 100, \frac{1}{1.1}(0.4(60) + 0.6(0))\right] = 21.81$$

$$C^{dd} = \text{máx}\left[S^{dd} - K, \frac{1}{R}((p)C^{udd} + (1-p)C^{ddd})\right] = \text{máx}\left[20 - 100, \frac{1}{1.1}(0.4(0) + 0.6(0))\right] = 0$$

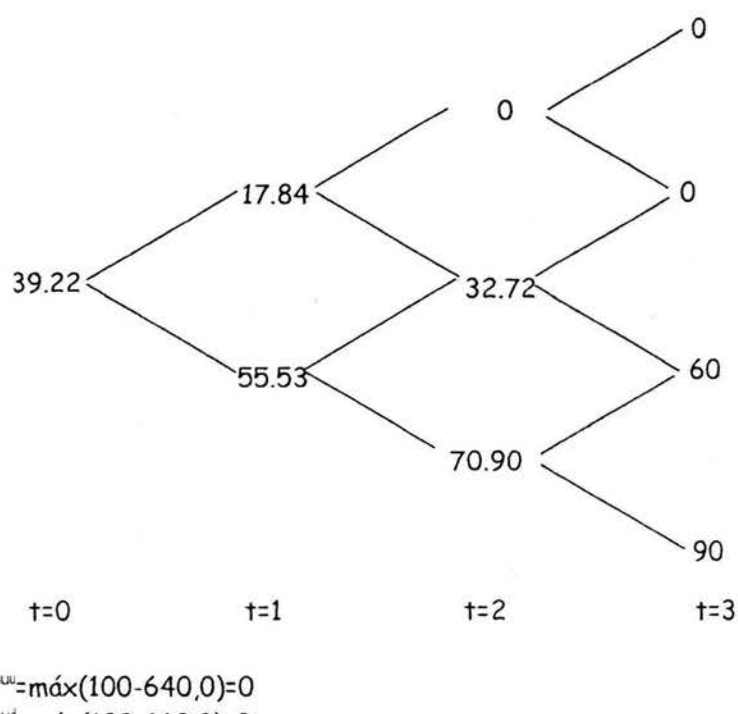
$$C^{u} = \text{máx}\left[S^{u} - K, \frac{1}{R}((p)C^{uu} + (1-p)C^{ud})\right] = \text{máx}\left[160 - 100, \frac{1}{1.1}(0.4(229.09) + 0.6(21.81))\right] = 95.21$$

$$C^{d} = \text{máx}\left[S^{d} - K, \frac{1}{R}((p)C^{ud} + (1-p)C^{dd})\right] = \text{máx}\left[40 - 100, \frac{1}{1.1}(0.4(21.81) + 0.6(0))\right] = 7.93$$

El valor justo de la opción de compra americana en t=0 es:

$$C = \frac{1}{R}\left[(p)C^{u} + (1-p)C^{d}\right] = \frac{1}{1.1}(0.4(95.21) + 0.6(7.93)) = \$38.95$$

Valuación de la opción de venta americana.



P^{uuu}=máx(100-640,0)=0
P^{uud}=máx(100-160,0)=0
P^{udd}=máx(100-40,0)=60

P^{ddd}=máx(100-10,0)=90

$$P^{uu} = máx\left[K - S^{uu}, \frac{1}{R}((p)P^{uuu} + (1-p)P^{uud})\right] = máx[100 - 320, 0] = 0$$

$$P^{ud} = máx\left[K - S^{ud}, \frac{1}{R}((p)P^{uud} + (1-p)P^{udd})\right] = máx\left[100 - 80, \frac{1}{1.1}(0.4(0) + 0.6(60))\right] = 32.73$$

$$P^{dd} = máx\left[K - S^{dd}, \frac{1}{R}((p)P^{udd} + (1-p)P^{ddd})\right] = máx\left[100 - 20, \frac{1}{1.1}(0.4(60) + 0.6(90))\right] = 80$$

$$P^{u} = máx\left[K - S^{u}, \frac{1}{R}((p)P^{uu} + (1-p)P^{ud})\right] = máx\left[100 - 160, \frac{1}{1.1}(0.4(0) + 0.6(32.73))\right] = 17.85$$

$$P^{d} = máx\left[K - S^{d}, \frac{1}{R}((p)P^{ud} + (1-p)P^{dd})\right] = máx\left[100 - 40, \frac{1}{1.1}(0.4(32.73) + 0.6(80))\right] = 60$$

El valor justo de la opción de venta americana en t=0 es:

$$P = \frac{1}{R}\left[(p)P^{uuu} + (1-p)P^{uud}\right] = \frac{1}{1.1}(0.4(17.85) + 0.6(60)) = \$39.22$$

Straddle Normal Americano=Opción de compra + Opción de venta
Straddle Normal Americano=38.95+39.22=$78.17

4.2. El Modelo Black & Scholes (B&S)

El análisis de Black & Scholes es análogo al método Binomial. Lo interesante de este modelo es que en el fondo contiene el método Binomial, pero los subperiodos de tiempo son mucho más pequeños. De hecho, el método Binomial fue desarrollado posteriormente a la fórmula Black & Scholes.

Si bien esta fórmula se desarrolla condicionada a la ocurrencia de supuestos un poco restrictivos, es todavía la más usada en la valuación de opciones. Cabe señalar que, a diferencia del método Binomial, B&S es exclusivo para opciones de tipo europeo.

Los supuestos del modelo son:

1. No hay sanciones o restricciones para la venta corta.
2. Los costos de transacción e impuestos son de cero.
3. La opción es europea.
4. Las acciones no pagan dividendos.
5. El precio del bien subyacente (incluyendo acciones) es continuo, es decir, no hay cambios súbitos.
6. El mercado opera de manera continua.
7. Se conoce la tasa de interés a corto plazo, la cual es constante.
8. El precio del bien subyacente (incluyendo acciones) se distribuye normalmente.

El modelo Black & Scholes se fundamenta en una reducción de tiempo a instantes infinitesimales. Demuestra que el valor de una combinación específica de acciones y solicitud de préstamo, en realidad, duplica el valor de una opción de compra durante un periodo de tiempo infinitesimal. Ya que el precio de las acciones cambiará después del primer instante, es necesario otra combinación de acciones y solicitud de préstamo para duplicar el valor de la opción de compra en el segundo instante, y así sucesivamente. Se puede duplicar en forma continua el valor de una opción de compra ajustando la combinación en cada momento.

$$C = SN(d_1) - Ke^{-rt}N(d_2)\ldots(16)$$

$$d_1 = \frac{\left[\ln\left(S/_K\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right]}{\sqrt{\sigma^2 t}}\ldots(17)$$

$$d_2 = d_1 - \sqrt{\sigma^2}\ldots(18)$$

donde:

S = Precio del bien subyacente
K = Precio de ejercicio de la opción de compra
r = Tasa de rentabilidad continua sin riesgo (anual)
σ^2 = Varianza (por año) de la rentabilidad continua de las acciones
t = Tiempo (en años) faltante para el vencimiento

Existe además un concepto estadístico:

N(*d*) = probabilidad de que una variable aleatoria distribuida normalmente y estandarizada sea menor o igual que *d*.

Con el fin de entender mejor la aportación del modelo B&S, demos un ejemplo sencillo de cómo determinar el precio de una opción, suponiendo que en el mercado nunca puede haber una posibilidad de arbitraje.

Ejemplo 25. Sea una opción de compra cuyo precio del ejercicio es de $49. La acción se vende a $50 y el día de su adquisición la tasa de interés era del 7%, faltaban 199 días para su vencimiento.

Sea:

S=$50
K=$49
r = 0.07
t, puede calcularse en años a través de: t = 199/365.

Se cuenta con todos los elementos necesarios, en la vida real esto también sería posible, el problema surge al determinar la varianza de la rentabilidad de las acciones. La fórmula requiere la varianza vigente entre la fecha de compra y la de vencimiento. Como esto es un valor desconocido en el presente, el valor exacto de la varianza no se puede conocer. Con frecuencia, dicha varianza se calcula con base en datos pasados los cuales no siempre se ajustan a las predicciones por lo que, antes de tomar cualquier decisión, se deben ajustar a la volatilidad que presenta el bien subyacente en ese momento. Para el ejemplo supóngase que la varianza es de 0.09.

Usando los parámetros presentados se puede ya calcular el valor de la opción de compra.

Paso 1. Calcular d_1 y d_2.

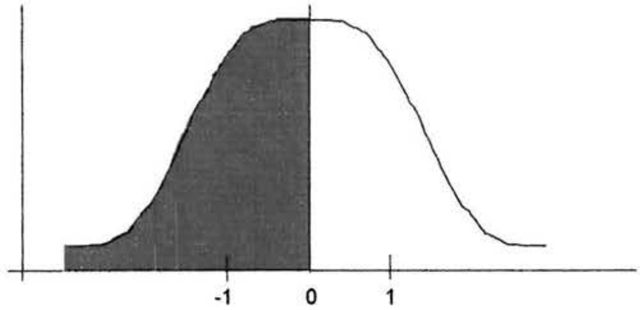
$$d1 = \frac{\left[\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right]}{\sqrt{\sigma^2 t}}$$

$$= \frac{\left[\ln\left(\frac{50}{49}\right) + \left(0.07 + \frac{1}{2} * 0.09\right) * \frac{199}{365}\right]}{\sqrt{0.09 * \frac{199}{365}}}$$

$$= \frac{[0.0202 + .0627]}{0.2215} = 0.3743$$

$$d_2 = d_1 - \sqrt{\sigma^2 t} = 0.1528$$

Estos valores pueden ser agrupados dentro de una función normal con media 0 y desviación estándar 1.



Los estadísticos señalan que N(0) = 50%. Resulta que:

$N(d_1)$ = N(0.3743) = 0.6459
$N(d_2)$ = N(0.1528) = 0.5607

El primer valor indica que hay una probabilidad del 64.59% de que una muestra de la distribución normal estandarizada sea menor de 0.3743. El segundo valor indica que existe una probabilidad del 56.07% de que la muestra de distribución normal estandarizada sea menor de 0.1528. De modo más general, N(*d*) es la notación que indica que la muestra de la distribución normal estandarizada estará por debajo de *d* ya que, N(*d*) es la probabilidad acumulada de *d*. Nótese que d_1 y d_2, en este ejemplo, son ligeramente positivos, de manera que $N(d_1)$ y $N(d_2)$ son ligeramente mayores que 0.50.

Paso 1. Calcular el Call.

$$C = S * [N(d_1)] - Ke^{-rt} * [N(d_2)]$$

$$= 50 * [N(d_1)] - 49\left[e^{-0.07*\left(\frac{199}{365}\right)}\right] * [N(d_2)]$$

$$= (50 * 0.6459) - (49 * 0.9626 * 0.5607)$$

$$C = 32.295 - 26.447 = \$5.85$$

Esta fórmula es de gran utilidad debido a que: la aversión del inversionista al riesgo no afecta el valor, ni depende de la rentabilidad esperada de las acciones, no obstante los inversionistas que tienen diversas valoraciones de la rentabilidad esperada de las acciones estarán de acuerdo en el precio de la opción de compra.

La valuación de la opción de venta.

Aunque el modelo Black & Scholes se emplea prácticamente para valuar opciones de compra, también puede ser utilizado para opciones de venta, a través del principio de "paridad opción de compra-opción de venta".

Ejemplo 26. Asúmase que un inversionista realiza las siguientes transacciones, donde la opción de venta y la opción de compra tienen el mismo tiempo de expiración y están sobre la misma acción del ejemplo anterior, de tal forma que el inversionista pueda:

- ✓ Comprar una acción con valor de \$100 (S).
- ✓ Comprar una opción de venta P cuyo precio es desconocido, con un precio del ejercicio K de \$100 y a un año.
- ✓ Vender una opción de compra C cuyo precio es de \$11.84, con un precio del ejercicio K de \$100, a un año y cuya tasa libre de riesgo r = 12%.

En el momento de la expiración, el precio de la acción podrá tener cualquier valor; sin embargo, lo interesante es que el valor del portafolio es el mismo. Si se consideran los tres instrumentos se llega con una inversión libre de riesgo, la cual pagará $E = \frac{K}{(1+r)^t} = 89.28$ en su expiración, de tal forma que el valor total del portafolio debe ser igual al valor presente del pago, sin riesgo en la expiración. Esto significa que:

$$S - C + P = \frac{K}{(1+r)^t}$$

Esto es, el valor del portafolio para la combinación "opción de compra-opción de venta" es igual al valor presente del precio del ejercicio descontado a la tasa libre de riesgo.

Ya que todos los demás valores son conocidos, excepto el precio de la opción de venta, se puede emplear la relación anterior para calcular P.

$$P = \frac{K}{(1+r)^t} - S + C \ldots (19)$$

$$P = \frac{100}{1.12} - 100 + 11.84 \approx \$1.13$$

Bajo estas circunstancias, la opción de venta es equivalente a $1.13.

CAPÍTULO 5. EL MODELO HO & LEE[23]

Ho & Lee es un modelo de no arbitraje para valuar instrumentos de renta fija. Se presenta como un árbol Binomial con capitalización continua donde existen dos parámetros, uno concerniente a la volatilidad y otro relacionado con el precio según el riesgo en el mercado. Análogamente al modelo Binomial, las preferencias de riesgo de la inversión resultan irrelevantes en el precio de opciones.

En este tipo de modelo los bonos de descuento y opciones europeas, entre otras, sobre bonos de descuento pueden ser valuados analíticamente.

El modelo Ho & Lee tiene la ventaja de que el precio en el futuro depende sólo del precio del bien y no del precio pasado. Es fácil de aplicar y provee un descuento exacto en términos de estructura y tasas de interés. Su desventaja radica en que no permite flexibilidad en la elección de la volatilidad. Las tasas spot y forward tienen la misma desviación estándar instantánea. Otra desventaja es que no hay reinversión; esto significa que sin hacer caso de cómo bajen o suban las tasas de interés en un punto particular en el tiempo, la desviación promedio de cómo se mueven las tasas de interés sobre el siguiente periodo corto de tiempo es siempre la misma.

El modelo Ho & Lee emplea el cálculo del valor de un bono para tiempos continuos, en vez de hacerlo para tiempos discretos como el modelo Binomial; de tal forma que el valor de un bono de descuento se expresa como:

$$P(T) = e^{-r(t)T}$$

en donde $r(t)$= tasa spot calculada de manera continua.

De igual forma el modelo hace uso de precios y tasas forward expresados de manera continua, cómo se verá más adelante.

Este capítulo se divide en 7 secciones:

La primera (Movimientos en las tasas de interés libres de arbitraje), se estudia el cálculo de tasas de interés de tal forma que no puedan ser empleadas para hacer arbitraje.

La segunda parte (Portafolio de réplica) nos muestra cómo diversificar la inversión de tal forma que al final se obtenga el beneficio esperado.

La tercera sección (Portafolio libre de riesgo) nos indica cómo diversificar la inversión para que al final no sea posible introducir arbitraje.

[23] GRANT Dwight y Gautam Vora, "Analytical Implementation of the Ho and Lee Model for the Short Interest Rate" (Paper), 1999, 33pp.

La cuarta parte (La probabilidad binomial p, pi o π implicada) muestra como obtener una probabilidad neutral al riesgo.

La quinta sección (El premio) se asocia a la tasa de retorno a un año de un bono de descuento.

La sexta sección (El modelo Ho & Lee (Un ejemplo)) una vez que se han sentado las bases para entender el modelo Ho & Lee y se han explicado sus características en los apartados anteriores, llega el momento de presentar un ejemplo.

La séptima sección (Valuaciones usando el modelo Ho & Lee) presenta varios ejemplos de cómo se utiliza el modelo en valuación, no sólo de instrumentos derivados.

La octava y última sección (Manual de usuario para el uso e instalación del sistema de valuación Ho & Lee) incluye la instalación y uso del software desarrollado, aportación principal de este trabajo.

5.1. Movimientos en las tasas de interés libres de arbitraje.

Funciones de perturbación h(T) y h*(T).

Retomando las bases de la construcción de un árbol binomial se tiene que en cualquier n-ésimo periodo de tiempo e i-ésimo estado, se tiene una función de descuento $P_i^{(n)}(T)$ que se expresa como $\frac{1}{e^{r(t)T}}$, la cual también es llamada factor de descuento. Si se percibe una tasa de interés libre de riesgo sobre el periodo siguiente, se tiene que la estructura de tasas en el estado a la alza debe ser igual al estado a la baja en n+1. Además, la función de descuento debe implicar una función forward descontada $F_i^{(n)}(T)$, dicha función hace uso del concepto de tasa forward, la cual es empleada para calcular tasas futuras de tal forma que se evite cualquier oportunidad de arbitraje. Esto es:

$$F_i^{(n)}(T) = P_i^{(n+1)}(T) = P_{i+1}^{(n+1)}(T) = \frac{P_i^{(n)}(T+1)}{P_i^{(n)}(1)} \text{ para T=0,1,...N...(1)}$$

En un mundo seguro, si la función de descuento difiere de $F_i^{(n)}(T)$, los inversionistas pueden obtener beneficios por arbitraje. Por esto, en el modelado de estructura de tasas inciertas, se estudia cómo la función de descuento se ve influenciada por la función forward en el periodo siguiente. Así, se definen dos funciones llamadas *funciones de perturbación*, h(T) y h*(T) tales que, en el estado a la alza,

$$P_{i+1}^{(n+1)}(T) = \frac{P_i^{(n)}(T+1)}{P_i^{(n)}(1)} h(T) \text{...(2)}$$

y para el estado a la baja,

$$P_i^{(n+1)}(T) = \frac{P_i^{(n)}(T+1)}{P_i^{(n)}(1)} h^*(T) \ldots (3)$$

Las funciones de perturbación especifican las desviaciones de las funciones de descuento de la función forward implicada. De manera aproximada éstas especifican la diferencia entre los precios a la alza y a la baja para el siguiente periodo. Cuando h(T) es significativamente mayor que la unidad para todos los valores de T, entonces todos los precios de los bonos se encontrarán en el estado de alza. Análogamente, cuando h*(T) es menor que la unidad para todos los valores de T, el precio de todos los precios de los bonos caerán en el estado de baja. Recordando que las funciones de descuento deben cumplir ciertas características se puede afirmar que:

$$h(0) = h^*(0) = 1 \ldots (4)$$

La perturbación sobre el precio del bono depende de la madurez, y es por esto que h y h* son funciones de T. Para construir un árbol binomial del movimiento de la estructura de tasas, se necesita únicamente especificar el valor de las funciones de perturbación h(T), h*(T) y la función inicial de descuento P(T).

5.2. Portafolio de réplica.

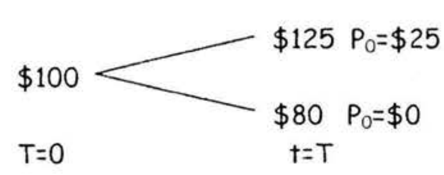
Un portafolio es un conjunto de instrumentos financieros, ya sea de un solo tipo o de varios, cuyo objetivo es cubrir el riesgo asociado al invertir en otro tipo de valores, de tal forma que al final del periodo de la inversión se obtenga el beneficio esperado sin importar el riesgo al que está sometido.

Iniciemos con un ejemplo para el precio de una opción a través del modelo Binomial.

Ejemplo 27. Asuma que el precio de una acción hoy (t=0) es de \$100, y que después de un año (t=T) esta acción podría ser vendida a \$125 ó a \$80, es decir, el precio de la acción puede incrementarse en un 25% o caer un 20% en el año. En adición, la tasa anual libre de riesgo es de 8% compuesta continuamente; los inversionistas tienen la disyuntiva de prestar mediante la compra de los bonos al 8% o de pedir prestado yendo en corto con los bonos a esa tasa.

Ahora considere una opción call sobre la acción que tiene un precio del ejercicio de \$100 y una fecha de expiración de un año a partir de ahora. Esto significa que sobre la fecha de expiración el bono tendrá un valor de entre \$25 (si la acción vale \$125) ó de \$0 (si la acción vale \$80).

Construyendo el árbol.



Lo que se busca en este caso es el valor justo del call en t = 0. Hay tres inversiones que deberán interesarnos; la acción, la opción y un bono libre de riesgo. El precio y los pagos de la acción son conocidos. También se sabe que en una inversión de un bono libre de riesgo el rendimiento esperado será de $\left(Be^{0.08}\right)$ si la tasa se compone de manera continua a una tasa del 8%. Finalmente, los pagos asociados a la opción al final del periodo se conocen. Los estados del mundo a la alza y a la baja se resumen en:

Instrumento	**Pago final en el estado a la alza**	**Pago final en el estado a la baja**	**Precio Actual**
Acción	\$125	\$80	\$100
Bono	$\left(Be^{0.08}\right)$	$\left(Be^{0.08}\right)$	B
Call	\$25	\$0	?

En un portafolio de réplica, las características de la opción pueden ser replicadas con una combinación apropiada de acciones de la misma empresa y con bonos libres de riesgo. Además, el costo de réplica del portafolio constituye el valor justo de la opción. Esto es así porque si no lo fuera habría posibilidades de arbitraje.

La composición del portafolio que replique los pagos de este call debe ser determinado.

Sean:

Δ= Unidades de la acción H
B= Inversión en un periodo a una tasa r(1)
C_0= Valor inicial de la opción
C^u= Valor de la opción a la alza
C^d= Valor de la opción a la baja
H_0= Valor inicial de la acción
H^u= Valor de la acción a la alza
H^d= Valor de la acción a la baja

$$\left.\begin{array}{l} C_0 \begin{array}{l} \nearrow C^u \\ \searrow C^d \end{array} \\ \Delta H_0 \begin{array}{l} \nearrow \Delta H^u \\ \searrow \Delta H^d \end{array} \\ B \begin{array}{l} \nearrow B(1+r(1)) \\ \searrow B(1+r(1)) \end{array} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta H_0 + B = C_0 \begin{array}{l} \nearrow \Delta H^u + B(1+r(1)) = C^u \\ \searrow \Delta H^d + B(1+r(1)) = C^d \end{array} \quad ...(5)$$

En nuestro ejemplo esto sería:

$$\left.\begin{array}{l} C_0 \left\langle \begin{array}{l} \$25 \\ \$0 \end{array}\right. \\ \Delta H_0 \left\langle \begin{array}{l} \Delta 125 \\ \Delta 80 \end{array}\right. \\ B \left\langle \begin{array}{l} Be^{r(t)T} \\ Be^{r(t)T} \end{array}\right. \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta H_0 + B = C_0 \left\langle \begin{array}{l} \Delta 125 + Be^{0.08} = 25 \\ \Delta 80 + Be^{0.08} = 0 \end{array}\right.$$

para Δ:

Si $C^u = \Delta H^u + B(1+r(1))$...(a) y $C^d = \Delta H^d + B(1+r(1))$...(b), despejando $B(1+r(1))$ para ambas ecuaciones queda:

$B(1+r(1)) = C^u - \Delta H^u$ y $B(1+r(1)) = C^d - \Delta H^d$ igualando estas dos ecuaciones tenemos:

$$C^u + \Delta H^u = C^d + \Delta H^d \text{ despejando } \Delta:$$

$$C^u - C^d = \Delta H^d - \Delta H^u$$

$$C^u - C^d = \Delta\left(H^d - H^u\right)$$

$$\Rightarrow \Delta = \frac{C^u - C^d}{H^d - H^u}$$

para B, despejando Δ para las ecuaciones (a) y (b), queda:

$\Delta = \dfrac{C^u - B(1+r(1))}{H^u}$ y $\Delta = \dfrac{C^d - B(1+r(1))}{H^d}$ igualando estas dos ecuaciones tenemos:

$\dfrac{C^u - B(1+r(1))}{H^u} = \dfrac{C^d - B(1+r(1))}{H^d}$ despejando B:

$$H^d\left[C^u - B(1+r(1))\right] = H^u\left[C^d - B(1+r(1))\right]$$

$$C^uH^d - H^dB(1+r(1)) = C^dH^u - H^uB(1+r(1))$$

$$H^uB(1+r(1)) - H^dB(1+r(1)) = C^dH^u - C^uH^d$$

$$B(1+r(1))\left[H^u - H^d\right] = C^dH^u - C^uH^d$$

$$B = \frac{C^dH^u - C^uH^d}{\left[H^u - H^d\right](1+r(1))}$$

$$\Delta = \frac{C^u - C^d}{H^u - H^d} \text{ y } \quad B = \frac{C^d H^u - C^u H^d}{\left[H^u - H^d\right](1 + r(1))} \quad ...(6)$$

$$0.5556 = \frac{25 - 0}{125 - 80} \text{ y } \quad -41.03 = \frac{(0)(125) - (25)(80)}{(125 - 80)e^{0.08}}$$

Este resultado indica que un inversionista puede replicar los pagos del call yendo en corto \$41.03 en bonos libres de riesgo (es decir invertir en estos) y comprar 0.5556 acciones.

Composición del Portafolio	**Pagos al final en el estado de alza**	**Pagos al final en el estado de baja**
Inversión en acciones	0.5556*125 = \$69.45	0.5556*80 = \$44.45
Repago por el préstamo	-41.03*1.0833 =-\$44.45	-41.03*1.0833 =-\$44.45
Pago neto	\$25	\$0

Ya que el portafolio arroja los mismos pagos finales que el call, sólo se necesita conocer su costo, el cual es igual al valor justo del portafolio.

El valor de no arbitraje de C_0 es $\Delta H_0 + B_0$:

$$\boxed{C_0 = \left(\frac{C^u - C^d}{H^u - H^d}\right) H_0 + \left[\frac{C^d H^u - C^u H^d}{\left(H^u - H^d\right)(1 + r(1))}\right]} \quad ...(7)$$

$$C_0 = \left(\frac{25 - 0}{125 - 80}\right) 100 + \left[\frac{(0)(125) - (25)(80)}{(125 - 80)e^{0.08}}\right]$$

$$55.56 + (-41.03) = \$14.53$$

Este es el valor justo del call en t=0.

5.3. Portafolio libre de riesgo.

Para replicar la opción anteriormente presentada, imagínese que se piden prestados \$41.03 y se compran acciones de la misma emisora. Considere el efecto de un cambio de precio en la acción mañana sobre el valor del portafolio de réplica. Desde el momento en que se adquieren 0.5556 acciones, el valor del portafolio cambiará por cada \$1 que cambie el precio de la acción pero, como la opción y el portafolio deben venderse por el mismo precio, se puede intuir que el precio de la opción también debe cambiar en 0.5556, por cada \$1 de cambio en el precio de la acción. Esta relación es conocida como **razón de no arbitraje**; y es igual al valor de Δ determinado con anterioridad.

En el caso del ejemplo anterior, la razón de no arbitraje de 0.5556 es igual al valor de (\$25-\$0)/(\$125-\$80). Nótese que el numerador es igual a la diferencia entre el pago final de la opción a la alza y a la baja, mientras que el denominador es igual a la diferencia entre el precio final de la opción en los dos estados. Esto es:

H_0= Valor inicial de la acción
H^u= Valor de la acción a la alza
H^d= Valor de la acción a la baja
ε = unidades de la tasa de interés de un bien subyacente
C_0=Valor inicial de la opción
C^u= Valor de la opción a la alza
C^d= Valor de la opción a la baja
V_0= Valor inicial del portafolio
V_1^u= Valor del portafolio a la alza en t=1.
V_1^d =Valor del portafolio a la baja en t=1.

$$V_0 = H_0 + \varepsilon C_0 \begin{cases} V_1^u = H^u + \varepsilon C^u \\ V_1^d = H^d + \varepsilon C^d \end{cases} \ldots(8)$$

Hágase $\tilde{V}_1$ (valor del portafolio en t=1) libre de riesgo e igualando $V_1^u = V_1^d$ y resolviendo para ε:

$$H^u + \varepsilon C^u = H^d + \varepsilon C^d \ldots(9)$$

$$H^u + \varepsilon C^u - H^d - \varepsilon C^d = 0 \ldots(10)$$

$$H^u - H^d + \varepsilon\left(C^u - C^d\right) = 0 \ldots(11)$$

$$H^u - H^d = -\varepsilon\left(C^u - C^d\right) \ldots(12)$$

$$\varepsilon = \frac{H^d - H^u}{C^u - C^d} \ldots(13)$$

de (13), para el ejemplo anterior tendríamos:

$$-1.8 = \frac{80 - 125}{25 - 0}$$

Para replicar la opción en un mundo binomial, Δ de acciones indica lo que debe ser comprado, mientras que simultáneamente, debe existir un monto libre de riesgo que pueda pedirse prestado; este monto es:

$$B = VP\left(C^d - \Delta H^d\right)$$

Si el valor del portafolio en t=1 es sin riesgo, esto implica que $\tilde{V}_1 = \overline{V_1}$ y el portafolio debe ganar la tasa libre de riesgo para r(1):

$$V_0(1+r(1)) = V_1 \text{...(14)}$$

Supóngase que hay una caída en t=1 (podría haber sido un alza):

$$V_0(1+r(1)) = V_1^d \text{...(15)}$$

Substituyendo para V_0 y V_1^d y resolviendo para ε:

$$(H_0 + \varepsilon C_0)(1+r(1)) = V_1^d \text{...(16)}$$

$$(H_0 + \varepsilon C_0)(1+r(1)) = H^d + \varepsilon C^d \text{...(17)}$$

$$H_0(1+r(1)) + \varepsilon\left[C_0(1+r(1)) - C^d\right] = H^d \text{...(18)}$$

$$\varepsilon = \frac{H^d - H_0(1+r(1))}{C_0(1+r(1)) - C^d} \text{...(19)}$$

Igualando (13) y (19) y despejando C_0:

$$\frac{H^d - H^u}{C^u - C^d} = \frac{H^d - H_0(1+r(1))}{C_0(1+r(1)) - C^d} \text{...(20)}$$

$$C_0(1+r(1)) - C^d = \frac{\left[H^d - H_0(1+r(1))\right]\left[C^u - C^d\right]}{H^d - H^u} \text{...(21)}$$

$$\left[C_0(1+r(1))\right]\left[H^d - H^u\right] = \left[H^d - H_0(1+r(1))\right]\left[C^u - C^d\right] + C^d\left[H^d - H^u\right] \text{...(22)}$$

$$\left(\left[C_0(1+r(1))\right]\left[H^d - H^u\right] = \left[H^d - H_0(1+r(1))\right]\left[C^u - C^d\right] + C^d\left[H^d - H^u\right]\right)(-1) \text{...(23)}$$

$$\left[C_0(1+r(1))\right]\left[H^u - H^d\right] = \left[-H^d + H_0(1+r(1))\right]\left[C^u - C^d\right] - C^d\left[H^d - H^u\right] \text{...(24)}$$

$$C_0(1+r(1)) = \frac{H_0(1+r(1))\left[C^u - C^d\right]}{H^u - H^d} - \frac{H^d\left[C^u - C^d\right]}{H^u - H^d} - \frac{C^d\left[H^d - H^u\right]}{H^u - H^d} \text{...(25)}$$

$$C_0(1+r(1)) = \frac{H_0(1+r(1))\left[C^u - C^d\right]}{H^u - H^d} - \frac{H^d\left[C^u - C^d\right]}{H^u - H^d} + \frac{C^d\left[H^u - H^d\right]}{H^u - H^d} \text{...(26)}$$

$$C_0 = \frac{H_0[C^u - C^d]}{H^u - H^d} - \frac{H_d[C^u - C^d]}{[H^u - H^d][(1 + r(1))]} + \frac{C^d[H^u - H^d]}{[H^u - H^d][(1 + r(1))]} \quad ...(27)$$

$$C_0 = \frac{H_0[C^u - C^d]}{H^u - H^d} - \left[\frac{H_d[C^u - C^d] - C^d[H^u - H^d]}{[H^u - H^d][(1 + r(1))]}\right] \quad ...(28)$$

$$C_0 = H_0\left[\frac{C^u - C^d}{H^u - H^d}\right] - \left[\frac{H^dC^u - H^dC^d - H^uC^d + H^dC^d}{[H^u - H^d][(1 + r(1))]}\right] \quad ...(29)$$

$$\boxed{C_0 = H_0\left[\frac{C^u - C^d}{H^u - H^d}\right] - \left[\frac{H^dC^u - H^uC^d}{[H^u - H^d][1 + r(1))}\right]} \quad ...(30)$$

$$100\left(\frac{25 - 0}{125 - 80}\right) - \left[\frac{(80)(25) - (125)(0)}{(125 - 80)e^{0.08}}\right] = \$14.53$$

Se observa que el valor justo arrojado por el portafolio de réplica es el mismo que para el portafolio libre de riesgo, cuando la tasa de interés es la misma, siendo ambos métodos equivalentes.

5.4. La probabilidad binomial π implicada.

Teniendo un árbol binomial con un movimiento de estructura de tasas de interés, se necesita asegurar que no hay beneficios por arbitraje que permitan la realización de portafolios arbitrarios con bonos de descuento. Específicamente, si se toman dos bonos de descuento con diferentes tiempos de madurez y se construye un portafolio de esos bonos tal que, el rendimiento de dicho portafolio esté libre de riesgo sobre el periodo siguiente, entonces la tasa libre de riesgo debe ser la misma que la del rendimiento de un bono de descuento a un periodo. Esta condición de libre arbitraje impone una restricción sobre las funciones de perturbación en cada vértice (n,i).

Para cualquier tiempo n y estado i, se puede construir un portafolio de un bono de descuento con madurez T y ε bonos de descuento con madurez t. Para simplificar estas notaciones se omitirán los índices (n,i). Siendo el valor del portafolio $V = P(T) + \varepsilon P(t)$... (A0)

Al final del periodo cuando el estado a la alza prevalece, el valor del portafolio es:

$$V(alza) = \frac{[P(T)h(T - 1) + \varepsilon P(t)h(t - 1)]}{P(1)} \quad ...(A1)$$

de manera similar cuando el estado a la baja prevalece, se tiene:

$$V(\text{baja}) = \frac{[P(T)h^*(T-1) + \varepsilon P(t)h^*(t-1)]}{P(1)} \ldots (A2)$$

Sea una ε tal que V(alza)=V(baja), de tal forma que despejando ε de las dos ecuaciones anteriores tenemos:

$$\frac{P(T)h(T-1) + \varepsilon P(t)h(t-1)}{P(1)} = \frac{P(T)h^*(T-1) + \varepsilon P(t)h^*(t-1)}{P(1)}$$

$$P(T)h(T-1) + \varepsilon P(t)h(t-1) - P(T)h^*(T-1) - \varepsilon P(t)h^*(t-1) = 0$$

$$\varepsilon P(t)h(t-1) - \varepsilon P(t)h^*(t-1) = P(T)h^*(T-1) - P(T)h(T-1)$$

$$\varepsilon = \frac{P(T)[h(T-1) - h^*(T-1)]}{P(t)[h^*(t-1) - h(t-1)]} \ldots (A3)$$

Para evitar oportunidades de arbitraje este portafolio deberá tener el rendimiento de un bono de descuento $\frac{1}{P(1)}$. Esto es:

$$P(T)h^*(T-1) + \varepsilon P(t)h^*(t-1) = P(T) + \varepsilon P(t) \ldots (A4)$$

Substituyendo (A3) en (A4), se obtiene:

$$P(T)h^*(T-1) - P(T) = \varepsilon P(t) - \varepsilon P(t)h^*(t-1)$$

$$P(T)[h^*(T-1) - 1] = \varepsilon P(t)[1 - h^*(t-1)]$$

$$h^*(T-1) - 1 = \frac{\varepsilon P(t)}{P(T)}[1 - h^*(t-1)]$$

$$h^*(T-1) - 1 = \frac{P(T)[h(T-1) - h^*(T-1)]}{P(t)[h^*(t-1) - h(t-1)]}\left[\frac{P(t)}{P(T)}\right][1 - h^*(t-1)]$$

multiplicando por -1:

$$\frac{[1 - h^*(t-1)]}{[h(t-1) - h^*(t-1)]} = \frac{[1 - h^*(T-1)]}{[h(T-1) - h^*(T-1)]} \text{ para toda T y t>0... (A5)}$$

La ecuación (A5) es válida para toda T y t solamente si hay una π constante, independientemente de T y t,

$$\frac{1 - h^*(T)}{h(T) - h^*(T)} = \pi \ldots (A6)$$

La ecuación se reexpresa como:

$$1 - h^*(T) = \pi[h(T) - h^*(T)]$$

$$1 - h^*(T) = \pi h(T) - \pi h^*(T)$$

$$\pi h(T) - \pi h^*(T) + h^*(T) - 1 = 0$$

$$\pi h(T) + h^*(T)(-\pi + 1) - 1 = 0$$

$$\pi h(T) + (1 - \pi)h^*(T) = 1 \text{ para } T=0, 1, 2, \ldots N \ldots \text{ (A7)}$$

donde π es llamada probabilidad binomial implicada.

Mientras que la ecuación (A7) se rescribe como:

$$\boxed{P_i^{(n)}(T) = \left[\pi P_{i+1}^{(n+1)}(T-1) + (1-\pi)P_i^{(n+1)}(T-1)\right]P_i^{(n)}(1)} \ldots \text{(A8)}$$

La ecuación (A8) expresa que el precio del bono es igual al valor esperado del bono al final del periodo descontado a la tasa de un periodo; siendo π una probabilidad binomial. Por esta razón **π es una probabilidad neutral al riesgo**.

La condición de la ruta independiente

Al construir el árbol binomial, se asume que el cambio de una función de descuento de un estado a otro, depende únicamente del número de movimientos ascendentes y no de la secuencia en que ellos ocurren. Esta restricción es equivalente a forzar a las funciones de perturbación (h y h*) e implica una probabilidad binomial π para cualquier tiempo n y estado i, un movimiento a la alza seguido de uno a la baja sobre el precio de un bono, es igual a un movimiento a la baja seguido por uno a la alza para el mismo precio.

Considere una función de descuento $P_i^{(n)}(T)$. De (2) se obtiene un choque a la alza en t=1,

$$P_1^{(1)}(T) = \frac{P_0^{(0)}(T+1)}{P_0^{(0)}(1)} h(T) \ldots (31)$$

seguida por un choque a la baja en t=2,

$$P_1^{(2)}(T) = \frac{P_1^{(1)}(T+1)}{P_1^{(1)}(1)} h^*(T) \ldots (32)$$

sustituyendo (31) en (32) para T=1 y T=T+1 queda:

$$P_1^{(2)}(T) = \frac{\dfrac{P_0^{(0)}(T+2)}{P_0^{(0)}(1)}h(T+1)}{\dfrac{P_0^{(0)}(2)}{P_0^{(0)}(1)}h(1)} h*(T)$$

$$P_1^{(2)}(T) = \frac{P_0^{(0)}(1)P_0^{(0)}(T+2)h(T+1)}{P_0^{(0)}(1)P_0^{(0)}(2)h(1)} h*(T)$$

$$\Rightarrow P_1^{(2)}(T) = \frac{P_0^{(0)}(T+2)h(T+1)}{P_0^{(0)}(2)h(1)} h*(T) \ldots (33)$$

Considérese ahora un choque a la baja para el año 1:

$$P_0^{(1)}(T) = \frac{P_0^{(0)}(T+1)}{P_0^{(0)}(1)} h*(T) \ldots (34)$$

seguido por un choque a la alza en el año 2:

$$P_1^{(2)}(T) = \frac{P_0^{(1)}(T+1)}{P_0^{(1)}(1)} h(T) \ldots (35)$$

Sustituyendo (34) en (35) para T=1 y T=T+1,

$$P_1^{(2)}(T) = \frac{\dfrac{P_0^{(0)}(T+2)}{P_0^{(0)}(1)}h*(T+1)}{\dfrac{P_0^{(0)}(2)}{P_0^{(0)}(1)}h*(1)} h(T)$$

$$P_1^{(2)}(T) = \frac{P_0^{(0)}(1)P_0^{(0)}(T+2)h*(T+1)}{P_0^{(0)}(1)P_0^{(0)}(2)h*(1)} h(T)$$

$$\Rightarrow P_1^{(2)}(T) = \frac{P_0^{(0)}(T+2)h*(T+1)}{P_0^{(0)}(2)h*(1)} h(T) \ldots (36)$$

Ho & Lee asume que un choque a la baja seguido por uno a la alza debe arrojar el mismo rendimiento para el precio de un bono de descuento, que un choque a la alza seguido por uno a la baja, así que igualando (33) y (36) se tiene que:

$$\frac{P_0^{(0)}(T+2)h^*(T+1)}{P_0^{(0)}(2)h^*(1)}h(T)=\frac{P_0^{(0)}(T+2)h(T+1)}{P_0^{(0)}(2)h(1)}h^*(T)$$

$$\frac{h(T+1)h^*(T)}{h(1)}=\frac{h^*(T+1)h(T)}{h^*(1)}\ldots(37)$$

$$h(T+1)h^*(T)h^*(1)=h^*(T+1)h(T)h(1)\ldots(38)$$

Ahora bien, (A7) implica:

$$\pi h(T)+(1-\pi)h^*(T)=1$$

$$(1-\pi)h^*(T)=1-\pi h(T)$$

$$h^*(T)=\frac{1-\pi h(T)}{(1-\pi)} \text{ sustituyendo en (38)}$$

$$h(T+1)\left[\frac{1-\pi h(T)}{(1-\pi)}\right]\left[\frac{1-\pi h(1)}{(1-\pi)}\right]=h(T)h(1)\left[\frac{1-\pi h(T+1)}{(1-\pi)}\right]$$

$$h(T+1)[1-\pi h(T)][1-\pi h(1)]=(1-\pi)h(1)h(T)[1-\pi h(T+1)]\ldots(39)$$

Simplificando (39) para $T \geq 1$,

$$\boxed{\frac{1}{h(T+1)}=\frac{\delta}{h(T)}+\gamma}\ldots(40)$$

$$\text{donde } \delta=\frac{1-\pi h(1)}{(1-\pi)h(1)} \text{ y } \gamma=\frac{\pi(h(1)-1)}{(1-\pi)h(1)}\ldots(41)$$

(39) es una ecuación de primer orden, para la cual la solución general para alguna constante C es:

$$\boxed{h(T)=\frac{1}{\pi+c\delta^T}}\ldots(42)$$

Pero por la ecuación (4) se requiere que h(0)=1, además de que la condición inicial determine una solución única:

$$\boxed{h(T)=\frac{1}{\pi+(1-\pi)\delta^T}} \text{ para } T\geq 0\ldots(43)$$

De la ecuación A7 despejando h(T) queda, $h(T) = \dfrac{1-(1-\pi)h^*(T)}{\pi}$ ésta con (43), y resolviendo para h*(T):

$$\frac{1-(1-\pi)h^*(T)}{\pi} = \frac{1}{\pi + (1-\pi)\delta^T}$$

$$1-(1-\pi)h^*(T) = \frac{\pi}{\pi + (1-\pi)\delta^T}$$

$$-(1-\pi)h^*(T) = \frac{\pi}{\pi + (1-\pi)\delta^T} - 1$$

$$(1-\pi)h^*(T) = \frac{\pi + (1-\pi)\delta^T - \pi}{\pi + (1-\pi)\delta^T}$$

$$\boxed{h^*(T) = \frac{\delta^T}{\pi + (1-\pi)\delta^T}} \ldots(44)$$

Se emplea el método de portafolio sin riesgo para probar que un precio neutral al riesgo es válido para tasas de interés general de títulos contingentes[24]. Para el estado i en el tiempo n, considere un bono de descuento con madurez T. Se forma el portafolio libre de riesgo de este bono con un activo C por la compra de un bono y εC de activos. $V_0 = P_0^{(0)}(T) + \varepsilon C_0^{(0)}$.

Cuando el estado a la alza prevalece, el valor del portafolio es:

$$V(alza) = \frac{P_i^{(n)}(T+1)h(T)}{P_i^{(n)}(1)} + \varepsilon C_{i+1}^{(n+1)} \ldots(B1)$$

De manera similar, cuando el estado a la baja prevalece, el valor del portafolio es:

$$V(baja) = \frac{P_i^{(n)}(T+1)h^*(T)}{P_i^{(n)}(1)} + \varepsilon C_i^{(n+1)} \ldots(B2)$$

Como el portafolio es libre de riesgo V(alza)=V(baja), de tal forma que al combinar (B1) y (B2) y reordenando los términos se obtiene:

$$\frac{P_i^{(n)}(T+1)h(T)}{P_i^{(n)}(1)} + \varepsilon C_{i+1}^{(n+1)} = \frac{P_i^{(n)}(T+1)h^*(T)}{P_i^{(n)}(1)} + \varepsilon C_i^{(n+1)}$$

[24] A esta categoría pertenecen: tasas de interés futuras, opciones americanas y europeas, entre otras.

$$\frac{P_i^{(n)}(T+1)h(T)}{P_i^{(n)}(1)}-\frac{P_i^{(n)}(T+1)h^*(T)}{P_i^{(n)}(1)}=\varepsilon C_i^{(n+1)}-\varepsilon C_{i+1}^{(n+1)}$$

$$\frac{P_i^{(n)}(T+1)[h(T)-h^*(T)]}{P_i^{(n)}(1)}=\varepsilon\left[C_i^{(n+1)}-\varepsilon_{i+1}^{(n+1)}\right]$$

$$\varepsilon=\frac{P_i^{(n)}(T+1)[h^*(T)-h(T)]}{P_i^{(n)}(1)\left[C_{i+1}^{(n+1)}-C_i^{(n+1)}\right]}=\frac{P_i^{(n)}(T)[h^*(T-1)-h(T-1)]}{P_i^{(n)}(1)\left[C_{i+1}^{(n+1)}-C_i^{(n+1)}\right]}\quad\text{...(B3)}$$

Como el valor inicial del portafolio en el tiempo n es $V=P_i^{(n)}(T)+\varepsilon C_i^{(n)}$, por el argumento de libre arbitraje se tiene que:

$$V=V(\text{baja})P_i^{(n)}(1)\text{ ya que }P_i^{(n)}(1)=\frac{1}{e^{r(1)\bullet 1}}$$

$$P_0^{(0)}(T)+\varepsilon C_0^{(0)}=\left[\frac{P_0^{(0)}(T+1)}{P_0^{(0)}(1)}h^*(T)+\varepsilon C_0^{(1)}\right]P_0^{(0)}(1)$$

$$P_0^{(0)}(T)+\varepsilon C_0^{(0)}=P_0^{(0)}(T+1)h^*(T)+\varepsilon C_0^{(1)}P_0^{(0)}(1)$$

Despejando ε queda:

$$\varepsilon=\frac{P_0^{(0)}(T+1)h^*(T)-P_0^{(0)}(T)}{C_0^{(0)}-C_0^{(1)}P_0^{(0)}(1)}=\frac{P_0^{(0)}(T)[h^*(T-1)-1]}{C_0^{(0)}-C_0^{(1)}P_0^{(0)}(1)}\quad\text{...(B4)}$$

Igualando (B3) y (B4) y resolviendo para $C_0^{(0)}$ con h*=h*(T-1) y h=h(T-1):

$$P_0^{(0)}(1)\left(C_1^{(1)}-C_0^{(1)}\right)(h^*-1)=(h^*-h)\left(C_0^{(0)}-C_0^{(1)}P_0^{(0)}(1)\right)$$

$$C_0^{(0)}=\frac{P_0^{(0)}(1)\left(C_1^{(1)}-C_0^{(1)}\right)(h^*-1)}{h^*-h}+P_0^{(0)}(1)C_0^{(1)}$$

$$C_0^{(0)}=\left[\frac{\left(C_1^{(1)}-C_0^{(1)}\right)(h^*-1)+C_0^{(1)}(h^*-h)}{h^*-h}\right]P_0^{(0)}(1)$$

$$C_0^{(0)}=\left[\frac{\left(C_1^{(1)}-C_0^{(1)}\right)(1-h^*)+C_0^{(1)}(h-h^*)}{h-h^*}\right]P_0^{(0)}(1)$$

$$C_0^{(0)} = \left[\frac{(1-h^*)C_1^{(1)} + (h^* - 1 + h - h^*)C_0^{(1)}}{h - h^*}\right] P_0^{(0)}(1)$$

$$C_0^{(0)} = \left[\left(\frac{1-h^*}{h-h^*}\right)C_1^{(1)} + \frac{(h-h^*)-(1-h^*)}{h-h^*}C_0^{(1)}\right] P_0^{(0)}(1)$$

$$C_0^{(0)} = \left[\left(\frac{1-h^*}{h-h^*}\right)C_1^{(1)} + \left(1-\left(\frac{1-h^*}{h-h^*}\right)\right)C_0^{(1)}\right] P_0^{(0)}(1)$$

$$\boxed{C_0^{(0)} = \left[\pi C_1^{(1)} + (1-\pi)C_0^{(1)}\right]P(1)} \ldots(45)$$

Como se puede ver, el método de flujo de efectivo empleando π y $P_0^{(0)}(1)$ es válido para valuar activos contingentes.

Existe un caso especial de la ecuación anterior, cuando el activo contingente es sobre un bono de descuento. Si todo marcha correctamente, $C_0^{(0)}$ debe tener el mismo valor que un bono de descuento hoy P(T). Esto implica que $C_0^{(1)} = C_1^{(1)} = \$1$. Despejando de la ecuación (45),

$$C_0^{(0)} = [\pi\$1 + (1-\pi)\$1]P(1)$$

$$C_0^{(0)} = P(1)$$

Para T+1,

$$C_1^{(1)} = P_1^{(1)}(T) \text{ y } C_0^{(1)} = P_0^{(1)}(T)$$

Por la ecuación (45)

$$C_0^{(0)} = \left[\pi P_1^{(1)}(T) + (1-\pi)P_0^{(1)}(T)\right]P(1)$$

$$C_0^{(0)} = \left[\pi\left(\frac{P(T+1)}{P(1)}\right)h(T) + (1-\pi)\left(\frac{P(T+1)}{P(1)}\right)h^*(T)\right]P(1)$$

$$C_0^{(0)} = [\pi h(T) + (1-\pi)h^*(T)]P(T+1)$$

Por (A7)

$$C_0^{(0)} = P(T+1)$$

Este valor descontado empleando π y $P_0^{(0)}(1)$ arrojan el precio de un bono descontado P(T).

5.5. El premio

En el periodo T el premio se define como:

$$\tau(T) = r(T) - r(1)$$

$$\tau(T) = \frac{-\ln P(T)}{T} - \frac{-\ln P(1)}{1} = \ln P(1) - \frac{\ln P(T)}{T}$$

Ho & Lee expresa el premio a través de un bono de descuento en el periodo T+1 cuyo valor es P(T+1) hoy. En t=1, éste será de $\tilde{P}_1(T)$. Si el bono fuese en largo, la tasa de retorno a un periodo (empleando capitalización simple) sería de:

$$\tilde{R}_T = \frac{\tilde{P}_1(T) - P(T+1)}{P(T+1)} = \frac{\tilde{P}_1(T)}{P(T+1)} - 1$$

La tasa de rendimiento esperada es:

$$E\left(\tilde{R}_T\right) = \frac{E\left(\tilde{P}_1(T)\right)}{P(T+1)} - 1$$

Empleando las probabilidades binomiales "q",

$$E\left(\tilde{R}_T\right) = \frac{(q)P_1^{(1)}(T) + (1-q)P_0^{(1)}(T)}{P(T+1)} - 1$$

ya que,

$$P_1^{(1)}(T) = \frac{P(T+1)}{P(1)} h(T) \text{ y } P_0^{(1)}(T) = \frac{P(T+1)}{P(1)} h^*(T)$$

$$\Rightarrow E\left(\tilde{R}_T\right) = \frac{(q)\left[\frac{P(T+1)}{P(1)} h(T)\right] + (1-q)\left[\frac{P(T+1)}{P(1)} h^*(T)\right]}{P(T+1)} - 1$$

esto es lo mismo que,

$$E\left(\tilde{R}_T\right) = \frac{1}{P(1)}\left[(q)h(T) + (1-q)h^*(T)\right] - 1 \ldots (D0)$$

recordemos que el rendimiento para un bono de descuento a un periodo es,

$$R(1) = \frac{1}{P(1)} - 1 \ldots (D1)$$

El premio es entonces,

$$\tau(T) = E\left(\tilde{R}_T\right) - R(1) = D0 - D1$$

$$\tau(T) = \frac{1}{P(1)}\left[(q)h(T) + (1-q)h^*(T)\right] - 1 - \left(\frac{1}{P(1)} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{P(1)}\left[(q)h(T) + (1-q)h^*(T) - 1\right]$$

Por (43) y (44),

$$\tau(T) = \frac{1}{P(1)}\left[\frac{q}{\pi + (1-\pi)\delta^T} + \frac{(1-q)\delta^T}{\pi + (1-\pi)\delta^T} - 1\right]$$

$$\boxed{\tau(T) = \frac{1}{P(1)}\left[\frac{q + (1-q)\delta^T}{\pi + (1-\pi)\delta^T} - 1\right]} \ldots(46)$$

Si se asume que el premio es positivo $\tau(T)$, esto implica que:

$$\tau(T) = \frac{1}{P(1)}\left[\frac{q + (1-q)\delta^T}{\pi + (1-\pi)\delta^T} - 1\right] > 0$$

Como $\dfrac{1}{P(1)}$ es positivo,

$$\frac{q + (1-q)\delta^T}{\pi + (1-\pi)\delta^T} - 1 > 0$$

$$\frac{q + (1-q)\delta^T}{\pi + (1-\pi)\delta^T} > 1$$

$$q + (1-q)\delta^T > \pi + (1-\pi)\delta^T$$

$$q + \delta^T - q\delta^T > \pi + \delta^T - \pi\delta^T$$

$$q\left(1-\delta^T\right) > \pi\left(1-\delta^T\right)$$

Esto prueba que $\left(1-\delta^T\right)$ es positivo, por lo tanto:

$$q > \pi$$

5.6. El modelo Ho & Lee (un ejemplo).

Con el fin de esquematizar lo antes expuesto, a continuación presentamos un breve ejercicio para valuar productos derivados sobre instrumentos de renta fija, en este caso bonos, empleando el modelo Ho & Lee.

Ejemplo 28. Construir un árbol de bonos de descuento (factores de descuento) a partir de las siguientes tasas spot, siendo π = 0.48 y δ = 0.95.

Madurez	Tasas spot
1	17%
2	19%
3	21%
4	22%
5	22.5%

Paso 1. Calcular los factores de descuento para cada madurez, con: $P_1^n = e^{-r(t)T}$

Madurez	Tasas spot	Factores de descuento
1	17%	0.8436
2	19%	0.6838
3	21%	0.5326
4	22%	0.4148
5	22.5%	0.3246

Paso 2. Calcular los choques a la alza y a la baja para cada madurez con:

$$h(T) = h^u = \frac{1}{\pi + (1+\pi)\delta^T}$$

$$h^*(T) = h^d = \frac{\delta^T}{\pi + (1+\pi)\delta^T}$$

Madurez	**Choque a la alza h^u** $h^u = \frac{1}{0.48 + (1-0.48)0.95^T}$	**Choque a la baja h^d** $h^d = \frac{0.95^T}{0.48 + (1-0.48)0.95^T}$
1	1.0267	0.9754
2	1.0534	0.9507
3	1.0801	0.9261
4	1.1065	0.9015

Paso 3. Calculamos los precios en T=1 para dos estados de la naturaleza, con la expresión:

$$\tilde{P}^{n+1}(T)=\begin{cases} P_u^{n+1}(T)=P_{i+1}^{n+1}(T)=\dfrac{P^n(T+1)}{P^n(1)}h^u; \text{con probabilidad } \pi \\ P_d^{n+1}(T)=P_i^{n+1}(T)=\dfrac{P^n(T+1)}{P^n(1)}h^d; \text{con probabilidad } (1-\pi) \end{cases}$$

Es decir:

$$\tilde{P}^{1}(T)=\begin{cases} P_u^{1}(T)=P_1^{1}(T)=\dfrac{P^1(T+1)}{P^1(1)}h^u; \text{con probabilidad } \pi \\ P_d^{1}(T)=P_0^{1}(T)=\dfrac{P^1(T+1)}{P^1(1)}h^d; \text{con probabilidad } (1-\pi) \end{cases}$$

Para la madurez en t=1:

$$\tilde{P}(1)=\begin{cases} P_u^{1}(1)=P_1^{1}(1)=\dfrac{0.6838}{0.8436}(1.0267)=0.8322 \\ P_d^{1}(1)=P_0^{1}(1)=\dfrac{0.6838}{0.8436}(0.9754)=0.7906 \end{cases}$$

Para t=2:

$$\tilde{P}(2)=\begin{cases} P_u^{1}(2)=P_1^{1}(2)=\dfrac{0.5326}{0.8436}(1.0534)=0.6650 \\ P_d^{1}(2)=P_0^{1}(2)=\dfrac{0.5326}{0.8436}(0.9507)=0.6002 \end{cases}$$

Para t=3:

$$\tilde{P}(3)=\begin{cases} P_u^{1}(3)=P_1^{1}(3)=\dfrac{0.4148}{0.8436}(1.0801)=0.5311 \\ P_d^{1}(3)=P_0^{1}(3)=\dfrac{0.4148}{0.8436}(0.9261)=0.4554 \end{cases}$$

Para t=4:

$$\tilde{P}(4)=\begin{cases} P_u^{1}(4)=P_1^{1}(4)=\dfrac{0.3246}{0.8436}(1.1065)=0.4257 \\ P_d^{1}(4)=P_0^{1}(4)=\dfrac{0.3246}{0.8436}(0.9015)=0.3469 \end{cases}$$

Podemos resumir la información obtenida anteriormente en la siguiente tabla:

Madurez	Choque a la alza h^u	Choque a la baja h^d	Factores de descuento	$P_u^1(T)=P_1^1(T)$	$P_d^1(T)=P_0^1(T)$
1	1.0267	0.9754	0.8436	0.8322	0.7906
2	1.0534	0.9507	0.6838	0.6650	0.6002
3	1.0801	0.9261	0.5326	0.5311	0.4554
4	1.1065	0.9015	0.4148	0.4257	0.3469

Paso 4. Calculamos los precios en T=2, considerando que tenemos 3 estados de la naturaleza a considerar: uu, ud y dd. Para el estado de la naturaleza uu:

$$\tilde{P}_{uu}^2(T)=P_2^2(T)=\frac{P_u^1(T+1)}{P_u^1(1)}h^u$$

Estos precios para cada madurez del 1 al 3 serían:(Note que ya no es posible hacerlo para t=4)

Madurez	$\tilde{P}_{uu}^2(T)=P_2^2(T)=\frac{P_u^1(T+1)}{P_u^1(1)}h^u$
1	$\tilde{P}_{uu}^2(1)=P_2^2(1)=\frac{0.6650}{0.8322}(1.0267)=0.8204$
2	$\tilde{P}_{uu}^2(2)=P_2^2(2)=\frac{0.5311}{0.8322}(1.0534)=0.6723$
3	$\tilde{P}_{uu}^2(3)=P_2^2(3)=\frac{0.4257}{0.8322}(1.0801)=0.5525$

Para el estado de la naturaleza ud. Recuérdese que el estado de la naturaleza ud es igual a du, por lo que el cálculo se puede realizar mediante dos maneras:

$$P_{ud}^2(T)=P_1^2(T)=\frac{P_u^1(T+1)}{P_u^1(1)}h^d=\frac{P_d^1(T+1)}{P_d^1(1)}h^u$$

Paso 5. Estos precios para cada madurez del 1 al 3 serían:

Madurez	$P_{ud}^2(T)=P_1^2(T)=\frac{P_u^1(T+1)}{P_u^1(1)}h^d=\frac{P_d^1(T+1)}{P_d^1(1)}h^u$
1	$\tilde{P}_{ud}^2(1)=P_1^2(1)=\frac{0.6650}{0.8322}(0.9754)=0.7794=\frac{0.6002}{0.7906}(1.0267)$
2	$\tilde{P}_{ud}^2(2)=P_1^2(2)=\frac{0.5311}{0.8322}(0.9507)=0.6068=\frac{0.4554}{0.7906}(1.0534)$
3	$\tilde{P}_{ud}^2(3)=P_1^2(3)=\frac{0.4257}{0.8322}(0.9261)=0.4739=\frac{0.3469}{0.7906}(1.0801)$

Por último, para el estado dd:

Rprom = (1/ (n-1))(r1+r2+......+rn)

Rprom = (1/(48-1))(.1932 + .1415 + ... +.0247 + .0534) = 2.0220%

- Varianza:

Var= (1 / (n-1)) ((r1-Rprom)² + (r2 – Rprom)² + ...+(rn – Rprom)²)

Var = (1/(48-1)) ((.1932 - .0202)² + (.1415 - .0202)² + ...+(.0534 - .0202)²) = .769

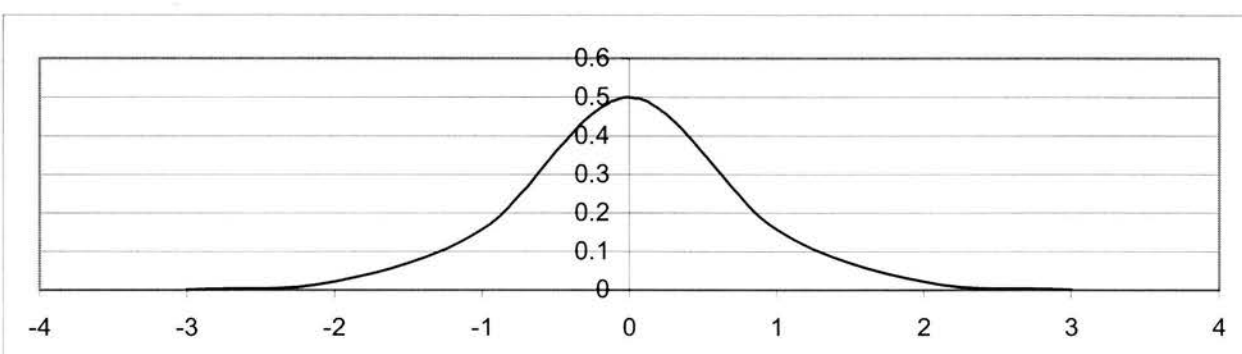
- Desviación Estándar:

$$\sigma = DS = \sqrt{VAR}$$

$$\sigma = \sqrt{.007692} = 0.0877 \quad * 100 = 8.77\ \%$$

III.3.- Distribución normal y sus implicaciones para la desviación estándar.

La representación de una muestra lo suficientemente grande de una distribución normal se ve como la curva en forma de campana (como en la figura siguiente):



-3σ -2σ -1σ 0 1σ 2σ 3σ

Esta es una distribución teórica, que en ocasiones se le conoce como población, no es seguro que la distribución real de las observaciones de una muestra determinada, nos genere un histograma que se vea exactamente como la distribución teórica, no obstante si generásemos observaciones durante un periodo lo suficientemente prolongado, desaparecerían las irregularidades y la distribución histórica real empezaría a semejarse a la distribución teórica fundamental.

Haciendo énfasis en lo siguiente, en cualquier muestra individual existen errores de muestreo, en otras palabras, la distribución de la muestra solo se aproxima a la distribución verdadera, con lo que siempre mediremos la verdad con cierto error.

La distribución normal desempeña la función central de las estadísticas clásicas tradicionales, y dada la probabilidad de tener una rentabilidad mayor o menor que al promedio por una determinada cantidad depende de la desviación estándar, ahora podemos interpretar la desviación estándar que obtuvimos anteriormente (como ejemplo cetes a 28 días), aplicándola de la siguiente forma:

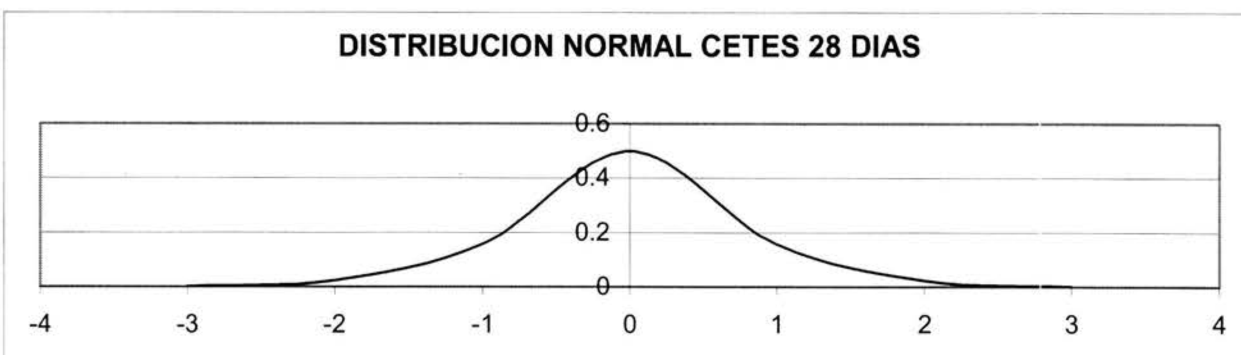
Si las rentabilidades de los cetes a 28 días difícilmente están distribuidas en forma normal, la probabilidad de que una rentabilidad mensual este comprendida en el 7.529% de la media de 18.164% será de alrededor de 2/3.

Es decir aproximadamente 2/3 de las rentabilidades anuales serán de entre:

10.635% y el 25.693% donde (10.635=18.164%-7.529% y 25.693% = 18.164%+7.529%)

La probabilidad de que la rentabilidad de cualquier mes se encuentre dentro de dos desviaciones estándar es de alrededor de 95.44%, es decir, las rentabilidades mensuales serán de entre 3.106% y el 33.222%

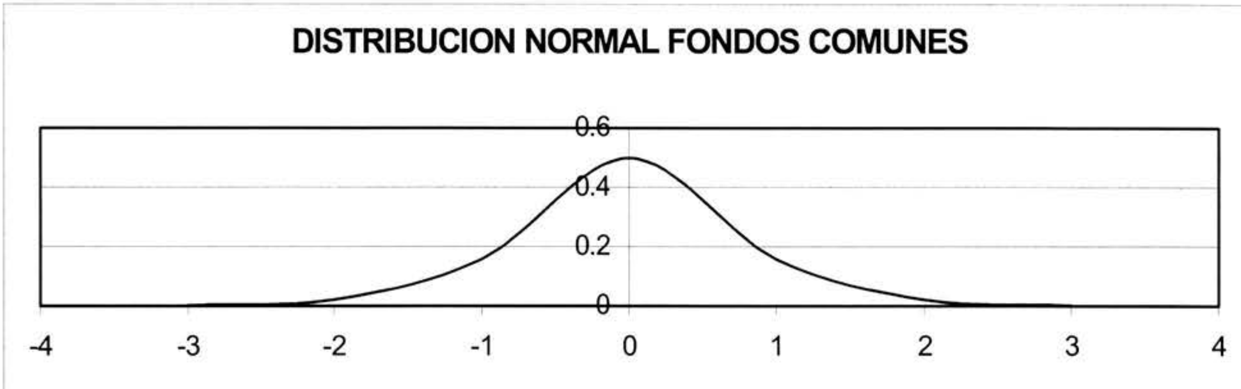
Por lo que nos da la gráfica siguiente:



-4.42 3.105 10.635 18.164 25.694 33.223 40.753

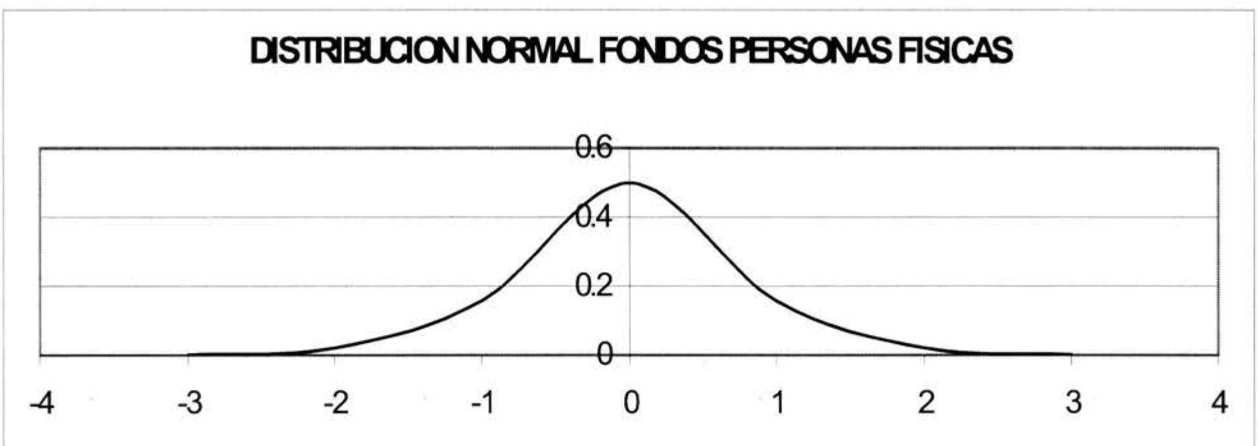
Así obtendremos cada una de las distribuciones normales, siendo estas las siguientes:

Fondos comunes:



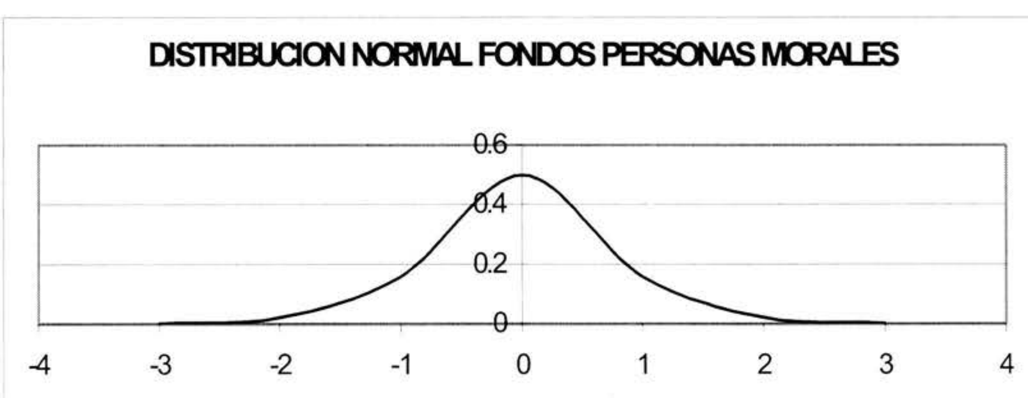
-18.108 11.792 5.478 .8371 7.152 13.467 19.78

Fondos personas físicas:



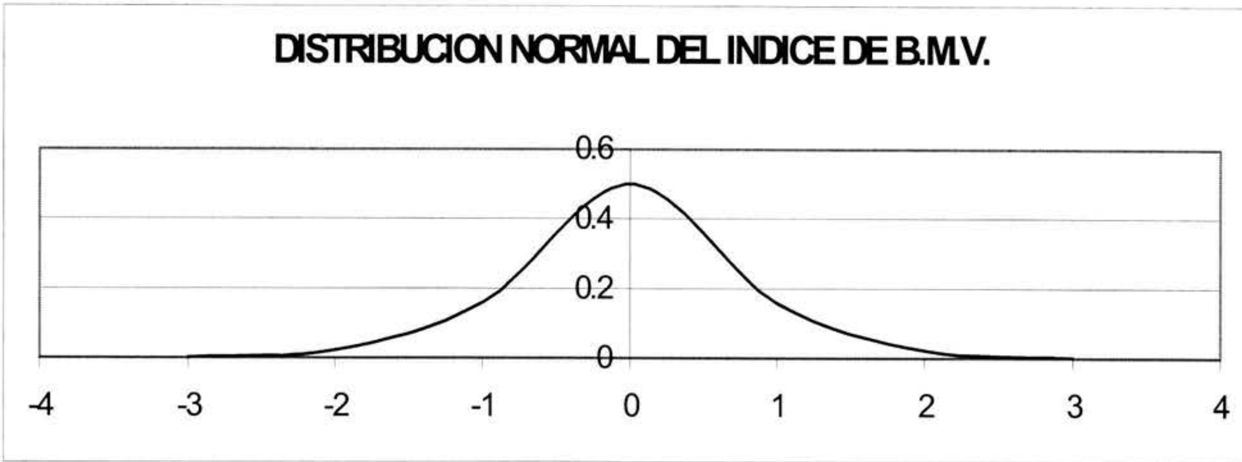
-7.32 0.39 8.09 15.8 23.51 31.21 38.97

Fondos personas morales:



-5.61 1.47 8.55 15.63 22.71 29.79 36.87

Índice BMV:



-24.29 -15.52 -6.75 2.02 10.79 19.56 28.33

La mayoría de los individuos e instituciones tienen carteras, no títulos individuales, conceptualmente, el riesgo de un titulo individual esta relacionado con la manera en qué el riesgo de una cartera cambia cuando se le agrega uno o más títulos.

Sucede que la desviación estándar de una acción individual no es una buena medida, del modo en que la desviación estándar cambia cuando se suma una acción individual, por lo tanto, si la mayor parte de los inversionistas tienen carteras diversificadas, la desviación estándar de un titulo individual no es una buena medida de su riesgo
Derivándose que, un titulo con una desviación estándar alta no necesita tener un efecto importante sobre la desviación estándar de una cartera grande, por el contrario, un titulo con una desviación estándar baja en realidad puede tener un efecto importante sobre la desviación estándar de una cartera grande.

La razón es que no nos interesa la desviación estándar de un titulo individual como lo estamos en el efecto de una desviación estándar individual sobre el riesgo de una cartera[20].

[20] En si los fondos comunes son carteras de títulos individuales. En esta investigación analizaremos cual de los fondos existentes en el mercado es él mas rentable y no como es cada acción en forma particular, aunque para analizar los fondos comunes, tengamos que hacer un ejemplo sencillo con dos títulos para saber como se conforman estos.

III.4.- Covarianza y Correlación

Los estadísticos creen que la varianza y la desviación estándar miden la variabilidad de las acciones individuales, ahora en esta parte, ponderaremos la relación entre la rentabilidad de dos o más acciones, con lo cual haremos nuestro análisis mas preciso. Para esto necesitamos de otras medidas estadísticas que nos den la relación entre dos o más variables, siendo estas la Covarianza y Correlación.

La covarianza y correlación son maneras de medir si dos variables al azar se relacionan y como se relacionan, esto nos servirá para ponderar la relación entre acciones, fondos de inversión, etc.

III.4.a.- Covarianza.

La covarianza es una medida estadística de la interacción de dos títulos. De modo alternativo, se puede expresar esta interacción en términos de la correlación entre dos títulos.

Para entender estos términos mas fácilmente tendremos que hacer un ejemplo con dos acciones cualesquiera, en este caso, lo haremos con BIMBO y TMM L:

Las acciones de BIMBO en el periodo de Enero del 2000 a Enero del 2001, se cotizaron de la siguiente forma:

NOMBRE DE ACCION: BIMBO.
SECTOR: ALIMENTOS.

ENERO	FEBRERO	MARZO	ABRIL	MAYO	JUNIO	JULIO
01/07/00	02/07/00	03/07/00	04/07/00	05/09/00	06/07/0	07/07/00
18.72	15.50	15.94	15.46	12.74	13.72	15.74
AGOSTO	SEPTIEMBRE	OCTUBRE	NOVIEMBRE	DICIEMBRE	ENERO	
08/07/00	09/07/00	10/06/00	11/08/00	12/08/00	01/08/0	
15.6	14.34	15.78	13.36	12.6	13.7	

Las acciones de TMM L (Transporte Marítimos Mexicanos serie L), en el periodo de Enero del 2000 a ENERO DEL 2001, se cotizaron de la siguiente forma:

NOMBRE DE LA ACCION: TMM L.

SECTOR: COMUNICACIONES Y TRANSPORTES.

ENERO	FEBRERO	MARZO	ABRIL	MAYO	JUNIO	JULIO
01/07/00	02/07/00	03/07/00	04/07/00	05/09/00	06/07/0	07/07/0
38	51	49.5	51	45	45	48.55

AGOSTO	SEPTIEMBRE	OCTUBRE	NOVIEMBRE	DICIEMBRE	ENERO
08/07/00	09/07/00	10/06/00	11/08/00	12/08/00	01/08/0
65	76	76	88	101	105

Con los datos presentados anteriormente, ahora podremos calcular su rentabilidad promedio, varianza y desviación estándar de cada una de las acciones analizadas.

Quedándonos que, la rentabilidad esperada de BIMBO, fue de:

ENERO	FEBRERO	MARZO	ABRIL	MAYO	JUNIO	JULIO
	-0.172008	.028387	-.030112	-.175937	.076923	.14723
AGOSTO	SEPTIEMBRE	OCTUBRE	NOVIEMBRE	DICIEMBRE	ENERO	
-.008894	-.080769	.100418	-.153358	-.056836	.087301	

RENDIMIENTO ESPERADO FUE DE: -.02377 = -2.377 %
RP_{BIMBO} = - 2.377%

Al sacar su Varianza, con el método ya antes visto, nos da como resultado que:

Var = .012382

Así entonces su Desviación estándar es de: .111274 = 11.1274 %

De manera similar la rentabilidad promedio de TMM L fue de:

ENERO	FEBRERO	MARZO	ABRIL	MAYO	JUNIO	JULIO
	0.342105	-0.0294117	0.030303	-0.117647	0	0.078888

AGOSTO	SEPTIEMBRE	OCTUBRE	NOVIEMBRE	DICIEMBRE	ENERO
0.338825	0.16923	0	0.1578947	0.147727	0.0396039

RENDIMIENTO ESPERADO FUE DE: .115752 = 11.5752 %
RP_{TMML} = 11.57%

Por lo tanto la Var = .019909
Así su Desviación estándar es de: .141097 = 14.1097%

Ya con estos resultados ahora, podremos calcular las otras dos medidas estadísticas, La COVARIANZA, la obtendremos algebraicamente de:

$$\sigma_{AB} = \mathbf{Cov}\ (R_A, R_B) = \textbf{Valor esperado de } [(R_A - RP_A)(R_B - RP_B)]$$

Donde el orden de las variables es indistinto, es decir la covarianza de A con B es igual que la covarianza de B con A, expresandose de modo más formal como:

$$\sigma_{AB} = \mathbf{Cov}\ (\mathbf{R_A},\mathbf{R_B}) = \mathbf{Cov}\ (\mathbf{R_B},\mathbf{R_A}) = \sigma_{BA}$$

Donde:

σ_{AB} = Covarianza de A con respecto a B

R_A y R_B = Rentabilidad reales de los títulos.

RP_A y RP_B = Rentabilidades esperadas de los títulos

Desarrollando nos da:

$\mathrm{Cov}\ (R_A,R_B)= [(R_{A1}- RP_A)(R_{B1} - RP_B) + (R_{A2}- RP_A)(R_{B2} - RP_B) + \ldots \quad \ldots + (R_{An}- RP_A)(R_{Bn} - RP_B)]/n-1$

Para nuestro ejemplo, quedaría:

$\mathrm{Cov}\ (R_{BIMBO} ,R_{TMML}) = [(-.172008 – (-.02377)) \ (.3421 - .11575) + (.028387 – (-.02377)) (-.0294 - .11575) + \ldots \quad \ldots + (.087301 – (-.02377)) (.0396 - .11575)] \ / \ (12 – 1) = -.004266$

$\mathrm{Cov}\ (R_{BIMBO} ,R_{TMML}) = -.004266$

Ahora suponiendo que la rentabilidad de BIMBO por lo general es mayor que su promedio cuando la rentabilidad de TMM es mayor que su promedio, y que la rentabilidad de BIMBO es menor a su promedio cuando la rentabilidad de TMM es menor a su promedio.

Esto no indica una dependencia o una relación POSITIVA entre las dos rentabilidades.

Ahora suponiendo que la rentabilidad de BIMBO generalmente es mayor que su promedio cuando la rentabilidad de TMM por lo general es menor a su promedio y que la rentabilidad de BIMBO es menor a su promedio cuando la rentabilidad de TMM es mayor que su promedio.

Esto nos indica una dependencia o relación NEGATIVA entre las dos rentabilidades.

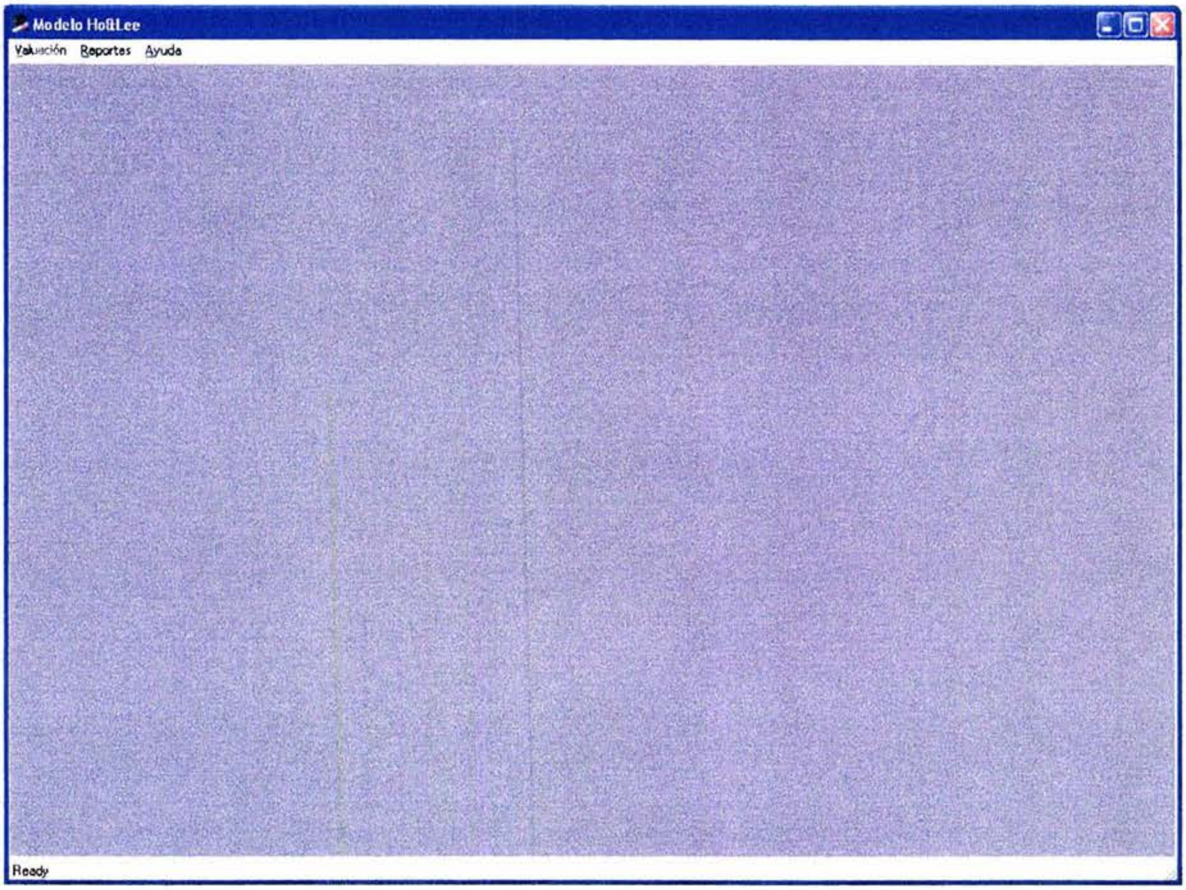
En la formula de la covarianza los términos no presentaran ninguna tendencia a ser positivos o negativos y en el promedio tenderán a compensarse y anularse, esto nos dará una covarianza igual a cero.

En este caso se puede decir que es utópico, ya que en ningún caso real se presentara, salvo en casos que se tuvieran muestras históricas con una amplitud suficiente, y aun así nuestro resultado se aproximaría a cero pero jamas nos daría el cero absoluto.

El resultado que obtuvimos fue de -.004266, una cifra (NEGATIVA), sin embargo, es difícil interpretar la magnitud del numero, como la varianza, la covarianza esta en unidades cuadraticas de desviación, por lo que hasta no tener esta cifra en perspectiva, no sabremos que hacer con ella.

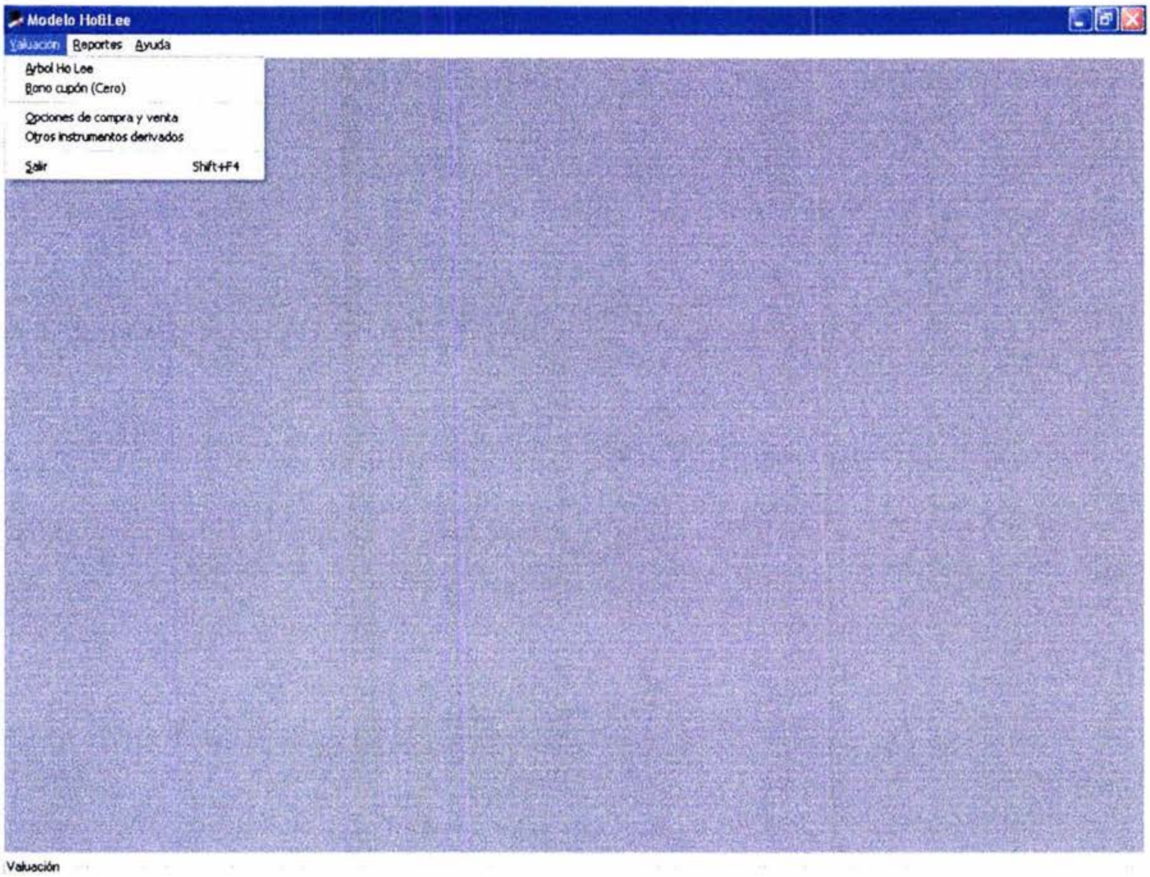
III.4.b.- Índice de Correlación.

Este índice nos va a medir el grado de dependencia de una variable por la variación ya conocida de otra.



El menú de valuación nos permite:

- ❖ Valuar el árbol Ho & Lee
- ❖ Valuar un bono cupón o un bono cupón cero
- ❖ Valuación de opciones de compra y venta europeas y americanas
- ❖ Valuación de otros instrumentos derivados:
    - Callable
    - Putable
    - Straddle normal europeo
    - Straddle normal americano



VALUACIÓN

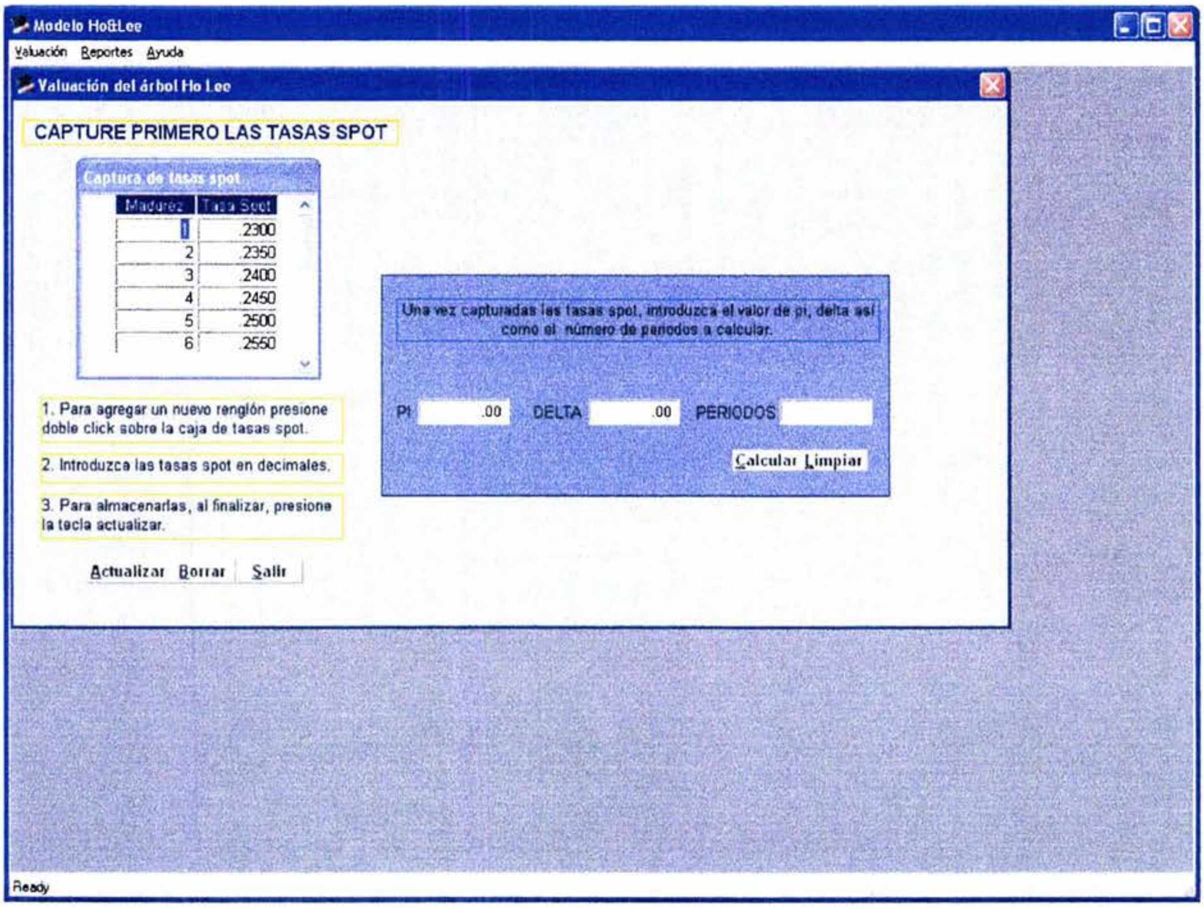
- Valuación del árbol Ho & Lee. (Vea la figura siguiente). Para poder calcular instrumentos derivados con el modelo Ho & Lee, debemos calcular el árbol de tasas en función de las tasas spot del mercado. El valor de las tasas se inserta en el recuadro que dice "Capture primero las tasas spot".

    - Para realizar la captura oprima doble click sobre el cuadro indicado y automáticamente se agregará un nuevo renglón.
    - Las tasas se deben escribir en decimales, es decir, 23% = 0.23.
    - Para almacenar las tasas oprima el botón actualizar.

  Una vez capturadas las tasas procedemos a definir el valor de pi, delta y el número de periodos a valuar, para esto debemos:

  - Introducir el número de periodos <= 6 que se desean calcular.
  - Introducir el valor de pi
  - Introducir el valor de delta. Presionar el botón que dice "calcular".

Con este último paso se habrá generado el árbol Ho & Lee.

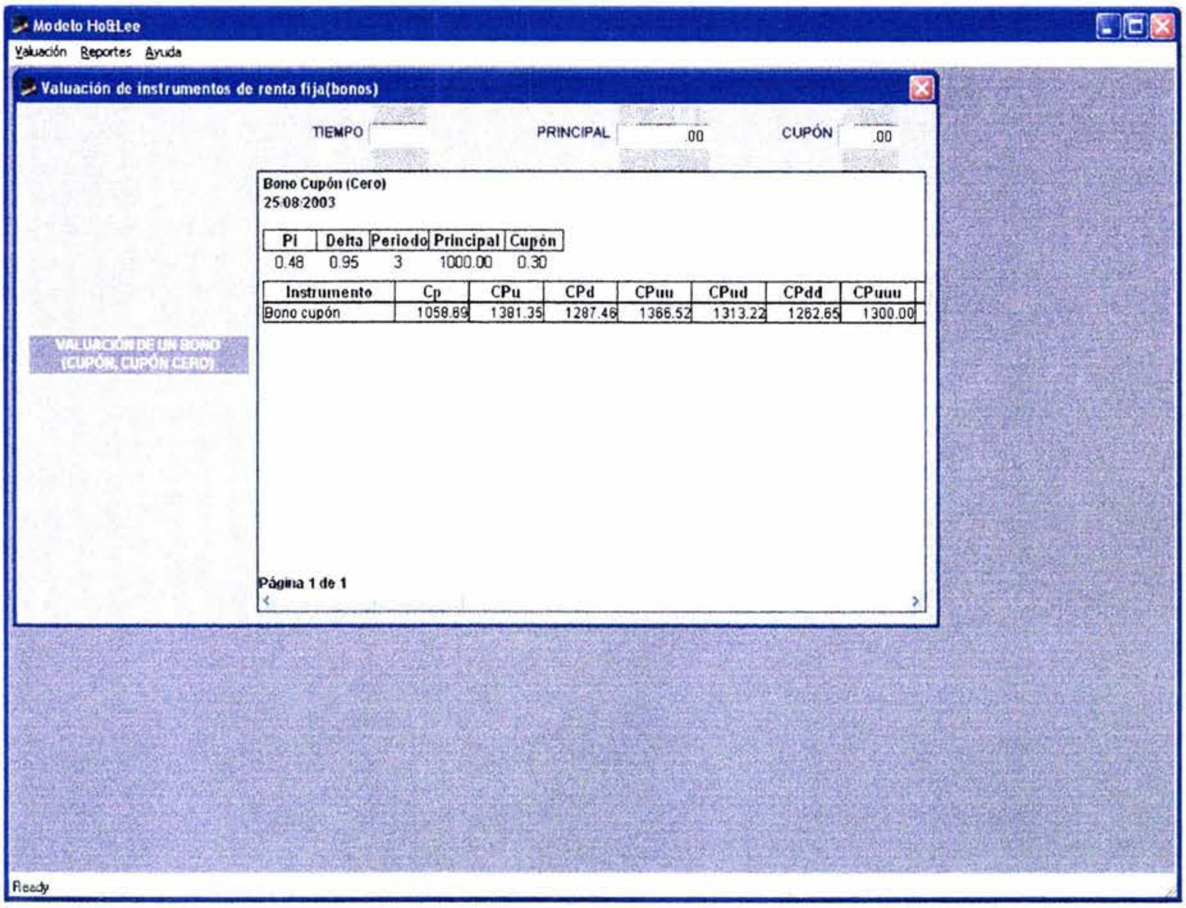


Como se observa en la figura anterior, se deben introducir las tasas spot (cuyo número depende del tiempo que se pretenda valuar) para posteriormente capturar los valores de p, delta y el número de periodos (años) a calcular. Por cuestiones prácticas el número máximo de periodos se ha dispuesto de 6.

Una vez calculado el árbol Ho & Lee, se está e n posibilidad de valuar un bono cupón o un bono cupón cero, los cuales son instrumentos de renta fija, sobre los que es posible calcular instrumentos derivados. Vale la pena aclarar que se eligieron bonos por ser instrumentos de renta fija comunes, pero en realidad cualquiera que se comporte como tal puede ser empleado.

2) <u>Valuación de un bono cupón o un bono cupón cero.</u> El cálculo de un bono cupón implica el conocimiento de 3 datos básicos:

- Tiempo. Vida del instrumento antes de su expiración.
- Principal. Que es el valor de carátula del bono.
- Cupón. Que es un monto que va a pagar el instrumento durante su tiempo de vida sobre el valor de carátula del bono. Note que este cupón puede ser cero o mayor, es decir, cero para cupón cero y mayor para bono cupón.

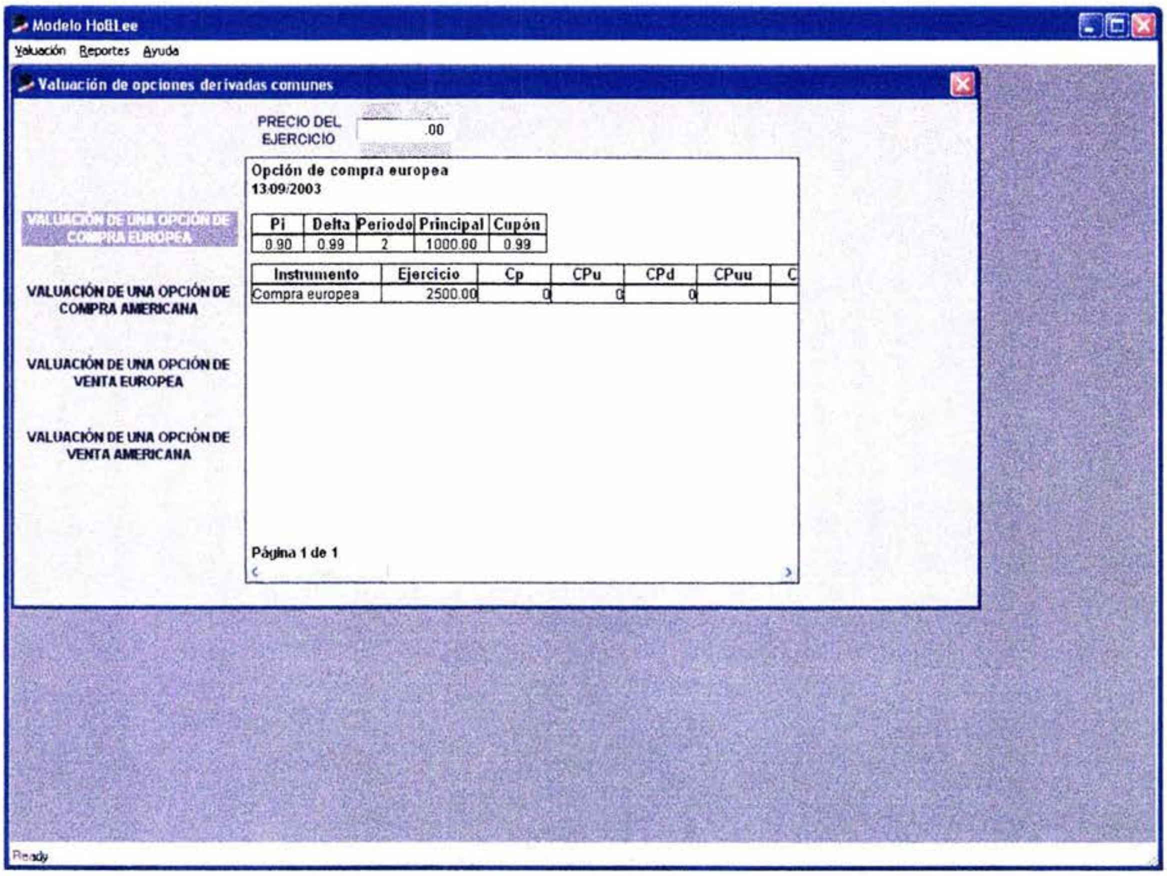


Introduzca el tiempo de vida del bono (periodo), el valor del principal (valor de carátula) y el rendimiento del cupón, dicho porcentaje deberá introducirse en decimales. Una vez que cuente con todos los datos presione con el botón izquierdo del ratón sobre ***VALUACIÓN DE UN BONO (CUPÓN, CUPÓN CERO).***

A partir de este momento ya se pueden valuar instrumentos derivados sobre el bono previamente obtenido.

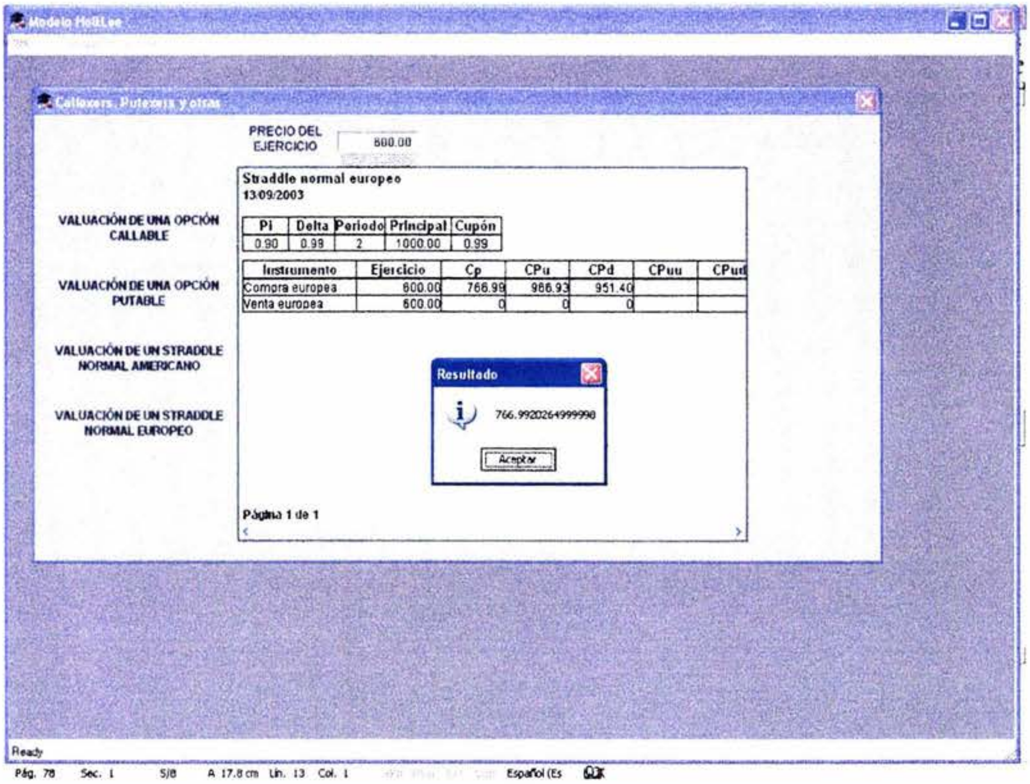
3) Valuación de opciones. Para valuar las opciones de compra y venta, tanto americanas como europeas, lo único que debe hacer es elegir en el menú de valuación la opción que dice opciones de compra y venta.

Para calcular cualquiera de las que aparecen, basta con introducir el precio del ejercicio (K) del instrumento y oprimir, con el botón izquierdo del ratón, la frase de la opción que desea obtener.



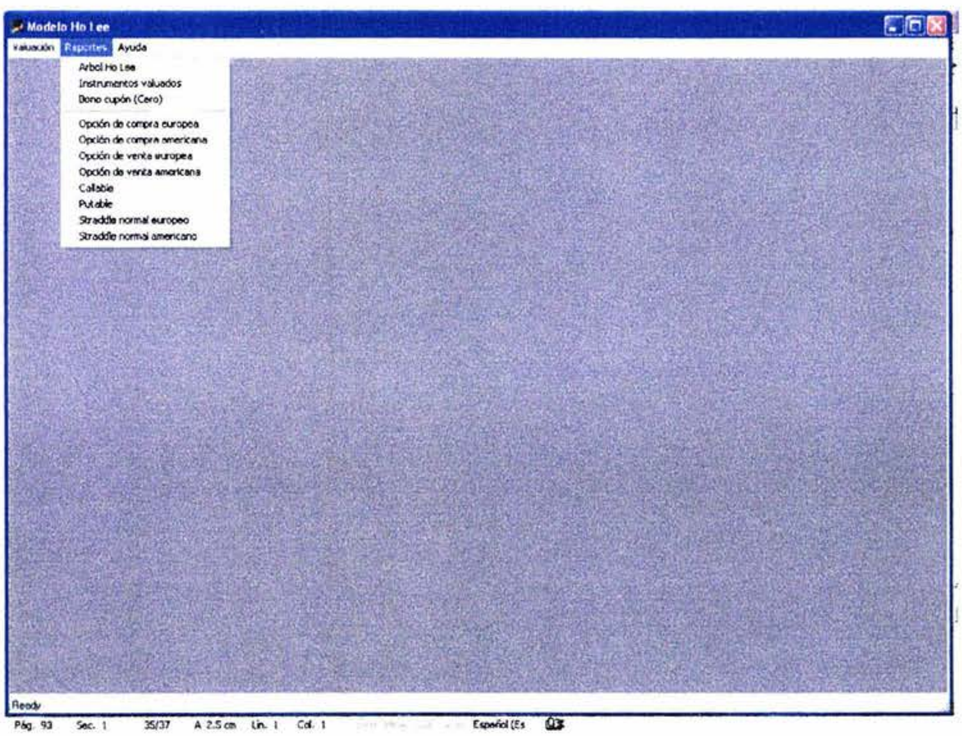
4) <u>Valuación de otros instrumentos derivados.</u> Existen muchos otros tipos de instrumentos, de los cuales se han elegido algunos de los más representativos. Entre éstos tenemos: los callables, los putables, los straddles normales europeos (resultado de la suma de una opción de compra y una de venta europea) y los straddles normales americanos (resultado de la suma de una opción de compra y una de venta americana).

Para calcular estos instrumentos debe introducirse únicamente el precio del ejercicio (K) y oprimir el botón izquierdo del ratón sobre la frase del instrumento que se desea valuar. Como se observa, tanto las opciones como estos instrumentos sólo requieren del precio del ejercicio y utilizan los datos del bono y del árbol binomial como su fuente de información.

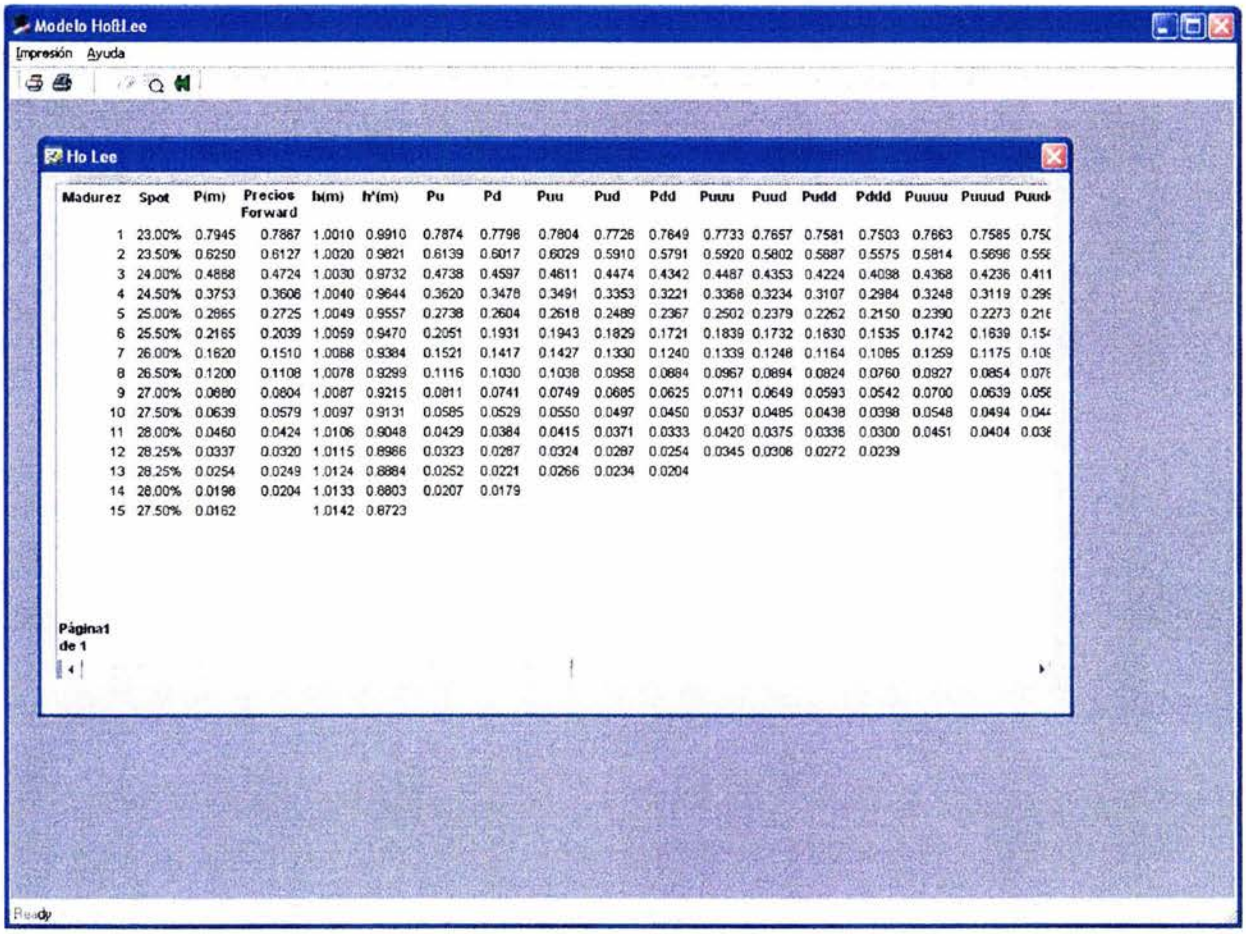


Una vez que se ha terminado de calcular el monto de los instrumentos derivados, es posible imprimirlos o verificarlos a través del uso del menú de reportes.

REPORTES



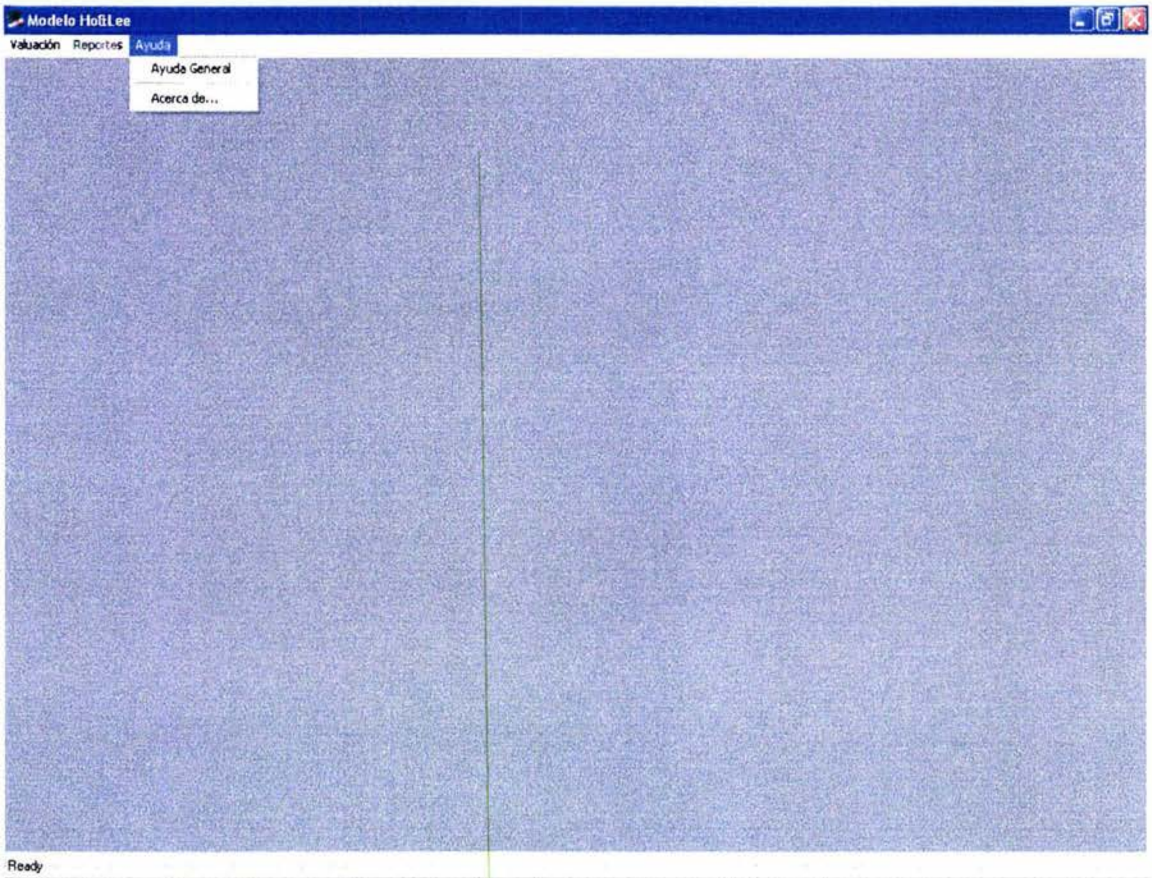
Como se observa, este menú le permite elegir, tanto los resultados arrojados por el árbol Ho & Lee, como por el bono y los instrumentos derivados calculados sobre dicho bono. Lo único que el usuario debe hacer es elegir, con el botón izquierdo del ratón, el instrumento deseado, y si éste ha sido procesado, lo que verá es un reporte similar al que se presenta a continuación.



Madurez	Spot	P(m)	Precios Forward	h(m)	h'(m)	Pu	Pd	Puu	Pud	Pdd	Puuu	Puud	Pudd	Pddd	Puuuu	Puuud	Puud
1	23.00%	0.7945	0.7867	1.0010	0.9910	0.7874	0.7798	0.7804	0.7726	0.7649	0.7733	0.7657	0.7581	0.7503	0.7663	0.7585	0.75
2	23.50%	0.6250	0.6127	1.0020	0.9821	0.6139	0.6017	0.6029	0.5910	0.5791	0.5920	0.5802	0.5687	0.5575	0.5814	0.5696	0.55
3	24.00%	0.4888	0.4724	1.0030	0.9732	0.4738	0.4597	0.4611	0.4474	0.4342	0.4487	0.4353	0.4224	0.4098	0.4368	0.4236	0.411
4	24.50%	0.3753	0.3606	1.0040	0.9644	0.3620	0.3478	0.3491	0.3353	0.3221	0.3368	0.3234	0.3107	0.2984	0.3248	0.3119	0.29
5	25.00%	0.2865	0.2725	1.0049	0.9557	0.2738	0.2604	0.2618	0.2489	0.2367	0.2502	0.2379	0.2262	0.2150	0.2390	0.2273	0.21
6	25.50%	0.2165	0.2039	1.0059	0.9470	0.2051	0.1931	0.1943	0.1829	0.1721	0.1839	0.1732	0.1630	0.1535	0.1742	0.1639	0.15
7	26.00%	0.1620	0.1510	1.0068	0.9384	0.1521	0.1417	0.1427	0.1330	0.1240	0.1339	0.1248	0.1164	0.1085	0.1259	0.1175	0.10
8	26.50%	0.1200	0.1108	1.0078	0.9299	0.1116	0.1030	0.1038	0.0958	0.0884	0.0967	0.0894	0.0824	0.0760	0.0927	0.0854	0.07
9	27.00%	0.0880	0.0804	1.0087	0.9215	0.0811	0.0741	0.0749	0.0685	0.0625	0.0711	0.0649	0.0593	0.0542	0.0700	0.0639	0.05
10	27.50%	0.0639	0.0579	1.0097	0.9131	0.0585	0.0529	0.0550	0.0497	0.0450	0.0537	0.0485	0.0438	0.0398	0.0548	0.0494	0.04
11	28.00%	0.0460	0.0424	1.0106	0.9048	0.0429	0.0384	0.0415	0.0371	0.0333	0.0420	0.0375	0.0336	0.0300	0.0451	0.0404	0.03
12	28.25%	0.0337	0.0320	1.0115	0.8966	0.0323	0.0287	0.0324	0.0287	0.0254	0.0345	0.0306	0.0272	0.0239			
13	28.25%	0.0254	0.0249	1.0124	0.8884	0.0252	0.0221	0.0266	0.0234	0.0204							
14	28.00%	0.0198	0.0204	1.0133	0.8803	0.0207	0.0179										
15	27.50%	0.0162		1.0142	0.8723												

AYUDA

Finalmente, el menú de ayuda se compone de dos opciones: la Ayuda General, que consiste en este documento; y un Acerca de... que contiene información de este programa.



A partir de este momento puede empezar a utilizar el sistema y corroborar la validez de los ejercicios propuestos, y si así lo desea crear e introducir los suyos.

CAPÍTULO 6. CONCLUSIONES

La finalidad de este trabajo fue presentar un modelo para valuar instrumentos derivados sobre instrumentos de renta fija. Dicho modelo es poco común en la literatura por lo que su estudio y entendimiento no sólo ofrece al interesado una herramienta más para el cálculo de opciones financieras, sino que además le permite calcular precios justos en las tasas de interés.

Si bien es cierto que el análisis de un modelo matemático existente no implica una aportación sustantiva al conocimiento, sí lo es el hecho de que esta investigación tuvo como resultado la creación de un sistema de cómputo, cuyo objetivo es ejemplificar el uso del modelo Ho & Lee, mediante la valuación de varios instrumentos derivados sobre el más conocido de los instrumentos de renta fija, el bono. Esto abre la posibilidad de que cualquiera, sin estar familiarizado con ciertos términos matemáticos ni financieros, emplee el sistema y obtenga el resultado esperado.

Hasta ahora, la mayoría de los tratados financieros, y en particular de opciones, están llenos de cálculos y ejemplos que la mayoría de las veces son demasiado abstractos; esto sin contar que la nomenclatura empleada para expresar dichos cálculos varía de un libro a otro, que trate sobre el tema, lo que dificulta aún más su entendimiento. Considero que a diferencia de esos libros, este trabajo intenta evitar esas ambigüedades y se centra más en un lenguaje simple y claro, utilizando términos que si bien no son básicos, un lector con poco conocimiento de finanzas podría comprenderlos y utilizarlos.

Es importante entender que aun cuando en México el mercado de opciones no tiene la difusión que en otros países, a nivel internacional el control de este tipo de mercado resulta relevante en la vida económica de los países que lo emplean, ya que les da la seguridad de que podrán vender o comprar acciones, bienes y/o productos al importe pactado, sin importar las fluctuaciones de los precios en el tiempo. Lo anterior da como resultado una minimización del riesgo al comprender cómo y dónde invertir y bajo qué esquema de tasas hacerlo.

En países en vías de desarrollo como México, esto significa dinero seguro hoy y la posibilidad de que si este dinero es bien utilizado, el día de mañana traerá beneficios, tanto para el inversionista como para la nación en donde son invertidos estos recursos.

ANEXO I

Este anexo tiene como objetivo mostrar resultados obtenidos a través del sistema Ho & Lee.

Para esto se han propuesto dos ejercicios que pueden ser comprobados mediante las técnicas descritas en capítulos anteriores.

En el primer ejercicio se presenta un esquema de 15 tasas para el cual se deberá calcular el árbol HoLee, para posteriormente calcular un bono cupón. *Es importante recordar que si bien el árbol puede generarse hasta para 6 periodos, es el tiempo de vida del bono el que nos indica a cuantos años se calcularán los instrumentos derivados.* Una vez obtenido el bono, se calcularán: un callable, una opción de compra americana, una opción de compra europea, una opción de venta americana y una opción venta europea. El objetivo es entonces, utilizando el sistema de valuación, realizar los cálculos y generar los reportes correspondientes a los datos propuestos.

El segundo ejercicio tiene una función similar al primero, la diferencia radica en el hecho de que se manejarán dos bonos, uno a 3 años y otro a 5, siendo el cupón y el principal iguales en ambos bonos. Adicionalmente, sobre el bono a 5 años, se calcularán: una opción putable, y un straddle normal europeo. El objetivo es, como en el caso anterior, utilizar el sistema de valuación para realizar los cálculos y generar los reportes correspondientes.

Calcular

Ho&Lee(Sistema). Asúmase que se tiene un π=0.48, δ=0.95, con el siguiente esquema de tasas: R(1)=23%, R(2)=23.5%, R(3)=24%, R(4)=24.5%, R(5)=25%, R(6)=25.5%, R(7)=26%, R(8)=26.5%, R(9)=27%, R(10)=27.5%, R(11)=28%, R(12)=28.25%, R(13)=28.25%, R(14)=28%, R(15)=27.5%. Valuar lo que se pide a continuación:

1. Bono cupón de 30% a 3 años con pagos anuales y un principal de $1000.
2. Sobre el bono cupón anterior calcule un callable exigible en t1 o t2 justo después del pago del cupón, con un calexer de $1000.
3. Sobre el bono cupón del número 1, calcule una opción de compra americana a 2 años, exigible en t1 o t2 justo después del pago del cupón, con un precio del ejercicio de $1000.
4. Sobre el bono cupón del número 1, calcule una opción de compra europea a 2 años, exigible en t1 o t2 justo después del pago del cupón, con un precio del ejercicio de $1000.
5. Sobre el bono cupón del número 1, calcule una opción de venta americana a 2 años, exigible en t1 o t2 justo después del pago del cupón, con un precio del ejercicio de $1000.
6. Sobre el bono cupón del número 1, calcule una opción de venta europea a 2 años, exigible en t1 o t2 justo después del pago del cupón, con un precio del ejercicio de $1000.

Ho&Lee(Sistema). Asúmase que se tiene un π=0.50, δ=0.99, con el siguiente esquema de tasas: R(1)=5.63%, R(2)=5.74%, R(3)=5.84%, R(4)=5.94%, R(5)=6.03%, R(6)=6.11%, R(7)=6.19%, R(8)=6.26%, R(9)=6.33%, R(10)=6.39%, R(11)=6.44%, R(12)=6.50%, R(13)=6.54%, R(14)=6.59%, R(15)=6.63%. Valuar lo que se pide a continuación:

1. Bono cupón de 6% a 3 años con pagos anuales y un principal de $1000.
2. Sobre el bono cupón anterior calcule un callable exigible en t1 o t2 justo después del pago del cupón, con un calexer de $1000.
3. Sobre el bono cupón del número 1, calcule una opción de compra americana a 2 años, exigible en t1 o t2 justo después del pago del cupón, con un precio del ejercicio de $1000.
4. Sobre el bono cupón del número 1, calcule una opción de compra europea a 2 años, exigible en t1 o t2 justo después del pago del cupón, con un precio del ejercicio de $1000.
5. Sobre el bono cupón del número 1, calcule una opción de venta americana a 2 años, exigible en t1 o t2 justo después del pago del cupón, con un precio del ejercicio de $1000.
6. Sobre el bono cupón del número 1, calcule una opción de venta europea a 2 años, exigible en t1 o t2 justo después del pago del cupón, con un precio del ejercicio de $1000.
7. Bono cupón de 6% a 5 años con pagos anuales y un principal de $1000.
8. Sobre el bono cupón anterior calcule un putable exigible en t1, t2, t3 o t4 justo después del pago del cupón, con un putexer de $1000.
9. Sobre el bono cupón del inciso 7 calcule un straddle normal europeo exigible en t5, con un principal de $1000.

Árbol Ho Lee

25/10/2004 01:36:01

Parámetros

Pi	Delta	Periodos
0.48	0.95	3

Madurez	Spot	P(m)	Precios Forward	h(m)	h*(m)	Pu	Pd	Puu	Pud	Pdd	Puuu	Puud	Pudd	Pddd	Puuuu	Puuud	Puudd	Puddd
1	23.00%	0.7945	0.7867	1.0267	0.9754	0.8077	0.7673	0.8204	0.7794	0.7405	0.8327	0.7910	0.7515	0.7141				
2	23.50%	0.6250	0.6127	1.0534	0.9507	0.6454	0.5825	0.6654	0.6005	0.5421	0.6853	0.6185	0.5582	0.5038				
3	24.00%	0.4868	0.4724	1.0801	0.9261	0.5102	0.4375	0.5337	0.4576	0.3924	0.5572	0.4777	0.4096	0.3512				
4	24.50%	0.3753	0.3606	1.1068	0.9015	0.3991	0.3251	0.4232	0.3447	0.2808	0.4476	0.3647	0.2970	0.2418				
5	25.00%	0.2865	0.2725	1.1333	0.8769	0.3088	0.2390	0.3318	0.2568	0.1986	0.3553	0.2748	0.2126	0.1646				
6	25.50%	0.2165	0.2039	1.1598	0.8525	0.2365	0.1738	0.2572	0.1890	0.1390	0.2788	0.2049	0.1506	0.1108				
7	26.00%	0.1620	0.1510	1.1860	0.8283	0.1791	0.1251	0.1972	0.1377	0.0962	0.2161	0.1510	0.1054	0.0736				
8	26.50%	0.1200	0.1108	1.2122	0.8042	0.1343	0.0891	0.1495	0.0992	0.0658	0.1658	0.1100	0.0729	0.0483				
9	27.00%	0.0880	0.0804	1.2380	0.7803	0.0996	0.0628	0.1122	0.0707	0.0445	0.1292	0.0813	0.0513	0.0324				
10	27.50%	0.0639	0.0579	1.2637	0.7566	0.0732	0.0438	0.0856	0.0512	0.0307	0.1032	0.0618	0.0370	0.0222				
11	28.00%	0.0460	0.0424	1.2890	0.7332	0.0547	0.0311	0.0670	0.0381	0.0217	0.0853	0.0486	0.0277	0.0156				
12	28.25%	0.0337	0.0320	1.3141	0.7101	0.0420	0.0227	0.0543	0.0294	0.0158	0.0738	0.0400	0.0216	0.0117				
13	28.25%	0.0254	0.0249	1.3388	0.6873	0.0334	0.0171	0.0461	0.0237	0.0122								
14	28.00%	0.0198	0.0204	1.3632	0.6648	0.0278	0.0136											
15	27.50%	0.0162		1.3871	0.6426													

Aquí se presenta el árbol Ho & Lee generado del primer ejercicio, con una probabilidad π=0.48, δ=0.95, con un esquema de 15 tasas y a 3 periodos.

Instrumentos de Inversión valuados mediante el modelo Ho Lee
25/10/2004 23:42:31

Parámetros

Pi	Delta	Periodos	Principal	Cupón
0.48	0.95	3	1000.00	0.30

Tipo	Straddle	Ejercicio	Cp	CPu	CPd	CPuu	CPud	CPdd	CPuuu	CPuud	CPudd	CPddd	CPuuuu	CPuuud	CPuudd	CPuddd	Cl
Bono			1058.69	1381.35	1287.45	1366.52	1313.22	1262.65	1300.00	1300.00	1300.00	1300.00					
Callable		1000.00	1025.65	1300.00	1282.58	1300.00	1300.00	1262.65	1300.00	1300.00	1300.00	1300.00					
Compra Americana		1000.00	33.03	81.34	4.86	66.51	13.22	0									
Compra Europea		1000.00	13.96	31.34	4.86	66.51	13.22	0									
Venta Americana		1000.00	6.15	0	14.90	0	0	37.34									
Venta Europea		1000.00	6.15	0	14.90	0	0	37.34									

Utilizando el esquema Ho & Lee de la página anterior, se calculó un bono cupón. Sobre este bono se calcularon varios instrumentos derivados: un callable, una opción de compra americana, una opción de compra europea, una opción de venta americana y una opción de venta europea.

Árbol Ho Lee

25/10/2004 22:20:47

Parámetros

Pi	Delta	Periodos
0.50	0.99	5

Madurez	Spot	P(m)	Precios Forward	h(m)	h*(m)	Pu	Pd	Puu	Pud	Pdd	Puuu	Puud	Pudd	Pddd	Puuuu	Puuud	Puudd	Puddd
1	5.63%	0.9453	0.9431	1.0050	0.9950	0.9478	0.9384	0.9508	0.9414	0.9320	0.9537	0.9441	0.9348	0.9253	0.9569	0.9472	0.9377	0.9284
2	5.74%	0.8915	0.8879	1.0100	0.9900	0.8967	0.8790	0.9023	0.8844	0.8667	0.9081	0.8898	0.8722	0.8549	0.9146	0.8964	0.8784	0.8610
3	5.84%	0.8393	0.8341	1.0151	0.9849	0.8467	0.8215	0.8549	0.8294	0.8048	0.8636	0.8379	0.8130	0.7888	0.8727	0.8468	0.8215	0.7970
4	5.94%	0.7885	0.7825	1.0201	0.9799	0.7982	0.7668	0.8089	0.7771	0.7464	0.8199	0.7876	0.7565	0.7267	0.8317	0.7990	0.7675	0.7372
5	6.03%	0.7397	0.7332	1.0251	0.9749	0.7516	0.7148	0.7642	0.7268	0.6912	0.7776	0.7395	0.7033	0.6687	0.7917	0.7529	0.7160	0.6809
6	6.11%	0.6931	0.6859	1.0301	0.9699	0.7066	0.6653	0.7212	0.6791	0.6393	0.7366	0.6934	0.6529	0.6146	0.7533	0.7091	0.6674	0.6284
7	6.19%	0.6484	0.6411	1.0352	0.9648	0.6636	0.6185	0.6799	0.6337	0.5906	0.6974	0.6499	0.6057	0.5645	0.7163	0.6675	0.6221	0.5798
8	6.26%	0.6060	0.5984	1.0402	0.9598	0.6225	0.5744	0.6405	0.5910	0.5453	0.6599	0.6088	0.5618	0.5183	0.6798	0.6272	0.5787	0.5340
9	6.33%	0.5657	0.5583	1.0452	0.9548	0.5836	0.5331	0.6032	0.5510	0.5033	0.6233	0.5693	0.5201	0.4751	0.6458	0.5900	0.5389	0.4923
10	6.39%	0.5278	0.5209	1.0502	0.9498	0.5470	0.4947	0.5670	0.5128	0.4638	0.5893	0.5329	0.4820	0.4359	0.6123	0.5537	0.5007	0.4529
11	6.44%	0.4924	0.4849	1.0552	0.9448	0.5117	0.4582	0.5335	0.4777	0.4277	0.5560	0.4978	0.4457	0.3991	0.5808	0.5199	0.4655	0.4168
12	6.50%	0.4584	0.4520	1.0602	0.9398	0.4792	0.4248	0.5010	0.4441	0.3937	0.5249	0.4652	0.4124	0.3654				
13	6.54%	0.4273	0.4205	1.0652	0.9348	0.4479	0.3931	0.4707	0.4131	0.3624								
14	6.59%	0.3975	0.3913	1.0702	0.9298	0.4188	0.3638											
15	6.63%	0.3699		1.0752	0.9248													

Aquí se presenta el árbol Ho & Lee generado del segundo ejercicio, con una probabilidad π=0.50, δ=0.99, con un esquema de 15 tasas y a 5 periodos.

Pdddd	Puuuuu	Puuuud	Puuudd	Puuddd	Pudddd	Pddddd	Puuuuuu	Puuuuud	Puuuudd	Puuuddd	Puudddd	Puddddd	Pdddddd
0.9193	0.9606	0.9511	0.9414	0.9321	0.9228	0.9135							
0.8440	0.9211	0.9029	0.8848	0.8673	0.8499	0.8330							
0.7735	0.8823	0.8563	0.8309	0.8061	0.7821	0.7587							
0.7082	0.8440	0.8108	0.7789	0.7482	0.7187	0.6902							
0.6475	0.8070	0.7674	0.7296	0.6939	0.6599	0.6275							
0.5917	0.7711	0.7259	0.6834	0.6435	0.6057	0.5701							
0.5404	0.7354	0.6855	0.6389	0.5954	0.5549	0.5172							
0.4928	0.7020	0.6479	0.5978	0.5516	0.5090	0.4696							
0.4498	0.6688	0.6110	0.5581	0.5098	0.4658	0.4255							
0.4097	0.6374	0.5764	0.5213	0.4715	0.4264	0.3855							
0.3731													

Instrumentos de Inversión valuados mediante el modelo Ho Lee
25/10/2004 23:36:58

Parámetros

Pi	Delta	Periodos	Principal	Cupón
0.50	0.99	5	1000.00	0.06

Tipo	Straddle	Ejercicio	Cp	CPu	CPd	CPuu	CPud	CPdd	CPuuu	CPuud	CPudd	CPddd	CPuuuu	CPuuud	CPuudd	CPuddd	CI
Bono			991.86	1067.40	1031.10	1077.10	1048.67	1021.02	1079.67	1059.79	1040.63	1021.64	1074.31	1064.03	1053.96	1044.10	1
Putable		1000.00	1008.35	1073.41	1060.00	1078.45	1060.00	1060.00	1079.67	1062.64	1060.00	1060.00	1074.31	1064.03	1060.00	1060.00	1
Straddle Europeo	7.62	1000.00	1.53	2.82	0.42	5.06	0.89	0	8.74	1.90	0	0	14.30	4.02	0	0	
		1000.00	6.09	3.56	9.32	1.35	6.16	13.71	0	2.85	10.25	19.17	0	0	6.03	15.90	

Utilizando el esquema Ho & Lee de la página anterior, se calculó un bono cupón. Sobre este bono se calcularon dos instrumentos derivados: un putable y un straddle normal europeo.

Pdddd	CPuuuuu	CPuuuud	CPuuudd	CPuuddd	CPudddd	CPddddd	CPuuuuuu	CPuuuuud	CPuuuudd	CPuuuddd	CPuudddd	CPuddddd	CPdddddd
034.45	1060.00	1060.00	1060.00	1060.00	1060.00	1060.00							
060.00	1060.00	1060.00	1060.00	1060.00	1060.00	1060.00							
0													
25.54													

BIBLIOGRAFÍA

DÍAZ TINOCO, Jaime y Fausto Hernández Trillo, 1998, Futuros y Opciones financieras una introducción, 2a ed. (México: Limusa).

DÍEZ DE CASTRO, Luis y Juan Mascareñas Pérez-Iñigo, 1991, Ingeniería Financiera La gestión en los mercados financieros internacionales (Madrid: Mc Graw Hill).

ESTRELLA CARRERA, Ramiro Augusto, 1996, Administración de Riesgo de Tasa de Interés: Inmunización usando duración y convexidad (México: ITAM).

HEYMAN, Thimothy, Inversión Contra Inflación, 1988, 3a. ed. (México: Editorial Milenio).

HULL, John C., Futures & Other Derivative Securities, 1993, 2a. ed. (New Jersey: Prentice Hall).

LEÓN LEÓN, Rodolfo, Instrumentos Financieros del Mercado de Dinero, 1995, 3a. ed. (México: Academia Mexicana de Derecho Bursatil y los Mercados Financieros).

MAURICE S., Charles and Christopher R. Thomas, Managerial Economics, 1995, 5a. ed. (USA: Irwin).

RODRÍGUEZ DE CASTRO, J., Introducción al análisis de productos financieros derivados, 1997, 2a. ed. (México: Limusa).

ROSS, Stephen A., Radolph W. Westerfield y Jeffrey F. Jaffe, Finanzas Corporativas, 1997, 3a. ed. (Madrid: Mc Graw Hill).

RUBISTEIN, Mark, 1991, Exotic Options, Finance Working Paper #220 (California: University of California at Berkeley, Hass School of Business)

WILMOTT, Paul, Sam Howison and Jeff Dewynne, 1995, The Mathematics of Financial Derivates (New York: Cambridge University Press).

BLACK, Fischer, 1995, "Interest Rates as Options", The Journal of Finance Vol 7, 1371-1376pp.

BLACK Fisher. y M. Scholes, 1973, "The pricing of Options on Corporate Liabilities", Journal of Political Economy Vol. 81, 637-654pp.

ELTON and Gruber, "The Management of Bond Portfolios", Modern Portfolio Theory and Investment Analysis, 5a. ed.

ESTRELLA CARRERA, Ramiro Augusto, 1996, Administración de Riesgo de Tasa de Interés: Inmunización usando duración y convexidad (México: ITAM).

GRANT Dwight y Gautam Vora, 1999, "Analytical Implementation of the Ho and Lee Model for the Short Interest Rate" (Paper), 33pp.

HEATH, David, Robert Jarrow y Andrew Morton, 1990, "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A Discrete Time Approximation", Journal o Financial and Quantitative Analysis Vol 25, 419-440pp.

MERTON, R.C., 1973, "Theory of Rational Option Pricing", Bell Journal of Economics and Management Science Vol. 4, 141-183 pp.

RONN, Ehud I. 1987, "A new linear programmign approach to Bond Portfolio Management", Journal of Financial and Quantitative Analysis Vol 22. 439-466pp.

THOMAS, S. y Ho and SANG-BIN LEE, 1986,"Term Structure Movements and Interest Rates Contingent Claims Pricing", The Journal of Finance, Salomon Brothers Center Series, New York University, 1011-1029pp.

"Martingale Pricing", "The Binomial Pricing Model", Derivative Securities.

www.mexder.com.mx

www.bmv.com.mx