



# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"Valor en Riesgo y Pérdida Máxima:  
Medidas del Riesgo de Mercado"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

A C T U A R I O

P R E S E N T A:

RICARDO RONY REYES PINO



FACULTAD DE CIENCIAS  
UNAM

DIRECTOR DE TESIS:  
ACT. MARIA AURORA VALDES MICHELL



MÉXICO, D.F.

2004

FACULTAD DE CIENCIAS  
SECCION ESCOLAR



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

**DRA. MARÍA DE LOURDES ESTEVA PERALTA**  
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la  
Facultad de Ciencias  
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:  
"Valor en riesgo y pérdida máxima: medidas del  
riesgo de mercado"

realizado por Ricardo Romy Reyes Pino

con número de cuenta 09757654-5 , quien cubrió los créditos de la carrera de: Actuaría

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis  
Propietario

ACT. MARIA AURORA VALDES MICHELL

Propietario

ACT. HECTOR DE LA ROSA ELIZALDE

Propietario

ACT. MARINA CASTILLO GARDUÑO

Suplente

ACT. GABRIEL VLADIMIR VALENCIA BALTAZAR

Suplente

ACT. FELIPE ZAMORA RAMOS

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. JOSE ANTONIO RICHARDS DIAZCANEJAS

CONSEJO DEPARTAMENTAL  
DE  
MATEMÁTICAS

**DEDICATORIA:**

- A Dios Nuestro Señor por permitirme llegar a este momento en mi vida y compartirlo con las personas que más quiero.
- A Samara por todo tu apoyo y cariño. Espero contar con tu compañía toda mi vida.
- A las razones de mi felicidad, Karen y Ricardo.
- A mi mamá por su constante guía a lo largo del camino.

## INDICE

### INTRODUCCIÓN

### OBJETIVO

<b>CAPITULO I.....</b>	<b>8</b>
1.1 DEFINICIONES Y SUPUESTOS.....	8
1.2 REVISIÓN DE TÉCNICAS DE MEDICIÓN DE RIESGOS.....	12
<b>CAPITULO II.....</b>	<b>15</b>
2.1 DISTRIBUCIÓN DE LOS FACTORES DE RIESGOS.....	15
2.2 VALOR EN RIESGO (VAR).....	19
2.2.1 <i>Concepto de VaR</i> .....	19
2.2.2 <i>Valor en riesgo para portafolios lineales</i> .....	21
2.2.3 <i>Valor en riesgo para portafolios cuadráticos</i> .....	22
<b>CAPITULO III.....</b>	<b>25</b>
3.1 FUNDAMENTOS DE MAXIMUN LOSS(ML).....	25
3.2 REGIÓN DE CONFIANZA.....	27
3.3 VALORES O RENDIMIENTOS RELATIVOS.....	29
3.4 ML PARA PORTAFOLIOS LINEALES.....	31
3.5 ML PARA PORTAFOLIOS CUADRÁTICOS.....	33
3.6 EL ALGORITMO LEVENBERG-MARQUARDT.....	35
3.7 RELACIÓN ENTRE EL VAR Y ML.....	37
<b>CAPITULO IV.....</b>	<b>39</b>
4.1 BACK-TESTING.....	39
4.2 DIFICULTADES DEL BACK-TESTING.....	40
4.3 “BACK-TESTING” REGULATORIO.....	42
4.4 MÉTODOS ESTADÍSTICOS ALTERNATIVOS PARA “BACK-TESTING”.....	43
4.4.1 <i>Verificación basada en el primer fracaso</i> .....	44
4.4.2 <i>Verificación basada en la proporción de fracasos</i> .....	47
4.4.3 <i>Verificación basada en la Simulación Histórica</i> .....	50
<b>CONCLUSIONES.....</b>	<b>54</b>
<b>APENDICE I.....</b>	<b>56</b>
NOCIONES DE CÁLCULO ESTOCÁSTICO.....	56
<b>APENDICE II.....</b>	<b>59</b>
ELEMENTOS DE ÁLGEBRA LINEAL.....	59
<b>REFERENCIA BIBLIOGRAFICA.....</b>	<b>61</b>

## INTRODUCCIÓN

En un mundo complejo y de constantes cambios, es difícil identificar escenarios de estabilidad en las distintas economías mundiales, y más aun que los mismos se prolonguen por un periodo de tiempo significativo. La cantidad de información y la rapidez con la que ésta se transmite, conduce a que los mercados financieros se encuentren en un constante perfeccionamiento (por asignar un nombre). Esto nos encamina a la globalización y obliga a que las instituciones financieras y las nos financieras, mejoren la forma en como llevan a cabo sus operaciones y/o producción. Es por ello que resulta esencial entender las implicaciones de una alta variabilidad (volatilidad) en la variables de los mercados financieros.

El riesgo de mercado también llamado en ocasiones riesgo de precio, denota la incertidumbre originada por la propia volatilidad del mercado, es decir la posibilidad de “perder dinero” debido a los cambios de los precios de los instrumentos financieros en el mercado.

Después de los grandes quebrantos financieros que se han observado, las autoridades supervisoras tanto internacionales como nacionales han establecido requerimientos regulatorios mínimos en lo que a administración de riesgos compete. El objetivo primordial de las autoridades es asegurar que las diversas instituciones financieras cuenten con el respaldo económico (capital) suficiente para responder a cualquier pérdida económica inesperada.

En 1988 el Comité de Basilea<sup>1</sup> en su papel de supervisor bancario, el cual fue concebido bajo el patrocinio del Banco Internacional de Liquidaciones (BIS), creó el documento “Internacional Convergente of Capital Measurement and Capital Standards<sup>2</sup>”. Este documento es conocido como el “Acuerdo de Basilea” y establece un mínimo de procedimientos a seguir

<sup>1</sup> El sitio web de este organismo se puede consultar en: <http://www.bis.org/bcbs/index.htm>.

<sup>2</sup> Este documento puede ser consultado en formato PDF en la siguiente dirección web: <http://www.bis.org/publ/bcbs04A.pdf>

para calcular los requerimientos de capital en función de la exposición el riesgo de crédito de las instituciones.

Posteriormente, el aumento en la importancia de los mercados de acciones, el creciente volumen de productos derivados y el decreciente margen de utilidades registradas por las instituciones, forzó a los bancos a extender sus actividades de Trading y de esta forma a estar expuestos a nuevos niveles de riesgo financiero. El Comité de Basilea reaccionó a este hecho con la emisión en 1993 de los requerimientos adicionales en materia de administración de riesgo de mercado, cuyo objetivo principal es la implantación y explicación de una técnica estandarizada para la medición del riesgo de mercado, también conocida como “Metodología de Bloques”.

En este punto cabe mencionar, que un análisis profundo de las causas por las que se han presentado los diversos quebrantos financieros, nos indican claramente que la falta de controles operativo han originado grandes exposiciones al riesgo de mercado. Actualmente la medición y control del riesgo operativo se encuentra en un proceso de desarrollo e implementación. A nivel local, la Comisión Nacional Bancaria y de Valores está por autorizar la nueva circular 1480, en la cual se pueden identificar requerimientos específicos sobre la administración del riesgo operativo.

Regresando a la “Metodología de Bloques”, ésta se basa en un conjunto de simples reglas y fórmulas, en donde se define al requerimiento de capital por riesgo de mercado como una suma de montos segmentados por los siguientes factores:

- Riesgo de tasa de interés por cada divisa.
- Riesgos de físicos y/o mercancías.
- Riesgo Accionario.
- Riesgo de tipo de cambio para todas las divisas.

El propósito de dicha política fue severamente criticado por la banca, argumentando que dicha metodología no marca diferencia entre los niveles de riesgos para los distintos activos de la institución, así como por no considerar las correlaciones de riesgos entre los mismos activos; lo cual conducía a una sobrestimación del riesgo total. No obstante, esta metodología se convirtió en un elemento de la versión final del documento

“Amendment to the Capital accord to incorporate market risk<sup>3</sup>”, emitido en el año de 1996.

De igual forma, la creciente competencia entre las instituciones financieras, además de la gran presión por parte de las agencias calificadoras, así como de las entidades regulatorias, originan la necesidad de obtener técnicas de medición de riesgos cada vez mas sofisticadas, cuyo objetivo principal para las instituciones es disminuir los requerimientos de capital. Además, la posibilidad de estimar una utilidad esperada considerando en su cálculo la exposición el riesgo, nos proporciona una herramienta de análisis para proponer una adecuada estrategia de administración y de concentración de activos.

Como resultado de los diálogos entre el Comité de Basilea y las Instituciones Bancarias, se tomo a la medida de riesgo “VaR<sup>4</sup>” (Valor en Riesgo) como una medida de riesgo aceptada en el documento emitido en 1996. Al principio de los años 90’s, la operación de instrumentos derivados aumento drásticamente, dando como resultado un incremento en el número de portafolios mucho más complicados a administrar. Es por ello que de igual forma, en las políticas y procedimientos emitidas en 1996, se puede ubicar el uso de más de una medida de riesgo y en algunos casos la combinación de las mismas.

La metodología de Pérdida Máxima (ML por sus siglas en inglés), que se presenta en este trabajo, ha sido desarrolla por especialistas en el ramo, entre los que podemos mencionar al Doctor Gerald Studer colaborador del “SWISS FEDERAL INSTITUTE OF THECHNOLOGY” así como de “RiskLab SWISSLAND”. Su trabajo tiene como objetivo principal el proveer de nueva información y herramientas a los administradores de portafolios de las diversas instituciones financieras. Puede pensarse en esta metodología como un camino para identificar los “agujeros negros” de un portafolios bajo las condiciones *normales* de mercado, tomando en consideración en todo momento la correlaciones existente entre los distintos factores de riesgo. En su forma básica, el método de Pérdida Máxima permite la adecuada administración de riesgos a través de la identificación de las fuentes de los mismos, y de esta forma contar con la capacidad de determinar operaciones con fines de reducción de riesgo. Algunas aplicaciones mas sofisticadas de esta metodología tiene como objetivo

<sup>3</sup> Para su consulta dirigirse a : <http://www.bis.org/publ/bcbs24.pdf>

<sup>4</sup> Sección 2.2 del presente trabajo.



examinar el desarrollo dinámico de los factores de riesgos y de esta forma anticipar las características de riesgos para los portafolios de las instituciones financieras

## **OBJETIVO**

El objetivo del presente trabajo es describir, analizar y comparar las medidas de riesgo de mercado “Valor en Riesgo” y “Pérdida Máxima”.

La forma en como se cubre dicho objetivo se presenta a continuación:

En el capítulo uno se establecen los elementos teóricos sobre los cuales han sido construidas las actuales medidas de riesgo de mercado. Adicionalmente se presenta una descripción general de los principales métodos utilizados para medir el riesgo de mercado de un portafolio.

El segundo capítulo inicia con un apartado sobre la distribución de los factores de riesgo, este apartado proporciona la herramienta necesaria para definir la medida de riesgo “Valor en Riesgo”. Los mismos elementos introducidos en este apartado son utilizados en el desarrollo del capítulo 3. Posteriormente, en el capítulo 2 se desarrolla a detalle el modelo de “Valor en Riesgo”, aplicándola a portafolios lineales y cuadráticos.

El capítulo 3 esta constituido por el desarrollo y obtención de la “Pérdida Máxima” para un portafolio. De igual forma esta medida es aplicada a los portafolios lineales y cuadráticos. Este capítulo finaliza con la comparación sobre las medidas obtenidas por “Valor en Riesgo” y “Pérdida Máxima”.

Para finalizar, en el capítulo 4 se presentan algunas de las técnicas más utilizadas en la calibración de los modelos de “Valor en Riesgo”. Este capítulo permite tener una visión global sobre los errores en la medición del riesgo de mercado, en su mayoría originados por los supuestos implícitos en los mismos modelos.

## CAPITULO I

### 1.1 Definiciones y Supuestos.

Como debe ser nuestra idea, una de las herramientas claves para una adecuada administración del riesgo de mercado, es la apropiada medición del mismo. No es posible utilizar el término “correcta medición” dado que la idea principal del trabajo es mostrar la posibilidad de desarrollar cada vez nuevos modelos que nos permitan llevar a cabo una mejor estimación de nuestro riesgo de precio. Una definición de riesgo de mercado puede ser la siguiente:

*El posible cambio o pérdida en el valor de un portafolio como consecuencia de que las tasas de mercado sufran cambios en direcciones adversas*

Es por ello que cuando nos referimos a medir el riesgo de mercado, hablamos de analizar el efecto conjunto que sufre el valor del portafolio derivado de las variaciones en las tasas mercado. Es importante mencionar que por tasas de mercado debemos entender todas aquellas variables involucradas en la valuación del portafolio como: precios de físicos o mercancías, tipos de cambio, índices accionarios, tasas de interés, etc.

El conjunto de teorías que se plantea describir en el presente trabajo, suponen de forma general que las tasas de mercado pueden ser representadas como una serie de procesos estocásticos  $(X_t^i)_{t \geq 0}, i = 1, \dots, T$ , los cuales se encuentran definidos sobre un espacio de probabilidad  $(\Omega, A, P)$ . Donde  $\Omega$  representa el conjunto de los posibles valores para las tasas de mercado en el instante de tiempo  $T$ ,  $A$  representa el sigma-álgebra asociada a  $\Omega$  y  $P$  es nuestra medida de probabilidad. Nuestro análisis se enfocará en un intervalo de tiempo  $[t, T]$ , donde  $t=0$  representa el instante inicial y  $T$  representa el horizonte de tiempo sobre el cual llevaremos a cabo nuestras observaciones. A su vez  $T$  es conocido como tiempo de liquidación. El término riesgo debe entenderse como la posibilidad de que el rendimiento “esperado” de cierto factor de riesgos difiera del rendimiento observado por el mismo en el periodo de tiempo  $[t, T]$ . Por lo tanto, nosotros compararemos los valores de los

procesos  $(X_t^i)_{t \geq 0}, i = 1, \dots, T$  contra los valores estimados para los mismos. De esta forma llegamos a la siguiente definición:

**Definición 1.1.-**  $\varphi_i = X_T^i$  es la variable aleatoria que representa el valor observado para la tasa de mercado  $i, i = 1, \dots, M$  en el instante de tiempo  $T$ . Mientras que le valor esperado para esta variable se denota por  $\bar{\varphi}_i = E(\varphi_i)$  y la diferencia  $w_i = \varphi_i - \bar{\varphi}_i$  es llamada **factor de riesgo**.

Entonces el vector  $w = (w_1, w_2, \dots, w_M)^T$  representa las desviaciones observadas entre las tasas de mercado estimadas y las observaciones propias del mercado en el instante de tiempo  $T$ . De la definición anterior podemos entender a  $w$  como variable aleatoria  $w: \Omega \rightarrow R^M$  con el vector cero como vector esperanza<sup>5</sup>. Es importante señalar que aunque la función  $w$  tiene su dominio en  $\Omega$ , eso no implica que el vector  $w$  es un elemento del mismo. La distribución de la función  $w$  es a su vez una función de distribución de los procesos estocásticos  $(X_t^i)_{t \geq 0}, i = 1, \dots, T$ .

Como hemos observado la función  $w$  es en vector aleatorio y sus elementos se denotan por abuso de notación como  $w$ . A cada uno de estos elementos se les llama "escenario" y el conjunto de los posibles escenarios se define como  $\vartheta = \{w \in R^M \mid \exists X_T : w = X_T - E(X_T)\}$  mientras que para un subconjunto  $Y \subseteq R^M$  denotamos por  $P(Y) \equiv P(\{w \mid w \in Y\})$  a la probabilidad inducida por la probabilidad del espacio  $(\Omega, A, P)$ .

**Supuesto 1.2.-** El conjunto  $\vartheta$  de los posibles escenarios es un subconjunto conexo en  $R^M$  tal que  $P(\vartheta) = 1$  y además contiene al escenario  $w = \underline{0}$ .

Definamos  $u(\varphi)$  como la función que determina el valor del portafolios en el instante de tiempo  $T$  para cada posible vector  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_M)$ . Dado que los factores de riesgos  $w$  denotan la diferencia entre los valor observados y los valores estimados para las tasas de mercado, entonces se cumple que :

$$\varphi = \bar{\varphi} + w$$

---

<sup>5</sup> Referirse a la sección 2.1

**Definición 1.3.-** Sea  $u(\varphi)$  la función del valor del portafolio, entonces la función  $v(w)$  llamada de Ganancias y Pérdidas (P&L por sus siglas en ingles) se define como sigue:

$$v(w) = u(\bar{\varphi} + w) - u(\bar{\varphi})$$

Derivado de las definiciones tenemos que :

$$v(\underline{0}) = u(\bar{\varphi} + \underline{0}) - u(\bar{\varphi}) = 0$$

**Definición 1.4.-** El conjunto de todas las funciones P&L es el conjunto  $\zeta = \{v : \vartheta \rightarrow R \mid v(\underline{0}) = 0\}$

**Supuesto 1.5.-** Toda función  $v$  de P&L, es una función continua y la cual toma el valor de cero sobre cualquier subconjunto abierto con  $Y \subset \vartheta$  que cumpla  $P(Y) = 0$ .

Con el fin de clasificar los posibles portafolios asociados a cada institución, a continuación se muestra una agrupación de los mismos, separándolos en portafolios lineales y portafolios cuadráticos.

**Definición 1.6.-** El conjunto de los portafolios “lineales” esta dado por:

$$\zeta_l = \left\{ v_l \in \zeta \mid v_l(w) = a^T w, a \in R^M \right\}$$

Mientras que el conjunto de los portafolios cuadráticos se encuentra dado por:

$$\zeta_q = \left\{ v_q \in \zeta \mid v_q(w) = g^T w + \frac{1}{2} w^T G w, G = G^T \in R^{M \times M}, g \in R^M \right\}$$

Una forma en la que se puede obtener una función P&L es haciendo uso de las medidas de sensibilidad de los instrumentos financieros, tales como los

son  $\delta$  (Delta) y  $\Gamma$  (Gamma), las cuales a continuación se indica como obtenerlas.

**Definición 1.7.-**  $\delta \in R^M$  se denomina la medida de sensibilidad de primer orden para el valor del portafolio y se obtiene de la siguiente forma:

$$\delta_i = \left. \frac{\partial u(\varphi)}{\partial \varphi_i} \right|_{\varphi} \quad i = 1, 2, \dots, M$$

**Definición 1.8.-**  $\Gamma \in R^{M \times M}$  se denomina la medida de sensibilidad de segundo orden para el valor del portafolio además de resultar una matriz simétrica y se obtiene como sigue:

$$(\Gamma)_{i,j} = \left. \frac{\partial^2 u(\varphi)}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j} \right|_{\varphi} \quad i, j = 1, 2, \dots, M.$$

Finalmente, **una medida de riesgo**, es una función  $\rho$  la cual asigna a un portafolio y en particular a la función  $v$  de P&L un número real  $\rho(v(w))$  que se debe interpretar como el riesgo del portafolio. En donde la posibilidad de perder dinero es expresada por valores negativos de la función  $\rho$ .

Esta definición es aplicable a cualquier tipo de portafolio, sea lineal o cuadrático.

## 1.2 Revisión de Técnicas de Medición de Riesgos

Existen dos técnicas fundamentales de medición de riesgo, las cuales se mencionan a continuación:

### *Métodos basados en correlación.*

Estos métodos consideran la correlación que existe entre los distintos factores del riesgos y de esta forma producen un efecto estadístico sobre el valor del portafolios (también llamado efecto de agregación). La tabla siguiente muestra una clasificación de los métodos más comunes basados en correlación.

	<i>Composicion del Portafolio: Lineal</i>	<i>Composicion del Portafolio: No-Lineal</i>
<i>Tasas de Mercado: Variaciones estables Modelo Estocastico</i>	<i>VaR Delta-Normal</i>	<i>VaR Delta-Gama Simulacion Monte-Carlo Optimizacion ML</i>
<i>Tasas de Mercado. Variaciones no estables</i>	—	<i>Simulacion basada en escenarios</i>

### **Métodos más comunes basados en correlación**

- Si los rendimientos en las tasas de mercado, ya sean estos absolutos o relativo respecto a dos puntos consecutivos en el tiempo, no se presentan estables, entonces los factores de riesgos no se pueden modelar parametricamente y en este caso es necesario aplicar la simulación basada en escenarios históricos.
- Si nos encontramos en el caso de un portafolio lineal o bien que se encuentre formado solo por instrumentos lineales, y además si los factores de riesgo poseen una distribución normal multivariada, entonces el método Delta-Normal resulta ser apropiado. Este método es conocido también por método de Risk-Metrics<sup>6</sup>.

<sup>6</sup> Referencia Bibliográfica (v)

- Existen varias aproximaciones que intentan incorporar el riesgo Gamma en los cálculos del VaR. Una de ellas es el método Delta-Gamma de Wilson<sup>7</sup>, así como otras desarrolladas para casos particulares. Algunas de estas aproximaciones consisten en “linealizar” los instrumentos no lineales, a través de incorporar la convexidad de los mismos en el coeficiente lineal, y de esta forma aplicar el método Delta-Normal. Otra alternativa es utilizar la aproximación de Schaefer<sup>8</sup> que esta basada en una combinación de distribuciones ji-cuadradas para estimar el VaR.
- La simulación paramétrica Monte-Carlo puede ser utilizada para la estimación del VaR para portafolios no-lineales. Desafortunadamente, las técnicas de simulación demandan tiempo. Para ello han surgido otras simulaciones llamadas “downside-approximations” propuesta por Frauendorfer y Konigsperger<sup>9</sup> las cuales proporcionan considerable aceleración del proceso.
- La optimización de la Pérdida Máxima (Maximun Loss) no comprende simulaciones y esta enfocada a calcular el riesgo de portafolios no lineales. Sobre este método se desarrolla en capítulo numero tres del presente trabajo.

---

<sup>7</sup> Referencia Bibliográfica (iv)

<sup>8</sup> Referencia Bibliográfica (vi)

<sup>9</sup> Referencia Bibliográfica (viii)



### ***Métodos que no se encuentran basados en la correlación.***

Estos métodos ignoran la correlación estadística existente entre los distintos factores de riesgos, por lo cual no se observa un efecto de agregación, los dos métodos que se ubican en este grupo son:

- Método del Factor.
- Stress-Testing.

En particular, el método de Stress-Testing implica observar el impacto que tendría la realización de escenarios extremos o de poca probabilidad en el valor del portafolio. Por si solo, este método no representa una medida de riesgo, se puede interpretar como un método comparativo el cual debe ser utilizado de manera conjunta con otras herramientas de análisis tales como:

- Reevaluación del portafolio.
- Función P&L marginada a subclases de instrumentos.
- Griegas o medidas de sensibilidad de los instrumentos financieros ( $\partial, \Gamma, \Theta, \Pi, etc.$ )
- Duración.
- Método Delta-Normal.
- Flujos de efectivo.

El calculo y análisis de cada una de estas herramientas debe realizarse para cada escenarios de stress, de esta forma a través de comparar los resultados obtenidos para cado uno de ellos se puede lograr una mejor comprensión de la calidad y complejidad de un portafolio, y en particular este análisis permite la identificación de condiciones de riesgo en el mercado.

Sin embargo la dificultad de este método se presenta en la correcta definición de los escenarios, es por ello que se requiere un adecuado conocimiento de la estructura del portafolio y del mercado, a fin de diseñar el menor numero de escenarios “razonables” los cuales deberían cubrir todas las eventualidades del mercado.

## CAPITULO II

### 2.1 Distribución de los Factores de Riesgos.

Para los propósitos de medición de riesgo, es muy común suponer en la práctica que los factores de riesgo se distribuyen de manera normal. En esta sección intentaremos presentar un esbozo del respaldo matemático existente para llevar a cabo esta suposición. Es importante mencionar que para un mejor detalle y comprensión del tema se sugiere dirigirse a la bibliografía adecuada<sup>10</sup> en la cual se puede encontrar estos temas con mayor detalle.

Sea  $(X_t)_{t \geq 0}$  el proceso estocástico que representa la evolución en el mercado del precio de una acción dada. De acuerdo con el supuesto generalmente aceptado en finanzas, este proceso puede ser descrito por medio de un movimiento Geométrico Browniano<sup>11</sup>, cuya ecuación es la siguiente:

$$dX_t = \mu_X X_t dt + \sigma_X X_t dB_t$$

En donde  $\mu_X$  representa una tasa de tendencia,  $\sigma_X$  representa la volatilidad de esa tendencia y  $(B_t)_{t \geq 0}$  es un movimiento Browniano. Ahora, si definimos y tomamos a  $X_0 = x_0$  entonces la ecuación anterior puede ser re-expresada como  $X_t = x_0 + \int_0^t \mu_X X_s ds + \int_0^t \sigma_X X_s dB_s$ . Entonces si aplicamos de manera estricta el lema de Itô<sup>12</sup> a la función  $g(X_t) = \log(X_t)$ , (decimos de manera estricta ya que esta función no es de clase  $C^2$ ) obtenemos la siguiente ecuación:

$$\log(X_t) = \log(X_0) + \int_0^t \frac{1}{X_s} dX_s - \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\sigma_X^2 X_s^2}{X_s^2} ds$$

<sup>10</sup> Referencia Bibliográfica (ii)

<sup>11</sup> Dirigirse al apéndice I

<sup>12</sup> Dirigirse al apéndice I

Utilizando nuestro supuesto de trayectoria para una acción y sustituyendo en la ecuación anterior obtenemos:

$$X_t = x_0 \exp\left(\left(\mu_x - \frac{\sigma_x^2}{2}\right)t + \sigma_x B_t\right)$$

Por medio de una sustitución se puede verificar que esta ecuación es solución de nuestro movimiento Geométrico Browniano. Cabe mencionar que con la herramienta adecuada, se puede demostrar que esta solución es única. De esta forma podemos observar que los log-rendimientos  $\log\left(\frac{X_t}{X_0}\right)$  o bien los rendimientos logarítmicos, se distribuyen normal con media  $\left(\mu_x - \frac{\sigma_x^2}{2}\right)$  y con varianza  $\sigma_x^2 t$ .

Se debe hacer notar que varios estudios empíricos han demostrado que la hipótesis de normalidad en los log-rendimientos es solo una mala aproximación de la realidad. Sin embargo, este supuesto es ampliamente usado en la práctica, y en su gran mayoría se debe al fácil y conocido manejo de la distribución normal.

De acuerdo a nuestra notación inicial, donde  $\varphi_i$  representa el valor del proceso estocástico al instante de tiempo  $T$  y donde  $\varphi_i^0$  es el valor del mismo pero en el instante de tiempo 0, entonces nuestra solución puede tomar la siguiente expresión:

$$\varphi_i = \varphi_i^0 \exp\left(\left(\mu_i - \frac{\sigma_i^2}{2}\right)T + \sigma_i B_T\right) \quad i = 1, 2, \dots, M$$

De donde se sigue que

$$\log\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_i^0}\right) = \left(\mu_i - \frac{\sigma_i^2}{2}\right)T + \sigma_i B_T \quad i = 1, 2, \dots, M$$

Si tomamos el primer término de la serie de Taylor alrededor de  $\varphi_i^0$  tenemos:

$$\begin{aligned} \log\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_i^0}\right) &= \log(\varphi_i^0 + (\varphi_i - \varphi_i^0)) - \log(\varphi_i^0) \\ &\approx \left[ \log(\varphi_i^0) + \frac{\varphi_i - \varphi_i^0}{\varphi_i^0} \right] - \log(\varphi_i^0) \\ &\approx \frac{\varphi_i - \varphi_i^0}{\varphi_i^0} \end{aligned}$$

Lo cual nos indica que  $\frac{\varphi_i - \varphi_i^0}{\varphi_i^0} \approx \left( \mu_i - \frac{\sigma_i^2}{2} \right) T + \sigma_i B_T$   $i = 1, 2, \dots, M$  y si aceptamos esta aproximación como una igualdad estricta, como veremos obtenemos factores de riesgo distribuidos normal.

**Teorema 2.1.-** Si  $\frac{\varphi_i - \varphi_i^0}{\varphi_i^0} = \left( \mu_i - \frac{\sigma_i^2}{2} \right) T + \sigma_i B_T$ , entonces se tiene que  $w_i \sim N(0, (\varphi_i^0 \sigma_i)^2 T)$

Demostración.- Dado que  $(B_t)_{t \geq 0}$  es un movimiento Browniano Estándar<sup>13</sup>, entonces se tiene que

$$\frac{\varphi_i - \varphi_i^0}{\varphi_i^0} \sim N\left(\left(\mu_i - \frac{\sigma_i^2}{2}\right) T, \sigma_i^2 T\right)$$

De esta forma obtenemos que  $\varphi_i \sim N\left(\varphi_i^0 \left(-1 + \left(\mu_i - \frac{\sigma_i^2}{2}\right) T\right), (\varphi_i^0 \sigma_i)^2 T\right)$ , lo anterior dado que  $\varphi_i^0$  es una constante. Ahora de acuerdo a nuestra definición de factor de riesgo  $w_i = \varphi_i - \bar{\varphi}_i$  donde  $\bar{\varphi}_i = E(\varphi_i)$ , entonces  $w_i \sim N(0, (\varphi_i^0 \sigma_i)^2 T)$

<sup>13</sup> Dirigirse al apéndice I

A continuación se introduce la correlación entre los factores de riesgo.

**Lema 2.2.-** Si  $Corr\left(\frac{\varphi_i - \varphi_i^0}{\varphi_i^0}, \frac{\varphi_j - \varphi_j^0}{\varphi_j^0}\right) = \rho_{i,j}$  entonces  $Corr(w_i, w_j) = \rho_{i,j}$

**Demostración.-** Como consecuencia de las propiedades de coeficiente de correlación tenemos:

$$\rho_{i,j} = Corr\left(\frac{\varphi_i - \varphi_i^0}{\varphi_i^0}, \frac{\varphi_j - \varphi_j^0}{\varphi_j^0}\right) = Corr(\varphi_i, \varphi_j) = Corr(\varphi_i - \bar{\varphi}_i, \varphi_j - \bar{\varphi}_j) = Corr(w_i, w_j)$$

**Corolario 2.3.-** Si  $Var\left(\frac{\varphi_i - \varphi_i^0}{\varphi_i^0}\right) = \sigma_i^2 T$  para  $i = 1, 2, \dots, M$ . y para  $Corr\left(\frac{\varphi_i - \varphi_i^0}{\varphi_i^0}, \frac{\varphi_j - \varphi_j^0}{\varphi_j^0}\right) = \rho_{i,j}$ , entonces  $w \sim N(0, \Sigma)$  y con los elementos de la matriz de covarianzas dados por  $(\Sigma)_{i,j} = \rho_{i,j} \varphi_i^0 \varphi_j^0 \sigma_i \sigma_j T$ .

**Demostración.-** Este corolario es consecuencia de los teoremas y lemas anteriores.

De esta forma hemos justificado nuestro siguiente supuesto:

**Supuesto 2.4.-** Los factores de riesgos  $w$  se distribuyen de manera normal multivariada con vector de medias el vector  $(0)$  y con matriz de covarianzas definida positiva  $(\Sigma)$ .

## 2.2 Valor en Riesgo (VaR)

El objetivo de este apartado es presentar dos de las técnicas de medición de riesgos como los son el método Delta-Normal y el método Delta-Gamma.

### 2.2.1 Concepto de VaR

El valor en riesgo (VaR) es definido por Beckstrom y Campbell<sup>14</sup> como

La pérdida esperada para un portafolio dado y la cual ocurrirá:

- Con una probabilidad  $\alpha$
- Sobre un intervalo de tiempo  $T$ .

En otras palabras el VaR nos indica el nivel o valor para el cual la función P&L tendrá el  $(1-\alpha)\%$  de las observaciones. Es claro que esta medida de riesgo depende fuertemente de la elección de los parámetros  $\alpha$  y  $T$ , lo cual a su vez es sujeto de controversia en la práctica. La longitud del periodo de tiempo  $T$  deberá reflejar entre otras cosas, el tiempo necesario para llevar a cabo la liquidación o cobertura del portafolio y debe estar en función del tipo de instrumentos que componen el portafolio, así como las características de los mercados en los que son negociados, además de la calidad crediticia del emisor, etc.

Por otra parte el nivel de confianza  $\alpha$  es usualmente definido como 95% o 99%, este último es el elegido por el Comité de Basilea. Sin embargo es importante hacer notar que los modelos de medición de riesgos mencionados dependen fuertemente de la estimación y/o predicción de la matriz de covarianzas, es por ello que los resultados variarán de acuerdo a los modelos utilizados para obtener estos valores.

Ahora considerando que  $w$  es un vector aleatorio, con la siguiente definición:

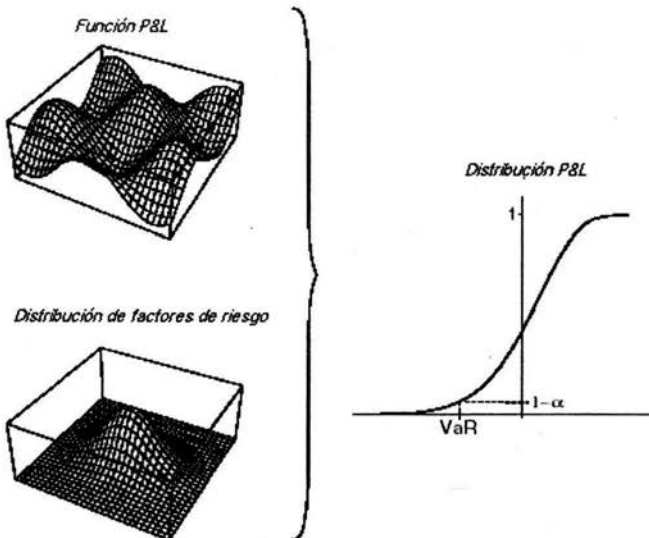
---

<sup>14</sup> Referencia Bibliográfica (x).

**Definición 2.5.-** Para una continua y estrictamente creciente función de distribución de P&L, el *Valor en Riesgo* para un nivel de confianza  $\alpha$ , es el valor de “pérdida”  $VaR(\alpha)$  para el cual se cumple que:

$$P(\{w \in \mathcal{V} | v(w) \leq VaR(\alpha)\}) = 1 - \alpha$$

Como podemos observar  $v(w)$  es a su vez una variable aleatoria, entonces el  $VaR(\alpha)$  corresponde al cuantil  $(1-\alpha)$  de su función de distribución. Esta definición concuerda con la forma en como el VaR es calculado: Primero, se obtiene la función de distribución de la variable aleatoria  $v(w)$  a partir de la distribución de los factores de riesgo, entonces se obtiene el cuantil  $(1-\alpha)$  de su función de distribución obteniendo de esta forma el VaR.



### Interpretación y construcción del VaR

## 2.2.2 Valor en riesgo para portafolios lineales

Como veremos a continuación el Valor en Riesgo de los portafolios lineales puede ser calculado de manera analítica.

**Lema 2.6.-** Sea  $v_l(w) = a^T w$  la representación de un portafolio lineal con los factores de riesgo distribuidos  $w \sim N(0, \Sigma)$ , entonces  $v_l(w) \sim N(0, a^T \Sigma a)$

Demostración.- En primer lugar tenemos que cualquier combinación lineal de variables distribuidas normal se distribuye a su vez normal. Ahora tenemos que  $E(a^T w) = a^T E(w)$  y además  $Cov(a^T w) = E[(a^T w)(a^T w)^T] = a^T E[(w)(w^T)] = a^T Cov(w)a$ , con lo que se demuestra el lema.

Para finalizar se obtiene la expresión analítica del VaR.

**Teorema 2.7.-** El Valor en Riesgo de un portafolio lineal con representación  $v_l(w) = a^T w$  es igual a  $VaR(\alpha) = -z_\alpha \sqrt{a^T \Sigma a}$ , donde  $-z_\alpha$  representa el  $\alpha$ -cuantil de la distribución normal estandar.

Demostración.- Sea  $Y \sim N(0, \sigma^2)$ , entonces  $\frac{Y}{\sigma} \sim N(0, 1)$  y donde  $(-z_\alpha \sigma)$  es el  $(1-\alpha)$ -cuantil de  $Y$



### 2.2.3 Valor en riesgo para portafolios cuadráticos

Para los portafolios no-lineales no existe una expresión analítica del Valor en Riesgo. Sin embargo, para un portafolio cuadrático  $v_q(w) = \frac{1}{2} w^T G w + g^T w$  es posible calcular el valor en riesgo de una manera numérica, como se describe a continuación:

**Definición 2.8.-** Sea  $\Sigma = U^T U$  la descomposición de Cholesky<sup>15</sup> para la matriz de covarianzas y sea  $O$  la matriz ortonormal de los egeenvectores de la matriz  $UGU^T$  (esta matriz existe ya que la matriz  $UGU^T$  es simétrica). Entonces se define al sistema transformado como sigue:

$$\tilde{v}_q(\tilde{w}) = \frac{1}{2} \tilde{w}^T \tilde{G} \tilde{w} + \tilde{g}^T \tilde{w}$$

Donde

$$\begin{aligned}\tilde{G} &= OUGU^T O^T, \\ \tilde{g} &= O Ug, \quad y \\ w &= O U^{-T} \tilde{w}\end{aligned}$$

**Lema 2.9.-** La matriz  $\tilde{G}$  es una matriz diagonal

**Demostración.-** Dado que la matriz  $O$  es la matriz de los egeenvectores de  $UGU^T$ , esto implica que  $UGU^T o_i = \lambda_i o_i$  donde  $o_i$  es el  $i$ -ésimo egeenvector de  $UGU^T$  y  $\lambda_i$  es el correspondiente egeinvalor. Entonces el hecho de que la matriz  $O$  sea ortonormal nos implica que la matriz  $\tilde{G}$  sea la matriz diagonal formada por todos los egeinvalores de  $UGU^T$ .

**Lema 2.10.-** Los factores de riesgos transformados  $\tilde{w}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, M$ , se distribuyen como variables normal estándar.

**Demostración.-** Tenemos que  $\tilde{w}$  es una combinación lineal de variables distribuidas normal, por lo que a su vez se distribuye normal con parámetros:  $E(\tilde{w}) = 0$  y  $Cov(\tilde{w}) = E(\tilde{w} \tilde{w}^T) = O U^{-T} \Sigma U^{-1} O^T = I$

<sup>15</sup> Dirigirse al apéndice II

**Lema 2.11.-** Las funciones  $v_q(w)$  y  $\tilde{v}_q(\tilde{w})$  son idénticas, es decir que  $v_q(w) = \tilde{v}_q(\tilde{w})$  con  $\tilde{w} = OU^{-T}w$

**Demostración.-** para probar esto bastara con hacer las siguientes operaciones, recordando que  $O^{-1} = O^T$  :

$$\begin{aligned}\tilde{g}^T \tilde{w} &= g^T U^T O^T O U^{-T} w = g^T w \quad y \\ \tilde{w}^T \tilde{G} \tilde{w} &= w^T U^{-1} O^T (OUGU^T O^T) O U^{-T} w = w^T G w\end{aligned}$$

De esta forma los factores de riesgo originales han sido transformados en variables independientes con distribución  $N(0,1)$  y de igual forma la nueva función cuadrática  $\tilde{v}_q(\tilde{w})$  proporciona los mismos valores que la función original  $v_q(w)$ . Ahora observemos como la función  $\tilde{v}_q(\tilde{w})$  puede a su vez ser separada en una suma de términos exclusivamente cuadráticos y en sumandos solamente lineales.

**Definición 2.12.-** Sea  $I = \{i \in \{1,2,\dots,M\} | (\tilde{G})_{i,i} \neq 0\}$  y  $J = \{i \in \{1,2,\dots,M\} | (\tilde{G})_{i,i} = 0\}$ .

Definimos  $\tilde{w}_i = \tilde{w}_i + \frac{\tilde{g}_i}{(\tilde{G})_{i,i}}$ ,  $i \in I$  y  $\tilde{w}_i = \tilde{w}_i$ ,  $i \in J$ , de esta forma la función P&L separada  $\tilde{v}_q(\tilde{w})$  se define como:

$$\tilde{v}_q(\tilde{w}) = \sum_{i \in I} \frac{1}{2} (\tilde{G})_{i,i} \tilde{w}_i^2 + \sum_{i \in J} \tilde{g}_i \tilde{w}_i - \sum_{i \in I} \frac{\tilde{g}_i^2}{2(\tilde{G})_{i,i}}$$

**Teorema 2.13.-** Las variables aleatorias  $\tilde{w}_i$ ,  $i = 1,2,\dots,M$ . son independientes y las funciones  $\tilde{v}_q(\tilde{w})$  y  $\tilde{v}_q(\tilde{w})$  son idénticas.

**Demostración.-** La independendencia de las nuevas variable se deriva del hecho de que cada  $\tilde{w}_i$  es una translación de una variable  $\tilde{w}_i$  las cuales son a su vez mutuamente independientes.

Además se tiene que:

$$\frac{1}{2}(\tilde{G})_{i,i} \tilde{w}_i^2 - \frac{\tilde{g}_i^2}{2(\tilde{G})_{i,i}} = \frac{1}{2}(\tilde{G})_{i,i} \tilde{w}_i^2 + \tilde{g}_i \tilde{w}_i \quad \text{para } i \in I \quad \text{y}$$

$$\tilde{g}_i \tilde{w}_i = \tilde{g}_i \tilde{w}_i \quad \text{para } i \in J$$

Lo anterior muestra que las funciones  $\tilde{v}_q(\tilde{w})$  y  $\tilde{v}_q(\tilde{w})$  son idénticas.

Como resultado tenemos que  $\tilde{v}_q(\tilde{w})$  es una combinación lineal de  $M$  variables aleatorias independientes, en donde para  $i \in J$ , los factores de riesgos separados  $\tilde{w}_i$  son variables distribuidas normal estándar, y para  $i \in I$ , las cantidades  $\tilde{w}_i^2$  son variables  $\chi^2$  no-centradas con un grado de libertad y con parámetro (no-centralidad)  $\left(\frac{\tilde{g}_i}{2(\tilde{G})_{i,i}}\right)^2$ .

Entonces para calcular el VaR, Rounivez (1997) utilizó el hecho de que la función generadora de momentos para una combinación lineal de variables aleatorias independientes es el producto de las funciones generadoras de momentos individuales. Después utilizando el teorema de inversión de Davies (1973) podemos calcular numéricamente la probabilidad para un valor factible  $z$ , es decir podemos obtener la  $P(\tilde{v}_q(\tilde{w}) \leq z)$ , posteriormente, dado que el VaR es el cuantil  $1-\alpha$  de la función de distribución P&L y mediante una técnica de bi-seccionar se puede obtener el valor que converge a  $z$  de tal forma que  $P(\tilde{v}_q(\tilde{w}) \leq z) = 1-\alpha$ .

## CAPITULO III

En este capítulo se muestran los fundamentos de la medida de riesgo “Pérdida Máxima” (ML por sus siglas en inglés). ML es principalmente una metodología que nos permite determinar el peor escenario posible bajo condiciones normales de los factores de riesgo, considerando en todo momento las correlaciones existentes entre los mismos.

### 3.1 Fundamentos de Maximun Loss(ML).

La pérdida máxima(ML) puede ocurrir :

- Durante un periodo de liquidación  $T$ .
- Y si los factores de riesgos se encuentran restringidos a un conjunto dado  $\Psi \subseteq O$

Donde  $\Psi$  es un conjunto cerrado que contiene el escenario  $w=0$  y tiene un nivel de confianza  $P(\Psi)=\alpha$ . Esta definición de ML posee algunas similitudes a la definición de VaR. Sin embargo, existe una importante diferencia: mientras que para obtener el VaR la función de distribución de P&L debe ser conocida (lo cual es una requisito crucial bajo cualquier método para la obtención de VaR). ML esta directamente definida sobre el conjunto de los posibles escenarios  $O$ . La definición matemática de Pérdida Máxima(ML) es :

**Definición 3.1.-** Sea  $v(w)$  la función P&L de un portafolio dado, entonces: la pérdida máxima es la solución el siguiente problema de minimización

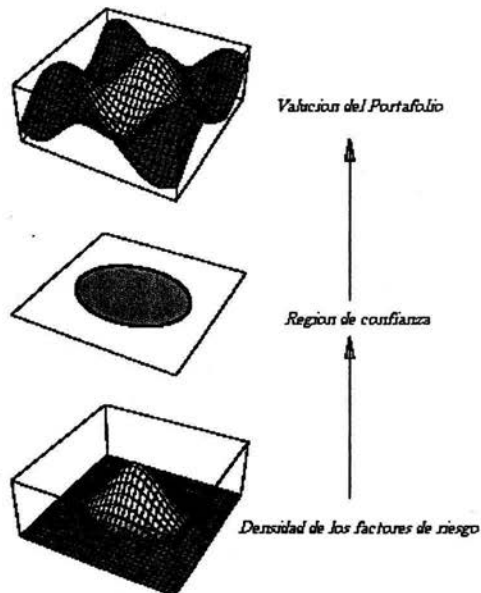
$$ML(\alpha) = \min v(w) \\ \text{s.a. } w \in \Psi$$

Donde  $\Psi$  es una subconjunto cerrado de  $O$  el cual debe satisfacer las condiciones,  $0 \in \Psi$  y  $P(\Psi)=\alpha$ .

Para un portafolio dado tenemos que el VaR depende de dos parámetros que son el periodo de liquidación  $T$  y el nivel de confianza  $\alpha$ . Mientras que ML tiene un grado más de libertad, llamado “región de confianza”  $\Psi$ , que puede

ser cualquier subconjunto cerrado en  $O$  que cumple las condiciones arriba mencionadas.

La diferencia más importante entre las técnicas de medición antes vistas es que el proceso de solución de ML no solo nos proporciona una medida de riesgo, si no que nos determina el peor escenario  $w^*$ . Este escenario nos indica cual es la combinación de los factores de riesgo que representa mayor peligro para el portafolio y lo cual es un elemento básico para cualquier administración integral de riesgos. Lo anterior de tan solo el hecho que el conocimiento de este vector  $w^*$  permite reducir transacciones de riesgo y estimar el riesgo incremental para una sola operación de trading.



### Modelando la Pérdida Máxima

### 3.2 Región de Confianza

De acuerdo a nuestro supuesto sobre las distribución de los factores de riesgo, entonces existe una forma particular de obtener la región de confianza.

**Lema 3.2.-** Para factores de riesgos distribuidos de manera normal multivariada  $w \sim N(0, \Sigma)$ , entonces la cantidad  $w^T \Sigma^{-1} w$  se distribuye  $\chi^2$  con  $M$  grados de libertad.

Demostración.- Sea  $U$  la descomposición de Cholesky<sup>16</sup> de  $\Sigma = U^T U$ , entonces

$$Cov(U^{-T} w) = E[(U^{-T} w)^T (U^{-T} w)] = U^{-T} Cov(w) U^{-1} = I$$

Por lo que  $(U^{-T} w) \sim N(0, I)$  y por lo tanto  $w^T \Sigma^{-1} w = (U^{-T} w)^T (U^{-T} w)$  es la suma cuadrada de  $M$  variables independientes distribuidas normal estándar.

**Teorema 3.3.-** Si  $w \sim N(0, \Sigma)$ , entonces la elección de  $\Psi = \{w \in R^M \mid w^T \Sigma^{-1} w \leq c_\alpha\}$  es una región de confianza factible, donde  $c_\alpha$  es el  $\alpha$ -cuantil de una distribución  $\chi^2$  con  $M$  grados de libertad.

Demostración.-  $\Psi$  es un conjunto cerrado que contiene el escenario  $w = 0$  y tiene una probabilidad  $P(\Psi) = \alpha$

Geoméricamente, la elección de esta región, nos define una  $M$ -dimensional elipsoide; la cual se encuentra centrada en el origen. Pero además de ser simétrica, esta región tiene otra importante característica.

**Corolario 3.4.-** Si  $w \sim N(0, \Sigma)$  entonces  $\Psi = \{w \in R^M \mid w^T \Sigma^{-1} w \leq c_\alpha\}$  es la región de confianza de volumen mínimo.

---

<sup>16</sup> Dirigirse al Apéndice II

Demostración.- Dado que los factores de riesgo son distribuidos de manera normal, entonces su función de densidad es  $f(y) = \vartheta \exp\left(-\frac{1}{2} y^T \Sigma^{-1} y\right)$ , donde

$\vartheta = \frac{1}{\left((2\pi)^{\frac{M}{2}}\right) \sqrt{\det(\Sigma)}} > 0$ , entonces la región de confianza  $\Psi$  es el siguiente

conjunto:

$$\begin{aligned} \{y \in R^M \mid y^T \Sigma^{-1} y \leq c_\alpha\} &= \left\{ y \in R^M \mid \exp\left(-\frac{1}{2} y^T \Sigma^{-1} y\right) \geq \exp\left(-\frac{1}{2} c_\alpha\right) \right\} \\ &= \left\{ y \in R^M \mid f(y) \geq \vartheta \exp\left(-\frac{1}{2} c_\alpha\right) \right\}, \end{aligned}$$

Lo que muestra que  $\Psi$  es el conjunto de factores de riesgos con mayor densidad, es decir, mayor que una constante. Dado que la densidad es una función no negativa, se concluye que para cualquier  $\mathfrak{S} \subset R^M$  con  $Vol(\mathfrak{S}) = Vol(\Psi)$  entonces se cumple que  $P(\mathfrak{S}) \leq P(\Psi) = \alpha$ , por lo tanto  $\Psi$  es la región de confianza de volumen mínimo.

### 3.3 Valores o Rendimientos Relativos

Hasta el momento, los cambios en las tasas de mercado han sido siempre medidos de manera absoluta, es decir en unidades absolutas. En algunos casos puede resultar ventajoso expresar los movimientos en estas variables en unidades de desviación estándar.

**Definición 3.5.-** Sea  $\Sigma = Cov(w)$  la matriz de covarianzas de los factores de riesgo. La matriz de desviaciones estándar  $V$  se define como la matriz diagonal siguiente:

$$V = diag(\sqrt{(\Sigma)_{1,1}}, \sqrt{(\Sigma)_{2,2}}, \dots, \sqrt{(\Sigma)_{M,M}})$$

**Lema 3.6.-** Si  $Cov(w) = \Sigma$  entonces  $\mathfrak{R} = V^{-1} \Sigma V^{-1}$  es la matriz de correlaciones de los factores de riesgo.

Demostración.- Por definición tenemos que:

$$(\mathfrak{R})_{i,j} = \frac{(\Sigma)_{i,j}}{\sqrt{(\Sigma)_{i,i}} \sqrt{(\Sigma)_{j,j}}} = Corr(w_i, w_j) \quad \text{para } 1 \leq i, j \leq M$$

**Definición 3.7.-** Los factores de riesgos estandarizados  $\underline{w}$  se definen como  $\underline{w} = V^{-1} w$

De esta forma  $\underline{w}_i$  representa el cambio en la tasa de mercado la cual ahora esta expresado en unidades de la desviación estándar del factor de riesgo  $w_i$ . Ahora observaremos como la ML puede ser calculada en cualquiera de los dos sistemas, y en general, obtenerla en términos de los valores relativos proveen una mayor flexibilidad.

**Lema 3.8.-** Si  $w \sim N(0, \Sigma)$  entonces el conjunto  $A_1 = \{w \in R^M \mid w^T \Sigma^{-1} w \leq c_\alpha\}$  y el conjunto  $A_2 = \{\underline{w} \in R^M \mid \underline{w}^T \mathfrak{R}^{-1} \underline{w} \leq c_\alpha\}$  son idénticos.



Demostración.- Para cada  $w$  tenemos que  $w^T \Sigma^{-1} w = w^T V^{-1} \mathcal{R}^{-1} V^{-1} w = \underline{w}^T \underline{\mathcal{R}}^{-1} \underline{w}$

Para calcular la ML sobre los factores de riesgo estandarizados, la función objetivo debe ser adaptada.

**Definición 3.9.-** Tome un portafolio cuadrático con la siguiente expresión

$v_q(w) = \frac{1}{2} w^T G w + g^T w$  entonces la función P&L estandarizada esta dada por

$\underline{v}_q(\underline{w}) = \frac{1}{2} \underline{w}^T \underline{G} \underline{w} + \underline{g}^T \underline{w}$  donde  $\underline{G} = V G V$  y  $\underline{g} = V g$ .

**Teorema 3.10.-**  $w^*$  es solución para el problema  $ML(\alpha) = \min_{s.a. w^T \Sigma^{-1} w \leq c_\alpha} v_q(w)$  si y solo si  $\underline{w}^* = V^{-1} w^*$  es solución para el problema  $\underline{ML}(\alpha) = \min_{s.a. \underline{w}^T \underline{\mathcal{R}}^{-1} \underline{w} \leq c_\alpha} \underline{v}_q(\underline{w})$ .

Demostración.- El lema 3.8 nos muestra que  $\underline{w}^*$  es solución factible para el problema  $\underline{ML}(\alpha)$  si y solo si  $w^*$  es solución factible para el problema  $ML(\alpha)$ . Además de esto se cumple que  $w^T G w = w^T V^{-1} V G V V^{-1} w = \underline{w}^T \underline{G} \underline{w}$  y  $g^T w = g^T V V^{-1} w = \underline{g}^T \underline{w}$

Por lo anterior se puede concluir que no existe diferencia entre resolver nuestro problema original  $ML$  o el problema estandarizado  $\underline{ML}$ . Sin embargo, el uso de los factores de riesgo estandarizados posee la ventaja que permitir que no todos los instrumentos del portafolio tengan el mismo periodo de liquidación como se muestra en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 3.11.-** Sea  $\sigma_T$  la desviación estándar del factor de riesgo  $w_k$  para un periodo de liquidación  $T$ , entonces de acuerdo al apartado 2.1 “Distribución de los factores de riesgos” se cumple la formula  $\sigma_T = \sigma_1 \sqrt{T}$ . Ahora tómnese dos instrumentos  $i, j$  que dependan del mismo factor de riesgo  $w_k$ . Si el instrumento  $i$  tiene un periodo de liquidación de  $T_i$  días y el instrumento  $j$  tiene un periodo de liquidación de  $T_j$  días, entonces un incremento de  $\underline{w}_k = 2$  desviaciones estándar corresponde a un incremento de  $w_{k(i)} = 2\sigma \sqrt{T_i}$  unidades para el instrumento  $i$ , mientras que para el instrumento  $j$  representa un incremento de  $w_{k(j)} = 2\sigma \sqrt{T_j}$  unidades.

### 3.4 ML para portafolios Lineales

Al igual que para el Valor en riesgo es posible obtener una expresión analítica para la pérdida máxima para un portafolio lineal.

**Teorema 3.12.-** La Perdida Máxima (ML) para un portafolio lineal  $v_l(w) = a^T w$  esta dada por  $ML(\alpha) = -\sqrt{c_\alpha} \sqrt{a^T \Sigma a}$  y el peor escenario es  $w^* = -\frac{\sqrt{c_\alpha}}{\sqrt{a^T \Sigma a}} \Sigma a$ .

Demostración.- Se debe resolver el siguiente problema

$$ML(\alpha) = \min v_l(w) \\ \text{s.a. } h(w) \leq 0$$

En donde  $h(w) = w^T \Sigma^{-1} w - c_\alpha$ . Se puede verificar que ambas funciones  $v_l(w)$  y  $h(w)$  son convexas. Entonces la solución  $w^*$  debe satisfacer las condiciones de [Kuhn-Tucker]:

- 1.-  $\nabla v_l(w^*) = -\mu \nabla h(w^*)$
- 2.-  $\mu h(w^*) = 0$
- 3.-  $h(w^*) \leq 0$
- 4.-  $\mu \geq 0$

De la primera condición obtenemos que

$$a = -2\mu \Sigma^{-1} w^*$$

En consecuencia tenemos que  $\mu \neq 0$ , de donde se concluye

$$w^* = -\frac{1}{2\mu} \Sigma a$$

Ahora considerando la segunda condición

$$\frac{1}{\mu} = \frac{2\sqrt{c_\alpha}}{\sqrt{a^T \Sigma a}}$$

De esta forma identificamos el peor escenario dado por

$$w^* = -\frac{\sqrt{c_\alpha}}{\sqrt{a^T \Sigma a}} \Sigma a.$$

Se puede verificar que  $w^*$  satisface la tercera condición. Y por sustitución obtenemos la pérdida máxima

$$ML(\alpha) = -\sqrt{c_\alpha} \sqrt{a^T \Sigma a}$$

La expresión  $ML(\alpha) = -\sqrt{c_\alpha} \sqrt{a^T \Sigma a}$  es muy similar al valor obtenido por el método Delta-Normal para el Valor en riesgo  $VaR(\alpha) = -z_\alpha \sqrt{a^T \Sigma a}$ . La diferencia radica en el factor  $\sqrt{c_\alpha}$  vs.  $z_\alpha$ . Esto muestra que existe una relación entre ambos métodos, la cual es independiente del portafolio. Sin embargo el radio de esta relación depende del coeficiente de confianza  $\alpha$  y del número  $M$  de factores de riesgo. A continuación se muestran algunas razones para el cociente  $r_{\alpha, M} = \frac{ML(\alpha)}{VaR(\alpha)}$  con distintos números de factores de riesgo.

	$M = 2$	$M = 5$	$M = 10$	$M = 50$
$\alpha = 90.0\%$	1.67	2.37	3.12	6.20
$\alpha = 95.0\%$	1.49	2.02	2.60	5.00
$\alpha = 97.5\%$	1.39	1.83	2.31	4.31
$\alpha = 99.0\%$	1.30	1.67	2.07	3.75

$$\text{Radios } r_{\alpha, M} = ML(\alpha) / VaR(\alpha)$$

En este punto es importante hacer notar que la obtención del peor escenario  $w^* = -\frac{\sqrt{c_\alpha}}{\sqrt{a^T \Sigma a}} \Sigma a$ . no requiere más información de la información utilizada en el método Delta-Normal, es decir la identificación de este escenario es “gratis”.

### 3.5 ML para portafolios cuadráticos

Aun cuando el VaR solo puede ser calculado de manera eficiente para los portafolios lineales, la obtención de la Pérdida Máxima para un portafolio cuadrático  $v_q(w) = \frac{1}{2} w^T G w + g^T w$  resulta ser rápida utilizando el algoritmo de [Levenberg-Marquardt].

El algoritmo [Levenberg-Marquardt] permite calcular numéricamente el mínimo “global” de una función cuadrática dentro de una “bola”. Es por ello que primero debemos tomar nuestra región confianza  $\Psi$  que posee una forma de elipsoide y deberemos transformarla en una forma esférica.

**Definición 3.13.-** Sea  $w \sim N(0, \Sigma)$  y denótese a la descomposición de Cholesky de la matriz  $\Sigma$  como  $\Sigma = U^T U$ , entonces los factores transformados se definen como

$$\hat{w} = W^{-T} w$$

**Lema 3.14.-** Los dos conjuntos  $A^1 = \{w \in R^M \mid w^T \Sigma^{-1} w \leq c_\alpha\}$  y  $A_2 = \{\hat{w} \in R^M \mid \hat{w}^T \hat{w} \leq c_\alpha\}$  son idénticos

**Demostración.-** Para cada  $w \in R^M$  tenemos que  $w^T \Sigma^{-1} w = w^T U^{-1} U^{-T} w = \hat{w}^T \hat{w}$ .

De este forma, por medio de una función lineal se ha transformado la región de confianza en una bola en  $R^M$ . Resta definir la nueva función objetivo para este nuevo conjunto de factores de riesgo.

**Definición 3.15.-** Sea  $v_q(w) = \frac{1}{2} w^T G w + g^T w$  un portafolio cuadrático, entonces la función P&L transformada se define como  $\hat{v}_q(\hat{w}) = \frac{1}{2} \hat{w}^T \hat{G} \hat{w} + \hat{g}^T \hat{w}$ , donde  $\hat{G} = U G U^T$  y  $\hat{g} = U g$

**Teorema 3.16.-** El escenario  $w^* = U^T \hat{w}^*$  es la solución global al problema  $\min_{s.a. w^T \Sigma^{-1} w \leq c_\alpha} v_q(w)$  si y solo si  $\hat{w}^*$  es la solución global el problema  $\min_{s.a. \hat{w}^T \hat{w} \leq c_\alpha} \hat{v}_q(\hat{w})$ .

**Demostración.-** El lema 3.13 nos prueba que  $w^*$  es una solución factible para función objetivo si y solo  $\hat{w}^*$  lo es para la suya. Además de que las dos funciones objetivo son idénticas dado que  $\hat{w}^T \hat{G} \hat{w} = w^T U^{-1} U G U^T U^{-T} w = w^T G w$  y a su vez  $\hat{g}^T \hat{w} = g^T U^T U^{-T} w = g^T w$  para todo  $w \in R^M$ .

Como consecuencia tenemos que el problema cuadrático original de ML ha sido transformado en un problema de minimización de una función cuadrático dentro de una bola:

$$ML(\alpha) = \min_{s.a. \hat{w}^T \hat{w} \leq c_\alpha} \frac{1}{2} \hat{w}^T \hat{G} \hat{w} + \hat{g}^T \hat{w}$$

### 3.6 El Algoritmo Levenberg-Marquardt

El algoritmo de [Levenberg-Marquardt] es el elemento principal para la aplicación de la metodología Maximun Loss a los portafolios cuadráticos. Como se menciona anteriormente, nos permite determinar la solución global a nuestro problema de minimización.

La idea principal detrás de este algoritmo es buscar una variable unidimensional  $\nu$  lo cual resulta ser más simple que buscar un escenario  $w \in R^M$

**Teorema 3.17.-**  $\hat{w}^*$  es una solución al problema

$$ML(\alpha) = \min \frac{1}{2} \hat{w}^T \hat{G} \hat{w} + \hat{g}^T \hat{w}$$

s.a.  $\hat{w}^T \hat{w} \leq c_\alpha$

si y solo si, existe  $\nu^* \in R$  tal que:

1.-  $(G + \nu^* I)$  es una matriz semidefinida positiva.

y se deben cumplir las siguientes condiciones:

2.-  $(\hat{G} + \nu^* I) \hat{w}^* = -\hat{g}$   
3.-  $\nu^* [c_\alpha - (\hat{w}^*)^T \hat{w}^*] = 0$   
4.-  $\nu^* \geq 0$

Además, si  $\nu^*$  existe, entonces es único, si  $(G + \nu^* I)$  es definida positiva, entonces  $w^*$  es único.

**Demostración.-** Una prueba completa y detallada de este teorema se puede encontrar en Fletcher (1987).

A continuación se pretende mostrar la forma en como este teorema puede ser utilizado para nuestro problema de minimización.

Dado que la matriz  $\hat{G}$  resulta ser una matriz simétrica, entonces existe una base ortonormal para  $R^M$  consistente en los eigenvectores de esta matriz, i.e.  $B = \{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \dots, \hat{e}_M\}$  y con los correspondientes eigenvalores  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_M$ .

Entonces podemos expresar a los vectores  $\hat{g}$  y  $\hat{w}$  en esta base:  $\hat{g} = \sum_{i=1}^M \alpha_i \hat{e}_i$  y  $\hat{w} = \sum_{i=1}^M \beta_i \hat{e}_i$ , donde los coeficientes  $\beta_i$  son los valores a determinar. La restricción número 1 nos implica que  $\beta_i = -\frac{\alpha_i}{\lambda_i + v^*}$  para  $i = 1, 2, \dots, M$ . Ahora si consideramos a  $\hat{w}$  como una función de  $v$  obtenemos que:

$$5.- \quad \|\hat{w}(v)\|^2 = \sum_{i=1}^M \left( \frac{\alpha_i}{\lambda_i + v} \right)^2$$

Si tomamos  $v \geq -\lambda_1$ , entonces la función  $\|\hat{w}(v)\|^2$  es decreciente con límite  $\lim_{v \rightarrow \infty} \|\hat{w}(v)\|^2 = 0$ . Pero de las ecuaciones 1 y 4 obtenemos que  $v \geq \max(-\lambda_1, 0)$ .

En este punto se pueden identificar dos situaciones:

1. Supongamos que  $v^* = 0$ , entonces de la ecuación 2 se obtiene que  $\hat{w}^* = -\hat{G}^{-1} \hat{g}$  es la solución.
2. Pero si suponemos  $v^* > 0$ . Sean  $v_1 < v_2$  posibles candidatos para  $v^*$  y nuevamente por la ecuación 2 se debe cumplir  $\hat{w}_i = -(\hat{G} + v_i I)^{-1} \hat{g}$   $i = 1, 2$ . Ahora de la ecuación número 5 sabemos que  $\|\hat{w}_1\|^2 > \|\hat{w}_2\|^2$ . Pero esto significa que podemos aplicar una búsqueda del valor  $v^*$  a partir de los valores  $v_1$  y  $v_2$ , de tal forma que  $\|\hat{w}_1\|^2 \geq c_\alpha \geq \|\hat{w}_2\|^2$  para de esta forma encontrar el valor óptimo que satisfaga  $\|\hat{w}(v^*)\|^2 = c_\alpha$

### 3.7 Relación entre el VaR y ML

Para poder llevar a cabo una comparación entre el valor obtenido para el VaR de un portafolio y la Pérdida Máxima para el mismo, fijaremos en primera instancia el nivel de confianza  $\alpha$ . La distribución de los factores de riesgos, al igual que el periodo de liquidación es el mismo para ambos modelos. Además se tiene los siguientes supuestos:

- El cambio en el valor del portafolio  $v(w)$  es una función continua.
- La función de distribución conjunta de los factores de riesgo  $f_T(w)$  es estrictamente creciente (pero no necesariamente Normal).

La definición General de VaR es:

$$\text{VaR} = \min \hat{v} \\ \text{s.a. } \Pr(w|v(w) \leq \hat{v}) \geq 1 - \alpha$$

En donde el área activa de los factores de riesgos definida por el VaR es  $B_T = \Pr\{w|v(w, T) \leq \text{VaR}\}$ , debido a la continuidad de  $v(w)$  este conjunto es un conjunto cerrado, que cumple que  $v(w) \leq \text{VaR} \quad \forall w \in B_T$

Para obtener la Pérdida Máxima, se debe escoger una región de confianza cerrada  $A_T$  con una probabilidad de  $\alpha$ . Entonces la ML se define como:

$$\text{ML}_{A_T} = \min v(w) \\ \text{s.a. } w \in A_T \quad \Pr(A_T) = \alpha$$

Tenemos que el conjunto  $C_T = (A_T \cup B_T)^c$  que es abierto. Supongamos que  $A_T \cap B_T = \emptyset$ . Tenemos la relación  $\Pr(A_T) + \Pr(B_T) \geq \alpha + (1 - \alpha) = 1$  lo cual implica que  $\Pr(A_T \cup B_T) = 1$  y en consecuencia tenemos que  $\Pr(C_T) = 0$ .

Dado que la función de densidad de los factores de riesgo  $f_T(w)$  es estrictamente creciente en  $\Omega$  entonces  $C_T = \emptyset$  y  $A_T \cup B_T = \Omega$ . Sin embargo se supone  $\Omega$  como conexo y los conjuntos  $A_T, B_T$  son cerrados, esto

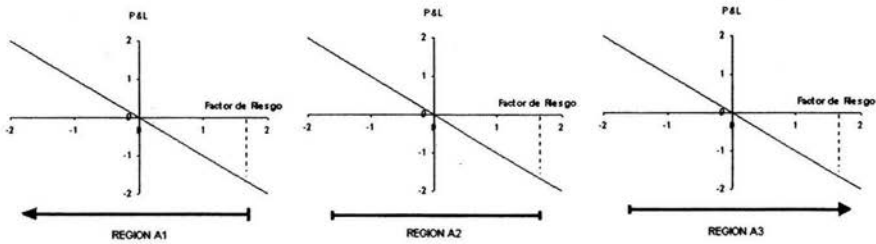


contradice el supuesto de que  $A_T \cap B_T = \emptyset$ , por lo que  $A_T \cap B_T \neq \emptyset$ , y en consecuencia:

$$ML_{A_T} \leq ML_{A_T \cap B_T} \leq VaR$$

Es así como obtenemos que la medida de riesgo de mercado proporcionada por el método Maximun Loss resulta ser más conservadora que la medida proporcionada por la metodología VaR.

En la siguiente gráfica se muestra como distintas elecciones de regiones de confianza  $A$  pueden producir diferentes valores de "Maximun Loss". Para este ejemplo se considera un portafolio formado por un instrumentos lineal, y se supone que el factor de riesgo tiene una distribución normal estandar y el nivel de confianza es de  $\alpha = 95\%$



El VAR para este portafolio es de -1.64; sin embargo ML depende de la región  $A$ :

1. Si la región es  $A1 = [-\infty, 1.64]$  entonces  $ML = -1.64$ ;
2. Si la región es  $A2 = [-1.96, 1.96]$  entonces  $ML = -1.96$ ;
3. Si la región es  $A3 = [-1.64, \infty]$  entonces  $ML = -\infty$ ;

En todos los casos la relación  $ML \leq VaR$  se mantiene.

## **CAPITULO IV**

### **4.1 Back-Testing**

Como hemos podido observar, existen diversos métodos para obtener el Valor en Riesgo de un portafolio. En la práctica, aun cuando las instituciones financieras utilizan los mismos métodos, existen variaciones considerables en la forma en como se aplican los mismos. Un ejemplo claro de esto, radica en los distintos modelos utilizados para la estimación de la volatilidad de los factores de riesgo.

Dado lo anterior y además de los debates originados sobre los supuestos tomados para el calculo del VaR, resulta necesario poder verificar o medir el desempeño de los métodos. Al conjunto de pruebas diseñadas para medir este desempeño se les denominan: pruebas de “Back-Testing” o pruebas de respaldo.

Varias instituciones que hacen uso de la medida de riesgo VaR, verifican el desempeño del modelo a través de simples comparaciones entre el valor de la función de Perdidas y Ganancias (P&L) durante un periodo de tiempo determinado, contra la medida obtenida por el modelo para el mismo periodo de liquidación. Sin embargo, las propias instituciones han comenzado el desarrollo de técnicas de “Back-Testing” cada vez más sofisticadas y en consecuencia se pueden identificar diversos tipos de estas pruebas.

En este capitulo se describen las siguientes técnicas utilizadas para la verificación del desempeño en los modelos utilizados para la obtención de la medida VaR:

- “Back-Testing” Regulatorio.
- Verificación basada en el primer fracaso.
- Verificación basada en la proporción de fracasos.
- Verificación basada en simulación histórica.

## **4.2 Dificultades del Back-Testing.**

Antes de comenzar con el análisis de las pruebas, es conveniente hacer notar que existe una serie de dificultades al pretender llevar a cabo un análisis de Back-Testing. El problema principal tiene su origen en comparar el riesgo obtenido para un portafolio estático durante el periodo de liquidación contra un flujo mucho más dinámico como el resultado de la función P&L. Es decir, el VaR es calculado como el posible cambio de valor para un portafolio fijo y en un determinado instante (en la mayoría de las ocasiones al final del día de operaciones), además de asumir que el portafolio no sufrirá cambios desde este instante hasta el próximo cálculo del VaR. En la práctica, los portafolios de las instituciones son raramente estáticos, y más aun, en ocasiones el cálculo de la función P&L se realiza en varias ocasiones durante el tiempo que una institución toma y cierra posiciones durante el mismo periodo de tiempo.

La dificultad del dinamismo de un portafolio, puede ser fácilmente ilustrada al considerar un área de Trading, en la cual no está permitido mantener posiciones abiertas durante el periodo en que no opera el mercado. Durante las horas de operación, el área puede tomar diversas posiciones y en consecuencia experimentar incrementos o disminuciones en el valor de su portafolio, pero al final del día, cada una de estas posiciones debe ser cerrada. En este caso, el VaR calculado al fin del día y para un horizonte de un día sería de cero, implicando una volatilidad de cero en la función P&L, contrario a la realidad.

La forma en como se ha solucionado este inconveniente, es basar el back-testing en una comparación del VaR (utilizando un periodo de liquidación de un día) contra el cambio hipotético en el valor del portafolio que podría ocurrir si las posiciones la final del día no se modificaran. Es decir, compara el VaR contra el valor de la función P&L evaluada con los factores de riesgo del día de análisis pero con la composición de cierre del día anterior. Esta forma de valuación del portafolio es conocida como "close-to-close", de esta forma se obtendrán dos valores que se corresponderán directamente.

De igual forma y tomando como base que los resultados de las pruebas de respaldo se ven seriamente afectadas por el dinamismo del portafolio, se contempla reducir el periodo de liquidación para el cual se lleva a cabo las comparaciones. Es claro que entre mayor sea este periodo, mayor será la

variación en la composición del portafolio. Y por esta razón, el Comité de Basilea recomienda que la prueba de back-testing sea realizada para un periodo de liquidación de un día, aun cuando el requerimiento de capital exigido a la institución este basado en una medición del riesgo de mercado para un periodo de liquidación de diez días.

Otra dificultad en la aplicación de la prueba back-testing se encuentra al observar que la mayoría de las ocasiones el valor obtenido para la función P&L incluye comisiones y en ocasiones algunos otros ingresos no atribuibles a la administración del portafolio. En el caso de que la institución tome una actitud de formador de mercado “market maker” permite obtener ganancias a través de colocar diferentes series de postura en el mercado, es decir, esta ganancia puede ser derivada del spread compra/venta. Sin embargo, de igual forma se puede argumentar que los ingresos obtenidos por comisiones y/o cualquier otro tipo de ingreso son propios de la operación de la institución y por lo tanto deben ser incluidos en las pruebas de back-testing.

Es importante tener presente que las dificultades en la construcción e implementación de un modelo de VaR, no serán las únicas causas por las que el modelo pudiera no cumplir las pruebas. Como se ha podido observar en capítulo 2, los modelos de medición de riesgos tienen a su vez una serie de supuestos para poder obtener dicho valor.

### 4.3 “Back-Testing” Regulatorio.

La prueba de Back-Testing es una parte fundamental de los requerimientos establecidos por los organismos supervisores, y de manera precisa lo podemos ubicar entre los lineamientos establecido por el Comité de Basilea, de tal forma que cada institución bancaria tendrá un requerimiento de capital expresado como el valor mas alto entre: (1) un promedio de la medida de VaR diario calculado para cada uno de los 60 días de operación anteriores, ajustado por un factor o, (2) el valor obtenido para el VaR del día de operaciones anterior.

El factor que se menciona en el punto numero (1) se encuentra situado en un rango de 3 a 4 y será determinado por el administrador de riesgos de la institución bajo una simple regla que consiste en determinar el número de ocasiones que la pérdida observada excede el valor del VaR correspondiente. El factor mínimo es 3 y tiene como objetivo compensar los errores en la medición de riesgos originados por problemas en la implementación del modelo, como lo pueden ser aproximaciones analíticas, pequeñas muestras, errores numéricos, o bien los supuestos implícitos en el modelo. El incremento en este factor esta diseñado para aumentar el nivel de confianza hacia el nivel del 99%, nivel que es el establecido por los organismos reguladores. Para llevar a cabo el cálculo del número de excepciones, las instituciones bancarias deberán obtener el VaR utilizando un día como periodo de liquidación, y comparar estas medidas contra el valor de la función P&L, lo anterior para un periodo previo de 250 días.

La regla de decisión se muestra en la siguiente tabla:

Zona	Numero de excepciones	Factor
Verde	4 o menos	3
Amarilla	5	3.4
	6	3.5
	7	3.65
	8	3.75
	9	3.85
Roja	10 o más	4

Este modelo de Back-testing asume que el periodo seleccionado para llevar a cabo las observaciones provee de la suficiente informaron sobre la adecuada implementación del modelo. Por ejemplo, si un modelo de VaR supone obtener el cuantil del 99%, y de acuerdo a las observaciones se observa una excepción en más de 1% de las mismas, esto podría indicar problemas con la

precisión del modelo. Aun cuando cabe remarcar que este supuesto no es realista puesto que con un número finito de observaciones diarias es absolutamente probable que el número real de veces que se exceda el cálculo del VaR diferenciará del porcentaje implicado por el intervalo de la confianza de modelo, incluso cuando el modelo esté correctamente implementado. En este punto, el objetivo del Comité de Basilea es ubicar a los bancos en tres regiones basadas en el número de excepciones observadas sobre un periodo de tiempo de 250 días.

#### **4.4 Métodos estadísticos alternativos para “Back-Testing”.**

En este caso, consideremos que se monitorea el portafolio de una institución, de tal forma que día a día se compara el valor de la pérdida en el valor del portafolio contra la pérdida estimada (VaR); en el caso cuando esta pérdida sea menor al VaR estimado consideraremos tener un éxito, mientras que en el caso contrario estaremos hablando de un fracaso.

Si las mediciones de riesgo son catalogadas como medidas eficientes, entonces podemos decir que las pérdidas potenciales estimadas son medidas independientes en el tiempo y de esta forma el conjunto de medidas de VaR conforman una variable aleatoria con función de distribución Bernoulli. Lo anterior se puede sostener del hecho de que un administrador del portafolio no tiene conocimiento de la forma paramétrica de la distribución de la función P&L y por ello existe fundamentos para considerar que la forma en como esta función se distribuye depende de la composición del portafolio.

La hipótesis nula de que ‘la probabilidad de un fracaso en una medición es del 1%’ puede ser probada de distintas formas; sin embargo estas pruebas dependerán a su vez de la forma en cómo el administrador lleva a cabo el monitoreo de las mediciones así como del tamaño de muestra disponible para el análisis. Si el monitoreo se desarrolla de manera constante y se observa un fracaso en la medición, el administrador podrá verificar la hipótesis sobre la verdadera probabilidad de fracaso comparada con la probabilidad presentada en los reportes. Otra alternativa es monitorear a intervalos de tiempo y probar la hipótesis utilizando la proporción de fracasos presentados en dicho intervalo. Una tercera opción para verificar el desempeño en la medición del riesgo es comparar los valores de VaR obtenidos contra una simulación de la función de distribución P&L.

#### 4.4.1 Verificación basada en el primer fracaso.

Como su nombre lo indica, este monitoreo consiste en observar el número de observaciones necesarias antes de poder identificar un fracaso en la medición del riesgo.

Sea  $\tau$  una variable aleatoria que denota el número de días transcurridos hasta que se presenta un primer fracaso. Si  $p$  es la probabilidad de obtener un fracaso en una medición, entonces la probabilidad de obtener el primer fracaso en la observación número  $V$  esta dada por:

$$P(\tau = v) = p(1 - p)^{v-1}$$

La variable aleatoria  $\tau$  tiene una distribución geométrica con esperanza  $\frac{1}{p}$ .

Por ejemplo, cuando  $p=0.01$  el número promedio de días antes de obtener el primer fracaso es de 100, mientras que si  $p=0.05$ , entonces tenemos un promedio de 25 días antes de la primera excepción.

Dado un evento de la variable  $\tau$ , nos interesa probar que la medición de VaR es consistente con la hipótesis nula. Para esto haremos uso de la prueba de radio de máxima verosimilitud (LR). El lema de Neyman-Pearson<sup>17</sup> establece que esta prueba es la prueba uniforme más potente para probar nuestra hipótesis nula.

Considérese la siguiente notación:

$v$  = Tiempo observado (en días) antes del primer fracaso.

$p$  = La probabilidad verdaderamente cubierta por el modelo de VaR.

$p^*$  = La probabilidad especificada en el modelo de medición  $(1 - \alpha)$ .

$\tilde{p}$  = El estimador de Maxima Verisimilitud para  $p$ , dado en esta prueba por  $\frac{1}{v}$

Entonces, dado un valor de  $\tau$ ,  $\tau = v$ , el estadístico LR para probar la hipótesis nula  $p = p^*$  es:

$$LR = -2 \ln \left( \frac{p^* (1 - p^*)^{v-1}}{\tilde{p} (1 - \tilde{p})^{v-1}} \right)$$

<sup>17</sup> Referencia bibliográfica (fgdsgdsdg)

Bajo la hipótesis nula, el estadístico LR tiene una distribución ji-cuadrada con un grado de libertad. El valor crítico de esta distribución al 5% es 3.841, es decir, si el estadístico excede este valor, entonces la hipótesis nula  $p = p^*$  puede ser rechazada a un nivel del 5% sobre el error tipo I. El error tipo I es la probabilidad de incorrectamente rechazar una hipótesis verdadera. La tabla 1 muestra las regiones de no rechazo a los niveles del 5% y 10% para la prueba Primer Fracaso [PF], y para varios hipótesis nulas. Se puede observar que la región de no rechazo se incrementa de igual forma cuando el valor de  $p = p^*$  se aproxima a cero.

<b>Valores Críticos para la prueba Primer Fracaso</b>		
<b>Hipótesis Nula Probabilidad <math>p^*</math></b>	<b>Zona de no rechazo con 5% (error tipo I)</b>	<b>Zona de no rechazo con 10% (error tipo I)</b>
0.005	11 < V < 879	6 < V < 439
0.010	6 < V < 439	6 < V < 439
0.015	4 < V < 292	6 < V < 439
0.020	3 < V < 219	6 < V < 439
0.025	2 < V < 175	6 < V < 439
0.030	2 < V < 146	6 < V < 439
0.035	2 < V < 125	6 < V < 439
0.040	1 < V < 109	6 < V < 439
0.045	1 < V < 97	6 < V < 439
0.050	V < 87	6 < V < 439

*V es el número de observaciones antes de observar el primer fracaso*

**Tabla 1**

Cuando se prueba la hipótesis nula  $p^* = 0.01$  los valores críticos de la prueba a un nivel del 5% son  $v=6$  y  $v=439$ , lo que nos indica que si el primer fracaso ocurre antes del séptimo día se puede concluir que  $p > 0.01$  o bien si el fracaso ocurre después del 438vo día, entonces se concluye que  $p < 0.01$ .

Para una hipótesis nula  $p^* = 0.05$  los valores críticos para  $v$  son entre el 0 y el 1 (imposible de suceder) y a partir del 87. El primero de estos valores nos indica la imposibilidad de determinar al 5% cuando se cumple que  $p^* > 0.05$ . Si  $v$  es mayor que 87 se puede concluir con un nivel del 5% que la pérdida estimada es consistente con una probabilidad menor que 0.050.

Cualquier prueba asociada a una hipótesis nula con  $p^*$  igual o mayor a 0.05 será asociada con la ausencia de una región de rechazo incluyendo aquellas muestras que presente un fracaso en la primera observación. En otras



palabras este tipo de prueba y con un nivel de significancia de 0.05, no posee la habilidad de detectar errores en modelos con una probabilidad mayor al 5%.

Los valores que se pueden observar en la tabla 1 para esta prueba con un nivel el 0.05 indican grandes regiones de no rechazo para la hipótesis nula  $p^*$  cuando ésta es pequeña. Es por ello que sorprendería observar que si un primer fracaso ocurre en el séptimo día, dando una estimador de máxima verosimilitud para  $p$  de (1/7) o bien del 14.3% y probando la hipótesis  $p^* = 0.01$  entonces la hipótesis no se rechazaría. Originado de que el estadístico LR genera la prueba mas potente utilizando la información hasta el primer fracaso, entonces, el gran tamaño de la región de no rechazo es indicador de que esta prueba no tiene la habilidad para distinguir entre una serie de hipótesis alternativas interesante.

La tabla 2 muestra la información sobre el tipo de error II bajo la prueba a un nivel del 0.05. Recordemos que el error tipo II es la probabilidad de aceptar una hipótesis nula falsa. Por ejemplo, si la hipótesis nula  $p^* = 0.01$ , un error tipo II es la probabilidad de aceptar esta hipótesis, cuando en realidad la probabilidad de un fracaso en una sola observación es diferente de 0.01.

<b>Radio para el error tipo II con un nivel del 5%</b>		
<b>Hipótesis Nula Probabilidad <math>p^*</math></b>	<b>Hipótesis Alternativa <math>p</math></b>	<b>Radio de error tipo II</b>
0.010	0.015	0.898
0.010	0.020	0.868
0.010	0.030	0.808
0.010	0.040	0.751
0.010	0.050	0.698
0.025	0.030	0.908
0.025	0.040	0.884
0.025	0.050	0.857

*El error tipo II es la probabilidad de aceptar la hipótesis nula utilizando un nivel del 5% cuando la hipótesis alternativa es verdadera.*

**Tabla 2**

Los valores de la tabla 2 muestran que existe una alta probabilidad de que la hipótesis nula  $p^* = 0.01$  o  $p^* = 0.025$  puedan ser aceptadas por la prueba a un nivel del 5%, aun cuando la verdadera perdida esta lejos de exceder el VaR en la probabilidad estipulada en la misma. Por ejemplo, la tabla 1 muestra que si existe un fracaso entre las observaciones 7ma y 438ava, la hipótesis

nula  $p^* = 0.01$  no puede ser rechazada bajo esta prueba con un nivel del 5%, mientras que la información de la tabla 2 nos indica una alta probabilidad de que la verdadera probabilidad de obtener un fracaso en una medición sea de 0.02. Esta última tabla nos indica que el 86.8% de los casos se aceptaría una falsa hipótesis nula.

#### 4.4.2 Verificación basada en la proporción de fracasos.

El continuar monitoreando la evolución de las mediciones aun cuando ya se haya presentado un fracaso, nos proporcionará información sustancial para realizar otro tipo de análisis sobre el desempeño del modelo de VaR.

Las pruebas basadas entre el tiempo transcurrido entre dos fracasos en la medición de riesgo son insuficientes, dado que ignoran la información sobre el total de fracasos observados desde que el monitoreo de estas mediciones se haya iniciado. En este punto, cuando la prueba PF, no haya podido rechazar la hipótesis nula, se pueden desarrollar pruebas basadas en la proporción de fracasos dentro de una muestra de mediciones.

De acuerdo a los supuestos del apartado anterior, la probabilidad de observar  $x$  fracasos en la medición del riesgo dentro de una muestra de  $n$  mediciones esta dada por:

$$\binom{n}{x} (1-p)^{n-x} p^x$$

donde  $\binom{n}{x}$  representa el coeficiente binomial de  $n$  objetos tomados de  $x$  en  $x$  a la vez, y  $p$  es la probabilidad de obtener un fracaso en una medición del riesgo. Nuevamente, la prueba del ratio de máxima verosimilitud (LR) resulta ser la prueba uniformemente mas potente para una muestra dada.

En esta ocasión el estadístico de prueba esta dado por:

$$LR = -2 \ln \left( \frac{\binom{n}{x} (p^*)^x (1-p^*)^{n-x}}{\binom{n}{x} \left(\frac{x}{n}\right)^x \left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-x}} \right)$$

donde  $p^*$  es la probabilidad de fracaso en la medición de acuerdo a la hipótesis nula,  $n$  es el tamaño de la muestra y  $x$  es el número de fracasos observados en dicha muestra. Esta muestra es conocida como PDF (proporción de fracasos). Bajo la hipótesis nula de  $p^* = p$  el estadístico de prueba tiene una distribución ji-cuadrada con un grado de libertad. En el caso de que en la muestra solo se observe un fracaso, entonces esta prueba se reduce a la prueba del primer fracaso (PF). Dada esta equivalencia, esta prueba tiene las mismas características que la prueba PF respecto a la potencia de la misma.

En un monitoreo diario, la prueba PDF tiene como objetivo comparar el número total de fracasos observados contra el número de observaciones de la muestra. La tabla 4 muestra los valores críticos para  $n$  (tamaño de la muestra) asociado el número de fracasos observados  $x$ , para distintos valores de hipótesis nula y todos con un nivel de significancia del 5%.

<i>Tamaño máximo de la muestra para el cual la hipótesis nula <math>p^*</math> es rechazada con un nivel del 5%</i>					
<i>Número de fracasos <math>x</math></i>	<i><math>p^*=0.01</math></i>	<i><math>p^*=0.02</math></i>	<i><math>p^*=0.03</math></i>	<i><math>p^*=0.04</math></i>	<i><math>p^*=0.05</math></i>
1	6	3	-	-	-
2	34	17	11	9	-
3	75	38	26	19	16
4	125	63	42	32	26
5	180	91	61	46	37
6	240	121	81	61	49
7	302	152	102	77	62
8	367	184	124	93	75
9	434	218	146	110	88
10	503	253	169	127	102

Si se observan dos fracasos en una muestra y el tamaño de esta muestra es menor o igual a 34, entonces la hipótesis nula  $p^*=0.01$  puede ser rechazada al nivel del 5%

**Tabla 4**

Por ejemplo, supongamos que se presentan seis fracasos en un periodo de monitoreo. La tabla 4 nos indica que para una hipótesis nula de  $p^* = 0.01$ , esta hipótesis puede ser rechazada si existen menos de 241 observaciones en la muestra. Y para una hipótesis de  $p^* = 0.05$ , ésta será rechazada si la muestra contiene menos de 50 observaciones del monitoreo.

Tomando como base la información generada por este monitoreo, es conveniente considerar los resultados de estas mediciones como resultados de una variable Bernoulli y verificar la hipótesis nula para un número fijo de observaciones. La tabla 5 muestra los valores críticos para el número de fracasos correspondientes a esta prueba con un nivel de significancia de 0.05, considerando distintos tamaños de muestra y distintos valores de la hipótesis nula.

<b>Regiones de no rechazo para la prueba PDF (0.005)</b>			
<b>Hipótesis nula <math>p^*</math></b>	<b><math>n=255</math></b>	<b><math>n=510</math></b>	<b><math>n=1000</math></b>
0.010	$X < 7$	$1 < X < 11$	$4 < X < 17$
0.025	$2 < X < 12$	$6 < X < 21$	$15 < X < 36$
0.050	$6 < X < 21$	$16 < X < 36$	$37 < X < 65$
0.075	$11 < X < 28$	$27 < X < 51$	$59 < X < 92$
0.100	$16 < X < 36$	$38 < X < 65$	$81 < X < 120$

x representa el número de fracasos que pueden ser observados en una muestra de tamaño n sin rechazar la hipótesis nula correspondiente con un nivel del 0.050

**Tabla 5**

Al igual que la prueba PF, la prueba PDF tiene un nivel de potencia bajo cuando se trata de muestras pequeñas. Es decir, que para muestras reducidas, las regiones de rechazo se pueden considerar como grandes, indicando que existe una probabilidad significativa de que se acepte la hipótesis nula aun cuando esta sea falsa. La tabla número 6 muestra las tasas del tipo de error II correspondientes a la prueba PDF con un nivel de confianza del 0.05 y para distintos valores de la hipótesis nula. En esta tabla se puede observar que es necesario contar con muestras significativamente grandes para poder de esta forma, reducir la tasa de error tipo II en esta prueba.

<b>Radio del error tipo II para la prueba PDF con un nivel del 0.050</b>				
<b>Hipótesis nula <math>p^*</math></b>	<b>Hipótesis alternativa <math>p</math></b>	<b>Radio error II <math>n=255</math></b>	<b>Radio error II <math>n=510</math></b>	<b>Radio error II <math>n=1000</math></b>
0.010	0.0110	0.9760	0.9490	0.9300
0.010	0.0200	0.7490	0.5570	0.2180
0.010	0.0300	0.3550	0.1010	0.0030
0.010	0.0400	0.1130	0.0080	0.0000
0.025	0.0280	0.9200	0.9410	0.9280
0.025	0.0300	0.8980	0.9010	0.8440
0.025	0.0400	0.6740	0.5230	0.2370
0.025	0.0500	0.3740	0.1540	0.0140
0.050	0.0550	0.9440	0.9130	0.8990
0.050	0.0600	0.9050	0.8190	0.7290
0.050	0.0750	0.6390	0.3290	0.1020
0.050	0.1000	0.1470	0.0090	0.0000
0.075	0.0830	0.9150	0.9030	0.8460
0.075	0.1000	0.6690	0.4780	0.1860

El tipo de error II es la probabilidad de aceptar la hipótesis nula indicada cuando en realidad la hipótesis alternativa es la verdadera.

**Tabla 6**

#### 4.4.3 Verificación basada en la Simulación Histórica.

Una manera alternativa de llevar a cabo una verificación del modelo utilizado para la medición del riesgo se basa en un análisis sobre la función de pérdidas y ganancias (P&L) sobre un periodo de tiempo determinado.

Dado un portafolio, es posible calcular el valor de esta función suponiendo que el mismo portafolio se mantuviera a vencimiento. Los cambios diarios que sufra el valor del portafolio estarán basados verdaderamente en los precios de mercado o tasas de mercado. Como resultado de estas valuaciones se podrá obtener un histograma sobre las variaciones de la función P&L y de esta forma determinar cual es el valor crítico de esta distribución para el cuantil  $(1-\alpha)$ . Una comparación entre el Valor en Riesgo estimado y los valores críticos obtenidos en base la simulación histórica serán las bases para la validación del modelo utilizado.

Aun cuando este método de validación supone que no existen cambios en la composición del portafolio, existe una importante cualidad en él, ya que este método no supone de manera explícita las relaciones de covarianza entre los factores de riesgo. La simulación histórica captura de manera automática las volatilidades de los factores de riesgo así como las covarianzas entre los mismos.

Sin embargo, la desventaja de este procedimiento es el error asociado a la estimación de los valores críticos del histograma. En la mayoría de los casos es necesario poseer una gran cantidad de observaciones para disminuir el error en dicha estimación

Es posible obtener teóricamente una aproximación para la varianza del valor crítico estimado de la distribución obtenida. Sea  $X_p$  el valor crítico para probabilidad de  $p\%$  y para una función de densidad  $f(x)$ , de tal forma que se cumple:

$$\int_{-\infty}^{X_p} f(x) dx = p\%$$

Se puede mostrar (Kendall y Stuart 1960) que la varianza para un estimador de  $X_p$  para una muestra de tamaño  $n$  esta dada aproximadamente por:

$$Var(X_p) \approx \frac{p(1-p)}{n * f(X_p)^2}$$

Por ejemplo, el error estándar para el valor crítico correspondiente a una probabilidad de 0.01, para una muestra de tamaño  $n$  y para un función de distribución normal y con una varianza de  $\sigma^2$  es aproximadamente igual a  $3.7689 \sigma \left( n^{-\frac{1}{2}} \right)$ , mientras que para una probabilidad de 0.05 el error estandar del estimador es aproximadamente  $2.1304 \sigma \left( n^{-\frac{1}{2}} \right)$ .

Esto ejemplos ilustran le propiedad general del error estándar para los valores críticos obtenidos. Como se puede observar, el error incrementa al igual que incrementa la cola de probabilidad asociada al valor crítico. La importancia de monitorear los errores en la estimación de los valores críticos obtenidos de la simulación histórica se puede observar de mejor manera

utilizando la simulación Monte Carlo. La forma tradicional de llevar a cabo esta última simulación, consiste en generar 10,000 muestras independientes para varias funciones de distribución de probabilidad ya conocidas, una vez que se generan los datos se prosigue a obtener el histograma correspondiente y a continuación se estiman los valores críticos en cuestión. Para este ejemplo se tomo como valores críticos a: 1%, 5% y 10%.

La tabla no. 7 nos muestra los resultados de una simulación para la distribución normal estándar y para muestras de tamaño 100, 250, 500, 1000 y 2,500. La tabla no. 8 reporta los mismos resultados para una distribución *t* de Student con ocho grados de libertad. Mientras tanto, la tabla no. 9 da el análisis de la simulación para una distribución *t* con dos grados de libertad.

**Errores en la estimación para los valores críticos obtenidos por simulación histórica y suponiendo una distribución normal estándar, para una muestra de tamaño *n***

Valor crítico	Valor teórico	<i>n</i> =100	<i>n</i> =250	<i>n</i> =500	<i>n</i> =1,000	<i>n</i> =2,500
0.01	-2.326	-2.148	-2.256	-2.285	-2.307	-2.317
error estandar		0.309	0.209	0.159	0.116	0.074
valor mínimo		-3.658	-3.157	-2.910	-2.828	-2.595
valor máximo		-1.212	-1.393	-1.755	-1.867	-1.987
0.05	-1.645	-1.594	-1.624	-1.634	-1.638	-1.643
error estandar		0.203	0.130	0.094	0.066	0.042
valor mínimo		-2.469	-2.136	-2.008	-1.910	-1.808
valor máximo		-0.899	-1.119	-1.289	-1.401	-1.489
0.10	-1.282	-1.254	-1.271	-1.275	-1.278	-1.280
error estandar		0.177	0.107	0.077	0.053	0.034
valor mínimo		-1.865	-1.727	-1.579	-1.476	-1.440
valor máximo		-0.705	-0.811	-0.099	-1.082	-1.140

Los estimados estan basados en los resultados de una simulación realizada en S-plus

**Tabla 7**

**Errores en la estimación para los valores críticos obtenidos por simulación histórica y suponiendo una distribución *t* de student con ocho grados de libertad, para una muestra de tamaño *n***

Valor crítico	Valor teórico	<i>n</i> =100	<i>n</i> =250	<i>n</i> =500	<i>n</i> =1,000	<i>n</i> =2,500
0.01	-2.896	-2.636	-2.787	-2.834	-2.867	-2.884
error estandar		0.528	0.366	0.276	0.203	0.128
valor mínimo		-6.898	-4.749	-4.229	-3.832	-3.469
valor máximo		-1.338	-1.794	-1.814	-2.279	-2.390
0.05	-1.859	-1.803	-1.839	-1.848	-1.855	-1.857
error estandar		0.270	0.176	0.125	0.090	0.057
valor mínimo		-3.111	-2.649	-2.367	-2.303	-2.092
valor máximo		-1.000	-1.178	-1.333	-1.550	-1.636
0.10	-1.397	-1.372	-1.387	-1.391	-1.395	-1.395
error estandar		0.202	0.132	0.092	0.065	0.041
valor mínimo		-2.237	-1.926	-1.735	-1.709	-1.566
valor máximo		-0.680	-0.882	-1.046	-1.169	-1.252

Los estimados estan basados en los resultados de una simulación realizada en S-plus

**Tabla 8**

**Errores en la estimación para los valores críticos obtenidos por  
simulación histórica y suponiendo una distribución t de student con dos grados  
de libertad, para una muestra de tamaño n**

Valor crítico	Valor teórico	n=100	n=250	n=500	n=1,000	n=2,500
0.01	-6.965	-6.235	-6.725	-6.774	-6.881	-6.933
error estandar		3.357	2.201	1.571	1.142	0.715
valor mínimo		-64.393	-31.651	-22.241	-14.128	-11.064
valor máximo		-1.601	2.785	-3.475	-4.242	-4.821
0.05	-2.919	-2.845	-2.887	-2.903	-2.914	-2.918
error estandar		0.738	0.460	0.333	0.233	0.148
valor mínimo		-7.770	-5.193	-4.517	-3.987	-3.613
valor máximo		-1.153	-1.668	-1.863	-2.190	-2.433
0.10	-1.886	-1.862	-1.874	-1.879	-1.882	-1.885
error estandar		0.390	0.248	0.174	0.121	0.079
valor mínimo		-4.273	-3.016	-2.611	-2.377	-2.165
valor máximo		-0.786	-1.081	-1.367	-1.425	-1.594

Los estimados están basados en los resultados de una simulación realizada en S-plus

**Tabla 9**

Los datos observados a lo largo de las tablas 7 a 9, nos revelan patrones de interés. Podemos observar que conforme en número de simulaciones aumenta, de manera contraria en promedio el “error” en el valor crítico estimado disminuye. De igual forma podemos notar que el error estandar en la estimación del valor crítico se incrementa cuando aumenta la probabilidad asociada al valor crítico a estimar.

En particular resulta muy importante el resultado obtenido para la simulación de una función de distribución *t de Student*, donde se puede apreciar que el error en la estimación del valor crítico asociado a la probabilidad de 0.01 y 0.05 se incrementa cuando la función de distribución colas más gordas.

Los resultados obtenidos en estas simulaciones nos sugieren que estimación basada en datos históricos y para valores críticos asociados las probabilidades de 0.01 y 0.05 pueden tener errores significativos y estar sujetas a variaciones en función del tamaño de muestra. Además de concluir, que la simulación se basa en funciones de distribución con colas largar, los resultados de la estimación de estos valores son poco confiables aun cuando se tengan muestras grandes.



## CONCLUSIONES

- La existencia de nuevos productos financieros cada vez mas “complicados”, así como el apetito de “mayores ganancias”, hacen que las instituciones financieras y de igual forma las no financieras se encuentren expuestas a niveles de riesgos financieros cada vez mayores y que en más de una ocasión han concluido con la quiebra de la Institución.
- La importancia de una adecuada “Administración Integral de Riesgos” no solo radica en la correcta medición de los riesgos una vez que estos han sido tomados, es necesario administrar los medios o canales a través de los cuales la institución incurre en ellos, para que de esta forma se tenga una adecuada identificación de los mismos y de esta forma proseguir a su control e información.
- Otro aspecto importante de la administración de riesgo dentro de una organización, es impulsar y colaborar en la culturización de la misma sobre los riesgos en que ésta incurre por sus operaciones, así como proporcionar información oportuna a las áreas tomadoras de riesgo y que estos informes contribuyan en la toma de decisiones.
- Ya sea por requerimientos de los organismos regulatorios o bien como en algunos casos, por políticas propias de las instituciones, el desarrollo y adecuación de modelos de medición del riesgo de mercado es un herramienta fundamental en el proceso de reconocimiento y control del mismo.
- Aun cuando existen modelos ampliamente reconocidos en el medio, las instituciones trabajan en obtener medidas de riesgo más “reales” para la actividad propia de la institución. Y de esta forma, disminuir el efecto económico y contable de dicha exposición.
- Los supuestos utilizados en todos los modelos de medición de riesgo son repetidamente disputados en la práctica, sin embargo, mientras no existan otras alternativas de medición, entonces seguirán siendo tomados como ciertos.
- Una ventaja del método “Maximum Loss” radica en que no requiere de información adicional a la que actualmente se genera como input para la medida “VaR”.
- La posibilidad de identificar bajo la metodología “Maximum Loss” el peor escenario en los factores de riesgo, el cual incurriría en un incremento en la posibilidad de una Pérdida Potencial, es una herramienta muy valiosa para el administrador de riesgos de la

Institución. En base a esta información, se pueden desarrollar estrategias de negocio o bien operaciones de cobertura.

- Sin embargo como se pudo observar, la estimación de la exposición al riesgo de mercado bajo el Método ML es mayor con respecto a la estimación del VAR. Este punto cobra suma importancia ya que si alguna institución se interesara en implementar dicha metodología para la medición de su riesgo, entonces, tendría requerimientos de capital más altos, lo cual no resulta ser muy atractivo.
- El uso de cualquier modelo de pronóstico o estimación es susceptible de mejoras o corrección de supuestos. Para esto, es necesario medir el desempeño en las mediciones del riesgo de mercado. En conjunto de pruebas empleadas para este fin se llaman pruebas de Back-Testing.
- El uso de estas pruebas y en el caso de que como resultado de las mismas se llegue a que se violan los supuestos, nos proporciona un punto de partida para realizar los ajustes necesarios, y en caso pertinente implementar nuevos modelos de medición.
- No se pretende identificar a la medida de riesgo “Maximum Loss” como la mejor aproximación del riesgo de mercado. El objetivo del trabajo y conclusión general es demostrar que con el adecuado respaldo teórico, supuestos adecuados y sustentables es posible trabajar en el mejoramiento de los modelos de medición del riesgo de mercado. Proporcionando de esta forma nuevas herramientas de decisión a las diversas Instituciones Financieras.
- Cabe mencionar que lo expuesto en el presente trabajo, tiene su símil en lo que a medición de riesgo de crédito se refiere, en donde se puede identificar frecuentemente nuevos enfoques y resultados proporcionados por nuevos métodos de medición del mismo.

Actualmente las Instituciones Financieras Former Swiss Bank y Dresdner Bank han implementado la metodología “Maximum Loss”, sin embargo solo es utilizada para fines internos de administración de riesgos y es complementaria a los modelos de VAR que ambas instituciones emplean.

Los retos en la implementación de esta metodología se encuentran en la dificultad para que los sistemas generen o estimen las funciones cuadráticas de P&L. La implementación en las instituciones mencionadas fue factible dado que sus sistemas de riesgos genera automáticamente dichas funciones.

## APENDICE I

### ***Nociones de Cálculo Estocástico.***

En este apartado como su nombre lo indica solo se pretende mostrar algunos de los elementos del Cálculo Estocástico y sus aplicaciones en las finanzas. El principal supuesto, es el hecho de que la evolución de una tasa de mercado o bien de un factor de riesgos puede ser modelada por medio de un proceso estocástico.

**Definición 1\*.-** Un proceso estocástico es una familia de variables aleatorias  $(X_t)_{t \geq 0}$  definidas sobre un espacio de probabilidad  $(\Omega, A, P)$  con valores en un espacio medible  $(E, \mathcal{E})$ .

En la práctica, el índice  $t$  representa el tiempo y de esta forma el proceso puede ser entendido como una función  $X: R^+ \times \Omega \rightarrow E$ . La filtración  $F_t$  representa toda la información del proceso en el instante de tiempo  $t$ .

**Definición 2\*.-** Sea  $(\Omega, A, P)$  un espacio de probabilidad. Una familia  $(F_t)_{t \geq 0}$  de  $\sigma$ -álgebras de  $A$  es una filtración si  $F_s \subseteq F_t \subseteq A$  para cualesquiera  $0 \leq s < t$ .

**Definición 3\*.-** Un proceso  $(X_t)_{t \geq 0}$  se dice adaptado a  $(F_t)_{t \geq 0}$ , si  $X_t$  es  $F_t$ -medible para todo  $t$ .

De igual forma, podemos hacer uso del proceso  $(X_t)_{t \geq 0}$  para definir su propia filtración.

**Supuesto 4\*.-** En lo sucesivo, tomaremos a la filtración natural del proceso  $(X_t)_{t \geq 0}$  como sigue:

$$F_t = \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t) \cup \{A \in A \mid P(A) = 0\}$$

Entre los procesos estocásticos que juegan un rol muy importante dentro de las finanzas, se encuentra el movimiento Browniano o también conocido como Proceso de Wiener.

**Definición 5\*.-** Un proceso  $(X_t)_{t \geq 0}$  con  $X: R^+ \times \Omega \rightarrow R$  es llamado movimiento Browniano si este proceso tiene incrementos independientes y estacionarios además si sus trayectorias continuas.

Cuando en un movimiento Browniano  $(B_t)_{t \geq 0}$  se cumplen las siguientes condiciones:

- 1.-  $B_0 = 0$ ,
- 2.-  $E(B_t) = 0 \quad \forall t$
- 3.-  $E(B_t^2) = t \quad \forall t$

a este movimiento se le denomina movimiento browniano estándar. En este caso, se puede demostrar que  $B_t \sim N(0, t)$ , y de manera más general observamos que  $B_t - B_s \sim N(0, t - s)$ ,  $0 \leq s \leq t$ . Una vez que se ha definido el movimiento browniano podemos continuar con el proceso de itô.

**Definición 6\*.-** Decimos que un proceso  $(X_t)_{0 \leq t \leq \tilde{t}}$  es un proceso de itô si

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s, \quad \forall t \leq \tilde{t}.$$

donde  $X_0$  es  $F_0$ -medible,  $(K_t)_{0 \leq t \leq \tilde{t}}$  y  $(H_t)_{0 \leq t \leq \tilde{t}}$  son ambos  $F_t$ -adaptadas, además de cumplirse que  $\int_0^{\tilde{t}} |K_s| ds < \infty$  y  $\int_0^{\tilde{t}} |H_s|^2 ds < \infty$

Finalmente, el lema de itô nos indica como derivar una función  $g(X_t)$  con  $(X_t)$  un proceso de itô.

**Teorema 7\*.-** Sea  $(X_t)_{0 \leq t \leq \tilde{t}}$  un proceso de itô  $X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s$  y  $g$  una función dos veces diferenciable (i.e.  $g \in C^2$ ), entonces:

$$g(X_t) = g(X_0) + \int_0^t g'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t g''(X_s) d\langle X, X \rangle_s,$$

donde:

$$\langle X, X \rangle_s = \int_0^s H_s^2 ds \quad \text{y} \quad \int_0^s g'(X_s) dX_s = \int_0^s g'(X_s) K_s ds + \int_0^s g'(X_s) H_s dB_s$$

Una prueba de este teorema se puede consultar en Karatzas y Shreve(1998), pp. 149.

Cabe mencionar que en algunas ocasiones este teorema se presenta en su forma diferencial como sigue:

$$dg(X_t) = g'(X_t)dX_t + \frac{1}{2}g''(X_t)d\langle X, X \rangle_t.$$

## APENDICE II

### *Elementos de álgebra lineal.*

Sea  $C$  la matriz de covarianzas de un vector aleatorio  $\underline{X}$  y sea  $\underline{\mu}$  la media de  $\underline{X}$ , entonces las entradas de la matriz  $C$  se obtiene de la siguiente ecuación  $C_{i,j} = E[(x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j)]$ . Para que la matriz  $C$  matriz sea una matriz semi-definida positiva se debe cumplir que:

$$\sum_{i,j} w_i C_{i,j} w_j \geq 0 \text{ para cualquier vector } w$$

Sea  $w$  un vector cualquiera, entonces tenemos:

$$\begin{aligned} w^T C w &= \sum_{i,j} w_i w_j C_{i,j} \\ &= \sum_{i,j} w_i w_j E[(x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j)] \\ &= E \left[ \sum_{i,j} w_i w_j (x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j) \right] \\ &= E \left[ \left\{ \sum_i w_i (x_i - \mu_i) \right\}^2 \right] \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

La igualdad se presenta solo cuando  $\sum_i w_i (x_i - \mu_i) = 0$ . De esta forma podemos afirmar que  $C$  es una matriz definida positiva.

Si una matriz  $A$  cumple con ser simétrica y definida positiva como lo es la matriz de covarianzas, entonces ésta matriz puede ser descompuesta de manera eficiente de la siguiente forma  $A = LL^T$ , donde  $L$  es una matriz triangular inferior con elementos positivos en la diagonal. A esta descomposición matricial se conoce como factorización de Cholesky.

Una variación de esta factorización es en la siguiente forma:  $A = RR^T$  donde  $R$  es una matriz triangular superior.

Para obtener la matriz  $L$  basta con igualar los coeficientes de la siguiente ecuación:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & \dots & l_{n1} \\ 0 & l_{22} & \dots & l_{n2} \\ 0 & 0 & \dots & l_{n3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & l_{nn} \end{bmatrix}$$

de esta forma obtenemos que:

$$\begin{aligned} a_{11} = l_{11}^2 & \Rightarrow l_{11} = \sqrt{a_{11}} \\ a_{21} = l_{21} \times l_{11} & \Rightarrow l_{21} = a_{21} / l_{11}, \dots, l_{n1} = a_{n1} / l_{11} \\ a_{22} = l_{21}^2 + l_{22}^2 & \Rightarrow l_{22} = \sqrt{(a_{22} - l_{21}^2)} \\ a_{32} = l_{31}l_{21} + l_{32}l_{22} & \Rightarrow l_{32} = (a_{32} - l_{31} \times l_{21}) / l_{22} \end{aligned}$$

En general se cumple para  $i=1,2,\dots,n$  y para  $j=i+1,\dots,n$

$$l_{ii} = \sqrt{\left( a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2 \right)}$$

$$l_{ji} = \left( a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} \times l_{ik} \right) / l_{ii}$$

Dado que la matriz  $A$  es una matriz simétrica y definida positiva, entonces la expresión bajo el radical es siempre positiva.

## REFERENCIA BIBLIOGRAFICA

- i. Karlin S., *A First Course in Stochastic Processes*, EUA, Academic Press, 1975.
- ii. Karatzas I., Shreve S., *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, EUA, Springer Verlag, 1997.
- iii. Merton R., *Continuous-Time Finance*, EUA, Blackwell Publishers, 1992.
- iv. Wilson T.C., *Plugging the Gap*, EUA, Risk Magazine, 1994.
- v. Risk Metrics, J.P. Morgan & Co., *Technical Document*, EUA, J.P. Morgan & Co, 1995.
- vi. Schaefer S.M., *Risk Assessment and VaR Models*, Francia, RISK Workshop, 1995.
- vii. Jorion P., *Financial Risk Manager Handbook*, EUA, John Wiley & Sons, 2003.
- viii. Frauendorfer K., Königspeger E., *Downside Approximation of the P&L Distribution*, EUA, RiskLab Technical Report, 1995.
- ix. Hull J.C., *Options, Futures and other Derivatives Securities*, EUA, Prentice-Hall, 1993.
- x. Beckström R., Campbell A., *An Introduction to VaR*, EUA, C-ATS Software, 1995.
- xi. Strang S., *Linear Algebra and its Applications*, EUA, International Thomson Publishing, 1988.
- xii. Fletcher R., *Practical Methods of Optimization*, EUA, John Wiley & Sons, 1987.
- xiii. Ash R., Doléans-Dade C., *Probability and Measure Theory*, EUA, Academic Press, 1999.