



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**EDADES DE CUMULOS GLOBULARES
LA EDAD DEL UNIVERSO
Y LIMITES A LA ECUACIÓN DE ESTADO
DE LA ENERGIA OSCURA**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

FISICA

P R E S E N T A:

LIRIO EURIDICE APARICIO SERVIN

DIRECTOR DE TESIS: XAVIER NICOLAS HERNANDEZ DORING



2004



**FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION ESCOLAR**



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"Edades de Cúmulos Globulares, la edad del Universo y límites a la ecuación de estado de la Energía Oscura"

realizado por Aparicio Servín Lirio Eurídice

con número de cuenta 8910140-9 , quien cubrió los créditos de la carrera de: Física

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis

Propietario

Dr. Xavier Nicolás Hernández Doring

Propietario

Dr. Roberto Allan Sussman Livovsky

Propietario

Dr. Sergio Mendoza Ramos

Suplente

Dr. Ángel Prieto Ruiz

Suplente

Dr. Axel Ricardo de la Macorra Pettersson Moriel

Consejo Departamental de Física

Alicia Zarzosa Pérez

M. en C. ALICIA ZARZOSA PÉREZ
Coordinadora de Licenciatura



FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Dedicatoria

Este trabajo lo dedico a mi familia:

Mis padres, Guillermina Servín y Juan Aparicio.

Mis hermanos, Diana, Gerardo, Laura y J. Guillermo Aparicio Servín.

Mis cuñados, Jorge Morales y Yolén Mancilla.

Mis sobrinas, Yolén y Giselle Aparicio.

Agradecimientos

Agradezco a:

El Dr. Xavier Hernández, mi asesor. Hizo que enfrentara retos que yo creía imposibles. Le agradezco que haya tenido fe en mi y que haya compartido sus conocimientos conmigo. Cambió mi manera de pensar en varios aspectos. Muchas gracias.

Los sinodales, el Dr. Axel de la Macorra, el Dr. Angel Prieto, el Dr. Sergio Mendoza y el Dr. Roberto Sussman que revisaron mi tesis.

El Dr. Sergio Mendoza por aclarar mis dudas tanto de física como de cómputo. También le agradezco que nos haya permitido usar su máquina para correr los programas.

Mis maestros en el Instituto de Astronomía, el Dr. Dany Page, el Dr. William Lee, el M. en C. José Peña y la M. en C. Laura Parrao. Espero seguir aprendiendo de ellos.

Mis maestras en el Instituto de Geofísica, Dra. Blanca Mendoza y Dra. Dolores Maravilla. Gracias a ellas retomé el interés por mi carrera.

El Dr. Arturo Olvera del IIMAS. La experiencia no fue del todo provechosa, pero me dió una pista de cuál era el camino. En ese tiempo fue bueno contar con la amistad de las chicas del IIMAS: Sara Zambrano, Lucia Doval, Ana Berta Pérez y Norma Soria[†].

La profesora Guadalupe Carballo del CCH Vallejo. Confió en mi, y me dió todas las facilidades para realizar mi trabajo. Le agradezco que lo haya impreso.

El Dr. Rafael Soto. Hay personas que son las indicadas para encaminar a los estudiantes de nuevo ingreso a la carrera de Física. Fue una gran experiencia haber trabajado con una de ellas.

El Dr. Andrés Porta. Gracias a él llegué al instituto de Astronomía.

Todo el personal del Instituto de Astronomía pero en particular a: el Lic. Marco Mostalac, el Sr. Eduardo Almendra, el Sr. Filemón Contreras, las secretarias Juana Orta y Verónica Alemán y las tres bibliotecarias, Eloísa Villanueva, Verónica Mata y Gloria Pérez.

Los licenciados del departamento de cómputo: Gilberto Zavala, Liliana Hernández, Carmelo Guzmán, Alfredo Díaz y Francisco Ruíz. Muchas veces me sacaron de apuros.

Isabel Franco por su ayuda con el formato latex.

Lucía Adame, Eduardo Rubio, Juan Manuel Romero y Juan Carlos Hidalgo que me sugirieron diversas ideas para la exposición de esta tesis.

Leticia Rojas quién grabó todos los coloquios del Instituto de Astronomía durante varios meses, sin remuneración económica. Gracias a una de esas grabaciones me fue posible escribir la sección III.8.

La banda de Astronomía, que me brindó su amistad: Iliana García, Juan Carlos Hidalgo, Tomás Verdugo, Giovanni Bernal, Eduardo Rubio, Janet Torrealba, Guillermo Manjarrez, Eric Martínez, Lucía Adame, Primoz Kadjic, Nahiely Flores, Leticia Rojas, Isabel Franco, Carlos Zaldívar, Luz Calderón, Rafael Barbosa, Hugo Olivares, Cesar López y Martín Huarte. Sobre todo agradezco la amistad del "círculo". Platicar con ellos me hizo llevaderos muchos momentos difíciles.

Todas las personas que trabajan, estudian e investigan en el Instituto de Astronomía. Todos ellos hacen que este Instituto sea uno de los mejores lugares para laborar en CU.

Mis amigos de la facultad: Alma Heredia, Leticia Rivera, Elizabeth Segundo, Jorge Luis Mérida, Paola Palacios y recientemente Juan Manuel Romero. Hemos pasado muchas cosas juntos, agradezco su compañía.

La Sra. Martha Reyes y la Sra. Gloria Albet. Me alegra haberlas conocido.

El Dr. Vicente Escutia, el Dr. Pedro Quintero y la Dra. Aidé Sobrino. Su labor es muy importante.

Mi familia. A mis padres que me apoyan y a mis hermanos que siempre aspiran a más. Ellos me impulsan a seguir adelante. Cuando todas las demás puertas se cierran, la de mi casa está abierta. Gracias.

Contenido

Dedicatoria	iii
Agradecimientos	v
Contenido	vii
Lista de Figuras	xi
Lista de Tablas	xiii
Abreviaturas	xv
Notación	xvii
Introducción	xix
I Relatividad General y Cosmología	1
I.1 Introducción	1
I.2 Tensor métrico y tensor energía-momento	2
I.3 Las ecuaciones de campo de Einstein	3
I.4 La constante cosmológica de Einstein	4
I.5 El principio cosmológico	5
I.6 La métrica de Robertson-Walker	6
I.7 La ley de Hubble	11
I.8 El Redshift (corrimiento al rojo)	12
I.9 Las ecuaciones de Friedmann	14
I.10 Dinámica del modelo de Friedmann y parámetros	14
I.11 El modelo estático de Einstein	17
I.12 La ecuación del fluido	18
I.13 La ecuación de estado	19
I.13.1 Materia ($\omega = 0$)	20
I.13.2 Radiación ($\omega = 1/3$)	20

I.13.3	La constante cosmológica ($\omega = -1$)	21
I.14	La ecuación de Friedmann en términos de las Ω 's	21
I.15	La materia y la radiación	23
I.16	La constante cosmológica	23
I.16.1	Física de la constante cosmológica	23
I.16.2	Perspectivas observacionales	25
I.16.3	El efecto de Λ en los modelos cosmológicos	26
I.17	Modelos de rebote y "loitering"	27
I.18	La ecuación de Friedmann y la edad del Universo	28
I.19	Los resultados más recientes	32
II	Cúmulos Globulares	41
II.1	Descripción	41
II.2	El Diagrama Color Magnitud de un Cúmulo Globular	42
II.2.1	La secuencia principal y el turn off	44
II.2.2	La rama de las subgigantes (Hertzsprung Gap)	46
II.2.3	La rama de las gigantes rojas	46
II.2.4	La rama horizontal	46
II.2.5	La rama asintótica de las gigantes	47
II.2.6	Las enanas blancas	48
II.2.7	Blue Stragglers	48
II.2.8	Contaminación de estrellas de campo	48
II.2.9	Composición química	48
II.2.10	El segundo parámetro	50
II.3	Distancias	50
II.4	Edades absolutas de GCs	51
II.4.1	Métodos para determinar edades de Cúmulos Globulares	52
III	El método de Maximum Likelihood (ML)	55
III.1	Conceptos básicos	55
III.2	Función likelihood \mathcal{L}	57
III.3	Inferencia bayesiana y máximo likelihood	58
III.4	Función log-likelihood	59
III.5	Ejemplo: mediciones repetidas con diferente precisión	60
III.6	Información de la muestra	61
III.7	Propiedades asintóticas de \mathcal{L} y estimadores de ML	65
III.8	Determinación de parámetros de GCs	68
III.9	Aplicación del método de ML a una muestra de GCs	73

IV Resultados	79
IV.1 Edad del Universo con la muestra preliminar de GCs	79
IV.2 La ecuación de estado de la Energía Oscura	85
IV.3 Conclusiones	87
A Los modelos de Friedmann-Lemaître	93
A.1 Los modelos de Friedmann	93
A.1.1 Caso 1: $k = +1$, $\Lambda = 0$	94
A.1.2 Caso 2: $k = -1$, $\Lambda = 0$	94
A.1.3 Caso 3: $k = 0$, $\Lambda = 0$. Modelo de Einstein-de Sitter	95
A.2 Los modelos vacíos de Lemaître	96
A.2.1 Caso 4: $k = +1$, $\Lambda \neq 0$	96
A.2.2 Caso 5: $k = -1$, $\Lambda \neq 0$	97
A.2.3 Caso 6: $k = 0$, $\Lambda \neq 0$. Modelo de de Sitter	98
B Algunos conceptos astronómicos	101
B.1 Fotometría y magnitudes	101
B.2 El diagrama HR y el CMD	105
B.3 Reacciones nucleares y el diagrama HR	106
B.4 Estrellas binarias en cúmulos globulares	107
Bibliografía	109

Lista de Figuras

I.1	Evolución de distintos tipos de Universo en el plano $\Omega_\Lambda - \Omega_M$	29
I.2	Soluciones numéricas a la ecuación de Friedmann con $\Omega_k = 0$ y $h = 0.7$	35
I.3	Factor de escala a vs t para cuatro modelos de quiescencia	36
I.4	Parámetro de Hubble H vs. t para cuatro modelos de quiescencia	37
I.5	Corrimiento al rojo z vs. t para cuatro modelos de quiescencia	38
I.6	Edad vs ω para modelos de quiescencia con $-400 \leq \omega \leq 0$	39
I.7	Edad vs ω para modelos de quiescencia con $-10 \leq \omega \leq 0$	40
II.1	CMD del GC NGC5272 (M3) con 18,755 estrellas	43
II.2	CMD esquemático de un GC típico	44
III.1	CMD esquemático para ilustrar el método de X. Hernández y D. Valls-Gabaud	72
III.2	Función log-likelihood y algunas parábolas para la muestra sintética	76
III.3	Criterio para escoger la mejor parábola aplicado a la muestra sintética	77
IV.1	CMD de NGC3201 con 7,262 estrellas	80
IV.2	CMD de NGC4590 con 3,645 estrellas	81
IV.3	CMD de NGC6093 con 3,789 estrellas	82
IV.4	Comparación de edades	83
IV.5	Comparación de distancias	89
IV.6	Función log-likelihood y algunas parábolas para la muestra real preliminar	90
IV.7	Criterio para escoger la mejor parábola aplicado a la muestra real preliminar	91
IV.8	Fig. 3 de Nesseris & Perivolaropoulos 2004	92
A.1	a/a_* vs t/a_* , Caso 1: $k = 1 \Lambda = 0$	95
A.2	a/a_* vs t/a_* , Caso 2: $k = -1 \Lambda = 0$	96
A.3	$c_1 a$ vs t , Caso 3: $k = 0 \Lambda = 0$. Modelo de Einstein-de Sitter	97
A.4	A vs T, Casos 4, 5 y 6	99

Lista de Tablas

I.1	Tipos de universo, según los valores de ρ_T , Ω_T y k	16
I.2	Edades para cuatro modelos de quiescencia, $\omega = \text{constante}$	31
I.3	Tabla 6 de Spergel et al 2003	34
III.1	Muestra sintética de cúmulos globulares	74
IV.1	Muestra real preliminar de cúmulos globulares	79
IV.2	Límites inferiores a la edad del Universo (otros autores)	84
IV.3	Límites a ω (otros autores)	86

Abreviaturas

Las abreviaturas que aparecen en esta tesis se enlistan a continuación en orden alfabético:

ACBAR - Arcminute Cosmology Bolometer Array Receiver.

AGB - Asymptotic Giant Branch - Rama asintótica de las gigantes.

BS - Blue Straggler.

CBI - Cosmic Background Imager.

CDM - Cold Dark Matter - Materia oscura fría

CMBR - Cosmic Microwave Background Radiation - Radiación cósmica de fondo en microondas.

CMD - Colour Magnitude Diagram - Diagrama color magnitud.

COBE - Cosmic Background Explorer.

DE - Dark Energy - Energía oscura.

FRW - Modelos que tienen métrica de Robertson-Walker y cumplen las ecuaciones de Friedmann.

GC - Globular Cluster - Cúmulo globular.

GUTs - Grand Unified Theories - Teorías de gran unificación.

Gyr - Gigayear (1×10^9 años).

HB - Horizontal Branch - Rama Horizontal.

HDM - Hot Dark Matter - Materia oscura caliente.

HIPPARCOS - High Precision Parallax Collecting Satellite.

HR - Diagrama Hertzsprung-Russell.

HST - Hubble Space Telescope.

IC - Index Catalogues.

IMF - Initial Mass Function - Función inicial de masa.

LMC - Large Magallanic Cloud - Gran Nube de Magallanes.

M - Messier (catálogo).

MS - Main Sequence - Secuencia principal.

NGC - New General Catalogue.

Pop I - Population I - Población I.

Pop II - Population II - Población II.

RGB - Red Giant Branch - Rama de las gigantes rojas.

SDSS - Sloan Digital Sky Survey.

SGB - Sub Giant Branch - Rama de las subgigantes.

TO - Turn Off.

WD - White Dwarf - Enana blanca.

WMAP - Wilkinson Microwave Anisotropy Probe.

XH-DVG - Método de X. Hernández y D. Valls-Gabaud.

ZAHB - Zero Age Horizontal Branch - Rama horizontal de edad cero.

ZAMS - Zero Age Main Sequence - Secuencia principal de edad cero.

2dFGRS - two degree Field Galaxy Redshift Survey.

Notación

En todas las ecuaciones se usa que la velocidad de la luz $c = 1$. Los índices latinos i, j, k , toman los valores 0, 1, 2, 3, mientras que los índices griegos α, β, μ, ν , toman los valores 1, 2, 3.

A continuación se enlistan los símbolos usados en la tesis, en el orden en el que aparecen en el texto:

\hbar - Constante de Planck.

G - Constante de gravitación newtoniana.

Λ - Constante cosmológica.

ρ - Densidad.

p - Presión.

H - Parámetro de Hubble.

H_0 - Constante de Hubble.

h - Parámetro adimensional de Hubble.

z - Redshift, Corrimiento al rojo.

a - Factor de escala, parámetro de expansión.

r, θ, ϕ - Coordenadas comóviles.

t - Tiempo.

Ω - Parámetro de densidad para la materia (relativista + no relativista).

Ω_Λ - Parámetro de densidad para la energía oscura.

Ω_T - Parámetro de densidad total.

ρ_c - Densidad crítica.

ρ_Λ - Densidad de la energía oscura.

ρ_T - Densidad total.

Ω_R - Parámetro de densidad de la radiación.

Ω_M - Parámetro de densidad de la materia.

Ω_K - Parámetro de densidad asociado a la curvatura.

M_\odot - Una masa solar.

[Fe/H] - Metalicidad.

x - Variable aleatoria.

x - Número en los reales.

$E(x)$ - Valor esperado de x .

S - Estimador.

σ^2 - Varianza.

σ - Desviación estándar.

B - Sesgo.

\mathcal{L} - Función likelihood (función de verosimilitud).

l - Función log-likelihood.

V - Magnitud aparente en la banda V (visual).

$(V - I)$ - Color.

Z - Metalicidad.

μ - Módulo de distancia.

$E(V - I)$ - Reddening, enrojecimiento.

Introducción

La Cosmología es la rama de la Física que estudia el origen y la evolución del Universo a gran escala.

La Cosmología opera bajo las restricciones especiales de la astronomía, que permiten mirar más no tocar, pero acorde a las reglas y procedimientos que han probado ser exitosos en otros campos relacionados, desde la astronomía estelar, hasta la física de partículas.

La Cosmología es una ciencia peculiar. Por definición, el Universo es único. No podemos proceder como en otras áreas de la física y preparar un conjunto de universos con valores ligeramente diferentes de los parámetros para buscar diferencias o correlaciones en sus comportamientos. Sólo tenemos un Universo, y este debe proporcionarnos las leyes empíricas que tratamos de explicar con la teoría, así como la evidencia experimental que usamos para probar las teorías que hemos formulado.

¿Cuándo comenzó la Cosmología moderna? De hecho, uno debe remontarse hasta Newton y su correspondencia con Bentley entre 1692 y 1693 (Murdin 2001). Un sistema de partículas puntuales interactuando vía gravitación newtoniana no puede estar en una configuración de equilibrio estático estable. Por ejemplo, un número infinito de tales partículas distribuidas en una red cúbica regular. Por simetría, la fuerza resultante sobre cada una de las partículas será cero. Sin embargo, la más pequeña desviación del equilibrio disparará la inestabilidad y causará que las partículas se muevan. La conclusión de la correspondencia entre Newton y Bentley fue que el Universo debe ser infinito, de otra manera colapsaría hacia el centro bajo la influencia de la fuerza atractiva de la gravedad. También reconocieron que un Universo infinito lleno de estrellas es gravitacionalmente inestable.

En 1609 Galileo demostró que la Vía Láctea se podía resolver en estrellas al ser observada con el telescopio. Wright fue el primero en proponer en 1750 en su "Theory of the Universe" que la Galaxia es un disco aplanado de estrellas, y esta idea fue reforzada por el trabajo de Herschel (Abell 1987).

Aún antes del descubrimiento del telescopio, la gente había notado que existen objetos "nebulosos" (de allí el nombre de nebulosas), cuya apariencia es difusa o borrosa, distinta a la de las estrellas. Durante el siglo XVIII hubo argumentos de tipo filosófico debidos a Kant, Lambert, Swedenborg y Wright de que estos objetos eran "universos islas" similares a la Vía Láctea, pero sin ningún fundamento observacional.

Messier comenzó la clasificación de las brillantes nebulosas. Su catálogo, compilado entre 1771 y 1784, contiene una mezcla de los más brillantes objetos Galácticos y extragalácticos. Aún nos referimos a éstos por su número M (Messier). El registro sistemático de nebulosas fue empezado

por los Herschel (William, su hermana Caroline y el hijo de él, John). Como resultado, en 1864 se publicó el "General Catalogue", que contenía 5,079 objetos. En 1888 Dreyer publicó un catálogo ampliado, el "New General Catalogue of Nebulae and Clusters", el cual junto con los dos catálogos suplementarios "Index Catalogues" contenían alrededor de 15,000 objetos. Aún nos referimos a estos objetos por sus números NGC o IC (Longair 1998).

Mientras el registro de nebulosas continuaba, su naturaleza seguía siendo un misterio. La gran interrogante era si las "nebulosas espirales" eran o no objetos de nuestra Galaxia o eran sistemas más distantes. Este problema culminó en lo que se conoce como "el gran debate" que se ocupó de dos asuntos relacionados: el primero ¿cuál es el tamaño de nuestra Galaxia? y el segundo ¿son las nebulosas espirales miembros de nuestra Galaxia o son "universos islas" muy lejos de los confines de nuestra Galaxia?

El asunto fue resuelto de manera final y concluyente mediante las observaciones de Hubble de cefeidas variables en la nebulosa de Andrómeda. Usando la muy estrecha correlación entre periodos y luminosidades de las cefeidas descubierta por Leavitt en 1912, Hubble pudo establecer que las nebulosas espirales son sistemas extragalácticos (Hubble 1929).

Otro aspecto desde el punto de vista de Newton conduciría a un largo debate que aún no se resuelve por completo. En todos sus escritos, Newton rechazó enfáticamente la idea de que el movimiento de un cuerpo sólo se podía describir con respecto a otros cuerpos: para él, todo movimiento tenía lugar con respecto a un sistema de espacio y tiempo absolutos. Este asunto fue revivido por Mach en 1872 quien argumentó que ya que la aceleración de las partículas sólo se puede medir con respecto a otra materia en el Universo, la existencia de inercia para una partícula debe depender de la existencia de otra materia; un sistema de referencia inercial local está determinado por el sistema de referencia de las estrellas lejanas. Esta idea se conoce como el *Principio de Mach*, y fue una fuerte influencia para Einstein cuando formuló la Relatividad General. Aún surge la controversia al debatir si la Relatividad General es una teoría realmente machiana, es decir, una en la que el sistema de referencia en reposo de la distribución de materia a gran escala es inevitablemente un sistema de referencia inercial.

En 1915 Einstein terminó la versión definitiva de su Teoría General de la Relatividad que describe como el espacio-tiempo se distorsiona por la presencia de materia y a su vez, como la materia se mueve a lo largo de trayectorias en el espacio-tiempo curvado. Al buscar una solución para el Universo a sus ecuaciones de campo, Einstein tenía en mente que debería ser posible incorporar el principio de Mach en un modelo de la estructura a gran escala del Universo.

El advenimiento de la Teoría de la Relatividad General ofreció una posible solución a los conflictos que comenzaban a surgir entre las leyes newtonianas de la dinámica, la gravitación y la Relatividad Especial.

Al igual que Newton, Einstein halló que sus ecuaciones de la Relatividad General de 1915 no permitían un modelo estático, y cuando en 1917 produjo su propia solución, resolvió el problema introduciendo un término ad hoc adicional a sus ecuaciones: la constante cosmológica Λ . No

había evidencia que justificara la introducción de este término arbitrario y artificial; pero debido al prestigio de Einstein, la gente se convenció de que era necesario añadirlo (de Sitter y Lemaître siempre incluyeron a Λ en sus ecuaciones). El modelo estático de Einstein requería que el Universo fuera cerrado.

Einstein creyó que la introducción de Λ no sólo daba soluciones estáticas para el Universo, sino que también permitía incorporar el principio de Mach a la Relatividad General, en el sentido de que no podían existir soluciones en ausencia de materia. Sin embargo de Sitter demostró que esto es incorrecto al hallar soluciones a las ecuaciones aún si no había materia presente en el Universo. Este modelo (que fue la primera solución cosmológica importante) se expande y tiene densidad cero. En esa época la creencia general en un Universo estático era muy fuerte y el modelo fue considerado como una curiosidad, aunque a la larga ha jugado un papel clave en la Cosmología.

Tal vez es irónico que la solución de Einstein tenía materia, pero era estática y por consiguiente no tenía corrimientos al rojo, mientras que la solución de de Sitter carecía de materia pero tenía corrimientos al rojo. Lo que se necesitaba era un término medio entre ambas soluciones: una con materia y corrimientos al rojo. Esto llegó con los trabajos de Friedmann y Lemaître.

En 1922 Friedmann publicó el primero de dos artículos en los que desarrolló soluciones expansivas a las ecuaciones de Einstein para las que no se requería la constante cosmológica (Friedmann 1922). Einstein difícilmente se refirió al trabajo de Friedmann, excepto en dos artículos de media página, el primero criticando al artículo de Friedmann y el segundo retractándose de la crítica. No fue sino hasta que Lemaître redescubrió de manera independiente las mismas soluciones, que las contribuciones de Friedmann fueron apreciadas; lamentablemente Friedmann había muerto de tifoidea en 1925 (Valls-Gabaud et al. 1997).

Estas soluciones, conocidas como los *modelos de Friedmann-Lemaître*, son fundamentales para la Cosmología moderna y fueron los primeros pasos para establecer el Modelo Cosmológico Estándar. Estas soluciones casi no se basaron en datos observacionales -la gente ni siquiera sabía que las galaxias eran sistemas externos a la Vía Láctea. Ciertamente no había evidencia para las suposiciones de homogeneidad e isotropía que eran fundamentales para estos modelos.

Lemaître notó que en su solución, las galaxias (él aún las llama nebulosas) se alejarían unas de otras debido a la expansión cósmica, y escribió una fórmula correcta para el corrimiento al rojo aparente en la luz recibida de estos objetos. Robertson fue el primero en predecir en 1928 la ley de expansión lineal que después observaría Hubble.

La Cosmología moderna se basa en una caracterización simple del Universo. El Universo es notablemente simple en promedio a grandes escalas, cerca de ser homogéneo e isotrópico (*el principio cosmológico*). Robertson en 1935 y Walker en 1936 trabajaron de manera independiente el elemento de línea más general que describe tal espacio-tiempo. En sus trabajos vemos por primera vez soluciones homogéneas e isotrópicas a las ecuaciones de campo de Einstein, derivadas a partir de conceptos geométricos claramente establecidos.

En 1932 Einstein y de Sitter escribieron juntos un artículo presentado un modelo cosmológico

relativista muy simple. Durante mucho tiempo éste se volvió el modelo cosmológico canónico: no tiene Λ , ni presión -sólo polvo- y es dinámicamente simple. De hecho, es el más simple de los modelos de Friedman-Lemaître.

En 1929 Hubble hizo su segunda contribución fundamental a la Cosmología al mostrar que las nebulosas extragalácticas se alejan de la Vía Láctea y que sus velocidades de recesión son proporcionales a sus distancias de nuestra Galaxia. Esta relación velocidad-distancia se le conoce como la “ley de Hubble”. La importancia de este descubrimiento fue que combinado con la isotropía del Universo, la ley de Hubble demuestra que el sistema de galaxias completo se dispersa como parte de una expansión uniforme. Éste fue el primer gran descubrimiento de la Cosmología observacional.

La ley de Hubble es estrictamente válida solamente a distancias intermedias. A escalas chicas ($\lesssim 10$ Mpc) los movimientos están dominados por la dinámica local (atracción hacia galaxias compañeras o grupos cercanos). A distancias muy grandes se violaría la física relativista ya que los objetos a la longitud de Hubble $L_H = c/H_0 \sim 4000$ Mpc se alejan con una velocidad que se aproxima a la de la luz, por lo que a escalas grandes necesitamos un tratamiento más detallado.

Poco después de que la ley de Hubble fuera aceptada, Einstein vió que un modelo estático no era consistente con las observaciones y abandonó la constante cosmológica reconociéndola como “el mayor error” de su vida.

Los autores del Estado Estacionario, Hoyle, Bondi, Gold, pensaban que la singularidad en las soluciones de Friedmann Lemaître era filosófica y estéticamente desagradable (Hoyle 1948, Bondi & Gold 1948). La teoría del Estado Estacionario es una en la que el Universo luce igual que en los modelos de Big Bang en el sentido de que son universos en expansión homogéneos e isotrópicos, pero que carece de la singularidad inicial. El dilema del origen del Universo fue resuelto mediante la simple treta de reemplazar la creación de toda la materia en el Universo en un solo instante (el Big Bang) con un modelo en el que la materia se estuviera creando continuamente justo al ritmo adecuado para llenar los espacios dejados por la expansión. A esto siguió un largo periodo de debate -el cisma entre las teorías del Big Bang y del Estado Estacionario.

El siguiente gran avance en la Cosmología ocurrió con Gamow, el cual se dió cuenta que en un universo en expansión las etapas tempranas deberían haber sido muy calientes, siendo la temperatura tan alta que la dinámica de la expansión estaría dominada por la densidad de energía de la radiación térmica más que por su contenido de materia -el universo estaba dominado por la radiación. En su trabajo de finales de los 1940s trató de explicar el origen de los elementos químicos mediante la nucleosíntesis primordial. Gamow y sus colegas Alpher y Hermann predijeron que ahora debería estar presente una radiación de fondo de cuerpo negro con una temperatura de alrededor de 5 K, el frío remanente de las calientes fases tempranas (Alpher, Bethe & Gamow 1948). En los 1950s Hoyle descubrió la resonancia triple- α que causa la formación de carbón a partir de tres núcleos de helio. Poco después, él y sus colegas Burbidge y Fowler demostraron que los elementos pesados se pueden producir en las estrellas mediante nucleosíntesis (Burbidge et al. 1957). Un asunto importante era la cuestión de la síntesis de elementos en el Universo temprano ya no con

el objetivo de crear todos los elementos, sino para poder explicar la abundancia cósmica de helio. En un artículo de 1964 Hoyle y Tayler demostraron que alrededor del 23 – 25% del helio fue producido mediante nucleosíntesis primordial y que el porcentaje es notablemente independiente de las condiciones iniciales. Otros cálculos de Wagoner, Fowler y Hoyle indicaron que otros elementos que son difíciles de justificar mediante nucleosíntesis estelar también podían explicarse de esta manera (Wagoner, Fowler & Hoyle 1967). El desarrollo del tema de la nucleosíntesis cósmica es una de las historias más exitosas en la Cosmología moderna.

Finalmente, la disputa entre el Estado Estacionario y el Big Bang se resolvió con el descubrimiento de la radiación cósmica de fondo en microondas (CMBR, Cosmic Microwave Background Radiation). Gamow, Alpher y Hermann habían predicho la existencia de tal campo de radiación dentro del marco de la teoría del Big Bang basándose simplemente en que la teoría podía explicar el origen del helio si el Big Bang hubiera sido suficientemente caliente (Alpher, Bethe & Gamow 1948). En contraste, la teoría del Estado Estacionario no podía explicar el origen de los elementos. El remanente del Big Bang predicho fue descubierto mas o menos por accidente por Penzias y Wilson en 1965. La radiación cósmica de fondo en microondas fue el segundo más grandioso descubrimiento de la Cosmología observacional del siglo XX (Penzias & Wilson 1965). Desde entonces, se ha demostrado que la radiación es notablemente uniforme por todo el cielo y que la forma de su espectro es de cuerpo negro con una precisión notable. Estas observaciones proporcionan evidencia muy convincente de que nuestro Universo atravesó una densa fase muy caliente en la que la materia y la radiación estuvieron en equilibrio térmico en sus etapas tempranas.

Es interesante notar que en 1963 Zeldovich escribió artículos sobre la teoría del Big Bang como si ya estuviera plenamente establecida y su grupo estuvo escribiendo artículos sobre formación de galaxias usando modelos de Big Bang, aún antes de los anuncios de Penzias y Wilson.

La existencia de la singularidad a un tiempo finito en el pasado es difícil de aceptar sin objeciones, por ello en los primeros días de la Relatividad hubo diversos intentos para hacer más aceptable este hecho. La situación fue aclarada por Hawking con su famoso teorema de la singularidad, el cual nos asegura que si el material en el Universo fuera “razonable” es inevitable una singularidad. No se puede conocer la naturaleza de la singularidad a partir de este teorema. Un caso especial es un universo lleno con radiación de cuerpo negro: la singularidad es inevitable. La singularidad no se puede evitar mediante artificios tales como añadir rotaciones al modelo (Hawking & Ellis 1968, Hawking 1969) .

El análisis mediante la Relatividad General del efecto de lente gravitacional de las galaxias del fondo por las concentraciones de masa en cúmulos de galaxias es consistente con las masas calculadas mediante los movimientos de las galaxias y de la presión del plasma dentro de los cúmulos. Pero existe un problema: la masa neta observada en las estrellas de las galaxias del cúmulo es un orden de magnitud menor que las masas obtenidas mediante el efecto de lente gravitacional o mediante la dinámica del plasma del cúmulo y los movimientos de las galaxias. Esto podría ser una señal de que la física gravitacional comienza a fallar en la escala de cúmulos de galaxias. Pero ya que

la extrapolación de la física local parece dar resultados consistentes para la dinámica y el efecto de lente gravitacional, la primera posibilidad a considerar es que la física gravitacional es fidedigna y que la mayor parte de la masa en un cúmulo se encuentra en una forma que no es fácilmente detectada, aparte de su efecto gravitacional, a la que se le llamó materia oscura.

Los modelos de universos de Friedmann-Lemaître son isotrópicos y homogéneos y por lo tanto en ellos está ausente la enorme diversidad de estructura que observamos en el Universo. El próximo paso para desarrollar modelos más realistas del Universo es incluir pequeñas perturbaciones de densidad en los modelos homogéneos y estudiar su desarrollo bajo la gravedad. Newton reconoció que un Universo infinito lleno de estrellas es gravitacionalmente inestable, pero no fue sino hasta el siglo XX que fue apreciada completamente la naturaleza de esta inestabilidad. El criterio de estabilidad y la tasa de crecimiento para un medio estático fueron derivados por Jeans en 1902 y para un medio en expansión por Lifshitz en 1946.

La gravedad es una fuerza atractiva, tal que una región del Universo que es ligeramente más densa que el promedio gradualmente acretará material de sus alrededores. En este proceso la región original ligeramente más densa se volverá más y más densa y por tanto acretará más material. Con el tiempo, esta región se vuelve un “montón” de materia fuertemente ligada rodeado de una región de menor densidad. La inestabilidad gravitacional continúa siendo la base de la teoría estándar de formación de estructura. Sin embargo, aún no entendemos por completo los detalles sobre cómo opera para producir estructuras de la forma que ahora observamos.

Acorde a las observaciones, el Big Bang tiene que ser ligeramente inhomogéneo, de hecho justo con el nivel exacto de inhomogeneidad. Poca inhomogeneidad significa que no habría galaxias, y demasiada implicaría tener estructuras muy diferentes a las que se observan con el telescopio.

En los 1970s los conceptos desarrollados a lo largo del siglo XX por diversos científicos (Jeans, Tolman, Lifshitz, Lemaître, Zeldovich, Novikov, Peebles, Weyman, Sunyaev, Silk, Harrison, entre otros) dieron como resultado dos escenarios rivales para el origen de estructura en el Universo: uno de estos fue el escenario jerárquico o “de abajo hacia arriba” en el que se pensó que la formación de estructura comenzó con el colapso de pequeños objetos que luego se agruparon progresivamente y se fusionaron por la acción de su atracción gravitacional mutua para formar objetos más grandes. Este modelo, llamado el *modelo isotérmico* fue defendido principalmente por los investigadores de los E.U.A. (Peebles & Yu 1970). Por otro lado, muchos astrofísicos soviéticos de la época liderados por Zeldovich favorecieron el *modelo adiabático*, en el que las primeras estructuras en condensarse a partir del plasma en expansión fueron enormes aglomeraciones de masa en la escala de los supercúmulos gigantes de galaxias. Supusieron que las estructuras más pequeñas como galaxias individuales se formaron mediante procesos de fragmentación en las estructuras más grandes a las que se les llamó “pancake” (plastas), es decir un proceso “de arriba hacia abajo” (Zeldovich 1970).

En los 1980s los investigadores se dieron cuenta que ninguno de estos modelos podía ser correcto. Sin embargo, pronto aparecieron modelos alternos, que evitaban muchos de los problemas que llevaron a rechazar los modelos anteriores. El nuevo ingrediente añadido fue la materia no-bariónica;

en otras palabras, materia en la forma de algún tipo exótico de partícula diferente de los protones y los neutrones. A esta materia se le llamó “materia oscura” ya que no se puede observar directamente porque no es luminosa, pero sí siente la acción de la gravedad y puede ayudar en el proceso de inestabilidad gravitacional. Zeldovich descubrió una solución para el desarrollo no lineal de una nube colapsando y la usó para demostrar que las perturbaciones a gran escala podrían formar capas y plastas las cuales él creyó que se parecían a la estructura filamentaria a gran escala que se ve en la distribución de galaxias. Este escenario para la formación de galaxias se conoce con el nombre de modelo de Materia Oscura Caliente (HDM, hot dark matter) para la formación de galaxias ya que aplica para partículas que habrían sido relativistas cuando se desacoplaron del plasma primordial (por ejemplo los neutrinos).

La gente se dió cuenta que había distintas posibilidades alternas para la materia oscura provenientes de la teoría de partículas elementales. Ejemplos incluyen al axion, partículas supersimétricas tales como el gravitino o el fotino y partículas semejantes al neutrino, de interacción ultradébil, siendo todas ellas vestigios del Universo muy temprano. En el periodo entre 1980 y 1982 los físicos de partículas empezaron a tomar en serio al Universo temprano como un laboratorio para su área. En 1982 Peebles introdujo el término Materia Oscura Fría (CDM, cold dark matter) para englobar muchos de estos tipos de partículas exóticas. En general, estas partículas habrían sido creadas en el Universo muy temprano y se desacoplaron del plasma primordial cuando ya eran no-relativistas. Por lo tanto, deberían estar muy frías ahora.

Al igual que había ocurrido en los 1970s la comunidad cosmológica se dividió en dos bandos, uno que favoreció la materia oscura fría (CDM) y el otro a la materia oscura caliente (HDM). De hecho existen similitudes considerables entre los dos cismas de los 1970s y los 1980s ya que el modelo CDM es al igual que la vieja representación isotérmica un modelo de “abajo hacia arriba”, mientras que el modelo HDM es un escenario de “arriba hacia abajo” como el modelo adiabático. Incluso la división geográfica fue la misma: la escuela soviética de Zeldovich fue la defensora más poderosa de la representación HDM.

En 1974 Press y Schechter desarrollaron un formalismo muy útil para el agrupamiento jerárquico, que da una buena descripción de como la función de masa de los objetos de diferentes masas evoluciona con el tiempo (Press & Schechter 1974). El escenario CDM puede explicar muchas de las características de la distribución de galaxias en el Universo, y tiene la gran ventaja de que hace predicciones que se pueden someter a prueba. Esta representación se ha vuelto la preferida para la formación de galaxias, pero necesita algunos “remiendos” para ser consistente con todas las observaciones.

El modelo de materia oscura fría (CDM) fue un gran cambio en el pensamiento. Fue un esfuerzo importante para formular un modelo plano ($\Omega = 1$). La mayoría de las teorías del Universo temprano nos dicen que si el Universo atravesó una fase temprana de inflación éste sería espacialmente plano hoy y $\Omega = 1$ con enorme precisión. Ya se sabe que los bariones están lejos de ser suficientes para cerrar el Universo. Esto nos lo dice la abundancia de He primordial y no podemos completar

la densidad necesaria escondiendo material bariónico en ladrillos invisibles. Así que al demandar un Universo con $\Omega = 1$, es necesario completar la densidad con algún componente de materia no bariónica, invisible y no especificada. Esta contribución a la densidad de masa total sería de hecho dominante.

Hoy en día, existe un gran debate pero aún no se sabe de que está hecha la materia oscura y en que cantidad existe en el Universo. Tampoco se sabe si alguna de las dos formas de la materia oscura pueda proporcionar por si sola una explicación satisfactoria de lo que se observa. Por tanto vemos un número pequeño pero significativo de artículos invocando una “materia oscura mixta (o tibia)” con la esperanza de obtener lo mejor de ambos mundos.

La inflación es una idea elegante e influyente para resolver el acertijo de qué ocurrió antes de que el Universo comenzara a expandirse. Hallamos precedentes de los modelos inflacionarios en los primeros trabajos de Linde (1974) y particularmente en los trabajos de Starobinsky (1979) y Sato (1981). Sin embargo se puede decir que Guth fue la persona que explotó los modelos inflacionarios para resolver problemas fundamentales (el artículo de Guth de 1981 es el más citado en Cosmología). La inflación ocurre durante un supuesto periodo del Universo muy temprano. Durante este periodo la expansión del Universo es exponencial como en el universo de de Sitter. Esto significa que, por ejemplo, la parte visible de nuestro Universo era mucho más pequeña a un cierto tiempo en el pasado de lo que sería en ausencia de inflación. De hecho podría ser tan pequeña que el volumen entero estaría causalmente conectado, y eso permitiría a los procesos físicos actuar causalmente sobre escalas causalmente desconectadas hoy día. Los cambios en el vacío del espacio-tiempo generan una fuerza que simula a la constante cosmológica. Esta es la fuerza que “pone en movimiento” al Universo tan rápido con un crecimiento exponencial. Al final de este periodo la expansión se revierte de alguna manera al comportamiento normal, pero para este momento el Universo es plano.

En su artículo de 1981, Guth se dió cuenta que si existiera una expansión exponencial temprana en el Universo, esto resolvería el problema de la isotropía a gran escala, y también conduciría al Universo a una geometría espacial plana (Guth 1981). Mientras que crea una parte observable del Universo que es predominantemente sin grumos e isotrópica, la inflación también garantiza la existencia de pequeñas fluctuaciones en la densidad cosmológica que pueden ser las perturbaciones iniciales necesarias para alimentar la inestabilidad gravitacional que se piensa son el origen de las galaxias y otras estructuras. Este modelo tiene también la ventaja de eliminar un problema con las Teorías de Gran Unificación (GUTs, Grand Unified Theories) en las que se basó el modelo, de que debería haber una gran cantidad de monopolos magnéticos en el Universo actual.

Desde 1982 el escenario inflacionario para la evolución temprana del Universo entre las épocas en las que éste tenía 10^{-34} a 10^{-32} segundos de edad ha sido estudiado por muchos autores. El problema metodológico con estas ideas es que se basan en extrapolaciones de la física puesta a prueba en los laboratorios, a energías que exceden enormemente a las que podemos producir en un laboratorio terrestre.

La radiación de microondas de fondo es una de las claves para entender nuestro Universo. Sachs

y Wolfe (1967) se dieron cuenta que las inhomogeneidades primordiales que deben haber existido para formar galaxias deberían ser visibles como variaciones angulares de pequeña amplitud en la temperatura de la radiación cósmica de fondo. Un acontecimiento espectacular fue el éxito del satélite COBE (*Cosmic Background Explorer*) al medir el espectro (en 1990) y la anisotropía a pequeña escala (en 1994) de la radiación cósmica de fondo en microondas. Esta radiación muestra una temperatura de cuerpo negro de 2.7 K y es altamente homogénea.

Como fue demostrado en una serie de artículos de Sunyaev y Zeldovich, la naturaleza planckiana del espectro impone severas restricciones sobre cómo y cuándo se originó la radiación (Sunyaev y Zeldovich 1972). La detección de desviaciones de la ley de Planck sería una indicación de los procesos físicos que tuvieron lugar en el Universo temprano. En su artículo de 1965 Dicke, Peebles, Roll y Wilkinson redactaron el modelo que llegó a ser la base de todo lo que siguió después. El universo estaba caliente en el pasado, tan caliente que estaba dominado por la radiación y la materia estaba completamente ionizada. El dominio del campo de radiación mantuvo la temperatura de la materia igual a la temperatura de la radiación hasta que la materia se volvió neutral después de lo cual las estructuras en el Universo pudieron crecer. La época en la cual el Universo se volvió neutro - la "época de desacoplamiento" - fue vista como un tiempo crítico en la historia del Universo. De allí es de donde proviene la radiación de microondas de fondo, esta es la "superficie de última dispersión" (Dicke et al. 1965).

El resultado de todos estos descubrimientos es que ahora tenemos tres piezas independientes de evidencia para la representación del Big Bang del origen y evolución de nuestro Universo: la expansión de la distribución de galaxias descubierta por Hubble, el espectro de cuerpo negro y la isotropía de la radiación cósmica de fondo de microondas y por último, la formación de elementos ligeros mediante nucleosíntesis primordial.

Toda representación del Universo tiene los siguientes elementos:

- La distribución de masa es muy cercana a ser homogénea en el promedio, a grandes escalas (Principio cosmológico).
- El Universo se expande y la expansión obedece la ley de Hubble.
- El Universo se expandió a partir de un estado denso y caliente cuya masa estaba dominada por la radiación térmica de cuerpo negro.
- La dinámica del Universo en expansión está descrita por la Teoría de la Relatividad General de Einstein.

El nombre familiar de esta representación, el modelo cosmológico del Big Bang, es desafortunado pues sugiere que identificamos un evento que disparó la expansión del Universo, y también sugiere que este evento fue una explosión localizada en el espacio. Ambas ideas son incorrectas. Se deduce que el Universo que observamos está cerca de ser homogéneo y no hay evidencia de que haya un centro preferente que pudiera haber sido el sitio de una explosión. Un nombre menos vívido pero tal

vez menos incorrecto para esta visión del Universo en expansión es “modelo estándar” (Weinberg importó en 1972 la frase de la física de partículas a la Cosmología). La palabra “modelo” expresa el hecho de que la teoría no puede ser la respuesta final -si es que hay alguna-, porque tiene enigmas sin resolver.

Las preguntas abiertas son más numerosas en Cosmología de lo que son en cualquier ciencia física madura típica, y es prudente tener en mente que alguno de estos problemas o tal vez alguno que aún no se descubre, podría indicar algo fundamentalmente incorrecto con la interpretación del Universo. Conforme se han acumulado las pruebas observacionales, esto parece haberse vuelto menos probable; si existe una falla seria en la representación estándar debe estar sutilmente escondida. Entonces la palabra “estándar” expresa el hecho de que existe un conjunto muy significativo de evidencias que indica que el modelo del Big Bang es un aproximación útil al mundo real.

El modelo estándar supone la Teoría de la Relatividad General, con la condición de que la física local es la misma en todos lados (el espectro de objetos distantes indica que es así). Notamos que esta extrapolación falla cuando se aplica hacia atrás suficientemente lejos en el tiempo, porque el modelo estándar se remonta a un estado singular, y ciertamente la falla podría mostrarse mucho antes de eso.

¿Cómo podemos esperar entender el carácter del Universo en toda su variedad, a partir de las extremadamente limitadas observaciones que podemos hacer? Debemos vivir con el hecho de que las observaciones a grandes distancias siempre serán esquemáticas. No hay manera que podamos esperar obtener datos de los valores iniciales en nuestro cono de luz pasado suficientemente precisos para construir empíricamente un modelo de mundo en cuya evolución hacia atrás en el pasado podamos confiar incluso de una manera modesta.

En Cosmología la densidad de enigmas es alta y la posibilidad de que hayamos pasado por alto algo fundamental es real. Por ejemplo, no tenemos una teoría final para el origen de las galaxias. Sería una noticia muy emocionante si se pudiera demostrar que la existencia de estos objetos es incompatible con la representación estándar que se describió antes. Hasta ahora eso no ha ocurrido, las teorías existentes apoyan la proposición de que las galaxias pueden existir en nuestra representación del Universo. Un enigma relacionado y un descubrimiento primordial que aún no se realiza es identificar la naturaleza de la materia oscura en las afueras de las galaxias, o la demostración de que hemos aplicado mal la dinámica con la cual deducimos su presencia. Un ejemplo a gran escala es la expansión del Universo. En el modelo estándar la expansión se remonta hacia el pasado hasta un tiempo finito t_0 a un estado singular de densidad arbitrariamente alta, en el que la teoría falla en el sentido de que no hay manera de que pueda predecir que ocurre antes de ese tiempo.

La mayoría de los cosmólogos desea hallar una descripción del Universo que abarque todos sus aspectos dentro de las leyes de la física. Pero existe un gran problema: la Relatividad General y la Mecánica Cuántica (las dos piedras angulares en las que se basa la descripción del Universo) no concuerdan en el punto que se supone deberían encontrarse. Por un lado la Relatividad General

explica de manera satisfactoria la dinámica a larga escala del Universo. Sus ecuaciones describen de manera precisa las órbitas de los planetas en el sistema solar. Si podemos descubrir las cantidades adecuadas de materia oscura con las propiedades adecuadas entonces también podremos describir el movimiento de galaxias completas. Por otro lado la Mecánica Cuántica describe el comportamiento de partículas subatómicas. Sus predicciones se confirman en los aceleradores de partículas.

A la búsqueda para hallar la relación entre ambas teorías se le llama la búsqueda por la “teoría del todo”. Ésta debe de abarcar todas las fuerzas: la gravitacional, la electromagnética, la débil y la fuerte. Einstein dedicó la segunda mitad de su vida a buscar una teoría que unificara las fuerzas electromagnéticas y gravitacionales, sin éxito. En 1967 Weinberg propuso una teoría unificada de las interacciones electromagnéticas y débiles, que requería la existencia de los bosones W y Z. Estas partículas fueron descubiertas en 1976, lo cual les valió a Weinberg, Salam y Glashow el Premio Nobel de física en 1979, y en 1984 lo obtuvieron también sus descubridores experimentales Rubia y Van der Meer. Esto hizo que renaciera el sueño de llegar a la “teoría del todo”. Como al parecer la gravedad es la interacción más difícil de tratar, se han propuesto las Teorías de Gran Unificación (GUTs) que intentan primero unificar las interacciones fuertes con las electrodébiles.

Aún no sabemos que tan exitosas serán las GUTs, pero mientras podemos preguntarnos si la gravedad podría entrar en algún esquema de unificación. Se especula que por arriba de cierta temperatura las cuatro interacciones fundamentales se encuentran unificadas. El problema principal es que no sabemos como se comporta la gravedad a nivel cuántico. En una teoría cuántica de la gravitación tendría que aparecer la constante de Planck \hbar , además de la constante de gravitación G y la velocidad de la luz c . Planck las combinó para obtener la *longitud de Planck* ($\sqrt{G\hbar/c^3} \cong 1.62 \times 10^{-33}$ cm), el *tiempo de Planck* ($\sqrt{G\hbar/c^5} \cong 5.38 \times 10^{-44}$ s) y la *masa de Planck* ($\sqrt{\hbar c/G} \cong 2.19 \times 10^{-5}$ g). En el mundo de Planck los fenómenos cuánticos y gravitacionales se relacionan íntimamente entre sí, y ni la Mecánica Cuántica ni la Relatividad General son válidas por sí solas. Esto significa que el tiempo t_0 que podemos calcular con la Relatividad General es el tiempo que ha transcurrido desde el momento en que las ecuaciones clásicas de la Relatividad General comenzaron a ser válidas.

En el mundo de Planck, donde dominan los efectos cuánticos y gravitacionales, el espacio-tiempo posee fluctuaciones cuánticas como cualquier campo. Estas fluctuaciones debieron manifestarse en toda su plenitud durante los primeros instantes de Universo. Se cree que las galaxias tuvieron origen en esas fluctuaciones, cuando la edad del Universo era comparable al tiempo de Planck.

Se necesita una teoría cuántica de la Gravedad: ésta sería la “teoría del todo” que los físicos que estudian la *teoría de las supercuerdas* han estado buscando. Las supercuerdas causaron mucho revuelo a mediados de los años 1980s. Algunos anunciaban ya la solución a todos los problemas de la física teórica. Desafortunadamente, a pesar de un inicio muy prometedor la teoría se ha topado con serias dificultades debidas al enorme aparato matemático que se necesita, cuya complejidad no permite tener una imagen intuitiva de lo que está pasando.

¿El hecho de que nuestra representación del mundo sea tan manifiestamente incompleta significa

que es incorrecta? Conforme se ha acumulado evidencia del éxito de la representación en tiempos no muy cercanos a t_0 , parece probable que tenemos una aproximación útil.

Otra característica interesante de la Cosmología es la distinción, que a menudo es borrosa entre la Cosmología y lo que se podría llamar metacosmología. La Cosmología es el estudio científico del cosmos como un todo, siendo una parte importante el sometimiento a prueba de las construcciones teóricas contra las observaciones. Por otro lado la metacosmología es un término que describe elementos de una construcción teórica o paradigma que no se pueden someter a pruebas observacionales. Conforme la Cosmología se ha desarrollado, varios de sus aspectos se han mudado del ámbito de la metacosmología al de la Cosmología. Un ejemplo es la radiación de microondas de fondo. Algunos argumentan que la metacosmología inflacionaria ya se ha vuelto parte de la Cosmología debido al descubrimiento por el satélite COBE de las fluctuaciones en la temperatura a través del cielo de la CMBR. Tal vez esto sea prematuro, aunque parece que las cosas se mueven en la dirección correcta, para que esto ocurra en el futuro. Sin embargo algunas ideas metacossmológicas pueden permanecer así por siempre, ya sea por las dificultades técnicas para observar sus consecuencias o porque en principio no pueden ser sujetas a comprobación. Un ejemplo de la última dificultad es la representación caótica inflacionaria de Linde en la que se supone un gran "metauniverso" dentro del cual se forman eterna y continuamente "miniuniversos" del tamaño de nuestra región observable (si los miniuniversos no se pueden comunicar entre si ¿cómo saber que existen?).

La Cosmología es un campo en el que muchas preguntas fundamentales permanecen sin respuesta y en el que hay un gran campo de acción para nuevas ideas. La investigación actual en Cosmología abarca campos tan diversos como Gravedad Cuántica, Relatividad General, Física de partículas, Mecánica estadística, Hidrodinámica no lineal y Astronomía observacional en todas las longitudes de onda electromagnéticas. De esta área tan basta, nos hemos concentrado en aquellos elementos de la Cosmología relacionados con el tema que trataremos aquí: la edad del Universo. La conclusión más sorprendente de la Cosmología relativista es que el Universo no ha existido por siempre, y que solamente un periodo finito de tiempo separa a la humanidad de las condiciones extremas de energía y densidad con las cuales empezó la expansión del cosmos.

Aunque Einstein la consideró "el mayor error de sus vida" la constante cosmológica Λ ha ocupado un papel central en la Cosmología moderna. Respecto a esto Zeldovich dijo: "una vez que el genio ha salido de la botella es difícil volverlo a meter". Si la constante cosmológica es cero, todos los modelos de Friedmann dan una edad menor a la edad de expansión del Universo dada por el inverso de la constante de Hubble H_0^{-1} . Hubble calculó que H_0 era del orden de $500 \text{ km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$ lo que corresponde a $H_0^{-1} = 2 \times 10^9 \text{ años} = 2 \text{ Gyr}$. Esta escala de tiempo es menor a la edad de la Tierra determinada por la nucleocosmocronología. En retrospectiva se encontró que Hubble había sobreestimado H_0 . Al pasar de los años el valor de la constante se fue reduciendo, y durante los 1990s se creía que estaba entre 50 y $100 \text{ km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$. Los valores más recientes reportados están entre 70 y $72 \text{ km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$ (Freedman et al. 2001, Spergel et al. 2003, Tegmark et al. 2004). Un

valor positivo de la constante cosmológica puede resolver la discrepancia de los valores de la edad del Universo obtenida con diferentes métodos, ya que su efecto es estirar la escala de tiempo de expansión del Universo.

La edad del Universo que se calcula teóricamente está sujeta a varios parámetros: entre ellos Λ y H_0 . Λ depende del modelo estándar adoptado y H_0 sólo se puede medir si contamos con la distancia absoluta de objetos a un corrimiento al rojo significativo. La teoría implica una conexión entre el modelo del Universo y su edad. Por lo tanto, una medida independiente de la edad del Universo se vuelve relevante al permitir restringir los modelos cosmológicos. Podemos obtener límites sobre la edad del Universo de las edades de los objetos más viejos conocidos (el Universo no puede ser más joven que los objetos que contiene). Las edades de objetos astronómicos se pueden medir con una variedad de métodos; los tres más empleados son: evolución estelar, cosmocronología nuclear y el enfriamiento de enanas blancas.

Usando la teoría de evolución estelar, se puede obtener la edad de un Cúmulo Globular (GC), mediante el ajuste de una *isocrona* a los datos en el diagrama color-magnitud a la identificación del *turn off*. Los GCs son poblaciones estelares simples (sus miembros son coetáneos, químicamente homogéneos y aislados). Uno de los usos más notables de la investigación de GCs es la estimación de las edades de los cúmulos de la Vía Láctea. Los GCs se encuentran entre los pocos objetos en la Galaxia para los que se pueden obtener edades relativamente precisas. Ya que son los objetos más viejos conocidos (con edades de hasta 15 ± 3 Gyr) y nacieron durante las etapas más tempranas de la formación de la Galaxia, proporcionan un convincente límite inferior a la edad del Universo.

El satélite HIPPARCOS (*High Precision Parallax Collecting Satellite*) fue lanzado en 1989 y midió la paralaje de más de 118,000 estrellas (1997). Esto ha permitido determinar con mucha mayor precisión la edad de los cúmulos globulares de la Galaxia.

Uno de las muchas razones para construir el HST (*Hubble Space Telescope*), lanzado en 1990, fue medir un valor preciso de H_0 . En 2003 Freedman et al. reportaron un valor de $H_0 = 72 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. Aunque durante mucho tiempo el modelo de Einstein-de Sitter ($\Lambda = 0$) fue el preferido, actualmente ya no es así, ya que acorde a los valores actuales de los parámetros este modelo predice que la edad del universo es menor a 10 Gyr. COBE fue un gran éxito al detectar y analizar la CMBR; posteriormente WMAP (*Wilkinson Microwave Anisotropy Probe*), lanzado en 2001, confirmó esas observaciones y sus datos han servido para poner a prueba distintos modelos cosmológicos (Bennet et al. 2003, Spergel et al. 2003).

Conforme los detalles observacionales acerca del Universo se van ajustando, se constriñe más el modelo estándar. Actualmente existe evidencia observacional sólida de que el Universo se está acelerando. El modelo cosmológico que mejor ajusta es un universo FRW, plano, con materia, pero dominado por alguna forma de energía oscura cuya presión es negativa. El candidato usual para la energía oscura es una constante cosmológica Λ , pero existen otras posibilidades. En esta tesis, juntamos determinaciones recientes de edades de cúmulos globulares para sacar límites a la edad del Universo y restringir modelos cosmológicos.

La nuestra, es una era de exploración en la que analizaremos en detalle la estructura de la radiación cósmica de fondo y en la que veremos a distancias cada vez mayores (y por lo tanto más hacia atrás en el pasado) con los telescopios de radio y ópticos. ¿Quién puede decir qué ideas teóricas se formularán a la luz de estos nuevos descubrimientos? ¿Resultarán correctas las ideas teóricas contenidas en los libros actuales o habrá que tirarlas y volver a hacer cálculos en el pizarrón? Como la Cosmología es un campo muy emocionante con adelantos hechos a gran velocidad, no se puede proclamar que tengamos una explicación definitiva.

Capítulo I

La Teoría de la Relatividad General y la Cosmología

I.1 Introducción

La gravedad es la fuerza de la naturaleza con mayor influencia a grandes escalas, así que la parte más importante de una descripción física del Universo es una teoría de la gravedad.

La gravedad ejerce la misma fuerza por unidad de masa sobre todos los cuerpos; la esencia de la teoría de Einstein es el transformarla de ser una fuerza, a ser una propiedad del espacio-tiempo.

¿Qué tan seguros podemos estar de que la teoría de la gravitación de Einstein es correcta? Como no contiene a la constante de Planck es un aparato puramente clásico y fallará a escalas muy pequeñas. Fuera de esta restricción no hay áreas obvias de incompletez. La Relatividad General hizo hincapié en los huecos de la teoría newtoniana que se sabía que existían en el régimen de campos fuertes y altas velocidades. Sin embargo, aunque a la Relatividad le ha ido mejor que a la teoría newtoniana al emparejar observaciones, es posible que experimentos más exactos revelen discrepancias. A través de los años, esta posibilidad ha motivado diversas sugerencias de alternativas a la Relatividad General (Peacock 1999); no obstante, sigue siendo nuestra mejor opción.

Esta teoría nos proporciona una descripción del Universo en expansión matemáticamente consistente, y hasta donde se sabe exitosa observacional y experimentalmente. Con la teoría de la Relatividad General suponemos que la física local es la misma en todos lados, a cualquier tiempo. Por supuesto, esto debe ser falso en épocas suficientemente tempranas, porque la representación estándar extrapola hacia atrás hasta un estado singular en el que la física convencional no es válida.

Desde el punto de vista de la teoría de la Relatividad General, la Cosmología es la tarea de hallar soluciones a las ecuaciones de Einstein que sean consistentes con la distribución de materia a grandes escalas en el Universo.

I.2 El tensor métrico y el tensor energía-momento

El intervalo ds entre dos eventos se puede escribir como:

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j, \quad (\text{I.1})$$

donde $x^0 = t$ es la coordenada temporal y x^1, x^2, x^3 son las coordenadas espaciales. El tensor g_{ij} es el *tensor métrico*. Este tensor es el objeto crucial en la Relatividad General: dado éste, se conoce la estructura del espacio-tiempo y cómo se mueven las partículas.

El tensor métrico satisface

$$g^{im} g_{mk} = \delta_k^i. \quad (\text{I.2})$$

En mecánica tenemos cuatro cantidades que se conservan (si el sistema es cerrado), una es la energía y las otras tres corresponden al vector de momento. La fuente de la gravedad son la masa y el momento: el objeto que expresa correctamente la conservación del 4-momento es el tensor de energía-momento.

Un fluido ideal está caracterizado por la masa por unidad de volumen $\rho(x)$ y la presión $p(x)$, ambas medidas por un observador en el sistema de referencia en reposo del fluido, y por la velocidad del fluido. El tensor de energía-momento del fluido en el sistema de coordenadas que es localmente de Minkowsky en el que el fluido se halla instantáneamente en reposo es (Landau & Lifshitz 1989):

$$T^{ik} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}. \quad (\text{I.3})$$

Otra notación es (Padmanabhan 2002),

$$T_k^i = \text{dia} [\rho(t), -p(t), -p(t), -p(t)]. \quad (\text{I.4})$$

Para un espacio localmente plano el tensor métrico es igual al de Minkowsky

$$g^{ij} = \eta^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{I.5})$$

El tensor de energía-momento se puede expresar como (Landau & Lifshitz 1989)

$$T_{ik} = (p + \rho) u_i u_k - p g_{ik}, \quad (\text{I.6})$$

en donde u_i es la 4-velocidad del fluido, es decir

$$u_i = g_{ik} u^k = g_{ik} \frac{dx^k}{ds}, \quad (I.7)$$

con $x^k(s)$ la línea de universo de un elemento de fluido, es decir, la trayectoria seguida por la partícula en el espacio-tiempo. En Relatividad General, la ley de conservación de energía y momento se puede escribir de forma completamente covariante:

$$T_i{}^k{}_{;k} = 0. \quad (I.8)$$

El símbolo “;” denota la derivada covariante, que para un tensor mixto de rango 2 se define como

$$A_k{}^i{}_{;l} = \frac{\partial A_k{}^i}{\partial x^l} - \Gamma_{kl}^m A_m{}^i + \Gamma_{ml}^i A_k{}^m. \quad (I.9)$$

Los tensores Γ_{kl}^i son los símbolos de Christoffel y se relacionan con el tensor métrico de la siguiente manera

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2} g^{im} \left[\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right].$$

I.3 Las ecuaciones de campo de Einstein

Ya con el tensor de energía momento, podemos volver a la búsqueda de las ecuaciones de campo relativistas. Éstas no se pueden derivar de manera rigurosa; todo lo que se puede hacer es seguir a Einstein y comenzar por pensar acerca de la forma más simple que tal ecuación podría tener. En la época en que Einstein empezó a trabajar en su teoría, ya se conocían bien las propiedades de los espacios curvos. Por ejemplo, se sabía que el tensor de Riemann

$$R_{klm}^i = \frac{\partial \Gamma_{km}^i}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{kl}^i}{\partial x^m} + \Gamma_{nl}^i \Gamma_{km}^n - \Gamma_{nm}^i \Gamma_{kl}^n,$$

se puede usar para determinar el grado de curvatura de un espacio. Es el hecho de que este tensor en general es diferente de cero lo que produce la interpretación en Relatividad General de que la gravedad está relacionada con el espacio-tiempo curvo.

El tensor de Riemann se puede contraer al tensor de Ricci

$$R_{ik} = R^l{}_{ilk} = g^{lm} R_{limk},$$

o más aún, se puede obtener el escalar de curvatura R

$$R = g^{ik} R_{ik}.$$

Einstein deseaba hallar una relación entre la materia y la métrica e igualar T_{ik} a un cierto tensor

obtenido a partir de g_{ik} el cual contuviera solo las primeras dos derivadas de g_{ik} y tuviera derivada covariante cero. Como en el límite apropiado la ecuación (I.8) se debe reducir a la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G\rho, \quad (\text{I.10})$$

ese tensor debía ser lineal en la segunda derivada de la métrica. Esto lo cumple el tensor de Einstein G_{ik} , que se define como

$$G_{ik} \equiv R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R. \quad (\text{I.11})$$

Einstein demostró que (Landau & Lifshitz 1989),

$$G_i{}^k{}_{;k} = 0. \quad (\text{I.12})$$

Como sabemos que T_{ik} también tiene derivada covariante cero, en virtud de la ley de conservación que expresa, parece razonable adivinar que son proporcionales:

$$G_{ik} \equiv R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = 8\pi GT_{ik} \quad (\text{I.13})$$

Estas son las ecuaciones de campo gravitacional de Einstein.

La cantidad $8\pi G$ asegura que en el límite de un campo gravitacional débil obtengamos la ecuación de Poisson en su forma estándar (I.10).

I.4 La constante cosmológica de Einstein

En la época en que Einstein formuló la Relatividad General, se creía que el Universo era estático; esto era simplemente un prejuicio, no se basaba en hechos observacionales. Debería ser obvio aún en el contexto de la gravitación newtoniana, que tal Universo no es estable: la atracción mutua de las partículas causaría que la distribución de masa experimentara una contracción global. Esto se podría prevenir sólo postulando ya sea un Universo en contracción o en expansión, o interfiriendo con las propiedades de largo alcance de la gravedad. ¿Cómo podría hacerse esto? Einstein estaba reacio a complicar la hermosa simplicidad de las ecuaciones de campo, y parecía haber solamente una salida. Aunque G_{ik} es único como tensor lineal en las segundas derivadas de la métrica, esto no es cierto si consideramos también términos de orden cero en estas derivadas. Ya que el tensor métrico tiene derivada covariante igual a cero, es posible escribir un conjunto modificado de ecuaciones de campo que sean también consistentes con las leyes de conservación,

$$G_{ik} \equiv R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R - \Lambda g_{ik} = 8\pi GT_{ik}. \quad (\text{I.14})$$

La ecuación (I.14) representa la modificación más sencilla a las ecuaciones de Einstein que todavía satisface la condición de que T_{ij} es igual a un cierto tensor construido a partir de la métrica g_{ij} y sus primeras y segundas derivadas, y es lineal en la segunda derivada.

Esta modificación no altera el carácter covariante de las ecuaciones, no cambia la condición de continuidad $T^k_{i;k}$ y permite construir un Universo estático.

Λ es una nueva constante de la naturaleza y se le denomina *la constante cosmológica*. La restricción más fuerte que se puede imponer a Λ de las observaciones es que debe ser suficientemente pequeña tal que no cambien las leyes de movimiento planetario que se sabe están bien descritas por (I.13). ¿Cuál es su significado físico? En la forma en la que se encuentra arriba, representa la curvatura del espacio vacío. Una manera más útil de mirar las cosas se puede lograr mediante el acto aparentemente trivial de mover el término de Λ al lado derecho de las ecuaciones de campo. Ahora luce como el tensor de energía momento del vacío

$$T_{ik}(\text{vacío}) = \frac{\Lambda}{8\pi G} g_{ik}. \quad (\text{I.15})$$

¿Cómo puede el vacío tener presión y una densidad de energía diferentes de cero? ¿Seguro que por definición éstos son cero en el vacío? Al comparar las ecuaciones para el tensor métrico g_{ij} y para el tensor de energía-momento T_{ij} para un fluido ideal en coordenadas localmente de Minkowsky, vemos que la constante cosmológica actúa como un fluido con densidad de masa efectiva y presión:

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G}, \quad (\text{I.16})$$

$$p_\Lambda = -\rho_\Lambda. \quad (\text{I.17})$$

Einstein creyó que la introducción de Λ no sólo daba soluciones estáticas para el Universo, sino que también permitía incorporar el principio de Mach a la Relatividad General, en el sentido de que no podían existir soluciones en ausencia de materia.

I.5 El principio cosmológico

Tal y como Einstein tuvo el propósito de poner por escrito la generalización relativista más sencilla posible de las leyes de la gravedad, así también la investigación cosmológica comienza por considerar la distribución de masa más sencilla posible: una cuyas propiedades sean homogéneas (densidad constante) e isotrópicas (las mismas en todas direcciones).

A escalas grandes, el Universo es homogéneo e isotrópico (al menos hasta una buena aproximación). Esto significa que el Universo no posee posiciones o direcciones privilegiadas. Esta idea es de tal importancia en Cosmología que ha sido elevada a la categoría de principio, y se le conoce como el *principio cosmológico*. Para construir el modelo más simple del Universo, comenzamos suponiendo que las propiedades geométricas del espacio tridimensional son las mismas en cualquier

sitio, y que estas propiedades geométricas no distinguen ninguna dirección especial en el espacio, es decir, un espacio tridimensional homogéneo e isotrópico. Las propiedades geométricas del espacio están determinadas por la distribución de materia a través de las ecuaciones de Einstein. Por lo tanto, se deduce que la distribución de materia también debe ser homogénea e isotrópica. Aunque este procedimiento está bien aceptado, se debe subrayar la siguiente sutileza: debido a que las ecuaciones de Einstein no son lineales, no hay garantía de que la solución que obtenemos para una distribución de una fuente que se promedia sobre cierta región sea la misma que la que obtendríamos resolviendo primero las ecuaciones de Einstein de manera exacta y luego promediando la solución. Pese a esta dificultad matemática, seguiremos tratando las características geométricas del Universo como descritas por una solución a las ecuaciones de Einstein en la que se promedia la fuente sobre una escala suficientemente grande.

La suposición de homogeneidad e isotropía del espacio tridimensional distingue una clase preferencial de observadores, es decir, aquellos observadores para los cuales el Universo parece isotrópico. Otro observador, que se esté moviendo con velocidad uniforme respecto a esta clase fundamental de observadores, encontrará que el Universo es anisotrópico. La descripción de la física será más sencilla si utilizamos el sistema de coordenadas apropiado para esta clase fundamental de observadores.

I.6 La métrica de Robertson-Walker

Habiendo establecido la idea del principio cosmológico, es necesario construir modelos del universo en los que se cumpla este principio. Supongamos que podemos considerar al Universo como un fluido continuo y asignemos a cada elemento del fluido las tres coordenadas espaciales x^α . Entonces, cualquier punto en el espacio-tiempo se puede etiquetar con las coordenadas x^α correspondientes al elemento de fluido que pasa por el punto, y un parámetro temporal que tomaremos como el tiempo propio t medido por un reloj que se mueve junto con el elemento de fluido. A las coordenadas x^i se les llama coordenadas comóviles.

Imaginemos que el espacio está lleno con un conjunto denso de observadores, cada uno de los cuales se halla en reposo con respecto al movimiento medio de la materia cercana. Dado que la atracción gravitacional de las concentraciones de masa en grupos y cúmulos causa que la materia se mueva, debemos imaginar que cada uno de estos observadores comóviles se mueve con el flujo medio de la materia, promediado a escalas suficientemente grandes como para remover las fluctuaciones locales de la homogeneidad. Ahora podemos tomar a las cuatro coordenadas de un evento como los tres números x^α asignados al observador que pasa por el evento, y la lectura t en el reloj del observador al tiempo del evento, $x^0 = t$.

El intervalo espacio-tiempo ds se puede separar como

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{ik} dx^i dx^k = g_{00} dt^2 + 2g_{0\alpha} dt dx^\alpha + g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \\ &\equiv g_{00} dt^2 + 2g_{0\alpha} dt dx^\alpha - \sigma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \end{aligned} \tag{I.18}$$

donde $\sigma_{\alpha\beta}$ es una métrica espacial definida-positiva. Eventos adyacentes a lo largo de la línea de universo de los observadores comóviles están separados por $dx^\alpha = 0$ (ya que el observador tiene coordenadas espaciales fijas) y por $dx^0 = dt$ igual al intervalo de tiempo propio leído en el reloj. Entonces el intervalo invariante que conecta los eventos es

$$dt^2 \equiv ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j = g_{00}dt^2, \quad (\text{I.19})$$

y por tanto

$$g_{00} = 1. \quad (\text{I.20})$$

En general, es imposible sincronizar los relojes sobre todo el espacio. Los casos excepcionales son aquellos en los que

$$g_{0\alpha} = 0. \quad (\text{I.21})$$

A un sistema de referencia que satisface las ecuaciones (I.20) y (I.21) se le llama “sincrónico”. Cada observador ve que los relojes de todos los observadores adyacentes están sincronizados con su propio reloj. El principio cosmológico nos dice que esta construcción siempre es posible, porque la isotropía permite la sincronización de relojes adyacentes, y la homogeneidad conlleva la sincronización por todo el espacio.

En un sistema sincrónico el elemento de línea se puede escribir como,

$$ds^2 = dt^2 - \sigma_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta \equiv dt^2 - dl^2. \quad (\text{I.22})$$

Ahora el problema se reduce a determinar la 3-métrica $\sigma_{\alpha\beta}$ de un espacio tridimensional, que sea homogénea e isotrópica en cualquier instante de tiempo. Una manera de obtenerla es la siguiente. Notamos que podemos usar la suposición de isotropía (la cual implica simetría esférica) para escribir el elemento de línea en la forma

$$dl^2 = a^2[\lambda^2(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)], \quad (\text{I.23})$$

donde r , θ y ϕ son las coordenadas comóviles (por convención r es adimensional). El *factor de escala* o *parámetro de expansión* $a(t)$ es una función a determinar que sólo puede depender del tiempo y tiene dimensiones de longitud.

Si calculamos la curvatura escalar para este espacio tridimensional hallamos que (Padmanabhan 2002),

$$R = \frac{3}{2a^2r^3} \frac{d}{dr} \left[r^2 \left(1 - \frac{1}{\lambda^2} \right) \right]. \quad (\text{I.24})$$

La homogeneidad implica que todas las propiedades geométricas son independientes de r . Por lo tanto R debe ser una constante. Igualandola a una constante e integrando la ecuación resultante

obtenemos

$$r^2 \left(1 - \frac{1}{\lambda^2}\right) = c_1 r^4 + c_2, \quad (\text{I.25})$$

donde c_1 y c_2 son constantes.

Para evitar una singularidad en $r = 0$, necesitamos que $c_2 = 0$. Por lo que obtenemos $\lambda^2 = (1 - c_1 r^2)^{-1}$. Cuando $c_1 \neq 0$, podemos reescalar r y hacer $c_1 = 1$ o $c_1 = -1$. Ello nos conduce a la métrica de espacio-tiempo completa:

$$ds^2 = (dt^2) - a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (\text{I.26})$$

donde k es una constante que se puede ajustar tal que solamente toma los valores 1, 0 ó -1 (correspondientes a la hiperesfera, el espacio euclideo y un espacio con curvatura negativa constante).

A esta métrica se le llama la métrica de Robertson-Walker y describe un Universo que es homogéneo espacialmente, e isotrópico en cada instante de tiempo. Nótese que la forma de la métrica se determinó completamente por consideraciones de simetría sin ninguna referencia a la fuente T_{ik} o a las ecuaciones de Einstein. Sin embargo, estas consideraciones geométricas no nos permiten determinar el valor de k ni la forma de la función $a(t)$. Éstas se tienen que determinar con las ecuaciones de Einstein una vez que se ha especificado la distribución de materia. Sin embargo, es posible obtener algunas conclusiones generales que son independientes de $a(t)$, y que ahora discutiremos.

La magnitud de la curvatura, determinada de la ecuación (I.24) es $(6/a^2)$ cuando k es diferente de cero. Para estudiar las propiedades geométricas de estos espacios es conveniente introducir una coordenda χ definida por

$$\chi = \int \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = \begin{cases} \sin^{-1} r & \text{para } k=+1 \\ r & \text{para } k=0 \\ \sinh^{-1} r & \text{para } k=-1 \end{cases}. \quad (\text{I.27})$$

En términos de (χ, θ, ϕ)

$$dt^2 = a^2 [d\chi^2 + S_k^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)], \quad (\text{I.28})$$

y la métrica de Robertson-Walker queda

$$ds^2 = dt^2 - a^2 [d\chi^2 + S_k^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)], \quad (\text{I.29})$$

donde

$$S_k(\chi) = \begin{cases} \sin \chi & \text{para } k=+1 \\ \chi & \text{para } k=0 \\ \sinh \chi & \text{para } k=-1 \end{cases}. \quad (\text{I.30})$$

Para $k = 0$, tenemos el familiar espacio tridimensional euclidiano, que es plano; la homogeneidad

e isotropía de este espacio son obvias.

Para $k = 1$, la ecuación (I.28) representa una 3-esfera (esfera tridimensional) de radio a inmersa en un espacio euclidiano plano cuatridimensional. Tal esfera se define mediante la relación:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = a^2, \quad (\text{I.31})$$

donde (x_1, x_2, x_3, x_4) son las coordenadas cartesianas de un espacio cuatridimensional. Podemos introducir coordenadas angulares (χ, θ, ϕ) en la 3-esfera mediante las relaciones

$$\begin{aligned} x_1 &= a \cos \chi \sin \theta \sin \phi, \\ x_2 &= a \cos \chi \sin \theta \cos \phi, \\ x_3 &= a \cos \chi \cos \theta, \\ x_4 &= a \sin \chi. \end{aligned} \quad (\text{I.32})$$

Podemos determinar la métrica en la 3-esfera expresando dx_i en términos de $d\chi$, $d\theta$, $d\phi$ y sustituyendo en el elemento de línea:

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2. \quad (\text{I.33})$$

Esto nos conduce a la métrica

$$dl_{3\text{-esfera}}^2 = a^2 [d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)], \quad (\text{I.34})$$

que es la misma que la ecuación (I.28) para $k = 1$. El 3-espacio completo del modelo con $k = 1$ queda cubierto con el rango de ángulos

$$0 \leq \chi \leq \pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi,$$

y tiene un volumen finito:

$$V = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \int_0^\pi d\chi \sqrt{g} = a^3 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^\pi \sin^2 \chi d\chi = 2\pi^2 a^3. \quad (\text{I.35})$$

El área superficial de una 2-esfera, definida por $\chi = \text{constante}$, es $\text{Sup} = 4\pi a^2 \sin^2 \chi$. Conforme χ crece, Sup primero crece, alcanza un valor máximo de $4\pi a^2$ en $\chi = \pi/2$, y después disminuye. Estas son las propiedades de un 3-espacio que es cerrado, y sin fronteras.

En el caso $k = -1$, la ecuación (I.28) representa la geometría de un hiperboloide inmerso en un espacio cuatridimensional con métrica lorentziana. Tal espacio está descrito por el elemento de línea

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dx_4^2. \quad (\text{I.36})$$

Un hiperboloide tridimensional inmerso en este espacio, está definido por la relación:

$$x_4^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = a^2. \quad (\text{I.37})$$

Este 3-espacio se puede parametrizar mediante las coordenadas (χ, θ, ϕ) con

$$\begin{aligned} x_1 &= a \sinh \chi \sin \theta \sin \phi, \\ x_2 &= a \sinh \chi \sin \theta \cos \phi, \\ x_3 &= a \sinh \chi \cos \theta, \\ x_4 &= a \cosh \chi. \end{aligned} \quad (\text{I.38})$$

Expresando dx_i en términos de $d\chi$, $d\theta$, $d\phi$ y sustituyendo en la ecuación (I.36) hallamos que la métrica del hiperboloide es

$$dl_{\text{hiperboloide}}^2 = a^2 [d\chi^2 + \sinh^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)], \quad (\text{I.39})$$

que es la misma que la ecuación (I.28) para $k = -1$. Para cubrir este tres-espacio necesitamos el rango de coordenadas

$$0 \leq \chi \leq \infty, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi.$$

Este espacio tiene un volumen infinito, al igual que el espacio ordinario tridimensional plano. La superficie de una 2-esfera, definida por $\chi = \text{constante}$, es $\text{Sup} = 4\pi a^2 \sinh^2 \chi$. Esta expresión crece monótonamente con χ .

La noción de homogeneidad (e isotropía) de estos espacios se puede expresar de la siguiente manera. Sobre la superficie de una 3-esfera cualquier punto se puede mapear sobre cualquier otro punto mediante una rotación adecuada. Similarmente, cualquier punto en el hiperboloide se puede mapear a cualquier otro punto mediante una transformación lorentziana, que es una rotación mediante un ángulo imaginario. Claramente, estos mapeos dejan la métrica -y las propiedades geométricas- del 3-espacio invariantes. Esto muestra que todos los puntos sobre estas superficies (y todas las direcciones) son físicamente equivalentes. A los universos con $k = 0, +1$ y -1 se les llama planos, cerrados y abiertos, respectivamente. Estos términos se refieren a la naturaleza topológica del espacio tridimensional.

La métrica completa de la ecuación (I.26) se puede expresar ya sea en las coordenadas (t, r, θ, ϕ) o en las coordenadas (t, χ, θ, ϕ) . Es conveniente definir una coordenada temporal η diferente relacionada con t mediante

$$d\eta = a^{-1}(t) dt$$

En las coordenadas $(\eta, \chi, \theta, \phi)$ la métrica de Robertson-Walker (I.29) queda

$$ds^2 = a^2(\eta) [d\eta^2 - d\chi^2 - S_k^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)], \quad (\text{I.40})$$

con S_k definido en (I.30). De esta manera, toda la dependencia temporal está contenida en un factor multiplicativo global. El tensor métrico es entonces

$$g^{ik} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 S_k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2 S_k^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (\text{I.41})$$

I.7 La ley de Hubble

La expansión del Universo significa que la distancia física propia entre un par de galaxias muy separadas aumenta con el tiempo. Un sistema ligado gravitacionalmente tal como el Grupo Local no se está expandiendo. La inestabilidad gravitacional tiende a congregarse en sistemas cada vez más masivos que se separan (desacoplan) de la expansión general, para formar una jerarquía de cúmulos. La ley de expansión homogénea se refiere a galaxias suficientemente lejanas como para ignorar estas irregularidades locales.

La distancia propia d_{pr} de un punto P a otro punto P_0 -el cual tomamos para definir el origen de un conjunto de coordenadas polares r , θ y φ -, es la distancia medida por una cadena de reglas sujetas por observadores que conectan a P y P_0 al tiempo t . De la métrica de Robertson-Walker (I.29) con $dt = 0$ se ve que es

$$d_{pr} = \int_0^r \frac{adr'}{(1 - kr'^2)^{1/2}} = a f(r), \quad (\text{I.42})$$

donde la función $f(r)$ es respectivamente

$$f(r) = \sin^{-1} r \quad (k = +1) \quad (\text{I.43})$$

$$f(r) = r \quad (k = 0) \quad (\text{I.44})$$

$$f(r) = \sinh^{-1} r \quad (k = -1). \quad (\text{I.45})$$

Por supuesto, esta distancia propia es de poco significado operacional porque uno nunca puede medir simultáneamente todos los elementos de distancia que separan a P de P_0 . La distancia propia al tiempo t está relacionada con la distancia propia al tiempo presente t_0 mediante

$$d_{pr}(t_0) = a_0 f(r) = \frac{a_0}{a} d_{pr}(t), \quad (\text{I.46})$$

donde a_0 es el valor de a a t_0 . En vez de la coordenada comóvil r , uno también podría definir una coordenada radial comóvil de P con la cantidad

$$d_c = a_0 f(r). \quad (\text{I.47})$$

En este caso la relación entre las coordenadas comóviles y las coordenadas propias es

$$d_c = \frac{a_0}{a} d_{pr}. \quad (\text{I.48})$$

La distancia propia d_{pr} de una fuente puede cambiar con el tiempo debido a la dependencia con el tiempo del parámetro de expansión a . En este caso una fuente en P tiene una velocidad radial con respecto al origen P_0 dada por

$$v_r = \dot{a}f(r) = \frac{\dot{a}}{a} d_{pr} = H d_{pr}. \quad (\text{I.49})$$

A la ecuación (I.49) se le llama *ley de Hubble* y a la cantidad

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a} \quad (\text{I.50})$$

se le llama *parámetro de Hubble*. Al valor de este parámetro $H(t_0) = H_0$ evaluado al tiempo presente t_0 se le llama *constante de Hubble*. La práctica estándar es escribir la constante de Hubble como

$$H_0 = 100 h \frac{km}{s \cdot Mpc}. \quad (\text{I.51})$$

Acorde a los resultados más recientes, h se halla entre 0.70 y 0.72 (Freedman et al. 2001, Spergel et al 2003, Tegmark et al. 2004).

Si la velocidad de recesión v_r para un par dado de galaxias en (I.49) fuera independiente del tiempo, la expansión se remontaría hasta un estado singular, con una distancia cero entre las galaxias, al *tiempo de Hubble*

$$T_{H_0} = \frac{d_{pr}}{v_r} = H_0^{-1} = 9.7846 h^{-1} \text{ Gyr}. \quad (\text{I.52})$$

Esta es una estimación dimensional a la edad del Universo. Es equivalente a la *longitud de Hubble*

$$L_{H_0} = \frac{c}{H_0} = 3000 h^{-1} Mpc, \quad (\text{I.53})$$

la distancia a la cual la ley lineal de recesión de la ecuación (I.49) se extrapola a la velocidad de la luz.

I.8 El Redshift (corrimiento al rojo)

Es útil introducir una nueva variable relacionada con el parámetro de expansión a que sea directamente observable. Llamamos a esta variable el *corrimiento al rojo* z , el cual es ampliamente usado pues muchas de la fórmulas relevantes se escriben de manera sencilla cuando se expresan en términos de z .

Se define el corrimiento al rojo de una fuente luminosa, tal como una galaxia distante, mediante

la cantidad

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e}, \quad (\text{I.54})$$

donde λ_0 es la longitud de onda de la radiación de la fuente observada en O (que tomamos como el origen de nuestro sistema de coordenadas) al tiempo t_0 y emitida por la fuente a un cierto tiempo anterior t_e ; la fuente se mueve con la expansión del Universo y se encuentra a una coordenada comóvil r . La longitud de onda de la radiación emitida por la fuente es λ_e . La radiación viaja a través de un rayo de luz desde la fuente hasta el observador tal que $ds^2 = 0$ y por lo tanto de la ecuación (I.26),

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a} = \int_0^r \frac{dr}{(1 - kr^2)^{1/2}} = f(r). \quad (\text{I.55})$$

La luz emitida por la fuente en $t'_e = t_e + \delta t_e$ alcanza al observador en $t'_0 = t_0 + \delta t_0$. Dado que $f(r)$ no cambia, porque r es una coordenada comóvil y tanto la fuente como el observador se mueven junto con la expansión, podemos escribir

$$\int_{t'_e}^{t'_0} \frac{dt}{a} = f(r). \quad (\text{I.56})$$

Si δt , y por lo tanto, δt_0 son pequeñas, las ecuaciones (I.55) y (I.56) implican que

$$\frac{\delta t_0}{a_0} = \frac{\delta t}{a}. \quad (\text{I.57})$$

En particular, si $\delta t = 1/\nu_e$ y $\delta t_0 = 1/\nu_0$ en donde ν_e y ν_0 son las frecuencias de la luz emitida y observada, respectivamente, se sigue entonces que

$$\nu_e a = \nu_0 a_0, \quad (\text{I.58})$$

o equivalentemente

$$\frac{a}{\lambda_e} = \frac{a_0}{\lambda_0}, \quad (\text{I.59})$$

por lo que obtenemos

$$1 + z = \frac{a_0}{a}. \quad (\text{I.60})$$

La tasa de expansión H_0 sólo se puede medir si contamos con la distancia absoluta de objetos a un corrimiento al rojo significativo. El problema de determinar la constante de Hubble se puede ver como un puente que enlaza dos extremos. Deseamos aplicar $H_0 = v/r$, y nos bastaría un solo objeto para el que conociéramos v y r con exactitud. Podemos medir las distancias a los objetos cercanos muy fácilmente, pero sus velocidades radiales están dominadas por desviaciones del flujo ideal de Hubble que típicamente tienen una magnitud de varios cientos de km/s. Aunque la distancia entre la Tierra y la Luna se conoce con una precisión muy alta, esta separación no aumenta conforme el Universo se expande. Sin embargo, los objetos con corrimientos al rojo $z \gtrsim 0.01$ tendrán velocidades de recesión observadas que difieren de sus valores ideales por un $\lesssim 10\%$ aunque en este caso las

distancias absolutas son muy difíciles de proporcionar. La manera tradicional de presentar una solución a este problema es mediante la construcción de una escala de distancias: un conjunto de métodos interconectados para obtener las distancias relativas entre varias clases de objetos que comienza con distancias absolutas al nivel de los 10–100 Pc y termina con galaxias con corrimientos al rojo grandes. Existen tres pasos principales en la escala de distancias tradicional: la distancia a la Gran Nube de Magallanes (LMC, Large Magallanic Cloud); la distancia entre LMC y Virgo; la distancia entre Virgo y Coma (o alternamente el corrimiento al rojo corregido para Virgo).

I.9 Las ecuaciones de Friedmann

La métrica de Robertson-Walker contiene una constante k y una función $a(t)$, las cuales pueden ser determinadas mediante las ecuaciones de Einstein (I.14) si se especifica el tensor de energía-momento para la fuente. Las componentes de G_k^i que no dan cero son:

$$G_0^0 = \frac{3}{a^2}(\dot{a}^2 + k), \quad G_\beta^\alpha = \frac{1}{a^2}(2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k)\delta_\beta^\alpha. \quad (\text{I.61})$$

Así que se obtienen dos ecuaciones independientes, las *ecuaciones de Friedmann*:

$$\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3}, \quad (\text{I.62})$$

$$\frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} = -8\pi Gp + \Lambda. \quad (\text{I.63})$$

Estas dos ecuaciones, combinadas con la ecuación de estado

$$p = p(\rho),$$

determinan completamente las tres funciones $a(t)$, $p(t)$ y $\rho(t)$.

La ecuación (I.62) se puede expresar como:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \quad (\text{I.64})$$

A esta se le conoce como “la ecuación de Friedmann”. A los modelos con métrica de Robertson-Walker y que cumplen las ecuaciones de Friedmann se les llama *modelos FRW*.

I.10 Dinámica del modelo de Friedmann y parámetros

De la ecuación (I.62) se sigue que

$$\frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} = \frac{\dot{a}^2}{a^2}(\Omega(t) + \Omega_\Lambda(t) - 1). \quad (\text{I.65})$$

En donde

$$\rho_c(t) \equiv \frac{3H^2(t)}{8\pi G}, \quad (\text{I.66})$$

$$\Omega(t) \equiv \frac{\rho}{\rho_c} = \frac{8\pi G\rho}{3H^2}. \quad (\text{I.67})$$

y

$$\Omega_\Lambda(t) \equiv \frac{\Lambda}{3H^2}. \quad (\text{I.68})$$

A ρ_c se le llama la densidad crítica, $\Omega(t)$ es el parámetro de densidad para la materia (relativista + no relativista) y $\Omega_\Lambda(t)$ es el parámetro de densidad para la constante cosmológica.

Como ρ y H cambian con el tiempo, las ecuaciones (I.67) y (I.68) definen parámetros de densidad dependientes del tiempo. Los valores actuales de estos parámetros deberían denotarse estrictamente mediante Ω_0 y $\Omega_{0\Lambda}$. Pero generalmente se usa la notación $\Omega[\equiv \Omega(t_0)]$ y $\Omega_\Lambda[\equiv \Omega_\Lambda(t_0)]$ cuando nos referimos a los valores en la época actual. Los parámetros de densidad a otras épocas también se denotan como $\Omega(z)$ y $\Omega_\Lambda(z)$. Si describimos a Λ como si fuera un fluido con densidad de energía ρ_Λ y presión p_Λ al definir

$$\rho_\Lambda \equiv \frac{\Lambda}{8\pi G} \quad (\text{I.69})$$

entonces también podemos escribir a $\Omega_\Lambda(t)$ en términos de ρ_c

$$\Omega_\Lambda(t) \equiv \frac{\rho_\Lambda}{\rho_c}. \quad (\text{I.70})$$

Si definimos

$$\rho_T = \rho + \rho_\Lambda, \quad (\text{I.71})$$

y

$$\Omega_T(t) = \Omega(t) + \Omega_\Lambda(t), \quad (\text{I.72})$$

la ecuación de Friedmann (I.65) adquiere la forma

$$k = \dot{a}^2 \left(\frac{\rho_T}{\rho_c} - 1 \right) = \dot{a}^2 (\Omega_T(t) - 1). \quad (\text{I.73})$$

Escrita de esta manera, la ecuación de Friedmann revela claramente el hecho de que existe una conexión directa entre la densidad del Universo y su geometría global. En la tabla (I.1), resumimos los distintos tipos de universo, según los valores de ρ_T , Ω_T y k .

Si le damos una interpretación Newtoniana a la ecuación de Friedmann (I.73), la “energía” total del lado derecho cambia con la geometría: los universos cerrados tienen límites, mientras que los universos abiertos no los tienen. Esto sugiere que el futuro de la expansión depende de la densidad: así como la gravedad de la Tierra define una velocidad de escape para un proyectil, un Universo que se expande suficientemente rápido debe de continuar expandiéndose para siempre. Inversamente, la gravedad tiene que detener finalmente la expansión si densidad está por arriba de un valor crítico.

$\rho_T < \rho_c$	$\Omega_T < 1$	$k = -1$	Universo abierto
$\rho_T = \rho_c$	$\Omega_T = 1$	$k = 0$	Universo plano
$\rho_T > \rho_c$	$\Omega_T > 1$	$k = 1$	Universo cerrado

Tabla I.1: Tipos de universo, según los valores de ρ_T , Ω_T y k . La ecuación de Friedmann (I.73) revela la conexión directa entre la densidad del Universo y su geometría global. El futuro de la expansión depende de la densidad. Un universo que se expande suficientemente rápido debe de continuar expandiéndose por siempre. Inversamente la gravedad tiene que detener finalmente la expansión si la densidad está por arriba del valor crítico.

En términos de la densidad crítica el parámetro de Hubble se define

$$H^2 = \frac{8\pi G \rho_c}{3}. \quad (\text{I.74})$$

Usando las definiciones anteriores y evaluando la ecuación (I.65) a $t = t_0$ obtenemos

$$\frac{k}{a_0^2} = H_0^2 (\Omega_T - 1). \quad (\text{I.75})$$

Dados H_0 y Ω_T podemos hallar a_0 de la ecuación (I.75) cuando $k \neq 0$

$$a_0 = H_0^{-1} (|\Omega_T - 1|)^{-1/2}. \quad (\text{I.76})$$

El valor de \dot{a}_0 se puede fijar mediante

$$\dot{a}_0 = H_0 a_0 = (|\Omega_T - 1|)^{-1/2}. \quad (\text{I.77})$$

Por lo tanto (H_0, Ω_T) son condiciones iniciales válidas para integrar las ecuaciones (I.62) y (I.63). Si $k=0$, las ecuaciones de Einstein permiten hacer el escalamiento $a \rightarrow \mu a$ haciendo arbitraria la normalización de a . Es convencional tomar $a_0 = 1$ cuando $k = 0$; de esta manera

$$\frac{\dot{a}_0}{a_0} = H_0 = \dot{a}_0$$

determina \dot{a}_0 .

De las ecuaciones (I.62) y (I.63) se obtiene la *ecuación de aceleración*

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + \rho_\Lambda + 3p) = -\frac{4\pi G}{3}(\rho_T + 3p). \quad (\text{I.78})$$

Si únicamente consideramos materia (relativista + no relativista) entonces $(\rho + 3p) > 0$ y por consiguiente $\ddot{a} < 0$. La curva de $a(t)$ (que tiene una \dot{a} positiva en la época presente t_0), debe ser convexa. En otras palabras, a será mucho menor en el pasado y se volverá cero para algún tiempo (en el pasado), digamos al tiempo $t = t_{sing}$. Es claro que $(t_0 - t_{sing})$ debe ser menor que el valor

de la intersección $(\dot{a}/a)_0^{-1} = H_0^{-1}$. Por conveniencia, se escoge la coordenada del tiempo tal que $t_{sing} = 0$, es decir tomamos $a = 0$ a $t = 0$.

En ese caso, la “edad” actual del Universo t_0 satisface la desigualdad $t_0 < T_{H0}$, donde (véase la ecuación (I.52))

$$T_{H0} \equiv H_0^{-1} = 9.7846 h^{-1} \text{ Gyr.} \quad (\text{I.79})$$

Conforme a se vuelve más pequeña, las componentes del tensor de curvatura R_{klm}^i se hacen más grandes, y cuando $a = 0$, estas componentes divergen. Tal singularidad podría ser un artefacto de la teoría. Cuando el radio de curvatura del espacio-tiempo se vuelve comparable con la longitud de Planck $(G\hbar/c^3)^{1/2} \simeq 10^{-33} \text{ cm}$ los efectos cuánticos de la gravedad se vuelven importantes, haciendo que dejen de ser válidas las ecuaciones clásicas de Einstein. Por lo tanto, en realidad, t_0 es el tiempo que ha transcurrido desde el momento en que las ecuaciones clásicas comenzaron a ser válidas.

Las cantidades ρ y p están definidas en (I.4) como las componentes T_0^0 y T_1^1 del tensor de energía-momento. La interpretación de p como una “presión” depende de que tratemos a la fuente como un fluido ideal. La fuente para un modelo de Friedmann debería tener siempre la forma que se da en la ecuación (I.4); pero como se ya se dijo, si la fuente no es un fluido ideal, entonces no es posible interpretar las componentes espaciales de T_k^i como presión. Entonces es perfectamente posible que la ecuación de estado para la materia a altas energías no obedezca la condición $(\rho + 3p) > 0$. La violación de esta condición puede ocurrir en una época posterior (es decir, a un valor mayor de a) que la época a la cual los efectos gravitacionales cuánticos se vuelven importantes. Si esto ocurre, entonces la “edad del Universo” se refiere al intervalo de tiempo desde que deja de ser válida la condición $(\rho + 3p) > 0$.

I.11 El modelo estático de Einstein

La idea original de Einstein era balancear la curvatura, la constante cosmológica y la densidad para obtener $H(t)=0$ y por lo tanto un Universo estático. La ecuación de Friedmann se puede escribir como

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho_T) - \frac{k}{a^2}. \quad (\text{I.80})$$

y la solución estática está dada por:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_T - \frac{k}{a^2} = 0, \quad (\text{I.81})$$

por lo que

$$k = \frac{8\pi G a^2 \rho_T}{3}. \quad (\text{I.82})$$

Como Λ puede ser positiva o negativa esto no parece constreñir a k . Si ignoramos la radiación y suponemos que la única fuente de presión es la constante cosmológica, la presión total es $p_T = p_\Lambda$

por lo que obtenemos de la ecuación de aceleración (I.78),

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho_T + 3p_\Lambda). \quad (\text{I.83})$$

Así que una condición adicional es

$$\rho_T = -3p_\Lambda. \quad (\text{I.84})$$

Como $\rho_\Lambda = -p_\Lambda$, entonces

$$\rho_\Lambda + \rho = 3\rho_\Lambda \quad \Rightarrow \quad \rho = 2\rho_\Lambda. \quad (\text{I.85})$$

Ya que ρ sí es mayor que cero, esto nos dice que $\rho_T > 0$ y por lo tanto de la ecuación (I.82) $k > 0$; tenemos un modelo cerrado.

El modelo estático no puede ser estable: si perturbamos el factor de escala por una pequeña cantidad positiva, la repulsión del vacío no cambia mientras que la atracción gravitacional "normal" se reduce, tal que el modelo tenderá a expandirse más allá (o a contraerse, si la perturbación inicial es negativa). En ambos casos quedaría un Universo dinámico.

Una segunda razón de porqué es problemático un Universo estático son las edades finitas de estrellas y sistemas estelares como la Vía Láctea. La física convencional nos dice que nuestra Galaxia tal y como es ahora, no puede ser un objeto permanente con una edad arbitrariamente grande.

I.12 La ecuación del fluido

La ley de conservación de energía y momento está dada por $T^k_{i;k} = 0$. Aunque esto en realidad son cuatro ecuaciones, sólo la componente temporal da una ecuación no trivial. Al calcular $T^k_{0;k} = 0$ para un fluido perfecto mediante (Landau & Lifshitz 1989)

$$T^k_{i;k} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(T^k_i \sqrt{-g})}{\partial x^k} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} T^{kl} = 0, \quad (\text{I.86})$$

llegamos a la *ecuación del fluido*

$$\dot{\rho} + 3(\rho + p) \frac{\dot{a}}{a} = 0. \quad (\text{I.87})$$

Podemos derivar esta ecuación de la primera ley de la termodinámica

$$dE + p dV = T dS, \quad (\text{I.88})$$

aplicada a un volumen V en expansión de radio comóvil unitario. Este volumen tiene un radio físico a , así que la energía es

$$E = mc^2 = \frac{4\pi}{3} a^3 \rho c^2. \quad (\text{I.89})$$

El cambio en la energía y el volumen están dados por

$$\frac{dE}{dt} = 4\pi a^2 \rho c^2 \frac{da}{dt} + \frac{4\pi}{3} a^3 \frac{d\rho}{dt} c^2, \quad (\text{I.90})$$

y

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi a^2 \frac{da}{dt}, \quad (\text{I.91})$$

respectivamente.

Suponiendo una expansión reversible $dS=0$, e introduciendo (I.90) y (I.91) en (I.88) se obtiene (I.87).

La ecuación del fluido (I.87) y las dos ecuaciones de Friedmann (I.62) y (I.63), no son independientes: se puede obtener cualquiera de ellas a partir de las otras dos.

En la ecuación del fluido (I.87) vemos que hay dos términos que contribuyen al cambio en la densidad. El primer término del paréntesis corresponde a la dilución en la densidad debida al aumento de volumen, mientras que el segundo corresponde a la pérdida de energía debido a que la presión del material ha hecho trabajo conforme aumentaba el volumen del Universo. Por supuesto, esta energía no ha desaparecido por completo; la energía siempre se conserva. La energía que pierde el fluido mediante el trabajo realizado se ha convertido en energía potencial gravitacional.

En un Universo homogéneo, no existen fuerzas de presión, porque ρ y p son las mismas en todos lados. Para tener una fuerza, es necesario un gradiente de presión. Así que p no contribuye con una fuerza que ayude a la expansión; su efecto se hace sentir solamente a través del trabajo hecho conforme se expande el Universo.

I.13 La ecuación de estado

Para resolver las ecuaciones de Friedmann, necesitamos conocer la relación entre p y ρ para los distintos tipos de material con los que está lleno nuestro modelo del Universo. En Cosmología, generalmente se supone que existe una presión única asociada a cada densidad tal que $p \equiv p(\rho)$. Dada ésta, podemos integrar la ecuación (I.87) para obtener $\rho = \rho(a)$. Sustituyendo esta relación en la ecuación (I.62), podemos determinar $a(t)$.

Supongamos que la ecuación de estado tiene la forma $p = w\rho$, donde en general w podría ser función del corrimiento al rojo. Si w es constante entonces la ecuación del fluido (I.87) da

$$\rho \propto a^{-3(1+w)};$$

La evolución temporal correspondiente para $a(t)$ es fácil de determinar para $k = 0$. Para $\rho \propto a^{-3(1+w)}$, la ecuación de Friedmann queda

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} \propto a^{-3(1+w)}$$

o

$$\dot{a} \propto a^{-\frac{1}{2}(1+3w)} \quad (\text{I.92})$$

Integrando encontramos

$$a(t) \propto t^{\frac{2}{3(1+3w)}} \quad (\text{para } w \neq -1) \quad (\text{I.93})$$

y

$$a(t) \propto \exp(\lambda t) \quad (\text{para } w = -1), \quad (\text{I.94})$$

donde λ es una constante.Algunos valores particulares de w tienen una importancia especial como veremos a continuación.

I.13.1 Materia ($\omega = 0$)

En este contexto, los cosmólogos usan el término materia como abreviación de “materia no relativista” y se refiere a cualquier tipo de material que ejerce una presión despreciable. A veces habrá que ser cuidadosos para evitar confusiones entre el término “materia” usado en este sentido y el usado para indicar todos los tipos de materia, relativistas o no. La suposición más simple que podemos hacer es la de un Universo sin presión. Esta es una buena aproximación para los átomos en el Universo una vez que éste se ha enfriado, ya que se encuentran muy separados y raramente interaccionan. También es una buena descripción de un conjunto de galaxias en el Universo, dado que éstas sólo interaccionan gravitacionalmente. Generalmente se usa el término “polvo” en vez de “materia”.

Si denotamos por a_0 y ρ_{0M} al factor de escala y densidad de materia actuales respectivamente, la ecuación del fluido (I.87) con $p = 0$ da

$$\rho_M = \rho_{0M} \left(\frac{a_0}{a} \right)^3. \quad (\text{I.95})$$

Esto nos dice que ρ_M disminuye conforme aumenta el volumen.

I.13.2 Radiación ($\omega = 1/3$)

La presión de radiación producida por fotones está dada por (Zemansky & Dittman 1990) $p_R = \rho_R/3$. En general, las partículas que se mueven a velocidades relativistas también tienen esta ecuación de estado. De aquí que la ecuación (I.87) implique que

$$\rho_R = \rho_{0R} \left(\frac{a_0}{a} \right)^4, \quad (\text{I.96})$$

donde ρ_{0R} es la densidad de radiación actual.

Vemos que la densidad de radiación es proporcional a $a^{-3}a^{-1}$. Esto nos dice que la densidad disminuye porque el número de partículas se diluye por la expansión ($\propto a^{-3}$) y además la energía de los fotones se reduce por el corrimiento al rojo ($\propto a^{-1}$). El alargamiento de la longitud de onda de la luz es proporcional a a y la energía de la radiación es proporcional a la frecuencia, esto causa que la energía decaiga por el otro factor a^{-1} . Esta disminución de la energía es justo el efecto de corrimiento al rojo.

I.13.3 La constante cosmológica ($w = -1$)

Como por definición ρ_Λ es constante (véase la ecuación (I.69)), la ecuación del fluido en este caso queda

$$3(\rho_\Lambda + p_\Lambda)\frac{\dot{a}}{a} = 0. \quad (\text{I.97})$$

De aquí se deduce que la ecuación de estado para la constante cosmológica es:

$$p_\Lambda = -\rho_\Lambda, \quad (\text{I.98})$$

es decir, $w = -1$; esta situación también surge naturalmente en el caso de campos escalares.

En este caso $\rho_\Lambda + 3p_\Lambda$ en la ecuación de aceleración es un término negativo. Una constante cosmológica positiva contribuye positivamente a \ddot{a} así que actúa de manera efectiva como una fuerza repulsiva. Si Λ es suficientemente grande puede dar lugar a un Universo en expansión acelerada.

Por eso, la densidad de energía del vacío puede jugar un papel crucial en la dinámica del Universo temprano. Como la energía del vacío es una constante, independiente del tiempo, parecería que podría haber un problema con la conservación de la energía en un Universo en expansión: ¿en verdad la densidad de energía debería disminuir conforme un cierto volumen se expande? (ciertamente que esto es lo que le ocurre a la materia ordinaria como las galaxias y el gas intergaláctico). Lo que nos salva es la peculiar ecuación de estado del vacío: el trabajo hecho por la presión es justo lo suficiente para mantener la densidad de energía constante. En efecto, el vacío actúa como un depósito de energía ilimitada, que puede proporcionar tanta como sea requerida para inflar una región dada del espacio a cualquier tamaño requerido a una densidad de energía constante. Este suministro de energía es lo que se usa en las teorías inflacionarias de la Cosmología para crear el Universo entero a partir de casi nada.

I.14 La ecuación de Friedmann en términos de las Ω 's

Se puede pensar que el contenido del Universo consiste de (1) materia no relativista (subíndice M), (2) materia relativista (subíndice R) y (3) una constante cosmológica (subíndice Λ). Vimos que las

tres densidades de energía varían como

$$\begin{aligned}\rho_M &\propto a^{-3}, \\ \rho_R &\propto a^{-4}, \\ \rho_\Lambda &= \text{constante},\end{aligned}\tag{I.99}$$

conforme evoluciona el Universo. Así que la densidad de energía total en el Universo se puede expresar

$$\begin{aligned}\rho_T(a) &= \rho_R(a) + \rho_M(a) + \rho_\Lambda(a), \\ &= \rho_c \left[\Omega_R \left(\frac{a_0}{a} \right)^4 + (\Omega_B + \Omega_{DM}) \left(\frac{a_0}{a} \right)^3 + \Omega_\Lambda \right],\end{aligned}\tag{I.100}$$

en donde ρ_c y las diversas Ω 's se refieren a los valores de los parámetros para $a = a_0$; Ω_B se refiere al parámetro de densidad de los bariones y Ω_{DM} se refiere al parámetro de densidad de la materia oscura (la suma de estas dos es la densidad de materia).

Es conveniente introducir

$$\Omega_k = -\frac{k}{a_0^2 H_0^2}.$$

La ecuación de Friedmann, bajo la condición $a_0 = 1$ expresada con las Ω 's queda:

$$H^2 = H_0^2 \left(\frac{\Omega_R}{a^4} + \frac{\Omega_M}{a^3} + \Omega_\Lambda + \frac{\Omega_k}{a^2} \right).\tag{I.101}$$

Adicionalmente,

$$\Omega + \Omega_k = \Omega_R + \Omega_M + \Omega_\Lambda + \Omega_k = 1.\tag{I.102}$$

Un universo plano ($k=0$), requiere que

$$\Omega = \Omega_R + \Omega_M + \Omega_\Lambda = 1,\tag{I.103}$$

a cualquier tiempo, cualesquiera que sea la forma de las contribuciones a la densidad, incluso si la ecuación de estado no se puede descomponer de manera simple.

Generalmente los únicos modelos considerados en la práctica son los modelos en los que domina la materia con $\Omega_\Lambda = 0$ o modelos con $k = 0$ y $\Omega_M + \Omega_\Lambda = 1$. En ambos casos Ω_M y H_0 son los únicos parámetros libres.

I.15 La materia y la radiación ahora y en el Universo temprano

De la temperatura $T=2.73$ K observada de la radiación cósmica de fondo en microondas se encuentra que el parámetro de densidad relativista total es (Liddle 2003),

$$\Omega_R h^2 \simeq 2.47 \times 10^{-5},$$

así que en el presente podemos ignorar la radiación. Un modelo en el que una de las especies dominantes sea la materia es una buena aproximación a la realidad.

Sin embargo, las diferentes dependencias de las densidades de materia y radiación con respecto al corrimiento al rojo significan que esta suposición falla a tiempos tempranos: $\rho_M/\rho_R \propto (1+z)^{-1}$. Por lo tanto, una de las épocas críticas en Cosmología es el punto en el que estas contribuciones eran iguales: el corrimiento al rojo de la *igualdad de la materia-radiación*, dado por (Peacock 1999)

$$1 + z_{eq} \simeq 23\,900 \Omega h^2. \quad (\text{I.104})$$

A corrimientos al rojo mayores a este, la dinámica del Universo estaba dominada por el contenido de partículas relativistas. Por una coincidencia, esta época se encuentra cerca de otro evento importante en la historia cosmológica: la *recombinación*. Una vez que la temperatura cayó por debajo de $\simeq 10^4$ K, el material ionizado pudo formar hidrógeno neutro (Peacock 1999). La astronomía observacional solo es posible a partir de este punto, ya que la dispersión de Thomson de electrones en material ionizado no permite la propagación de fotones. En la práctica, esto limita el corrimiento al rojo máximo de interés observacional hasta alrededor de 1000.

La densidad promedio de la materia (relativista + no relativista) varía proporcionalmente a una potencia más alta del parámetro de expansión de lo que lo hacen los términos de la curvatura y la constante cosmológica en la ecuación de Friedmann. Esto significa que si la expansión se remonta hasta valores de $a(t)$ suficientemente pequeños, debe alcanzar épocas en las que el término de la materia (relativista + no relativista) domina y la solución límite de Einstein-de Sitter aplica. El renacimiento actual del interés sobre la posibilidad de que Ω_Λ sea apreciable se debe a los problemas surgidos para ajustar el modelo de Einstein-de Sitter (véase el apéndice (A)) a las observaciones de la densidad de masa y el tiempo de escala de la expansión; así que este modelo ha dejado de ser el preferido (Spergel et al. 2003).

I.16 La constante cosmológica

I.16.1 Física de la constante cosmológica

Imagínese que se toma una región del espacio y se remueve de ella toda la materia, la radiación y otras sustancias que concebiblemente se puedan remover. Nos referimos a este estado, la ausencia de todos los campos físicos como el “vacío”. El vacío tiene el valor más bajo de energía de todos

los estados, pero en principio no hay ninguna razón para que esa energía sea cero. En ausencia de gravedad no hay manera de medir la energía en una escala absoluta; lo mejor que podemos hacer es comparar las energías relativas de dos estados diferentes. Por lo tanto la energía del vacío es arbitraria, inobservable. Sin embargo, en la Teoría General de la Relatividad, cualquier forma de energía afecta al campo gravitacional, por lo que la energía del vacío se vuelve potencialmente un ingrediente crucial. Hasta una buena aproximación, creemos que el vacío es el mismo en cualquier parte del Universo, así que la densidad de energía del vacío es un número universal al que le llamamos la constante cosmológica, Λ . Esta constante describe la densidad de energía del vacío, un contribuyente potencialmente importante a la historia dinámica del Universo. Al contrario de la materia ordinaria, que se puede acumular o dispersar conforme evoluciona, la densidad de energía en una constante cosmológica es una propiedad del espacio-tiempo mismo, y bajo circunstancias ordinarias es la misma en todas partes. Una constante cosmológica suficientemente grande causaría que las galaxias parecieran alejarse aceleradamente de nosotros, en contraste con las otras formas ordinarias de energía que tienden a frenar el retroceso de los objetos distantes.

El valor de la constante cosmológica es un asunto empírico que tendrá que ser resuelto finalmente mediante la observación. Existen muchos efectos que contribuyen a la energía total del vacío, incluyendo la energía potencial de campos escalares y la energía en “fluctuaciones del vacío” predichas por la mecánica cuántica, así como alguna constante cosmológica fundamental. Además, muchas de estas contribuciones pueden cambiar con el tiempo durante una transición de fase; por ejemplo, se cree que la constante cosmológica efectiva disminuyó en aproximadamente $10^{47} \text{ erg cm}^{-3}$ durante la transición de fase electrodébil (Carroll 2001). Un cambio en la constante cosmológica efectiva durante una transición de fase es un ingrediente crucial en el escenario del Universo inflacionario, lo que establece una expansión exponencial en el Universo muy temprano conducida por una energía del vacío muy grande (Murdin 2001).

Desde este punto de vista es muy sorprendente que la energía del vacío hoy día, incluso si no es cero, sea tan pequeña como lo indican las mediciones actuales ($\rho_\Lambda \leq 10^{-9} \text{ erg cm}^{-3}$). Esto podría deberse a dos razones: una de ellas es que las diferentes contribuciones sean grandes en magnitud pero no todas del mismo signo, por lo que se cancelan delicadamente para dar un resultado final extraordinariamente pequeño. La otra razón es que nuestra comprensión de como interactúa la gravedad con estas fuentes de energía del vacío es dramáticamente incompleta. Se ha hecho un gran esfuerzo para hallar maneras en las que las distintas contribuciones pudieran cancelarse, pero no es claro que podría tener de especial el valor $\Lambda = 0$. Una sugerencia es invocar al *principio antrópico fuerte* (Peacock 1999) el cual dice que el universo tiene que estar constituido de tal manera que se produzca vida inteligente a algún tiempo. Por consiguiente las constantes en la naturaleza deben tener ciertos valores “amigables”. Una consecuencia de esto es que Λ no debe ser cero, sino sólo suficientemente pequeña para que exista la vida (Carroll, Press & Turner 1992). La alternativa, que nuestro entendimiento de los principios subyacentes al cálculo de la constante cosmológica son insuficientes (y que presumiblemente deben aguardar la construcción de una teoría

completa de la gravedad cuántica) es ciertamente plausible, aunque la energía del vacío se manifiesta en un régimen de bajas-energías en donde se esperaría que bastara el razonamiento semi-clásico. Entender la pequeñez de la constante cosmológica es una meta primaria de la teoría de cuerdas y otros acercamientos a la gravedad cuántica (Carroll, Press & Turner 1992). Si se confirman las sugerencias observacionales recientes de una Λ diferente de cero, nos enfrentaremos con la tarea adicional de inventar una teoría que fije la energía del vacío a un valor muy pequeño sin hacerlo precisamente cero. En este caso podemos distinguir entre un vacío “verdadero” que sería el estado de la energía más baja posible que resulta simplemente ser diferente de cero, y un vacío “falso” que podría ser un estado metaestable diferente del verdadero estado de la energía más baja (el cual bien podría tener $\Lambda = 0$). Con el tiempo, tal estado podría decaer al vacío verdadero, a pesar de que su tiempo de vida podría ser mucho mayor que la edad actual del Universo. Una posibilidad final es que la energía del vacío esté cambiando con el tiempo -una constante cosmológica dinámica. Esta alternativa, a la que a veces se le llama “quinta esencia” (Ratra & Peebles 1988, Caldwell, Dave & Steinhardt 1998), podría ser compatible también con una verdadera energía del vacío que finalmente sería cero, aunque parece requerir una cierta cantidad de ajuste fino para hacerla funcionar. No importa cual de estas posibilidades sea verdadera (si es que es alguna), la conclusión de tener un Universo acelerado para la física básica serían realmente profundas.

I.16.2 Perspectivas observacionales

La existencia de una energía del vacío diferente de cero tendría en principio un efecto en la física gravitacional en todas las escalas; por ejemplo, alteraría el valor de la precesión de la órbita de Mercurio. Sin embargo, en la práctica tales efectos se acumulan sobre distancias grandes, lo que hace a la Cosmología por mucho, el mejor campo en la búsqueda de una constante cosmológica diferente de cero. La mayoría de estos efectos dependen no sólo de la energía del vacío, sino también de la densidad de energía de la materia, así que son necesarias un número de pruebas independientes para precisar Ω_Λ y Ω_M por separado.

Existe una gran variedad de métodos experimentales para constreñir Ω_Λ . Un método relativamente nuevo para acotar diversos parámetros cosmológicos, incluido Ω_Λ , es el análisis de las temperaturas de las anisotropías en la radiación cósmica de fondo en microondas (Spergel et al. 2003, Goldstein et al. 2003). Hasta la fecha, las observaciones han proporcionado algunas evidencias preliminares que favorecen un Universo aproximadamente plano $\Omega_\Lambda + \Omega_M \sim 1$, suponiendo que son correctas las teorías basadas en perturbaciones primordiales adiabáticas, libres de escala. La mayoría de las versiones del escenario del Universo inflacionario predicen de manera robusta que $\Omega_\Lambda + \Omega_M$ es extremadamente cercano a 1. Junto con las pruebas dinámicas que indican de manera consistente que $0.1 < \Omega_M < 0.4$, esto puede erigirse como una evidencia a favor de una constante cosmológica diferente de cero.

Tal vez la manera más directa de medir la constante cosmológica es construir el diagrama de Hubble (o sea determinar la relación entre los corrimientos al rojo y las distancias) de galaxias

muy lejanas. Las galaxias cercanas obedecen la ley de Hubble, pero se espera que las más lejanas se desvíen ligeramente de la estricta proporcionalidad en una manera que depende tanto de Ω_Λ como de Ω_M . Medir distancias a objetos cosmológicos es notablemente difícil, pero recientemente se han hecho progresos importantes usando supernovas Ia como indicadores de distancia (Riess et al. 1998, Perlmutter et al. 1999). Hasta el momento los resultados serían consistentes con una $\Lambda = 0$ sólo si la densidad de materia fuera más baja que la que se ha determinado con medidas dinámicas, y son consistentes con un Universo espacialmente plano sólo si una fracción sustancial de la densidad de energía total es debida a una constante cosmológica positiva. Sin embargo se debe recalcar que nuestro entendimiento de la física tras las explosiones de supernova y los ambientes en los que ocurren aún es muy incompleto. No obstante, existe una consistencia impresionante entre este resultado y aquellos de las observaciones de la radiación cósmica de fondo en microondas y las medidas dinámicas de la densidad de masa, con una concordancia alcanzada para un universo con Ω_M cercana a 0.3 y Ω_Λ cercana a 0.7.

I.16.3 El efecto de Λ en los modelos cosmológicos

La ecuación de Friedmann nos dice que una densidad de energía positiva contribuye positivamente a la curvatura, mientras que la expansión contribuye negativamente. Por simplicidad, consideremos un universo plano tal que la densidad de energía y la expansión se encuentran en balance perfecto (si el universo comienza con una curvatura igual a cero, permanecerá así durante toda su evolución). Conforme el Universo se expande, la materia contenida en él se vuelve cada vez más rarificada, por lo que la densidad de energía de la materia disminuye. Si la materia es el componente dominante de la energía, la tasa de expansión (medido por la constante de Hubble) decrecerá correspondientemente. Por otro lado, si domina la constante cosmológica, la densidad de energía será constante, y la tasa de expansión llegará a un valor constante.

En un universo en el que existen tanto materia como energía del vacío, hay una competencia entre la tendencia de Λ de causar aceleración y la tendencia de la materia de causar deceleración, siendo el destino final del Universo dependiente de las cantidades precisas de cada componente. Esto continúa siendo válido en presencia de curvatura espacial, y con una constante cosmológica diferente de cero, ya no es cierto que los Universos con curvatura negativa (abiertos) se expandan indefinidamente, o que los Universos con curvatura positiva (cerrados) necesariamente recalesen. Cada una de las cuatro combinaciones de curvatura positiva o negativa y expansión eterna o recaleso eventual se vuelven posibles para valores apropiados de los parámetros (véase la Fig. I.1). Incluso puede haber un balance delicado en el cual la competencia entre materia y la energía del vacío es una recta y el Universo es estático (sin expansión). La Fig. (I.1) indica la curvatura espacial y la historia futura de universos que se expanden, como función de Ω_M y Ω_Λ , bajo la condición plausible (pero de ninguna manera necesaria) de que las energías de la materia y del vacío son las únicas formas de energía dinámicamente significativas en el Universo hoy.

Nótese que un valor diferente de cero de Ω_Λ del mismo orden de magnitud que Ω_M es en un

sentido no natural, porque la abundancia relativa de la materia y la energía del vacío cambian rápidamente conforme se expande el Universo. De hecho, como la densidad de energía de la materia decrece como a^{-3} mientras que la del vacío permanece constante, tenemos $\Omega_\Lambda/\Omega_M \propto a^3$. Sería una enorme sorpresa que hubiera una igualdad aproximada entre estos dos números en la era presente, dado que la situación en el Universo muy temprano o muy tardío serían muy diferentes.

I.17 Modelos de rebote y “loitering”

En el caso general de los modelos con una mezcla de energía de vacío, radiación y materia tenemos que distinguir entre tres casos. Para modelos que comienzan a partir de un Big Bang, en cuyo caso la radiación domina completamente a los tiempos más tempranos, el Universo recolapsa o se expande para siempre. El último resultado se vuelve más probable para bajas densidades de la materia y la radiación, pero una alta densidad de la densidad del vacío. También es posible tener modelos en los que no hay Big Bang: el Universo estaba colapsando en el pasado distante, pero fue frenado por la repulsión de un término Λ positivo y experimentó un “rebote” para alcanzar su presente estado de expansión. Resolver las condiciones para estos diferentes eventos es cuestión de integrar la ecuación de Friedmann. Si se añade Λ , se puede resolver analíticamente en unos cuantos casos particulares; pero en general se puede resolver numéricamente (véanse el apéndice (A) y la sección (I.18)). Sin embargo, podemos hallar al menos analíticamente las condiciones para los diferentes comportamientos que se describieron anteriormente, si simplificamos las cosas al ignorar la radiación. La ecuación de Friedmann (I.101) con $\Omega_R = 0$, $\Omega_k = 1 - \Omega_M - \Omega_\Lambda$ queda como

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_\Lambda(1 - a^{-2}) + \Omega_M(a^{-3} - a^{-2}) + a^{-2}. \quad (\text{I.105})$$

Las condiciones bajo las cuales el lado izquierdo se hace cero definen un punto de retorno en la expansión. Al hacer el lado derecho igual a cero obtenemos una ecuación cúbica y es posible dar las condiciones bajo las cuales esto tiene solución, que son como sigue (Peacock 1999, Carroll, Press & Turner 1992):

- En primer lugar, una Λ negativa implica siempre recolapso, lo que es intuitivamente razonable pues la masa causa recolapso antes de que Λ domine, o la densidad es suficientemente baja tal que Λ llega a dominar, lo cual no puede conducir a una expansión infinita a menos que Λ sea positiva.
- Si Λ es positiva y $\Omega_M < 1$, el universo se expande por siempre.
- Si $\Omega_M > 1$, se puede evitar el recolapso sólo si Ω_Λ sobrepasa el valor crítico

$$4\Omega_M \left[\cos \left(\frac{1}{3} \cos^{-1}(\Omega_M^{-1} - 1) + \frac{4}{3}\pi \right) \right]^3 \quad (\text{I.106})$$

- Si Λ es suficientemente grande el punto estacionario de la expansión ocurre cuando $a < 1$ lo cual produce una Cosmología de rebote. El valor crítico de Ω_Λ en este caso está dado por

$$4\Omega_M \left[f \left(\frac{1}{3} f^{-1}(\Omega_M^{-1} - 1) \right) \right]^3, \quad (\text{I.107})$$

donde la función $f(x) = \cosh(x)$ si $\Omega_M < 0.5$ y $f(x) = \cos(x)$ cuando la desigualdad se invierte. Si el Universo yace exactamente en la línea crítica, el rebote está a tiempos infinitamente cercanos y tenemos una solución que es el resultado de una perturbación del modelo estático de Einstein. A los modelos que casi satisfacen la relación crítica $\Omega_\Lambda(\Omega_M)$ se les conoce como *modelos loitering*¹, ya que pasan un largo tiempo cerca de tener un factor de escala constante. Tales modelos fueron populares brevemente durante los 1970s, cuando parecía haber un pico marcado en la distribución de corrimientos al rojo de los cuásares a $z \simeq 2$. Sin embargo, esta ya no parece ser una explicación razonable para lo que es indudablemente una mezcla de evolución y selección observacional.

Los modelos de rebote se pueden descartar firmemente. Las mismas ecuaciones cúbicas que definen las condiciones críticas para un rebote, dan también una desigualdad para el corrimiento al rojo al cual ocurre el rebote,

$$1 + z_{reb} \leq 2f \left(\frac{1}{3} f^{-1}(\Omega_M^{-1} - 1) \right). \quad (\text{I.108})$$

Un límite inferior razonable de 0.1 para Ω_M descarta entonces un rebote toda vez que se han visto objetos a $z > 2$.

Los resultados principales de esta sección se muestran en la Fig. (I.1) Dado que la densidad de radiación es muy pequeña en la época presente, la tarea principal de la Cosmología relativista es resolver en que lugar del plano $\Omega_M - \Omega_\Lambda$ se encuentra el universo real. La existencia de objetos con altos corrimientos al rojo descarta los modelos de rebote, así que no podemos evadir la idea de un Big Bang caliente.

I.18 La ecuación de Friedmann y la edad del Universo

Ya que $H = da/dt$ entonces, utilizando la ecuación (I.101) la edad del universo t_0 está dada por

$$t - t_0 = \int_{a(t_0)}^{a(t)} \frac{1}{H_0} \frac{da}{a \sqrt{\frac{\Omega_R}{a^4} + \frac{\Omega_M}{a^3} + \Omega_\Lambda + \frac{\Omega_k}{a^2}}}. \quad (\text{I.109})$$

Esta integral se resolvió utilizando el método de Euler, con condiciones iniciales $a(t_0) = 1$ y t_0 la época actual. La solución numérica nos indica la edad del universo, es decir el tiempo que transcurre

¹ Modelos loitering son como los modelos "cuasi-estáticos" pero con tiempos mayores.

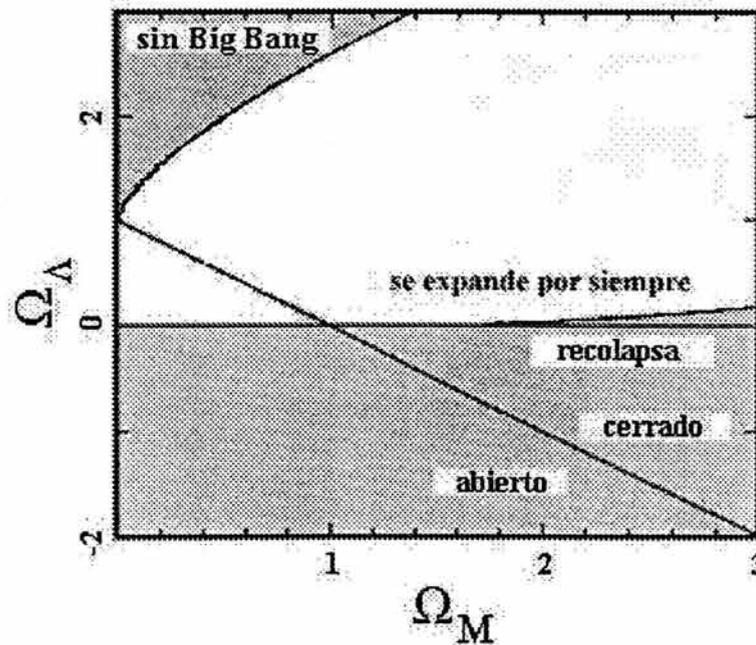


Figura I.1: Se indica la evolución de distintos tipos de Universo en el plano $\Omega_\Lambda - \Omega_M$ bajo la condición de que las energías de la materia y del vacío son las únicas formas de energía dinámicamente significativas en el Universo hoy. Los Universos sobre la línea $\Omega_T = \Omega_\Lambda + \Omega_M = 1$ son planos ($k = 0$). Por encima de esta recta los universos son cerrados ($k > 0$) y por debajo de ella son abiertos ($k < 0$). Para modelos que comienzan a partir de un Big Bang el universo recolapsa (región inferior sombreada) o se expande para siempre (región superior). En los modelos de rebote (región superior sombreada) no hay Big Bang; sin embargo estos modelos se pueden descartar firmemente. En la frontera inferior de los modelos de rebote ocurren los modelos “loitering” que son como los modelos cuasiestáticos pero con tiempos mayores. La línea casi horizontal que separa los modelos que recolapsan de los que se expanden por siempre marca la región de los modelos estáticos.

entre $a = 1$ (ahora) y $a = 0$ (la singularidad). La Fig. (I.2) muestra algunos casos especiales, en todos ellos usamos $\Omega_K = 0$ y $h=0.7$. De la integración se obtiene que:

- Caso 1: $\Omega_R = 1$. Edad: 6.9912 Gyr.
- Caso 2: $\Omega_M = 1$. Edad: 9.3200 Gyr.
- Caso 3: $\Omega_M = 0.27$ y $\Omega_\Lambda = 0.73$. Edad: 13.8768 Gyr.
- Caso 4: $\Omega_\Lambda = 1$. Edad: infinita.

Actualmente existe evidencia observacional sólida de que el Universo se está acelerando. Las edades absolutas de galaxias a altos corrimientos al rojo (Dunlop et al. 1996; Spinrad et al. 1997) y el valor de la constante de Hubble H_0 (Freedman et al. 2001), el diagrama de Hubble de supernovas

tipo Ia (Riess et al. 1998; Perlmutter et al. 1999), el espectro angular de potencias de la CMBR (Benoit et al 2003; Ruhl et al. 2003; Goldstein et al 2003), en combinación con el mapeo de galaxias (Efstathiou et al. 2002; Verde et al. 2002) y del efecto de lentes gravitacionales (Wang et al 2002), todos indican que el Universo es plano y dominado en el presente por alguna forma de energía oscura (DE, Dark Energy). Las observaciones en rayos X de cúmulos ricos indican que la densidad de materia en el Universo es baja (Bahcall & Fan 1998; Mohr et al. 1999; Dodelson & Knox 2000). Esto ha sido confirmando con una precisión notable por Allen et al. (2002). Si las observaciones de la CMBR (Hinshaw et al. 2003), se combinan con los estudios de la estructura a grandes escalas, como el 2dFGRS (two degree Field Galaxy Redshift Survey, Percival et al. 2002), el modelo cosmológico que mejor ajusta es un universo FRW plano, con $\Omega_\Lambda \sim 0.7$ y $\Omega_M \sim 0.3$ (Spergel et al. 2003, Tegmark et al. 2004).

El candidato usual para la energía oscura es una constante cosmológica Λ , la cual -como sugiere su nombre- da una densidad de energía oscura independiente del tiempo. Vimos que a una constante cosmológica le corresponde la ecuación de estado $p = -\rho$ es decir $\omega = -1$. Ya que no sabemos nada sobre la física de la energía oscura, podemos pensar en otras posibilidades. La primera opción, la más sencilla, es suponer que para la DE, ω aún es una constante, pero diferente de -1 . A este tipo de modelos se les llama “modelos de quiescencia”. El caso más general es suponer que ω sea una función del corrimiento al rojo, es decir $\omega = \omega(z)$.

Si suponemos un solo componente dominante cuya ecuación de estado sea $p_{dom} = \omega_{dom}\rho_{dom}$, y sustituimos en la ecuación de aceleración (I.78) obtenemos:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho_T + 3p) \approx -\frac{4\pi G}{3}(1 + 3\omega_{dom})\rho_{dom}. \quad (\text{I.110})$$

Por lo tanto, el Universo se acelerará ($\ddot{a} > 0$) si

$$\omega_{dom} < -\frac{1}{3}. \quad (\text{I.111})$$

Si la componente dominante es la DE, entonces como una buena primera aproximación, el factor ω en su ecuación de estado debe cumplir (I.111). Claro está, un mejor modelo es una combinación de materia y energía oscura, por lo que ésta última tendrá que tener una ω más negativa para poder causar aceleración.

Los datos obtenidos de WMAP fueron el resultado de una misión espacial que fue cuidadosamente diseñada para limitar los errores de medición sistemáticos. En su artículo del 2003, Spergel et al. combinaron los datos de WMAP, otras mediciones de la CMB de ACBAR (Arcminute Cosmology Bolometer Array Receiver) y CBI (Cosmic Background Imager), así como mediciones de 2dFGRS y reportaron los siguientes valores de los parámetros cosmológicos

$$h = 0.71_{-0.03}^{+0.04}, \quad \Omega_M = 0.27 \pm 0.04, \quad k = 0.$$

Por otra parte Tegmark et al. 2004 combinaron los resultados de SDSS (Sloan Digital Sky Survey) así como los de WMAP y reportaron que

$$h = 0.70_{-0.03}^{+0.04}, \quad \Omega_M = 0.30 \pm 0.04, \quad k \sim 0.$$

Trabajaremos con dos conjuntos de parámetros, uno que sea el “promedio” de los datos anteriores y otro obtenido tomando los valores inferiores (que dará como resultado una edad del Universo mayor),

1. $h = 0.70, \quad \Omega_M = 0.27, \quad \Omega_\Lambda = 0.73, \quad \Omega_K = \Omega_R = 0.$

2. $h = 0.68, \quad \Omega_M = 0.23, \quad \Omega_\Lambda = 0.77, \quad \Omega_K = \Omega_R = 0.$

Usando la ecuación de estado $p_\Lambda = \omega\rho_\Lambda$ con $\omega = \text{constante}$ para la energía oscura, la ecuación de Friedmann queda:

$$H^2 = H_0^2 \left(\frac{\Omega_M}{a^3} + \frac{\Omega_\Lambda}{a^{3(1+\omega)}} \right). \tag{I.112}$$

Ya que $H = da/dt$

$$t - t_0 = \int_{a(t_0)}^{a(t)} \frac{1}{H_0} \frac{da}{a \sqrt{\frac{\Omega_M}{a^3} + \frac{\Omega_\Lambda}{a^{3(1+\omega)}}}}. \tag{I.113}$$

Para obtener numéricamente la edad del Universo integramos “hacia atrás” esta ecuación con el método de Euler usando el primer conjunto de parámetros y las condiciones iniciales $t_{\text{hoy}} = 0, a_{\text{hoy}} = 1$. También integramos “hacia adelante”, y se muestra la evolución del parámetro de expansión a hasta que $t = 18$ Gyr (véase la Fig. (I.3)). Por completez incluimos las gráficas que muestran la evolución del parámetro de Hubble H (Fig (I.4)) y del corrimiento al rojo z (Fig.(I.5)) con respecto al tiempo. En la tabla (I.2) se presentan las edades obtenidas con la integración numérica para los distintos valores de ω , usando el primer conjunto de parámetros.

ω	Edad (Gyr)
-1/3	11.4504
-1/2	12.2656
-1	13.8768
-3/2	14.7936

Tabla I.2: Edades para cuatro modelos de quiescencia $\omega = \text{constante}$, obtenidos con la integración numérica de la ecuación (I.113), usando el primer conjuntos de parámetros $h = 0.70, \Omega_M = 0.27, \Omega_\Lambda = 0.73, \Omega_K = \Omega_R = 0$. Conforme ω se vuelve más negativa resulta mayor la edad del universo.

En el caso en que $\omega \rightarrow -\infty$ la ecuación (I.113) queda

$$\text{Edad límite} = \int_0^1 \frac{1}{H_0} \frac{da}{a \sqrt{\frac{\Omega_M}{a^3}}} = \int_0^1 \frac{\sqrt{a} da}{H_0 \sqrt{\Omega_M}} = \left[\frac{2 a^{3/2}}{3 H_0 \sqrt{\Omega_M}} \right]_0^1. \quad (\text{I.114})$$

Y resulta que:

$$\begin{aligned} \text{Edad límite} &= 17.93377 \text{ Gyr para el primer conjunto de parámetros,} \\ \text{Edad límite} &= 20.00225 \text{ Gyr para el segundo conjunto de parámetros.} \end{aligned} \quad (\text{I.115})$$

Este comportamiento se muestra en la Fig. (I.6). Las curvas 1 y 2 corresponden al primero y segundo conjunto de parámetros respectivamente. También se indica la edad límite.

Si $\omega = 0$ tenemos el caso particular del modelo de Einstein-de Sitter, cuya edad es 9.31866 Gyr (curva 1) o 9.59274 (curva 2). Conforme ω se vuelve más negativa, aumenta la edad del Universo pero no puede ser mayor que los límites dados en (I.115). La Fig.(I.7) muestra una región de la gráfica anterior con mayor detalle. Esta vez sólo graficamos de $\omega = 0$ a $\omega = -10$ lo que nos da un intervalo de edades de 9.32080 Gyr a 17.29600 Gyr (curva 1) o de 9.59440 a 19.19120 Gyr (curva 2). A la inversa, dado un rango de edades, podemos obtener de la gráfica el intervalo en que se puede hallar la ω . Podemos comparar los valores obtenidos por nuestra integración numérica en el límite $\omega = 0$, el caso Einstein-de Sitter, con sus valores analíticos (9.32080 vs 9.31866 y 9.59440 vs. 9.59274). El error acumulado sobre el valor de la edad total del Universo por nuestra integración es del orden de 1×10^{-3} Gyr. Como veremos mas adelante, los errores en las determinaciones de las edades de los cúmulos globulares, de donde inferiremos límites a la edad del universo, son del orden de 1 Gyr. Por lo tanto el método de integración que usamos para la ecuación de Friedmann es adecuado.

I.19 Los resultados más recientes para la edad del Universo

Se puede obtener un límite inferior a la edad del Universo a partir de la edad de las poblaciones estelares más viejas. Tradicionalmente, esto se ha hecho calculando las edades de los objetos más viejos en la Vía Láctea. Los cúmulos globulares son un excelente laboratorio para constreñir la edad del Universo: cada cúmulo posee una población químicamente homogénea de estrellas, todas nacidas simultáneamente. La incertidumbre principal en las determinaciones estándar de edades proviene de que el conocimiento de las distancias es pobre. Las poblaciones estelares cuyo estado se conoce bien son herramientas útiles para restringir las distancias a los cúmulos. Renzini et al. (1996) usaron la secuencia de enfriamiento de las enanas blancas (white dwarf cooling sequence) para obtener una edad de 14.5 ± 1.5 Gyr para NGC 6752. Usando un método independiente de la distancia, Jimenez et al. (1996) determinaron que la edad de los cúmulos globulares más viejos es de 13.5 ± 2 Gyr. Usando el método de la función de luminosidad, Jimenez & Padoan (1998) hallaron

una edad de 12.5 ± 1 Gyr para M55. Otros grupos han hallado edades consistentes. Por ejemplo Gratton et al. (1997) estimaron una edad de $11.8_{-2.5}^{+2.1}$ Gyr para los cúmulos globulares más viejos; VandenBerg et al. (2002) estimaron una edad ~ 13.5 Gyr para M92. Krauss & Chaboyer (2003) revisaron el análisis de cúmulos globulares y citan como el mejor ajuste para la edad de éstos 13.4 Gyr.

Con el satélite HIPPARCOS, las edades estimadas para cúmulos globulares se hicieron un poco menores, y aún así aparecen en la literatura valores muy grandes. Por ejemplo 14 ± 3 Gyr para NGC5904 (Bergush & VandenBerg 1997), 14 ± 2 Gyr para NGC0288 (Alcaino et al. 1997), 18 ± 1 Gyr para NGC1904 (Kravtsov et al. 1997), 14 ± 3 Gyr para NGC5904 (Bergush & VandenBerg 1997), 19.6 ± 2.3 Gyr para NGC6171 (Gratton et al. 1997), 18_{-3}^{+2} Gyr para NGC6366 (Alonso et al. 1997), 17 ± 2 Gyr para NGC6093 (Alcaino et al. 1998), 16.0 ± 2 Gyr para NGC6362 (Piotto et al. 1999), 18 ± 2 para NGC6838 (Geffert & Maintz 2000). Thompson et al. (2001) determinaron que la edad de NGC5139 se halla en el rango $12.9 < t < 18.5$ Gyr. Por otra parte NGC6341 es un cúmulo viejo con edades de 16.0 ± 1.5 (Pont et al. 1998), 14.5 ± 0.5 Gyr (Melbourne et al. 2000), 16 ± 2 Gyr (Grundahl et al. 2000) y 14.0 ± 0.8 Gyr (VandenBerg 2000).

La dispersión de los valores citados refleja las incertidumbres en los diferentes métodos, que por lo general no incluyen un análisis estadístico completo; por ejemplo, a veces el turn off (TO) (véase la subsección (II.2.1)) es ajustado “a ojo” y los rangos de error no representan intervalos de confianza en el sentido estadístico.

Usando la relación edad/masa en el turn off, Kaluzny et al. (2002) hallaron para el sistema binario OGLE GC-17 en ω Cen una edad de 11.8 ± 0.6 Gyr. Chaboyer & Krauss (2002) hicieron un reanálisis de este sistema y hallaron una estimación similar de su edad: 11.1 ± 0.67 Gyr. Las determinaciones del WMAP de la edad del universo implican que los cúmulos globulares se formaron después de 1 Gyr tras el Big Bang, una estimación razonable que es consistente con la formación de estructura en la Cosmología Λ CDM, sólo si sus edades fueran todas menores a 12.7 Gyr.

La determinación de edades con enanas blancas es un acercamiento alternativo a los estudios tradicionales del turn-off de la secuencia principal. Richer et al. (2002) y Hansen et al. (2002) hallaron una edad para el cúmulo globular M4 de 12.7 ± 0.7 Gyr usando el método de la secuencia de enfriamiento de las enanas blancas.

Las observaciones de las cercanas estrellas en el halo de la Galaxia permiten a los astrónomos obtener espectros de varios radioisótopos. Midiendo razones isotópicas, deducen edades estelares que son independientes de mucha de la física que determina el turn-off. Clayton (1988) usó un rango de modelos de evolución química para la Galaxia y encontró edades de entre 12 y 20 Gyr. Schatz et al. (2002) estudiaron el torio y el uranio en la vieja estrella del halo CS 31082-001 y estimaron una edad de 15.5 ± 3.2 Gyr. Otros grupos han encontrado estimaciones similares: el análisis de Cayrel et al. (2001) de U-238 en CS 31082-001 dió una edad de 12.5 ± 3 Gyr, mientras que Hill et al. (2002) encontraron una edad de 14.0 ± 2.4 Gyr. Los estudios de otras estrellas viejas del halo dan estimaciones similares: Cowan et al. (1999) usando las dos estrellas CS 22892-052 y HD 115444,

hallaron 15.6 ± 4.6 Gyr.

Basándose únicamente en el mejor ajuste a los datos de WMAP, Spergel et al. (2003) hallaron que la edad del universo es $t_0 = 13.4 \pm 0.3$ Gyr. Al añadir otros datos que implican una densidad de materia más baja encuentran una edad ligeramente mayor: $t_0 = 13.7 \pm 0.2$.

Método	Edad (Gyr)
Datos de WMAP (Λ CDM)	13.4 ± 0.3
Datos de WMAPext + 2dFGRS	13.7 ± 0.2
Edades de cúmulos globulares	$> 11 - 16$
Enanas blancas	12.7 ± 0.7
OGLE GC-17	$10.4 - 12.8$
Fechado radioactivo	$> 9.5 - 20$

Tabla I.3: Aquí se reproduce la Tabla 6 de Spergel et al 2003, en la que se reseñan los límites inferiores a la edad del Universo obtenidas con cinco diferentes métodos: mediciones de la CMBR (WMAP), edades de cúmulos globulares, la secuencia de enfriamiento de las enanas blancas, la edad del sistema binario OGLE GC-17 y cosmocronología nuclear.

La tabla (I.3) es la tabla 6 de Spergel et al (2003), en la que se resumen los límites inferiores a la edad del Universo obtenidas con diversas medidas astronómicas. Aunque las incertidumbres en estas mediciones son muy grandes como para constreñir efectivamente parámetros, nos proporcionan un importante examen de consistencia a nuestro modelo cosmológico básico.

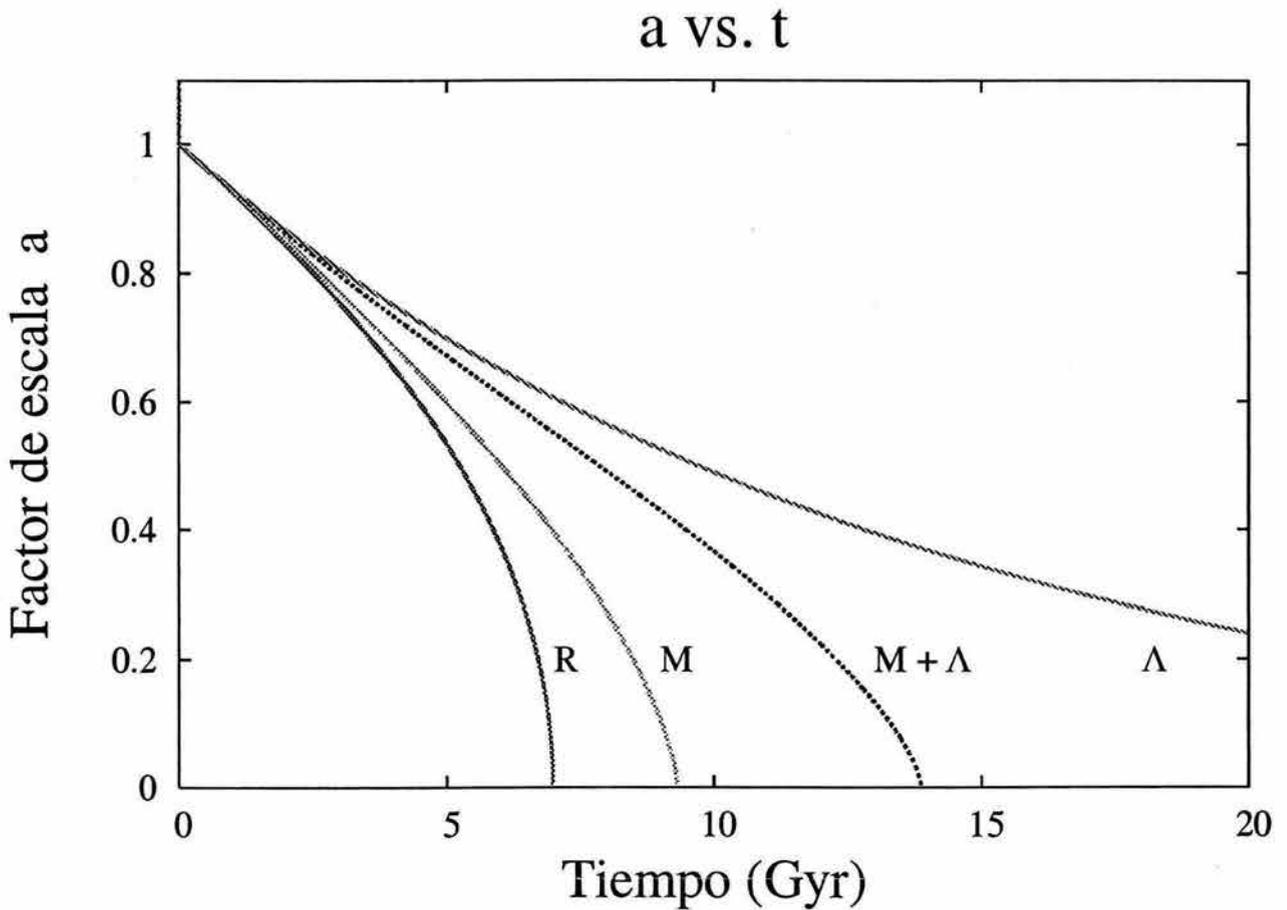


Figura I.2: Soluciones numéricas a la ecuación de Friedmann con $\Omega_k = 0$ (universos planos) y $h = 0.7$. El punto en el que las curvas cruzan el eje del tiempo indica la edad del modelo. La curva R se trata del caso $\Omega_R = 1$. La edad de este modelo resulta de 6.9912 Gyr. La curva M corresponde al modelo de Einstein de Sitter $\Omega_M = 1$, con una edad de 9.32000 Gyr. La curva M+ Λ se refiere al caso en el que $\Omega_\Lambda = 0.7$ y $\Omega_M = 0.3$ que son valores cercanos a los obtenidos actualmente por distintos autores (Spergel et al. 2003, Goldstein et al. 2003, Tegmark et al. 2004). La edad obtenida con la integración numérica es de 13.8768 Gyr. Por último, el modelo de de Sitter con una edad infinita se muestra en la curva Λ .

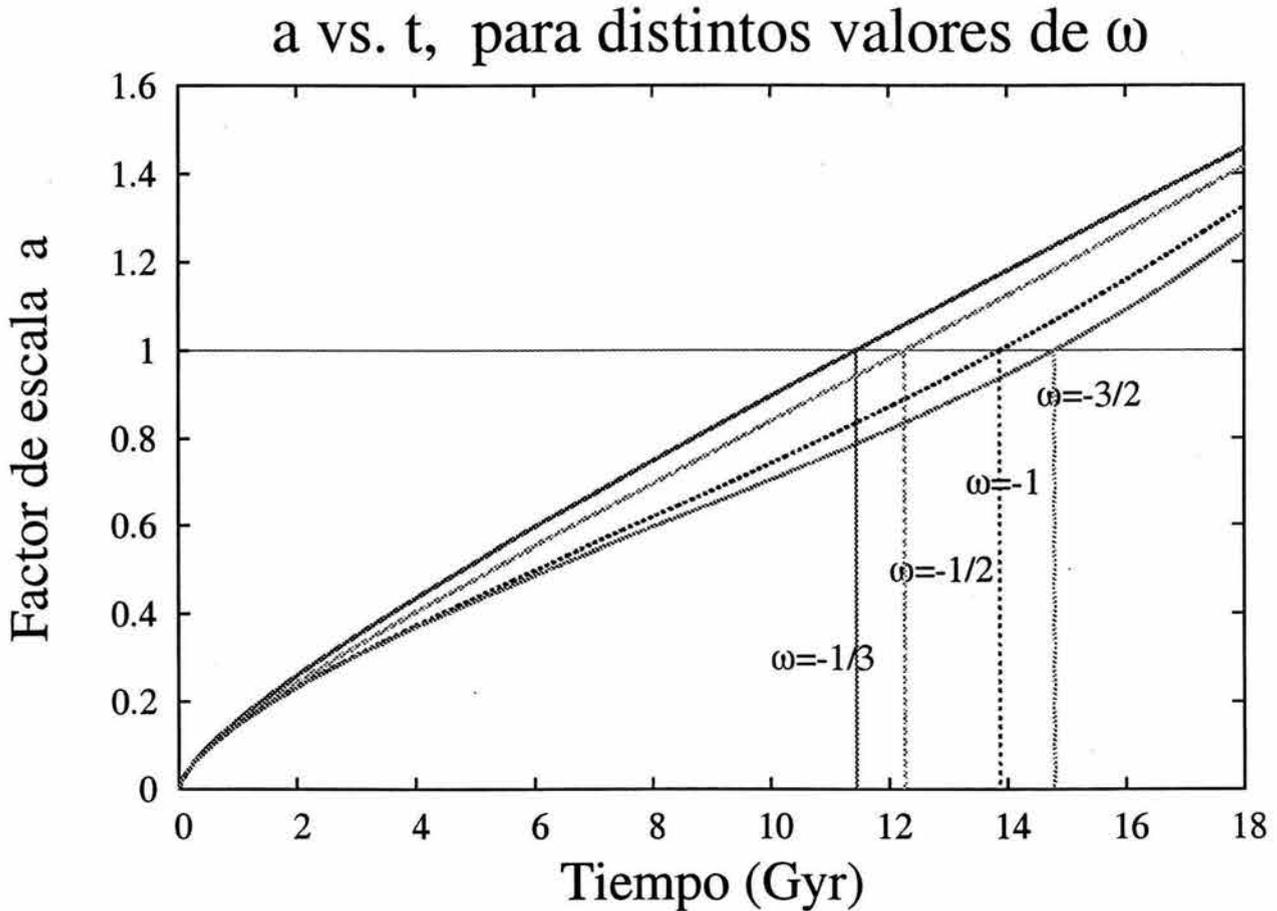


Figura I.3: Factor de escala a vs t para cuatro modelos de quiescencia $\omega=\text{constante}$, con el primer conjunto de parámetros $h = 0.70$, $\Omega_M = 0.27$, $\Omega_\Lambda = 0.73$, $\Omega_K = \Omega_R = 0$. En los puntos donde se intersectan las curvas $a(t)$ y $a = 1$ (el factor de escala actual) se trazaron rectas hacia el eje t , tal que se pueden ver directamente en la gráfica las edades correspondientes a los casos: $\omega = -1/3$, edad= 11.4504 Gyr; $\omega = -1/2$, edad= 12.2656 Gyr; $\omega = -1$, edad= 13.8768 Gyr; $\omega = -3/2$, edad= 14.7936 Gyr.

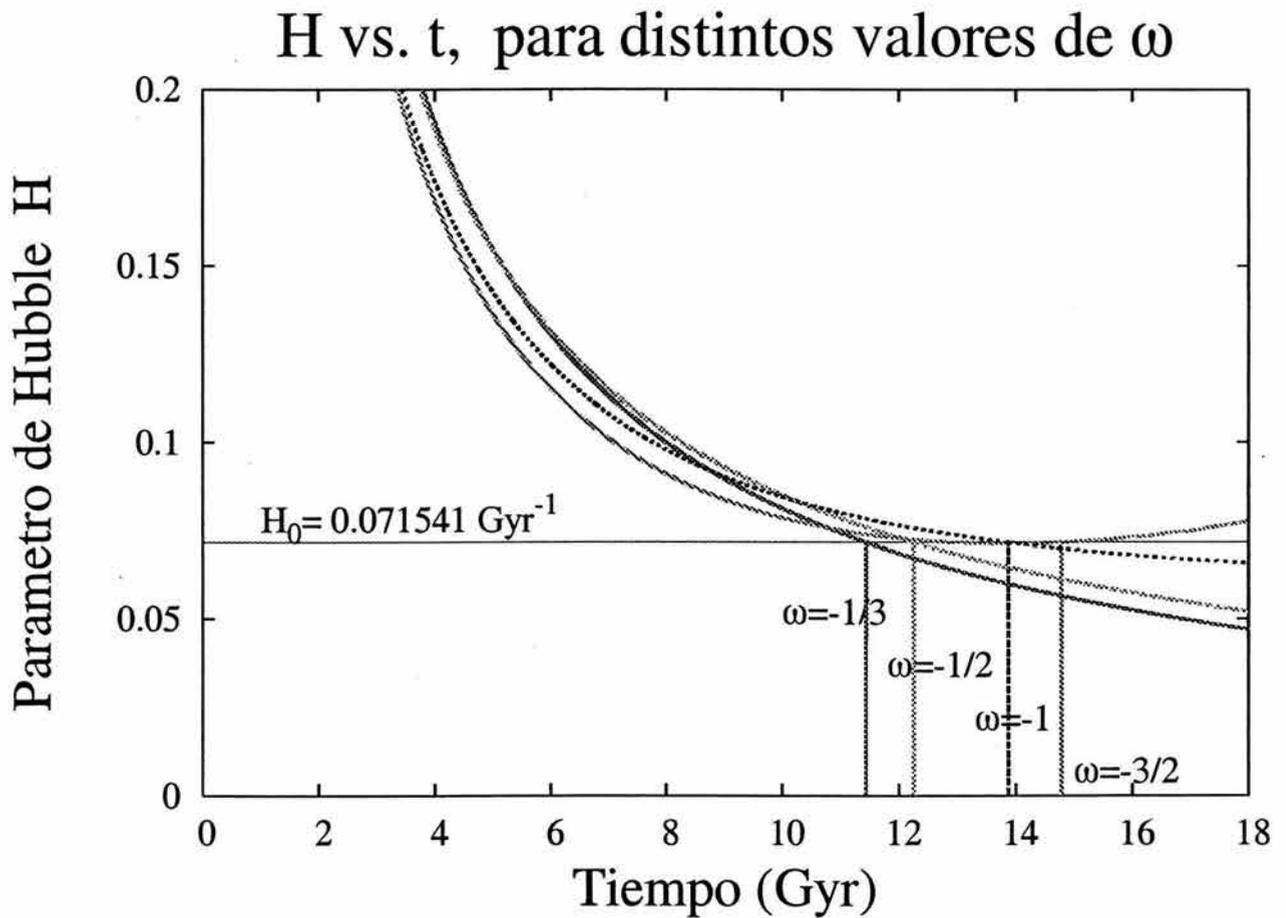


Figura I.4: Parámetro de Hubble H vs. t para cuatro modelos de quiescencia $\omega = \text{constante}$, con el primer conjunto de parámetros $h = 0.70$, $\Omega_M = 0.27$, $\Omega_\Lambda = 0.73$, $\Omega_K = \Omega_R = 0$. En los puntos donde se intersectan las curvas $H(t)$ y $H = H_0$ (la constante de Hubble) se trazaron rectas hacia el eje t , tal que se pueden ver directamente en la gráfica las edades correspondientes a cada caso.

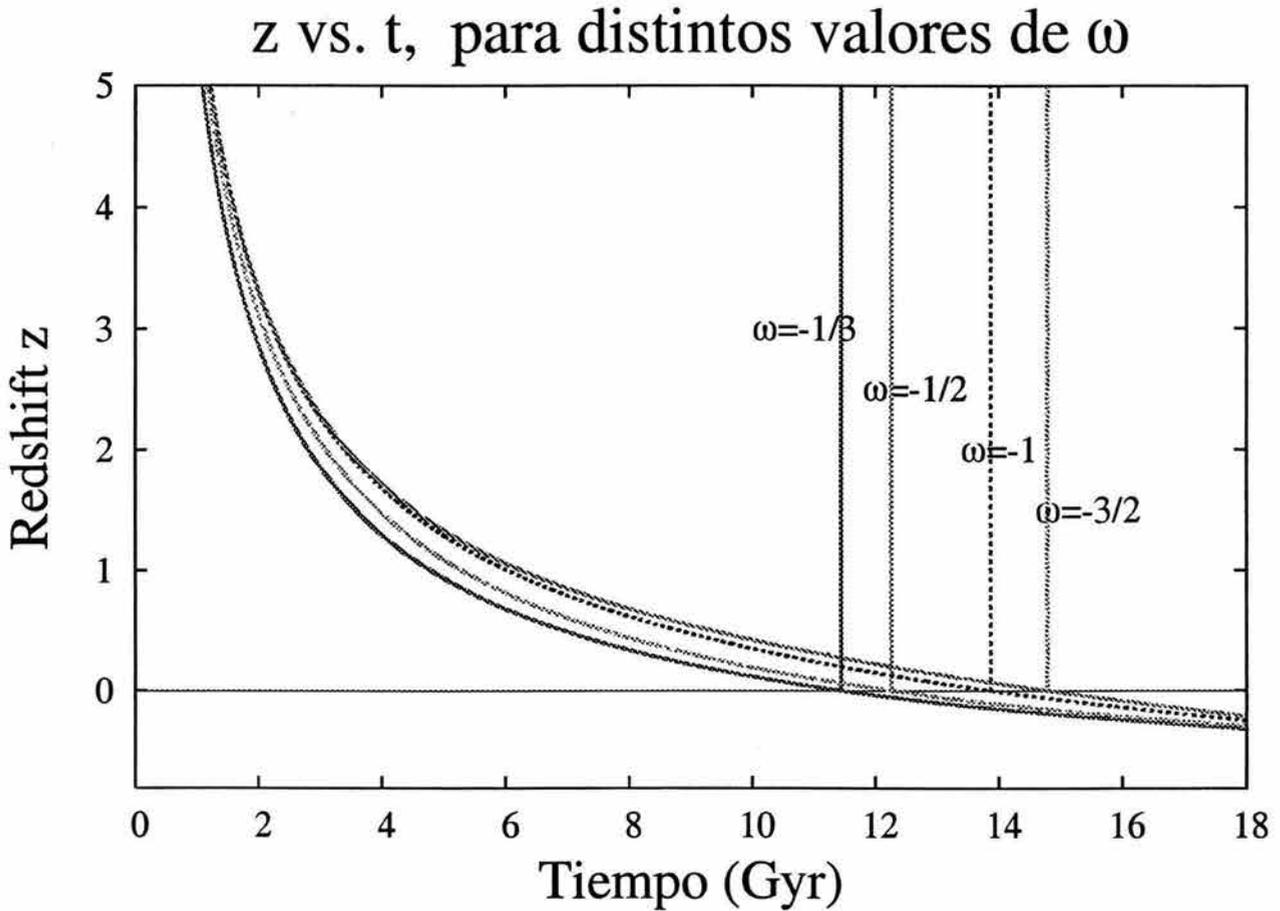


Figura I.5: Corrimiento al rojo z vs. t para cuatro modelos de quiescencia $\omega = \text{constante}$, con el primer conjunto de parámetros $h = 0.70$, $\Omega_M = 0.27$, $\Omega_\Lambda = 0.73$, $\Omega_K = \Omega_R = 0$. En los puntos donde se intersectan las curvas $z(t)$ y $z = 0$ se trazaron rectas hacia el eje t , tal que se pueden ver directamente en la gráfica las edades correspondientes a cada caso.

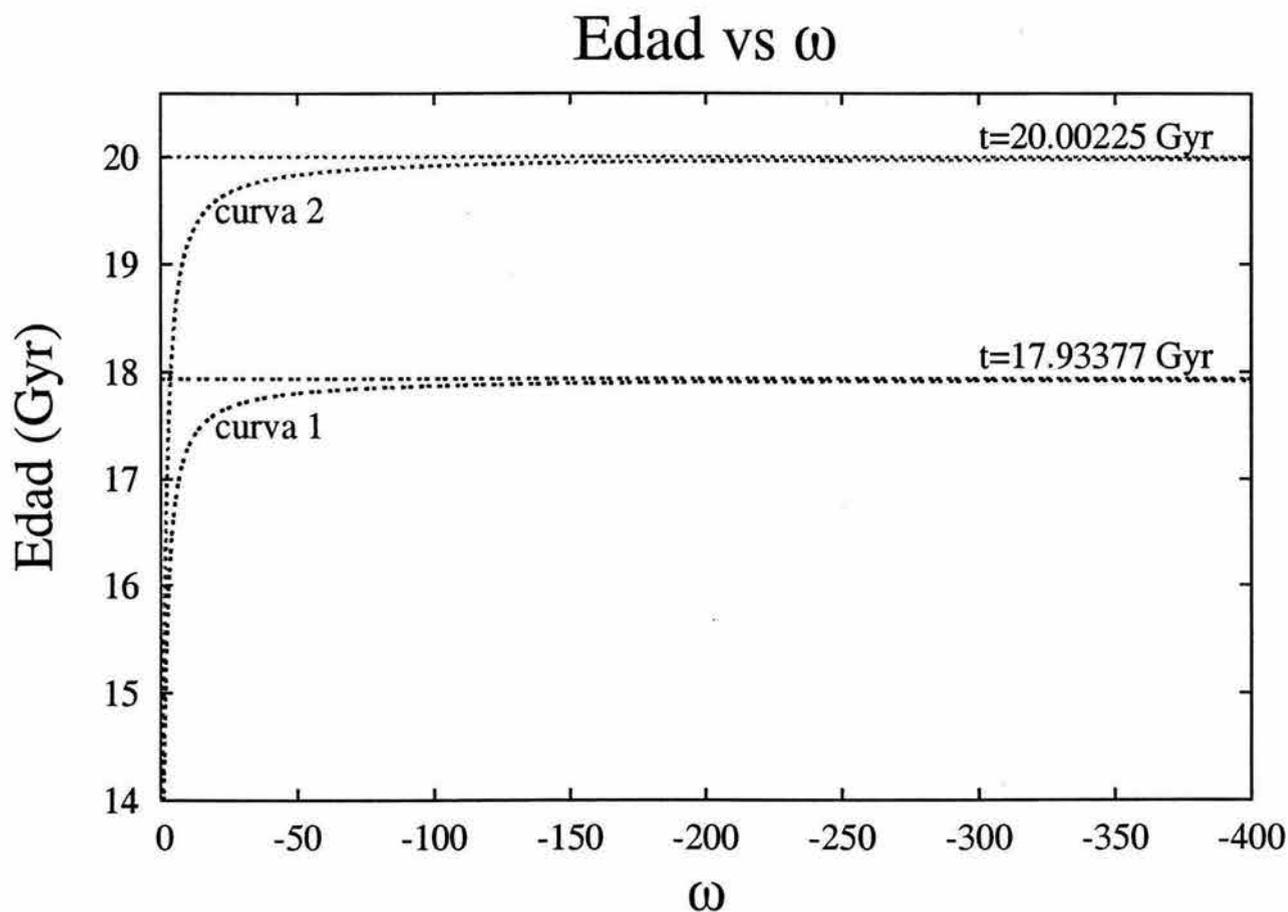


Figura I.6: Edad vs ω para modelos de quiescencia con $-400 \leq \omega \leq 0$. Cuando $\omega = 0$ se tiene el caso Einstein-de Sitter. Para la curva 1 se usó el primer conjunto de parámetros $h = 0.70$, $\Omega_M = 0.27$, $\Omega_\Lambda = 0.73$, $\Omega_K = \Omega_R = 0$. Para la curva 2 se usó el segundo conjunto de parámetros $h = 0.68$, $\Omega_M = 0.23$, $\Omega_\Lambda = 0.77$, $\Omega_K = \Omega_R = 0$. Cuando $\omega \rightarrow \infty$ los modelos de quiescencia tienen una edad límite dada por la ecuación (I.114). Para el primer conjunto de parámetros la edad límite es de 17.93377 Gyr, mientras que para el segundo es de 20.00225 Gyr.

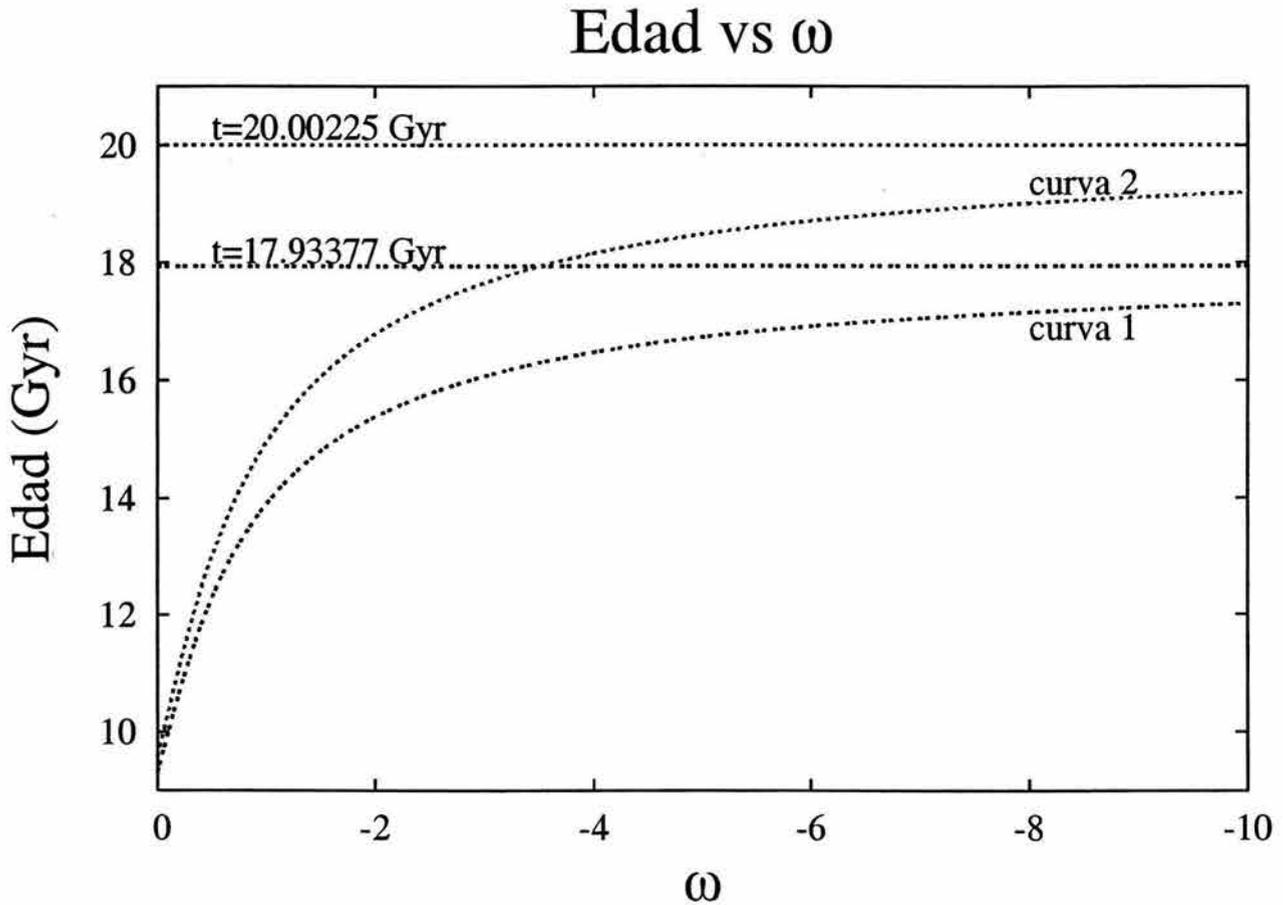


Figura I.7: Se muestra una región de la Fig. (I.6) con mayor detalle. Aquí se graficó edad vs ω para modelos de quiescencia con $-10 \leq \omega \leq 0$. Para la curva 1 se usó el primer conjunto de parámetros $h = 0.70$, $\Omega_M = 0.27$, $\Omega_\Lambda = 0.73$, $\Omega_K = \Omega_R = 0$. Para la curva 2 se usó el segundo conjunto de parámetros $h = 0.68$, $\Omega_M = 0.23$, $\Omega_\Lambda = 0.77$, $\Omega_K = \Omega_R = 0$. Se indican las edades límite ($\omega \rightarrow \infty$) para las curvas 1 y 2 que son de 17.93377 y 20.00225 Gyr respectivamente. Posteriormente usaremos esta gráfica para dar un límite inferior al valor de ω , dado un límite a la edad del Universo deducido a partir de edades de Cúmulos Globulares.

Capítulo II

Cúmulos Globulares

II.1 Descripción

Los cúmulos globulares (GC) son sistemas casi esféricamente simétricos de estrellas ligadas gravitacionalmente. Un cúmulo globular contiene aproximadamente $10^4 - 10^6$ estrellas, regadas en un volumen que va desde unas cuantas decenas hasta cientos de años luz (ly) de diámetro. La densidad de estrellas en el centro del cúmulo es tan alta (de alrededor de 10^3 estrellas por ly^3) que generalmente es imposible discernir las estrellas individuales con los telescopios terrestres. Sólo recientemente el Telescopio Espacial Hubble (HST) ha permitido escarbar en las regiones centrales de muchos cúmulos globulares.

La Vía láctea alberga alrededor de 200 GCs. Éstos forman un halo aproximadamente esférico con una alta concentración alrededor del centro galáctico. Acorde a la dinámica gravitacional un cúmulo pasa la mayor parte del tiempo lejos del núcleo; su periodo de revolución es típicamente del orden de 10^8 años. A lo largo de sus órbitas, los GCs están sujetos a una variedad de perturbaciones: fuerzas de marea de la Galaxia, paso a través del plano galáctico, escape de estrellas, evolución dinámica interna etc.

Actualmente está bastante bien establecido que casi todas las galaxias poseen GCs. Sin embargo, existen diferencias importantes. Mientras que casi todos los GCs en nuestra Galaxia y en M31 son viejos, existen casos como las dos Nubes Magallánicas y M33 que hospedan GCs mucho más jóvenes (unos cuantos Gyr).

Las estrellas de un GC comparten una historia en común y solo difieren entre sí en su masa inicial. Los GCs son poblaciones estelares simples, es decir, sus miembros son coetáneos, químicamente homogéneos y aislados. Gracias al gran número de estrellas cualquier etapa evolutiva está presente en el GC (incluso aquellas que duran muy poco, menos de 10^4 yr).

La estimación de las edades de los cúmulos de la Vía Láctea es una de las investigaciones más importantes que se lleva a cabo en GCs. Ya que los GCs (en particular los más pobres en metales) se formaron durante las etapas muy tempranas de la Galaxia y representan los sistemas estelares más viejos para los que se puede estimar la edad con bastante precisión, sus edades absolutas representan

un límite inferior bastante convincente para la edad del Universo, ya que éste no puede ser más joven que los objetos más viejos que contiene.

Si se les estudia como sistemas completos, los GCs son traceadores fósiles de la evolución dinámica y química de su galaxia y se pueden usar como partículas de prueba para evaluar tanto la masa total de la galaxia como su distribución radial. Su distribución de edades y como las edades varían para distintas metalicidades, su localización espacial en la Galaxia y sus propiedades cinemáticas hacen a estos sistemas traceadores directos de la cronología de la primera época de formación estelar en el halo de la Galaxia y pueden ayudar a entender todo el proceso de formación galáctica.

II.2 El Diagrama Color Magnitud de un Cúmulo Globular

Los datos que se reportan tras observar las estrellas son magnitudes aparentes y colores en un cierto sistema fotométrico ¹. Tradicionalmente, en los Diagramas Color Magnitud (CMD, Colour Magnitude Diagram) observados se reportan en el eje de las abscisas el color de las estrellas (generalmente B-V) y en el eje de las ordenadas la magnitud aparente observada (generalmente V). Existen relaciones que nos permiten pasar de magnitudes aparentes a luminosidades y de colores a temperaturas (véase el apéndice (B)). El diagrama HR se obtiene al graficar la luminosidad vs la temperatura. Así que la información que proporcionan los diagramas HR y CMD es equivalente.

Podemos comparar este diagrama HR con la contraparte teórica obtenida de las teorías de evolución y estructura estelar. En otras palabras, podemos repetir el proceso hacia atrás: partir de valores teóricos de luminosidad y temperatura y predecir las magnitudes y colores observados correspondientes. En ambos diagramas, las estrellas más calientes se hallan más hacia la izquierda, y las estrellas más brillantes se encuentran en la parte de arriba. El CMD es una herramienta básica, muy poderosa que permite una calibración directa de las observables en términos de los parámetros fundamentales intrínsecos (como metalicidad y edad), así como hacer comparaciones con las predicciones de modelos teóricos. La Fig. (II.1) es el CMD del GC M3.

En la Fig. (II.2) se muestra el CMD esquemático de un cúmulo globular típico. Las flechas indican las ramas principales del diagrama. La teoría moderna de evolución estelar es capaz de predecir con bastante precisión los procesos físicos experimentados por las estrellas que evolucionan a lo largo del CMD. En este diagrama se muestra la trayectoria evolutiva de una estrella Pop II desde las etapas tempranas hasta las finales. Cada fase evolutiva está señalada junto con las combustiones nucleares correspondientes.

Las líneas evolutivas dibujadas en el CMD por las estrellas del GC, de una cierta masa inicial $\sim 0.8M_{\odot}$ (0.8 masas solares) y una cierta composición química se asemeja casi del todo a las líneas onduladas mostradas en la Fig. (II.2). Sin embargo, existe una diferencia fundamental. Cada punto de la trayectoria evolutiva es el lugar alcanzado por la misma estrella a diferentes épocas durante

¹Los conceptos astronómicos que aparecen remarcados se definen en el apéndice (B).

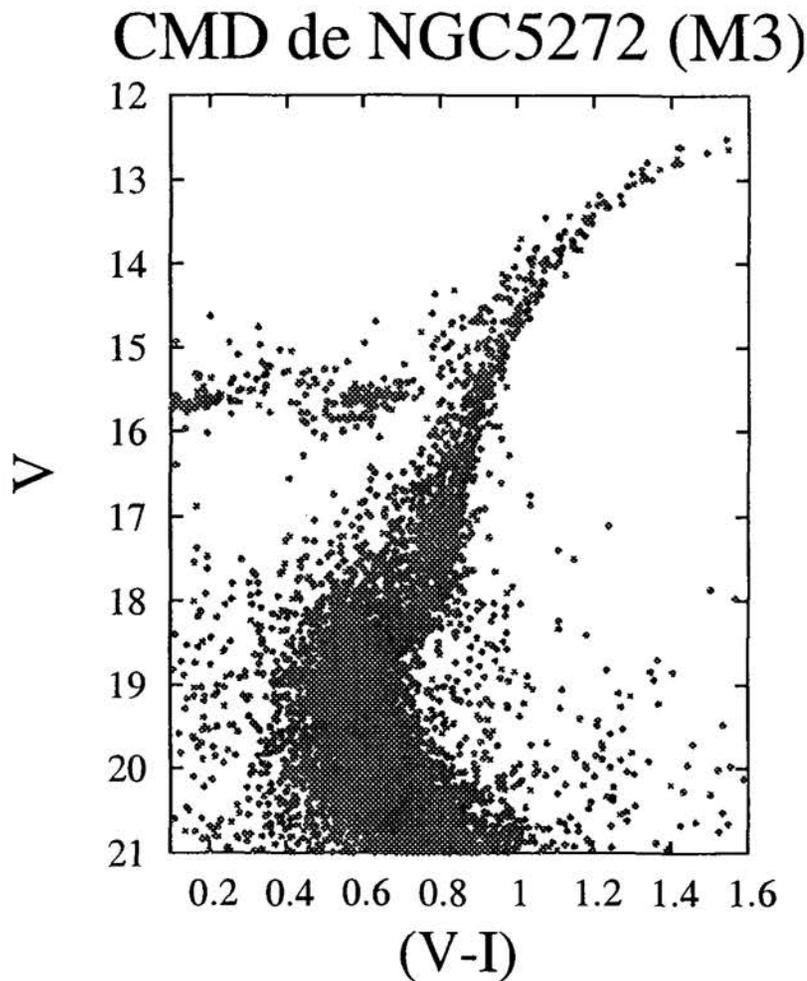


Figura II.1: Diagrama color magnitud del GC NGC5272 (M3) con 18,755 estrellas. Se observa que la gran mayoría de las estrellas se distribuyen en una región a la que se le puede ajustar una isocrona. La dispersión de los puntos en la parte inferior del diagrama es mayor, ya que en esa región los errores observacionales son más grandes.

su evolución; por otro lado, cada punto del CMD observado corresponde al lugar de las estrellas con la misma edad y composición química, pero de diferentes masas.

Dada una colección de estrellas que tengan la misma composición química pero diferentes masas, cada estrella evolucionará a lo largo de su trayectoria evolutiva, a su propio ritmo que depende de la masa de la estrella. Por lo tanto, será posible definir regiones de tiempos constantes a lo largo de las distintas trayectorias evolutivas, que darán lugar a secuencias de edad constante. A estas secuencias se les conoce generalmente como **isocronas**. Estas curvas representan la región de estrellas con la misma edad y composición química, pero con diferentes masas. Dado que se puede pensar que los miembros de un GC nacieron de la misma nube al mismo tiempo, pero con masas diferentes, la comparación de isocronas teóricas con los CMD observados es el procedimiento clave para obtener información del status evolutivo de GCs.

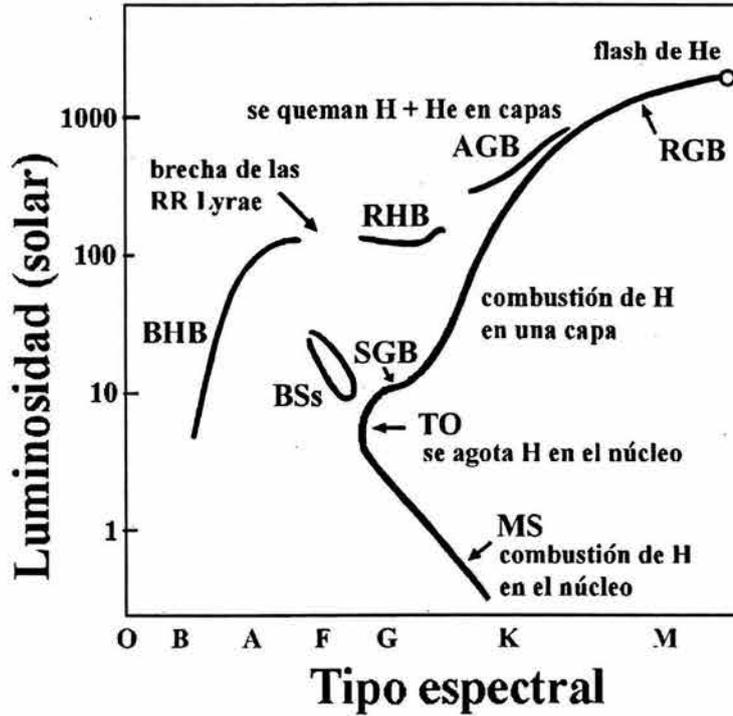


Figura II.2: CMD esquemático de un GC típico. Durante la fase de la secuencia principal (MS) las estrellas queman H en el núcleo; en el turn off (TO) el H se ha agotado. Después la estrella evoluciona rápidamente en la rama de las subgigantes (SGB) a la rama de las gigantes rojas (RGB). En el extremo de esta rama la temperatura ha crecido en el núcleo rico en He lo suficiente como para quemar He (flash de He). El grupo de estrellas ligeramente más azules que las de la rama de las gigantes corresponden a la rama horizontal azul (BHB) y roja (RHB). Estas estrellas de magnitud absoluta similar (RR Lyrae) sirven como velas estándares para medir distancias.

II.2.1 La secuencia principal y el turn off

Luego de una fase de caída libre, la contracción gravitacional lleva a la protoestrella a incrementar su temperatura central hasta que ocurre la ignición de las primeras reacciones termonucleares en el núcleo. La producción de energía nuclear va frenando la contracción y a la larga la detiene. La estrella alcanza el equilibrio, balanceando la producción y transferencia de energía y el brillo global, y entra a la secuencia principal (MS, main sequence). La MS va de bajas a altas magnitudes y colores en el CMD. Este equilibrio en la MS se extiende durante más del 70% del tiempo de vida estelar total ($\sim 10^{10}$ yr, para una masa solar), hasta que el combustible nuclear H en el núcleo se ha quemado por completo ².

Para una estrella de una masa solar, la etapa de la secuencia principal dura alrededor de 10 000

²Existe un límite inferior teórico de $\sim 0.08 M_{\odot}$ por debajo del cual la combustión de hidrógeno en el núcleo no ocurre (Karttunen et al. 1987).

millones de años. Las estrellas más masivas evolucionan más rápidamente porque radían mucha más energía. Así que la secuencia principal de una estrella de $15M_{\odot}$ dura sólo cerca de 10 millones de años. Por otro lado las estrellas menos masivas tienen un tiempo de vida en la secuencia principal mucho mayor: esperamos que una estrella de $0.25M_{\odot}$ pase alrededor de 70 000 millones de años en la secuencia principal.

Todas las etapas posteriores a la MS duran más o menos la décima parte del tiempo que pasa una estrella particular en la MS. Por eso, para cualquier propósito práctico podemos aproximar el tiempo total de vida de una estrella por

$$t_{*} \simeq t_{\text{H}} + t_{\text{He}} \simeq (1 + 0.1)t_{\text{H}}. \quad (\text{II.1})$$

Las estrellas pasan la mayor parte de su vida quemando hidrógeno en sus núcleos mediante fusión nuclear. Conforme el hidrógeno se agota en el núcleo va creciendo un núcleo de helio, y el centro de la estrella comienza a contraerse debido a la gravedad, mientras que las capas exteriores se expanden progresivamente y se enfrían. En esta etapa la estrella abandona la MS.

El agotamiento del hidrógeno en el centro corresponde con bastante precisión al punto más azul y caliente en la MS, al que se le llama el punto **turn-off (TO)**. La localización precisa del TO depende de la masa estelar y la metalicidad iniciales. Los modelos teóricos muestran que tanto la luminosidad como la temperatura del TO son mayores mientras más grande sea la masa estelar. Como a su vez, la masa inicial de una estrella en el TO depende de la edad (las estrellas queman el hidrógeno central más lentamente mientras menor es su masa), el TO es realmente el “reloj estelar”. Regresando a las isocronas, ya que las estrellas menos masivas se encuentran aún en la MS mientras que las más masivas se hallan en etapas evolutivas más avanzadas, la parte superior de la MS se va despoblando conforme aumenta la edad, mientras que el TO se vuelve más apagado (tenue) y frío. Por lo tanto se puede derivar una sencilla relación entre la luminosidad del TO y la edad. Esta relación proporciona una herramienta única y poderosa para determinar la edad de GCs si sabemos la metalicidad y la distancia. Volveremos a hablar de esa degeneración más tarde.

Se debe recalcar que (a) la maquinaria del “reloj estelar” se fía de los modelos teóricos y (b) cualquier método para fechar poblaciones estelares se basa finalmente en este “reloj estelar”. Si nuestra comprensión y funcionamiento de este reloj fueran incorrectos, nuestra descripción del Universo derivada de las estrellas sería incorrecta. También se debe resaltar que el cálculo de modelos recientes basados en ecuaciones de estado mejoradas y opacidades radiativas, así como la inclusión de difusión de elementos tienen efectos significativos tanto en la luminosidad del TO, la cual se incrementa, como en el tiempo de vida en la MS, el cual disminuye con respecto a modelos clásicos previos.

Finalmente, el marcado TO de la MS que se observa en la mayoría de los cúmulos indica que todas las estrellas individuales del GC se formaron aproximadamente al mismo tiempo. Lo angosto de la MS indica que la composición química de las estrellas en un GC es muy similar, y también constriñe la fracción de estrellas binarias en los GCs. De hecho se espera que las binarias sin

resolver produzcan una población justo arriba de la MS dado que la luminosidad combinada de las dos estrellas excede la de una sola estrella del mismo color.

II.2.2 La rama de las subgigantes (Hertzsprung Gap)

La rama de las subgigantes (SGB, sub-giant branch) se extiende casi horizontalmente desde el turn off hasta la base de la rama de las gigantes rojas. La SGB es casi vertical para cúmulos pobres en metales, mientras que tiene una curvatura pronunciada para cúmulos ricos en metales. Las estrellas de la SGB se hallan en la fase de combustión de H en una cáscara, anterior a la combustión de He en el núcleo. Esta es una región escasamente poblada debido a la rápida transición de la MS a la rama de las gigantes.

II.2.3 La rama de las gigantes rojas

Al agotarse el combustible del centro, empieza a quemarse hidrógeno en una capa delgada que rodea al creciente núcleo de helio. Tiene lugar un complejo balance entre la producción y transferencia de energía conducido sustancialmente por la opacidad. La contracción del núcleo y el calentamiento están acompañados de una expansión progresiva de la cubierta exterior. La estrella se enfría y se vuelve más brillante debido al continuo crecimiento de su radio total, subiendo por la rama de las gigantes rojas (RGB, red giant branch). Mientras más viejo es el cúmulo, más importante se vuelve esta rama.

La comparación entre las RGB de diferentes cúmulos revela que los GCs de mayor metalicidad poseen RGBs más llanas y rojas que las de GCs de menor metalicidad.

En el extremo superior de la RGB aumenta la temperatura en el núcleo rico en helio lo suficiente (10^8 K) como para quemar el helio. Al contrario de la mayoría de las demás etapas evolutivas, esta combustión ocurre en un tiempo de escala muy corto (unos cuantos años o incluso menos), y se le conoce como "el flash de helio".

II.2.4 La rama horizontal

El grupo de estrellas ligeramente más azules que las de la RGB corresponden a la rama horizontal (HB, horizontal branch). En la Fig. (II.2) aparecen indicadas la rama horizontal azul (BHB, blue horizontal branch) y la rama horizontal roja (RHB, red horizontal branch).

Tras el flash de helio, la estrella reacomoda rápidamente su estructura y comienza una fase en la que se quema helio en el núcleo, que dura unos 10^8 yr más o menos. En el CMD la estrella brinca a la rama horizontal en la que el helio del núcleo se convierte en carbón y oxígeno. Un poco después se vuelve a quemar hidrógeno en una capa inmediatamente afuera del núcleo de helio.

La localización precisa en luminosidad y temperatura de una estrella que llega a la rama horizontal de edad cero (ZAHB, zero age horizontal branch) está determinada por (al menos) tres

parámetros: la composición química de la envoltura, el tamaño de la masa del núcleo de helio al momento del flash de helio y la masa de la envoltura.

A una cierta abundancia de metales (a lo que se le llama el “primer parámetro”) y contenido de helio la ZAHB se vuelve más y más azul (o sea más y más caliente) conforme se reduce la masa de la envoltura estelar. A su vez, la posición tomada en la ZAHB por una cierta estrella del GC dependerá de la cantidad de masa perdida durante la fase de la RGB; mientras mayor sea la pérdida de masa más azul será la localización de la ZAHB.

Los modelos teóricos muestran que tanto la luminosidad de la ZAHB como la localización de temperatura de la estrella en la ZAHB se incrementan mientras mayor sea la abundancia de helio Y . Por otro lado ambas cantidades decrecen mientras más grande sea el contenido de metales Z . Además ya que al aumentar la edad disminuye la masa inicial, a una cierta pérdida de masa total la distribución de la HB se volverá cada vez más azul mientras más viejo sea el cúmulo. Esta propiedad tiene un impacto profundo al describir la formación y evolución de la Galaxia dado que en muchos estudios la morfología de la HB se adopta como un “reloj secundario” para fechar GCs.

Las estrellas de la HB de masa adecuada caen dentro de la “franja de inestabilidad”, también conocida como la “brecha de las RR Lyrae”. La envoltura de las estrellas que pasan por esta estrecha región del CMD se vuelve inestable por pulsación radial, y se les denomina variables del tipo RR Lyrae.

Dado que la HB es una característica brillante y “horizontal” del CMD (por lo tanto todos sus miembros tienen una magnitud absoluta similar), y que las estrellas de la HB pasan la mayoría de su vida en la HB a luminosidades muy cercanas a sus luminosidades de la ZAHB (0.1-0.2 mag), son “velas estándar”³ para medir distancias. En particular, las variables RR Lyrae se hallan dentro de las velas estándar clásicas más usadas de sistemas estelares Pop II.

II.2.5 La rama asintótica de las gigantes

Justo encima de la RGB se encuentran las pocas estrellas de la rama asintótica de las gigantes (AGB, asymptotic giant branch). Con el tiempo, cuando desaparece también el helio en la regiones centrales del núcleo de helio, el núcleo se contrae y empieza a quemarse helio en una capa alrededor de él. La estructura estelar está caracterizada en esta etapa por un núcleo de carbón-oxígeno rodeado por una primera capa en la que se quema helio y luego por una segunda capa más externa en la que se quema hidrógeno. Durante esta fase la estrella evoluciona hacia arriba en el CMD, fundiéndose asintóticamente con la RGB.

La etapa de AGB culmina tras el comienzo de pulsos térmicos y una fase de pérdida rápida de masa o “superviento”, con la expulsión de las capas exteriores de la estrella hasta que lo único que queda es una caliente enana blanca en el centro de una nebulosa planetaria (PN planetary nebula).

³Estos son objetos idealizados de luminosidad constante para los cuales la magnitud aparente está relacionada directamente con la distancia.

II.2.6 Las enanas blancas

Posteriormente, la enana blanca (WD, white dwarf) se vuelve más tenue y se enfría, terminando su evolución a lo largo de la **línea de enfriamiento de las enanas blancas** (white dwarf cooling line), una secuencia casi paralela pero unas 4 mag menos brillante que la MS. Las WDs son el producto final de la evolución de las estrellas de un cúmulo globular.

La evolución de estrellas con masas mayores a $8 M_{\odot}$ es diferente a lo que acabamos de describir, y culmina en explosiones de supernovas que deja como remanentes agujeros negros. No describimos estos procesos ya que los tiempos de vida de estrellas con $8 M_{\odot}$ es del orden de 10^6 años y por lo tanto no se observan en GCs.

II.2.7 Blue Stragglers

Actualmente se está descubriendo un gran número de blue stragglers (BSs) en las regiones centrales de casi cualquier GC mediante el HST (Murdin 2001). Aunque se espera que todas las estrellas de un GC por arriba de cierta masa y luminosidad hayan salido de la MS parece que las BS se balancean en la brillante extensión de la MS, como si se rezagaran en su trayectoria evolutiva en comparación con otros miembros del cúmulo. Las BSs pueden tener origen en colisiones de las estrellas de las regiones centrales densamente pobladas del cúmulo o podrían ser el producto de la fusión de binarias primordiales.

La existencia de las BSs indica que la teoría de evolución estelar aún está en desarrollo, pues tiene cuestiones sin resolver. De hecho, esta teoría describe bastante bien a las estrellas en la MS y el TO, pero es menos certera al describir las regiones posteriores al flash de helio.

II.2.8 Contaminación de estrellas de campo

Para completar este censo de estrellas debemos recalcar que en los CMDs en general es claramente visible la contaminación por estrellas de campo. La contaminación de campo consiste en aquellas estrellas que yacen detrás o frente al cúmulo, pero que se estudian como si fueran miembros de éste, ya que a menudo es difícil decir con certeza cuando una estrella dada le pertenece o no. En los CMDs de GCs galácticos es evidente que algunos manchones de estrellas pertenecen a galaxias satélite de la Vía Láctea. Se debe tener en cuenta la contaminación de campo para interpretar correctamente los CMDs.

II.2.9 Composición química

La composición química se denota con las letras X (abundancia de H), Y (abundancia de He) y Z (abundancia de todos los elementos restantes). Los GCs son objetos estelares de Pop II viejos y pobres en metales con abundancias usualmente en el rango

$$-2.5 \text{ dex} < [\text{Fe}/\text{H}] < -0.7 \text{ dex}, \quad (\text{II.2})$$

donde

$$[\text{Fe}/\text{H}] = \log \left(\frac{N_{\text{Fe}}}{N_{\text{H}}} \right) - \log \left(\frac{N_{\text{Fe}}}{N_{\text{H}}} \right)_{\odot} \quad (\text{II.3})$$

y N es el número de átomos del elemento dado (para el Sol $[\text{Fe}/\text{H}]=0.0$). Generalmente, con $[\text{Fe}/\text{H}]$ uno se refiere sólo al contenido de hierro y se le llama la **metalicidad**. Aunque recientemente se han descubierto cúmulos tan ricos en metales como el Sol (y tal vez incluso más), cerca del centro galáctico, la mayor parte de la población de cúmulos globulares tiene metalicidades del orden de $[\text{Fe}/\text{H}]=-1.3$. La metalicidad promedio de un sistema de GCs generalmente esta correlacionada con la masa total de la galaxia huésped; mientras más grande sea la galaxia más rica será la metalicidad promedio.

Una propiedad básica aceptada comúnmente de las estrellas en un GC es que todas tienen la misma edad y composición química (al menos la primordial, Matteucci 2001).

La observación de diagramas HR que muestran una MS y ramas de un ancho consistente con cero, tomando en cuenta los errores observacionales, indican una abundancia uniforme de elementos pesados en las estrellas de un cúmulo particular (Zinn & West 1984, Rutledge et al. 1997, Carretta & Gratton 1997).

Aunque no se ha propuesto ninguna indicación para alguna variación de edad entre las estrellas de un mismo cúmulo, se ha recolectado evidencia observacional de que tal vez haya pequeñas diferencias en la composición química. Aún es tema de debate si estas diferencias son primordiales o debidas a la evolución.

Una razón por la cual la homogeneidad química de los GCs es tan notable es que las galaxias, incluidas las enanas esferoidales (cuyas luminosidades integradas son comparables a las de los GCs) muestran dispersiones bastante amplias en las abundancias químicas, lo que sugiere que la formación estelar probablemente ocurre de una manera diferente y que el auto-enriquecimiento trabajó de manera mucho más eficiente en éstas.

Pese a la homogeneidad en $[\text{Fe}/\text{H}]$ de las estrellas de un mismo cúmulo existen variaciones significativas de estrella a estrella en las abundancias de otros elementos pesados. Las más famosas son las variaciones CN entre las estrellas del GC. La pregunta central es si estas variaciones son diferencias primordiales de estrella a estrella producidas cuando se formó el GC o si son resultado de algún proceso de evolución estelar.

La baja abundancia de metales de los GCs más viejos es evidencia de que la abundancia inicial de metales en la Vía láctea era muy pequeña. Esto apoya el punto de vista de que los elementos pesados fueron producidos mediante generaciones sucesivas de estrellas en la Galaxia.

Una cuestión importante que ha surgido en los últimos años es si las abundancias de elementos tales como C, N, O, Mg (los elementos α) con respecto a Fe han sido siempre como las que se observan en el Sol, es decir $[X_i/\text{Fe}] = 0$ en la notación estándar o si en cambio tienen valores por arriba del solar $[X_i/\text{Fe}] > 0$ para $[\text{Fe}/\text{H}] \leq -1$. Las observaciones actuales dan $[X_i/\text{Fe}]$ desde 0.3 hasta 0.1 para metalicidades bajas. La sobreabundancia es diferente para diferentes elementos. Nos

referimos a esto como la relación $[C,N,O,Mg/Fe]$ vs $[Fe/H]$.

II.2.10 El segundo parámetro

El diagrama HR de GCs se puede considerar como una función de la metalicidad $[Fe/H]$ (el primer parámetro). Generalmente, los GCs ricos en metales tienen RGBs frías y HB rojas, mientras que lo opuesto es cierto en GCs pobres en metales en los que se observan HB azules y muy extendidas. Sin embargo, esta regla la rompen un número de GCs cuyas metalicidades son idénticas (hasta donde podemos decir) pero cuyas ramas horizontales son diferentes. Incluso podemos hallar GCs pobres en metales con HB rojas. Esto abre la posibilidad del famoso “problema del segundo parámetro”: además de la metalicidad, debe de haber algún otro parámetro importante que ayuda a determinar la morfología de los diagramas HR. Se han sugerido distintos candidatos a ser el “segundo parámetro” entre los cuales están el contenido de helio Y , la relación $[C,N,O,Mg/Fe]$ vs. $[Fe/H]$, la edad o finalmente una sutil combinación de todos ellos.

II.3 Distancias

Existen diversos métodos para medir las distancias a GCs. Antes de HIPPARCOS, todos ellos eran inciertos hasta un nivel de alrededor del 20%.

Existen tres maneras para hallar las distancias a GCs.

1. SUBENANAS. Las subenanas próximas (estrellas pobres en metales localizadas en una secuencia paralela a la MS, pero menos brillante que ésta), suficientemente cercanas como para tener paralajes medibles proporcionan las mejores velas estándar para estimar las distancias a GCs, en especial tras los resultados del satélite HIPPARCOS. Las subenanas nos permiten (i) derivar M_V absolutos tal que es posible hacer pruebas precisas de la secuencia principal de edad cero (ZAMS, zero age main sequence) a $[Fe/H]$ variables en el régimen de bajas metalicidades, y (ii) vincular las distancias relativas a los cúmulos a la escala local de distancias, bajo la suposición de que estas estrellas son similares a las estrellas sin evolucionar en GCs.

Antes de HIPPARCOS, la muestra disponible de subenanas locales con metalicidad y paralajes precisos conocidos era extremadamente pobre. A principios de 1997 HIPPARCOS incrementó sustancialmente la base de datos observacional, haciendo al número de subenanas con paralaje muy precisa de casi 900 estrellas, 30 de las cuales tienen metalicidades comparables a las de los GCs ($[Fe/H]=-1.0$). La muestra ampliada de subenanas y el uso de nuevas abundancias de metales en la misma escala de metalicidades que la usada para estrellas de GCs, ha llevado a reducir al menos a la mitad la incertidumbre en las distancias obtenidas y por lo tanto en las edades. Véase por ejemplo, Gratton et al. 2003, Carretta et al. 2000, Chaboyer et al. 1998, Gratton, Clementini & Carretta 1998, Gratton et al. 1997.

2. RR LYRAE. Determinaciones modernas del módulo de distancia se reducen a comparar las magnitudes aparentes de las estrellas RR Lyrae o equivalentemente las estrellas de la HB con las magnitudes visuales absolutas correspondientes. Existen diversos métodos independientes para obtener las magnitudes visuales absolutas de las RR Lyrae $M_V(RR)$, lo cual lo lleva a uno a determinar si existe o no una correlación entre $M_V(RR)$ y $[Fe/H]$ y tratar de fijar la pendiente y el punto cero de esta relación. El punto cero es de importancia crítica para determinar la edad de los cúmulos más viejos, mientras que la pendiente $\Delta M_V(RR)/\Delta[Fe/H]$ tiene mucho que ver con la relación edad-metalicidad, es decir, si la edad de los GCs se reduce o no al aumentar la $[Fe/H]$ supuesta. Véase por ejemplo, Hatzidimitriou et al. 2004, Layden & Sarajedini 2003, Piersimoni, Bono & Ripepi 2002, Cassisi, De Santis & Piersimoni 2001, Ferraro et al. 1999.
3. ENANAS BLANCAS. Este método se basa en ajustar las secuencias de enfriamiento teóricas de enanas blancas a la posición observacional de las WD en el diagrama HR. Véase por ejemplo Richer et al. 2002, Hansen et al. 2002, Zoccali et al. 2001, Renzini et al. 1996. Tras la reparación del HST, se volvió técnicamente posible observar WDs en GCs.

II.4 Edades absolutas de GCs

Los parámetros observacionales requeridos para estimar a primer orden la edad absoluta de un GC son la magnitud aparente y el color del TO, junto con la distancia al cúmulo, sus contenidos de helio y metales y el reddening (enrojecimiento) interestelar a lo largo de la línea de visión. Esto permite calcular la magnitud absoluta del MS TO (“el reloj estelar observacional”). Una vez que se ha determinado la magnitud absoluta del MS TO se pueden estimar las edades mediante la comparación con modelos de isocronas apropiadas (“el reloj teórico”) transformadas adecuadamente al plano observacional.

La principal fuente de incertidumbre en las edades absolutas obtenidas de la luminosidad del MS TO ha sido nuestro pobre conocimiento acerca de las distancias a los cúmulos, aunque también se deben tomar en cuenta las incertidumbres en cantidades como la metalicidad, el enrojecimiento y la proporción de las abundancias de los elementos, así como los errores estadísticos en la asignación de un punto exacto al TO (véase la Fig. (II.1)). Debemos recordar que errores de 0.07 mag en la luminosidad absoluta del MS TO o de 0.01 mag en su color provocan un error en la edad de alrededor de 1 Gyr (Murdin 2001).

La discusión sobre las edades de los GC galácticos ha resurgido porque las modificaciones globales de la escala de distancias astronómica implicada por los resultados de HIPPARCOS, sugieren que muchos objetos galácticos, incluidos los GCs podrían estar a distancias más o menos 10% mayores de lo que antes se pensaba. La luminosidad intrínseca de sus estrellas del TO deberían ser entonces un 20% más brillantes y deberían ser aproximadamente 15% más jóvenes, dada la relación entre la luminosidad del TO y la edad.

Aunque no del todo incompatibles, las edades absolutas de GCs derivadas en la era pre-HIPPARCOS eran muy pobremente consistentes con la mayoría de las determinaciones cosmológicas de la edad, como aquellas obtenidas mediante la medición de la constante de Hubble. Sin embargo, si las más recientes estimaciones de las edades de los GCs (obtenidas usando las paralajes de HIPPARCOS para las subenanas locales) son correctas, los problemas de compatibilidad entre la “ruta estelar” y la cosmología y otras rutas alternativas se irán reduciendo y posiblemente podrían desaparecer.

En conclusión, la situación actual de nuestro conocimiento de la edad de los GCs galácticos es consistente con una distribución de edades en la que la mayoría de los GC son casi uniformemente viejos (mayores a 9 Gyr y de hasta 15 Gyr), pero también con algunos cuantos cúmulos significativamente más jóvenes (alrededor de 2 – 3 Gyr).

II.4.1 Métodos para determinar edades de Cúmulos Globulares

Determinar la edad de GCs es un proceso complejo que requiere conocer muchos parámetros, como el contenido de helio Y , la metalicidad $[Fe/H]$, la abundancia de elementos α , el módulo de distancia y el reddening. Un prerrequisito esencial es que estén disponibles diagramas HR que sean de una calidad fotométrica extremadamente buena con precisiones del orden de un décimo de magnitud. Si es así, podemos derivar las edades como sigue:

1. En el método de ajuste de isocrona (*Isochrone fitting*) variando sólo la edad, todos los elementos anteriores son necesarios simultáneamente. Véase por ejemplo Gratton et al. 2003, Liu & Chaboyer 2000, Reid 1998.
2. El método ΔV se basa en el hecho de que la magnitud del TO se vuelve más tenue conforme el cúmulo es más viejo, mientras que la luminosidad de la HB es virtualmente constante. ΔV es la diferencia en magnitudes entre el TO y la HB al color del TO. El método es independiente del enrojecimiento y hasta cierto punto de la distancia, pero requiere una suposición para la abundancia de helio. La desventaja reside en que no todos los GCs poseen estrellas RR Lyrae y algunos HB no son horizontales. Más aún, el TO es a menudo casi vertical, haciendo muy incierta la identificación de la magnitud del TO. Finalmente, existe el efecto de las controversiales relaciones $M_V(RR)-[Fe/H]$ y $[C,N,O,Mg/Fe]-[Fe/H]$. Véase por ejemplo Hatzidimitriou et al. 2004, Vandenberg 2000, Salaris & Weiss 1998.
3. El método $\Delta(B - V)$ se basa en la diferencia de color entre el TO y la base de la RGB. Esta diferencia de color decrece conforme aumenta la edad del cúmulo. Dentro de cierta aproximación, el método es independiente de la distancia, el enrojecimiento, el punto cero fotométrico, la abundancia de helio y hasta primer orden de las variaciones en $[Fe/H]$. Entre otras, las mayores incertidumbres están con las transformaciones de T_e a colores, y las proporciones $[C,N,O,Mg/Fe]$, afectando todas estas el color del TO y la localización de la RGB

y del TO. Véase por ejemplo Hatzidimitriou et al. 2004, Alcaïno et al. 1998, Salaris & Weiss 1998.

La mayoría de las edades estimadas de GCs antes de HIPPARCOS caían en el rango 14 – 18 Gyr, con excepciones (Carney 1996), mientras que tras HIPPARCOS la mayoría cae en el rango 10 – 14 Gyr (Salaris & Weiss 2002). La dispersión de edades y la relación promedio edad-metalicidad aún son tema de debate.

Capítulo III

El método de Maximum Likelihood (ML)

III.1 Conceptos básicos

Comenzaremos con unos cuantos conceptos básicos de estadística.

Una **muestra** se toma de un conjunto de elementos que corresponden a los resultados posibles de una observación individual. A tal conjunto (que puede tener un número infinito de elementos) se le llama **población**. Si de ésta se toma una muestra de n elementos, decimos que la muestra es de tamaño n . La **densidad de probabilidad** $f(x)$ proporciona la distribución de la variable aleatoria x en la población. Estamos interesados en los valores de x tomados por los elementos individuales de la muestra. Supongamos que tomamos q muestras de tamaño n y hallamos los siguientes valores para x :

$$\begin{aligned} \text{muestra 1:} & \quad x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}, \\ & \quad \vdots \\ \text{muestra } j: & \quad x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \dots, x_n^{(j)}, \\ & \quad \vdots \\ \text{muestra } q: & \quad x_1^{(q)}, x_2^{(q)}, \dots, x_n^{(q)}. \end{aligned} \tag{III.1}$$

Agrupamos el resultado de una muestra en un vector n -dimensional

$$\mathbf{x}^{(j)} = (x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \dots, x_n^{(j)}), \tag{III.2}$$

que se puede considerar como el vector de posición en un espacio de muestra n -dimensional. Su densidad de probabilidad es

$$g(\mathbf{x}) = g(x_1, x_2, \dots, x_n). \tag{III.3}$$

Esta función debe cumplir dos condiciones para que la muestra sea aleatoria:

- Los x_i individuales deben ser independientes es decir, se debe tener que

$$g(\mathbf{x}) = g_1(x_1)g_2(x_2) \dots g_n(x_n). \quad (\text{III.4})$$

- Las distribuciones individuales en el límite deben ser idénticas e iguales a la densidad de probabilidad $f(x)$ de la población

$$g_1(x) = g_2(x) = \dots = g_n(x) = f(x). \quad (\text{III.5})$$

Comparando con (III.3) es claro que existe una relación simple entre una población y una muestra, solamente si estas condiciones se cumplen. En lo que sigue por "muestra" nos estaremos refiriendo a "muestra aleatoria".

Un **estadística** es una función de los elementos de la muestra (III.2). Dado que x es una variable aleatoria una estadística también es una variable aleatoria. El ejemplo más importante de una estadística es la **media aritmética** \bar{x} de la muestra,

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n). \quad (\text{III.6})$$

El valor esperado de la media $E(\bar{x})$ es

$$E(\bar{x}) = \frac{1}{n}(E(x_1) + E(x_2) + \dots + E(x_n)) = \hat{x} = E(x). \quad (\text{III.7})$$

Cuando la muestra es finita, hablamos de la **estimación de parámetros**. Para estimar un parámetro λ de una función de distribución se usa un **estimador**

$$S = S(x_1 + x_2 + \dots + x_n), \quad (\text{III.8})$$

que es una función de la muestra $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(N)}$.

Se dice que un estimador no está sesgado si para un tamaño arbitrario de la muestra el valor esperado de la cantidad (aleatoria) S es igual al parámetro a estimar:

$$E\{S(x_1 + x_2 + \dots + x_n)\} = \lambda \quad \text{para toda } n, \quad (\text{III.9})$$

es decir, el sesgo B

$$B(\lambda) = E(S) - \lambda \quad (\text{III.10})$$

se hace cero para cualquier muestra.

Se dice que un estimador es consistente si su varianza es cero para un valor arbitrariamente

grande de la muestra, es decir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(S) = 0. \quad (\text{III.11})$$

A menudo se puede dar un límite inferior para la varianza de un estimador de un parámetro. Si se encuentra un estimador S_0 cuya varianza es igual a este límite entonces se tiene el “mejor posible” estimador. Se dice que S_0 es un estimador eficiente para λ .

III.2 Función likelihood \mathcal{L}

Para especificar explícitamente los parámetros

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p), \quad (\text{III.12})$$

escribimos la densidad de probabilidad de las variables aleatorias

$$\mathbf{x} = (x_1, x_1, \dots, x_n), \quad (\text{III.13})$$

en la forma

$$f = f(\mathbf{x}; \lambda). \quad (\text{III.14})$$

Si llevamos a cabo un cierto número de experimentos, digamos N , o si extraemos un muestra de tamaño N de una población, entonces podemos asignar un número a cada experimento j :

$$dP^{(j)} = f(\mathbf{x}^{(j)}; \lambda) dx. \quad (\text{III.15})$$

El número $dP^{(j)}$ tiene el carácter de una *probabilidad a posteriori*, es decir, dada después del experimento, de qué tan probable fue encontrar el resultado $\mathbf{x}^{(j)}$ (dentro de un pequeño intervalo). La probabilidad total de hallar exactamente todos los sucesos

$$\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \dots, \mathbf{x}^{(j)}, \dots, \mathbf{x}^{(N)},$$

es entonces el producto

$$dP = \prod_{j=1}^N f(\mathbf{x}^{(j)}; \lambda) dx. \quad (\text{III.16})$$

Claramente, esta probabilidad depende de λ .

Al producto

$$\mathcal{L} = \prod_{j=1}^N f(\mathbf{x}^{(j)}; \lambda) \quad (\text{III.17})$$

se le llama **función likelihood** (función de verosimilitud). Se debe distinguir entre la densidad de probabilidad y la función likelihood \mathcal{L} , que es una función de una muestra y por lo tanto es

una variable aleatoria. En particular, la naturaleza *a posteriori* de la probabilidad en (III.17) es importante en muchas cuestiones.

III.3 Inferencia bayesiana y máximo likelihood

El punto de vista Bayesiano, afirma que la probabilidad es una medida de la plausibilidad de una proposición, es decir, el grado a la que ésta es sostenida por una información específica.

El teorema de Bayes define la probabilidad de varias hipótesis (o modelos) dado un cierto conjunto de datos; es un enunciado de probabilidad condicional, o inferencia estadística que se adapta a la construcción de un modelo iterativo. El teorema de Bayes provee la base para la inferencia bayesiana, que establece que cuando no se conocen las probabilidades a priori, se debe suponer que son todas iguales si nada señala lo contrario. Esto nos permite determinar la probabilidad relativa o likelihood, de un conjunto de datos dado un modelo.

Considérese un conjunto de datos observados que consiste de n observaciones, $A = (A_1, \dots, A_n)$. Aseguramos que A podría ser el resultado de i diferentes posibilidades, $B = (B_1, \dots, B_i)$. En este caso, se considera que B es un conjunto de modelos que podrían producir un conjunto de datos observado A . Queremos saber, *cual de los diversos modelos tiene la mayor probabilidad de producir el conjunto observado A*. Entonces requerimos la probabilidad conjunta $P(AB_i)$ de que ocurra A dado un i -ésimo modelo B_i , la cual, de la definición de probabilidades condicionales es

$$P(AB_i) = P(A|B_i)P(B_i) = P(B_i|A)P(A), \quad (\text{III.18})$$

donde $P(A|B_i)$ es la probabilidad condicional de observar A dado un modelo específico B_i y $P(B_i)$ es la probabilidad independiente de B_i , etc.

Dados los datos observados A , la distribución de probabilidad condicional de B_i es entonces

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A)}, \quad (\text{III.19})$$

que es la probabilidad del modelo B_i dados los datos observados. Más aún, si los B_i son exclusivos y exhaustivos entonces

$$P(A) = \sum_i P(A|B_i)P(B_i) = \frac{1}{C}, \quad (\text{III.20})$$

en donde C es una constante, y por tanto la ecuación (III.19) se puede reescribir como:

$$P(B_i|A) = C P(A|B_i)P(B_i). \quad (\text{III.21})$$

A esta última ecuación se le conoce como el **teorema de Bayes**. $P(B_i)$ define lo que se conoce acerca del modelo B_i , sin saber nada de los datos y se le llama la distribución a priori o probabilidad independiente del modelo. Respectivamente, $P(B_i|A)$ define lo que se sabe acerca de B_i dado un

conocimiento acerca de los datos A , y se le llama la distribución posterior o probabilidad del modelo dados los datos. La probabilidad condicional $P(A|B_i)$ es la probabilidad de obtener las medidas reales en A dado B_i . El término restante C , está determinado por la probabilidad de obtener el resultado A dada *cualquier* hipótesis y es la constante necesaria para asegurar que la distribución posterior esté normalizada a uno.

El principio básico de la inferencia bayesiana es que siempre existen probabilidades a priori, y estas probabilidades representan nuestro conocimiento acerca de los modelos. Si no se conocen las probabilidades preferentes se puede suponer que son iguales si nada indica lo contrario. Entonces, el modelo más probable B_i , dado un conjunto de datos A , es aquel para el cual los datos mas probablemente ajusten al modelo. Por tanto el problema se simplifica a uno en el que se debe escoger el modelo B_i , para el cual $P(A|B_i)$ se maximiza. Esto se aplica a cualesquiera circunstancias en las que se recolecten los datos observacionales porque en general antes de la recolección se conoce poco acerca de $P(B_i)$. Esta falta de información significa que se deben incluir todos los modelos posibles y se les debe tratar a todos por igual, suspendiendo el método científico. En tales experimentos a menudo es imposible determinar el conjunto de *todos* los modelos posibles, dado que generalmente este es un conjunto prohibitivamente grande y mal definido. Esto implica que en la práctica sólo se puede considerar una submuestra del número total de modelos. Entonces, todos los B_i son exclusivos pero no exhaustivos. En este caso no se puede determinar el valor absoluto de C en la ecuación (III.21); por tanto estamos limitados a probabilidades relativas y la ecuación (III.21) se debe reemplazar por

$$P(B_i|A) \propto P(A|B_i)P(B_i). \quad (\text{III.22})$$

Esto mismo implica que no existe una normalización absoluta para \mathcal{L} . Por lo tanto sus valores sólo son comparables a paridad de muestra y dentro de una clase fija de modelos. Típicamente se usa para optimizar los valores de los parámetros de un modelo propuesto y no permite comparar modelos funcionalmente distintos.

Suponiendo a priori que todas las $P(B_i)$ son iguales, este término es una constante en la ecuación anterior. Por eso, sólo los valores relativos de $P(A|B_i)$ son importantes.

Para poder usar la ecuación (III.22), debemos hallar una manera útil de evaluar $P(A|B_i)$ para alguna situación particular.

III.4 Función log-likelihood

Uno le da la mayor confianza a la elección de parámetros λ para los cuales la función likelihood \mathcal{L} tiene un máximo.

Este máximo se puede hallar simplemente haciendo igual a cero la primera derivada de \mathcal{L} con respecto a λ_i . Sin embargo es muy engorroso trabajar con la derivada de un producto con muchos factores; por eso primero se construye el logaritmo de la función likelihood

$$l \equiv \ln \mathcal{L} = \sum_{j=1}^N \ln f(x^{(j)}; \lambda). \quad (\text{III.23})$$

A la función l a menudo también se le llama la **función likelihood**. A veces se le dice explícitamente la **función log-likelihood**. Es claro que los máximos de (III.23) son idénticos a los de (III.17). En el caso de un solo parámetro tenemos

$$l' = \frac{dl}{d\lambda} = 0. \quad (\text{III.24})$$

Ahora el problema de estimar un parámetro se reduce a resolver esta ecuación de likelihood. Aplicando (III.23) podemos escribir

$$l' = \sum_{j=1}^N \frac{d}{d\lambda} \ln f(x^{(j)}; \lambda) = \sum_{j=1}^N \frac{f'}{f} = \sum_{j=1}^N \varphi(x^{(j)}; \lambda), \quad (\text{III.25})$$

donde

$$\varphi(x^{(j)}; \lambda) = \frac{\frac{d}{d\lambda} f(x^{(j)}; \lambda)}{f(x^{(j)}; \lambda)}, \quad (\text{III.26})$$

es la derivada logarítmica de la densidad f con respecto a λ .

En el caso general en el que se tienen p parámetros la ecuación de likelihood (III.24) se reemplaza por un sistema de p ecuaciones simultáneas,

$$\frac{dl}{d\lambda_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, p. \quad (\text{III.27})$$

III.5 Ejemplo: mediciones repetidas con diferente precisión

Si se mide una cantidad con diferentes instrumentos, entonces en general los errores medidos son diferentes. Las medidas $x^{(j)}$ están dispersadas alrededor del valor verdadero λ . Supongamos que los errores están distribuidos normalmente, tal que una medición corresponde a obtener una muestra de una distribución gaussiana con valor medio λ y desviación estándar σ_j . La probabilidad *a posteriori* para un valor medido es entonces

$$f(x^{(j)}; \lambda) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_j} \exp\left(-\frac{(x^{(j)} - \lambda)^2}{2\sigma_j^2}\right) dx. \quad (\text{III.28})$$

De todas las N mediciones se obtiene la **función likelihood**

$$\mathcal{L} = \prod_{j=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_j} \exp\left(-\frac{(x^{(j)} - \lambda)^2}{2\sigma_j^2}\right), \quad (\text{III.29})$$

o bien

$$l = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \frac{(x^{(j)} - \lambda)^2}{\sigma_j^2} + \text{constante.} \quad (\text{III.30})$$

Entonces la ecuación de likelihood queda

$$\frac{dl}{d\lambda} = \sum_{j=1}^N \frac{(x^{(j)} - \lambda)}{\sigma_j^2} = 0. \quad (\text{III.31})$$

Es decir, en el caso de distribuciones estrictamente gaussianas $l \rightarrow \chi^2$ (salvo signo).

La solución a la ecuación (III.31) es

$$\tilde{\lambda} = \frac{\sum_{j=1}^N \frac{x^{(j)}}{\sigma_j^2}}{\sum_{j=1}^N \frac{1}{\sigma_j^2}}. \quad (\text{III.32})$$

Como

$$\left[\frac{d^2 l}{d\lambda^2} \right]_{\lambda=\tilde{\lambda}} = - \sum \sigma_j^{-2} < 0,$$

la solución es de hecho un máximo. Entonces vemos que obtenemos el estimador de maximum likelihood como la media de las N mediciones pesadas inversamente por las varianzas de las mediciones individuales.

III.6 Información de la muestra

En la sección (III.1) dijimos que un *estimador* no está sesgado si el sesgo \mathcal{B} se hace cero para cualquier muestra (véase la ecuación (III.10)) Sin embargo, la ausencia de sesgo no es la única característica requerida para un “buen” estimador. Más importante, uno debe requerir que la varianza $\sigma^2(S)$ sea pequeña. Aquí debe uno de hallar a menudo un término medio, ya que existe una conexión entre \mathcal{B} y σ^2 , descrita por la *desigualdad de información*.

De inmediato se ve que es fácil conseguir $\sigma^2(S) = 0$ simplemente usando una constante para S . Consideremos un estimador $S(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(N)})$ que es una función de la muestra $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(N)}$. Acorde a (III.4) y (III.5) la densidad de probabilidad conjunta de los elementos de la muestra es

$$f(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(N)}; \lambda) = f(x^{(1)}; \lambda) f(x^{(2)}; \lambda) \cdots f(x^{(N)}; \lambda). \quad (\text{III.33})$$

El valor esperado de S es

$$E(S) = \int S(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(N)}) f(x^{(1)}; \lambda) f(x^{(2)}; \lambda) \cdots f(x^{(N)}; \lambda) dx^{(1)} dx^{(2)} \cdots dx^{(N)}. \quad (\text{III.34})$$

Ahora suponemos que podemos derivar con respecto a λ en la integral. Usando además la ecuación

(III.10) obtenemos

$$1 + B'(\lambda) = \int S \left(\sum_{j=1}^N \frac{f'(x^{(j)}; \lambda)}{f(x^{(j)}; \lambda)} \right) f(x^{(1)}; \lambda) \cdots f(x^{(N)}; \lambda) dx^{(1)} \cdots dx^{(N)}, \quad (\text{III.35})$$

lo cual, usando la ecuación (III.26)) es

$$1 + B'(\lambda) = E \left\{ S \sum_{j=1}^N \frac{f'(x^{(j)}; \lambda)}{f(x^{(j)}; \lambda)} \right\} = E \left\{ S \sum_{j=1}^N \varphi(x^{(j)}; \lambda) \right\}, \quad (\text{III.36})$$

y por lo tanto

$$1 + B'(\lambda) = E\{Sl'\}. \quad (\text{III.37})$$

Como se cumple que

$$\int f(x^{(1)}; \lambda) \cdots f(x^{(N)}; \lambda) dx^{(1)} \cdots dx^{(N)} = 1, \quad (\text{III.38})$$

al calcular la derivada con respecto a λ se obtiene

$$\int \sum_{j=1}^N \frac{f'(x^{(j)}; \lambda)}{f(x^{(j)}; \lambda)} f(x^{(1)}; \lambda) \cdots f(x^{(N)}; \lambda) dx^{(1)} \cdots dx^{(N)} = E(l') = 0. \quad (\text{III.39})$$

Multiplicando esta ecuación por $E(S)$ y restando lo que resulta de (III.37) da

$$1 + B'(\lambda) = E\{Sl'\} - E\{S\}E\{l'\} = E\{[S - E(S)]l'\}. \quad (\text{III.40})$$

Para entender el significado de esta expresión, necesitamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz que dice que si x y y son variables aleatorias, y si x^2 y y^2 tienen valores esperado finitos, entonces

$$\{E(xy)\}^2 \leq E(x^2)E(y^2). \quad (\text{III.41})$$

Para demostrar la desigualdad consideremos la expresión

$$E((ax + y)^2) = a^2E(x^2) + 2aE(xy) + E(y^2) \geq 0. \quad (\text{III.42})$$

Esto es un número no negativo para cualquier valor de a . Si consideramos sólomente el caso de la igualdad, entonces es una ecuación cuadrática para a cuyas soluciones son

$$a_{1,2} = -\frac{E(xy)}{E(x^2)} \pm \sqrt{\left(\frac{E(xy)}{E(x^2)}\right)^2 - \frac{E(y^2)}{E(x^2)}}. \quad (\text{III.43})$$

Por lo tanto la desigualdad (III.42) es válida para toda a si el término dentro de la raíz es negativo

o cero. Por lo tanto

$$\frac{\{E(xy)\}^2}{\{E(x^2)\}^2} - \frac{E(y^2)}{E(x^2)} \leq 0. \quad (\text{III.44})$$

es decir (III.41).

Si ahora aplicamos la desigualdad (III.41) a (III.40) obtenemos

$$\{1 + B'(\lambda)\}^2 \leq E\{[S - E(S)]^2\} E(l'^2). \quad (\text{III.45})$$

Ahora usamos (III.25) para reescribir la expresión para $E(l'^2)$,

$$\begin{aligned} E(l'^2) &= E \left\{ \left(\sum_{j=1}^N \varphi(x^{(j)}; \lambda) \right)^2 \right\}, \\ &= E \left\{ \sum_{j=1}^N (\varphi(x^{(j)}; \lambda))^2 \right\} + E \left\{ \sum_{i \neq j} \varphi(x^{(i)}; \lambda) \varphi(x^{(j)}; \lambda) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{III.46})$$

Todos los componentes en el segundo término del lado derecho son cero porque para $i \neq j$

$$E\{\varphi(x^{(i)}; \lambda) \varphi(x^{(j)}; \lambda)\} = E\{\varphi(x^{(i)}; \lambda)\} E\{\varphi(x^{(j)}; \lambda)\}, \quad (\text{III.47})$$

$$E\{\varphi(x; \lambda)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f'(x; \lambda)}{f(x; \lambda)} f(x; \lambda) dx = \int f'(x; \lambda) dx. \quad (\text{III.48})$$

Como

$$\int f(x; \lambda) dx = 1, \quad (\text{III.49})$$

si derivamos a ambos lados con respecto a λ obtenemos

$$\int f'(x; \lambda) dx = 0. \quad (\text{III.50})$$

Por lo tanto (III.46) queda

$$E(l'^2) = E \left\{ \sum_{j=1}^N (\varphi(x^{(j)}; \lambda))^2 \right\} = E \left\{ \sum_{j=1}^N \left(\frac{f'(x^{(j)}; \lambda)}{f(x^{(j)}; \lambda)} \right)^2 \right\}. \quad (\text{III.51})$$

Dado que los términos individuales de la suma son independientes, el valor esperado de la suma es simplemente la suma de los valores esperados. Los valores esperados individuales no dependen de los elementos de la muestra. Por lo tanto uno tiene

$$I(\lambda) = E(l'^2) = N E \left\{ \left(\frac{f'(x; \lambda)}{f(x; \lambda)} \right)^2 \right\}. \quad (\text{III.52})$$

A esta expresión se le llama la *información de la muestra con respecto a λ* . Es un número no negativo, que se hace cero si la función likelihood no depende del parámetro λ .

A veces es útil escribir la información de manera un tanto diferente. Derivamos la expresión

$$E\left(\frac{f'(x; \lambda)}{f(x; \lambda)}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f'(x; \lambda)}{f(x; \lambda)} f(x; \lambda) dx = 0, \quad (\text{III.53})$$

una vez más con respecto a λ y obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{f'^2}{f} + f \left(\frac{f'}{f} \right)' \right\} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left(\frac{f'}{f} \right)^2 + \left(\frac{f'}{f} \right)' \right\} f dx, \\ &= E \left\{ \left(\frac{f'}{f} \right)^2 \right\} + E \left\{ \left(\frac{f'}{f} \right)' \right\}. \end{aligned} \quad (\text{III.54})$$

Por lo tanto la información se puede escribir como

$$I(\lambda) = N E \left\{ \left(\frac{f'(x; \lambda)}{f(x; \lambda)} \right)^2 \right\} = -N E \left\{ \left(\frac{f'(x; \lambda)}{f(x; \lambda)} \right)' \right\}, \quad (\text{III.55})$$

o

$$I(\lambda) = E(l'^2) = -E(l''). \quad (\text{III.56})$$

Ahora podemos escribir la desigualdad (III.45) de la siguiente manera

$$\{1 + B'(\lambda)\}^2 \leq \sigma^2(S) I(\lambda), \quad (\text{III.57})$$

o

$$\sigma^2(S) \geq \frac{(1 + B'(\lambda))^2}{I(\lambda)}. \quad (\text{III.58})$$

Esta es la *desigualdad de información*: proporciona la conexión entre el sesgo y la varianza de un estimador y la información de la muestra. Se debe notar que al derivarla no se supuso nada acerca del estimador. El lado derecho de la desigualdad (III.58) es por lo tanto un límite inferior para la varianza de un estimador. Se le llama *límite de varianza mínimo* o *límite de Cramer-Rao*. En los casos en los que el sesgo no depende de λ , es decir, particularmente en los casos en que el sesgo sea cero, la desigualdad (III.58) se simplifica a

$$\sigma^2(S) \geq \frac{1}{I(\lambda)}. \quad (\text{III.59})$$

Esta relación justifica el usar el nombre información. Conforme aumenta la información de una muestra, la varianza de un estimador se puede hacer más pequeña.

Ahora nos preguntamos bajo cuáles circunstancias se llega al límite de varianza mínima, o

explícitamente cuando se cumple la igualdad en (III.58). En la desigualdad (III.42), se da la igualdad si $(ax + y)$ es cero, pues sólo así se tiene $E\{(ax + y)^2\} = 0$ para todos los valores de a , x y y . Aplicando esto a (III.45) tenemos que

$$l' + a(S - E(S)) = 0, \quad (\text{III.60})$$

o

$$l' = A(\lambda)(S - E(S)). \quad (\text{III.61})$$

Aquí A es una cantidad arbitraria que no depende de la muestra, $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(N)}$, pero que sin embargo puede ser una función de λ . Integrando (III.61) se obtiene

$$l = \int l' d\lambda = B(\lambda)S + C(\lambda) + D, \quad (\text{III.62})$$

y finalmente

$$L = d \exp[B(\lambda)S + C(\lambda)]. \quad (\text{III.63})$$

Las cantidades d y D no dependen de λ .

Vemos que los estimadores alcanzan el límite de varianza mínima cuando la función likelihood es de la forma especial (III.63). Por lo tanto existen los *estimadores de varianza mínima*.

En el caso de un estimador de varianza mínima no sesgado obtenemos de (III.59)

$$\sigma^2(S) = \frac{1}{I(\lambda)} = \frac{1}{E(l'^2)}. \quad (\text{III.64})$$

Sustituyendo (III.61) se obtiene

$$\sigma^2(S) = \frac{1}{(A(\lambda))^2 E\{(S - E(S))^2\}} = \frac{1}{(A(\lambda))^2 \sigma^2(S)}, \quad (\text{III.65})$$

o

$$\sigma^2(S) = \frac{1}{|A(\lambda)|}. \quad (\text{III.66})$$

III.7 Propiedades asintóticas de la función Likelihood y estimadores de Maximum-Likelihood

Demostremos varias propiedades importantes de la función likelihood y de los estimadores de maximum likelihood para muestras de datos muy grandes, es decir, cuando $N \rightarrow \infty$. El estimador $S = \tilde{\lambda}$ se definió como la solución de la ecuación de likelihood

$$l'(\lambda) = \sum_{j=1}^N \left(\frac{f'(x^{(j)}; \lambda)}{f(x^{(j)}; \lambda)} \right)_{\tilde{\lambda}} = 0. \quad (\text{III.67})$$

Supongamos que $l'(\lambda)$ se puede derivar una vez más con respecto a λ tal que la podemos expandir en una serie alrededor del punto $\lambda = \tilde{\lambda}$,

$$l'(\lambda) = l'(\tilde{\lambda}) + (\lambda - \tilde{\lambda})l''(\tilde{\lambda}) + \dots \quad (\text{III.68})$$

El primer término del lado derecho se hace cero debido la ecuación (III.67). En el segundo término se puede escribir explícitamente

$$l''(\tilde{\lambda}) = \sum_{j=1}^N \left(\frac{f'(\mathbf{x}^{(j)}; \lambda)}{f(\mathbf{x}^{(j)}; \lambda)} \right)'_{\tilde{\lambda}}. \quad (\text{III.69})$$

Esta expresión tiene la misma forma del valor medio para una muestra. Si N es grande, entonces se puede reemplazar por el valor esperado de la población

$$l''(\tilde{\lambda}) = N E \left\{ \left(\frac{f'(\mathbf{x}; \lambda)}{f(\mathbf{x}; \lambda)} \right)'_{\tilde{\lambda}} \right\}. \quad (\text{III.70})$$

Usando la ecuación (III.56) podemos escribir

$$l''(\tilde{\lambda}) = E(l''(\tilde{\lambda})) = -E(l'^2(\tilde{\lambda})) = -I(\tilde{\lambda}) = -\frac{1}{b^2}. \quad (\text{III.71})$$

De esta manera podemos reemplazar la expresión para $l''(\tilde{\lambda})$, que es una función de la muestra $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$, por la cantidad $-1/b^2$, que sólo depende de la densidad de probabilidad f y el estimador $\tilde{\lambda}$. Si se ignoran los términos de orden superior, la ecuación (III.68) se puede expresar como

$$l'(\lambda) = -\frac{1}{b^2}(\lambda - \tilde{\lambda}). \quad (\text{III.72})$$

Integrando se obtiene

$$l(\lambda) = -\frac{1}{2b^2}(\lambda - \tilde{\lambda})^2 + c. \quad (\text{III.73})$$

Para $\lambda = \tilde{\lambda}$ la expresión anterior nos dice que $c = l(\tilde{\lambda})$ o

$$l(\lambda) - l(\tilde{\lambda}) = -\frac{(\lambda - \tilde{\lambda})^2}{2b^2}. \quad (\text{III.74})$$

Sacando la exponencial obtenemos

$$\mathcal{L}(\lambda) = k \exp \left[-\frac{(\lambda - \tilde{\lambda})^2}{2b^2} \right], \quad (\text{III.75})$$

donde k es una constante. La función likelihood \mathcal{L} tiene la forma de una distribución normal con media $\tilde{\lambda}$ y varianza b^2 . En los valores $\lambda = \tilde{\lambda} \pm b$, donde λ se halla a una desviación estándar de

$\tilde{\lambda}$, se tiene

$$-(l(\lambda) - l(\tilde{\lambda})) = \frac{1}{2}. \quad (\text{III.76})$$

Ahora podemos comparar (III.72) con (III.61) y (III.66). Como estamos estimando el parámetro λ , debemos escribir $S = \tilde{\lambda}$ y entonces $E(S) = \lambda$.

Entonces tenemos:

$$l' = A(\lambda)(S - E(S)) = A(\lambda)(\tilde{\lambda} - \lambda) = -\frac{1}{b^2}(\tilde{\lambda} - \lambda) = \frac{1}{b^2}(\tilde{\lambda} - \lambda), \quad (\text{III.77})$$

es decir,

$$A(\lambda) = \frac{1}{b^2}. \quad (\text{III.78})$$

Por consiguiente el estimador $\tilde{\lambda}$ es un estimador de varianza mínima no sesgado con varianza

$$\sigma^2(\tilde{\lambda}) = b^2 = \frac{1}{I(\tilde{\lambda})} = \frac{1}{E(l'^2(\tilde{\lambda}))} = -\frac{1}{E(l''(\tilde{\lambda}))}. \quad (\text{III.79})$$

Dado que el estimador $\tilde{\lambda}$ sólo posee esta propiedad para el caso límite $N \rightarrow \infty$, se le llama *asintóticamente no sesgado*. Esto es equivalente al enunciado de que el estimador de **maximum likelihood** es consistente. Por la misma razón a la función **likelihood** se le llama *asintóticamente normal*.

Interpretamos a la función **likelihood** $\mathcal{L}(\lambda)$ como una medida de la probabilidad de que el valor verdadero λ_0 de un parámetro sea igual a λ .

El resultado de un estimador se escribe a menudo en la forma abreviada

$$\lambda = \tilde{\lambda} \pm \sigma(\tilde{\lambda}) = \tilde{\lambda} \pm \Delta\lambda. \quad (\text{III.80})$$

Como la función **likelihood** es *asintóticamente normal*, al menos en el caso de muestras grandes, podemos interpretar lo anterior diciendo que la probabilidad de que el valor verdadero λ_0 yazca en el intervalo

$$\tilde{\lambda} - \Delta\tilde{\lambda} < \lambda_0 < \tilde{\lambda} + \Delta\tilde{\lambda}, \quad (\text{III.81})$$

es del 68.3%. En la práctica, la relación anterior se usa para muestras grandes, pero finitas.

Desafortunadamente no se puede construir ninguna regla general para determinar cuando una muestra es suficientemente larga como para que este procedimiento sea fiable. Claramente, si N es finito, (III.70) es sólo una aproximación, cuya exactitud depende no sólo de N , sino también de la densidad de probabilidad particular $f(x; \lambda)$

III.8 Determinación de edades, metalicidades y distancias a GCs del grupo local

El más reciente trabajo de Xavier Hernandez y David Valls-Gabaud trata sobre maneras de recuperar de la mejor manera posible los parámetros físicos de un cúmulo globular, surgido de trabajos previos más generales sobre inferencias de tasas de formación estelar de poblaciones estelares resueltas (Hernández, Valls-Gabaud & Gilmore 1999, Hernández, Gilmore & Valls-Gabaud 2000a, Hernández, Valls-Gabaud & Gilmore 2000b).

Si se analiza la literatura, la determinación de parámetros de GCs ha sido hecha por los mismos observacionales que produjeron el CMD. Como mencionamos en la sección (I.19), estas determinaciones generalmente no incluyen un análisis estadístico completo. X. Hernández y D. Valls-Gabaud montaron un modelo probabilístico completo, tal que los valores de los parámetros de GCs y los intervalos de confianza son evaluados de manera rigurosa.

Existe un interés intrínseco en averiguar los parámetros (edad, metalicidad, distancia y reddening) de los cúmulos globulares de nuestra o de otra galaxia. Además, conocer estos parámetros nos permite deducir de una manera directa el esquema de formación galáctica. Hay otro interés asociado a los cúmulos globulares que es cosmológico. Los GCs son los objetos más viejos que conocemos y con sus edades se puede establecer un límite inferior a la edad del Universo.

Los cúmulos globulares tienen velocidades de dispersión de alrededor de 6 Km/s, la energía de amarre gravitacional es muy pequeña; una explosión de supernova tiene velocidades características de miles de Km/s, desde un punto de vista físico no es posible pensar que haya un rango de edades; en un cúmulo globular todas las estrellas se formaron al mismo tiempo y la formación estelar se acaba en cuanto estalla la primera supernova. Todas las estrellas del cúmulo tienen la misma metalicidad porque no hay auto-enriquecimiento.

Hay efectos (errores observacionales) que mueven a las estrellas de un GC de su lugar real en el CMD al observarlas y lo que se obtiene es una nube de puntos. Xavier Hernández y David Valls Gabaud crearon un método para deducir cuál isocrona tiene una probabilidad máxima de haber dado origen a una cierta nube de puntos (Hernández & Valls Gabaud 2004).

Existen procesos de disipación, que implican pérdida de información y entonces el problema no es sencillo.

¿Que es lo que determina un CMD?

Hay dos tipos de procesos:

1. Intrínsecos a la formación del GC. A un tiempo T , una masa de gas comienza convertirse en estrellas. Esa masa de gas está caracterizada por la cantidad de gas, su metalicidad, que elementos estaban y en que proporción existían en el cúmulo de gas. En primera instancia esto es una serie de más de 100 números, la cantidad de cada uno de los elementos que haya presentes con respecto al helio. Afortunadamente, sólo hay tres procesos que producen elementos: a) el Big Bang, que produjo una cierta cantidad inicial de elementos, b) enriquecimiento por

estrellas masivas, supernovas tipo II que producen elementos y c) enriquecimiento por estrellas binarias que chocan, supernovas tipo Ia que producen elementos etc. Cada uno de estos tres procesos produce elementos con una razón fija entre ellos; eso quiere decir que bastan tres números para hacer una caracterización bastante buena del contenido de los diferentes elementos en la nube de gas. Esta es una buena aproximación a primer orden, y una razonable aproximación de orden cero es tomar nada más un número, una especie de metalicidad genérica. Luego que se sabe de que estaba hecha la nube, cuanto pesaba y en que momento comenzó a convertirse en estrellas, necesitamos la función inicial de masa (IMF), que es una función de distribución que dice como se repartió esa masa inicial entre las estrellas de distintas masas. Esto introduce un elemento probabilístico: desde el momento intrínseco de la formación del cúmulo globular hay un componente estadístico en la producción del CMD. Se debe tomar en cuenta que esta función probabilística no está muestreada densamente en todas las regiones para todos los cúmulos.

También hay efectos de distribución estelar que hacen que la densidad de puntos a lo largo de la curva no sea constante. En la secuencia principal (MS) del CMD hay muchas estrellas, hay muy pocas en la rama de las gigantes rojas (RGB), y en la rama de las subgigantes (SGB) casi no hay ninguna. Esto no es un resultado que se deba a la IMF; se debe a la duración de las fases estelares entre las diferentes regiones, o sea a evolución estelar.

2. Asociados a la observación del GC. Al observar los cúmulos, se tiene acceso a la magnitud aparente, no a la magnitud absoluta. También se tiene enrojecimiento. Los cúmulos globulares típicamente están a latitudes galácticas altas. Puede ir desde algunas centésimas de magnitud para cúmulos globulares, hasta una o dos magnitudes para cúmulos abiertos dentro del disco. No tenemos acceso al brillo y al color absoluto real de la estrella, por las limitaciones de los aparatos de medición. Hay una suma grande de procesos distintos que contribuyen a que la medición del color real de la estrella y de la magnitud se distorsionen. Como el efecto total es la suma de un número grande de procesos no correlacionados, típicamente se invoca el teorema del valor medio y se dice que están distribuidos de manera gaussiana. Otro detalle son las binarias: si el telescopio no tiene la resolución suficiente, estrellas que son realmente dos aparecen como un solo punto en el CMD observado, y dos estrellas sobre la isocrona aparecen como una sola estrella. En ese sentido, -en el sentido de cúmulos globulares-, binarias no se refiere necesariamente a binarias físicas, no tiene que haber una asociación real entre esas dos estrellas, pueden ser simples efectos de proyección.

Existen diversos métodos para tratar de reconstruir los parámetros de un cúmulo globular. En el capítulo (II) ya mencionamos el método de ajuste de isocrona y los métodos ΔV y $\Delta(B-V)$ que usan la posición del TO en el CMD. Vimos que la magnitud del TO es una función de la metalicidad, la edad, la distancia etc. Con esto se tiene una relación entre la observable y los parámetros estructurales del cúmulo globular. Si hubiera pocos parámetros estructurales, con esto se resuelve

el problema, pero lo que pasa es que se termina con menos restricciones de lo hay incógnitas; es un típico problema subdeterminado dónde lo que se encuentra es que no se tiene acceso a los valores de las incógnitas sino nada más a relaciones entre ellas. Esto da origen a las degeneraciones edad-metalicidad edad-distancia etc. Con este método es difícil cuantificar las incertidumbres sobre el resultado final y se vuelve muy complicado estimar los rangos de error. Entonces, al reconstruir los parámetros de un cúmulo globular de esta manera, se ignora la naturaleza probabilística del problema y se pierde información.

Otro problema con el método de ajuste de isocrona es que es muy sensible a las binarias. Hay que tomar en cuenta que el peso a lo largo de la isocrona desde el punto de vista teórico no es constante, y entonces se debe observar tanto la forma como el peso de la isocrona a lo largo de ella, o sea, los códigos de evolución estelar dan más información aparte de la forma de la isocrona.

Otra manera de hacerlo es pintar una cuadrícula sobre el CMD y extraer un vector N por observación, en el que cada uno de las componentes es el número de estrellas que hay en cada uno de esos cuadros. Después se simulan vectores de éstos, se simulan errores, se hace una comparación entre los vectores reales y los simulados y se seleccionan los parámetros estructurales del cúmulo que dan el vector que más se parece al observado. Este método es mejor que el anterior, pero sigue sin ser lo óptimo, pues se sigue desperdiciando información, porque este proceso de empalmarle una cuadrícula al CMD reduce toda la información relacionada a uno de los cuadros a un número. Se debe escoger que tan fina será la cuadrícula (si es muy fina no habrá puntos en los cuadros, si es muy grande se pierde resolución). Típicamente se calcula nada más uno de estos vectores para cada punto en el espacio de parámetros y dada la naturaleza probabilística del problema no se puede decir que uno de estos vectores representa a ese punto en el espacio de parámetros, es simplemente una realización estocástica de ese punto en el espacio de parámetros.

Hernandez y Valls-Gabaud montaron un modelo probabilístico completo, básicamente desde el punto de vista bayesiano (Hernández & Valls Gabaud 2004). En un espacio de parámetros de cuatro dimensiones (edad t , metalicidad Z , el modulo de la distancia μ y el enrojamiento $E(V-I)$). Se desea encontrar el punto de ese espacio que maximiza la probabilidad de que las observaciones hayan salido de ese punto (véase la sección (III.3) acerca del teorema de Bayes). P_i es la probabilidad de que la estrella i haya venido de un punto en el espacio de parámetros.

$$P_i(t, Z, \mu, E(V - I)) = \int_{m_1}^{m_2} G_i(t, Z, \mu, E(V - I); m) dm, \quad (\text{III.82})$$

donde

$$G_i(t, Z, \mu, E(V - I); m) = \frac{\rho(m; t, Z)}{\sigma_{iL}\sigma_{iC}} \exp\left(-\frac{D_{iL}^2(m, i)}{2\sigma_{iL}^2}\right) \exp\left(-\frac{D_{iC}^2(m, i)}{2\sigma_{iC}^2}\right) \quad (\text{III.83})$$

con

$$\begin{aligned}\sigma_{iL}^2 &= \sigma(m, L)^2 + \sigma_i(o, L)^2, \\ \sigma_{iC}^2 &= \sigma(m, C)^2 + \sigma_i(o, C)^2.\end{aligned}\tag{III.84}$$

Los subíndices “o” y “m” se refieren respectivamente a la estrella observada y a una estrella de prueba; los subíndices “L” y “C” se refieren a la Luminosidad y al Color. G_i es la probabilidad de que la estrella i , sea una estrella (t, Z, μ, E) , de masa m , es la probabilidad de que la estrella i -ésima que se ve en el CMD en realidad sea una estrella que pertenece a una isocrona dada, y que tenga cierta masa. Lo anterior se ilustra en la Fig. (III.1).

Los dos últimos términos en el lado derecho de (III.83) representan la integral sobre todo el CMD de la densidad de probabilidad de la estrella observada y la estrella de prueba, es decir, la convolución de dos gaussianas de dos dimensiones con sigmas dadas por (III.84) y centros a distancias D_L y D_C .

Se suponen errores gaussianos sobre la estrella observada (medidos) y la teórica (ajustados a las observaciones) $\sigma(o,)$ y $\sigma(m,)$ respectivamente, se calcula la distancia de la estrella observada a la estrella de prueba sobre la que se está integrando y se multiplica por ρ , la densidad de puntos a lo largo de la isocrona que es función de la IMF supuesta y de la duración de la fase. Por esta última razón es grande el número de estrellas en la MS, bajo en la RGB y muy pequeño en la SGB. Si se integra sobre todas las masas lo que se obtiene es la probabilidad de que una estrella haya venido de cualquier punto de una isocrona determinada. El likelihood $\mathcal{L}(CMD|t, Z, \mu, E(V - I))$ de que el CMD haya venido de un punto en el espacio de parámetros de cuatro dimensiones, es el producto sobre las estrellas observadas de esta función de error, es decir,

$$\mathcal{L}(CMD|t, Z, \mu, E(V - I)) = \prod_i P_i.\tag{III.85}$$

Básicamente esto permite obtener una función de mérito bayesiana definida sobre el espacio de 4 parámetros. Para implementarla se necesita una red de isocronas.

Hernández y Valls-Gabaud trabajaron con redes de isocronas muy finas, típicamente de 180 edades y 120 metalicidades (Hernández & Valls Gabaud 2004). No tiene sentido tomar una red de isocronas con un intervalo constante en edad porque las isocronas se van pegando y se sabe que no se tiene la misma resolución a edades bajas que a edades altas. De hecho entre 0 y 2 Gyr hay como ochenta isocronas y es esencialmente el mismo número de isocronas que se tiene entre 2 Gyr y 15 Gyr.

Las otras dos dimensiones son continuas, el desplazamiento vertical asociado al módulo de distancia y el desplazamiento horizontal (reddening) pueden tener el valor que quieran. Con su método se usa toda la información disponible en el cúmulo globular observado y en los modelos teóricos. Para este análisis no se utilizan la rama horizontal (HB), pero sí la de las subgigantes (el

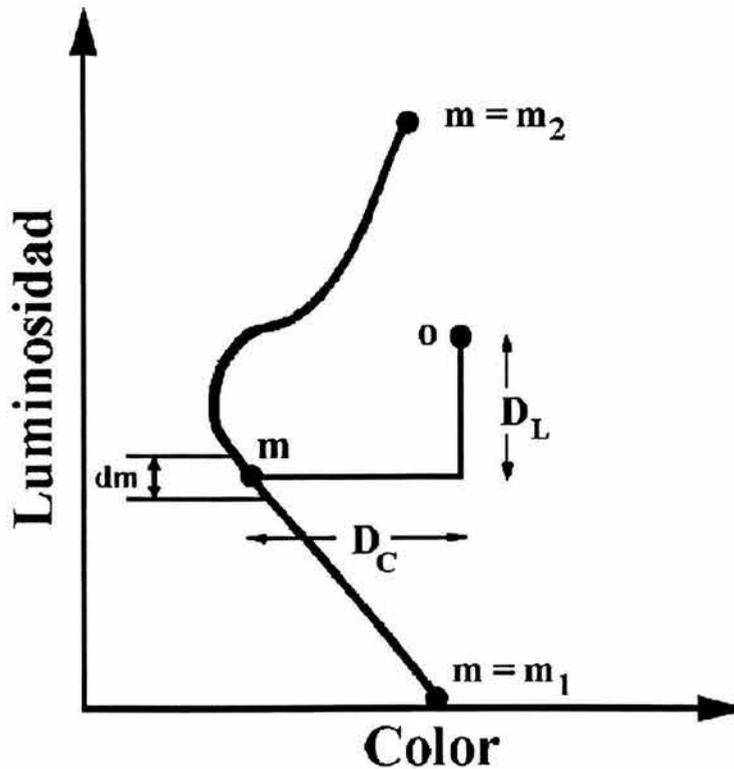


Figura III.1: CMD esquemático para ilustrar el método de X. Hernández y D. Valls-Gabaud. La letra “o” se refiere a la estrella observada del CMD y “m” a la estrella de pruebas sobre la isocrona. D_L y D_C son las distancias en luminosidad y color (respectivamente) entre las estrella observada “o” y la estrella de pruebas “m”. G_i dado por la ecuación (III.83) es la probabilidad de que una estrella i -ésima sea una estrella que pertenece a una isocrona dada y que tenga cierta masa. Si se integra sobre todas las masas lo que se obtiene es la probabilidad P_i definida en la ecuación (III.82) de que una estrella haya venido de cualquier punto de una isocrona determinada.

HR Gap) y la secuencia principal (MS), usando de esa manera los modelos teóricos sólo en el rango dentro del cual el problema parece estar resuelto. Más específicamente el rango dentro del cual los distintos grupos que trabajan en el problema están de acuerdo.

El problema es cómo encontrar el máximo en el espacio de 4 dimensiones, lo cual no es fácil, porque puede tener máximos locales. Lo más sencillo es calcular densamente la función de mérito pero eso es algo que toma mucho tiempo, porque se tiene que hacer una integral sobre la isocrona para cada una de las estrellas observadas. Para hacerlo bien se tienen que tomar alrededor de mil puntos a lo largo de una isocrona y se tienen como mil estrellas; eso significa que se deben hacer del orden de 10^6 cálculos para cada punto que se quiera evaluar. Por ello buscaron un método alternativo. Para encontrar el máximo en la superficie de cuatro parámetros se usó un algoritmo genético (Teriaca et al. 1999, Sevenster et al. 1999, Metcalfe 2003) y el método de Monte Carlo

(Brandt 1999) para los intervalos de confianza.

Hernández y Valls-Gabaud probaron su método en casos en los que se conoce la respuesta para ver si funcionaba bien o no (Hernández & Valls Gabaud 2004). De hecho ellos simularon un cúmulo globular tomando una isocrona, una metalicidad un poco menor a la solar y un valor de α un poco arriba del solar. Supusieron una IMF y que los errores son más o menos tipo observacionales. Así se construye una nube de puntos y se aplica el método. También vieron que es lo que sucede con las binarias: se mete una cantidad de binarias no resueltas, lo cual complica la superficie, pues mete máximos locales y reduce la precisión a la que se puede llegar. Encontraron que el método XH-DVG tolera una fracción bastante alta de binarias antes de que el máximo absoluto se mueva de lugar. De hecho se puede tener alrededor de 70% de binarias y el máximo local no cambia de lugar. La amplitud de estos errores depende del punto en el que se esté en el diagrama: edades grandes son más difíciles de reconstruir que las jóvenes. Además probaron el método simulando contaminación de fondo entre el observador y el cúmulo (llenar el CMD con puntos al azar), de tal manera que a simple vista no parecería que hay un cúmulo globular, y obtuvieron los mismos resultados.

Eso es una manera también de reconocer poblaciones, no mediante discriminación cinemática, sino mediante discriminación en términos del diagrama CMD.

III.9 Aplicación del método de Maximum Likelihood a una muestra de Cúmulos Globulares

Tenemos una muestra sintética de 30 GCs con los que queremos establecer un límite inferior a la edad del Universo. Las edades de los cúmulos t_{0i} se hallan entre 9.00 y 15.75 Gyr y sus sigmas entre 0.3 y 2.2 Gyr (mientras más viejo es el cúmulo, mayor es su σ).

Acorde a Peebles y Dicke (1968), los GCs pudieron originarse como nubes de gas ligadas gravitacionalmente antes de que se formaran las galaxias, probablemente 1 Gyr después del Big Bang (Sandage 1993). Desde entonces, la costumbre ha sido que quienes se dedican a calcular edades de GCs añadan 1 Gyr para fijar un límite inferior a la edad del Universo. Nosotros decidimos añadir solamente 0.5 Gyr, para derivar un límite inferior más seguro.

Usando GCs podemos dar un límite inferior a la edad del Universo, pero los datos restringen que este número sea menor pero no que sea mayor a la edad del cúmulo. Debemos definir la probabilidad de tal manera que refleje lo anterior. La probabilidad de que la edad del Universo inferida de la observación de la edad de los cúmulos sea menor (o mayor) que un tiempo \tilde{t} es proporcional a:

$$P_i(t_{0i}, \tilde{t}) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} e^{-((t_{0i}+0.5)-\tilde{t})^2/(2\sigma_i^2)}, & \text{para } \tilde{t} < t_{0i} + 0.5, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i}, & \text{para } \tilde{t} > t_{0i} + 0.5. \end{cases} \quad (\text{III.86})$$

La observación del GC no privilegia ninguna edad en particular a edades mayores a la del cúmulo, por eso fijamos su contribución al likelihood en su valor de $t = t_{0i} + 0.5$. Entonces la función

Numero	Edad	Sigma	Numero	Edad	Sigma
1	9.00	0.3	16	12.75	1.2
2	9.25	0.3	17	13.00	1.3
3	9.50	0.4	18	13.25	1.3
4	9.75	0.5	19	13.50	1.4
5	10.00	0.5	20	13.75	1.5
6	10.25	0.6	21	14.00	1.6
7	10.50	0.7	22	14.25	1.7
8	10.75	0.7	23	14.50	1.8
9	11.00	0.8	24	14.75	1.9
10	11.25	0.8	25	15.00	2.0
11	11.50	0.9	26	15.00	2.0
12	11.75	0.9	27	15.25	2.1
13	12.00	1.0	28	15.25	2.1
14	12.25	1.1	29	15.50	2.2
15	12.50	1.2	30	15.75	2.2

Tabla III.1: Muestra sintetica de cúmulos globulares. Las edades de los cúmulos t_{0i} se hallan entre 9.00 y 15.75 Gyr y sus sigmas entre 0.3 y 2.2 Gyr (mientras más viejo es el cúmulo, mayor es su σ). Este comportamiento se observa en los cúmulos reales observados (véase la muestra real de GCs en la tabla (IV.1)).

likelihood \mathcal{L} es

$$\mathcal{L}(t_{0i}, \tilde{t}) = \prod_i P_i = \prod_i \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} e^{-((t_{0i}+0.5)-\tilde{t})^2/(2\sigma_i^2)}. \quad (\text{III.87})$$

En este caso el Likelihood no llega al máximo y después decrece, sino que permanece constante a partir de donde tiene su mayor valor a $t \sim t_{\text{ho}}y$. De allí en adelante \mathcal{L} se aplana.

Obtuvimos numéricamente tanto la función likelihood \mathcal{L} como la función log-likelihood l , y graficamos esta última contra t . Para facilitarnos las cosas, trasladamos l , tal que su máximo se localiza en el punto $P_3 = (t_3, 0)$ (véase la Fig. (III.2)).

Para continuar con la notación que ya usamos se reescala el tiempo t y se hace la identificación

$$\begin{aligned} (t_{0i} + 0.5) &\longrightarrow t \equiv \lambda, \\ \tilde{t} &\equiv \tilde{\lambda}. \end{aligned} \quad (\text{III.88})$$

Por lo tanto (véase la ecuación (III.73)),

$$l(t) = -\frac{1}{2b^2}(t - \tilde{t})^2 + c = At^2 + Bt + K, \quad (\text{III.89})$$

donde

$$b^2 = -\frac{1}{2A}, \quad \tilde{t} = -\frac{B}{2A}, \quad c = K - \frac{B^2}{4A}. \quad (\text{III.90})$$

Dados tres puntos no colineales

$$P1 = (t_1, l_1), \quad P2 = (t_2, l_2), \quad P3 = (t_3, l_3), \quad (\text{III.91})$$

se puede calcular la ecuación de la parábola (el polinomio de grado 2 dado por la ecuación (III.89)) que pasa por los mismos. Esto significa que necesitamos dar tres condiciones (los tres puntos) o también podemos escoger dos puntos de l que calculamos numéricamente y tomar como tercera condición que el vértice de la parábola ocurra en el punto P_3 donde l se aplana, es decir, $P_3 = (t_3, 0)$. Como la ecuación de la parábola es $l = At^2 + Bt + K$ entonces

$$\frac{dl}{dt} = 2At + B, \quad (\text{III.92})$$

y se deben cumplir simultáneamente las ecuaciones

$$\begin{aligned} At_1^2 + Bt_1 + K &= l_1, & (\text{III.93}) \\ At_2^2 + Bt_2 + K &= l_2, \\ 2At_3 + B &= 0. \end{aligned}$$

El programa con el que calculamos \mathcal{L} y l nos proporciona el punto donde l se aplana, y donde la parábola tiene su vértice, P_3 . Como punto P_2 escogemos el que se halle a Na lugares del punto P_3 y como punto P_1 al que se halle a $2Na$ lugares de P_3 . El problema es ¿cómo escoger Na tal que la parábola obtenida sea la óptima? Calculamos la pendiente de la parábola y de la log-likelihood en el punto en el que las curvas se cruzan, y conservamos la parábola cuya pendiente sea la más parecida a la pendiente de l . De esta manera escogemos la parábola que mejor se ajusta a $l \leq 0$ y mantiene un buen ajuste durante el mayor rango de edades posible.

Por ejemplo en la Fig. (III.2) se muestran 6 diferentes parábolas, y en la Fig. (III.3) se muestra la gráfica del cociente de las tangentes vs. Na . Se puede ver que la mejor parábola es aquella que se calcula usando el valor de $Na = 6$. Esta gráfica también nos permite apreciar que el criterio que usamos es conveniente, pues posee un mínimo absoluto muy definido.

Tras aplicar el método de maximum likelihood a la muestra sintética de GCs encontramos que para el parámetro \tilde{t} que estamos estimando con la mejor parábola se tiene que

$$\tilde{t} = 16.29 - (2.58) \text{ Gyr}, \quad \text{para } Na = 6. \quad (\text{III.94})$$

El número entre paréntesis es el 1σ error dados los datos. Es decir, el límite inferior para la edad del Universo a 1σ con esta muestra sintética es

$$t_{GC} = 13.61 \text{ Gyr} \quad (1\sigma). \quad (\text{III.95})$$

Por último, se podría pensar que hay una inconsistencia en el método, ya que las probabilidades

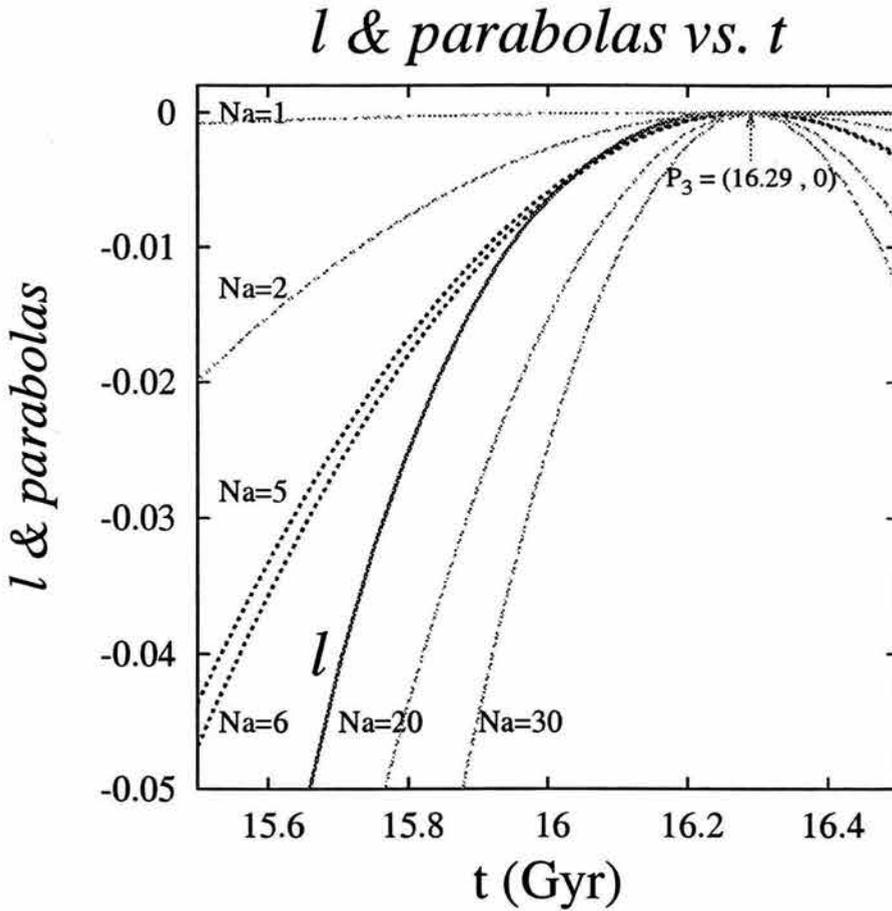


Figura III.2: Se muestra la función log-likelihood para la muestra sintética, así como las parábolas correspondientes a los valores de $Na=1, 2, 5, 6, 20$ y 30 . En este caso incluso se puede apreciar a simple vista que los valores de $Na=5$ y $Na=6$ dan las mejores parábolas. Esto se confirma al aplicar el criterio descrito en el texto y que se muestra en la Fig. (III.3).

$P_i(t_{0i}, \tilde{t})$ dadas en la ecuación (III.86) no están normalizadas. A continuación demostramos que al normalizar correctamente estas funciones se obtienen exactamente los mismos resultados.

Supongamos que para normalizar cada $P_i(t_{0i}, \tilde{t})$ tomamos:

$$P_i(t_{0i}, \tilde{t}) = \begin{cases} P_i(t_{0i}, \tilde{t}) & \text{para } \tilde{t} < T \\ 0 & \text{para } \tilde{t} > T. \end{cases} \quad (\text{III.96})$$

Esto es la introducción de una edad máxima a priori, por ejemplo podemos fijar este tiempo T como alguno de los valores límite dados en (I.115). Veremos que los resultados tampoco son sensibles a T .

Ahora tendremos que,

$$P_i \rightarrow c_i P_i. \quad (\text{III.97})$$

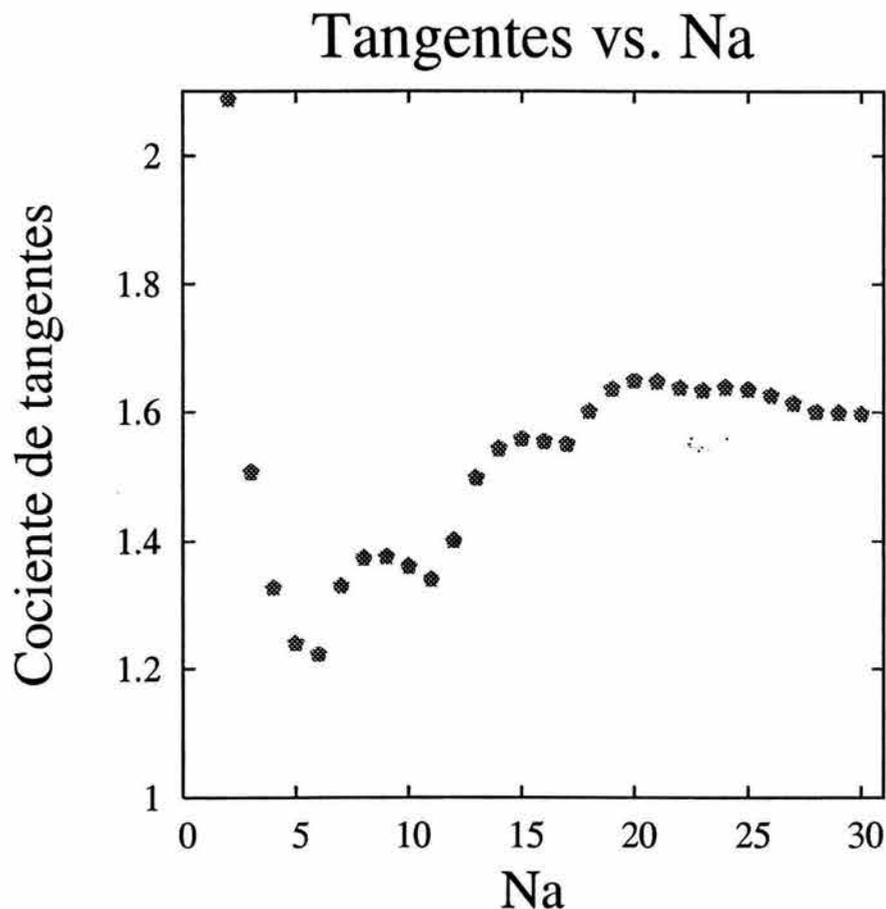


Figura III.3: Criterio para escoger la mejor parábola aplicado a la muestra sintética. El criterio para escoger la mejor parábola fue tomar aquella cuya pendiente sea la más parecida a la de la log-likelihood en el punto en el que se intersectan. En este caso la mejor parábola es aquella que se calcula usando el valor de $Na = 6$.

donde c_i es el factor de normalización correspondiente a cada función. El likelihood se transformará en

$$\mathcal{L} = \prod_i P_i \longrightarrow \prod_i (c_i P_i), \quad (\text{III.98})$$

y la log-likelihood en

$$l = \ln \mathcal{L} = \ln \left(\prod_i P_i \right) \longrightarrow \ln \left(\prod_i (c_i P_i) \right) = \sum_i (\ln c_i) + \sum_i (\ln P_i) = C + \sum_i (\ln P_i). \quad (\text{III.99})$$

Al normalizar las funciones, el efecto final es que a la log-likelihood se le suma una cierta constante C , que depende del valor de T que hallamos escogido. Cuando calculamos el valor óptimo de \tilde{t} y su varianza ajustándole una parábola a l , sólo usamos los coeficientes del término lineal y cuadrático de ese ajuste, no usamos el término constante (véanse las ecuaciones (III.89) y (III.90)). Así que

no importa donde fijemos el valor T ya que no interviene en el cálculo del parámetro y su sigma. Por lo tanto podemos usar las funciones sin normalizar, tal y como están definidas en la ecuación (III.86).

Capítulo IV

Resultados

IV.1 El límite inferior a la edad del Universo con la muestra preliminar de Cúmulos Globulares

X. Hernández y D. Valls Gabaud planean aplicar su método para hallar los parámetros de GCs a una muestra de 80 cúmulos. De aquí en adelante nos referiremos a éste como método “XH-DVG” Por ahora, sólo está disponible una muestra preliminar de 8 cúmulos que se presenta en la tabla (IV.1).

NGC	Edad	σ_{Edad}	[Fe/H]	$\sigma_{[Fe/H]}$	μ	σ_{μ}	E(V-I)	$\sigma_{E(V-I)}$
288	13.7	0.6	-2.10	0.16	15.00	0.15	0.090	0.01
362	9.9	0.2	-1.17	0.12	14.95	0.11	0.016	0.01
1851	13.9	0.4	-1.70	0.18	15.46	0.04	0.090	0.01
3201	12.1	0.3	-1.44	0.15	14.03	0.10	0.340	0.02
4590	14.4	0.5	-2.33	0.20	15.14	0.05	0.062	0.01
6093	16.3	1.1	-1.90	0.35	15.34	0.22	0.263	0.03
6397	10.9	0.4	-2.10	0.22	12.50	0.24	0.250	0.05
6656	12.4	0.8	-1.20	0.25	13.40	0.16	0.370	0.01

Tabla IV.1: Muestra real preliminar de cúmulos globulares proporcionada por X. Hernández y D. Valls Gabaud. Ellos usaron el método XH-DVG descrito en la sección (III.8). La primera columna indica el número del GC en el catálogo NGC. La segunda y tercera columnas son la edad y su sigma correspondiente. Se observa que a edades mayores les corresponden sigmas más grandes. Las columnas 4 y 5 contienen la metalicidad y su sigma, las columnas 6 y 7 el enrojecimiento (reddening) y su sigma y por último las columnas 8 y 9 contienen el modulo de distancia y su sigma.

En las Figs. (IV.1) a (IV.3), se encuentran los CMDs de tres GCs. Los datos de las estrellas individuales provienen del HST (Hubble Space Telescope). La línea más gruesa es una isocrona que corresponde a los parámetros del GC hallados con el método XH-DVG. La línea más tenue es

una isocrona que corresponde a los parámetros del GC reportados por los observacionales. Para construir estas últimas isocronas ocupamos los parámetros reportados por diversos autores, ya que es extremadamente raro que en un solo artículo se reporten los cuatro parámetros que necesitamos. En las Figs. (IV.1) a (IV.3) se puede apreciar que aunque ambas isocronas ajustan bien en la MS, el ajuste para el turn off y la rama de las gigantes es mucho mejor con el método XH-DVG.

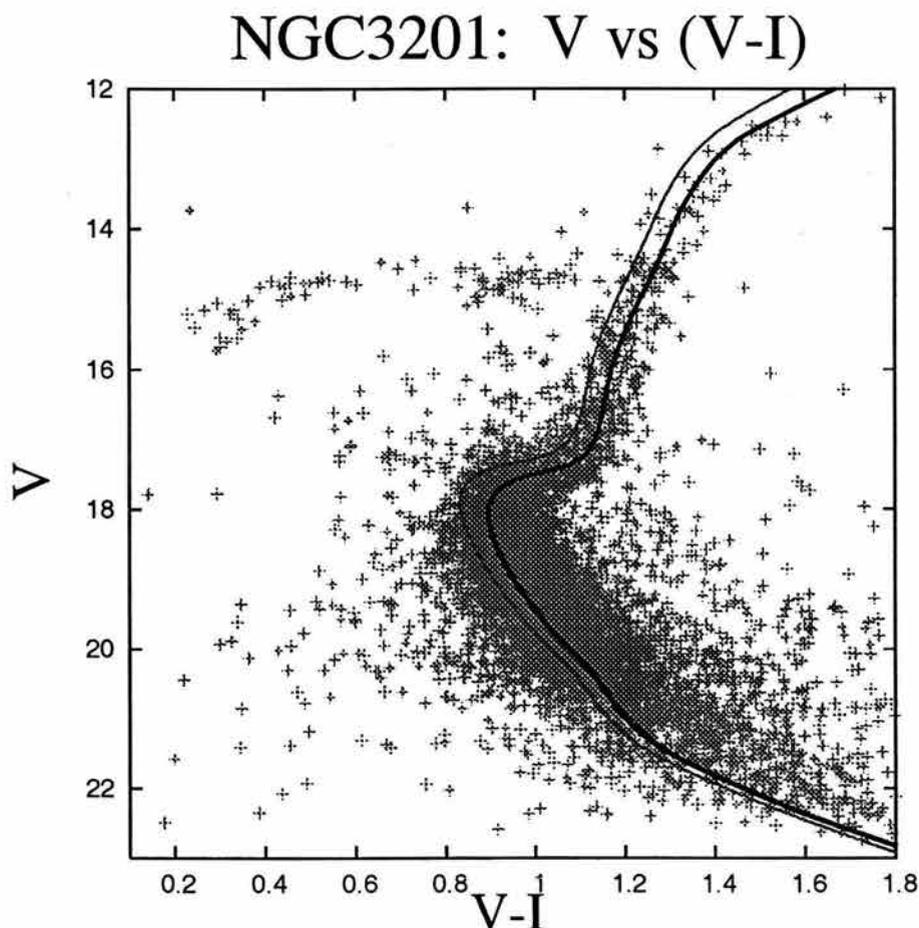


Figura IV.1: CMD de NGC3201 con 7,262 estrellas. La línea sólida es el ajuste óptimo de XH-DVG. La línea delgada es una isocrona construida usando los parámetros reportados para este cúmulo por Layden & Sarajedini 2003 y Salaris & Weiss 2002.

Hicimos comparaciones entre los valores de los parámetros obtenidos con el método XH-DVG y los obtenidos por distintos observacionales. En las Figs. (IV.4) a (IV.5), graficamos en el eje de las abscisas los parámetros de los cúmulos obtenidos con el método XH-DVG, mientras que en el eje de las ordenadas se hallan los valores de la literatura.

En la Fig. (IV.4) usamos las edades reportadas por Gratton et al. 2003, Layden & Sarajedini 2003, Salaris & Weiss 2002, Vandenberg 2000, Alcaino et al. 1998, Salaris & Weiss 1998 y Gratton et al. 1997. En esta figura se observa que para la muestra real preliminar las edades halladas con el método XH-DVG tienden a ser ligeramente mayores a las reportadas por los observacionales.

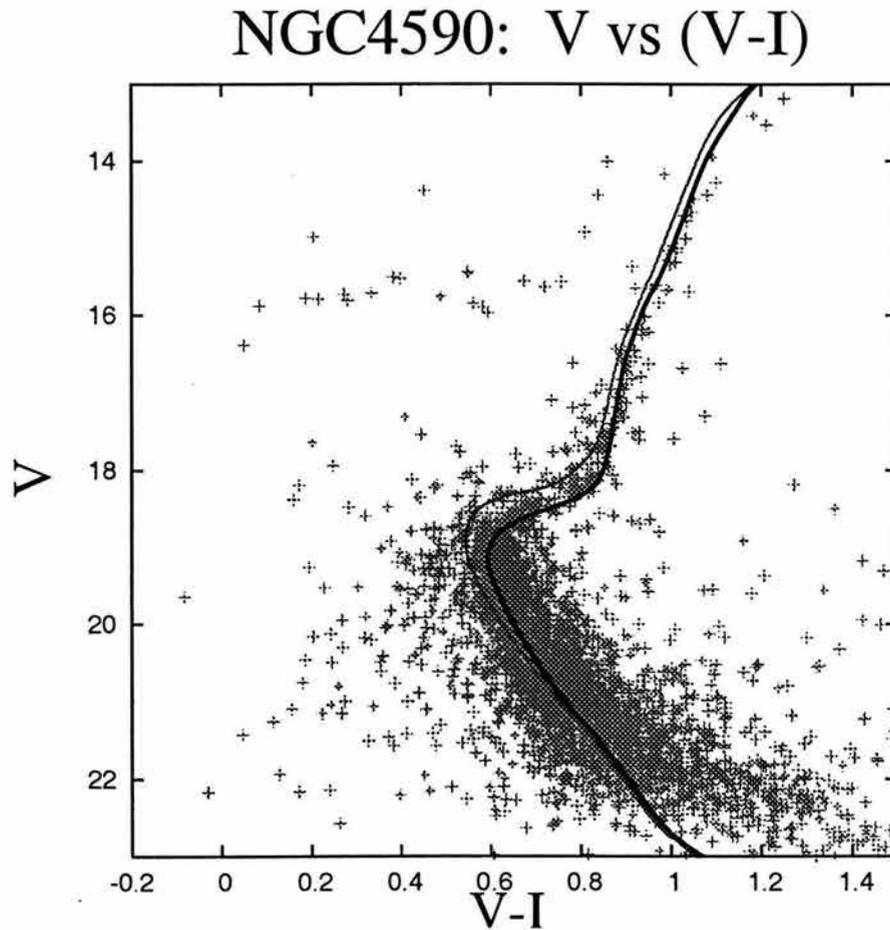


Figura IV.2: CMD de NGC4590 con 3,645 estrellas. La línea sólida es el ajuste óptimo de XH-DVG. La línea delgada es una isocrona construida usando los parámetros reportados para este cúmulo por Salaris & Weiss 1998 y Rutledge et al. 1997.

En la Fig. (IV.5) usamos las distancias reportadas por Monaco et al. 2004, Gratton et al. 2003, Kraft & Ivans 2003, Layden & Sarajedini 2003, Piersimoni, Bono & Ripepi 2002, Cassisi, de Santis & Piersimoni 2001, Davidge 2000, VandenBerg 2000, Carretta et al. 2000, Ferraro et al. 1999, Brocato et al. 1998, Reid 1998, Gratton et al. 1997 y Jimenez et al. 1996. En esta gráfica los valores obtenidos por XH-DVG no muestran sesgo con respecto a la línea $x = y$, lo que significa que son consistentes con los datos obtenidos por los observacionales. Esta es una verificación independiente del método de XH-DVG, ya que las distancias a los GCs por lo general se obtienen con métodos distintos al ajuste de isocronas (véase la sección (II.3)).

Ahora procedemos como en la sección (III.9) y aplicamos el método de maximum likelihood a la muestra preliminar real de GCs. Obtuvimos una gráfica para la log-likelihood (Fig. (IV.6)), y una gráfica de Na vs tangentes (Fig. (IV.7)), para escoger cuál de las parábolas de la Fig.(IV.6) es la adecuada (con cuál de ellas la estimación del parámetro \tilde{t} es mejor). Con esto obtendremos un límite inferior a la edad del Universo.

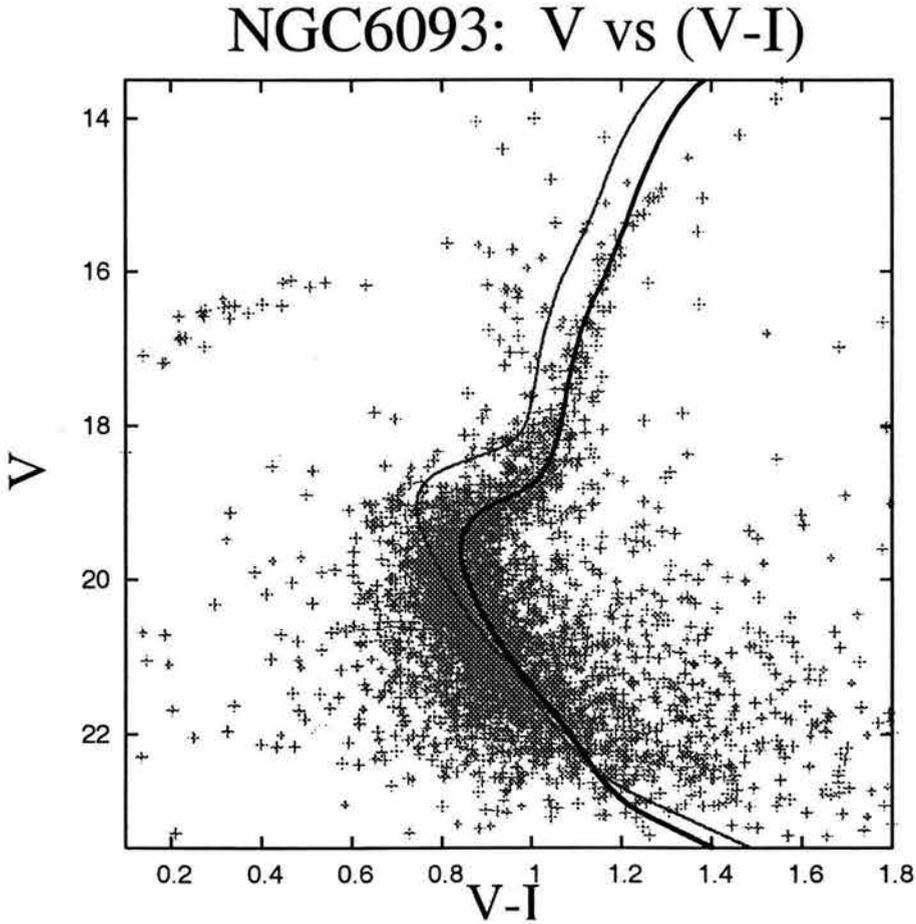


Figura IV.3: CMD de NGC6093 con 3,789 estrellas. La línea sólida es el ajuste óptimo de XH-DVG. La línea delgada es una isocrona construida usando los parámetros reportados para este cúmulo por Salaris & Weiss 2002 y Ferraro et al. 1999.

Vemos que el comportamiento de la gráfica N_a vs tangentes está dominado por el dato con la edad más grande (NGC6093, $\tilde{t} = 16.3$, $\sigma = 1.1$). En la muestra preliminar las edades de los demás GCs son más de 1 Gyr menores a éste, por eso durante una región muy grande el criterio para calcular la sigma es casi constante. Cerca del máximo la log-likelihood l está dominada por un solo punto, así que en esa región es muy similar a una parábola.

De $N_a = 72$ a $N_a = 423$ la gráfica de tangentes vs. N_a es casi plana y luego tiene un repunte. Prácticamente no importa cuál de esas parábolas escojamos, todas son igualmente útiles y proporcionan casi el mismo valor de σ .

El programa calcula que el mínimo ocurre para $N_a=419$. A este valor le corresponde una sigma de 1.10, por lo que para el parámetro que estamos estimando \tilde{t} , con la mejor parábola (ecuación (III.80)):

$$\tilde{t} = 16.80 - (1.10) \text{ Gyr} \quad \text{para } N_a = 419. \quad (\text{IV.1})$$

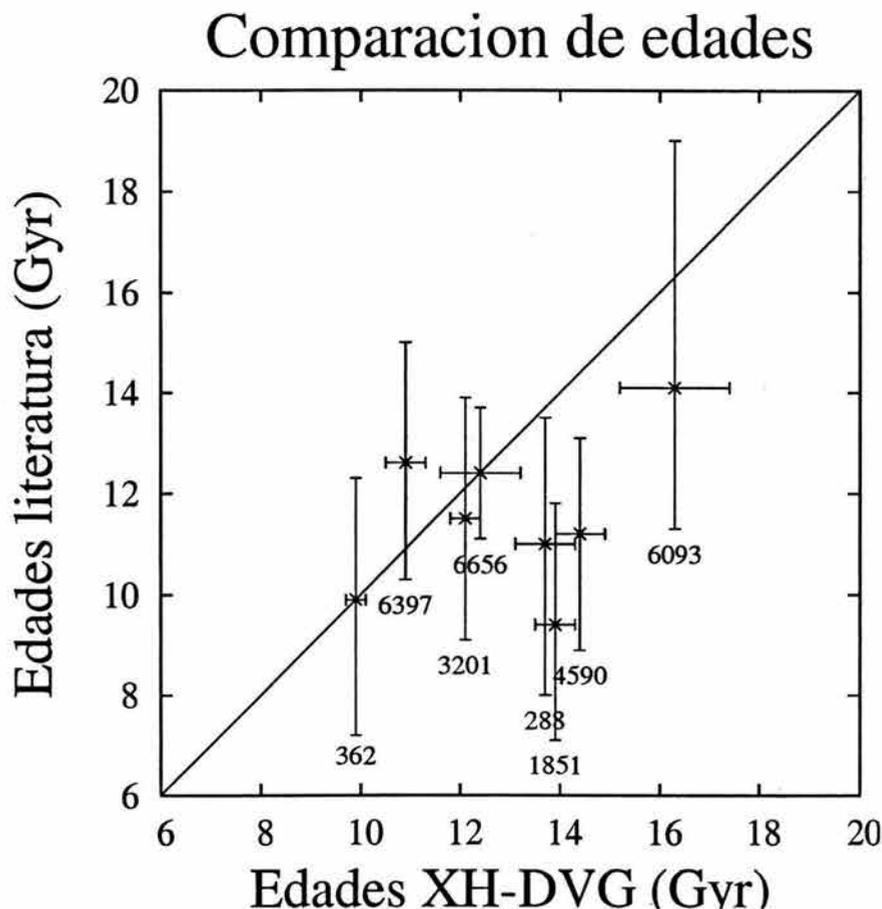


Figura IV.4: Comparación de edades. Graficamos en el eje de las abscisas las edades de GCs obtenidas con el método XH-DVG, y en el eje de las ordenadas las edades reportadas por Gratton et al. 2003, Layden & Sarajedini 2003, Salaris & Weiss 2002, Vandenberg 2000, Alcaino et al. 1998, Salaris & Weiss 1998 y Gratton et al. 1997. Se observa que para la muestra real preliminar las edades halladas con el método XH-DVG tienden a ser ligeramente mayores a las reportadas por los observacionales.

El número en paréntesis es el 1σ error dados los datos.

Es decir, el límite inferior para la edad del Universo con la muestra preliminar es

$$t_{GC} = 15.70 \text{ Gyr} \quad (1\sigma). \tag{IV.2}$$

$$t_{GC} = 14.60 \text{ Gyr} \quad (2\sigma). \tag{IV.3}$$

Comparemos estos valores con los de la literatura, que se encuentran en la tabla (IV.2).

¿Porqué las diferencias entre los grupos de Spergel y Tegmark si ambos usaron los datos de WMAP?

El grupo de Spergel aplicó el criterio de la “navaja de Occam”. Ellos buscaron cuál modelo mínimo (es decir, con la más pequeña cantidad de parámetros libres) es consistente con los datos.

Artículo	Datos	Edad (Gyr)
Spergel et al. 2003	WMAP ($\Omega_K = 0$)	13.4 ± 0.3
Spergel et al. 2003	WMAP + ACBAR + CBI + 2dFGRS	13.7 ± 0.2
Tegmark et al. 2004	WMAP ($\Omega_K \sim 0$)	$16.3^{+2.3}_{-1.8}$
Tegmark et al. 2004	WMAP + SDSS + SN Ia	$14.1^{+1.0}_{-0.9}$

Tabla IV.2: Límites inferiores a la edad del Universo obtenidas por dos grupos diferentes. Las diferencias entre estos valores se deben a dos razones. La primera es que el grupo de Spergel buscó cuál modelo mínimo (es decir, con la más pequeña cantidad de parámetros libres) es consistente con los datos. El grupo de Tegmark aplicó el criterio opuesto: ellos trataron todos los parámetros cosmológicos como parámetros libres y los construyeron con los datos usando suposiciones mínimas. La otra razón es que se obtienen distintos valores de los parámetros, dependiendo de que otras medidas se combinen con las de la CMB.

Esto les permitió obtener barras de error muy pequeñas en sus parámetros. El grupo de Tegmark aplicó el criterio opuesto: ellos trataron todos los parámetros cosmológicos como parámetros libres y los construyeron con los datos usando suposiciones mínimas.

Por otro lado, la determinación de parámetros se puede hacer al combinar las medidas de la CMB con “algo más” y se obtienen diferentes respuestas dependiendo de lo que uno elija como “algo más”.

Nuestra determinación de la edad no es compatible con los valores de Spergel et al. 2003, pero sí lo es con los de Tegmark et al. 2004. Además cabe recordar que el límite inferior a la edad del Universo obtenido con CGs por otros autores es $> 11 - 16$ Gyr (véase la tabla (I.3)).

Con esta muestra preliminar hemos establecido un límite inferior a la edad del Universo. Ciertamente la muestra es pequeña y los resultados finales podrían cambiar al usar la muestra completa. Sin embargo, el límite inferior de la edad solo puede aumentar y no disminuir, mientras que el error sobre la edad decrecerá y no disminuirá (dependiendo de cuántos cúmulos con edades similares a la de nuestro GC más viejo aparezcan). La determinación de la edad de cada cúmulo individual no depende de las edades de los otros cúmulos. Por lo tanto nuestros límites inferiores a la edad del Universo son robustos.

Cabe señalar que la edad obtenida con el método XH-DVG para NGC6093 no es incompatible con otros datos de la literatura (Véase la Fig. (IV.4)). Por otro lado la distancia determinada con este método es consistente con otras determinaciones reportadas por otros autores, como se puede apreciar en la Fig. (IV.5).

Es importante resaltar que este punto de nuestra lista de edades no constituye una medición singular, sino que es el resultado del análisis estadístico riguroso de una población de 3,789 estrellas (Fig. (IV.3)).

IV.2 La ecuación de estado de la Energía Oscura

En la sección (I.18) integramos numéricamente la ecuación de Friedmann para distintos valores de ω y obtuvimos la correspondiente edad del universo. Ahora procedemos a la inversa: dado el valor de t_{GC} queremos saber el valor de ω que le corresponde. Spergel et al. 2003 reportan los siguientes valores de los parámetros:

$$h = 0.71^{+0.04}_{-0.03}, \quad \Omega_M = 0.27 \pm 0.04, \quad k = 0.$$

Mientras que Tegmark et al. 2004 reportan que

$$h = 0.70^{+0.04}_{-0.03}, \quad \Omega_M = 0.30 \pm 0.04, \quad k \sim 0.$$

Al igual que hicimos en el capítulo (I) trabajaremos con dos conjuntos de parámetros, uno que sea el “promedio” de los datos anteriores y otro obtenido tomando los valores inferiores (que dará como resultado una edad del Universo mayor),

$$1. \quad h = 0.70, \quad \Omega_M = 0.27, \quad \Omega_\Lambda = 0.73, \quad \Omega_K = \Omega_R = 0.$$

$$2. \quad h = 0.68, \quad \Omega_M = 0.23, \quad \Omega_\Lambda = 0.77, \quad \Omega_K = \Omega_R = 0.$$

Usando el primer conjunto de parámetros y los datos de la curva 1 de la Fig (I.7) obtenemos los siguientes límites para ω

$$t_{GC} = 15.70 \text{ Gyr}, \quad \omega < -2.39, \quad (1\sigma). \quad (\text{IV.4})$$

$$t_{GC} = 14.60 \text{ Gyr}, \quad \omega < -1.38, \quad (2\sigma). \quad (\text{IV.5})$$

Usando el segundo conjunto de parámetros y los datos de la curva 2 de la Fig (I.7) obtenemos los siguientes límites para ω

$$t_{GC} = 15.70 \text{ Gyr}, \quad \omega < -1.32, \quad (1\sigma). \quad (\text{IV.6})$$

$$t_{GC} = 14.60 \text{ Gyr}, \quad \omega < -0.90, \quad (2\sigma). \quad (\text{IV.7})$$

En la tabla (IV.3) se muestran los límites para ω que encuentran diversos autores. Los grupos de Spergel y Melchiorri usaron medidas de la CMB combinadas con datos de las supernovas y mediciones de la estructura a gran escala. El grupo de Jimenez usó medidas de la CMB combinadas con la edades absolutas de estrellas de la Galaxia.

Nuestro límite para ω con el primer conjunto de parámetros no es compatible con el de Spergel et al. 2003. A diferencia de ellos, nosotros no impusimos ninguna condición adicional a ω . Una de

Método	Límites a ω	C.L.
Spergel et al. 2003 (WMAP)	$-1 < \omega < -0.78$	2σ
Jimenez et al. 2003	$\omega < -0.8$	1σ
Melchiorri et al. 2003	$-1.65 < \omega < -0.54$	2σ

Tabla IV.3: Límites a ω (otros autores). El grupo de Spergel supone que $\omega > -1$ y es constante. Los grupos de Spergel y Melchiorri usaron medidas de la CMB combinadas con datos de las supernovas y mediciones de la estructura a gran escala. El grupo de Jimenez usó medidas de la CMB combinadas con edades absolutas de estrellas de la Galaxia.

las suposiciones de Spergel et al. es que $\omega > -1$ y es constante. Es interesante que a 1σ , incluso considerando las incertidumbres en h y las Ω 's, nuestro análisis implica una $\omega < -1$, es decir, una componente de la energía oscura más extraña que la constante cosmológica de Einstein.

Por otro lado, nuestros resultados con el segundo conjunto de parámetros son compatibles tanto con los de Spergel et al. 2003 (a 2σ), como con los de Jimenez et al. 2003 (a 1σ) y los de Melchiorri et al. 2003 (a 2σ).

Algunos de los primeros autores que propusieron los modelos de "quintaesencia" fueron Ratra & Peebles (1988) y Caldwell, Dave & Steinhardt (1998). Se puede reemplazar Λ con un componente dinámico, dependiente del tiempo e inhomogéneo espacialmente, cuya ecuación de estado sea diferente a la de los bariones, neutrinos, materia oscura o radiación. Esta quinta contribución a la densidad de energía llamada "quintaesencia" o componente Q , permite un amplio espectro de posibilidades, incluyendo una $\omega = p/\rho$ constante, o que evoluciona uniformemente o que es oscilatoria. Si se impone la condición de energía dominante (DEC, Dominant Energy Condition), lo que garantiza la estabilidad de la teoría, entonces $\omega > -1$ (para un fluido perfecto es equivalente a pedir $\rho \geq |p|$). No obstante, Carroll, Hoffman & Trodden (2003) concluyen que aunque difícil, no es imposible construir modelos viables de energía oscura con $\omega < -1$.

También es posible construir modelos en los que temporalmente $\omega < -1$. Por ejemplo, Nesseris & Perivolaropoulos (2004), proponen trece modelos diferentes en los que ω depende del redshift. Todos estos modelos resultan consistentes con los datos observacionales actuales. También analizan el modelo *SCDM* (Standar Cold Dark Matter) que es el caso en que no hay energía oscura, solo materia, pero a diferencia de los otros casos, éste no es compatible con las observaciones.

En estos trece modelos propuestos por Nesseris & Perivolaropoulos, la energía oscura sufre una "metamorfosis" de antigravedad ($\omega < -1$) a redshifts pequeños, a hipergravedad ($\omega \sim 3$) a altos redshift. Esta metamorfosis (si en verdad ocurre), no puede persistir hasta redshifts arbitrariamente altos debido a las constricciones que imponen la formación de estructuras y la nucleosíntesis. La Fig. (IV.8) muestra la Fig. 3 de Nesseris & Perivolaropoulos (2004). Cada curva indica una diferente forma de $w(z)$. Por ejemplo *LCDM* (Lambda Cold Dark Matter) es el caso de una constante cosmológica ($w = -1$); *Quies* se refiere a un modelo de quiescencia ($w = \text{constante}$), aquí se trata el caso particular $\omega = -0.9$; *P3* se refiere a que ω se escribe como un polinomio cúbico de $(1+z)$

etc. El número a la derecha de las iniciales del modelo en la Fig. (IV.8) indica el orden en el que el ajuste es mejor. Resulta que el mejor ajuste lo logra el modelo *OA* (Oscillating Ansatz) en el que ω es un polinomio que incluye términos como $(1+z)^3$ y $\cos(z^2 + \text{const.})$, así que el signo de la presión se va alternando conforme aumenta el redshift. El hecho de que ω oscila es lo que se necesita para ser consistentes con la condición $\omega(z) < 0$ a redshifts altos, impuesta por la formación de estructuras y la nucleosíntesis.

Ya dijimos que diversos autores favorecen la idea de que $\omega < -1$ y es constante, así que es inquietante que el modelo de quiescencia ($\omega = -0.9$) sea el que tiene el peor ajuste entre los trece modelos de Nesseris y & Perivolaropoulos. Seguramente veremos que en futuro otros autores propondrán más alternativas. Como no sabemos cuál es la naturaleza de la energía oscura, las opciones son muchas.

IV.3 Conclusiones

- Se puede obtener un límite inferior a la edad del Universo a partir de la edad de las poblaciones estelares más viejas. Los cúmulos globulares son un excelente laboratorio para constreñir la edad del Universo: cada cúmulo posee una población químicamente homogénea de estrellas, todas nacidas simultáneamente. La determinación de parámetros de GCs ha sido hecha por los mismos observacionales que produjeron el CMD. Estas determinaciones generalmente no incluyen un análisis estadístico completo.
- X. Hernández y D. Valls-Gabaud montaron un modelo probabilístico completo, tal que los valores de los parámetros de GCs y los intervalos de confianza son evaluados de manera rigurosa. Las edades obtenidas con este método para la muestra preliminar tienden a ser ligeramente mayores a las reportadas por observacionales, mientras que las distancias son consistentes con las datos obtenidos por los observacionales. Esto último es una verificación independiente del método XH-DVG.
- Tras aplicar el método de maximum likelihood a la muestra preliminar de GCs encontramos que el límite inferior a la edad del Universo es de 15.70 Gyr (1σ) y de 14.60 Gyr (2σ). Este resultado no es compatible con el de Spergel et al. pero sí con el de Tegmark et al.
- En el futuro, la muestra de GCs se ampliará a 80. Con la muestra completa puede ocurrir que el límite inferior a la edad del Universo se vuelva incluso mayor. Un mayor número de datos implicará una menor σ y por lo tanto una estimación mas fina del límite inferior a la edad del Universo.
- Dada la conexión que surge de las ecuaciones de Einstein entre parámetros cosmológicos (incluidos ω y edad), los GCs más viejos proporcionan una restricción independiente a WMAP (que son datos obtenidos de la estructura de CMB) sobre ω .

- Obtuvimos los siguientes límites para ω

1. Primer conjunto de parámetros (estimaciones recientes de los valores centrales de los parámetros cosmológicos):

$$h = 0.70, \quad \Omega_M = 0.27, \quad \Omega_\Lambda = 0.73, \quad \Omega_K = \Omega_R = 0.$$

$$t_{GC} = 15.70 \text{ Gyr}, \quad \omega < -2.39, \quad (1\sigma). \quad (\text{IV.8})$$

$$t_{GC} = 14.60 \text{ Gyr}, \quad \omega < -1.38, \quad (2\sigma).$$

2. Segundo conjunto de parámetros (estimaciones recientes de los parámetros cosmológicos al extremo de sus incertidumbres, tal que la edad total del modelo sea máxima):

$$h = 0.68, \quad \Omega_M = 0.23, \quad \Omega_\Lambda = 0.77, \quad \Omega_K = \Omega_R = 0.$$

$$t_{GC} = 15.70 \text{ Gyr}, \quad \omega < -1.32, \quad (1\sigma). \quad (\text{IV.9})$$

$$t_{GC} = 14.60 \text{ Gyr}, \quad \omega < -0.90, \quad (2\sigma).$$

- Nuestro límite para ω con el primer conjunto de parámetros no es compatible con el de Spergel et al. 2003. A diferencia de ellos, nosotros no impusimos ninguna condición adicional a ω . Una de las suposiciones de Spergel et al. es que $\omega > -1$ y es constante; y esta es sólo una posibilidad entre muchas.
- Nuestros resultados con el segundo conjunto de parámetros son compatibles tanto con los de Spergel et al. 2003 (a 2σ), como con los de Jimenez et al 2003 (a 1σ) y los de Melchiorri et al. 2003 (a 2σ).
- Vimos que existe una gran cantidad de maneras de obtener $\omega < -1$. Si queremos entender si la energía oscura (DE) es dinámica, y si es consistente con ω menor o mayor que -1 , necesitaremos aplicar todas las técnicas que tengamos a la mano. En el presente, aunque con los datos podemos afirmar que existe la DE, éstos no nos permiten escoger entre las diferentes posibilidades. Estamos en ausencia de una física de primeros principios sobre la DE. Tal vez resulte que el Universo es un lugar mucho más extraño de lo que habíamos pensado.

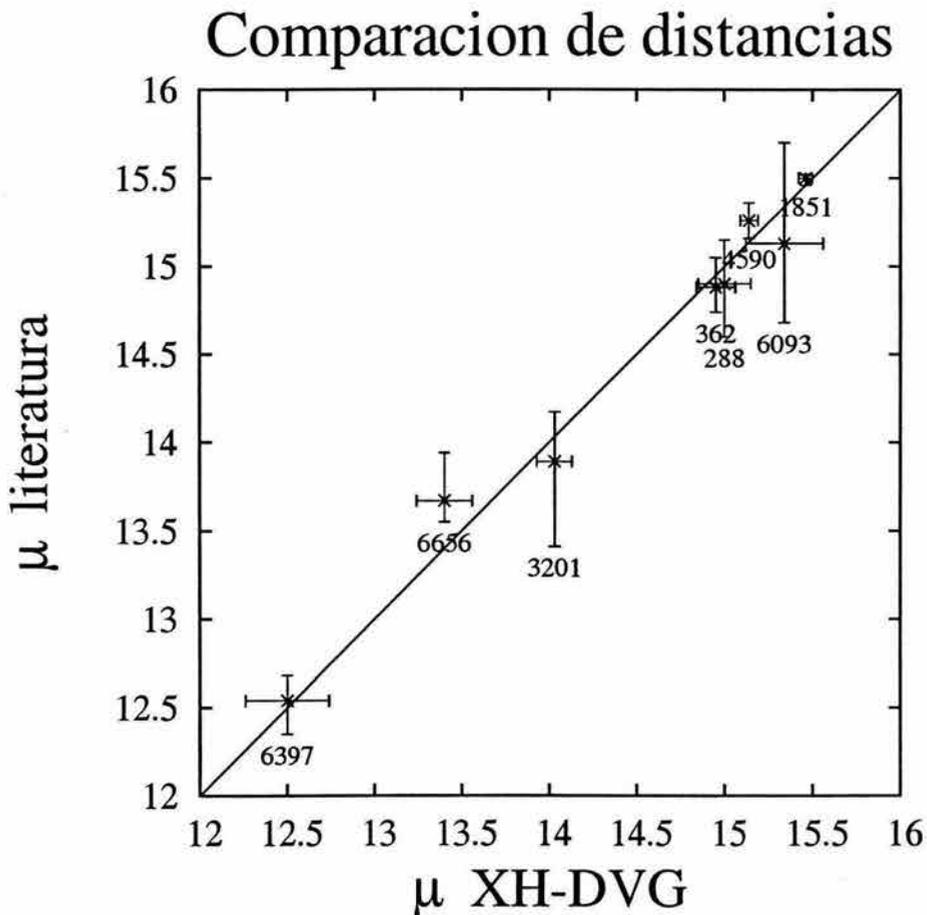


Figura IV.5: Comparación de distancias. Graficamos en el eje de las abscisas las distancias de GCs obtenidas con el método XH-DVG, y en el eje de las ordenadas las distancias reportadas por Monaco et al. 2004, Gratton et al. 2003, Kraft & Ivans 2003, Layden & Sarajedini 2003, Piersimoni, Bono & Ripepi 2002, Cassisi, de Santis & Piersimoni 2001, Davidge 2000, VandenBerg 2000, Carretta et al. 2000, Ferraro et al. 1999, Brocato et al. 1998, Reid 1998, Gratton et al. 1997 y Jimenez et al. 1996. Los valores obtenidos con el método XH-DVG no se dispersan demasiado alrededor de la línea $x = y$ lo que significa que son consistentes con los datos obtenidos por los observacionales. Esta es una verificación independiente del método de XH-DVG, ya que las distancias a los GCs por lo general se obtienen con métodos distintos al ajuste de isocronas (véase la sección (II.3))

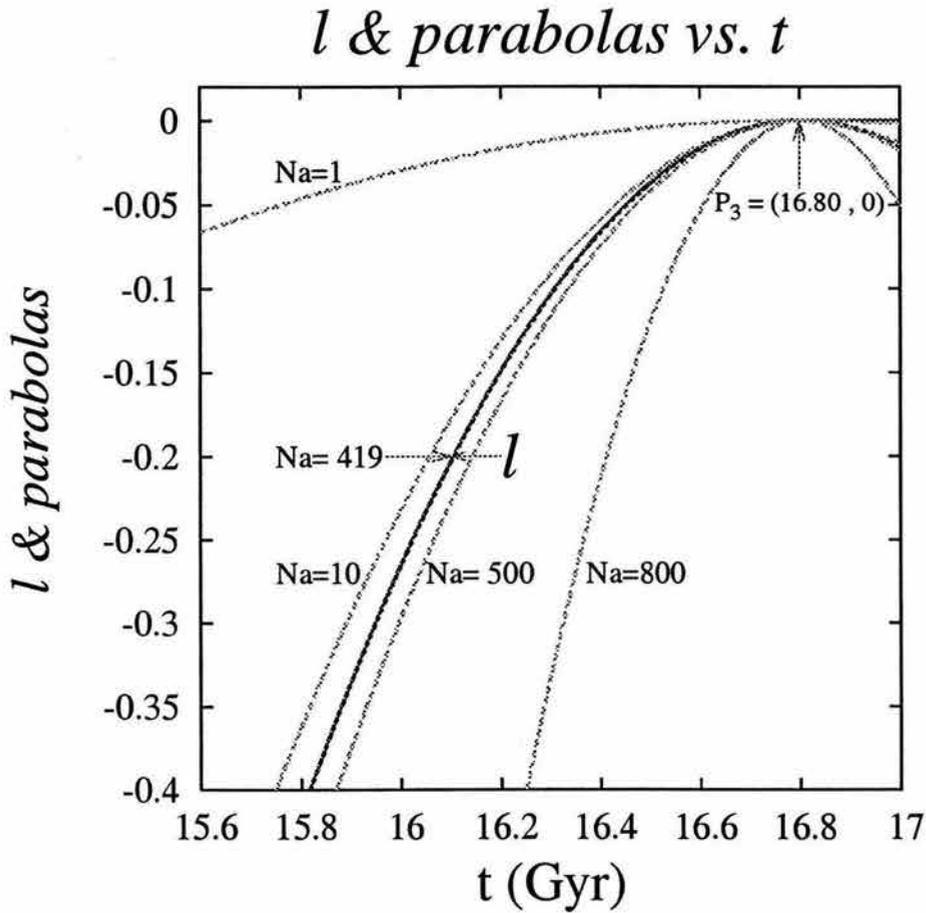


Figura IV.6: En esta figura se muestra la función log-likelihood para la muestra real preliminar, así como las parábolas correspondientes a los valores de $N_a = 1, 10, 419, 500$ y 800 . Cerca del máximo la log-likelihood l está dominada por un solo punto, (NGC6093, $\tilde{t} = 16.3, \sigma = 1.1$) así que en esa región es muy similar a una parábola

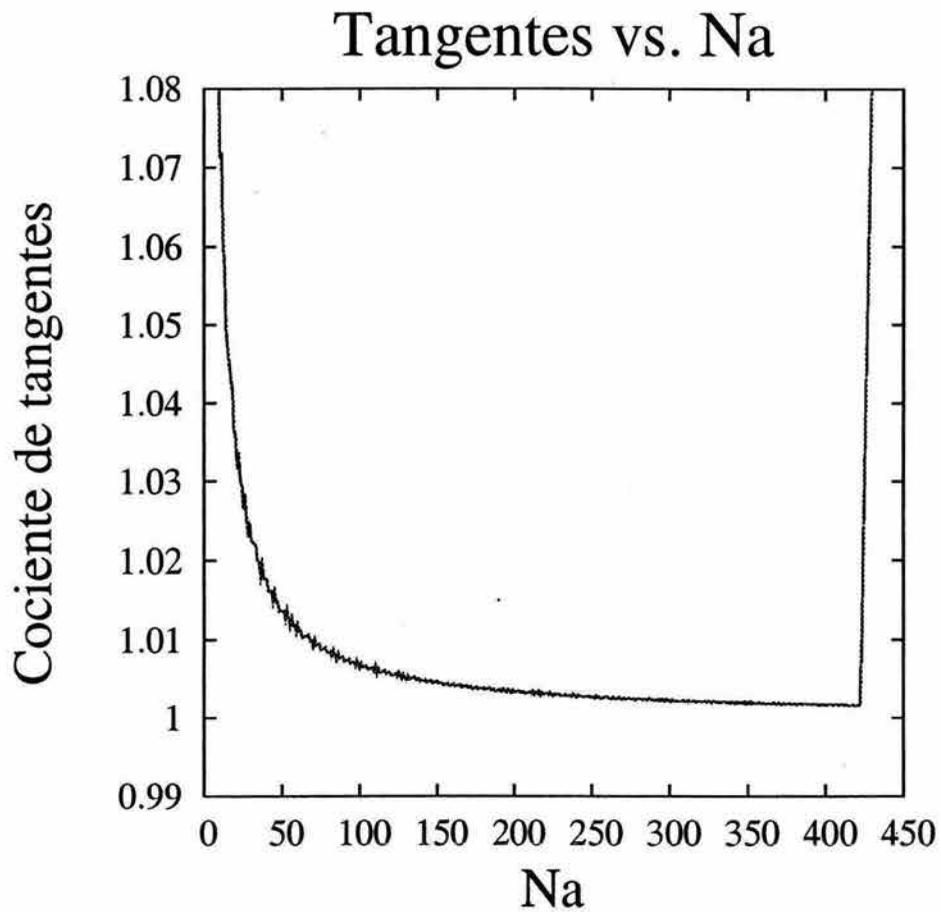


Figura IV.7: Criterio para escoger la mejor parábola aplicado a la muestra real. El comportamiento de esta gráfica está dominado por el dato con la edad más grande (NGC6093, $\bar{t} = 16.3$, $\sigma = 1.1$). De $Na = 72$ a $Na = 423$ la curva es casi plana y luego tiene un repunte. El mínimo ocurre para la parábola con $Na=419$.

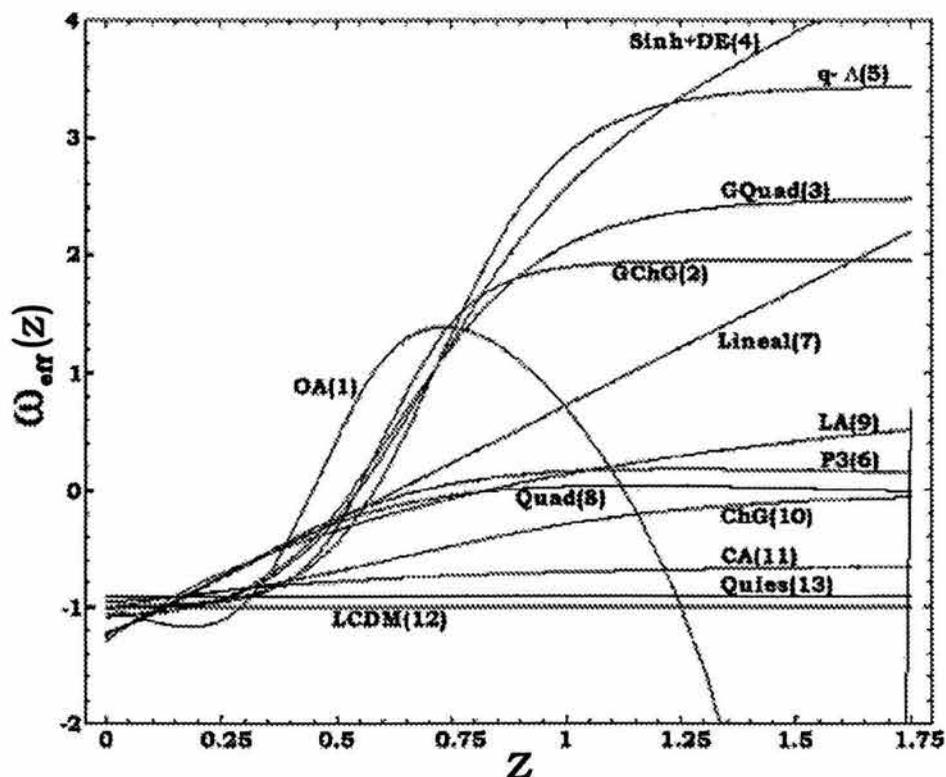


Figura IV.8: Reproducimos la Fig. 3 de Nesseris & Perivolaropoulos (2004). Cada curva indica una diferente forma de $w(z)$. Por ejemplo *LCDM* (Lambda Cold Dark Matter) es el caso de una constante cosmológica ($w = -1$); *Quies* se refiere a un modelo de quiescencia ($w = \text{constante}$), aquí se trata el caso particular $w = -0.9$.; *P3* se refiere a que w se escribe como un polinomio cúbico de $(1+z)$ etc. El número a la derecha de las iniciales del modelo indica el orden en el que el ajuste es mejor. Resulta que el mejor ajuste lo logra el modelo *OA* (Oscillating Ansatz) en el que w es un polinomio que incluye términos como $(1+z)^3$ y $\cos(z^2 + \text{const.})$, así que el signo de la presión se va alternando conforme aumenta el redshift. El hecho de que w oscila es lo que se necesita para ser consistentes con la condición $w(z) < 0$ a redshifts altos, impuesta por la formación de estructuras y la nucleosíntesis.

Apéndice A

Los modelos de Friedmann-Lemaître

En este apéndice presentamos un resumen de los modelos de Friedmann-Lemaître. En los casos especiales en los que la densidad, la presión y/o la constante cosmológica son cero se pueden obtener soluciones analíticas de la ecuación:

$$\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3}, \quad (\text{A.1})$$

A.1 Los modelos de Friedmann

A los modelos en los que la presión es cero y la constante cosmológica es exactamente cero, o tan pequeña que se puede despreciar en comparación con ρ , se les llama los modelos de Friedmann. Calculamos el volumen del universo para el caso en el que la curvatura vale 1, y encontramos que (ecuación (I.35))

$$V = 2\pi^2 a^3.$$

Por lo tanto la densidad de masa varía como a^{-3} y podemos escribir

$$\rho(t) = \frac{M}{2\pi^2 a^3}, \quad (\text{A.2})$$

donde M es una constante. Podemos decir que M es “la masa total del universo”¹. En los dos primeros casos veremos que es conveniente usar la coordenada η definida por

$$dt = a d\eta. \quad (\text{A.3})$$

¹Por supuesto, desde un punto de vista operacional no tiene sentido hablar de la masa del universo. Para medir la masa de un sistema tenemos que colocarnos fuera del sistema y medir como reacciona éste a una fuerza aplicada. Esto no se puede hacer si el sistema es el universo completo.

De aquí que la ecuación (A.1) tome la forma

$$\frac{3}{a^4}(a'^2 + ka^2) = \frac{4GM}{\pi a^3} + \Lambda, \quad (\text{A.4})$$

donde (') denota la derivada con respecto a η . Veamos por casos como depende del tiempo el parámetro a .

A.1.1 Caso 1: $k = +1, \Lambda = 0$

En este caso la ecuación (A.4) queda

$$\frac{3}{a^4}(a'^2 + a^2) = \frac{4GM}{\pi a^3} \quad (\text{A.5})$$

cuya solución es

$$a = a_*(1 - \cos \eta), \quad (\text{A.6})$$

en donde

$$a_* = \frac{2GM}{3\pi}. \quad (\text{A.7})$$

Al integrar (A.3) hallamos t en función de η

$$t = a_*(\eta - \sin \eta). \quad (\text{A.8})$$

Las ecuaciones (A.6) y (A.8) se pueden considerar como ecuaciones paramétricas para $a(t)$. En la Fig. (A.1) se muestra la gráfica de a con respecto a t . La curva es una cicloide. Con respecto a uno de los ciclos de expansión-contracción, podemos decir que existe un Big Bang en $t = 0$, la máxima expansión ocurre en $t = \pi a_*$ y hay un reolapso total a $t = 2\pi a_*$. En los puntos $t = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi \dots$ etc., $a(t)$ se hace cero, es decir el universo se contrae a un punto. Como la densidad se vuelve muy alta cuando esto va a ocurrir, el tensor de esfuerzos diverge.

A.1.2 Caso 2: $k = -1, \Lambda = 0$

Volvemos a definir M como en la ecuación (A.2). Como ahora el volumen es infinito, no se puede interpretar M como la masa total; pero podemos decir que M es la suma de las masas en reposo contenidas en un volumen $2\pi^2 a^3$. La ecuación (A.4) queda

$$\frac{3}{a^4}(a'^2 - a^2) = \frac{4GM}{\pi a^3} \quad (\text{A.9})$$

cuya solución es

$$a = a_*(\cosh \eta - 1), \quad (\text{A.10})$$

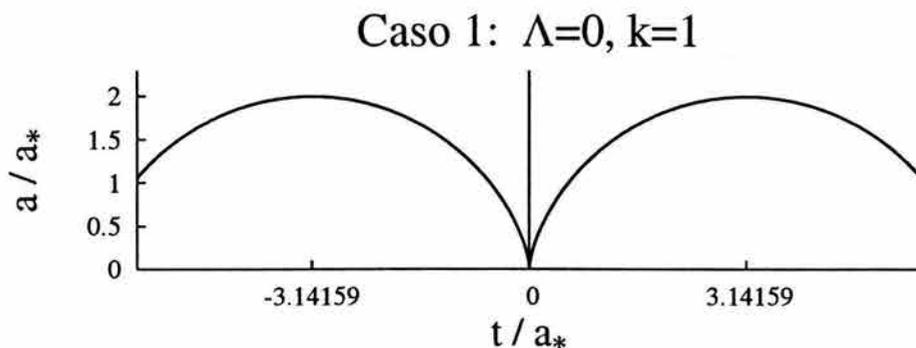


Figura A.1: a/a_* vs t/a_* , Caso 1: $k = 1 \Lambda = 0$. La curva es una cicloide. Con respecto a uno de los ciclos de expansión-contracción, podemos decir que existe un Big Bang en $t = 0$, la máxima expansión ocurre en $t = \pi a_*$ y hay un recolapso total a $t = 2\pi a_*$.

y por tanto

$$t = a_*(\sinh \eta - \eta). \quad (\text{A.11})$$

En la Fig. (A.2) se muestra la gráfica de a con respecto a t . El universo comienza con un Big Bang y se expande por siempre. Conforme $t \rightarrow \infty$ el universo se vuelve plano. De nuevo, nuestras ecuaciones no pueden describir adecuadamente la singularidad en $t = 0$.

A.1.3 Caso 3: $k = 0, \Lambda = 0$. Modelo de Einstein-de Sitter

La ecuación (A.1) queda

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho, \quad (\text{A.12})$$

o sustituyendo a M

$$\left(\frac{da}{dt}\right)^2 = \frac{4GM}{3\pi} \frac{1}{a}, \quad (\text{A.13})$$

cuya solución es

$$a(t) = \left(\frac{3GM}{\pi}\right)^{1/3} t^{2/3} = \frac{t^{2/3}}{c_1}. \quad (\text{A.14})$$

La grafica se muestra en la Fig. (A.3) El universo comienza en un Big Bang y conforme $t \rightarrow \infty$ el universo se vuelve plano.

También se encuentra que

$$t = \frac{2}{3H}. \quad (\text{A.15})$$

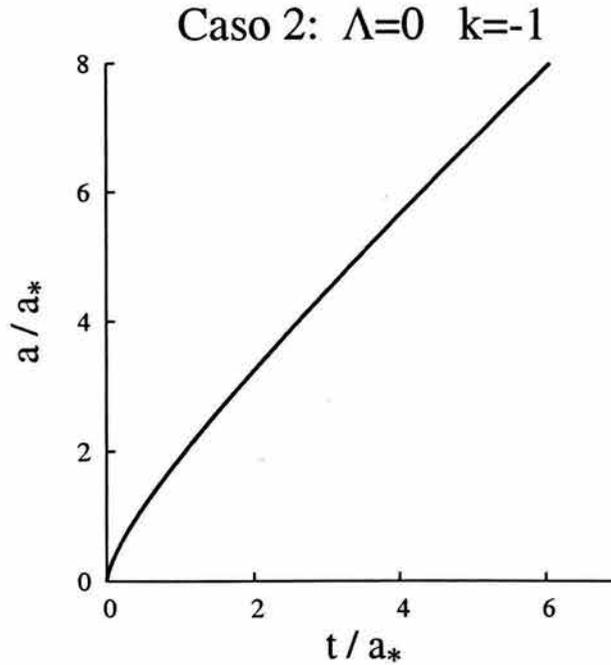


Figura A.2: a/a_* vs t/a_* , Caso 2: $k = -1$ $\Lambda = 0$. El universo comienza con un Big Bang y se expande por siempre. Conforme $t \rightarrow \infty$ el universo se vuelve plano.

A.2 Los modelos vacíos de Lemaître

En estos modelos la constante cosmológica es diferente de cero. Para simplificar, supondremos que Λ es mucho mayor que $8\pi GT_0^0$, así que podemos despreciar ese término y considerar que el universo está vacío. La constante cosmológica controlará el comportamiento del universo. Un valor positivo de Λ corresponde a una densidad de masa efectiva negativa (repulsión), y un valor negativo de Λ corresponde a una densidad de masa positiva (atracción). En un universo en el que $\Lambda > 0$ la expansión tiende a acelerarse (comportamiento monótono), mientras que si $\Lambda < 0$ la expansión aminora la velocidad, se detiene y luego vuelve a crecer (comportamiento oscilatorio).

A.2.1 Caso 4: $k = +1$, $\Lambda \neq 0$

Si despreciamos la densidad en (A.1) obtenemos

$$\frac{\dot{a}^2 + 1}{a^2} = \frac{\Lambda}{3}, \quad (\text{A.16})$$

es decir

$$\left(\frac{da}{dt}\right)^2 = -1 + \frac{\Lambda a^2}{3}. \quad (\text{A.17})$$

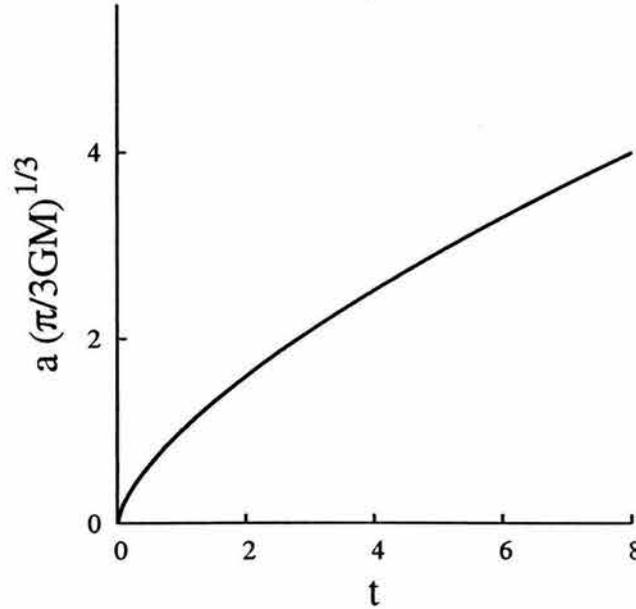
Caso 3: $\Lambda=0$ $k=0$ 

Figura A.3: $c_1 a$ vs t , Caso 3: $k = 0$ $\Lambda = 0$. Modelo de Einstein-de Sitter. El universo comienza en un Big Bang y conforme $t \rightarrow \infty$ el universo se vuelve plano.

Es claro que $(-1 + \Lambda a^2/3) \geq 0$. Esto implica que $\Lambda > 0$ y que $a \geq \sqrt{3/\Lambda}$, por lo tanto en este modelo no hay Big Bang. La solución a la ecuación (A.17) es:

$$a(t) = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \cosh \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t, \quad (\text{A.18})$$

donde se impuso como condición inicial que a sea mínima cuando $t = 0$.

La gráfica de la solución se muestra en la curva (a) de la Fig. (A.4). En este caso

$$A = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} a, \quad T = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t.$$

Para $t > t(a_{\text{mínima}})$ el universo se expande monótonamente, y conforme $t \rightarrow \infty$ el universo se vuelve plano.

A.2.2 Caso 5: $k = -1$, $\Lambda \neq 0$

Si despreciamos la densidad en (A.1) obtenemos

$$\frac{\dot{a}^2 - 1}{a^2} = \frac{\Lambda}{3}, \quad (\text{A.19})$$

es decir

$$\left(\frac{da}{dt}\right)^2 = 1 + \frac{\Lambda a^2}{3}, \quad (\text{A.20})$$

cuyas soluciones son:

$$a(t) = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \sinh \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t \quad \Lambda > 0, \quad (\text{A.21})$$

$$a(t) = \sqrt{\frac{3}{-\Lambda}} \sin \sqrt{\frac{-\Lambda}{3}} t \quad \Lambda < 0. \quad (\text{A.22})$$

Estas funciones se muestran en las curvas (b) y (c) respectivamente de la Fig. (A.4). Para estos dos casos

$$A = \sqrt{\frac{|\Lambda|}{3}} a, \quad T = \sqrt{\frac{|\Lambda|}{3}} t.$$

En ambos casos el universo comienza en un Big Bang a $t = 0$. La primera solución se expande monótonamente mientras que la otra oscila con un periodo de $2\pi\sqrt{3/|\Lambda|}$.

A.2.3 Caso 6: $k = 0$, $\Lambda \neq 0$. Modelo de de Sitter

Ahora la ecuación (A.1) queda:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{\Lambda}{3}, \quad (\text{A.23})$$

es decir

$$\left(\frac{da}{dt}\right)^2 = \frac{\Lambda a^2}{3}, \quad (\text{A.24})$$

Esto tiene sentido sólo si $\Lambda > 0$ y su solución es

$$a(t) = a(0) \exp \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t. \quad (\text{A.25})$$

Este universo se expande exponencialmente². La gráfica se muestra en la curva (d) de la Fig. (A.4). Aquí

$$A = \frac{a}{a(0)}, \quad T = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t.$$

Cabe recalcar que en las gráficas de este apéndice los ejes de las ordenadas tienen distintos factores de normalización naturales a los diferentes casos; por lo tanto las figuras son comparables a nivel cualitativo solamente.

Como $H = \dot{a}/a$, vemos que en este caso el parámetro de Hubble es independiente del tiempo:

$$H = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}.$$

²La ecuación (A.24) también tiene una solución exponencial decreciente, pero sabemos que nuestro Universo se expande.

Una interpretación interesante de este comportamiento fue promocionada por Eddington en los

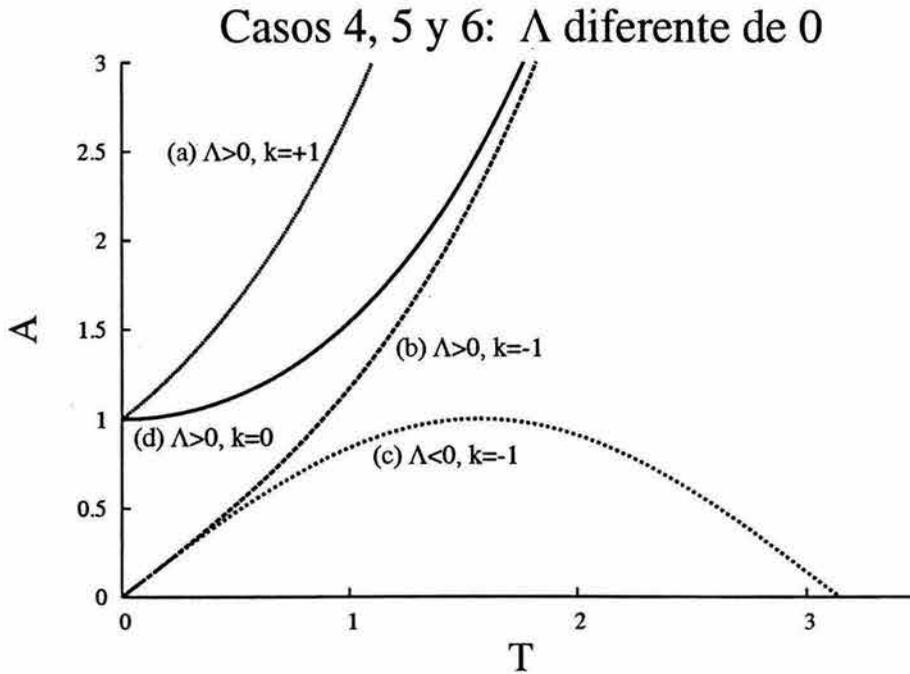


Figura A.4: A vs T , Casos 4, 5 y 6. La curva (a) corresponde al caso 4, $k = +1$, $\Lambda \neq 0$. Para $t > t(a_{\text{mínima}})$ el universo se expande monótonamente, y conforme $t \rightarrow \infty$ el universo se vuelve plano. En este modelo no hay Big Bang. Las curvas (b) y (c) corresponden al caso 5, $k = -1$, $\Lambda \neq 0$. En ambos casos el universo comienza en un Big Bang a $t = 0$. La primera solución se expande monótonamente mientras que la otra oscila con un periodo de $2\pi\sqrt{3/-\Lambda}$. Por último, la curva (d) pertenece al caso 6, $k = 0$, $\Lambda \neq 0$. Este universo se expande exponencialmente.

primeros tiempos de la Cosmología: la constante cosmológica fue lo que causó la expansión. En los modelos sin Λ , la expansión es solamente una mera condición inicial: a cualquiera que pregunte por qué el Universo se expande a una cierta época se le da la insatisfactoria respuesta de que se expande porque se estaba expandiendo a un tiempo anterior, y esta cadena de razonamiento choca con una barrera a $t = 0$. Sería mucho más satisfactorio tener un mecanismo que accionara la expansión, y esto es lo que proporciona la repulsión del vacío.

Esta tendencia de los modelos con una Λ positiva de terminar experimentando una fase exponencial de expansión (y más aún, una con $\Omega = 1$) es exactamente lo que se usa en la Cosmología inflacionaria para generar las condiciones iniciales para el Big Bang.

Apéndice B

Algunos conceptos astronómicos

B.1 Fotometría y magnitudes

Todas las observaciones astronómicas utilizan radiación electromagnética de una u otra manera. Podemos obtener información acerca de la naturaleza física de una fuente de radiación mediante el estudio de la distribución de energía de su radiación.

La **densidad de flujo** F da la potencia de radiación por unidad de área. Sus unidades son $\text{W m}^{-2} \text{Hz}^{-1}$; en Astronomía generalmente se usan Janskys ($1 \text{ Jy} = 10^{-26} \text{ W m}^{-2} \text{Hz}^{-1}$). El flujo de radiación emitido por una estrella en un ángulo sólido Ω es $L = \Omega r^2 F$, donde F es la densidad de flujo observada a una distancia r . El flujo total es el flujo que pasa a través de una superficie cerrada que encierra a la fuente. Usualmente los astrónomos llaman al flujo total de una estrella la **luminosidad** L . Si una fuente (como una estrella típica) radía isotrópicamente, su radiación a una distancia r se distribuye uniformemente sobre una superficie esférica de área $4\pi r^2$. Si la densidad de flujo de la radiación que pasa a través de esta superficie es F , entonces la luminosidad es

$$L = 4\pi r^2 F. \quad (\text{B.1})$$

Si nos hallamos afuera de la fuente, en donde la radiación no se crea ni se destruye, la luminosidad L no depende de la distancia. Por otro lado, la densidad de flujo F disminuye como $1/r^2$. Esta expresión es válida sólo para distancias menores al radio de curvatura en universos con $\Omega_K \neq 0$, pero válida en general para el caso $\Omega_K = 0$, que parece ser el nuestro.

La **magnitud aparente** m , de una estrella se define en términos de la densidad de flujo observada. Si la magnitud 0 corresponde a cierta densidad de flujo F_0 preseleccionada, todas las demás magnitudes quedan definidas por la relación:

$$m = -2.5 \log \frac{F_m}{F_0}. \quad (\text{B.2})$$

Similarmente, las magnitudes m_1 y m_2 de dos estrellas y sus correspondientes densidades de flujo

están relacionadas por

$$m_1 - m_2 = -2.5 \log \frac{F_1}{F_2}. \quad (\text{B.3})$$

La magnitud de un objeto es más negativa mientras mayor sea su brillo. La magnitud aparente de Sirio (la estrella más brillante a ojo) es -1.5 , mientras que la magnitud aparente de los objetos más tenues es de alrededor de $+25$.

La magnitud aparente depende del instrumento usado para medirla. La sensibilidad del detector es diferente a diferentes longitudes de onda, además, distintos instrumentos detectan rangos distintos de longitudes de onda. El flujo medido por un instrumento es igual a una fracción de éste no a la totalidad. Dependiendo del método de observación podemos definir distintos sistemas de magnitudes. Cada uno de ellos tiene una densidad de flujo F_0 (correspondiente a la magnitud 0) diferente. Los puntos cero usualmente se definen con unas cuantas estrellas seleccionadas.

En un sistema de magnitud multicolor, se usan filtros para permitir que una cierta banda de longitudes de onda entren al detector. En el sistema UBVI las magnitudes se miden a través de tres filtros: U (ultraviolet), B (blue) y V (visual). Si se añaden los filtros R (red) e I (infrared) se tiene el sistema UBVI. Otro sistema multicolor es el de Strömrgren o *ubvy*.

Las magnitudes aparentes se denominan ya sea con la letra mayúscula que corresponde al filtro o con letras minúsculas cuyo subíndice indica el filtro usado. Por ejemplo U, B y V denotan magnitudes aparentes, pero también se escriben m_U , m_B y m_V , respectivamente.

El ojo humano es más sensible a la radiación con longitudes de onda de alrededor de 550 nm, decreciendo la sensibilidad hacia el rojo y el violeta. La magnitud que corresponde a la máxima sensibilidad del ojo se llama magnitud visual m_v . Generalmente, las placas fotográficas son más sensibles a las longitudes de onda azules y violetas, pero también son capaces de registrar radiación que el ojo no detecta. Por lo tanto la magnitud fotográfica m_{pg} generalmente difiere de la magnitud visual.

La **magnitud absoluta** M mide el brillo intrínseco de una estrella. Se define como la magnitud aparente a una distancia de 10 parsecs de la estrella. Las magnitudes absolutas se escriben con letras mayúsculas y un subíndice. Las magnitudes absolutas M_U , M_B y M_V corresponden a las magnitudes aparentes $U(=m_u)$, $B(=m_B)$ y $V(=m_V)$.

El flujo emanado por una estrella dentro de un ángulo sólido Ω , se distribuye sobre una superficie Ωr^2 a una distancia r de la estrella, por lo que la densidad de flujo F es inversamente proporcional a la distancia al cuadrado. Así que:

$$\frac{F(r)}{F(10)} = \left(\frac{10 \text{ pc}}{r} \right)^2. \quad (\text{B.4})$$

Introduciendo (B.4) en (B.3) se puede obtener el **módulo de distancia** $\mu = m - M$

$$\mu = m - M = 5 \log \frac{r}{10 \text{ pc}}. \quad (\text{B.5})$$

En cualquier sistema multicolor se pueden definir **índices de color**; un índice de color es la diferencia de dos magnitudes. Por ejemplo, el índice de color U-B se obtiene de sustraer la magnitud en el azul B, de la magnitud en el ultravioleta U.

Como la ley del cuadrado inverso del flujo luminoso aplica igualmente para todas las longitudes de onda, el índice de color de una estrella no cambiaría si se cambiara la distancia a la estrella. Por lo tanto, el índice de color se puede definir ya sea en términos de su magnitud aparente o de su magnitud absoluta. Por ejemplo

$$m_B - m_V \equiv B - V = M_B - M_V.$$

Los índices de color B-V van desde -0.4 para las estrellas más azules y calientes, hasta más de -2.0 para las más rojas y frías.

Si fuéramos capaces de medir la radiación en todas la longitudes de onda, obtendríamos la **magnitud bolométrica** m_{bol} o la **magnitud bolométrica absoluta** M_{bol} . En la práctica esto es muy difícil porque parte de la radiación es absorbida por la atmósfera y además diferentes longitudes de onda requieren diferentes detectores. La magnitud bolométrica se puede obtener de la magnitud visual si conocemos la **corrección bolométrica BC**:

$$BC = V - m_{bol} = M_V - M_{bol}. \quad (B.6)$$

Por definición la BC es cero para radiación de estrellas tipo solar: mientras más difiera la distribución de radiación de la solar, mayor es la BC. La magnitud bolométrica absoluta se puede expresar en términos de la luminosidad como

$$M_{bol} - M_{bol,\odot} = -2.5 \log \frac{L}{L_{\odot}}. \quad (B.7)$$

Al gas y polvo entre las estrellas se le conoce como el “medio interestelar”. Para diversos propósitos podemos considerar al espacio interestelar como lleno de hidrógeno con una densidad promedio de 1 átomo/cm^3 , aunque las regiones individuales pueden tener densidades muy diferentes a este promedio. A las regiones de alta densidad en las que los átomos de hidrógeno son predominantemente neutros se le llama **regiones H I**. Si la densidad de una región H I es suficientemente alta, se forman moléculas de hidrógeno (H_2). Las partes más densas del gas asociado a la nebulosa de Orión podrían tener densidades del orden de 1×10^6 moléculas de hidrógeno por cm^3 .

A las regiones en las que el hidrógeno está ionizado se les llama **regiones H II**. Estas regiones se encuentran cerca de estrellas que son suficientemente calientes como para ionizar el hidrógeno.

La ecuación (B.5) muestra como crece la magnitud aparente (y el brillo decrece) conforme aumenta la distancia. Si el espacio entre la fuente de radiación y el observador no está completamente vacío, entonces (B.5) ya no se cumple, debido a que el medio absorbe parte de la radiación (y generalmente es reemitida a una longitud de onda diferente, que puede hallarse fuera de la banda

que define la magnitud), o dispersada fuera de la línea de visión. A todas estas pérdidas de radiación se les llama **extinción A**. El modulo de distancia se calcula entonces como:

$$\mu = m - M = 5 \log \frac{r}{10 \text{ pc}} + A, \quad (\text{B.8})$$

donde $A \geq 0$ es la extinción en magnitudes debido a todo el medio entre la estrella y el observador.

Otro efecto causado por el medio interestelar es el enrojecimiento de la luz: la luz azul es dispersada por el polvo en el espacio mucho más eficientemente de lo que es la luz roja. En efecto, para una cierta distancia a través del polvo, más de la luz azul se ha desviado en todas direcciones. Por ello nos llega una menor proporción de luz azul de lo que nos llega luz roja y las estrellas lucen enrojecidas. Así que el índice de color B-V aumenta. B y V denotan magnitudes aparentes, las magnitudes absolutas correspondientes se denotan por M_V y M_B . Se define

$$B - V = (B - V)_0 + E_{B-V}, \quad (\text{B.9})$$

donde $(B - V)_0$ es el *color intrínseco* de la estrella y E_{B-V} es el **reddening**. Es común emplear el término en inglés, aunque también se le conoce como “enrojecimiento” o “exceso de color”. Este enrojecimiento es consecuencia de las propiedades dispersoras del polvo. No tiene nada que ver con el corrimiento al rojo (redshift).

El polvo interestelar está compuesto de pequeñas partículas, y mediante análisis espectral se sabe al menos que algunas de ellas son carbón en forma de grafito, silicatos y hielo.

Estudios del medio interestelar muestran que el cociente de A_V (la extinción en el visual) al reddening E_{B-V} es casi constante para todas las estrellas:

$$\frac{A_V}{E_{B-V}} \approx 3.0 \quad (\text{B.10})$$

Luego de obtener A a partir de (B.10) se puede calcular la distancia usando (B.8).

Se acostumbra dividir a las estrellas en dos tipos: **Población I (Pop I)** y **Población II (Pop II)**, acorde a su composición y por lo tanto a su edad. Las estrellas Pop I son jóvenes y ricas en metales; las Pop II son viejas y pobres en metales. Si vamos hacia atrás en el tiempo a partir de hoy, nos encontramos primero con las estrellas Pop I y después con las Pop II. Entonces las estrellas viejas Pop I son aquellas que se formaron entre las Pop I y las Pop II. A veces también se habla de estrellas Pop III que son muy viejas y se formaron al principio de la evolución galáctica. Mientras más vieja sea la población menor es la metalicidad.

B.2 El Diagrama Hertzsprung-Russell (HR) y el Diagrama Color Magnitud (CMD)

El Diagrama Color-Magnitud (CMD) así como su mellizo, el diagrama Hertzsprung-Russell (HR) son esencialmente gráficas donde el eje de las abscisas (eje x) indica la temperatura de la estrella (la temperatura aumenta hacia la izquierda) y el eje de las ordenadas (eje y) indica el brillo de la estrella (las estrellas más brillantes se hallan en la parte superior).

En un GC todas las estrellas se hallan aproximadamente a la misma distancia y la diferencia entre las magnitudes aparente y absoluta es la misma para cada estrella y es igual al módulo de distancia del cúmulo.

El diagrama HR es una gráfica de la luminosidad vs. la temperatura superficial. Se deriva de la relación básica para un objeto que emite radiación térmica como un cuerpo negro

$$L = 4\pi\sigma R^2 T_e^4, \quad (\text{B.11})$$

donde L es la luminosidad (energía emitida por segundo por la toda la superficie), σ es la constante de Stefan Boltzmann, R es el radio y T_e se define como la temperatura de un cuerpo negro hipotético del mismo radio R de la estrella, radiando la misma luminosidad total L .

La luminosidad se expresa comúnmente en términos de la luminosidad solar L_\odot dada por

$$L_\odot = 3.90 \times 10^{33} \text{ erg s}^{-1}$$

y graficada en una escala de magnitudes

$$M_{bol} = -2.5 \log \frac{L}{L_\odot} + M_{bol,\odot},$$

donde M_{bol} y $M_{bol,\odot} = 4.77$ son las magnitudes bolométricas de la estrella y del Sol, respectivamente.

En cada instante de su vida, una estrella tiene una cierta L , R , y por lo tanto una T_e , dictadas por la estructura global de la estrella y los procesos físicos que ocurren en ella. Como la estructura de una estrella no es constante en el tiempo debido a la continua pérdida de energía a través de la superficie (y las fusiones nucleares), L y T_e cambian conforme la estrella evoluciona. Por lo tanto, una estrella describe una trayectoria en el diagrama HR que es una función de su masa y composición química. El diagrama HR es un poderoso diagnóstico de la estructura y evolución de la estrella durante toda su vida.

Diferentes poblaciones de estrellas poseen diagramas HR diferentes. Los de los GCs son bien comportados mientras que los de los cúmulos abiertos y las asociaciones son pobres y en ellos sólo unas cuantas de las estrellas después de las secuencia principal son visibles. Por otro lado las poblaciones estelares compuestas tienen diagramas HR desiguales y en ellos se añade una dimensión, a saber, la historia de formación estelar.

Mediante el estudio de la trayectoria en el diagrama HR de una sola estrella y/o la morfología del diagrama HR de conjuntos estelares de diferentes complejidades (desde cúmulos hasta galaxias) aprendemos mucho no sólo acerca de como se forman y evolucionan las estrellas, sino también acerca de muchas de las propiedades físicas del sistema huésped.

Los datos observacionales son magnitudes aparentes y colores en un cierto sistema fotométrico (por ejemplo el UBV). Pasar de magnitudes aparentes y colores a luminosidades y temperaturas efectivas no es trivial ya que son necesarios varios pasos. Para determinar la luminosidad absoluta se requieren la distancia, el exceso de color y las correcciones bolométricas. La determinación de T_e es aún más indirecta y se puede hacer por diferentes métodos. Para una misma estrella, estos métodos pueden dar diferentes valores de temperatura; sin embargo, generalmente son parecidos entre sí y cercanos al valor ideal T_e de la ecuación (B.11).

Desde un punto de vista operacional, partimos de magnitudes aparentes y colores, se corrigen éstos por la extinción si es posible, se trasladan magnitudes aparentes a magnitudes absolutas si se conoce la distancia y de las magnitudes absolutas se derivan las magnitudes bolométricas absolutas tras aplicar la corrección bolométrica. Luego se convierten los colores en temperaturas, y finalmente se compara el diagrama HR resultante con la contraparte teórica obtenida de las teorías de estructura y evolución estelar. Es necesario recalcar que las correcciones bolométricas y las relaciones color-temperatura son funciones complicadas del tipo espectral, la luminosidad y la composición química X , Y y Z , es decir, las abundancias de H, He y todos los elementos restantes. Todo este procedimiento se puede repetir hacia atrás: o sea, partir de valores teóricos de L y T_e y predecir las magnitudes y colores observados correspondientes.

B.3 Reacciones nucleares y el diagrama HR

La principal fuente de energía en el interior de las estrellas son las reacciones termonucleares. La fusión de núcleos ligeros en núcleos más masivos proporciona la cantidad requerida de energía por un tiempo muy largo. Notablemente, la fusión de H libera casi 10 veces más energía que la fusión de He. Esto corresponde al hecho observado de que las estrellas de la secuencia principal sean más o menos 10 veces más numerosas que las estrellas de etapas posteriores a la MS.

La fusión de ${}^1\text{H}$ en ${}^4\text{He}$ ocurre mediante dos procesos: la cadena PP y el ciclo CNO. En ellos ocurren una serie de reacciones cuyo resultado neto es que cuatro protones se funden en un solo núcleo de He ($4 \times {}^1\text{H}$ en $1 \times {}^4\text{He}$).

La combustión de He o proceso 3α , ocurre solamente después de que las estrellas han consumido el contenido central de H, y han formado un núcleo central de He puro.

Las etapas de combustión posteriores al proceso 3α requieren densidades y temperaturas cada vez mayores. La cantidad de energía liberada decrece, tal que la duración de las etapas posteriores sucesivas se vuelven más y más cortas. La combustión nuclear tiene lugar sólo hasta la formación de un núcleo de Fe, un mínimo para la energía relativa de un conjunto de neutrones y protones.

En general, el agotamiento del combustible central tiende a hacer una estrella más brillante y fría (se corre hacia arriba y hacia la derecha en el diagrama HR), mientras que la ignición de un nuevo combustible en el centro tiende a hacerla más tenue (menos brillante) y caliente (se corre hacia abajo y hacia la izquierda en el diagrama HR).

B.4 Estrellas binarias en cúmulos globulares

Desde hace mucho, se sabe que los cúmulos globulares se encuentran entre las agrupaciones estelares más ricas de la Galaxia, pero por largo tiempo se creyó que carecían casi por completo de los grupos estelares más pequeños: las estrellas binarias. Durante muchos años, la única evidencia de que existían algunas binarias en estos cúmulos provino de la presencia de las **blue stragglers BS**, estrellas que parecen ser significativamente más jóvenes que las vasta mayoría de las estrellas del cúmulo. La naturaleza de las BS no es del todo clara, pero una explicación reciente y persistente de su existencia es que la transferencia de masa entre las estrellas de sistemas binarios prolonga la vida de las estrellas que ganan masa.

A mediados de los 1980s era generalmente aceptado que la frecuencia de binarias en cúmulos globulares era probablemente menor al 10%, y ciertamente mucho menor a la frecuencia observada del 50% entre las estrellas cercanas al Sol.

La carencia de binarias en cúmulos globulares parecía ser consistente con algunas expectativas de esa época. Dado que las estrellas de un cúmulo globular se encuentran muy amontonadas, frecuentemente pasan muy cerca una de otra. Modelos simples de las interacciones de binarias y estrellas simples en estos ambientes sugieren que las binarias con separaciones inicialmente anchas, (es decir, del orden de la distancia entre el Sol y la Tierra, o mayor) serían desbaratadas. También se creía que la baja abundancia de elementos pesados en la mayoría de los cúmulos globulares podría inhibir de alguna manera la formación de estrellas binarias.

Sin embargo, desde el punto de vista de la estabilidad de los cúmulos globulares la ausencia absoluta de binarias se volvió un problema más y más confuso. Las interacciones gravitacionales de las estrellas dentro del cúmulo tienden a drenar sistemáticamente energía del núcleo del cúmulo, conduciendo finalmente a un colapso del núcleo, a una densidad de masa infinita en un tiempo finito. Como ningún cúmulo ha mostrado evidencia convincente de haber colapsado de esa manera dramática, se volvió claro que a la larga, algo debía detener los procesos de colapso del núcleo. La manera más sencilla de lograrlo sería la formación de estrellas binarias en el centro del cúmulo durante las últimas etapas del colapso. Incluso la formación de algunas **binarias estrechas** (estrellas binarias con periodos orbitales muy cortos) podrían detener por completo el colapso del núcleo, hasta en los cúmulos más masivos. El problema era hallar evidencia de que estas binarias realmente existían. Con el tiempo se encontraron evidencias indisputables de que las estrellas binarias existen en los cúmulos globulares. Con los telescopios de rayos X se detectaron fuentes brillantes de rayos X asociadas aparentemente con cúmulos globulares. Posteriormente se volvió claro que estas

fuentes representaban sistemas binarios de periodo corto, en los que una estrella normal transfiere masa a una estrella de neutrones compañera. La frecuencia de estas binarias de rayos X es mucho mayor en cúmulos globulares que en el resto de la Galaxia, tal que se forman preferentemente en los cúmulos, tal vez como resultado del colapso en el núcleo. Sin embargo, muchos cúmulos que deberían haber colapsado en su núcleo no contienen binarias de rayos X, así que deben existir otro tipo de binarias para detener su colapso. Con los radiotelescopios se han detectado en cúmulos globulares uno de los tipos de binaria más inusuales: los pulsares. También se han descubierto **binarias cataclísmicas (CBs)**. Las CBs están estrechamente relacionadas a las fuentes de rayos X, excepto que la compañera compacta es una enana blanca, en vez de una estrella de neutrones. También se han detectado otras binarias de tipo más común. En los estudios espectroscópicos de gigantes rojas se empezaron a identificar estrellas que parecían variar de la manera en que varían las binarias comunes. Estas **binarias espectroscópicas** tienen periodos orbitales que van de unos meses hasta 10 años (o más) y demostraron que binarias relativamente anchas pueden sobrevivir en estos ambientes. Estudios en los cambios del brillo de las estrellas de cúmulos revelaron que algunas de éstas son **binarias eclipsantes**. Estos sistemas consisten de estrellas muy próximas, las cuales se eclipsan entre sí periódicamente conforme las estrellas pasan una frente a otra, debido a la alineación fortuita de su plano orbital con la Tierra.

Sorprendentemente, el número de binarias espectroscópicas y de eclipse en los cúmulos globulares demuestra que en vez de ser deficientes en binarias, los GCs podrían tener una frecuencia de binarias en el rango 25 – 60%. Tales valores serían considerados como normales para las estrellas en la vecindad solar. De hecho, ningún cúmulo que se haya estudiado suficientemente ha fallado en tener binarias espectroscópicas o de eclipse o blue stragglers. Las observaciones más recientes han confirmado firmemente que las estrellas binarias no son raras en los cúmulos globulares, simplemente son difíciles de hallar.

Las blue stragglers volvieron a entrar a escena, cuando se volvió claro que del 5 – 10% de estas estrellas son binarias de eclipse. Algunas de estas BS binarias resultan ser binarias de contacto, sistemas en los que las estrellas están en contacto físico. Con el tiempo, las dos estrellas colisionan para formar una sola estrella más masiva. Este objeto podría volverse una blue straggler.

Bibliografía

- ABELL, G., 1987. *Exploration of the Universe*. Saunders college publishing, USA.
- ALCAINO, G., LILLER, W. & ALVARADO, F., 1997. Multicolor NTT Photometry of the Anomalous Globular Cluster NGC 288. *AJ*, **114**, 2626.
- ALCAINO, G. ET AL., 1998. Multicolor CCD Photometry of the Poorly Studied Globular Cluster M80. *AJ*, **116**, 2415.
- ALLEN, S., SCHMIDT, R. & FABIAN, A., 2002. Cosmological constraints from the X-ray gas mass fraction in relaxed lensing clusters observed with Chandra. *MNRAS*, **334**, L11.
- ALONSO, A. ET AL., 1997. CCD photometry of the metal-rich halo cluster NGC 6366. *A&A*, **323**, 374.
- ALPHER, R. A., BETHE, H. & GAMOW, G., 1948. The Origin of Chemical Elements. *PhRv*, **73**, 803.
- BAHCALL, N. & FAN, X., 1998. The Most Massive Distant Clusters: Determining Ω and σ_8 . *ApJ*, **504**, 1.
- BAIRD, D. C., 1991. *Experimentación. Una introducción a la teoría de mediciones y al diseño de experimentos*. Prentice Hall, México.
- BENOÎT, A. ET AL., 2003. Cosmological constraints from Archeops. *A&A*, **399**, L25.
- BERGBUSCH, P. A. & VANDENBERG, D. A., 1997. Distance-Dependent Absolute Globular Cluster Ages From the Color Distribution of Subgiant-Branch Stars. *AJ*, **114**, 2604.
- BOAS, M. L., 1983. *Mathematical methods in the physical sciences*. Wiley, USA.
- BONDI, H. & GOLD, T., 1948. The Steady-State Theory of the Expanding Universe. *MNRAS*, **108**, 252.
- BRANDT, S., 1999. *Data Analysis. Statistical and computational methods for scientists and engineers*. Springer, USA.

- BROCATO, E. ET AL., 1998. CCD photometry of M 80 and the ranking of the C-M diagrams of galactic globulars. *A&A*, **335**, 929.
- BURBIDGE, E. M., BURBIDGE, G. R., FOWLER, W. A. & HOYLE, F., 1957. Synthesis of the Elements in Stars. *RvMP*, **29**, 547.
- CALDWELL, R. R., DAVE, R. & STEINHARDT, P. J., 1998. Cosmological Imprint of an Energy Component with General Equation of State. *PhRvL*, **80**, 1582.
- CALDWELL, R. R. & STEINHARDT, P. J., 1998. Imprint of gravitational waves in models dominated by a dynamical cosmic scalar field. *PhRvD*, **57**, 6057–6064.
- CARNEY, B. W., 1996. The Constancy of $[\alpha/\text{Fe}]$ in Globular Clusters of Differing $[\text{Fe}/\text{H}]$ and Age. *PASP*, **108**, 900.
- CARRETTA, E. & GRATTON, R. G., 1997. Abundances for globular cluster giants. I. Homogeneous metallicities for 24 clusters. *A&AS*, **121**, 95.
- CARRETTA, E. ET AL., 2000. Distances, Ages, and Epoch of Formation of Globular Clusters. *APJ*, **533**, 215.
- CARROLL, S., HOFFMAN, M. & TRODDEN, M., 2003. Can the dark energy equation-of-state parameter ω be less than -1? *PhRv*, **D 68**, 023509–1.
- CARROLL, S. M., 2001. The cosmological constant. *Living Rev. Relativity (online article)*, **4**, <http://www.livingreviews.org/lrr-2001-1>, astro-ph/0004075.
- CARROLL, S. M., PRESS, W. H. & TURNER, E. L., 1992. The cosmological constant. *ARA&A*, **30**, 499.
- CASSISI, S., DE SANTIS, R. & PIERSIMONI, A. M., 2001. The distance to Galactic globular clusters through RR Lyrae pulsational properties. *MNRAS*, **326**, 342.
- CAYREL, R. ET AL., 2001. Measurement of stellar age from uranium decay. *Natur*, **409**, 691.
- CHABOYER, B., 1998. The Age of the Universe. *arXiv:astro-ph/9808200 v1*.
- CHABOYER, B., DEMARQUE, P., KERNAN, P. J. & KRAUSS, L. M., 1998. The Age of Globular Clusters in Light of Hipparcos: Resolving the Age Problem? *ApJ*, **494**, 96.
- CHABOYER, B. & KRAUSS, L., 2002. Theoretical Uncertainties in the Subgiant Mass-Age Relation and the Absolute Age of ω Centauri. *ApJ*, **567**, L45.
- CHARBONNEAU, P., 2004. *Pikaia homepage*. <http://www.hao.ucar.edu/public/research/si/pikaia/pikaia.html>, Canadá.

- CLAYTON, D., 1988. Nuclear cosmochronology within analytic models of the chemical evolution of the solar neighbourhood. *MNRAS*, **234**, 1.
- COLES, P. & LUCCHIN, F., 1995. *Cosmology. The origin and evolution of cosmic structure*. John Wiley and sons, Great Britain.
- COWAN, J. ET AL., 1999. R-Process Abundances and Chronometers in Metal-poor Stars. *ApJ*, **521**, 194.
- DAVIDGE, T. J., 2000. A Near-Infrared Photometric Survey of Metal-poor Inner Spheroidal Globular Clusters and Nearby Bulge Fields. *AJ*, **120**, 1853–1875.
- DICKE, R. H., PEEBLES, P. J. E., ROLL, P. G. & WILKINSON, D. T., 1965. Cosmic Black-Body Radiation. *ApJ*, **142**, 414.
- DODELSON, S. & KNOX, L., 2000. Dark Energy and the Cosmic Microwave Background Radiation. *PhRvL*, **84**, 3523.
- DUNLOP, J. ET AL., 1996. A 3.5-Gyr-old galaxy at redshift 1.55. *Natur*, **381**, 581.
- EFTATHIOU, G. ET AL., 2002. Evidence for a non-zero Λ and a low matter density from a combined analysis of the 2dF Galaxy Redshift Survey and cosmic microwave background anisotropies. *MNRAS*, **330**, L29.
- FERRARO, F. ET AL., 1999. The Giant, Horizontal, and Asymptotic Branches of Galactic Globular Clusters. I. The Catalog, Photometric Observables, and Features. *AJ*, **118**, 1738.
- FERRERAS, I., MELCHIORRI, A. & SILK, J., 2001. Setting new constraints on the age of the Universe. *MNRAS*, **327**, L47–L51.
- FILKIN, D., 1997. *Stephen Hawking's Universe*. Basic Books, USA.
- FREEDMAN, W. ET AL., 2001. Final Results from the Hubble Space Telescope Key Project to Measure the Hubble Constant. *ApJ*, **553**, 47.
- FRIEDMANN, A., 1922. Über die Krümmung des Räumes. *Zeitschrift für Physik*, **10**, 377.
- GEFFERT, M. & MAINTZ, G., 2000. First results of a photometric and astrometric study of the globular cluster M 71 (NGC 6838). *A&AS*, **144**, 227.
- GOLDSTEIN, J. ET AL., 2003. Estimates of Cosmological Parameters Using the Cosmic Microwave Background Angular Power Spectrum of ACBAR. *ApJ*, **599**, 773.
- GRATTON, R., CLEMENTINI, G. & CARRETTA, E., 1998. Globular Cluster Distances and Ages Using HIPPARCOS Subdwarfs. *MmSAI*, **69**, 175.

- GRATTON, R. ET AL., 1997. Ages of Globular Clusters from HIPPARCOS Parallaxes of Local Subdwarfs. *ApJ*, **491**, 749.
- GRATTON, R. ET AL., 2003. Distances and ages of NGC 6397, NGC 6752 and 47 Tuc. *A&A*, **408**, 529.
- GRÄTZER, G., 2000. *Math into Latex*. Birkhäuser Springer, USA.
- GRUNDAHL, F. ET AL., 2000. A Distance-Independent Age for the Globular Cluster M92. *AJ*, **120**, 1884.
- GUTH, A. H., 1981. Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems. *PhRvD*, **23**, 347.
- HACYAN, S., 1994. *Del mundo cuántico al Universo en expansión*. Fondo de Cultura Económica, México.
- HANSEN, B. ET AL., 2002. The White Dwarf Cooling Sequence of the Globular Cluster Messier 4. *ApJ*, **574**, L155.
- HATZIDIMITRIOU, D. ET AL., 2004. BVRI photometry of the galactic globular cluster NGC 6779. *MNRAS*, **348**, 1157.
- HAWKING, S., 1969. On the rotation of the Universe. *MNRAS*, **142**, 129.
- HAWKING, S. W. & ELLIS, G. F. R., 1968. The Cosmic Black-Body Radiation and the Existence of Singularities in Our Universe. *ApJ*, **152**, 25.
- HERNANDEZ, X., GILMORE, G. & VALLS-GABAUD, D., 2000a. Non-parametric star formation histories for four dwarf spheroidal galaxies of the Local Group. *MNRAS*, **317**, 831.
- HERNANDEZ, X. & VALLS-GABAUD, D., 2004. Optimal reconstruction of CGs parameters through a maximum likelihood method. *En preparación*.
- HERNANDEZ, X., VALLS-GABAUD, D. & GILMORE, G., 1999. Deriving star formation histories: inverting Hertzsprung-Russell diagrams through a variational calculus maximum likelihood method. *MNRAS*, **304**, 705.
- HERNANDEZ, X., VALLS-GABAUD, D. & GILMORE, G., 2000b. The recent star formation history of the Hipparcos solar neighbourhood. *MNRAS*, **316**, 605.
- HILL, V. ET AL., 2002. First stars. I. The extreme r-element rich, iron-poor halo giant CS 31082-001. Implications for the r-process site(s) and radioactive cosmochronology. *A&A*, **387**, 560.
- HINSHAW, G. ET AL., 2003. First-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: The Angular Power Spectrum. *ApJS*, **148**, 135.

- HOYLE, F., 1948. A New Model for the Expanding Universe. *MNRAS*, **108**, 372.
- HOYLE, F. & TAYLER, R., 1964. The mystery of the cosmic helium abundance. *Natur*, **203**, 1108.
- HUBBLE, E., 1929. A Relation between Distance and Radial Velocity among Extra-Galactic Nebulae. *Proceedings of the National Academy of Science*, **15**, 168.
- JIMENEZ, R. & PADOAN, P., 1998. The Ages and Distances of Globular Clusters with the Luminosity Function Method: The Case of M5 and M55. *ApJ*, **498**, 704.
- JIMENEZ, R. ET AL., 1996. Ages of globular clusters: a new approach. *MNRAS*, **282**, 926.
- JIMENEZ, R. ET AL., 2003. Constraints on the equation of state of dark energy and the Hubble constant from stellar ages and the cosmic microwave background. *ApJ*, **593**, 622.
- KALUZNY, J. ET AL., 2002. *Omega Centaury, a Unique Window into Astrophysics*, vol. 265. Astronomical Society of the Pacific Conference Series, USA.
- KARTTUNEN, H. ET AL., eds., 1987. *Fundamental astronomy*. Springer.
- KRAFT, R. P. & IVANS, I. I., 2003. A Globular Cluster Metallicity Scale Based on the Abundance of Fe II. *PASP*, **115**, 143.
- KRAUSS, L. & CHABOYER, B., 2003. Age Estimates of Globular Clusters in the Milky Way: Constraints on Cosmology. *Sci*, **299**, 65.
- KRAVTSOV, V. ET AL., 1997. NTT CCD photometry of the globular cluster M 79 = NGC 1904 in UBV. *A&AS*, **125**, 1.
- LANDAU, L. & LIFSHITZ, E., 1989. *The classical theory of fields*. Pergamon Press, USA.
- LAYDEN, A. C. & SARAJEDINI, A., 2003. Photometry of the Globular Cluster NGC 3201 and Its Variable Stars. *AJ*, **125**, 208.
- LIDDLE, A., 2003. *An Introduction to Modern Cosmology*. Wiley, USA.
- LIU, W. M. & CHABOYER, B., 2000. The Relative Age of the Thin and Thick Galactic Disks. *ApJ*, **544**, 818.
- LONGAIR, M., 1998. *Galaxy formation*. Springer, Germany.
- MATTEUCCI, F., 2001. *The chemical evolution of the galaxy*. Kluwer Academic Publishers, The Netherlands.
- MELBOURNE, J. ET AL., 2000. CCD Photometry of the Globular Cluster NGC 4833 and Extinction Near the Galactic Plane. *AJ*, **120**, 3127.

- MELCHIORRI, A., MERSINI, L., ÖDMAN, C. & TRODDEN, M., 2003. The State of the Dark Energy Equation of State. *PhRv.*, **68**(4), 043509.
- MENDOZA, S., 2004. *Sergio Mendoza webpage*. <http://cosmos.astroscu.unam.mx/sergio/>, México.
- METCALFE, T. S., 2003. White Dwarf Asteroseismology and the $^{12}\text{C}(\alpha,\gamma)^{16}\text{O}$ Rate. *ApJ*, **587**, L43.
- MOHR, J., MATHIESEN, B. & EVRARD, A., 1999. Properties of the Intracluster Medium in an Ensemble of Nearby Galaxy Clusters. *ApJ*, **517**, 627.
- MONACO, L. ET AL., 2004. Wide-field photometry of the Galactic globular cluster M22. *MNRAS*, **349**, 1278.
- MURDIN, P., ed., 2001. *Encyclopedia of Astronomy and Astrophysics*. Nature Publishing Group, UK.
- NAVABI, A. A. & RIAZI, N., 2003. Is the Age Problem Resolved? *JApA*, **24**, 3.
- NESSERIS, S. & PERIVOLAROPOULOS, L., 2004. A comparison of cosmological models using recent supernova data. *arXiv:astro-ph/0401556 v2*.
- PADMANABHAN, T., 2000. *Theoretical Astrophysics. Vol. I: Astrophysical Processes*. Cambridge University Press, UK.
- PADMANABHAN, T., 2002. *Theoretical Astrophysics. Vol III: Galaxies and Cosmology*. Cambridge University Press, UK.
- PEACOCK, J., 1999. *Cosmological physics*. Cambridge University Press, UK.
- PEEBLES, P. J. E., 1993. *Principles of physical cosmology*. Princeton series in physics. Princeton University Press, USA.
- PEEBLES, P. J. E. & DICKE, R. H., 1968. Origin of the Globular Star Clusters. *ApJ*, **154**, 891.
- PEEBLES, P. J. E. & YU, J. T., 1970. Primeval Adiabatic Perturbation in an Expanding Universe. *ApJ*, **162**, 815.
- PENZIAS, A. A. & WILSON, R. W., 1965. A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s. *ApJ*, **142**, 419–421.
- PERCIVAL, W. ET AL., 2002. Parameter constraints for flat cosmologies from cosmic microwave background and 2dFGRS power spectra. *MNRAS*, **337**, 1068.
- PERLMUTTER, S. ET AL., 1999. Measurements of Ω and Λ from 42 High-Redshift Supernovae. *ApJ*, **517**, 565.

- PIERSIMONI, A. M., BONO, G. & RIPEPI, V., 2002. BVI Time-Series Data of the Galactic Globular Cluster NGC 3201. I. RR Lyrae Stars. *AJ*, **124**, 1528.
- PIOTTO, G. ET AL., 1999. HUBBLE SPACE TELESCOPE Observations of Galactic Globular Cluster Cores. I. NGC 6362 and NGC 6934. *AJ*, **117**, 264.
- PONT, F. ET AL., 1998. HIPPARCOS subdwarfs and globular cluster ages: the distance and age of M 92. *A&A*, **329**, 87.
- PRESS, W. H. & SCHECHTER, P., 1974. Formation of Galaxies and Clusters of Galaxies by Self-Similar Gravitational Condensation. *ApJ*, **187**, 425.
- PRIALNIK, D., 2000. *An Introduction to the Theory of Stellar Structure and Evolution*. Cambridge University Press, UK.
- RATRA, B. & PEEBLES, P. J. E., 1988. Cosmological consequences of a rolling homogeneous scalar field. *PhRvD*, **37**, 3406.
- REID, I. N. & GIZIS, J. E., 1998. The Distance to NGC 6397 by M-Subdwarf Main-Sequence Fitting. *AJ*, **116**, 2929.
- REID, N., 1998. HIPPARCOS subdwarf parallaxes - Metal-rich clusters and the thick disk. *AJ*, **115**, 204.
- RENZINI, A. ET AL., 1996. The White Dwarf Distance to the Globular Cluster NGC 6752 (and its Age) with the Hubble Space Telescope. *ApJ*, **465**, L23.
- RICHER, H. ET AL., 2002. The Lower Main Sequence and Mass Function of the Globular Cluster Messier 4. *ApJ*, **574**, L151.
- RIESS, A. ET AL., 1998. Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant. *AJ*, **116**, 1009.
- RUHL, J. ET AL., 2003. Improved Measurement of the Angular Power Spectrum of Temperature Anisotropy in the Cosmic Microwave Background from Two New Analyses of BOOMERANG Observations. *ApJ*, **599**, 786.
- RUTLEDGE, G. A. ET AL., 1997. Galactic Globular Cluster Metallicity Scale from the Ca II Triplet I. Catalog. *PASP*, **109**, 883.
- SACHS, R. K. & WOLFE, A. M., 1967. Perturbations of a Cosmological Model and Angular Variations of the Microwave Background. *ApJ*, **147**, 73.
- SAINI, T., WELLER, J. & BRIDLE, S., 2004. Revealing the nature of dark energy using Bayesian evidence. *MNRAS*, **348**, 603.

- SALARIS, M. & WEISS, A., 1998. Metal-rich globular clusters in the galactic disk: new age determinations and the relation to halo clusters. *A&A*, **335**, 943.
- SALARIS, M. & WEISS, A., 2002. Homogeneous age dating of 55 Galactic globular clusters. Clues to the Galaxy formation mechanisms. *A&A*, **388**, 492.
- SANDAGE, A., 1993. Globular cluster ages determined from the Oosterhoff period-metallicity effect using oxygen-enhanced isochrones. III. *AJ*, **106**, 719.
- SCHATZ, H. ET AL., 2002. Thorium and Uranium Chronometers Applied to CS 31082-001. *ApJ*, **579**, 626.
- SEVENSTER, M., SAHA, P., VALLS-GABAUD, D. & FUX, R., 1999. New constraints on a triaxial model of the Galaxy. *MNRAS*, **307**, 584.
- SPERGEL, D. ET AL., 2003. First year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: determination of cosmological parameters. *ApJS*, **148**, 175.
- SPINRAD, H. ET AL., 1997. LBDS 53W091: an Old, Red Galaxy at $z=1.552$. *ApJ*, **484**, 581.
- SUNYAEV, R. A. & ZELDOVICH, Y. B., 1972. The Observations of Relic Radiation as a Test of the Nature of X-Ray Radiation from the Clusters of Galaxies. *CoASP*, **4**, 173.
- TEGMARK, M. ET AL., 2004. Cosmological parameters from SDSS and WMAP. *PhRvD*, **69**(10), 103501.
- TERIACA, L., BANERJEE, D. & DOYLE, J. G., 1999. SUMER observations of Doppler shift in the quiet Sun and in an active region. *A&A*, **349**, 636.
- THOMPSON, I. ET AL., 2001. Cluster AgeS Experiment: The Age and Distance of the Globular Cluster ω Centauri Determined from Observations of the Eclipsing Binary OGLEGC 17. *AJ*, **121**, 3089.
- TOLSTOY, E. & SAHA, A., 1996. The interpretation of Color-Magnitude Diagrams through numerical simulation and Bayesian inference. *ApJ*, **462**, 672.
- VALLS-GABAUD, D. ET AL., eds., 1997. *From quantum fluctuations to cosmological structures*, vol. 126. Astronomical Society of the Pacific Conference Series, USA.
- VANDEMBERG ET AL., 2002. Models of Metal-poor Stars with Gravitational Settling and Radiative Accelerations. II. The Age of the Oldest Stars. *ApJ*, **571**, 487.
- VANDEMBERG, D., M., B. & STETSON, P., 1996. The age of the galactic globular cluster system. *ARA&A*, **34**, 461.

- VANDENBERG, D. A., 2000. Models for Old, Metal-Poor Stars with Enhanced α -Element Abundances. II. Their Implications for the Ages of the Galaxy's Globular Clusters and Field Halo Stars. *ApJS*, **129**, 315.
- VERDE, L. ET AL., 2002. The 2dF Galaxy Redshift Survey: the bias of galaxies and the density of the Universe. *MNRAS*, **335**, 432.
- WAGONER, R. V., FOWLER, W. A. & HOYLE, F., 1967. On the Synthesis of Elements at Very High Temperatures. *ApJ*, **148**, 3.
- WANG, L., CALDWELL, R. R., OSTRIKER, J. P. & STEINHARDT, P. J., 2000. Cosmic Concordance and Quintessence. *ApJ*, **530**, 17.
- WANG, X. ET AL., 2003. Last stand before WMAP: Cosmological parameters from lensing, CMB, and galaxy clustering. *PhRv*, **68**(12), 123001.
- ZELDOVICH, Y. B., 1970. Gravitational instability: an approximate theory for large density perturbations. *A&A*, **5**, 84.
- ZEMANSKY, M. & DITTMAN, R., 1990. *Calor y termodinámica*. McGraw-Hill, México.
- ZINN, R. & WEST, M. J., 1984. The globular cluster system of the galaxy. III - Measurements of radial velocity and metallicity for 60 clusters and a compilation of metallicities for 121 clusters. *ApJS*, **55**, 45.
- ZOCCALI, M. ET AL., 2001. The White Dwarf Distance to the Globular Cluster 47 Tucanae and its Age. *ApJ*, **553**, 733.