UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"ALGUNAS RELACIONES ENTRE LAS INVESTIGACIONES DE KURT GÖDEL EN LOGICA MATEMATICA Y FISICA"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

TELLEZ NIETO OSVALDO ALFONSO

DIRECTOR DE TESIS: DR. CARLOS TORRES ALCARAZ

2004

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

VNIVERSIDAD NACIONAL AVFNOMA DE MEXICO

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"Algunas relaciones entre las investigaciones de Kurt Gödel en lógica matemática y física"

realizado por TELLEZ NIETO OSVALDO ALFONSO

con número de cuenta 9758764-8, quien cubrió los créditos de la carrera de: Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Dr. Carlos Torres Alcaraz	
Propietario	M. en C. Ignacio Campos Flores	
Propietario	Mat. Guillermo Eduardo Zambrana Castañeda	
Suplente	Dra. Andrea Luisa Aburto Espina	
Suplente	M. en C. Montserrat García Campos	Montserrat G. Campos

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. Alejandro B[illegible]

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL DE MATEMATICAS

A la memoria del Dr. Jaime Óscar Falcón Vega.

Índice general

Agradecimientos IV

Introducción V

1. Teoría de la relatividad 1
- 1.1. La transformación de Galileo . . . 1
- 1.2. Relatividad especial . . . 5
- 1.3. El espacio de Minkowski . . . 7
- 1.4. El determinismo relativista . . . 11
- 1.5. Contracción del espacio y del tiempo . . . 13
- 1.6. Relatividad general . . . 16

2. El teorema de Gödel 20

3. Universos en rotación 27

4. Física-Matemáticas 34
- 4.1. El problema de los fundamentos de las matemáticas . . . 34
- 4.2. El problema de los fundamentos de la física . . . 38
- 4.3. Limitación de los sistemas formales y de las teorías físicas formales . . . 40
- 4.4. Metateorías . . . 41

5. Matemáticas-Física. 44

Conclusiones 48

Bibliografía 50

Agradecimientos

Este trabajo es el resultado de un proceso de varios meses, el cual fue iniciado con el Dr. Jaime Óscar Falcón Vega cuando cursaba la materia Filosofía de la Ciencia con él, en el último semestre de la licenciatura.

Desde entonces varias personas han tomado parte, de alguna o de otra manera, en este proceso.

En primer lugar quiero agradecer a mis padres, Crispín Téllez y Socorro Nieto, por su apoyo no sólo en la elaboración de esta tesis sino durante todos mis estudios.

Al profesor Carlos Torres Alcaraz quien me permitió dar continuidad a este proyecto. Sin su valiosa dirección no habría sido posible concretar este proceso. Su cuidadosa revisión, los importantes comentarios y las finas observaciones fueron fundamentales y ampliamente tomados en cuenta en la realización de este trabajo.

A los profesores Ignacio Campos, Eduardo Zambrana, Andrea Aburto y Montserrat García por la revisión de versiones preliminares de esta tesis. Sus comentarios permitieron enriquecer el proyecto original.

Al profesor Rafael Rojas, porque gracias a él tuve mi primer acercamiento a la Lógica Matemática; por todas sus enseñanzas dentro y fuera de las aulas.

A los profesores José Alfredo Amor, Arturo Nieva y José Marquina, siempre atentos a este proceso y en la mejor disposición de colaborar.

A Pablo Rosell por su asesoría en el manejo del programa Latex.

A Juan Pablo Romero por la elaboración de los diagramas.

A mis compañeros y amigos, con los cuales compartí la experiencia de estudiar matemáticas; el haber participado con ellos en charlas, discusiones, seminarios, clases, congresos, etcétera, fue una motivación extra en la elaboración de esta tesis: Ana Álvarez, David Meza, Pável Ramírez, Omar Vigueras, Israel Gelover, Andrés Nava, Alexei Díaz, Miguel Angel Mota, Elio Villaseñor, Alberto Hauser y Claudia Palacios.

Introducción

Los trabajos que realizó Kurt Gödel en lógica matemática son bien conocidos: demuestra que cualquier sistema formal que cumpla las condiciones de ser consistente y contener una formalización de la aritmética recursiva, es incompleto, en el sentido que hay enunciados relativamente simples que el sistema no puede decidir (no puede demostrar ni refutar). La prueba se basa en la construcción de un enunciado dentro del sistema formal que cumple esta condición. El enunciado en cuestión tiene la propiedad de ser verdadero siempre y cuando no sea derivable en el sistema. De esta manera establece una limitación al sistema formal y a la sintaxis: la incapacidad para probar *todas* las verdades matemáticas.

Por otra parte, son menos conocidos los trabajos de Gödel referidos a la teoría de la relatividad y su relación con la filosofía idealista. En ellos propone un modelo de universo consistente con las ecuaciones de campo de Einstein, en el que la materia rota relativa al compás de inercia; en este modelo de universo, la relación temporal fundamental *antes-después* pierde toda objetividad.

Así como en el modelo de universo de Einstein se puede viajar en línea recta y regresar a las mismas coordenadas espaciales debido a la curvatura del espacio, en el universo de Gödel se puede viajar a cualquier región del presente, pasado o futuro y regresar a las mismas coordenadas tanto espaciales como temporales. La mera posibilidad de estos universos tiene consecuencias importantes para la filosofía de la ciencia.

La intención de este trabajo es mostrar cuál es la relación que hay entre los trabajos de Gödel en estas disciplinas: la lógica matemática y la filosofía de la física; ¿qué rasgos compartidos tienen ambas investigaciones?; ¿qué consecuencias tienen los trabajos de física y filosofía de la relatividad en matemáticas?; ¿qué consecuencias tienen los trabajos de lógica matemática en física?

Como se verá, con la construcción de los universos en rotación Gödel cuestiona los alcances y las limitaciones de las teorías física como anteriormente, vía su teorema de incompletud, lo hiciera con los sistemas formales en matemáticas; también se verá que la objetividad sensible en la que se basa la física para el desarrollo de sus teorías es aplicable en el caso de las teorías matemáticas y se abordará la postura platónica de Gödel referido al caso de la física.

A continuación se indica de manera somera el contenido de cada capítulo.

Capítulo 1. Teoría de la Relatividad. Para entender el trabajo de Gödel en Teoría de la Relatividad es necesario exponer algunos puntos fundamentales de esta teoría (recuérdese que ésta es una tesis de matemáticas, no de física). Se enuncian algunos problemas que le antecedieron y la solución que la Teoría de la Relatividad ofreció a ellos. En este capítulo se exponen los diagramas de Minkowski, el problema de la invarianza de la velocidad de la luz, y el problema de la simultaneidad respecto a distintos observadores. También se expone lo que hemos llamado *el determinismo relativista.*

Capitulo 2. Teorema de incompletud de Gödel. Se da un esbozo del primer teorema de incompletud de Gödel con diferentes intenciones. En primer lugar nos sirve como base para fijar la postura que habría de asumir Gödel en el terreno de la filosofía de las matemáticas. En segundo lugar, el método que utiliza en la construcción de los universos en rotación tiene semejanza con el desarrollo del primer teorema de incompletud, o al menos, las consecuencias que puede derivarse de los dos trabajos son en cierto sentido similares.

Capítulo 3. Universos en Rotación. Una vez vistas algunas propiedades del universo estándar de Einstein, se abordan los universos en rotación para así trabajar la relación que propone Gödel entre la teoría de la relatividad y lo que él llama *filosofía idealista.*

Capítulo 4. Física-Matemáticas. Se aborda la relación que, según Gödel, debe existir entre la física y las matemáticas. Así como en física son válidos los métodos de observación y experimentación para el desarrollo de las teorías, Gödel no encuentra razón por la cual estos métodos no puedan ser aplicados en el caso de las matemáticas. En este capítulo se exponen opiniones de algunos trabajos que se han desarrollado al respecto. Asimismo, se exploran las consecuencias matemáticas que tienen los trabajos de Gödel en física.

Capítulo 5. Matemáticas-Física. Se examinan las consecuencias que el trabajo de Gödel en lógica matemática tiene en la teoría formal de la física. En este capítulo se explican algunos vínculos que hemos encontrado, cerrando con ello un ciclo entre la física y las matemáticas.

Capítulo 1

Teoría de la relatividad

1.1. La transformación de Galileo

Cuando consideramos el movimiento de un cuerpo, ya que éste es relativo, lo hacemos respecto a algún sistema de referencia; por ejemplo, si dejamos caer una piedra en un autobús que se mueve uniformemente, observamos que la piedra cae verticalmente respecto al autobús. En este caso, el autobús es el sistema de referencia.

Cuando en un sistema no actúan fuerzas ajenas a los cuerpos que en él se encuentran, se dice que se trata de un *sistema de referencia inercial* si, por ejemplo, el mismo autobús lo consideramos en el momento en que se está frenando, el sistema de referencia dejaría de ser inercial porque actúan fuerzas ajenas a los cuerpos que ahí se encuentran.

En general, un sistema de referencia se escoge de tal manera que sea el más apropiado para describir los fenómenos que se pretende estudiar, *e.g*, podemos escoger como sistema de referencia a un autobús, a un vagón de tren o a la tierra misma. En adelante sólo consideraremos sistemas de referencia inerciales, salvo cuando se diga lo contrario.

Supongamos que tenemos dos sistemas de referencia S y S' donde S' se mueve a velocidad constante v respecto a S. Construyamos los sistemas coordenados (x, y, z) para S y (x', y', z') para S' y, sin perder generalidad, consideremos que los ejes x y x' se hallan a lo largo de la dirección del movimiento de S'. Supongamos además que en el instante $t = 0$ los orígenes de ambos ejes coinciden.

Si conocemos las coordenadas espaciales de un objeto (de un cuerpo o de una partícula) en S en un tiempo arbitrario t, para determinar las coordenadas en S', de acuerdo a la fig. 1.1, aplicariamos las siguientes transformaciones las cuales se conocen como *la transformación de Galileo.*

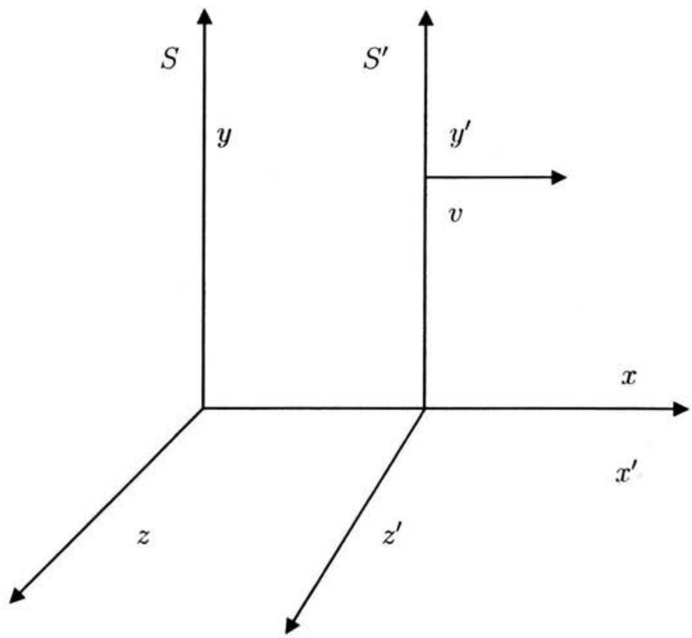

Figura 1.1:

$$x' = x - vt$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

considerando

$$t' = t.$$

Lo cual significa que los tiempos en los dos sistemas coordenados (en los dos sistemas de referencia) son el mismo. Obsérvese que la igualdad del tiempo en los dos sistemas ha sido postulada, puesto que dicha igualdad no es consecuencia directa de ninguna de las transformaciones anteriores.

El principio de relatividad de Galileo postula que las leyes de la física son independientes de cualquier sistema de referencia, por lo que es imposible determinar por medio de experimentos mecánicos si un sistema de referencia está en movimiento o no. Todo lo expresado anteriormente es suficiente para explicar los fenómenos mecánicos a los que se enfrentaban los físicos antes del electromagnetismo.

No obstante, cuando los físicos comenzaron a estudiar los fenómenos eléctricos y magnéticos, la concepción del tiempo y del espacio se tuvo que modificar. Hacia 1819 Hans Christian Oersted descubrió que las corrientes eléctricas producen fuerzas magnéticas que influyen sobre los imanes (como ocurre en el caso de la brújula); posteriormente, André M. Ampère encontró una ley que relaciona la corriente eléctrica con la fuerza electromagnética que la genera. Charles A. Coulomb por su parte estableció la ley de atracción o repulsión de los cuerpos de acuerdo a la carga eléctrica que tuvieran y Michael Faraday descubrió que un imán puede inducir corriente eléctrica y señaló que las interacciones entre las partículas se transmiten a distancia a través de un campo.

A partir de las anteriores consideraciones, James Clerk Maxwell pudo unificar, mediante ecuaciones diferenciales, las leyes aisladas que se habían descubierto para así lograr una comprensión más profunda de la naturaleza de los fenómenos electomagnéticos.

La concepción del universo para la segunda mitad del siglo XIX era la siguiente:[1] el universo se compone de partículas interactuantes entre sí mediante fuerzas que actúan a distancia a través del espacio por medio de campos eléctricos y magnéticos. Las partículas elementales son: la materia ponderable en la cual se distribuyen los diferentes pesos atómicos; las partículas de calor o calórico y las dos especies de partículas eléctricas, las positivas y las negativas.

Las leyes del electromagnetismo estaban completamente determinadas por las ecuaciones de James Clerk Maxwell, las cuales expresaban en términos matemáticos las diferentes relaciones que existían entre las fuerzas electroestáticas, electrodinámicas y electromagnéticas. Sin embargo para entender tales fenómenos era necesario que se postulara la existencia del éter.

En otras palabras, a partir de las ecuaciones matemáticas de Maxwell, se podía deducir la existencia de ondas electromagnéticas consistentes en oscilaciones del campo electromagnético. Estas ondas se identificaron con la

[1] *cf.* [Einstein et al. 1993] pag. 9.

luz misma, estableciendo de esta manera la naturaleza ondulatoria de la luz. Ahora bien, si la luz es una onda ¿en qué medio se mueve? El sonido es una onda y se mueve en el aire; una ola de mar es una onda y se mueve en el agua. Es así como los físicos se vieron en la necesidad de postular la existencia de un medio en el cual se desplaza la luz: el éter.

Los descubrimientos del astrónomo James Bradley de principios del siglo XVIII,[2] interpretados en el marco de la nueva teoría ondulatoria de la luz, parecían indicar que el éter era estacionario. Como la luz debe tener una velocidad bien definida en el éter, esa velocidad debería variar según el movimiento de quien la mide, como en el caso de una balsa en un lago. Si en medio de un lago se producen ondas desde un punto p las cuales salen a una velocidad v y si una balsa se aproxima en línea recta hacia el punto p, a una velocidad v', entonces la velocidad de las ondas que se medirá desde la balsa será $v + v'$, mientras una balsa que se aleje del punto p en línea recta a una velocidad v', la velocidad a la que medirá las ondas será $v - v'$.

Lo mismo debería ocurrir en el caso de la Tierra: dado que su velocidad aproximada es de 30 km por segundo alrededor del Sol, un rayo de luz emitido en el sentido del movimiento de la tierra debería moverse, con respecto a la tierra misma, con una velocidad menor que un rayo de luz emitido en dirección contraria, siendo la diferencia de velocidades entre los dos rayos de 60 Km por segundo, velocidad que en realidad es muy pequeña cuando se compara con la velocidad de la luz. Dice Hendrik A. Lorentz:

> Como señaló por primera vez Maxwell, y como se desprende de un cálculo muy simple, el tiempo requerido por un rayo de luz para desplazarse de un punto A a un punto B y regresar a A tiene que variar cuando ambos puntos experimentan conjuntamente un desplazamiento sin arrastrar consigo al éter. La diferencia es, ciertamente, una magnitud de segundo orden, pero suficientemente grande para ser detectada por medio de un método de interferencias sensible. [3]

[2] El efecto conocido como ***aberración óptica*** fue descubierto por Bradley. Consiste en que se produce un aparente desplazamiento de los rayos de luz que proceden de un objeto luminoso cuando el observador se encuentra en movimiento. El ángulo de inclinación con el que se reciben estos rayos de luz depende de la velocidad del observador. Por ejemplo, en el caso de una estrella el ángulo depende de los movimientos naturales de la tierra (*e.g.* el movimiento de rotación, de traslación y la velocidad del sistema solar en el espacio). El cálculo del ángulo de aberración óptica se puede consultar en [Hacyan 1995] pag. 37.

[3] [Lorentz 1895] pag. 46.

El método al que se refiere Lorentz fue utilizado precisamente por los físicos Albert A. Michelson y Edward W. Morley hacia el año 1881 para medir la variación de velocidad de la luz cuando la Tierra se desplaza hacia el Sol y cuando se desplaza en sentido contrario. El método era lo suficientemente preciso para detectar esa variación.

El resultado del experimento es bien conocido: no se registró ninguna variación en la velocidad de la luz. Si el universo se comporta de acuerdo a las leyes electromagnéticas establecidas por Maxwell, ¿cómo explicar que la luz no registre variación de acuerdo al experimento de Michelson-Morley? Se trataron de dar diferentes explicaciones; por ejemplo: que al desplazarse la tierra arrastra consigo al éter, que los cuerpos se contraen en dirección de su movimiento, etcétera.

Durante los años siguientes el resultado del experimento de Michelson-Morley fue considerado como un detalle sin importancia; algo falla, pero el edificio de la física, tan bien construído se sostiene, salvo por... ¿sus fundamentos?

1.2. Relatividad especial

En el año de 1905 apareció la teoría de la relatividad de Albert Einstein, la cual resolvió el problema del experimento de Michalson y Morley mediante el siguiente postulado: la velocidad de la luz es la misma para cualquier sistema de referencia no importa a qué velocidad se mueva. O si se prefiere, la velocidad de la luz es la misma para cualquier observador. Lo primero que se hace es postular que las ecuaciones de Maxwell son válidas en cualquier sistema de referencia inercial, con lo que se puede prescindir del éter y por ello se puede concluir que la velocidad de la luz es la misma en cualquier sistema. Tal como lo expresa Einstein:

> Si K' es con respecto a K un sistema coordenado animado de un movimiento uniforme y libre de rotación, entonces los sucesos de la naturaleza transcurren con respecto a K' según unas leyes generales que son exactamente las mismas que con respecto a K. [4]

Al considerar los dos sistemas de referencia S y S' donde S' se mueve a velocidad constante v respecto a S, uno de los primeros problemas a los que

[4][Einstein 1905] pag. 73.

nos enfrentamos es el siguiente: la transformación de Galileo no puede ser válida por ser incompatible con las ecuaciones de Maxwell. Entonces ¿qué transformación mantiene invariante la forma de las ecuaciones de Maxwell de un sistema a otro? La respuesta está dada en las transformaciones de Lorentz:

$$x' = \frac{x - vt}{\gamma}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\gamma}$$

con

$$\gamma = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

donde c es la velocidad de la luz. Observemos que si la velocidad de la luz se iguala a una velocidad infinitamente grande (es decir cuando $c \to \infty$) se obtiene la transformación de Galileo.

Además, la transformación de Lorentz cumple con la invarianza de velocidad de la luz de un sistema a otro, como a continuación lo veremos.

Supongamos dos sistemas S y S' donde S' se desplaza a velocidad v respecto a S. Si enviamos una señal luminosa a lo largo del eje x positivo, tenemos que la señal se propaga según la ecuación:

$$x = ct$$

(esto es, con la velocidad c). De acuerdo con la transformación de Lorentz, la relación entre x y t determina una relación entre x' y t'; de hecho al sustituir x por ct en la primera y en la cuarta de las ecuaciones de la transformación de Lorentz se tiene que

$$x' = \frac{t(c - v)}{\gamma}$$

$$t' = \frac{t\left(1 - \frac{v}{c}\right)}{\gamma}$$

de lo cual se obtiene, haciendo la división correspondiente, la ecuación

$$x' = ct'$$

la que determina la propagación de la luz en el sistema S'. De lo anterior se sigue que la velocidad de propagación, relativa al sistema de referencia S' es también c. Lo mismo sucede cuando el rayo de luz se desplaza en cualquier dirección.

La distancia entre eventos (temporal o espacial) no es invariante bajo la transformación de Lorentz. No obstante, existe una medida invariante: *los intervalos*. Consideremos dos eventos P y Q con coordenadas $P = (x_1, y_1, z_1, t_1)$, $Q = (x_2, y_2, z_2, t_2)$ respecto a un sistema de referencia S. Se define el *intervalo* $S(P,Q)$ como sigue:

$$S(P,Q) = c^2(t_1 - t_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2$$

Al considerar un sistema S' (desplazándose a velocidad constante v respecto a S) la transformación de Lorentz mantiene invariante el intervalo $S(P,Q)$, esto es:

$$c^2(t'_1 - t'_2)^2 - (x'_1 - x'_2)^2 - (y'_1 - y'_2)^2 - (z'_1 - z'_2)^2 = S(P,Q)$$

El intervalo entre dos eventos, al igual que la velocidad de la luz, son invariantes bajo la transformación de Lorentz.

Una de las consecuencias que se puede deducir de la teoría de la relatividad es que la noción de tiempo queda determinada por el espacio. Es así como podemos hablar de la representación del espacio-tiempo, la cual se debe a Hermann Minkowski y que explicaremos a continuación.

1.3. El espacio de Minkowski

El espacio-tiempo es un espacio tetradimensional donde se mantiene invariante el *intervalo*. La representación geométrica de éste, el cual nos sirve para visualizar el cambio de ejes coordenados de un sistema S a un sistema S', es conocido como *el espacio de Minkowski*.

Para hacer esta representación consideremos un sistema de referencia S y solamente dos coordenadas, una de las cuales corresponde a la temporal

ct (por convención la vertical)[5] y la otra a la coordenada espacial x. No hay necesidad de considerar las coordenas y y z pues éstas se preservan bajo la transformación de Lorentz.

Un punto del espacio que determina coordenadas (x_0, y_0, z_0, ct_0) en el sistema S le llamaremos *punto del universo* (world point). A la multiplicidad de todos estos puntos le llamaremos *universo* (world).

Al considerar la "historia" de una partícula en esta representación se obtiene una curva continua en el universo (correspondiente a las coordenadas espaciales y temporales de la trayectoria de la partícula), una *línea de universo* (world line). Por ejemplo, una partícula que permanezca en reposo en el sistema S dibujará una línea de universo paralela al eje coordenado ct; una partícula que se mueva a velocidad constante v a lo largo del eje x dibujará una recta con pendiente $\frac{c}{v}$ y una señal luminosa tiene una línea de universo con pendiente 1 (Fig. 1.2). El parámetro temporal se puede considerar desde $-\infty$ hasta $+\infty$, lo cual significa que no tenemos restricciones temporales en la historia de la partícula.

Ahora veamos cómo se representa el cambio de ejes coordenados de un sistema S a un sistema S' el cual se mueve a velocidad constante v respecto a S.

La línea de universo que determina la coordenada espacial x' del sistema S' en el sistema S es la recta $x' = 0$ la cual, de acuerdo a la transformación de Lorentz, es $x - vt = 0$, mientras que la línea de universo que determina la coordenada temporal del sistema S' en el sistema S es $t' = 0$, es decir, $t - \frac{v}{c^2}x = 0$. Las rectas $x - vt = 0$ y $t - \frac{v}{c^2}x = 0$ son los ejes coordenados del sistema S' representados en el sistema S (Fig. 1.3).

Podemos apreciar en la fig. 1.3 que los eventos simultáneos en el sistema S no lo son en el sistema S' pues dos eventos son simultáneos en S si la recta que pasa por ellos es paralela al eje coordenado x (es decir si la coordenada temporal t de los dos eventos es la misma) mientras que dos eventos son simultáneos en S' si la recta que pasa por ellos es paralela al eje coordenado x' de S' (es decir, si la coordenada temporal t' de los dos eventos es la misma). De hecho los únicos eventos que son simultáneos en los dos sistemas son los que ocurren en la misma coordena espacial. Veamos: dos eventos con coordenadas (x_1, y_1, z_1, t_1) y (x_2, y_2, z_2, t_2) son simultáneos en S si $t_1 = t_2$.

[5] Se considera el eje temporal multiplicado por la velocidad de la luz con la finalidad de que la coordenada temporal tenga unidades de distancia. Así, cada segundo equivale a una distancia c.

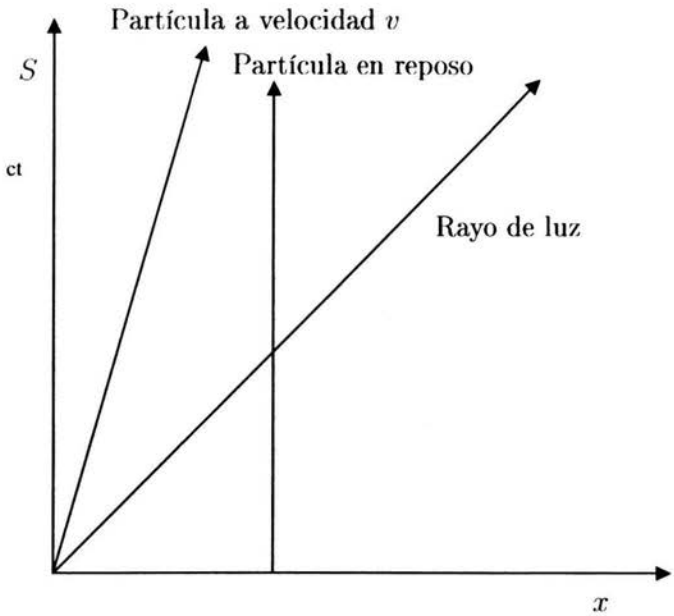

Figura 1.2:

Los tiempos correspondientes en el sistema S' son:

$$t_1' = \frac{t_1 - \frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

y

$$t_2' = \frac{t_2 - \frac{v}{c^2}x_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

y si suponemos que $t_1' = t_2'$ tenemos

$$\frac{t_1 - \frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t_2 - \frac{v}{c^2}x_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

por lo cual,

$$t_1 - \frac{v}{c^2}x_1 = t_2 - \frac{v}{c^2}x_2.$$

Pero lo que sí sabemos es que $t_1 = t_2$ de modo que

$$\frac{v}{c^2}x_1 = \frac{v}{c^2}x_2$$

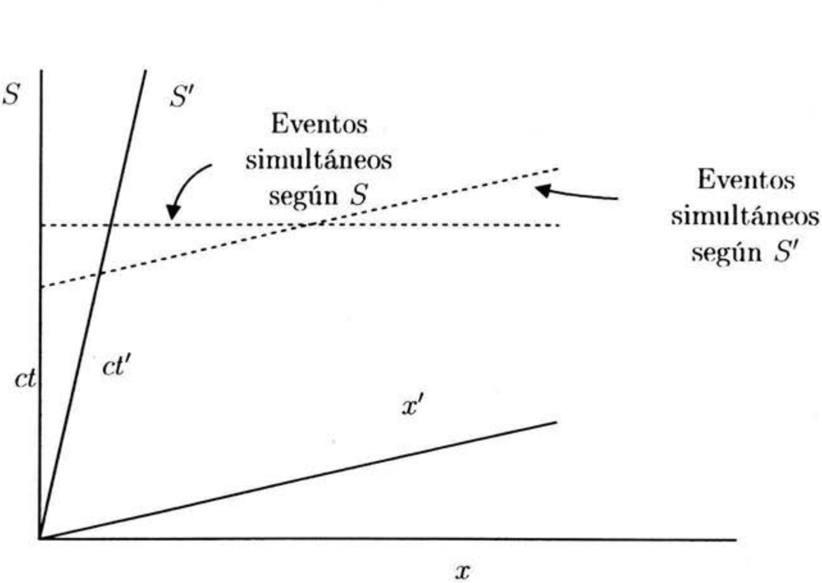

Figura 1.3:

y por lo tanto

$$x_1 = x_2$$

(obviamente hemos supuesto $v \neq 0$).

Por lo tanto podemos concluir que si dos eventos son simultáneos en S y S', entonces dichos eventos ocurren en la misma coordenada espacial. De esta manera, la *simultaneidad* es algo relativo al sistema de referencia, o si se prefiere, al observador.

Una manera alternativa de ver la transformación de Lorentz (para las coordenadas x y t) es la forma matricial:

$$\frac{1}{\gamma}\begin{pmatrix} 1 & \frac{-v}{c} \\ \frac{-v}{c} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix}$$

la cual nos indica que la transformación de Lorentz es un cambio de ejes coordenados en el diagrama de Minkowski: el cambio a los ejes coordenados de S'.[6]

[6] Obsérvese que la transformación de Lorentz es una transformación lineal. ***El grupo de transformaciones de Lorentz*** consiste de todas las transformaciones lineales de (x, y, z, t) tales que para cualesquiera eventos P y Q mantienen invariante a $S(P, Q)$ y a la velocidad de la luz.

1.4. El determinismo relativista

Con base en la representación espacio temporal suministrada por los diagramas de Minkowski podemos hablar del *determinismo relativista.* Dado un evento E, ¿cuáles son los eventos que pueden influir en E y en cuáles otros eventos puede influir E?

En la teoría de la relatividad ningún objeto puede viajar a una velocidad mayor a la de la luz porque necesitaría una cantidad infinita de energía. Consideremos un evento E, y asociémosle un sistema de referencia S de tal manera que para $t = 0$ el evento se halla en el origen. El evento E sólo puede influir en aquellos eventos que ocurren *después*, en este caso, según el sistema S dentro del radio que determina la velocidad de la luz. Es decir, un segundo después dentro de un radio c, dos segundos después dentro de un radio $2c$ y en general, t segundos después dentro de un radio tc.

De igual manera, los eventos que pueden influir en el evento E sólo pueden ser los que se encuentran en el radio que determina la velocidad de la luz.

De esta manera se define el cono de luz del evento E como el conjunto de puntos

$$\left\{(x,y,z,t) : c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0\right\}.$$

Lo anterior se puede representar en un diagrama de Minkowski (Fig. 1.4). El cono de la ecuación anterior consiste de dos partes, cuando $t > 0$ y cuando $t < 0$ (que son los puntos a los que se podría llegar desde E viajando a la velocidad de la luz y los que podrían llegar a E a la misma velocidad, respectivamente). Los eventos que se encuentran en la región acotada por la frontera del cono se dice que son eventos *conectados causalmente* con E.

Observemos por ejemplo la parte superior del cono (la región acotada por el cono cuando $t > 0$). El evento E puedeinfluir en todos los puntos que se encuentran en esa región y sólo en ellos, ya que para llegar a éstos desde E se necesita una velocidad menor a la de la luz.

A la parte superior del cono la se le llama *el futuro causal* de E y a la parte inferior *el pasado causal* de E.

Dado que la velocidad de la luz es la misma para cualquier sistema de referencia, el cono de luz es independiente del sistema considerado. Por lo

El estudio de este grupo tiene importantes consecuencias sin embargo, no son esenciales para el desarrollo de este trabajo.

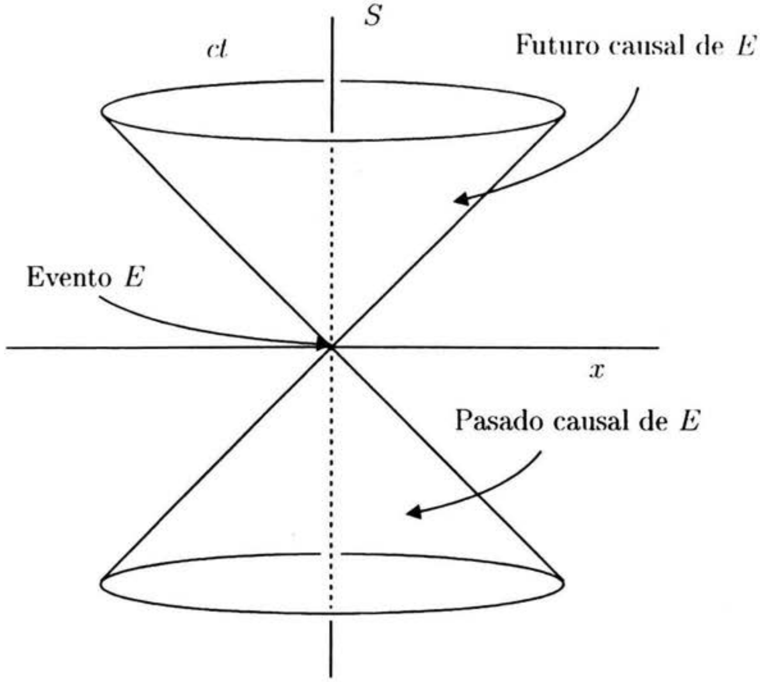

Figura 1.4:

tanto, el pasado y futuro causal de E también son independientes del sistema de referencia.

De lo anterior se sigue que hay eventos en los que la relación temporal es absoluta, por ejemplo, si el evento A está en el futuro causal de B podemos decir que B ocurre *antes* que A, independientemente de qué sistema de referencia se elija.

Es así que para algunos eventos la relación temporal es absoluta: para los eventos que están causalmente conectados. Si dados dos eventos A y B existen dos sistemas de referencia S y S' de tal manera que en el sistema S el evento A ocurre antes que el evento B y en el sistema S' el evento B ocurre antes que el evento$A$ entonces los eventos A y B no pueden estar causalmente conectados.

Obsérvese que si los eventos A y B están causalmente conectados, no necesariamente todos los sistemas miden la misma diferencia entre los tiempos en que ellos ocurren, lo único que se puede asegurar es que la relación establecida entre estos eventos (antes-después) debe ser la misma para todos los sistemas.

Los eventos que se encuentran sobre el cono de luz de un evento E, es decir, en la frontera del cono, no están causalmente conectados con E, pues para llegar a éstos desde E, se requeriría viajar a la velocidad de la luz. Y dado que el propio evento E está en la frontera del cono entonces el evento E no está conectado causalmente con él mismo, es decir, el evento E no puede influir en sí mismo.

1.5. Contracción del espacio y del tiempo

A partir de la transformación de Lorentz se puede deducir la contracción de los cuerpos rígidos cuando se encuentran en movimiento, también conocida como la *contracción de Lorentz.*

Supongamos que una varilla rígida se mueve a una velocidad uniforme v respecto a un sistema S; sin perder generalidad supongamos que el movimiento de la varilla es a lo largo del eje x. En tal caso la varilla define un sistema coordenado S' en el cual ella se encuentra en reposo. El movimiento de S' es también a lo largo del eje x.

La longitud de la varilla en el sistema S' es la diferencia entre los extremos de ésta mediante las coordenadas del sistema S', digamos $L' = x'_2 - x'_1$.

De acuerdo con la transformación de Lorentz:

$$x'_1 = \frac{x_1 - vt_1}{\gamma}$$

$$x'_2 = \frac{x_2 - vt_2}{\gamma}$$

de lo cual tenemos que las coordenadas correspondientes en el sistema S son:

$$x_1 = x'_1\gamma + vt_1$$

$$x_2 = x'_2\gamma + vt_2$$

Para tomar la longitud de la varilla en el sistema S se debe tomar la diferencia entre estas últimas coordenadas *simultáneamente* en S; esto es: $t = t_1 = t_2$. Por lo tanto, la longitud de la varilla en el sistema S es:

$$L = x_2 - x_1 = (x'_2\gamma + vt) - (x'_1\gamma + vt) = (x'_2 - x'_1)\gamma = L'\gamma.$$

Y dado que $\gamma = \left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right) < 1$ se concluye que:

$$L < L'.$$

Por lo tanto, si la varilla rígida se mide desde un sistema para el cual se encuentre en movimiento, su longitud es menor que cuando se mide desde un sistema para el cual la varilla se encuentre en reposo.

Ahora supongamos que tenemos dos eventos E_1 y E_2 los cuales ocurren en las mismas coordenadas espaciales respecto a S, pero en distintas coordenadas temporales. Sin perder generalidad podemos suponer que las coordenadas espaciales de E_1 y E_2 en S son $x_1 = x_2 = 0$ y las coordenadas temporales $t_1 = 0$ y t_2 respectivamente, con $t_2 \neq 0$.

El lapso (es decir, el tiempo transcurrido entre un evento y otro) medido en el sistema S es la diferencia de los tiempos:

$$T = t_2 - t_1 = t_2 - 0 = t_2.$$

Las coordenadas temporales en S determinan coordenadas temporales en S' de acuerdo a la trasformación de Lorentz:

$$t_1' = \frac{t_1 - \frac{v}{c^2}x}{\gamma} = \frac{0 - 0\left(\frac{v}{c^2}\right)}{\gamma} = 0$$

y

$$t_2' = \frac{t_2 - \frac{v}{c^2}x}{\gamma} = \frac{t_2 - 0\left(\frac{v}{c^2}\right)}{\gamma} = \frac{t_2}{\gamma}.$$

El lapso medido en el sistema S' es la diferencia entre estos tiempos:

$$T' = t_2' - t_1' = \frac{t_2}{\gamma} - 0 = \frac{t_2}{\gamma}$$

de lo cual se sigue:

$$T = T'\gamma$$

nuevamente, como $\gamma = \left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right) < 1$ se tiene:

$$T < T'.$$

La desigualdad anterior nos indica que el lapso es distinto si se mide desde un sistema en movimiento o desde un sistema en reposo, a saber, es más corto si se mide desde el sistema en reposo que si se miden en el sistema que se encuentra en movimiento. O bien, el tiempo transcurrido entre los eventos es menor para el sistema en el cual los eventos ocurren en el *mismo lugar*, que en el sistema S'. Para el sistema S' los eventos no ocurren en las mismas coordenadas espaciales, debido a la transformación de Lorentz:

$$x_1' = 0$$

pero,

$$x_2' = \frac{-vt_2}{\gamma}$$

mientras en el sistema S, $x_1 = x_2 = 0$. Las contracciones anteriores pueden ser representadas en un diagrama de Minkowski (Fig. 1.5).

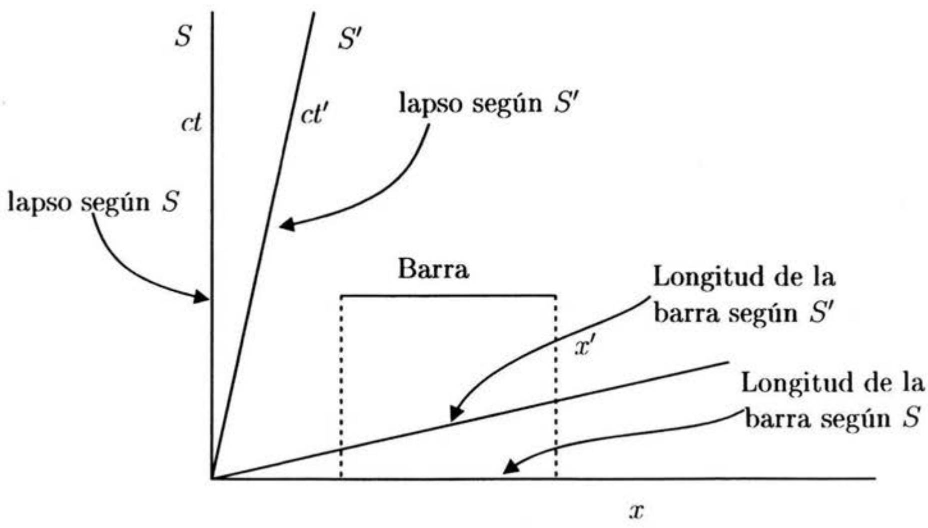

Figura 1.5:

1.6. Relatividad general

Existen regiones del espacio en las cuales las partículas de materia se mueven libremente sin aceleración y las leyes de la teoría especial se cumplen con notable exactitud. A estas regiones del espacio se les conoce como "regiones galileanas". Todas las consideraciones hechas hasta el momento se basan en el supuesto de que los sistemas de referencia son inerciales, es decir, dotados de movimientos a velocidades constantes.

El principio de equivalencia, el cual establece que un sistema en aceleración es equivalente a un sistema bajo la acción de un campo gravitacional, exige que al considerar regiones galileanas podamos hacer uso también de sistemas de referencia no inerciales, es decir, de sistemas coordenados los cuales, respecto a los sistemas de referencia inerciales, están dotados de aceleración y movimiento rotatorio.

Las leyes que rigen la geometría de los cuerpos rígidos en este tipo de sistemas no necesariamente son las leyes de la geometría euclidiana, como lo podremos apreciar con el siguiente ejemplo en el que consideraremos un sistema rotatorio.

Sea S' un sistema de coordenadas (no inercial) tal que el eje z' coincida con el eje z de un sistema de referencia inercial S. Supongamos que S' gira sobre el eje $z = z'$ a una velocidad angular constante.

La geometría de los cuerpos rígidos en reposo respecto al sistema S' aún no sabemos de qué tipo es, pero la podemos estudiar desde el sistema S.

Supongamos una circunferencia en el plano $x'y'$ con centro en el origen de S'. Imaginemos que tenemos una cantidad suficiente de varillas rígidas iguales entre sí, las cuales las colocamos a lo largo de la circunferencia en reposo respecto a S'. Sea U' el número de varillas que se necesitan para cubrir la totalidad de la circunferencia, y D' la cantidad de varillas que se necesitan para cubrir el diametro de la circunferencia.

Si la velocidad angular fuera 0 (*i.e* que el sistema S' no girara respecto a S) entonces se tendría que cumplir:

$$\frac{U'}{D'} = \pi$$

Pero en el caso que la velocidad fuera distinta de 0 (lo cual significa que S' gira respecto a S) se obtiene un resultado distinto. Supongamos que en el instante t de S la cantidad de varillas a lo largo de la circunferencia es U. Como todas las varillas de la circunferencia experimentan la contracción de

Lorentz mientras que las varillas en el diámetro no, se tiene:

$$U > U'$$
$$D = D'$$

y en consecuencia:

$$\frac{U}{D} > \pi$$

Por lo tanto, las leyes geométricas de los cuerpos rígidos en el sistema S' no son leyes euclidianas.

El caso considerado es análogo al que se presenta en el estudio bidimensional de superficies curvas. No se puede introducir coordenadas sobre una superficie curva (por ejemplo un elipsoide) cuyo significado métrico sea sencillo, como se hace en el caso del plano en el cual las coordenadas cartesianas tienen significado físico: la distancia entre dos puntos del plano cartesiano significa longitudes medidas con varillas métricas rígidas unitarias.

La geometría plana puede fundamentarse en el concepto de distancia $d(P_1, P_2)$ entre dos puntos infinitamente cercanos. El concepto $d(P_1, P_2)$, cuya interpretación física es la medida con varillas rígidas, se pude expresar en coordenadas cartesianas mediante la fórmula $d(P_1, P_2)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$ donde (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son las coordenadas de los puntos P_1 y P_2 respectivamente. Sobre esta medida se basan los conceptos de la geometía euclideana.

Carl Friedrich Gauss, en la teoría de superficies, introdujo coordenadas curvilineas que sastifacen las condiciones de continuidad y son arbitrarias por completo, aun cuando se hallen relacionadas con la superficie para la cual se usen.

Dada una superficie continuamente curvada, se pude desarrollar otra geometría si observamos que una porción infinitamente pequeña de la superficie se puede considerar como plana con errores infinitesimales. En esa porción existen coordenadas cartesianas (X_1, Y_1) y (X_2, Y_2) para un par de puntos P_1 y P_2. La distancia dada por estas coordenadas es:

$$d(P_1, P_2)^2 = (X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2$$

(en la región infinitamente pequeña).

Supongamos un sistema de coordenadas curvilíneas arbitrarias (x_1, y_1) (x_2, y_2) sobre la superficie, tal que los valores $(X_2 - X_1)$ y $(Y_2 - Y_1)$ se expresen linealmente en función de $(x_2 - x_1)$ y $(y_2 - y_1)$. Para cualquier región de la superficie:

$$d(P_1, P_2)^2 = g_{xx}(x_2 - x_1)^2 + 2g_{xy}(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) + g_{yy}(y_2 - y_1)^2$$

donde g_{xx}, g_{xy} y g_{yy} están determinados por la naturaleza de la superficie en cuestión.

De lo anterior se deduce que la geometría de las superficies se puede basar en la expresión $d(P_1, P_2)^2$ y el conocimiento de g_{xx}, g_{xy} y g_{yy} de la misma manera que la geometría euclidiana se basa en la expresión correspondiente (donde $g_{xx} = 1$, $g_{xy} = 0$ y $g_{yy} = 1$).

De manera análoga, en la teoría general de la relatividad se consideran regiones infinitamente pequeñas del continuo espacio-tiempo (porque éstas son galileanas y se cumplen las leyes de la teoría especial de la relatividad); en ellas, las coordenadas locales correspondientes (X, Y, Z, T) se toman de tal manera que eventos próximos entre sí se hallen asociados con valores próximos (las tres primeras corresponden a las coordenas espaciales y la cuarta a la temporal).

La medida directamente mensurable para un par de eventos E_1, E_2 con coordenadas (X_1, Y_1, Z_1, T_1) y (X_2, Y_2, Z_2, T_2) es precisamente el *intervalo* (*cf.* pag. 7), el cual es invariante bajo la transformación de Lorentz:

$$S(P, Q) = c^2(T_1 - T_2)^2 - (X_1 - X_2)^2 - (Y_1 - Y_2)^2 - (Z_1 - Z_2)^2.$$

Sin embargo, las regiones finitas del continuo tetradimensional espacio-tiempo no son, en general, galileanas; por lo que no se puede elegir un sistema coordenado para el cual las leyes de la teoría especial de la relatividad sean válidas. Pero el invariante $S(P, Q)$ nos sirve para fundamentar las leyes geométricas de la teoría especial de la relatividad (de igual modo que la geometría euclidiana se fundamenta en la distancia $d(P_1, P_2)$). Este invariante se pude expresar mediante coordenadas arbitrarias cualesquiera (x, y, z, t). Si las coordenadas arbitrarias de los eventos E_1 y E_2 son (x_1, y_1, z_1, t_1) y (x_2, y_2, z_2, t_2) respectivamente, los valores locales $(T_1 - T_2)^2$, $(X_1 - X_2)^2$, $(Y_1 - Y_2)^2$ y $(Z_1 - Z_2)^2$ se expresan linealmente en función de $(t_1 - t_2)^2$, $(x_1 - x_2)^2$, $(y_1 - y_2)^2$ y $(z_1 - z_2)^2$ mediante

$$S(P, Q) = \sum g_{\mu\nu}(\mu_2 - \mu_1)(\nu_2 - \nu_1)$$

con μ y ν variando sobre las coordenadas (x, y, z, t).

Los valores $g_{\mu\nu}$ describen las propiedades métricas del continuo espacio-tiempo y las del campo gravitatorio, con respecto al sistema coordenado inercial.

La teoría general de la relatividad supone una generalización de la teoría de los invariantes y de la teoría de tensores. El cálculo generalizado de tensores fue desarrollado antes que la teoría de la relatividad. Alrededor de 1860, Bernhard Riemann prosiguió con el desarrollo de la teoría de continuos, iniciada por Gauss, y la extendió para cualquier número de dimensiones. A finales del siglo XIX se desarrolló la teoría en forma de cálculo tensorial.

El desarrollo de los universos en rotación se hace dentro de la teoría general de la relatividad.

Veámos ahora cuál es el interés de Gödel en los universos en rotación. En primer lugar a Gödel le preocupa si ciertas propiedades del universo son absulutas o si existe la posibilidad de universos en los cuales éstas no se cumplan. Por ejemplo, aun cuando las relaciones temporales dependen del observador (del sistema de referencia), existe una estructura determinada por los conos de luz en la que se pueden establecer relaciones temporales absolutas. Un segundo punto es el determinismo causal (*i.e* cuáles son las *causas* que pueden influir en cierto evento) en esta estructura porque, entre otras cosas, los eventos sólo pueden influir en los que se encuentren en un radio *cercano* (el determinado por el cono de luz) y el hecho de que no hay eventos que pueden influir en sí mismos.

En el capítulo 3 estudiaremos las propiedades generales de los universos en rotación de Gödel, los cuales cumplen con las ecuaciones de campo de Einstein, (*i.e.* es un modelo de universo) sin que en ellos se pueda establecer una relación temporal absoluta. Más aún, en el universo propuesto por Gödel existen líneas de universo cerradas, lo cual significa que hay eventos que sí pueden tener influencia en ellos mismos.

Como veremos, en esto Gödel actúa de la misma forma como lo hiciera en relación a las teorías axiomáticas: se pregunta por sus alcances y propiedades de carácter general y busca, con cierta dosis de ingenio, la forma de derribar o poner en crisis las creencias más comunes.

Capítulo 2

El teorema de Gödel

No es nuestra intención exponer en detalle los teoremas de incompletud de Gödel. En vez de ello haremos una breve mención de los mismos. En el caso del primer teorema de incompletud daremos las líneas generales que siguió Gödel para la demostración de éste, procurando no alejarnos demasiado del escrito original de 1931. Antes que detenernos en los detalles de la prueba, veremos algunas consecuencias de dicho teorema.

El procedimiento que siguió Gödel para la demostración del primer teorema de incompletud puede ser aplicado a cualquier sistema formal que incluya a la aritmética de los números naturales donde se cumpla que el número de axiomas sea finito o bien, constituyan un conjunto recursivo.[1]

Consideremos un sistema formal S en el que se encuentra la aritmética de Peano, tomando a los números como individuos, a la relación de sucesor y las operaciones de suma y producto como conceptos primitivos indefinidos.

El primer teorema de incompletud lo podemos enunciar de la siguiente manera:

> Si el sistema S es consistente, entonces es posible encontrar enunciados aritméticos relativamente simples, tales que ni ellos ni sus negaciones son derivables en el sistema S.

A continuación veremos las líneas generales de la prueba ofrecida por Gödel, sin pretensiones de exactitud.

[1] Esto significa que cada número natural tiene asociado un axioma, de tal manera que dado $n \in \mathbb{N}$ se puede saber cuál es el axioma correspondiente a n mediante una regla constructiva. Al respecto, consúltese [Mendelson 1997 (1964)] pag. 197.

La primera tarea es asignar a cada símbolo, fórmula y sucesiones finitas de fórmulas (incluyendo las deducciones de teoremas) números naturales mediante una función g de tal manera que sea inyectiva e invertible, es decir, que a objetos distintos les asigne números distintos y que dado un número natural se pueda saber a qué corresponde éste (si a un símbolo, una fórmula o una sucesión finita de fórmulas) o si no corresponde a ninguna de las anteriores.

Una manera de hacer lo anterior, tomando como sistema formal la aritmética de Peano, es la siguiente: [2]

0	$=$	s	$+$	$\cdot$	$\neg$	$\vee$	$\forall$	$\exists$	$($	$)$	x	y	x_1	y_1	$\ldots$
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	29	31	$\ldots$

De esta manera a cada fórmula (sucesión finita de símbolos) le corresponde una sucesión finita de números naturales (la de cada símbolo de la fórmula) y con ello le podemos hacer corresponder un único número natural de la siguiente manera. Si E es una sucesion finita de símbolos $E = s_1 s_2 ... s_k$ entonces a E le asignamos el numero: $g(E) = 2^{g(s_1)} \times 3^{g(s_2)} \times ... \times (p_k)^{g(s_k)}$ donde p_k es el *k-ésimo* número primo en orden ascendente y $g(s_i)$ es el número que le corresponde al símbolo s_i dado en la tabla anterior.

Por ejemplo, a la fórmula $\exists x\,(x = s0)$ le corresponden la sucesión y el número indicados:

---

[2] En el sistema formal considerado las nociones indefinidas son: la constante 0, la operación unoaria s y las operaciones binarias $+$ y $\times$. Los axiomas de la aritmética de Peano son los siguientes:

(P1) Si $s(n) = s(m)$ entonces $n = m$

(P2) $s(n) \neq 0$

(P3) $n + 0 = n$

(P4) $n + s(n) = s(n + m)$

(P5) $n \times 0 = 0$

(P6) $n \times s(m) = (n \times m) + n$

(P7) Si $n \neq 0$ entonces $n = s(m)$ para algún m

(P8) (Esquema de inducción). Sea **A** una propiedad aritmética (*i.e.* una propiedad expresable en términos de $+$, $\times$, s y 0). Si 0 tiene la propiedad **A** y si cada vez que n tiene la propiedad entonces $n + 1$ tiene la propiedad, entonces todo número natural tiene la propiedad **A**.

Los símbolos que se necesitan para expresar los axiomas anteriores, además de los conceptos indefinidos, son: el símbolo de igualdad, símbolos lógicos ($\neg$, $\vee$, $\forall$, $\exists$), paréntesis y variables. [Hrbacek 1999] Pag. 54.

$$\begin{array}{cccccccc} \exists & x & (& x & = & s & 0 &) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 17 & 23 & 19 & 23 & 3 & 5 & 3 & 21 \end{array}$$

$$g\,(E) = 2^{17} \times 3^{23} \times 5^{19} \times 7^{23} \times 11^{3} \times 13^{5} \times 17^{3} \times 19^{21}$$

Dada una sucesión finita de fórmulas $F = E_1, E_2 ... E_m$, el número de Gödel de F lo determinamos de manera análoga:
$g\,(F) = 2^{g(E_1)} \times 3^{g(E_2)} \times ... \times (p_m)^{g(E_m)}$.

Con esto tenemos la asignación buscada. Es inyectiva (a objetos distintos le asigna números distinto debido a que la descomposición en números primos es única) y dado un número natural podemos saber a qué tipo de objeto corresponde.

Como Gödel señala, para las consideraciones metamatemáticas resulta indiferente qué objetos se utilicen como símbolos primitivos, ya que con la numeración de Gödel las propiedades metamatemáticas relativas a la derivabilidad se convierten en propiedades de números naturales o de sucesiones de ellos. Por ejemplo, si $F = E_1, \ldots, E_n$ es una sucesión de fórmulas y E es una fórmula, la numeración de Gödel induce una relación aritmética $PR(x, y)$ entre los números $g(F)$ y $g(E)$ como sigue: $PR(g(F), g(E))$ si y sólo si F es una prueba de E en S.

El paso siguiente es hacer que estas propiedades metamatemáticas puedan ser representadas indirectamente en la aritmética.

Gödel prueba que la relación "x es el número de Gödel de una secuencia de prueba y y es el número de Gödel de la fórmula que se prueba con x" es recursiva y por tanto, representable en la aritmética.

Se denota con $Teo\ x$ la expresión que dice "x es el número que le corresponde a una fórmula deducible en el sistema"

Consideremos las fórmulas con una variable libre y supongamos que están ordenadas de alguna manera en una sucesión (por ejemplo, de acuerdo a sus números de Gödel). Designemos a la n-ésima de ellas mediante $R_n(x)$.

Dada una fórmula α con exactamente una variable libre, con $[\alpha; n]$ expresamos a la fórmula que resulta de sustituir la variable libre por el signo que denota al número natural n.

Se define la siguiente clase K de números naturales:

$$n \in K \leftrightarrow \neg Teo\,[R_n(x); n] \tag{2.1}$$

Veamos qué tipo de clase es K. Para que un número natural pertenezca a K se debe cumplir la parte derecha, es decir, se debe cumplir $\neg Teo\,[R_n(x); n]$ lo cual significa: "la fórmula que resulta de sustituir la variable libre por el signo que denota al número natural n, en la n-ésima fórmula de la lista dada, no es una fórmula deducible en el sistema S", esto es, $n \in K$ si y sólo si $R_n(n)$ no es una fórmula deducible en el sistema S.

Ahora bien, como la clase K es un concepto definido a partir de conceptos definibles en la aritmética, entonces también debe ser un concepto definible, lo cual significa que hay una fórmula σ con exactamente una variable libre tal que la fórmula $[\sigma; n]$ significa que n pertenece a la clase K. Tal fórmula debe corresponder a una de las que ya teníamos enumeradas, es decir $\sigma = R_q(x)$ para algún q natural. Con lo que se tiene que un número natural m pertenece a la clase K si y sólo si $[R_q(x), m]$ es deducible en el sistema. Lo anterior nos indica que $R_q(x)$ es la fórmula que describe a la clase K.

Con lo anterior se construye un enunciado indecidible en el sistema S: si S es consistente, entonces el enunciado $[R_q(x); q]$ es indecidible en él, por lo siguiente: si tal enunciado fuera deducible, entonces se cumpliría que $q \in K$ y por (2.1) se cumpliría $\neg Teo[R_q(x); q]$, lo que significa que el enunciado $[R_q(x); q]$ no es deducible en S, es decir, una contradicción.

Si por el contrario la negación de $[R_q(x); q]$ fuera deducible, entonces ocurriría que $q \notin K$, por lo que valdría $Teo\,[R_q(x); q]$, es decir, $[R_q(x); q]$ sería deducible, contradiciendo la consistencia del sistema.

De hecho, el enunciado $[R_q(x); q]$, a través del código de Gödel, afirma su propia indemostrabilidad, lo que lo convierte en un enunciado indecidible (pero verdadero) dentro del sistema S.

En efecto el enunciado $[R_q(x); q]$ afirma su propia indemostrabilidad en S ya que, desde una lectura metamatemática, dice de sí mismo que no es demostrable, de lo cual se sigue que él mismo es un enunciado verdadero.

Un atento examen nos hará ver que para la construcción del enunciado $[R_q(x); q]$ Gödel se sirve del método diagonal de Cantor, así como la analogía que guarda con la paradoja de Richard. [3]

[3]Una versión de la paradoja de Richard es la siguiente: las propiedades de los números enteros son expresables en el idioma español. Por ejemplo, el enunciado *"x no es divisible más que por él mismo y por la unidad"* define la propiedad de ser un número primo. Consideremos todos los enunciados referentes a propiedades de los números enteros en el idioma español. Dichos enunciados se pueden ordenar de acuerdo a su longitud (número de letras) y a los que tengan la misma longitud los ordenamos alfabéticamente. Sea $D_1(x), D_2(x), \ldots$ dicha ordenación. Decimos que un número k es ***richardiano*** si $D_k(k)$ es

El método de prueba utilizado por Gödel, además de obedecer a reglas constructivas, es aplicable a cualquier sistema formal en el que sean expresables los conceptos presentes en la argumentación dada (en particular el concepto de fórmula deducible) y en el que cada fórmula derivable sea verdadera en la interpretación natural. Gran parte del trabajo de Gödel consiste en demostrar la representabilidad de $Teo\ x$ en la aritmética recursiva.[4]

Es así que el primer teorema de incompletud de Gödel establece la incapacidad de cualquier sistema formal, que cumpla con las dos observaciones anteriores, para probar (para deducir con las reglas del sistema) la totalidad de los enunciados matemáticos verdaderos.

Gödel establece una diferencia entre los enunciados *demostrables* y los enunciados *verdaderos*. Si bien es cierto que los enunciados demostrables son verdaderos (por la correctud del sistema) no necesariamente *todos* los enunciados verdaderos son demostrables dentro del sistema. Con ello, echa por tierra la posibilidad de un sistema axiomático para la aritmética en el que se dé la equivalencia *verdadero* (en el sentido natural) $\Leftrightarrow$ *demostrable*. De este modo, la incompletud de cualquier sistema no contradictorio se hace evidente.

Denominemos aritméticas aquellas propiedades referidas a los números enteros para las que se cuenta con un procedimiento general que permite verificarlas en cada caso particular.

Dentro de este tipo de propiedades habrá algunas que no se puedan probar si se cumplen para la totalidad de los enteros y tampoco se pueda exhibir un contraejemplo, es decir, un entero que no la cumpla.[5]

---

falso (lo cual significa que el número k ***no*** tiene la k-ésima propiedad de la lista), y es ***no richardiano*** si $D_k(k)$ es verdadero (lo que significa que el número k ***sí*** tiene la k-ésima propiedad de la lista). Como la definición de ***número richardiano*** se ha hecho en el idioma español, debe corresponderle un lugar en la lista. Supongámos que le corresponde el m-ésimo lugar. ¿El número m es richardiano? Si m es richardiano entonces significa que que $D_m(m)$ es falso, o sea que m ***no*** tiene la m-ésima propiedad, pero la m-ésima propiedad es la de ***ser richardiano***, es decir m es ***no richardiano***. Por otro lado, si m es ***no richardiano***, significa que $D_m(m)$ es verdadero, o sea que m ***sí*** tiene la m-ésima propiedad de la lista, la propiedad de ser richardiano. De esta manera llegamos a la conclusión que el número m es richardiano si y sólo si m es no richardiano.

[4] Para ampliar detalles de este hecho y de la prueba en general, se puede consultar [Gödel 1931].

[5] Es probable que un ejemplo de este tipo de propiedades lo encontremos en la conjetura de Golbach, la cual establece: "todo número natural mayor que 2 y par puede ser representado como la suma de dos números primos". Para todos los casos particulares considerados a la fecha se ha verificado, no obstante aún no se cuenta con una prueba general de que

Dada una propiedad $P(x)$ que cumpla con las anteriores consideraciones, ésta establece la siguiente proposición indecidible: "para todo entero x se cumple $P(x)$", la cual es una proposición que revela la incompletud del sistema con propiedades meramente aritméticas.

La preocupación de Gödel en torno a este tipo de cuestiones no quedó en esto; se ocupó por ejemplo, del problema del continuo de Cantor,[6] el cual podemos resumir en la siguiente pregunta: ¿cuántos puntos hay en una línea recta en el espacio euclidiano? Una formulación equivalente es: ¿cuántos subconjuntos de enteros distintos existen? Este problema es un problema que no se puede resolver desde la axiomática de la Teoría de Conjuntos, esto es, el enunciado que dice cuántos puntos hay en una recta en el espacio euclidiano es un enunciado indecidible para esta axiomática.

En los capítulos 4 y 5 veremos algunas relaciones entre los teoremas de incompletud y los universos en rotación.

Antes de pasar al estudio de los universos en rotación mencionemos el segundo teorema de incompletud de Gödel, tomando nuevamente un sistema formal S con las características conocidas. Este teorema dice lo siguiente:

> La fórmula que enuncia la consistencia del sistema S no es derivable en S, esto es, el sistema S no puede formalizar ninguna prueba de su propia consistencia.

La idea de la prueba del segundo teorema de incompletud es la siguiente: sea α la fórmula que enuncia la consistencia del sistema S. Se prueba que la fórmula $\alpha \rightarrow G$ es deducible en S (donde G es el enunciado construido por Gödel, $[R_q(x); q]$), por lo tanto, si el enunciado α fuera deducible en S, entonces el enunciado G sería deducible, contradiciendo el primer teorema de incompletud.

Los teoremas de Gödel nos enfrentan a los siguientes problemas: en primer lugar un sistema formal, si es consistente, no es capaz de describir objetivamente la totalidad de las verdades matemáticas (por objetivamente nos referimos a través de la manipulación de los objetos del sistema, es decir, por la manipulación de los símbolos del sistema, en este caso por medio de deducciones). En otras palabras, el sistema formal no puede ser a la vez consistente y completo (que todos los enunciados verdaderos sean demostrables).

---

esto sucede para ***todos*** los números pares ni se cuenta con algún contraejemplo.

[6] *cf.* [Gödel 1964].

En segundo lugar, el sistema no es capaz de formalizar su propia consistencia, lo cual representa una segunda limitación al él.

Los anteriores son problemas relativos a los fundamentos de las matemáticas, *i.e problemas fundacionales* similares a los que, como veremos con los universos en rotación, también se encuentran dentro de la física.

Capítulo 3

Universos en rotación

En el año de 1949 Kurt Gödel presentó una solución de las ecuaciones de campo de Einstein: los universos en rotación. Se trata de un modelo de universo con el que intenta mostrar que la existencia de un "intervalo objetivo de tiempo" no es una consecuencia de las ecuaciones de campo de Einstein. La originalidad del trabajo de Gödel consiste en que hasta entonces en todas las soluciones de las ecuaciones de campo que se habían presentado (*i.e.* en todos los modelos de universo) era posible definir en ellos un "tiempo absoluto", aun cuando los tiempos locales fueran distintos. En palabras de Gödel:

> Todas las soluciones cosmológicas con densidad no-nula de materia conocidas hasta el presente poseen la propiedad común de que, en cierto sentido, contienen una coordenada temporal "absoluta", debido al hecho de que existe un sistema uniparamétrico de tres-espacios ortogonales a las líneas de universo de la materia en cada uno de sus puntos. [1]

La observación anterior significa que dada la línea de universo de un observador A, el cual tiene velocidad constante en un sistema de referencia S, para cada punto P sobre la línea, existe un espacio de tres dimensiones Π_P ortogonal a ella, de tal manera que para cada dos puntos distintos sobre una misma línea de universo, los espacios correspondientes son ajenos.

Así, dados dos observadores A y B y un punto P sobre la línea de universo de uno de ellos (por ejemplo, un punto P sobre la línea de universo de A) el tres-espacio correspondiente a P intersecta ortogonalmente sólo en un punto

[1] [Gödel 1949a] pag. 190.

Q a la línea de universo del otro observador (en este caso, sólo en un punto Q a la línea de B), lo cual significa que $\Pi_P = \Pi_Q$.

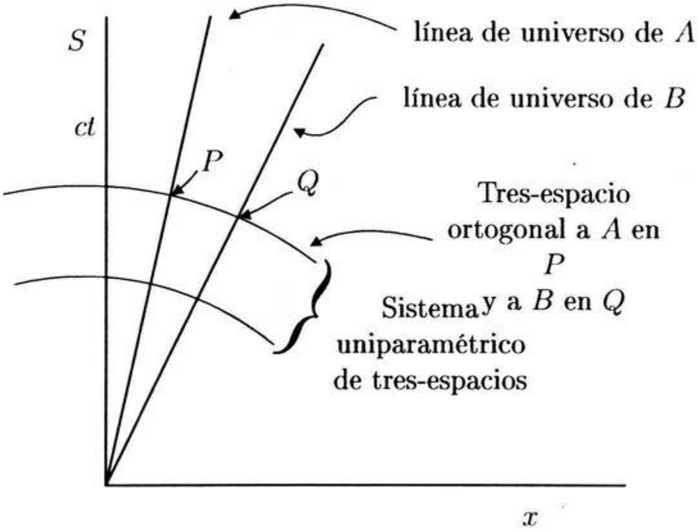

Figura 3.1:

Los tres-espacios así descritos conforman el sistema uniparamétrico al que Gödel se refiere, pues se puede definir una *coordenada temporal absoluta*: P es *simultáneo* a Q si y sólo si $\Pi_P = \Pi_Q$. Lo anterior es ilustrado por un diagrama de Minkowski en la Fig. 3.1. [2]

De esta manera, había algunos filósofos que se negaban a abandonar la idea de un *intervalo objetivo de tiempo.* Sin embargo, no en *todas* las soluciones es posible definir un tiempo absoluto y Gödel nos proporciona un ejemplo de ello.

Algunas propiedades que destacan de su modelo son las siguientes:

- Es un modelo de universo homogéneo.

- Cualesquiera dos líneas de universo de materia son equidistantes.

- Tiene simetría rotacional.

[2]Dado que en el diagrama de Minkowski sólo se consideran dos coordenadas en vez de cuatro, el tres-espacio se verá de una sóla dimensión, es decir, un arco.

- No existen un sistema de tres-espacios que intersecten a cada línea de universo de materia en un punto. Como lo señala Gödel, la inexistencia de tal sistema de tres-espacios es equivalente a una rotación de la materia en relación a la brújula de inercia.

- Existen líneas de universo cerradas. Particularmente, si P y Q son dos puntos cualesquiera sobre una línea de universo de materia en la cual P precede a Q en esta línea, existe una línea de tiempo (time-like line) la cual conecta a P con Q, en la que Q precede a P.

Una interpretación de esta última propiedad es la siguiente: teóricamente, es posible tener una trayectoria en la que se regrese no sólo al mismo punto en el espacio, sino también al mismo instante en el tiempo; es decir, en el universo de Gödel es posible hacer un viaje al pasado o bien, de alguna manera, se puede tener influencia en el pasado, lo cual no es posible en los modelos estándar relativistas (como por ejemplo en el universo de Einstein en el que se puede tener trayectorias en línea recta y regresar al mismo punto en el espacio debido a la curvatura del espacio-tiempo pero no a la misma coordenada temporal).

La intención de Gödel no es mostrar que en el marco de la teoría de la relatividad se pueden hacer viajes al pasado, sino la de observar que la relación temporal fundamental (antes-después) no está implícita en esta teoría; con ello plantea una interrogante en torno a la relación que hay entre la teoría de la relatividad y la causalidad.

Con el ejemplo en mano, Gödel refrenda la opinión de los que él llama filósofos idealistas, como Parménides y Kant, los cuales "niegan la objetividad del cambio y lo consideran como una ilusión o apariencia de acuerdo a nuestro modo especial de percepción".[3]

El argumento que presenta es el siguiente: el cambio sólo es posible a través de un intervalo de tiempo. La realidad consiste en una infinidad de niveles de "ahora" que llegan a la existencia sucesivamente, pero si la simultaneidad es algo relativo a lo sensible (relativo al sistema de referencia, o al observador, el cual lo establece por medio de sus sentidos) entonces la realidad no puede ser determinada de acuerdo a esos niveles ya que cada observador establecería sus niveles y todos tendrían igual validez.

Por otro lado, la teoría kantiana sobre el tiempo parte del hecho de que éste no es "algo existente en sí mismo o una característica u orden inherente

[3][Gödel 1949] pag. 557.

a los objetos",[4]aunque existe en un sentido relativo. Esa entidad relativa es la percepción del sujeto, su *sensibilidad*. Cualquiera que sea la realidad del tiempo, tal como nosotros la percibimos, consiste en ciertas relaciones de los objetos con el sujeto que las percibe, las cuales dependen del modo de intuición del sujeto con el objeto dado.

La doctrina kantiana no significa que las relaciones temporales y espaciales sean sólo imaginadas, sino que deben subsistir independientemente de nuestra representación, es decir, deben corresponder a relaciones *objetivas* de las cosas con el obsevador. En virtud de la realidad independiente de nuestras representaciones, se pueden tener representaciones en otros esquemas.

Si bien es cierto que se pueden tener diferentes relaciones temporales para distintos observadores (uno puede decir que el evento A ocurrió antes que el evento B, mientras que otro podría decir que el evento B ocurrió antes que el evento A), esto no excluye la posibilidad de la existencia de alguna estructura física, independiente del observador o de cualquier otro objeto de referencia, que cumpla con las propiedades del tiempo newtoniano (*e.g.* la uni-dimensionalidad, el orden lineal de los eventos, la universalidad, etcétera; básicamente, que la estructura física sea isomorfa a una línea recta).

Sin embargo, gracias a su ejemplo de universo, Gödel puede decir que no en *todos* los modelos de universo es posible la existencia de tal estructura.

De hecho, en la solución propuesta por Gödel no es posible establecer una relación temporal lineal (con la relación *antes-después*), sino únicamente un orden parcial, lo cual implica que hay eventos que son incomparables en cuanto a esta relación temporal. Lo anterior significa que el hecho de que el evento A no ocurra *antes* que B y que B no ocurra *antes* que A, no implica que sean simultáneos; pueden ser incomparables. (Nuevamente tenemos el problema de la causalidad, pues para que se de un evento no necesariamente tiene que pasar por todos los eventos "previos", ya que no sabemos cuáles son).

Pero un observador en particular sí puede establecer una linealidad en el tiempo, porque su línea de universo determina la linealidad en los eventos (aunque la linealidad establecida no es para todos los individuos, sólo para él) y es por esto que la tesis kantiana sobre el tiempo tiene validez; el tiempo tal como nosotros lo percibimos sólo tiene existencia en el aparato cognitivo del observador: "Nuestra representación del espacio es completamente adecuada

[4][Gödel 1946] pag. 274.

a la relación que nuestra sensibilidad tiene con los objetos".[5]

Pero ¿cuál es la intención de Gödel al presentar este ejemplo de modelo de universo? No es sólo la de refrendar las tesis de los filósofos mencionados, ni tampoco suponer que podemos vivir en un universo en el que se pueda viajar en el tiempo al pasado (de hecho, Gödel reconoce que difícilmente podríamos vivir en un universo de este estilo, o más precisamente, que el universo *real* no podría ser de este estilo, porque esas soluciones son estáticas y por lo tanto no se presentaría el corrimiento hacia el rojo para objetos distantes; sin embargo, queda la posibilidad de los universos en expansión los cuales presentan propiedades relevantes, tema que no es del interés de este trabajo). Más bien, la intención de Gödel es hacer ver que en la física también se tienen problemas *fundacionales* porque, después de todo, en la física también se buscan fundamentos precisos y libres de contradicciones. Por ejemplo, se pretende reducir las hipótesis sobre las que descansa la teoría y que de alguna manera se puedan deducir los resultados, tal como lo hace ver Einstein en las siguientes palabras:

> Las anteriores consideraciones ponen de manifiesto que la teoría (especial) de la relatividad ha emanado de la electrodinámica y de la óptica. De las predicciones de la teoría apenas ha modificado nada en estos dos campos, pero en cambio sí que ha simplificado sustancialmente el edificio teórico, es decir, la deducción de leyes, y -lo que es incomparablemente más importante- ha reducido considerablemente el número de hipótesis mutuamente independientes sobre las que descansa la teoría. La teoría especial de la relatividad ha conferido a la teoría de Maxwell-Lorentz un grado tal de evidencia, que aun cuando los experimentos hubiesen hablado menos convincentemente en favor suyo, esta última teoría habría sido aceptada con carácter general por los físicos. [6]

Veamos por qué la construcción de los universos en rotación nos enfrenta a este tipo de problemas. Gödel cuestiona si algunas propiedades del universo (como la existencia de un intervalo objetivo de tiempo) son inherentes al aparato teórico. Es decir, cuestiona si las bases del edificio teórico son un sustento confiable para la deducción de leyes. ¿Cómo se verifica lo anterior?

[5] *ibid.*

[6] [Einstein 1905] pag. 84.

Al asumir un modelo de universo lo hacemos porque se ajusta a las observaciones hechas, las cuales creemos que son objetivas, confiando de esta manera en la sensibilidad. Es decir, la manera de verificar si las bases de la teoría sustentan de manera objetiva la deducción de leyes es a través de la experimentación, la cual juega distintos papeles dentro de la teoría física pues un mismo experimento puede adquirir distintos significados interpretados en diferentes marcos teóricos.

En primer lugar se debe cumplir que los resultados teóricos sean compatibles con los resultados experimentales y viceversa (como no ocurrió en su momento con el experimento de Michelson y Morley).

Existen al menos tres formas distintas de ver un experimento: la primera de ellas es cuando el experimento es un interlocutor más, cuando nos hace ver cosas que ignorábamos, como en el caso del péndulo de Galileo, en el que el experimento tiene un discurso matemático que habla por sí. Aun cuando los resultados no sean precisos, es decir, al realizar el experimento no se obtengan los mismo resultados que en el papel, puede considerarse como tales ya que siempre influyen otros factores que lo distorsionan. En este caso lo importante es que el experimento compruebe lo que esperamos o bien, que arroje resultados distintos a los esperados.

La segunda forma de experimentación es la *matematización de los fenómenos*. Dado un fenómeno de la naturaleza, el físico busca la forma matemática que describe el fenómeno (el *modelo matemático*) y con base en los resultados *matemáticos* se obtienen los resultados *físicos*. El camino que sigue la descripción de la realidad en este caso es, primero la observación de la realidad, del fenómeno; segundo, utilizando a las matemáticas como herramienta se establece el modelo matemático que describe el fenómeno, y tercero a partir del modelo y por medio de la experimentación se comprueba la objetividad del modelo, constatándolo en la realidad misma.

La tercera forma es el *Descubrimiento Experimental*, cuando el investigador no sabe a lo que se enfrenta y busca las respuestas en la naturaleza misma.

En resumen podemos afirmar que la comprobación experimental es un sustento para las bases del edificio teórico al que no podemos renunciar, siendo éstas últimas el punto de partida para la deducción de leyes dentro de una teoría física, lo cual no significa que la única manera de hacer las inferencias dentro de una teoría física sea por medio de la experimentación.

De cualquier manera, sea cual fuere la manera de hacer las inferencias dentro de la teoría, lo que nos enseñan los universos en rotación es que la naturaleza del tiempo no queda determinada por las "hipótesis" sobre las que descansa la teoría.

Capítulo 4

Física-Matemáticas

Al examinar por primera vez los trabajos de Gödel en lógica matemática y en física dan la impresión de que no hay ninguna conexión entre ellos. Sin embargo, en ambos campos podemos reconocer problemas y características en común. Los trabajos de Gödel manifiestan dos preocupaciones centrales en su pensamiento; en primer lugar, el problema de la *fundamentación*, tanto en física como en matemáticas. En segundo lugar, problemas relativos a las *limitaciónes de los sistemas formales y de las teorías físicas formales*. En los dos casos, la manera como abordan los problemas es considerando a las teorías como objeto de estudio en sí, es decir, desde un plano metateórico.

Veamos por separado cada uno de estos problemas.

4.1. El problema de los fundamentos de las matemáticas

El desarrollo del análisis y de otras ramas de las matemáticas a lo largo de los siglos dieciocho y diecinueve mantuvo ocupados a los matemáticos de esa época. El progreso alcanzado y la aparición de la teoría de conjuntos, debida en gran parte a George Cantor, trajo consigo la necesidad de procurarle un *fundamento* a las matemáticas. A mediados del siglo diecinueve, el análisis infinitesimal estaba *fundamentado* de cierta manera, ya que se había aritmetizado, es decir, los números reales (racionales e irracionales) se habían definido a partir de los números enteros de la aritmética.[1] Asimismo, la teoría

[1] Es posible definir a los a los números reales a partir de los números racionales mediante cortaduras de Dedekind. También se puede definir a los números racionales a partir del

de conjuntos, logró reducir la noción de *número* a *conjunto*.[2] Dentro de este contexto aparecieron ciertas paradojas como resultado de algunas investigaciones en la teoría de conjuntos, dando pie a la idea de que la matemática se encontraba en una *crisis* en relación a sus fundamentos.

Hubo diferentes maneras de enfrentar este problema. Algunos simplemente siguieron trabajando en la teoría de conjuntos no dándole mayor importancia al asunto como es el caso de Zermelo, quien dió una axiomatización de la teoría de conjuntos suficiente para cubrir las necesidades del matemático activo. Otros se escandalizaron al ver en las paradojas una amenaza para el edificio de la matemática, como fue el caso de Frege y Russell. Otros más, tomaron la postura de aislar las zonas de conflicto y deshechar todo lo que resultara incómodo. Fue David Hilbert el que tuvo la idea de reconstruir axiomaticamente la aritmética y el análisis, de tal manera que los axiomas que se eligieran no dieran lugar a contadicciones, dejando a su vez intacto el edificio teórico de la matemática.

De esta manera, la propuesta de Hilbert no sólo era encontrar un cuadro axiomático que fundamentara a la matemática, sino probar que en él mismo no se podría deducir ninguna contradicción. Con este propósito en mente convirtió a la demostración en un objeto de estudio de la matemática. Su programa incluía una prueba elemental de consistencia para la teoría así construida. Esta prueba formaría parte de la matemática misma.

Fue así que en la década de 1920 a 1930 un grupo de matemáticos trabajó en el problema de los fundamentos de la matemática clásica. Trataban de formalizar las teorías matemáticas en el cálculo de predicados y probar ahí su consistencia. La formalización debería ser completa en el sentido que todo enunciado de la teoría que fuera verdadero se convertiría en una fórmula demostrable. Así, a través de la manipulación formal de símbolos (los cuales por sí mismos carecen de significado) y reglas bien definidas sobre estos símbolos (reglas de inferencia) se podría probar la verdad o falsedad de las proposiciones matemáticas.

Los teoremas de Gödel proporcionan una perspectiva distinta a esta cues-

---

conjunto de números enteros. Al respecto consúltese [Hrbacek 1999] pag. 86-90, 174-179.

[2] A partir de la axiomática de la teoría de conjuntos se definen los números naturales de la siguiente manera: x es un número natural si y sólo si x es un conjunto transitivo, bien ordenado por la relación de pertenencia ($\in$) y todo subconjunto no vacío de x tiene un elemento $\in$-máximo (un máximo con respecto a la pertenencia). Todas las propiedades anteriores son expresables en el lenguaje de la teoría de conjuntos. Para ampliar detalles consúltese [Hrbacek 1999] pag. 171.

ción. En primer lugar replantean el problema de la necesidad de procurarle un fundamento a las matemáticas. En segundo lugar, estos teoremas parecieran refrendar la visión platónica de las matemáticas como estructura irreductible a meros cálculos simbólicos. No es suficiente un conjunto de axiomas y reglas de inferencia para decidir todas las cuestiones matemáticas. Como lo señala Gödel:

> Resulta por tanto natural la conjetura de que estos axiomas y reglas basten para decidir *todas* las cuestiones matemáticas que pueden ser formuladas en dichos sistemas [refiriendose a los *Principia mathematica* y a la axiomática de Zermelo] [...] se muestra que esto no es así, sino que por el contrario, en ambos sistemas hay problemas relativamente simples de la teoría de números naturales, que no pueden ser decididos con sus axiomas (y reglas). Éste hecho no se debe a la especial naturaleza de los sistemas citados, sino que se da en una clase muy amplia de sistemas formales.[3]

El método utilizado por Gödel, en efecto, puede ser aplicado a una gran variedad de sistemas formales. Además obedece a las reglas finitistas requeridas por Hilbert, por lo cual la escuela constructivista pierde toda oportunidad de argumentar en contra de los teoremas de incompletud. El punto de vista del realismo platónico de Gödel no sólo se refuerza en los teoremas de incompletud, sino que además es un factor presente en varios de sus escritos.[4]

Uno de los aspectos importantes en este sentido es el siguiente: Gödel confiere a la intuición matemática el mismo valor que en la física se le concede a la intuición sensible, como lo podemos apreciar en el siguiente pasaje:

> Pero, a pesar de su lejanía de la experiencia sensible, tenemos también una especie de percepción de los objetos de la teoría de conjuntos, como se observa en el hecho de que los axiomas se fuerzan sobre nosotros como siendo verdaderos. No veo ninguna razón por la cual deberíamos confiar menos en esta clase de percepción, es decir, en la intuición matemática, que en la percepción sensible, la cual nos induce a construir teorías físicas y esperar que las futuras percepciones sensibles concuerden con ellas, y a creer que una cuestión no decidible ahora, tiene significado y puede ser decidida en el futuro. [5]

[3] [Gödel 1931] tomado de la traducción al español de Jesús Mosterín, pag. 56.
[4] *Cf.* [Gödel 1990] pag. 169.
[5] Esta es la versión en inglés de la cita:

De esta manera, la postura filosófica de Gödel se hace presente en la interpretación de sus teoremas. Gödel es defensor del realismo conceptual, es decir, considera que los objetos matemáticos existen independientemente del individuo. Si nos enfrentamos a una cuestión que no pueda ser decidida ahora, la intuición matemática nos puede ayudar a resolverla, pues nos permite acceder a dicha realidad y observar los hechos ahí existentes. Por ejemplo, si tenemos una propiedad referente a los números enteros, en donde para cada número se puede decidir si cumple o no esa propiedad, pero respecto a la cual no hemos podido demostrar que se cumple para la totalidad de los números [6] la intuición matemática nos puede dar los elementos para decidir si tal cuestión es verdadera o falsa, suministrando los principios requeridos para zanjar la cuestión.

Según Gödel, la intuición matemática, igual que la intuición sensible, también se desarrolla (como conjunto de conocimientos, no individualmente), por lo que la investigación matemática resulta ser uno de los factores más importantes. Consideremos el siguiente ejemplo: se ha probado que la hipótesis generalizada del continuo es independiente de los axiomas de ZFE,[7] por lo cual, uno puede asumir como axioma la hipótesis o su negación y desarrollar la teoría sin generar contradicciones por el hecho de elegir alguna de estas dos alternativas; no obstante, si nos preguntamos por la *verdad* de la hipótesis nos encontramos ante un conflicto, pues la teoría que se desarrolla con ZFE no nos proporciona las evidencias necesarias para responder esta pregunta. Sin embargo, el desarrollo de los grandes cardinales (los cuales van más allá de ZFE) nos podría suministrar algún criterio para decidir este tipo de problemas.

Las cuestiones consideradas ponen de manifiesto la preocupación de Gödel en torno a la fundamentación de las matemáticas. De acuerdo al punto de vista de Gödel, la fundamentación de las matemáticas debe obedecer, en

---

But, despite their remoteness from sense experience, we so have something like a perception also of the objets of set theory, as is seen from the fact that the axioms force themselves upon us as being true. I don't see any reason why we should have less confidence in this kind of perception, i.e., in mathematical intuition , that in sense perception, which induces us to build up physical theories and to expect that future sense perceptions will agree with them, and, moreover, to belive that a question not decidable now has meaning and may be decided in the future. [Gödel 1964] en [Gödel 1990] pag. 268.

[6]Podemos pensar en propiedades por ejemplo, del estilo de la conjetura de Goldbach, de la cual aún no se cuenta con una prueba.

[7]Con ZFE nos referiremos a la axiomatica dada por Zermelo y Fraenkel, con el axioma de elección.

cierto sentido, a la intuición matemática. Es decir, los axiomas que se elijan deben corresponder a ideas matemáticas intuitivas y no tratar de elegirlos de tal manera que de ellos se puedan inferir la totalidad de las proposiciones matemáticas verdaderas.

Así, la base sobre las que estaría edificada la teoría tendría la solidez que nos proporciona la intuición matemática (en la que, según Gödel, debemos confiar tal como lo hacen las teorías físicas en la intuición sensible. *Cf.* nota 3 del capítulo 4) y la que nos proporciona el formalismo matemático, el cual nos permite saber, en muchos de los casos, si podemos agregar axiomas sin generar contradicciones *por el simple hecho de agregar* estos axiomas (problemas que también fueron objetos de estudio de Gödel *Cf.* [Gödel 1933o]). En este último caso, la indecibilidad de la proposición considerada sería un indicativo de que aún no hemos reunido las evidencias necesarias para decidir su verdad.

4.2. El problema de los fundamentos de la física

Como ya lo hemos hecho ver (veáse pag. 31) en la física también se ha dado la búsqueda de algún tipo de *fundamentación* de sus teorías y la reducción de las hipótesis sobre las que descansa el edificio teórico.

Surgen, pues, de manera natural las siguientes preguntas: ¿qué tipo de fundamentos se buscan en la física?; ¿hay algún tipo de *consistencia* y *completud* en la física?

En lo que sigue haremos algunas reflexiones en torno a estos preguntas, comenzando por el segundo.

Lo primero que esperamos en una teoría física, tanto en los resultados teóricos como en los resultados experimentales, es que no se generen contradicciones. En el caso de los resultados experimentales es más claro: un experimento tiene que ser de tal manera, que cada vez que éste se repita bajo las mismas condiciones, arroje los mismos resultados, independientemente de las distintas intepretaciones que se pueda tener de los mismos.

Respecto a los resultados teóricos el asunto es más complicado. Puede darse el caso que dos resultados teóricos entren en franca contradicción entre ellos,[8] en cuyo caso, lo que determina finalmente cuál de ellos es el *correcto*

[8]Me permito tomar el siguiente ejemplo para ilustrar el caso cuando dos resultados teóricos entran en franca contradicción entre ellos. Debo aclarar que el autor lo utiliza sólo como un ejemplo de las contradicciones a las que llegaron los físicos del siglo XIX.

es la relación que guardan con el resultado experimental.

De esta manera nos damos cuenta de que la *consistencia* dentro de una teoría física *debe* estar referida a la experimentación (sin tomar en cuenta las posibles limitaciones técnicas o tecnológicas).

Lo anterior nos sugiere una respuesta aproximada a la primera de las cuestiones que nos hemos planteado al principio de la sección. Los fundamentos que se buscan en la física no deben, antes que nada generar contradicciones entre los resultados teóricos y los resultados experimentales (incluyendo a los experimentos *ideales*, es decir, aquellos que dejan de lado los problemas o errores técnicos que se presenten). En segundo lugar, se busca reducir el número de hipótesis, (como ocurre en el caso de las matemáticas que se busca reducir el número de axiomas, hasta llegar al punto que ninguno de ellos sea consecuencia de los demás) de tal manera que las hipótesis (o la fundamentación) sean las mínimas indispensables para sustentar el edificio teórico.

Si nos planteamos la pregunta ¿se ha llegado a dar un fundamento que cumpla con lo anterior, *i.e.* un fundamento que reduzca las hipótesis, y que los resultados experimentales no generen contradicciones con los resultados teóricos?, las respuestas pueden ser diversas. Aparentemente, la teoría de la relatividad ha logrado cumplir este objetivo, pues los resultados experimentales obtenidos así lo indican, (al menos en lo referente a la constancia de la velocidad de la luz, sin importar cuál sea el sistema de referencia considerado); además, la relatividad ha sido un buen sustento para la teoría física en los últimos cien años.

"Sabemos que el campo magnético actúa sobre una partícula si ésta se encuentra en movimiento [...] Consideremos un sistema inercial S en el que un alambre conductor, por el cual fluye una corriente, se encuentra en reposo: los iones positivos del alambre están fijos y los electrones se mueven con velocidad v. Consideremos, además, una partícula con carga q que se mueve con la misma velocidad v paralelamente al alambre.[...] En el alambre fluye una corriente, que genera un campo magnético $\mathbf{B}$ [...] Esta fuerza es perpendicular al alambre y aparta a la partícula de su trayectoria rectilínea.

Veamos el mismo experimento desde un sistema inercial S' en el que la partícula cargada está en reposo. En ese sistema se verá a los electrones del alambre en reposo y a los iones en movimiento , por lo que también habrá una corriente eléctrica que genera un campo magnético. Pero ahora la partícula cargada tiene velocidad $v = 0$, así que el campo magnético *no* produce ninguna fuerza sobre ella.

Llegamos así al resultado paradójico de que la partícula cargada, en el sistema S es desviada de su trayectoria rectilínea, pero no lo es en el sistema S'." [Hacyan 1995] pag.14-15.

No obstante, los fundamentos establecidos por la teoría de la relatividad no son completos en cierto sentido: siempre pueden encontrarse fenómenos físicos que la teoría no pueda explicar, o bien propiedades que sean consideradas como consecuencias de la teoría de la relatividad, aunque en realidad sean *independientes* de ésta, como ocurre cuando se trabaja en la física bajo la suposición de la existencia de una estructura en la que se puede representar una relación temporal absoluta.

Si bien el trabajo de Gödel no se refiere directamente a estos aspectos, sí tiene consecuencias para ellos, puesto que la construcción de los universos en rotación no sólo la presenta como *una* solución particular. Gödel afirma:

> Puede probarse que para cualquier valor de λ (incluyendo al 0), [donde λ es la correspondiente a la ecuación relativista de campo $R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = T_{ik} - \lambda g_{ik}$] existen ∞^8 (sic) soluciones rotacionales que satisfacen las condiciones enunciadas [...] Así, surge el problema de distinguir, por medio de propiedades de simetría o simplicidad, determinadas soluciones dentro de la vasta variedad de soluciones.[9]

Lo anterior pone de manifiesto la magnitud del problema al que nos enfrentamos. La cantidad de soluciones es extremadamente grande y la manera de distinguir algunas de ellas es a través de la intuición (simplicidad), sin dejar de lado las propiedades matemáticas que de ellas se deriven (*e.g.* simetría).

4.3. Limitación de los sistemas formales y de las teorías físicas formales

Cuando Gödel considera la noción de completud en los sistemas formales, descubre que la sintaxis tiene limitaciones que le son inherentes: la *verdad* de una proposición no puede ser reducida a su *demostrabilidad*. Establece de esta manera una diferencia entre lo *demostrable* y lo *verdadero*. Es cierto que lo demostrable *por el sistema* es verdadero en todas sus interpretaciones, pero a la inversa no necesariamente es cierto.

¿Cómo llega Gödel a hacer esta distinción? Si el concepto de *derivabilidad* coincidiera con el concepto de *verdad*, entonces la noción de "prueba" sería

[9][Gödel 1952] de la traducción de Jesús Mosterín pag. 398.

un sucedáneo formal de una noción semántica como la de "verdad" la cual nos remite a algo externo al lenguaje. No obstante éste no es el caso cuando el sistema es incompleto, como ocurre con los sistemas que *contienen* a la aritmética de Peano.

Esta limitación de los sistemas formales tiene consecuencias importantes en la filosofía de las matemáticas y la filosófia de la mente, entre otras.

En el caso de la física hay otras limitaciones además de la inherentes al aparato matemático que utilizan. Por ejemplo, hay limitaciones relativas a la observación y comprobación de los fenómenos físicos. Así como Gödel creía en la existencia de los objetos matemáticos independientemente de nuestra incapacidad para acceder a ellos en su totalidad, se tiene que aceptar que la física intenta describir el mundo *real* que, de alguna manera, nos es accesible en mucho mayor grado.

Para Giora Hon, con la introducción de los universos en rotación como solución de las ecuaciones de campo de la relatividad general, Gödel construyó un caso limitativo para la geometrización relativista del tiempo.[10] Lo anterior significa que la geometrización que se obtiene del tiempo en el modelo estándar de la teoría de la relatividad con base en los diagramas de Minkowski,[11] (*i.e.* la estructura geométrica que puede simular una recta euclidiana, el sistema uniparamétrico de tres-espacios del que se habla en la nota 1 del capítulo 3) no debe ser intrepretada como la idea intuitiva de tiempo sucesivo, ya que ésta se pude perder en otro modelo, como ocurre en el caso del modelo de universo de Gödel.

Es ahora que nos encontramos con ciertas similitudes en los trabajos que Gödel desarrollara en la física y en las matemáticas. Hay una semejanza adicional en estas áreas que se desprende del trabajo de Gödel, la cual abordaremos a continuación.

4.4. Metateorías

En el programa de Hilbert, la *demostración* y la *consistencia* de un sistema formal se convierten en objetos de estudio de la matemática.

En un principio la investigación de estos y otros problemas se pretende llevar a cabo dentro de la teoría que se formaliza. Por ejemplo, en el programa de Hilbert se pide probar la consistencia de la matemática dentro de la teoría,

[10] [Hon 1996] pag. 220.

[11] La geometrización del tiempo de Einstein, como la llama Yourgrau.

es decir, se pide una prueba elemental de consistencia; no obstante, el segundo teorema de incompletud de Gödel establece que el enunciado que afirma la completud del sistema (en un sistema formal que cumpla nuevamente que la aritmética esta contenida y que sea consistente) no es derivable dentro del sistema, lo cual significa que el sistema no puede formalizar una prueba de su propia consistencia. Por lo tanto, los métodos que se utilizan para hacer pruebas de consistencia relativa son métodos que se encuentran en un nivel más elevado del propio sistema, es decir se requiere un método más poderoso que la mera manipulación de los símbolos del sistema y de las reglas establecidas por éste, por ejemplo *forcing* o modelos internos.[12]

Es así que a partir de estos problemas el estudio al que se refiere la matemática no se limita al trabajo desarrollado dentro de la misma teoría, esto es a los resultados que se pueden deducir a partir de los axiomas por la aplicación de las reglas de inferencia (*i.e* por la mera manipulación de los símbolos del sistema), sino que se puede hablar *acerca* de las teorías.[13] Y esto sirvió para el desarrollo de la matemática, en particular de la lógica matemática, a lo largo del siglo veinte.

En relación a la física, ¿el trabajo que Gödel desarrolla, lo hace *dentro* de la alguna teoría física? La primera respuesta podría ser: dentro de la teoría de la relatividad.

Parece ser que ésto no es del todo cierto. Es verdad que toma como base los postulados de la teoría de la relatividad y desarrolla un modelo de universo consistente con éstas bases (consistente con las ecuaciones de campo de Einstein); sin embargo, para arribar a este resultado considera las limitaciones y los alcances de la teoría de la relatividad.

Como consecuencia del estudio de las limitaciones de la teoría de la re-

[12]Dado que no se puede probar la consistencia absoluta de un sistema formal que cumpla las propiedades ya conocidas, se hacen pruebas de consistencia relativa. Por ejemplo, suponemos la consistencia de un sistema formal S y probamos la consistencia de un sistema S'. Obsérvese que no se está probando que S' sea consistente, sólo se prueba que en el caso que S sea consistente, entonces también lo será S'.

[13]Cuando el matemático activo presenta la *demostración* de un teorema, aun cuando esta prueba no esté formalizada en el sistema formal en el cual se esté trabajando, se tiene la seguridad (para la mayoría de los casos) que se puede hacer esta formalización (es decir, presentar una lista finita de fórmulas, donde la última enuncia al teorema y cada fórmula es o bien un axioma o se obtiene por medio de reglas de inferencia de las anteriores). No obstante, cuando hablamos de propiedades relativas al sistema (*consistencia, completud*, etc.) son propiedades que no pueden ser demostradas por una prueba formal dentro del sistema, es decir, con los símbolos y las reglas establecidas por él mismo.

latividad, Gödel descubre que la existencia de una estructura que se pueda considerar como *tiempo*,[14] no es consecuencia de los postulados de la teoría.[15] Esto se logra a través del descubrimiento de modelos en los que no se pueda tener este tipo de estructuras temporales. El ejemplo que nos proporciona es el de los universos en rotación.

Por lo tanto, puede afirmarse que el desarrollo de los universos en rotación de Gödel se hace desde una teoría *acerca* de la teoría de la relatividad, es decir, desde una *metateoría*.

[14] Según Yourgrau, la esencia del tiempo para Gödel es que éste es "una estructura unidimensional que provee de un orden lineal de todos los eventos de la naturaleza". [Yourgrau 1999 (1991)] pag. 74.

[15] Recuérdese que, aunque en el modelo estándar de la teoría de la relatividad los tiempos de los observadores no son los mismos, si ellos se mueven a velocidades (uniformes) distintas, se puede presentar una estructura que cumpla de cierta manera lo que establece la nota anterior.

Capítulo 5

Matemáticas-Física.

Como hemos visto, los trabajos de Gödel en física y matemáticas tienen algunas características en común. Como afirma Hon:

> En ambos campos Gödel fue directa y abiertamente a las cuestiones centrales de los problemas en juego.[1]

Hon se refiere a los problemas que se derivan a partir de la consideración de los fundamentos de las áreas en cuestión, "problemas fundacionales".

Ciertamente, no hay una relación explícita entre ellos, no obstante podemos encontrar consecuencias del trabajo de Gödel en física para las matemáticas y a la inversa.

Por un lado, la objetividad de la física *debe* ser aplicada en las matemáticas, como se vió en el capítulo anterior, mediante la intuición matemática, en la cual debemos tener tanta confianza como la tenemos en la intuición sensible que se utiliza para el desarrollo de las teorías físicas. Tenemos por ejemplo la propuesta de Gödel de valernos de la experimentación en matematicas para validar y/o conjeturar resultados:

> Si la metemática describe un mundo tan objetivo como el de la física no hay razón para que los métodos inductivos no se apliquen en la matemática tal como se hace en la física. El hecho es que en la matemática tenemos la misma actitud que en tiempos pasados se tenía

[1] [Hon 1996] pag. 219.

> hacia todas las ciencias, esto es, tratamos de derivarlo todo de las definiciones mediante pruebas convincentes. Quizá este método sea tan erroneo como lo fue en la física.[2]

Pero por otro lado, con el desarrollo de los universos en rotación, Gödel nos enfrenta al siguiente problema: ¿qué tan objetivamente se puede describir el universo?

Lo anterior no obedece a la pretensión de que el universo sea de tipo rotatorio, recuérdese que Gödel no se ocupa del problema de si *realmente* el universo es de este tipo, únicamente manifiesta la gran cantidad de soluciones para las ecuaciones relativistas de campo, esto es, la gran cantidad de modelos de universo.

Con lo anterior, el problema de la fundamentación de la física adquiere otro matiz.

En matemáticas pueden adoptarse distintas posturas respecto a la fundamentación. No obstante, un principio al que no podemos renunciar es al de consistencia. Éste es el único sustento natural que podemos exigir a un sistema formal.

En cambio en física la primer exigencia que debe cumplir un modelo de universo es la de ser solución de las ecuaciones de campo de Einstein. Cuando asumimos una solución de las ecuaciones de campo como modelo de universo nos referimos a una *posibilidad* lo cual no significa que dicha *posibilidad* (ese modelo de universo) describa de manera objetiva el *universo real*, más bien, se trata de una solución a las ecuaciones de Einstein que podemos pensar como objetiva, es decir, como si ésta tuvieran su representación en el aparato cognitivo del observador.

Entendiéndolo de esta manera, la visión de Gödel respecto a la gran cantidad de soluciones de las ecuaciones de campo toma otro sentido.

¿La física es una libre creación humana, o es el resultado de la observación y la experimentación?

En el caso que la segunda posibilidad sea verdadera, el terreno que podría cubrir la física estaría limitado a la realidad *observable* (independientemente de los avaces tecnológicos para la observación del universo); pero en el caso de que la primera posibilidad sea la verdadera, nos encontraríamos en una situación similar a la que tenemos en matemáticas: se pueden adoptar distintas posturas respecto a un mismo problema y buscar bases que sustenten de

[2][Gödel 1951] de la traducción de Jesús Mosterín, pag. 158.

manera consistente estas posturas, y con ello llegar a explicaciones distintas de las que se tienen cuando sólo confiamos en la intuición sensible.[3]

Una vez más, y como ya lo habíamos hecho notar, el realismo platónico de Gödel se puede apreciar en sus escritos, referido, en este caso, a la física en la interpretación del desarrollo de los universos en rotación. Gödel no sólo sustenta la existencia independiente de los objetos estudiados por la física, sino que también sostiene, como en el caso de las matemáticas, la existencia de una estructura irreductible a la observación y experimentación de los fenómenos, siendo éstos el punto de partida.

Lo anterior lo obtiene Gödel como resultado de sus investigaciones en el terreno del formalismo matemático de la teoría de la relatividad.

Al respecto, el comentario de Yourgrau es acertado:

> Hemos visto como Gödel ha tenido éxito al explotar el formalismo matemático de la teoría de la relatividad para obtener resultados contrarios al espíritu de lo emprendido por Einstein, como anteriormente, vía su teorema de incompletud, Gödel pudo explotar la parte formal de la teoría de números propuesta por Hilbert, para obtener resultados contrarios al espíritu del llamado "programa de Hilbert".[4]

En efecto, con la construcción de los universos en rotación Gödel obtuvo resultados contrarios a lo emprendido por la teoría de la relatividad, como anteriormente obtuvo resultados contrarios al programa de Hilbert. No obstante, desde el punto de vista ontológico, en ambos terrenos obtuvo los resultados esperados. Kant afirmó que:

> Es un destino habitual de la razón humana en la especulación, el acabar cuanto antes su edificio y sólo después investigar si el fundamento del mismo está bien afirmado [...] Mas lo que nos libra de todo cuidado y de toda sospecha durante la construcción y nos promete una aparente solidez es la siguiente. Una gran parte, quizá la mayor parte de la labor

[3]Por ejemplo, el primer postulado de la Teoría de la Relatividad es que la velocidad de la luz es la misma para cualquier sistema de referencia inercial sin importar a qué velocidad (uniforme) se mueva. Sin embargo, la intuición sensible no acepta este hecho como verdadero pues si el sistema se desplaza en dirección contraria a la luz, se esperaría que la velocidad fuera mayor que cuando el sistema se desplaza en la misma dirección de la luz. La intención del experimento de Michelson y Morley era medir esa variación.

[4][Yourgrau 1999 (1991)] pag. 123.

> de nuestra razón, consiste en *análisis* de los conceptos que ya tenemos de los objetos.[5]

Los trabajos de Gödel se refiere directamente a este punto: ¿los fundamentos de las ciencias (matemáticas y física) están bien afirmados? Si por *bien afirmados* entendemos que a partir de ellos es posible deducir todas las posibles verdades en el caso de las matemáticas y la explicación de todos los fenómenos del universo en el caso de la física, entonces la respuesta, en ambos casos, sería negativa.

Si por el contrario, por *bien afirmados* entendemos que los fundamentos nos permiten plantear problemas que la razón no puede resolver, lo cual de acuerdo con Kant, es parte de la naturaleza humana, entonces la respuesta es afirmativa.

[5][Kant 1944 (1781)] pag. 31

Conclusiones

El realismo platónico de Gödel se hace presente en la interpretación de sus teoremas de incompletud: si la matemática describe un mundo objetivo, entonces son válidos los métodos de experimentación y observación que se aplican en la física para el desarrollo de sus teorías. De esta manera, la matemática no se puede reducir a una estructura en la cual la verdad de un enunciado se reduzca a meros cálculos simbólicos.

En el caso de la física, la cual intenta describir un mundo por demás objetivo, el *universo real*, el realismo platónico se hace presente con el desarrollo de los universos en rotación. El terreno estudiado por la física no se puede reducir a la realidad observable debido a la gran cantidad de soluciones a las ecuaciones de campo de Einstein. Sin embargo, la existencia de los objetos estudiados por la física independientemente de la observación y experimentación es incuestionable, aun cuando no se pueda acceder a ellos en su totalidad.

Por otro lado, la teoría de la relatividad confirma la visión de los filósofos idealistas, en contraparte a la física pre-relativista. La transformación de Galileo refrenda el concepto heraclitiano de *devenir del ser* como una realidad básica subyacente a todas las cosas: el mundo se halla en un estado de constante cambio. Lo anterior se comprueba con la representación gráfica de la transformación de Galileo (Fig. 1.1). Si queremos conocer la posición de un observador en diferentes instantes, necesitamos dibujar para cada uno de éstos un sistema coordenado. Esto tiene diferentes consecuencias. Primero, no se puede establecer de antemano la posicion del observador en el universo para cada instante. Segundo, sólo se puede representar un número finito de posiciones (puesto que sólo se pueden dibujar un número finito de sistemas coordenados).

La transformación de Lorentz por su parte, y su representación por medio de los diagramas de Minkowski (Fig. 1.2) refrendan la visión de Parménides:

el cambio en la naturaleza es sólo aparente, parece existir, pero no tiene entidad real. La existencia del "ser absoluto" se manifiesta en los diagramas de Minkowski. Basta observar un diagrama de Minkowski para conocer la posición de un observador en cada instante, así pues, la realidad del ser no queda subyugada al cambio: *"el ser es"*.

Ciudad de México, Septiembre del 2004.

Bibliografía

- Einstein, Albert.

  [1905] *On the electrodynamics of moving bodies.*

  [1961] *Sobre la teoría especial y la teoría general de la relatividad.*

  [1971] *El significado de la relatividad.* Princeton University Press. En Einstein et al., [1993]

- Einstein, Albert, et al.

  [1993] *La teoría de la relatividad.* España. Ed. Alianza. Primera edición 1973

- Falcón, Jaime Óscar

  [2004] *Aspectos más o menos contradictorios del experimento en física.* Revista Ciencias No. 75. México. Facultad de Ciencias. UNAM.

- Feferman, Solomon, et al., eds.

  [1986] *Kurt Gödel, Collected Works, Vol I.* New York. Oxford University Press.

  [1990] *Kurt Gödel, Collected Works, Vol II.* New York. Oxford University Press.

  [1995] *Kurt Gödel, Collected Works, Vol III.* New York. Oxford University Press.

- Gödel, Kurt.

  [1931] *On formally undecidable propositions of principia mathematica and related systems.* En Feferman et al., [1986].

|1933o | *The present situation in the foudation of mathematics*. En Feferman et al., |1995|.

|1946 | *Some observation about the relationship between the Relativity Theory and Kantian Philosophy*. En Femerman et al., |1995|.

|1949 | *A remark about the relationship between the Relativity Theory and Idealistic Philosophy*. En Schilpp |1959|.

|1949a | *An example of a new type of cosmological solutions of Einstein's fiel equations of gravitation*. En Femerman et al., |1990|.

|1951 | *Some basic theorems on the foundation of mathematics and their implications*. Traducción al español de Jesús Mosterín en |Gödel 1981|.

|1952 | *Rotating Universes in General Relativity Theory*. En Femerman et al., |1995|.

|1964 | *What is Cantor's continuom problem*. En Feferman et al., |1990|.

|1981 | *Obras completas*. Ed. por Jesús Mosterín. Madrid, Alianza Editorial.

- Hacyan, Shahen.

|1995 | *Relatividad especial para estudiantes de física*. México: UNAM.

|2001 | *De la física cuántica a la metafísica kantiana*. Revista Ciencias No. 63. México: Facultad de Ciencias, UNAM.

- Hon, Giora.

|1996 | *Completeness has to be resricted: Gödel's interpretation of parametrer t*.

- Hrbacek, Karel; Jech Thomas.

|1999 | *Introduction to set theory*. New York: Marcel Dekker. Tercera edición.

- Kant, Immanuel.

|1984 | (1781) *Crítica de la razón pura*. Madrid: ed. Alfaguara.

- Lorentz, Hendrik Antoon.

[1895] *El experimento de Michalson.* En Einstein et al., [1993].

- Martin, J. L.

[1988] *General relativity. A guide to its consequences for gravity and cosmology.* England: Ellis Horwood library of physics.

- Minkowski, Hermann.

  - *Space and time.*

- Schilpp, Paul Arthur ed.

[1959] *Albert Einstein: Philosopher scientst, Vol II.* Northwestern University.

- Taylor, Edwin. Wheeler, John.

[1966] *Spacetime physics.* San Francisco: Freeman and Company.

- Yourgrau, Palle.

[1999] *Gödel meets Einstein, Time travel in the Gödel universe.* Open court. USA. Primera edición 1991.