01168

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

POSGRADO DE LA FACULTAD DE INGENIERIA

METODOS DETERMINISTAS Y ESTOCASTICOS DE OPTIMIZACION DINAMICA EN ECONOMIA Y FINANZAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN INVESTIGACION DE OPERACIONES

P R E S E N T A :

VICTOR MANUEL GARCIA GUERRERO

DIRECTOR DE TESIS: DR. FRANCISCO VENEGAS MARTINEZ

MEXICO, D. F. 2004

A mi compañera de batallas, Paulina

A mis padres Rosario y Víctor Manuel

Agradecimientos

Le agradezco en primer lugar a Dios, ya que se me ha manifestado de diversas maneras a lo largo de mi vida. Le agradezco por haberme dado salud y serenidad para alcanzar mis metas.

A Paulina, mi eterna compañera de batallas. Por tu gran apoyo en la elaboración y conclusión de este trabajo. Por tu amor incondicional, por tus consejos y por tu locura. Te agradezco todos los momentos inolvidables. Por ser el arquitecto de los sueños que poco a poco se han realizado. Por estar a mi lado en los momentos difíciles. Gracias mi querida luna por hacer de mi vida una gran aventura.

A mis padres, por su incondicional apoyo, por sus consejos y principalmente por su amor. Gracias Mamá, por enseñarme tu coraje, tu tenacidad y tu amor. Gracias Papá, por tu sabiduría, por tu paciencia y tu actitud ante la vida. Gracias mis viejos, no me alcanzará la vida para agradecerles todo lo que han hecho por mi.

A mis queridas hermanas, por su apoyo y consejos. Por ser unas grandes amigas. A mi cuñado, Fabian, por su apoyo y amistad. A mi sobrino *Fabo*, por su invaluable cariño. Por recordarme que las cosas mas sencillas de la vida son las que nos hacen más felices.

A mi asesor de tesis y amigo, Francisco Venegas, por sus consejos, apoyo y amistad. Por guiarme en este trabajo de tesis con paciencia. Gracias *Doc* por creer en mi.

A mis sinodales, Manuel Ordorica, Fernando Cruz, Edgar Ortiz y Sergio Fuentes, por todos sus consejos y apoyo en la conclusión de este trabajo.

Al Dr. Servio Tulio Guillen, por su amistad y apoyo durante mis estudios.

A mis amigos. Ivan, Memo, Gaby, Joaquin, Armando, Ray, Pedro, Ale, Liliana y Mariana *-los Chiapas-* por su amistad, cariño y comprensión. A mis amigos Eduardo, Bernardo, Hugo, Erick, Rubén y Pepe por su gran amistad, por sus consejos y apoyo en los momentos difíciles. A mis amigos becarios del aula externa del Instituto de Matemáticas. Por su incondicional amistad y apoyo.

A la UNAM, mi segunda casa. Porque su grandeza ha sido crucial en mi formación profesional.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT), por su apoyo económico a lo largo de mis estudios de posgrado.

Finalmente le agradezco a todas aquellas personas que han contribuido, de una u otra manera, en mi formación profesional y que debido a mi mala memoria he omitido.

"Hay hombres que luchan un día y son buenos.
Hay otros que luchan un año y son mejores.
Hay quienes luchan muchos años y son muy buenos.
Pero hay los que luchan toda la vida: Esos son los imprescindibles".

–BERTOLT BRECHT–

Índice general

Introducción

En la actualidad, la búsqueda de soluciones a los problemas económicos requiere de un planteamiento multidisciplinario que integre diversas áreas del conocimiento científico. En particular, el análisis financiero es la disciplina que más se ha combinado con la economía en el modelado del comportamiento de los agentes y de los mercados en que estos participan. Asimismo, entre las herramientas matemáticas que se utilizan para resolver muchos de los problemas económico-financieros destaca la optimización dinámica, la cual agrega las técnicas del cálculo de variaciones, el control óptimo y el control óptimo estocástico. En el caso estático, todo análisis se efectúa para un punto en el tiempo. En el caso dinámico el análisis se efectúa a lo largo de un intervalo de tiempo. En términos matemáticos, el problema consiste en determinar trayectorias de ciertas variables que maximizan o minimizan un funcional expresado en forma de integral.

La economía no es una disciplina claramente definida. Sus fronteras son ampliadas constantemente y por ello su definición está sujeta a controversias. Por un lado, la economía es definida como la rama de las ciencias sociales que estudia el intercambio entre bienes y servicios, así como de activos y riesgos, en una sociedad[1], por otro lado, se define la economía como el problema de una sociedad para asignar una cierta cantidad de recursos escasos para diferentes fines. En este trabajo, la economía se estudia como los agentes económicos, es decir: individuos que buscan la maximización de su bienestar a través de la producción, consumo y distribución de bienes, así como la manera de encontrar la mejor alternativa en la distribución de recursos escasos.

El propósito de este trabajo es demostrar la importancia de los métodos de optimización dinámica en el planteamiento y solución de distintos problemas económicos y financieros. En particular se estudian cuatro problemas económicos y dos problemas financieros. Las técnicas deterministas se emplean en el plan-

[1]Asimismo, las finanzas son definidas como un área de la economía que estudia como se intercambian los activos y riesgos en una sociedad.

teamiento y solución de dos, de los cuatro, problemas económicos. El resto de los problemas se resuelven por medio del control óptimo estocástico. Las técnicas deterministas utilizadas son: el cálculo de variaciones y el control óptimo determinista. Para el estudio del control óptimo determinista se necesitan algunos resultados teóricos importantes de programación dinámica determinista. Por ello, se incluye un capítulo que presenta la ecuación de Bellman-Euler-Lagrange, la condición de Legendre, la condición de Weierstrass y la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman. Asimismo, en el estudio del control óptimo estocástico se utilizan algunos conceptos teóricos sobre programación dinámica estocástica, por lo cual, se incluye un apartado en el que estos conceptos se resuelven, específicamente, para los problemas que se plantean en el quinto capítulo.

El primer problema económico que se plantea es un modelo para maximizar la utilidad de un consumidor racional que satisface sus necesidades por medio de un bien de consumo perecedero. Se revisan distintos modelos de la función de utilidad. Este problema se plantea y resuelve por medio del cálculo de variaciones.

En el marco teórico de la micro y macroeconomía se presenta un conjunto de modelos de optimización en tiempo continuo, donde los individuos tienen como objetivo determinar las trayectorias de consumo, producción e inversión (variables de control) que le brindarán un mayor beneficio. El segundo problema económico es un modelo de crecimiento económico que explica endógenamente los determinantes del mismo. Este problema considera aspectos como, consumo, producción e inversión. Asimismo, el modelo propuesto describe el comportamiento de la dinámica de las trayectorias de consumo y capital de los agentes. En el planteamiento del problema se supone que el producto marginal del capital se mantiene constante en el tiempo. Por ello, se plantea el problema de decisión de un consumidor, que desea maximizar su utilidad por un bien de consumo perecedero, como un problema de control óptimo determinista en tiempo continuo. Se utilizan distintas funciones de utilidad en las que se examinan las decisiones óptimas del consumidor, para ello se diseñan algunas subrutinas de MATLAB©.

En los problemas que se plantean y resuelven por medio del control óptimo estocástico, se utiliza la programación dinámica para obtener las decisiones óptimas del consumidor sobre los recursos que dispone. Estas decisiones, independientemente del estado inicial y de las decisiones restantes, también constituyen una política óptima. El primer problema que se resuelve es el modelo neoclásico de crecimiento económico óptimo bajo incertidumbre, donde un individuo, llamado planeador central, desea maximizar el bienestar de todos los agentes económicos y tiene la facultad de decidir sobre las trayectorias de consumo e inversión de la economía. En este contexto, se supone que las variaciones del tamaño de la fuerza de trabajo se rigen por una ecuación diferencial estocástica. En este modelo se busca determinar las trayectorias de consumo y de capital que maximizan el bienestar de la economía. El segundo problema es el modelo de selección óptima de portafolio bajo incertidumbre. Cuando los individuos desean optimizar su cartera de inversión y saber las trayectorias de consumo y riqueza que maximizan su bienestar, se plantea este modelo. En este problema un individuo se enfrenta al problema de optimizar su cartera de inversión, la cuál cuenta con dos activos, uno de renta variable y otro de renta fija. Los rendimientos de la cartera de inversión son estocásticos. En estos problemas se plantean las restricciones como ecuaciones diferenciales estocásticas. Asimismo, para ambos problemas, se encontrará la estructura que deben presentar las variables de control y de estado para que se cumplan las condiciones necesarias de optimalidad.

Por último, se utiliza el control óptimo estocástico para plantear y solucionar dos problemas económico-financieros actuales. El primero de ellos es un problema de maximización de utilidad con productos derivados. En este problema se propone un método para obtener la dinámica del precio de un producto derivado de un activo con riesgo. Con este método, un consumidor inversionista racional, podrá determinar su trayectoria de consumo y el portafolio de inversión que maximice su utilidad total esperada. En el segundo problema se determina el portafolio de activos y la cantidad de consumo que maximizan la satisfacción de un consumidor. Esta satisfacción se encuentra determinada por un bien de consumo y por la acumulación de riqueza real. En este problema, la dinámica del precio de bien y el rendimiento de los activos disponibles en la economía, se rigen por una ecuación diferencial.

En este trabajo se explica la importancia del uso de los métodos de optimización dinámica en los problemas de economía y finanzas. Asimismo, se clasifican y resumen los resultados teóricos más importantes y se plantean y resuelven algunos problemas representativos.

Este trabajo se divide en cinco capítulos. En el primer capítulo, se estudian los antecedentes de optimización dinámica, de la teoría económica y de la teoría financiera. En el segundo capítulo se estudia el cálculo de variaciones. Este capítulo se encuentra dividido en tres secciones. En la primera sección, se explican algunos de los conceptos básicos y algunas propiedades de estos que el lector debe conocer para comprender mejor este tema. Algunos de estos conceptos son: espacio métrico, norma de una función, bola abierta y funcional. En la segunda sección, se explican las condiciones necesarias de optimalidad por medio de la demostración de la ecuación de Euler para tres problemas que se presentan frecuentemente en economía. Finalmente, en la última sección, se resuelve el problema económico de un consumidor inversionista con vida infinita que desea maximizar su utilidad por un bien perecedero, este problema es planteado y analizado para cuatro funciones de utilidad distintas. En el tercer capítulo, se estudian el control óptimo determinista y el control óptimo estocástico. En la sección destinada al control óptimo determinista se formula el modelo general y se desarrollan los conceptos básicos que muestran la validez matemática del principio del máximo de Pontryagin. Se formula el problema de horizonte infinito y se resuelve el problema económico de crecimiento endógeno para cuatro funciones de utilidad distintas. Asimismo, se elaboran algunas subrutinas en MATLAB© para las distintas funciones de utilidad. En la sección de control óptimo estocástico se estudian las condiciones de primer orden que se utilizan para resolver el modelo neoclásico de crecimiento económico óptimo bajo incertidumbre, el modelo de selección óptima de portafolio bajo incertidumbre, el problema de maximización de utilidad con productos derivados y el problema del consumidor estocástico. En el cuarto capítulo, se explican las técnicas de programación dinámica determinista y estocástica que son utilizadas en problemas de control óptimo determinista y control óptimo estocástico, tales como la ecuación de Bellman-Euler-Lagrange y su uso para desarrollar las condiciones de Legendre y de Weierstrass. Así como, la condición de primer orden de Hamilton-Jacobi-Bellman para el problema de maximización de utilidad con productos derivados y el problema del consumidor estocástico. Finalmente, en el capítulo cinco, se plantea y resuelve el problemas de maximización de utilidad con productos derivados y el problema del consumidor estocástico.

Capítulo 1

Antecedentes

Los estudios teóricos sobre optimización, matemáticas, economía y finanzas se encuentran respaldados por siglos de estudios científicos en estas áreas. La optimización dinámica es un conjunto de métodos que han sido desarrollados por diversas áreas científicas durante distintas etapas de la historia. En este trabajo, los métodos que constituyen la optimización dinámica son aplicados en algunos problemas básicos que estudia la economía y las finanzas. Por ello, es necesario que el lector conozca algunos de los antecedentes históricos de las disciplinas antes mencionadas. El presente capítulo se encuentra dividido en tres secciones. En la primera sección se estudian los antecedentes históricos de los distintos métodos que forman parte de la optimización dinámica y se explican algunas generalidades sobre la teoría de optimización. En la segunda sección se puntualizan algunos aspectos fundamentales de la historia económica que serán utilizados en los capítulos siguientes. Por último, en la tercera sección se revisan algunos aspectos históricos de la teoría financiera. En particular, se estudian los fundamentos de la teoría de productos financieros derivados.

1.1. Antecedentes de Optimización Dinámica

Los modelos de optimización que en este trabajo se desarrollan, tienen sus fundamentos en el Calculo de Variaciones, la Teoría del Control Óptimo y la Programación Dinámica. El cálculo de variaciones posiblemente nació alrededor del año 850 a.c., cuando el poeta Virgilio relató como la reina Dido fundó la ciudad de Cartago. La reina cortó la piel de un toro en tiras pequeñas para hacer una cuerda de longitud l y al utilizar la costa del mar mediterráneo como un costado de la ciudad, el problema al que se enfrentó fue el encontrar una curva de longitud l que encerrara la mayor cantidad de área que iniciara en un punto de la costa y terminara en otro punto de la misma. Sin embargo, los primeros estudios formales con fundamentos matemáticos se le atribuyen al suizo Johann Bernulli (1667–1748) al proponer el problema de la Braquistocrona[1]. Este problema se establece como sigue: *dados dos puntos en el mismo plano, pero no en la misma recta vertical hay que encontrar la curva que los une de tal manera que si una partícula que se deslice sobre ella, vaya de un punto al otro en el tiempo mínimo.* No fue sino hasta mediados del siglo XVIII que el cálculo de variaciones alcanza un importante desarrollo con los trabajos de Euler (1707–1783) y Lagrange (1736–1813).

Euler publicó en 1744 el primer libro de cálculo de variaciones, titulado "Método de búsqueda de líneas curvas con propiedades de máximo o mínimo". En 1755 Lagrange creó el "Método General Analítico"en el que introduce la variación de una función y las reglas del cálculo diferencial a estas variaciones. De ahí el nombre de cálculo de variaciones. Otras aportaciones importantes se encuentran en los trabajos de Legendre (1752–1833), Jacobi (1804–1851), Hamilton (1805–1865), Weiestrass (1805–1897), Bolza (1857–1942) y Bliss (1876–1851)[2]. Las aplicaciones más importantes del cálculo de variaciones han sido en física y economía.

La Teoría del Control se desarrolló en Estados Unidos en la década de los treinta, del siglo XX. Esta teoría se aplicó en la ingeniería eléctrica y mecánica ya que en los modelos de esta época se trataba de evitar la inestabilidad en los sistemas de regulación. Asimismo, durante la segunda guerra mundial aparecieron sistemas de control aplicados a servomecanismos y a sistemas de persecución, por ejemplo: el sistema de control de las armas requeridas para alcanzar objetivos móviles con ayuda del radar. Gran parte de la teoría requerida para los fines bélicos fue desarrollada tiempo atrás por los ingenieros en comunicaciones. En esta época aparece la denominada Teoría Clásica del Control con la que se verificó que las ecuaciones diferenciales utilizadas para describir sistemas dinámicos eran a menudo inestables pero utilizando resultados como la Transformada de Laplace se podía inferir en el sistema. El problema de esta teoría era que estaba limitada a sistemas lineales con una sola variable.

No fue sino hasta 1960 con el trabajo de Kalman, en el cual se introdujo el concepto de controlabilidad y de observabilidad, así como con los trabajos sobre optimización de Bellman (1957) y Pontryagin (1962) que se dio origen a lo que se conoce como la Teoría del Control Óptimo. Fue así como el control

[1]Que en griego significa: "tiempo mínimo".

[2]Ver Ize [26]

óptimo se introdujo no sólo en las áreas referentes a las ingenierías, sino en la biología, economía, medicina y ciencias sociales, entre otras. Cabe señalar que el control óptimo tuvo gran influencia en los modelos que se utilizaron en el programa espacial americano.

En la economía, el control óptimo aportó grandes aplicaciones a la teoría de crecimiento económico. En la actualidad las empresas utilizan los modelos de control óptimo para el estudio de problemas de control de inventarios, selección óptima de inversiones, mantenimiento y reemplazo de equipo, planeación de producción, mercadotecnia, etcétera.

Un aspecto muy importante en la historia del control óptimo es su relación con la macroeconomía. Durante los años sesenta, del siglo XX, hubo gran interés por el uso del control óptimo y la econometría, a tal grado que fue en esta década que se alcanzó gran madurez en ambas disciplinas y su desarrollo llegó a la naciente industria del software, la cuál realizo sistemas muy útiles para estas áreas. No obstante, a finales de la década de los setenta la naciente escuela de la macroeconomía clásica descalificó y rechazo el uso del control óptimo como una herramienta básica para el análisis de políticas económicas alternativas en el planteamiento de modelos econométricos. En la actualidad el control óptimo constituye el principal instrumento matemático de la nueva macroeconomía clásica, ya sea en el enfoque tradicional o nuevo los métodos de la teoría de control son utilizados en el análisis micro y macroeconómico.

Los problemas de optimización tienen una estructura básica, que consiste de funcionales que toman valores en algún subconjunto de $\mathbb{R}^n$ los cuales se desean maximizar o minimizar sujetos a un cierto conjunto de restricciones. Es decir, tienen la siguiente estructura:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar (Minimizar)} \quad & f(x) \\ \text{sujeto a} \quad & x \in X, \end{aligned}$$

donde se desea encontrar el valor de x^* tal que $f(x^*) \gtreqless f(x)$, según sea el caso. Dicha solución puede no existir, por ello es necesario verificar la existencia de al menos una solución óptima. Esta solución existe si el conjunto X es finito. En algunos casos en que X no es finito, la existencia de una solución se garantiza si la función f es continua y X es un conjunto compacto sobre $\mathbb{R}^n$. A este resultado se le conoce como el teorema de Weierstrass. Asimismo, para solucionar un problema de optimización se requiere de ciertas condiciones necesarias y suficientes de optimalidad. Estas condiciones son disponibles cuando la función f es diferenciable sobre $\mathbb{R}^n$ y X es un conjunto convexo. Por ejemplo, si x^* es una solución del problema de optimización a minimizar, f es una función diferenciable de clase

C^1 y X es un conjunto convexo, se tiene que

$$\nabla f(x^*)(x - x^*) \geq 0, \quad \text{para toda} \quad x \in X,$$

donde $\nabla f(x^*)$ denota el gradiente de f en x^*. Del mismo modo, si $X = \mathbb{R}^n$ se tiene que la condición necesaria es

$$\nabla f(x^*) = 0.$$

Así bien, si f es una función dos veces diferenciable, es decir, de clase C^2, y $X = \mathbb{R}^n$, una condición necesaria es que la matriz Hessiana $\nabla^2 f(x^*)$ sea positiva semidefinida. Un resultado muy importante es que si la función f y el conjunto X son convexos entonces las condiciones necesarias que se mencionaron también son condiciones suficientes.

1.2. Antecedentes de Economía

La economía[3] es una ciencia muy controversial. Los temas de estudio que abarca son los que han fascinado al hombre a través de todos los tiempos. El objeto de esta ciencia social es uno de los mayores dramas humanos: los esfuerzos del hombre por conseguir lo que necesita para satisfacer la creciente cantidad de necesidades que le provocan bienestar. Este drama se ve afectado por una constante disminución de recursos con los que puede satisfacer sus deseos. Los seres humanos han vivido en diversas formas de uniones sociales; por ello, la economía se ocupa del hombre como miembro de la sociedad y su problema central es el de la conducta del hombre en la sociedad.

La historia económica, es muy extensa y su origen incierto, por lo que se sitúan los primeros estudios económicos en la antigua Grecia cuyos principales pensadores al respecto fueron Jenofonte, Platón y Aristóteles, quienes realizaron estudios sobre la teoría del valor, las ideas relativas al dinero y los préstamos. Como se mencionó, la historia económica es muy extensa y tratar todos los antecedentes históricos sobrepasa el objetivo de este trabajo, por ello se recomienda al lector interesado revisar el trabajo de John Ferguson [20].

La teoría económica trata del estudio de modelos que describen el comportamiento de los agentes económicos. Asimismo, está interesada en la interacción entre dichos agentes y se encuentra dividida en dos enfoques: micro y macro. En

[3]La palabra "economía" se deriva del griego *oikonomike* (*oikos*="todo lo que se posee", *nomos*="administración").

el enfoque micro se estudia el comportamiento de las unidades económicas individuales, tales como: las economías domésticas, las empresas, la determinación de los precios en mercados aislados y los efectos del monopolio sobre mercados específicos. En el enfoque macro se estudia el comportamiento de la economía como un todo, por ejemplo: las etapas de expansión y recesión, la producción total de bienes y servicios, el crecimiento de la tasa de inflación y desempleo y la balanza de pagos. La balanza de pagos es el registro de las transacciones de la economía con el resto del mundo, en ella hay dos cuentas principales: la cuenta corriente y la cuenta de capital. La cuenta corriente[4] registra el comercio de bienes y servicios así como los pagos de transferencia[5]. La cuenta de capital contabiliza las compras y ventas de activos tales como: acciones, bonos, tierra, etcétera. Finalmente, si se añaden las transferencias netas se obtiene la balanza en cuenta corriente y de los tipos de cambio. Esta se centra en el estudio de las políticas económicas y de las variables políticas como son: la política fiscal[6], la política monetaria[7], la cantidad de dinero, las tasas de interés, la deuda pública y el presupuesto del gobierno. También constituye un reto el reducir los complicados detalles de la economía a sus elementos fundamentales. Estos elementos radican en las interacciones existentes entre los mercados de bienes, de trabajo y de activos de la economía.

Dos de las grandes teorías económicas son: la teoría neoclásica y la teoría keynesiana. En los modelos neoclásicos el empleo de todos está garantizado, la política fiscal y monetaria no tienen efecto en la producción ni en el empleo. Mientras que en los modelos keynesianos, el empleo de todos no está garantizado automáticamente y la cantidad de empleo y producción se determina por la política monetaria y fiscal.

Así bien, el problema de economizar puede ser abordado a través de distintos modelos de programación matemática, definida como la selección de valores de ciertas variables para maximizar (o minimizar) una función sujeta a restricciones. Las variables del problema económico sintetizan la selección de alguna trayectoria en particular, la función objetivo sintetiza los deseos del agente económico y las restricciones sintetizan la escasez de recursos. Es por ello que, matemáticamen-

[4]Se encuentra estrechamente relacionada con la cuenta corriente la balanza comercial, que contabiliza simplemente el comercio de bienes y si se le añade el comercio de servicios se obtiene la balanza de bienes y servicios.

[5]En los servicios se incluyen: fletes, pagos por patentes y por intereses. Los pagos de transferencia consisten en: remesas, donaciones y subvenciones. Si los ingresos derivados del comercio de bienes y servicios y de las transferencias superan los pagos por dichos conceptos se dice que existe un superávit en cuenta corriente.

[6]La política fiscal es la política del gobierno, en relación con los niveles de gasto público, transferencias y con la estructura de los impuestos.

[7]La política monetaria es la política de los bancos centrales en relación con incrementos o decrementos en la cantidad real de dinero sobre las tasas de interés y el nivel del ingreso.

te, el problema de economizar es el de seleccionar trayectorias del conjunto de oportunidades tal que maximicen (o minimicen) la función objetivo. El presentar modelos matemáticos tiene sus ventajas: el lenguaje que se utiliza es más conciso y preciso, existe una riqueza extraordinaria de teoremas matemáticos a nuestro servicio, se fuerza a establecer explícitamente todas nuestras suposiciones como un requisito para los teoremas matemáticos y permite tratar el caso general de n variables.

Cuando es modelado el comportamiento de las empresas se describe al objetivo como la maximización de los beneficios y a las restricciones como límites tecnológicos y de mercado. Asimismo, cuando es modelado el comportamiento de los consumidores se describe al objetivo como la maximización de la utilidad y a las restricciones como límites presupuestales.

1.3. Antecedentes de Finanzas

La historia financiera de la humanidad es tan antigua como la humanidad misma. Una constante de la teoría financiera ha sido, y es, la especulación. Los procesos especulativos han vencido a personajes ilustres de la historia. Tal es el caso de Sir Isaac Newton. Newton ha pasado a la historia de la humanidad como uno de los grandes pensadores que esta ha tenido. A la edad de 25 años, durante la epidemia de peste en 1665, desarrolló grandes avances en matemáticas, óptica, física y astronomía. Esto le valió el cúmulo de una gran fortuna, ya que después de sus primeros avances científicos fue recomendado para ocupar el puesto en la silla Lacasiana en 1669; después fue electo miembro de la Royal Society en 1672 y esto lo llevó a ser nombrado director de la Casa de Moneda en 1699. Este último puesto le proporcionaba grandes ingresos económicos lo que lo llevo, alrededor de 1711, a invertir sus ahorros en una empresa que parecía muy prometedora, la South Seas Company (SSC).

Mientras tanto Inglaterra y España se encontraban en guerra. Esta guerra le había dejado al gobierno inglés una deuda de 10,000,000£[8]. La SSC compró 9,000,000£ de la deuda inglesa, por la que recibiría el seis por ciento anual de beneficios. Además recibió el monopolio del comercio con los mares del sur. Así fue como se concibió a la SSC como una compañía con acciones transferibles. El dueño de la empresa, Robert Harley, obligó a que todos los poseedores de deuda del gobierno inglés convirtieran sus papeles de deuda en acciones de la

[8] En el siglo XIII, una familia de clase media podía vivir con holgura durante un año con 200£

SSC, lo cuál la convirtió en una compañía sumamente atractiva. Así fue como la SSC comenzó a ser una de las más importantes en Europa ya que los directivos invirtieron en marketing lo que llevo a que se emitieran acciones de más, con el fin de que el pueblo en general comprara acciones. Esto creó un sistema de bombeo financiero que requería de más dinero para sostenerse. Sin embargo, la paz de Utrech en 1713, las restricciones puestas entonces por el rey Felipe V de España y el incremento en la mortalidad de los esclavos transportados por los barcos, llevó a malos manejos de la compañía (al estilo ENRON). Esto culminó con un crash económico a finales de 1720. Muchas familias se declararon en ruina, entre ellas la de Isaac Newton quien, a pesar de su genio científico, perdió mas de 20,000£.

A pesar de que la especulación siempre ha sido parte de los mercados financieros su estudio comenzó hasta principios del siglo XX. El nacimiento de las matemáticas financieras se puede datar el 29 de marzo de 1900, fecha en que un joven estudiante de Henri Poincaré finalizó su disertación doctoral. El nombre de este estudiante era Louis Jean-Baptiste Alphonse Bachelier. El título del trabajo de Bachelier fue "Théorie de la spéculation", en el cual sugería una descripción probabilista sobre las fluctuaciones de precios en los mercados financieros. Esencialmente desarrolló las herramientas matemáticas para explicar como el movimiento Browniano[9] es aplicable en la modelación de la dinámica de los precios de activos.

Años mas tarde, en 1944, Itô utilizó este trabajo como motivación para introducir su cálculo y una variante del movimiento Browniano, el movimiento Browniano geométrico. El movimiento Browniano geométrico ha llegado a ser un modelo importante para el mercado financiero. Su significado económico fue reconocido en el trabajo de Paul S. Samuelson en 1965, quien por sus contribuciones obtuvo el premio Nobel de economía en 1970. En 1973, Fisher Black (1938-1995) y Myron Scholes, así como, de forma independiente, Robert Merton utilizaron el movimiento Browniano geométrico para construir la teoría para determinar el precio de opciones sobre acciones. Esta teoría representa el pilar en el desarrollo de las matemáticas financieras y las formulas de valuación que han resultado de este desarrollo se han convertido en herramientas indispensables en el mercado de capitales. Por estos trabajos, Scholes y Merton fueron galardonados con el premio Nobel de economía en 1997. Aunque estas formulas son ampliamente aplicables, no son perfectas. Existe un parámetro muy importante, la volatilidad, que debe ser ajustado de manera empírica para poder realizar predicciones útiles.

[9]Cinco años antes de que Einstein publicara un articulo muy famoso al respecto: "Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geförderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen" en el anuario de física, 17 num. 549.

En los últimos años los físicos han dado un giro al paradigma de su profesión y han encontrado en la economía un área fértil para la aplicación de sus conocimientos. Los físicos han denominado "Econofísica" a esta nueva área del conocimiento y su objetivo ha sido el comprender la discrepancia en los mercados financieros entre la teoría y práctica por diversos medios, desde el análisis estadístico de la evolución de los precios de los activos hasta modelos de comercio microscópico.

Los economistas suelen definir a un mercado como un lugar físico, donde vendedores y compradores se reúnen para el intercambio de productos o mercancías. En cada instante del tiempo los productos tienen un precio al contado $S(t)$. El precio al contado se encuentra determinado por la interacción de la oferta y la demanda en una economía con mercados libres. Un tipo especial de mercado es el mercado financiero, en donde el producto de intercambio es el dinero. En el mercado financiero, grandes sumas de dinero son prestadas e invertidas en mercancías, como metales o productos perecederos, y en valores, como bonos o acciones. Existen dos lugares donde es posible invertir, ya sea en la bolsa de valores[10] o en venta por corredor[11]. Sin embargo, todos los participantes del mercado accionario quieren obtener más dinero al final de la jornada, nadie quiere tener perdidas. El objetivo de la administración de riesgo consiste en encontrar las fuentes potenciales de pérdidas y en inventar nuevas estrategias para limitar, lo mas posible, el inevitable riesgo. La administración de riesgos comienza con la clasificación de riesgos. Existen tres diferentes tipos de riesgo: riesgo de crédito[12], riesgo operacional[13] y riesgo de mercado[14].

Por otro lado, los supuestos mas importantes acerca del mercado se establecen dentro de la hipótesis de mercados eficientes, la cuál sugiere que este debe comportarse como un proceso de Markov. La hipótesis de mercados eficientes, establece lo siguiente: un mercado es llamado eficiente si

[10] La bolsa de valores es un mercado organizado en donde las acciones, equivalentes de acciones ordinarias y bonos son negociados por los miembros de la bolsa, los cuales actúan como agentes y como principales.

[11] Este término es la traducción del termino "over the counter" que, en la práctica, es mas utilizado. El mercado de venta por corredor es un mercado en el cual las transacciones de valores se conducen por medios telefónicos y redes de computo que conectan a los negociantes en acciones y bonos, y no en el piso de remates de una bolsa de valores.

[12] Riesgo financiero y moral relativo a que una obligación no sea pagada y que esto produzca una pérdida.

[13] Un riesgo operacional, significa que las prácticas y políticas internas de una empresa no son lo suficientemente flexibles como para proteger a ésta de las condiciones adversas del mercado así como de los errores tecnológicos y humanos que puedan ocurrir durante el proceso financiero.

[14] Es la parte del riesgo de un título que es común para todos los títulos de la misma clase en general (bonos y acciones) y por tanto no puede ser eliminado por la diversificación. Se le conoce también como riesgo sistemático. La medida de este riesgo es el coeficiente beta.

i) los participantes rápidamente y de forma comprensiva obtienen toda la información relevante del mercado;

ii) tiene liquidez. Es decir, que un inversionista puede comprar o vender fácilmente un producto financiero en cualquier momento. Entre mayor liquidez tenga el mercado, más seguro es para invertir. Es decir, el inversionista sabe que siempre es posible cambiar sus activos por dinero en efectivo;

iii) existe una baja fricción de mercado. La fricción de mercado es un expresión colectiva para todo tipo de costos de comercialización. Esto incluye comisiones, costos de transacción, impuestos, etcétera.

La hipótesis de mercados eficientes establece que un mercado con las propiedades *i*, *ii* y *iii* procesa la información nueva de una forma tan eficiente, que toda la información actual, sobre la evolución del mercado, se encuentra completamente contenida, en cada momento, en los precios presentes. Es decir, no es posible obtener ventaja alguna si se toman en cuenta todos, o parte de los precios. Esto se resume en que el mercado se debe comportar como un proceso de Markov.

1.3.1. Productos Derivados

Un derivado es un producto financiero cuyo valor se deriva del precio de un activo subyacente. El activo básico es denominado subyacente y el derivado es denominado contingente. Matemáticamente, si el subyacente se encuentra caracterizado por su precio de contado $S(t)$ entonces el derivado es tan solo una función de $S(t)$.

Existen dos tipos de derivados básicos: los futuros y las opciones. Los futuros se conciben bajo el mismo esquema de los contratos forward. Un forward es un contrato entre dos partes, en donde una de las partes adquiere el compromiso de comprar una cantidad del bien subyacente (posición larga) en una fecha T preestablecida (fecha de entrega) a un precio especificado K (precio de entrega), mientras que la otra parte se compromete a vender la misma cantidad del bien subyacente en la fecha T al precio K (posición corta).

A diferencia del forward, un futuro es un contrato cuyas características no pueden ser negociadas independientemente. Es decir, los futuros se encuentran estandarizados y su comercialización es por medio de intercambio. Dicho intercambio requiere que ambas partes hagan un depósito en garantía, denominado margen. El margen es un deposito de buena fe que debe hacer un inversionista cuando compra o vende un contrato. Si el precio de los futuros se mueve adversamente, el inversionista debe depositar más dinero para cumplir con los requisitos del margen. De otra manera se le descuenta. Estas reglas de intercambio prácticamente eliminan el riesgo de crédito, en contraste de los contratos forward over-the-counter.

La motivación que lleva a un inversionista a firmar un contrato, de cualquier producto derivado, es eliminar el riesgo de mercado que conlleva la evolución incierta del precio del activo a través del tiempo. Los futuros sobre mercancías se han comercializado en operadoras organizadas desde la mitad del siglo XIX, especialmente en Estados Unidos. En 1948 fue fundado el Chicago Board of Trade y otras operadoras en los años siguientes, en Nueva York y Londres. Por otro lado, los futuros sobre productos financieros son relativamente recientes. En 1972 un área del Chicago Mercantile Exchange, llamada International Money Market, inicio el comercio de futuros financieros. En Inglaterra la London International Financial future Exchange fue establecida en 1982 y en Alemania Este mercado dio inicio hasta 1990 con la fundación de la Deutsche Terminbörse.

Por otro lado, las opciones, son contratos en los cuales tan solo una de las partes asume la obligación y la otra parte obtiene el derecho. existe una gran cantidad de opciones. La más simple de ellas es la opción europea. Una opción europea es un contrato entre dos partes en donde el vendedor de la opción (suscrito) garantiza la comprador de la opción (tenedor) el derecho de comprar (opción call) al suscrito o de venderle (opción put) un subyacente con precio actual en efectivo de $S(t)$ a un precio K (precio de ejercicio) en una fecha futura T (fecha de maduración). Como se puede observar el suscriptor es la única de las partes que tiene una obligación. El suscriptor debe comprar o vender el bien subyacente a precio de ejercicio en la fecha de maduración. Por otro lado el tenedor tiene la posibilidad de ejercer su opción o no. El tenedor únicamente va a explotar su derecho si obtiene ganancias, es decir, si $S(T) > K$ para una opción call. De otra manera puede comprar el subyacente a un precio menor del precio de mercado $S(T) < K$. Claramente el suscriptor no adquiere esta obligación sin que exista una compensación de por medio. Así bien, la pregunta central respecto a las opciones es: ¿Cuánto debe costar una opción? La teoría desarrollada por Black, Scholes y Merton proporciona una respuesta a esta pregunta en cuanto a opciones Europeas se refiere.

Uno de los registros más antiguas respecto al uso de opciones se encuentra en Holanda, durante el siglo XVII. En aquella época hubo un gran auge por los tulipanes, a tal grado que los propietarios de estas flores querían protegerse de las fluctuaciones del valor monetario que estas tenían. Sin embargo, la "tulipomanía" llevo a sobrevalorar los tulipanes. Muchas familias pusieron en garantía todos sus bienes, esto culminó con un crash financiero, entre 1635 y 1637, que las dejó en la ruina.

Después de esa mala experiencia las opciones tuvieron muy mala fama en Europa por mucho tiempo. Esta mala fama disminuyó conforme pasaba el tiempo y se formulaban leyes que regulaban mejor los contratos de opciones. Esto comenzó en Londres, alrededor del siglo XVIII, aunque no fue sino hasta 1930 que el intercambio de opciones fue sustentado sobre leyes más rígidas y tuvieron que pasar 40 años más para que las opciones comenzaran a tener la importancia que las ha llevado a consolidarse hasta hoy en día.

En 1973 se inauguró la primera operadora mundial de opciones, la Chicago Board Options Exchange, con sede en la ciudad de Chicago. Antes de que esta operador abriera, todos los contratos de opciones se comerciaban de la forma over-the-counter. Actualmente las opciones Europeas son las más comunes y simples. Sin embargo, la evolución de los modelos de opciones no se ha detenido. En muchas operadoras del mundo se puede comerciar con opciones Americanas y con opciones exóticas. Las opciones Americanas son muy parecidas a las Europeas, a diferencia que el tenedor de la opción puede ejercerla en cualquier momento anterior a la fecha de expiración del contrato. Las opciones exóticas pueden tener estructuras de pago muy complejas o que dependan de más de un bien subyacente o cuyo valor sea determinado por la evolución completa del valor del bien subyacente y no solo de su valor final.

El mercado de opciones y futuros se ha extendido los últimos 30 años debido a que ofrecen alternativas muy particulares para cada tipo de inversionista. Asimismo, a pesar de que son productos con los que se puede especular, sirven como herramienta para la disminución del riego de mercado.

Encontrar el precio correcto para los productos derivados puede representar un gran reto. En la práctica se buscan e inventan nuevos productos financieros mas complejos. Pero si no se encuentra el precio correcto para estos instrumentos, pueden ocurrir catástrofes financieras. Es por ello que es indispensable, en nuestros días, comprender la estructura de estos productos y saber como evaluar correctamente los riesgos involucrados con ellos.

Capítulo 2

Cálculo de Variaciones

La economía y las finanzas son fundamentadas en una gran variedad de problemas de optimización. Frecuentemente, se optimizan funcionales representados por integrales cuyas posibles soluciones pertenecen a algún espacio de funciones. Bajo este esquema, una de las técnicas de solución de uso más común es el cálculo de variaciones, el cuál es una de las ramas principales del Análisis Funcional. En la sección 2.1 son explicados algunos conceptos básicos del cálculo de variaciones, tales como: funcional, espacio de funciones, espacio normado y las propiedades que debe satisfacer y el concepto de bola abierta. En la sección 2.2 se abordan algunos de los problemas más representativos del cálculo de variaciones para explicar las condiciones necesarias de optimalidad y la importancia que tiene el uso de la diferencial de Fréchet en ello. En la sección 2.3 se exponen algunos ejemplos económicos que se resuelven con el cálculo de variaciones.

2.1. Conceptos Básicos

El cálculo de variaciones resuelve el problema de encontrar una función dentro de un conjunto factible (o admisible) de funciones de tal manera que un problema en específico sea optimizado. Análogamente es encontrar el punto óptimo dentro de un conjunto de puntos factibles para un problema de programación matemática.

En los problemas que se van a tratar a lo largo de este trabajo se utiliza como variable independiente al tiempo t y como variable dependiente a una función $f(t)$. Se definen a y b como dos números reales tales que $a < b$. Se considera el intervalo cerrado $[a, b]$ y se define el siguiente conjunto de funciones:

$$\Omega = \{f \ : \ [a, b] \rightarrow \ \mathbb{R} \mid f \text{ es de clase } C^2\},$$

que f sea de clase C^2 significa que posee derivadas primera y segunda continuas. En el conjunto Ω se consideran las operaciones usuales de suma y producto por un escalar:

(i) Para $f_1, \ f_2 \ \in \Omega$ y $t \in [a, b]$, se define

$$(f_1 + f_2)(t) = f_1(t) + f_2(t).$$

(ii) Para $f_1, \ f_2, \ f_3 \ \in \Omega$ y $t \in [a, b]$, se define

$$f_1(t) + f_2(t) = f_2(t) + f_1(t), \qquad \text{y}$$

$$[f_1(t) + f_2(t)] + f_3(t) = f_1(t) + [f_2(t) + f_3(t)].$$

(iii) Para cualquier $f_1 \in \Omega$ y $t \in [a, b]$, existe un elemento $0 \in \mathbb{R}$, tal que

$$f_1(t) + 0 = f_1(t).$$

(iv) Para todo $f_1 \in \Omega$ existe $f_2 \in \Omega$, tal que

$$f_1(t) + f_2(t) = 0 \ \Leftrightarrow \ f_2(t) = -f_1(t).$$

(v) Para $1, \ \alpha, \ \beta \in \mathbb{R}$, $f_1, \ f_2 \in \Omega$ y $t \in [a, b]$, se define

$$\begin{aligned}
(\alpha + \beta)f_1(t)) =& \alpha f_1(t) + \beta f_1(t) \\
\alpha(f_1(t) + f_2(t)) =& \alpha f_1(t) + \alpha f_2(t) \\
1 \cdot f_1(t) =& f_1(t) \\
(\alpha f_1(t)) =& \alpha f_1(t) \text{ y} \\
\alpha(\beta f_1(t)) =& (\alpha\beta) f_1(t).
\end{aligned}$$

Cuando Ω cumple con las propiedades (i)–(v) se dice que tiene estructura de un espacio lineal real[1].

En los espacios lineales es natural pensar en la distancia entre dos elementos de dicho espacio. Por lo cual, se dice que un espacio lineal Ω es normado si para

[1]Se pueden considerar espacios lineales complejos.

todo $f \in \Omega$ existe un número real único y no negativo, denotado por $||f||$, que cumple con las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} ||f|| &= 0 \Leftrightarrow f = 0 \\ ||\alpha f|| &= |\alpha| ||f|| \text{ para } \alpha \in \mathbb{R} \\ ||f_1 + f_2|| &\leq ||f_1|| + ||f_2||. \end{aligned}$$

Así bien, la distancia entre dos funciones f_1 y f_2 se define como $||f_1 - f_2||$. A partir de esto se puede definir una topología sobre Ω. Si se define la siguiente norma en Ω:

$$\begin{aligned} ||\cdot|| &: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \\ & f \rightarrow ||f|| = \max_{t \in [a,b]} |f(t)| \end{aligned}$$

se dice que Ω es un espacio normado y la interpretación geométrica se puede ver en la figura 2.1.

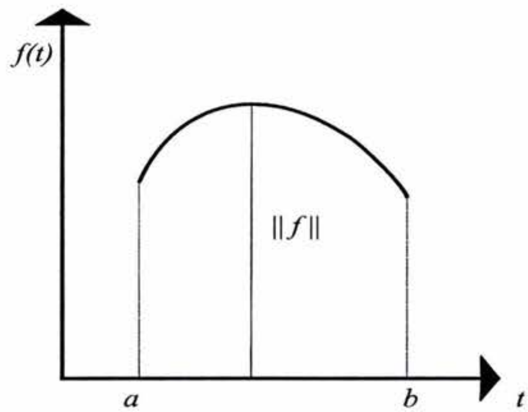

Figura 2.1: Norma de una función

Si la norma que se define sobre Ω es tal que para $f_1,\ f_2 \in \Omega$

$$d(f_1, f_2) = ||f_1 - f_2|| = \max_{t \in [a,b]} |f_1 - f_2|$$

se dice que Ω es un espacio métrico, debido a que la norma considerada induce una distancia[2] y la interpretación geométrica se puede ver en la figura 2.2.

[2]Se puede comprobar que todo espacio normado es un espacio métrico.

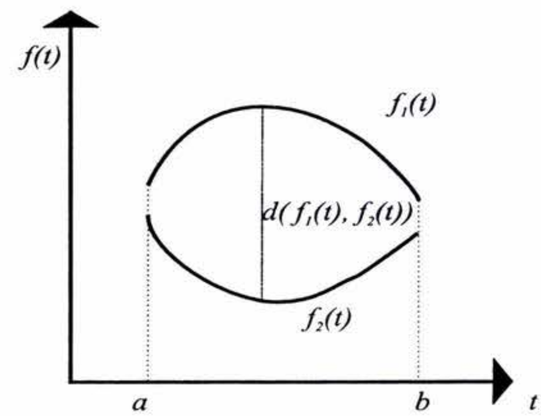

Figura 2.2: Distancia entre dos funciones

Así bien, sean $f_0 \in \Omega$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$ con $\varepsilon > 0$. Se define una bola abierta, con centro en f_0 y radio de tamaño ε, como el siguiente conjunto

$$B(f_0, \varepsilon) = \{f \in \Omega \mid d(f, f_0) < \varepsilon\}.$$

Gráficamente se puede observar en la figura 2.3 que cualquier $f \in \Omega$ que este dentro de la franja, pertenece a la bola $B(f_0, \varepsilon)$.

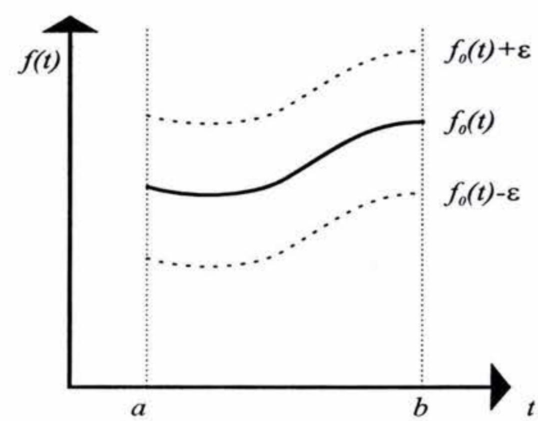

Figura 2.3: Bola abierta con centro f_0 y radio ε

Uno de los conceptos más importantes que se utilizan en este trabajo es el de funcional. Un funcional es una aplicación cuyo dominio es un conjunto de funciones y su rango es un subconjunto de los números reales. Es decir

$$\begin{aligned} J\ : \Omega &\to \mathbb{R} \\ f &\to J(f). \end{aligned}$$

2.2. Condiciones Necesarias de Optimalidad

En 1906 el matemático francés Maurice René Fréchet (1878-1973) introdujo el concepto de espacio métrico y definió la diferencial que lleva su nombre. Dicha definición se establece como sigue:

Sea $(\Omega, ||\cdot||)$ un espacio lineal normado, B_ε una bola abierta de radio ε en Ω, $J : B_\varepsilon \subset \Omega \to \mathbb{R}$ un funcional y $\mathcal{L}(\Omega, \mathbb{R})$ el espacio de funcionales que van de Ω a $\mathbb{R}$. Se dice que el funcional J es diferenciable en el punto $f \in B_\varepsilon$, si existe un funcional lineal acotado $\mathrm{d}J(f) \in \mathcal{L}(\Omega, \mathbb{R}) = \Omega^*$, tal que para $(f + h) \in B_\varepsilon$,

$$J(f+h) - J(f) = \mathrm{d}J(f)(h) + o(||h||) \tag{2.1}$$

donde $o(||h||)$ significa que

$$\lim_{||h|| \to 0} \frac{o(||h||)}{||h||} = \frac{|J(f+h) - J(f) - \mathrm{d}J(f)(h)|}{||h||} = 0. \tag{2.2}$$

El termino $o(||h||)$ es llamado infinitésimo de orden superior al primero con respecto a $||h||$ y $\mathrm{d}J(f)(h)$ es la Diferencial de Fréchet del funcional J en el punto $f \in B_\varepsilon$. Sin embargo, este concepto es local. Se dice que J es diferenciable en un conjunto $B_\varepsilon \subset V$ si es diferenciable para cada $f \in B_\varepsilon$. Esto es, para cada $f \in B_\varepsilon$ existe $\mathrm{d}J(f) \in \mathcal{L}(\Omega, \mathbb{R}) = \Omega^*$ tal que cumple con la propiedad antes mencionada.

Existe una gran cantidad de problemas que es posible resolver con el cálculo de variaciones y en la literatura se presentan con diversas variantes. Los problemas más importantes de cálculo de variaciones, que son aplicados en economía, son definidos en los siguientes apartados y se explican las condiciones necesarias de optimalidad para cada uno de ellos.

2.2.1. Problema Básico

Considere un funcional con la siguiente forma:

$$J = J(f) = \int_a^b F(t, f(t), f'(t))\mathrm{d}t,$$

sujeto a las siguientes restricciones o condiciones de frontera,

$$f(a) = A, \qquad f(b) = B, \tag{2.3}$$

donde $F \in C^2$, es decir, f es una función con primera y segunda derivadas parciales continuas con respecto a todos sus argumentos. Se define $V = C^1[a,b]$ como el espacio de funciones con primera derivada continua en $[a,b]$. Se supone que f satisface las condiciones de frontera (2.3) y cumple con la siguiente norma

$$||f|| = \max_{t\in[a,b]} |f(t)| + \max_{t\in[a,b]} |f'(t)|.$$

Una condición necesaria para que el funcional $J(f)$ tenga un óptimo o extremo, en una función dada $f(t)$ es que satisfaga la ecuación de Euler, es decir,

$$\frac{\partial F(t,f,f')}{\partial f} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F(t,f,f')}{\partial f'}\right) = 0. \tag{2.4}$$

En efecto, si se incrementa la función f en h de tal manera que $(f+h) \in B_\varepsilon$ y $h(a) = h(b) = 0$, entonces $f + h$ satisface las condiciones de frontera (2.3). Esto es, $h \in C_0[a,b]$ donde $C_0[a,b]$ se define como el espacio de funciones continuas que se anulan en a y en b. En la terminología de los métodos variacionales a la función h se le denomina función admisible o función factible.

Así bien, al calcular la diferencia $J(f+h) - J(f)$ se tiene que

$$J(f+h) - J(f) = \int_a^b \left(F(t, f+h, f'+h') - F(t,f,f')\right)\mathrm{d}t,$$

y si se aplica el Teorema de Taylor, se sigue que

$$\begin{aligned} J(f+h) - J(f) = &\int_a^b \left(\frac{\partial F(t,f,f')}{\partial f}h(t) + \frac{\partial F(t,f,f')}{\partial f'}h'(t)\right)\mathrm{d}t \\ &+ \frac{1}{2}\int_a^b \left[\frac{\partial^2 F(t, f+\theta h, f'+\theta h')}{\partial f^2}h^2(t)\right. \\ &+ 2\left(\frac{\partial^2 F(t, f+\theta h, f'+\theta h')}{\partial f \partial f'}\right)h(t)h'(t) \\ &\left.+ \frac{\partial^2 F(t, f+\theta h, f'+\theta h')}{\partial f'^2}(h'(t))^2\right]\mathrm{d}t, \end{aligned} \tag{2.5}$$

donde $\theta \in [0,1]$. Asimismo, se sabe que existen M_1, M_2 y M_3 tales que

$$\left|\frac{\partial^2 F(t,f,f')}{\partial f^2}\right| \leq M_1,$$

$$\left|\frac{\partial^2 F(t,f,f')}{\partial f \partial f'}\right| \leq M_2$$

y

$$\left|\frac{\partial^2 F(t,f,f')}{\partial f'^2}\right| \leq M_3,$$

para todo (t,f,f'), pues F tiene segundas derivadas continuas con respecto a todos sus argumentos. Ahora bien, si para la segunda integral de la ecuación (2.5) se define $M = \text{máx}\{M_i\}$, donde $||h|| = \text{máx}\,|h(t)| + \text{máx}\,|h'(t)|$, se obtiene que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_a^b (\cdots)\mathrm{d}t &\leq \frac{1}{2}\int_a^b (Mh^2 + 2Mhh' + M(h')^2)\mathrm{d}t \\
&\leq \frac{1}{2}M\int_a^b (h^2 + 2hh' + (h')^2)\mathrm{d}t \\
&\leq \frac{1}{2}M\int_a^b \left[\max_{t\in[a,b]} |h(t)|^2\right. \\
&\quad + 2\left(\max_{t\in[a,b]} |h(t)| \max_{t\in[a,b]} |h'(t)|\right) \\
&\quad \left. + \max_{t\in[a,b]} |h'(t)|^2\right]\mathrm{d}t \\
&\leq \frac{1}{2}M(b-a)\left[\max_{t\in[a,b]} |h(t)| + \max_{t\in[a,b]} |h'(t)|\right]^2 \\
&\leq \frac{1}{2}M(b-a)||h||^2. \qquad (2.6)
\end{aligned}$$

Después de dividir (2.6) entre $||h||$ y tomar el límite cuando $||h|| \to 0$ se sigue que

$$\lim_{||h||\to 0} \frac{\frac{1}{2}\int_a^b(\cdots)\mathrm{d}t}{||h||} \leq \lim_{||h||\to 0} \frac{\frac{1}{2}M(b-a)||h||^2}{||h||} = \lim_{||h||\to 0} \frac{o(||h||)}{||h||} = 0.$$

Así, el valor absoluto de (2.6) es igual a cero cuando $||h|| \to 0$. Por lo tanto,

$$\mathrm{d}J(f)(h) = \int_a^b \left(\frac{\partial F(t,f,f')}{\partial f}h(t) + \frac{\partial F(t,f,f')}{\partial f'}h'(t)\right)\mathrm{d}t. \qquad (2.7)$$

Una condición necesaria para que el funcional J tenga un óptimo en f es que $\mathrm{d}J(f)(h) = 0$ en $C_0[a,b] \cap C_1[a,b]$, es decir,

$$\int_a^b \left(\frac{\partial F(t,f,f')}{\partial f}h(t) + \frac{\partial F(t,f,f')}{\partial f'}h'(t)\right)\mathrm{d}t = 0, \qquad (2.8)$$

para toda h admisible o factible. Sin embargo, al integrar por partes el segundo sumando de (2.7), se obtiene

$$\int_a^b \frac{\partial F(t,f,f')}{\partial f'}h'(t)\mathrm{d}t = \frac{\partial F(t,f,f')}{\partial f'}h(t)\Big|_a^b - \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F(t,f,f')}{\partial f'}\right)h(t)\mathrm{d}t$$
$$= -\int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F(t,f,f')}{\partial f'}\right)h(t)\mathrm{d}t.$$

Así, (2.8) se transforma en

$$\int_a^b \left[\frac{\partial F(t,f,f')}{\partial f} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F(t,f,f')}{\partial f'}\right)\right]h(t)\mathrm{d}t = 0,$$

para toda h admisible. Es decir, solamente se cumple la ecuación anterior si

$$\frac{\partial F(t,f,f')}{\partial f} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F(t,f,f')}{\partial f'}\right) = 0. \tag{2.9}$$

La igualdad anterior es conocida como: Ecuación de Euler[3] y proporciona una condición necesaria para obtener un óptimo. En muchos casos ésta condición es suficiente, cuando el funcional es cóncavo o convexo, para dar una solución completa del problema variacional.

Como se puede observar, en la ecuación (2.9), es posible desarrollar el segundo sumando si se calcula, a partir de la regla de la cadena, la derivada con respecto a t. Es decir,

$$F_f - F_{f'f}f' - F_{f'f'}f'' - F_{f't} = 0 \tag{2.10}$$

donde $F_{f'f}$ es la segunda derivada de F, con respecto a sus variables f y f', $F_{f'f'}$ es la segunda derivada de F, con respecto a su variable f' dos veces y $F_{f't}$ es la segunda derivada de F, con respecto a sus variables f' y t. Es por ello que la ecuación de Euler es en general una ecuación diferencial de segundo orden. Puede ser que para una curva dada la función tenga un óptimo y dicha curva no sea dos veces diferenciable pero sí satisfaga la ecuación de Euler. Finalmente, cabe señalar que las soluciones factibles a la ecuación (2.10) son conocidas en la literatura como extremales y dependen de dos constantes arbitrarias.

[3]Desarrollada por L. Euler en 1744.

2.2.2. Problema con Dos Funciones

Considere un funcional de la forma

$$J = J(f) = \int_a^b F(t, f, g, f', g')\mathrm{d}t,$$

sujeto a las restricciones o condiciones de frontera (2.3) para la función f

$$f(a) = A, \qquad f(b) = B$$

y a las condiciones de frontera respectivas de la función g

$$g(a) = D, \qquad g(b) = E$$

donde $F \in C^2[a, b]$, es decir, una función con primera y segunda derivadas parciales continuas con respecto a todos sus argumentos; $(f, g), (f', g') \in B_\varepsilon \subset (C_1[a, b])$; (f, g) satisface las condiciones de frontera y cumple con la siguiente norma

$$||(f, g)|| = \max_{t\in[a,b]} |f(t)| + \max_{t\in[a,b]} |f'(t)| + \max_{t\in[a,b]} |g(t)| + \max_{t\in[a,b]} |g'(t)|.$$

Entonces, una condición necesaria para que el funcional J tenga un extremo en un vector dado (f, g) es que este vector satisfaga las siguientes ecuaciones de Euler:

$$\frac{\partial F(t, f, g, f', g')}{\partial f} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F(t, f, g, f', g')}{\partial f'}\right) = 0 \tag{2.11}$$

y

$$\frac{\partial F(t, f, g, f', g')}{\partial g} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F(t, f, g, f', g')}{\partial g'}\right) = 0. \tag{2.12}$$

En efecto, si al vector (f, g) se le incrementa en (h_1, h_2), $||(h_1, h_2)|| < \varepsilon$, de tal manera que se satisfagan las condiciones de frontera

$$(h_1, h_2) \in (C_0[a, b])^2 \cap (C_1[a, b])^2$$

entonces si es calculada la diferencia $J(f + h_1, g + h_2) - J(f, g)$ y al utilizar el teorema de Taylor se tiene que

$$\begin{aligned} J(f + h_1, g + h_2) - J(f, g) = & \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial f} h_1 - \frac{\partial F}{\partial f'} h_1'\right)\mathrm{d}t \\ & + \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial g} h_2 - \frac{\partial F}{\partial g'} h_2'\right)\mathrm{d}t \\ & + o(||(h_1, h_2)||. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Por tanto

$$\mathrm{d}F(f,g)(h_1,h_2)=\int_a^b\left(\frac{\partial F}{\partial f}h_1-\frac{\partial F}{\partial f'}h_1'\right)\mathrm{d}t+\int_a^b\left(\frac{\partial F}{\partial g}h_2-\frac{\partial F}{\partial g'}h_2'\right)\mathrm{d}t.$$

La condición necesaria $\mathrm{d}J(f,g)(h_1,h_2)=0$, para $(h_1,h_2)\in(C_0[a,b])^2\cap(C_1[a,b])^2$ lleva a que

$$\int_a^b\left(\frac{\partial F}{\partial f}h_1-\frac{\partial F}{\partial f'}h_1'\right)\mathrm{d}t+\int_a^b\left(\frac{\partial F}{\partial g}h_2-\frac{\partial F}{\partial g'}h_2'\right)\mathrm{d}t=0,$$

como todos los incrementos $h_{1,2}(t)$ son independientes, de acuerdo con el problema básico, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial F(t,f,g,f',g')}{\partial f}-\frac{d}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F(t,f,g,f',g')}{\partial f'}\right)=0,$$

$$\frac{\partial F(t,f,g,f',g')}{\partial g}-\frac{d}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F(t,f,g,f',g')}{\partial g'}\right)=0.$$

Observe que las expresiones anteriores forman un sistema de dos ecuaciones diferenciales de segundo orden, y que su solución general contiene dos constantes arbitrarias, las cuales son determinadas a partir de las condiciones de frontera.

2.2.3. Problema Isoperimétrico

Considere el siguiente funcional[4]

$$J=J(f)=\int_a^b F(t,f,f')\mathrm{d}t,$$

sujeto a las condiciones de frontera (2.3)

$$f(a)=A,\qquad f(b)=B,$$

y al siguiente funcional

$$K=K(f)=\int_a^b G(t,f,f')\mathrm{d}t=l, \tag{2.14}$$

[4]La palabra "isoperimétrico" se refiere al problema de la reina Dido de encontrar, de entre todas las curvas de longitud l, la óptima y significa: "con el mismo perímetro".

donde $K, F \in C^2$, es decir, dos funciones con primera y segunda derivadas parciales continuas con respecto a todos sus argumentos y con $t \in [a, b]$. Asimismo, f satisface las condiciones de frontera, es una función para la cual el funcional J tiene un extremo (óptimo) y cumple con la siguiente norma

$$||f|| = \max_{t\in[a,b]} |f(t)| + \max_{t\in[a,b]} |f'(t)|.$$

Se desea encontrar una función f para la cual el funcional J tenga un extremo u óptimo. Si $f = f(t)$ es extremo de J pero no de K, entonces existe una constante λ tal que f es un extremo del funcional

$$J + \lambda K = \int_a^b (F + \lambda G)\mathrm{d}t,$$

es decir, f satisface la ecuación diferencial

$$\frac{\partial F(t, f, f')}{\partial f} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F(t, f, f')}{\partial f'} + \lambda\left(\frac{\partial G(t, f, f')}{\partial f} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial G(t, f, f')}{\partial f'}\right) = 0. \quad (2.15)$$

En efecto, primero se supone que J tiene un extremo para f sujeto a las condiciones (2.3) y (2.14). Sean t_1 y $t_2 \in [a, b]$ dos puntos arbitrarios en dicho intervalo. Se incrementa f en $h_1(t) + h_2(t)$, donde $h_1(t) \neq 0$ en una vecindad de t_1 y $h_1(t) = 0$ en el resto del intervalo $[a, b]$. Asimismo, $h_2(t) \neq 0$ en una vecindad de t_2 y $h_2(t) = 0$ en el resto del intervalo $[a, b]$. Si $h(t) = h_1(t) + h_2(t)$ y $||h|| < \varepsilon$ se tiene que

$$\Delta J = J(f + h) - J(f) = \left.\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}f}\right|_{t=t_1} \Delta\sigma_1 + \left.\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}f}\right|_{t=t_2} \Delta\sigma_2 + o(||h||), \quad (2.16)$$

donde $\Delta\sigma$ es el área comprendida entre la función $h(t)$ y el eje de las abscisas, equivalente al área comprendida entre las curvas $f(t)$ y $f(t) + h(t)$. En términos de la integral, esto es

$$\Delta\sigma_1 = \int_a^b h_1(t)\mathrm{d}t \ \text{ y } \ \Delta\sigma_2 = \int_a^b h_2(t)\mathrm{d}t.$$

Ahora bien, se requiere que la función $f(t) + h(t)$ satisfaga la condición

$$\Delta K = K(f + h) - K(f) = 0,$$

es decir, desarrollando ΔK como en (2.16) se obtiene

$$\Delta K = K(f + h) - K(f) = \left.\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}f}\right|_{t=t_1} \Delta\sigma_1 + \left.\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}f}\right|_{t=t_2} \Delta\sigma_2 + o(||h||),$$

se reconsidera t_2 tal que si

$$\left.\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}f}\right|_{t=t_2} \neq 0,$$

este punto existe, puesto que por hipótesis $f = f(t)$ no es extremal de el funcional K, por lo cual se sigue que

$$\Delta\sigma_2 = -\left(\frac{\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}f}|_{t=t_1}}{\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}f}|_{t=t_2}}\Delta\sigma_1 + o(||h||)\right),$$

de donde se define

$$\lambda = -\frac{\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}f}|_{t=t_2}}{\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}f}|_{t=t_2}},$$

así bien, al sustituir λ en la ecuación (2.16) se obtiene

$$\Delta J = J(f+h) - J(f) = \left(\left.\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}f}\right|_{t=t_1} + \lambda\left.\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}f}\right|_{t=t_1}\right)\Delta\sigma_1 + o(||h||),$$

ya que las derivadas sólo están evaluadas en $t = t_1$ y el incremento de compensación, $h_2(t)$, es tomado automáticamente al considerar la condición $K(f+h) - K(f) = 0$. Esto lleva a que

$$\left(\left.\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}f}\right|_{t=t_1} + \lambda\left.\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}f}\right|_{t=t_1}\right)\Delta\sigma_1 = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}f}(J+\lambda K)\right|_{t=t_1}\Delta\sigma_1$$

es la parte lineal de $J(f+h) - J(f)$. Como una condición necesaria para un extremo es que esta parte lineal sea cero (para toda h admisible) y como $\Delta\sigma_1$ no es cero, ya que $h_1(t) \neq 0$ en una vecindad de t_1 dentro del intervalo $[a,b]$, se tiene que

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}f}(J+\lambda K)\right|_{t=t_1} = 0,$$

con t_1 arbitrario en $[a,b]$, por lo que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}f}(J+\lambda K) = F_f - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_{f'} + \lambda\left(G_f - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G_{f'}\right) = 0.$$

2.3. Ejemplos

Los siguientes ejemplos son algunos problemas económicos. Se presenta un mismo problema con distintas funciones de utilidad y se emplean las técnicas de cálculo de variaciones para solucionar cada una de las variantes del siguiente problema:

Considere un consumidor racional, con vida infinita, que desea maximizar su utilidad por un bien de consumo perecedero, c_t. Se supone que el individuo tiene una dotación de ingreso y_t en cada instante. El problema de decisión que resuelve el consumidor, con tasa subjetiva de descuento ρ, está dado por:

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar} \int_0^\infty u(c_t)e^{-\rho t}\mathrm{d}t \\ &\text{sujeto a} \quad \int_0^\infty y_t e^{-rt}\mathrm{d}t = \int_0^\infty c_t e^{-rt}\mathrm{d}t, \end{aligned} \tag{2.17}$$

donde $u(c_t)$ es la satisfacción que produce c_t y r es la tasa de interés real, la cual se supone constante para todos los plazos. Observe que la tasa subjetiva de descuento modela que tan ansioso está el individuo por el consumo presente. Es decir un valor grande de ρ indica que el consumidor está muy ansioso por consumir, mientras que un valor pequeño de ρ indica que el individuo no está muy ansioso por el consumo presente. El supuesto de vida infinita se puede justificar si se piensa en un consumidor que está interesado en maximizar su utilidad, las de sus hijos, nietos y demás descendientes. Observe ahora que si $y_t = \bar{y} =$ constante, entonces la restricción presupuestal del agente satisface

$$\frac{\bar{y}}{r} = \frac{\bar{y}}{r}\int_0^\infty re^{-rt}\mathrm{d}t = \int_0^\infty c_t e^{-rt}\mathrm{d}t.$$

En este marco, el problema del consumidor racional puede resolverse con cálculo de variaciones.

Ejemplo 2.3.1. Suponga que la función de utilidad, para el problema (2.17), es logarítmica. Así, el Lagrangiano está dado por

$$L = \ln(c_t)e^{-\rho t} + \lambda c_t e^{-rt}.$$

Para λ constante. La utilidad logarítmica satisface las propiedades deseables $u' > 0$ y $u'' < 0$. Es decir, la utilidad marginal es positiva pero decreciente. En otras palabras, el consumidor siempre obtiene satisfacción adicional por el consumo, pero al incrementarlo su satisfacción cada vez es menor. La condición necesaria, o de primer orden, es:

$$\frac{\partial L}{\partial c_t} = 0,$$

equivalentemente
$$\frac{\partial L}{\partial c_t} = \frac{1}{c_t}e^{-\rho t} + \lambda e^{-rt} = 0.$$
Esta ecuación conduce a
$$\frac{1}{c_t}e^{-\rho t} = -\lambda e^{-rt}$$
ó
$$-\frac{1}{\lambda}e^{(r-\rho)t} = c_t.$$
Por otro lado, de la restricción presupuestal intertemporal se observa que
$$\begin{aligned}\frac{\bar{y}}{r} &= \int_0^{\infty}\left(-\frac{1}{\lambda}\right)e^{(r-\rho)t}e^{-rt}\\ &= -\frac{1}{\lambda\rho}\int_0^{\infty}\rho e^{-\rho t}\mathrm{d}t\\ &= -\frac{1}{\lambda\rho}.\end{aligned}$$
Es decir,
$$\frac{\bar{y}\rho}{r} = -\frac{1}{\lambda}$$
ó
$$c_t = \frac{\bar{y}\rho}{r}e^{(r-\rho)t}.$$
Esta ecuación proporciona la trayectoria de consumo. Observe que si $r > \rho$, el consumo es creciente. En caso contrario, $r < \rho$, el consumo es decreciente en el tiempo.

Ejemplo 2.3.2. Considere que la función de utilidad, para el problema (2.17), es de la siguiente manera
$$u(c_t) = \frac{c^{\gamma}}{\gamma},$$
donde γ es un parámetro que indica la preferencia que tiene el individuo sobre el consumo de un bien determinado, el Lagrangiano está dado por
$$L = \frac{c_t^{\gamma}}{\gamma}e^{-\rho t} + \lambda c_t e^{-rt}.$$
Para λ constante. La función de utilidad satisface las propiedades deseables $u' > 0$ y $u'' < 0$ siempre y cuando $\gamma < 1$. La condición necesaria, o de primer orden, es:
$$\frac{\partial L}{\partial c_t} = c_t^{\gamma-1}e^{-\rho t} + \lambda e^{-rt} = 0.$$

Esta ecuación conduce a

$$c_t^{\gamma-1}e^{-\rho t} = -\lambda e^{-rt}$$

ó

$$c_t = -\lambda^{\frac{1}{\gamma-1}} e^{\frac{(\rho-r)t}{\gamma-1}}.$$

Por otro lado, de la restricción presupuestal se observa que

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{y}}{r} &= \int_0^\infty \left(-\lambda^{\frac{1}{\gamma-1}} e^{\frac{(\rho-r)t}{\gamma-1}}\right) e^{-rt}\mathrm{d}t \\
&= -\lambda^{\frac{1}{\gamma-1}} \int_0^\infty e^{\frac{(\rho-r)t}{\gamma-1}} e^{-rt}\mathrm{d}t \\
&= -\lambda^{\frac{1}{\gamma-1}} \int_0^\infty e^{\frac{(\rho-\gamma r)t}{\gamma-1}}\mathrm{d}t \\
&= -\lambda^{\frac{1}{\gamma-1}} \frac{1-\gamma}{\rho-\gamma r}\int_0^\infty \left(\frac{\rho-\gamma r}{1-\gamma}\right) e^{-\frac{(\rho-\gamma r)t}{1-\gamma}}\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Es decir,

$$\frac{\bar{y}}{r}\left(\frac{\rho-\gamma r}{1-\gamma}\right) = -\lambda^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

ó

$$c_t = \frac{\bar{y}}{r}\left(\frac{\rho-\gamma r}{1-\gamma}\right) e^{\frac{(\rho-r)t}{\gamma-1}}.$$

Esta ecuación proporciona la trayectoria de consumo. Se observa que si $\rho > \gamma r$, el consumo es creciente. En caso contrario, $\rho < \gamma r$, el consumo es decreciente en el tiempo.

Ejemplo 2.3.3. Suponga que la función de utilidad, para el problema (2.17), es de la siguiente manera

$$u(c_t) = \frac{c_t^{1-\theta}-1}{1-\theta}$$

para $\theta < 0$, entonces se tiene que el Lagrangiano está dado por

$$L = \frac{c_t^{1-\theta}-1}{1-\theta} e^{-\rho t} + \lambda c_t e^{-rt}.$$

para λ constante. La función de utilidad satisface las propiedades deseables $u' > 0$ y $u'' < 0$. La condición necesaria, o de primer orden, es:

$$\frac{\partial L}{\partial c_t} = c_t^{-\theta}e^{-\rho t} + \lambda e^{-rt} = 0.$$

Esta ecuación conduce a

$$c_t^{-\theta}e^{-\rho t} = -\lambda e^{-rt}$$

ó

$$c_t = -\lambda^\theta e^{\frac{(r-\rho)t}{\theta}}.$$

Por otro lado, de la restricción presupuestal se observa que

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{y}}{r} &= \int_0^\infty \left(-\lambda^\theta e^{\frac{(r-\rho)t}{\theta}}\right) e^{-rt}\mathrm{d}t \\
&= -\lambda^\theta \int_0^\infty e^{\frac{(r-\rho)t}{\theta}} e^{-rt}\mathrm{d}t \\
&= -\lambda^\theta \int_0^\infty e^{-\left(\frac{\rho-(1-\theta)r)t}{\theta}\right)}\mathrm{d}t \\
&= -\lambda^\theta \left(\frac{\theta}{\rho-(1-\theta)r}\right) \int_0^\infty \left(\frac{\rho-(1-\theta)r)t}{\theta}\right) e^{-\left(\frac{\rho-(1-\theta)r)t}{\theta}\right)}\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Es decir,

$$\frac{\bar{y}}{r}\left(\frac{\rho-(1-\theta)r)}{\theta}\right) = -\lambda^\theta$$

ó

$$c_t = \frac{\bar{y}}{r}\left(\frac{\rho-(1-\theta)r)}{\theta}\right) e^{\frac{(r-\rho)t}{\theta}}.$$

Esta ecuación proporciona la trayectoria de consumo. Note que si $\rho < (1-\theta)r$, el consumo es creciente. En caso contrario, $\rho > (1-\theta)r$, el consumo es decreciente en el tiempo.

Ejemplo 2.3.4. Suponga que se encuentra ante el problema del consumidor racional, con vida infinita. Del mismo modo, considere que la función de utilidad, para el problema (2.17), esta dada de la siguiente manera

$$u(c_t) = -e^{-\theta c_t}$$

se tiene que el Lagrangiano está dado por

$$L = -e^{-\theta c_t} e^{-\rho t} + \lambda c_t e^{-rt}.$$

Para λ constante. La función de utilidad satisface las propiedades deseables $u' > 0$ y $u'' < 0$. La condición necesaria, o de primer orden, es:

$$\frac{\partial L}{\partial c_t} = \theta e^{-\theta c_t} e^{-\rho t} + \lambda e^{-rt} = 0.$$

Esta ecuación conduce a

$$\begin{aligned}
\theta e^{-\theta c_t} e^{-\rho t} &= -\lambda e^{-rt} \\
e^{-\theta c_t} &= -\frac{\lambda e^{(\rho-r)t}}{\theta}
\end{aligned}$$

ó

$$c_t = -\frac{1}{\theta}\ln\left(-\frac{\lambda e^{(\rho-r)t}}{\theta}\right)$$

equivalentemente

$$c_t = -\frac{1}{\theta}\left(\ln(-\lambda e^{(\rho-r)t}) - \ln(\theta)\right)$$

es decir

$$c_t = \frac{1}{\theta}\left[\ln\left(\frac{\theta}{-\lambda}\right) - (\rho - r)t\right]$$

Por otro lado, de la restricción presupuestal se observa que

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{y}}{r} &= \int_0^\infty \frac{1}{\theta}\left(\ln(\theta) - \ln(-\lambda) - (\rho - r)t\right)e^{-rt}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\theta}\left(\ln(\theta)\int_0^\infty e^{-rt}\mathrm{d}t - \ln(-\lambda)\int_0^\infty e^{-rt}\mathrm{d}t - \int_0^\infty (\rho - r)te^{-rt}\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{1}{\theta}\left(\frac{\ln(\theta)}{r} - \frac{\ln(-\lambda)}{r} - \int_0^\infty (\rho - r)te^{-rt}\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{1}{\theta}\left(\frac{\ln(\theta)}{r} - \frac{\ln(-\lambda)}{r} - \frac{(\rho - r)}{r^2}\right).
\end{aligned}$$

Esto equivale a

$$\bar{y} = \frac{1}{\theta}\left[\ln\left(\frac{\theta}{-\lambda}\right) - \frac{(\rho - r)}{r}\right]$$

Es decir,

$$\ln\left(\frac{\theta}{-\lambda}\right) = \theta\bar{y} + \frac{(\rho - r)}{r}$$

por lo cual

$$c_t = \frac{1}{\theta}\left[\theta\bar{y} + \frac{(\rho - r)}{r} - (\rho - r)t\right]$$

ó

$$c_t = \bar{y} + \frac{(\rho - r)}{\theta r} - \frac{(\rho - r)t}{\theta}$$

Finalmente esta es la ecuación que proporciona la trayectoria óptima de consumo. Se observa que la trayectoria de consumo es creciente si $\bar{y} > \frac{(\rho-r)(1-rt)}{\theta r}$ y es decreciente, en el tiempo, si $\bar{y} < \frac{(\rho-r)(1-rt)}{\theta r}$.

Capítulo 3

Control Óptimo

Los problemas de cálculo de variaciones se pueden expresar como problemas de control óptimo. Sin embargo, en los problemas de control óptimo las variables de control se encuentran restringidas por un conjunto cerrado y el planteamiento de las ecuaciones diferenciales es menos general que el de un problema de cálculo de variaciones. Aunque, por otro lado, el cálculo de variaciones tiene la desventaja de que no es posible resolver problemas con restricciones en forma de desigualdad. En este capítulo se desarrollan dos enfoques del control óptimo para resolver problemas económicos y financieros: el enfoque determinista y el estocástico. En la sección 3.1 se desarrolla el modelo de control óptimo determinista. En dicha sección se encuentra el desarrollo de los siguientes temas: en el apartado 3.1.1, se formula el modelo general de problemas de control óptimo, los cuales se encuentran restringidos a una condición inicial fija y sin condición terminal, en el apartado 3.1.2, la función objetivo modificada y la función de Hamilton, en el apartado 3.1.3, se estudian las características de la ecuación adjunta, en el apartado 3.1.4, el principio del máximo de Pontryagin, en el apartado 3.1.5, los problemas de control óptimo con valor terminal restringido y por último, en el apartado 3.1.6, se resuelven algunos problemas económicos. En la sección 3.2 se desarrollan los conceptos básicos del control óptimo estocástico. En esta sección se desarrollan los siguientes temas: en el apartado 3.2.1, se establece un concepto fundamental del control óptimo estocástico: el generador diferencial, en el apartado 3.2.2 se formula la estructura de la ecuación de utilidad, en el apartado 3.2.3, se establecen las condiciones de primer orden que se necesitan para la obtención de un óptimo en los problemas de control óptimo estocástico. Por último, en el apartado 3.2.4, se plantean y resuelven dos problemas, el primero establece el modelo neoclásico de crecimiento económico óptimo bajo incertidumbre y el segundo establece el modelo de selección óptima de portafolio bajo incertidumbre.

3.1. Control Óptimo Determinista

3.1.1. El Modelo General

El modelo general de control óptimo determinista es formulado como un problema con una condición inicial pero sin condición terminal. En este marco, el problema es formulado de la siguiente manera: Suponga un sistema dinámico en tiempo continuo formulado en un horizonte temporal finito $[0, T]$. Este sistema contiene una condición inicial fija

$$f(0) = f_0, \tag{3.1}$$

que evoluciona en el tiempo. Esta evolución depende del valor que se le otorgue a ciertas variables, llamadas variables de control las cuales se denotan como sigue

$$u(t) \in \Omega(t), \tag{3.2}$$

donde el control $u(t)$ es una trayectoria factible, o admisible, continua a trozos[1] y el conjunto $\Omega(t) \subset \mathbb{R}^m$ representa las restricciones físicas al valor de las variables de control en el tiempo t. Por otro lado, el sistema contiene un conjunto de ecuaciones diferenciales

$$\dot{f}(t) = G(f(t), u(t)), \tag{3.3}$$

denominadas ecuaciones de estado[2] las cuales se encuentran definidas en el intervalo de tiempo $0 \leq t \leq T$. El termino $f(t) \in \mathbb{R}^n$ es denominado vector de variables de estado y es una función continua con derivada continua a trozos en todos los puntos de continuidad de $u(t)$. En este marco, la ecuación (3.3) es una función cuyo dominio se encuentra contenido en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$, que toma valores en $\mathbb{R}^n$ y con primeras derivadas parciales continuas. Se supone que la función $G(f(t), u(t))$ es una función "bien comportada", de tal manera, que el sistema tiene solución única. Por otro lado, el sistema contiene un funcional objetivo,

$$J(t) = \int_0^T F(f(t), u(t))\mathrm{d}t + \psi(f(T)), \tag{3.4}$$

que se quiere optimizar. Donde $\psi(f(T))$ es la contribución a la función objetivo de la variable de estado al final del intervalo de tiempo establecido, dicha contribución tiene dominio en un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, que toma valores en $\mathbb{R}$ y con primera

[1] Esto quiere decir que es una función continua en todos los puntos, excepto en un número finito de ellos.

[2] Se cambia la notación f' por $\dot{f}$ debido a que, por convención, la primera es utilizada para los problemas de cálculo de variaciones y la segunda para problemas de control óptimo.

derivada parcial continua. Del mismo modo, la función F tiene dominio en un subconjunto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$, que toma valores en $\mathbb{R}^n$ y con primera derivada parcial continua. Las variables $u(t)$ y $f(t)$ son como se definieron antes.

El funcional objetivo proporciona una medida cuantitativa del comportamiento del sistema a lo largo del horizonte temporal definido. Existen distintos planteamientos del funcional objetivo, el modelo general utiliza el definido por Bolza[3], aunque en la mayoría de los problemas económicos y financieros el horizonte temporal no es finito, por lo que se utiliza el planteamiento de Lagrange, es decir[4],

$$J(t) = \int_0^T F(f(t), u(t))\mathrm{d}t.$$

Así bien, un control óptimo es definido como un control admisible, o factible, que optimiza el funcional objetivo. Es decir, el problema general de control óptimo determinista es tal que *dado un sistema dinámico con condición inicial* f_0, *que evoluciona en el tiempo de acuerdo a la ecuación de estado* $\dot{f}(t) = G(f(t), u(t))$, *se desea encontrar el vector de control factible que haga que el funcional objetivo alcance el valor óptimo.*

En este marco, el modelo general de control óptimo determinista es el siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar (Minimizar)} \quad & J = \int_0^T F(f(t), u(t))\mathrm{d}t + \psi(f(T)) \qquad (3.5) \\ \text{sujeto a} \quad & \dot{f}(t) = G(f(t), u(t)) \\ & f(0) = f_0 \\ & u(t) \in \Omega. \end{aligned}$$

3.1.2. El Funcional Objetivo Modificado y el Hamiltoniano

Las condiciones necesarias de optimalidad se obtienen considerando los efectos de cambios pequeños cerca del óptimo. Es decir, se supone que la variable de control $u(t)$ es óptima, después se hace un cambio pequeño en el valor de $u(t)$ y se determina el cambio inducido en el funcional objetivo $J(t)$. Este cambio debe ser negativo si $u(t)$ es óptima para el caso de maximización y positivo para caso de minimización. Sin embargo, como un cambio en $u(t)$ provoca un cambio en $f(t)$, es difícil determinar directamente la influencia real en el valor del funcional

[3]Ver Bolza [10].
[4]Ver Cerdá [12].

objetivo. Es por esto que se aplica un método indirecto, que consiste en agregar a $J(t)$ términos que suman cero. En particular se forma un funcional objetivo modificado[5], es decir,

$$\begin{aligned}\mathbf{J} &= J - \int_0^T \lambda[\dot{f} - G(f,u)]\mathrm{d}t \\ &= \int_0^T F(f,u)\mathrm{d}t + \psi(f(T)) - \int_0^T \lambda[\dot{f} - G(f,u)]\mathrm{d}t \\ &= \int_0^T \left\{F(f,u) + \lambda G(f,u) - \lambda\dot{f}\right\}\mathrm{d}t + \psi(f(T)),\end{aligned} \tag{3.6}$$

donde el término $\dot{f} - G(f,u) = 0$ para cualquier trayectoria. Así, el coeficiente λ es arbitrario[6] y por lo tanto el valor de $\mathbf{J}$ es el mismo que el valor de J. Es por ello que se puede considerar el problema de optimizar $\mathbf{J}$ antes de optimizar J. La flexibilidad para elegir el valor de λ es útil para simplificar el problema.

Así bien, se define el Hamiltoniano de la siguiente forma

$$H(\lambda,f,u) = F(f,u) + \lambda G(f,u). \tag{3.7}$$

En términos del Hamiltoniano, el funcional objetivo modificado (3.6) toma la forma:

$$\mathbf{J} = \int_0^T \{H(\lambda,f,u) - \lambda\dot{f}\}\mathrm{d}t + \psi(f(T)). \tag{3.8}$$

Entonces el Hamiltoniano es fundamental para la consideración del funcional objetivo modificado. Así bien, suponga que se especifica una función de control u, de tal forma que $u \in \Omega(t)$. Este control admisible determina una trayectoria de estado f. Ahora considere como un cambio pequeño a la función $v \in \Omega(t)$, en la función de control. Este cambio es "pequeño" en el sentido que la integral del valor absoluto de la diferencia es pequeño, es decir,

$$\int_0^T |u - v|\mathrm{d}t < \varepsilon, \tag{3.9}$$

donde ε es positivo y tan pequeño como se quiera. Esta nueva variable de control v implica una nueva trayectoria de estado, que se escribe como $f+\varphi$. El cambio φ es pequeño para toda t, debido a que la variable de estado depende de la integral de

[5]Se elimina el termino (t) en las funciones que dependen del tiempo, con el fin de simplificar la notación.

[6]A λ se le conoce en la literatura como variable de costo o variable auxiliar.

la función de control. Ahora bien, si se define $\Delta\mathbf{J}$ como el cambio correspondiente en el funcional objetivo modificado se obtiene:

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{J} =& \mathbf{J}(f+\varphi, v) - \mathbf{J}(f,u)\\ =& \psi(f(T)+\varphi) - \psi(f(T))\\ &+ \int_0^T \{H(\lambda, f+\varphi, v) - H(\lambda, f, u)\}\mathrm{d}t\\ &- \int_0^T \lambda\dot{\varphi}\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{3.10}$$

Integrando por partes la tercera parte de (3.10) se tiene

$$\int_0^T \lambda\dot{\varphi} = \lambda(T)\varphi(T) - \lambda(0)\varphi(0) - \int_0^T \dot{\lambda}\varphi\mathrm{d}t. \tag{3.11}$$

Por lo que, sustituyendo (3.11) en (3.10), se tiene

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{J} =& \psi(f(T)+\varphi(T)) - \psi(f(T)) - \lambda(T)\varphi(T) + \lambda(0)\varphi(0)\\ &+ \int_0^T \{H(\lambda, f+\varphi, v) - H(\lambda, f, u) + \dot{\lambda}\varphi\}\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{3.12}$$

Ahora, se aproxima (3.12) a primer orden, es decir, al orden ε usando expresiones diferenciales para diferencias pequeñas. Para ello se utiliza la versión multidimensional del teorema de Taylor. Así,

$$\begin{aligned}&\int_0^T [H(\lambda, f+\varphi, v) - H(\lambda, f, u)]\mathrm{d}t\\ &= \int_0^T [H(\lambda, f+\varphi, v) - H(\lambda, f, v) + H(\lambda, f, v)\\ &\simeq \int_0^T [H_f(\lambda, f, v)\varphi + H(\lambda, f, v) - H(\lambda, f, u)]\mathrm{d}t\\ &\qquad - H(\lambda, f, u)]\mathrm{d}t\\ &= \int_0^T [H_f(\lambda, f, u)\varphi + \{H_f(\lambda, f, v) - H_f(\lambda, f, u)\}\varphi\\ &\qquad + H(\lambda, f, v) - H(\lambda, f, u)]\mathrm{d}t\\ &\simeq \int_0^T [H_f(\lambda, f, u)\varphi + H(\lambda, f, v) - H(\lambda, f, u)]\mathrm{d}t,\end{aligned} \tag{3.13}$$

donde $\simeq$ significa "igual que, dentro del orden de ε"; la última linea se obtiene al considerar que tanto φ como la integral de $H_f(\lambda, f, v) - H_f(\lambda, f, u)$ son de orden ε, entonces el producto es de orden ε^2.

Sustituyendo (3.13) en (3.12) y usando una aproximación diferencial a los primeros dos términos de esta última se obtiene,

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{J} =& [\psi_f(f(T)) - \lambda(T)]\varphi(T) + \lambda(0)\varphi(0) \\ &+ \int_0^T [H_f(\lambda, f, u) + \dot{\lambda}]\varphi \mathrm{d}t \\ &+ \int_0^T [H(\lambda, f, v) - H(\lambda, f, u)]\mathrm{d}t + p(\varepsilon),\end{aligned} \tag{3.14}$$

donde $p(\varepsilon)$ denota términos que son de orden menor que ε. La ecuación (3.14) es la expresión general para el cambio en $\mathbf{J}$ que resulta de un cambio arbitrario en u. Es posible simplificar esta expresión si se selecciona de forma apropiada la función λ.

3.1.3. La Ecuación Adjunta

En la sección anterior se observa que $\varphi(0) = 0$. Esto se debe a que un cambio en la función de control no produce un cambio en el estado inicial. En este marco, el segundo término del lado derecho de la ecuación (3.14) es siempre cero. La elección de λ debe realizarse de tal forma que, a excepción de la última integral, los otros términos desaparezcan. Esto se logra escogiendo λ como la solución de la siguiente ecuación diferencial adjunta:

$$-\dot{\lambda} = H_f(\lambda, f, u), \tag{3.15}$$

o con la condición adjunta final,

$$\lambda(T) = \psi_f(f(T)). \tag{3.16}$$

El valor de $G_f(f, u)$ varía en el tiempo pero, para algunos valores específicos de u y f, es conocida. Del mismo modo, el valor de $F(f, u)$ es conocido y varía en el tiempo. Por tanto (3.15) es una ecuación diferencial lineal cuyo valor cambia en el tiempo y depende del valor de λ el cual es desconocido. En este sistema se tiene una condición final $\lambda(T)$, entonces se puede resolver la ecuación adjunta por medio de una recursión hacia atrás en el tiempo, es decir, de T a 0. Con esto se determina la solución única de λ y al utilizar esta solución en la expresión (3.14) se obtiene la siguiente ecuación:

$$\Delta \mathbf{J} = \int_0^T [H(\lambda, f, v) - H(\lambda, f, u)]\mathrm{d}t + p(\varepsilon). \tag{3.17}$$

Como λ, f y u son conocidas e independientes de v, la ecuación (3.17) nos permite calcular fácilmente la consecuencia aproximada de un cambio a una nueva función de control v. Se puede usar esta ecuación para deducir la condición necesaria de optimalidad. Si la función inicial de control u es óptima para el caso de maximización, se concluye que para cualquier t,

$$H(\lambda(t), f(t), v(t)) \leq H(\lambda(t), f(t), u(t)), \tag{3.18}$$

para todo $v \in \Omega$, donde t es fijo y $u(t)$ es el valor del control óptimo al tiempo t. Sin embargo, v es arbitrario en el conjunto Ω y no es una función del tiempo. Así bien, en el óptimo

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0. \tag{3.19}$$

En efecto, para verificar la desigualdad (3.18), suponga que para alguna t existe alguna $v \in \Omega$, tal que

$$H(\lambda, f, v) > H(\lambda, f, u). \tag{3.20}$$

Ahora, si fuera posible cambiar la función $u(t)$ de tal forma que la ecuación (3.17) fuese positiva para un intervalo pequeño (de tamaño ε) que contenga a t, la integral sería positiva (y de orden ε). Así, $\Delta\mathbf{J}$ sería positiva, lo que contradice el hecho de que la función $u(t)$ produce el funcional $\mathbf{J}$ máximo. Este resultado significa que en cada instante de tiempo t el valor particular de $u(t)$ en un control óptimo tiene la propiedad de maximizar el Hamiltoniano. A este resultado se le conoce como el Principio del Máximo de Pontryagin[7], el cuál fue publicado en ruso en 1958, para este problema.

3.1.4. El Principio del Máximo

En el modelo general (3.5), se buscan las funciones de estado $f(t)$ y de control $u(t)$ que satisfacen la ecuación del sistema (3.3), la condición inicial (3.1), la restricción (3.2) y que optimizan la función objetivo (3.4). Así bien, sean $u(t) \in \Omega$ y $f(t) \in \mathbb{R}^n$ las trayectorias óptimas de control y de estado respectivamente para el problema de control óptimo original (3.5). Entonces existe una trayectoria adjunta $\lambda(t)$ tal que $u(t)$, $f(t)$ y $\lambda(t)$ satisfacen conjuntamente las siguientes condiciones:

i) $\dot{f}(t) = G(f(t), u(t))$ (ecuación del sistema)

[7]Esta misma técnica fue desarrollada independientemente por Magnus Hestenes, un matemático de la Universidad de California, quien después extendió los resultados de Pontryagin.

ii) $f(0) = f_0$ (condición inicial)

iii) $-\dot{\lambda}(t) = F_f(f(t), u(t)) + \lambda(t) G_f(f(t), u(t))$ (ecuación adjunta)

iv) $\lambda(T) = \psi_f(f(T))$ (condición adjunta final)

v) Para toda $t \in [0, T]$ y para toda $v \in \Omega$

$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$ (condición para el máximo)

donde H es el Hamiltoniano, definido como

$$H(\lambda(t), f(t), u(t)) = F(f(t), u(t)) + \lambda(t) G(f(t), u(t)).$$

En economía y finanzas existen problemas que, en su planteamiento, tienen distintos tipos de condiciones finales que son muy interesantes y existe una gran cantidad de problemas en los que se pueden aplicar, aunque para fines de este trabajo no son incluidas, el lector puede revisar los trabajos de Chiang [13] y Cerdá [12].

3.1.5. El Hamiltoniano en Valor Presente

Existen muchos problemas económicos que se pueden plantear como problemas de control óptimo. En la mayoría de ellos el funcional objetivo es una integral, en cuyo integrando aparece un factor de descuento, $e^{-\rho t}$, donde ρ es una tasa de descuento[8]. Asimismo, la restricción de estos problemas es una ecuación diferencial. El integrando del funcional objetivo es expresado de la siguiente manera:

$$F(f_t, u_t) = K(f_t, u_t) e^{-\rho t}$$

Este factor complica los cálculos para obtener la solución óptima. Es por ello que se utiliza una formulación alternativa del Hamiltoniano llamada *Hamiltoniano Valor Presente.*

En este contexto, considere el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & J(t) = \int_0^T K(f_t, u_t) e^{-\rho t} \mathrm{d}t \\ \text{sujeto a} \quad & \dot{f}_t = G(f_t, u_t), \\ & f_0 \text{ dado}, \\ & u_t \in \Omega \end{aligned}$$

[8]Para algunos problemas económicos, ρ es la tasa subjetiva de descuento, que indica la ansiedad del individuo por consumir.

El Hamiltoniano asociado a este problema es el siguiente:

$$H(f_t, u_t, \lambda_t) = K(f_t, u_t)e^{-\rho t} + m_t G(f_t, u_t)$$

Ahora bien, las condiciones del principio del principio del máximo para este problema, son las que siguen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial u_t} &= 0, \\ -\frac{\partial H}{\partial f_t} &= -\frac{\partial K}{\partial f_t}e^{-\rho t} - m_t \frac{\partial G}{\partial f_t}, \\ \frac{\partial H}{\partial m_t} &= G(f_t, u_t). \end{aligned}$$

Así bien, se define el Hamiltoniano valor presente[9] de la siguiente manera:

$$\mathcal{H} = He^{\rho t} = K(f_t, u_t) + m_t e^{\rho t} G(f_t, u_t). \tag{3.21}$$

Con este concepto se sigue el concepto de multiplicador de Lagrange valor presente. El cual es definido de la siguiente forma

$$\lambda_t = m_t e^{\rho t}$$

por lo cual $m_t = \lambda_t e^{-\rho t}$. En este marco, se sigue que

$$\dot{m}_t = -\rho e^{-\rho t}\lambda_t + e^{-\rho t}\dot{\lambda}_t.$$

Así bien, la ecuación (3.21) se reformula como sigue

$$\mathcal{H} = K(f_t, u_t) + \lambda_t G(f_t, u_t).$$

En este marco, si se decide trabajar con $\mathcal{H}$ en lugar de H entonces todas las condiciones del principio del máximo deben ser revisadas. La primera condición del principio del máximo indica que se debe maximizar el Hamiltoniano H con respecto de u_t en cada punto del intervalo de tiempo. Entonces, al intercambiar H por $\mathcal{H}$, la condición

$$\frac{\partial H}{\partial u_t} = 0$$

se reformula de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_t}e^{-\rho t} = 0.$$

[9] El término "valor presente" se establece para explicar la naturaleza no descontada del nuevo Hamiltoniano.

Así bien, como el término exponencial $e^{-\rho t} > 0$ y constante para cualquier t dada, la trayectoria de control u_t que maximice a H también maximiza al Hamiltoniano valor corriente $\mathcal{H}$. Es decir, la solución óptima es la misma tanto para

$$\frac{\partial H}{\partial u_t} = 0$$

como para

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_t} = 0. \tag{3.22}$$

para toda $t \in [0, T]$. Por otro lado, para revisar la segunda condición del principio del máximo, que se refiere a la ecuación de movimiento de la variable de costo,

$$\dot{m}_t = -\frac{\partial H}{\partial f_t}$$

se debe sustituir en cada lado de la ecuación la expresión del multiplicador de Lagrange valor presente λ_t. Así, se tiene que

$$\dot{m}_t = \dot{\lambda}_t e^{-\rho t} - \rho\lambda_t e^{-\rho t}.$$

Por otro lado se tiene que

$$-\frac{\partial H}{\partial f_t} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial f_t} e^{-\rho t},$$

de donde se sigue que

$$\dot{\lambda}_t = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial f_t} + \rho\lambda_t. \tag{3.23}$$

Note que a diferencia de la ecuación original, de movimiento de la variable de costo m_t, esta ecuación contiene el termino $\rho\lambda_t$. Por último, la condición, que se refiere a la ecuación de movimiento de la variable de estado, originalmente aparece de la siguiente manera:

$$\dot{f}_t = \frac{\partial H}{\partial m_t},$$

donde

$$\frac{\partial H}{\partial m_t} = G(f_t, u_t) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda_t}$$

entonces la condición referente a la ecuación de movimiento de la variable de estado para el problema con el Hamiltoniano valor presente es la que sigue:

$$\dot{f}_t = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda_t}. \tag{3.24}$$

En suma, las condiciones (3.22), (3.23) y (3.24) constituyen el principio del máximo para el problema con el Hamiltoniano valor presente.

3.1.6. Interpretación Económica del Principio del Máximo

Considere el modelo general de control óptimo (3.5)[10] que maximiza el funcional objetivo (3.4):

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & J = \int_0^T F(f(t), u(t))\mathrm{d}t + \psi(f(T)) \\ \text{sujeto a} \quad & \dot{f}(t) = G(f(t), u(t)) \\ & f(0) = f_0 \\ & u(t) \in \Omega \end{aligned}$$

Se define la función de valor de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} V(f,t) \quad & = \max_{u(\tau)} \int_t^T F(f(\tau), u(\tau))\mathrm{d}\tau + \psi(f(T)) \\ \text{sujeto a} \quad & \dot{f}(\tau) = G(f(\tau), u(\tau)) \\ & f(t) = f \\ & u(\tau) \in \Omega \end{aligned}$$

donde, la función de valor, $V(f,t)$ tiene dominio en $\mathbb{R}^n \times [0,T]$ y toma valores en $\mathbb{R}$. Dados $f \in \mathbb{R}^n$, $t \in [0,T]$, se tiene que $V(f,t)$ proporciona el máximo valor del funcional objetivo del problema de control óptimo que comienza en t con el estado f. Note que en particular $V(f_0, 0)$ proporciona el valor objetivo del problema original. Ahora bien, sea

$$\lambda_i(t) = \frac{\partial V(f,t)}{\partial f_i}$$

para $i = 1, 2, \ldots, n$. A $\lambda_i(t)$ se le conoce como el ritmo de variación de la función de valor cuando existen variaciones infinitesimales de la variable de estado f_i en el instante t.

Considere el problema de decisión que enfrenta una empresa cuyo objetivo es maximizar el flujo de beneficios obtenidos a lo largo de un horizonte temporal dado $[0,T]$. Así bien, en cada instante t se tiene que:

1. $f(t)$, representa el capital de la empresa. Suponga que el capital inicial $f(0) = f_0$ es conocido.

[10]La interpretación económica del principio del máximo fue desarrollada Robert Dorfman [18] en 1969.

2. $u(t)$, representa las decisiones que la empresa toma, tales como: la tasa de producción, precio del producto, diseño del producto, etcétera.

3. $F(f(t), u(t))$, es la tasa de beneficio instantáneo, medida en cantidad de unidades monetarias por unidad de tiempo.

4. $\psi(f(T))$, es el valor, en cantidad de unidades monetarias, de la empresa al final del tiempo cuando el activo por capital es $x(T)$.

Por otro lado se define a $\lambda(t)$ como el cambio marginal en los beneficios óptimos que se generan, desde el tiempo t hasta el final, producidos por un cambio en el activo por capital en el tiempo t. Es por ello que $\lambda(t)$ es el precio sombra de una unidad de capital.

La empresa tiene la capacidad de elegir la trayectoria que desee para el vector de variables de control. Sin embargo, no puede elegir el capital en cada instante. Esto se debe a que el ritmo de variación del capital, en cada instante, depende del capital existente en ese mismo instante de tiempo, de las decisiones que se toman en ese instante y del instante mismo. En términos matemáticos, esto es:

$$\dot{f} = G(f, u).$$

Es por ello que el problema se expresa como sigue

$$\begin{aligned} \max_{u(t)} \quad & J = \int_0^T F(f(t), u(t))\mathrm{d}t + \psi(f(T)) \\ \text{sujeto a} \quad & \dot{f}(t) = G(f(t), u(t)) \\ & f(0) = f_0 \\ & u(t) \in \Omega \end{aligned}$$

Para este problema, el Hamiltoniano es:

$$H(f, u, \lambda) = F(f, u) + \lambda G(f, u)$$

Ahora bien, considere un instante cualquiera $t \in [0, T]$, en que el capital y el vector de variables de control son $x(t)$ y $u(t)$ respectivamente. Asimismo, considere un incremento Δt en el tiempo, que sea lo suficientemente pequeño de manera que la empresa no cambie a $u(t)$. Así bien, si se multiplica el Hamiltoniano por Δt se obtiene:

$$H(f, u, \lambda)\Delta t = F(f, u)\Delta t + \lambda G(f, u)\Delta t$$

Ahora bien, si se toma el límite cuando $\Delta \to 0$ se sigue que:

$$H(f, u, \lambda)\mathrm{d}t = F(f, u)\mathrm{d}t + \lambda G(f, u)\mathrm{d}t = F(f, u)\mathrm{d}t + \lambda \mathrm{d}f(t)$$

donde $F(f,u)\mathrm{d}t$ es el beneficio obtenido en el intervalo Δt si se parte del capital f y se aplica el control u, es decir, representa la contribución directa, en unidades monetarias, al objetivo en dicho intervalo. Asimismo, el termino $\mathrm{d}f$ es el cambio en el capital en el intervalo Δt cuando se tiene un capital f y se aplica un control u. Es por ello que $\lambda \mathrm{d}f$ representa el valor en unidades monetarias del incremento en el capital, es decir, el cambio en el capital lleva a que se incrementen los beneficios generados (de $\lambda \mathrm{d}f$ unidades monetarias) hasta el final del horizonte de tiempo determinado, por medio de la ejecución de las decisiones óptimas. Por lo que se puede considerar como la contribución indirecta al funcional objetivo J, en unidades monetarias. Es por ello que a $H\mathrm{d}t$ se le puede interpretar como la contribución total al funcional objetivo J.

Así bien, a partir de la interpretación anterior, se puede observar que el problema es el de maximizar en cada t al Hamiltoniano H, y no a la función F.[11]

En efecto, las decisiones que son tomadas en el tiempo t (que son representadas por el vector de control $u(t)$) afectan al beneficio (contribución directa), que se obtiene en el intervalo de tiempo $[t, t+\Delta t]$, también al capital $f(t+\Delta t)$, al punto de partida de la empresa en $t+\Delta t$ y por ello a la capacidad de la empresa de generar beneficios desde $t+\Delta t$ hasta el final del horizonte temporal (contribución indirecta). Es por ello que se debe elegir al control u de manera que se maximice el valor del Hamiltoniano y por ende la suma de contribuciones directas e indirectas.

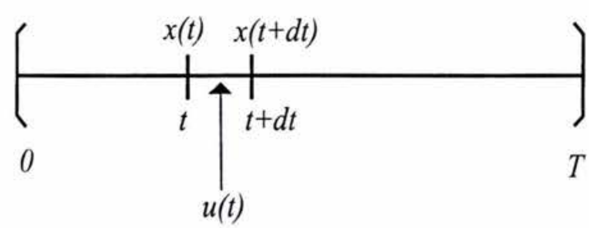

Figura 3.1: Decisiones tomadas en el instante t.

Así bien, la condición *iii*) del principio del máximo indica que:

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial f} = -\frac{\partial F}{\partial f} - \lambda \frac{\partial G}{\partial f}$$

con

$$\lambda(T) = \frac{\mathrm{d}\psi(f(T))}{\mathrm{d}f}.$$

[11] Lo cuál es la condición v) del principio del máximo.

Escrito de otro modo, esto es[12]

$$-\mathrm{d}\lambda = H_f \mathrm{d}t = F_f \mathrm{d}t + \lambda G_f \mathrm{d}t,$$

lo que expresa que la depreciación del precio sombra del capital en el intervalo Δt, que se puede considerar como el costo marginal, por mantener este capital se equipara al ingreso marginal de invertir este capital, que consiste en la suma de las contribuciones marginales directas e indirectas.

La condición $\lambda(T) = \frac{\mathrm{d}\psi(f(T))}{\mathrm{d}f}$ aclara la interpretación económica del termino $\lambda(t)$. En efecto, al final del horizonte de tiempo, ya no se toma ninguna decisión, el valor de la empresa es $\psi(f(T))$ y el precio sombra de cada unidad de capital es

$$\lambda(T) = \frac{\mathrm{d}\psi(f(T))}{\mathrm{d}f}.$$

3.1.7. Problemas con Horizonte Temporal Infinito

Existen diversos problemas económicos que pueden solucionarse por medio del control óptimo. En particular, se puede observar en la formulación del problema de crecimiento económico que no se considera un instante final, T, finito debido a que al suponer un horizonte temporal finito se necesitaría una condición final para el capital y esta es desconocida en este tipo de problemas. Por otro lado, en el proceso de acumulación de capital existe una dinámica en el tiempo y no hay algún punto en el cual deba terminar. Así bien, considere el siguiente problema de control óptimo:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & J = \int_0^\infty F(f,u)\mathrm{d}t, \\ \text{sujeto a} \quad & \dot{f} = G(f,u), \\ & f(0) = f_0, \\ & u(t) \in \Omega. \end{aligned} \tag{3.25}$$

El estudio de problemas con horizonte temporal infinito permite el uso de ciertas herramientas matemáticas que no son validas para el caso finito. Sin embargo, se pueden presentar dos tipos de dificultades al tratar este tipo de problemas: Sobre la convergencia de la integral que forma parte del funcional objetivo y sobre las condiciones de transversalidad. Si se verifica que la integral del funcional objetivo

[12] A lo largo de este trabajo se utiliza la notación con las funciones como subíndices de otras funciones lo que indica, por ejemplo, que $H_f = \frac{\partial H}{\partial f}$, $F_f = \frac{\partial F}{\partial f}$ y $G_f = \frac{\partial G}{\partial f}$.

no es convergente, se puede concluir que el problema de optimización no tiene solución.

Así bien, al igual que en el caso finito, los problemas con horizonte infinito presentan distintas condiciones finales, a saber:

a) El estado del sistema tiende a un estado estacionario dado, f_∞.

b) No se tiene condición final alguna para el estado del sistema.

c) Se tiene que la condición final es: $\lim_{t\to\infty} f(t) \geq f_{min}$.

Para el caso en que el estado del sistema tiende a un estado estacionario dado, f_∞, es decir, en el que se tiene la condición de límite a infinito, se asume que toma la siguiente forma:

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = f_\infty \tag{3.26}$$

para f_∞ constante. En otras palabras, el problema con horizonte infinito debe ser acompañado por un estado terminal fijo. Así, el principio del máximo se aplica a este tipo de problemas del mismo modo que cuando se tiene un problema con horizonte finito. Asimismo, la condición de transversalidad, cuando se tiene el problema de horizonte finito, es la que sigue:

$$[H]_{t=T} = 0.$$

Así bien, suponga que conoce el valor óptimo del Hamiltoniano para el problema de horizonte infinito, el cuál es constante a lo largo del tiempo. Entonces la condición $H = 0$ se puede comprobar no solo en el instante T, sino en cualquier punto del tiempo. Es por ello que la condición de transversalidad para el problema de horizonte infinito con la condición de límite a infinito (3.26), es la que sigue:

$$H = 0 \quad \text{para toda} \quad t \in [0, \infty). \tag{3.27}$$

Asimismo, cuando no se tiene condición final alguna para el estado del sistema se espera que la condición de transversalidad, sea una adaptación de los problemas con horizonte finito con la misma condición. Es decir, la condición de transversalidad es la que sigue:

$$\lim_{t\to\infty} \lambda(t) = 0. \tag{3.28}$$

Del mismo modo, para el caso en que el estado terminal se encuentra acotado inferiormente cuando $t \to \infty$ se espera una adaptación similar al problema de horizonte finito con el mismo caso. Es decir, las condiciones de transversalidad son las siguientes:

$$\lim_{t\to\infty} \lambda(t) \geq 0 \tag{3.29}$$

y

$$\lim_{t\to\infty} \lambda(t)[f(t) - f_{min}] = 0. \tag{3.30}$$

En efecto, suponga el siguiente funcional

$$\mathcal{V} = \int_0^T H(f,u,\lambda)\mathrm{d}t - \int_0^T \lambda(t)\dot{f}\mathrm{d}t.$$

Después de resolver la segunda integral, se puede reescribir de la siguiente forma

$$\mathcal{V} = \int_0^T [H(f,u,\lambda) + f(t)\dot{\lambda}]\mathrm{d}t - \lambda(T)f_T + \lambda_0 f_0.$$

Ahora bien, con el fin de generar una vecindad para las trayectorias óptimas de estado y de control, se utilizan las curvas perturbadas $p(t)$ para la trayectoria óptima de control $u(t)$ y $q(t)$ para la trayectoria óptima de estado $f(t)$. Así se sigue que:

$$u(t) = u_{opt} + \varepsilon p(t)$$

y

$$f(t) = f_{opt} + \varepsilon q(t),$$

donde u_{opt} y f_{opt} son las trayectorias óptimas de control y de estado respectivamente. Asimismo, si se supone que T y f_T son variables, se tiene que[13]:

$$T = T^* + \varepsilon \Delta T$$

y

$$f_T = f_T^* + \varepsilon f_T.$$

Así bien, el funcional $\mathcal{V}$ se encuentra ahora en función de ε, por lo que, si se aplica la condición de primer orden para obtener un máximo se sigue que:

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{V}}{\mathrm{d}\varepsilon} = \int_0^T \left[\left(\frac{\partial H}{\partial f} + \dot{\lambda}\right) q(t) + \frac{\partial H}{\partial u} p(t)\right] \mathrm{d}t + [H]_{t=T}\Delta T - \lambda(T)\Delta f_T = 0.$$

Así, al tomar el límite cuando $t \to \infty$ se obtiene

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{V}}{\mathrm{d}\varepsilon} = \underbrace{\int_0^\infty \left[\left(\frac{\partial H}{\partial f} + \dot{\lambda}\right) q(t) + \frac{\partial H}{\partial u} p(t)\right] \mathrm{d}t}_{(A)} + \underbrace{\lim_{t\to\infty} [H]_{t=T}\Delta T}_{(B)} - \underbrace{\lim_{t\to\infty} \lambda(T)\Delta f_T}_{(C)} = 0. \tag{3.31}$$

[13]Las variables con el asterisco como superíndice, indican que son las óptimas.

Para que la ecuación (3.31) satisfaga la condición de primer orden de maximización, cada uno de los componentes (A), (B) y (C), deben ser cero. Como los dos últimos términos ((B) y (C)) se hacen cero, se satisfacen las condiciones de transversalidad. Así bien, para el problema de horizonte infinito, el tiempo final T no es fijo, por lo que ΔT nunca se hace cero. Entonces para que el término (B) desaparezca se debe cumplir que

$$\lim_{t \to \infty} H = 0.$$

Esta última condición, se parece a la condición (3.27), sin embargo, es más general debido a que no se toma en cuenta si el estado terminal es fijo.

Una explicación económica es que debido a que la variable de estado representa el capital de una empresa, el vector de variables de control representa el conjunto de políticas de decisión y la función F representa la tasa de beneficio instantáneo de la empresa, se tiene que el Hamiltoniano incrementa el beneficio futuro (suma el beneficio actual mas el futuro) asociado a cada política de decisión admisible. Así que mientras el Hamiltoniano sea positivo existe un beneficio para la empresa, por lo que se debe elegir de forma correcta el control admisible o política de decisión. Así bien, la condición $H \to 0$ cuando $t \to \infty$ significa que la empresa debe decidir si todas las oportunidades de beneficio deben tomar ventaja de que el tiempo es infinito. Intuitivamente, este requerimiento es apropiado, indiferentemente de que el estado terminal de la empresa sea fijo o no. Por otro lado, el término (C) de la condición (3.31) es indiferente de que f_T sea fijo o no. Suponga que f_T es fijo. Entonces se tiene que $\lim_{t\to\infty} f_T = f_\infty$, al igual que en el caso a), en que el estado del sistema tiende a un estado estacionario dado, f_∞. Lo cual implica que $\Delta f_T = 0$ en el caso de horizonte infinito. Es por ello que el término (C) se hace cero sin que se requiera de alguna restricción sobre λ. Sin embargo, para el caso en que f_T no es fijo, no se cumple que $\Delta f_T = 0$. Así, para que el término (C) se haga cero, es necesario imponer la condición $\lim_{t\to\infty} \lambda(t) = 0$.

3.1.8. Ejemplos

En los siguientes ejemplos se trata el problema económico de crecimiento endógeno. Se presenta un mismo problema con distintas funciones de utilidad, se emplean las técnicas de control óptimo determinista para solucionar cada una de las variantes de este problema y las decisiones óptimas del consumidor se examinan utilizando subrutinas[14] de MATLAB©.

[14] En el Apéndice C, se muestra como se escribieron las subrutinas en MATLAB©.

Así bien, considere una economía cerrada que produce y consume un bien perecedero. En este caso, la identidad de la renta nacional en términos *per capita* está dada por

$$y_t = c_t + i_t + g_t. \tag{3.32}$$

Esta condición establece que toda la producción, y_t, del bien se destina a tres fines: al consumo, c_t, a la inversión, i_t, y al gasto de gobierno, g_t. En lo que sigue, por simplicidad, se supondrá que $g_t = 0$. La condición (3.32), asegura el equilibrio en el mercado de bienes. El problema de optimización que desea resolver un consumidor racional, maximizador de utilidad, es el siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & \int_0^\infty u(c_t)e^{-\rho t}\mathrm{d}t \\ \text{sujeto a} \quad & y_t = c_t + \dot{k}_t, \\ & k_0 \text{ dado}, \end{aligned} \tag{3.33}$$

donde c_t es el consumo del individuo al tiempo t, k_t es el capital del individuo al tiempo t, $u(c_t)$ es la función de utilidad o satisfacción del individuo y ρ es la tasa subjetiva de descuento. Si se supone que la empresa representativa produce el bien con una tecnología de la forma $y_t = Ak_t$, entonces el producto marginal de capital, A, se mantiene constante en el tiempo. De esta manera, el problema anterior se transforma en

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & \int_0^\infty u(c_t)e^{-\rho t}\mathrm{d}t \\ \text{sujeto a} \quad & \dot{k}_t = Ak_t - c_t, \\ & k_0 \text{ dado}. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Con base en el principio del máximo, las condiciones de primer orden (o condiciones necesarias) están dadas por:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c_t} = 0, \tag{3.35}$$

$$-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial k_t} = \dot{\lambda}_t - \lambda_t \rho, \quad \text{y} \tag{3.36}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda_t} = Ak_t - c_t. \tag{3.37}$$

donde $\mathcal{H} = \mathcal{H}(k, c, \lambda, t) = u(c_t) - \lambda_t(Ak_t - c_t)$.

Ejemplo 3.1.1. Función de utilidad logarítmica

Suponga que la función de utilidad del problema (3.34) es la siguiente

$$u(c_t) = \ln(c_t).$$

En el marco de la teoría de control óptimo, k_t es la variable de estado y c_t es la variable de control. El Hamiltoniano asociado a este problema se define como:

$$\mathcal{H}(k_t, c_t, \lambda_t) = \ln(c_t) + \lambda_t(Ak_t - c_t),$$

donde λ_t es la variable de coestado. A partir de la condición (3.36) se sigue que

$$\dot{\lambda}_t = \lambda_t(\rho - A).$$

Por lo tanto,

$$\lambda_t = \lambda_0 e^{(\rho - A)t}.$$

La condición (3.35) conduce a

$$\frac{1}{c_t} = \lambda_t,$$

es decir

$$c_t = \frac{1}{\lambda_t},$$

si se sustituye el valor obtenido de λ_t en la ecuación anterior, se tiene que

$$c_t = \frac{1}{\lambda_0} e^{(A-\rho)t}.$$

Ahora bien, se sabe que $c_t = Ak_t - \dot{k}_t$, entonces

$$c_t e^{-At} = Ak_t e^{-At} - \dot{k}_t e^{-At}.$$

Si se integra la expresión anterior se obtiene

$$\int_0^\infty c_t e^{-At} \mathrm{d}t = \int_0^\infty Ak_t e^{-At} \mathrm{d}t - \int_0^\infty \dot{k}_t e^{-At} \mathrm{d}t. \tag{3.38}$$

Observe que la integración por partes del primer sumando del lado derecho de la ecuación anterior produce

$$\begin{aligned} \int_0^\infty Ak_t e^{-At} \mathrm{d}t &= -k_t e^{-At}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty \dot{k}_t e^{-At} \mathrm{d}t \\ &= k_0 + \int_0^\infty \dot{k}_t e^{-At} \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Así,

$$\int_0^\infty Ak_t e^{-At}\mathrm{d}t - \int_0^\infty \dot{k}_t e^{-At}\mathrm{d}t = k_0.$$

Por lo tanto, de la ecuación (3.38), se sigue que

$$\int_0^\infty c_t e^{-At}\mathrm{d}t = k_0.$$

De esta manera,

$$\begin{aligned} k_0 &= \int_0^\infty c_t e^{-At}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{\lambda_0} e^{(A-\rho)t} e^{-At}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\lambda_0}\int_0^\infty e^{-\rho t}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\lambda_0 \rho}. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\frac{1}{\lambda_0} = k_0\rho.$$

Por lo tanto, la trayectoria óptima de consumo satisface

$$c_t = k_0\rho e^{(A-\rho)t}.$$

Observe que $c_0 = k_0\rho$. Claramente, esta trayectoria es un máximo global, ya que $\ln(c_t)$ es una función cóncava. En la Figura 3.2, se presenta la trayectoria óptima del consumo como función de la tasa subjetiva de descuento, ρ, y del producto marginal de capital, A.

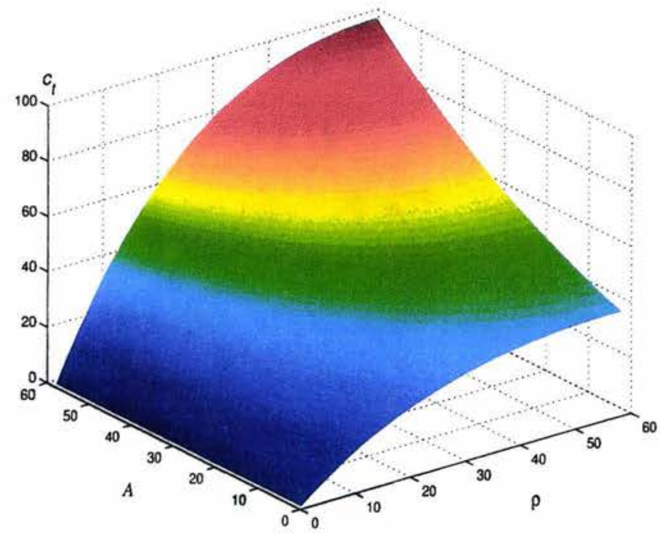

Figura 3.2: Trayectoria óptima del consumo para la función de utilidad $u(c_t) = \ln(c_t)$.

Por otro lado, se tiene que

$$\dot{k}_t = Ak_t - c_t = Ak_t - k_0\rho e^{(A-\rho)t},$$

la cual es una ecuación de la forma $\dot{x} = \alpha x + g(t)$. La solución de esta ecuación diferencial ordinaria no homogénea, está dada por

$$x = x_0 e^{\alpha t} + e^{\alpha t}\int_0^t g(s)e^{-\alpha t}\mathrm{d}s.$$

Por lo tanto, la solución en términos del capital es

$$\begin{aligned} k_t &= k_0 e^{At} - e^{At}\int_0^t k_0\rho e^{(A-\rho)s}e^{-As}\mathrm{d}s \\ &= k_0 e^{At} - e^{At}(1 - e^{-\rho t}) \\ &= k_0 e^{(A-\rho)t}. \end{aligned}$$

En la Figura 3.3, se presenta la trayectoria óptima del capital como función de la tasa subjetiva de descuento, ρ, y del producto marginal de capital, A.

Ahora bien, se tiene que

$$\dot{c}_t = (A-\rho)c_t,$$

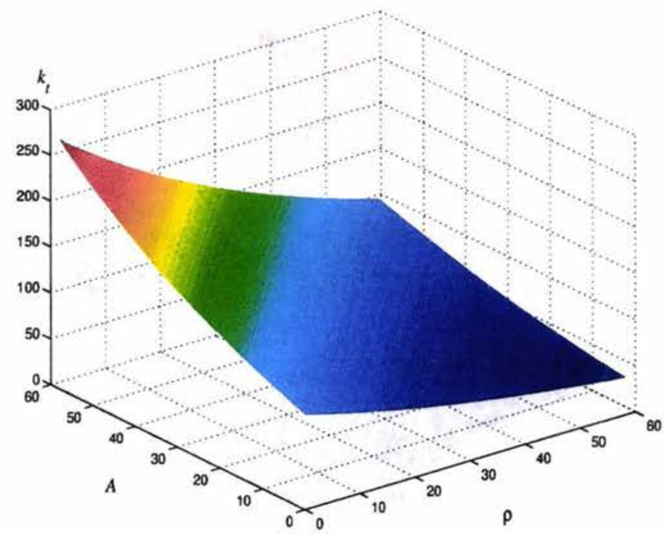

Figura 3.3: Trayectoria óptima del capital para la función de utilidad $u(c_t) = \ln(c_t)$.

es decir,

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = A - \rho,$$

esta última expresión proporciona la tasa de crecimiento del consumo. Por otro lado,

$$\dot{k}_t = (A - \rho)k_t,$$

es decir,

$$\frac{\dot{k}_t}{k_t} = A - \rho.$$

esta expresión define la tasa de crecimiento del capital. Como $y_t = Ak_t$, se tiene que $\dot{y}_t = A\dot{k}_t$. Por lo tanto,

$$\frac{\dot{y}_t}{y_t} = \frac{A\dot{k}_t}{y_t} = \frac{A\dot{k}_t}{Ak_t} = \frac{\dot{k}_t}{k_t} = A - \rho.$$

En consecuencia, el consumo, el capital y el producto crecen (o decrecen) exactamente a la misma tasa $A - \rho$. Si $A > \rho$, la producción crece, mientras que si $A < \rho$ la producción disminuye. Cuando todos los sectores crecen (o decrecen) a la misma tasa se dice que el crecimiento en la economía es balanceado. Esto se puede observar en la Figura 3.4.

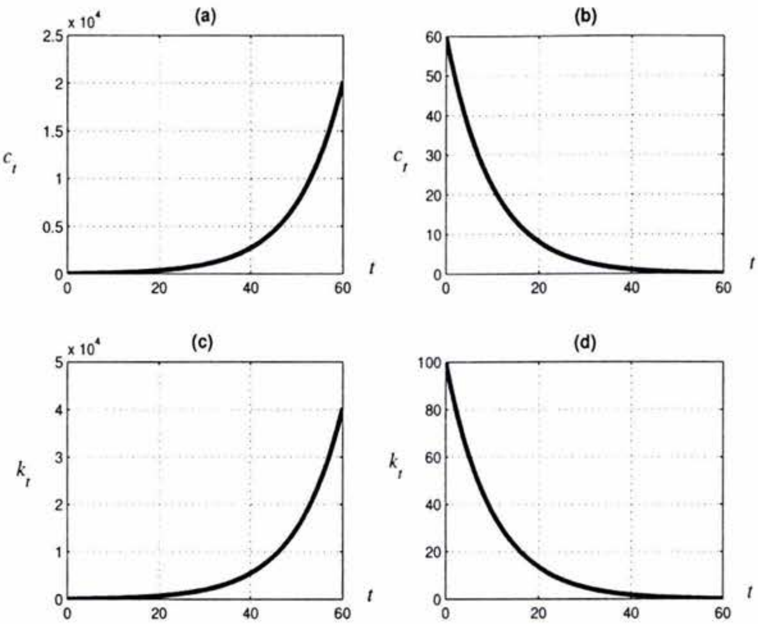

Figura 3.4: Las figuras (a) y (c) muestran el comportamiento del consumo y del capital respectivamente, cuando $A > \rho$. Asimismo las figuras (b) y (d) muestran el comportamiento del consumo y del capital respectivamente, cuando $A < \rho$.

Ejemplo 3.1.2. Función de utilidad exponencial I

Ahora suponga que la función de utilidad del problema (3.34) está dada por

$$u(c_t) = \frac{c_t^\gamma}{\gamma}.$$

En el marco de la teoría de control óptimo, k_t es la variable de estado y c_t es la variable de control. El Hamiltoniano asociado a este problema se define como:

$$\mathcal{H}(k_t, c_t, \lambda_t) = \frac{c_t^\gamma}{\gamma} + \lambda_t(Ak_t - c_t)$$

donde λ_t es la variable de coestado. A partir de la condición (3.36) se sigue que

$$\dot{\lambda}_t = \lambda_t(\rho - A).$$

Por lo tanto,

$$\lambda_t = \lambda_0 e^{(\rho - A)t}.$$

La condición (3.35) conduce a

$$c_t^{\gamma-1} - \lambda_t = 0,$$

es decir

$$c_t = \lambda_t^{\frac{1}{\gamma-1}}.$$

Ahora, si se sustituye λ_t en la ecuación anterior, se sigue que

$$c_t = \lambda_0^{\frac{1}{\gamma-1}} e^{\frac{(\rho-A)t}{\gamma-1}}.$$

Se sabe que $c_t = Ak_t - \dot{k}_t$, entonces

$$c_t e^{-At} = Ak_t e^{-At} - \dot{k}_t e^{-At}.$$

Si se integra la expresión anterior se obtiene la siguiente identidad:

$$\int_0^\infty c_t e^{-At} \mathrm{d}t = \int_0^\infty Ak_t e^{-At} \mathrm{d}t - \int_0^\infty \dot{k}_t e^{-At} \mathrm{d}t. \tag{3.39}$$

Observe que la integración por partes del primer sumando del lado derecho de la ecuación anterior produce

$$\begin{aligned}\int_0^\infty Ak_t e^{-At} \mathrm{d}t &= -k_t e^{-At}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty \dot{k}_t e^{-At} \mathrm{d}t \\ &= k_0 + \int_0^\infty \dot{k}_t e^{-At} \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Así,

$$\int_0^\infty Ak_t e^{-At} \mathrm{d}t - \int_0^\infty \dot{k}_t e^{-At} \mathrm{d}t = k_0.$$

Por lo tanto, de la ecuación (3.39), se tiene que

$$\int_0^\infty c_t e^{-At} \mathrm{d}t = k_0.$$

De esta manera,

$$\begin{aligned}k_0 &= \int_0^\infty c_t e^{-At} \mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty \lambda_0^{\frac{1}{\gamma-1}} e^{\frac{(\rho-A)t}{\gamma-1}} e^{-At} \mathrm{d}t \\ &= \lambda_0^{\frac{1}{\gamma-1}} \int_0^\infty e^{\left(\frac{\rho-\gamma A}{\gamma-1}\right)t} \mathrm{d}t \\ &= \lambda_0^{\frac{1}{\gamma-1}} \left(\frac{\gamma-1}{\gamma A - \rho}\right).\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\lambda_0^{\frac{1}{\gamma-1}} = k_0 \left(\frac{\gamma A - \rho}{\gamma - 1} \right).$$

Por lo tanto, la trayectoria óptima de consumo satisface

$$c_t = k_0 \left(\frac{\gamma A - \rho}{\gamma - 1} \right) e^{\frac{(\rho - A)t}{\gamma - 1}}.$$

Observe que $c_0 = k_0 \left[(\gamma A - \rho)/(\gamma - 1) \right]$. En la Figura 3.5 se presenta la trayectoria óptima del consumo como función de la tasa ρ y del producto marginal de capital A.

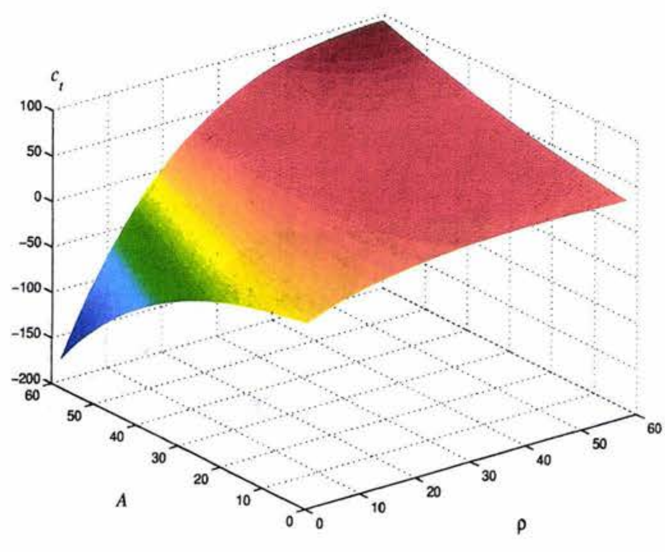

Figura 3.5: Trayectoria óptima del consumo para la función de utilidad $u(c_t) = \frac{c_t^\gamma}{\gamma}$.

Por otro lado, se tiene que

$$\dot{k}_t = Ak_t - c_t = Ak_t - k_0 \left(\frac{\gamma A - \rho}{\gamma - 1} \right) e^{\frac{(\rho - A)t}{\gamma - 1}},$$

la cual es una ecuación de la forma $\dot{x} = \alpha x + g(t)$. La solución de esta ecuación diferencial ordinaria no homogénea está dada por

$$x = x_0 e^{\alpha t} + e^{\alpha t} \int_0^t g(s) e^{-\alpha t} \mathrm{d}s.$$

Por lo tanto, la solución en términos del capital es

$$
\begin{aligned}
k_t &= k_0 e^{At} - e^{At}\int_0^t k_0\left(\frac{\gamma A-\rho}{\gamma-1}\right)e^{\left(\frac{\rho-A}{\gamma-1}\right)s}e^{-As}\mathrm{d}s\\
&= k_0 e^{At} - k_0 e^{At}\int_0^t \left(\frac{\gamma A-\rho}{\gamma-1}\right)e^{-\left(\frac{\gamma A-\rho}{\gamma-1}\right)s}\mathrm{d}s\\
&= k_0 e^{At} - k_0 e^{At}\left(1-e^{-\left(\frac{\gamma A-\rho}{\gamma-1}\right)t}\right)\\
&= k_0 e^{\left(\frac{\rho-A}{\gamma-1}\right)t}
\end{aligned}
$$

En la Figura 3.6 se presenta la trayectoria óptima de capital como función de la tasa ρ y del producto marginal de capital A.

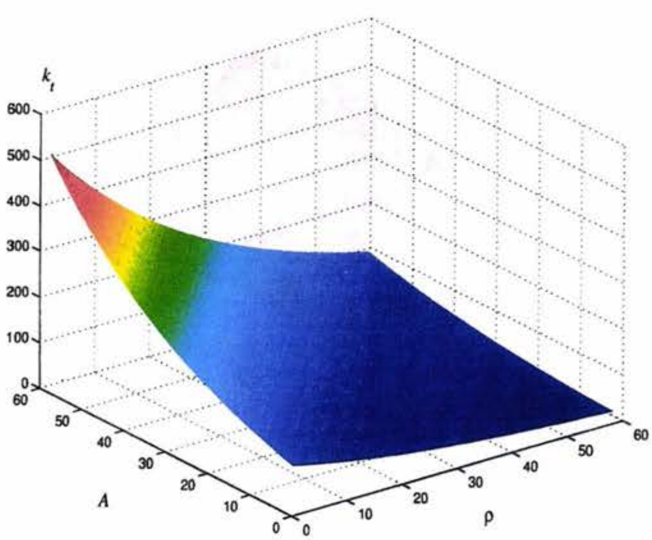

Figura 3.6: Trayectoria óptima de capital para la función de utilidad $u(c_t) = \frac{c_t^{\gamma}}{\gamma}$.

Ahora bien, como

$$\dot{c}_t = \left(\frac{\rho-A}{\gamma-1}\right)c_t$$

ó

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{\rho-A}{\gamma-1},$$

la expresión anterior define la tasa de crecimiento del consumo. Por otro lado, se tiene que

$$\dot{k}_t = \left(\frac{\rho-A}{\gamma-1}\right)k_t,$$

es decir,

$$\frac{\dot{k}_t}{k_t} = \frac{\rho - A}{\gamma - 1}.$$

Esta expresión define la tasa de crecimiento del capital. Como $y_t = Ak_t$, se tiene que $\dot{y}_t = A\dot{k}_t$. Se concluye que

$$\frac{\dot{y}_t}{y_t} = \frac{A\dot{k}_t}{y_t} = \frac{A\dot{k}_t}{Ak_t} = \frac{\dot{k}_t}{k_t} = \frac{\rho - A}{\gamma - 1}.$$

En consecuencia, el consumo, el capital y el producto crecen (o decrecen) exactamente a la misma tasa, $(\rho - A)/(\gamma - 1)$. Si $A > \rho$, la produción crece, mientras que si $A < \rho$ la producción disminuye, esto se debe a que $\gamma < 1$. Cuando todos los sectores crecen (o decrecen) a la misma tasa se dice que el crecimiento en la economía es balanceado. Esto se puede observar en la Figura 3.7.

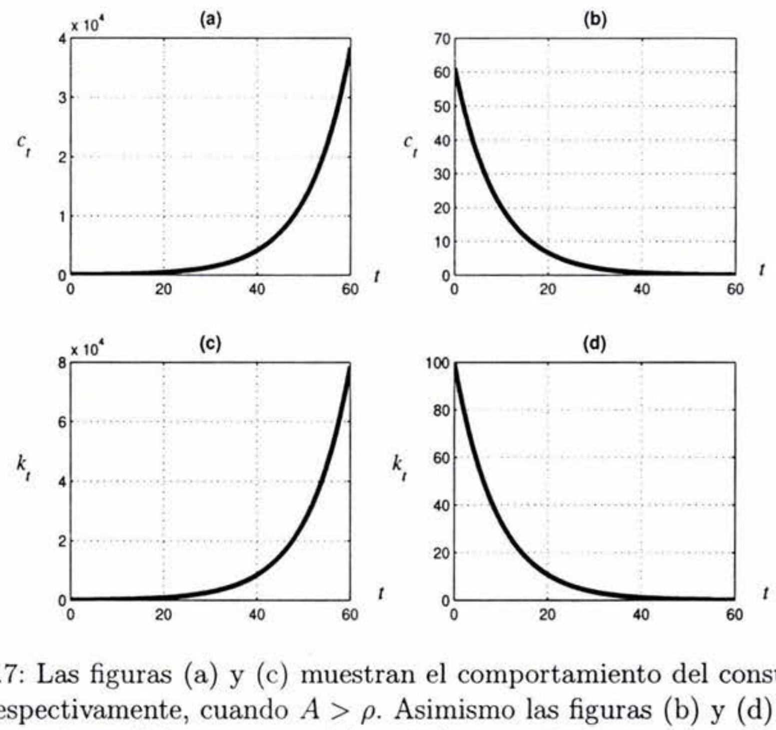

Figura 3.7: Las figuras (a) y (c) muestran el comportamiento del consumo y del capital respectivamente, cuando $A > \rho$. Asimismo las figuras (b) y (d) muestran el comportamiento del consumo y del capital respectivamente, cuando $A < \rho$.

Ejemplo 3.1.3. Función de utilidad exponencial II

Suponga ahora que la función de utilidad para el problema (3.34) se encuentra expresada de la siguiente manera:

$$u(c_t) = \frac{c_t^{1-\theta} - 1}{1-\theta}.$$

En el marco de la teoría de control óptimo, k_t es la variable de estado y c_t es la variable de control. El Hamiltoniano asociado a este problema se define como:

$$\mathcal{H}(k_t, c_t, \lambda_t) = \frac{c_t^{1-\theta} - 1}{1-\theta} + \lambda(Ak_t - c_t)$$

donde λ_t es la variable de coestado. A partir de la condición (3.36) se sigue que

$$\dot{\lambda}_t = \lambda_t(\rho - A).$$

Por lo tanto,

$$\lambda_t = \lambda_0 e^{(\rho-A)t}.$$

La condición (3.35) conduce a

$$c_t^{-\theta} - \lambda_t = 0,$$

es decir

$$c_t = \frac{1}{\lambda_t^{\frac{1}{\theta}}}.$$

Si se sustituye λ_t en la ecuación anterior, se sigue que

$$c_t = \lambda_0^{-\frac{1}{\theta}} e^{\left(\frac{A-\rho}{\theta}\right)t}.$$

Se sabe que $c_t = Ak_t - \dot{k}_t$, por lo que

$$c_t e^{-At} = Ak_t e^{-At} - \dot{k}_t e^{-At}.$$

Ahora, si se integra la expresión anterior se obtiene la siguiente igualdad:

$$\int_0^\infty c_t e^{-At} \mathrm{d}t = \int_0^\infty Ak_t e^{-At} \mathrm{d}t - \int_0^\infty \dot{k}_t e^{-At} \mathrm{d}t. \tag{3.40}$$

Observe que la integración por partes del primer sumando del lado derecho de la ecuación anterior produce

$$\begin{aligned}\int_0^\infty Ak_t e^{-At} \mathrm{d}t &= -k_t e^{-At}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty \dot{k}_t e^{-At} \mathrm{d}t \\ &= k_0 + \int_0^\infty \dot{k}_t e^{-At} \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Así,

$$\int_0^\infty Ak_t e^{-At}\mathrm{d}t - \int_0^\infty \dot{k}_t e^{-At}\mathrm{d}t = k_0.$$

Por lo tanto, de la ecuación (3.40), se tiene que

$$\int_0^\infty c_t e^{-At}\mathrm{d}t = k_0.$$

De esta manera,

$$\begin{aligned}
k_0 &= \int_0^\infty c_t e^{-At}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \lambda_0^{-\frac{1}{\theta}} e^{\left(\frac{A-\rho}{\theta}\right)t} e^{-At}\mathrm{d}t \\
&= \lambda_0^{-\frac{1}{\theta}} \int_0^\infty e^{\left(\frac{A(1-\theta)-\rho}{\theta}\right)t}\mathrm{d}t \\
&= \lambda_0^{-\frac{1}{\theta}} \left(\frac{\theta}{\rho - A(1-\theta)}\right)
\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\lambda_0^{-\frac{1}{\theta}} = k_0 \left(\frac{\rho - A(1-\theta)}{\theta}\right).$$

Por lo tanto, la trayectoria óptima de consumo satisface

$$c_t = k_0 \left(\frac{\rho - A(1-\theta)}{\theta}\right) e^{\left(\frac{A-\rho}{\theta}\right)t}.$$

Observe que $c_0 = k_0 \left(\frac{\rho - A(1-\theta)}{\theta}\right)$. En la Figura 3.8 se presenta la trayectoria óptima del consumo como función de la tasa ρ y del producto marginal de capital A.

Por otro lado, se tiene que

$$\dot{k}_t = Ak_t - c_t = Ak_t - k_0 \left(\frac{\rho - A(1-\theta)}{\theta}\right) e^{\left(\frac{A-\rho}{\theta}\right)t},$$

la cual es una ecuación de la forma $\dot{x} = \alpha x + g(t)$. La solución de esta ecuación diferencial ordinaria no homogénea está dada por

$$x = x_0 e^{\alpha t} + e^{\alpha t} \int_0^t g(s) e^{-\alpha t}\mathrm{d}s.$$

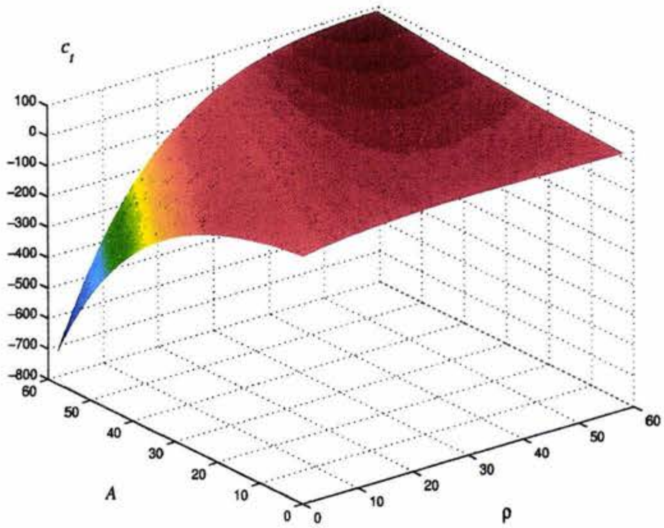

Figura 3.8: Trayectoria óptima del consumo para la función de utilidad $u(c_t) = \frac{c_t^{1-\theta}-1}{1-\theta}$.

Por lo tanto, la solución en términos del capital es

$$\begin{aligned} k_t &= k_0 e^{At} - e^{At} \int_0^t k_0 \left(\frac{\rho - A(1-\theta)}{\theta} \right) e^{\left(\frac{A-\rho}{\theta}\right)s} e^{-As} \mathrm{d}s \\ &= k_0 e^{At} - k_0 e^{At} \int_0^t \left(\frac{\rho - A(1-\theta)}{\theta} \right) e^{-\left(\frac{\rho - A(1-\theta)}{\theta}\right)s} \mathrm{d}s \\ &= k_0 e^{At} - k_0 e^{At} \left(1 - e^{-\left(\frac{\rho - A(1-\theta)}{\theta}\right)t} \right) \\ &= k_0 e^{\left(\frac{A-\rho}{\theta}\right)t} \end{aligned}$$

En la Figura 3.9 se presenta la trayectoria óptima del capital como función de la tasa ρ y del producto marginal de capital A.

Ahora bien, como

$$\dot{c}_t = \left(\frac{A-\rho}{\theta} \right) c_t$$

ó

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{A-\rho}{\theta}.$$

La expresión anterior define la tasa de crecimiento del consumo.

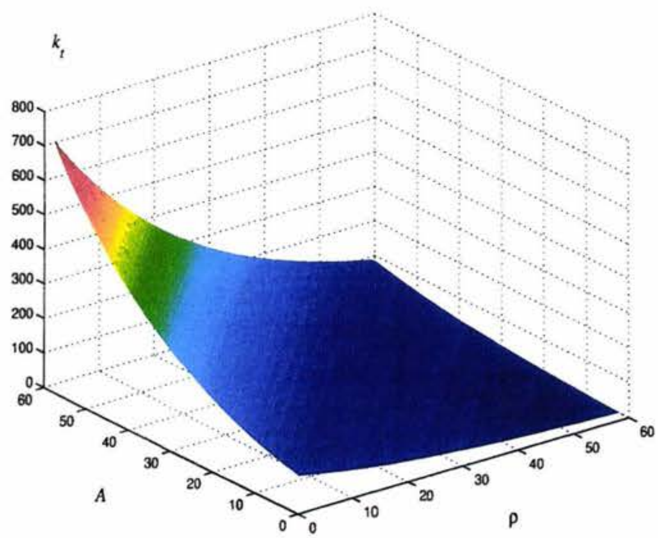

Figura 3.9: Trayectoria óptima del capital para la función de utilidad $u(c_t) = \frac{c_t^{1-\theta}-1}{1-\theta}$.

Por otro lado, se tiene que

$$\dot{k}_t = \left(\frac{A-\rho}{\theta}\right)k_t.$$

Es decir,

$$\frac{\dot{k}_t}{k_t} = \frac{A-\rho}{\theta}.$$

La expresión anterior define la tasa de crecimiento del capital. Como $y_t = Ak_t$, se tiene que $\dot{y}_t = A\dot{k}_t$. Por lo tanto, se concluye que

$$\frac{\dot{y}_t}{y_t} = \frac{A\dot{k}_t}{y_t} = \frac{A\dot{k}_t}{Ak_t} = \frac{\dot{k}_t}{k_t} = \frac{A-\rho}{\theta}.$$

En consecuencia, el consumo, el capital y el producto crecen (o decrecen) exactamente a la misma tasa $(A-\rho)/\theta$. Si $A > \rho$, la producción crece, mientras que si $A < \rho$ la producción disminuye debido a que se sabe que $\theta > 0$. Cuando todos los sectores crecen (o decrecen) a la misma tasa se dice que el crecimiento en la economía es balanceado.

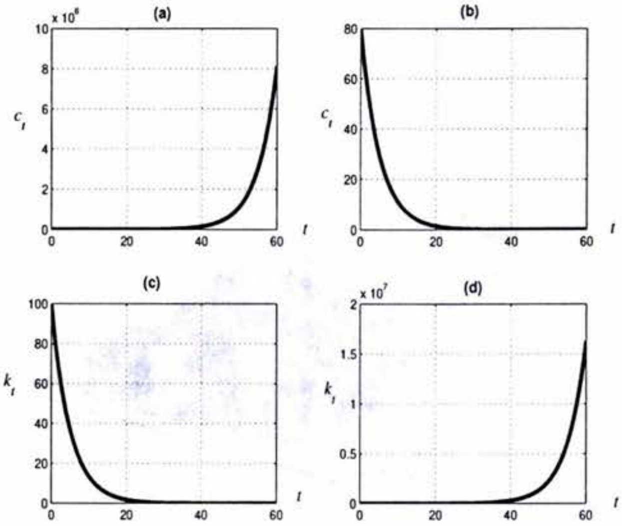

Figura 3.10: Las figuras (a) y (c) muestran el comportamiento del consumo y del capital respectivamente, cuando $A > \rho$. Asimismo las figuras (b) y (d) muestran el comportamiento del consumo y del capital respectivamente, cuando $A < \rho$.

Ejemplo 3.1.4. Función de utilidad exponencial negativa.

Considere la siguiente ecuación de utilidad para el problema (3.34):

$$u(c_t) = -e^{-\theta c_t}.$$

En el marco de la teoría de control óptimo, k_t es la variable de estado y c_t es la variable de control. El Hamiltoniano asociado a este problema se define como:

$$\mathcal{H}(k_t, c_t, \lambda_t) = -e^{-\theta c_t} + \lambda_t(Ak_t - c_t)$$

donde λ_t es la variable de coestado. La condición (3.35) conduce a

$$\theta e^{-\theta c_t} - \lambda_t = 0,$$

es decir

$$c_t = \frac{\ln(\theta) - \ln(\lambda_t)}{\theta}.$$

Si se sustituye λ_t en la ecuación anterior, se sigue que

$$c_t = \frac{\ln(\theta) - \ln(\lambda_0 e^{(\rho - A)t})}{\theta}.$$

Es decir

$$c_t = \frac{\ln(\theta) - \ln(\lambda_0) - (\rho - A)t}{\theta}.$$

Se sabe que $c_t = Ak_t - \dot{k}_t$, por lo que

$$c_t e^{-At} = Ak_t e^{-At} - \dot{k}_t e^{-At}.$$

Si se integra la expresión anterior se obtiene la siguiente identidad:

$$\int_0^\infty c_t e^{-At} \mathrm{d}t = \int_0^\infty Ak_t e^{-At} \mathrm{d}t - \int_0^\infty \dot{k}_t e^{-At} \mathrm{d}t. \tag{3.41}$$

Observe que la integración por partes del primer sumando del lado derecho de la ecuación anterior produce

$$\begin{aligned}\int_0^\infty Ak_t e^{-At} \mathrm{d}t &= -k_t e^{-At}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty \dot{k}_t e^{-At} \mathrm{d}t\\ &= k_0 + \int_0^\infty \dot{k}_t e^{-At} \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Así,

$$\int_0^\infty Ak_t e^{-At} \mathrm{d}t - \int_0^\infty \dot{k}_t e^{-At} \mathrm{d}t = k_0.$$

Por lo tanto, de la ecuación (3.41), se sigue que

$$\int_0^\infty c_t e^{-At} \mathrm{d}t = k_0.$$

De esta manera,

$$\begin{aligned}k_0 &= \int_0^\infty c_t e^{-At} \mathrm{d}t\\ &= \int_0^\infty \frac{\ln(\theta) - \ln(\lambda_0) - (\rho - A)t}{\theta} e^{-At} \mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{\theta}\left[(\ln(\theta) - \ln(\lambda_0)) \int_0^\infty e^{-At} \mathrm{d}t - (\rho - A) \int_0^\infty t e^{-At} \mathrm{d}t\right]\\ &= \frac{1}{\theta}\left[\frac{\ln(\theta) - \ln(\lambda_0)}{A} - \frac{(\rho - A)}{A^2}\right]\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\ln(\theta) - \ln(\lambda_0) = A\theta k_0 + \frac{\rho - A}{A}.$$

Observe que $c_0 = (A\theta k_0 + \frac{\rho - A}{A})/\theta$. En la Figura 3.11 se presenta la trayectoria óptima del consumo como función de la tasa ρ y del producto marginal de capital A. Por lo tanto, la trayectoria óptima de consumo satisface

$$c_t = \frac{A\theta k_0 + \frac{\rho - A}{A} - (\rho - A)t}{\theta}.$$

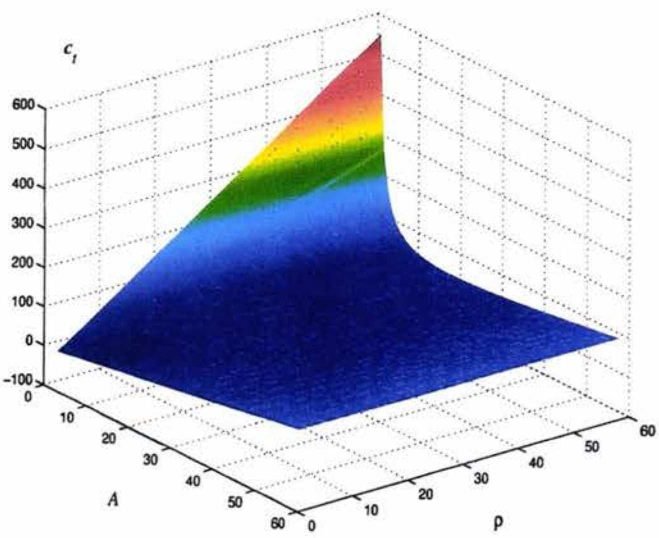

Figura 3.11: Trayectoria óptima del consumo para la función de utilidad $u(c_t) = -e^{-\theta c_t}$.

Por otro lado, se tiene que

$$\dot{k}_t = Ak_t - c_t = Ak_t - \left(\frac{A\theta k_0 + \frac{\rho - A}{A} - (\rho - A)t}{\theta} \right).$$

La expresión anterior es una ecuación de la forma $\dot{x} = \alpha x + g(t)$. La solución de esta ecuación diferencial ordinaria no homogénea está dada por

$$x = x_0 e^{\alpha t} + e^{\alpha t} \int_0^t g(s) e^{-\alpha t} \mathrm{d}s.$$

Por lo tanto, la solución en términos del capital es

$$
\begin{aligned}
k_t &= k_0e^{At} - e^{At}\int_0^t \left(\frac{A\theta k_0 + \frac{\rho - A}{A} - (\rho - A)s}{\theta}\right) e^{-As}\mathrm{d}s \\
&= k_0e^{At} - \frac{e^{At}}{\theta}\left[\left(A\theta k_0 + \frac{\rho - A}{A}\right)\int_0^t e^{-As}\mathrm{d}s - (\rho - A)\int_0^t se^{-As}\mathrm{d}s\right] \\
&= k_0e^{At} - \frac{e^{At}}{\theta}\left\{\left(A\theta k_0 + \frac{\rho - A}{A}\right)\frac{1}{A}(1 - e^{-At}) - (\rho - A)\frac{1}{A}\left[\frac{1}{A}(1 - e^{-At}) - te^{-At}\right]\right\} \\
&= k_0 + \left(\frac{A - \rho}{A\theta}\right)t
\end{aligned}
$$

En la Figura 3.12 se presenta la trayectoria óptima del consumo como función de la tasa ρ y del producto marginal de capital A.

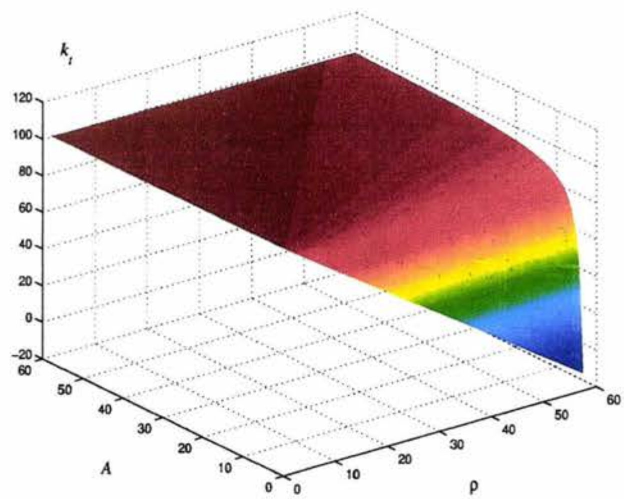

Figura 3.12: Trayectoria óptima del consumo para la función de utilidad $u(c_t) = -e^{-\theta c_t}$.

Ahora bien, como

$$\frac{\dot{y}_t}{y_t} \neq \frac{\dot{c}_t}{c_t} \neq \frac{\dot{k}_t}{k_t},$$

se concluye[15] que, para este modelo, no es posible que el crecimiento en la economía sea balanceado.

[15]Los cálculos se le dejan al lector.

3.2. Control Óptimo Estocástico

Para el estudio de las técnicas de control óptimo estocástico, es necesario del conocimiento de diversas técnicas de optimización, como el control óptimo determinista y programación dinámica, así como de la teoría avanzada de procesos estocásticos y del cálculo estocástico. Un resultado importante para solucionar problemas de control óptimo estocástico es la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman la cual proporciona las condiciones de primer orden para la optimización de dichos problemas.

3.2.1. El Generador Diferencial

Uno de los resultados más importantes obtener un óptimo, en los problemas económico–financieros que son planteados y resueltos con control óptimo estocástico, se denomina generador diferencial. Este resultado proporciona una formula con la que se obtiene el promedio de una integral y el de una derivada local. Para ello, se supone un funcional $J(f)$ y un control fijo. Este funcional, su primera, segunda y tercera derivada se encuentran acotadas uniformemente.

En este contexto, considere la siguiente función

$$f(t) = f(0) + \int_0^t G(f(s))\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(f(s))\mathrm{d}z(s), \tag{3.42}$$

donde $G(f)$ y $\sigma(f)$ satisfacen la condición de Lipschitz[16]. Asimismo, se define el siguiente operador

$$\mathcal{L}(\cdot) = G(f)\frac{\partial(\cdot)}{\partial f} + \frac{1}{2}\sigma^2(f)\frac{\partial^2(\cdot)}{\partial f^2},$$

de tal forma que

$$\mathrm{E}_{f_0}\{J(f(t))\} - J(f_0) = \mathrm{E}_{f_0}\left\{\int_0^t \mathcal{L}(J(f(t)))\mathrm{d}t\right\},$$

donde $f(0) = f_0$ y E_{f_0} es el operador esperanza con la condición inicial f_0. Al operador, $\mathcal{L}$, se le conoce como generador diferencial del proceso $f(t)$.

En efecto, suponga que la función de estado $f(t)$ sigue el proceso general de Itô, es decir,

$$f(t) = f(0) + \int_0^t G(f(s))\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(f(s))\mathrm{d}z(s).$$

[16] Ver Kushner [31], capítulo 10.

Esta expresión se presenta también con la siguiente forma diferencial

$$\mathrm{d}f(t) = G(f(t))\mathrm{d}t + \sigma(f(t))\mathrm{d}z.$$

Ahora bien, si la ecuación anterior se discretiza, se obtiene la siguiente identidad:

$$\Delta f(t) = G(f(t))\Delta t + \sigma(f(t))\Delta z. \tag{3.43}$$

En este marco, se define $\Delta z = \xi\sqrt{\Delta t}$, donde $\xi \sim \mathcal{N}(0,1)$. Esto lleva a que $\xi^2 \sim \chi_1^2$, de donde se sigue que

$$\mathrm{E}[\Delta z] = \mathrm{E}\left[\xi\sqrt{\Delta t}\right] = \sqrt{\Delta t}\mathrm{E}[\xi] = 0,$$

y

$$\mathrm{Var}[\Delta z] = \mathrm{Var}\left[\xi\sqrt{\Delta t}\right] = \mathrm{E}\left[\left(\xi\sqrt{\Delta t}\right)^2\right] - \mathrm{E}^2\left[\xi\sqrt{\Delta t}\right] = \Delta t\mathrm{E}\left[\xi^2\right].$$

Así bien, como $\xi^2 \sim \chi_1^2$, se tiene que[17]

$$\mathrm{E}[(\Delta z)^2] = \Delta t\mathrm{E}[\xi^2] = \Delta t,$$

por lo que $\mathrm{Var}[\Delta z] = \Delta t$. Entonces

$$\mathrm{Var}[(\Delta z)^2] = \mathrm{Var}[\xi^2\Delta t] = (\Delta t)^2\mathrm{Var}[\xi^2] = 2(\Delta t)^2.$$

Es por ello que, sin pérdida de generalidad, para valores pequeños de Δt, se sigue que

$$\Delta z = \sqrt{\Delta t}.$$

Si se eleva al cuadrado la ecuación (3.43), se obtiene la siguiente expresión

$$(\Delta f)^2 = G^2(f)(\Delta t)^2 + 2G\sigma(\Delta t)^{3/2} + \sigma^2(f)\Delta t. \tag{3.44}$$

Ahora bien, el funcional $J(f(t))$ se desarrolla en series de Taylor, es decir,

$$\Delta J = \frac{\partial J}{\partial f}\Delta f + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 J}{\partial f^2}(\Delta f)^2 + \ldots$$

Así, al sustituir la ecuación (3.44) en la expresión anterior y si se desprecian los términos $(\Delta t)^2$ y $(\Delta t)^{3/2}$, se obtiene que

$$\Delta J = \frac{\partial J}{\partial f}\Delta f + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 J}{\partial f^2}\sigma^2(f)(\Delta t).$$

[17] El valor de la media de una variable aleatoria x que se distribuye como una χ^2 con n grados de libertad es n y el valor de su varianza es $2n$. Es por ello que la media de $\xi^2 \sim \chi_1^2$ es 1 y el valor de su varianza es 2.

Ahora, si se sustituye la ecuación (3.43) en la expresión anterior y se toma el límite cuando $\Delta \to 0$, se tiene que

$$\mathrm{d}J = \left(G(f)\frac{\partial J}{\partial f} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 J}{\partial f^2}\sigma^2(f) \right) \mathrm{d}t + \frac{\partial J}{\partial f}\sigma(f)\mathrm{d}z. \tag{3.45}$$

Así bien, si se define el siguiente operador

$$\mathcal{L}(\cdot) = G(f)\frac{\partial(\cdot)}{\partial f} + \frac{1}{2}\sigma^2(f)\frac{\partial^2(\cdot)}{\partial f^2}$$

y se sustituye en (3.45), se obtiene

$$\mathrm{d}J = \mathcal{L}(J)\mathrm{d}t + \frac{\partial J}{\partial f}\sigma(f)\mathrm{d}z. \tag{3.46}$$

Ahora bien, si se integra la expresión (3.46) para $s \in [t_0, t]$, se obtiene la siguiente identidad:

$$J(f(t)) - J(f(t_0)) = \int_{t_0}^{t} \mathcal{L}(J(f(s)))\mathrm{d}s + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial J(f(s))}{\partial f}\sigma(f)\mathrm{d}z.$$

Entonces, si se calcula el valor esperado a la expresión anterior, dado f_0, se tiene que

$$\mathrm{E}_{f_0}\{J(f_t)\} - \mathrm{E}_{f_0}\{J(f_{t_0})\} = \mathrm{E}_{f_0}\left\{ \int_{t_0}^{t} \mathcal{L}J(f_s)\mathrm{d}s + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial J(f_s)}{\partial f}\sigma(f)\mathrm{d}z \right\} \tag{3.47}$$

Observe que el valor esperado de la última integral de (3.47) es cero. Esto se debe a que $E_{f_0}[\mathrm{d}z] = 0$. Por lo tanto,

$$\mathrm{E}_{f_0}\{J(f(t))\} - J(f(t_0)) = \mathrm{E}_{f_0}\left\{ \int_{t_0}^{t} \mathcal{L}(J(f(s)))\mathrm{d}s \right\}.$$

3.2.2. Ecuación de Utilidad

Para obtener la ecuación de utilidad suponga un control fijo. Asimismo, considere un funcional de la siguiente forma:

$$J(f) = \mathrm{E}_f \left\{ \int_0^{\infty} e^{-\rho t} F(f(t)) \mathrm{d}t \right\}. \tag{3.48}$$

Si se divide la región de integración de (3.48) y se desarrolla, se sigue que

$$\begin{aligned}
J(f) &= \mathrm{E}_f \left\{ \int_0^{\Delta} e^{-\rho t} F(f(t)) \mathrm{d}t \right\} + \mathrm{E}_f \left\{ \int_{\Delta}^{\infty} e^{-\rho t} F(f(t)) \mathrm{d}t \right\} \\
&= \mathrm{E}_f \left\{ \int_0^{\Delta} e^{-\rho t} F(f(t)) \mathrm{d}t \right\} + \mathrm{E}_f \left\{ E_f \left\{ \int_{\Delta}^{\infty} e^{-\rho t} F(f(t)) \mathrm{d}t \middle| f_{\Delta} \right\} \right\} \\
&= \mathrm{E}_f \left\{ \int_0^{\Delta} e^{-\rho t} F(f(t)) \mathrm{d}t \right\} + \mathrm{E}_f \left\{ e^{-\rho\Delta} \mathrm{E}_f \left\{ \int_{\Delta}^{\infty} e^{-\rho(t-\Delta)} F(f(t)) \mathrm{d}t \middle| f_{\Delta} \right\} \right\} \\
&= \mathrm{E}_f \left\{ \int_0^{\Delta} e^{-\rho t} F(f(t)) \mathrm{d}t \right\} + \mathrm{E}_f \left\{ e^{-\rho\Delta} \mathrm{E}_{f_{\Delta}} \left\{ \int_{\Delta}^{\infty} e^{-\rho t} F(f(t)) \mathrm{d}t \right\} \right\} \\
&= \mathrm{E}_f \left\{ \int_0^{\Delta} e^{-\rho t} F(f(t)) \mathrm{d}t \right\} + \mathrm{E}_f \{ e^{-\rho\Delta} J(f_{\Delta}) \}.
\end{aligned}$$

Es decir,

$$\mathrm{E}_f \{ e^{-\rho\Delta} J(f_{\Delta}) \} + \mathrm{E}_f \left\{ \int_0^{\Delta} e^{-\rho t} F(f(t)) dt \right\} - J(f) = 0.$$

Ahora, si se divide esta expresión entre Δ, y se le suma y resta el término $\mathrm{E}_f\{J(f_{\Delta})\}/\Delta$, se sigue que

$$\frac{\mathrm{E}_f\{J(f_{\Delta})\} - J(f)}{\Delta} + \frac{(e^{-\rho\Delta} - 1)}{\Delta} \mathrm{E}_f\{J(f_{\Delta})\} + \frac{\mathrm{E}_f \left\{ \int_0^{\Delta} e^{-\rho t} F(f(t)) \mathrm{d}t \right\}}{\Delta} = 0.$$

Al tomar el límite cuando $\Delta \to 0$, en esta última ecuación, se obtiene que[18]

$$\mathcal{L}(J(f)) - \rho J(f) + F(f) = 0. \tag{3.49}$$

La solución a la expresión (3.49) es la ecuación de utilidad.

[18]Note que $\text{lím}_{\Delta \to 0} e^{-\rho\Delta} = 1 - \rho$.

3.2.3. Condición de Primer Orden

Para desarrollar la condición de primer orden, de un problema de control óptimo estocástico, se incluye la variable de control $u(t)$. Así, si se modifica la ecuación (3.42) de tal manera que se introduce un control $u = u(t)$ se obtiene la siguiente versión controlada de dicha identidad

$$f(t) = f(0) + \int_0^t G(f(s), u(s))\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(f(s), u(s))\mathrm{d}z(s). \tag{3.50}$$

Asimismo, se supone que el conjunto de controles, la función f y σ dependen únicamente del tiempo. En este contexto, se define lo siguiente:

$$\begin{aligned} J^u(f) &\equiv \mathrm{E}_f^u\left\{\int_0^\infty e^{-\rho t}F(f(t), u(t))\mathrm{d}t\right\}, \\ J(f) &\equiv \sup_u J^u(f). \end{aligned}$$

Donde el símbolo E_f^u denota el operador de esperanza, dados la función $f(t)$ y el control $u(t)$. Ahora bien, como se estudió en la sección anterior, el funcional $J(f)$ se puede escribir como

$$\begin{aligned} J(f) &= \max_u \mathrm{E}_f^u\left\{\int_0^\Delta e^{-\rho t}F(f(t), u(t))\mathrm{d}t + \int_\Delta^\infty e^{-\rho t}F(f(t), u(t))\mathrm{d}t\right\} \\ &= \max_u \mathrm{E}_f^u\left\{\int_0^\Delta e^{-\rho t}F(f(t), u(t))\mathrm{d}t + e^{-\rho\Delta}\mathrm{E}_{f_\Delta}\left\{\int_0^\infty e^{-\rho t}F(f(t), u(t))\mathrm{d}t\right\}\right\} \\ &= \max_u \mathrm{E}_f^u\left\{\int_0^\Delta e^{-\rho t}F(f(t), u(t))\mathrm{d}t + e^{-\rho\Delta}J(f_\Delta)\right\}. \end{aligned} \tag{3.51}$$

La expresión (3.51) es tan solo otra aplicación del principio de optimalidad. Esto conduce a la siguiente condición necesaria para el máximo

$$\sup_u [\mathcal{L}^u(J(f)) - \rho J(f) + F(f, u)] = 0, \tag{3.52}$$

La solución a la expresión (3.52) es la utilidad máxima, donde el generador diferencial para el problema control óptimo es:

$$\mathcal{L}^u(\cdot) = G(f, u)\frac{\partial(\cdot)}{\partial f} + \frac{1}{2}\sigma^2(f, u)\frac{\partial^2(\cdot)}{\partial f^2}.$$

3.2.4. Ejemplos

En este apartado se plantean y resuelven los siguientes modelos económicos: El modelo de crecimiento económico óptimo bajo incertidumbre y el modelo de portafolio de inversión bajo incertidumbre.

Ejemplo 3.2.1. Modelo neoclásico de crecimiento económico óptimo bajo incertidumbre

En cualquier economía existen dos tipos de decisiones que un consumidor debe afrontar. El primer tipo de decisiones consiste en consumir en el presente, es decir, se consume en el presente todo cuanto se pueda y el consumo futuro queda incierto. El segundo tipo de decisiones consiste en acumular capital para aumentar las posibilidades de consumo en el futuro, es decir, se consume lo menos posible en el presente para que el capital aumente y con él, el consumo futuro. En el siguiente modelo se busca determinar las trayectorias de consumo (variable de control) y capital (variable de estado) que maximizan el bienestar de una economía cuya fuerza de trabajo tiene variaciones que se rigen por una ecuación diferencial estocástica en la que aparece un proceso de Wiener.

Un problema económico es modelado bajo el enfoque neoclásico de crecimiento, si se toman decisiones entre consumo e inversión de tal manera que el bienestar sea el máximo posible para todos los individuos. En el modelo neoclásico de crecimiento económico se presentan los siguientes supuestos:

1. La economía es agregada, es decir, produce y consume un solo bien,
2. la economía es cerrada, es decir, no es posible exportar ni importar bienes,
3. la tecnología de producción requiere de dos clases de insumos o factores de la producción: el capital y trabajo,
4. la función de producción presenta rendimientos constantes de escala,
5. la oferta de trabajo es perfectamente inelástica, es decir, los individuos están dispuestos a trabajar con cualquier salario,
6. la fuerza laboral crece de manera exponencial y tiene ciertas variaciones de tal manera que el tamaño de la población está sujeto a una ecuación diferencial estocástica, en la cual está considerado un proceso de Wiener,
7. el capital se deprecia a una tasa constante,
8. toda producción se destina a consumo o inversión,

9. existe un individuo, llamado planeador central, que desea maximizar el bienestar de todos los agentes y tiene la facultad de decidir sobre las trayectorias de consumo y de inversion de la economía,

10. la tasa subjetiva intertemporal de descuento es constante y

11. todos los individuos participan con su trabajo en la economía.

Asimismo, en el modelo se presentan las siguientes variables:

$Y(t)$, producción al tiempo t,

$K(t)$, capital al tiempo t,

$C(t)$, consumo al tiempo t,

$I(t)$, inversión al tiempo t,

$L(t)$, trabajo al tiempo t,

$y(t)$, producción *per capita* al tiempo t,

$k(t)$, capital *per cápita* al tiempo t,

$c(t)$, consumo *per cápita* al tiempo t,

$i(t)$, inversión *per cápita* al tiempo t.

Finalmente, los parámetros que contempla el modelo son los siguientes:

μ, tasa de depreciación del capital

η, es el promedio en el cambio de la fuerza laboral,

σ^2, es la varianza en el cambio de la fuerza laboral,

ρ, tasa subjetiva intertemporal de descuento,

r, tasa de interés.

El modelo neoclásico de crecimiento caracteriza el crecimiento económico en una economía cerrada. Se supone que toda la producción se distribuye entre consumo $C(t)$ e inversión $I(t)$, es decir,

$$Y(t) = C(t) + I(t).$$

La inversión $I(t)$ se utiliza para reemplazar el capital depreciado $\mu K(t)$ y para acumular capital

$$\dot{K}(t) = \frac{\mathrm{d}K(t)}{\mathrm{d}t},$$

es decir,

$$I(t) = \dot{K}(t) + \mu K(t).$$

Se supone que la producción se realiza en cada instante t, donde se combinan tanto la fuerza de trabajo $L(t)$ como el capital $K(t)$ disponibles al tiempo t de tal manera que la producción en ese instante sea máxima. Así bien, la producción $Y(t)$, correspondiente a cualquier combinación de los factores $K(t)$ y $L(t)$ y se representa con la función $F(K(t), L(t))$, es decir,

$$Y(t) = F(K(t), L(t)).$$

Se supone que la función de producción es invariante en el tiempo debido a que se supone que no existen cambios tecnológicos. Asimismo, se supone que por cada unidad de insumo, trabajo o capital, se tiene un incremento en la producción y a medida que se aumentan los insumos la producción siempre se incrementa, pero cada vez menos, en términos matemáticos, F es dos veces diferenciable para todos los insumos y con productos marginales positivos y decrecientes. Esto último es expresado por las siguientes desigualdades:

$$\frac{\partial F}{\partial K} > 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial L} > 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0.$$

En este contexto, se supone que la función de producción es homogénea de grado uno, es decir, no hay economías a escala. Así,

$$F(vK, vL) = vF(K, L), \quad \text{para todo } v.$$

En particular, si se toma $v = 1/L$, se tiene

$$\frac{Y}{L} = F\left(\frac{K}{L}, 1\right) = f\left(\frac{K}{L}\right)$$

donde $f(K/L)$ es la función de producción *per cápita*. Las variables y ecuaciones introducidas se pueden expresar en términos *per cápita*, de forma tal que las nuevas variables son:

$$k(t) = \frac{K(t)}{L(t)}, \qquad y(t) = \frac{Y(t)}{L(t)},$$
$$c(t) = \frac{C(t)}{L(t)}, \qquad i(t) = \frac{I(t)}{L(t)}$$

y la producción *per capita* en el tiempo t es expresada por

$$y(t) = f(k(t)), \tag{3.53}$$

la cual se distribuye entre consumo *per cápita* e inversión *per cápita*,

$$y(t) = c(t) + i(t), \tag{3.54}$$

donde la inversión per cápita $i(t)$ se distribuye entre depreciación de capital *per cápita* $k(t)$ por una tasa dada μ y la razón entre la tasa de cambio de capital y el trabajo $\dot{K}(t)/L(t)$,

$$i(t) = \frac{\dot{K}(t)}{L(t)} + \mu k(t). \tag{3.55}$$

La tasa de cambio de capital *per cápita* es

$$\dot{k}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{K(t)}{L(t)}\right) = \frac{\dot{K}(t)}{L(t)} - \frac{K(t)}{L(t)}\frac{\dot{L}(t)}{L(t)} = \frac{\dot{K}(t)}{L(t)} - k(t)\frac{\dot{L}(t)}{L(t)}. \tag{3.56}$$

Así bien, para plantear el modelo neoclásico de crecimiento económico de forma estocástica, es importante establecer la ecuación diferencial estocástica de crecimiento de Solow en forma explícita, donde está considerada la ecuación diferencial estocástica de crecimiento de la población, en la cual se hace uso del lema de Itô.[19]

Así, se define la ecuación diferencial de acumulación de capital como:

$$\dot{K}(t) = F(K(t), L(t)) - C(t),$$

la cual es equivalente a

$$\mathrm{d}K(t) = [F(K(t), L(t)) - C(t)]\mathrm{d}t. \tag{3.57}$$

Si se divide la ecuación anterior entre el trabajo $L(t)$, se tiene que

$$\mathrm{d}\left(\frac{K(t)}{L(t)}\right) = \left[F\left(\frac{K(t)}{L(t)}, 1\right) - \frac{C(t)}{L(t)}\right]\mathrm{d}t,$$

[19]La explicación de lema de Itô se puede encontrar en el apéndice B.2, página 125.

ésta última expresión se puede escribir como

$$\mathrm{d}\left(\frac{K(t)}{L(t)}\right) = [f(k(t)) - c(t)]\mathrm{d}t. \tag{3.58}$$

Suponga que las variaciones en el tamaño de la fuerza de trabajo está representada por la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$\mathrm{d}L(t) = \eta L(t)\mathrm{d}t + \sigma L(t)\mathrm{d}z, \tag{3.59}$$

donde z es el proceso de Wiener estándar, o movimiento Browniano,[20] η es la media del crecimiento de la población y σ^2 su varianza. Es decir, la población crece exponencialmente a una tasa η con choques independientemente e idénticamente distribuidos alrededor de la curva.

Ahora bien, se realiza una expansión de $k(t) = K(t)/L(t)$, como función de $K(t)$ y $L(t)$, a través de un desarrollo en serie de Taylor. La primera diferencial en la serie es

$$\mathrm{d}\left(\frac{K(t)}{L(t)}\right) = \frac{\mathrm{d}K(t)}{L(t)} - \frac{K(t)}{L^2(t)}\mathrm{d}L(t) \tag{3.60}$$

y la segunda diferencial es

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2\left(\frac{K(t)}{L(t)}\right) =& \frac{\mathrm{d}^2K(t)}{L(t)} - \frac{\mathrm{d}K(t)\mathrm{d}L(t)}{(L(t))^2} - \frac{K(t)}{(L(t))^2}\mathrm{d}^2L(t) \\ & - \frac{\mathrm{d}L(t)\mathrm{d}K(t)}{(L(t))^2} + \frac{2K(t)}{L(t)}\left(\frac{\mathrm{d}L(t)}{L(t)}\right)^2,\end{aligned} \tag{3.61}$$

se considera que los términos $\mathrm{d}^2K(t)$, $\mathrm{d}^2L(t)$ y $(\mathrm{d}K(t))(\mathrm{d}L(t))$ son despreciables. Entonces la ecuación (3.61) se puede expresar de la siguiente manera

$$\mathrm{d}^2\left(\frac{K(t)}{L(t)}\right) = \frac{2K(t)}{L(t)}\left(\frac{\mathrm{d}L(t)}{L(t)}\right)^2, \tag{3.62}$$

de las ecuaciones (3.60), (3.62) y la expansión de Taylor, se tiene que

$$\mathrm{d}\left(\frac{K(t)}{L(t)}\right) = \frac{\mathrm{d}K(t)}{L(t)} - \frac{K(t)}{L(t)}\left(\frac{\mathrm{d}L(t)}{L(t)}\right) + \frac{K(t)}{L(t)}\left(\frac{\mathrm{d}L(t)}{L(t)}\right)^2. \tag{3.63}$$

Ahora bien, al sustituir las ecuaciones (3.58) y (3.59) en la ecuación (3.63) se tiene que

$$\mathrm{d}k(t) = [f(k(t)) - c(t)]\mathrm{d}tk(t)(\eta\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}z) + k(t)(\eta\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}z)^2.$$

[20]La explicación del proceso de Wiener se puede encontrar en el apéndice A, página 121.

Por otro lado, las reglas de operación del lema de Itô consideran válidas las siguientes condiciones: $(\mathrm{d}z)^2 = \mathrm{d}t$, $(\mathrm{d}z)(\mathrm{d}t) = 0$ y $(\mathrm{d}t)^2 = 0$. Entonces la expresión anterior conduce a la ecuación diferencial estocástica de Solow, es decir,

$$\mathrm{d}k(t) = [f(k(t)) - c(t) - (\eta - \sigma^2)k(t)]\mathrm{d}t - k(t)\sigma(\mathrm{d}t)^{1/2}. \tag{3.64}$$

Se supone que el estado inicial del capital *per cápita* está dado por

$$k(t_0) = k_0.$$

El objetivo del planeador central es maximizar una función de utilidad, la cual depende del consumo

$$U = U(c(t)).$$

Se supone que la función de utilidad es dos veces diferenciable, con utilidades marginales positivas pero decrecientes para todos los niveles de consumo *per cápita*, es decir, por cada unidad de consumo se tiene una unidad positiva y conforme se sigue consumiendo la utilidad sigue siendo positiva pero cada vez menor. En términos matemáticos, esto es: para todo $c(t) \in [0, \infty)$, se tiene que

$$\begin{aligned} U'(c(t)) &= \frac{\mathrm{d}U(c(t))}{\mathrm{d}c(t)} > 0, \\ U''(c(t)) &= \frac{\mathrm{d}^2U(c(t))}{\mathrm{d}c(t)^2} < 0. \end{aligned}$$

Además la función de utilidad $U(t)$ es estrictamente cóncava y monótona decreciente. Se supone que la función de utilidad satisface las condiciones del límite

$$\lim_{c \to 0} U'(c(t)) = \infty, \qquad \lim_{c \to \infty} U'(c(t)) = 0,$$

de tal manera que el producto marginal empieza en el infinito y decrece hasta cero. Asimismo, las curvas de indiferencia no se intersectan en los ejes. Dada una tasa subjetiva intertemporal de descuento $\rho > 0$ y un factor de descuento exponencial, la utilidad del consumo *per cápita* $c(t)$ en el tiempo t es $e^{-\rho t}U(c(t))$. Así bien, en el intervalo $[0, \infty)$ la ecuación de bienestar se encuentra dada por

$$W = \int_0^\infty e^{-\rho t}U(c(t))\mathrm{d}t.$$

El planeador central trata de maximizar W, buscando la trayectoria óptima de consumo $c(t)$ en el intervalo $[0, \infty)$, de donde solo los siguientes valores para $c(t)$ son viables:

$$0 \leq c(t) \leq f(k(t)), \text{ para todo } t \in [0, \infty).$$

Sea $U(c(t))$ la función de utilidad del consumo *per cápita* al tiempo t, $\rho \geq 0$ la tasa de descuento constante y E_0 el operador de esperanza condicional, entonces el planteamiento del problema neoclásico de crecimiento económico bajo incertidumbre es el siguiente:

$$\begin{aligned}
\text{Maximizar} \quad & \mathrm{E}_0 \int_0^\infty e^{-\rho t} U(c(t))\mathrm{d}t, \\
\text{sujeto a} \quad & \mathrm{d}k(t) = [f(k(t)) - (\eta - \sigma^2)k(t) - c(t)]\mathrm{d}t - \sigma k(t)(\mathrm{d}t)^{1/2}, \\
& k(t_0) = k_0, \\
& 0 \leq c(t) \leq f(k(t)), \\
& c(t), \text{ continua por pedazos.}
\end{aligned}$$

Las condiciones de optimalidad para el problema neoclásico de crecimiento económico se desarrollan por medio de los métodos de control óptimo estocástico. Así, la esperanza del proceso $k(t) - k(t_0)$ es la siguiente:

$$\mathrm{E}_k[k(t) - k(t_0)] = \mathrm{E}_k[\Delta k] = [f(k) - (\eta - \sigma^2)k]\Delta t + o(\Delta t) \tag{3.65}$$

y la varianza se encuentra expresada por

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}[k(t) - k(t_0)] &= \mathrm{E}_k[(k(t) - k(t_0))^2] - \mathrm{E}_k^2[(k(t) - k(t_0))] \\
&= \mathrm{E}_k[(\Delta k)^2] - \mathrm{E}_k^2[\Delta k] \\
&= \mathrm{E}_k[(\Delta k)^2] \\
&= \sigma^2 k^2 \Delta t + o(\Delta t).
\end{aligned} \tag{3.66}$$

Ahora bien, por medio del principio de optimalidad, se tiene que

$$J(k) = \max_{\substack{c_t \\ 0 \leq t \leq \Delta t}} \mathrm{E}_k \left\{ \int_0^{\Delta t} e^{-\rho t} U(c(t))\mathrm{d}t + \max_{\substack{c_t \\ \Delta t \leq t \leq \infty}} \mathrm{E}_{k+\Delta k} \left\{ \int_{\Delta t}^\infty e^{-\rho t} U(c(t))\mathrm{d}t \right\} \right\}, \tag{3.67}$$

donde E_k indica que el estado inicial es k. Una condición necesaria de optimalidad para el problema en cuestión es proporcionada por ecuación de Bellman. La primera integral de la ecuación (3.67) se puede calcular si se usa el Teorema del Valor Medio para integrales, esto es

$$\int_0^{\Delta t} e^{-\rho t} U(c_t)\mathrm{d}t = e^{-\rho \theta \Delta t} U(c_{\theta \Delta t})\Delta t,$$

donde $\theta = \theta(w), w \in \Omega$ y $0 \leq \theta \leq 1$. Para la segunda integral de la ecuación

(3.67), se utiliza el cambio de variable $s = t - \Delta t$, entonces

$$\begin{aligned}
\max_{\substack{c_t \\ \Delta t \le t \le \infty}} \mathrm{E}_{k+\Delta k} \left\{ \int_{\Delta t}^{\infty} e^{-\rho t} U(c(t)) \mathrm{d}t \right\} &= \max_{\substack{c_{s+\Delta t} \\ 0 \le s \le \infty}} \mathrm{E}_{k+\Delta k} \left\{ \int_{0}^{\infty} e^{-\rho(s+\Delta t)} U(c_{s+\Delta t}) \mathrm{d}s \right\} \\
&= e^{-\rho\Delta t} \max_{\substack{c_s \\ 0 \le s \le \infty}} \mathrm{E}_{k+\Delta k} \left\{ \int_{0}^{\infty} e^{-\rho s} U(c_{s+\Delta t}) \mathrm{d}s \right\} \\
&= e^{-\rho\Delta t} J(k + \Delta k),
\end{aligned}$$

si se renombra $c_{s+\Delta t}$ como c_s, entonces se puede escribir la ecuación (3.67) como

$$\max_{c} \mathrm{E}_k \left\{ e^{-\rho\theta\Delta t} U(c_{\theta\Delta t})\Delta t + e^{-\rho\Delta t} J(k + \Delta k) - J(k) \right\} = 0, \tag{3.68}$$

para Δt lo suficientemente pequeño $e^{-\rho\Delta t} = 1 - \rho\Delta t$. Para el segundo término de la ecuación (3.68), se tiene

$$\begin{aligned}
e^{-\rho\Delta t} J(k + \Delta k) - J(k) &= (1 - \rho\Delta t) J(k + \Delta k) - J(k) \\
&= J(k + \Delta k) - J(k) - \rho\Delta t J(k + \Delta k).
\end{aligned}$$

y al sustituir la expresión anterior en la ecuación (3.68) se obtiene

$$\max_{c} \mathrm{E}_k \left\{ e^{-\rho\theta\Delta t} U(c_{\theta\Delta t})\Delta t + J(k + \Delta k) - J(k) - \rho\Delta t J(k + \Delta k) \right\} = 0, \tag{3.69}$$

Por otro lado, al utilizar el lema de Itô en la diferencia $\Delta J(k)$, se tiene

$$\Delta J(k) = J(k + \Delta k) - J(k) = J'(k)\Delta k + \frac{1}{2} J''(k)(\Delta k)^2,$$

ahora, de aplicar la esperanza condicional, se sigue que

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_k[\Delta J(k)] &= \mathrm{E}_k[J(k + \Delta k) - J(k)] \\
&= \mathrm{E}_k \left[J'(k)\Delta k + \frac{1}{2} J''(k)(\Delta k)^2 \right] \\
&= \mathrm{E}_k \left[J'(k)\Delta k \right] + \mathrm{E}_k \left[\frac{1}{2} J''(k)(\Delta k)^2 \right].
\end{aligned} \tag{3.70}$$

Ahora bien, se tiene que $J(k) = \mathrm{E}_k J(k)$ y si se sustituyen las ecuaciones (3.65) y (3.66) en la ecuación (3.70) se obtiene

$$\mathrm{E}_k[J(k + \Delta k) - J(k)] = \left[J'(k)[f(k) - (\eta - \sigma^2) - c] + \frac{1}{2}\sigma^2 k^2 J''(k) \right] \Delta t. \tag{3.71}$$

Entonces si se sustituye la ecuación (3.71) en (3.69), se divide entre Δt y se toma el límite cuando $\Delta t \to 0$, se tiene que

$$\max_{c} \left\{ [f(k) - (\eta - \sigma^2)k - c] J'(k) + \frac{1}{2}\sigma^2 k^2 J''(k) - \rho J(k) + U(c) \right\} = 0, \tag{3.72}$$

debido a que $k + \Delta k \to k$, $\theta \Delta t \to 0$ y $c_{\theta\Delta} \to c$. De esta manera, si se define

$$\phi(c,k,t) \equiv [f(k) - (\eta - \sigma^2)k - c]J'(k) + \frac{1}{2}\sigma^2 k^2 J''(k) - \rho J(k) + U(c),$$

entonces se puede escribir la ecuación (3.72) en una forma compacta

$$\max_{c} \phi(c,k,t) = 0. \tag{3.73}$$

La condición de primer orden para un máximo es

$$\phi_c(c^*,k,t) = J'(k) + U'(c) = 0, \tag{3.74}$$

además, se debe cumplir la condición

$$\phi_{cc} = U''(c) < 0.$$

Como se puede observar, se satisfacen las condiciones suficientes para un máximo. Es posible reescribir las condiciones de optimalidad como un conjunto de dos ecuaciones que se deben resolver para $c^*(t)$ y $J(k)$, es decir:

$$\begin{cases} \phi(c^*,k,t) = 0, & (3.73) \\ \phi_c(c^*,k,t) = 0. & (3.74) \end{cases}$$

■

Ejemplo 3.2.2. Modelo de selección óptima de portafolio bajo incertidumbre.

Suponga que un individuo se enfrenta al problema de optimizar su cartera de inversión. Esta cartera, o portafolio, cuenta con un activo de renta variable y un activo de renta fija. Los rendimientos de la cartera de inversión son estocásticos, es por ello que se dice que este problema se encuentra bajo incertidumbre. El objetivo del individuo es encontrar las trayectorias de consumo y de distribución de su riqueza que maximicen su bienestar.

El modelo toma en cuenta los siguientes supuestos:

1. Los ingresos del individuo se forman de los rendimientos de un activo riesgoso y de un activo libre de riesgo,
2. los rendimientos del activo riesgoso se rigen por una ecuación diferencial estocástica en la que aparece un proceso de Wiener,

3. todo la riqueza es destinada a consumo o inversión,
4. la tasa subjetiva intertemporal de descuento es constante,
5. no hay inflación.

Se definen las variables del modelo como:

$w(t)$, proporción de la riqueza invertido en el activo riesgoso al tiempo t,

$W(t)$, riqueza total del individuo al tiempo t,

$C(t)$, consumo al tiempo t.

Asimismo, los parámetros que se usan en el modelo se define como sigue:

T, tiempo en que muere el individuo,

ρ, tasa subjetiva intertemporal de descuento,

r, tasa de interés que paga el activo libre de riesgo,

α, media del crecimiento del valor del activo riesgoso,

σ, desviación estándar del crecimiento, o volatilidad del valor del activo riesgoso.

Se supone que las variaciones en el valor del activo riesgoso están representadas por la siguiente ecuación diferencial estocástica.

$$\mathrm{d}R(t) = \alpha R(t)\mathrm{d}t + \sigma R(t)\mathrm{d}z, \tag{3.75}$$

donde $R(t)$ es la proporción de la riqueza que se invierte en el activo riesgoso al tiempo t, α la media del crecimiento del valor del activo riesgoso, σ es su desviación estándar y z es un proceso de Wiener estándar, o movimiento Browniano. Note también que $R(t)$ está dado por

$$R(t) = w(t)W(t),$$

donde $w(t)$ es la proporción de la riqueza invertida en el activo riesgoso al tiempo t y $W(t)$ es la riqueza total al tiempo t. Así, la expresión (3.75) se puede escribir de la siguiente manera

$$\mathrm{d}R(t) = \alpha w(t)W(t)\mathrm{d}t + \sigma w(t)W(t)\mathrm{d}z. \tag{3.76}$$

Por otro lado, el cambio marginal en la riqueza está dado por la siguiente ecuación diferencial

$$\mathrm{d}W(t) = \mathrm{d}R(t) + (1 - w(t))W(t)r\mathrm{d}t - C(t)\mathrm{d}t, \tag{3.77}$$

donde $\mathrm{d}R(t)$ es el cambio en el valor del activo riesgoso, $(1 - w(t))W(t)r\mathrm{d}t$ es el cambio en el valor del activo seguro y $C(t)$ el consumo por unidad de tiempo al tiempo t. Entonces, si se sustituye la ecuación (3.76) en la ecuación (3.77), se tiene:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}W(t) &= \alpha w(t)W(t)\mathrm{d}t + \sigma w(t)W(t)\mathrm{d}z + (1 - w(t))W(t)r\mathrm{d}t - C(t)\mathrm{d}t\\ &= \{[w(t)(\alpha - r) + r]W(t) - C(t)\}\,\mathrm{d}t + w(t)W(t)\sigma\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

Por convención se sabe que $\mathrm{d}z = (\mathrm{d}t)^{1/2}$, de este modo se obtiene la siguiente ecuación diferencial estocástica de presupuesto:

$$\mathrm{d}W(t) = \{[w(t)(\alpha - r) + r]W(t) - C(t)\}\mathrm{d}t + w(t)W(t)\sigma(\mathrm{d}t)^{1/2}. \tag{3.78}$$

Así bien, si el consumidor desea conocer cuál es el valor esperado de maximizar su utilidad y de dejar un legado económico se tiene el siguiente funcional objetivo

$$\text{Maximizar} \quad \mathrm{E}_0\left\{\int_0^T e^{-\rho t}U(C(t))\mathrm{d}t + B(W(T),T)\right\}, \tag{3.79}$$

donde $U(C(t))$ es la función de utilidad del consumo y $B(W(T),T)$ es la función de utilidad por dejar una herencia. Para este modelo se requieren las mismas condiciones que se formularon para las funciones de utilidad del modelo neoclásico de crecimiento económico bajo incertidumbre. Así, sean T el tiempo en que muere el individuo, E_0 el operador de la esperanza condicional, dadas las condiciones iniciales y $W(0) = W_0 > 0$ la riqueza inicial.

Así, el problema al que se enfrenta el individuo es encontrar una trayectoria de consumo $C(t)$ y una trayectoria de la proporción de la riqueza que se asigna al activo riesgoso $w(t)$ tal que se resuelva el siguiente problema de control óptimo estocástico:

$$\begin{aligned}\text{Maximizar} \quad & \mathrm{E}_0\left\{\int_0^T e^{-\rho t}U(C(t))\mathrm{d}t + B[W(T),T]\right\},\\ \text{sujeto a} \quad & \mathrm{d}W = \{[w(t)(\alpha - r) + r]W(t) - C(t)\}\mathrm{d}t + w(t)W(t)\sigma(\mathrm{d}t)^{1/2},\\ & W(0) = W_0 > 0,\\ & W(t) > 0,\\ & C(t) \geq 0.\end{aligned}$$

Para la solucionar este problema primero se consideran dos ecuaciones relacionadas con la riqueza, ambas se obtienen de la ecuación (3.78), donde una caracteriza la tendencia y la otra la varianza. El valor esperado del cambio en la riqueza en un intervalo de tiempo $h = t - t_0$ es

$$\mathrm{E}_{t_0}\{W(t) - W(t_0)\} = \{[w(t_0)(\alpha - r) + r]W(t_0) - C(t_0)\}h + o(h), \tag{3.80}$$

y la varianza del cambio en la riqueza es

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[W(t) - W(t_0)] &= \mathrm{E}_{t_0}\{[W(t) - W(t_0)]^2\} - \mathrm{E}^2_{t_0}\{[W(t) - W(t_0)]\}\\ &= \mathrm{E}_{t_0}\{[W(t) - W(t_0)]^2\}\\ &= w^2(t_0)W^2(t_0)\sigma^2 h + o(h).\end{aligned} \tag{3.81}$$

Para derivar las condiciones de optimalidad se reformula el funcional objetivo (3.79) de tal manera que sea posible utilizar los métodos de programación dinámica, esto con el fin de que sea posible aplicar el principio de optimalidad de Bellman. Para esto, se define

$$I[W(t), t] \equiv \max_{\{C(s), w(s)\}} \mathrm{E}_t\left\{\int_t^T e^{-\rho s}U[C(s)]\mathrm{d}s + B[W(T), T]\right\} \tag{3.82}$$

donde la ecuación (3.82) está sujeta a las mismas restricciones que las del planteamiento original. Por tanto,

$$I[W(T), T] = B[W(T), T]. \tag{3.83}$$

En general, de la definición (3.82) se obtiene

$$I[W(t_0), t_0] = \max_{\{C(s), w(s)\}} \mathrm{E}_{t_0}\left\{\int_{t_0}^t e^{-\rho s}U[C(s)]\mathrm{d}s + I[W(t), t]\right\}. \tag{3.84}$$

Sea $t \equiv t_0 + h$ y las terceras derivadas parciales de $I[W(t_0), t_0]$ son acotadas, entonces por el teorema de Taylor y el teorema del valor medio para integrales, se puede reescribir (3.84) de la siguiente forma

$$\begin{aligned}I[W(t_0), t_0] = \max_{\{C,w\}} \mathrm{E}_{t_0}\bigg\{&e^{-\rho\bar{t}}U[C(\bar{t})]h + I[W(t_0), t_0] + \frac{\partial I[W(t_0), t_0]}{\partial t}h\\ &+ \frac{\partial I[W(t_0), t_0]}{\partial W}[W(t) - W(t_0)]\\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 I[W(t_0), t_0]}{\partial W^2}[W(t) - W(t_0)]^2 + o(h)\bigg\},\end{aligned} \tag{3.85}$$

donde $\bar{t} \in [t_0, t]$. Ahora bien, en la ecuación (3.85) se toma el operador E_{t_0} para cada término y como

$$I[W(t_0), t_0] = \mathrm{E}_{t_0}\{I[W(t_0), t_0]\},$$

es posible restar $I[W(t_0), t_0]$ de ambos lados. Entonces si se sustituyen $\mathrm{E}_{t_0}\{W(t) - W(t_0)\}$ y $\mathrm{E}_{t_0}\{[W(t) - W(t_0)]^2\}$ por las ecuaciones (3.80) y (3.81), después se dividen dichas ecuaciones entre h y finalmente se toma el límite cuando $h \to 0$, entonces, la ecuación (3.85) se convierte en una versión en tiempo continuo de la ecuación fundamental de optimalidad de Bellman-Dreyfus. Es decir,

$$\max_{\{C(t),w(t)\}} \left\{ e^{-\rho t}U[C(t)] + \frac{\partial I_t}{\partial t} + \frac{\partial I_t}{\partial W}\{[w(t)(\alpha - r) + r]W(t) - C(t)\} \right. \\ \left. + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 I_t}{\partial W^2}\sigma^2 w^2(t) W^2(t) \right\} = 0, \tag{3.86}$$

donde I_t es $I[W(t), t]$ y el índice t_0 se descarta para hacer ver que (3.86) es válido para cualquier $t \in [0, T]$.

Si se define[21]

$$\phi(w, C, W, t) \equiv e^{-\rho t}U[C(t)] + \frac{\partial I_t}{\partial t} + \frac{\partial I_t}{\partial W}\{[w(t)(\alpha - r) + r]W(t) - C(t)\} \\ + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 I_t}{\partial W^2}\sigma^2 w^2(t) W^2(t),$$

entonces se puede escribir (3.86) en una forma más compacta

$$\max_{\{C,w\}} \phi(w, C, W, t) = 0. \tag{3.87}$$

Las condiciones de primer orden de un máximo (w^*, C^*) son

$$\phi_C(w^*, C^*, W, t) = e^{(-\rho t)}U'(C^*) - \frac{\partial I_t}{\partial W} = 0, \tag{3.88}$$

y

$$\phi_w(w^*, C^*, W, t) = (\alpha - r)W\frac{\partial I_t}{\partial W} + \frac{\partial^2 I_t}{\partial W^2}\sigma^2 w^* W^2 = 0. \tag{3.89}$$

Por otro lado, se sabe que un conjunto de condiciones suficientes para obtener un máximo es el siguiente:

$$\phi_{ww} < 0, \qquad \phi_{CC} < 0, \qquad \det\begin{bmatrix} \phi_{ww} & \phi_{wC} \\ \phi_{Cw} & \phi_{CC} \end{bmatrix} > 0.$$

Ahora bien, se observa que, en el problema de la cartera de inversión, se tiene que $\phi_{wC} = \phi_{Cw} = 0$. Asimismo, si la función $I[W(t), t]$ es estrictamente cóncava en W, entonces

$$\phi_{CC} = e^{-\rho t}U''(C) < 0, \tag{3.90}$$

[21] $\phi(w, C, W, t)$ es la forma simplificada de la expresión $\phi\left(w, C, \frac{\partial I_t}{\partial t}, \frac{\partial I_t}{\partial W}, \frac{\partial^2 I_t}{\partial W^2}, I_t, W, t\right)$.

y

$$\phi_{ww} = W^2\sigma^2 \frac{\partial^2 I_t}{\partial W^2} < 0, \tag{3.91}$$

por la concavidad estricta de U e I_t respectivamente. Así, las condiciones suficientes se satisfacen.[22] Es posible reescribir las condiciones de optimalidad como un conjunto de tres ecuaciones que se deben resolver para $w^*(t)$, $C^*(t)$, y $I[W(t), t]$. Es decir, las condiciones de optimalidad para el problema un individuo que desea optimizar su cartera de inversión son las siguientes:

$$\begin{cases} \phi(w^*, C^*, W, t) = 0, & (3.87) \\ \phi_C(w^*, C^*, W, t) = 0, & (3.88) \\ \phi_w(w^*, C^*, W, t) = 0, & (3.89) \end{cases}$$

sujeto a la condición de frontera $I[W(T), T] = B[W(T), T]$ y la solución debe satisfacer el funcional (3.79).

■

[22]Al sustituir los resultados de (3.88) en (3.89) al punto (C^*, w^*) se tiene la condición $w^*(\alpha - r) > 0$ si y sólo si $\frac{\partial^2 I_t}{\partial W^2} < 0$. Aquí, solo se consideran las soluciones óptimas interiores. Se puede formular el problema en una forma más general si se reemplazan las igualdades de (3.88) y (3.89) por desigualdades y se utilizan las condiciones de Kuhn-Tucker.

Capítulo 4

Programación Dinámica

El método de programación dinámica fue desarrollado por Richard Bellman en su libro "Dynamic Programming" publicado en 1957. Aunque algunos trabajos en este tema fueron publicados con anterioridad en numerosos reportes de "Rand Corporation". Posteriormente se publicaron más libros sobre programación dinámica, por parte de Bellman y sus colaboradores, con aplicaciones en la teoría del control. Sin embargo, también existen aplicaciones de la programación dinámica a procesos de Markov, teoría de inventarios, ingeniería química y economía.

La programación dinámica es un método particular para optimizar. Es un método porque no es un algoritmo en particular en el sentido euclideano del término algoritmo. Este método es utilizado para resolver cierto tipo de problemas de optimización, algunos de los cuales pueden resolverse con otros procedimientos. Dicho método es útil para transformar problemas complejos, que pueden contener un gran número de variables de decisión interrelacionadas, en una sucesión de problemas simples que contengan una o unas cuantas variables, es decir, se busca sustituir un problema de n variables en problemas de una variable. Al resolver n problemas pequeños el esfuerzo computacional, si cada uno de ellos consta de una sola variable, es proporcional a n, que es el número de problemas de una variable.

El principio que permite realizar esta transformación se conoce como "el principio de optimalidad de Bellman", el cual establece lo siguiente: *Una política óptima tiene la propiedad de que cualquiera que sea el estado inicial y las decisiones iniciales, las decisiones restantes deben constituir una política óptima con respecto al estado que resulta de la decisión inicial.*

En este capítulo se presenta el problema básico de control óptimo y dos enfoques del método de programación dinámica para solucionarlo: el enfoque determinista y el enfoque estocástico. En la sección 4.1, se presentan algunos de los conceptos importantes de programación dinámica determinista. En el apartado 4.1.1, se presenta el problema básico, en el apartado 4.1.2, la ecuación de Bellman–Euler–Lagrange y las condiciones de Legendre y Weierstrass, en el apartado 4.1.3, el problema con dos funciones, en el apartado 4.1.4, el problema isoperimétrico, en el apartado 4.1.5, el problema con dos variables, en el apartado 4.1.6, el problema con funcionales que dependen de derivadas de orden superior y el problema de control óptimo en el apartado 4.1.7. En la sección 4.2 se presentan algunos conceptos necesarios de programación dinámica estocástica, con el fin de establecer las condiciones de primer orden para los problemas se estudian en el Capítulo 5. En el apartado 4.2.1, se desarrollan las condiciones de primer orden para el problema de control óptimo estocástico, en el apartado 4.2.2, se desarrollan las condiciones de primer orden, establecidas por la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman para el problema del consumidor estocástico.

4.1. Programación Dinámica Determinista

4.1.1. Problema Básico

Considere el siguiente funcional:

$$J(f) = \int_a^b F(t, f(t), f'(t))\mathrm{d}t,$$

sujeto a las siguientes restricciones o condiciones de frontera

$$f(a) = A, \qquad f(b) = B,$$

donde $F \in C^2$, es decir, una función con primera y segunda derivadas parciales continuas con respecto a todos sus argumentos. Suponga que $f' = f'(t, f)$, y sea

$$S(t, f(t)) = \min_{f'|_{[t,b]}} \left\{ \int_t^b F(s, f(s), f'(s))\mathrm{d}s \right\},$$

donde $S \in C^2$.

4.1.2. Ecuación de Bellman-Euler-Lagrange

Una condición necesaria para que el funcional $J(f)$ tenga un extremo en una función dada $f(t)$, es que satisfaga la ecuación de Bellman-Euler-Lagrange, es decir[1]

$$\min_{f'} \{F + S_t + S_f f'\} = 0 \tag{4.1}$$

y

$$\frac{\partial F(t,f,f')}{\partial f} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F(t,f,f')}{\partial f'}\right) = 0. \tag{4.2}$$

Así, para $f = C^1[a,b]$ se considera la siguiente norma:

$$||f|| = \max_{t\in[a,b]} |f(t)| + \max_{t\in[a,b]} |f'(t)|.$$

En efecto, suponga que para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño se cumple que

$$\int_t^{t+\varepsilon} F(s, f(s), f'(s))\mathrm{d}s = F(t,f,f')\varepsilon + o(\varepsilon)$$

y que

$$S(t+\varepsilon, f(t+\varepsilon)) = S(t, f(t)) + S_t\varepsilon + S_f f'\varepsilon + o(\varepsilon).$$

De donde se sigue que

$$\begin{aligned} S(t,f(t)) &= \min_{f'|_{[t,t+\varepsilon]}} \left\{ \int_t^{t+\varepsilon} F(s,f(s),f'(s))\mathrm{d}s + S(t+\varepsilon, f(t+\varepsilon)) \right\} \\ &= \min_{f'|_{[t,t+\varepsilon]}} \{F\varepsilon + S + S_t\varepsilon + S_f f'\varepsilon + o(\varepsilon)\} \\ &= \min_{f'|_{[t,t+\varepsilon]}} \left\{ F + S_t + S_f f' + \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} \right\} = 0. \end{aligned}$$

De este modo, se cumple que

$$\min_{f'} \{F + S_t + S_f f'\} = 0.$$

Ahora bien, bajo la hipótesis del resultado anterior se tiene que la ecuación de Bellman-Euler-Lagrange implica la ecuación de Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial F(t,f,f')}{\partial f} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F(t,f,f')}{\partial f'}\right) = 0.$$

[1] Se elimina el termino (t) de las funciones para simplificar la notación y el término S_t es la derivada de S respecto de t.

Es decir, si f' es mínimo, entonces

$$(\mathcal{A}) \quad \begin{cases} F + S_t + S_f f' &= 0 \\ F_{f'} + S_f &= 0. \end{cases}$$

Se define $S = S(t, f)$, con diferencial $\mathrm{d}S = S_t \mathrm{d}t + S_f f' \mathrm{d}t$, que se puede expresar de la siguiente forma:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} S = S_t + S_f f',$$

entonces, al sustituir esta ecuación en la primera ecuación del sistema $(\mathcal{A})$ y después se deriva respecto de f y la segunda ecuación respecto de t, se sigue que

$$F_f + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} S_f = 0$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F_{f'} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} S_f = 0.$$

Ahora, si se restan las dos expresiones anteriores, se obtiene

$$F_f - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F_{f'} = 0,$$

que como se puede observar, esta expresión es la ecuación de Euler-Lagrange.

Condición de Legendre

Considere el funcional del problema básico

$$J(f) = \int_a^b F(t, f(t), f'(t)) \mathrm{d}t,$$

sujeto a las restricciones o condiciones de frontera

$$f(a) = A, \qquad f(b) = B,$$

donde $F \in C^2$. Asimismo, se supone que

$$S(t, f(t)) = \min_{f'|_{[t,b]}} \left\{ \int_t^b F(s, f(s), f'(s)) \mathrm{d}s \right\},$$

donde $S \in C^2$ y $f' = f'(t, f)$. Si f' es solución, entonces se cumple que[2]

$$\frac{\partial^2 F(t, f, f')}{\partial f' \partial f'} \geq 0.$$

[2]La demostración se puede encontrar en Gelfand, Capítulo 5 [22]

En efecto, de la ecuación de Bellman-Euler-Lagrange, se cumple la condición necesaria de optimalidad (4.1)

$$\min_{f'}\{F + S_t + S_f f'\} = 0.$$

Entonces, si f' es mínimo, se tiene que

$$\frac{\partial F(t,f,f')}{\partial f'} + \frac{\partial S(t,f)}{\partial f} = 0$$

por lo cual se sigue que

$$\frac{\partial^2 F(t,f,f')}{\partial f' \partial f'} \geq 0.$$

Condición de Weierstrass

Considere el funcional del problema básico

$$J(f) = \int_a^b F(t, f(t), f'(t))\mathrm{d}t,$$

sujeto a las restricciones o condiciones de frontera

$$f(a) = A, \qquad f(b) = B,$$

donde $F \in C^2$. Asimismo, se supone que

$$S(t, f(t)) = \min_{f'|_{[t,b]}} \left\{ \int_t^b F(s, f(s), f'(s))\mathrm{d}s \right\},$$

donde $S \in C^2$ y $f' = f'(t,f)$. Entonces, si f' es solución del problema anterior, se sigue que

$$F(t,f,f'+h') - F(t,f,f') + \frac{\partial S(t,f)}{\partial f}h' \geq 0.$$

En efecto, se puede observar que si f' es solución, entonces se cumple la condición necesaria de optimalidad (4.1)

$$\min_{f'}\left\{F + S_t + S_f f'\right\} = 0,$$

Así bien, se cumple la siguiente desigualdad

$$F(t,f,f') + \frac{\partial S(t,f)}{\partial t} + \frac{\partial S(t,f)}{\partial f}f' \leq F(t,f,f'+h') + \frac{\partial S(t,f)}{\partial t} + \frac{\partial S(t,f)}{\partial f}(f'+h').$$

Es decir,

$$F(t,f,f'+h') - F(t,f,f') + \frac{\partial S(t,f)}{\partial f}h' \geq 0.$$

4.1.3. Problema con Dos Funciones

Considere el siguiente funcional:

$$J(f) = \int_a^b F(t, f, g, f', g')\mathrm{d}t,$$

sujeto a las siguientes restricciones o condiciones de frontera

$$f(a) = A, \qquad f(b) = B,$$

donde $F \in C^2[a, b]$, es decir, una función con primera y segunda derivadas parciales continuas con respecto a todos sus argumentos. Suponga que $f' = f'(t, f)$ y $g' = g'(t, g)$. Asimismo, se supone que

$$S(t, f(t), g(t)) = \min_{(f',g')|_{[t,b]}} \left\{ \int_t^b F(s, f, g, f', g')\mathrm{d}s \right\},$$

donde $S \in C^2$. Entonces si (f', g') es solución del problema anterior, se cumple la siguiente condición necesaria de optimalidad:

$$\min_{(f',g')} \{F + S_t + S_f f' + S_g g'\} = 0. \tag{4.3}$$

La expresión (4.3) es conocida como la ecuación de Bellman-Euler-Lagrange para el problema con dos funciones.

Bajo las hipótesis del resultado anterior se tiene que la ecuación de Bellman-Euler-Lagrange implica la ecuación de Euler-Lagrange, es decir

$$\frac{\partial F(t, f, g, f', g')}{\partial f} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F(t, f, g, f', g')}{\partial f'}\right) = 0,$$

y

$$\frac{\partial F(t, f, g, f', g')}{\partial g} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F(t, f, g, f', g')}{\partial g'}\right) = 0.$$

En efecto, se puede observar que si (f', g') es solución, entonces se cumple la condición necesaria de optimalidad (4.3):

$$\min_{(f',g')} \{F + S_t + S_f f' + S_g g'\} = 0,$$

por lo que se cumplen las siguientes ecuaciones:

$$F + S_t + S_f f' + S_g g' = 0 \tag{4.4}$$

$$F_{f'} + S_f = 0 \tag{4.5}$$

$$F_{g'} + S_g = 0. \tag{4.6}$$

Ahora bien, si se deriva la ecuación (4.4) respecto de f y g, se obtienen las siguientes identidades

$$F_f + S_{ft} + S_{ff}f' + S_{fg}g' = 0 \tag{4.7}$$
$$F_g + S_{gt} + S_{gf}f' + S_{gg}g' = 0. \tag{4.8}$$

Por otro lado, sea $S = S(t, f, g)$ con la siguiente diferencial definida

$$\mathrm{d}S = S_t\mathrm{d}t + S_f f'\mathrm{d}t + S_g g'\mathrm{d}t,$$

esta expresión se puede escribir como

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}S = S_t + S_f f' + S_g g', \tag{4.9}$$

entonces, al sustituir la ecuación (4.9) en la ecuación (4.4) y después el resultado se deriva respecto de f y de g, se obtienen las siguientes ecuaciones

$$F_f + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}S_f = 0 \tag{4.10}$$
$$F_g + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}S_g = 0. \tag{4.11}$$

Ahora bien, si se sustituyen las ecuaciones (4.5) y (4.6) en las ecuaciones (4.10) y (4.11) se obtiene que:

$$F_f - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_{f'} = 0,$$
$$F_g - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_{g'} = 0,$$

lo que prueba que la ecuación de Bellman-Euler-Lagrange implica la ecuación de Euler-Lagrange.

4.1.4. Problema Isoperimétrico

Considere el funcional del problema básico

$$J(f) = \int_a^b F(t, f(t), f'(t))\mathrm{d}t,$$

sujeto a las siguientes restricciones o condiciones de frontera

$$f(a) = A, \qquad f(b) = B,$$

y al siguiente funcional
$$\int_a^b G(t,f,f')\mathrm{d}t = Q,$$
donde $F \in C^2[a,b]$, es decir, una función con primera y segunda derivadas parciales continuas con respecto a todos sus argumentos. A esta clase de problemas se les conoce como Problemas Isoperimétricos.

En este marco, se supone que
$$g(t) = \int_t^b G(s,f,f')\mathrm{d}s$$
y
$$S(t,f,g) = \min_{f'|_{[t,b]}} \left\{ \int_t^b F(s,f,f')\mathrm{d}s \,\middle|\, \int_t^b G(s,f,f')\mathrm{d}s = g(t) \right\},$$
donde $f' = f'(t,f)$. Entonces una condición necesaria para que el funcional $J(f)$ tenga un extremo en una función dada $f(t)$, es que satisfaga la ecuación de Bellman-Euler-Lagrange, es decir
$$\min_{f'}\{F + S_t + S_f f' - S_g G\} = 0.$$

En efecto, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño se tiene que
$$\begin{aligned} S(t,f,g) &= \min_{f'|_{[t,t+\varepsilon]}} \left\{ \int_t^{t+\varepsilon} F(s,f,f')\mathrm{d}s + S(t+\varepsilon, f(t+\varepsilon), g(t+\varepsilon)) \right| \\ &\qquad\qquad \left. \int_t^{t+\varepsilon} G(s,f,f')\mathrm{d}s = g(t+\varepsilon) - g(t) \right\} \\ &= \min_{f'|_{[t,t+\varepsilon]}} \left\{ \varepsilon F + S + S_t\varepsilon + S_f f'\varepsilon + S_g g'\varepsilon + o(\varepsilon) \right| \\ &\qquad\qquad \left. \varepsilon G + o(\varepsilon) = g(t+\varepsilon) - g(t) \right\}. \end{aligned}$$
Ahora bien, si se divide entre ε y se toma el límite, cuando $\varepsilon \to 0$, se tiene[3]
$$\min_{f'}\{F + S_t + S_f f' + S_g g' | - G = g'\} = 0.$$

Bajo las hipótesis del resultado anterior las ecuaciones de Bellman-Euler-Lagrange implican las ecuaciones de Euler-Lagrange
$$\frac{\partial F(t,f,f')}{\partial f} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F(t,f,f')}{\partial f'} + p\left(\frac{\partial G(t,f,f')}{\partial f} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial G(t,f,f')}{\partial f'}\right) = 0.$$

[3]Recuerde que $g' = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{g(t+\varepsilon)-g(t)}{\varepsilon}$

Es decir, si f' es solución, entonces de la ecuación

$$\min_{f'}\{F + S_t + S_f f' - S_g G\} = 0,$$

se tiene que

$$F + S_t + S_f f' + S_g G = 0 \tag{4.12}$$

$$F_{f'} + S_f - S_g G_{f'} = 0. \tag{4.13}$$

Ahora bien, si se deriva la ecuación (4.12) respecto de f y la ecuación (4.13) respecto de t se obtiene el siguiente sistema

$$(\mathcal{S}) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_f + S_{tf} + S_{ff} f' - (S_g G)_f = 0 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F_{f'} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} S_f - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(S_g G_{f'}) = 0. \end{array} \right.$$

Ahora bien, sea $S_f = S_f(t, f, g)$ con la siguiente diferencial definida

$$\mathrm{d}S_f = S_{tf}\mathrm{d}t + S_{ff} f' \mathrm{d}t + S_{fg} g' \mathrm{d}t,$$

esta expresión se puede escribir de la siguiente manera

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} S = S_{tf} + S_{ff} f' + S_{gf} g'. \tag{4.14}$$

Entonces, de la ecuación

$$F + S_t + S_f f' - S_g G = 0,$$

se tiene que

$$S_{gt} + S_{gf} f' - S_{gg} G = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} S_g = 0,$$

entonces

$$S_g = -p = \text{constante}, \tag{4.15}$$

y como S_g es constante, se sigue que

$$S_{gf} = 0. \tag{4.16}$$

Si se sustituyen las ecuaciones (4.14) y (4.16) en la segunda ecuación del sistema $(\mathcal{S})$ se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$F_f + S_{ft} + S_{ff} f' - (S_g G)_f = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F_{f'} + S_{tf} + S_{ff} f' - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(S_g G_{f'}) = 0,$$

lo que implica que

$$(F - S_g G)_f - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(F - S_g G)_{f'} = 0,$$

Así, aplicando la ecuación (4.15) se obtiene

$$F_f - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_{f'} + p\left(G_f - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G_{f'}\right) = 0.$$

lo que prueba que la ecuación de Bellman-Euler-Lagrange implica la ecuación de Euler-Lagrange.

4.1.5. Problema con Dos Variables

Considere el siguiente funcional

$$J(f) = \int_a^b \int_c^{\mathrm{d}} F(x, y, f, f_x, f_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

sujeto a las siguientes restricciones o condiciones de frontera

$$f|_{\partial([a,b]\times[c,d])} = w|_{\partial([a,b]\times[c,d])},$$

donde $F \in C^2$ y w fija. Asimismo, se define el gradiente $\nabla f = \nabla f(x, y, t)$ y sea

$$S(x, y, f(x, y)) = \min_{\nabla f|_{[x,b]\times[y,d]}} \left\{ \int_x^b \int_y^{\mathrm{d}} F(s, t, f, f_s, f_t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t \right\},$$

donde $S \in C^2$. Por lo cual, una condición necesaria para que exista un óptimo es que

$$\min_{\nabla f} \{F + S_x + S_y + S_f f_x + S_f f_y\} = 0. \tag{4.17}$$

Bajo las hipótesis del resultado anterior se tiene que las ecuaciones de Bellman-Euler-Lagrange implican las Ecuaciones de Euler-Lagrange, es decir, si el gradiente ∇f es solución, entonces la condición necesaria de optimalidad (4.17) conduce a que

$$\frac{\partial F(x, y, f, f_x, f_y)}{\partial f} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F(x, y, f, f_x, f_y)}{\partial f_x}\right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{\partial F(x, y, f, f_x, f_y)}{\partial f_y}\right) = 0.$$

En efecto, si ∇f es mínimo, entonces

$$\begin{cases} F + S_x + S_y + S_f f_x + S_f f_y & = 0 \\ F_{f_x} + S_f & = 0 \\ F_{f_y} + S_f & = 0. \end{cases}$$

En este marco, suponga que $S_f = S_f(x, y, f)$ cuya diferencial se encuentra dada por la siguiente identidad

$$\mathrm{d}S_f = S_{fx}\mathrm{d}x + S_{fy}\mathrm{d}y + S_{ff}\mathrm{d}f,$$

por lo cual

$$\frac{\mathrm{d}S_f}{\mathrm{d}x} = S_{fy}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + S_{fx} + S_{ff}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \quad \text{y}$$
$$\frac{S_f}{\mathrm{d}y} = S_{fx}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} + S_{fy} + S_{ff}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y},$$

del mismo modo se tiene que

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0 \text{ y } \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = 0,$$

por lo que se tiene que

$$F_f + S_{f_x} + S_{f_y} + S_{ff}f_x + S_{ff}f_y = 0 \tag{4.18}$$
$$\frac{\partial}{\partial x}F_{f_x} + S_{xf} + S_{ff}f_x = 0 \tag{4.19}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}F_{f_y} + S_{yf} + S_{ff}f_y = 0, \tag{4.20}$$

entonces si se sustituyen las ecuaciones (4.19) y (4.20) en la expresión (4.18), se obtiene

$$\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial f}\right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{\partial F}{\partial f}\right) = 0,$$

lo que muestra que la implicación, bajo las hipótesis mencionadas, entre las ecuaciones de Bellman-Euler-Lagrange y las de Euler-Lagrange, es válida.

4.1.6. Problema con Funcionales que Dependen de Derivadas de Orden Superior

Considere el siguiente funcional

$$J(f) = \int_a^b F(t, f(t), f'(t), f''(t), \ldots, f^{(n)}(t))\mathrm{d}t,$$

sujeto a las siguientes restricciones o condiciones de frontera

$$f^{(k)}(a) = A_k, \qquad f^{(k)}(b) = B_k, \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

donde $F \in C^2[a,b]$, es decir, una función con primera y segunda derivadas parciales continuas con respecto a todos sus argumentos. Ahora bien, suponga que

$$f^{(n)} = f^{(n)}(t, f, f', \ldots, f^{(n-1)})$$

y sea

$$S(t, f, f', \ldots, f^{(n-1)}) = \min_{f^{(n)}|_{[t,b]}} \left\{ \int_t^b F(s, f', f'', \ldots, f^{(n)}) \mathrm{d}s \right\},$$

donde $S \in C^2$. Entonces una condición necesaria para que el funcional $J(f)$ tenga un extremo en una función dada $f(t)$, es que satisfaga la ecuación de Bellman-Euler-Lagrange, es decir

$$\min_{f^{(n)}} \{F + S_t + S_f f' + S_{f'} f'' + \cdots + S_{f^{(n-1)}} f^{(n)}\} = 0. \tag{4.21}$$

Bajo las hipótesis del resultado anterior las ecuaciones de Bellman-Euler-Lagrange implican las ecuaciones de Euler-Lagrange, es decir, si $f^{(n)}$ es solución, entonces la ecuación (4.21) conduce a que

$$F_f - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F_{f'} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} F_{f''} - \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3} F_{f'''} + \cdots + (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} F_{f^{(n)}} = 0.$$

4.1.7. Problema de Control Óptimo

Considere un funcional objetivo con la forma de Lagrange

$$J(f) = \int_a^b F(f, u) \mathrm{d}t,$$

sujeto a las siguientes restricciones o condiciones de frontera

$$R_{[a,b]} \begin{cases} \dot{f} = G(f, u), \quad a \leq t \leq b \\ f(a) = A \\ u \in \Omega_{[a,b]} \end{cases}$$

donde $F, G \in C^2[a,b]$, es decir, son funciones con primera y segunda derivadas parciales continuas con respecto a todos sus argumentos. Esto es un problema de control óptimo determinista. Ahora bien, sea

$$S(t, f) = \max_{u \in \Omega_{[t,b]}} \left\{ \int_t^b F(f, u) \mathrm{d}t : \text{ sujeto a } R_{[t,b]} \right\},$$

donde $S \in C^2$. Entonces una condición necesaria para que el funcional $J(f)$ tenga un extremo en una función dada $f(t)$, es que satisfaga la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman, es decir

$$\max_{u \in \Omega}\{F + S_f G\} + \dot{S} = 0. \tag{4.22}$$

Bajo las hipótesis del resultado anterior la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman implica el principio del máximo de Pontryagin

$$-\dot{\lambda}(t) = F_f + \lambda(t) G_f.$$

En efecto, si (f, u) es solución, entonces de la condición de Hamilton-Jacobi-Bellman se sigue que

$$S_{ft} + F_f + S_{ff} G + S_f G_f = 0,$$

ó

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} S_f + F_f + S_f G_f = 0,$$

y que

$$S_f = \lambda(t).$$

4.2. Programación Dinámica Estocástica

En esta sección se plantean y justifican las condiciones de primer orden dadas por la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman para dos problemas específicos de control óptimo estocástico: un problema descontado y uno de un consumidor racional.

4.2.1. Condiciones de Primer Orden para el Problema Descontado de Control Óptimo Estocástico

Considere el siguiente problema de control óptimo estocástico

$$\text{Maximizar} \quad \mathrm{E}\left\{ \int_t^T G(u_s) e^{-\delta s} \mathrm{d}s \;\middle|\; \mathcal{F}_t \right\} \tag{4.23}$$

sujeto a las restricciones

$$\mathrm{d}x_t = \mu(x_t, u_t)\mathrm{d}t + \sigma(x_t, u_t)\mathrm{d}W_t, \tag{4.24}$$

$$\mathrm{d}y_t = m(y_t)\mathrm{d}t + s(y_t)\mathrm{d}V_t, \tag{4.25}$$

$$\mathrm{Cov}(\mathrm{d}W_t, \mathrm{d}V_t) = \rho \mathrm{d}t, \tag{4.26}$$

donde δ es la tasa subjetiva de descuento, $\mathcal{F}_t$ es la información relevante disponible hasta el tiempo t, μ y m son los parámetros de tendencia para x_t y y_t respectivamente, σ y s son los parámetros de volatilidad para x_t y y_t respectivamente y los procesos W_t y V_t son movimientos Brownianos estandarizados, es decir, tienen incrementos normales e independientes con $\mathrm{E}[\mathrm{d}W_t] = 0$ y $\mathrm{Var}[\mathrm{d}W_t] = \mathrm{d}t$ para x_t y $\mathrm{E}[\mathrm{d}V_t] = 0$ y $\mathrm{Var}[\mathrm{d}V_t] = \mathrm{d}t$ para y_t.

Se define para $t < T$

$$J(t, x_t, y_t) \equiv \max_{u|_{[t,T]}} \mathrm{E}\left\{ \int_t^T G(u_s) e^{-\delta s} \mathrm{d}s \;\middle|\; \mathcal{F}_t \right\}.$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
J(t,x_t,y_t) &= \max_{u|_{[t,T]}} \mathrm{E}\left\{ \int_t^{t+\mathrm{d}t} G(u_s)e^{-\delta s}\mathrm{d}s + \int_{t+\mathrm{d}t}^{T} G(u)e^{-\delta s}\mathrm{d}s \;\Big|\; \mathcal{F}_t \right\} \\
&= \max_{u|_{[t,\mathrm{d}t]}} \mathrm{E}\left\{ \int_t^{t+\mathrm{d}t} G(u_s)e^{-\delta s}\mathrm{d}s + J(t+\mathrm{d}t, x_t+\mathrm{d}x_t, y_t+\mathrm{d}y_t) \;\Big|\; \mathcal{F}_t \right\} \\
&= \max_{u|_{[t,\mathrm{d}t]}} \mathrm{E}\left\{ G(u_s)e^{-\delta s}\mathrm{d}t + o(\mathrm{d}t) + J(t,x_t,y_t) + \mathrm{d}J(t,x_t,y_t) \mid \mathcal{F}_t \right\} \\
&= \max_{u|_{[t,\mathrm{d}t]}} \mathrm{E}\Big\{ G(u_t)e^{-\delta t}\mathrm{d}t + o(\mathrm{d}t) + J(t,x_t,y_t) \\
&\qquad + \left(J_t + \mu J_x + \frac{1}{2}\sigma^2 J_{xx} + mJ_y + \frac{1}{2}s^2 J_{yy} + \sigma s\rho J_{xy} \right)\mathrm{d}t \\
&\qquad + \sigma J_x \mathrm{d}W_t + sJ_y\mathrm{d}V_t \mid \mathcal{F}_t \Big\}.
\end{aligned}
$$

En consecuencia

$$
\begin{aligned}
&\max_{u|_{[t,\mathrm{d}t]}} \mathrm{E}\Big\{ G(u_t)e^{-\delta t}\mathrm{d}t + o(\mathrm{d}t) \\
&\qquad + \left(J_t + \mu J_x + \frac{1}{2}\sigma^2 J_{xx} + mJ_y + \frac{1}{2}s^2 J_{yy} + \sigma s\rho J_{xy} \right)\mathrm{d}t \\
&\qquad + \sigma J_x \mathrm{d}W_t + sJ_y\mathrm{d}V_t \mid \mathcal{F}_t \Big\} = 0
\end{aligned}
$$

Ahora bien, si se toman los valores esperados, se sigue que

$$
\max_{u|_{[t,\mathrm{d}t]}} \left\{ G(u_t)e^{-\delta t}\mathrm{d}t + o(\mathrm{d}t) + \left(J_t + \mu J_x + \frac{1}{2}\sigma^2 J_{xx} + mJ_y + \frac{1}{2}s^2 J_{yy} + \sigma s\rho J_{xy} \right)\mathrm{d}t \right\} = 0.
$$

Si ahora se divide entre $\mathrm{d}t$ y, posteriormente, se toma el límite cuando $\mathrm{d}t \to 0$, se tiene que

$$
\max_{u} \left\{ G(u_t)e^{-\delta t} + J_t + \mu J_x + \frac{1}{2}\sigma^2 J_{xx} + mJ_y + \frac{1}{2}s^2 J_{yy} + \sigma s\rho J_{xy} \right\} = 0.
$$

Así bien, si u es máximo, entonces se sigue que

$$
G(u_t) + J_t + \mu J_x + \frac{1}{2}\sigma^2 J_{xx} + mJ_y + \frac{1}{2}s^2 J_{yy} + \sigma s\rho J_{xy} = 0. \tag{4.27}
$$

Dada la forma separable de la función objetivo, se propone como candidato de la ecuación diferencial parcial anterior a

$$
J(t,x_t,y_t) = V(x_t,y_t)e^{\delta t}.
$$

De esta manera,

$$J_t = -\delta V(x,y)e^{-\delta t}$$

y las primeras y segundas derivadas con respecto de x y y están dadas por:

$$\begin{aligned} J_x &= V_x e^{-\delta t}, & J_y &= V_y e^{-\delta t}, \\ J_{xx} &= V_{xx} e^{-\delta t}, & J_{yy} &= V_{yy} e^{-\delta t} \end{aligned}$$

y

$$J_{xy} = V_{xy} e^{-\delta t}.$$

En este caso (4.27) se transforma en

$$G(u_t) - \delta V_t + \mu V_x + \frac{1}{2}\sigma^2 V_{xx} + mJ_y + \frac{1}{2}s^2 V_{yy} + \sigma s \rho V_{xy} = 0.$$

Luego se propone como candidato de V a una función de la forma

$$V(x_t, y_t) = f(x_t) + g(y_t)$$

Así, se tiene que

$$\begin{aligned} V_x &= f'(x_t), & V_{xx} &= f''(x_t), \\ V_y &= g'(y_t), & V_{yy} &= g''(y_t), \end{aligned}$$

y

$$V_{xy} = 0.$$

De lo anterior se sigue que

$$\begin{aligned} G(u_t) - \delta\left(f(x_t) + g(y_t)\right) + \mu f'(x_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 f''(x_t) + mg'(y_t) + \frac{1}{2}s^2 g''(y_t) &= 0, \\ -\delta f'(x_t)\mathrm{d}x_t + \mu f''(x_t)\mathrm{d}x_t &= 0, \\ -\delta g'(y_t)\mathrm{d}y_t + mg''(y_t)\mathrm{d}y_t &= 0. \end{aligned}$$

4.2.2. Condiciones de Primer Orden para el Problema de Decisión del Consumidor Racional

En esta sección se determinan las condiciones de primer orden para una solución interior del siguiente problema de control óptimo estocástico

$$\max_{c_t, N_{m,t}, N_{b,t}, N_{k,t}} \mathrm{E}_0 \left\{ \int_0^\infty \left[\theta \log(c_t) + (1-\theta)\log(N_{m,t}a_t)\right] e^{-\delta t}\mathrm{d}t \right\}, \tag{4.28}$$

sujeto a:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}a_t}{a_t} &= N_{m,t}r_m + N_{b,t}r_b + N_{k,t}r_k - \frac{c_t(1+\tau_c)}{a_t} - \bar{\tau}\\ &+ N_{k,t}\sigma_k \mathrm{d}W_{k,t} - (N_{m,t}+N_{b,t})\sigma_P \mathrm{d}W_{P,t} - \sigma_\tau \mathrm{d}W_{\tau,t},\end{aligned} \tag{4.29}$$

y

$$1 - N_{m,t} - N_{b,t} - N_{k,t} = 0, \tag{4.30}$$

donde $\theta\log(c_t)$ es el índice de satisfacción por el consumo, $(1-\theta)\log(m_t)$ es la utilidad por mantener saldos reales, δ es la tasa subjetiva de descuento, también llamada tasa subjetiva intertemporal y E_0 es la esperanza condicional sujeta al conjunto de información disponible en el tiempo $t=0$. Asimismo, $N_{j,t} \equiv \frac{j_t}{a_t}$ es la proporción del portafolio en el activo j para $j = m, b, k$, $\mathrm{d}R_{j,t}$ es la tasa de retorno real después de impuestos sobre el activo j para $j=m,b,k$, $\mathrm{d}\tau_t$ son los impuestos sobre la riqueza y τ_c es el impuesto *ad valorem* sobre el consumo. Por otro lado se define $r_m = -\pi + \sigma_P^2$, $r_b = i(1-\tau_y) - \pi + \sigma_P^2$ y $\bar{\tau}$ es la tasa impositiva media esperada sobre la riqueza real. En este marco, la condición de Hamilton-Jacobi-Bellman para la programación dinámica en tiempo continuo está dada por:

$$\begin{aligned}&\max_{c_t,N_{m,t},N_{b,t},N_{k,t}} H(c_t, N_{m,t}, N_{b,t}, N_{k,t}; a_t) \equiv\\ &\max_{c_t,N_{m,t},N_{b,t},N_{k,t}} \Bigg\{ \theta\log(c_t) + (1-\theta)\log(N_{m,t}a_t) - \delta V(a_t)\\ &+ a_t V'(a_t)\left[N_{m,t}r_m + N_{b,t}r_b + N_{k,t}r_k - \frac{c_t(1+\tau_c)}{a_t} - \bar{\tau}\right]\\ &+ \frac{1}{2}a_t^2 V''(a_t)\Big[(N_{m,t}+N_{b,t})^2\sigma_P^2 + N_{k,t}^2\sigma_k^2 + \sigma_\tau^2\\ &- 2(N_{m,t}+N_{b,t})N_{k,t}\sigma_{Pk} + 2(N_{m,t}+N_{b,t})\sigma_{P\tau} - 2N_{k,t}\sigma_{k\tau}\Big]\\ &+ \phi(1 - N_{m,t} - N_{b,t} - N_{k,t})\Bigg\} = 0.\end{aligned} \tag{4.31}$$

donde ϕ es el multiplicador de Lagrange asociado con la condición de normalización, $V(a_t)e^{-\delta t}$ es la función de utilidad indirecta del consumidor y $V'(a_t)e^{-\delta t}$ es la variable de co-estado. La condición de Hamilton-Jacobi-Bellman, evaluada en el máximo es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden en $V(a_t)$. Con el propósito de resolver dicha ecuación diferencial, se postula la función $V(a_t)$ de la siguiente manera:

$$V(a_t) = \beta_0 + \beta_1 \log(a_t).$$

Consecuentemente,

$$
\begin{aligned}
&\max_{c_t, N_{m,t}, N_{b,t}, N_{k,t}} H(c_t, N_{m,t}, N_{b,t}, N_{k,t}; a_t) \equiv \\
&\max_{c_t, N_{m,t}, N_{b,t}, N_{k,t}} \Bigg\{ \theta \log(c_t) + (1-\theta)\log(N_{m,t}a_t) - \delta\left[\beta_0 + \beta_1 \log(a_t)\right] \\
&+ \beta_1 \left[N_{m,t} r_m + N_{b,t} r_b + N_{k,t} r_k - \frac{c_t(1+\tau_c)}{a_t} - \bar{\tau} \right] \\
&- \frac{1}{2}\beta_1 \Big[(N_{m,t} + N_{b,t})^2 \sigma_P^2 + N_{k,t}^2 \sigma_k^2 + \sigma_\tau^2 \\
&- 2(N_{m,t} + N_{b,t}) N_{k,t} \sigma_{Pk} + 2(N_{m,t} + N_{b,t})\sigma_{P\tau} - 2N_{k,t}\sigma_{k\tau} \Big] \\
&+ \phi(1 - N_{m,t} - N_{b,t} - N_{k,t}) \Bigg\} = 0.
\end{aligned} \tag{4.32}
$$

Por lo tanto, las condiciones necesarias para un máximo son:

$$\frac{\partial H}{\partial c_t} = \frac{\theta}{c_t} - \frac{\beta_1(1+\tau_c)}{a_t} = 0; \tag{4.33}$$

$$\frac{\partial H}{\partial N_{m,t}} = \frac{1-\theta}{N_{m,t}} + \beta_1 \Big[r_m - (N_{m,t} + N_{b,t})\sigma_P^2 + N_{k,t}\sigma_{Pk} - \sigma_{P\tau} \Big] - \phi = 0; \tag{4.34}$$

$$\frac{\partial H}{\partial N_{b,t}} = \beta_1 \Big[r_b - (N_{m,t} + N_{b,t})\sigma_P^2 + N_{k,t}\sigma_{Pk} - \sigma_{P\tau} \Big] - \phi = 0; \tag{4.35}$$

$$\frac{\partial H}{\partial N_{k,t}} = \beta_1 \Big[r_k - N_{k,t}\sigma_k^2 + (N_{m,t} + N_{b,t})\sigma_{Pk} + \sigma_{k\tau} \Big] - \phi = 0; \tag{4.36}$$

y

$$\frac{\partial H}{\partial \phi} = 1 - (N_{m,t} + N_{b,t} + N_{k,t}) = 0, \tag{4.37}$$

Falta sólo determinar los coeficientes β_0 y β_1 definidos en $V(a_t)$. Después de sustituir los valores óptimos[4] de $\widehat{c}_t$, $\widehat{N}_m$, $\widehat{N}_b$ y $\widehat{N}_k$ en la condición de Hamilton-Jacobi-

[4]La manera de encontrar los valores de $\widehat{c}_t$, $\widehat{N}_m$, $\widehat{N}_b$ y $\widehat{N}_k$ se explica en el problema del Consumidor Estocástico que se presenta en la sección 5.2, pág. 114.

Bellman, se obtiene que

$$
\begin{aligned}
&(1-\delta\beta_1)\log(a_t)+\theta\log(\theta)+(1-\theta)\log(1-\theta)\\
&-\theta\log[\beta_1(1+\tau_c)]-(1-\theta)\log[\beta_1 i(1-\tau_y)]-\delta\beta_0\\
&+\beta_1\Big[(\widehat{N}_m+\widehat{N}_m)(-\pi+\sigma_P^2)\\
&+\widehat{N}_b\left[i(1-\tau_y)-\pi+\sigma_P^2\right]+\widehat{N}_k r_k-\frac{\widehat{c}_t(1+\tau_c)}{a_t}-\bar{\tau}\Big]\\
&-\frac{1}{2}\beta_1\Big[(\widehat{N}_m+\widehat{N}_b)^2\sigma_P^2+\widehat{N}_k^2\sigma_k^2+\sigma_\tau^2-2(\widehat{N}_m+\widehat{N}_b)\widehat{N}_k\sigma_{Pk}\\
&+2(\widehat{N}_m+\widehat{N}_b)\sigma_{P\tau}-2\widehat{N}_k\sigma_{k\tau}\Big]=0,
\end{aligned}
\tag{4.38}
$$

lo cual implica que

$$\beta_1=\frac{1}{\delta}$$

y

$$
\begin{aligned}
\beta_0=&\frac{\theta}{\delta}\log(\theta)+\frac{(1-\theta)}{\delta}\log(1-\theta)-\frac{\theta}{\delta}\log\left(\frac{1+\tau_c}{\delta}\right)-\frac{(1-\theta)}{\delta}\log\left[\frac{i(1-\tau_y)}{\delta}\right]\\
&-\frac{\theta}{\delta}+\frac{1}{\delta^2}\Big[(\widehat{N}_m+\widehat{N}_m)(-\pi+\sigma_P^2)+\widehat{N}_b\left[i(1-\tau_y)-\pi+\sigma_P^2\right]+\widehat{N}_k r_k-\bar{\tau}\Big]\\
&-\frac{1}{2}\frac{1}{\delta^2}\Big[(\widehat{N}_m+\widehat{N}_b)^2\sigma_P^2+\widehat{N}_k^2\sigma_k^2+\sigma_\tau^2-2(\widehat{N}_m+\widehat{N}_b)\widehat{N}_k\sigma_{Pk}\\
&+2(\widehat{N}_m+\widehat{N}_b)\sigma_{P\tau}-2\widehat{N}_k\sigma_{k\tau}\Big].
\end{aligned}
$$

Capítulo 5

Aplicaciones Financieras y Económicas

5.1. Maximización de Utilidad con Productos Derivados

Considere a un consumidor inversionista racional[1], que desea al determinar la dinámica del precio de un producto derivado de un activo con riesgo. El precio del derivado satisface una ecuación diferencial parcial de segundo orden, parabólica y determinista. En esta sección se propone un método de solución para dicha ecuación.

Así bien, se supone que el consumidor inversionista tiene acceso a tres diferentes activos. El primer activo es un título de capital cuyo precio, S_t, tiene una dinámica guiada por el movimiento geométrico Browniano, de acuerdo con

$$\mathrm{d}S_t = \mu S_t \mathrm{d}t + \sigma S_t \mathrm{d}W_t, \tag{5.1}$$

donde el parámetro de tendencia, μ, representa el rendimiento promedio esperado (determinado por las preferencias al riesgo del agente), el parámetro de volatilidad, σ, es la variación esperada en el rendimiento del activo, y el proceso W_t es un movimiento Browniano estandarizado, es decir, W_t tiene incrementos normales e independientes con $\mathrm{E}[\mathrm{d}W_t] = 0$ y $\mathrm{Var}[\mathrm{d}W_t] = \mathrm{d}t$. El segundo activo se encuentra determinado por las posiciones que el agente toma sobre un producto derivado, específicamente, sobre una opción europea. En este problema el bien subyacente

[1]El cuál fue estudiado en la sección 4.2.2, pág. 100.

lo determina una acción. El precio del producto derivado es $v(t, S_t)$ y su valor intrínseco es $v(T, S_t) = g(S_t)$. Por último, el tercer activo es un activo libre de riesgo, es decir, una cuenta bancaria o un bono, que paga un rendimiento, r, constante en todos los plazos.

5.1.1. Índice de Satisfacción

El consumidor obtiene satisfacción por un bien de consumo. Se supone que la función de utilidad esperada es del tipo von Neumann-Morgenstern. Específicamente, la función de utilidad total descontada al tiempo t, V_t, de un individuo representativo y competitivo (tomador de precios), se define de la siguiente manera:

$$V_t \equiv \mathrm{E}\left\{ \int_t^T \log(c_s) e^{-\delta s} \mathrm{d}s \;\middle|\; \mathcal{F}_t \right\} \tag{5.2}$$

donde c_s es el consumo al tiempo s, δ es la tasa subjetiva de descuento, y $\mathcal{F}_t$ es la información relevante disponible hasta el tiempo t.

5.1.2. Dinámica del Nivel General de Precios

Se supone que en esta economía los individuos perciben que el precio del bien, P_t, es conducido por el siguiente proceso estocástico de difusión:

$$\mathrm{d}P_t = \pi P_t \mathrm{d}t + \sigma_P P_t \mathrm{d}V_t, \tag{5.3}$$

donde el parámetro de tendencia, π, representa la tasa de inflación promedio esperada y el parámetro de volatilidad, σ_P, denota la variación esperada de la tasa de inflación. El proceso V_t es un proceso de Wiener estandarizado, es decir, V_t presenta incrementos normales independientes con $\mathrm{E}[\mathrm{d}V_t] = 0$ y $\mathrm{Var}[\mathrm{d}V_t] = \mathrm{d}t$. Asimismo, se supone que

$$\mathrm{Cov}(\mathrm{d}W_t, \mathrm{d}V_t) = \rho \mathrm{d}t. \tag{5.4}$$

5.1.3. Restricción Presupuestal y Rendimiento de los Activos

Sea $w_{1t} = S_t/a_t$ la proporción de la riqueza que el individuo asigna a la tenencia de acciones, $w_{2t} = v_t/a_t$ la proporción de la riqueza que asigna a una posición larga[2] de una opción de compra[3] sobre la acción, y $1-w_{1t}-w_{2t}$ la fracción complementaria que se asigna a un instrumento libre de riesgo que paga un rendimiento, r, constante a cualquier plazo. En este contexto, la evolución de la acumulación de la riqueza real sigue la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$\mathrm{d}a_t = a_t w_{1t}\mathrm{d}R_S + a_t w_{2t}\mathrm{d}R_v + a_t(1 - w_{1t} - w_{2t})r\mathrm{d}t - P_t c_t \mathrm{d}t \tag{5.5}$$

donde el rendimiento del activo con riesgo está dado por

$$\mathrm{d}R_S = \frac{\mathrm{d}S_t}{S_t},$$

y el cambio porcentual en la prima de la opción satisface

$$\mathrm{d}R_v = \frac{\mathrm{d}v_t}{v_t}.$$

Ahora bien, como v_t depende del tiempo y del valor del título de capital, se tiene que el cambio que hay en el valor de la opción se encuentra dado por

$$\mathrm{d}v_t = \frac{\partial v_t}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial v_t}{\partial S_t}\mathrm{d}S_t$$

donde $\mathrm{d}S_t = \mu S_t\mathrm{d}t + \sigma S_t\mathrm{d}W_t$. Observe que el término $\mathrm{d}W$, referente al movimiento Browniano, indica no linealidad. Es por ello que la expresión anterior se puede desarrollar en series de Taylor, es decir

$$\mathrm{d}v_t = \frac{\partial v_t}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial v_t}{\partial S_t}\mathrm{d}S_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 v_t}{\partial S_t^2}\mathrm{d}t, \tag{5.6}$$

ó

$$\mathrm{d}v_t = \mu_v v_t \mathrm{d}t + \sigma_v v_t \mathrm{d}W_t,$$

con

$$\mu_v \equiv \left(\frac{\partial v_t}{\partial t} + \frac{\partial v_t}{\partial S_t}\mu S_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v_t}{\partial S_t^2}\sigma^2 S_t^2\right)\frac{1}{v_t},$$

$$\sigma_v = \frac{1}{v_t}\frac{\partial v_t}{\partial S_t}\sigma S_t.$$

[2]Esta propiedad da al inversionista el derecho de transferir la propiedad a alguien más, mediante venta o donación; da el derecho a recibir cualquier ingreso pagado por el valor y el derecho a cualquier perdida o ganancia medida que cambia el valor.

[3]Derecho a comprar una cierta cantidad de acciones de una acción o índice accionario particular a un precio predeterminado antes de la fecha de cierre determinada, a cambio de una prima.

5.1.4. Problema de decisión del consumidor-inversionista con activos nominales

El consumidor-inversionista desea determinar su trayectoria de consumo y el portafolio de inversión que maximice su utilidad total esperada, es decir,

$$\text{Maximizar } \mathrm{E}\left\{ \int_t^T \log(c_s)e^{-\delta s}\mathrm{d}s \,\middle|\, \mathcal{F}_t \right\},$$

sujeto a ecuación consolidada de evolución de la riqueza

$$\mathrm{d}a_t = a_t\left[\left(r + (\mu - r)w_1 + (\mu_v - r)w_2 - \frac{P_t c_t}{a_t}\right)\mathrm{d}t + (w_1\sigma + w_2\sigma_v)\mathrm{d}W_t\right],$$

así como a la evolución del precio del bien

$$\mathrm{d}P_t = \pi P_t \mathrm{d}t + \sigma_P P_t \mathrm{d}V_t,$$

y a la covarianza entre los movimientos Brownianos anteriores

$$\mathrm{Cov}(\mathrm{d}W_t, \mathrm{d}V_t) = \rho\mathrm{d}t.$$

Así bien, el problema de optimización que enfrenta un consumidor inversionista que desea maximizar la trayectoria de consumo y el portafolio de inversión que maximice su utilidad esperada es el que sigue

$$\begin{aligned}
\text{Maximizar} \quad & \mathrm{E}\left\{ \int_t^T \log(c_s)e^{-\delta s}\mathrm{d}s \,\middle|\, \mathcal{F}_t \right\}, \\
\text{sujeto a} \quad & \mathrm{d}a_t = a_t\left[\left(r + (\mu - r)w_1 + (\mu_v - r)w_2 - \frac{P_t c_t}{a_t}\right)\mathrm{d}t \right.\\
& \qquad \left. + (w_1\sigma + w_2\sigma_v)\mathrm{d}W_t\right], \\
& \mathrm{d}P_t = \pi P_t \mathrm{d}t + \sigma_P P_t \mathrm{d}V_t, \\
& \mathrm{Cov}(\mathrm{d}W_t, \mathrm{d}V_t) = \rho\mathrm{d}t.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Así bien, la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman está dada por[4]

$$\begin{aligned}
\max_{c,w_1,w_2} \Bigg\{ & \log(c_t) - \delta[f(a_t) + g(P_t)] \\
& + f'(a_t)a_t\left(r + (\mu - r)w_1 + (\mu_c - r)w_2 - \frac{c_t}{a_t}\right) \\
& + \frac{1}{2}f''(a_t)a_t^2(w_1\sigma + w_2\sigma_v)^2 + g'(P_t)\pi P_t + \frac{1}{2}g''(P_t)\sigma_P^2 \Bigg\} = 0.
\end{aligned}$$

[4]Ver sección 4.2.1, pág. 98

Si se toma como candidato de solución a

$$f(a_t) + g(P_t) = \beta_0 + \beta_1 \log(a_t P_t),$$

las condiciones de primer orden son:

$$\frac{1}{c_t} = \frac{\beta_1}{a_t}, \tag{5.8}$$

$$\mu - r = w_1 \sigma_v^2 + w_2 \sigma \sigma_v, \tag{5.9}$$

$$\mu_v - r = w_2 \sigma_v^2 + w_1 \sigma \sigma_v. \tag{5.10}$$

Las ecuaciones (5.9) y (5.10) se pueden escribir en términos matriciales de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} \mu - r \\ \mu_v - r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \\ \mu_v \end{pmatrix} - \mathbb{I}\, r = \begin{pmatrix} \sigma^2 & \sigma\sigma_v \\ \sigma\sigma_v & \sigma_v^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

donde

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Note que, la matriz de varianzas y covarianzas anterior, es singular, es decir, el valor del determinante de esta matriz es,

$$\Delta = \sigma^2 \sigma_v^2 - \sigma^2 \sigma_v^2 = 0.$$

Por lo tanto el sistema homogéneo no tiene solución interior, es decir, el sistema no tiene soluciones triviales.

5.1.5. Valuación de Productos Derivados

El equilibrio, en el sistema, está dado por $w_1 = 0$ y $w_2 = 1$, es decir, si el consumidor asigna toda su riqueza en el producto derivado. Si este supuesto se sustituye en las ecuaciones (5.9) y (5.10), se sigue que

$$\mu = r + \sigma \sigma_v \tag{5.11}$$

y

$$\mu_v - r = \sigma_v^2. \tag{5.12}$$

Así bien, al sustituir el valor de μ_v en la ecuación (5.12) se tiene que

$$\left(\frac{\partial v_t}{\partial t} + \frac{\partial v_t}{\partial S_t} \mu S_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v_t}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 \right) \frac{1}{v_t} - r = \left(\frac{\partial v_t}{\partial S_t} \right)^2 \sigma^2 S_t^2 \frac{1}{v_t^2}. \tag{5.13}$$

Ahora, si se sustituye la expresión (5.11) en la ecuación anterior se obtiene

$$\frac{\partial v_t}{\partial t} + \frac{\partial v_t}{\partial S_t}(r + \sigma\sigma_v)S_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v_t}{\partial S_t^2}\sigma^2 S_t^2 - rv_t = \frac{1}{v_t}\left(\frac{\partial v_t}{\partial S_t}\right)^2 \sigma^2 S_t^2,$$

ó

$$\frac{\partial v_t}{\partial t} + \frac{\partial v_t}{\partial S_t} rS_t + \frac{1}{v_t}\left(\frac{\partial v_t}{\partial S_t}\right)^2 \sigma^2 S_t^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v_t}{\partial S_t^2}\sigma^2 S_t^2 - rv_t = \frac{1}{v_t}\left(\frac{\partial v_t}{\partial S_t}\right)^2 \sigma^2 S_t^2,$$

observe que si se despeja el lado derecho de la ecuación anterior, se sigue que

$$\frac{\partial v_t}{\partial t} + \frac{\partial v_t}{\partial S_t} rS_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v_t}{\partial S_t^2}\sigma^2 S_t^2 - rv_t = 0. \tag{5.14}$$

Observe que la ecuación anterior es la ecuación diferencial parcial de Black y Scholes, con la condición de frontera

$$v(T, S_t) = g(S_t) = \text{máx}\,(S_t - K, 0),$$

donde K, es el precio de ejercicio de la opción. Por lo tanto, el precio de la opción, dados r y σ constantes, es la que sigue

$$v(t, S_t) = S_t\mathcal{N}(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}(d_2), \tag{5.15}$$

donde $\mathcal{N}(\cdot)$ es la función de distribución acumulativa para una variable aleatoria normal estandarizada, dada por

$$\mathcal{N}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}y^2}\mathrm{d}y.$$

Asimismo, los términos d_1 y d_2 de la ecuación (5.15) se encuentran determinados por las siguientes expresiones:

$$d_1 = \frac{\log(S_t/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

y

$$d_2 = \frac{\log(S_t/K) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Por último, para determinar β_0 y β_1 se sustituyen las condiciones de primer orden en la condición de Hamilton-Jacobi-Bellman,

$$\log(a_t) - \log(\beta_1) - \delta\left(\beta_0 + \beta_1\log(a_t)\right) + \beta_1\mu_v - 1 - \frac{1}{2}\beta_1\sigma_v^2 + \beta_1\pi - \frac{1}{2}\beta_1\sigma_P^2 =$$

$$\log(a_t)(1 - \delta\beta_1) - \log(\beta_1) - \delta\beta_0 + \beta_1\mu_v - \frac{1}{2}\beta_1\sigma_v^2 + \beta_1\pi - \frac{1}{2}\beta_1\sigma_P^2 - 1 = 0.$$

En este contexto, se supone que

$$\log(a_t)(1-\delta\beta_1)=0$$

y

$$-\log(\beta_1)-\delta\beta_0+\beta_1\mu_v-\frac{1}{2}\beta_1\sigma_v^2+\beta_1\pi-\frac{1}{2}\beta_1\sigma_P^2-1=0.$$

En consecuencia,

$$\beta_1=\frac{1}{\delta}$$

y

$$\beta_0=-\frac{1}{\delta}\left(\log(\beta_1)+1\right)+\frac{1}{\delta^2}\left(\mu_v-\frac{1}{2}\sigma_v^2+\pi-\frac{1}{2}\sigma_P^2\right).$$

5.2. Consumidor Estocástico

Considere una economía poblada por consumidores idénticos con vida infinita. Estos consumidores desean maximizan su utilidad. Se supone que la función de utilidad tiene dos argumentos: un bien de consumo y la tenencia de saldos monetarios reales. El bien de consumo es de carácter perecedero y los saldos reales producen satisfacción en los consumidores por sus servicios de liquidez.

5.2.1. Dinámica del Nivel General de Precios

Se supone que en esta economía los individuos perciben que el precio del bien, P_t, es conducido por el siguiente proceso estocástico de difusión:

$$\mathrm{d}P_t=\pi P_t\mathrm{d}t+\sigma_P P_t\mathrm{d}W_{P,t}, \tag{5.16}$$

donde el parámetro de tendencia, π, representa la tasa de inflación promedio esperada y el parámetro de volatilidad, σ_P, denota la variación esperada de la tasa de inflación. El proceso $W_{P,t}$ es un proceso de Wiener estandarizado, es decir, $W_{P,t}$ presenta incrementos normales independientes con $\mathrm{E}[\mathrm{d}W_{P,t}]=0$ y $\mathrm{Var}[\mathrm{d}W_{P,t}]=\mathrm{d}t$. La ecuación (5.16) generaliza el supuesto de previsión perfecta cuando el nivel general de precios sigue una distribución log-normal.

5.2.2. Activos del Consumidor

El consumidor representativo posee tres diferentes acervos de activos: dinero, M_t; títulos de deuda pública, B_t; y acciones, k_t. En consecuencia, la riqueza real, a_t, del individuo está dada por:

$$a_t = m_t + b_t + k_t, \tag{5.17}$$

donde $m_t = M_t/P_t$ son los saldos monetarios reales y $b_t = B_t/P_t$ es la tenencia de bonos emitidos por el sector público en términos reales.

5.2.3. Problema de Decisión del Consumidor

El consumidor obtiene satisfacción por un bien de consumo y por la tenencia de saldos reales por sus servicios de liquidez. Se supone que la función de utilidad esperada es del tipo von Neumann-Morgenstern. Específicamente, la función de utilidad total descontada al tiempo $t = 0$, V_0, de un individuo representativo y competitivo tiene la siguiente forma separable:

$$V_0 = \mathrm{E}_0 \left\{ \int_0^\infty [u(c_t) + v(m_t)]\, e^{-\delta t} \mathrm{d}t \right\}, \tag{5.18}$$

donde $u(c_t)$ es el índice de satisfacción por el consumo; $v(m_t)$ es la utilidad por mantener saldos reales; δ es la tasa subjetiva de descuento, también llamada tasa subjetiva intertemporal; y E_0 es la esperanza condicional al conjunto de información disponible en el tiempo $t = 0$. En particular, se seleccionan $u(c_t) = \theta \log(c_t)$ y $v(m_t) = (1 - \theta) \log(m_t)$, lo cual conduce a un consumidor adverso al riesgo. Este supuesto permitirá generar soluciones analíticas que faciliten el estudio de las mismas. Por otra parte, la evolución de la acumulación de la riqueza real sigue la ecuación diferencial estocástica:

$$\mathrm{d}a_t = a_t[N_{m,t}\mathrm{d}R_{m,t} + N_{b,t}\mathrm{d}R_{b,t} + N_{k,t}\mathrm{d}R_{k,t}] - c_t(1 + \tau_c)\mathrm{d}t - \mathrm{d}\tau_t, \tag{5.19}$$

donde

$N_{j,t} \equiv \frac{j_t}{a_t}$ proporción del portafolio en el activo j, $j = m, b, k$;

$\mathrm{d}R_{j,t}$ tasa de retorno real después de impuestos sobre el activo j, $j = m, b, k$;

$\mathrm{d}\tau_t$ impuestos sobre la riqueza; y

τ_c impuesto *ad valorem*[5] sobre el consumo.

[5]Mejor conocido como Impuesto al Valor Agregado (I.V.A.).

5.2.4. Rendimiento de los Activos

El rendimiento de los activos disponibles en la economía se determina de la siguiente manera: Se supone que las tasas nominales de rendimiento que pagan el dinero y los bonos son cero e i, respectivamente, es decir, $\mathrm{d}M_t = 0 \, dt$ y $\mathrm{d}B_t = i\,(1-\tau_y)\mathrm{d}t$, donde τ_y es un impuesto aplicado a la tasa de interés nominal de un bono gubernamental. El retorno estocástico por la tenencia de saldos reales al tiempo t, $\mathrm{d}R_{m,t}$, es simplemente el cambio porcentual en el precio del dinero en términos de bienes. La aplicación del Lema de Itô al cambio porcentual del inverso del nivel de precios, tomando (5.16) como el proceso subyacente, conduce a[6]

$$\mathrm{d}R_{m,t} = P_t \mathrm{d}\left(\frac{1}{P_t}\right) = \frac{\mathrm{d}\,(M_t/P_t)}{(M_t/P_t)} = r_m \mathrm{d}t - \sigma_P \mathrm{d}W_{P,t}, \tag{5.20}$$

donde $r_m = -\pi + \sigma_P^2$. El retorno estocástico por la tenencia de bonos se obtiene en forma similar como

$$\mathrm{d}R_{b,t} = r_b \mathrm{d}t - \sigma_P \mathrm{d}W_{P,t}, \tag{5.21}$$

donde $r_b = i(1-\tau_y) - \pi + \sigma_P^2$. Es importante observar que los rendimientos del dinero y de los bonos se ven afectados por la volatilidad en el nivel general de precios. La tasa de retorno de las acciones después de impuestos será denotada mediante

$$\mathrm{d}R_{k,t} = r_k \mathrm{d}t + \sigma_k \mathrm{d}W_{k,t}, \tag{5.22}$$

donde el proceso $\mathrm{d}W_{k,t}$ tiene características similares al proceso definido en (5.16). Además del impuesto τ_y aplicado a la tasa de interés nominal de instrumentos de deuda pública y del impuesto *ad valorem* τ_c que se paga por el consumo, el consumidor paga un impuesto sobre la riqueza de la forma

$$\mathrm{d}\tau_t = a_t \bar{\tau} \mathrm{d}t + a_t \sigma_\tau \mathrm{d}W_{\tau,t}, \tag{5.23}$$

donde $\bar{\tau}$ es la tasa impositiva media esperada sobre la riqueza real. Al igual que antes, $\mathrm{d}W_{\tau,t}$ comparte las mismas características que el proceso de Wiener definido en (5.16).

5.2.5. Decisiones Óptimas de los Consumidores

El objetivo del consumidor es elegir, en cada momento, el portafolio de activos y la cantidad de consumo que maximicen (5.18) sujeto a (5.19). Note que después

[6] Véase el Apéndice B.2, pág. 126.

de sustituir las expresiones (5.20)-(5.23) en la ecuación estocástica de acumulación de la riqueza, expresión (5.19), ésta se transforma en

$$\frac{\mathrm{d}a_t}{a_t} = \left[N_{m,t} r_m + N_{b,t} r_b + N_{k,t} r_k - \frac{c_t(1+\tau_c)}{a_t} - \bar{\tau} \right] \mathrm{d}t$$
$$+ N_{k,t}\sigma_k \mathrm{d}W_{k,t} - (N_{m,t} + N_{b,t})\sigma_P \mathrm{d}W_{P,t} - \sigma_\tau \mathrm{d}W_{\tau,t}. \tag{5.24}$$

La solución del problema de maximización de utilidad total descontada sujeto a (5.24) y a la restricción de normalización

$$N_{m,t} + N_{b,t} + N_{k,t} = 1, \tag{5.25}$$

están dadas por[7]:

$$c_t = \frac{\delta\theta}{(1+\tau_c)} a_t, \tag{5.26}$$

$$\frac{\delta(1-\theta)}{N_{m,t}} + r_m - (N_{m,t} + N_{b,t})\sigma_P^2 + N_{k,t}\sigma_{Pk} - \sigma_{P\tau} - \delta\phi = 0, \tag{5.27}$$

$$r_b - (N_{m,t} + N_{b,t})\sigma_P^2 + N_{k,t}\sigma_{Pk} - \sigma_{P\tau} - \delta\phi = 0, \tag{5.28}$$

y

$$r_k - N_{k,t}\sigma_k^2 + (N_{m,t} + N_{b,t})\sigma_{Pk} + \sigma_{k\tau} - \delta\phi = 0, \tag{5.29}$$

donde ϕ es el multiplicador de Lagrange asociado a la restricción (5.25). Después de restar (5.27) de (5.28), se encuentra que la proporción óptima de la riqueza que se asigna a la tenencia de saldos reales:

$$\widehat{N}_m = \frac{\delta(1-\theta)}{i(1-\tau_y)},$$

la cual es independiente del tiempo. Asimismo, después de restar (5.28) de (5.29), se tiene que

$$\widehat{N}_k = \frac{A}{B},$$

donde

$$A \equiv r_k - r_b + \sigma_P^2 + \sigma_{Pk} + \sigma_{P\tau} + \sigma_{k\tau}$$

y

$$B \equiv \sigma_P^2 + 2\sigma_{Pk} + \sigma_k^2 > 0.$$

Note también que en ningún caso se han impuesto restricciones para que las proporciones de la riqueza asignadas a la tenencia de activos sean estrictamente positivas y menores que la unidad. Por lo tanto, las ventas en corto de activos son

[7] Véase la sección 4.2.2, pág. 100

permitidas. Finalmente, el portafolio óptimo queda completamente determinado con $\widehat{N}_b$, el cual se obtiene a partir de (5.25) como

$$\widehat{N}_b = 1 - \frac{\delta(1-\theta)}{i(1-\tau_y)} - \widehat{N}_k.$$

Capítulo 6

Conclusiones

En este trabajo se estudiaron las técnicas matemáticas con las que se plantean y solucionan distintos problemas económico-financieros. Estas técnicas son: el cálculo de variaciones, control óptimo determinista, control óptimo estocástico, programación dinámica determinista y programación dinámica estocástica. Al conjunto de estas técnicas se le conoce como: optimización dinámica en tiempo continuo. En los problemas que se abordaron se manifiesta el deseo de los individuos de maximizar su bienestar y el de sus dependientes. Estos problemas consideran aspectos como, consumo, producción, inversión, riqueza, precio de un producto, etcétera.

Específicamente se estudiaron cuatro problemas económicos y dos problemas financieros. De los cuales, dos problemas económicos se plantearon y resolvieron por medio de técnicas deterministas. El resto de los problemas se resolvieron por medio de control óptimo estocástico. Las técnicas deterministas utilizadas son: el cálculo de variaciones y el control óptimo determinista. Para el estudio del control óptimo determinista se necesitaron algunos resultados teóricos importantes de programación dinámica determinista. Por ello, se incluyó un capítulo que presenta estos resultados, los cuales son: la ecuación de Bellman-Euler-Lagrange, la condición de Legendre, la condición de Weierstrass y la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman. Asimismo, en el estudio del control óptimo estocástico se utilizaron algunos conceptos teóricos sobre programación dinámica estocástica, por ello, se incluyó un apartado en el que estos conceptos se resolvieron, específicamente, para los problemas que se plantean en el quinto capítulo.

El primer problema económico que se solucionó fue un modelo para maximizar la utilidad de un consumidor racional que obtiene satisfacción por medio de un bien de consumo perecedero. Se revisaron distintos modelos de la función de utilidad. Este problema se resolvió por medio del cálculo de variaciones. Se concluye que existe una trayectoria óptima de consumo para cada función de utilidad. Asimismo, se realizaron algunas observaciones del comportamiento de las trayectorias óptimas para los posibles comportamientos de la dotación en el ingreso del individuo.

El segundo problema económico fue un modelo de crecimiento económico que explica de forma endógena los determinantes del mismo. Este problema considera aspectos como, consumo, producción e inversión. Asimismo, el modelo propuesto describe el comportamiento de la dinámica de las trayectorias de consumo y capital de los agentes. En el planteamiento del problema se supuso que el producto marginal del capital se mantiene constante en el tiempo. Por ello, se planteó el problema de decisión de un consumidor, que desea maximizar su utilidad por un bien de consumo perecedero, como un problema de control óptimo determinista en tiempo continuo. Se utilizaron distintas funciones de utilidad en las que se examinaron las decisiones óptimas del consumidor, para ello se diseñaron algunas subrutinas de MATLAB©. Un aspecto interesante de este problema es que para los modelos con funciones de utilidad logarítmica y exponencial se encontró que el crecimiento en la economía es equilibrado, debido a que el consumo, el capital y el producto evolucionan exactamente a la misma tasa. En cambio, no existe equilibrio en la economía para el modelo con función de utilidad exponencial negativa.

En los problemas que se plantearon y resolvieron por medio de control óptimo estocástico, se utilizó la programación dinámica para obtener las decisiones óptimas del consumidor sobre los recursos que dispone. Estas decisiones, independientemente del estado inicial y de las decisiones restantes, también constituyen una política óptima. El primer problema que se resolvió fue el modelo neoclásico de crecimiento económico óptimo bajo incertidumbre. Para este problema se concluye que existen las trayectorias de crecimiento, tanto para el consumo como para la inversión, que maximizan el bienestar de una economía cuya fuerza de trabajo presenta variaciones que se rigen por una ecuación diferencial estocástica. Estas trayectorias, dado un capital inicial, tienden a un equilibrio, en el cual, la economía se desarrolla a la tasa de crecimiento de la población. El segundo problema que se resolvió fue el modelo de selección óptima de portafolio bajo incertidumbre. En este problema un individuo se enfrenta al problema de optimizar su cartera de inversión, la cuál cuenta con dos activos, uno de renta variable y otro de renta fija. Los rendimientos de la cartera de inversión son estocásticos. Para este problema se concluye que existen las trayectorias óptimas de consumo y de distribución de la riqueza que maximizan el bienestar del consumidor. En los dos problemas anteriores se plantearon las restricciones como ecuaciones diferenciales estocásticas.

Asimismo, para ambos problemas, se encontró la estructura que deben presentar las variables de control y de estado para que se cumplan las condiciones necesarias de optimalidad.

Por último, se utilizó el control óptimo estocástico para plantear y solucionar dos problemas económico-financieros actuales. El primero de ellos es un problema de maximización de utilidad con productos derivados. En este problema se propuso un método con el que se obtuvo la dinámica del precio de un producto derivado de un activo con riesgo. Con este método, un consumidor inversionista racional, puede determinar su trayectoria de consumo y el portafolio de inversión que maximice su utilidad total esperada. En el segundo problema se presenta un problema económico. En este problema se supuso una economía poblada por consumidores idénticos, con vida infinita, los cuales desean maximizar su utilidad. Asimismo, se supuso una función de utilidad con dos argumentos: un bien de consumo y la tenencia de saldos monetarios reales. El objetivo del problema es que el consumidor maximice su satisfacción por medio de la elección correcta del portafolio de activos y de la cantidad de consumo, en cada instante. En este contexto, se determinó el portafolio de activos y la cantidad de consumo que maximizan la satisfacción de un consumidor. Esta satisfacción se encuentra determinada por un bien de consumo y por la acumulación de riqueza real. En este problema, la dinámica del precio de bien y el rendimiento de los activos disponibles en la economía, se rigen por una ecuación diferencial.

En la actualidad, los métodos de optimización dinámica se han aplicado en problemas de diversas áreas, tales como: física, biomedicina, química, ingeniería eléctrica, ingeniería hidráulica, etcétera. Para la economía y las finanzas, el camino aún es muy largo y la construcción de modelos, que reflejen la realidad de los sectores de consumo, producción e inversión, es una tarea imprescindible para los profesionales que se enfrentan a problemas de esta índole en un mercado creciente y altamente competitivo. Por ello, el trabajo multidisciplinario, en las áreas económico-financieras, constituye una meta en la construcción del futuro económico de México.

Apéndice A

Procesos Estocásticos

A.1. Proceso de Wiener

Un proceso estocástico $\{z_t : t \geq 0\}$ en un espacio de probabilidades $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es un proceso Wiener estándar si satisface las siguientes condiciones:

a) Los incrementos son independientes, *i.e.*, si $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_k$ entonces las diferencias $\Delta z_j = z(t_j) - z(t_{j-1}), j = 1, 2, \cdots k(t)$, son variables aleatorias independientes.

b) La diferencia, Δz_j tiene una distribución normal con media 0 y varianza $t_j - t_{j-1}$, *i.e.* $\Delta z_j \sim \mathcal{N}(0, \Delta t)$.

c) Para cada $\omega \in \Omega$, la realización $z_t(\omega)$ es continua en t. Además, $z_0(\omega) = 0$ con probabilidad uno, por convención.

A.2. Movimiento Browniano

Definición A.2.1. Un movimiento Browniano en $\mathbb{R}$ es un proceso estocástico $\{B_t : t \geq 0\}$ con las siguientes propiedades

1. $B_0(w) = 0$, para casi todos los valores de w.

2. Para cada $t \geq 0$ y $s \geq 0$ el incremento $(B_{t+s} - B_s)$ se distribuye normal con media 0 y varianza $\sigma^2 t$, donde $\sigma > 0$ es un parámetro fijo.

3. Para cada par de intervalos de tiempo disjuntos $[t_1, t_2]$ $[t_3, t_4]$ con $t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4$, los incrementos $B_{t_2} - B_{t_1}$ y $B_{t_4} - B_{t_3}$ son variables aleatorias independientes con distribución $\mathcal{N}(0, \sigma^2 t)$. Lo mismo ocurre para n intervalos disjuntos, donde n es un entero positivo cualquiera.

4. La trayectoria $t \mapsto B_t(w)$ es continua en todos los valores de t para casi todos los valores de w.

Como se puede observar esta definición de movimiento Browniano es la misma que la de un proceso de Wiener.

Definición A.2.2. Un proceso $\{B_t : t \geq 0\}$ es un movimiento Browniano estándar si cumple la definición anterior con $\sigma^2 = 1$, es decir, $B_{t+s} - B_s$ se distribuye normal con media 0 y varianza t.

A.3. Movimiento Browniano Geométrico

Sea $\{B_t : t \geq 0\}$ un movimiento Browniano. Se dice que $\{X_t : t \geq 0\}$ es un movimiento Browniano con deriva si

$$X_t = B_t + \mu t,$$

para alguna constante μ, denominada parámetro de deriva. De este modo, un movimiento Browniano es un movimiento Browniano con deriva igual a 0. Es decir,

Definición A.3.1. Un movimiento Browniano en $\mathbb{R}$ con deriva μ es un proceso estocástico $\{X_t : t \geq 0\}$ con las siguientes propiedades

i. $X_0 = 0$.

ii. Para cada $t \geq 0$ y $s \geq 0$ el incremento $(X_{t+s} - X_s)$ se distribuye normal con media μt y varianza $\sigma^2 t$, donde σ y μ son parámetros fijos.

iii. Para cada par de intervalos de tiempo disjuntos $[t_1, t_2]$ $[t_3, t_4]$ con $t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4$, los incrementos $X_{t_2} - X_{t_1}$ y $X_{t_4} - X_{t_3}$ son variables aleatorias independientes con distribución $\mathcal{N}(\mu t, \sigma^2 t)$. Lo mismo ocurre para n intervalos disjuntos, donde n es un entero positivo cualquiera.

iv. La trayectoria $t \mapsto X_t(w)$ es continua en todos los valores de t para casi todos los valores de w.

En este marco, como los incrementos $X_{t+s} - X_s$ son independientes del pasado, se puede observar que el movimiento Browniano con deriva es un proceso de Markov. Así bien, del inciso *i.*, se obtiene, para $t > s$, lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
P(X_t \leq x | X_s = x_0) &= P(X_t - X_s \leq x - x_0) \\
&= \int_{-\infty}^{x-x_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}\sigma} \exp\left\{ -\frac{[y-\mu(t-s)]^2}{2(t-s)\sigma^2} \right\} \mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{[x-x_0-\mu(t-s)]/\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left\{ -\frac{y^2}{2(t-s)} \right\} \mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

Ahora bien, sea $\{X_t\}_{t \geq 0}$ un movimiento Browniano con deriva μ y coeficiente de difusión σ^2. Se define como movimiento Browniano geométrico al proceso estocástico $Y_t : t \geq 0$ expresado de la siguiente manera:

$$
Y_t = e^{X_t}.
$$

De esta manera, si se utiliza la identidad $Y_t = Y_0 e^{X_t - X_0}$, así como la función generadora de momentos de una $\mathcal{N}(\mu t, \sigma^2 t)$, se tiene que la esperanza y varianza de un movimiento Browniano geométrico son como sigue:

$$
\mathrm{E}[Y_t | Y_0 = y] = y\mathrm{E}[e^{X_t - X_0}] = y \exp\left\{ \frac{t(\mu + \sigma^2)}{2} \right\},
$$

de donde

$$
\mathrm{E}[Y_t^2 | Y_0 = y] = y^2 \mathrm{E}[e^{2(X_t - X_0)}] = y^2 \exp\left\{ t(2\mu + 2\sigma^2) \right\},
$$

por lo cual

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}[Y_t | Y_0 = y] &= y^2 \exp\left\{ t(2\mu + 2\sigma^2) \right\} - \left[y \exp\left\{ \frac{t(\mu + \sigma^2)}{2} \right\} \right]^2 \\
&= y^2 \exp\{2t(\mu + \sigma^2/2)\}(\exp\{t\sigma^2\} - 1)
\end{aligned}
$$

Apéndice B

Cálculo de Itô

B.1. Lema de Itô

Suponga que una variable x sigue el proceso general de Itô, es decir,

$$\mathrm{d}x = a(x,t)\mathrm{d}t + b(x,t)\mathrm{d}z, \tag{B.1}$$

donde a y b son funciones del valor de la variable x y el tiempo t. Además este proceso, z, tiene la propiedad $\mathrm{d}z = \sqrt{\mathrm{d}t}$. Elevando al cuadrado la versión discreta de la ecuación (B.1), se tiene

$$(\Delta x)^2 = a^2(\Delta t)^2 + 2ab(\Delta t)^{3/2} + b^2\Delta t. \tag{B.2}$$

Si $G(x,t)$ se expresa en un desarrollo de Taylor, es decir

$$\Delta G = \frac{\partial G}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial G}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(\Delta x)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial t}(\Delta x)(\Delta t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}(\Delta t)^2 + \ldots$$

y se usa la ecuación (B.2) despreciando los términos $(\Delta t)^2$ y $(\Delta t)^{3/2}$, tomando el límite cuando $\Delta t \to 0$,entonces

$$\mathrm{d}G = \frac{\partial G}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial G}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2(\mathrm{d}t),$$

si se sustituye la ecuación (B.1) en la expresión anterior, se tiene

$$\mathrm{d}G = \left(\frac{\partial G}{\partial x}a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2\right)\mathrm{d}t + \frac{\partial G}{\partial x}b\mathrm{d}z.$$

B.2. Lema de Itô para el cociente y la multiplicación de dos movimientos geométricos Brownianos

En este apéndice se establecen, sin demostración,[1] un par de resultados sobre la diferencial estocástica del cociente y la multiplicación de dos movimientos geométricos Brownianos. Dadas las ecuaciones diferenciales estocásticas, homogéneas y lineales,

$$\mathrm{d}X_t = X_t\left(\mu_X \mathrm{d}t + \sigma_X \mathrm{d}W_X\right),$$

y

$$\mathrm{d}Y_t = Y_t\left(\mu_Y \mathrm{d}t + \sigma_Y \mathrm{d}W_Y\right),$$

donde $\mathrm{d}W_X$, $\mathrm{d}W_Y$ son procesos de Wiener con $\mathrm{Cov}(\mathrm{d}W_X, \mathrm{d}W_Y) = \rho_{XY}\mathrm{d}t$, entonces las diferenciales estocásticas del cociente X_t/Y_t y del producto X_tY_t satisfacen, respectivamente,

$$\mathrm{d}\left(\frac{X_t}{Y_t}\right) = \frac{X_t}{Y_t}\left[\left(\mu_X - \mu_Y + \sigma_Y^2 - \sigma_{XY}\right)\mathrm{d}t + \sigma_X \mathrm{d}W_X - \sigma_Y \mathrm{d}W_Y\right],$$

y

$$\mathrm{d}\left(X_tY_t\right) = X_tY_t\left[\left(\mu_X + \mu_Y + \sigma_{XY}\right)\mathrm{d}t + \sigma_X \mathrm{d}W_X + \sigma_Y \mathrm{d}W_Y\right].$$

[1] Véanse Gikhman and Skorokhod, *Introduction to Random Processes*, 1972.

Apéndice C

Subrutinas de MATLAB©

C.1. Función de Utilidad Logarítmica

Trayectoria Óptima del Consumo como Función de la Tasa Subjetiva de Descuento y del Producto Marginal de Capital.

```
%Ejemplo 3.1.1

%Grafica de c

function y=copej1(k,t)

r=0:0.017:1; a=0:0.017:1;

[R,A]=meshgrid(r,a);

%100 ES K0, R ES EL PARAMETRO RHO Y A ES EL MISMO

C=100*R.*exp(A-R);

surf(C)

shading interp

colormap(jet)
```

Trayectoria Óptima del Capital como Función de la Tasa Subjetiva de Descuento y del Producto Marginal de Capital.

```
%Ejemplo 3.1.1

%Grafica de k

function y=copej2(k,t)

r=0:0.017:1; a=0:0.017:1;

[R,A]=meshgrid(r,a);

%100 ES KO, R ES EL PARAMETRO RHO Y A ES EL MISMO

K=100*exp(A-R);

surf(K)

shading interp

colormap(jet)
```

C.2. Función de Utilidad Exponencial I

Trayectoria Óptima del Consumo como Función de la Tasa Subjetiva de Descuento y del Producto Marginal de Capital.

```
%Ejemplo 3.1.2

%Grafica de c

function y=copej3(g)

r=0:0.017:1; a=0:0.017:1;

[R,A]=meshgrid(r,a);

%100 ES KO, R ES EL PARÁMETRO RHO Y A ES EL MISMO, 0.4 ES GAMMA

C=100*((0.3*A-R)/(0.3-1)).*exp((R-A)/(0.3-1));
```

```
surf(C)

shading interp

colormap(jet)
```

Trayectoria Óptima del Capital como Función de la Tasa Subjetiva de Descuento y del Producto Marginal de Capital.

```
%Ejemplo 3.1.2

%Grafica de k

function y=copej4(g)

r=0:0.017:1; a=0:0.017:1;

[R,A]=meshgrid(r,a);

%100 ES KO, R ES EL PARAMETRO RHO Y A ES EL MISMO 0.4 ES GAMMA

K=100*exp((R-A)/(0.4-1));

surf(K)

shading interp

colormap(jet)
```

C.3. Función de Utilidad Exponencial II

Trayectoria Óptima del Consumo como Función de la Tasa Subjetiva de Descuento y del Producto Marginal de Capital.

```
%Ejemplo 3.1.3

%Grafica de c

function y=copej5(g)
```

```
r=0:0.017:1; a=0:0.017:1;
[R,A]=meshgrid(r,a);
%100 ES KO, R ES EL PARAMETRO RHO Y A ES EL MISMO 0.5 ES THETA
C=100*((R-A*(1-0.5))/0.5).*exp((A-R)/0.5);
surf(C)
shading interp
colormap(jet)
```

Trayectoria Óptima del Capital como Función de la Tasa Subjetiva de Descuento y del Producto Marginal de Capital.

```
%Ejemplo 3.1.3
   %Grafica de k
   function y=copej6(g)
   r=0:0.017:1; a=0:0.017:1;
   [R,A]=meshgrid(r,a);
   %100 ES KO, R ES EL PARAMETRO RHO Y A ES EL MISMO 0.5 ES THETA
   K=100*exp((A-R)/0.5);
   surf(K)
   shading interp
   colormap(jet)
```

C.4. Función de Utilidad Exponencial Negativa

Trayectoria Óptima del Consumo como Función de la Tasa Subjetiva de Descuento y del Producto Marginal de Capital.

```
%Ejemplo 3.1.4

%Grafica de c

function y=copej7(g)

r=0:0.017:1; a=0:0.017:1;

[R,A]=meshgrid(r,a);

%100 ES KO, R ES EL PARAMETRO RHO Y A ES EL MISMO 0.5 ES THETA

C=(A*0.1*100+((R-A)./A)-(R-A))/0.1;

surf(C)

shading interp

colormap(jet)
```

Trayectoria Óptima del Capital como Función de la Tasa Subjetiva de Descuento y del Producto Marginal de Capital.

```
%Ejemplo 3.1.4

%Grafica de k

function y=copej8(g)

r=0:0.017:1; a=0:0.017:1;

[R,A]=meshgrid(r,a);

%100 ES KO, R ES EL PARAMETRO RHO Y A ES EL MISMO 0.5 ES THETA

K=100+((A-R)./(A*0.5));
```

```
surf(K)

shading interp

colormap(jet)
```

Bibliografía

[1] Åström K., *Introduction to Stochastic Control Theory*, Mathematics in Science and Engineering, 70, Academic Press, 1970

[2] Bartle R., *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, Wiley Classics Library, 1995

[3] Bellman R., *Dynamic Programming*, Princeton University Press, 1957

[4] Bellman R., *Adaptive Control Processes: A Guided Tour*, Princeton University Press, 1961

[5] Bensoussan A., *Stochastic Control by Funcional Analysis Methods*, Studies in Mathematics and its Applications, **11** North–Holland, 1982

[6] Bertsekas D. P., *Dynamic Programming: Deterministic and Stochastic Models*, Prentice Hall, 1987

[7] Bliss G., *Lectures on the Calculus of Variations*, Selection from material presented in courses given at the University of Chicago, Phoenix Science Series, University of Chicago Press, 1946

[8] Bliss C. J., Hadley G., Kemp M. C., *Variational Methods in Economics*, Advanced Textbooks in Economics, Volumen I, North–Holand Publishing Company, 1971

[9] Bodie Z., Merton R., *Finanzas*, Prentice Hall, 2003

[10] Bolza O., *Lectures on the Calculus of Variations*, Dover Publications INC., 1961

[11] Brzeźniak Z., Zastawniak T., *Basic Stochastic Processes*, Ed. Springer, 1999

[12] Cerdá E., *Optimización Dinámica*, Ed. Prentice Hall, 2001

[13] Chiang A., *Dynamic Optimization*, McGraw–Hill, 1992

[14] Chiang A., *Métodos Fundamentales de Economía Matemática*, 3a Edición, McGraw–Hill, 1987

[15] Cooper León y Cooper Mary W., *Introduction to Dynamic Programming*, Pergamon Press, 1981

[16] Cruz Aranda F., *Tesis de maestría: Decisiones Óptimas de Consumo e Inversión en Tiempo Continuo*, DEPFI, UNAM, 1993

[17] Dominguez S., *Teoría Económica*, Ed. Porrua, 4^a edición, 1972

[18] Dorfman R., An Economic Interpretation of Optimal Control Theory, American Economic Review, 59, pp. 817-831, 1969

[19] Ferguson C. E., *Teoría microeconómica*, Fondo de Cultura Económica, 1975

[20] Ferguson J. M., *Historia de la Economía*, Fondo de Cultura Económica, 2^a edición, 2001

[21] Fleming W., Rishel R., *Deterministic and Stochastic Optimal Control*, Springer–Verlag, 1975

[22] Gelfand I. M., Fomin S. V., *Calculus of Variations*, Prentice–Hall, 1963

[23] Hayhurst G., *Mathematical Programming Applications*, Ed. MacMillan, 1987

[24] Hillier, Liberman, *Investigación de Operaciones*, Mc Graw Hill, 7^a Edición, 2002

[25] Hull J., *Options, Futures and other Derivative Securities*, Ed. Prentice-Hall, 2^a Edición, 1989

[26] Ize J., *Cálculo de variaciones*, Serie FENOMEC, IIMAS, UNAM, 2002

[27] Jorion P., *Valor en Riesgo*, Limusa Noriega Editores, MexDer, 2003

[28] Karlin S., *A first course in Stochastic Processes*, Academic Press, 1968

[29] Korn R., Korn E., *Option Pricing and Portfolio Optimization: Modern methods of Financial Mathematics*, Graduate Studies in Mathematics Vol. 31, American Mathematical Society, 1999

[30] Kreyzig E., *Introductory Functional Analysis with Applications*, Wiley Classics Library, 1989

[31] Kushner H., *Introduction to Stochastic Control*, Holt, Rinehart and Winston Inc., 1971

[32] Markowitz H. M., *Mean–Variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets*, Basil Blackwell, 1989

[33] Markowitz H. M., *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*, Second Edition, Blackwell Publishers, 1991

[34] Øksendal B., *Stochastic Differential Equations: An Introduction with applications*, 5th Edition, Springer-Verlag, 1998

[35] Paul W., Baschnagel J., *Stochastic Processes: From Physics to Finance*, Ed. Springer, 1999

[36] Ross S., *Introduction to Stochastic Programming*, Academic Press, 1983

[37] Samuelson P. A., *Curso de Economía Moderna*, Ed. Aguilar, 14^a edición, 1966

[38] Sniedovich M., *Dynamic Programming*, Ed. Marcel Dekker, 1992

[39] Spivak M., *Calculus*, Ed. Reverté, 1996

[40] Stampfli J., Goodman V., *Matemáticas para las Finanzas*, Ed. Thomson, 2002

[41] Swan G. W., *Applications of Optimal Control Theory in Biomedicine*, Ed. Marcel Dekker, 1984

[42] Taha H., *Investigación de Operaciones: Una Introducción*, Ed. Pearson, 6^a Edición, 1998

[43] Varian H., *Microeconomía Intermedia: Un Enfoque Actual*, Ed. Antoni Bosch, 4^a Edición, 1998

[44] Venegas-Martinez F., Crecimiento Endógeno, Dinero, Impuestos y Deuda Externa, Investigación Económica, Fac. de Economía, UNAM, Vol. 59, No. 229, pp.15–36, 1999

[45] Venegas-Martinez F., On consumption, Investment and Risk, Economía Mexicana, Nueva Época, División de Economía, CIDE, 9, No. 2, pp.227–244, 2000

[46] Venegas-Martinez F., Utilidad, aprendizaje y Estabilización, Gaceta de Economía, ITAM, Año 5, No. 10, pp.153–169, 2000

[47] Venegas-Martinez F., Temporary Stabilization: A Stochastic Analysis, Journal of Economic Dynamics and Control, Vol. 25, No. 9, September, pp.1429–1449, 2001

[48] Weber R., *Optimization and Control*,

http://www.statslab.com.ac.uk/ rrwl/oc/index.html, 2002

[49] Wilmott P., Howison S., Dewynne J., *The Mathematics of Financial Derivatives: A Student Introduction*, Cambridge University Press, 1996