UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"CUANTIZACION POR DEFORMACION DE LA TEORIA LINEARIZADA DE EINSTEIN"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

F I S I C O

P R E S E N T A :

JULIO ANTONIO GONZALEZ TAFOYA

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

DIRECTOR DE TESIS: DR. HERNANDO QUEVEDO CUBILLOS

2004

VNIVERSIDAD NACIONAL AVTONOMA DE MEXICO

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.
NOMBRE: Julio Antonio González Tafoya
FECHA: 29 Sep 2004
FIRMA:

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"Cuantización por deformación de la teoría linearizada de Einstein"

realizado por González Tafoya Julio Antonio

con número de cuenta 9653355-6, quien cubrió los créditos de la carrera de: Física.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
Propietario Dr. Hernando Quevedo Cubillos

Propietario Dr. Axel de la Macorra Pettersson Moriel

Propietario Dra. Nora Eva Bretón Báez

Suplente Dr. Alejandro Corichi Rodríguez Gil

Suplente Dr. William Henry Lee Alardín

Consejo Departamental de Física.

M. EN C. ALICIA ZARZOSA PEREZ
Coordinadora de Licenciatura

a SEMOFA

Cuantización por deformación de la teoría linearizada de Einstein

Julio Antonio González Tafoya

Índice general

Capítulo 1

Introducción

El objetivo principal de este trabajo consiste en responder la pregunta sobre si es posible aplicar el formalismo de la cuantización por deformación a la teoría de la gravedad.

En [1] se intenta esta cuantización para toda la gravedad, quedando el significado físico muy obscuro. En esta tesis, tratamos de resolver el problema de la cuantización por deformación de la gravedad linearizada, pues, al tratarse de una teoría más sencilla, creemos, dejará más claro el resultado.

Aunque cuantizar la teoría linearizada de la gravedad es, en principio, una tarea más sencilla que cuantizar la teoría completa, el camino que habremos de seguir no es transparente, de manera que tendremos que "explorar" las distintas posibilidades. A lo largo del camino nos encontramos con algunos cuestionamientos particulares sobre el cómo. Y fue en el camino mismo que se encontró la forma de responder a dichos cuestionamientos. A continuación, expongo de manera breve el contenido de cada uno de los capítulos que componen este trabajo.

En el capítulo dos, derivamos lo que se conoce como las ecuación linearizada de Einstein en la forma como se hace regularmente en los libros de texto. Basándonos en esto, intercambiamos los pasos que hay que seguir para encontrar estas ecuaciones y encontramos otros dos caminos para hacerlo: uno que nos lleva al mismo grupo de ecuaciones; otro que nos lleva a unas ecuaciones distintas, por lo que podemos concluir que, a la hora de encontrar las ecuaciones, es sumamente importante el orden en el que se hace.

En el capítulo tres, observamos el paralelismo que existe entre la ecuación linearizada de Einstein y la de la ecuacion de la forma covariante de las Ecuaciones de Maxwell. Damos una forma específica a la métrica de la teoría linearizada y encontramos una posible interpretación física de esta métrica.

Además, con miras a cuantizar y, al ver que la cuantización se hace a nivel del Hamiltoniano, topamos con el enorme problema de definir la energía en el campo gravitatorio, aun para la teoría linearizada. Tratamos de encontrar dicha energía de dos formas: uno, como se hace en teoría de campos (en la sección ultima del capítulo dos) y dos: utilizando el paralelismo de la teoría linearizada con la electrodinámica (en la última sección del tercer capítulo).

El capítulo cuarto trata de la cuantizacón del campo electromagnético. Recordemos que la cuantización de la gravedad linearizada ya se ha hecho utilizando las similitudes entre el campo electromanético y el gravitatorio débil, siendo así como se han encontrado algunos resultados anteriores. Esta es la razón básica para la inclusión de este material como parte de este trabajo. El lector cuidadoso caerá en cuenta que algunas cosas en la notación son diferentes a otras partes de la tesis, esto se hace así por considerar que, de esta manera, se enriquece el panorama y exhibe la gran cantidad de formas que hay para abordar el problema.

El quinto capítulo habla básicamente de lo que es la cuantizacón por deformación. Dado que el tema es sumamente especializado, su exposición se hace siguiendo [10], en donde se expone el tema de una manera introductoria. En este capítulo se habla, también, de lo que se conoce como la cuantización del campo escalar, esto se hace con el fin de comparar este método con el de la cuantización por deformación. En la sección 5.4 se muestra, con un ejemplo familiar para todos, el del oscilador armónico, la herramienta tan fuerte que la cuantización por deformación representa. En la sección 5.5 se muestra el resultado final al que llegamos con este trabajo.

Hay, para finalizar, como apéndice un artículo que ha sido enviado a la revista *General Relativity and Gravitation* para su publicación en un suplemento especial en honor al Dr. Alberto García.

Capítulo 2

Teoría de Einstein

La teoría de la relatividad general de Einstein es la teoría clásica del campo gravitacional. En esta tesis adoptaremos el punto de vista moderno según el cual una teoría clásica de campos se debe poder derivar a partir de una acción S que satisface el principio de mínima acción $\delta S = 0$, donde δ representa la derivada variacional. Puesto que las ecuaciones de campo resultantes de $\delta S = 0$ deben ser como máximo de segundo orden, la acción se debe poder escribir como $S = \int \mathcal{L} d\Omega$, donde $d\Omega$ es el elemento de volumen en el espacio de 4-dimensiones y $\mathcal{L}$ es la densidad lagrangiana que depende del campo a describir y sus primeras derivadas. En este capítulo analizaremos este procedimiento para el campo gravitacional y estudiaremos varias alternativas en el caso de un campo gravitacional débil.

2.1. Ecuaciones de Einstein

Para encontrar las ecuaciones del campo gravitatorio es necesario encontrar la acción del campo. Sabemos que las ecuaciones que buscamos serán encontradas a partir de la variación de la acción que corresponde al campo y a la materia. En el caso de la gravitación, el campo se describe mediante el tensor métrico $g_{\alpha\beta}$, $(\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3)$ Además, sabemos que la acción gravitacional debe ser expresada como:

$$S_g = \int G\sqrt{-g}d\Omega \tag{2.1}$$

donde la G es una función solamente de la métrica $g_{\alpha\beta}$ y sus derivadas primeras, que para ser invariante con respecto a transformaciones de coordenadas debe ser escalar. Se puede demostrar que mediante la métrica $g_{\alpha\beta}$ y sus derivadas sólo se puede construir un escalar R, el escalar de curvatura [2]. Calculemos la variación de dicha acción

$$\delta S_g = \delta \int R\sqrt{-g}d\Omega = \delta \int g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}\sqrt{-g}d\Omega \tag{2.2}$$

$$= \int (R_{\alpha\beta}\sqrt{-g}\delta^{\alpha\beta} + R_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}\delta\sqrt{-g} + g^{\alpha\beta}\sqrt{-g}\delta R_{\alpha\beta})d\Omega \tag{2.3}$$

como sabemos que

$$g_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha}_{\alpha} = 4$$

entonces

$$g^{\alpha\beta}dg_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta}dg^{\alpha\beta}$$

por lo que

$$dg = gg^{\alpha\beta}dg_{\alpha\beta} = -gg_{\alpha\beta}dg^{\alpha\beta}$$

De lo anterior se deduce que:

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\delta g = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} \tag{2.4}$$

Sustituyendo este resultado en la expresión (2.3) tenemos:

$$\delta \int R\sqrt{-g}d\Omega = \int (R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R)\delta g^{\alpha\beta}\sqrt{-g}d\Omega + \int g^{\alpha\beta}\delta R_{\alpha\beta}\sqrt{-g}d\Omega \tag{2.5}$$

Acá tenemos un problema que consiste en calcular $\delta R_{\alpha\beta}$, para hacerlo recordemos que el tensor de Ricci está ha definido en términos de los símbolos de Cristoffel como:

$$R_{\alpha\beta} = \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta,\nu} - \Gamma^{\nu}_{\alpha\nu,\beta} + \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}\Gamma^{\mu}_{\nu\mu} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\nu}\Gamma^{\nu}_{\beta\mu} \tag{2.6}$$

Aunque las cantidades $\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}$ no son un tensor, se puede probar que las variaciones de dichas cantidades sí lo son [9]. Esto nos permitiría calcular $\delta R_{\alpha\beta}$. Sin embargo, utilizaremos un método más sencillo que consiste en introducir un sistema de coordenadas localmente geodésico donde las primeras derivadas de $g_{\alpha\beta}$ son cero y, consecuentemente, también los símbolos de Cristoffel ${\Gamma^{\alpha}}_{\beta\nu}$. En este caso de (2.6) tenemos:

$$g^{\alpha\beta}\delta R_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta}(\delta\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta})_{,\nu} - g^{\alpha\beta}(\delta\Gamma^{\nu}_{\alpha\nu})_{,\beta} = g^{\alpha\beta}(\delta\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta})_{,\nu} - g^{\alpha\nu}(\delta\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta})_{,\nu} = (\omega^{\nu})_{;\nu} \tag{2.7}$$

donde:

$$\omega^{\nu} = g^{\alpha\beta}\delta\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} - g^{\alpha\nu}\delta\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} \tag{2.8}$$

Aquí hemos usado que la derivada variacional y la parcial conmutan. Como ω^ν es un vector, escribimos la ecuación así obtenida en un sistema arbritario de coordenadas, como:

$$g^{\alpha\beta}\delta R_{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}\omega^\nu)_{,\nu} \tag{2.9}$$

aquí hemos sustituido

$$(\omega^\nu)_{,\nu}$$

por

$$(\omega^\nu)_{;\nu}$$

y utilizado que

$$A^\alpha_{;\alpha} = \frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}A^\alpha)_{,\alpha}$$

que es la divergencia generalizada de un vector en coordenadas curvilíneas.

Todo esto nos permite escribir la segunda integral de (2.3) como:

$$\int g^{\alpha\beta}\delta R_{\alpha\beta}\sqrt{-g}d\Omega = \int (\sqrt{-g}\omega^\nu)_{,\nu}d\Omega \tag{2.10}$$

que con el teorema de Gauss se puede transformar en la integral de ω^ν extendida a una hipersuperficie que rodee al volumen de cuatro dimensiones. Dado que las variaciones del campo son nulas en los límites de integración, este término es igual a cero. Así, la variación δS_g es igual a:

$$\delta S_g = \int (R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R)\delta g^{\alpha\beta}\sqrt{-g}d\Omega \tag{2.11}$$

mediante la variación de la acción correspondiente:

$$S_m = \alpha_m \int \mathcal{L}_m d\Omega \tag{2.12}$$

Se define el tensor energía-momento para una densidad Lagrangiana de materia como [4]

$$T_{\alpha\beta} = -\frac{\alpha_m}{8\pi}\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_m}{\delta g^{\alpha\beta}} \tag{2.13}$$

El principio de mínima acción $\delta S_m + \delta S_g = 0$ nos conduce, por lo tanto a la igualdad:

$$\int (R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R - 8\pi T_{\alpha\beta})\delta g^{\alpha\beta}\sqrt{-g}d\Omega = 0 \tag{2.14}$$

como la variación es arbitraria entonces el integrando tiene que ser cero de donde:

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R = 8\pi T_{\alpha\beta} \tag{2.15}$$

que son conocidas como las ecuaciones de Einstein para el campo gravitatorio.

Estas ecuaciones representan un sistema de 10 ecuaciones diferenciales de segundo grado en derivadas parciales, altamente acopladas, y son las ecuaciones que describen el comportamiento del campo gravitatorio.

Recordemos que al comienzo de esta sección habíamos mencionado que la densidad Lagrangiana para el campo gravitacional, $\mathcal{L}_g = \sqrt{-g}G$, debería depender solamente de las primeras derivadas de $g_{\alpha\beta}$. Para obtener las ecuaciones de Einstein tomamos $G = R$ y donde R contiene también derivadas segundas de $g_{\alpha\beta}$. Durante el proceso de variación se eliminarán todas las segundas derivadas de $g_{\alpha\beta}$ en R, de forma tal que en las ecuaciones de Einstein no aparecen terceras derivadas. Existe una forma alternativa de derivar las ecuaciones de Einstein. En esta forma las segundas derivadas de $g_{\alpha\beta}$ en R se eliminan antes de efectuar la variación y en la densidad Lagrangiana $\mathcal{L}_g = \sqrt{-g}G$ realmente no aparecen derivadas de segundo grado. Veamos esto a detalle. Utilizando la definición del escalar de curvatura podemos escribir:

$$\sqrt{-g}R = \sqrt{-g}g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} = \sqrt{-g}g^{\alpha\beta}((\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta})_{,\mu} - (\Gamma^{\mu}_{\alpha\mu})_{,\beta} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\Gamma^{\nu}_{\mu\nu} - \Gamma^{m}_{\alpha\mu}\Gamma^{\mu}_{\beta\nu}) \tag{2.16}$$

en el primer miembro del segundo término tenemos:

$$\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}(\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta})_{,\mu} = (\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta})_{,\mu} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}(\sqrt{-g}g^{\alpha\beta})_{,\mu} \tag{2.17}$$

y en el segundo:

$$\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}(\Gamma^{\mu}_{\alpha\mu})_{,\beta} = (\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\Gamma^{\mu}_{\alpha\mu})_{,\beta} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\mu}(\sqrt{-g}g^{\alpha\beta})_{,\beta} \tag{2.18}$$

si nos deshacemos de los términos que nos dan lugar a una divergencia, nos queda:

$$\sqrt{-g}G = \Gamma^{\nu}_{\alpha\nu}(\sqrt{-g}g^{\alpha\beta})_{,\beta} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}(\sqrt{-g}g^{\alpha\beta})_{,\mu} - (\Gamma^{\nu}_{\alpha\mu}\Gamma^{\mu}_{\beta\nu} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\Gamma^{\nu}_{\mu\nu})g^{\alpha\beta}\sqrt{-g} \tag{2.19}$$

por otra parte sabemos que:

$$dg = gg^{\alpha\beta}dg_{\alpha\beta} = -gg_{\alpha\beta}dg^{\alpha\beta} \tag{2.20}$$

y que:

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha} = \frac{1}{2}g^{\alpha\nu}((g_{\nu\beta})_{,\alpha} + (g_{\nu\alpha})_{,\beta} - (g_{\beta\alpha})_{,\nu}) \tag{2.21}$$

que a su vez podemos escribir como:

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha} = \frac{1}{2}g^{\alpha\nu}(g_{\alpha\nu})_{,\beta}, \tag{2.22}$$

que deacuerdo con (2.20)

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha} = \frac{1}{2g}(g)_{,\beta} = \frac{\partial ln\sqrt{-g}}{\partial x^{\beta}} \tag{2.23}$$

la expresión para la cantidad $g^{\beta\mu}\Gamma^{\alpha}_{\beta\mu}$ es:

$$g^{\beta\mu}\Gamma^{\alpha}_{\beta\mu} = \frac{1}{2}g^{\beta\mu}g^{\alpha\nu}((g_{\nu\beta})_{,\mu} + (g_{\mu\nu})_{,\beta} - (g_{\beta\mu})_{,\nu}) = g^{\beta\mu}g^{\alpha\nu}((g_{\nu\beta})_{,\mu} - \frac{1}{2}(g_{\beta\mu})_{,\nu}) \tag{2.24}$$

si utilizamos otra vez (2.20) obtenemos:

$$g^{\beta\mu}\Gamma^{\alpha}_{\beta\mu} = -\frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}g^{\alpha\beta})_{,\beta} \tag{2.25}$$

y como sabemos que:

$$g_{\alpha\mu}(g^{\mu\beta})_{,\nu} = -g^{\mu\beta}(g_{\alpha\mu})_{,\nu} \tag{2.26}$$

por lo que también podemos expresar las derivadas de la métrica en función de los simbolos de Cristoffel. De $(g^{\alpha\beta})_{;\mu} = 0$ se sigue:

$$(g^{\alpha\beta})_{,\mu} = -\Gamma^{\alpha}_{\nu\mu}g^{\nu\beta} - \Gamma^{\beta}_{\nu\mu}g^{\alpha\nu}. \tag{2.27}$$

Desde (2.20) hasta (2.27) nos ayudan a demostrar que los dos primeros términos del segundo miembro son iguales a $\sqrt{-g}$ multiplicada por:

$$\begin{aligned} 2\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}g^{\nu\beta} - \Gamma^{\nu}_{\alpha\nu}\Gamma^{\alpha}_{\beta\mu}g^{\beta\mu} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\Gamma^{\nu}_{\mu\nu}g^{\alpha\beta} &= g^{\alpha\beta}(2\Gamma^{\mu}_{\nu\beta}\Gamma^{\nu}_{\mu\alpha} - \Gamma^{\nu}_{\mu\nu}\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\Gamma^{\nu}_{\mu\nu}) \\ &= 2g^{\alpha\beta}(\Gamma^{\nu}_{\alpha\mu}\Gamma^{\mu}_{\beta\nu} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\Gamma^{\nu}_{\mu\nu}) \end{aligned} \tag{2.28}$$

de donde, al fin, obtenemos:

$$G = g^{\alpha\beta}(\Gamma^{\nu}_{\alpha\mu}\Gamma^{\mu}_{\beta\nu} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\Gamma^{\nu}_{\mu\nu}) \tag{2.29}$$

que le llamaremos la densidad lagrangiana reducida del campo, y que utilizaremos más adelante.

2.2. Ecuación linearizada de Einstein

El campo débil es aquel en que el espacio-tiempo es "aproximadamente" plano. Esto es, existe un sistema de coordenadas en el que la métrica es del tipo:

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} \tag{2.30}$$

donde, $\eta_{\alpha\beta} = diag(-1, +1, +1, +1)$ es la métrica de Minkowski y:

$$|h_{\alpha\beta}| \ll 1, \tag{2.31}$$

Tales coordenadas son llamadas coordenadas "aproximadamente" de Lorentz. Es necesario mencionar que la condición de existencia de tales coordenadas no implica unicidad. Es decir, si existe un sistema coordenado en que las ecuaciones anteriores se cumplan, entonces existen muchos de tales sistemas. Para ver esto en concreto estudiaremos ahora dos transformaciones que nos llevan de uno de estos sistemas en otro: la transformación de fondo de Lorentz y la transformación de Norma.

La matriz de una transformación de Lorentz en Relatividad Especial es la transformación de fondo de Lorentz:

$$(\Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\beta}) = \begin{pmatrix} \gamma & -v\gamma & 0 & 0 \\ -v\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ donde } \gamma = \sqrt{(1-v^2)} \tag{2.32}$$

Lo cual nos permite pasar de un sistema inercial I, con coordenadas x^{α}, a otro sistema inercial $\bar{I}$, con coordenadas $x^{\bar{\alpha}}$, que se mueve con velocidad v con respecto a I. Para un campo gravitacional débil llamamos una "transformación de fondo de Lorentz" a la que tenga la forma:

$$x^{\bar{\alpha}} = \Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\beta} x^{\beta} \tag{2.33}$$

en la que $\Lambda^{\bar{\alpha}}{}_{\beta}$ es igual a una transformación de Lorentz en Relatividad Especial. No estamos en Relatividad Especial, de manera que ésta es solo una clase de transformación de todas las posibles, pero tiene una peculiaridad que se exhibe al transformar por el tensor métrico:

$$g_{\alpha\bar{\beta}} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\bar{\beta}} g_{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\bar{\beta}} \eta_{\mu\nu} + \Lambda^{\mu}{}_{\bar{\alpha}}\Lambda^{\nu}{}_{\bar{\beta}} h_{\mu\nu} \tag{2.34}$$

la transformación de Lorentz es tal que:

$$\Lambda^{\mu}{}_{\bar{\alpha}}\Lambda^{\nu}{}_{\beta} \eta_{\mu\nu} = \eta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}, \tag{2.35}$$

por lo que obtenemos:

$$g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = \eta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} + h_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} \tag{2.36}$$

con:

$$h_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} \equiv \Lambda^{\mu}{}_{\bar{\alpha}}\Lambda^{\nu}{}_{\bar{\beta}}h_{\mu\nu}. \tag{2.37}$$

Vemos que. bajo una transformación de fondo de Lorentz, $h_{\mu\nu}$ se transforma como *como si fuera* un tensor en Relatividad Especial. Lo cual nos ayuda a pensar al espacio-tiempo ligeramente curvo como si fuese plano con un "tensor" $h_{\mu\nu}$ definido en él. Por lo que todos los campos físicos como $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ estarán definidos en términos de $h_{\mu\nu}$, y se verán como campos en un espacio-tiempo de fondo plano. Es importante tener en mente que el espacio está curvo en realidad, y que tal ficción surge de considerar solo un tipo especial de transformación de coordenadas. Encontraremos que esta ficción nos es útil de cualquier forma en cálculos posteriores.

2.2.1. Transformaciones de norma en la teoría linearizada

Hay otro tipo de transformación que nos será útil. Un pequeño cambio en coordenadas de la forma:

$$x^{\alpha'} = x^{\alpha} + \xi^{\alpha}(x^{\beta}) \tag{2.38}$$

generado por un vector ξ^{α}, cuyas componentes son funciones de la posición. Si pedimos que ξ^{α} sea pequeño, en el sentido de que $|\xi^{\alpha}{}_{,\beta}| \ll 1$, entonces tenemos que la matriz de transformación satisface:

$$\Lambda^{\alpha'}{}_{\beta} = (x^{\alpha'})_{,\beta} = \delta^{\alpha}{}_{\beta} + \xi^{\alpha}{}_{,\beta}, \tag{2.39}$$

$$\Lambda^{\alpha}{}_{\beta'} = \delta^{\alpha}{}_{\beta} - \xi^{\alpha}{}_{,\beta} + O(|\xi^{\alpha}{}_{,\beta}|^2). \tag{2.40}$$

Se puede verificar que a primer orden en cantidades pequeñas:

$$g_{\alpha'\beta'} = \Lambda^{\lambda}_{\alpha'}\Lambda^{\tau}_{\beta'}g_{\lambda\tau} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha}, \tag{2.41}$$

donde se define:

$$\xi_{\alpha} = \eta_{\alpha\beta}\xi^{\beta}. \tag{2.42}$$

Esto significa que el efecto del cambio de coordenadas es redefinir $h_{\alpha\beta}$:

$$h_{\alpha\beta} \rightarrow h_{\alpha\beta} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha} \tag{2.43}$$

Si todos los $|\xi^{\alpha}{}_{,\beta}|$ son pequeños. entonces la nueva $h_{\alpha\beta}$ es pequeña también, por lo que todavía estamos en un sistema de coordenadas aceptable, éste cambio es llamado una *transformación de norma*. término que es usado por la fuerte analogía entre la ecuación anterior y las transformaciones de norma del electromagnetismo.

En función de nuestra métrica linearizada, los simbolos de Christoffel y el tensor de Riemann, quedan expresados de la siguiente forma, a primer orden en $h_{\mu\nu}$:

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\mu} = \frac{1}{2}\eta^{\alpha\nu}(h_{\nu\beta,\mu} + h_{\nu\mu,\beta} - h_{\beta\mu,\nu}) \tag{2.44}$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2}(h_{\alpha\nu,\beta\mu} + h_{\beta\mu,\alpha\nu} - h_{\alpha\mu,\beta\nu} - h_{\beta\nu,\alpha\mu}) \tag{2.45}$$

La expresión para el tensor de Riemann es independiente de la norma que se use. Esto se puede demostrar aplicando la transformación de norma (2.43) en (2.45) y utilizando el hecho de que las derivadas parciales de ξ_α conmutan. De la expresión para el tensor de Riemann podemos derivar los tensores de Ricci y de Einstein, teniendo en cuenta que los índices suben y bajan mediante la métrica de Minkowski $\eta_{\alpha\beta}$. El resultado del cálculo se puede expresar de una forma más sencilla al introducir la traza:

$$h \equiv h^{\alpha}{}_{\alpha} \tag{2.46}$$

y el tensor:

$$\bar{h}^{\alpha\beta} = h^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}h. \tag{2.47}$$

Vemos que a primer orden en $h_{\alpha\beta}$ se cumple que:

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R = -\frac{1}{2}[\bar{h}_{\alpha\beta,\mu}{}^{,\mu} + \eta_{\alpha\beta}\bar{h}_{\mu\nu}{}^{,\mu\nu} - \bar{h}_{\alpha\mu,\beta}{}^{,\mu} - \bar{h}_{\beta\mu,\alpha}{}^{,\mu}] \tag{2.48}$$

donde hemos definido que para cualquier función f:

$$f^{,\mu} \equiv \eta^{\mu\nu}f_{,\nu} \tag{2.49}$$

Está claro que la expresión (2.48) se simplifica si pedimos que se cumpla la norma de Lorentz:

$$\bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0 \tag{2.50}$$

Estas son cuatro ecuaciones, y como tenemos cuatro transformaciones de norma ξ^α esperamos encontrar una norma en que la ecuación anterior sea cierta. Para mostrar que lo anterior es correcto supongamos que tenemos alguna $\bar{h}^{(vieja)}_{\mu\nu}$ para la cual $\bar{h}^{(vieja)\mu\nu}{}_{,\nu} \neq 0$. Entonces bajo un cambio de norma (2.43), se puede mostrar que $\bar{h}_{\mu\nu}$ cambia a:

$$\bar{h}^{(nueva)}_{\mu\nu} = \bar{h}^{(vieja)}_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} + \eta_{\mu\nu}\xi^{\alpha}{}_{,\alpha} \tag{2.51}$$

entonces la divergencia es:

$$\bar{h}^{(nueva)\mu\nu}{}_{,\nu} = \bar{h}^{(vieja)\mu\nu}{}_{,\nu} - \xi^{\mu\nu}{}_{,\nu} \tag{2.52}$$

y si queremos una norma en que $\bar{h}^{(nueva)\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$ entonces ξ^{μ} se determina por la ecuación:

$$\xi^{\mu,\nu}{}_{,\nu} = \bar{h}^{(vieja)\mu\nu}{}_{,\nu} \tag{2.53}$$

ecuación que siempre tiene solución para cualquier función $\bar{h}^{(vieja)\mu\nu}$ suficientemente bien comportada; solución no única, pues cualquier vector η^{μ} que satisfaga la ecuación de onda homogénea, le puede ser sumado y el resultado aún satisfará la ecuación inicial, de forma tal que la norma de Lorentz representa en realidad toda una clase de normas.

En esta norma vemos que se cumple:

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R = -\frac{1}{2}\bar{h}_{\alpha\beta,\mu}{}^{,\mu} \tag{2.54}$$

entonces las ecuaciones de campo débil son:

$$\bar{h}_{\alpha\beta,\mu}{}^{,\mu} = -16\pi T_{\alpha\beta} \tag{2.55}$$

conocidas como las ecuaciones linearizadas de Einstein.

2.2.2. Linealización de la acción de Einstein-Hilbert

En la sección anterior derivamos las ecuaciones linearizadas de Einstein aplicando el procedimiento de linealización directamente sobre las ecuaciones de Einstein. Es interesante preguntarse si las ecuaciones linearizadas también se pueden obtener a partir de un principio variacional, aplicando la linealización a nivel de la acción de Einstein-Hilbert antes de efectuar la variación. Es decir, nos preguntamos si la variación y la linealización son procedimientos que conmutan.

Tomemos nuevamente $h_{\alpha\beta}$ como una perturbación de la métrica plana de Minkowski y veamos la forma linearizada de la acción de Einstein-Hilbert $S_g = \int \sqrt{-g}Rd\Omega$. Puesto que mediante la variación esperamos obtener ecuaciones a primer orden en $h_{\alpha\beta}$, resulta claro que el escalar de curvatura R debe ser calculado hasta segundo orden en $h_{\alpha\beta}$. Recordemos que de acuerdo a nuestras convenciones $R = g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}R_{\alpha\beta\mu\nu}$, con $g^{\mu\alpha} = \eta^{\mu\alpha} - h^{\mu\alpha}$. De la ecuación (2.45) obtenemos a segundo orden en $h_{\alpha\beta}$ que:

$$R = \frac{1}{2}(\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} - 2\eta^{\mu\alpha}h^{\nu\beta} + h^{\mu\alpha}h^{\nu\beta})(h_{\alpha\nu,\beta\mu} + h_{\beta\mu,\alpha\nu} - h_{\alpha\mu,\beta\nu} - h_{\beta\nu,\alpha\mu}) \tag{2.56}$$

$$R = \frac{1}{2}(\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} - 2\eta^{\mu\alpha}h^{\mu\beta})(h_{\alpha\nu,\beta\mu} + h_{\beta\mu,\alpha\nu} - h_{\alpha\mu,\beta\nu} - h_{\beta\nu,\alpha\mu}) + O(h^2) \qquad (2.57)$$

por lo que:

$$\delta \int R\sqrt{-g}d\Omega = \frac{1}{2}\delta \int (\eta^{\nu\beta} - 2h^{\nu\beta})R_{\beta\nu}\sqrt{-g}d\Omega \qquad (2.58)$$

$$= \frac{1}{2}\int \delta R_{\beta\nu}(\eta^{\nu\beta} - 2h^{\nu\beta})\sqrt{-g} + R_{\beta\nu}\delta[(\eta^{\nu\beta} - 2h^{\nu\beta})\sqrt{-g}]d\Omega \qquad (2.59)$$

De la misma forma como se vió en la sección 2.1 el primer término se anula en la frontera.

$$\delta \int R\sqrt{-g}d\Omega = \frac{1}{2}\int R_{\beta\nu}\delta(\eta^{\nu\beta} - 2h^{\nu\beta})\sqrt{-g}d\Omega + \frac{1}{2}\int R_{\beta\nu}\delta\sqrt{-g}(\eta^{\nu\beta} - 2h^{\nu\beta})d\Omega \qquad (2.60)$$

Ahora utilizamos la ecuación:

$$\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}g_{\mu\alpha}\delta g^{\mu\alpha} \qquad (2.61)$$

obtenemos que:

$$\delta \int \sqrt{-g}Rd\Omega = \frac{1}{2}\int \sqrt{-g}R_{\beta\nu}\delta(\eta^{\nu\beta} - 2h^{\nu\beta})d\Omega \qquad (2.62)$$

$$-\frac{1}{4}\int \sqrt{-g}R_{\beta\nu}(\eta^{\nu\beta} - 2h^{\nu\beta})(\eta_{\mu\alpha} + h_{\mu\alpha})(\eta^{\mu\alpha} - h^{\mu\alpha})d\Omega \qquad (2.63)$$

de ahí que:

$$\delta \int \sqrt{-g}Rd\Omega = \frac{1}{2}\int (-2R_{\beta\nu} + \frac{1}{2}R_{\mu\alpha}(\eta^{\mu\alpha} - 2h^{\mu\alpha})(\eta_{\nu\beta} + h_{\nu\beta}))\delta h^{\nu\beta}\sqrt{-g}d\Omega \qquad (2.64)$$

si definimos el tensor energía-impulso como en la ecuación (2.13) y observamos que la variación $\delta h^{\nu\beta}$ es arbitraria, obtenemos:

$$-R_{\beta\nu} + \frac{1}{4}R_{\mu\alpha}(\eta^{\mu\alpha} - 2h^{\mu\alpha})(\eta_{\nu\beta} + h_{\nu\beta}) = 8\pi T_{\beta\nu} \qquad (2.65)$$

de donde, a primer orden:

$$-R_{\beta\nu} + \frac{1}{4}\eta_{\nu\beta}R = 8\pi T_{\beta\nu} \qquad (2.66)$$

Finalmente si introducimos el tensor $\bar{h}^{\alpha\beta}$ definido anteriormente tenemos que la ecuación precedente se transforma en:

$$\frac{1}{2}\eta_{\beta\nu}\bar{h}_{\alpha\mu}{}^{,\mu\alpha} + \frac{1}{2}\eta_{\beta\nu}\bar{h}_{\alpha}{}^{\alpha}{}_{,\mu}{}^{\mu} - \bar{h}_{\alpha\mu,\beta}{}^{\alpha} - \bar{h}_{\beta\mu}{}^{\mu}{}_{,\nu} + \bar{h}_{\beta\nu,\alpha}{}^{\alpha} = -8\pi T_{\beta\nu} \tag{2.67}$$

que al aplicarle la norma de lorentz, nos da:

$$\frac{1}{4}\eta_{\beta\nu}\bar{h}_{\alpha}{}^{\alpha}{}_{,\mu}{}^{\mu} + \bar{h}_{\beta\nu,\alpha}{}^{\alpha} = -8\pi T_{\beta\nu} \tag{2.68}$$

Esta es una ecuación que difiere de la que se obtuvo anteriormente (2.55). La ecuación (2.68) ha sido obtenida cambiando el orden de la variación y de la linealización de la acción utilizado para obtener (2.55). Esto nos dice que, en este caso, el variar y el linealizar no son procedimientos que conmutan.

2.2.3. Linealización de la acción reducida de Einstein-Hilbert

En la sección 2.1 hemos visto que en el Lagrangiano de Einstein-Hilbert se pueden despreciar todos los términos que contienen segundas derivadas puesto que corresponden a términos de frontera. De esta manera se obtiene la acción que hemos llamado reducida. En esta sección queremos derivar las ecuaciones de campo correspondientes, pero aplicando primero la linealización a nivel de la acción reducida y luego el procedimiento de variación con respecto a la métrica.

En la ecuación (2.29), se ve que el Lagrangiano reducido de Einstein-Hilbert es:

$$G = g^{\alpha\beta}(\Gamma^{\nu}_{\alpha\mu}\Gamma^{\mu}_{\beta\nu} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\Gamma^{\nu}_{\mu\nu}) \tag{2.69}$$

Donde $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$ son los símbolos de Christoffel:

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\mu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\nu}(g_{\nu\beta,\mu} + g_{\nu\mu,\beta} - g_{\beta\mu,\nu}) \tag{2.70}$$

Por lo que:

$$\Gamma^{\nu}_{\alpha\mu} = \frac{1}{2}g^{\nu\sigma}(g_{\alpha\sigma,\mu} + g_{\sigma\mu,\alpha} - g_{\alpha\mu,\sigma}) \tag{2.71}$$

$$\Gamma^{\mu}_{\beta\nu} = \frac{1}{2}g^{\mu\rho}(g_{\rho\beta,\nu} + g_{\rho\nu,\beta} - g_{\beta\nu,\rho}) \tag{2.72}$$

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{\mu\gamma}(g_{\gamma\alpha,\beta} + g_{\gamma\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\gamma}) \tag{2.73}$$

$$\Gamma^{\nu}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\nu\lambda} g_{\nu\lambda,\mu} \tag{2.74}$$

Y que:

$$g_{\alpha\mu} g^{\mu\beta}{}_{,\nu} = -g^{\mu\beta} g_{\alpha\mu,\nu} \tag{2.75}$$

De donde:

$$-\Gamma^{\nu}_{\alpha\mu} = \frac{1}{2}(g^{\nu\sigma}{}_{,\mu} g_{\alpha\sigma} + g^{\nu\sigma}{}_{,\alpha} g_{\sigma\mu} - g^{\nu\sigma}{}_{,\sigma} g_{\alpha\mu}) \tag{2.76}$$

$$-\Gamma^{\mu}_{\beta\nu} = \frac{1}{2}(g^{\mu\rho}{}_{,\nu} g_{\rho\beta} + g^{\mu\rho}{}_{,\beta} g_{\rho\nu} - g^{\mu\rho}{}_{,\rho} g_{\beta\nu}) \tag{2.77}$$

$$-\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(g^{\mu\gamma}{}_{,\beta} g_{\gamma\alpha} + g^{\mu\gamma}{}_{,\alpha} g_{\gamma\beta} - g^{\mu\gamma}{}_{,\gamma} g_{\alpha\beta}) \tag{2.78}$$

$$-\Gamma^{\nu}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\nu\lambda}{}_{,\mu} g_{\nu\lambda} \tag{2.79}$$

Esto implica que podemos escribir G en función de la métrica y sus derivadas:

$$\begin{aligned} G = \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} [& (g^{\nu\sigma}{}_{,\mu} g_{\alpha\sigma} + g^{\nu\sigma}{}_{,\alpha} g_{\sigma\mu} - g^{\nu\sigma}{}_{,\sigma} g_{\alpha\mu})(g^{\mu\rho}{}_{,\nu} g_{\rho\beta} + g^{\mu\rho}{}_{,\beta} g_{\rho\nu} - g^{\mu\rho}{}_{,\rho} g_{\beta\nu}) \\ & - (g^{\mu\gamma}{}_{,\beta} g_{\gamma\alpha} + g^{\mu\gamma}{}_{,\alpha} g_{\gamma\beta} - g^{\mu\gamma}{}_{,\gamma} g_{\alpha\beta})(g^{\nu\lambda}{}_{,\mu} g_{\nu\lambda})] \end{aligned} \tag{2.80}$$

Ahora si tomamos la parte linearizada y subimos y bajamos índices da:

$$G = \frac{1}{4}(h^{\beta\nu,\rho} + h^{\nu\rho,\beta} - h^{\beta\rho,\nu})(h_{\rho\beta,\nu} + h_{\rho\nu,\beta} - h_{\beta\nu,\rho}) - \frac{1}{4}(2h^{\mu\beta}{}_{,\beta} - h^{,\beta})(h_{,\mu}) \tag{2.81}$$

Y simplificándolo

$$G = -\frac{1}{2}(\frac{1}{2} h^{\beta\nu,\rho} h_{\beta\nu,\rho} - h^{\beta\nu,\rho} h_{\rho\beta,\nu} - \frac{1}{2} h^{,\mu} h_{,\mu} + h^{\mu\beta}{}_{,\mu} h_{,\mu}) \tag{2.82}$$

Del lagrangiano anterior podemos explorar si es posible llegar a las ecuaciones de campo linealizado de Einstein, para lo cual aplicamos las ecuaciones de Euler-Lagrange, [3]:

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial h_{\alpha\beta}} - \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial h_{\alpha\beta,\nu}} = 0 \tag{2.83}$$

Con $\mathfrak{L} = G$ obtenida anteriormente. Para mayor claridad en el desarrollo hacemos los siguientes cálculos parciales:

$$\frac{\partial [h^{\beta\nu,\rho} h_{\beta\nu,\rho}]}{\partial h_{\tau\kappa,\sigma}} = 2h^{\tau\kappa,\sigma} \tag{2.84}$$

$$\frac{\partial[h^{\beta\nu,\rho}h_{\rho\beta,\nu}]}{\partial h_{\tau\kappa,\sigma}} = h^{\sigma\tau,\kappa} + h^{\kappa\sigma,\tau} \tag{2.85}$$

$$\frac{\partial[h^{,\mu}h_{,\mu}]}{\partial h_{\tau\kappa,\sigma}} = 2\eta^{\tau\kappa}h^{,\sigma} \tag{2.86}$$

$$\frac{\partial[h^{\mu\beta,\beta}h_{,\mu}]}{\partial h_{\tau\kappa,\sigma}} = h^{,\tau}\eta^{\kappa,\sigma} + \eta^{\tau\kappa}h^{\sigma\beta}{}_{,\beta} \tag{2.87}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\frac{\partial G}{\partial h_{\tau\kappa,\sigma}} = -\frac{1}{2}(h^{\tau\kappa,\sigma}{}_\sigma - h^{\sigma\tau,\kappa}{}_\sigma + h^{\kappa\sigma,\tau}{}_\sigma - \eta^{\tau\kappa}h^{,\sigma}{}_\sigma + \eta^{\kappa\sigma}h^{,\tau}{}_\sigma + \eta^{\tau\kappa}h^{\sigma\beta}{}_{,\beta\sigma}) \tag{2.88}$$

Ahora cambiamos a $\bar{h}$, sumamos la parte correspondiente a $T^{\tau\kappa}$ y aplicamos una vez más la norma de lorentz para que nos quede:

$$\bar{h}^{\tau\kappa,\sigma}{}_\sigma = -16\pi T^{\tau\kappa} \tag{2.89}$$

Esta última ecuación coincide exactamente con la ecuación linearizada de Einstein (2.55) que se había obtenido aplicando la linealización a nivel de las ecuaciones de campo. De esta manera hemos demostrado que el Lagrangiano reducido (2.82) nos lleva directamente a la ecuación linearizada de Einstein cuando se varía con respecto a la métrica $h_{\alpha\beta}$. Este resultado es importante para los objetivos de este trabajo puesto que ahora podemos hablar realmente de una "teoría" (en el sentido de teoría de campos) que se obtiene de una acción mediante la aplicación de un principio variacional.

2.2.4. Comparación de los diferentes métodos

Lo que hemos hecho en las últimas subsecciones ha sido obtener las ecuaciones de la teoría linearizada de distintas formas.

En la sección 2.2.1 lo que hemos hecho es utilizar las ecuaciones de Einstein tal como fueron obtenidas en la sección 2.2, es decir variando la acción primero, linealizando después, y utilizando la norma de Lorentz para llegar a las ecuaciones tal y como las conocemos comúnmente en los libros de texto.

En la sección 2.2.2 hemos hecho algo distinto: primero linealizamos el accionando, que es el escalar que está dentro de la integral de acción, después variamos el resultado obteniendo como resultado lo que esperabamos más un término extra, de lo que concluimos entonces que el variar y linealizar no son operaciones que conmutan.

En la sección 2.2.3 hemos utilizado un procedimiento distinto. Esta acción se obtiene a partir de 2.29 al eliminar los términos de frontera en la acción. Con

(2.82) lo que hemos hecho es aplicar las ecuaciones de Euler-Lagrange, que se sabe se obtienen de variar la acción y obtenemos las ecuaciones de la teoría linearizada tal y como en 2.2.1.

Lo anterior se ha hecho con tres propósitos: el primero ha sido el de conocer mejor el material y las herramientas con las que se trabajará. El segundo ha sido el de buscar si es que hay otras formas para encontrar lo que se conoce como las ecuaciones de la teoría linearizada de Einstein. Se ha visto que efectivamente, hay otros caminos para hacerlo y que no todos son equivalentes. El tercer propósito es el de explorar a qué nivel de la derivación de las ecuaciones linearizadas de Einstein se introduce la cuantización.

Se concluye que la forma que parece más firme es hacer la cuantización a nivel de la acción reducida de Einstein-Hilbert, pues esta acción (2.82) lleva la información de la linealización, sin los términos de frontera que a fin de cuentas resultan accesorios, además de que nos conduce al resultado usual de una manera muy clara. Otra razón para considerar esta última opción es el hecho de que en la literatura de cuantización por deformación que utilizaremos, la cuantización se hace a nivel del Hamiltoniano, que es lo que trataremos de obtener en la siguiente sección.

2.3. Tensor energía momento de la teoría linearizada

Para la cuantización por deformación que trataremos más adelante es importante conocer la energía del campo a cuantizar. Entonces surge la pregunta ¿Cuál es la energía del campo gravitacional débil que hemos analizado anteriormente? Para tratar de responder esta pregunta, recordemos someramente como se define la energía en teoría de campos. Para construir la teoría de un campo, por ejemplo $\Phi(x^\alpha)$, se debe partir de un Lagrangiano (densidad Lagrangiana) $\mathcal{L}(\Phi, \Phi_{,\alpha})$ que sirve para definir la acción $S = \int \mathcal{L}(\Phi, \Phi_{,\alpha})d^4x$. Si aplicamos el principio de acción mínima sobre esta acción llegamos a las ecuaciones de Euler-Lagrange que determinan la dinámica del campo Φ. Por otra parte, el teorema de Noether nos dice que si el Lagrangiano es invariante con respecto a ciertas transformaciones infinitesimales (simetrías), entonces existen cantidades conservadas. En particular, mediante el teorema de Noether se puede definir el tensor *canónico* de energía-momento [3]

$$T^{\alpha\beta} = \eta^{\beta\gamma}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_{,\alpha}}\Phi_{,\gamma} - \eta^{\alpha\beta}\mathcal{L} \ . \tag{2.90}$$

Aquí vemos que aparece la métrica de Minkowski de forma explícita. Este es un ingrediente necesario en la construcción de cualquier teoría de campos y juega el papel de "espacio de fondo" donde "vive" el campo Φ. Mientras que el campo Φ es un objeto "dinámico" de la teoría, la métrica de Minkowski es un objeto que no interactúa con Φ, es decir, no tiene ninguna dinámica. Para la construcción de las cantidades conservadas (2.90) es indispensable que exista un "espacio de fondo". Si quisieramos aplicar este concepto al caso del campo gravitacional, nos encontramos con el grave problema de que la métrica $g_{\alpha\beta}$ determina el campo y por lo tanto se convierte en un objeto dinámico de la teoría. Entonces, en general no existe un "espacio de fondo" con respecto al cual la métrica es dinámica. Por esta razón no existe una definición de energía (local) para el campo gravitacional en la teoría general de la relatividad (aunque existen casos muy particulares en los que si es posible dar una definicion de energía local [4]).

Analicemos ahora el caso de la teoría linearizada. Como demostramos en la sección 2.2.3, las ecuaciones de campo se pueden obtener aplicando el principio de acción mínima sobre la acción reducida con el Lagrangiano (2.29). La variación se realiza con respecto a la métrica $h_{\alpha\beta}$ y las ecuaciones de campo (2.89) nos dicen que $h_{\alpha\beta}$ es el objeto dinámico de la teoría. Puesto que en este caso la métrica de Minkowski no "participa" en la dinámica del sistema la podemos considerar como el "espacio de fondo" con respecto al cual podemos definir cantidades conservadas y de esta manera regresamos al caso de teoría de campos en el que la ecuación (2.90) es aplicable. Obviamente se necesitaría un análisis mas detallado de estas ideas para asegurar que éste resultado es completamente correcto; sin embargo, para fines del presente trabajo vamos a considerar esta argumentación como suficiente para ver hasta que punto se pueden seguir desarrollando estas ideas. Entonces, la generalización de la ecuación (2.90) al caso de la teoría linearizada sería:

$$T^{\alpha\beta} = \eta^{\beta\gamma} \frac{\partial G}{\partial h_{\mu\nu,\alpha}} h_{\mu\nu,\gamma} - \eta^{\alpha\beta} G \ , \tag{2.91}$$

donde G es el Lagrangiano reducido (2.82).

Calculo el tensor energía-momento ayudándome de los siguientes cálculos intermedios:

$$\frac{\partial}{\partial h_{\kappa\lambda,\sigma}} (h^{\alpha\beta,\gamma} h_{\gamma\beta,\alpha}) = 2h^{\sigma\lambda,\kappa} \ , \tag{2.92}$$

$$\frac{\partial}{\partial h_{\kappa\lambda,\sigma}} (h^{\alpha\beta}{}_{,\beta} h_{,\alpha}) = \eta^{\sigma\lambda} h^{,\kappa} + \eta^{\lambda\kappa} h^{\sigma\tau}{}_{,\tau} \ . \tag{2.93}$$

$$\frac{\partial}{\partial h_{\kappa\lambda,\sigma}} (h^{\alpha\beta,\gamma} h_{\alpha\beta,\gamma}) = 2h^{\kappa\lambda,\sigma} \ . \tag{2.94}$$

$$\frac{\partial}{\partial h_{\kappa\lambda,\sigma}}(h^{,\alpha}h_{,\alpha}) = 2\eta^{\lambda\kappa}h^{,\sigma} \; , \tag{2.95}$$

$$T^{\sigma\rho} = \frac{1}{2}h_{\kappa\lambda}{}^{,\rho}(2\overline{h}^{\sigma\lambda,\kappa} - \eta^{\lambda\kappa}\overline{h}^{\sigma\tau}{}_{,\tau} - \overline{h}^{\kappa\lambda,\sigma}) - \eta^{\sigma\rho}G \; , \tag{2.96}$$

$$G = \frac{1}{2}\left[h^{\alpha\beta,\gamma}\left(h_{\beta\gamma,\alpha} - \frac{1}{2}h_{\beta\alpha,\gamma}\right) - h_{,\alpha}\overline{h}^{\alpha\beta}{}_{,\beta}\right] \tag{2.97}$$

Lo que estoy buscando es la energía asociada al campo. Esta información está contenida en la componente 00 del tensor anterior, es decir:

$$T^{00} = \frac{1}{2}h_{\kappa\lambda}{}^{,0}(2\overline{h}^{0\lambda,\kappa} - \eta^{\lambda\kappa}\overline{h}^{0\tau}{}_{,\tau} - \overline{h}^{\kappa\lambda,0}) + \frac{1}{2}\left[h^{\alpha\beta,\gamma}\left(h_{\beta\gamma,\alpha} - \frac{1}{2}h_{\beta\alpha,\gamma}\right) - h_{,\alpha}\overline{h}^{\alpha\beta}{}_{,\beta}\right] \tag{2.98}$$

En el próximo capítulo veremos como la teoría linearizada tiene algunos paralelismos con el electromagnetismo, por lo menos a nivel de las ecuaciones. Este paralelismo se ve revelado con la métrica siguiente:

$$ds^2 = -(1-2\phi)dt^2 + 2\gamma_i dt dx^i + (1+2\phi)\delta_{ij}dx^i dx^j \tag{2.99}$$

correspondiente a una perturbación infinitesimal de la métrica de Minkowski. Por lo tanto de acuerdo a (2.30), la métrica $h_{\alpha\beta}$ tiene la forma

$$h_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 2\phi & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \gamma_1 & 2\phi & 0 & 0 \\ \gamma_2 & 0 & 2\phi & 0 \\ \gamma_3 & 0 & 0 & 2\phi \end{pmatrix} \tag{2.100}$$

donde ϕ y γ_i $(i = 1, 2, 3)$ son funciones de las coordenadas.

Recordemos que:

$$\bar{h}^{\alpha\beta} = h^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}h \tag{2.101}$$

Donde

$$\bar{h} \equiv \bar{h}^{\alpha}{}_{\alpha} = -h \tag{2.102}$$

de ahí que para $\bar{h}$ nos da:

$$\bar{h}^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 4\phi & -\gamma_1 & -\gamma_2 & -\gamma_3 \\ -\gamma_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\gamma_2 & 0 & 0 & 0 \\ -\gamma_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.103}$$

Calculo uno a uno los términos de la componente 00 del tensor energía-momento con $h_{\alpha\beta}$ y $\bar{h}_{\alpha\beta}$ definidas anteriormente:

$$h^{,0}\bar{h}^{0\tau}{}_{,\tau} = -4(\phi_{,t})(4\phi_{,t} - \gamma_{1,x} - \gamma_{2,y} - \gamma_{3,z}) \tag{2.104}$$

$$\bar{h}^{\kappa\lambda,0}h_{\kappa\lambda}{}^{,0} = 8(\phi_{,t})^2 - 2((\gamma_{1,t})^2 - (\gamma_{2,t})^2 - (\gamma_{3,t})^2) \tag{2.105}$$

$$\begin{aligned}\bar{h}^{0\lambda,\kappa}h_{\kappa\lambda}{}^{,0} =& 8(\phi_{,t})^2 - 4(\phi_{,x}\gamma_{1,t} + \phi_{,y}\gamma_{2,t} + \phi_{,z}\gamma_{3,t}) \\ &- ((\gamma_{1,t})^2 + (\gamma_{2,t})^2 + (\gamma_{3,t})^2) \\ &+ 2\phi_{,t}(\gamma_{1,x} + \gamma_{2,y} + \gamma_{3,z})\end{aligned} \tag{2.106}$$

$$\begin{aligned}h_{,\alpha}\bar{h}^{\alpha\beta}{}_{,\beta} =& 16(\phi_{,t})^2 - 4(\phi_{,t})(\gamma_{1,x} + \gamma_{2,y} + \gamma_{3,z}) \\ &- 4(\phi_{,x}\gamma_{1,t} + \phi_{,y}\gamma_{2,t} + \phi_{,z}\gamma_{3,t})\end{aligned} \tag{2.107}$$

$$\begin{aligned}h^{\alpha\beta,\gamma}h_{\beta\alpha,\gamma} =& 16(-(\phi_{,t})^2 + (\phi_{,x})^2 + (\phi_{,y})^2 + (\phi_{,z})^2) \\ &+ 2((\gamma_{1,t})^2 - (\gamma_{1,x})^2 - (\gamma_{1,y})^2 - (\gamma_{1,z})^2) \\ &+ 2((\gamma_{2,t})^2 - (\gamma_{2,x})^2 - (\gamma_{2,y})^2 - (\gamma_{2,z})^2) \\ &+ 2((\gamma_{3,t})^2 - (\gamma_{3,x})^2 - (\gamma_{3,y})^2 - (\gamma_{3,z})^2)\end{aligned} \tag{2.108}$$

$$\begin{aligned}h^{\alpha\beta,\gamma}h_{\beta\gamma,\alpha} =& 4(-(\phi_{,t})^2 + (\phi_{,x})^2 + (\phi_{,y})^2 + (\phi_{,z})^2) \\ &+ (\gamma_{1,t})^2 + (\gamma_{2,t})^2 + (\gamma_{3,t})^2 \\ &- (\gamma_{1,x})^2 - (\gamma_{2,y})^2 - (\gamma_{3,z})^2 \\ &+ 4(\phi_{,x}\gamma_{1,t} + \phi_{,y}\gamma_{2,t} + \phi_{,z}\gamma_{3,t}) \\ &- 2(\gamma_{1,y}\gamma_{2,x} + \gamma_{1,z}\gamma_{3,x} + \gamma_{2,z}\gamma_{3,y}) \\ &- 4\phi_{,t}(\gamma_{1,x} + \gamma_{2,y} + \gamma_{3,z})\end{aligned} \tag{2.109}$$

donde hemos utilizado la convención $x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = x \quad y \quad x^0 = t$. Al sumar nos queda:

$$\begin{aligned}T^{00} =& 6(\phi_{,t})^2 - 2((\phi_{,x})^2 + (\phi_{,y})^2 + (\phi_{,z})^2) \\ &+ \frac{1}{2}((\gamma_{1,y})^2 + (\gamma_{1,z})^2 + (\gamma_{2,x})^2 + (\gamma_{2,z})^2 + (\gamma_{3,x})^2 + (\gamma_{3,y})^2) \\ &- 4(\gamma 1, y\gamma_{2,x} + \gamma_{1,z}\gamma_{3,x} + \gamma_{2,z}\gamma_{3,y}) \\ &- 10(\phi_{,t})(\gamma_{1,x} + \gamma_{2,y} + \gamma_{3,z}) \\ &+ \frac{3}{2}((\gamma_{1,t})^2 + (\gamma_{1,t})^2 + (\gamma_{3,t})^2 - (\gamma_{1,x})^2 - (\gamma_{2,y})^2 - (\gamma_{3,z})^2) \\ &+ 8(\phi_{,x}\gamma_{1,t} + \phi_{,y}\gamma_{2,t} + \phi_{,z}\gamma_{3,t})\end{aligned} \tag{2.110}$$

Resumiendo que hemos hecho en esta sección ha sido encontrar la energía local del campo gravitacional débil, utilizando el teorema de Noether. Esto lo hemos hecho teniendo en mente que esta energía nos podría servir como el Hamiltoniano a la hora de cuantizar. Al ver la expresión anterior nos podríamos preguntar por su significado físico, lo cual implicaría un análisis más detallado, cosa que no haremos acá, pues no es el objetivo de este trabajo.

Lo que sí está relacionado con este trabajo es ver si dicha expresión puede ser utilizada a la hora de cuantizar. En la sección 3.2 veremos que este Hamiltoniano tiene el problema de que implica un sistema de constricciones, problema en el cual no se ha escrito la última palabra dentro de la cuantización por deformación. Por lo que nos veremos en la necesidad de buscar otros caminos para lograr nuestro propósito.

Capítulo 3

Teoría Linearizada y Electrodinámica

En este capítulo se discute la similitud que tienen las ecuaciones en forma covariante de la Electrodínamica y las ecuaciones de la teoría linearizada de Einstein. En la primera sección se muestra la forma covariante de la electrodinámica. En la sección siguiente se exhibe la teoría linearizada de Einstein como la representación de Maxwell. En la sección 3.3 se muestra el límite Newtoniano de esta teoría El resultado más importante es el de encontrar el Lagrangiano y el Hamitoniano a los cuales se les aplicará la cuantización por deformación.

3.1. Covariancia de la Electrodinámica

La covariancia de las ecuaciones de la Electrodinámica fue mostrada por Maxwell y Poincaré. Implica que las distintas cantidades E, B, J, ρ se transforman de acuerdo con las transformaciones de Lorentz. La relación entre la densidad de carga $\rho(x^\alpha)$ y la densidad de corriente $J(x^\alpha)$ está dada por la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot J = 0 \tag{3.1}$$

De ahí que si se plantea que ρ y J forman una misma cantidad que se escriba:

$$J^\alpha = (\rho, J) \tag{3.2}$$

entonces la ecuación de continuidad (3.1) se puede escribir de la forma siguiente:

$$J^\alpha{}_{,\alpha} = 0 \tag{3.3}$$

En la familia de normas de Lorentz las ecuaciones de onda para el potencial vectorial y el potencial escalar son:

$$4\pi J = \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \nabla^2 A \tag{3.4}$$

$$4\pi\rho = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \Phi \tag{3.5}$$

Con la condición de Lorentz,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla \cdot A = 0 \tag{3.6}$$

Ambos potenciales los escribimos en el potencial 4-vectorial como:

$$A^\alpha = (\Phi, A) \tag{3.7}$$

Entonces las ecuaciones de onda y la condición de Lorentz se puede escribir en forma evidentemente covariante,

$$\Box A^\alpha = -4\pi J^\alpha \tag{3.8}$$

y

$$A^\alpha{}_{,\alpha} = 0 \tag{3.9}$$

Definamos un tensor de campo antisimétrico de rango dos como:

$$F^{\alpha\beta} = A^{\beta,\alpha} - A^{\alpha,\beta} \tag{3.10}$$

$$F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

las ecuaciones de Maxwell quedan:

$$F^{\alpha\beta}{}_{,\alpha} = -4\pi J^\beta \tag{3.12}$$

3.2. La representación de Maxwell

En [5] se señala que la teoría electromagnética y la linearizada de Einstein tienen la misma forma. En esta sección derivamos este resultado. Sea U^α un vector no nulo. Definamos el potencial vectorial como:

$$A_\alpha = -\frac{1}{4}\bar{h}_{\alpha\beta}U^\beta \tag{3.13}$$

y la corriente como:

$$J_\alpha = -T_{\alpha\beta}U^\beta \tag{3.14}$$

Con esto, encontremos la forma explícita de las ecuaciones de Maxwell (3.12) obtenidas en la sección anterior:

$$A_{\alpha,\gamma}{}^\gamma = -\frac{1}{4}(\bar{h}_{\alpha\beta,\gamma}{}^\gamma U^\beta + 2\bar{h}_{\alpha\beta,\gamma}U^{\beta,\gamma} + \bar{h}_{\alpha\beta}U^{\beta\gamma}_{,\gamma}) = -4\pi J_\alpha = 4\pi T_{\alpha\beta}U^\beta \tag{3.15}$$

que se reducen a las ecuaciones de la teoría linearizada si tomamos:

$$2\bar{h}_{\alpha\beta,\gamma}U^{\beta,\gamma} + \bar{h}_{\alpha\beta}U^{\beta\gamma}_{,\gamma} = 0 \tag{3.16}$$

Por otro lado vemos que:

$$A_\alpha{}^\alpha = -\frac{1}{4}(\bar{h}_{\alpha\beta}{}^{,\alpha}U^\beta + \bar{h}_{\alpha\beta}U^{\beta,\alpha}) = 0 \tag{3.17}$$

es equivalente a la norma de Lorentz si se satisface la condición

$$\bar{h}_{\alpha\beta}U^{\beta,\alpha} = 0 \tag{3.18}$$

De manera que si introducimos un vector U^α que satisfaga las condiciones anteriores, tenemos que las ecuaciones de Maxwell llevan a las de de la teoría linearizada de Einstein con A_α y J_α definidos anteriormente. En particular las condiciones impuestas a U^α se satisfacen si se toma el caso U^α=constante. Hay otro tipo de soluciones, pero para nuestros fines este caso solo, es suficiente.

Se sabe, además, que las ecuaciones de Maxwell se obtienen al variar el Lagrangiano

$$\mathcal{L}_{Maxwell} = -\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} + 4\pi A_\alpha J^\alpha\ , \quad \text{donde} \quad F_{\alpha\beta} = A_{\beta,\alpha} - A_{\alpha,\beta}\ , \tag{3.19}$$

con respecto al potencial A_α.

Otra vez esto nos permite considerar la métrica $h_{\alpha\beta}$ de forma tal que podamos trabajar con ella como en una teoría de campos en el espacio de Minkowski. Por ejemplo, podríamos asociar un tensor energía-momento a (3.19) como su derivada variacional respecto a la métrica de Minkowski. Podríamos usar este argumento para calcular las densidades de energía y momento asociadas al campo descrito por $h_{\alpha\beta}$.

Tenemos ahora dos Lagrangianos, (2.82) y (3.19), que nos llevan a las mismas ecuaciones de campo, una vez aplicada la condición de norma de Lorentz. Desde el punto de vista de la teoría clásica son equivalentes y diferirán solamente en términos que se anulen en la frontera, pero desde el punto de vista de la cuantización por deformacíon nos pueden llevar a estados cuánticos muy distintos. Para el problema de la cuantización que aquí se trata, usaremos el Lagrangiano de Maxwell, por considerar que la analogía con el campo electromagnético nos permitirá reproducir algunos resultados conocidos de una manera mas simple.

Consideremos ahora el Hamiltoniano asociado con el Lagrangiano de Maxwell. Las variables de configuración están dadas por a_α. Los momentos conjugados correspondientes Π_α son:

$$\Pi^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}_{Maxwell}}{\partial \dot{A}_\alpha} = F_0{}^\alpha \tag{3.20}$$

donde el punto representa la derivada con respecto a la coordenada temporal x^0. Por lo tanto $\Pi_0 = 0$ y consecuentemente tenemos un Lagrangiano singular para el cual no podemos construir un Hamiltoniano. En la teoría de campos la cuantización de dichos Lagrangianos se lleva a cabo usando el método de Dirac para sistemas con constricciones (veáse, por ejemplo [8]). Pero en el contexto de la cuantización por deformación este método todavía se está construyendo. En el caso de la teoría de Maxwell, existe un método alternativo que consiste en modificar el Lagrangiano de Maxwell de acuerdo con (se toma $J_\alpha = 0$ por simplicidad)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}(A_\alpha{}^{,\alpha})^2 \tag{3.21}$$

Las ecuaciones de campo son otra vez $A_{\alpha,\beta}{}^\beta = 0$ y la condición de norma de Lorentz $A_\alpha{}^\alpha$ se postula por separado. Después de algunas manipulaciones algebraicas, el Lagrangiano anterior, puede ser reescrito como:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}A_{\alpha,\beta}A^{\alpha,\beta} + \frac{1}{2}\Lambda^\beta{}_{,\beta}, \qquad \Lambda^\beta = A^\beta{}_{,\gamma}A^\gamma - A^\gamma{}_{,\gamma}A^\beta \tag{3.22}$$

el segundo término puede despreciarse pues puede ser transformado después de la integración en un término de frontera que no contribuye a las ecuaciones de campo.

El punto que hay que resaltar sobre la ecuación anterior es que este Lagrangiano es regular en el sentido de que ninguno de los momentos conjugados se anula. De hecho, fácilmente se puede ver que $\Pi_\alpha = \dot{A}_\alpha$ y el Hamiltoniano correspondiente es

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(\Pi_\alpha \Pi^\alpha + A_{\alpha,i} A^{\alpha,i}) \tag{3.23}$$

Es entonces cuando las variables canónicas del espacio fase satisfacen las relaciones de conmutación estándar con respecto al paréntesis de Poisson:

$$\{A_\alpha, \Pi_\beta\} = \delta_{\alpha\beta} \quad \{A_\alpha, A_\beta\} = \{\Pi_\alpha, \Pi_\beta\} = 0 \tag{3.24}$$

3.3. El límite Newtoniano

Tomemos ahora el siguiente elemento de línea para la teoría linearizada:

$$ds^2 = -(1-2\phi)dt^2 + 2\gamma_i dt dx^i + (1+2\phi)\delta_{ij} dx^i dx^j \tag{3.25}$$

donde ϕ y γ_i son funciones que dependen de las coordenadas. Para la $h_{\alpha\beta}$ tenemos que la métrica anterior corresponde a: $h_{00} = 2\phi$, $h_{ij} = 2\phi\delta_{ij}$ y $h_{0i} = \gamma_i$. Las ecuaciones del campo toman la forma:

$$\phi_{,\alpha}{}^{\alpha} = -4\pi T_{00}, \quad \gamma_{i,\alpha}{}^{\alpha} = -16\pi T_{0i}, \quad T_{ij} = 0, \tag{3.26}$$

Con estas variables la condición de Lorentz es:

$$4\dot{\phi} - \delta^{ij}\gamma_{i,j} = 0, \quad \dot{\gamma}_i = 0 \tag{3.27}$$

donde el punto indica derivada con respecto al tiempo. Para la representación de Maxwell consideramos el vector $U^\alpha = \delta^\alpha_t$ de forma tal que el potencial vectorial se escriba como:

$$A_\alpha = -\frac{1}{4}(4\phi, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \tag{3.28}$$

Tomemos, también, $T_{\alpha\beta}$ como

$$T_{\alpha\beta} = -\rho U_\alpha U_\beta + J_\alpha U_\beta + J_\beta U_\alpha \tag{3.29}$$

que está de acuerdo con la definición dada anteriormente y con las ecuaciones del campo con $\rho = T_{00}$. Si $\gamma_i = 0$ entonces tenemos que las ecuaciones de campo se reducen a

$$\phi_{,i}{}^{i} = -4\pi\rho \tag{3.30}$$

que es la ecuación de Poisson. Vemos entonces que ϕ es el potencial Newtoniano. Si γ_i no se anula tenemos entonces la primera contribución de la teoría de Einstein al potencial Newtoniano. Vemos de la ecuación

$$\gamma_{i,\alpha}{}^{\alpha} = -16\pi T_{0i} \tag{3.31}$$

que la fuente de γ_i son los elementos cruzados de T_{0i} que en el caso de una distribución de masa se relacionan con el momento angular. En la representación de Maxwell las γ_i corresponden a las componentes "magnéticas" del campo gravitacional, razón por la cual a este campo se le llama "gravitomagnético". Para $T_{\alpha\beta} = 0$, las funciones ϕ y γ_i satisfacen la ecuación de onda sujeta a la condición de norma (3.27). Este es el caso al que nos referiremos de aquí en adelante. Veamos ahora como quedan los Lagrangianos que hemos utilizado hasta el momento considerando el caso mas sencillo posible: $\gamma_2 = \gamma_3 = 0$ y $\gamma_1 := \gamma$. Con estas variables cada uno de los Lagrangianos queda expresado como:

$$\mathcal{L}_{reducido} = -6\dot{\phi}^2 - 2\delta^{ij}\phi_{,i}\phi_{,j} + 4\dot{\gamma}\phi_{,1} + \frac{1}{2}[(\gamma_{,2})^2 + (\gamma_{,3})^2] \tag{3.32}$$

esto para el Lagrangiano reducido (2.97). Ahora para el Lagrangiano para la representación de Maxwell (3.19) queda:

$$\mathcal{L}_{Maxwell} = -\frac{1}{4}[-2\delta^{ij}\phi_{,i}\phi_{,j} - \frac{1}{8}\dot{\gamma}^2 + \dot{\gamma}\phi_{,1} + \frac{1}{8}[(\gamma_{,2})^2 + (\gamma_{,3})^2]] \tag{3.33}$$

mientras que el Lagrangiano modificado (3.22) nos queda:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\dot{\phi}^2 - \delta^{ij}\phi_i\phi_j - \frac{1}{16}\dot{\gamma}^2 + \frac{1}{16}\delta^{ij}\gamma_{,i}\gamma_{,j}) \tag{3.34}$$

Aunque los tres son Lagrangianos diferentes, desde el punto de vista clásico son equivalentes pues al variarlos respecto a ϕ y γ llevan al mismo grupo de ecuaciones, una vez que la condición de Lorentz se cumple. El Lagrangiano (3.33) es singular, pues el momento asociado a la variable de configuración ϕ es cero. El Lagrangiano (3.32) también es considerado singular, pues el momento asociado a la variable γ resulta ser proporcional a $\phi_{,1}$ por lo que puede ser expresado en términos de la variable de configuración ϕ. El único Lagrangiano completamente regular es (3.34). Es por esta razón que se utilizará de aquí en adelante su Hamiltoniano asociado.

Resumen del capítulo: Hemos probado que las ecuaciones de Maxwell se pueden escribir como las ecuaciones de la teoría linearizada con una cierta elección de el potencial vectorial y la corriente. Anteriormente ya habiamos mostrado como el variar el Lagrangiano de la teoría linearizada nos lleva a las mismas ecuaciones. Hemos encontrado, pues, tres Lagrangianos que nos llevan al mismo grupo de ecuaciones, tres Lagrangianos con tensores energía-momento distintos. Tenemos que decidir cúal es que utilizaremos para cuantizar, pues los tres nos llevan a resultados distintos. Dado que la analogía de la electrodinámica con la gravedad linearizada nos resulta tan productiva, pues nos permite darle una interpretación física a las variables involucradas y ademas nos da una definición del tensor energía momento asociado, es su Hamiltoniano de Maxwell modificado, es decir, el que viene de un Lagrangiano no singular (3.34), el que utilizaremos para hacer la cuantización.

Capítulo 4

Cuantización canónica del campo electromagnético

Este capítulo es una somera introducción a como se hace la cuantización usual del campo electromagnético. Se incluye aquí, en un capítulo aparte, pues la notación utilizada difiere de la que se usa en toda la tesis. Esto se hace con el fin de comparar los distintas distintas formas de cuantizar y ver que podemos aprender de cada uno de estos procedimientos, de manera que nos ayuden a resolver el problema del que se ocupa. Lo incluído en este capítulo se sigue de [9].

4.1. Cuantización canónica del campo electromagnético

Para tratar a la teoría electromagnética como un objeto cuántico, empezaremos con una descripción clásica del campo en la cual es tratada como un conjunto infinito, pero discreto de variables.

Sea $A(r,t)$ el potencial del campo electromagnético libre, que satisface la condición de transversalidad:

$$divA = 0. \tag{4.1}$$

El campo en un volumen finito puede ser expandido en términos de ondas viajeras, siendo el potencial

$$A = a_k e^{ik\cdot r} + a_k^{*+} e^{-ik\cdot r} \tag{4.2}$$

donde los coeficientes, a_k son funciones del tiempo tal que

$$a_k \sim e^{i\omega t}, \quad \omega = \|k\| \tag{4.3}$$

Como la divergencia del potencial vectorial es cero, los vectores complejos a_k son ortogonales a los correspondientes vectores de onda: $a_k \cdot k = 0$ La expresión para el potencial vectorial se toma sobre un conjunto discreto infinito de valores del vector de onda. El cambio a una integral sobre una distribución continua podría hacerse por medio de la expresión $d^3k/(2\pi)^3$ para el número de posibles valores de k que pertenecen al elemento de volumen $d^3k = dk_x dk_y dk_z$ en el k-espacio. Si se especifican los vectores a_k, el campo dentro del volumen que se considera queda completamente determinado. De forma tal que estas cantidades se pueden ver como un conjunto discreto de variables de campo clásico. Para explicar la transición a la teoría cuántica, necesitamos hacerle algunas transformaciones, donde las ecuaciones de campo tomen una forma análoga a las ecuaciones canónicas (ecuaciones de Hamilton) de la mecánica clásica. Estas variables de campo canónicas se definen como:

$$Q_{\boldsymbol{k}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}(a_k + a_k^+), \quad P_k = \frac{-i\omega}{\sqrt{4\pi}}(a_k - a_k^+) = \dot{Q}_k \tag{4.4}$$

que evidentemente son reales. El potencial vectorial se expresa en términos de las variables canónicas como:

$$A = \sqrt{4\pi}\sum_{\boldsymbol{k}}(Q_k cos k \cdot r - \frac{1}{\omega}P_{\boldsymbol{k}} sin k \cdot r) \tag{4.5}$$

Para encontrar el Hamiltoniano H, habra que encontrar la energía total del campo,

$$\frac{1}{8\pi}\int(E^2 + B^2)d^3x, \tag{4.6}$$

y expresarla en términos de las nuevas variables Q_k y P_k. Cuando A se escribe como la expansión (4.5) el resultado de la integración es:

$$H = \frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{k}}(P_k^2 + \omega^2 Q_k^2). \tag{4.7}$$

Cada uno de los vectores P_k y Q_k es perpendicular al vector de onda k, por lo que tiene dos componentes independientes. La dirección de estos vectores determina la dirección de polarización de la onda correspondiente. Si denotamos a los dos componentes del campo como los vectores Q_k y P_k (en el plano perpendicular a k) por $Q_{k\alpha}, P_{k\alpha}(\alpha = 1, 2)$. el Hamiltoniano se puede escribir como:

$$H = \frac{1}{2}\sum_{k,\alpha}(P_{k\alpha}^2 + \omega^2 Q_{k\alpha}^2) \tag{4.8}$$

Así que el Hamiltoniano es la suma de los términos independientes, cada uno de de los cuales tiene solo un par de cantidades $Q_{k\alpha}, P_{k\alpha}$. Cada uno de ellos corresponde a una onda viajera con un vector de onda y polarización y tiene la forma de un Hamiltoniano para un oscilador armónico unidimensional. Esta expresión es por eso llamada como expansión en osciladores del campo. Consideremos ahora la cuantización del campo electromagnético libre. La descripción clásica del campo dado anteriormente hace que la transición a la teoría cuántica sea obvia. Ahora tenemos que usar variables canónicas (coordenadas generalizadas $Q_{k\alpha}$, y momentos generalizados $P_{k\alpha}$) como operadores, con la regla de conmutación

$$\hat{P}_{k\alpha}\hat{Q}_{k\alpha} - \hat{Q}_{k\alpha}\hat{P}_{k\alpha} = -i, \tag{4.9}$$

pues los operadores con diferentes valores de k y α siempre conmutan. El potencial A y, de acuerdo con su forma con respecto a los campos, los campos E y B de la misma manera se convierten en operadores (Hermitianos). Para determinar el hamitoniano consistentemente es necesario calcular la integral:

$$\hat{H} = \frac{1}{8\pi}\int(\hat{E}^2 + \hat{B}^2)d^3X, \tag{4.10}$$

en el cual $\hat{E}$ y $\hat{B}$ se expresan en términos de $\hat{P}_{k\alpha}$ y $\hat{Q}_{k\alpha}$. De cualquier forma, el hecho de que los últimos no conmuten no tiene la menor importancia, pues los productos $\hat{P}_{k\alpha}\hat{Q}_{k\alpha}$ aparecen multiplicados por $cosk \cdot r$ y $sink \cdot r$ que se convierte en cero en la integración sobre todo el volumen. Por lo que la expresión que resulta para el Hamiltoniano es:

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\sum_{k,\alpha}(\hat{P}_{k\alpha}^2 + \hat{Q}_{k\alpha}^2) \tag{4.11}$$

que es exactamente la misma en forma que el Hamiltoniano clásico. La determinación de los Eigenvalores de este Hamiltoniano no requiere mayor cálculo, pues es equivalente al problema que nos es familiar de los niveles de energía de las oscilaciones lineales. De manera que escribirmos el espectro de niveles de energía del campo:

$$E = \sum_{k,\alpha}(N_{k\alpha} + \frac{1}{2})\omega, \tag{4.12}$$

Donde $N_{k\alpha}$ son enteros. Ahora calculemos los elementos de $Q_{k\alpha}$. Los elementos no nulos son:

$$< N_{k\alpha}|Q_{k\alpha}|N_{k\alpha} - 1 >=< N_{k\alpha} - 1|Q_{k\alpha}|N_{k\alpha} >= \sqrt{N_{k\alpha}/2\omega}. \tag{4.13}$$

Los elementos de $P_{k\alpha} = \dot{Q}_{k\alpha}$ difieren de aquellos de $Q_{k\alpha}$ solo por un factor de $\pm i\omega$. En cálculos subsecuentes se vera que es más conveniente reemplazar las cantidades $Q_{k\alpha}$ y $P_{k\alpha}$ por combinaciones lineales de $\omega Q_{k\alpha} \pm iP_{k\alpha}$, que tienen elementos no cero en la transición $N_{k\alpha} \to N_{k\alpha} \pm 1$ por lo que definimos a los operadores

$$\hat{c}_{k\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\omega\hat{Q}_{k\alpha} + i\hat{P}_{k\alpha}) \tag{4.14}$$

y

$$\hat{c}^{+}_{k\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\omega\hat{Q}_{k\alpha} - i\hat{P}_{k\alpha}) \tag{4.15}$$

Las cantidades clásicas $\hat{c}_{k\alpha}, \hat{c}^{+}_{k\alpha}$ son las mismas, salvo un factor $\sqrt{2\pi/\omega}$, que los coeficientes $a_{k\alpha}, a^{+}_{k\alpha}$ en la expansión inicial. los elementos de estos operadores son:

$$< N_{k\alpha} - 1|\hat{c}_{k\alpha}|N_{k\alpha} >=< N_{k\alpha}|\hat{c}^{+}_{k\alpha}|N_{k\alpha} - 1 >= \sqrt{N_{k\alpha}} \tag{4.16}$$

La regla de conmutación para $\hat{c}_{k\alpha}$ y $\hat{c}^{+}_{k\alpha}$ se obtiene usando las definiciones (4.14) y (4.15) y la regla (4.9):

$$\hat{c}_{k\alpha}\hat{c}^{+}_{k\alpha} - \hat{c}^{+}_{k\alpha}\hat{c}_{k\alpha} = 1 \tag{4.17}$$

Para el potencial vectorial, regresamos a la expansión tipo (4.2), pero con los operadores como coeficientes, escribiendo:

$$\hat{A} = \sum_{k,\alpha}(\hat{c}_{k\alpha}A_{k\alpha} + \hat{c}^{+}_{k\alpha}A^{+}_{k\alpha}) \tag{4.18}$$

donde

$$A_{k\alpha} = \sqrt{4\pi}\frac{e^{(\alpha)}}{\sqrt{2\omega}}e^{ik.r}. \tag{4.19}$$

El símbolo $e^{(\alpha)}$ denota los vectores unitarios en la dirección de polarización de los osciladores, estos vectores son perpendiculares al vector de onda $\mathbf{k}$, y para cada $\mathbf{k}$ hay dos polarizaciones independientes. De manera similar, para los operadores $\hat{E}$ y $\hat{B}$ escribimos:

$$\hat{E} = \sum_{k,\alpha}(\hat{c}_{k\alpha}E^{k\alpha} + \hat{c}^{+}_{k\alpha}E^{k\alpha *}) \tag{4.20}$$

$$\hat{B} = \sum_{k,\alpha}(\hat{c}_{k\alpha}B^{k\alpha} + \hat{c}^{+}_{k\alpha}B^{*}_{k\alpha}) \tag{4.21}$$

con:

$$E_{k\alpha} = i\omega A_{k\alpha}, \quad B_{k\alpha}n \times E_{k\alpha}, \quad n = k/\omega \tag{4.22}$$

Los vectores $A_{k\alpha}$ son mutuamente ortogonales, es decir:

$$\int A_{k\alpha} \cdot A^{*}_{k'\alpha'}d^3x = \frac{2\pi}{\omega}\delta_{\alpha\alpha'}\delta_{kk'} \tag{4.23}$$

Pues, si $A_{k\alpha}$ y $A^{*}_{k\alpha'}$ de dos vectores de onda diferentes, su producto contiene un factor $e^{i(k-k')\cdot r}$, que da cero en la integración sobre el volumen, si difieren solo en la polarización, $e^{(\alpha)} \cdot e^{(\alpha')*} = 0$, porque dos direcciones independientes de polarización son mutuamente ortogonales. Argumentos similares se aplican a los vectores $E_{k\alpha}$ y $B_{k\alpha}$. Que se normalizan convenientemente si uno impone la condición:

$$\frac{1}{4\pi}\int(E_{k\alpha} \cdot E_{k'\alpha'} + B_{k\alpha} \cdot B^{*}_{k'\alpha'})d^3x = \omega\delta_{kk'}\delta_{\alpha\alpha'} \tag{4.24}$$

substituyendo los operadores (4.20), (4.21)en (4.8) y haciendo la integración utilizando (4.24) obtenemos el campo Hamiltoniano expresado en función de los operadores $\hat{c}$ y $\hat{c}^{+}$:

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\omega(\hat{c}_{k\alpha}\hat{c}^{+}_{k\alpha} + \hat{c}^{+}_{k\alpha}\hat{c}_{k\alpha}). \tag{4.25}$$

Este operador que es diagonal en la representación en consideración y con valores propios los de la energía (4.12). En la teoría clásica, el momento del campo se define como la integral

$$P = \frac{1}{4\pi}\int E \times Bd^3x \tag{4.26}$$

Al cambiar a la teoría cuántica, se reemplazan E y B por los operadores (4.20) , (4.21) y fácilmente encontramos:

$$\hat{P} = \sum_{k,\alpha}(\hat{P}^2_{k\alpha} + \omega\hat{Q}^2_{k\alpha})n \tag{4.27}$$

Que esta en acuerdo con la relación clásica entre la energía y el momento de las ondas planas. Los valores propios de este operador son:

$$P = \sum_{k.\alpha} k(N_{k\alpha}k\alpha + \frac{1}{2}) \tag{4.28}$$

La representacion de operadores por medio de los elementos de la matriz se llama "representación del numero de ocupación", que corresponde a la descripción del estado de un sistema (el campo) especificando los números cuánticos $N_{k\alpha}$ (los números de ocupación). En esta representación los operadores de campo (4.20) . (4.21), y por lo tanto en el Hamiltoniano, actúan sobre la función de onda del sistema, expresada en término de los números $N_{k\alpha}$; sea esta $\Phi(N_{k\alpha}, t)$. Los operadores de campo (4.20) , (4.21) no son funciones explícitas del tiempo. Esto corresponde a la acostumbrada representación de Schrödinger de operadores en mecánica cuántica no relativista. El estado del sistema,$\Phi(N_{k\alpha}, t)$ depende del tiempo, dependencia que esta regida por la ecuación de Schrödinger:

$$i\partial\Phi/\partial t = \hat{H}\Phi. \tag{4.29}$$

Descripción que es por su naturaleza propia relativista-invariante, pues está basada en las ecuaciones invariantes de Maxwell. Invariancia no explícita, principalmente porque el espacio de coordenadas y el tiempo aparecen en la descripción de manera altamente asimétrica. En teoría relativista, es conveniente poner la descripción en una forma en la cual sea más evidentemente invariante. Para hacerlo, debemos usar la que es llamada representacion de Heisenberg, en la cual la dependencia explícita del tiempo se transfiere a los operadores mismos. Entonces el tiempo y las coordenadas apareceran en las mismas condiciones en las expresiones para los operadores de campos, y el estado del sistema, Φ, dependerá solamente de los números de ocupación. Para el operador $\hat{A}$, el cambio a la representación de Heisenberg equivale a reemplazar el factor $e^{ik.}$ en cada término de la suma (4.18) por $e^{ik(k.r-\omega t)}$, esto es, ver los $A_{k\alpha}$ como las funciones dependientes del tiempo:

$$A_{k\alpha} = \sqrt{4\pi}t\frac{e^{(\alpha)}}{\sqrt{2\omega}}e^{-i(\omega t-k.r)} \tag{4.30}$$

esto se prueba fácilmente al notar que los elementos de la matriz del operador de Heisenberg para la transición $i \to f$ debe incluir el factor $e^{-i(E_i-E_f)t}$, donde E_i y E_f son las energías de los estados inicial y final. Para una transición en la cual N_k aumenta o disminuye por 1. este factor se convierte en $e^{-i\omega t}$ o $e^{i\omega t}$ respectivamente. una condición que es satisfecha haciendo el cambio arriba mencionado.

Capítulo 5

Cuantización por deformación

En este capítulo introducimos los conceptos básicos de la cuantización de un campo escalar. En particular tratamos de las ideas de cuantización canónica y cuantización por deformación. La cuantización canónica se muestra como la que se sigue naturalmente de la mecánica cuántica. En una sección adelante vemos la cuantización por deformación como una técnica que nos permite reproducir los resultados conocidos con una estructura matemática sólida.

5.1. Cuantización canónica del campo escalar.

En esta sección trataremos de esquematizar lo que en la literatura especializada se conoce como cuantización canónica del campo escalar. que se hace siguiendo intuitivamente los principios básicos de Hamilton y de la mecánica cuántica, es decir llevando los principios con grados finitos de libertad a sistemas con infinitos grados de libertad.

Para discutir la hamiltonización de la teoría con un determinado Lagrangiano, se escribe la ecuación de la acción como hemos visto anteriormente,

$$S = \int dt L \tag{5.1}$$

Donde:

$$L = \int d^3x \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi) \tag{5.2}$$

Aquí $t = x^0$ es una coordenada temporal del espacio de Minkowski. Consideraremos el campo $\varphi(x) = \varphi(\mathbf{x}, t)$ como el conjunto de coordenadas $\varphi_x(t)$ del sistema dinámico, donde el vector $\mathbf{x}$ juega el papel de índice. La relación (5.2) muestra que L es una funcional de $\varphi(x) = \varphi(\mathbf{x}, t)$ y de $\dot{\varphi}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial\varphi}{\partial t}$. Por lo que podemos entender L como la función lagrangiana del sistema dinámico.

Se introducen los momentos asociados $\pi(\mathbf{x}, t)$ correspondientes con las coordenadas $\varphi(\mathbf{x}, t)$:

$$\pi(\mathbf{x}, t) = \frac{\delta_t L}{\delta\dot{\varphi}(\mathbf{x}, t)} \tag{5.3}$$

Donde la derivada funcional de la derecha se toma para un valor fijo de t. Debido a la localidad del Langrangiano tenemos de la relación(5.3)

$$\pi(\mathbf{x}, t) = \frac{\delta_t \mathcal{L}}{\delta\dot{\varphi}(\mathbf{x}, t)} \tag{5.4}$$

se asume que se cumple la siguiente condición:

$$det\frac{\delta_t^2 L}{\delta\dot{\varphi}(\mathbf{x}, t)\delta\dot{\varphi}(\mathbf{y}, t)} \neq 0 \tag{5.5}$$

para que la relación (5.3) se resuelva en términos de las velocidades $\dot{\varphi} = f(\pi, \varphi)$. el Hamiltoniano se construye con la regla:

$$H = \int d^3x(\pi\dot{\varphi} - L) \tag{5.6}$$

de donde se obtiene el análogo de la ecuaciones de Hamilton para campo escalar. Ahora, la cuantización de dicha teoría se lleva a cabo con base en los siguientes postulados, que se extraen directo de la mecánica cuántica:

a) El estado del sistema se describe por el vector $|\psi>$ en el espacio de Hilbert, es decir, los observables físicos se representan por operadores hermitianos que actúan en dicho espacio.

b) El valor esperado de un observable A en el estado $|\psi>$ esta dado por $<\psi|\hat{A}|\psi>$ donde $\hat{A}$ es el operador que corresponde a A y $<\psi_1|\psi_2>$ es el producto interior en el espacio de Hilbert.

c) Las coordenadas y momentos $\varphi(g)$, $\pi(g)$ se describen por los operadores hermitianos $\hat{\varphi}(g)$, $\hat{\pi}(g)$ que satisfacen las relaciones de conmutación canónicas:

$$[\hat{\varphi}(\mathbf{x}), \hat{\varphi}(\mathbf{y})] = 0 \tag{5.7}$$

$$[\hat{\pi}(\mathbf{x}), \hat{\pi}(\mathbf{y})] = 0 \tag{5.8}$$

$$[\hat{\varphi}(\mathbf{x}), \hat{\pi}(\mathbf{y})] = \delta_{xy} \tag{5.9}$$

d) La evolución de un estado esta dada por la ecuación de Schrödinger:

$$i\frac{\partial|\psi(t)>}{\partial t} = \hat{H}|\psi(t)> \tag{5.10}$$

donde el operador $\hat{H}$ se obtiene del clásico substituyendo los operadores $\hat{\psi}(g)$, $\hat{\pi}(g)$ en lugar de las coordenadas y momentos $\psi(g)$, $\pi(g)$. Son estos postulados los que componen a grandes rasgos la cuantización canónica, cuya formulación en teoría de campos no es estricta. En particular $\psi(g)$ no representa a un operador sino una función generalizada valuada en un operador. Debido a la localidad el Hamiltoniano contiene productos de los campos en el mismo punto, Siendo que la multiplicación de funciones generalizadas, no esta definida en general.

5.2. Introducción a la cuantización por deformación

La cuantización por deformación se centra en los conceptos básicos de la teoría cuántica: el álgebra de observables y su evolución dinámica. A causa de que trata solamente con funciones en el espacio fase, su rompimiento conceptual con la mecánica clásica es menos violento que el de otros puntos de vista, dándole al principio de correspondencia, una formulación precisa. La herramienta básica de la cuantización por deformación es el producto estrella, el cual deforma el álgebra conmutativa básica de observables en un álgebra cuántica no conmutativa de observables. Recordemos que en mécanica clásica tenemos definido el paréntesis de Poisson de la siguiente manera:

$$[f,g](q,p) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\right)|_{q,p} \tag{5.11}$$

donde f y g son funciones. La siguiente notación que tiene las derivadas junto con simbolos vectoriales nos ayuda, pues es más compacta:

$$f\ \overleftarrow{\partial}_{q_i}\ g = \frac{\partial f}{\partial q_i}g, \quad f\ \overrightarrow{\partial}_{p_i}\ g = f\frac{\partial g}{\partial p_i} \tag{5.12}$$

Si combinamos la fórmula anterior con la notación de Einstein para la suma tenemos que la definición para el paréntesis de Poisson queda:

$$[f,g] = f(\overleftarrow{\partial}_{q_i}\overrightarrow{\partial}_{p_i} - \overleftarrow{\partial}_{p_i}\overrightarrow{\partial}_{q_i})g \tag{5.13}$$

con las siguientes propiedades:

(i) $[f, g] = -[f, g]$.

(ii) $[f, gh] = [f, g]h + g[f, h]$.

(iii)$[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0$

Por lo que las ecuaciones de Hamilton quedan así expresadas:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = [q_i, H], \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = [p_i, H]. \tag{5.14}$$

La principal diferencia entre mecańica clásica y mecánica cuańtica es la relación de incertidumbre de Heisenberg. Esta incertidumbre es consecuencia de la no conmutatividad de los observables en mecánica cuántica: lo que quiere decir que el álgebra clásica de observables debe remplazarse por un álgebra cuántica no conmutativa de observables. Desde el punto de vista convencional esta no conmutatividad se implementa representando los observables mecánicos como operadores lineales en el espacio de Hilbert; siendo las cantidades físicas eigenvalores de dichos operadores y los estados físicos estando relacionados con las eigenfunciones de dichos operadores.

Aunque los operadores están de alguna forma relacionados con su contraparte clásica, el cómo reducir la parte clásica (paréntesis de Poisson) a la cuántica (conmutadores) no ha quedado claro. En 1946 Groenewold publicó un artículo donde exhibía la existencia de estas dificultades y donde también escribía una forma explícita del producto estrella, sin darse cuenta de la valiosa herramienta que representaba para abordar el problema que trataba de enfrentar.

Efectivamente, en la cuantización por deformación no hay tal ruptura al ir del sistema clásico al cuántico, se usan las mismas entidades. La incertidumbre se alcanza describiendo los estados físicos como distribuciones en el espacio fase que no estan agudamente localizadas, en contraste con el caso clásico en donde las variables son representadas por funciones Delta.

La no-conmutatividad se incorpora al introducir un producto no conmutativo entre funciones en el espacio fase, de forma tal que se obtenga un álgebra no conmutativa de observables.

El pasar del álgebra clásica al álgebra cuántica de observables se lleva a cabo de manera continua. Cuando en matemáticas se investiga una estructura en particular y se le modifica para ver como tales modificaciones le afectan, se habla de una deformación en caso de que dicha modificación ocurra de manera continua. Todo el trabajo sobre deformación se generó a partir de un artículo publicado en 1964 por Gerstenhaber, donde se introdujo el concepto de producto estrella de funciones suaves en una variedad. Para las aplicaciones que nos interesan se consideran funciones complejas, suaves en una variedad de Poisson, con el siguiente producto:

$$f * g = fg + (i\hbar)C_1(f,g) + O(\hbar^2) = \sum_{n=0}^{\infty}(i\hbar)^n C_n(f,g). \tag{5.15}$$

La primera parte de la expansión es el producto directo de funciones como lo conocemos, $(i\hbar)$ es llamado el parámetro de deformación, que pensaremos varía continuamente. Si se identifica a $\hbar$ con la constante de Planck, entonces lo que varía es la magnitud de la acción del sistema dinámico considerada en unidades de $\hbar$: los sistemas clásicos corresponden a sistemas de acción grande. En este límite, que se expresa como $\hbar \rightarrow 0$, el producto estrella se reduce al producto usual. En general los coeficientes de C_n serán tales que el nuevo producto sea no conmutativo, y hablamos entonces de un álgebra no conmutativa formada de las funciones con esta nueva ley de multiplicación como una deformación del álgebra conmutativa original, que es la que usa la multiplicación puntual usual.

El descubrimiento de Gerstenhaber radica en que con el hecho de que al producto anterior se le pida que sea asociativo, hace que en la mayoría de los casos los coeficientes sean esencialmente únicos.

Los requerimientos formales de Gerstenhaber fueron los siguientes:

(1) $\sum_{j+k=n} C_j(C_k(f,g),h) = \sum_{j+k=n} C_j(f, C_k(g,h))$,

(2) $C_0(f,g) = fg$,

(3) $C_1(f,g) - C_1(g,f) = [f,g]$.

La propiedad (1) garantiza asociatividad. La propiedad (2) que si $\hbar \rightarrow 0$ entonces $f * g$ coincide con fg. La propiedad (3) nos da una conexión entre el comportamiento clásico y el comportamiento cuántico de un sistema. Si definimos un conmutador usando el nuevo producto:

$$[f,g]_* = f * g - g * f. \tag{5.16}$$

la propiedad (3) se puede escribir como:

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \frac{1}{i\hbar}[f,g]_* = [f,g]. \tag{5.17}$$

la que es una forma muy elegante de escribir el principio de correspondencia. En general la cantidad a la izquierda se reduce al paréntesis de Poisson, sólo en el límite clásico. Las dificultades en los intentos matemáticos anteriores radicaban en el hecho de querer igualar el paréntesis de Poisson con el conmutador. Para aplicaciones en física también requeriremos que el producto estrella sea hermitiano:

$\overline{f * g} = \overline{g} * \overline{f}$. Donde $\overline{f}$ denota el complejo conjugado de f. Para una variedad de Poisson dada, no queda claro si es que existe el producto estrella para funciones suaves, esto es, que es posible encontrar los coeficientes C_n que satisfagan las condiciones arriba mencionadas. Y aunque se encuentren tales coeficientes no está claro que las series que definen a través de (5.15) de una función suave.

En matemáticas se ha trabajado en esta cuestión, para espacios euclidianos. $M = \mathbb{R}^{2n}$, se conoce un producto estrella particular. El coeficiente C_1 se elige antisimetŕico, tal que:

$$C_1(f,g) = \frac{1}{2}\alpha^{ij}(\partial_i f)(\partial_j g) = \frac{1}{2}\{f,g\} \tag{5.18}$$

donde α^{ij} es el tensor antisimético de Poisson, por la propiedad (3) anteriormente mencionada. Los órdenes mas elevados se pueden obtener por exponenciación de C_1. Este procedimiento nos produce el *Producto estrella de Moyal*:

$$f *_M g = f exp[(\frac{i\hbar}{2})\alpha^{ij} \overleftarrow{\partial}_i \overrightarrow{\partial}_j]g \tag{5.19}$$

que en coordenadas canónicas se convierte en:

$$(f *_M g)(p,q) = f(p,q) exp[\frac{i\hbar}{2}((\overleftarrow{\partial}_q \overrightarrow{\partial}_p - \overleftarrow{\partial}_p \overrightarrow{\partial}_q) g(p,q) \tag{5.20}$$

$$= \sum_{m,n}^{\infty} (\frac{i\hbar}{2})^{m+n} \frac{(-1)^m}{m!n!} (\partial_p^m \partial_q^n f)(\partial_p^n \partial_q^m g) \tag{5.21}$$

Nos preguntamos ahora cuando es que un producto estrella es único para una variedad de Poisson dada. Resulta que dos productos $*$ y $*'$ son matemáticamente equivalentes si existe un operador de transición:

$$T = 1 + \hbar T_1 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \hbar^n T_n, \tag{5.22}$$

donde T_n son operadores diferenciales tales que:

$$f *' g = T^{-1}((Tf) * (Tg)). \tag{5.23}$$

se sabe que para $M = \mathbb{R}^{2n}$ todos los productos son matemáticamente equivalentes al producto de Moyal.

5.3. Cuantización por deformación.

Las propiedades del producto estrella se adaptan muy bien para describir el álgebra cuántica de los observables. Recordemos que es asociativo y que incorpora los límites clásicos y semiclásicos. Notemos también que la no-localidad de la mecánica cuántica queda explícita.

En la expresión para el producto de Moyal dada en (5.21) el producto estrella de las funciones f y g en el punto x involucra no sólo los valores de las funciones f y g en este punto, sino también todas las derivadas de orden superior de estas funciones en x. Pero para una función suave, el conocer todas las derivadas en un punto dado es equivalente a conocer a la función en todo el espacio. Sabemos también que el saber el valor de las funciones en todo el espacio es necesario para saber el resultado del producto estrella de dos funciones.

Los distintos productos estrella corresponden a distintos esquemas de cuantización. Al elegir un esquema, se pueden calcular las cantidades que nos interesen. Resulta que diferentes esquemas de cuantización nos llevan a distintos espectros de observables. La elección de un esquema de cuantización específico sólo puede ser motivado por los requerimientos físicos.

Un estado físico es caracterizado por su energía E, el conjunto de todos los posibles valores de la energía es llamado el espectro del sistema. Los estados se describen por distribuciones en el espacio fase llamadas proyectores. El estado correspondiente a la energía E se denota $\pi_E(q,p)$.

Estas distribuciones están normalizadas:

$$\frac{1}{2\pi\hbar}\int \pi_E(q,p)dqdp = 1 \tag{5.24}$$

y son idempotentes:

$$(\pi_E * \pi_{E'})(q,p) = \delta_{E,E'}\pi_E(q,p). \tag{5.25}$$

el hecho de que la función de Hamilton tome el valor E cuando el sistema está en un estado correspondiente a esta energía se expresa como:

$$(H * \pi_E)(q,p) = E\pi_E(q,p). \tag{5.26}$$

que corresponde a la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo. La descomposición espectral de la función de Hamilton se da por:

$$H(q,p) = \sum_E E\pi_E(q,p) \tag{5.27}$$

donde el signo de suma puede tomarse como integral en el caso en que el espectro sea continuo. De aquí, que podamos escribir, a un determinado valor de la energía como en mecánica cuántica:

$$E = \frac{1}{2\pi\hbar}\int H * \pi_E(q,p)dqdp = \frac{1}{2\pi\hbar}\int H(q,p)\pi_E(q,p)dqdp, \tag{5.28}$$

donde se ha utilizado el producto estrella.

La forma de la función que evoluciona en el tiempo se denota por $Exp(Ht)$ y el hecho de que la función de Hamilton es la generadora de la evolución temporal del sistema se expresa como:

$$i\hbar(\frac{d}{dt})Exp(Ht) = H * Exp(Ht). \tag{5.29}$$

que corresponde a la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo. Esta ecuación diferencial se resuelve a través de la exponencial estrella:

$$Exp(Ht) := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\frac{-it}{\hbar})^n(H*)^n, \tag{5.30}$$

Donde:

$$(H*)^n = \underbrace{H * H * \cdots * H}_{nveces} \tag{5.31}$$

como cada estado de energía definida E tiene una evolución en el tiempo $e^{-iEt/\hbar}$, se espera que la evolución completa se escriba en la forma:

$$Exp(Ht) = \sum_E \pi_E e^{-iEt/\hbar}. \tag{5.32}$$

expresión que se conoce como la *expansión de Fourier-Dirichlet* para la función de evolución temporal.

Todavía quedan algunas preguntas sobre la existencia y la unicidad de la exponencial estrella como función C^∞, también la naturaleza del espectro y los proyectores requieren análisis matemático más cuidadoso. El problema de encontrar condiciones necesarias sobre la función de Hamilton H que garantice un espectro físico razonable es análogo al problema de mostrar en el enfoque convencional que el operador $\hat{H}$ es autoaujunto y a encontrar sus proyecciones.

Veamos ahora un ejemplo de como es que podemos utilizar este producto en un problema conocido.

5.4. El oscilador armónico.

El oscilador armónico simple se caracteriza por la siguiente función Hamiltoniana:

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}q^2 \tag{5.33}$$

en términos de las variables holomórfas

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2}}(q + i\frac{p}{m\omega}), \quad \overline{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2}}(q - i\frac{p}{m\omega}) \tag{5.34}$$

la función Hamiltoniana se convierte en :

$$H = \omega a\overline{a} \tag{5.35}$$

Nuestro objetivo es el de calcular la función de evolución en el tiempo. Primero elegimos un esquema de cuantización caracterizado por el producto estrella normal.

$$f *_N g = f e^{(\hbar\overleftarrow{\partial}_a \overrightarrow{\partial}_{\overline{a}})} g \tag{5.36}$$

obtenemos:

$$\overline{a} *_N a = a\overline{a}, a *_N \overline{a} = a\overline{a} + \hbar \tag{5.37}$$

tal que:

$$[a, \overline{a}]_{*N} = \hbar \tag{5.38}$$

de donde la ecuación para la evolución temporal:

$$i\hbar(\frac{d}{dt})Exp(Ht) = H * Exp(Ht) \tag{5.39}$$

queda dada por:

$$i\hbar\frac{d}{dt}Exp_N(Ht) = (H + \hbar\omega\overline{a}\partial_{\overline{a}})Exp_N(Ht) \tag{5.40}$$

con solución:

$$Exp_N(Ht) = e^{a\overline{a}/\hbar} exp(e^{-i\omega t} a\overline{a}/\hbar) \tag{5.41}$$

expandiendo la última exponencial, obtenemos la expansión de Fourier-Dirichlet:

$$Exp_N(Ht) = e^{-a\bar{a}/h} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\hbar^n n!} \bar{a}^n a^n e^{-in\omega t} \tag{5.42}$$

si comparamos los coeficientes en (5.32) y (5.42) encontramos:

$$\pi_0^{(N)} = e^{a\bar{a}/\hbar} \tag{5.43}$$

$$\pi_n^{(N)} = \frac{1}{\hbar^n n!}\pi_0 \bar{a}^n a^n = \frac{1}{\hbar}^n n!\bar{a}^n *_N \pi_0^(N) *_N a^n \tag{5.44}$$

$$E_n = n\hbar\omega \tag{5.45}$$

que no incluye la energía del punto cero. El proyector sobre el estado base $\pi_0^{(N)}$ satisfacе:

$$a *_N \pi_0^{(0)} = 0 \tag{5.46}$$

la descomposición de la función de Hamilton es en este caso:

$$H = \sum_{n=0}^{\infty} n\hbar\omega(\frac{1}{\hbar n!}e^{-a\bar{a}/\hbar\bar{a}^n a^n}) = \omega a\bar{a} \tag{5.47}$$

La función de Hamilton es desde luego una cantidad clásica, el factor $\hbar$ en el espectro viene del parámetro de deformación en el producto estrella. Consideremos ahora el esquema de cuantización de Moyal. Si se escribe la ecuación (5.20) en términos de las coordenadas holomorfas, obtenemos:

$$f *_M g = fexp[\frac{\hbar}{2}(\overleftarrow{\partial}_a\overrightarrow{\partial}_{\overline{a}} - \overleftarrow{\partial}_{\overline{a}}\overrightarrow{\partial}_a)]g \tag{5.48}$$

acá tenemos que:

$$a *_M \overline{a} = a\overline{a} + \frac{\hbar}{2}\overline{a} *_M a = a\overline{a} - \frac{\hbar}{2} \tag{5.49}$$

y otra vez:

$$[a, \overline{a}]_{*M} = \hbar \tag{5.50}$$

el valor del conmutador no cambia cuando cambiamos a un producto estrella equivalente. El producto estrella de Moyal es equivalente al producto estrella normal con el operador de transición:

$$T = exp(-\frac{\hbar}{2}\vec{\partial_a}\vec{\partial_{\overline{a}}}) \tag{5.51}$$

podemos usar este operador para transformar la versión del producto normal de la ecuación de estrella valores. (5.26) en la versión correspondiente de acuerdo con (5.23). El resultado es:

$$H = *_M\pi_n^{(M)} = \omega(\bar{a} *_M a + \frac{\hbar}{2}) *_M \pi_n^{(M)} = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})\pi_n^{(M)} \tag{5.52}$$

con:

$$\pi_0^{(M)} = T\pi_0^{(0)} = 2e^{-2a\bar{a}/\hbar} \tag{5.53}$$

$$\pi_n^{(M)} = T\pi_n^{(N)} = \frac{1}{\hbar^n n!}\bar{a}^n *_M \pi_0^{(M)} *_M a^n \tag{5.54}$$

el proyector en el estado base satisface:

$$a *_M \pi_0^{(M)} = 0 \tag{5.55}$$

de ahí que el espectro para las energías sea:

$$E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega \tag{5.56}$$

que es el resultado esperado. De donde concluimos que para este problema el esquema de cuantización de Moyal es el adecuado. El uso del producto de Moyal en la ecuación (5.29) para la exponencial estrella en el oscilador armónico nos lleva a la siguiente ecuación diferencial:

$$i\hbar\frac{d}{dt}Exp_M(Ht) = (H - \frac{(\hbar\omega)^2}{4}\partial_H - \frac{(\hbar\omega)^2}{4}H\partial_H^2)Exp_M(Ht) \tag{5.57}$$

con solución:

$$Exp_M(Ht) = \frac{1}{cos\omega t/2}exp[(\frac{2H}{i\hbar\omega})tan\frac{\omega t}{2}] \tag{5.58}$$

que puede ser llevada a la forma de la expansión de Fourier-Dirichlet usando la función generadora de los polinomios de Laguerre.

$$\frac{1}{1+s}exp(\frac{zs}{1+s}) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n(-1)^n L_n(z) \tag{5.59}$$

con $s = e^{-i\omega t}$ los proyectores se convierten entonces en:

$$\pi_n^{(M)} = 2(-1)^n e^{-2H/\hbar\omega} L_n(\frac{4H}{\hbar\omega}) \tag{5.60}$$

5.5. Cuantización de la teoría linearizada

Apliquemos ahora este procedimiento a la teoría linearizada. Las variables en el espacio fase de la teoría linearizada son los potenciales $A_\alpha = -1/4(4\phi, \gamma_i)$ y sus momentos canónicos $\Pi_\alpha = -1/4(4\dot{\phi}, \dot{\gamma}_i)$. Como vimos en la sección 3.3 el Hamiltoniano queda dado por:

$$H = \frac{1}{2}\int d^3x(\Pi_\alpha \Pi^\alpha + A_{\alpha,i}A^{\alpha,i}) \tag{5.61}$$

Para cuantizar ahora, hacemos una expansión como la que hemos hecho para la teoría de Maxwell, esto es:

$$A_\alpha(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d\mathbf{k}[a_\alpha(\mathbf{k})e^{ikx} + \bar{a_\alpha}(\mathbf{k})e^{-ikx}] \tag{5.62}$$

donde k es un vector nulo $k_\mu k^\mu = -k_0^2 + \mathbf{k}^2 = 0$, y $kx = k_\mu x^\mu$. Entonces:

$$\Pi_\alpha = \dot{A}_\alpha = \frac{i}{(2\pi)^{3/2}}\int d\mathbf{k}\sqrt{\frac{k_0}{2}}\left[a_\alpha(\mathbf{k})e^{ikx} - \overline{a}_\alpha(\mathbf{k})e^{-ikx}\right] , \tag{5.63}$$

además,

$$A_{\alpha,j} = \frac{i}{(2\pi)^{3/2}}\int \frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{2k_0}}k_j\left[a_\alpha(\mathbf{k})e^{ikx} - \overline{a}_\alpha(\mathbf{k})e^{-ikx}\right] . \tag{5.64}$$

de A_α y Π_β encontramos que,

$$a_\alpha(\mathbf{k}) = \frac{(2\pi)^{3/2}}{\sqrt{2k_0}i}\int (i\sqrt{\frac{k_0}{2}}A_\alpha + \Pi_\alpha)e^{-ikx}d\mathbf{k} \tag{5.65}$$

$$\overline{a}_\alpha(\mathbf{k}) = \frac{(2\pi)^{3/2}}{\sqrt{2k_0}i}\int (i\sqrt{\frac{k_0}{2}}A_\alpha - \Pi_\alpha)e^{ikx}d\mathbf{k} \tag{5.66}$$

Las relaciones de conmutación quedan:

$$[a_\alpha, \overline{a}_\beta]_{*N} = \delta_{\alpha\beta}\hbar , \qquad [a_\alpha. a_\beta]_{*N} = [\overline{a}_\alpha, \overline{a}_\beta]_{*N} = 0 , \tag{5.67}$$

donde se ha tomado el mismo valor de $\mathbf{k}$ para todos los argumentos. Introducimos el valor de (5.63) y (5.64) en el Hamiltoniano (5.61). Haciendo la integración nos queda:

$$H = \frac{1}{2}\int k_0\eta^{\alpha\beta}a_\alpha(\mathbf{k})\overline{a}_\beta(\mathbf{k})d\mathbf{k} \tag{5.68}$$

Hamiltoniano que es lineal en las nuevas variables y no contiene derivadas. Este Hamiltoniano puede ser interpretado como una suma infinita de osciladores armónicos. Esto nos permite utilizar el producto estrella normal para la cuantización. Con esto ahora podemos resolver la ecuación (5.29), cuya solución es:

$$\ln \mathrm{Exp}_N(Ht) = \frac{1}{\hbar}\left(e^{-ik_0t} - 1\right) \int \eta^{\alpha\beta} a_\alpha(\mathbf{k})\overline{a}_\beta(\mathbf{k}) d\mathbf{k} \; . \tag{5.69}$$

donde hemos utilizado la exponencial con el producto normal como anteriormente. Usando la definición de la exponencial de una funcional la última expresión puede ser escrita como:

$$\mathrm{Exp}_N(Ht) = \exp\left(-\frac{1}{\hbar}\int \eta^{\alpha\beta} a_\alpha(\mathbf{k})\overline{a}_\beta(\mathbf{k}) d\mathbf{k}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-ink_0t}}{n!\hbar^n} \int \eta^{\alpha\beta} a^n_\alpha(\mathbf{k})\overline{a}^n_\beta(\mathbf{k}) d\mathbf{k} \; . \tag{5.70}$$

Al comparar esta expresión con la expansión de Fourier-Dirichlet identificamos los estados como:

$$\pi^N_{E_0} = \exp\left(-\frac{1}{\hbar}\int \eta^{\alpha\beta} a_\alpha(\mathbf{k})\overline{a}_\beta(\mathbf{k}) d\mathbf{k}\right) \; , \tag{5.71}$$

$$\pi^N_{E_n} = \frac{1}{n!\hbar^n}\pi^N_{E_0} \int \eta^{\alpha\beta} a^n_\alpha(\mathbf{k})\overline{a}^n_\beta(\mathbf{k}) d\mathbf{k} \; , \tag{5.72}$$

y el espectro de energía

$$E_n = n\hbar k_0 \; . \tag{5.73}$$

Hemos así, llegado al objetivo final de la cuantización, que es la determinación de los estados cuánticos y del espectro de energía del sistema. Y lo hemos hecho sin utilizar operadores. La pregunta que debemos resolver ahora sobre el significado del resultado.

Recordemos ahora que llegamos al Lagrangiano en el nivel clásico imponiendo la norma de Lorentz. Por lo que resulta natural imponer este requisito sobre los estados cuánticos para encontrar aquellos que puedan tener algún significado físico.

$$A_\alpha^{\;,\alpha} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{2k_0}} ik^\alpha \left[a_\alpha(\mathbf{k})e^{ikx} - \overline{a}_\alpha(\mathbf{k})e^{-ikx}\right] = 0 \; . \tag{5.74}$$

condición que se satisface si:

$$k^\alpha a_\alpha(\mathbf{k}) = 0 \; , \tag{5.75}$$

que nos dice que solo tres componentes de $a_\alpha(\mathbf{k})$ son linealmente independientes. Además tenemos otra condición sobre la función armónica que nos dice que una componente más de $a_\alpha(\mathbf{k})$ puede eliminarse.

Sólo nos han quedado dos componentes digamos $a_1(\mathbf{k})$ y $a_2(\mathbf{k})$. Este hecho esta en concordancia con el hecho de que el campo gravitacional sólo tiene dos grados de libertad físicos [4].

Capítulo 6

Conclusiones

El objetivo principal de este trabajo fue el de utilizar la cuantizacón por deformación en la teoría linearizada de la gravedad. De todo este trabajo se extrae el siguiente resumen:

Uno. Se exploraron distintas formas para obtener la ecuación linearizada de Eisntein.

Dos. Se calculó el tensor energía momento de la teoría linearizada, utilizando la definición de Energía de la teoría de campos.

Tres. Se exhibe el paralelismo entre la teoría linearizada y la forma covariante de la electrodinámica.

Cuatro. Se da una interpretación física a una forma de la métrica dentro de la teoría linearizada, donde se habla del potencial "gravitomagnético".

Cinco. Se muestran distintas formas de cuantizar distintos campos: cuantización canónica del campo electromagnético, cuantización canónica del campo escalar y cuantización por deformación.

Seis. Se muestran principios básicos de la cuantización por deformación.

Siete. Se muestra un ejemplo particular: el oscilador armónico.

Ocho. Se cuantiza por deformación la teoría linearizada de Einstein.

De lo anterior se concluye: El resultado principal de esta tesis es haber encontrado el espectro de energía y los estados cuánticos de la teoría linearizada de Einstein. Para ello encontramos una forma muy particular del Hamiltoniano del cual se derivan las ecuaciones linearizadas de Einstein. Este Hamiltoniano nos permite aplicar el procedimiento de cuantización por deformación de una forma análoga al caso del oscilador armónico o del campo electromagnético, utilizando las variables A_α que estan completamente determinadas en términos de las perturbaciones $h_{\alpha\beta}$ de la metrica de Minkowski. Los resultados muestran un espectro discreto para la energía, con un un valor de cero para la energía del estado base ($n = 0$). Los estados cuánticos están dados en términos de las variables a_α y $\overline{a}_\alpha$ que corresponden a los coeficientes en la descomposición de Fourier de A_α. Consecuentemente, podemos decir que las perturbaciones de la métrica de Minkowski determinan la densidad de los estados cuánticos. Pero estos resultados no son de ninguna manera concluyentes. No se ha dicho nada sobre el significado físico de los estados cuánticos. Sería necesario llevar a cabo un análisis más detallado para encontrar las propiedades de estos estados, una tarea que queda para un trabajo posterior.

En el apéndice incluimos el artículo *"Towards the deformation quantization of linearized gravity"* [6] que se encuentra en proceso de arbitraje y puede ser considerado como un resumen de los resultados contenidos en esta tesis.

Bibliografía

[1] Antonsen F. *Deformation Quantisation of Gravity* (gr-qc/9712012).

[2] Lightman, et al., *Problem book in relativity and gravitation.* (Princeton University Press,1975).

[3] Bogoliubov & Shirkov *Introduction to the Theory of Quantized Fields.* (New york : Interscience, 1959).

[4] Wald, Robert M. *General relativity* (Chicago University Press, 1984).

[5] Stephani, Hans *General relativity: An introduction to the theory of the gravitational field* (Cambridge University Press, 1990).

[6] H. Quevedo and J. G. Tafoya, *Towards the deformation quantization of linearized gravity* arXiv:gr-qc/0401088.

[7] Schutz, Bernard F. *A first course in general relativity* (Cambridge university press, 1985).

[8] D. M. Gitman and I. V. Tyutin, *Quantization of fields with constraits* (Springer-Verlag, Berlin, 1990).

[9] Landau & Lifshitz *Teoría clásica de los campos* (Reverté, 1973).

[10] Hirshfeld A. C. & Henselder P. *Deformation quantization in the teaching of quantum mechanics* (Am. J. Phys. 70(5), May 2002).

[11] H. García-Compean. J.F. Plebanski, M. Przanowski and F.J. Turrubiates *Deformation Quantization of Classical Fields* (Int.J.Mod.Phys A16 (2001) 2533-2558)

Apendice Único.

Towards the deformation quantization of linearized gravity

Hernando Quevedo[1,2,*] and Julio G. Tafoya[1,†]

[1]Instituto de Ciencias Nucleares

Universidad Nacional Autónoma de México

A. Postal 70-543, México D.F. 04510, MEXICO

[2]Department of Physics

University of California

Davis, CA 95616, USA

Abstract

We present a first attempt to apply the approach of deformation quantization to linearized Einstein's equations. We use the analogy with Maxwell equations to derive the field equations of linearized gravity from a modified Maxwell Lagrangian which allows the construction of a Hamiltonian in the standard way. The deformation quantization procedure for free fields is applied to this Hamiltonian. As a result we obtain the complete set of quantum states and its discrete spectrum.

PACS numbers: 04.20.Cv,04.25.-g,11.10.-Nx

*Electronic address: `quevedo@physics.ucdavis.edu`

†Electronic address: `antonio@nuclecu.unam.mx`

I. INTRODUCTION

One of the main differences between the states of a classical system and those of a quantum system consists in that the latter cannot be represented as points in phase space. In the canonical quantization approach this fact is taken into account by considering states as eigenfunctions of operators which act on Hilbert space. The eigenvalues of the operators are then interpreted as quantum observables. So, one of the main steps of the canonical quantization formalism consists basically in replacing the classical observables of the physical system by operators. Commutation relations are then imposed on the operators in order to be in agreement with Heisenberg's uncertainty relation. Although this procedure is widely used in quantum mechanics and quantum field theory, it is still far from being completely understood. In particular, one expects that in certain limit the quantum system reduces to the classical one. This is usually done by applying the correspondence principle, according to which the quantum commutator must lead to the classical Poisson bracket when Planck's constant vanishes. However, it is known that in general this limit is not well-defined and inconsistent [1].

One of the main successes of deformation quantization consists in providing the correct implementation of the correspondence principle. Indeed, deformation quantization avoids the use of operators and, instead, concentrates on the algebra of classical observables (see [2–4] for recent reviews, and [5] for an elementary review.) Instead of the usual (classical) point multiplication between observables, a star-product is introduced that takes into account the non-local character of quantum observables and reduces to the classical Poisson bracket in the appropriate limit. Whereas the classical observables build a commutative algebra with respect to the point product, the same set forms a noncommutative algebra with respect to the star-product. Thus, it is not necessary to introduce new entities (operators) instead of the classical observables. The quantum observables are represented by the same functions on phase space as the classical observables. The first applications of deformation quantization concerned non-relativistic quantum mechanics [6], but this situation has changed dramatically in the past few years. This formalism has found many uses in perturbative and nonperturbative quantum field theory [7–13], quantum gravity [14], as well as in string theory [15, 16].

In this work we present a first attempt to apply the main concepts of deformation quantization to the case of linearized gravity. Our approach consists basically in representing Einstein's linearized equations as a field theory of a metric on the background of Minkowski spacetime. This approach allows us to apply in this case the procedure of deformation quantization developed for free fields. Our approach is also appropriate for getting rid of the concern regarding the quantization of a quantity (the perturbation metric) which is first considered as infinitesimal in order for Einsteins linearization to be valid. Indeed, intuitively one expects that quantum effects become important only when the gravitational field is high enough, and the perturbation metric in the standard approach does not behave this way. In the field theoretical approach the metric is arbitrary and linearized Einsteins equations follow from a variational principle. The corresponding Lagrangian is regular and the Hamiltonian turns out to be equivalent to the Hamiltonian of an infinite sum of harmonic oscillators.

This paper is structured as follows. In Section II we derive Einsteins linearized equations in the standard manner and present an alternative field theoretical approach based upon the analogy between electrodynamics and linearized gravity. In Section III, we review the main aspects of deformation quantization and calculate explicitly the set of quantum states and the energy spectrum of linearized gravity. Finally, in Section IV we discuss our results.

II. LINEARIZED GRAVITY

In this section we first review the standard approach of linearized gravity in which the field equations are obtained by linearizing Einsteins equations. Then we present an alternative approach based on the usual variational procedure of field theory and obtain the corresponding Hamiltonian.

A. Linearized Einsteins equations

In most textbooks on general relativity, linearized gravity is considered at the level of the field equations. Indeed, in the usual approach to gravity, one starts from the Einstein-Hilbert action [18]

$$S = \int R\sqrt{-g}d^4x + \alpha_m \int \mathcal{L}_m d^4x \ , \tag{2.1}$$

where R is the curvature scalar associated to the metric $g_{\alpha\beta}$, $(\alpha, \beta, ... = 0, 1, 2, 3)$ of spacetime, α_m is a coupling constant and $\mathcal{L}_m$ is the Lagrangian density that represents the matter contents in spacetime. The variation of (2.1) with respect to the metric yields the Einstein equations

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R = 8\pi T_{\alpha\beta} \ , \tag{2.2}$$

where the energy-momentum tensor is defined in terms of the variational derivative as

$$T_{\alpha\beta} = -\frac{\alpha_m}{8\pi}\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta g^{\alpha\beta}} \ . \tag{2.3}$$

In the weak field approximation of linearized gravity one imposes the metric $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$ such that $h_{\alpha\beta} << \eta_{\alpha\beta}$ is an infinitesimal perturbation of the background Minkowski metric, $\eta_{\alpha\beta}$. In particular, one can choose a Cartesian-like coordinate system in which $\eta_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(-,+,+,+)$ and $|h_{\alpha\beta}| << 1$. If we now consider the first order approximation of the left-hand side of (2.2) with respect to $h_{\alpha\beta}$, and impose the Lorentz gauge condition

$$\overline{h}^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0 \ , \qquad \text{with} \qquad \overline{h}^{\alpha\beta} = h^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}h \ , \qquad h = \eta_{\alpha\beta}h^{\alpha\beta} \tag{2.4}$$

then Einstein's equations reduce to

$$\overline{h}_{\alpha\beta,\gamma}{}^{\gamma} = -16\pi T_{\alpha\beta} \ . \tag{2.5}$$

B. A field theoretical approach

An alternative approach for deriving the linearized equations (2.5), in which the particular aspects of a field theory become more plausible, consists in using the analogy between Maxwell's equations of electromagnetism and linearized Einstein's equations. To show this analogy explicitly let us consider a non-zero vector U^α and define

$$A_\alpha = -\frac{1}{4}\overline{h}_{\alpha\beta}U^\beta \ , \quad \text{and} \quad J_\alpha = -T_{\alpha\beta}U^\beta \ . \tag{2.6}$$

Calculating the D'Alembertian $A_{\alpha,\gamma}{}^{\gamma}$, one can see immediately that the Maxwell equations

$$A_{\alpha,\gamma}{}^{\gamma} = -4\pi J_\alpha \ , \tag{2.7}$$

are equivalent to the linearized Einstein equations (2.5) if the components of the arbitrary vector U^α satisfy the equations

$$\overline{h}_{\alpha\beta}U^{\beta}{}_{,\gamma}{}^{\gamma} + 2\overline{h}_{\alpha\beta,\gamma}U^{\beta,\gamma} = 0 \ . \tag{2.8}$$

On the other hand, the Lorentz gauge condition (2.4) turns out to be equivalent to the condition $A^{\alpha}{}_{,\alpha} = 0$ if the equation

$$\overline{h}_{\alpha\beta} U^{\beta,\alpha} = 0 \ , \tag{2.9}$$

is satisfied. In this way we see that the linearized Einstein equations can be written in the Maxwell-like form (2.7) (in the Lorentz gauge) by introducing the additional vector U^{α} which is required to satisfy the conditions (2.8) and (2.9). For a given metric $\overline{h}_{\alpha\beta}$, these conditions represent a system of four second order partial differential (2.8) and one first order partial differential equation (2.9) for the four components U^{α}. So one should guarantee the existence of solutions to this system for the Maxwell-like representation (2.7) to be valid. Obviously, the trivial vector U^{α} = const satisfies these requirements. In principle, more general solutions might exist, but in this work we will restrict ourselves to this special case since it is sufficient for our purposes.

On the other hand, it is well known that Maxwell equations (2.7) can be obtained by varying the Lagrangian (density)

$$\mathcal{L}_{Max} = -\frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + 4\pi A_{\alpha} J^{\alpha} \ , \quad \text{where} \quad F_{\alpha\beta} = A_{\beta,\alpha} - A_{\alpha,\beta} \ , \tag{2.10}$$

with respect to the potential A_{α}. Let us now try to construct the corresponding Hamiltonian formalism. The configuration variables are given by the set of components A_{α}. For the corresponding canonically conjugate momenta we obtain $\Pi_{\alpha} = \partial \mathcal{L}_{Max} / \partial \dot{A}_{\alpha} = F_0{}^{\alpha}$, where a dot denotes the derivative with respect to the time coordinate x^0. Then $\Pi_0 = 0$ and consequently we have a singular Lagrangian from which a Hamiltonian cannot be constructed. In field theory the quantization of such Lagrangians is performed by using Dirac's method for systems with constraints (see, for instance, [20]). But in the context of deformation quantization this method is still under construction [17]. In the case of Maxwell's theory, however, an alternative approach exists [21] that consists in modifying the original Maxwell Lagrangian according to (we take $J_{\alpha} = 0$ for simplicity)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} (A_{\alpha}{}^{,\alpha})^2 \ . \tag{2.11}$$

The field equations are again $A_{\alpha,\beta}{}^{\beta} = 0$ and the Lorentz gauge condition $A_{\alpha}{}^{,\alpha} = 0$ has to be postulated separately. After some algebraic manipulations, the Lagrangian (2.11) can be rewritten as

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} A_{\alpha,\beta} A^{\alpha,\beta} + \frac{1}{2} \Lambda^{\beta}{}_{,\beta} \ , \qquad \Lambda^{\beta} = A^{\beta}{}_{,\gamma} A^{\gamma} - A^{\beta} A^{\gamma}{}_{,\gamma} \ . \tag{2.12}$$

The second term can be neglected as it can be transformed after integration into a surface term that does not contribute to the field equations. But the main point about the Lagrangian (2.12) is that it is regular. In fact, it can easily be seen that $\Pi_\alpha = \dot{A}_\alpha$ and the corresponding Hamiltonian is

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(\Pi_\alpha \Pi^\alpha + A_{\alpha,i} A^{\alpha,i}) \ . \tag{2.13}$$

Then the canonical variables of the phase space satisfy the canonical commutation relations with respect to the Poisson bracket:

$$\{A_\alpha, \Pi_\beta\} = \delta_{\alpha\beta} \ , \quad \{A_\alpha, A_\beta\} = \{\Pi_\alpha, \Pi_\beta\} = 0 \ . \tag{2.14}$$

We will use the Hamiltonian (2.13) in the context of deformation quantization in section III. Finally, let us mention that the Lagrangian (2.12) is invariant with respect to the transformation

$$A_\alpha \to A'_\alpha = A_\alpha + \Sigma_{,\alpha} \ , \quad \text{with} \quad \Sigma_{,\alpha}{}^{\alpha} = 0 \ . \tag{2.15}$$

This is a special gauge transformation that can be used to eliminate non-physical degrees of freedom.

The main point of this alternative approach is that we now can "forget" that $\mathcal{L}$ is an approximate Lagrangian and proceed as in standard classical field theory. That is, (2.12) can be interpreted as the Lagrangian for the metric field $h_{\alpha\beta}$ which is defined on the Minkowski spacetime with metric $\eta_{\alpha\beta}$. So we are dealing with a standard field theory in which the background Minkowski metric does not interact with the field $h_{\alpha\beta}$ that now can be completely arbitrary, i.e. it is not necessarily an infinitesimal perturbation of the background metric. In this manner we can avoid the concern mentioned in the introduction about the quantization of an infinitesimal quantity.

III. DEFORMATION QUANTIZATION

The classical description of the evolution of a physical system is usually represented in the phase space Γ, which is a manifold of even dimension. If a (non-degenerate) symplectic two-form α exists on Γ, then the phase space is called a symplectic space. Observables are real valued functions defined on the phase space: $f, g : \Gamma \to R$. With respect to the usual point multiplication $(fg)(x) = f(x)g(x)$, where $x = (x^1, x^2, ... x^{2n})$ is a set of coordinates on (an open subspace of) Γ, the observables build a commutative algebra. The symplectic structure α allows us to introduce the Poisson bracket of observables as $\{f, g\}(x) = \alpha^{ab}\partial_a f(x)\partial_b g(x)$, where ∂_a $(a = 1, 2, ...2n)$ is the (covariant) derivative in Γ. With respect to the Poisson bracket the set of observables build a Lie-Poisson algebra. The equations of motion in phase space acquire a particular symmetric form in terms of the Poisson brackets $\dot{x}^a = \{x^a, \mathcal{H}\}$, a relationship which is valid for any function of phase space coordinates.

In the canonical approach to quantization one replaces the observables by (self-adjoint) operators which act on the Hilbert space. The physical states are vectors in the Hilbert space. Poisson brackets are replaced by commutators which, when applied to the operators associated with the basic observables in phase space, satisfy the canonical commutation relations. Despite its great success especially in the perturbative approach to the physics of elementary particles, this procedure is still not completely understood. The passage from functions to operators is one important step in the canonical approach and despite many efforts done to explain it, today the best way to avoid all kind of existence proofs and mathematical difficulties is just to assume it as a postulate.

Deformation quantization is essentially an attempt to avoid the passage from functions to operators. In fact, it focuses on the algebra of observables of the phase space and replaces the usual point product of functions by a star-product. The canonical commutation relations are now a consequence of the definition of the star-product. An important advantage of this procedure is that quantum as well classical observables are functions defined on the phase space and no operators are required. From the mathematical point of view, the deformation quantization of a given classical system consists in giving an appropriate definition of the star-product which acts (on functions defined) on the phase space. In physics, however, to understand a quantum system one needs to know its quantum states and their energy spectrum. To this end, deformation quantization postulates the existence of a time-evolution function, $\mathrm{Exp}(Ht)$, which satisfies the differential equation [13]

$$i\hbar\frac{d}{dt}\mathrm{Exp}(Ht) = H * \mathrm{Exp}(Ht) \ , \tag{3.1}$$

where H is the Hamiltonian of the classical system. Moreover, it is assumed that the time-evolution function allows a Fourier-Dirichlet expansion as

$$\mathrm{Exp}(Ht) = \sum_E \pi_E e^{-itE/\hbar}, \tag{3.2}$$

where E is the energy (a real number) associated with the state π_E (distribution on the phase space), or Wigner function, which satisfies the so called *-genvalue equation

$$H * \pi_E = E\pi_E \ . \tag{3.3}$$

The states are idempotent and complete. i.e.:

$$\pi_E * \pi_{E'} = \delta_{E,E'}\pi_E \ , \qquad \sum_E \pi_E = 1 \ . \tag{3.4}$$

As a consequence, the spectral decomposition of the Hamiltonian is give as

$$H = \sum_E E\,\pi_E \ . \tag{3.5}$$

Essentially, the objects that are necessary for carrying out the deformation quantization of a physical system are the *classical* Hamiltonian H and the *-product. For a given phase space it is not clear *a priori* if a consistent *-product exists or not and, for a general phase space, this is still an open problem [4]. In the case of free (non-interacting) fields that can be considered heuristically as the sum of an infinite number of harmonic oscillators, it has been shown [7] that the normal star-product is the only admissible star-product. The normal *-product between two functions f and g on phase space is defined by

$$f *_N g = e^{N_{12}} f(a^{(1)}, \overline{a}^{(1)}) g(a^{(2)}, \overline{a}^{(2)}) \Big|_{a^{(1)}=a^{(2)}=a} \ , \qquad N_{12} = \hbar\delta_{ij}\frac{\partial}{\partial a_i^{(1)}}\frac{\partial}{\partial \overline{a}_j^{(2)}} \ , \tag{3.6}$$

where the superscritpts (1) and (2) denote two arbitrary points in phase space and $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$. Furthermore, an overline denotes complex conjugation. The set of phase space variables has to satisfy the standard commutation relations with respect to the Poisson bracket, i.e. $\{a_i, \overline{a}_j\} = \delta_{ij}$, $\{a_i, a_j\} = \{\overline{a}_i, \overline{a}_j\} = 0$. In particular one can choose $a_j = 1/\sqrt{2}(x_j + ix_{n+j}), (j = 1, ..., n)$, where we are assuming that the configurational variable x_j and its conjugate momentum x_{n+j} have been normalized to come out with the same units.

Let us now apply this procedure to the linearized theory. According to the results given in section II, the canonical variables in the phase space of linearized gravity are the potentials $A_\alpha = -(1/4)\overline{h}_{\alpha\beta}U^\beta$ and their canonical momenta $\Pi_\alpha = \dot{A}_\alpha$. The Hamiltonian is given by

$$H = \frac{1}{2}\int d^3x \left(\Pi_\alpha\Pi^\alpha + A_{\alpha,i}A^{\alpha,i}\right) \ . \tag{3.7}$$

The main step in the quantization procedure consists in solving Eq.(3.1) by using the normal *-product (3.6). To this end it is convenient to change from the variables of phase space

(A_α, Π_α) to a new set of canonically conjugate variables in which the Hamiltonian takes the simplest possible form. This procedure is very well known in field theory and consists in introducing the momentum representation of the phase variable A_α according to [21]

$$A_\alpha(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{2k_0}} \left[a_\alpha(\mathbf{k})e^{ikx} + \overline{a}_\alpha(\mathbf{k})e^{-ikx}\right] , \tag{3.8}$$

where k is a null vector $k_\mu k^\mu = -k_0^2 + \mathbf{k}^2 = 0$, and $kx = k_\mu x^\mu$. Then

$$\Pi_\alpha = \dot{A}_\alpha = \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{k} \sqrt{\frac{k_0}{2}} \left[a_\alpha(\mathbf{k})e^{ikx} - \overline{a}_\alpha(\mathbf{k})e^{-ikx}\right] , \tag{3.9}$$

and

$$A_{\alpha,j} = \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{2k_0}} k_j \left[a_\alpha(\mathbf{k})e^{ikx} - \overline{a}_\alpha(\mathbf{k})e^{-ikx}\right] . \tag{3.10}$$

From the commutation relations for A_α and Π_β it can be shown that

$$\{a_\alpha, \overline{a}_\beta\} = \delta_{\alpha\beta} , \quad \{a_\alpha, a_\beta\} = \{\overline{a}_\alpha, \overline{a}_\beta\} = 0 , \tag{3.11}$$

where the same value of $\mathbf{k}$ has been assumed in all the arguments. Introducing (3.9) and (3.10) into the Hamiltonian (3.7) and performing some of the integrations we obtain

$$H = \frac{1}{2} \int k_0 \eta^{\alpha\beta} a_\alpha(\mathbf{k}) \overline{a}_\beta(\mathbf{k}) d\mathbf{k} \tag{3.12}$$

We see that the resulting Hamiltonian is linear in the new variables and does not contain derivatives. It can be interpreted as an infinite sum of harmonic oscillators. This is an important observation [7, 12, 15] that allows us to formally apply the normal *-product as defined in (3.6). In fact, when going from a system with a finite number of degrees of freedom to a field theory, one only has to "replace" partial derivatives by variational derivatives. We use this fact to calculate time-evolution function as the solution of Eq.(3.1). Then we have

$$\ln \mathrm{Exp}_N(Ht) = \frac{1}{\hbar} \left(e^{-ik_0 t} - 1\right) \int \eta^{\alpha\beta} a_\alpha(\mathbf{k}) \overline{a}_\beta(\mathbf{k}) d\mathbf{k} , \tag{3.13}$$

where the subscript N indicates that in Eq.(3.1) the normal *-product has been used. Using the definition of the exponential of a functional, the last expression can be written as

$$\mathrm{Exp}_N(Ht) = \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \int \eta^{\alpha\beta} a_\alpha(\mathbf{k}) \overline{a}_\beta(\mathbf{k}) d\mathbf{k}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-ink_0 t}}{n! \hbar^n} \int \eta^{\alpha\beta} a_\alpha^n(\mathbf{k}) \overline{a}_\beta^n(\mathbf{k}) d\mathbf{k} . \tag{3.14}$$

Comparing this expression with the Fourier-Dirichlet expansion (3.2) we can identify the corresponding states as

$$\pi_{E_0}^N = \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \int \eta^{\alpha\beta} a_\alpha(\mathbf{k}) \overline{a}_\beta(\mathbf{k}) d\mathbf{k}\right) , \tag{3.15}$$

$$\pi^N_{E_n} = \frac{1}{n!\hbar^n}\pi^N_{E_0}\int \eta^{\alpha\beta}a^n_\alpha(\mathbf{k})\overline{a}^n_\beta(\mathbf{k})d\mathbf{k} \ , \tag{3.16}$$

and the energy spectrum

$$E_n = n\hbar k_0 \ . \tag{3.17}$$

In this manner we have arrived at the main result of quantization: The determination of the quantum states and the energy spectrum of the system. The main advantage of deformation quantization consists in achieving this goal without using the operator formalism. Now we are confronted with the problem of finding the physical significance of our results. To this end, let us remember that at the classical level we have derived Einsteins linearized equations directly from the Lagrangian (2.12), and have noticed that the Lorentz gauge conditions have to be postulated as an additional requirement. It seems therefore natural to impose this requirement on the quantum states to find out which of them are physical. From Eq.(3.8) we find that the Lorentz gauge conditions are equivalent to

$$A_\alpha^{;\alpha} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{2k_0}} ik^\alpha \left[a_\alpha(\mathbf{k})e^{ikx} - \overline{a}_\alpha(\mathbf{k})e^{-ikx}\right] = 0 \ . \tag{3.18}$$

Clearly, this condition is identically satisfied if

$$k^\alpha a_\alpha(\mathbf{k}) = 0 \ , \tag{3.19}$$

what implies that only three components of $a_\alpha(\mathbf{k})$ are linearly independent. Furthermore, the gauge freedom given by Eq.(2.15) implies that the harmonic function $\Sigma(x)$ can be used to eliminate an additional component of $a_\alpha(\mathbf{k})$. So we are left with only two true components, say, $a_1(\mathbf{k})$ and $a_2(\mathbf{k})$. This is in accordance with the fact that gravitational fields possess only two physical degrees of freedom [18]. From Eqs.(3.15) and (3.16) we see that all states are specified as powers of $a_1(\mathbf{k})$ and $a_2(\mathbf{k})$. The results should not depend on the choice of these two linear independent components, but one can use these freedom to adapt the formalism to different physical situations. For instance, in the case of the Newtonian limit it seems reasonable to choose the Newtonian potential ϕ and one of the "gravitomagnetic" functions [19], say γ, as independent configuration variables so that $A_\alpha = -(1/4)(4\phi, \gamma, 0, 0)$. In the case of gravitational waves a more suitable choice would be $A_\alpha = -(1/4)(0, \gamma_1, \gamma_2, 0)$ where γ_1 and γ_2 are now related to the special combination of the metric components that describe gravitational waves (see, for instance, [19]).

Independently of the choice of gauge, the states and spectrum are represented by Eqs.(3.15), (3.16) and (3.17). The coefficients $a_\alpha(\mathbf{k})$ can be interpreted as densities that determine distributions in phase space, i.e. as state densities. But the formalism of deformation quantization allows a transition to the operator formalism according to certain fixed rules [13]. In that case, one would expect that the operator counterparts of a_α and $\overline{a}_\alpha$ would correspond to the annihilation and creation operators of standard quantum field theory. The energy spectrum (3.17) is discrete with vanishing zero-point energy. If we would use the Moyal product for the quantization, we would obtain a non-vanishing zero point energy and would be confronted with the problem of divergencies that commonly appears in perturbative quantum field theory [7].

IV. CONCLUSIONS

The aim of this work was to apply the formalism of deformation quantization to linearized Einstein's equations. We first show two alternative ways to consider Einstein's linearized equations in a field theoretical approach. We then use the modified Maxwell representation of linearized gravity to calculate the classical Hamiltonian of the theory, avoiding the problem of a singular Lagrangian. The Hamiltonian is one of the main ingredients necessary to carry out the deformation quantization of any physical system. We use the normal star-product to derive the commutation relations, in analogy with other free (linear) fields. The expression for the time-evolution function is found explicitly, and the Fourier-Dirichlet expansion of the Hamiltonian is used to derive the energy spectrum and the complete set of states of the system. A more detailed analysis is necessary in order to clarify further the physical meaning of the states. We have used the momentum representation in analogy with the standard methods of quantum field theory. For this reason, the results of the quantization are more adapted to a possible interpretation in terms of elementary particles and not in terms of a possible quantization of space and time. This, however, is a much more complicated problem related to conceptual issues of quantum gravity, a theory that still has to be formulated.

Acknowledgments

This work was in part supported by DGAPA-UNAM grant IN112401, CONACyT grant 36581-E, and US DOE grant DE-FG03-91ER40674. H.Q. thanks UC-MEXUS for support.

---

[1] H. J. Groenewold, Physica (Amsterdam) **12**, 405 (1946); L. van Hove, Proc. R. Acad. Sci. Belgium **26**, 1 (1951).

[2] A. Weinstein, Semin. Bourbaki, Asterique **789**, 389 (1995).

[3] C. Zachos, hep-th/0110114.

[4] S. Waldmann, hep-th/0303080.

[5] A. C. Hirshfeld and P. Henselder, Am. J. Phys. **70**, 537 (2002).

[6] F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz, and D. Sternheimer, Ann. Phys. (N.Y.) **111**, 61 (1978).

[7] J. Dito, Lett. Math. Phys. **20**, 125 (1990).

[8] M. Kontsevich, q-alg/9709040.

[9] M. Dütch and K. Fredenhagen, hep-th/9807215, hep-th/0101079.

[10] M. Bordemann, H.C. Herbig and S. Waldmann, Comm. Math. Phys. **210**, 107 (2000).

[11] A. S. Cattaneo and G. Felder, Comm. Math. Phys. **212**, 591 (2000).

[12] H. Garcia-Compean, J.F. Plebanski, M. Przanowski and F.J. Turrubiates, Int. J. Mod. Phys. A **16**, 2533 (2001).

[13] A. C. Hirshfeld and P. Henselder, Ann. Phys. **298**, 382 (2002).

[14] F. Antonsen, gr-qc/9712012.

[15] H. Garcia-Compean, J.F. Plebanski, M. Przanowski and F.J. Turrubiates, J. Phys. A **33**, 7935 (2000).

[16] D. Minic, hep-th/9909022.

[17] F. Antonsen, gr-qc/9710021.

[18] R. M. Wald, *General Relativity* (The University of Chicago Press, Chicago, 1984).

[19] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, *Gravitation* (Freeman Ed., San Francisco, 1973).

[20] D. M. Gitman and I. V. Tyutin, *Quantization of fields with constraints* (Springer-Verlag,

Berlin, 1990).

[21] N. N. Bogoliubov and D. V. Shirkov, *Quantum fields* (Benjamin Ed., USA, 1983)