

00384



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

**POSGRADO EN CIENCIAS
MATEMÁTICAS**

FACULTAD DE CIENCIAS

**ESPACIOS DE BERGMAN DE FUNCIONES
ARMÓNICAS EN LA BOLA HIPERBÓLICA**

T E S I S

**QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE:
DOCTORA EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)**

PRESENTA

MARTA PATRICIA SOUZA PEÑALOSA

DIRECTOR DE TESIS: DOCTOR SALVADOR PÉREZ ESTEVA

MÉXICO, D.F.

SEPTIEMBRE DE 2004



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

ESTA TESIS NO SALE
DE LA BIBLIOTECA

*A mis queridísimas,
tremendas y maravillosas
tías Guillermina y Eugenia*

*A la bellísima memoria
de mi tía Raquel*

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la
UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el
contenido de mi trabajo recepcional.

NOMBRE: H. Patricia Souza P.

FECHA: 28-IX-04

FIRMA: Pat. S.

Prólogo

Esta tesis doctoral se desarrolla en la bola hiperbólica n -dimensional, donde las funciones escalares que anula el operador de Laplace-Beltrami son llamadas *funciones hiperarmónicas* o *H-armónicas*. Al mismo tiempo, sobre la bola euclidiana unitaria n -dimensional \mathbb{B} se consideran las funciones p -integrables con respecto a la medida de Lebesgue ponderada por pesos radiales de la forma $(1 - |x|)^\beta$ para $\beta > -1$. En este marco, las funciones que son a la vez *H-armónicas* y p -integrables constituyen un subespacio de Banach de $L^p(\mathbb{B}, (1 - |x|)^\beta dx)$ llamado *espacio de Bergman* $B^{p,\beta}$. Del espacio de Hilbert $B^{2,\gamma}$ para $\gamma > -1$, se toma el núcleo reproductor K^γ para definir la transformación lineal $\mathcal{P}^\gamma : L^p(\mathbb{B}, (1 - |x|)^\beta dx) \rightarrow B^{p,\beta}$ dada por

$$\mathcal{P}^\gamma f(x) = \int_{\mathbb{B}} K^\gamma(x, y) f(y) (1 - |y|)^\gamma dy \quad \text{para } f \in L^p(\mathbb{B}, (1 - |x|)^\beta dx), x \in \mathbb{B}.$$

Ésta es la *proyección de Bergman* y demostrar que es continua, bajo ciertas hipótesis, constituye el objetivo central de esta investigación.

En relación al espacio euclidiano, se ha publicado mucho acerca de espacios y proyecciones de tipo Bergman en los últimos años. Destacan las investigaciones realizadas por R. Coifman y R. Rochberg en [CR]; Salvador Pérez Esteva en [Pe] y su trabajo conjunto con Óscar Blasco en [BP1] y [BP2]; P. Ahern, J. Bruna y C. Cascante en [AFP]; E. Hernández y D. Yang en [HY] y Marcos López García en [Lo]. En dichos trabajos se obtuvieron diversas familias de proyecciones, descomposiciones atómicas y formas de dualidad, así como extensiones de este material a varias variables complejas.

El propósito de esta tesis es realizar este tipo de análisis armónico en la bola hiperbólica. Los rudimentos en esta dirección han sido presentados conjuntamente por J.L. Clerc, P. Eymard, J. Faraut, M. Rais y R. Takahashi en [Cl], por M. Jevtic y M. Pavlovic en [JP], por H. Samii en [Sa] y sobre todo por Philippe Jaming desde 1998 en [J1], [J2] y [J3].

El punto medular aquí es un cálculo que Ronald R. Coifman y Richard Rochberg presentaron en el artículo [CR] que data de 1980. Se trata de una estimación de la magnitud de cualquier derivada parcial iterada del núcleo de Poisson euclidiano con respecto al radio de sus argumentos. Con las cotas superiores que ofrece dicho resultado, se demuestra la continuidad de \mathcal{P}^γ bajo diversas hipótesis sobre los parámetros que la definen.

La tesis se divide en cinco capítulos.

En el primero se presenta la herramienta básica que se requiere. En particular, se define una familia de funciones hipergeométricas que resulta ser esencial para trabajar en la bola hiperbólica.

En el segundo capítulo se presenta el desarrollo que posee toda función H -armónica en armónicas esféricas ponderadas por las funciones hipergeométricas definidas en el primer capítulo. También se definen los espacios de Bergman ya mencionados y se demuestra que son espacios de Banach.

En el tercer capítulo se estudia específicamente el espacio de Hilbert $\mathcal{B}^{2,\gamma}$ para $\gamma > -1$. En él se determina el núcleo reproductor K^γ y se obtiene un desarrollo explícito para él cuando la dimensión n del espacio es un valor par y γ es entera.

Bajo dichas hipótesis, el cuarto capítulo presenta el resultado más importante: \mathcal{P}^γ es una proyección continua para toda $p \geq 1$ y $\beta \in (-1, -1 + [1 + \gamma]p)$.

En el quinto capítulo se aplica la continuidad de \mathcal{P}^γ para explorar la relación de dualidad dada por

$$\int_{\mathbb{B}} f(x)g(x)(1 - |x|)^\gamma dx, \quad g \in \mathcal{B}^{p,\beta}.$$

para una elección adecuada de f . Primero se caracteriza al espacio dual de $\mathcal{B}^{p,\beta}$ mediante un espacio de la forma $\mathcal{B}^{q,T}$, donde $p, q > 1$ son exponentes conjugados. Después, se introduce una partición de la bola hiperbólica que lleva todo lo anterior a un lenguaje de series. Se definen así los *espacios de Herz* y se obtiene un resultado análogo al anterior: el dual de un espacio de Herz lo representa un espacio del mismo tipo.

La pregunta más importante que queda abierta aquí es si la proyección \mathcal{P}^γ es continua cuando la dimensión del espacio es impar.

Esta tesis se elaboró con el valioso apoyo de una beca de lugar en el Instituto de Matemáticas de la Universidad Nacional Autónoma de México (1998-2003), una beca-préstamo del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (1999-2002) y una beca complementaria otorgada por la Dirección General de Posgrado de la Universidad Nacional Autónoma de México (1999-2001).

Quiero agradecer especialmente al Dr. Salvador Pérez Esteva, asesor de esta tesis, lo mucho que me enseñó y la infinita paciencia que me tuvo. A los Dres. Mónica Clapp y Marcelo Aguilar agradezco su generosidad y contagioso entusiasmo por las matemáticas. Con gran cariño, agradezco al Dr. Javier Márquez Diez-Canedo que me haya enseñado este camino tan bonito. A Héctor un beso, y a mis muy queridos Covadonga Escandón, Ramón Espinosa, Liliana Meza, Rafael Morones, Roberto Murillo, María Palma, Guillermina Solé y Marco Zetina agradezco su ejemplo y su apoyo.

Patricia Souza

Contenido

I. Conceptos básicos	1
I.1 Notación y conceptos básicos	1
I.2 Las funciones hipergeométricas F_k	5
II. Las funciones H -armónicas	13
II.1 Definiciones	13
II.2 Resultados preliminares	16
II.3 Correspondencia con las funciones armónicas	24
II.4 Los espacios de Bergman \mathcal{B}_w^p	29
III. El espacio de Hilbert $\mathcal{B}^{2,\gamma}$	33
III.1 El núcleo reproductor K^γ	33
III.2 Orden de magnitud de los valores β_k^2	37
III.3 Una descomposición para $1/\beta_k^2$	42
IV. Proyecciones de Bergman	47
IV.1 Propiedades básicas de \mathcal{P}^γ	48
IV.2 Continuidad de \mathcal{P}_0^γ	50
IV.3 Continuidad de $\mathcal{P}_1^\gamma, \mathcal{P}_2^\gamma, \dots, \mathcal{P}_{n+\gamma}^\gamma$	67
IV.4 La proyección \mathcal{P}^γ	69
IV.5 Síntesis y preguntas abiertas	72
V. Dualidad y espacios de Herz	75
V.1 Dualidad	75
V.2 Espacios de Herz	78
V.3 Dualidad en espacios de Herz	84
Bibliografía	91

Capítulo I

Conceptos básicos

En este capítulo se presentan conceptos básicos del análisis armónico en los espacios euclidiano e hiperbólico. Esta herramienta permitirá definir y analizar los espacios de Bergman en la bola hiperbólica que son el objeto de estudio de este trabajo.

I.1 Notación y conceptos básicos

Notación

Dada $n \geq 2$, interesa el *espacio euclidiano* \mathbb{R}^n provisto de la *norma euclidiana* dada por $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ para $x \in \mathbb{R}^n$. En él se definen la *esfera unitaria* $S = S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ y la *bola unitaria abierta* $\mathbb{B} = \mathbb{B}_n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ o *cerrada* $\overline{\mathbb{B}} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$. En general, la *bola abierta* de centro $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y radio $\rho > 0$ es $B(x_0, \rho) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < \rho\}$ y la correspondiente *bola cerrada* es $\overline{B(x_0, \rho)} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leq \rho\}$.

Si $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, entonces el *inverso de x relativo a la esfera unitaria* es el punto $\bar{x} = x/|x|^2$.

Dadas $x, y \in \mathbb{R}^n$ se escribe en coordenadas polares $x = r\zeta$, $y = s\xi$ con $r, s \geq 0$ y $\zeta, \xi \in S$. Se adopta desde ahora esta notación y a lo largo de esta tesis la variable r denotará siempre a la magnitud $|x|$, para $x \in \mathbb{R}^n$.

Para $a \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$ se define $(a)_0 = 1$ y $(a)_k = a(a+1)(a+2)\dots(a+k-1)$.

Dada $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor$ denota al mayor de los números enteros que son menores o iguales a x , mientras que $\lceil x \rceil$ denota al menor de los enteros mayores o iguales a x .

Dados los enteros no negativos $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ se define el *multiíndice* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ de *dimensión* n , *magnitud* $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ y *factorial* $\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!$.

Si α, β son dos multiíndices de *dimensión* n tales que $\alpha_i \geq \beta_i$ para toda $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, entonces se escribe $\alpha \geq \beta$ y se define el valor $\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$.

Si α es un multiíndice de *dimensión* n , entonces para $x \in \mathbb{R}^n$ se denota $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$. Si además Ω es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es una

2 Espacios de Bergman de funciones armónicas en la bola hiperbólica

función $l\alpha$ veces diferenciable, entonces para $x \in \Omega$ se escribe

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} f(x).$$

Sean f, g dos funciones escalares de dominio común Ω . Supóngase que $g \neq 0$ sobre Ω . Entonces se escribe $f = O(g)$ y se dice que f posee un orden de magnitud menor o igual al de g cuando f/g es acotada sobre Ω . Se escribe $f \sim g$ y se dice que las funciones f, g poseen mismo orden de magnitud si $f = O(g)$ y a la vez $g = O(f)$. Esto es: cuando existen dos constantes $c, C > 0$ tales que $c < |f/g| < C$ sobre Ω . Es fácil demostrar las propiedades elementales que cumple el orden de magnitud de una función. Por ejemplo, si $f_1 \sim f_2$ y $g_1 \sim g_2$ entonces $f_1 g_1 \sim f_2 g_2$.

Se denota por dx a la medida de Lebesgue sobre \mathbb{R}^n y por $d\sigma$ a la medida sobre S caracterizada por ser invariante bajo rotaciones y *normalizada* por $\int_S d\sigma = 1$. A través de las coordenadas polares de $x = r\zeta \in \mathbb{R}^n$, el vínculo entre estas dos medidas es

$$\int_{\mathbb{R}^n} f dx = n \text{ vol } \mathbb{B} \int_0^\infty r^{n-1} \int_S f(r\zeta) d\sigma(\zeta) dr$$

para toda función integrable f , donde $\text{vol } \mathbb{B} = \int_{\mathbb{B}} dx$.

La función gamma (Ver [Er], [Gr].) La *función gamma* se define como

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

para $z \in \mathbb{C}$ con $\text{Re } z > 0$. Entonces

$$\begin{aligned} \Gamma(1) &= 1, \\ \Gamma(1+z) &= z\Gamma(z), \end{aligned}$$

así que en particular para $m \in \mathbb{N}$

$$\Gamma(m) = (m-1)!, \tag{1.1}$$

$$\Gamma(z+m) = z(z+1)(z+2)\dots(z+m-1)\Gamma(z),$$

$$\Gamma(z+m)/\Gamma(z) = (z)_m. \tag{1.2}$$

Esta función satisface la *propiedad duplicante* de Legendre

$$\Gamma(2z) = 2^{2z-1} \pi^{-\frac{1}{2}} \Gamma(z) \Gamma(z + \frac{1}{2}), \quad \text{Re } z > 0. \tag{1.3}$$

Además, dados los escalares α, β se tiene la siguiente expansión asintótica para $z \in \mathbb{C}$ tal que $\text{arg } z < \pi$

$$\frac{\Gamma(z+\alpha)}{\Gamma(z+\beta)} = z^{\alpha-\beta} \left[1 + \frac{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta-1)}{2z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \right].$$

En particular, para $x \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{\alpha-\beta}} \frac{\Gamma(x+\alpha)}{\Gamma(x+\beta)} = 1, \quad (1.4)$$

luego, para $x > 0$ suficientemente grande,

$$\frac{\Gamma(x+\alpha)}{\Gamma(x+\beta)} \sim x^{\alpha-\beta}.$$

La función beta (Ver [Er], [Gr].) La *función beta* se define como

$$B(z, w) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{w-1} dt \quad (1.5)$$

para $z, w \in \mathbb{C}$ tales que $\operatorname{Re} z, \operatorname{Re} w > 0$. Entonces

$$B(w, z) = B(z, w), \quad (1.6)$$

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}, \quad (1.7)$$

de modo que en particular para $m \in \mathbb{N}$

$$B(z, m) = \frac{(m-1)!}{(z)_m}. \quad (1.8)$$

Finalmente, para cualquier escalar w tal que $\operatorname{Re} w > 0$ se tiene por (1.4) y (1.7) que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{B(x, w)}{\left(\frac{1}{x}\right)^w} = \Gamma(w) \lim_{x \rightarrow \infty} x^w \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+w)} = \Gamma(w). \quad (1.9)$$

Por lo tanto, existe un valor $c > 0$ suficientemente grande tal que

$$B(x, w) \sim \left(\frac{1}{x}\right)^w \quad \text{sobre } x \geq c. \quad (1.10)$$

Polinomios homogéneos y armónicas esféricas (Ver [Ax].)

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ una región abierta, no vacía. Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función dos veces continuamente diferenciable. Se dice que f es *armónica* si $\Delta f = 0$ sobre Ω , donde $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ es el operador *laplaciano euclidiano*.

Para $n \geq 2$ fija y para cualquier $k \geq 0$, se denota por $H_k(\mathbb{R}^n)$ al espacio vectorial de los polinomios de la forma $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ que son a la vez armónicos y homogéneos de grado k . El correspondiente espacio de las funciones *armónicas esféricas de grado k* es $H_k(S) = \{p|_S : p \in H_k(\mathbb{R}^n)\}$.

Cada $H_k(S)$ es un subespacio cerrado del espacio de Hilbert $L^2(S)$. En [Ax] se

4 Espacios de Bergman de funciones armónicas en la bola hiperbólica

prueba que su dimensión $d(k)$ satisface $\lim_{k \rightarrow \infty} d(k)k^{2-n} = 2/(n-2)!$, así que para $k \geq 1$

$$d(k) \sim k^{n-2}. \quad (1.11)$$

A lo largo de este trabajo, $\{Y_j^k : 1 \leq j \leq d(k)\}$ denotará una base ortonormal para $H_k(S)$. Sin pérdida de generalidad, puede suponerse que cada función Y_j^k toma valores reales. Además, en [St] se prueba con detalle que si $n \geq 2$ y $\alpha \geq 0$ es cualquier multiíndice de dimensión n , entonces existe una constante $A = A(n, \alpha) > 0$ tal que

$$\left\| \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha Y_j^k \right\|_{L^\infty(S)}, \left\| \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha [r^k Y_j^k] \right\|_{L^\infty(\mathbb{B})} \leq Ak^{\frac{n}{2} + |\alpha|} \quad (1.12)$$

siempre que $k \geq 0$, $1 \leq j \leq d(k)$, con $r = |x|$ para $x \in \mathbb{R}^n$.

Tomados de dos en dos, los distintos espacios de armónicas esféricas son ortogonales entre sí. Es decir: si $p \in H_k(S)$, $q \in H_m(S)$ con $k \neq m$ entonces $\langle p, q \rangle_{L^2(S)} = \int_S p \bar{q} d\sigma = 0$. La suma directa (y ortogonal) de todos ellos converge en la norma de $L^2(S)$ y arroja

$$L^2(S) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} H_k(S). \quad (1.13)$$

Si una sucesión de funciones armónicas sobre \mathbb{B} converge a cierta función U , y si lo hace uniformemente sobre cada subconjunto compacto de \mathbb{B} , entonces U es armónica sobre \mathbb{B} .

Toda función armónica $U : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{C}$ posee una descomposición en armónicas esféricas de la forma $U = \sum_{k=0}^{\infty} p_k$ sobre su dominio, donde $p_k \in H_k(S)$ para toda $k \geq 0$, y esta serie converge absoluta y uniformemente sobre todo subconjunto compacto de \mathbb{B} .

Por el punto anterior, la converso de este resultado es válida: si una serie de esta forma converge a una función U , y si lo hace uniformemente sobre los conjuntos compactos en \mathbb{B} , entonces U es armónica.

Dadas $k \geq 0$ y $\zeta \in S$, la *valuación en ζ* dada por $T_\zeta : H_k(S) \rightarrow \mathbb{C}$ con $p \mapsto p(\zeta)$ es una funcional lineal continua y queda representada por la armónica esférica *zonal* $Z_k(\zeta, \bullet) \in H_k(S)$ de *polo ζ* y grado k como

$$p(\zeta) = \int_S Z_k(\zeta, \xi) p(\xi) d\sigma(\xi), \quad p \in H_k(S). \quad (1.14)$$

Para cualesquiera $k \geq 0$ y $\zeta, \xi \in S$ se tiene

$$Z_k(\xi, \zeta) = Z_k(\zeta, \xi) \in \mathbb{R},$$

$$Z_k(\zeta, \xi) = \sum_{j=1}^{d(k)} Y_j^k(\zeta) Y_j^k(\xi), \quad (1.15)$$

$$|Z_k(\zeta, \xi)| \leq Z_k(\zeta, \zeta) = d(k). \quad (1.16)$$

Además, la extensión homogénea $Z_k(\zeta, \bullet) \in H_k(\mathbb{R}^n)$ se realiza directamente a través de $Z_k(\zeta, s\xi) = s^k Z_k(\zeta, \xi)$ para $s \geq 0$. Más aún, esta función se extiende a todo $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

como

$$Z_k(r\zeta, s\xi) = r^k s^k Z_k(\zeta, \xi).$$

El núcleo de Poisson euclidiano P_e se define sobre $\mathbb{B} \times S$ como

$$P_e(x, \xi) = \frac{1-r^2}{|x-\xi|^n} \quad \text{para } x = r\zeta \in \mathbb{B}, \xi \in S.$$

Esta función satisface $P_e = \sum_{k=0}^{\infty} Z_k$ sobre su dominio y la convergencia de esta serie es absoluta y uniforme sobre $K \times S$ siempre que K sea un subconjunto compacto de \mathbb{B} . Por último, es válido extender P_e a $\mathbb{B} \times \overline{\mathbb{B}}$ como

$$P_e = \sum_{k=0}^{\infty} Z_k, \tag{1.17}$$

Así, para cualesquiera $x = r\zeta, y = s\zeta \in \mathbb{B}$ se tiene que

$$P_e(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} Z_k(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} Z_k(sx, \xi) = P_e(sx, \xi) = \frac{1-r^2s^2}{|sx-\xi|^n},$$

y si $x \neq 0$ esto es

$$P_e(x, y) = \frac{1-r^2s^2}{(1-2rs\zeta \cdot \xi + r^2s^2)^{\frac{n}{2}}} = \frac{1-r^2s^2}{r^n |\tilde{x}-y|^n}, \tag{1.18}$$

donde $\tilde{x} = x/|x|^2$.

1.2 Las funciones hipergeométricas F_k

En esta sección se presenta un tipo de función hipergeométrica que resultará ser esencial para describir las funciones H -armónicas.

Resumen I.1

En las referencias [Er] y [Gr] se presenta con detalle todo lo siguiente.

La ecuación diferencial hipergeométrica de parámetros $a, b, c \in \mathbb{C}$ es

$$z(1-z)\frac{d^2f}{dz^2} + [c - (a+b+1)z]\frac{df}{dz} - abf = 0.$$

Si $c \neq 0, -1, -2, \dots$ entonces esta ecuación diferencial posee una solución regular en $z = 0$ llamada función hipergeométrica de parámetros $a, b, c \in \mathbb{C}$ y variable $z \in \mathbb{C}$ definida por:

6 Espacios de Bergman de funciones armónicas en la bola hiperbólica

$$F(a, b; c; z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(a)_i (b)_i}{i! (c)_i} z^i$$

cuyo radio de convergencia es igual a 1. De acuerdo a la prueba de Raabe, esta serie de potencias converge absolutamente para $|z| = 1$ si $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re}(a + b)$.

Si a ó $b = 0$ entonces $F(a, b; c; z)$ es la función constante 1.

Y si a ó b es un entero negativo entonces $F(a, b; c; z)$ es un polinomio en z .

También es fácil ver que

$$\begin{aligned} F(b, a; c; z) &= F(a, b; c; z), \\ \frac{d}{dz} F(a, b; c; z) &= \frac{ab}{c} F(a + 1, b + 1; c + 1; z), \\ \frac{d^m}{dz^m} F(a, b; c; z) &= \frac{(a)_m (b)_m}{(c)_m} F(a + m, b + m; c + m; z), \quad m \geq 0. \end{aligned}$$

Para esta función se conoce la identidad

$$\frac{(-1)a(c-b)}{c} (1-z)^{a-1} F(a+1, b; c+1; z) = \frac{d}{dz} [(1-z)^a F(a, b; c; z)], \quad |z| < 1$$

así como la *forma integral de Euler*

$$F(a, b; c; z) = \frac{1}{B(b, c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-tz)^{-a} dt$$

para $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0$. Se tiene también el valor específico

$$F(a, b; c; 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}$$

siempre que $c \neq 0, -1, -2, \dots$ con $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re}(a + b)$.

En este trabajo sólo interesa el siguiente caso particular. Dada $n \geq 2$ y para cualquier valor entero $k \geq 0$, se trata de la función hipergeométrica F_k definida por

$$F_k(z) \equiv F\left(k, 1 - \frac{n}{2}; k + \frac{n}{2}; z\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(1 - \frac{n}{2})_i (k)_i}{i! (k + \frac{n}{2})_i} z^i, \quad |z| \leq 1. \quad (1.19)$$

De lo anterior, cada función F_k hereda directamente las siguientes seis propiedades esenciales. La serie que la define en (1.19) converge absoluta y uniformemente sobre su dominio. Además, para $|z| \leq 1$ se tiene que

$$F_{k+1}(z) = F\left(k+1, 1 - \frac{n}{2}; k + \frac{n}{2} + 1; z\right), \quad (1.20)$$

mientras que para $|z| < 1$ y cualesquiera $k, m \geq 0$

$$\frac{d}{dz} [(1-z)^k F_k(z)] = \frac{-k(k+n-1)}{k + \frac{n}{2}} (1-z)^{k-1} F_{k+1}(z), \quad (1.21)$$

$$F_k^{(m)}(z) = \frac{(1 - \frac{n}{2})_m (k)_m}{(k + \frac{n}{2})_m} F(k + m, 1 - \frac{n}{2} + m; k + \frac{n}{2} + m; z). \quad (1.22)$$

Finalmente, se tiene el valor específico

$$F_k(1) = \frac{\Gamma(n-1)\Gamma(k + \frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(k + n - 1)}, \quad (1.23)$$

y para $k \geq 1$ se cumple que

$$F_k(z) = \frac{1}{B(k, \frac{n}{2})} \int_0^1 t^{k-1} (1-t)^{\frac{n}{2}-1} (1-tz)^{\frac{n}{2}-1} dt, \quad |z| \leq 1. \quad (1.24)$$

Observación Si (y sólo si) el valor de n es par, la serie anterior se reduce a la suma finita

$$F_k(z) = \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} \frac{(1 - \frac{n}{2})_i (k)_i}{i! (k + \frac{n}{2})_i} z^i$$

que no es más que un polinomio en z de grado $\frac{n}{2} - 1$.

Si n es impar, entonces para $0 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ cada factor es negativo en el producto

$$\left(1 - \frac{n}{2}\right)_i = \left(1 - \frac{n}{2}\right) \left(2 - \frac{n}{2}\right) \cdots \left(i - \frac{n}{2}\right) = (-1)^i \prod_{j=1}^i \left(\frac{n}{2} - j\right)$$

mientras que para $i \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ sólo son negativos los primeros $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ factores del producto

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{n}{2}\right)_i &= \left(1 - \frac{n}{2}\right) \cdots \frac{-5}{2} \frac{-3}{2} \frac{-1}{2} \frac{1}{2} \frac{3}{2} \frac{5}{2} \cdots \left(i - \frac{n}{2}\right) \\ &= \left\{ \left(1 - \frac{n}{2}\right) \cdots \left(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - \frac{n}{2}\right) \right\} \left\{ \left(\lceil \frac{n}{2} \rceil - \frac{n}{2}\right) \cdots \left(i - \frac{n}{2}\right) \right\} \\ &= (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} c_n \prod_{j=\lceil \frac{n}{2} \rceil}^i \left(j - \frac{n}{2}\right), \end{aligned}$$

donde

$$c_n = \prod_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left(\frac{n}{2} - j\right). \quad (1.25)$$

Diferenciabilidad en la frontera

Conviene emplear (1.21) para examinar ahora la convergencia que $F_k(z)$ y sus

sucesivas derivadas poseen en la frontera del disco unitario complejo. Así, dadas $k, m \geq 0$ interesa la serie

$$F_k^{(m)}(z) = c \sum_{i=0}^{\infty} d_i z^i$$

donde

$$c = c(k, m) = \frac{(1 - \frac{n}{2})_m (k)_m}{(k + \frac{n}{2})_m},$$

$$d_i = d_i(k, m) = \frac{(1 - \frac{n}{2} + m)_i (k + m)_i}{i! (k + \frac{n}{2} + m)_i}$$

y cuyo radio de convergencia de nuevo es igual a 1.

Para $i \geq -1 + \frac{n}{2} - m$, considérese la razón

$$\rho_i = \rho_i(k, m) = \left| \frac{d_{i+1} z^{i+1}}{d_i z^i} \right| = \frac{(1 - \frac{n}{2} + m + i)(k + m + i)}{(i + 1)(k + \frac{n}{2} + m + i)} |z|.$$

Entonces para $|z| = 1$ se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} i(1 - \rho_i) &= \lim_{i \rightarrow \infty} i \left(1 - \frac{(1 - \frac{n}{2} + m + i)(k + m + i)}{(i + 1)(k + \frac{n}{2} + m + i)} \right) \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{i}{(i + 1)(k + \frac{n}{2} + m + i)} [(i + 1)(k + m + i) + \frac{n}{2}(i + 1) \\ &\quad - (i + 1)(k + m + i) - (m - \frac{n}{2})(k + m + i)] \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{i[\frac{n}{2}(i + 1) - (m - \frac{n}{2})(k + m + i)]}{(i + 1)(k + \frac{n}{2} + m + i)} \\ &= n - m. \end{aligned}$$

De acuerdo a la prueba de Raabe, se concluye así que para $|z| = 1$

- a) $F_k(z)$ converge absolutamente,
 - b) $F_k^{(m)}(z)$ converge absolutamente siempre que $m < n - 1$,
 - c) $F_k^{(m)}(z)$ converge condicionalmente o diverge si $m > n - 1$,
- mientras que el caso $m = n - 1$ queda abierto.

Por lo tanto, lo más que se puede decir para $n \geq 3, k \geq 1$ es lo siguiente:

Teorema I.2 Dadas $n \geq 2, k \geq 0$ se cumple al menos que

$$F_k \in C^\infty(\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}) \cap C^{n-2}(\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}).$$

Corolario I.3 Sean $k \geq 0$, α un multiíndice de dimensión n , K un subconjunto compacto de \mathbb{B} . Entonces existe una constante $M = M(n, \alpha, K) > 0$ tal que

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha F_k(r^2) \right| \leq M, \quad x = r\zeta \in K.$$

Demostración Basta ver que $\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha F_k(r^2)$ es una suma finita de términos de la forma $cx^\beta F_k^{(i)}(r^2)$ con $0 \leq \beta \leq \alpha$, $0 \leq i \leq |\alpha|$. \square

F_k sobre $[0,1]$ y su comportamiento asintótico

Lo siguiente facilitará las estimaciones de la función hipergeométrica real F_k sobre $[0, 1]$. Esto es importante porque la función radial $F_k(r^2)$ con $r = |x|$ para $x \in \mathbb{B}$ es una componente esencial de toda función H -armónica.

Teorema I.4 Dadas $n \geq 2$, $k \geq 0$, lo siguiente se cumple sobre el dominio $[0, 1]$.

- a) $F_k(0) = 1$,
- b) $0 < F_k \leq 1$,
- c) $F_0 \equiv 1$,
- d) si $n = 2$ entonces $F_k \equiv 1$; más generalmente, si n es par entonces F_k es un polinomio de grado $\frac{n}{2} - 1$,
- e) $F_{k+1}(s) < F_k(s)$ si $s \neq 0$, $n \geq 3$, $k \geq 1$,
- f) F_k es decreciente si $n \geq 3$, $k \geq 1$,
- g) si $k \geq 1$, F_k es estrictamente cóncava si $n = 3$, y estrictamente convexa si $n \geq 5$.

Demostración (a)-(d) son triviales.

e) Sean $n \geq 3$, $k \geq 1$. Sea la función dada por $\Phi_k(s) = F(k+1, 2 - \frac{n}{2}; k + \frac{n}{2} + 1; s)$ para $s \neq 0$. Por (1.20), para $s \in (0, 1)$ se sabe que

$$\frac{d}{ds} [(1-s)^k F_k(s)] = \frac{-k(k+n-1)}{k + \frac{n}{2}} (1-s)^{k-1} F_{k+1}(s).$$

Entonces de (1.19) y (1.21) se sigue que

$$-k(1-s)^{k-1} F_k(s) + (1-s)^k \frac{(1 - \frac{n}{2})k}{k + \frac{n}{2}} \Phi_k(s) = \frac{-k(k+n-1)}{k + \frac{n}{2}} (1-s)^{k-1} F_{k+1}(s),$$

luego

$$-F_k(s) + \frac{(1 - \frac{n}{2})}{k + \frac{n}{2}} (1-s) \Phi_k(s) = \frac{-(k+n-1)}{k + \frac{n}{2}} F_{k+1}(s)$$

$$= \left[\frac{-(\frac{n}{2} - 1)}{k + \frac{n}{2}} - 1 \right] F_{k+1}(s)$$

y por lo tanto

$$F_k(s) - F_{k+1}(s) = \frac{(\frac{n}{2} - 1)}{k + \frac{n}{2}} [F_{k+1}(s) - (1-s)\Phi_k(s)].$$

Así, basta probar que $F_{k+1}(s) > (1-s)\Phi_k(s)$. En efecto,

$$\begin{aligned} (1-s)\Phi_k(s) &= \frac{1}{B(k+1, \frac{n}{2})} \int_0^1 t^k (1-t)^{\frac{n}{2}-1} (1-ts)^{\frac{n}{2}-2} (1-s) dt \\ &< \frac{1}{B(k+1, \frac{n}{2})} \int_0^1 t^k (1-t)^{\frac{n}{2}-1} (1-ts)^{\frac{n}{2}-2} (1-ts) dt \\ &= F_{k+1}(s). \end{aligned}$$

Finalmente, por (1.2) y (1.23): $F_{k+1}(1)/F_k(1) = (k + \frac{n}{2})/(k + n - 1) < 1$.

(f),(g) Basta verificar con (1.24) que para toda $s \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} F'_k(s) &= -\frac{(\frac{n}{2} - 1)}{B(k, \frac{n}{2})} \int_0^1 t^k (1-t)^{\frac{n}{2}-1} (1-ts)^{\frac{n}{2}-2} dt < 0 \quad \text{si } n \geq 3, \\ F''_k(s) &= \frac{-1}{4B(k, \frac{3}{2})} \int_0^1 t^{k+1} (1-t)^{\frac{1}{2}} (1-ts)^{-\frac{3}{2}} dt \in (-\infty, 0) \quad \text{si } n = 3, \\ F''_k(s) &= \frac{(\frac{n}{2} - 1)(\frac{n}{2} - 2)}{B(k, \frac{n}{2})} \int_0^1 t^{k+1} (1-t)^{\frac{n}{2}-1} (1-ts)^{\frac{n}{2}-3} dt > 0 \quad \text{si } n \geq 5. \quad \square \end{aligned}$$

Observación De (b) y (e) se deduce que la función $\lim_{k \rightarrow \infty} F_k : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ existe y constituye una cota inferior para la familia $\{F_k\}_k$. Por otro lado, es fácil ver que para toda $s \in [0, 1]$

$$F_0(s) \equiv 1 \geq (1-s)^{\frac{n}{2}-1},$$

y si $k \geq 1$ entonces, por (1.5),

$$\begin{aligned} F_k(s) &= \frac{1}{B(k, \frac{n}{2})} \int_0^1 t^{k-1} (1-t)^{\frac{n}{2}-1} (1-ts)^{\frac{n}{2}-1} dt \\ &\geq \frac{1}{B(k, \frac{n}{2})} \int_0^1 t^{k-1} (1-t)^{\frac{n}{2}-1} (1-s)^{\frac{n}{2}-1} dt = (1-s)^{\frac{n}{2}-1}. \end{aligned}$$

Además, estas desigualdades son estrictas siempre que $n \geq 3$ y $s \in (0, 1]$. En todo caso, $\lim_{k \rightarrow \infty} F_k(s) \geq (1-s)^{\frac{n}{2}-1}$ sobre $[0, 1]$.

Enseguida se muestra que aquí de hecho se cumple la igualdad. Además, la

demostración de este punto permite pensar en la función hipergeométrica F_k como una variación de la serie de Taylor $(1-s)^{\frac{n}{2}-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(1-\frac{n}{2})_i}{i!} s^i$.

Teorema I.5 Dada $n \geq 2$, sea $\phi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ la función definida por $s \mapsto (1-s)^{\frac{n}{2}-1}$. Entonces $(F_k)_k$ es una sucesión monótona no creciente que converge a ϕ sobre $[0, 1]$.

Demostración Supóngase que $n \geq 3$. En la proposición I.6 se comprobará que $\lim_{k \rightarrow \infty} F_k(1) = 0 = \phi(1)$. Entonces por el teorema I.4 (a) y (e), basta probar aquí que $\lim_{k \rightarrow \infty} F_k = \phi$ sobre $(0, 1)$.

Dada $i \geq 0$, véase que

$$\phi^{(i)}(s) = \left(1 - \frac{n}{2}\right)_i (1-s)^{\frac{n}{2}-1-i},$$

de modo que la serie de Taylor para ϕ desarrollada alrededor del origen es

$$\phi(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\left(1 - \frac{n}{2}\right)_i}{i!} s^i.$$

Si n es par entonces se tiene sólo una suma finita en

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F_k(s) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} \frac{\left(1 - \frac{n}{2}\right)_i}{i!} \frac{(k)_i}{\left(k + \frac{n}{2}\right)_i} s^i = \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} \frac{\left(1 - \frac{n}{2}\right)_i}{i!} s^i = \phi(s).$$

En cambio, si n es impar entonces se tiene realmente una serie y para $i > \frac{n}{2}$ se tiene por (1.25) que

$$\frac{\left|\left(1 - \frac{n}{2}\right)_i\right|}{i!} = \frac{c_n}{\left[\frac{n}{2}\right]!} \left\{ \frac{\left(\left[\frac{n}{2}\right] - \frac{n}{2}\right) \dots \left(i - \frac{n}{2}\right)}{\left[\frac{n}{2}\right]} \right\} < \frac{c_n}{\left[\frac{n}{2}\right]!} = c'_n < \infty$$

Así, para cada $k \geq 0$,

$$\begin{aligned} |F_k(s)| &\leq \sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{\left|\left(1 - \frac{n}{2}\right)_i\right|}{i!} \frac{(k)_i}{\left(k + \frac{n}{2}\right)_i} s^i + \sum_{i=\left[\frac{n}{2}\right]}^{\infty} \frac{\left|\left(1 - \frac{n}{2}\right)_i\right|}{i!} \frac{(k)_i}{\left(k + \frac{n}{2}\right)_i} s^i \\ &< a_n + \frac{c'_n}{1-s} < \infty. \end{aligned}$$

Entonces, sobre cada compacto en $(0, 1)$ se tiene por el teorema de convergencia dominada que

$$\begin{aligned}
\lim_{k \rightarrow \infty} F_k(s) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(1 - \frac{n}{2})_i}{i!} \frac{(k)_i}{(k + \frac{n}{2})_i} s^i \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(1 - \frac{n}{2})_i}{i!} \frac{(k)_i}{(k + \frac{n}{2})_i} s^i \\
&= \phi(s). \quad \square
\end{aligned}$$

Para terminar, recuérdese que el valor de $F_k(1)$ es conocido.

Proposición I.6 Dada $n \geq 2$, existe una constante positiva $A = A(n)$ tal que

- a) $F_k(1) \sim k^{1-\frac{n}{2}}$ sobre $k \geq 1$,
- b) $F_k(s)/F_k(1) \leq Ak^{\frac{n}{2}-1}$ para $s \in [0, 1]$, $k \geq 1$,
- c) $s^{\frac{k}{2}} F_k(s) \leq As^{\frac{k}{4}-1} k^{1-\frac{n}{2}}$ para $s \in [0, 1]$, $k \geq 4$.

Demostración Para $k \geq 1$, se tiene (a) por (1.4) y (1.23). Entonces (b) se sigue directamente por el teorema I.4 (b).

Finalmente, para alguna constante $A = A(n) > 0$ y cualesquiera $k \geq 4$, $s \in [0, 1]$ lo siguiente es cierto por (1.5), (1.10) y (1.24).

$$\begin{aligned}
s^{\frac{k}{2}} F_k(s) &= \frac{s^{\frac{k}{2}}}{B(k, \frac{n}{2})} \int_0^1 t^{k-1} (1-t)^{\frac{n}{2}-1} (1-ts)^{\frac{n}{2}-1} dt \\
&\leq \frac{s^{\frac{k}{2}}}{B(k, \frac{n}{2})} \int_0^1 t^{k-1} (1-ts)^{\frac{n}{2}-1} (1-ts)^{\frac{n}{2}-1} dt \\
&\leq \frac{s^{\frac{k}{2}}}{B(k, \frac{n}{2})} \int_0^1 t^{\frac{k}{4}} (1-ts)^{n-2} dt \\
&\leq \frac{s^{\frac{k}{2}} s^{-\frac{k}{4}-1}}{B(k, \frac{n}{2})} \int_0^1 w^{\frac{k}{4}} (1-w)^{n-2} dw \\
&= s^{\frac{k}{4}-1} \frac{B(\frac{k}{4} + 1, n-1)}{B(k, \frac{n}{2})} \\
&\leq As^{\frac{k}{4}-1} k^{1-\frac{n}{2}}. \quad \square
\end{aligned}$$

Termina así este primer capítulo. La herramienta básica presentada aquí será empleada más adelante.

Capítulo II

Las funciones H -armónicas

En este capítulo se establecen las principales propiedades de las funciones H -armónicas y se definen los espacios de Bergman que interesa estudiar en esta tesis.

II.1 Definiciones

Los objetos de la geometría diferencial que se esbozan enseguida se pueden encontrar tratados con la profundidad adecuada en textos clásicos como [Ca] por M. do Carmo y [Ra] por J. Ratcliffe.

Definición II.1 Funciones H -armónicas

Existen diversas representaciones del espacio hiperbólico n -dimensional. En este trabajo se considera exclusivamente el *modelo de Poincaré* o *bola hiperbólica*. Ésta es la bola unitaria euclidiana $\mathbb{B} = \mathbb{B}_n$ de dimensión $n \geq 2$ provista de la *métrica hiperbólica* que denotaremos por μ , cuya relación con la medida de Lebesgue está dada por

$$d\mu = \frac{1}{(1-r^2)^n} dx$$

donde $r = |x|$ para $x \in \mathbb{B}$.

Los espacios euclidiano e hiperbólico son variedades riemannianas y como tales poseen un *operador de Laplace-Beltrami*. En el caso de \mathbb{R}^n , dicho operador es el *laplaciano euclidiano* mencionado anteriormente $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, mientras que para la bola hiperbólica se trata de

$$D = (1-r^2)^2 \Delta + 2(n-2)(1-r^2) \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Este operador se aplica a las funciones escalares definidas sobre la bola hiperbólica que son dos veces continuamente diferenciables. Si u es una de estas funciones y si

$Du = 0$ en todo punto de \mathbb{B} entonces se dice que u es una *función H -armónica o hiperarmónica*.

En textos como [C1] se analiza con detalle la *componente esférica* del laplaciano Δ que está dada por

$$\begin{aligned} \Delta_\sigma &= \frac{1}{\sin^{n-2}\theta_{n-1}} \frac{\partial}{\partial\theta_{n-1}} \left(\sin^{n-2}\theta_{n-1} \frac{\partial}{\partial\theta_{n-1}} \right) \\ &+ \frac{1}{\sin^2\theta_{n-1} \sin^{n-3}\theta_{n-2}} \frac{\partial}{\partial\theta_{n-2}} \left(\sin^{n-3}\theta_{n-2} \frac{\partial}{\partial\theta_{n-2}} \right) + \dots \\ &\dots + \frac{1}{\sin^2\theta_{n-1} \dots \sin^2\theta_2} \frac{\partial^2}{\partial\theta_1^2} \end{aligned}$$

y para cada $k \geq 0$ satisface

$$\Delta_\sigma p = -k(n+k-2)p, \quad p \in H_k(S). \tag{2.1}$$

En coordenadas polares para $x = r\zeta \in \mathbb{B}$, $x \neq 0$, este operador permite separar las componentes radial y angular de los operadores de Laplace-Beltrami como

$$\Delta = \frac{1}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{n-1} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_\sigma,$$

$$D = D_r + D_\sigma \tag{2.2}$$

$$= \left[\frac{(1-r^2)^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + (n-2) \frac{(1-r^4)}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right] + \frac{(1-r^2)^2}{r^2} \Delta_\sigma.$$

Observación Si $n = 2$ entonces $D = (1-r^2)^2 \Delta$. El disco euclidiano y el disco hiperbólico son espacios esencialmente distintos, como se recalca en [S4]. Y el operador de Laplace-Beltrami claramente no es el mismo para ambos espacios. Pero las funciones armónicas en uno y otro sí son las mismas, de manera que el material que se presenta aquí siempre para $n \geq 2$ en realidad sólo es relevante a partir de tres dimensiones.

Advertencia En el espacio euclidiano, cualquier función armónica puede ser precedida por traslaciones y dilataciones arbitrarias de su dominio sin perder su carácter armónico. Desafortunadamente, este útil recurso se pierde en el espacio hiperbólico porque el dominio del operador D , rigurosamente, es \mathbb{B} . Más aún, si $\delta > 0$ y si la función $u : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{C}$ es dos veces continuamente diferenciable, entonces su dilatación $u_\delta(x) = u(\delta x)$ definida para $x \in B(0, \min\{1, 1/\delta\})$ satisface

$$Du_\delta(x) = \delta^2(1-r^2)^2 \Delta u(\delta x) + 2\delta(n-2)(1-r^2) \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i} u(\delta x).$$

Así, salvo en algunos casos triviales, Du_δ no es ni un múltiplo ni un divisor de Du sobre \mathbb{B} . Por consiguiente, una dilatación del dominio *casi nunca* preserva la naturaleza H -armónica de una función.

A esto se debe que algunas pruebas de resultados elementales del análisis armónico sean un poco más elaboradas para el caso hiperbólico que para el caso euclidiano.

Definición II.2 Acción de un grupo de transformaciones de Lorentz sobre \mathbb{B}

Para $n \geq 2$, el grupo de las *transformaciones de Lorentz especiales y positivas* es el grupo lineal representado por las siguientes matrices reales

$$G = PSO(1, n) = \left\{ g = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & \cdots & g_{0n} \\ g_{10} & g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n0} & g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} : g^T J g = J, \det g = +1, g_{00} \geq 1 \right\}$$

donde $J = \text{diag}\{-1, 1, 1, \dots, 1\}$. (Ver [J3]).

Una acción transitiva de este grupo sobre \mathbb{B} está dada por

$$(g \bullet x)_i = \frac{\frac{1+|x|^2}{2} g_{i0} + \sum_{j=1}^n g_{ij} x_j}{\frac{1-|x|^2}{2} + \frac{1+|x|^2}{2} g_{00} + \sum_{j=1}^n g_{0j} x_j} \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

para cualesquiera $x \in \mathbb{B}$, $g \in G$.

Esta acción es una isometría de la bola hiperbólica como variedad riemanniana, de manera que si E es cualquier subconjunto μ -medible de \mathbb{B} y si $g \in G$ entonces $g \bullet E$ también es μ -medible y $\mu(g \bullet E) = \mu(E)$. El operador de Laplace-Beltrami también es G -invariante sobre \mathbb{B} : si para u, v funciones escalares dos veces continuamente diferenciables sobre \mathbb{B} existe alguna $g \in G$ tal que $v(x) = u(g \bullet x)$ para toda $x \in \mathbb{B}$, entonces $Dv = Du$.

En [J3], P. Jaming demuestra que si $a \in \mathbb{B}$, $g \in G$ son tales que $a = g \bullet 0$ entonces

$$g \bullet B(0, \rho) \subset B(a, 6\rho(1 - |a|^2)), \quad \rho \in (0, \frac{1}{2}). \tag{2.3}$$

R. Takahashi en [Ta] ofrece una interpretación interesante del grupo G y su acción sobre \mathbb{B} . Basada en ella y en el texto [Ra], la monografía [S3] presenta los elementos de geometría que son necesarios para abordarla con detalle.

II.2 Resultados preliminares

En esta sección se presentan las propiedades fundamentales de las funciones H -armónicas. El primer teorema es un breve resumen de los resultados básicos probados por Philippe Jaming en su tesis doctoral [J3]. Algunos detalles que él omite en sus demostraciones se encuentran en la monografía [S2]. Es importante señalar que los investigadores M. Jevtic y M. Pavlovic ofrecen su propia demostración del punto (iv) en la reciente publicación [JP].

Teorema II.3 Resultados elementales

i) *Una función de la forma $u : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{C}$ es H -armónica si y sólo si lo son a la vez su parte real y su parte imaginaria.*

ii) **Teorema del valor medio** *Sea u una función H -armónica y sea $a \in \mathbb{B}$. Si $g \in G$ es tal que $a = g \cdot 0$, entonces*

$$u(a) = \frac{1}{\mu[B(0, \rho)]} \int_{g \cdot B(0, \rho)} u d\mu, \quad \rho \in (0, 1).$$

iii) *Dadas $k \geq 0$ y $u_k \in H_k(S)$, la siguiente relación define una función H -armónica $x \mapsto F_k(r^2)r^k u_k(\zeta)$, $x = r\zeta \in \mathbb{B}$.*

iv) **Descomposición de cualquier función H -armónica en armónicas esféricas** *Para cada función H -armónica u existe una sucesión única de funciones $(u_k)_k$ en la cual $u_k \in H_k(S)$ para cada $k \geq 0$ y tal que*

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k(r^2)r^k u_k(\zeta), \quad x = r\zeta \in \mathbb{B}.$$

Equivalentemente, para u existe una sucesión única de escalares $(\lambda_{jk})_{kj}$ tal que

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{d(k)} \lambda_{jk} F_k(r^2)r^k Y_j^k(\zeta), \quad x = r\zeta \in \mathbb{B}. \quad (2.4)$$

Además, la convergencia de estas series es absoluta y uniforme sobre todo subconjunto compacto de \mathbb{B} .

v) **El núcleo de Poisson** *asociado a la bola hiperbólica está definido sobre $\mathbb{B} \times S$ como*

$$P_h(x, \xi) = \left(\frac{1 - |x|^2}{|x - \xi|^2} \right)^{n-1}.$$

Esta función constituye una **aproximación de la identidad**, o sea que satisface a la vez las siguientes tres propiedades

$$P_h > 0 \text{ sobre } \mathbb{B} \times S,$$

$$\text{dada } x \in \mathbb{B} : \int_S P_h(x, \xi) d\sigma(\xi) = 1,$$

$$\text{dadas } \eta \in S, \delta > 0 : \lim_{x \rightarrow \eta} \int_{|\xi - \eta| > \delta} P_h(x, \xi) d\sigma(\xi) = 0.$$

vi) **Una aplicación** Para cada $\xi \in S$ la función $P_h(\cdot, \xi)$ es H -armónica. La (única) descomposición en armónicas esféricas que le corresponde por (iv) está dada por

$$P_h(x, \xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F_k(r^2)}{F_k(1)} Z_k(x, \xi), \quad x = r\xi \in \mathbb{B}.$$

Para $x = r\xi, y = s\xi \in \mathbb{B}$ se cumple que $(sx, \xi) \in \mathbb{B} \times S$, entonces

$$P_h(sx, \xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F_k(r^2 s^2)}{F_k(1)} Z_k(sx, \xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F_k(r^2 s^2)}{F_k(1)} Z_k(x, y).$$

Así, como en el caso euclidiano, la bihomogeneidad de las funciones esféricas zonales ofrece la posibilidad de definir a este nuevo núcleo de Poisson sobre $\mathbb{B} \times \mathbb{B}$ como

$$P_h(x, y) = P_h(sx, \xi) \quad \text{para } x, y \in \mathbb{B},$$

es decir

$$P_h(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F_k(r^2 s^2)}{F_k(1)} Z_k(x, y) = \left(\frac{1 - r^2 s^2}{|sx - \xi|^2} \right)^{n-1} = \left(\frac{1 - |x|^2 |y|^2}{1 - 2\langle x, y \rangle_e + |x|^2 |y|^2} \right)^{n-1}$$

donde $\langle x, y \rangle_e = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ es el producto interno euclidiano.

vii) **La transformada de Poisson hiperbólica** de una función continua $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ es la función H -armónica

$$P_h[f](x) = \int_S P_h(x, \eta) f(\eta) d\sigma(\eta), \quad x \in \mathbb{B}.$$

Entonces la extensión de f a $\overline{\mathbb{B}}$ dada por

$$u(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in S \\ P_h[f](x) & \text{si } x \in \mathbb{B} \end{cases}$$

resuelve el **problema de Dirichlet** : existe y es la (única) extensión continua de f a $\overline{\mathbb{B}}$

cuya restricción a \mathbb{B} es H -armónica.

Si además $f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$ es el desarrollo en armónicas esféricas de la función f como elemento de $L^2(S)$ en (1.13), entonces

$$P_h[f](r\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F_k(r^2)}{F_k(1)} r^k f_k(\zeta) \quad \text{para } x = r\zeta \in \mathbb{B}.$$

Observación Para este trabajo, el desarrollo dado en (iv) es fundamental. La demostración de él que ofrece P. Jaming en [J3] permite apreciar lo siguiente.

Toda función H -armónica es solución de la ecuación diferencial de segundo orden $Du = 0$. Al retomar esta ecuación en coordenadas polares, para cada valor $k \geq 0$ se obtiene una ecuación diferencial hipergeométrica que da lugar a la función F_k . De este modo, la sucesión de funciones $(F_k)_k$ constituye un aspecto fundamental de las funciones H -armónicas que en todo momento nos recuerda que el análisis armónico entero gira alrededor de una ecuación diferencial de segundo orden.

Teoremas adicionales

A continuación se obtienen resultados que fortalecen los puntos (iii) y (iv) del teorema anterior. Concretamente, se demostrará paso a paso que si una sucesión de funciones H -armónicas converge a cierta función u , y si esta convergencia es uniforme sobre los subconjuntos compactos de \mathbb{B} , entonces u es H -armónica. La prueba de este hecho es más larga que en el caso euclidiano porque no es útil dilatar ni trasladar el dominio de la función H -armónica u .

Lema II.4 Sea $u : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{C}$ una función definida por una serie como (2.4) que converge uniformemente sobre todo conjunto compacto en \mathbb{B} . Sea $c \in (0, 1)$. Entonces en el desarrollo (2.4) de u sobre $\overline{B(0, c)}$ los escalares λ_{jk} satisfacen

$$|\lambda_{jk}| \leq \frac{M_c}{c^k}$$

para $k \geq 0$ y $1 \leq j \leq d(k)$, donde M_c es una constante positiva que sólo depende de n, u, c .

Demostación Dada $r \in (0, 1)$, considérese la función dada por $u_r(\zeta) = u(r\zeta)$ para $\zeta \in S$. Como u es continua, la función $u_r \in L^2(S)$ posee la siguiente descomposición por (1.13), (1.14) y (1.15)

$$u(x) = u_r(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_S Z_k(\zeta, \eta) u_r(\eta) d\sigma(\eta) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{d(k)} \left[\int_S Y_j^k(\eta) u(r\eta) d\sigma(\eta) \right] Y_j^k(\zeta).$$

Por la unicidad de (2.4), para cada $k \geq 0$, $1 \leq j \leq d(k)$ se cumple

$$\lambda_{jk} F_k(r^2) r^k = \int_S Y_j^k(\eta) u(r\eta) d\sigma(\eta).$$

Entonces por la identidad de Parseval se sigue que

$$\begin{aligned} |\lambda_{jk} F_k(r^2) r^k| &= \left| \int_S Y_j^k(\eta) u(r\eta) d\sigma(\eta) \right| \\ &\leq \left(\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{d(m)} \left| \int_S Y_i^m(\eta) u(r\eta) d\sigma(\eta) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|u_r\|_{L^2(S)}. \end{aligned}$$

Sea $c \in (0, 1)$. Por el teorema I.5,

$$0 < (1 - c^2)^{\frac{n}{2}-1} \leq F_k(r^2), \quad r \in [0, c]$$

con

$$|\lambda_{jk}| (1 - c^2)^{\frac{n}{2}-1} r^k \leq |\lambda_{jk} F_k(r^2) r^k| \leq \|u_r\|_{L^2(S)} \leq \|u\|_{L^\infty(\overline{B(0,c)})} < \infty.$$

Entonces para toda $r \in [0, c]$ se tiene que

$$|\lambda_{jk}| r^k \leq (1 - c^2)^{1-\frac{n}{2}} \|u\|_{L^\infty(\overline{B(0,c)})}$$

y por lo tanto $|\lambda_{jk}| \leq c^{-k} M_c$ donde $M_c = (1 - c^2)^{1-\frac{n}{2}} \|u\|_{L^\infty(\overline{B(0,c)})}$. \square

Se obtiene así la siguiente conversa del teorema II.3 (iv).

Teorema II.5 *Si u es una función definida por una serie como (2.4) que converge uniformemente sobre todo subconjunto compacto de \mathbb{B} , entonces u es H -armónica.*

Demostración Cuando $n = 2$, el resultado es trivial porque las funciones H -armónicas y armónicas son las mismas.

Supóngase entonces que $n \geq 3$. Por el teorema II.3 (iii), se sabe que cada término en (2.4) es H -armónico por ser de la forma

$$T_k(x) = \sum_{j=1}^{d(k)} \lambda_{jk} F_k(r^2) r^k Y_j^k(\zeta), \quad x = r\zeta \in \mathbb{B}.$$

Así que bastará probar que

$$D \sum_{k=0}^{\infty} T_k = \sum_{k=0}^{\infty} DT_k.$$

Para ello, conviene emplear (2.2) que expresa al operador de Laplace-Beltrami en sus

componentes radial y angular $D = D_r + D_\sigma$. Asimismo, se tienen las propiedades (1.11), (1.12) y (2.1). Recuérdese también que una serie de funciones se puede derivar término por término cuando sobre el dominio sus componentes son continuamente diferenciables y la serie conformada por sus respectivas derivadas converge absoluta y uniformemente.

Primer paso Sea K un subconjunto compacto de \mathbb{B} . Entonces existen constantes c, c' tales que $K \subset \overline{B(0, c)} \subset B(0, c') \subset \mathbb{B}$ con $0 < c < c' < 1$.

Por ser continuas, las funciones $F'_k(r^2), F''_k(r^2)$ están uniformemente acotadas sobre $[0, c]$ por alguna constante L_c .

Ahora, para $x = r\zeta \in K$ interesa calcular

$$\frac{\partial}{\partial r} u(x) = \frac{\partial}{\partial r} \sum_{k=0}^{\infty} T_k(x).$$

Cada término es una función continuamente diferenciable de r sobre $[0, c]$. Además,

$$\frac{\partial}{\partial r} T_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 0, \\ \sum_{j=1}^{d(k)} \lambda_{jk} r^{k-1} Y_j^k(\zeta) [kF_k(r^2) + 2r^2 F'_k(r^2)] & \text{si } k \geq 1. \end{cases}$$

Para cada $k \geq 1$, el lema II.4 establece que los puntos de $K \subset \overline{B(0, c)}$ satisfacen

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial r} T_k(x) \right| &\leq \sum_{j=1}^{d(k)} |\lambda_{jk}| c^{k-1} |Y_j^k(\zeta)| [k + 2c^2 L_c] \\ &\leq \sum_{j=1}^{d(k)} \frac{M_{c'}}{(c')^k} c^{k-1} A k^{\frac{n}{2}} [k + 2c^2 L_c] \\ &\leq A d(k) \left(\frac{c}{c'} \right)^k k^{\frac{n}{2}} \left(\frac{k}{c} + 2c L_c \right) \\ &\leq A k^{\frac{3n}{2}-1} \left(\frac{c}{c'} \right)^k. \end{aligned}$$

Entonces

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{\partial}{\partial r} T_k(x) \right| \leq A \sum_{k=0}^{\infty} k^{\frac{3n}{2}-1} \left(\frac{c}{c'} \right)^k < \infty,$$

luego la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial r} T_k(r\zeta)$ converge absoluta y uniformemente sobre K .

Para $x \in K, x \neq 0$, entonces es válido calcular

$$\frac{\partial}{\partial r} u(x) = \frac{\partial}{\partial r} \sum_{k=0}^{\infty} T_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial r} T_k(x)$$

y así

$$(n-2) \frac{1-r^4}{r} \frac{\partial}{\partial r} u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (n-2) \frac{1-r^4}{r} \frac{\partial}{\partial r} T_k(x).$$

Segundo paso Del mismo modo, es fácil ver que para $x = r\zeta \in K$

$$\frac{\partial}{\partial r} r \left(\frac{\partial}{\partial r} T_k(r\zeta) \right) = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 0 \\ \sum_{j=1}^{d(k)} \lambda_{jk} Y_j^k(\zeta) [k^2 r^{k-1} F_k(r^2) + 4(k+1)r^{k+1} F_k'(r^2) + 4r^{k+3} F_k''(r^2)] & \text{si } k \geq 1 \end{cases}$$

y que en K la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial}{\partial r} T_k)$ converge absoluta y uniformemente. Por lo tanto, para $x \in K \setminus \{0\}$ se cumple que

$$\begin{aligned} \frac{(1-r^2)^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} u(x) \right) &= \frac{(1-r^2)^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \sum_{k=0}^{\infty} T_k(x) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-r^2)^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} T_k(x) \right). \end{aligned}$$

Tercer paso Por último, sobre el mismo conjunto compacto K se tiene que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} |\Delta_{\sigma} T_k(x)| &= \sum_{k=0}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^{d(k)} \lambda_{jk} F_k(r^2) r^k \Delta_{\sigma} Y_j^k(\zeta) \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{d(k)} k(k+n-2) |\lambda_{jk}| F_k(r^2) r^k |Y_j^k(\zeta)| \\ &\leq A \sum_{k=0}^{\infty} k(k+n-2) k^{n-2} k^{\frac{n}{2}} \left(\frac{c}{c'} \right)^k < \infty \end{aligned}$$

y así

$$D_{\sigma} u = D_{\sigma} \sum_{k=0}^{\infty} T_k = \sum_{k=0}^{\infty} D_{\sigma} T_k.$$

En resumen,

$$Du = (D_r + D_{\sigma}) \sum_{k=0}^{\infty} T_k = \sum_{k=0}^{\infty} (D_r + D_{\sigma}) T_k = 0. \quad \square$$

Observación En la demostración anterior, se realizó una prueba de Weierstrass para verificar que una determinada serie converge absoluta y uniformemente sobre todo conjunto compacto $K \subset \mathbb{B}$. Concretamente, se emplearon las propiedades (1.11), (1.12) y el lema II.4 para obtener una cota superior uniforme como

$$\left| \sum_k u_k(x) \right| \leq \sum_k |u_k(x)| \leq A \sum_k k^a c^k < \infty, \quad x \in K$$

donde $A, a > 0$, $c \in (0, 1)$ son valores constantes que dependen únicamente de la dimensión n y del conjunto compacto dado K . Este tipo de demostración se repetirá varias veces a lo largo de este trabajo.

Teorema II.6 Si (u_m) es una sucesión de funciones H -armónicas que converge uniformemente sobre todo subconjunto compacto de \mathbb{B} a cierta función u , entonces u es H -armónica.

Demostración Dadas l, m se sabe por el teorema II.3 (iv) que para toda $x = r\zeta \in \mathbb{B}$ se tiene que

$$u_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{d(k)} \lambda_{jk}^{(m)} F_k(r^2) r^k Y_j^k(\zeta),$$

$$u_l(x) - u_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{d(k)} (\lambda_{jk}^{(l)} - \lambda_{jk}^{(m)}) F_k(r^2) r^k Y_j^k(\zeta).$$

Obviamente, aquí las sucesiones únicas $(\lambda_{jk}^{(m)})_{k,j}$, $(\lambda_{jk}^{(l)})_{k,j}$ corresponden por (2.4) a las funciones u_m y u_l , respectivamente.

Sean K, c, c' como en la demostración anterior. Como (u_m) converge a u uniformemente sobre $\overline{B(0, c')}$, puede suponerse sin pérdida de generalidad que

$$\sup_m \|u_m\|_{L^\infty(\overline{B(0, c')})} < \|u\|_{L^\infty(\overline{B(0, c')})} + 1 < \infty.$$

Además, por el lema II.4 se tiene que

$$|\lambda_{jk}^{(m)}| \leq \frac{(1 - c'^2)^{1 - \frac{n}{2}}}{(c')^k} \|u_m\|_{L^\infty(\overline{B(0, c')})} \leq \frac{A c'}{(c')^k},$$

$$|\lambda_{jk}^{(l)} - \lambda_{jk}^{(m)}| \leq \frac{(1 - c'^2)^{1 - \frac{n}{2}}}{(c')^k} \|u_l - u_m\|_{L^\infty(\overline{B(0, c')})} \leq \frac{2A c'}{(c')^k}.$$

Entonces cada sucesión $(\lambda_{jk}^{(m)})_m$ es de Cauchy y converge a un determinado valor λ_{jk} con $|\lambda_{jk}| \leq A c' (c')^{-k}$.

Sobre K , también por (1.11) y (1.12) se obtiene

$$\left| \sum_{j=1}^{d(k)} \lambda_{jk}^{(m)} F_k(r^2) r^k Y_j^k(\zeta) \right| \leq A k^{n-2} k^{\frac{n}{2}} \left(\frac{c}{c'} \right)^k$$

y por el teorema de convergencia dominada para $x = r\zeta \in K$

$$\begin{aligned} u(x) &= \lim_{m \rightarrow \infty} u_m(x) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{d(k)} \lambda_{jk}^{(m)} F_k(r^2) r^k Y_j^k(\zeta) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{d(k)} \lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_{jk}^{(m)} F_k(r^2) r^k Y_j^k(\zeta) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{d(k)} \lambda_{jk} F_k(r^2) r^k Y_j^k(\zeta). \end{aligned}$$

La convergencia de esta última serie vuelve a ser absoluta y uniforme sobre K por el lema II.4.

Como K es cualquier compacto en \mathbb{B} , se concluye que

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{d(k)} \lambda_{jk} F_k(r^2) r^k Y_j^k(\zeta), \quad x \in \mathbb{B}$$

y por el teorema II.5 esta función es H -armónica. \square

De manera análoga, se obtiene el siguiente resultado elemental.

Teorema II.7 *Toda función H -armónica es infinitamente diferenciable.*

Demostración Sean u una función H -armónica y α cualquier multiíndice de dimensión n . Sean K, c, c' como en la demostración anterior. Entonces interesa probar que $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha u$ existe sobre K y esto se hace sobre el desarrollo (2.4) para u .

Sea $k \geq 0$. Por el resumen I.1 se sabe que F_k es analítica sobre el disco complejo dado por $|z| \leq c'$, $z \in \mathbb{C}$. Entonces, por el teorema de Cauchy, cada $m \geq 0$ satisface

$$F_k^{(m)}(a) = \frac{m!}{2\pi i} \oint_{|z|=c'} \frac{F_k(z) dz}{(z-a)^{m+1}}, \quad |a| \leq c.$$

En esta integral, $0 < c' - c \leq |z| - |a| \leq |z - a|$ porque $0 \leq |a| \leq c < c' = |z|$. Así,

$$0 < \frac{1}{|z-a|} \leq \frac{1}{c'-c},$$

luego

$$|F_k^{(m)}(a)| \leq \frac{m!}{2\pi} 2\pi c' \frac{\|F_k\|_{L^\infty(\overline{B(0,c')})}}{(c' - c)^{m+1}} = A, \quad |a| \leq c.$$

Por otro lado, se sabe por (1.12) que si β es cualquier multiíndice n -dimensional tal que $0 \leq \beta \leq \alpha$ entonces para $j = 1, 2, \dots, d(k)$ se cumple que

$$\left\| \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^{\alpha - \beta} [r^k Y_j^k(\zeta)] \right\|_{L^\infty(S)} \leq Ak^{\frac{n}{2} + |\alpha|}.$$

Así, basta aplicar la regla de Leibniz en

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha [F_k(r^2) r^k Y_j^k(\zeta)] = \sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\beta F_k(r^2) \right\} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^{\alpha - \beta} [r^k Y_j^k(\zeta)] \right\}$$

para ver que

$$\sum_{j=1}^{d(k)} \left| \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha [F_k(r^2) r^k Y_j^k(\zeta)] \right| \leq Ak^{\frac{n}{2} + |\alpha|},$$

luego la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{d(k)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha \lambda_{jk} F_k(r^2) r^k Y_j^k(\zeta)$ converge absoluta y uniformemente sobre K . Por lo tanto, la serie que representa a u se deriva término por término como

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha u(a) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{d(k)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha \lambda_{jk} F_k(r^2) r^k Y_j^k(\zeta), \quad x \in K. \quad \square$$

Nota Lo anterior no garantiza que las derivadas parciales de una función H -armónica sean a su vez H -armónicas. De hecho, esto no sucede en general cuando $n \geq 3$. Por ejemplo, la función definida por $u(x) = (3 - r^2)x_1$ para $x = r\zeta \in \mathbb{B}_4$ es H -armónica pero su derivada parcial $\partial u / \partial x_2$ no lo es.

II.3 Correspondencia con las funciones armónicas

En su tesis doctoral [Sa], H. Samii determina una biyección explícita entre las funciones H -armónicas y las funciones armónicas de dominio \mathbb{B} . Enseguida se emplea lo expuesto hasta ahora en este capítulo para demostrar este resultado desde un punto de vista distinto del que emplea Samii. Al final de esta sección, este enfoque permitirá establecer fácilmente una nueva correspondencia entre las funciones hiperarmónicas y armónicas sobre \mathbb{B} .

Proposición II.8 Sea u una función H -armónica y sea

$$u(x) = u(0) + \sum_{k=1}^{\infty} F_k(r^2) r^k u_k(\zeta), \quad x = r\zeta \in \mathbb{B} \quad (2.5)$$

su descomposición en armónicas esféricas. Entonces la relación dada por

$$U(x) = u(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{B(k, \frac{n}{2})} r^k u_k(\zeta) \quad (2.6)$$

define una función armónica que se caracteriza por cumplir simultáneamente sobre \mathbb{B}

$$\left. \begin{array}{l} a) U \text{ es armónica,} \\ b) U(0) = u(0), \\ c) u(x) = u(0) + \int_0^1 [U(tx) - U(0)] [(1-t)(1-tr^2)]^{\frac{n}{2}-1} \frac{dt}{t}. \end{array} \right\} \quad (2.7)$$

Demostración Bajo la hipótesis (2.5), interesa probar que (2.6) define una función armónica U y que además (2.6) es equivalente a (2.7).

Para cada $u_k \in H_k(S)$ en (2.5), considérese la combinación lineal $u_k = \sum_{j=1}^{d(k)} \lambda_{jk} Y_j^k$.

Primera parte Sea K un subconjunto compacto de \mathbb{B} . Sean c, c' valores tales que $K \subset \overline{B(0, c)} \subset B(0, c') \subset \mathbb{B}$ con $0 < c < c' < 1$.

Cada sumando en (2.6) es armónico porque la relación $x = r\zeta \mapsto r^k u_k(\zeta)$ define un polinomio en $H_k(\mathbb{R}^n)$. Además, esta serie converge absoluta y uniformemente sobre K , ya que por las propiedades (1.10), (1.11), (1.12) y el lema II.4, toda $x = r\zeta \in K$ satisface

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{B(k, \frac{n}{2})} r^k |u_k(\zeta)| = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{d(k)} |\lambda_{jk}| \frac{1}{B(k, \frac{n}{2})} r^k |Y_j^k(\zeta)| \leq A \sum_{k=1}^{\infty} k^{n-2} k^{\frac{n}{2}} k^{\frac{n}{2}} \left(\frac{c}{c'}\right)^k,$$

donde A es una constante positiva que sólo depende de n, u , y K .

Por lo tanto, la función U existe y es armónica.

Segunda parte Sea U la función armónica dada por (2.6). Obviamente, $U(0) = u(0)$.

Sea $x = r\zeta \in \mathbb{B}$ fija. Entonces para toda $t \in [0, 1]$ resulta que la serie

$$\phi_x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{B(k, \frac{n}{2})} r^k u_k(\zeta) t^{k-1} [(1-t)(1-tr^2)]^{\frac{n}{2}-1}$$

converge absoluta y uniformemente sobre $[0, 1]$ por (2.5), ya que dada $c' \in (r, 1)$ se tiene

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{B(k, \frac{n}{2})} r^k |u_k(\zeta)| t^{k-1} [(1-t)(1-tr^2)]^{\frac{n}{2}-1} < A \sum_{k=1}^{\infty} k^{2n-2} \left(\frac{r}{c'}\right)^k < \infty.$$

De manera que $\phi_x(t)$ se puede integrar término por término con respecto a $t \in [0, 1]$. Así, por la forma integral (1.24) para F_k , se obtiene (2.7) como

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 [U(tx) - u(0)] [(1-t)(1-tr^2)]^{\frac{n}{2}-1} \frac{dt}{t} \\
 &= \int_0^1 \phi_x(t) dt \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{B(k, \frac{n}{2})} \int_0^1 t^{k-1} [(1-t)(1-tr^2)]^{\frac{n}{2}-1} dt \right) r^k u_k(\zeta) \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} F_k(r^2) r^k u_k(\zeta) \\
 &= u(x) - u(0).
 \end{aligned}$$

Tercera parte Supóngase ahora que $U : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{C}$ satisface (2.7). Por ser armónica, U posee sobre \mathbb{B} una descomposición en polinomios armónicos homogéneos de la forma

$$U = u(0) + \sum_{k=1}^{\infty} p_k \quad \text{con } p_k \in H_k(\mathbb{R}^n) \text{ para cada } k \geq 0$$

que converge absoluta y uniformemente sobre todos los subconjuntos compactos de \mathbb{B} .

Así, dada $x \in \mathbb{B}$ fija, la función definida por la serie

$$\psi_x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k(x) t^{k-1} [(1-t)(1-tr^2)]^{\frac{n}{2}-1}$$

también se puede integrar término por término sobre $[0, 1]$ ya que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |p_k(x)| t^{k-1} [(1-t)(1-tr^2)]^{\frac{n}{2}-1} \leq \sum_{k=1}^{\infty} |p_k(x)| < \infty.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 [U(tx) - U(0)] [(1-t)(1-tr^2)]^{\frac{n}{2}-1} \frac{dt}{t} \\
 &= \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} p_k(x) t^k [(1-t)(1-tr^2)]^{\frac{n}{2}-1} \frac{dt}{t} \\
 &= \int_0^1 \psi_x(t) dt \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^1 t^{k-1} [(1-t)(1-tr^2)]^{\frac{n}{2}-1} dt \right) p_k(x) \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{B(k, \frac{n}{2})} \int_0^1 t^{k-1} [(1-t)(1-tr^2)]^{\frac{n}{2}-1} dt \right] B(k, \frac{n}{2}) p_k(x)
 \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} F_k(r^2) B(k, \frac{n}{2}) p_k(x)$$

con

$$p_k(x) = \sum_{j=1}^{d(k)} \widetilde{\lambda}_{jk} r^k Y_j^k(\zeta)$$

sobre \mathbb{B} para ciertas constantes $\widetilde{\lambda}_{jk}$. Entonces, por (2.5) y (2.7) se tiene a la vez

$$u(x) = u(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{d(k)} \lambda_{jk} F_k(r^2) r^k Y_j^k(\zeta) = u(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{d(k)} \widetilde{\lambda}_{jk} B(k, \frac{n}{2}) F_k(r^2) r^k Y_j^k(\zeta)$$

luego para cualesquiera k, j

$$\widetilde{\lambda}_{jk} = \frac{1}{B(k, \frac{n}{2})} \lambda_{jk}$$

y por lo tanto se obtiene (2.6) como

$$U(x) = u(0) + \sum_{k=1}^{\infty} p_k(x) = u(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{d(k)} \frac{1}{B(k, \frac{n}{2})} \lambda_{jk} r^k Y_j^k(\zeta). \quad \square$$

La conversa de este resultado se establece enseguida.

Proposición II.9 *Sea $U : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{C}$ una función armónica. Considérese su descomposición sobre \mathbb{B} en polinomios armónicos homogéneos $p_k \in H_k(\mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$ de la forma*

$$U = U(0) + \sum_{k=1}^{\infty} p_k \tag{2.8}$$

donde la convergencia es absoluta y uniforme sobre los compactos en \mathbb{B} . Entonces la función dada por

$$u(x) = U(0) + \sum_{k=1}^{\infty} B(k, \frac{n}{2}) F_k(r^2) p_k(x), \quad x \in \mathbb{B} \tag{2.9}$$

es H -armónica y se caracteriza por satisfacer a la vez sobre \mathbb{B}

$$\left. \begin{array}{l} a) \ u \text{ es } H\text{-armónica,} \\ b) \ u(0) = U(0), \\ c) \ u(x) = u(0) + \int_0^1 [U(tx) - U(0)] [(1-t)(1-tr^2)]^{\frac{n}{2}-1} \frac{dt}{t}. \end{array} \right\} \quad (2.10)$$

Demostración Bajo la hipótesis (2.8), debe probarse la validez de (2.9) y la equivalencia entre (2.9) y (2.10). Si K, c, c' son como en la prueba anterior, entonces para $x = r\zeta \in K$ se tiene que

$$\sum_{k=1}^{\infty} B(k, \frac{n}{2}) F_k(r^2) |p_k(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{d(k)} |\widetilde{\lambda}_{jk}| B(k, \frac{n}{2}) r^k |Y_j^k(\zeta)| < A \sum_{k=1}^{\infty} k^{n-2} \left(\frac{c}{c'}\right)^k < \infty.$$

Así que la serie en (2.9) converge absoluta y uniformemente sobre K . Por lo tanto, la función u existe y es H -armónica por el teorema II.5. El resto del razonamiento es análogo al anterior. \square

La conclusión es la siguiente.

Teorema II.10 *Entre las funciones H -armónicas u y las funciones armónicas U definidas sobre la bola unitaria existe una biyección S dada por*

$$\begin{aligned} S : u(x) &= \sum_{k,j} \lambda_{jk} F_k(r^2) r^k Y_j^k(\zeta) \mapsto U(x) = u(0) + \sum_{k,j} \lambda_{jk} \frac{1}{B(k, \frac{n}{2})} r^k Y_j^k(\zeta), \\ S^{-1} : U(x) &= \sum_{k,j} \widetilde{\lambda}_{jk} r^k Y_j^k(\zeta) \mapsto u(x) = U(0) + \sum_{k,j} \widetilde{\lambda}_{jk} B(k, \frac{n}{2}) F_k(r^2) r^k Y_j^k(\zeta) \end{aligned}$$

y caracterizada por cumplir simultáneamente para $x = r\zeta \in \mathbb{B}$

$$u(0) = U(0) \quad \text{y} \quad u(x) = u(0) + \int_0^1 [U(tx) - U(0)] [(1-t)(1-tr^2)]^{\frac{n}{2}-1} \frac{dt}{t}.$$

Observación Bajo la biyección S , los núcleos de Poisson hiperbólico y euclidiano no quedan asociados entre sí. En efecto, dada $\xi \in S$, para toda $x \in \mathbb{B}$ puede verse que

$$\begin{aligned} P_h(x, \xi) &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F_k(r^2)}{F_k(1)} Z_k(x, \xi), \\ SP_h(x, \xi) &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{B(k, \frac{n}{2}) F_k(1)} Z_k(x, \xi), \\ P_e(x, \xi) &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} Z_k(x, \xi), \end{aligned}$$

$$S^{-1}P_e(x, \xi) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} B(k, \frac{n}{2}) F_k(r^2) Z_k(x, \xi),$$

por lo que claramente

$$SP_h(\bullet, \xi) \neq P_e(\bullet, \xi), \quad S^{-1}P_e(\bullet, \xi) \neq P_h(\bullet, \xi).$$

Esta observación da pie a una segunda biyección entre las funciones H -armónicas y las armónicas de dominio \mathbb{B} . Se omite la prueba correspondiente porque es muy similar a las dos anteriores.

Teorema II.11 *Entre el espacio de las funciones H -armónicas (denotadas por u) y el de las funciones armónicas definidas sobre la bola unitaria (denotadas por U) existe una biyección \mathcal{M} que hace corresponder entre sí a los núcleos de Poisson hiperbólico y euclidiano. Dicha biyección es distinta de la anterior. Está dada por*

$$\mathcal{M} : u(x) = u(0) + \sum_{k,j} \lambda_{jk} F_k(r^2) r^k Y_j^k(\xi) \mapsto U(x) = u(0) + \sum_{k,j} \lambda_{jk} F_k(1) r^k Y_j^k(\xi),$$

$$\mathcal{M}^{-1} : U(x) = U(0) + \sum_{k,j} \tilde{\lambda}_{jk} r^k Y_j^k(\xi) \mapsto u(x) = U(0) + \sum_{k,j} \tilde{\lambda}_{jk} \frac{F_k(r^2)}{F_k(1)} r^k Y_j^k(\xi)$$

y para cada $\xi \in S$ satisface sobre \mathbb{B}

$$\mathcal{M}P_h(\bullet, \xi) = P_e(\bullet, \xi).$$

II.4 Los espacios de Bergman \mathcal{B}_w^p

En esta sección comienza el estudio de ciertos espacios llamados *de Bergman* vinculados a la bola hiperbólica de dimensión $n \geq 2$. En esencia, se presenta aquí su definición y se demuestra que éstos son espacios de Banach. A partir del siguiente capítulo, se abandonará la generalidad adoptada aquí para enfocar un caso muy particular de estos espacios.

Definición II.12 Dados los valores $n \geq 2$, $p \in [1, \infty]$ y dada una función medible de la forma $w : [0, 1) \rightarrow (0, \infty)$, se define el *espacio de Bergman* \mathcal{B}_w^p como el subespacio de Banach de $L^p(\mathbb{B}, w(r)dx)$ dado por

$$\mathcal{B}_w^p = \left\{ u : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{C} \mid u \text{ es } H\text{-armónica, } \int_{\mathbb{B}} |u(x)|^p w(r)dx < \infty \right\}.$$

Se dice que la función w constituye un *peso radial* que pondera o asigna un peso a la medida de Lebesgue sobre estos espacios.

De ahora en adelante, \mathcal{A} denotará el espacio vectorial formado por todas las funciones H -armónicas. Si además se escribe $L_w^p = L^p(\mathbb{B}, w(r)dx)$, entonces la definición anterior es simplemente

$$B_w^p = \mathcal{A} \cap L_w^p.$$

Observación Definida de este modo, $w(r)dx$ constituye una generalización de la medida de Lebesgue sobre \mathbb{B} que por ahora incluye a la medida hiperbólica.

Lema II.13 Sea $w : [0, 1) \rightarrow (0, \infty)$ una función medible que esté acotada lejos de cero sobre cada subconjunto compacto de su dominio. Sean los valores $n \geq 2$, $p \in [1, \infty]$. Sean c, c' dos valores dados tales que $0 < c < c' < 1$. Entonces existe una constante $A = A(n, w, p, c, c') > 0$ tal que

$$|u(x)| \leq A \|u\|_{L_w^p(B(0, c'))}, \quad x \in B(0, c)$$

para toda función H -armónica u .

Demostración Sea $a \in B(0, c)$. De acuerdo a la definición II.2 y al resultado (2.3), existe una transformación especial y positiva de Lorentz g tal que

$$a = g \cdot 0, \\ g \cdot B(0, \rho) \subset B(a, 6\rho(1 - |a|^2)), \quad \rho \in (0, \frac{1}{2}).$$

Por el teorema del valor medio II.3 (ii) para funciones H -armónicas, g satisface además

$$u(a) = \frac{1}{\mu[B(0, \rho)]} \int_{g \cdot B(0, \rho)} u d\mu$$

para cualesquiera $\rho \in (0, 1)$, $u \in \mathcal{A}$.

Ahora, para $\rho > 0$ se tiene que

$$B(a, 6\rho(1 - |a|^2)) \subset B(0, c')$$

si y sólo si

$$6\rho(1 - |a|^2) \leq c' - |a|,$$

lo cual equivale a

$$\rho \leq \frac{c' - |a|}{6(1 - |a|^2)}.$$

De modo que el valor

$$\rho^* = \frac{c' - c}{6} \in (0, \frac{1}{6})$$

satisface

$$\frac{c' - c}{6} \leq \frac{c' - |a|}{6(1 - |a|^2)},$$

con

$$|u(a)| \leq \frac{1}{\mu[B(0, \rho^*)]} \int_{B(0, c')} |u| d\mu, \quad u \in \mathcal{A}.$$

Por último, la naturaleza de w asegura que la medida $w(r)dx$ es finita sobre $B(0, c')$ y que existe una constante $M_{c'}$ tal que $0 < 1/w(r) < M_{c'}$ para toda $r \in [0, c']$. Por lo tanto, para toda $u \in \mathcal{A}$ se tiene que

$$\begin{aligned} |u(a)| &\leq \frac{1}{\mu[B(0, \rho^*)]} \int_{B(0, c')} \frac{|u(x)|}{(1 - r^2)^n w(r)} w(r) dx \\ &\leq \frac{1}{\mu[B(0, \rho^*)]} \frac{M_{c'}}{(1 - c'^2)^n} \int_{B(0, c')} |u(x)| w(r) dx \end{aligned}$$

y el resultado se sigue por la desigualdad de Hölder. \square

Teorema II.14 *Sea $w : [0, 1) \rightarrow (0, \infty)$ una función medible que esté acotada lejos de cero sobre cada subconjunto compacto de su dominio. Sean los valores $n \geq 2$, $p \in [1, \infty]$. Entonces B_w^p es un subespacio de Banach de L_w^p .*

Demostración Sea (u_k) una sucesión de Cauchy en B_w^p . Entonces (u_k) converge a cierta función $v \in L_w^p$ y existe una subsucesión $(u_{k_l})_{l \in \mathbb{N}}$ de (u_k) que converge a ella puntualmente y casi dondequiera en la medida ponderada $w(r)dx$. Sobre un conjunto de medida de Lebesgue cero, la función v se modifica enseguida para que una función H -armónica u tome su lugar en L_w^p .

Sea K cualquier subconjunto compacto de \mathbb{B} . Sean c, c' dos constantes tales que $0 < c < c' < 1$ con $K \subset \overline{B(0, c)} \subset B(0, c') \subset \mathbb{B}$. Entonces por el lema anterior existe $A = A(c, c') > 0$ tal que

$$|u_k(x) - u_m(x)| \leq A \|u_k - u_m\|_{L_w^p(B(0, c'))} \leq A \|u_k - u_m\|_{L_w^p}, \quad x \in K$$

para cualesquiera k, m . Por lo tanto, (u_k) converge uniformemente sobre K .

Así, la sucesión de funciones H -armónicas (u_k) converge sobre \mathbb{B} a cierta función continua u , y lo hace uniformemente sobre los subconjuntos compactos de \mathbb{B} . Por el teorema II.6, u es H -armónica. Pero, en la medida $w(r)dx$, la subsucesión $(u_{k_l})_{l \in \mathbb{N}}$ también converge casi dondequiera a la función v . Entonces u, v son iguales entre sí casi dondequiera y representan al mismo elemento de L_w^p . Por lo tanto, (u_k) converge a $u \in B_w^p$ bajo la norma de L_w^p . \square

32 Espacios de Bergman de funciones armónicas en la bola hiperbólica

Termina aquí esta presentación básica de las funciones H -armónicas y de los espacios de Bergman B_w^p que conforman aquéllas que pertenecen al espacio L_w^p .

Capítulo III

El espacio de Hilbert $\mathcal{B}^{2,\gamma}$

De aquí en adelante, se considerarán únicamente los espacios de Bergman $\mathcal{B}_w^p = \mathcal{A} \cap L^p(\mathbb{B}, w(r)dx)$ ponderados por el peso radial $w(r) = (1-r)^\beta$, donde β es un parámetro real fijo, como lo es $p \in [1, \infty)$.

Se denotará

$$L^{p,\beta} = L^p(\mathbb{B}, (1-r)^\beta dx),$$

$$\mathcal{B}^{p,\beta} = \mathcal{A} \cap L^{p,\beta}$$

$$= \left\{ f: \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ es } H\text{-armónica, } \|f\|_{p,\beta} = \left(\int_{\mathbb{B}} |f(x)|^p (1-r)^\beta dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}.$$

En todo momento, se buscará seguir la línea de investigación definida por [AFP], [BP1], [BP2], [Lo] y [Pe] donde se analiza el correspondiente caso euclidiano.

Más adelante se estudiará el espacio general $\mathcal{B}^{p,\beta}$. Pero en este capítulo interesa tan sólo el caso particular $\mathcal{B}^{2,\gamma}$ para $\gamma \in \mathbb{R}$, provisto del producto interior definido como

$$\langle u, v \rangle = \langle u, v \rangle_\gamma = \int_{\mathbb{B}} u(x) \overline{v(x)} (1-r)^\gamma dx$$

para $u, v \in \mathcal{B}^{2,\gamma}$.

Por el teorema II.14, $\mathcal{B}^{2,\gamma}$ es un subespacio de Hilbert de $L^{2,\gamma}$ y como tal posee una teoría propia.

Como ya se ha dicho, cualesquiera $x, y \in \mathbb{B}$ se expresan en coordenadas polares como $x = r\zeta$, $y = s\xi$ con $r, s \geq 0$ y $\zeta, \xi \in S$. A partir de ahora, la distancia de un punto $x \in \mathbb{B}$ a la frontera S se denota por $\epsilon(x) = \epsilon(r) = 1-r$. El parámetro γ representa un valor real dado. Y la norma del espacio $L^{2,\gamma}$ se escribe como $\|\cdot\|_{2,\gamma}$ o simplemente $\|\cdot\|_2$.

III.1 El núcleo reproductor K^γ

En esta sección se presenta un núcleo reproductor para el espacio $\mathcal{B}^{2,\gamma}$ y se enuncian

sus principales propiedades. El razonamiento seguido aquí es clásico en análisis armónico y se encuentra, en su totalidad, en textos como [Ax].

En el lema II.13 se probó que para cada $x \in \mathbb{B}$ existe una constante $c = c(x) > 0$ tal que $|u(x)| \leq c\|u\|_2$ para toda función H -armónica u . Esto conduce al siguiente resultado.

Lema III.1 Dada $x \in \mathbb{B}$, la funcional lineal $T_x : \mathcal{B}^{2,\gamma} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por la evaluación $u \mapsto u(x)$ es continua. Por lo tanto, para cada $x \in \mathbb{B}$ existe una función única $K^\gamma(x, \cdot) \in \mathcal{B}^{2,\gamma}$ tal que

$$u(x) = \langle u, K^\gamma(x, \cdot) \rangle = \int_{\mathbb{B}} u(y) \overline{K^\gamma(x, y)} \epsilon(y)^\gamma dy, \quad u \in \mathcal{B}^{2,\gamma}.$$

Definición III.2 La función escalar K^γ obtenida así sobre $\mathbb{B} \times \mathbb{B}$ constituye el núcleo reproductor de $\mathcal{B}^{2,\gamma}$ sobre la bola hiperbólica.

Teorema III.3 El núcleo reproductor K^γ de $\mathcal{B}^{2,\gamma}$ satisface

- K^γ sólo toma valores reales,
- $\mathcal{B}^{2,\gamma}$ posee una base ortonormal numerable. Si $\{u_k : k \in \mathbb{N}\}$ lo es, entonces puntualmente sobre $\mathbb{B} \times \mathbb{B}$ se tiene que

$$K^\gamma(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \overline{u_k(y)},$$

- K^γ es simétrica,
- $\|K^\gamma(x, \cdot)\|_2^2 = K^\gamma(x, x)$ para cada $x \in \mathbb{B}$,
- existe una única proyección ortogonal $\mathcal{P} : L^{2,\gamma} \rightarrow \mathcal{B}^{2,\gamma}$ que es suprayectiva, continua y tal que la imagen de $L^{2,\gamma}$ bajo $I - \mathcal{P}$ es el complemento ortogonal de $\mathcal{B}^{2,\gamma}$ en $L^{2,\gamma}$, donde $I : L^{2,\gamma} \rightarrow L^{2,\gamma}$ denota a la función identidad,
- dicha proyección \mathcal{P} está dada por

$$\mathcal{P}[f](x) = \int_{\mathbb{B}} K^\gamma(x, y) f(y) \epsilon(y)^\gamma dy$$

para $f \in L^{2,\gamma}$, $x \in \mathbb{B}$.

Demostración a) Sean $x \in \mathbb{B}$, $u = \text{Im} K^\gamma(x, \cdot)$. Entonces $u \in \mathcal{B}^{2,\gamma}$, por tratarse de la parte imaginaria de una función H -armónica en $L^{2,\gamma}$ (ver el teorema II.3(i)). Como u sólo toma valores reales, del lema III.1 se sigue que

$$\begin{aligned} 0 &= \text{Im} u(x) \\ &= \text{Im} \left(\int_{\mathbb{B}} u(y) \overline{K^\gamma(x, y)} \epsilon(y)^\gamma dy \right) \\ &= - \int_{\mathbb{B}} u(y) \text{Im} K^\gamma(x, y) \epsilon(y)^\gamma dy \end{aligned}$$

$$= -\|\operatorname{Im} K^\gamma(x, \bullet)\|_2^2$$

luego $\operatorname{Im} K^\gamma(x, \bullet) = 0$ sobre \mathbb{B} .

b) $B^{2,\gamma}$ es separable porque $L^{2,\gamma}$ lo es. Entonces, como en todo espacio de Hilbert separable, para cada $x \in \mathbb{B}$ se cumple

$$K^\gamma(x, \bullet) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle K^\gamma(x, \bullet), u_k \rangle u_k = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{u_k(x)} u_k,$$

y estas series convergen en la norma $\|\bullet\|_2$. Por el lema III.1, la evaluación en cada $y \in \mathbb{B}$ es continua, entonces sobre $\mathbb{B} \times \mathbb{B}$ se cumple puntualmente que

$$K^\gamma(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{u_k(x)} u_k(y).$$

c) Por (a) y (b), existe una base ortonormal $\{u_k : k \in \mathbb{N}\}$ para $B^{2,\gamma}$ tal que si $x, y \in \mathbb{B}$ entonces

$$K^\gamma(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{u_k(x)} u_k(y) = \overline{K^\gamma(x, y)} = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \overline{u_k(y)} = K^\gamma(y, x).$$

d) Por (a) y por el lema III.1, para toda $x \in \mathbb{B}$ se satisface

$$\|K^\gamma(x, \bullet)\|_2^2 = \langle K^\gamma(x, \bullet), K^\gamma(x, \bullet) \rangle = K^\gamma(x, x).$$

e) El resultado se debe a que $B^{2,\gamma}$ es un subespacio de Hilbert de $L^{2,\gamma}$.

f) Por (e), véase que $\langle f - \mathcal{P}[f], K^\gamma(x, \bullet) \rangle = 0$ para toda $f \in L^{2,\gamma}$, debido a que $K^\gamma(x, \bullet) \in B^{2,\gamma}$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{P}[f](x) &= \langle \mathcal{P}[f], K^\gamma(x, \bullet) \rangle + 0 \\ &= \langle \mathcal{P}[f], K^\gamma(x, \bullet) \rangle + \langle f - \mathcal{P}[f], K^\gamma(x, \bullet) \rangle \\ &= \langle f, K^\gamma(x, \bullet) \rangle \\ &= \int_{\mathbb{B}} K^\gamma(x, y) f(y) \epsilon(y)^\gamma dy \end{aligned}$$

siempre que $f \in L^{2,\gamma}$, $x \in \mathbb{B}$. \square

Proposición III.4 Sean los valores $n \geq 2$, $\gamma > -1$. Entonces una base ortonormal para $B^{2,\gamma}$ es $\left\{ \frac{1}{\beta_k} W_j^k : k \geq 0, 1 \leq j \leq d(k) \right\}$, donde

$$W_j^k(x) = F_k(r^2) r^k Y_j^k(\zeta), \quad x = r\zeta \in \mathbb{B}$$

y donde cada valor $\beta_k = \beta_k(n, \gamma) > 0$ está dado por

$$\beta_k^2 = \|W_j^k\|_2^2 = \frac{n}{\text{vol } \mathbb{B}} \int_0^1 F_k^2(r^2) r^{n+2k-1} (1-r)^\gamma dr.$$

Demostración Recuérdese que $\{Y_j^k : 1 \leq j \leq d(k)\}$ es una base ortonormal de $H_k(S)$ para cada $k \geq 0$. Entonces si $k, k' \geq 0$ y $j \in \{1, 2, \dots, d(k)\}, j' \in \{1, 2, \dots, d(k')\}$ son tales que $k \neq k'$ ó $j \neq j'$ entonces $\langle Y_j^k, Y_{j'}^{k'} \rangle_{L^2(S)} = 0$ y así

$$\begin{aligned} \langle W_j^k, W_{j'}^{k'} \rangle &= \int_{\mathbb{B}} W_j^k(x) \overline{W_{j'}^{k'}(x)} (1-r)^\gamma dx \\ &= \frac{n}{\text{vol } \mathbb{B}} \int_0^1 F_k(r^2) F_{k'}(r^2) r^{n-1+k+k'} (1-r)^\gamma dr \int_S Y_j^k(\zeta) \overline{Y_{j'}^{k'}(\zeta)} d\sigma(\zeta) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ahora, por el teorema II.3 (iii), se sabe que cada función W_j^k es H -armónica. Además, cada $W_j^k \in L^{2,\gamma}$ porque

$$\begin{aligned} \beta_k^2 &= \frac{n}{\text{vol } \mathbb{B}} \int_0^1 r^{n-1} F_k^2(r^2) r^{2k} (1-r)^\gamma \int_S (Y_j^k(\zeta))^2 d\sigma(\zeta) dr \\ &= \frac{n}{\text{vol } \mathbb{B}} \int_0^1 F_k^2(r^2) r^{n+2k-1} (1-r)^\gamma dr < \infty \end{aligned}$$

ya que $\gamma > -1$. (Éste es el único paso en el cual se emplea la hipótesis $\gamma > -1$. Obsérvese también que el valor de β_k no depende de j .)

Por lo tanto, $\{W_j^k\}_{k,j}$ es una colección ortogonal en el espacio de Hilbert $B^{2,\gamma}$. Si no fuera maximal, en la teoría de los espacios de Hilbert se establece que se le podría completar: al menos se le podría añadir un nuevo vector $u \in B^{2,\gamma}$ distinto de cero y ortogonal a todos los demás. Pero por el teorema II.3 (iv), dicha función $u \in \mathcal{A}$ sería de la forma $u = \sum_{k,j} \lambda_{jk} W_j^k$ y para cada elección de $k_0 \geq 0$ y $j_0 \in \{1, 2, \dots, d(k_0)\}$ se tendría $0 = \langle u, W_{j_0}^{k_0} \rangle = \lambda_{j_0 k_0}$. Con ello, se daría la contradicción $u = 0$. Por lo tanto, $\{W_j^k\}_{k,j}$ es una base ortogonal para $B^{2,\gamma}$. \square

Observación El valor del parámetro $\gamma > -1$ se adopta de ahora en adelante por el resultado anterior. Con esta decisión, la medida positiva dada por $(1-r)^\gamma dx$ es siempre finita sobre \mathbb{B} . Esto descarta completamente a la medida hiperbólica. En efecto, como $(1-r^2)^{-n} \sim (1-r)^{-n}$ sobre \mathbb{B} , la medida $d\mu = (1-r^2)^{-n} dx$ no figura entre los espacios de Bergman elegidos. Esto se debe a que la medida hiperbólica, infinita, hace diverger hasta los objetos más elementales que interesa estudiar en $B^{p,\gamma}$.

Entonces lo que hace propiamente *hiperbólico* al espacio $B^{p,\gamma} = \mathcal{A} \cap L^{p,\gamma}$ no es la medida sino las funciones H -armónicas que conforman al conjunto \mathcal{A} . Para hacer énfasis en este hecho, se puede considerar que el espacio que interesa es $\mathcal{A} \cap L^p(\mathbb{B}, (1-r)^{\delta-n} dx)$, donde el parámetro real $\delta > n-1$ pone en relieve la inevitable

distorsión impuesta a la medida hiperbólica. Pero aquí no se adoptará esta notación.

El siguiente resultado se sigue directamente del anterior por el teorema III.3 (b).

Corolario III.5 *El núcleo reproductor del espacio de Hilbert $\mathcal{B}^{2,\gamma}$ está dado por*

$$K^\gamma(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{d(k)} \frac{1}{\beta_k^2} F_k(r^2) F_k(s^2) r^k s^k Y_j^k(\zeta) Y_j^k(\xi) \quad \text{para } x, y \in \mathbb{B}.$$

Nota En la siguiente sección se demostrará que la convergencia de esta serie es absoluta y uniforme sobre $K \times \mathbb{B}$ siempre que $K \subset \mathbb{B}$ sea un conjunto compacto.

Observación Es importante apreciar desde ahora que el valor de $1/\beta_k^2$ no es trivial. Su presencia en la forma explícita de K^γ complica considerablemente el manejo de este núcleo reproductor. En las siguientes dos secciones se busca saber más acerca de esta cantidad.

III.2 Orden de magnitud de los valores β_k^2

Para saber lo más posible acerca del núcleo reproductor K^γ , es importante analizar los valores β_k^2 dados en la Proposición III.4. En esta sección se determina su orden de magnitud.

Sean los valores $n \geq 2$, $\gamma > -1$, $k \geq 0$. Entonces la convergencia absoluta y uniforme sobre $[0, 1]$ de la serie

$$F_k(r^2) = \sum_{i=0}^{\infty} d_i r^{2i} \quad \text{con} \quad d_i = \frac{(1 - \frac{n}{2})_i (k)_i}{i! (k + \frac{n}{2})_i}$$

permite calcular con (1.5) que

$$\begin{aligned} \beta_k^2 &= \frac{n}{\text{vol } \mathbb{B}} \int_0^1 F_k^2(r^2) r^{n+2k-1} (1-r)^\gamma dr \\ &= A \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} d_i d_j \int_0^1 r^{n+2k+2(i+j)-1} (1-r)^\gamma dr \\ &= A \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} d_i d_j B(n+2k+2(i+j), \gamma+1). \end{aligned}$$

Sean $i, j \geq 0$ fijas. Vistas como funciones de $k \geq 1$, las cantidades $d_i = d_i(k)$ y $d_j = d_j(k)$ satisfacen $d_i, d_j \sim 1$, mientras que $B(n+2k+2(i+j), \gamma+1) \sim \frac{1}{k^{\gamma+1}}$ por

(1.10). Así, la serie que determina a β_k^2 está compuesta por términos que *individualmente* son de orden $1/k^{\gamma+1}$. Pero algunos de ellos tienen signos contrarios entre sí debido a la presencia de los factores $(1 - \frac{n}{2})_i (1 - \frac{n}{2})_j$ en $d_i d_j$. Esto hace posible que el orden de magnitud de la serie sea *más fino* que el de los términos que la componen, como se establece enseguida.

Teorema III.6 Dadas $n \geq 2, \gamma > -1$ se tiene que

$$\beta_0^2 = \frac{n}{\text{vol } \mathbb{B}} B(n, \gamma + 1),$$

$$\beta_k^2 \sim \frac{1}{k^{n+\gamma-1}} \quad \text{para } k \geq 1.$$

Demostración El resultado es trivial para $k = 0$. Supóngase entonces que $k \geq 1$. Para $n = 2$ se tiene directamente

$$\beta_k^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^1 1 r^{2k+1} (1-r)^\gamma dr = \frac{2}{\pi} B(2k+2, \gamma+1) \sim \frac{1}{k^{\gamma+1}}.$$

Para $n \geq 3$, bastará probar que existen dos funciones f, g de orden $1/k^{n+\gamma-1}$ tales que

$$f(k) < \beta_k^2 < g(k) \quad \text{para } k \geq 4.$$

Primera parte Sea $k \geq 4$. Por la proposición I.6 (c), se sabe que

$$r^k F_k(r^2) \leq A r^{\frac{k}{2}-2} k^{1-\frac{n}{2}}.$$

Así que por (1.5) y (1.10), se cumple que

$$\begin{aligned} 0 < \beta_k^2 &= \frac{n}{\text{vol } \mathbb{B}} \int_0^1 F_k^2(r^2) r^{n+2k-1} (1-r)^\gamma dr \\ &\leq A k^{2-n} \int_0^1 r^{k-4} (1-r)^\gamma dr \\ &\leq A k^{2-n} B(k-3, \gamma+1) \\ &\leq A \frac{1}{k^{n-2}} \frac{1}{k^{\gamma+1}} = A \frac{1}{k^{n+\gamma-1}}. \end{aligned}$$

Segunda parte Sean $k \geq 1, r \in (0, 1)$. Sea $t \in (0, 1)$. Entonces $0 < tr^2 < t < 1$, luego $1 > 1 - tr^2 > 1 - t > 0$. Entonces, por (1.5),

$$\int_0^1 t^{k-1} (1-t)^{\frac{n}{2}-1} (1-tr^2)^{\frac{n}{2}-1} dt > \int_0^1 t^{k-1} (1-t)^{n-2} dt = B(k, n-1) > 0$$

y por la forma integral (1.24)

$$\begin{aligned}
 \beta_k^2 &= \frac{n}{\text{vol } \mathbb{B}} B(k, \frac{n}{2})^{-2} \int_0^1 \left[\int_0^1 t^{k-1} (1-t)^{\frac{n}{2}-1} (1-tr^2)^{\frac{n}{2}-1} dt \right]^2 r^{n+2k-1} (1-r)^\gamma dr \\
 &> \frac{n}{\text{vol } \mathbb{B}} B(k, \frac{n}{2})^{-2} B(k, n-1)^2 \int_0^1 r^{n+2k-1} (1-r)^\gamma dr \\
 &= \frac{n}{\text{vol } \mathbb{B}} B(k, \frac{n}{2})^{-2} B(k, n-1)^2 B(n+2k, \gamma+1)
 \end{aligned}$$

cuyo orden de magnitud de acuerdo a (1.10) es

$$\left(\frac{1}{k}\right)^{-n} \left(\frac{1}{k}\right)^{2n-2} \left(\frac{1}{k}\right)^{\gamma+1} = \frac{1}{k^{n+\gamma-1}}. \quad \square$$

Corolario III.7 Dadas $n \geq 2$, $\gamma > -1$ la convergencia sobre $\mathbb{B} \times \mathbb{B}$ de la serie

$$K^\gamma(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{d(k)} \frac{1}{\beta_k^2} F_k(r^2) F_k(s^2) r^k s^k Y_k(\zeta) Y_k(\xi)$$

es absoluta y uniforme sobre $K \times \mathbb{B}$ siempre que $K \subset \mathbb{B}$ sea un conjunto compacto.

Demostración Dadas $x, y \in \mathbb{B}$ con $0 \leq r \leq c < 1$, basta aplicar (1.11) y (1.12) para ver que cada $k \geq 0$ satisface

$$\begin{aligned}
 &\sum_{j=1}^{d(k)} \frac{1}{\beta_k^2} F_k(r^2) F_k(s^2) r^k s^k |Y_j^k(\zeta)| |Y_j^k(\xi)| \\
 &\leq A k^{n-2} k^{n+\gamma-1} k^{\frac{n}{2}} k^{\frac{n}{2}} \\
 &\leq A k^{3n+\gamma-3} c^k < \infty. \quad \square
 \end{aligned}$$

Observación Antes de continuar, vale la pena elaborar un poco sobre la prueba del teorema anterior.

1) *Alternativas* La demostración del teorema III.6 se puede repetir mediante otras funciones que acotan a β_k^2 . Por ejemplo, para $k \geq 1$, $r \in (0, 1)$ véase que si $t \in (0, 1)$ entonces $0 < tr^2 < r^2 < 1$ implica que $1 > 1 - tr^2 > 1 - r^2 > 0$. Por lo tanto, con (1.5) se obtienen las cantidades positivas

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 t^{k-1} (1-t)^{\frac{n}{2}-1} (1-tr^2)^{\frac{n}{2}-1} dt &> (1-r^2)^{\frac{n}{2}-1} \int_0^1 t^{k-1} (1-t)^{\frac{n}{2}-1} dt \\
 &> (1-r^2)^{\frac{n}{2}-1} B(k, \frac{n}{2}) \\
 &= (1+r)^{\frac{n}{2}-1} (1-r)^{\frac{n}{2}-1} B(k, \frac{n}{2})
 \end{aligned}$$

$$> (1-r)^{\frac{n}{2}-1} B(k, \frac{n}{2})$$

luego

$$\begin{aligned} \beta_k^2 &> \frac{n}{\text{vol } \mathbb{B}} B(k, \frac{n}{2})^{-2} B(k, \frac{n}{2})^2 \int_0^1 (1-r)^{n-2} r^{n+2k-1} (1-r)^\gamma dr \\ &= \frac{n}{\text{vol } \mathbb{B}} B(n+2k, n+\gamma-1) \\ &\sim \frac{1}{k^{n+\gamma-1}}. \end{aligned}$$

Asimismo, dadas $k \geq 1$, $r \in (0, 1)$ para toda $t \in (0, 1)$ se cumple que $0 < \sqrt{tr} < r < 1$ luego $1 > 1 - \sqrt{tr} > 1 - r > 0$ con $1 + \sqrt{tr} > 1$. De modo que para cualesquiera $t, w \in (0, 1)$ se tiene que

$$\begin{aligned} &(1-tr^2)^{\frac{n}{2}-1} (1-wr^2)^{\frac{n}{2}-1} \\ &= (1+\sqrt{tr})^{\frac{n}{2}-1} (1+\sqrt{wr})^{\frac{n}{2}-1} (1-\sqrt{tr})^{\frac{n}{2}-1} (1-\sqrt{wr})^{\frac{n}{2}-1} \\ &> (1-r)^{n-2} > 0. \end{aligned}$$

Entonces el teorema de Tonelli se aplica con (1.5) a la siguiente integral triple

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \left[\int_0^1 \int_0^1 t^{k-1} (1-t)^{\frac{n}{2}-1} (1-tr^2)^{\frac{n}{2}-1} dt \right]^2 r^{n+2k-1} (1-r)^\gamma dr \\ &= \int_0^1 \left[\int_0^1 t^{k-1} (1-t)^{\frac{n}{2}-1} (1-tr^2)^{\frac{n}{2}-1} dt \right] \\ &\quad \left[\int_0^1 w^{k-1} (1-w)^{\frac{n}{2}-1} (1-wr^2)^{\frac{n}{2}-1} dw \right] r^{n+2k-1} (1-r)^\gamma dr \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 t^{k-1} (1-t)^{\frac{n}{2}-1} (1-tr^2)^{\frac{n}{2}-1} \\ &\quad w^{k-1} (1-w)^{\frac{n}{2}-1} (1-wr^2)^{\frac{n}{2}-1} r^{n+2k-1} (1-r)^\gamma dt dw dr \\ &= \int_0^1 \int_0^1 t^{k-1} (1-t)^{\frac{n}{2}-1} w^{k-1} (1-w)^{\frac{n}{2}-1} \\ &\quad \left[\int_0^1 (1-tr^2)^{\frac{n}{2}-1} (1-wr^2)^{\frac{n}{2}-1} r^{n+2k-1} (1-r)^\gamma dr \right] dt dw \\ &> \int_0^1 \int_0^1 t^{k-1} (1-t)^{\frac{n}{2}-1} w^{k-1} (1-w)^{\frac{n}{2}-1} \left[\int_0^1 (1-r)^{n-2} r^{n+2k-1} (1-r)^\gamma dr \right] dt dw \\ &= \left[\int_0^1 t^{k-1} (1-t)^{\frac{n}{2}-1} dt \right]^2 \left[\int_0^1 r^{n+2k-1} (1-r)^{n+\gamma-2} dr \right] \\ &= B(k, \frac{n}{2})^2 B(n+2k, n+\gamma-1). \end{aligned}$$

Con lo cual se repite por (1.10) la mitad de la conclusión que es

$$\beta_k^2 > \frac{n}{\text{vol } \mathbb{B}} B(k, \frac{n}{2})^{-2} B(k, \frac{n}{2})^2 B(n+2k, n+\gamma-1) \sim \frac{1}{k^{n+\gamma-1}}.$$

2) *Síntesis* Se vio ya que si $n = 2$ entonces $\beta_k^2 = \frac{2}{\pi} B(2k+2, \gamma+1)$. Y para cualquier valor $n \geq 3$ se obtuvieron tres funciones explícitas de orden $1/k^{n+\gamma-1}$

$$f_1(k) = B(k, \frac{n}{2})^{-2} B(k, n-1)^2 B(n+2k, \gamma+1),$$

$$f_2(k) = B(n+2k, n+\gamma-1),$$

$$g(k) = k^{2-n} B(k-3, \gamma+1)$$

tales que

$$0 < f_1(k), f_2(k) < \frac{\text{vol } \mathbb{B}}{n} \beta_k^2 < Ag(k), \quad k \geq 4.$$

Para estas funciones existen constantes $c_1, c_2, c, C_1, C_2, C > 0$ para las cuales toda $k \geq 1$ cumple

$$c_1 < k^{n+\gamma-1} f_1(k) < C_1,$$

$$c_2 < k^{n+\gamma-1} f_2(k) < C_2,$$

$$c < k^{n+\gamma-1} g(k) < C$$

y por lo tanto para $k \geq 1$ se tiene que

$$\max\{c_1, c_2\} < \frac{\text{vol } \mathbb{B}}{n} k^{n+\gamma-1} \beta_k^2 < C.$$

Enseguida interesa establecer criterios para escoger entre las funciones f_1 y f_2 .

3) *Aproximaciones asintóticas* Dados los valores $a, \delta > 0$ y $b \in \mathbb{R}$, por (1.9) la función beta satisface

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{B(ak+b, \delta)}{\left(\frac{1}{k}\right)^\delta} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^\delta}{(ak+b)^\delta} (ak+b)^\delta B(ak+b, \delta) \\ &= \frac{1}{a^\delta} \lim_{k \rightarrow \infty} (ak+b)^\delta B(ak+b, \delta) \\ &= \frac{\Gamma(\delta)}{a^\delta}. \end{aligned}$$

Este hecho permite hacer explícita una aproximación asintótica del valor de $k^{n+\gamma-1} \beta_k^2$.

Si $n = 2$, el cálculo es directo

$$\frac{\pi}{2} \lim_{k \rightarrow \infty} k^{\gamma+1} \beta_k^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{B(2k+2, \gamma+1)}{\left(\frac{1}{k}\right)^{\gamma+1}} = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{2^{\gamma+1}}.$$

Pero, si $n \geq 3$, el valor $\frac{vol \mathbb{B}}{n} \lim_{k \rightarrow \infty} k^{n+\gamma-1} \beta_k^2$ sólo se puede acotar inferiormente por

$$c'_1 = \lim_{k \rightarrow \infty} k^{n+\gamma-1} f_1(k) = [(n-2)!]^2 \frac{\Gamma(\gamma+1)}{2^{\gamma+1} \Gamma^2(\frac{n}{2})},$$

$$c'_2 = \lim_{k \rightarrow \infty} k^{n+\gamma-1} f_2(k) = \frac{\Gamma(n+\gamma-1)}{2^{n+\gamma-1}},$$

de acuerdo a (1.1).

¿Cuál de las funciones f_1, f_2 brinda la mayor cota inferior para β_k^2 ? Un criterio para responder consiste en calcular $\max\{c'_1, c'_2\}$, sin olvidar que éste es un resultado asintótico.

Por (1.2) y (1.3), véase que

$$\begin{aligned} \frac{c'_2}{c'_1} &= \frac{2^{\gamma+1}}{2^{n+\gamma-1}} \frac{\Gamma(n+\gamma-1)}{\Gamma(\gamma+1)} \frac{\Gamma^2(\frac{n}{2})}{\Gamma^2(n-1)} \\ &= \frac{(\gamma+1)_{n-2}}{2^{n-2}} \frac{\Gamma^2(\frac{n}{2})}{\Gamma^2(\frac{n}{2})} \frac{\pi}{\Gamma^2(\frac{n-1}{2}) 2^{2n-4}} \\ &= \frac{\pi(\gamma+1)_{n-2}}{2^{3(n-2)} \Gamma^2(\frac{n-1}{2})} \end{aligned}$$

luego $c'_1 < c'_2$ si y sólo si

$$(\gamma+1)_{n-2} > \frac{2^{3(n-2)}}{\pi} \Gamma^2(\frac{n-1}{2}).$$

Ahora, $p(\gamma) = (\gamma+1)_{n-2}$ no es más que un polinomio mónico en γ de grado $n-2$. Entonces para valores suficientemente grandes de γ se tiene que $c'_1 < c'_2$. Y es fácil ver que al menos para cierto intervalo $\gamma \in (-1, \gamma_0)$ se tiene $c'_1 > c'_2$. Por eso, no conviene descartar a la función f_1 frente a f_2 más que para valores 'grandes' de γ (y de k).

Por ejemplo, para $n = 3, 4, 5, 6$ se obtiene $c'_1 < c'_2$ a través de las aproximaciones respectivas $\gamma > \frac{5}{3}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}$.

III.3 Una descomposición para $1/\beta_k^2$

Si n es par y si γ es entera, es posible aprovechar lo anterior para obtener una forma explícita para $1/\beta_k^2$ como función racional de k . Esto facilitará el manejo del núcleo reproductor K que se hará más adelante. Desafortunadamente, muchas preguntas quedarán abiertas en este trabajo si n es impar.

Razonamiento Dadas $n \geq 2, k \geq 1, \gamma > -1$, recuérdese que

$$\beta_k^2 = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(1 - \frac{n}{2})_i (1 - \frac{n}{2})_j}{i! j!} \frac{(k)_i (k)_j}{(k + \frac{n}{2})_i (k + \frac{n}{2})_j} B(n + 2k + 2(i + j), \gamma + 1).$$

Interesa determinar cuándo esta expresión es una función racional de k . Lograrlo será clave para poder continuar.

1) La suma que define a β_k^2 es finita si y sólo si n es par, en cuyo caso para $m = n/2$ se tiene

$$\beta_k^2 = \sum_{i,j=0}^{m-1} \frac{(1-m)_i (1-m)_j}{i! j!} \frac{(k)_i (k)_j}{(k+m)_i (k+m)_j} B(n + 2k + 2(i + j), \gamma + 1).$$

2) *Advertencia* Recuérdese que si $x > 0, j \in \mathbb{N}$ entonces por (1.8)

$$B(x, j) = \frac{(j-1)!}{(x)_j}.$$

Dadas $i, j \geq 0$, se puede escribir entonces

$$B(n + 2k + 2(i + j), \gamma + 1) = \frac{[n + 2k + 2(i + j) - 1]!}{(\gamma + 1)_{n+2k+2(i+j)}} = \frac{P(k)}{Q(k)}$$

donde *aparentemente* se tienen dos polinomios

$$P(k) = P_{nij}(k) = [n + 2k + 2(i + j) - 1][n + 2k + 2(i + j) - 2] \\ \cdots [n + 2k + 2(i + j) - (n + 2k + 2(i + j) - 1)],$$

$$Q(k) = Q_{nij\gamma}(k) = (\gamma + 1 + n + 2k + 2(i + j) - 1)(\gamma + 1 + n + 2k + 2(i + j) - 2) \\ \cdots (\gamma + 1 + n + 2k + 2(i + j) - [n + 2k + 2(i + j)]).$$

Ciertamente, P y Q son productos finitos de factores de la forma $(2k + c)$, *¡pero no son polinomios en k !* El número de sus factores no es constante: depende del valor de k . En efecto, P posee $n + 2k + 2(i + j) - 1$ tales factores, y en Q hay $n + 2k + 2(i + j)$. De modo que la expresión P/Q no garantiza que $B(n + 2k + 2(i + j), \gamma + 1)$ sea o no una función racional en k .

3) Supóngase ahora que $\gamma > -1$ es entera. Entonces $\gamma \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ con

$$B(n + 2k + 2(i + j), \gamma + 1) = \frac{\gamma!}{[n + 2k + 2(i + j)]_{\gamma+1}}$$

que claramente sí es un cociente de dos polinomios en k . Así, γ entera es una condición suficiente para que cada una de estas funciones beta sea racional en k . El siguiente punto

demuestra que esta condición también es necesaria.

4) Es trivial probar que si $r(k) = p(k)/q(k)$ representa cualquier función racional distinta de cero entonces

$$r(k) \sim k^{\deg p - \deg q}, \quad k \geq 1.$$

En particular, obsérvese que el valor de $\deg p - \deg q$ es entero. Y recuérdese que $B(n + 2k + 2(i + j), \gamma + 1) \sim \frac{1}{k^{\gamma+1}}$ para $k \geq 1$. Entonces γ entera es una condición necesaria para que cada una de estas funciones beta sea racional en k .

Esto conduce al siguiente resultado.

Teorema III.8 *Dados los valores $n \geq 2$ par y $\gamma \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, β_k^2 es una función racional de k de la forma*

$$\beta_k^2 = \frac{p(k)}{q(k)} \sim \frac{1}{k^{n+\gamma-1}}$$

con $a = \deg p$, $b = \deg q$, $b - a = n + \gamma - 1$.

Más aún, existen constantes C_j ($j \geq 0$), $k_0 \in \mathbb{N}$ tales que

$$\frac{1}{\beta_k^2} = k^{n+\gamma-1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{C_j}{k^j}, \quad k \geq k_0.$$

Demostración En esta prueba conviene considerar a la variable discreta k como un valor $k > 0$ en \mathbb{C} . Entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta_k^2} &= \frac{q(k)}{p(k)} \\ &= A \frac{k^b + d_1 k^{b-1} + d_2 k^{b-2} + \dots + d_{b-1} k + d_b}{k^a + c_1 k^{a-1} + c_2 k^{a-2} + \dots + c_{a-1} k + c_a} \\ &= A \frac{k^b}{k^a} \frac{1 + \frac{d_1}{k} + \frac{d_2}{k^2} + \dots + \frac{d_b}{k^b}}{1 + \frac{c_1}{k} + \frac{c_2}{k^2} + \dots + \frac{c_a}{k^a}} \\ &= A k^{n+\gamma-1} h(k) \end{aligned}$$

donde la función $h : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ está definida por

$$z \mapsto \frac{1 + \frac{d_1}{z} + \frac{d_2}{z^2} + \dots + \frac{d_b}{z^b}}{1 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots + \frac{c_a}{z^a}}.$$

Dada $i \geq 0$, la función $h^{(i)}(\frac{1}{z})$ posee una singularidad removible en $z = 0$. Es decir, h es

una función analítica en ' ∞ ' y el resultado se sigue de ello. \square

Termina así este capítulo acerca del espacio $\mathcal{B}^{2,\gamma}$. Los núcleos reproductores K^γ y las magnitudes β_k^2 obtenidos aquí serán esenciales para analizar los demás espacios de Bergman $\mathcal{B}^{p,\gamma}$. Concretamente, lo más importante hasta ahora es saber que

$$\frac{1}{\beta_k^2} = Ak^{n+\gamma-1} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{k}\right) \right\}$$

para $k \geq 1$, cuando el valor de n es par y γ es entera.

Capítulo IV

Proyecciones de Bergman

En este capítulo se estudia el espacio de Bergman

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^{p,\beta} &= \mathcal{A} \cap L^{p,\beta} \\ &= \left\{ f : \mathbb{B}_n \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ es } H\text{-armónica, } \|f\|_{p,\beta} = \left(\int_{\mathbb{B}_n} |f(x)|^p (1-r)^\beta dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}, \end{aligned}$$

determinado por el entero $n \geq 2$ y los reales $\beta > -1, p \geq 1$.

Esto se hace por medio de ciertas proyecciones de Bergman. En ellas se aprovecha lo obtenido en el capítulo anterior acerca de K^γ , el núcleo reproductor de $\mathcal{B}^{2,\gamma}$ para un valor dado $\gamma > -1$ distinto de β en general. Desafortunadamente, una parte importante del razonamiento empleado aquí sólo será válida si n es par y a la vez γ es entera.

El contenido de este capítulo se basa en el trabajo que O. Blasco y S. Pérez Esteva presentan en [BP1] y busca adaptarlo a la bola hiperbólica.

En todo momento se denota en coordenadas polares $x = r\xi, y = s\zeta \in \mathbb{B}$ y se escribe $\epsilon(x) = \epsilon(r) = 1 - r$.

Definición IV.1 Sean $n \geq 2, \gamma > -1, p \geq 1, \beta > -1$. Sea K^γ el núcleo reproductor de $\mathcal{B}^{2,\gamma}$. Entonces la transformación que se llamará aquí *proyección de Bergman* $\mathcal{P}^\gamma = \mathcal{P}(n, \gamma, p, \beta)$ es la transformación lineal $\mathcal{P}^\gamma : L^{p,\beta} \rightarrow \mathcal{B}^{p,\beta}$ dada por

$$\mathcal{P}^\gamma f(x) = \int_{\mathbb{B}} K^\gamma(x, y) f(y) \epsilon(y)^\gamma dy$$

para $f \in L^{p,\beta}, x \in \mathbb{B}$.

Interesa probar que esta relación en efecto define una proyección que es continua.

Obsérvese que $\mathcal{P}^\gamma f(x) = \langle f(\bullet), K^\gamma(x, \bullet) \rangle_{L^{2,\gamma}}$ siempre que $f \in L^{2,\gamma}$.

IV.1 Propiedades básicas de \mathcal{P}^γ

En esta sección se presentan dos propiedades generales y sencillas que posee \mathcal{P}^γ . Para comenzar, recuérdese que cada función

$$W_j^k(x) = F_k(r^2)r^k Y_j^k(\zeta), \quad x \in \mathbb{B}$$

es continua sobre $\overline{\mathbb{B}}$, luego pertenece a $B^{2,\gamma}$ y el primer resultado es inmediato.

Lema IV.2 Dadas $n \geq 2$, $\gamma > -1$, $p \geq 1$, $\beta > -1$ se tiene que $\mathcal{P}^\gamma W_j^k = W_j^k$ para cualesquiera $k \geq 0$, $j \in \{1, 2, \dots, d(k)\}$.

Lema IV.3 Si f es una función medible y acotada sobre \mathbb{B} entonces $\mathcal{P}^\gamma f$ es H -armónica.

Demostración Sea $x = r\zeta \in \mathbb{B}$ fija. Considérese la función dada por

$$\theta_x(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{d(k)} \frac{1}{\beta_k^2} F_k(r^2) F_k(s^2) r^k s^k Y_j^k(\zeta) Y_j^k(\xi) f(y) \epsilon(y)^\gamma, \quad y = s\xi \in \mathbb{B}.$$

Por (1.11), (1.12) y los teoremas I.4(b) y III.6, existe $A = A(n, f) > 0$ tal que

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j=1}^{d(k)} \frac{1}{\beta_k^2} F_k(r^2) F_k(s^2) r^k s^k Y_j^k(\zeta) Y_j^k(\xi) f(y) \epsilon(y)^\gamma \right| \\ & \leq \frac{1}{\beta_k^2} F_k(r^2) F_k(s^2) r^k s^k |f(y)| \epsilon(y)^\gamma \sum_{j=1}^{d(k)} |Y_j^k(\zeta)| |Y_j^k(\xi)| \\ & \leq A k^{3n+\gamma-3} s^k \end{aligned}$$

para toda $k \geq 0$. Esto implica que la serie dada por $\theta_x(y)$ converge absoluta y uniformemente cuando $0 \leq s \leq c < 1$. Por lo tanto, se le puede integrar término por término sobre \mathbb{B} . Así

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^\gamma f(x) &= \int_{\mathbb{B}} K^\gamma(x, y) f(y) \epsilon(y)^\gamma dy \\ &= \int_{\mathbb{B}} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{d(k)} \frac{1}{\beta_k^2} F_k(r^2) F_k(s^2) r^k s^k Y_j^k(\zeta) Y_j^k(\xi) f(y) \epsilon(y)^\gamma dy \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{d(k)} \int_{\mathbb{B}} \frac{1}{\beta_k^2} F_k(r^2) F_k(s^2) r^k s^k Y_j^k(\zeta) Y_j^k(\xi) f(y) \epsilon(y)^\gamma dy \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{d(k)} \left(\int_{\mathbb{B}} F_k(s^2) s^k Y_j^k(\xi) f(y) \epsilon(y)^\gamma dy \right) \frac{1}{\beta_k^2} F_k(r^2) r^k Y_j^k(\zeta).$$

Análogamente, se sabe que existe $A = A(n, f) > 0$ tal que

$$|F_k(s^2) s^k Y_j^k(\xi) f(y) \epsilon(y)^\gamma dy| \leq F_k(s^2) s^k |Y_j^k(\xi)| |f(y)| \epsilon(y)^\gamma \leq A k^{\frac{n}{2}},$$

para cualesquiera $k \geq 0, j \in \{1, 2, \dots, d(k)\}$, de modo que la integral

$$I_j^k = \int_{\mathbb{B}} F_k(s^2) s^k Y_j^k(\xi) f(y) \epsilon(y)^\gamma dy$$

existe en \mathbb{C} con

$$|I_j^k| < A k^{\frac{n}{2}}, \quad j \in \{1, 2, \dots, d(k)\}.$$

Entonces se cumple que

$$\mathcal{P}^\gamma f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{d(k)} \frac{I_j^k}{\beta_k^2} F_k(r^2) r^k Y_j^k(\zeta),$$

y la convergencia de esta serie es absoluta y uniforme sobre todo compacto en \mathbb{B} porque

$$\sum_{j=1}^{d(k)} \frac{|I_j^k|}{\beta_k^2} F_k(r^2) r^k |Y_j^k(\zeta)| \leq A k^{3n+\gamma-3} r^k.$$

Por lo tanto, $\mathcal{P}^\gamma f$ efectivamente define una función que es H -armónica por los teoremas II.3 (iii) y II.5. \square

Razonamiento Cuando n es par y γ es entera, se sabe por el teorema III.8 que existen constantes C_j ($j \geq 0$), $k_0 \in \mathbb{N}$ tales que $1/\beta_k^2 = \sum_{j=0}^{\infty} C_j k^{n+\gamma-1-j}$ para valores suficientemente grandes $k \geq k_0$. Este desarrollo induce una descomposición del núcleo reproductor K^γ y de la proyección \mathcal{P}^γ que mostrarán ser adecuadas para analizar la continuidad de \mathcal{P}^γ . Se trabajará así sobre $\mathbb{B} \times \mathbb{B}$ con la suma concreta

$$\mathcal{P}^\gamma = \mathcal{P}_L^\gamma + \sum_{j=0}^{n+\gamma} C_j \mathcal{P}_j^\gamma + \mathcal{P}_M^\gamma$$

vinculada al núcleo

$$K^\gamma(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\beta_k^2} F_k(r^2) F_k(s^2) Z_k(x, y)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k < k_0} \frac{1}{\beta_k^2} F_k(r^2) F_k(s^2) Z_k(x, y) \\
&\quad + \sum_{k=k_0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n+\gamma} C_j \frac{k^{n+\gamma-1}}{k^j} F_k(r^2) F_k(s^2) Z_k(x, y) \quad (4.1) \\
&\quad + \sum_{k=k_0}^{\infty} \sum_{j=n+\gamma+1}^{\infty} C_j \frac{k^{n+\gamma-1}}{k^j} F_k(r^2) F_k(s^2) Z_k(x, y) \\
&= L^\gamma(x, y) + \sum_{j=0}^{n+\gamma} C_j K_j^\gamma(x, y) + M^\gamma(x, y),
\end{aligned}$$

y a las transformaciones

$$L^\gamma(x, y) = \sum_{k < k_0} \frac{1}{\beta_k^2} F_k(r^2) F_k(s^2) Z_k(x, y), \quad (4.2)$$

$$K_j^\gamma(x, y) = \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{k^{n+\gamma-1}}{k^j} F_k(r^2) F_k(s^2) Z_k(x, y) \quad \text{para } 0 \leq j \leq n + \gamma, \quad (4.3)$$

$$M^\gamma(x, y) = \sum_{k=k_0}^{\infty} \sum_{j=n+\gamma+1}^{\infty} C_j \frac{k^{n+\gamma-1}}{k^j} F_k(r^2) F_k(s^2) Z_k(x, y). \quad (4.4)$$

Interesa mostrar que esta descomposición de \mathcal{P}^γ es válida, y que cada una de sus componentes posee la continuidad deseada.

En todo lo que sigue, el trabajo relevante se realiza sobre los sumandos K_j^γ en (4.3) que provienen del centro de (4.1). Es posible relacionar cada uno de ellos con ciertas derivadas parciales del núcleo de Poisson euclidiano P_e . El punto clave es que R. Coifman y R. Rochberg en [CR] ofrecen cotas superiores sencillas para la magnitud de estos objetos. Bajo determinadas hipótesis, se emplean dichas estimaciones para probar finalmente que cada componente \mathcal{P}_j^γ (y luego \mathcal{P}^γ) es continua. Este procedimiento es una adaptación al caso hiperbólico de la investigación presentada en [BP1] para el caso euclidiano.

IV.2 Continuidad de \mathcal{P}_0^γ

En esta sección se consideran las transformaciones

$$K_0^\gamma(x, y) = \sum_{k=k_0}^{\infty} k^{n+\gamma-1} F_k(r^2) F_k(s^2) Z_k(x, y) \quad (4.5)$$

para $(x, y) \in \mathbb{B} \times \mathbb{B}$, y

$$\mathcal{P}_0^\gamma f(x) = \int_{\mathbb{B}} K_0^\gamma(x, y) f(y) \epsilon(y)^\gamma dy$$

para $f \in L^{p, \beta}$, $x \in \mathbb{B}$.

Enseguida se demuestra que la transformación lineal \mathcal{P}_0^γ es continua sobre $L^{p, \beta}$. Se procede aquí con el mayor detalle posible porque los pasos efectuados a continuación contienen la esencia de todo el capítulo. Esto se debe a que \mathcal{P}_0^γ constituye una buena (la mejor) aproximación de \mathcal{P}^γ , como podrá apreciarse más adelante. Sobrevolando un poco los detalles, lo que sucede aquí es que se cumple lo que uno desearía: $1/\beta_k^2 \sim k^{n+\gamma-1}$ hace de $k^{n+\gamma-1}$ la mejor estimación de $1/\beta_k^2$.

Observación Recuérdese que $\tilde{x} = x/|x|^2$ denota al inverso en \mathbb{R}^n de un punto $x \in \mathbb{B} \setminus \{0\}$ con respecto a la esfera S . En esta sección se empleará con frecuencia el valor $1/|\tilde{x} - y|$ para $x, y \in \mathbb{B}$ con $x \neq 0$. Dado que los puntos $\tilde{x} \notin \mathbb{B}$, $y \in \mathbb{B}$ se encuentran de uno y otro lado de la esfera S , resulta que el valor $1/|\tilde{x} - y|$ está acotado superiormente cuando al menos uno de ellos se mantiene 'lejos' de S .

De ahora en adelante, $c \in (0, 1)$ será un valor dado con respecto al cual interesan las siguientes dos regiones complementarias:

$$\Omega_0 = \{(x, y) \in \mathbb{B} \times \mathbb{B} : 0 \leq r = |x| \leq c\},$$

$$\Omega_c = \{(x, y) \in \mathbb{B} \times \mathbb{B} : c < r = |x| < 1\}.$$

Es fácil ver que si $(x, y) \in \Omega_0$ entonces

$$|\tilde{x} - y| \geq \frac{1}{r} - |y| > \frac{1}{c} - 1 = \frac{1-c}{c} > 0$$

y así

$$0 < \frac{1}{|\tilde{x} - y|} < \frac{c}{1-c}.$$

Pero el caso no acotado en Ω_c no es tan sencillo y para tratarlo conviene emplear los siguientes puntos. El tercero de ellos fue presentado por R. Coifman y R. Rochberg.

Lema IV.4 Para $x = r\zeta$, $y = s\xi \in \mathbb{B}$ con $x \neq 0$, se tiene que

i) $(1 - rs)/r \leq |\tilde{x} - y|$,

ii) $|1 - \zeta \cdot \xi| \leq |\zeta - \xi|$,

iii) [CR] Dada $c \in (0, 1)$,

$$|\zeta - \xi|, \epsilon(x), \epsilon(y) = O(|\tilde{x} - y|) \text{ sobre } \mathbb{B} \times \mathbb{B},$$

$$|\tilde{x} - y| \neq O[|\zeta - \xi| + \epsilon(x) + \epsilon(y)] \text{ sobre } \mathbb{B} \times \mathbb{B},$$

$$|\tilde{x} - y| = O[|\zeta - \xi| + \epsilon(x) + \epsilon(y)] \text{ sobre } \Omega_c$$

y por lo tanto

$$|\tilde{x} - y| \sim |\zeta - \xi| + \epsilon(x) + \epsilon(y), \quad (x, y) \in \Omega_c$$

donde $\Omega_c = \{(x, y) \in \mathbb{B} \times \mathbb{B} : c < r = |x| < 1\}$.

Demostración (i) Directamente $|\tilde{x} - y| \geq |\tilde{x}| - |y| = 1/r - s = (1 - rs)/r > 0$.

(ii) Dadas $x = r\zeta$, $y = s\xi \in \mathbb{B}$, considérese el disco $\pi \cap \mathbb{B}$, donde π es un plano (no necesariamente único) que contiene a los puntos O, x, y (y por lo tanto también a ζ, ξ, \tilde{x}). Sin pérdida de generalidad, supóngase que sobre este disco $x = r(1, 0, 0, \dots, 0)$, $y = s(\cos\theta, \text{sen}\theta, 0, 0, \dots, 0)$ para algún valor $\theta \in [0, 2\pi)$.

$$\text{Entonces } |1 - \zeta \cdot \xi| = 1 - \cos\theta \leq \sqrt{(1 - \cos\theta)^2 + \text{sen}^2\theta} = |\zeta - \xi|.$$

(iii) *Contraejemplo* Si $x = y \rightarrow 0$ en \mathbb{B} , entonces

$$\frac{|\tilde{x} - y|}{|\zeta - \xi| + \epsilon(x) + \epsilon(y)} = \frac{1/r - r}{2(1 - r)} \rightarrow \infty,$$

así que el final de (iii) es falso si $0 \leq r \leq c$. Afortunadamente, como se observó ya, para ese caso no se necesita el resultado.

Primera parte Simplemente por la desigualdad del triángulo se tiene

$$|\tilde{x} - y| \geq |\tilde{x}| - |y| = \frac{1}{r} - s = \frac{1}{r}(1 - r) + (1 - s) > \epsilon(x) + \epsilon(y).$$

Enseguida se muestra que $|\zeta - \xi| < A|\tilde{x} - y|$.

Si $0 \leq s \leq 1/2$, esto es fácil porque $|\zeta - \xi| < 2$, $|\tilde{x} - y| \geq 1/r - s > 1 - s \geq 1/2$ luego $|\zeta - \xi| < 4|\tilde{x} - y|$.

Ahora supóngase que $s \in (1/2, 1)$. Considérese el mismo disco que en la prueba de (ii). En él

$$\begin{aligned} |\zeta - \xi|^2 &= (1 - \cos\theta)^2 + \text{sen}^2\theta, \\ |\tilde{x} - y|^2 &= \left(\frac{1}{r} - s \cos\theta\right)^2 + s^2 \text{sen}^2\theta, \end{aligned}$$

donde $\text{sen}^2\theta = 4(1/4\text{sen}^2\theta) \leq 4s^2\text{sen}^2\theta$.

Si el ángulo θ es agudo o recto, entonces

$$0 \leq s \cos\theta \leq \cos\theta$$

implica que

$$\frac{1}{r} - s \cos \theta \geq \frac{1}{r} - \cos \theta > 1 - \cos \theta \geq 0,$$

luego $(1/r - s \cos \theta)^2 > (1 - \cos \theta)^2$.

Mientras que si el ángulo θ es obtuso se tiene que

$$1 < \frac{1}{r} \leq \frac{1}{r} - s \cos \theta,$$

entonces

$$(1 - \cos \theta)^2 \leq 4 < 4 \left(\frac{1}{r} - s \cos \theta \right)^2.$$

En resumen, $|\zeta - \xi|^2 < 4|\tilde{x} - y|^2$ cuando $1/2 < s < 1$.

Segunda parte Si $c < r < 1$ entonces

$$\begin{aligned} |\tilde{x} - y| &= \left| \frac{1}{r} \zeta - s \xi \right| \\ &= \frac{1}{r} |\zeta - rs \xi| \\ &= \frac{1}{r} |(\zeta - \xi) + (1 - r + r - rs) \xi| \\ &\leq \frac{1}{c} \{ |\zeta - \xi| + (1 - r) + r(1 - s) \} \\ &\leq \frac{1}{c} \{ |\zeta - \xi| + \epsilon(x) + \epsilon(y) \}. \quad \square \end{aligned}$$

Observación Dada $c \in (0, 1)$, recuérdese que interesa la región $\Omega_c = \{(x, y) \in \mathbb{B} \times \mathbb{B} : c < r = |x| < 1\}$. Sobre ella, en repetidas ocasiones será necesario comparar entre sí cocientes de la forma $1/|\tilde{x} - y|^a$, $1/|\tilde{x} - y|^b$ donde $0 < a < b$.

Véase que si $0 < c < r < 1$ entonces $0 < |\tilde{x} - y| \leq |\tilde{x}| + |y| = 1/r + s < 1/c + 1$. Por lo tanto, $|\tilde{x} - y|^b / |\tilde{x} - y|^a < (1/c + 1)^{b-a}$, luego $1/|\tilde{x} - y|^a \leq A/|\tilde{x} - y|^b$. Esto prueba que *el cociente que domina sobre la región Ω_c es el que posee la mayor potencia.*

Lema IV.5 [CR] Dada $c \in (0, 1)$, considérense las regiones complementarias en $\mathbb{B} \times \mathbb{B}$ definidas por

$$\begin{aligned} \Omega_0 &= \{(x, y) : 0 \leq r = |x| \leq c\}, \\ \Omega_c &= \{(x, y) : c < r = |x| < 1\}. \end{aligned}$$

Entonces para cada $i \geq 1$ el núcleo de Poisson euclidiano satisface sobre $\mathbb{B} \times \mathbb{B}$

$$\left| \frac{\partial^i}{\partial r^i} P_\epsilon(x, y) \right| \leq A_0 \chi_{\Omega_0}(x, y) + \frac{A}{|\tilde{x} - y|^{n+i-1}} \chi_{\Omega_c}(x, y).$$

Demostración [CR] Para $x, y \in \mathbb{B}$ recuérdese que, por (1.17),

$$P_\epsilon(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k s^k Z_k(\zeta, \xi),$$

donde por (1.11) y (1.16) se cumple que

$$|Z_k(\zeta, \xi)| \leq Ak^{n-2}, \quad k \geq 1.$$

Entonces en cada punto esta serie se puede derivar término por término

$$\frac{\partial^i}{\partial r^i} P_\epsilon(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial^i}{\partial r^i} r^k s^k Z_k(\zeta, \xi) = \sum_{k=i}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-i+1) r^{k-i} s^k Z_k(\zeta, \xi)$$

y sobre Ω_0 resulta trivial acotar la magnitud del resultado por una constante.

Todo lo que sigue es para probar por inducción sobre $i \geq 0$ que para $(x, y) \in \Omega_c$

$$\left| \frac{\partial^i}{\partial r^i} P_\epsilon(x, y) \right| \leq \frac{A}{|\tilde{x} - y|^{n+i-1}}, \quad (x, y) \in \Omega_c.$$

Para ello, por el lema IV.4 (i) y (ii) se cuenta con las estimaciones

$$0 < \frac{1-r^2s^2}{r} = (1+rs)\frac{1-rs}{r} < 2|\tilde{x} - y|, \quad x \neq 0$$

y

$$|rs - \zeta \cdot \xi| \leq (1-rs) + |1 - \zeta \cdot \xi| \leq A|\tilde{x} - y|.$$

Primeros casos La afirmación es válida para el caso $i = 0$ porque por (1.18)

$$P_\epsilon(x, y) = \frac{1-r^2s^2}{(1-2rs\zeta \cdot \xi + r^2s^2)^{\frac{n}{2}}} = \frac{1-r^2s^2}{r^n |\tilde{x} - y|^n}, \quad (x, y) \in \Omega_c$$

luego, sobre Ω_c ,

$$|P_\epsilon(x, y)| \leq \frac{1}{r^{n-1}} \frac{1-r^2s^2}{r} \frac{1}{|\tilde{x} - y|^n} \leq A \frac{|\tilde{x} - y|}{|\tilde{x} - y|^n} = \frac{A}{|\tilde{x} - y|^{n-1}}.$$

La afirmación también se cumple para $i = 1$ porque en Ω_c

$$\frac{\partial}{\partial r} P_\epsilon(x, y) = (-2rs^2) \frac{1}{r^n |\tilde{x} - y|^n} - ns(1-r^2s^2)(rs - \zeta \cdot \xi) \frac{1}{r^{n+2} |\tilde{x} - y|^{n+2}}$$

y así para $(x, y) \in \Omega_c$

$$\left| \frac{\partial}{\partial r} P_\epsilon(x, y) \right| \leq \left(\frac{2s^2}{r^{n-1}} \right) \frac{1}{|\tilde{x} - y|^n} + \left(\frac{ns}{r^{n+1}} \right) \frac{1-r^2s^2}{r} |rs - \zeta \cdot \xi| \frac{1}{|\tilde{x} - y|^{n+2}}$$

$$\begin{aligned} &\leq A_1 \frac{1}{|\tilde{x} - y|^n} + A_2 \frac{|\tilde{x} - y|^2}{|\tilde{x} - y|^{n+2}} \\ &\leq \frac{A}{|\tilde{x} - y|^n}. \end{aligned}$$

Análogamente, para $i = 2$ sobre Ω_c se cumple que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial r^2} P_c(x, y) &= -2s^2 \frac{1}{r^n |\tilde{x} - y|^n} + 4nrs^3 (rs - \zeta \cdot \xi) \frac{1}{r^{n+2} |\tilde{x} - y|^{n+2}} \\ &\quad - ns^2 (1 - r^2 s^2) \frac{1}{r^{n+2} |\tilde{x} - y|^{n+2}} \\ &\quad + n(n+2)s^2 (1 - r^2 s^2) (rs - \zeta \cdot \xi)^2 \frac{1}{r^{n+4} |\tilde{x} - y|^{n+4}}. \end{aligned}$$

Entonces para $(x, y) \in \Omega_c$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^2}{\partial r^2} P_c(x, y) \right| &\leq \left(\frac{2s^2}{r^n} \right) \frac{1}{|\tilde{x} - y|^n} + \left(\frac{4ns^3}{r^{n+1}} \right) |rs - \zeta \cdot \xi| \frac{1}{|\tilde{x} - y|^{n+2}} \\ &\quad + \left(\frac{ns^2}{r^{n+1}} \right) \frac{1 - r^2 s^2}{r} \frac{1}{|\tilde{x} - y|^{n+2}} \\ &\quad + \left(\frac{n(n+2)s^2}{r^{n+3}} \right) \frac{1 - r^2 s^2}{r} (rs - \zeta \cdot \xi)^2 \frac{1}{|\tilde{x} - y|^{n+4}} \\ &\leq \frac{A_1}{|\tilde{x} - y|^{n+1}} + A_2 \frac{|\tilde{x} - y|}{|\tilde{x} - y|^{n+2}} + A_3 \frac{|\tilde{x} - y|^3}{|\tilde{x} - y|^{n+4}} \\ &\leq \frac{A}{|\tilde{x} - y|^{n+1}}. \end{aligned}$$

Paso inductivo Supóngase que para cierta $i \geq 0$ se tiene que

$$\frac{\partial^i}{\partial r^i} P_c(x, y) = \sum_{k=0}^{i+1} \sum_{j=0}^k a_{jk}^i(x, y) (1 - r^2 s^2)^j (rs - \zeta \cdot \xi)^{k-j} \frac{1}{r^{n+i-1+k} |\tilde{x} - y|^{n+i-1+k}},$$

para toda $(x, y) \in \Omega_c$, donde cada función a_{jk}^i y su primera derivada parcial con respecto a r existen y son acotadas sobre Ω_c .

Entonces para cualquier $(x, y) \in \Omega_c$ se cumple que

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^{i+1}}{\partial r^{i+1}} P_c(x, y) \\ &= \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial^i}{\partial r^i} P_c(x, y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{i+1} \sum_{j=0}^k \left[\frac{\partial}{\partial r} a_{jk}^i(x, y) \right] (1 - r^2 s^2)^j (rs - \zeta \cdot \xi)^{k-j} \frac{1}{r^{n+i-1+k} |\tilde{x} - y|^{n+i-1+k}} \\
&\quad + \sum_{k=0}^{i+1} \sum_{j=0}^k a_{jk}^i(x, y) (-2jrs^2) (1 - r^2 s^2)^{j-1} (rs - \zeta \cdot \xi)^{k-j} \frac{1}{r^{n+i-1+k} |\tilde{x} - y|^{n+i-1+k}} \\
&\quad + \sum_{k=0}^{i+1} \sum_{j=0}^k a_{jk}^i(x, y) (1 - r^2 s^2)^j (k-j)s (rs - \zeta \cdot \xi)^{k-j-1} \frac{1}{r^{n+i-1+k} |\tilde{x} - y|^{n+i-1+k}} \\
&\quad - \sum_{k=0}^{i+1} \sum_{j=0}^k a_{jk}^i(x, y) (1 - r^2 s^2)^j (rs - \zeta \cdot \xi)^{k-j+1} \frac{(n+i-1+k)s (rs - \zeta \cdot \xi)}{r^{n+i+k} |\tilde{x} - y|^{n+i+k}} \\
&= \sum_{k=0}^{i+1} \sum_{j=0}^k \left[\frac{1}{r^{n+i-1+k-j}} \frac{\partial}{\partial r} a_{jk}^i(x, y) \right] \frac{(1 - r^2 s^2)^j}{r^j} (rs - \zeta \cdot \xi)^{k-j} \frac{1}{|\tilde{x} - y|^{n+i-1+k}} \\
&\quad - \sum_{k=0}^{i+1} \sum_{j=0}^k \left[\frac{2js^2}{r^{n+i-1+k-j}} a_{jk}^i(x, y) \right] \frac{(1 - r^2 s^2)^{j-1}}{r^{j-1}} (rs - \zeta \cdot \xi)^{k-j} \frac{1}{|\tilde{x} - y|^{n+i-1+k}} \\
&\quad + \sum_{k=0}^{i+1} \sum_{j=0}^k \left[\frac{(k-j)s}{r^{n+i-1+k-j}} a_{jk}^i(x, y) \right] \frac{(1 - r^2 s^2)^j}{r^j} (rs - \zeta \cdot \xi)^{k-j-1} \frac{1}{|\tilde{x} - y|^{n+i-1+k}} \\
&\quad - \sum_{k=0}^{i+1} \sum_{j=0}^k \left[\frac{(n+i-1+k)s}{r^{n+i+1+k-j}} a_{jk}^i(x, y) \right] \frac{(1 - r^2 s^2)^j}{r^j} (rs - \zeta \cdot \xi)^{k-j+1} \frac{1}{|\tilde{x} - y|^{n+i+1+k}}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la afirmación anterior es válida para $i + 1$ y así sobre Ω_c

$$\left| \frac{\partial^{i+1}}{\partial r^{i+1}} P_e(x, y) \right| \leq \frac{A}{|\tilde{x} - y|^{n+i}}. \quad \square$$

Los siguientes resultados serán útiles para demostrar que \mathcal{P}_0^r es continua.

Lema IV.6 [BP1]

i) Dadas $C > 0$, $a > -1$, $b > a + 1$ existe una constante $A = A(a, b) > 0$ tal que

$$\int_0^\infty \frac{r^a}{(r+C)^b} dr \leq \frac{A}{C^{b-a-1}}.$$

ii) Dadas $n \geq 2$, $C > 0$, $a > -1$, $\zeta_0 \in S$ existe una constante $A = A(n, a) > 0$ tal que

$$\int_S \frac{d\sigma(\zeta)}{(|\zeta - \zeta_0| + C)^{n+a}} \leq \frac{A}{C^{a+1}}.$$

Demostración (i) Para $a > -1$ y $b, C > 0$ simplemente

$$\int_0^C \frac{r^a}{(r+C)^b} dr \leq \int_0^C \frac{r^a}{C^b} dr = \frac{1}{a+1} \frac{1}{C^{b-a-1}}.$$

Si además $b > a + 1$ entonces

$$\begin{aligned} \int_C^\infty \frac{r^a}{(r+C)^b} dr &\leq \int_C^\infty \frac{r^a}{r^b} dr \\ &= \frac{1}{a-b+1} \left[\lim_{r \rightarrow \infty} r^{a-b+1} - C^{a-b+1} \right] \\ &= \frac{1}{b-a-1} \frac{1}{C^{b-a-1}}. \end{aligned}$$

(ii) Si Q es cualquier cubo sólido en \mathbb{R}^{n-1} , resulta fácil dar una parametrización de S sobre Q de la forma $\zeta : Q \rightarrow S$ con $z \mapsto \zeta(z)$ en la cual $\zeta(z_0) = \zeta_0$ para cierta $z_0 \in Q$ y de tal manera que las respectivas distancias euclidianas satisfagan para $z \in Q$

$$|\zeta(z) - \zeta(z_0)|_{\mathbb{R}^n} \sim |z - z_0|_{\mathbb{R}^{n-1}}.$$

Entonces, por (i),

$$\begin{aligned} \int_S \frac{d\sigma(\zeta)}{(|\zeta - \zeta_0| + C)^{n+a}} &\leq A \int_Q \frac{dz}{(|\zeta(z) - \zeta(z_0)| + C)^{n+a}} \\ &\leq A \int_Q \frac{dz}{(|z - z_0| + C)^{n+a}} \\ &\leq A \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{dz}{(|z| + C)^{n+a}} \\ &= A \int_0^\infty \frac{r^{n-2}}{(r+C)^{n+a}} dr \\ &\leq \frac{A}{C^{a+1}}. \quad \square \end{aligned}$$

Lema IV.7 Sean $n \geq 2$ par, $m = n/2 \in \mathbb{N}$, $\gamma \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $c \in (0, 1)$.

i) Entonces la función definida como

$$K_{00}^\gamma(x, y) = \sum_{k=1}^\infty \frac{k^{n+\gamma-1}}{B(k, \frac{n}{2})^2} Z_k(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{B} \times \mathbb{B}$$

está dada por

$$K_{00}^\gamma(x, y) = \frac{1}{[(m-1)!]^2} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right)^{n+\gamma-1} \left(r \frac{\partial^m}{\partial r^m} r^{m-1} \right)^2 P_\epsilon(x, y)$$

y satisface

$$|K_{00}^\gamma(x, y)| \leq A_0 \chi_{\Omega_0}(x, y) + \frac{A}{|\bar{x} - y|^{3n+\gamma-2}} \chi_{\Omega_c}(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{B} \times \mathbb{B}.$$

ii) Más aún, sobre $\mathbb{B} \times \mathbb{B}$ se cumple que

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^1 K_{00}^\gamma(tx, \tau y) [(1-t)(1-tr^2)]^{\frac{n}{2}-1} [(1-\tau)(1-\tau s^2)]^{\frac{n}{2}-1} \frac{dt}{t} \frac{d\tau}{\tau} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k^{n+\gamma-1} F_k(r^2) F_k(s^2) Z_k(x, y) \\ &= K_0^\gamma(x, y) + \sum_{k < k_0} k^{n+\gamma-1} F_k(r^2) F_k(s^2) Z_k(x, y) \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$|K_0^\gamma(x, y)| \leq A_0 \chi_{\Omega_0}(x, y) + \frac{A}{|\bar{x} - y|^{n+\gamma}} \chi_{\Omega_c}(x, y).$$

Nota sobre γ La restricción original $\gamma > -1$ asegura que la medida $(1-r)^\gamma dx$ sea finita sobre \mathbb{B} y que el valor de β_k sea finito. Desde la sección III.3 se exige que este valor sea además entero para garantizar que la cantidad β_k^2 sea la función racional deseada cuando n es par. Ahora, el desarrollo de las series que definen a $K_{00}^\gamma, K_0^\gamma$ exige la presencia del factor $k^{n+\gamma-1}$. Para obtenerlo, enseguida se aplica el operador $\left(r \frac{\partial}{\partial r} \right)^{n+\gamma-1}$ a la función dada por $r \mapsto r^k$. Pero para ello es necesario que $n + \gamma - 1$ sea un entero no negativo. Por lo tanto, a la restricción $\gamma > -1$ una vez más se añade la hipótesis: γ entera.

Demostración Considérense los operadores \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 dados por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 f(r) &= \left(\frac{1}{(m-1)!} r \frac{\partial^m}{\partial r^m} r^{m-1} \right) f(r), \\ \mathcal{L}_2 f(r) &= \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right)^{n+\gamma-1} f(r) \end{aligned}$$

para funciones $f : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ que posean las derivadas correspondientes.

Entonces los cálculos importantes aquí son dos:

$$\mathcal{L}_1 r^k = \left(\frac{1}{(m-1)!} r \frac{\partial^m}{\partial r^m} r^{m-1} \right) r^k$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{(m-1)!} r \frac{\partial^m}{\partial r^m} r^{k+m-1} \\
 &= \frac{1}{(m-1)!} (k+m-1)(k+m-2)\cdots(k+1)kr^k \\
 &= \frac{(k)_m}{(m-1)!} r^k \\
 &= \frac{1}{B(k, \frac{n}{2})} r^k
 \end{aligned}$$

por (1.8), y en segundo término

$$\mathcal{L}_2 r^k = \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right)^{n+\gamma-1} r^k = k^{n+\gamma-1} r^k.$$

Así, para cualesquiera $x, y \in \mathbb{B}$ basta emplear (1.8) y (1.17) para obtener

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{[(m-1)!]^2} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right)^{n+\gamma-1} \left(r \frac{\partial^m}{\partial r^m} r^{m-1} \right)^2 P_e(x, y) \\
 &= \frac{1}{[(m-1)!]^2} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right)^{n+\gamma-1} \left(r \frac{\partial^m}{\partial r^m} r^{m-1} \right)^2 \sum_{k=0}^{\infty} Z_k(x, y) \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right)^{n+\gamma-1} \left(\frac{1}{(m-1)!} r \frac{\partial^m}{\partial r^m} r^{m-1} \right)^2 r^k s^k Z_k(\zeta, \xi) \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{n+\gamma-1}}{B(k, \frac{n}{2})^2} Z_k(x, y) \\
 &= K_{00}^\gamma(x, y).
 \end{aligned}$$

En esta operación P_e se deriva iteradamente hasta $2n + \gamma - 1$ veces con respecto a r . Entonces (i) es cierto por el lema IV.5.

Ahora, dadas $x, y \in \mathbb{B}$ considérese la siguiente serie de funciones de $(t, \tau) \in [0, 1]^2$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{n+\gamma-1}}{B(k, \frac{n}{2})^2} r^k s^k Z_k(\zeta, \xi) t^{k-1} \tau^{k-1} [(1-t)(1-tr^2)]^{\frac{n}{2}-1} [(1-\tau)(1-\tau s^2)]^{\frac{n}{2}-1}$$

cuya convergencia absoluta y uniforme sobre $\Omega_0 : 0 \leq r = |x| \leq c < 1$ está asegurada por

$$\frac{k^{n+\gamma-1}}{B(k, \frac{n}{2})^2} r^k s^k |Z_k(\zeta, \xi)| \leq A k^{3n+\gamma-3} r^k$$

de acuerdo a (1.10), (1.11) y (1.16). Entonces esta serie se puede integrar término por término con respecto a $(t, \tau) \in [0, 1]^2$. Así que por (i) y por (1.24) se tiene que

$$\begin{aligned}
K_0^*(x, y) &= \int_0^1 \int_0^1 K_{00}^\gamma(tx, \tau y) [(1-t)(1-tr^2)]^{\frac{n}{2}-1} [(1-\tau)(1-\tau s^2)]^{\frac{n}{2}-1} \frac{dt}{t} \frac{d\tau}{\tau} \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{n+\gamma-1}}{B(k, \frac{n}{2})^2} t^{k-1} \tau^{k-1} r^k s^k Z_k(\zeta, \xi) \\
&\quad [(1-t)(1-tr^2)]^{\frac{n}{2}-1} [(1-\tau)(1-\tau s^2)]^{\frac{n}{2}-1} dt d\tau \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{n+\gamma-1}}{B(k, \frac{n}{2})^2} Z_k(x, y) \int_0^1 t^{k-1} [(1-t)(1-tr^2)]^{\frac{n}{2}-1} dt \\
&\quad \int_0^1 \tau^{k-1} [(1-\tau)(1-\tau s^2)]^{\frac{n}{2}-1} d\tau \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k^{n+\gamma-1} F_k(r^2) F_k(s^2) Z_k(x, y).
\end{aligned}$$

Obsérvese que la diferencia entre K_0^* y K_0^γ definida en (4.5) está dada por la suma finita

$$\sum_{k=1}^{k_0-1} k^{n+\gamma-1} F_k(r^2) F_k(s^2) Z_k(x, y)$$

que es una función continua sobre $\overline{\mathbb{B}} \times \overline{\mathbb{B}}$ y que resulta trivial acotar. Por lo tanto, para probar que (ii) es cierto para $|K_0^\gamma|$ bastará demostrar que lo es para $|K_0^*|$. Esto se hará en los siguientes tres pasos, y solamente sobre Ω_c para $c \in (0, 1)$ dada ya que el resultado para Ω_0 es directo.

Primer paso Sean $x, y \in \Omega_c$. Sea $b \in (0, 1)$.

Si $t \in (0, b)$ ó $\tau \in (0, b)$ entonces

$$\begin{aligned}
\left| \frac{K_{00}^\gamma(tx, \tau y)}{t\tau} \right| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{n+\gamma-1}}{B(k, \frac{n}{2})^2} r^k s^k t^{k-1} \tau^{k-1} |Z_k(\zeta, \xi)| \\
&\leq A \sum_{k=1}^{\infty} k^{3n+\gamma-3} b^{k-1} = a < \infty,
\end{aligned}$$

por (1.10), (1.11) y (1.16).

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 |K_0^*(x, y)| &\leq \int_0^b \int_0^1 \left| \frac{K_{00}^\gamma(tx, \tau y)}{t\tau} \right| [(1-t)(1-tr^2)]^{\frac{\alpha}{2}-1} [(1-\tau)(1-\tau s^2)]^{\frac{\alpha}{2}-1} dt d\tau \\
 &\quad + \int_b^1 \int_0^b \left| \frac{K_{00}^\gamma(tx, \tau y)}{t\tau} \right| [(1-t)(1-tr^2)]^{\frac{\alpha}{2}-1} [(1-\tau)(1-\tau s^2)]^{\frac{\alpha}{2}-1} dt d\tau \\
 &\quad + \int_b^1 \int_b^1 \left| \frac{K_{00}^\gamma(tx, \tau y)}{bb} \right| [(1-t)(1-tr^2)]^{\frac{\alpha}{2}-1} [(1-\tau)(1-\tau s^2)]^{\frac{\alpha}{2}-1} dt d\tau \\
 &\leq A_1 + A_2 \\
 &\quad + \frac{1}{b^2} \int_b^1 \int_b^1 |K_{00}^\gamma(tx, \tau y)| [(1-t)(1-tr^2)]^{\frac{\alpha}{2}-1} [(1-\tau)(1-\tau s^2)]^{\frac{\alpha}{2}-1} dt d\tau.
 \end{aligned}$$

Entonces, por (i),

$$\begin{aligned}
 |K_0^*(x, y)| &\leq A \int_b^1 \int_b^1 \frac{1}{|\tilde{tx} - \tau y|^{3n+\gamma-2}} [(1-t)(1-tr^2)]^{\frac{\alpha}{2}-1} \\
 &\quad [(1-\tau)(1-\tau s^2)]^{\frac{\alpha}{2}-1} dt d\tau. \tag{4.6}
 \end{aligned}$$

Segundo paso Si $0 < b < t < 1$ entonces

$$\epsilon(tx) = 1 - tr = (1-t) + t(1-r) > \epsilon(t) + b\epsilon(r),$$

luego por el lema IV.4 (iii) para $t, \tau \in (b, 1)$ se tiene que

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{|\tilde{tx} - \tau y|^{3n+\gamma-2}} &\leq \frac{A}{[|\zeta - \xi| + \epsilon(tx) + \epsilon(\tau y)]^{3n+\gamma-2}} \\
 &\leq \frac{A}{[|\zeta - \xi| + \epsilon(t) + \epsilon(\tau) + b\epsilon(r) + b\epsilon(s)]^{3n+\gamma-2}}.
 \end{aligned}$$

Además,

$$0 < 1 - tr^2 = (1-t) + t(1+r)(1-r) \leq \epsilon(t) + 2\epsilon(r)$$

implica que

$$(1-tr^2)^{\frac{\alpha}{2}-1} \leq [\epsilon(t) + 2\epsilon(r)]^{\frac{\alpha}{2}-1} \leq A[\epsilon(t)^{\frac{\alpha}{2}-1} + \epsilon(r)^{\frac{\alpha}{2}-1}].$$

Así que en el integrando de (4.6) figura lo siguiente para $\tau \in (b, 1)$ dada

$$0 \leq \int_b^1 \frac{(1-t)^{\frac{\alpha}{2}-1} (1-tr^2)^{\frac{\alpha}{2}-1}}{|\tilde{tx} - \tau y|^{3n+\gamma-2}} dt$$

$$\begin{aligned} &\leq A \int_b^1 \frac{\epsilon(t)^{n-2}}{|\tilde{t}x - \tau y|^{3n+\gamma-2}} dt + A\epsilon(r)^{\frac{n}{2}-1} \int_b^1 \frac{\epsilon(t)^{\frac{n}{2}-1}}{|\tilde{t}x - \tau y|^{3n+\gamma-2}} dt \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Por los lemas IV.4 (iii) y IV.6 (i),

$$\begin{aligned} I_1 &= A \int_b^1 \frac{\epsilon(t)^{n-2}}{|\tilde{t}x - \tau y|^{3n+\gamma-2}} dt \\ &\leq A \int_0^1 \frac{\epsilon(t)^{n-2}}{[|\zeta - \xi| + \epsilon(t) + \epsilon(\tau) + b\epsilon(r) + b\epsilon(s)]^{3n+\gamma-2}} dt \\ &\leq \frac{A}{[|\zeta - \xi| + \epsilon(\tau) + b\epsilon(r) + b\epsilon(s)]^{2n+\gamma-1}} \end{aligned}$$

y, análogamente,

$$\begin{aligned} I_2 &= A\epsilon(r)^{\frac{n}{2}-1} \int_b^1 \frac{\epsilon(t)^{\frac{n}{2}-1}}{|\tilde{t}x - \tau y|^{3n+\gamma-2}} dt \\ &\leq A\epsilon(r)^{\frac{n}{2}-1} \int_0^1 \frac{\epsilon(t)^{\frac{n}{2}-1}}{[|\zeta - \xi| + \epsilon(t) + \epsilon(\tau) + b\epsilon(r) + b\epsilon(s)]^{3n+\gamma-2}} dt \\ &\leq \frac{A\epsilon(r)^{\frac{n}{2}-1}}{[|\zeta - \xi| + \epsilon(\tau) + b\epsilon(r) + b\epsilon(s)]^{\frac{\gamma}{2}n+\gamma-2}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, (4.6) se puede estimar de la siguiente manera

$$\begin{aligned} |K_0^*(x, y)| &\leq A \int_b^1 \left[\int_b^1 \frac{(1-t)^{\frac{n}{2}-1} (1-tr^2)^{\frac{n}{2}-1}}{|\tilde{t}x - \tau y|^{3n+\gamma-2}} dt \right] (1-\tau)^{\frac{n}{2}-1} (1-\tau s^2)^{\frac{n}{2}-1} d\tau \\ &\leq A \int_b^1 [I_1 + I_2] (1-\tau)^{\frac{n}{2}-1} (1-\tau s^2)^{\frac{n}{2}-1} d\tau \\ &\leq A \int_b^1 [I_1 + I_2] \epsilon(\tau)^{\frac{n}{2}-1} [\epsilon(\tau)^{\frac{n}{2}-1} + \epsilon(s)^{\frac{n}{2}-1}] d\tau \\ &= J_1 + J_2 + J_3 + J_4. \end{aligned}$$

Tercer y último paso Para probar el resultado final, basta emplear los lemas IV.4 (iii), IV.6 (i) para acotar cada uno de los cuatro términos obtenidos. Así, sobre Ω_c se obtiene

$$\begin{aligned}
 J_1 &= A \int_b^1 \epsilon(\tau)^{n-2} I_1 d\tau \\
 &\leq A \int_b^1 \frac{\epsilon(\tau)^{n-2}}{[|\zeta - \xi| + \epsilon(\tau) + b\epsilon(r) + b\epsilon(s)]^{2n+\gamma-1}} d\tau \\
 &\leq \frac{A}{[|\zeta - \xi| + b\epsilon(r) + b\epsilon(s)]^{n+\gamma}} \\
 &\leq \frac{A}{[b|\zeta - \xi| + b\epsilon(r) + b\epsilon(s)]^{n+\gamma}} \\
 &\leq \frac{A}{|\tilde{x} - y|^{n+\gamma}},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_2 &= A\epsilon(s)^{\frac{n}{2}-1} \int_b^1 \epsilon(\tau)^{\frac{n}{2}-1} I_1 d\tau \\
 &\leq A\epsilon(s)^{\frac{n}{2}-1} \int_0^1 \frac{\epsilon(\tau)^{\frac{n}{2}-1}}{[|\zeta - \xi| + \epsilon(\tau) + b\epsilon(r) + b\epsilon(s)]^{2n+\gamma-1}} d\tau \\
 &\leq \frac{A\epsilon(s)^{\frac{n}{2}-1}}{|\tilde{x} - y|^{\frac{3}{2}n+\gamma-1}} \\
 &\leq \frac{A|\tilde{x} - y|^{\frac{n}{2}-1}}{|\tilde{x} - y|^{\frac{3}{2}n+\gamma-1}} \\
 &= \frac{A}{|\tilde{x} - y|^{n+\gamma}},
 \end{aligned}$$

y, análogamente,

$$\begin{aligned}
 J_3 &= A \int_b^1 \epsilon(\tau)^{n-2} I_2 d\tau \\
 &\leq A\epsilon(r)^{\frac{n}{2}-1} \int_0^1 \frac{\epsilon(\tau)^{n-2}}{[|\zeta - \xi| + \epsilon(\tau) + b\epsilon(r) + b\epsilon(s)]^{\frac{5}{2}n+\gamma-2}} d\tau \\
 &\leq A \frac{\epsilon(r)^{\frac{n}{2}-1}}{|\tilde{x} - y|^{\frac{3}{2}n+\gamma-1}} \\
 &\leq \frac{A}{|\tilde{x} - y|^{n+\gamma}},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_4 &= A\epsilon(s)^{\frac{n}{2}-1} \int_b^1 I_2 d\tau \\
 &\leq A\epsilon(r)^{\frac{n}{2}-1} \epsilon(s)^{\frac{n}{2}-1} \int_0^1 \frac{\epsilon(\tau)^{\frac{n}{2}-1}}{[|\zeta - \xi| + \epsilon(\tau) + b\epsilon(r) + b\epsilon(s)]^{\frac{5}{2}n+\gamma-2}} d\tau
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq A \frac{\epsilon(r)^{\frac{n}{2}-1} \epsilon(s)^{\frac{n}{2}-1}}{|\bar{x} - y|^{2n+\gamma-2}} \\ &\leq \frac{A}{|\bar{x} - y|^{n+\gamma}}. \quad \square \end{aligned}$$

Lo anterior permite establecer la siguiente estimación que es fundamental para demostrar que \mathcal{P}_0^γ es continua.

Lema IV.8 Sean $n \geq 2$ par, $\gamma \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Si $\delta \in (-1, \gamma)$ entonces

$$\int_{\mathbb{B}} |K_0^\gamma(x, y)| \epsilon(x)^\delta dx \leq A \epsilon(y)^{\delta-\gamma}, \quad y \in \mathbb{B}.$$

Demostación Por hipótesis: $-1 < \delta < \gamma \leq \frac{n}{2} + \gamma - 1$. Entonces por los lemas IV.4 (iii), IV.6 (i),(ii) y IV.7 para cada $y \in \mathbb{B}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{B}} |K_0^\gamma(x, y)| \epsilon(x)^\delta dx &\leq A \int_{\mathbb{B}} \frac{1}{|\bar{x} - y|^{n+\gamma}} \epsilon(x)^\delta dx \\ &\leq A \int_0^1 r^{n-1} \epsilon(r)^\delta \int_S \frac{d\sigma(\zeta)}{[|\zeta - \xi| + \epsilon(r) + \epsilon(s)]^{n+\gamma}} dr \\ &\leq A \int_0^1 \frac{\epsilon(r)^\delta dr}{[\epsilon(r) + \epsilon(s)]^{n+1}} \\ &\leq A \epsilon(s)^{\delta-\gamma}. \quad \square \end{aligned}$$

Teorema IV.9 Sean los valores $n \geq 2$ par, $\gamma \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $p \geq 1$. Entonces la transformación $\mathcal{P}_0^\gamma = \mathcal{P}_0(n, \gamma, p, \beta)$ dada por

$$\mathcal{P}_0^\gamma f(x) = \int_{\mathbb{B}} K_0^\gamma(x, y) f(y) (1-s)^\gamma dy \quad \text{para } f \in L^{p, \beta}, x \in \mathbb{B}$$

es continua para toda $\beta \in (-1, -1 + [\gamma + 1]p)$.

Demostación Si $p = 1$ y $\beta \in (-1, \gamma)$ entonces por el teorema de Tonelli y por el lema IV.8 se comprueba que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{P}_0^\gamma f\|_{L^{1,\beta}} &\leq \int_{\mathbb{B}} \int_{\mathbb{B}} |K_0^\gamma(x,y)| |f(y)| \kappa(y)^\gamma dy \kappa(x)^\beta dx \\ &= \int_{\mathbb{B}} \left(\int_{\mathbb{B}} |K_0^\gamma(x,y)| \kappa(x)^\beta dx \right) |f(y)| \kappa(y)^\gamma dy \\ &\leq A \int_{\mathbb{B}} |f(y)| \kappa(y)^{\beta-\gamma+\gamma} dy. \end{aligned}$$

Considérese ahora un par de exponentes conjugados $p, q > 1$ con $1/p + 1/q = 1$. Al igual que en [BP1], debe existir un valor real α para el cual se cumpla el siguiente razonamiento.

$$\begin{aligned} \|\mathcal{P}_0^\gamma f\|_{L^{p,\beta}}^p &= \int_{\mathbb{B}} |\mathcal{P}_0^\gamma f(x)|^p \kappa(x)^\beta dx \\ &= \int_{\mathbb{B}} \left| \int_{\mathbb{B}} K_0^\gamma(x,y) f(y) (1-s)^\gamma dy \right|^p \kappa(x)^\beta dx \\ &\leq \int_{\mathbb{B}} \left(\int_{\mathbb{B}} |K_0^\gamma(x,y)| |f(y)| \kappa(y)^\gamma dy \right)^p \kappa(x)^\beta dx \\ &= \int_{\mathbb{B}} \left(\int_{\mathbb{B}} |K_0^\gamma(x,y)|^{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}} |f(y)| \kappa(y)^{-\alpha} \kappa(y)^\gamma dy \right)^p \kappa(x)^\beta dx \\ &\leq \int_{\mathbb{B}} \left\| |K_0^\gamma(x,y)|^{\frac{1}{p}} f(y) \kappa(y)^\alpha \right\|_{L^{p,\gamma}}^p \left\| |K_0^\gamma(x,y)|^{\frac{1}{q}} \kappa(y)^{-\alpha} \right\|_{L^{q,\gamma}}^p \kappa(x)^\beta dx \\ &\quad \text{por la desigualdad de Hölder} \\ &= \int_{\mathbb{B}} \left(\int_{\mathbb{B}} |K_0^\gamma(x,y)| |f(y)|^p \kappa(y)^{ap+\gamma} dy \right) \left(\int_{\mathbb{B}} |K_0^\gamma(x,y)| \kappa(y)^{\delta_0} dy \right)^{\frac{p}{q}} \kappa(x)^\beta dx \\ &\quad \text{donde } \delta_0 = -\alpha q + \gamma \\ &\leq A \int_{\mathbb{B}} \int_{\mathbb{B}} |K_0^\gamma(x,y)| |f(y)|^p \kappa(y)^{ap+\gamma} dy \kappa(x)^{\lambda_0 \frac{p}{q}} \kappa(x)^\beta dx \\ &\quad \text{por el lema IV.8, con } \lambda_0 = \delta_0 - \gamma \\ &= A \int_{\mathbb{B}} |f(y)|^p \kappa(y)^{ap+\gamma} \left(\int_{\mathbb{B}} |K_0^\gamma(x,y)| \kappa(x)^\delta dx \right) dy \\ &\quad \text{por el teorema de Tonelli, con } \delta = \lambda_0 \frac{p}{q} + \beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq A \int_{\mathbb{B}} |f(y)|^p \epsilon(y)^{ap+\gamma+\lambda} dy \\ &\quad \text{por el lema IV.8, con } \lambda = \delta - \gamma \\ &\leq A \int_{\mathbb{B}} |f(y)|^p \epsilon(y)^\beta dy \\ &\quad \text{siempre y cuando } \beta \leq ap + \gamma + \lambda \\ &= A \|f\|_{L^{p,\beta}}^p. \end{aligned}$$

Para ello, el lema IV.8 y la última desigualdad exigen a la vez

$$\delta_0, \delta \in (-1, \gamma), \quad \beta \leq ap + \gamma + \lambda$$

donde

$$\begin{aligned} \delta_0 &= -\alpha q + \gamma, \\ \delta &= \lambda_0 \frac{p}{q} + \beta = (\delta_0 - \gamma) \frac{p}{q} + \beta = (-\alpha q) \frac{p}{q} + \beta = -\alpha p + \beta, \\ \lambda &= \delta - \gamma = -\alpha p + \beta - \gamma, \\ ap + \gamma + \lambda &= ap + \gamma + (-\alpha p + \beta - \gamma) = \beta. \end{aligned}$$

Esto equivale a

$$-1 < -\alpha q + \gamma < \gamma, \quad -1 < -\alpha p + \beta < \gamma, \quad \beta \geq \beta$$

o sea

$$\max\{0, \frac{\beta - \gamma}{p}\} < \alpha < \min\{\frac{\beta + 1}{p}, \frac{\gamma + 1}{q}\}.$$

Debido a que $\gamma > -1$, dicho valor real α existe si y sólo si

$$-1 < \beta, \quad \frac{\beta - \gamma}{p} < \frac{\gamma + 1}{q}$$

lo cual se reduce a

$$-1 < \beta < -1 + (\gamma + 1)p.$$

Por último, obsérvese que este intervalo para el valor de β es no vacío. \square

Observación Dadas $n \geq 2$ par, $\gamma \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, la relación $(\beta - \gamma)/p < (\gamma + 1)/q$ entre los valores $p \geq 1, \beta > -1$ se presentó como

$$\beta \in (-1, -1 + [\gamma + 1]p)$$

para toda $p \geq 1$, y así se empleará este resultado en el resto de este trabajo.

Sin embargo, el mismo hecho se puede representar como

$$p > \frac{\beta + 1}{\gamma + 1}$$

para toda $\beta > -1$, donde se ve claramente que

- 1) si $\beta \in (-1, \gamma)$ entonces $p \geq 1$ es libre,
- 2) si $\beta = \gamma$ entonces $p > 1$ es arbitraria,
- 3) si $\beta > \gamma$ entonces la restricción $p > (\beta + 1)/(\gamma + 1) > 1$ es más interesante.

IV.3 Continuidad de $\mathcal{P}_1^\gamma, \mathcal{P}_2^\gamma, \dots, \mathcal{P}_{n+\gamma}^\gamma$

Se sabe ahora que si n es par y γ es entera entonces \mathcal{P}_0^γ es una funcional lineal continua sobre $L^{p,\beta}$. En esta sección se demuestra lo mismo para cada una de las transformaciones $\mathcal{P}_1^\gamma, \mathcal{P}_2^\gamma, \dots, \mathcal{P}_{n+\gamma}^\gamma$.

Dada $j \in \{1, 2, \dots, n + \gamma\}$, recuérdese que la transformación \mathcal{P}_j^γ se define como

$$\mathcal{P}_j^\gamma f(x) = \int_{\mathbb{B}} K_j^\gamma(x, y) f(y) (1 - s)^\gamma dy \quad \text{para } f \in L^{p,\beta}, x \in \mathbb{B}$$

donde K_j^γ está dada por (4.3).

Conforme j toma los valores $1, 2, \dots, n + \gamma$ obsérvese que el exponente de $k^{n+\gamma-1-j}$ recorre todos los valores enteros desde el mayor que es $n + \gamma - 2 \geq 0$ hasta -1 .

Herramienta Al igual que en la sección anterior, se partirá aquí del núcleo de Poisson euclidiano P_ϵ para describir a las funciones K_j^γ . Y, mientras m sea un entero no negativo, el factor k^m se seguirá obteniendo a partir de $(r \frac{\partial}{\partial r})^m r^k = k^m r^k$.

Existe un modo general de obtener potencias negativas de k . Pero aquí sólo se requiere $1/k$ cuya presencia puede ser absorbida por una función beta. En efecto, por (1.8) se tiene que

$$\frac{1}{k} \frac{1}{B(k, m)} = \frac{(k)_m}{k(m-1)!} = \frac{(k+1)_{m-1}}{(m-1)!}$$

y esto corresponde a una derivada menos que antes en

$$(k+m-1)(k+m-2)\cdots(k+2)(k+1)r^k = \frac{\partial^{m-1}}{\partial r^{m-1}} r^{k+m-1}.$$

Con esta pequeña modificación, se aplica de nuevo el lema IV.5 y así el lema IV.7 se convierte en lo siguiente.

Lema IV.10 Sea $n \geq 2$ par con $m = n/2$. Sean los valores $\gamma \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $c \in (0, 1)$, $j \in \{1, 2, \dots, n + \gamma\}$. Entonces para cualesquiera $x, y \in \mathbb{B}$ se cumple que

$$\begin{aligned} K_j^\gamma(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{n+\gamma-1}}{k^j} F_k(r^2) F_k(s^2) Z_k(x, y) \\ &= \int_0^1 \int_0^1 K_{jj}^\gamma(tx, \tau y) [(1-t)(1-tr^2)]^{\frac{n}{2}-1} [(1-\tau)(1-\tau s^2)]^{\frac{n}{2}-1} \frac{dt}{t} \frac{d\tau}{\tau} \end{aligned}$$

donde la función definida para $x, y \in \mathbb{B}$ por

$$K_{jj}^\gamma(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{n+\gamma-1}}{k^j} \frac{1}{B(k, \frac{n}{2})^2} Z_k(x, y)$$

se puede expresar sobre $\mathbb{B} \times \mathbb{B}$ como

$$K_{jj}^\gamma(x, y) = \begin{cases} \left(r \frac{\partial}{\partial r}\right)^{n+\gamma-j-1} \left(\frac{1}{(m-1)!} r \frac{\partial^m}{\partial r^m} r^{m-1}\right)^2 P_e(x, y) & \text{si } 1 \leq j \leq n + \gamma - 1 \\ \left(\frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1}}{\partial r^{m-1}} r^{m-1}\right) \left(\frac{1}{(m-1)!} r \frac{\partial^m}{\partial r^m} r^{m-1}\right) P_e(x, y) & \text{si } j = n + \gamma \end{cases}$$

y satisface

$$|K_{jj}^\gamma(x, y)| \leq \begin{cases} A_0 \chi_{\Omega_0} + \frac{A}{|x-y|^{2m+\gamma-j-2}} \chi_{\Omega_c} & \text{si } 1 \leq j \leq n + \gamma - 1 \\ A_0 \chi_{\Omega_0} + \frac{A}{|x-y|^{2m-1}} \chi_{\Omega_c} & \text{si } j = n + \gamma. \end{cases}$$

Teorema IV.11 Sean $n \geq 2$ par, $\gamma \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $p \geq 1$. Entonces para cada valor $j = 1, 2, \dots, n + \gamma$ la transformación $\mathcal{P}_j^\gamma = \mathcal{P}_j(n, \gamma, p, \beta)$ dada por

$$\mathcal{P}_j^\gamma f(x) = \int_{\mathbb{B}} K_j^\gamma(x, y) f(y) (1-s)^\gamma dy \quad \text{para } f \in L^{p, \beta}, x \in \mathbb{B}$$

es continua para toda $\beta \in (-1, -1 + [\gamma + 1]p)$.

Demostración Dada $c \in (0, 1)$, el resultado vuelve a ser trivial sobre la región Ω_0 . Para $(x, y) \in \Omega_c$, recuérdese que dadas $b \in (0, 1)$ y $t, \tau \in (b, 1)$ se tiene

$$\max\{3n + \gamma - j - 2, 2n - 1\} \leq 3n + \gamma - 2.$$

Entonces las siguientes cantidades comparten cota superior

$$\frac{1}{|\tilde{t}x - \tau y|^{3n+\gamma-j-2}}, \frac{1}{|\tilde{t}x - \tau y|^{2n-1}} \leq \frac{A}{|\tilde{t}x - \tau y|^{3n+\gamma-2}},$$

y por lo tanto sobre Ω_c

$$|K_j^\gamma(x, y)| \leq A \int_b^1 \int_b^1 \frac{1}{|\tilde{t}x - \tau y|^{3n+\gamma-2}} [(1-t)(1-tr^2)]^{\frac{\alpha}{2}-1} [(1-\tau)(1-\tau s^2)]^{\frac{\alpha}{2}-1} dt d\tau.$$

Ésta es la misma cota superior que se encontró en (4.6) para $|K_0^*|$.

De este modo, no se sabe si la magnitud de K_0^γ es comparable a la de cada K_j^γ . Pero sí se prueba que la cota superior hallada para $|K_0^*|$ también lo es para cada magnitud $|K_j^\gamma|$, $1 \leq j \leq n + \gamma$. Así que la prueba de la continuidad de \mathcal{P}_j^γ es exactamente la misma que se realizó para \mathcal{P}_0^γ . \square

IV.4 La proyección \mathcal{P}^γ

El propósito de esta sección es terminar de demostrar las propiedades de \mathcal{P}^γ que se enunciaron al inicio de este capítulo.

Recuérdese que $\mathcal{P}^\gamma = \mathcal{P}_L^\gamma + \sum_{j=0}^{n+\gamma} C_j \mathcal{P}_j^\gamma + \mathcal{P}_M^\gamma$ es la descomposición que nace del desarrollo (4.1).

Por (4.2), la cantidad

$$L^\gamma(x, y) = \sum_{k < k_0} \frac{1}{\beta_k^2} F_k(r^2) F_k(s^2) Z_k(x, y),$$

está acotada trivialmente por ser una suma finita de sumandos continuos sobre $\mathbb{B} \times \mathbb{B}$. Entonces la transformación correspondiente

$$\mathcal{P}_L^\gamma f(x) = \int_{\mathbb{B}} L^\gamma(x, y) f(y) \epsilon(y)^\gamma dy \quad \text{para } f \in L^{p, \beta}, x \in \mathbb{B}$$

existe y también es continua para cualesquiera $n \geq 2$ par, $\gamma \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $p \geq 1$, $\beta > -1$.

Lo mismo es cierto acerca de \mathcal{P}_M^γ . Para probarlo, basta ver que los primeros términos de M^γ en (4.4) están uniformemente acotados sobre $\mathbb{B} \times \mathbb{B}$. Para concluir lo mismo acerca de la totalidad de esta serie, es necesario considerar lo siguiente.

Lema IV.12 Dada $a > 0$ se cumple que $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=2}^{\infty} \left(\frac{a}{a+i}\right)^j < \frac{\pi^2}{6} a^2$.

Demostración Dada $i \geq 1$, véase que

$$\sum_{j=2}^{\infty} \left(\frac{a}{a+i}\right)^j = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{a}{a+i}\right)^j - 1 - \frac{a}{a+i} = \frac{1}{1-\frac{a}{a+i}} - 1 - \frac{a}{a+i} = \frac{a^2}{i(a+i)},$$

luego

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=2}^{\infty} \left(\frac{a}{a+i}\right)^j = a^2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(a+i)} < a^2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = a^2 \frac{\pi^2}{6}. \quad \square$$

Lema IV.13 Sean n un número natural par y γ un entero no negativo. Entonces la serie dada por

$$M^\gamma(x, y) = \sum_{k=k_0}^{\infty} \sum_{j=n+\gamma+1}^{\infty} C_j \frac{k^{n+\gamma-1}}{k^j} F_k(r^2) F_k(s^2) Z_k(x, y)$$

converge absoluta y uniformemente sobre $\mathbb{B} \times \mathbb{B}$.

Además, la función M^γ es acotada sobre este dominio.

Demostración Por el teorema III.8, los valores $(C_j) \subset \mathbb{R}$, $k_0 \in \mathbb{N}$ son tales que

$$\frac{1}{\beta_k^2} = k^{n+\gamma-1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{C_j}{k^j}, \quad k \geq k_0$$

y en particular

$$\frac{1}{\beta_{k_0}^2} = k_0^{n+\gamma-1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{C_j}{k_0^j}.$$

Dada $\varepsilon > 0$, existe entonces $N = N(\varepsilon) > 0$ tal que

$$|C_j| k_0^{n+\gamma-1-j} < \varepsilon, \quad j > N.$$

Sin pérdida de generalidad, supóngase ahora que $N \geq n + \gamma + 1$ y que $k_0 \geq 4$. Entonces por la continuidad de F_k sobre $[0, 1]$ y la de Z_k sobre $\overline{\mathbb{B}}$, para cada $k \geq k_0$ y para cualesquiera $x, y \in \mathbb{B}$ se cumple que

$$\begin{aligned} & \sum_{j>N} |C_j| \frac{k^{n+\gamma-1}}{k^j} r^k F_k(r^2) s^k F_k(s^2) |Z_k(\zeta, \xi)| \\ & \leq A \sum_{j>N} |C_j| \frac{k^{n+\gamma-1}}{k^j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= A \sum_{j>N} |C_j| k_0^{n+\gamma-1-j} \left(\frac{k_0}{k}\right)^{j-n-\gamma+1} \\
 &\leq A\varepsilon \sum_{j=n+\gamma+1}^{\infty} \left(\frac{k_0}{k}\right)^{j-n-\gamma+1} \\
 &= A\varepsilon \sum_{j=2}^{\infty} \left(\frac{k_0}{k}\right)^j,
 \end{aligned}$$

entonces por el lema anterior

$$\begin{aligned}
 \sum_{k>k_0} \sum_{j>N} |C_j| \frac{k^{n+\gamma-1}}{k^j} F_k(r^2) F_k(s^2) |Z_k(x,y)| &\leq A\varepsilon \sum_{k>k_0} \sum_{j=2}^{\infty} \left(\frac{k_0}{k}\right)^j \\
 &= A\varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=2}^{\infty} \left(\frac{k_0}{k_0+i}\right)^j \\
 &\leq A\varepsilon,
 \end{aligned}$$

luego $|M^\gamma(x,y)| \leq A_0$ sobre $\mathbb{B} \times \mathbb{B}$. \square

La cota uniforme encontrada así para $|M^\gamma|$ da sentido a la descomposición (4.1) propuesta desde un principio para K^γ . Con ella se concluye que \mathcal{P}^γ efectivamente define una transformación lineal continua sobre $L^{p,\beta}$ que está dada por $\mathcal{P}^\gamma = \mathcal{P}_L^\gamma + \sum_{j=0}^{n+\gamma} C_j \mathcal{P}_j^\gamma + \mathcal{P}_M^\gamma$.

Teorema IV.14 Dadas $n \geq 2$ par, $\gamma \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $p \geq 1$, $\beta \in (-1, -1 + [\gamma + 1]p)$, la transformación $\mathcal{P}^\gamma : L^{p,\beta} \rightarrow \mathcal{B}^{p,\beta}$ dada por

$$\mathcal{P}^\gamma f(x) = \int_{\mathbb{B}} K^\gamma(x,y) f(y) \epsilon(y)^\gamma dy \quad \text{para } f \in L^{p,\beta}, x \in \mathbb{B}$$

constituye una proyección continua sobre $\mathcal{B}^{p,\beta}$.

Demostración Sea $f \in L^{p,\beta}$. Entonces $\mathcal{P}^\gamma f \in L^{p,\beta}$ porque $\|\mathcal{P}^\gamma f\|_{L^{p,\beta}} \leq A \|f\|_{L^{p,\beta}} < \infty$. Además, f es el límite en $L^{p,\beta}$ de una sucesión de funciones acotadas (f_i) . Por el lema IV.3, cada función $\mathcal{P}^\gamma f_i$ es H -armónica. Entonces $(\mathcal{P}^\gamma f_i) \subset \mathcal{B}^{p,\beta}$ y por la continuidad de \mathcal{P}^γ se sigue que en este espacio de Banach $\mathcal{P}^\gamma f = \lim_{i \rightarrow \infty} \mathcal{P}^\gamma f_i \in \mathcal{B}^{p,\beta}$. Por lo tanto $\text{Im } \mathcal{P}^\gamma \subset \mathcal{B}^{p,\beta}$.

Sea $u \in \mathcal{B}^{p,\beta}$. Por el teorema II.3 (iv), esta función H -armónica está dada por una serie de la forma $u = \sum_{k,j} \lambda_{jk} W_j^k$ cuya convergencia es absoluta y uniforme sobre los subconjuntos compactos de \mathbb{B} . Entonces dada $x \in \mathbb{B}$ tiene sentido integrar la siguiente serie término por término. Y por el lema IV.2 lo que se obtiene es

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}^\gamma u(x) &= \int_{\mathbb{B}} K^\gamma(x, y) u(y) \epsilon(y)^\gamma dy \\
&= \int_{\mathbb{B}} K^\gamma(x, y) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{d(k)} \lambda_{jk} W_j^k(y) \epsilon(y)^\gamma dy \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{d(k)} \lambda_{jk} \int_{\mathbb{B}} K^\gamma(x, y) W_j^k(y) \epsilon(y)^\gamma dy \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{d(k)} \lambda_{jk} \mathcal{P}^\gamma W_j^k(x) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{d(k)} \lambda_{jk} W_j^k(x) \\
&= u(x).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\text{Im } \mathcal{P}^\gamma \supset \mathcal{B}^{p, \beta}$ con $\mathcal{P}^\gamma u = u$, $u \in \mathcal{B}^{p, \beta}$. Entonces $\text{Im } \mathcal{P}^\gamma = \mathcal{B}^{p, \beta}$ y $\mathcal{P}^\gamma \circ \mathcal{P}^\gamma = \mathcal{P}^\gamma$ sobre $L^{p, \beta}$. \square

IV.5 Síntesis y preguntas abiertas

El teorema IV.14 es el más importante de este trabajo. Antes de continuar, vale la pena recalcar el papel que representan en él los parámetros n, γ, p, β .

Desde el inicio, interesa que el valor de la dimensión $n \geq 2$ de la bola hiperbólica sea lo más general posible y se observa que el caso $n = 2$ es conocido.

La restricción $\gamma > -1$ hace que la correspondiente medida $(1-r)^\gamma dx$ sea finita sobre \mathbb{B} . Con ello es posible calcular de manera explícita el núcleo reproductor K^γ del espacio de Hilbert $\mathcal{B}^{2, \gamma}$.

Por otro lado, para cada entero $k \geq 1$ hay una serie que determina el valor de β_k^2 . Para que cada término en dicha serie sea una función racional de k , el valor de γ debe ser entero. Y para que esta suma sea finita, el valor de n debe ser par. Así se garantiza que β_k^2 sea una función racional en k cuyo desarrollo explícito es fundamental para proponer una descomposición de \mathcal{P}^γ que permite probar su continuidad. En la demostración correspondiente, se requiere una vez más que el valor de γ sea entero para que cada factor $k^{n+\gamma-1-j}$ se obtenga al derivar el núcleo de Poisson euclidiano $n + \gamma - 1 - j$ veces con respecto a la variable r .

En síntesis, $n \geq 2$ debe ser par, mientras que $\gamma \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

En contraste, β puede ser un valor real arbitrario. Pero la continuidad de \mathcal{P}^γ sólo se pudo probar para $\beta \in (-1, -1 + [\gamma + 1]p)$, con lo cual $(1-r)^\beta dx$ vuelve a ser una medida finita sobre \mathbb{B} .

Afortunadamente, el recorrido de $p \in [1, \infty)$ permanece intacto y se concluye que \mathcal{P}^γ es continua cuando todas estas hipótesis se satisfacen a la vez.

En cualquier otro caso, no se tiene ni la demostración de que \mathcal{P}^γ sea continua ni contraejemplos que prueben lo contrario.

En este trabajo, éstas son las principales preguntas que quedan abiertas y sin duda alguna la más importante es si \mathcal{P}^γ es continua cuando el valor de n es impar.

Capítulo V

Dualidad y espacios de Herz

En este capítulo se presentan dos resultados de dualidad que son de interés para los espacios de Bergman $B^{p,\beta}$. Éstos se basan en las investigaciones [BP1], [BP2] y [HY] acerca del caso euclidiano. En ambos el punto clave consiste en aprovechar la continuidad de la proyección de Bergman \mathcal{P}^γ obtenida en el capítulo anterior.

Así, en la sección V.1 se caracteriza al espacio dual de $B^{p,\beta}$ que surge de la relación

$$\langle f, g \rangle_\gamma = \int_{\mathbb{B}} f(x)g(x)\epsilon(x)^\gamma dx, \quad g \in B^{p,\beta} \quad (5.1)$$

para una elección adecuada de f y para ciertos valores de los parámetros n, γ, p, β . Por otro lado, en las secciones V.2 y V.3 se presentan los espacios de Herz asociados a $B^{p,\beta}$ y para ellos se analiza también la dualidad dada por (5.1).

Recuérdese que $\mathcal{P}^\gamma = \mathcal{P}(n, \gamma, p, \beta)$ denota la proyección de Bergman de $L^{p,\beta}$ sobre $B^{p,\beta}$ definida por

$$\mathcal{P}^\gamma f(x) = \int_{\mathbb{B}} K^\gamma(x, y) f(y) \epsilon(y)^\gamma dx \quad \text{para } f \in L^{p,\beta}, x \in \mathbb{B}.$$

Asimismo, se entiende que todo par de *exponentes conjugados entre sí* $p, q \in (1, \infty)$ satisface $1/p + 1/q = 1$. Al espacio de las funciones escalares de dominio \mathbb{B} que son continuas y de soporte compacto se le denota por $C_c(\mathbb{B})$. Por último, $L^b_{loc}(\mathbb{B})$ para $b \in [1, \infty)$ representa al espacio de las funciones escalares que existen y son b -integrables sobre todos los subconjuntos compactos de \mathbb{B} .

V.1 Dualidad

En esta sección se analiza la relación de dualidad dada por (5.1) sobre los espacios de Bergman $B^{p,\beta}$. A través de un análisis basado en [BP1], para dicha dualidad se obtiene un resultado concreto de la forma $(B^{p,\beta})^* \simeq B^{q,T}$, con normas equivalentes entre ambos espacios.

El primer paso es simple.

Proposición V.1 Sean los valores $n \geq 2$; $\alpha, \beta > -1$ y los exponentes conjugados entre sí $p, q > 1$. Defínase $U = (\alpha - \beta)q + \beta$. Entonces cada función $f \in L^{q,U}$ representa una funcional lineal sobre $L^{p,\beta}$ bajo la relación de dualidad

$$\langle f, g \rangle_\alpha = \int_{\mathbb{B}} f(x)g(x)\epsilon(x)^\alpha dx, \quad g \in L^{p,\beta}.$$

En este sentido, $(L^{p,\beta})^* \supset L^{q,U}$.

Más aún, se tiene que $(B^{p,\beta})^* \supset B^{q,U}$.

Demostración Dada $f \in L^{q,U}$, considérese la transformación lineal Φ_f definida por $\Phi_f(g) = \langle f, g \rangle_\alpha$ para toda $g : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{C}$ medible. Por la desigualdad de Hölder, se cumple que

$$\begin{aligned} |\Phi_f(g)| &= \left| \int_{\mathbb{B}} f(x)g(x)\epsilon(x)^\alpha dx \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{B}} |f(x)|\epsilon(x)^{\alpha-\beta} |g(x)|\epsilon(x)^\beta dx \\ &\leq \|f(x)\epsilon(x)^{\alpha-\beta}\|_{q,\beta} \|g\|_{p,\beta} \end{aligned}$$

donde

$$\|f(x)\epsilon(x)^{\alpha-\beta}\|_{q,\beta} = \left(\int_{\mathbb{B}} |f(x)|^q \epsilon(x)^{(\alpha-\beta)q+\beta} dx \right)^{\frac{1}{q}} = \|f\|_{q,U}.$$

Por lo tanto, Φ_f es una funcional lineal definida sobre $L^{p,\beta}$ que satisface $\|\Phi_f\| \leq \|f\|_{q,U} < \infty$.

Si además las funciones f, g son H -armónicas, la desigualdad $|\Phi_f(g)| \leq \|f\|_{q,U} \|g\|_{p,\beta}$ es la misma y esto completa el resultado. \square

El siguiente paso exige la presencia de una proyección continua de Bergman y para hacer énfasis en este hecho desaparece aquí el parámetro arbitrario $\alpha > -1$ para que el entero $\gamma > -1$ regrese a su papel acostumbrado con $T = (\gamma - \beta)q + \beta$ en el lugar de $U = (\alpha - \beta)q + \beta$.

Teorema V.2 Sean $n \geq 2$ par, $\gamma \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y un par de exponentes conjugados entre sí $p, q > 1$. Sean los valores $\beta \in (-1, -1 + [\gamma + 1]p)$ y $T = (\gamma - \beta)q + \beta$. Entonces cada funcional lineal continua Φ sobre $B^{p,\beta}$ queda representada de manera única por cierta función $f_\Phi \in B^{q,T}$ a través de la relación

$$\Phi(g) = \langle f_\Phi, g \rangle_\gamma, \quad g \in B^{p,\beta}. \quad (5.2)$$

Es decir, $(\mathcal{B}^{p,\beta})^* \subset \mathcal{B}^{q,T}$ por vía de (5.2).

Demostración *Primera parte* Es útil ver que $T = (\gamma - \beta)q + \beta = \gamma q - \beta(q - 1)$ equivale a

$$\beta = \frac{\gamma q - T}{q - 1}.$$

Entonces $\beta > -1$ si y sólo si $T < -1 + (\gamma + 1)q$, mientras que $\beta < -1 + (\gamma + 1)p$ siempre y cuando $T > -1$, ya que $p, q > 1$ y $1/p + 1/q = 1$ con $q = p(q - 1)$. Por lo tanto, la hipótesis

$$\beta \in (-1, -1 + [\gamma + 1]p)$$

equivale a

$$T \in (-1, -1 + [\gamma + 1]q). \quad (5.3)$$

(Obsérvese que cuando el valor de $p > 1$ crece, aumenta el recorrido de β y disminuye el de T .)

Segunda parte Sea $\Phi \in (\mathcal{B}^{p,\beta})^*$. Por el teorema IV.14, la proyección $\mathcal{P}^\gamma : L^{p,\beta} \rightarrow \mathcal{B}^{p,\beta}$ es continua, luego también lo es la funcional lineal dada por $\Phi^\gamma = \Phi \circ \mathcal{P}^\gamma \in (L^{p,\beta})^*$. Entonces existe una función $f_\gamma \in L^{q,\beta}$ que representa a Φ^γ a través de la dualidad

$$\Phi^\gamma(g) = \langle f_\gamma, g \rangle_\beta, \quad g \in L^{p,\beta}.$$

Sea $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{B}) \cap \mathcal{B}^{p,\beta}$. Del teorema IV.14 se sabe que $\mathcal{P}^\gamma(g) = g$, luego por el teorema de Fubini es cierto que

$$\begin{aligned} \Phi(g) &= \Phi \circ \mathcal{P}^\gamma \circ \mathcal{P}^\gamma(g) \\ &= \Phi^\gamma(\mathcal{P}^\gamma(g)) \\ &= \int_{\mathbb{B}} f_\gamma(x) \mathcal{P}^\gamma g(x) \epsilon(x)^\beta dx \\ &= \int_{\mathbb{B}} f_\gamma(x) \left[\int_{\mathbb{B}} K^\gamma(x, y) g(y) \epsilon(y)^\gamma dy \right] \epsilon(x)^\beta dx \\ &= \int_{\mathbb{B}} g(y) \left[\int_{\mathbb{B}} K^\gamma(x, y) f_\gamma(x) \epsilon(x)^\beta dx \right] \epsilon(y)^\gamma dy \\ &= \langle f_\Phi, g \rangle_\gamma \end{aligned}$$

donde para cada $y \in \mathbb{B}$ se define

$$f_\Phi(y) = \int_{\mathbb{B}} K^\gamma(x, y) f_\gamma(x) \epsilon(x)^{\beta-\gamma} \epsilon(x)^\gamma dx = \mathcal{P}^\gamma h(y),$$

con

$$h(x) = f_\gamma(x)\epsilon(x)^{\beta-\gamma} \in L^{q,T}$$

porque

$$\|h\|_{q,T}^q = \int_{\mathbb{B}} |f_\gamma(x)|^q \epsilon(x)^{(\beta-\gamma)q} \epsilon(x)^{(\gamma-\beta)q+\beta} dx = \int_{\mathbb{B}} |f_\gamma(x)|^q \epsilon(x)^\beta dx = \|f_\gamma\|_{q,\beta}^q < \infty.$$

Por el teorema IV.14, resulta que $f_\Phi = \mathcal{P}^\gamma h \in \mathcal{B}^{q,T}$, ya que por hipótesis se cumple (5.3).

Queda así

$$\Phi(g) = \langle f_\Phi, g \rangle_\gamma, \quad g \in C_c(\mathbb{B}) \cap \mathcal{B}^{p,\beta},$$

y por tratarse aquí de un subconjunto denso de $\mathcal{B}^{p,\beta}$, la continuidad de Φ completa

$$\Phi(g) = \langle f_\Phi, g \rangle_\gamma, \quad g \in \mathcal{B}^{p,\beta}.$$

Finalmente, en este caso $\Phi = 0$ corresponde a

$$0 = \langle f_\Phi, g \rangle_\gamma, \quad g \in \mathcal{B}^{p,\beta}$$

y se sigue que $f_\Phi = 0$ sobre \mathbb{B} . Entonces la correspondencia entre f_Φ y Φ es biunívoca. Por el teorema del mapeo abierto, resulta así que $\|\Phi\|$, $\|f_\Phi\|_{q,T}$ son normas equivalentes. \square

El resultado anterior conduce a la siguiente conclusión.

Corolario V.3 Sean $n \geq 2$ par, $\gamma \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y los exponentes conjugados $p, q > 1$. Sean $\beta \in (-1, -1 + [\gamma + 1]p)$ y $T = (\gamma - \beta)q + \beta$. Entonces Φ es una funcional lineal continua sobre $\mathcal{B}^{p,\beta}$ si y sólo si existe una función $f_\Phi \in \mathcal{B}^{q,T}$ que la representa a través de (5.1), en cuyo caso además $\|\Phi\| = \|f_\Phi\|_{q,T}$.

Es decir, se tiene que $(\mathcal{B}^{p,\beta})^* \simeq \mathcal{B}^{q,T}$, con normas equivalentes entre ambos espacios.

V.2 Espacios de Herz

A lo largo de este trabajo, se han empleado exclusivamente pesos radiales de la forma $(1 - |x|)^\beta$, $\beta > -1$ para generalizar la medida de Lebesgue sobre \mathbb{B} . Con ello, para cada punto de la bola unitaria el valor de $(1 - |x|)$ se vuelve esencial: se trata de su distancia euclidiana a la esfera S . Enseguida se presenta una partición de \mathbb{B} que permite trabajar con dicha distancia de manera explícita. A través de ella, es posible traducir diversos resultados acerca de los espacios de Bergman $\mathcal{B}^{p,\beta}$ en un lenguaje de series que conduce a los espacios llamados de Herz.

El propósito de todo lo que sigue es adaptar a la bola hiperbólica diversos resultados presentados por O. Blasco y S. Pérez Esteva en [BP2] para el caso euclidiano.

Definición V.4 Sea $(\rho_m) \subset [0, 1)$ la sucesión dada por

$$\rho_m = 1 - \frac{1}{2^m}, \quad m \geq 0.$$

Sea (A_m) la partición de \mathbb{B} determinada por los siguientes *anillos semiabiertos*

$$A_m : \rho_m \leq r = |x| < \rho_{m+1}, \quad m \geq 0$$

que satisfacen

$$\begin{aligned} \mathbb{B} &= \bigcup_{m=0}^{\infty} A_m, \\ A_k \cap A_m &= \emptyset \quad \text{si } k \neq m, \\ \frac{1}{2^{m+1}} < 1 - |x| &\leq \frac{1}{2^m}, \quad x \in A_m. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Dados los valores $p, b \in [1, \infty)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, la *norma de Herz* $\|\cdot\|_{pba}$ para funciones medibles $f : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{C}$ está dada por

$$\|f\|_{pba} = \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^{mba}} \|f\|_{L^p(A_m)}^b \right)^{1/b}.$$

Provistos de esta norma, interesan los espacios definidos por

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{pba} &= \{f \in L_{loc}^b(\mathbb{B}) : \|f\|_{pba} < \infty\}, \\ \mathcal{H}_{pba} &= \mathcal{K}_{pba} \cap \mathcal{A} = \{f \in L_{loc}^b(\mathbb{B}) : f \text{ es } H\text{-armónica}, \|f\|_{pba} < \infty\}. \end{aligned}$$

Ambos son espacios de Banach (ver [HY]) y el segundo es llamado *espacio de Herz*.

Observación V.5 a) En términos de la sucesión

$$c = c(f) = \left(2^{-m\alpha} \|f\|_{L^p(A_m)} \right)_m$$

es útil notar que

$$\|f\|_{pba} = \|c\|_p.$$

b) Dados los valores $n \geq 2$; $p, b \in [1, \infty)$; $\alpha \in \mathbb{R}$, la inclusión $\mathcal{K}_{pba} \subset L_{loc}^b(\mathbb{B})$ es estricta, como se muestra enseguida.

Contraejemplo Considérese la función sobre \mathbb{B} definida por

$$g = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^{ma}}{(\text{vol } A_m)^{1/p}} \chi_{A_m},$$

donde $\text{vol } A_m = \int_{A_m} dx$.

Entonces $g \in L_{loc}^b(\mathbb{B})$ porque dada $M \in \mathbb{N}$ se obtiene la suma finita

$$\sum_{m=0}^M \int_{A_m} |g|^b = \sum_{m=0}^M 2^{mba} \frac{\text{vol } A_m}{(\text{vol } A_m)^{b/p}} < \infty,$$

mientras que $g \notin \mathcal{K}_{pba}$ porque

$$\|g\|_{pba}^b = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^{mba}} \left(\int_{A_m} \frac{2^{mpa}}{\text{vol } A_m} dx \right)^{b/p} = \sum_{m=0}^{\infty} 1 = \infty.$$

Enseguida se muestra un vínculo claro entre los espacios de Herz y los espacios de Bergman.

Lema V.6 Dadas $n \geq 2$, $p \geq 1$ y $\alpha > -1/p$ se tiene que $\mathcal{K}_{ppa} = L^{p,p\alpha}$ y $\mathcal{H}_{ppa} = \mathcal{B}^{p,p\alpha}$.

Demostración Por (5.4), si $\alpha \geq 0$ entonces la afirmación

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^{mpa}} \|f\|_{L^p(A_m)}^p < \infty \quad (5.5)$$

equivale a

$$\frac{1}{2^{pa}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^{mpa}} \int_{A_m} |f|^p \leq \sum_{m=0}^{\infty} \int_{A_m} |f(x)|^p (1-r)^{p\alpha} dx \leq \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^{mpa}} \int_{A_m} |f|^p < \infty,$$

mientras que si $\alpha \in (-1/p, 0)$ entonces (5.5) equivale a

$$\infty > \frac{1}{2^{pa}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^{mpa}} \int_{A_m} |f|^p \geq \sum_{m=0}^{\infty} \int_{A_m} |f(x)|^p (1-r)^{p\alpha} dx \geq \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^{mpa}} \int_{A_m} |f|^p.$$

Por lo tanto $f \in \mathcal{K}_{ppa}$ si y sólo si $f \in L^{p,p\alpha}$. \square

De este resultado y del teorema IV.14 se obtiene directamente lo siguiente.

Corolario V.7 Si $n \geq 2$ es par, $\gamma \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $p \geq 1$, $\alpha \in (-1/p, -1/p + \gamma + 1)$, entonces es continua la proyección de Bergman $\mathcal{P}^\gamma : \mathcal{K}_{ppa} \rightarrow \mathcal{H}_{ppa}$ dada por

$$\mathcal{P}^\gamma f(x) = \int_{\mathbb{B}} K^\gamma(x,y) f(y) \epsilon(y)^\gamma dy \quad \text{para } f \in \mathcal{K}_{pp\alpha}, x \in \mathbb{B}.$$

Lema V.8 Si $n \geq 2$ es par, $\gamma \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $p \geq 1$, $\alpha \in (-1/p, -1/p + \gamma + 1)$, entonces existe una constante $C = C(n, \gamma, p, \alpha) > 0$ tal que

$$\|\mathcal{P}^\gamma f\|_{L^p(A_j)} \leq C 2^{(j-i)\alpha} \|f\|_{L^p(A_i)}, \quad j \geq 0$$

siempre que $f : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{C}$ sea una función medible y su soporte esté contenido en A_i para alguna $i \geq 0$.

Demostración Por el corolario V.7, existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|\mathcal{P}^\gamma f\|_{pp\alpha} \leq C \|f\|_{pp\alpha}$$

siempre que la función f sea medible. Si además $\text{sopf} \subset A_i$, esto se traduce para toda $j \geq 0$ en

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^{j\alpha}} \|\mathcal{P}^\gamma f\|_{L^p(A_j)} &= \left(\frac{1}{2^{jp\alpha}} \|\mathcal{P}^\gamma f\|_{L^p(A_j)}^p \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^{mp\alpha}} \|\mathcal{P}^\gamma f\|_{L^p(A_m)}^p \right)^{1/p} \\ &= \|\mathcal{P}^\gamma f\|_{pp\alpha} \\ &\leq C \|f\|_{pp\alpha} \\ &= \frac{C}{2^{j\alpha}} \|f\|_{L^p(A_i)}. \quad \square \end{aligned}$$

Teorema V.9 Si $n \geq 2$ es par, $\gamma \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $p \geq 1$, $\alpha \in (-1/p, -1/p + \gamma + 1)$, entonces $\mathcal{P}^\gamma : \mathcal{K}_{p1\alpha} \rightarrow \mathcal{H}_{p1\alpha}$ es una proyección continua.

Demostración Supóngase que la función f es medible con $\text{sopf} \subset A_i$ para alguna $i \geq 0$. Escójanse dos valores reales v_1, v_2 tales que

$$-\frac{1}{p} < v_2 < \alpha < v_1 < -\frac{1}{p} + \gamma + 1.$$

Para $k = 1, 2$ y para cualquier $m \geq 0$, el lema V.8 establece que

$$\|\mathcal{P}^\gamma f\|_{L^p(A_m)} \leq C 2^{(m-i)v_k} \|f\|_{L^p(A_i)}. \quad (5.6)$$

Primer paso Dada $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 1$ se sabe que

$$\sum_{m=0}^{i-1} a^m = \frac{a^i - 1}{a - 1}$$

y si $a \in (-1, 1)$ entonces

$$\sum_{m=i}^{\infty} a^m = a^i \sum_{m=0}^{\infty} a^m = Ca^i.$$

Como $v_1 - \alpha > 0$, de (5.6) se sigue que

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{i-1} \frac{1}{2^{ma}} \|\mathcal{P}^r f\|_{L^p(A_m)} &\leq C \sum_{m=0}^{i-1} \frac{2^{(m-i)v_1}}{2^{ma}} \|f\|_{L^p(A_i)} \\ &= C 2^{-iv_1} \|f\|_{L^p(A_i)} \sum_{m=0}^{i-1} 2^{m(v_1-\alpha)} \\ &\leq C' 2^{-iv_1} 2^{i(v_1-\alpha)} \|f\|_{L^p(A_i)} \\ &= C' 2^{-i\alpha} \|f\|_{L^p(A_i)}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Mientras que $\alpha - v_2 > 0$ hace que de (5.6) se obtenga

$$\begin{aligned} \sum_{m=i}^{\infty} \frac{1}{2^{ma}} \|\mathcal{P}^r f\|_{L^p(A_m)} &\leq C 2^{-iv_2} \|f\|_{L^p(A_i)} \sum_{m=i}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\alpha-v_2}}\right)^m \\ &= C' 2^{-iv_2} \frac{1}{2^{i(\alpha-v_2)}} \|f\|_{L^p(A_i)} \\ &= C' 2^{-i\alpha} \|f\|_{L^p(A_i)}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Por lo tanto, si $\text{sopf} \subset A_i$ entonces por (5.7) y (5.8) se cumple que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{P}^r f\|_{p1\alpha} &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^{ma}} \|\mathcal{P}^r f\|_{L^p(A_m)} \\ &\leq C \frac{1}{2^{i\alpha}} \|f\|_{L^p(A_i)} \\ &= C \|f\|_{p1\alpha}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Segundo paso Supóngase ahora que el soporte de f es compacto en \mathbb{B} . Entonces para alguna $M \geq 0$ se tiene que

$$f = \sum_{i=0}^M f \chi_{A_i} = \sum_{i=0}^M f_i$$

donde para cada $i \in \{0, 1, \dots, M\}$ se define $f_i = f \chi_{A_i}$ que satisface $\text{sopf}_i \subset A_i$.

Entonces por la linealidad de \mathcal{P}^γ y por (5.9) se obtiene

$$\begin{aligned} \|\mathcal{P}^\gamma f\|_{p1\alpha} &\leq \sum_{i=0}^M \|\mathcal{P}^\gamma f_i\|_{p1\alpha} \\ &\leq C \sum_{i=0}^M 2^{-i\alpha} \|f_i\|_{L^p(A_i)} \\ &= C \|f\|_{p1\alpha}. \end{aligned}$$

De esta manera, el teorema es válido sobre $\mathcal{C}_c(\mathbb{B})$ que es un subconjunto denso de $\mathcal{K}_{p1\alpha}$, luego es cierto en general.

Tercer paso Por el teorema II.3 (iv), el lema IV.3 y la continuidad de \mathcal{P}^γ , se cumple que $\mathcal{P}^\gamma f = f$ siempre que f sea una función H -armónica. Por lo tanto, aquí $\text{Im } \mathcal{P}^\gamma = \mathcal{H}_{p1\alpha}$ y $\mathcal{P}^\gamma \circ \mathcal{P}^\gamma = \mathcal{P}^\gamma$ sobre $\mathcal{H}_{p1\alpha}$. \square

Teorema V.10 Si $n \geq 2$ es par, $\gamma \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $p \geq 1$, $\alpha \in (-1/p, -1/p + \gamma + 1)$, entonces $\mathcal{P}^\gamma : \mathcal{K}_{pba} \rightarrow \mathcal{H}_{pba}$ es una proyección continua para todo valor $b \in [1, \infty)$.

Demostración Esta prueba es análoga a la anterior y sólo se demostrará aquí la continuidad de \mathcal{P}^γ . Para ello, basta considerar una función medible de soporte compacto en \mathbb{B}

$$f = \sum_{i=0}^M f \chi_{A_i} = \sum_{i=0}^M f_i$$

con $\text{sop } f_i \subset A_i$ para cada $i \in \{0, 1, \dots, M\}$. Se eligen nuevamente dos valores reales v_1, v_2 tales que $-1/p < v_2 < \alpha < v_1 < -1/p + \gamma + 1$. Y por primera vez se emplea la observación V.5 (a). Es decir, para acotar el valor de $\|\mathcal{P}^\gamma f\|_{pba}$, se calculará la norma l^b de una determinada sucesión.

Sean las sucesiones $c = (c_i)$, $d = (d_i)$ definidas por

$$c_i = \begin{cases} 2^{-i\alpha} \|f\|_{L^p(A_i)} & \text{si } i \geq 0 \\ 0 & \text{si } i < 0, \end{cases}$$

$$d_i = \begin{cases} 2^{i(v_2 - \alpha)} & \text{si } i > 0 \\ 2^{i(v_1 - \alpha)} & \text{si } i \leq 0 \end{cases}$$

que satisfacen

$$c \in l^b, \|c\|_{l^b} = \|f\|_{pba}; d \in l^1.$$

Por otro lado, considérese la sucesión de valores positivos $e = (e_m)$ dada por

$$e_m = \frac{1}{2^{ma}} \|\mathcal{P}^\gamma f\|_{L^p(A_m)}, \quad m \geq 0,$$

con

$$\|e\|_{l^b} = \|\mathcal{P}^\gamma f\|_{pba}.$$

Dada $m \geq 0$, del lema V.8 se siguen las siguientes estimaciones que involucran solamente sumas finitas:

$$\begin{aligned} e_m &\leq \frac{1}{2^{ma}} \sum_{i=0}^M \|\mathcal{P}^\gamma f_i\|_{L^p(A_m)} \\ &\leq \frac{1}{2^{ma}} \sum_{i=0}^{m-1} \|\mathcal{P}^\gamma f_i\|_{L^p(A_m)} + \frac{1}{2^{ma}} \sum_{i=m}^{\infty} \|\mathcal{P}^\gamma f_i\|_{L^p(A_m)} \\ &\leq C \sum_{i=0}^{m-1} \frac{2^{(m-i)v_2}}{2^{ma}} \|f_i\|_{L^p(A_i)} + C \sum_{i=m}^{\infty} \frac{2^{(m-i)v_1}}{2^{ma}} \|f_i\|_{L^p(A_i)}. \end{aligned}$$

Pero para $k = 1, 2$ se cumple que

$$(m-i)v_k - ma = -ia + (m-i)(v_k - \alpha),$$

luego

$$\begin{aligned} e_m &\leq C \sum_{i=0}^{m-1} 2^{-ia} \|f\|_{L^p(A_i)} 2^{(m-i)(v_1-\alpha)} + C \sum_{i=m}^{\infty} 2^{-ia} \|f\|_{L^p(A_i)} 2^{(m-i)(v_2-\alpha)} \\ &= C(c * d)_m \end{aligned}$$

Por la desigualdad de Minkowski para integrales, se concluye así que

$$\|\mathcal{P}^\gamma f\|_{pba} = \|e\|_{l^b} \leq C \|c * d\|_{l^b} \leq C \|c\|_{l^b} \|d\|_{l^1} = C' \|f\|_{pba}. \quad \square$$

V.3 Dualidad en espacios de Herz

El propósito de esta sección es determinar el espacio dual que corresponde al espacio de Herz $\mathcal{H}_{pp_1\alpha}$ a través de la relación de dualidad (5.1).

Para comenzar, se establecen enseguida dos hechos simples.

Lema V.11 Si $n \geq 2$; $\gamma \in \mathbb{N} \cup \{0\}$; $q, q_1 \in [1, \infty)$; $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces

$$2^{-\gamma} \|f\|_{q, q_1, \gamma - \alpha} \leq \|(1-r)^\gamma f\|_{q, q_1, -\alpha} \leq \|f\|_{q, q_1, \gamma - \alpha}. \quad (5.10)$$

Por lo tanto, $f \in \mathcal{K}_{q, q_1, \gamma - \alpha}$ si y sólo si $(1-r)^\gamma f \in \mathcal{K}_{q, q_1, -\alpha}$.

Demostración Debido a que $\gamma \geq 0$ y $q_1 > 1$, por (5.4) se cumple que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^{q_1 \gamma}} \|f\|_{q, q_1, \gamma - \alpha}^{q_1} &= \frac{1}{2^{q_1 \gamma}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^{mq_1(\gamma - \alpha)}} \|f\|_{L^q(A_m)}^{q_1} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^{mq_1 \alpha}}{2^{(m+1)q_1 \gamma}} \|f\|_{L^q(A_m)}^{q_1} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} 2^{mq_1 \alpha} \left\| \frac{1}{2^{(m+1)\gamma}} f \right\|_{L^q(A_m)}^{q_1} \\ &\leq \sum_{m=0}^{\infty} 2^{mq_1 \alpha} \|(1-r)^\gamma f\|_{L^q(A_m)}^{q_1} \\ &= \|(1-r)^\gamma f\|_{q, q_1, -\alpha}^{q_1} \\ &\leq \sum_{m=0}^{\infty} 2^{mq_1 \alpha} \left\| \frac{1}{2^{m\gamma}} f \right\|_{L^q(A_m)}^{q_1} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^{mq_1(\gamma - \alpha)}} \|f\|_{L^q(A_m)}^{q_1} \\ &= \|f\|_{q, q_1, \gamma - \alpha}^{q_1}. \quad \square \end{aligned}$$

Proposición V.12 Considérense los valores $n \geq 2$; $\gamma > -1$; $p, p_1 \in (1, \infty)$; $\alpha \in \mathbb{R}$. Sean $q, q_1 \in (1, \infty)$ los exponentes conjugados respectivos de p, p_1 dados por $1/p + 1/q = 1 = 1/p_1 + 1/q_1$. Entonces cada función en $\mathcal{K}_{q, q_1, \gamma - \alpha}$ representa una funcional lineal sobre $\mathcal{K}_{pp_1 \alpha}$ bajo la relación de dualidad (5.1). En este sentido, $(\mathcal{K}_{pp_1 \alpha})^* \supset \mathcal{K}_{q, q_1, \gamma - \alpha}$ y además $(\mathcal{H}_{pp_1 \alpha})^* \supset \mathcal{H}_{q, q_1, \gamma - \alpha}$.

Demostración Dada $f \in \mathcal{K}_{q,q_1,\gamma-\alpha}$, considérese la funcional lineal $\Phi_f : \mathcal{K}_{pp_1\alpha} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$\Phi_f(g) = \langle f, g \rangle_\gamma, \quad g \in \mathcal{K}_{pp_1\alpha}.$$

Entonces por la desigualdad de Hölder aplicada tanto a integrales como a series y por (5.10), para toda función escalar g que sea medible sobre \mathbb{B} se tiene que

$$\begin{aligned} |\Phi_f(g)| &= \left| \int_{\mathbb{B}} f(x)g(x)(1-r)^\gamma dx \right| \\ &\leq \sum_{m=0}^{\infty} \int_{A_m} |f(x)(1-r)^\gamma| |g(x)| dx \\ &\leq \sum_{m=0}^{\infty} 2^{m\alpha} \|f(x)(1-r)^\gamma\|_{L^q(A_m)} 2^{-m\alpha} \|g\|_{L^{p_1}(A_m)} \\ &\leq \left(\sum_{m=0}^{\infty} 2^{mq_1\alpha} \|f(x)(1-r)^\gamma\|_{L^q(A_m)}^{q_1} \right)^{1/q_1} \left(\sum_{m=0}^{\infty} 2^{-mp_1\alpha} \|g\|_{L^{p_1}(A_m)}^{p_1} \right)^{1/p_1} \\ &= \|f(x)(1-r)^\gamma\|_{q,q_1,-\alpha} \|g\|_{pp_1\alpha} \\ &\leq \|f\|_{q,q_1,\gamma-\alpha} \|g\|_{pp_1\alpha}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\Phi_f \in (\mathcal{K}_{pp_1\alpha})^*$ con $\|\Phi_f\| \leq \|f\|_{q,q_1,\gamma-\alpha} < \infty$. Si además las funciones f, g son H -armónicas, la desigualdad $|\Phi_f(g)| \leq \|f\|_{q,q_1,\gamma-\alpha} \|g\|_{pp_1\alpha}$ no cambia y por lo tanto $(\mathcal{H}_{pp_1\alpha})^* \supset \mathcal{H}_{q,q_1,\gamma-\alpha}$. \square

Teorema V.13 [HY] *Considérense los valores $n \geq 2$ par; $\gamma > -1$; $p, p_1 \in (1, \infty)$; $\alpha \in \mathbb{R}$. Sean $q, q_1 \in (1, \infty)$ los exponentes conjugados respectivos de p, p_1 dados por $1/p + 1/q = 1 = 1/p_1 + 1/q_1$. Entonces $(\mathcal{K}_{pp_1\alpha})^* \subset \mathcal{K}_{q,q_1,-\alpha}$ por la relación de dualidad que da la integración sin peso*

$$\langle f, g \rangle_0 = \int_{\mathbb{B}} f(x)g(x)dx \quad (5.11)$$

Equivalentemente, para la dualidad que define (5.1) se tiene que $(\mathcal{K}_{pp_1\alpha})^* \subset \mathcal{K}_{q,q_1,\gamma-\alpha}$.

Demostración (E. Hernández y D. Yang en [HY] presentan esta prueba en un marco

ligeramente más abstracto.) *Primera parte* A lo largo de esta prueba se empleará la siguiente notación.

Sea $g \in \mathcal{K}_{pp_1\alpha}$. Dada $m \geq 0$, considérese la restricción de g dada por $\tilde{g}_m : A_m \rightarrow \mathbb{C}$ con

$$\tilde{g}_m = g|_{A_m}.$$

Véase que

$$\|g \chi_{A_m}\|_{pp_1\alpha} = 2^{-m\alpha} \|\tilde{g}_m\|_{L^p(A_m)},$$

de manera que si $g \in \mathcal{K}_{pp_1\alpha}$ entonces $\tilde{g}_m \in L^p(A_m)$.

Por otro lado, dada cualquier función $\tilde{h}_m : A_m \rightarrow \mathbb{C}$, interesa la extensión correspondiente $h_m : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$h_m(x) = \begin{cases} \tilde{h}_m(x) & \text{si } x \in A_m \\ 0 & \text{si } x \notin A_m. \end{cases} \quad (5.12)$$

En este caso, si $\tilde{h}_m \in L^p(A_m)$ entonces $h_m \in \mathcal{K}_{pp_1\alpha}$ porque

$$\|h_m\|_{pp_1\alpha} = 2^{-m\alpha} \|\tilde{h}_m\|_{L^p(A_m)}.$$

Segunda parte Sea $\Phi \in (\mathcal{K}_{pp_1\alpha})^*$ de norma $\|\Phi\| = \|\Phi\|_{(\mathcal{K}_{pp_1\alpha})^*} < \infty$. Sea $m \geq 0$.

Asociada a Φ , defínase la funcional lineal $\Phi_m : L^p(A_m) \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\Phi_m(\tilde{h}_m) = \Phi(h_m)$$

para toda $\tilde{h}_m \in L^p(A_m)$, donde $h_m \in \mathcal{K}_{pp_1\alpha}$ es la extensión de \tilde{h}_m dada por (5.12), con

$$|\Phi_m(\tilde{h}_m)| = |\Phi(h_m)| \leq \|\Phi\| \|h_m\|_{pp_1\alpha} = 2^{-m\alpha} \|\Phi\| \|\tilde{h}_m\|_{L^p(A_m)}.$$

Por lo tanto, $\Phi_m \in (L^p(A_m))^*$ satisface

$$\|\Phi_m\| = \|\Phi_m\|_{(L^p(A_m))^*} \leq 2^{-m\alpha} \|\Phi\| < \infty.$$

Entonces existe $\tilde{f}_m \in L^q(A_m)$ que representa a Φ_m a través de la relación (5.11), esto es

$$\Phi_m(\tilde{h}_m) = \int_{A_m} \tilde{f}_m(x) \tilde{h}_m(x) dx, \quad \tilde{h}_m \in L^p(A_m) \quad (5.13)$$

con

$$\|\Phi_m\| = \|\tilde{f}_m\|_{L^q(A_m)}. \quad (5.14)$$

Denótese por f_m a la extensión de \tilde{f}_m que da (5.12).

Se obtiene así la función $f : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$f = \sum_{m=0}^{\infty} f_m. \quad (5.15)$$

que está bien definida y que deberá representar a Φ en $\mathcal{K}_{q,q_1,-\alpha}$ por la dualidad (5.11).

Tercera parte Se muestra aquí que $\|f\|_{q,q_1,-\alpha} \leq \|\Phi\|$.

Sea $\epsilon > 0$. Sea $m \geq 0$. Por (5.14), existe $\bar{h}_m \in L^p(A_m)$ tal que $\int_{A_m} \tilde{f}_m(x) \bar{h}_m(x) dx$ es un valor real que satisface

$$\|\bar{h}_m\|_{L^p(A_m)} = 1,$$

$$\|\tilde{f}_m\|_{L^q(A_m)} - \epsilon 2^{-m(q_1\alpha+1)} \|\tilde{f}_m\|_{L^q(A_m)}^{1-q_1} \leq \int_{A_m} \tilde{f}_m(x) \bar{h}_m(x) dx. \quad (5.16)$$

Sobre \mathbb{B} , defínase la función

$$\tilde{h}_m = 2^{mq_1\alpha} \|\tilde{f}_m\|_{L^q(A_m)}^{q_1-1} \bar{h}_m \in L^p(A_m) \quad (5.17)$$

donde

$$\|\tilde{h}_m\|_{L^p(A_m)} = 2^{mq_1\alpha} \|\tilde{f}_m\|_{L^q(A_m)}^{q_1-1}.$$

Como $1/p_1 + 1/q_1 = 1$ implica que $p_1 q_1 = p_1 + q_1$ y $q_1 = p_1(q_1 - 1)$, se tiene que

$$\|\tilde{h}_m\|_{L^p(A_m)}^{p_1} = 2^{mp_1 q_1 \alpha} \|\tilde{f}_m\|_{L^q(A_m)}^{p_1(q_1-1)} = 2^{m(p_1+q_1)\alpha} \|\tilde{f}_m\|_{L^q(A_m)}^{q_1},$$

luego

$$2^{-mp_1\alpha} \|\tilde{h}_m\|_{L^p(A_m)}^{p_1} = 2^{mq_1\alpha} \|\tilde{f}_m\|_{L^q(A_m)}^{q_1}. \quad (5.18)$$

Asimismo, por (5.17) la desigualdad (5.16) se vuelve

$$2^{mq_1\alpha} \|\tilde{f}_m\|_{L^q(A_m)}^{q_1} - \epsilon 2^{-m} \leq \int_{A_m} \tilde{f}_m(x) \tilde{h}_m(x) dx. \quad (5.19)$$

Debido a las propiedades (5.13), (5.15), (5.18) y (5.19), para cualquier $h \in C_c(\mathbb{B})$ existe $N \geq 0$ tal que

$$\|f\|_{q,q_1,-\alpha}^{q_1} = \sum_{m=0}^N 2^{mq_1\alpha} \|\tilde{f}_m\|_{L^q(A_m)}^{q_1}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \sum_{m=0}^N \left[\int_{A_m} \tilde{f}_m(x) \tilde{h}_m(x) dx + \epsilon 2^{-m} \right] \\
 &\leq \Phi(h) + 2\epsilon \\
 &\leq \|\Phi\| \|h\|_{pp_1\alpha} + 2\epsilon \\
 &= \|\Phi\| \left(\sum_{m=0}^N 2^{-mp_1\alpha} \|\tilde{h}_m\|_{L^{p_1}(A_m)}^{p_1} \right)^{1/p_1} + 2\epsilon \\
 &= \|\Phi\| \left[\left(\sum_{m=0}^N 2^{mq_1\alpha} \|\tilde{f}_m\|_{L^{q_1}(A_m)}^{q_1} \right)^{1/q_1} \right]^{q_1/p_1} + 2\epsilon \\
 &= \|\Phi\| \|f\|_{q,q_1,-\alpha}^{q_1/p_1} + 2\epsilon
 \end{aligned}$$

Como el valor de $\epsilon > 0$ es arbitrario, se sigue que

$$\|f\|_{q,q_1,-\alpha}^{q_1} \leq \|\Phi\| \|f\|_{q,q_1,-\alpha}^{q_1/p_1}$$

luego

$$\|f\|_{q,q_1,-\alpha}^{q_1(1-1/p_1)} = \|f\|_{q,q_1,-\alpha} \leq \|\Phi\| < \infty.$$

Como esto es cierto para $C_c(\mathbb{B})$ subconjunto denso de $\mathcal{K}_{pp_1\alpha}$, es cierto sobre este último espacio.

Cuarta parte Finalmente, para Φ y f considérese la función $f_\Phi : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$f_\Phi(x) = (1-r)^{-\gamma} f(x), \quad x \in \mathbb{B}.$$

Por el lema V.11, $f_\Phi \in \mathcal{K}_{q,q_1,\gamma-\alpha}$. Entonces para toda $g \in \mathcal{K}_{pp_1\alpha}$ es fácil ver que

$$\Phi(g) = \int_{\mathbb{B}} (1-r)^{-\gamma} f(x) g(x) (1-r)^\gamma dx = \langle f_\Phi, g \rangle_\gamma, \quad g \in \mathcal{K}_{pp_1\alpha}.$$

Por lo tanto, $f_\Phi \in \mathcal{K}_{q,q_1,\gamma-\alpha}$ representa a $\Phi \in (\mathcal{K}_{pp_1\alpha})^*$ para la dualidad (5.1). \square

La demostración del siguiente hecho se omite aquí. En efecto, la inclusión

$(\mathcal{H}_{pp_1\alpha})^* \subset \mathcal{H}_{q,q_1,\gamma-\alpha}$ se deduce de los teoremas V.10 y V.13 con el mismo razonamiento que se empleó para probar el teorema V.2. Se obtiene así el último resultado de esta tesis.

Corolario V.14 *Considérense los valores $n \geq 2$ par; $\gamma \in \mathbb{N} \cup \{0\}$; $p, p_1 \in (1, \infty)$; $\alpha \in (-1/p, -1/p + \gamma + 1)$. Sean $q, q_1 \in (1, \infty)$ los exponentes conjugados respectivos de p, p_1 dados por $1/p + 1/q = 1 = 1/p_1 + 1/q_1$. Entonces $(\mathcal{H}_{pp_1\alpha})^* \simeq \mathcal{H}_{q,q_1,\gamma-\alpha}$ por la dualidad (5.1) y las normas de estos espacios son equivalentes.*

Bibliografía

- ABC** AHERN, P.; BRUNA, J. & CASCANTE, C., H^p theory for generalized M -harmonic functions in the unit ball, *Indiana Univ. Math. J.* **45** (1996), no. 1, 103-135.
- AFP** ÁLVAREZ, J.; FOLCH-GABAYET, M. & PÉREZ-ESTEVA, S., Banach spaces of solutions of the Helmholtz equation in the plane, *J. Fourier Anal. Appl.* **7** (2001) no.1, 49-62.
- Ar** ARONSZAJN, N., Theory of reproducing kernels, *Trans. Amer. Math. Soc.* **68** (1950), 337-404.
- Ax** AXLER, S.; BOURDON, P. & RAMEY, W., *Harmonic Function Theory*, Springer-Verlag, 1992.
- BC** BONAMI, A., & CLERC, J.L., Sommes de Cesàro et multiplicateurs des développements en harmoniques sphériques, (*French*) *Trans. Amer. Math. Soc.* **183** (1973), 223-263.
- BP1** BLASCO, O. & PÉREZ-ESTEVA, S., L^p continuity of projectors of weighted harmonic Bergman spaces, *Collect. Math.* **51**, (2000), no.1, 49-58.
- BP2** BLASCO, O. & PÉREZ-ESTEVA, S., The Bergman projection on weighted spaces: L^1 and Herz spaces, *Studia Math.* **150** (2002), no. 2, 151-162.
- Ca** do CARMO, M., *Riemannian Geometry*, Birkhäuser, 1993.
- CI** CLERC, J.L.; EYMARD, P.; FARAUT, J.; RAIS, M. & TAKAHASHI, R., *Analyse harmonique*, CIMPA, 1982.
- CR** COIFMAN, R. & ROCHBERG, R., Representation theorems for holomorphic and harmonic functions in L^p , *Astérisque* **77** (1980), 11-66.
- DS** DJRBASHIAN, A.E. & SHAMOIAN, F.A., *Topics in the Theory of A^p_α Spaces*, Teubner-Texte zur Mathematik [Teubner texts in Mathematics], 105, Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1988.

- Er** ERDÉLYI, A. et al., editors, *Higher Transcendental Functions*, Vol. I, MacGraw-Hill, 1953.
- Gr** GRADSHTEYN, I., & RYZHIK, I., *Table of Integrals, Series and Products*, Academic Press, 1980.
- Ha** HAYMAN, W., *Subharmonic Functions*, London Mathematical Society Monographs, **20**, 1997.
- HKZ** HEDENMALM, H.; KORENBLUM, B. & ZHU, K., *Theory of Bergman Spaces*, Graduate Texts in Mathematics Vol. 199, Springer Verlag, 2000.
- He** HELMS, L., *Introduction to Potential Theory*, Pure and Applied Mathematics, Vol. XXII, John Wiley & Sons, 1969.
- HY** HERNÁNDEZ, E. & YANG, D., Interpolation of Herz spaces and applications, *Math. Nachr.* **205** (1999), 69–87.
- J1** GRELLIER, S. & JAMING, P., Harmonic functions on the real hyperbolic ball. II. Hardy-Sobolev and Lipschitz spaces, *Math. Nachr.* **268** (2004), 50-73.
- J2** JAMING, P., Harmonic functions on the real hyperbolic ball. I. Boundary values and atomic decomposition of Hardy spaces, *Colloq. Math.* **80** (1999), no.1, 63-82.
- J3** JAMING, P., Trois problèmes d'analyse harmonique, *Thèse de doctorat*, Université d'Orléans, 1998.
- JP** JEVTIC, M. & PAVLOVIC, M., Series expansion and reproducing kernels for hyperharmonic functions, *J. Math. An. Appl.* **264** (2001), no. 2, 673-681.
- Lo** LÓPEZ-GARCÍA, M., Bergman spaces of temperature functions on a cylinder, *Publicaciones preliminares* **718**, Instituto de Matemáticas, UNAM, 2002.
- Pe** PÉREZ-ESTEVA, S., Duality on vector-valued weighted harmonic Bergman spaces, *Studia Mathematica* **118** (1), 1996, 37-47.
- Ra** RATCLIFFE, J., *Foundations of Hyperbolic Manifolds*, Springer-Verlag, 1994.
- S** SAITOH, S., *Theory of Reproducing Kernels and its Applications*, Pitman Research Notes in Mathematics Series, 189, Longman Scientific & Technical, Harlow, 1988.

- Sa** SAMII, H., Les transformations de Poisson dans la boule hyperbolique, *Thèse de doctorat*, Université Nancy 1, 1982.
- S1** SOUZA, P., Bergman spaces of harmonic functions on the hyperbolic n -ball, *Publicaciones preliminares 742*, Instituto de Matemáticas, UNAM, 2002.
- S2** SOUZA, P., Introducción al análisis armónico en el espacio hiperbólico, *Notas*, 2000.
- S3** SOUZA, P., Acción del grupo de transformaciones especiales positivas de Lorentz sobre la bola unitaria, *Notas*, 2000.
- S4** SOUZA, P., Los espacios métricos de Barbilian y el plano hiperbólico, *Miscelánea Matemática 29* (1999), 25-42.
- St** STEIN, E., *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton University Press, 1970.
- Ta** TAKAHASHI, R., Sur les représentations unitaires des groupes de Lorentz généralisés, *Bull. Soc. Math. France*, **91** (1963), 289-433.
- Zh** ZHU, K., *Operator Theory in Function Spaces*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 139, Marcel Dekker, New York, 1990.