



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS
PROFESIONALES ARAGON
INGENIERIA MECANICA ELECTRICA

LA TRANSFORMADA WALSH Y SUS APLICACIONES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
INGENIERO MECANICO ELECTRICISTA
(AREA ELECTRICA - ELECTRONICA)

P R E S E N T A:

MAURICIO GERMAN LOPEZ ALVAREZ

ASESOR DE TESIS

ING. RAUL R. BRIBIESCA CORREA



ENEP
ARAGON

Aragón, Estado de México Septiembre de 2004



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES
ARAGÓN
DIRECCIÓN

MAURICIO GERMAN LOPEZ ALVAREZ
Presente

Con fundamento en el punto 6 y siguientes, del Reglamento para Exámenes Profesionales en esta Escuela, y toda vez que la documentación presentada por usted reúne los requisitos que establece el precitado Reglamento; me permito comunicarle que ha sido aprobado su tema de tesis y asesor.

TÍTULO:

"LA TRANSFORMADA WALSH Y SUS APLICACIONES"

ASESOR: Ing. RAÚL R. BRIBIESCA CORREA

Aprovecho la ocasión para reiterarle mi distinguida consideración.

Atentamente
"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"
San Juan de Aragón, México, 23 de marzo de 2004.
LA DIRECTORA

ARQ. LILIA TURCOTT GONZÁLEZ



C p Secretaría Académica
C p Jefatura de Carrera de Ingeniería Mecánica Eléctrica
C p Asesor de Tesis

LTG/AIR/csm

SEGUIMIENTO DE REGISTRO DE TESIS

FECHA	CVE.	DESCRIPCIÓN DEL TRÁMITE	AUTORIZACIÓN Y SELLO
17/08/2004	IMP.	"LA TRANSFORMADA WALSH Y SUS APLICACIONES"	 <p>Lic. ALBERTO IBARRA ROSAS SECRETARIO ACADÉMICO</p>
			Lic. ALBERTO IBARRA ROSAS SECRETARIO ACADÉMICO
			Lic. ALBERTO IBARRA ROSAS SECRETARIO ACADÉMICO
			Lic. ALBERTO IBARRA ROSAS SECRETARIO ACADÉMICO
			Lic. ALBERTO IBARRA ROSAS SECRETARIO ACADÉMICO
			Lic. ALBERTO IBARRA ROSAS SECRETARIO ACADÉMICO

TRÁMITE	CLAVE
PRÓRROGA	PR.
CAM. TÍTULO	C. T.
CAM. ASESOR	C. A.
CAM. SEM.	C. S.
VIGENCIA	VIG.
IMPRESIÓN	IMP.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS
PROFESIONALES ARAGÓN - UNAM

JEFATURA DE CARRERA DE
INGENIERÍA MECÁNICA ELÉCTRICA

OFICIO: ENAR/JAME/0564/2004.

ASUNTO: Síno

LIC. ALBERTO IBARRA ROSAS
SECRETARIO ACADÉMICO
PRESENTE

Por este conducto me permito relacionar los nombres de los Profesores que sugiero integren el Síno del Examen Profesional del alumno: MAURICIO GERMÁN LÓPEZ ÁLVAREZ, con Número de Cuenta: 09950302-0, con el tema de tesis: "LA TRANSFORMADA WALSH Y SUS APLICACIONES".

PRESIDENTE:	ING. RAÚL R. BRIBIESCA CORREA	OCTUBRE	78
VOCAL:	ING. BENITO ZÚÑIGA VILLEGAS	OCTUBRE	81
SECRETARIO:	ING. JOSÉ LUIS GARCÍA ESPINOSA	AGOSTO	98
SUPLENTE:	ING. FERNANDO MACEDO CHAGOLLA	MAYO	01
SUPLENTE:	ING. JULIO CESAR MARTÍNEZ CRUZ	JULIO	01

Quiero subrayar que el Director de Tesis es el Ing. Raúl R. Bribiesca Correa, quien está incluido basándose en lo que reza el Reglamento de Exámenes Profesionales de ésta Escuela.

Atentamente

"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"

Bosques de Aragón, Estado de México - 18 de agosto de 2004.

EL JEFE DE CARRERA

M. en I. ULISES MERCADO VALENZUELA



C.c.p. - Lic. Ma. Teresa Luna Sánchez.- Jefa del Depto. de Servicios Escolares.

C.c.p. - Ing. Raúl R. Bribiesca Correa.- Asesor de Tesis.

C.c.p. - Alumno.

RBVamce.

**LA TRANSFORMADA
WALSH
Y SUS
APLICACIONES**

LA TRANSFORMADA WALSH Y SUS APLICACIONES	Pag.
Índice	2
Objetivo	6
Introducción	7
Capítulo 1: Generación y propiedades de las Funciones Walsh	10
1.1 Las funciones Walsh	11
1.2 Propiedades de las funciones Walsh	11
1.2.1 Propiedad de ortogonalidad	11
1.2.2 Base de tiempo	15
1.2.3 Notación de Harmuth	16
1.2.4 Propiedad de simetría	16
1.2.5 Secuencia	17
1.2.6 Propiedades para la multiplicación de funciones Walsh	18
1.3 Analogía entre las series de Fourier y las series Walsh	18
1.4 Ordenamiento de las funciones	20
1.4.1 Orden secuencial	20
1.4.2 Orden natural - Paley	20
1.4.3 Ordenamiento Hadamard	22
1.4.4 Relaciones entre ordenamientos Secuencial , Paley y Hadamard.	23
1.4.5 Ordenamiento del conjunto de funciones Walsh respecto a la fase	25
1.5 Obtención de las funciones Walsh de forma analítica	25
1.5.1 Método de la ecuación de diferencia (Obtención de las series WAL)	25
1.5.2 Método a partir de las funciones Rademacher (Obtención de las series PAL y WAL)	28
1.5.3 Método a partir de las matrices Hadamard (Obtención de las series WAL _H y PAL)	31
1.5.4 Método a partir de la síntesis Booleana (Obtención de series WAL)	33
1.6. Muestreo digital de las funciones Walsh	36

Capítulo 2: La Transformada Walsh	37
2.1. El significado de transformar un código	38
2.2 La Transformada Discreta Walsh (WDT)	39
2.2.1 Definición	39
2.2.2 Representación de la transformada de forma Matricial	43
2.2.3 Transformada Walsh-Paley	45
2.2.4 Efecto del corrimiento circular	46
2.3 Comparación entre la transformadas discreta Walsh y discreta de Fourier.	46
2.4 Transformada Rápida Walsh	53
2.4.1 Algoritmo general de la transformada rápida Walsh	53
2.4.2 Diagramas de flujos de señales	55
2.4.3 Obtención del algoritmo FWT para $N = 16$	55
2.4.4 Algoritmos en orden	62
2.5. Transformada Walsh Bidimensional	64
2.6 Transformada Walsh – Hadamard (WHT)	66
2.7. Transformada rápida Walsh-Hadamard FWHT	67
Capítulo 3: Descomposición espectral y filtrado en términos de secuencia	71
3.1 Características de la descomposición espectral Walsh	72
3.2 Comparaciones entre el espectro Walsh y el espectro de Fourier	75
3.3 Espectro Walsh via evaluación directa (Método del periodo equivalente)	79
3.4 Espectro Walsh via la autocorrelación Diádica (Método Indirecto)	82
3.4.1 Correlación y convolución Walsh	83
3.4.2 Escala de tiempo diádica	85
3.4.3 El espectro secuencial via autocorrelación	86
3.5 Análisis espectral de señales estacionarias	88
3.6 Filtrado de señales en secuencia	91
3.6.1 Filtrado con un vector basado en secuencia.	92
3.6.2 Filtrado con valor de umbral	98
3.6.3 Filtrado escalar basado en frecuencia.	101
3.6.4 Filtrado en dos dimensiones	103
3.7 Filtrado de una señal no estacionaria	105

Capítulo 4: Aplicaciones de las funciones Walsh en el multiplexado de señales	109
4.1. Los Esquemas de Acceso múltiples	110
4.1.1 Acceso Múltiple por División de Frecuencia (FDMA)	111
4.1.2 Acceso Múltiple por División de tiempo (TDMA)	111
4.1.3 Acceso Múltiple por División de código (CDMA)	112
4.2 Modelo teórico de multiplexado Walsh	113
4.2.1 Sistema de multiplexado Walsh	115
4.2.2 Sistema de multiplexado por mayoría lógica	116
4.3 Técnicas de modulación de espectro expandido (STREAR SPECTRUM)	118
4.3.1 Definición de modulación de espectro expandido	119
4.3.2 Espectro expandido por secuencia directa.	121
4.3.3 Códigos ortogonales en SS-DS	123
4.3.3.1 Códigos Walsh	123
4.3.3.2 Códigos PN (Seudo ruido)	123
4.3.4 Transmisión y recepción en CDMA utilizando un código ortogonal	124
4.4 Estándar para telefonía celular digital con CDMA (IS95)	126
4.5 Desarrollo de una llamada telefónica utilizando CDMA	130
4.6 Ventajas y desventajas de CDMA	132
Capítulo 5: Aplicaciones de la transformada Walsh en el tratamiento digital de imágenes	133
5.1 Procesamiento de señales multidimensionales	134
5.2 Características de las imágenes digitales	137
5.2.1 Píxeles.	138
5.2.2. Frecuencia de muestreo.	139
5.2.3. Profundidad de bits.	140
5.2.4. Archivos de imágenes.	142
5.2.5. Compresión de imágenes.	143
5.2.6. Imágenes en color.	144
5.3 Transformadas de imágenes digitales	146
5.3.1 Transformada Discreta de Fourier (FDT)	150

5.3.2 Transformada Discreta del Coseno (DCT)	151
5.3.2 Transformada Walsh (WDT)	154
5.3.3 Transformada Walsh – Hadamard (WHT)	157
5.4 Implementación de un codificador de imágenes basado en la transformada Walsh	159
5.4.1 Cálculo de la transformada rápida Walsh	161
5.4.2 Cuantificación.	162
a) Matriz de cargas	162
b) Factores de cuantificación por punto y uniformes	163
5.4.3) Codificación	165
a) Barrido en zigzag	165
b) Modelo de codificación -Run Level-	166
c) Reducción de los Coeficientes DC	168
d) Codificación entropía de Huffman (VLC)	169
5.4.4. Reconstrucción de la imagen	170
5.5 Ejemplos de codificación de una imagen basado en la transformada Walsh	170
5.5.1 Compresión de un bloque de baja actividad	171
a) Reducción de los valores decimales	172
b) Optimización de los coeficientes de entrada	174
c) Aplicando una matriz de cuantificación	178
5.5.2 Compresión de un bloque de alta actividad	184
Conclusiones	190
Bibliografía	196

Objetivo.-

Este trabajo de tesis tiene como objetivo mostrar las propiedades y características de la transformada discreta Walsh, sus ventajas y deficiencias en comparación al análisis de Fourier y aplicaciones de esta en el procesamiento y acondicionamiento digital de señales.

Introducción.-

Las funciones Walsh constituyen un conjunto de funciones ortogonales y simétricas en forma de pulsos rectangulares que tienen propiedades análogas a las funciones seno y cosenoidales, por medio de estas funciones podemos efectuar la representación de cualquier señal definida en el tiempo superponiendo miembros de este conjunto de funciones ortogonales que son fáciles de generar y definir y con características muy útiles que pueden tener diferentes aplicaciones.

Estas funciones Walsh constituyen la base de transformada discreta Walsh (DWT) la cual permite procesar un conjunto de coeficientes discretos para transportarlos del dominio real al dominio Walsh, que es un dominio basado en la secuencia, parámetro análogo a la frecuencia.

En este dominio se pueden hacer diferentes procedimientos de análisis de la señal procesada, es decir se puede estudiar y analizar diferentes características de la señal de entrada muestreada, mismas que no podrían ser analizadas o detectadas si se las estudiara en el dominio real, como por ejemplo tener un análisis de su espectro y poder saber en que secuencias o en que parte de esta señal se encuentra contenida la mayor energía o contiene la información mas importante para su estudio.

Además estando en este dominio de la secuencia se puede realizar el filtrado de señales no deseadas como lo puede ser el ruido inherente a las transmisiones de las señales y así obtener la señal original reconstruida y limpia.

Posteriormente que se ha trabajado en el dominio de la secuencia y se han analizado diferentes características de la señal, que se ha filtrado el ruido no deseado, e incluso se ha realizado la discriminación de los coeficientes menos importantes (compresión), se puede, de ser necesario hacer la operación de transformación inversa, es decir se pasar del dominio de la secuencia al dominio real y se recupera la señal original, o la señal limpia de ruido o descomprimida.

Esto es en resumidas cuentas el fin que se persigue con describir y analizar una transformada unitaria como lo es la transformada discreta Walsh, que puede ser una alternativa en cuestión de procesamiento digital de señales, ya que la transformada Walsh presenta propiedades similares a la transformada discreta de Fourier y tiene por supuesto ventajas y desventajas que iremos analizando en diferentes temas a los largo del capitulado.

Este trabajo de tesis pretende establecer las herramientas matemáticas necesarias para poder implementar diferentes sistemas de procesamiento digital de señales,

basados en la transformada Walsh, que tengan como objetivo el análisis de espectros de señales de ciertas características, implementación de algoritmos rápidos de transformación, análisis de transitorios, filtrado de señales digitales, compresión de señales, implementación de sistemas de multiplexado, etc. que podrán ser desarrollados utilizando programas de computo numérico, circuitos digitales y algoritmos en microcontroladores, en proyectos que busquen ofrecer nuevas soluciones en la ingeniería de control y de comunicaciones.

El contenido de este trabajo de tesis se puede resumir de la siguiente manera: El capítulo primero hace la definición, exponiendo las propiedades y características de las funciones Walsh, y presenta métodos para generarlas, ya que una parte importante que se consideró en este trabajo era poder mostrar de donde provienen los diferentes códigos ortogonales, simétricos y ordenados, y con una secuencia característica.

El capítulo segundo presenta y define la Transformada Discreta Walsh y hace una comparación de sus propiedades con la Transformada Discreta de Fourier, además define y explica el algoritmo para poder realizar la Transformada Rápida Walsh, que permite obtener la transformada discreta utilizando menos operaciones y recursos y proporcionando el mismo resultado.

El capítulo tercero presenta el análisis espectral en el dominio de la secuencia Walsh, evaluándolo y comparándolo con el análisis de Fourier, además explica las técnicas de filtrado de una señal en el dominio de la secuencia

El capítulo cuarto muestra las aplicaciones de las funciones Walsh en las comunicaciones digitales, específicamente en el multiplexado de señales, del cual se presenta un modelo teórico de multiplexado, aprovechando la ortogonalidad de las funciones Walsh, como complemento, se presenta el uso de los códigos ortogonales en las transmisiones inalámbricas de telefonía actual y como es que la modulación por división de código, se basa en el uso de los mismos.

El quinto y último capítulo presenta las aplicaciones de la transformada Walsh en el procesamiento y tratamiento digital de imágenes, realizando primeramente una descripción de las características de las imágenes digitales, los requisitos que deben de cumplir las transformadas unitarias en este tipo de procesamiento, para finalmente mostrar un modelo de compresión basado en la transformada Walsh, con ejemplos ilustrativos de diferentes bloques de píxeles.

Las funciones Walsh y la Transformada Discreta Walsh, tiene muchas aplicaciones, que estudiantes y profesores de Electrónica y Telecomunicaciones los pueden

implementar y analizar, ya sea como un elemento didáctico para explicar el por que con una transformada se busca cambiar de dominio, o por que se debe realizar la compresión de una señal a transmitir y por que debemos economizar el canal de transmisión, entre otras, y por otro lado fomentar el diseño de sistemas de compresión reales utilizando programas numéricos, o sistemas que puedan procesar señales y obtener sus espectros en zonas remotas utilizando pequeños microcontroladores, mismos que basándose en los resultados espectrales podrán tomar un decisión dentro de un proceso de control. Es un deseo personal que esta tesis motive el estudio y puesta en marcha de estos sistemas y que constituya una herramienta que facilite el desarrollo de estos.

Capitulo 1

Generación y propiedades de las Funciones Walsh

Capítulo 1

Generación y propiedades de las Funciones Walsh

1.1 Las funciones Walsh.-

Las funciones Walsh conforman conjuntos ordenados de pulsos rectangulares que toman únicamente dos valores en su amplitud +1 y -1, tienen la característica de ser ortogonales y simétricos respecto a su punto medio.

Así como las funciones sinusoidales, requerimos de dos argumentos para definir las completamente:

El primero de ellos es un intervalo de tiempo t dentro del cual las funciones Walsh están definidas, este intervalo toma el nombre de "base de tiempo" este rango puede ser $-\frac{1}{2}T \leq t \leq \frac{1}{2}T$, o también $0T \leq t \leq 1T$.

El otro argumento es un número de ordenamiento "n", que está relacionado a la frecuencia sin embargo en estas funciones armónicas rectangulares la frecuencia no está definida si no que la secuencia es usada como parámetro análogo.

Las funciones Walsh se escriben:

$$WAL(n,t) \quad (1.1)$$

La **figura (1-1)** muestra las primeras 32 funciones Walsh ordenadas en forma ascendente dependiendo el número de cruces por cero dentro de la base de tiempo.

1.2 Propiedades de las funciones Walsh

1.2.1 Propiedad de ortogonalidad

Se dice que dos códigos son ortogonales cuando estos no se traslapan entre sí y cuando tienen una cross correlación cruzada igual a cero, dicho en términos vectoriales cuando dos códigos representados de forma de vector son ortogonales cuando su producto interno (producto punto) es igual a cero. Como se muestra en el siguiente ejemplo:

$$\text{Código 1} = [1 \ 1 \ -1 \ -1]$$

$$\text{Código 2} = [1 \ -1 \ 1 \ -1]$$

$$[1 \ 1 \ -1 \ -1] \cdot [1 \ -1 \ 1 \ -1] = [1 + (-1) + 1 + (-1)] = 0$$

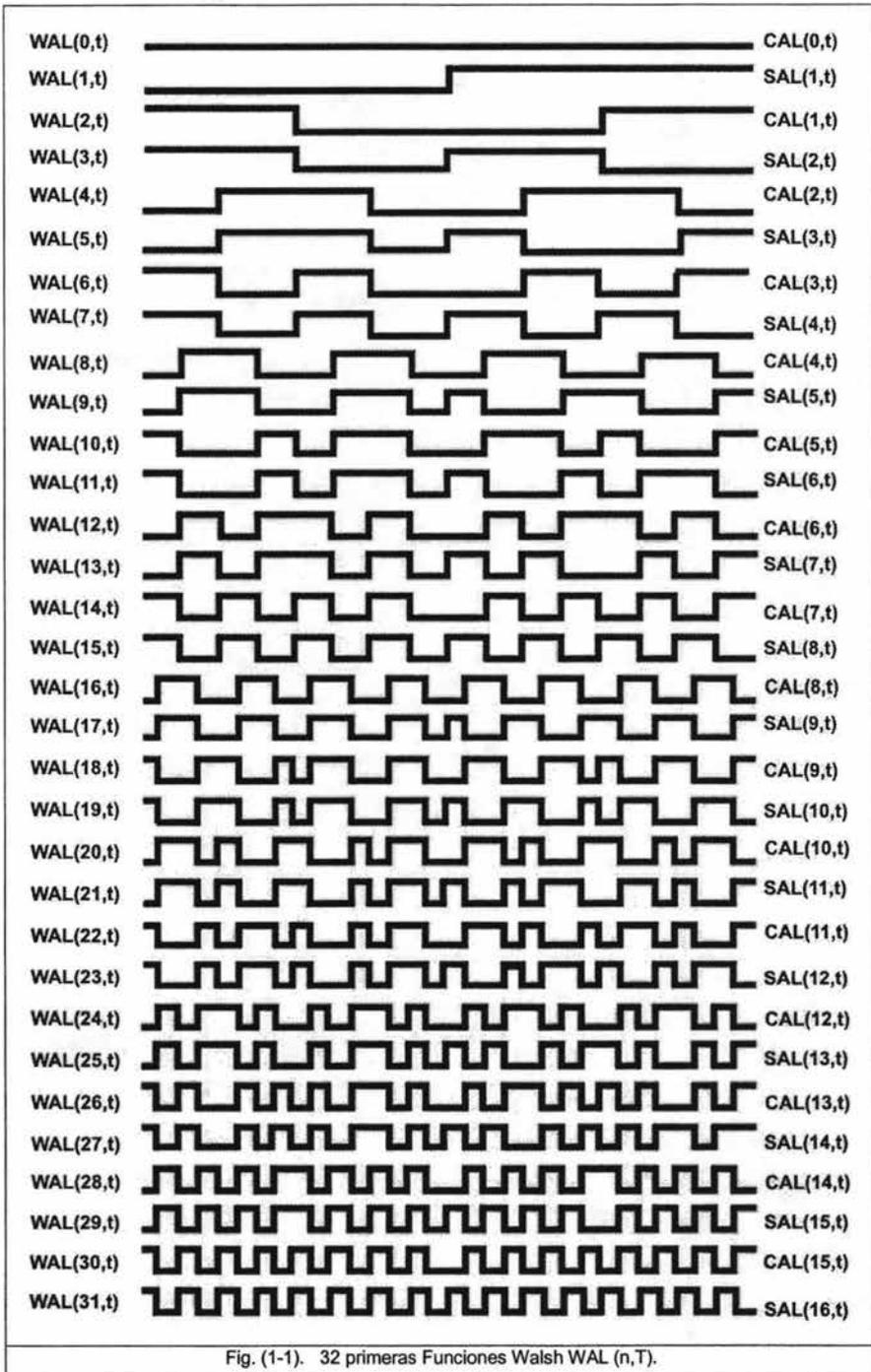


Fig. (1-1). 32 primeras Funciones Walsh WAL (n,T).

Solo un conjunto de funciones ortogonales puede utilizarse para sintetizar completamente cualquier función en el tiempo a un grado requerido de precisión, las funciones Walsh tiene esta propiedad de ortogonalidad que generalmente se define como:

$$\int_0^1 K \cdot S_n(t) \cdot S_m(t) dt = \begin{cases} K & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \neq m \end{cases} \quad (1.2)$$

Un conjunto de funciones que puede ser integrado cumpliendo con la relación (1.2) será normal y ortogonal, si el valor de $K=1$ se dice que el set o conjunto de funciones esta normalizado y es llamado ortonormal, de no estarlo es llamado ortogonal.

Un conjunto de funciones estará completo si no existe en el una función que no sea ortogonal con todas las demás funciones del conjunto, es decir al aplicar la relación (1.2) esta de como resultado = 0. Cuando esta integración de dos funciones ortogonales nos de cómo resultado un número entero será el caso de estar integrando dos funciones iguales.

La Transformada y serie de Fourier esta constituidas por un conjunto de funciones sinusoidales ortogonales y podemos demostrar su ortogonalidad partiendo de dos funciones:

$$S_n(t) = \sqrt{2} \text{sen } 2\pi n t$$

$$S_m(t) = \sqrt{2} \text{sen } 2\pi m t$$

Aplicando la relación (1.2) tenemos:

$$\int_0^1 2 \text{sen } 2\pi n t \text{ sen } 2\pi m t dt = 0 \quad n \neq m$$

$$\int_0^1 2 \text{sen } 2\pi n t \cdot \text{sen } 2\pi n t dt = \int_0^1 2 \text{sen}^2 2\pi n t dt = 2$$

De igual manera el conjunto de funciones Walsh son ortogonales, tienen la característica de que en un intervalo de el número de amplitudes positivas (+1) es igual al número de amplitudes negativas (-1), excepto la función WAL (0,t) en la cual la función entera solo tiene el valor positivo.

Para comprobar la ortogonalidad de las funciones Walsh podemos aplicar una expresión análoga a la ecuación (1.2) sustituyendo la integral por una sumatoria de productos es decir:

$$\sum_{t=0}^{N-1} WAL(m,t) WAL(n,t) \quad (1.3)$$

Expresando los argumentos m, n y t en notación binaria tenemos la ecuación (1.4) donde $N = 2^p$:

$$\begin{aligned} & \sum_{t_{p-1}=0}^1 \sum_{t_{p-2}=0}^1 \dots \sum_{t_0=0}^1 WAL(m_{p-1}, m_{p-2} \dots m_0; t_{p-1}, t_{p-2} \dots t_0) \\ & \times WAL(n_{p-1}, n_{p-2} \dots n_0; t_{p-1}, t_{p-2} \dots t_0) \end{aligned} \quad (1.4)$$

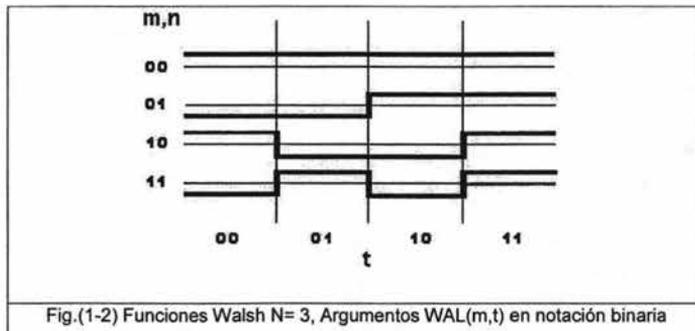
Vamos a realizar el producto de dos funciones Walsh, con una $N = 4 = 2^2$, $p = 2$, utilizando la ecuación (1.4):

$$\sum_{t_1=0}^1 \sum_{t_0=0}^1 WAL(m_1, m_0; t_1, t_0) \times WAL(n_1, n_0; t_1, t_0)$$

Multiplicando dos función iguales entre si $n = m$, $WAL(2,t) \times WAL(2,t)$, y expresando los argumentos en binario, es decir:

$$\sum_{t_1=0}^1 \sum_{t_0=0}^1 WAL(1,0; t_1, t_0) \times WAL(1,0; t_1, t_0)$$

Tomando los valores respectivos de la las funciones en función del tiempo, ayudándonos de la **figura (1-2)**:



$$WAL(1,0; 0,0)WAL(1,0; 0,0) + WAL(1,0; 0,1) WAL(1,0; 0,1) + \\ WAL(1,0; 1,0) WAL(1,0; 1,0) + WAL(1,0; 1,1) WAL(1,0; 1,1) =$$

$$(1)(1) + (-1)(-1) + (-1)(-1) + (1)(1) = 4 = N$$

Multiplicando dos función Walsh diferentes entre si es decir $n \neq m$, $WAL(1,t)$ x $WAL(3,t)$, y expresando los argumentos en binario, es decir:

$$\sum_{t_1=0}^1 \sum_{t_0=0}^1 WAL(0,1;t_1,t_0) WAL(1,1;t_1,t_0)$$

Tomado los valores respectivos de la las funciones en función del tiempo, ayudándonos de la **figura (1-2)**:

$$WAL(0,1; 0,0) WAL(1,1; 0,0) + WAL(0,1; 0,1) WAL(1,1; 0,1) + \\ WAL(0,1; 1,0) WAL(1,1; 1,0) + WAL(0,1; 1,1) WAL(1,1; 1,1) = \\ (-1)(-1) + (-1)(1) + (1)(-1) + (1)(1) = 0$$

Concluyendo de los ejemplos anteriores observamos que las funciones Walsh cumplen la propiedad de ortogonalidad ya que tienen las siguientes características para $n = m$ y $n \neq m$:

$$\sum_{t=0}^{N-1} WAL(m,t) WAL(n,t) = \begin{cases} N & \text{para } n = m \\ 0 & \text{para } n \neq m \end{cases} \quad (1.5)$$

Por lo tanto las funciones Walsh forman un conjunto de funciones ortogonales que pueden ser normalizadas al dividir las por N para formar un sistema ortonormal.

1.2.2 Base de tiempo

Un conjunto de funciones completas y ortogonales pueden definirse en diferentes intervalos estos pueden ser semi-infinitos $(0, \infty)$, infinitos $(-\infty, +\infty)$ o finitos $(-T/2, +T/2)$ o $(0, T)$. Las funciones que componen la serie de Fourier pueden definirse en cualquiera de estos intervalos, pero las funciones Walsh únicamente pueden

definirse en intervalos finitos. Esta limitación le ofrece la ventaja de que una señal limitada en un intervalo de tiempo compuesta o conformada por un limitado número de funciones ortogonales ocuparan una sección finita del dominio al que se le transforme. En cambio en las funciones circulares (sinusoidales como la serie de Fourier) una señal de tiempo finito da lugar a función de frecuencia infinita en el dominio a transformar.

1.2.3 Notación de Harmuth

Esta es una notación alternativa fue introducida por H.F. Harmuth y clasifica a las funciones Walsh en términos de una simetría par o impar.

Para las funciones Walsh pares WAL (2k,t) se representan como CAL(k,t).

Las funciones Walsh impares WAL (2k-1,t), son representadas como SAL (k,t).

Donde $k = 1, 2, 3, \dots, N/2$.

$$\begin{aligned} \text{WAL}(2k,t) &= \text{CAL}(k,t) \\ \text{WAL}(2k-1,t) &= \text{SAL}(k,t) \\ K &= 1, 2, \dots, N/2 \end{aligned} \quad (1.6)$$

Esta notación divide a las funciones Walsh en dos series adicionales que tienen analogía con las series basadas en senos y cosenos como la serie de Fourier, Las funciones Cosenoidales corresponderían a las funciones CAL y las Senoidales a las SAL, y aunque existe una relación simple entre una función $\cos(2\pi kt)$ y $\sin(2\pi kt)$, la relación entre CAL(k,t) y SAL(k,t) es mas complicada debido a la ausencia de un teorema de corrimiento circular, que establece que la relación entre una función cosenoidal y senoidal son 90 grados.

La figura (1-1) en su parte derecha muestra las 16 primeras funciones CAL y SAL.

1.2.4 Propiedad de simetría

Dentro de un rango de tiempo $-\frac{1}{2} \leq T \leq \frac{1}{2}$ las funciones pueden ser o directamente simétricas (funciones CAL) o inversamente simétricas (funciones SAL), este último caso se explica partiendo la función por la mitad y tomando su lado izquierdo el cual se encuentra reflejado en el lado derecho o viceversa.

Esto nos permite asegurar que:

$$WAL(n,t) = WAL(t,n) \quad (1.7)$$

Por lo que concluimos que las funciones Walsh son simétricas, la importancia en la práctica de esta simetría es que la transformada y su transformada inversa representan la misma operación matemática por lo que se simplifica la aplicación de esta.

1.2.5 Secuencia

El término de secuencia término análogo a frecuencia, nos describe una razón de repetición periódica que es independiente de la señal, se define como la mitad del número promedio de cruces por cero (ZPS) dentro de la unidad de intervalo de tiempo. De esto observamos que la frecuencia puede verse como una medida especial de secuencia aplicable solamente a señales sinusoidales.

El número de cruces por cero o ZPS en un intervalo abierto $-\frac{1}{2} \leq T \leq \frac{1}{2}$ es:

$ZPS = 2k$ por lo que k representa la secuencia en las funciones CAL y SAL.

En la tabla (I) se muestra la secuencia ZPS para las primeras 15 funciones Walsh, además de la secuencia para sus correspondientes funciones CAL y SAL.

WAL → ZPS	CAL → ZPS	SAL → ZPS
WAL(0,T) → 0	CAL(0,T) → 0	
WAL(1,T) → 0.5		SAL(0,T) → 0
WAL(2,T) → 1	CAL(1,T) → 1	
WAL(3,T) → 1.5		SAL(1,T) → 1
WAL(4,T) → 2	CAL(2,T) → 2	
WAL(5,T) → 2.5		SAL(2,T) → 2
WAL(6,T) → 3	CAL(3,T) → 3	
WAL(7,T) → 3.5		SAL(3,T) → 3
WAL(8,T) → 4	CAL(4,T) → 4	
WAL(9,T) → 4.5		SAL(4,T) → 4
WAL(10,T) → 5	CAL(5,T) → 5	
WAL(11,T) → 5.5		SAL(5,T) → 5
WAL(12,T) → 6	CAL(6,T) → 6	
WAL(13,T) → 6.5		SAL(6,T) → 6
WAL(14,T) → 7	CAL(7,T) → 7	
WAL(15,T) → 7.5		SAL(7,T) → 7

Tabla (I) Secuencia para las primeras 15 funciones Walsh.

1.2.6 Propiedades para la multiplicación de funciones Walsh

El producto entre dos funciones Walsh esta determinado por la siguiente expresión:

$$WAL(n,t)WAL(m,t) = WAL(n \oplus m,t) \quad (1.8)$$

Donde \oplus es una adición binaria en módulo 2

De la cual se derivan las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} CAL(k,t)CAL(p,t) &= CAL(k \oplus p,t) \\ SAL(k,t)CAL(p,t) &= SAL(p \oplus (k-1) + 1,t) \\ CAL(k,t)SAL(p,t) &= SAL(k \oplus (p-1) + 1,t) \\ SAL(k,t)SAL(p,t) &= CAL((k-1) \oplus (p-1),t) \\ CAL(0,t) &= WAL(0,t) \end{aligned}$$

Las cuales corresponde a las siguientes relaciones para las funciones sinusoidales:

$$\begin{aligned} 2 \cos(kt) \cos(pt) &= \cos(k-p)t + \cos(k+p)t \\ 2 \operatorname{sen}(kt) \cos(pt) &= \operatorname{sen}(k-p)t + \operatorname{sen}(k+p)t \\ 2 \cos(kt) \operatorname{sen}(pt) &= -\operatorname{sen}(k-p)t + \operatorname{sen}(k+p)t \\ 2 \operatorname{sen}(kt) \operatorname{sen}(pt) &= \cos(k-p)t - \cos(k+p)t \end{aligned}$$

1.3 Analogía entre las series de Fourier y las series Walsh.

Mediante la serie de Fourier podemos representar y descomponer una señal o función periódica, como una suma de series seno-cosenoidales cada una multiplicada por un coeficiente, matemáticamente queda definida por:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \operatorname{sen}(k\omega_0 t))$$

Donde:

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} &= \frac{1}{T} \int_{\mathcal{J}} f(t) dt \\ a_k &= \frac{2}{T} \int_{\mathcal{J}} f(t) \cos(k\omega_0 t) dt \\ b_k &= \frac{2}{T} \int_{\mathcal{J}} f(t) \operatorname{sen}(k\omega_0 t) dt \end{aligned} \quad (1.9)$$

Estos coeficientes a_k y b_k representan las amplitudes pico de los componentes espectrales de $f(t)$.

Utilizando las series Walsh también podemos representar una señal $f(t)$, como una sumatoria de funciones Walsh, matemáticamente quedaría:

$$f(t) = a_0 WAL(0,t) + \sum_{n=1}^{N-1} a_n WAL(n,t) \quad (1.10)$$

Sabemos que el valor de $WAL(0,t)$ es constante durante toda la base de tiempo, por lo que podemos descomponer la sumatoria usando las funciones SAL y CAL que nos daría una expresión matemática muy similar a la que definimos en las series de Fourier:

$$f(t) = a_0 WAL(0,t) + \sum_{i=1}^{N/2} \sum_{j=1}^{N/2} (a_i SAL(i,t) + b_j CAL(j,t)) \quad (1.11)$$

Donde:

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) WAL(0,t) dt \\ b_j &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) CAL(j,t) dt \\ a_i &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) SAL(i,t) dt \end{aligned} \quad (1.12)$$

Al ser $WAL(0,t) = CAL(0,t)$ implica que en la expresión hay un término CAL menos que los términos SAL .

Los coeficientes obtenidos en (1.12) también están referidos a una descomposición espectral de la función $f(t)$ aunque estos ahora no tienen la forma sinusoidal.

La analogía entre las series de Fourier y Walsh es muy clara, ambas son herramientas que nos permiten descomponer una función $f(t)$ en una suma de funciones ortogonales con diferente frecuencia o secuencia (armónicos) cada una de ellas con coeficientes específicos con el cual podremos obtener su espectro en frecuencia o secuencia.

Como observación final diremos que la serie de Fourier es posible combinar los elementos seno y coseno en una sola variable compleja: $e^{j(k\omega t)}$ que expresa la

misma frecuencia, esto no es posible en las series Walsh debido a la ausencia de un teorema de corrimiento circular como lo existe para las funciones sinusoidales.

1.4 Ordenamiento de las funciones.-

Lo que se busca al ordenar una función Walsh son básicamente dos cosas:

Primero que ese ordenamiento este en función del número de cruces por cero para las funciones Walsh puedan relacionarse rápidamente con otras funciones ortogonales (funciones sinusoidales, Haar, etc.).

Segundo que su generación sea rápida y sencilla ya sea analíticamente, por medio de computadoras o hardware especializado.

En base a las dos características expuestas existen tres ordenamientos muy utilizados: Orden secuencial, orden natural (Paley) y ordenamiento Hadamard.

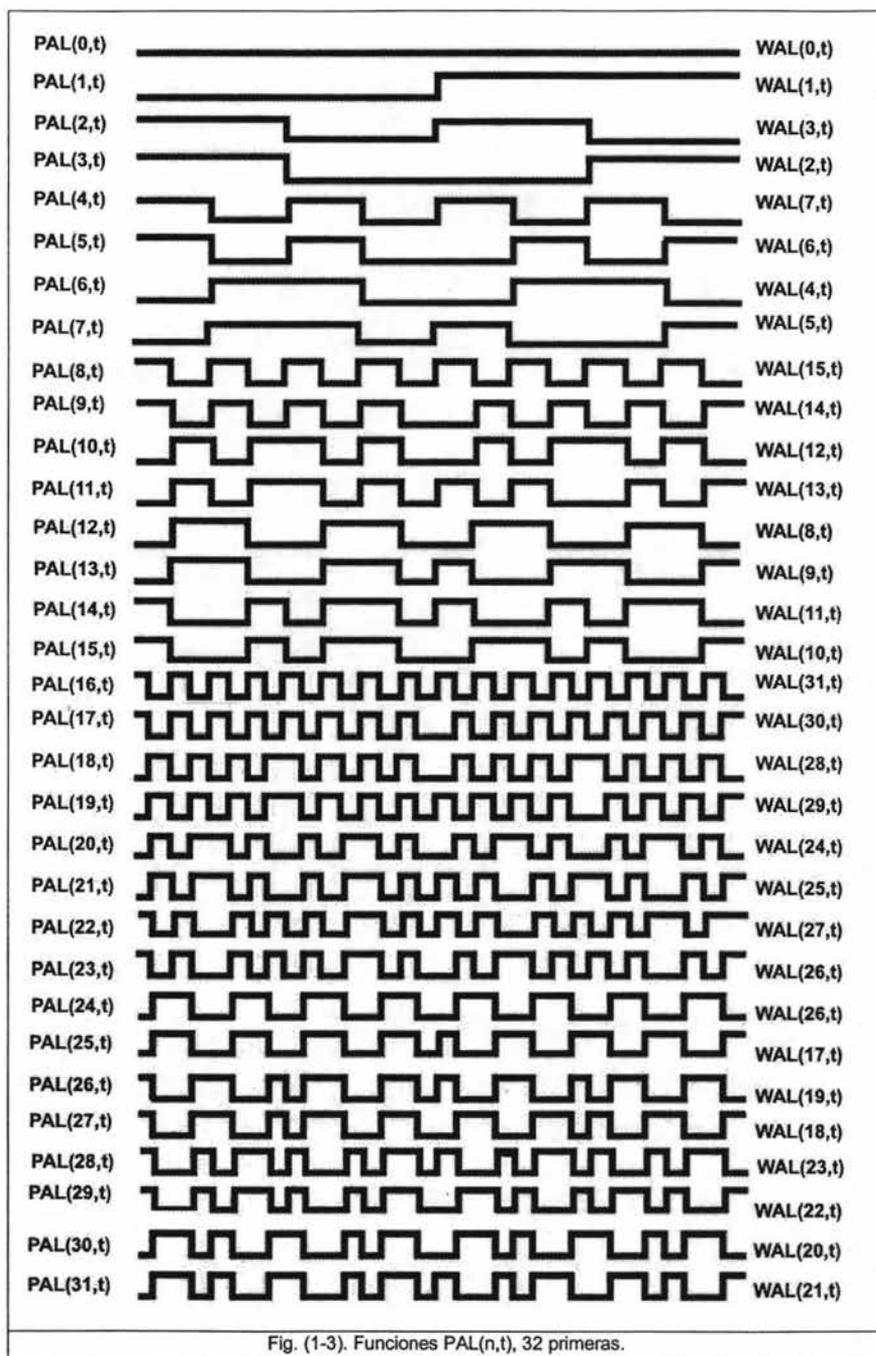
1.4.1 Orden secuencial.-

Este es el orden que originalmente J.L. Walsh introdujo a sus funciones conocido como el orden Walsh, el orden Walsh – Kaczmarz o la forma ordenada **WAL (n,t)**, este orden se basa en el arreglo de sus componentes en forma ascendente dependiendo del numero de cruces por cero y esta directamente relacionado con la frecuencia, la ventaja de este ordenamiento es el que las funciones Walsh se pueden dividir en funciones CAL o SAL, las cuales muestran una similitud con las funciones ortogonales Seno y Coseno en el análisis de Fourier y permite hacer algunas comparaciones. Se usa en comunicaciones, procesamiento digital de señales en análisis espectral y filtrado.

1.4.2 Orden natural - Paley.-

Esta forma de ordenamiento es conocida también como ordenamiento binario, ordenamiento Normal u ordenamiento Paley: **PAL (n,t)**.

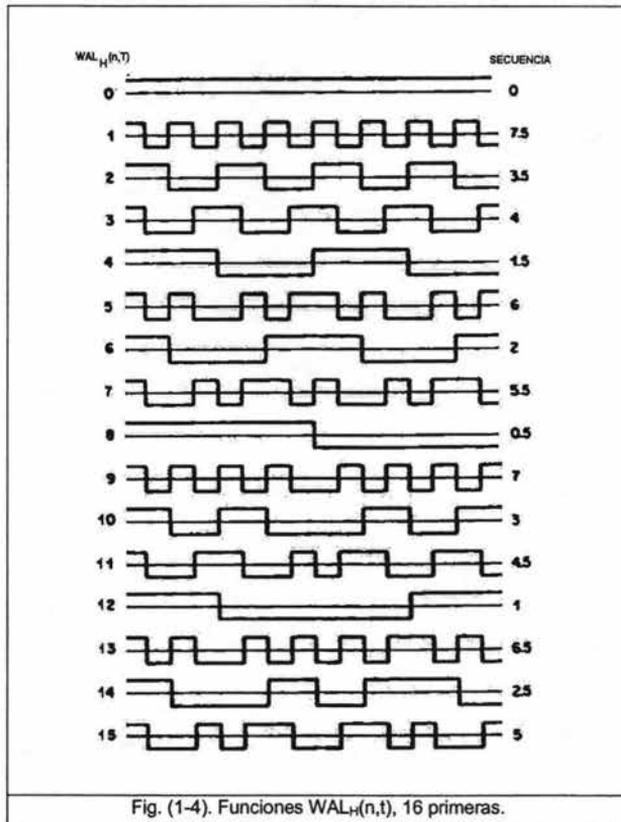
Este se obtiene a partir de las funciones Rademacher, este ordenamiento secuencial las ventajas son analíticas y computacionales. Se usa básicamente en transmisión de imágenes y eficiencia computacional. La **figura (1-3)** Muestra las 32 primeras funciones PAL(n,t), y a su derecha la correspondiente función WAL(n,t).



1.4.3 Ordenamiento Hadamard.-

Este es un reordenamiento de las funciones PAL(n,t) que se simboliza $WAL_H(n,t)$, tiene grandes ventajas sobre los anteriores debido a su fácil generación utilizando el producto matricial Kronercker, el significado de usar este reordenamiento de Hadamard a las funciones PAL es obtener una Transformada Walsh – Hadamard que pueda ser procesada de manera más veloz que la DWT. (Discrete Walsh Transform, Transformada Discreta Walsh)

El ordenamiento Hadamard de las funciones Walsh se muestran en la **figura (1-4)**, la secuencia sigue correspondiendo a la mitad del número de cruces por cero, aunque el orden de la secuencia no esta de forma creciente.



En la **figura (1-5)** podemos observar las diferencias entre estos tres ordenamientos, se muestran las 32 primeras funciones Walsh, Paley y Hadamard representadas por cuadros. Los cuadros de negro simbolizan un uno positivo y los cuadros blancos un uno negativo. Todas las funciones empiezan con un cuadro negro lo que significa que todas empiezan con fase positiva, es decir un uno positivo.

Observamos que el ordenamiento secuencial tiene la característica de que cada fila tiene un cambio mas que la anterior, el ordenamiento Paley o natural es muy parecido pero reordenado en base al código Gray, y por último el ordenamiento Hadamard, tiene una estructura anidada.

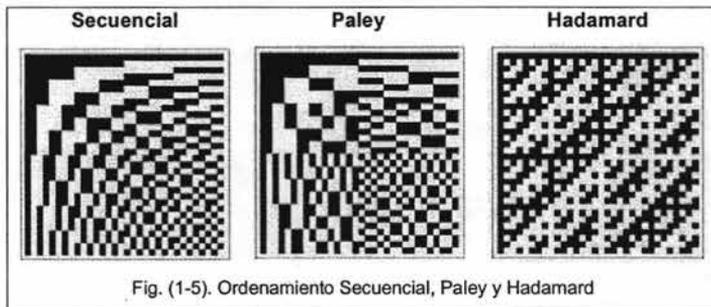


Fig. (1-5). Ordenamiento Secuencial, Paley y Hadamard

1.4.4 Relaciones entre ordenamientos Secuencial , Paley y Hadamard.

La Relación entre el ordenamiento PAL y Walsh esta definido por la expresión siguiente :

$$PAL(g(n),t) = WAL(n,t) \quad (1.13)$$

Donde: $g(n)$ es una función basada en el código Gray. En la tabla (II) se muestra la relación que existe entre el número de las funciones WAL, el código Gray y las funciones PAL.

WAL	→ Gray	→ PAL	WAL	→ Gray	→ PAL
0 →	0000	→ 0	8 →	1100	→ 12
1 →	0001	→ 1	9 →	1101	→ 13
2 →	0011	→ 3	10 →	1111	→ 15
3 →	0010	→ 2	11 →	1110	→ 14
4 →	0110	→ 6	12 →	1010	→ 10
5 →	0111	→ 7	13 →	1011	→ 11
6 →	0101	→ 5	14 →	1001	→ 9
7 →	0100	→ 4	15 →	1000	→ 8

Tabla (II) Relación entre las funciones WAL, el código Gray las funciones PAL.

Para saber que función PAL(g(n),t) corresponde a WAL(n,t):

- Debemos expresar a n en binario $n = (n_p, n_{p-1} \dots n_1, n_0)_2$
- g(n) se obtendrá $g_i(n) = n_i \oplus n_{i+1}$, donde \oplus representa adición en módulo 2, esta operación corresponde a la conversión de binario a código Gray.

Por ejemplo si tenemos:

WAL(9,t): 9 en binario corresponde a $n = (1001)_2$, $n_3 = 1$, $n_2 = 0$, $n_1 = 0$, $n_0 = 1$.

$$g_3 = n_3 \oplus n_4 = 1 = 1$$

$$g_2 = n_2 \oplus n_3 = 1 \oplus 0 = 1$$

$$g_1 = n_1 \oplus n_2 = 0 \oplus 0 = 0$$

$$g_0 = n_0 \oplus n_1 = 1 \oplus 0 = 1$$

El número obtenido es $g_3 = 1$, $g_2 = 1$, $g_1 = 0$, $g_0 = 1$ que correspondería al número 9 en código Gray pero en binario $(1101)_2 = 13$ por lo que:

$$PAL(13,t) = WAL(9,t)$$

De manera análoga para saber que función WAL(n,t) corresponde a PAL(g(n),t) debemos realizar una conversión de código Gray a binario.

Para la relación entre el ordenamiento PAL y Hadamard tenemos que considerar primeramente que la secuencia de ordenamiento de las funciones $WAL_H(n,t)$ se obtiene de una secuencia de ordenamiento de las funciones PAL a partir de:

- Expresar el orden de las funciones PAL en números binarios.
- Invertir el orden de los bits de estos números
- Convirtiendo estos valores a números decimales.

Es decir que para las 8 primeras funciones PAL: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 sus correspondientes números binarios serían: 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111. Invertiendo el orden de estos quedaría: 000, 100, 010, 110, 001, 101, 011, 111 que corresponderían a las funciones WAL_H : 0, 4, 2, 6, 1, 5, 3, 7.

1.4.5 Ordenamiento del set de funciones Walsh respecto a la fase:

Tanto la **figura 1-1** que muestran las funciones WAL como la **figura 1-3** muestran a las funciones PAL arregladas de manera que se enfatice su similitud con un conjunto de series seno cosenoidales en las que las series se hallan desfasadas 90 grados por lo cual no todas empiezan con la misma amplitud. Si las funciones WAL y PAL se ordenan bajo este principio este se conocerá como la "Fase de Harmuth" y ocurrirá cuando la base tiempo se defina en el intervalo $-\frac{1}{2}T \leq t \leq \frac{1}{2}T$.

Sin embargo si las series WAL y PAL son obtenidas a través de las matrices Hadamard o por las funciones Rademacher, como lo veremos mas adelante, las funciones tendrán la misma fase ya que todas empezarán con el valor de +1, a esto se le señalara como una **fase positiva**, lo que involucra el cambio de signo a algunas de las funciones que conforman las series, esto se debe básicamente a que el intervalo de tiempo en el que se definen es $0T \leq t \leq 1T$.

1.5 Obtención de las funciones Walsh de forma analítica:

Consideraremos 4 métodos para la obtención de las funciones Walsh:

1.5.1 Método de la ecuación de diferencia (Obtención de las series WAL)

Para este método consideraremos la base tiempo en $0T \leq t \leq 1T$ y definiremos la amplitud de la función $WAL(0,t) = 1$ si la ubicamos dentro de la base de tiempo y $WAL(0,t) = 0$ si la ubicamos fuera del rango de t . A partir de esta primera función Walsh podremos definir la función $WAL(1,t)$, es decir que para definir una de ellas necesitamos sus funciones que la preceden.

La ecuación de diferencia esta definida como:

$$WAL(2j + q, t) = (-1)^{[j/2]+q} \left[WAL(j, 2t) + (-1)^{j+q} WAL(j, 2(t - \frac{1}{2})) \right]$$

$$q = 0, 1$$

$$j = 0, 1, 2, \dots \quad (1.14)$$

$[j/2]$ Significa el entero inferior que se encuentre mas próximo a la división $j / 2$.

Para $j = 1$,

$$[j/2] = 0$$

A partir de (1.14) podemos definir N como un número entero de espacios discretos que estarán contenidos dentro de la base de tiempo "t" a manera de simplificar su obtención. Redefiniendo la ecuación (1.14), donde $N = 2^p$ y $n = 0, 1, 2, \dots (N-1)$:

$$WAL(2j + q, n) = (-1)^{[j/2]+q} \times \left[WAL(j, 2n) + (-1)^{j+q} WAL(j, 2(n - \frac{N}{2})) \right] \quad (1.15)$$

Descomponiendo la ecuación (1.15):

$$A = WAL(j, 2n)$$

$$B = (-1)^{j+q}$$

$$C = WAL(j, 2(n - N/2))$$

$$D = (-1)^{[j/2]+q}$$

$$WAL(2j + q, n) = D (A + BC) \quad (1.16)$$

Los valores asignados para j y q son únicos para cada función:

$$WAL(0, n) \rightarrow j = 0, q = 0$$

$$WAL(1, n) \rightarrow j = 0, q = 1$$

$$WAL(2, n) \rightarrow j = 1, q = 0$$

$$WAL(3, n) \rightarrow j = 1, q = 1$$

$$WAL(4, n) \rightarrow j = 2, q = 0$$

Por ejemplo obtendremos la función $WAL(1, n)$ utilizando las ecuaciones (1.16) partiendo de $WAL(0, n) = 1$ los valores de j y q deberán ser $j = 0$ y $q = 1$, para $N/2 \leq n$ que esta dentro de la base tiempo $WAL(j, 2n) = 1$, para $N/2 < n$ que esta fuera de

la base tiempo $WAL(j, 2n) = 0$. Similarmente $WAL(j, 2(n - N/2)) = 0$ para $N/2 \geq n$ y para $WAL(j, 2(n - N/2)) = 1$ cuando $N/2 < n$. El signo de estas funciones estará modificado por los factores $(-1)^{\lfloor j/2 \rfloor + q}$, y $(-1)^{\lfloor j/2 \rfloor + q}$.

Partiendo de la función $WAL(0, n)$ mostrada en la tabla (III), las operaciones realizadas para la obtención de $WAL(1, n)$ se simplificarán de la tabla (IV)

n	WAL(0,n)
0	1
1	1
2	1
N/2 - 1	1
N / 2	1
5	1
6	1
N-1	1

Tabla (III) Función Walsh $WAL(0, n)$

Generación de la función $WAL(1, n)$						
n	A	B	C	D	$WAL(1, n) = D(A+BC)$	
0	1	-1	0	-1	-1	
1	1	-1	0	-1	-1	
2	1	-1	0	-1	-1	
N/2 - 1	3	1	-1	0	-1	-1
N / 2	4	0	-1	1	-1	1
5	0	-1	1	-1	1	
6	0	-1	1	-1	1	
N-1	7	0	-1	1	-1	1

Tabla (IV) generación de la función Walsh $WAL(1, n)$

A partir de la función $WAL(1, n)$ generaremos la función $WAL(2, n)$ las operaciones se simplifican en la tabla (V).

Generación de la función WAL (2,n)						
n		A	B	C	D	WAL(2,n)=D(A+BC)
	0	-1	-1	0	1	-1
	1	-1	-1	0	1	-1
	2	1	-1	0	1	1
N/2 -1	3	1	-1	0	1	1
N/2	4	0	-1	-1	1	1
	5	0	-1	-1	1	1
	6	0	-1	1	1	-1
N-1	7	0	-1	1	1	-1

Tabla (V) Generación de la función Walsh WAL (2,n)

1.5.2 Método a partir de las funciones Rademacher (Obtención de las series PAL y WAL)

Las funciones Rademacher, son funciones ortogonales, conformadas por un conjunto de pulsos rectangulares que tiene dos amplitudes +1 y -1, para definirse $R(n,t)$, necesitan de dos argumentos n y t, el argumento t es el intervalo de tiempo $0 \leq t \leq 1$. el argumento n define el número de periodos de ondas rectangulares que contiene la función ya que este es igual a 2^{n-1} .

Las funciones Rademacher mostradas en la **figura (1-6)** únicamente tienen simetría impar por lo que se dice que son incompletas, a pesar de ello a partir de estas funciones podemos generar las funciones Walsh tanto de orden natural como secuencial.

Las funciones Walsh de orden natural a partir de las funciones Rademacher se obtienen por una multiplicación de estas últimas siguiendo la siguiente relación:

$$PAL(n,t) = \prod_{i=1}^{m+1} R(i,t)^{b_{i-1}} \quad (1.17)$$

Donde n se debe expresar como un número binario:

$$n = b_m 2^m + b_{m-1} 2^{m-1} + \dots + b_1 2^1 + b_0 2^0 \quad (1.18)$$

Por lo que b_i solo puede tomar los valores de 1 y 0.

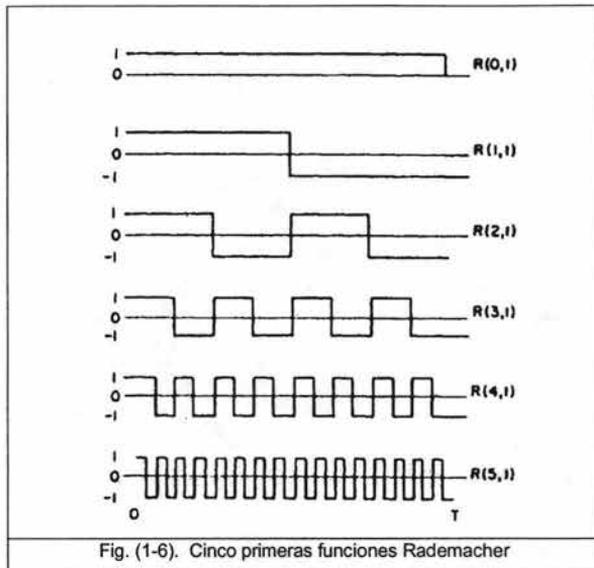


Fig. (1-6). Cinco primeras funciones Rademacher

Por ejemplo para encontrar la función PAL (13,t) debemos realizar lo siguiente.

- Expresamos el $n = 13$ en binario: 1101, donde $b_3 = 1$ $b_2 = 1$ $b_1 = 0$ $b_0 = 1$.
- El valor de $m = 3$ y aplicamos la ecuación (1.17).
- Resultado: $PAL(13,t) = R(4,t) R(3,t) R(1,t)$.

Por lo que la multiplicación de las funciones Rademacher 4, 3, y 1 nos dará como resultado la función PAL(13,t), tal y como se observa en la **figura (1-7)** :

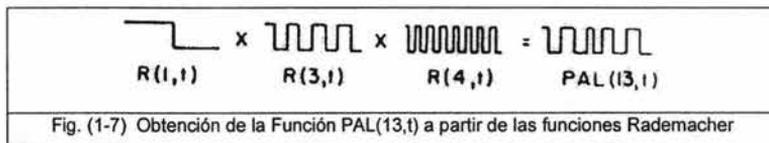


Fig. (1-7) Obtención de la Función PAL(13,t) a partir de las funciones Rademacher

Nótese que el rol de la función $R(1,t)$ es el de invertir el signo a la mitad de la función PAL(13,t).

Debido a que las funciones Rademacher las definimos en el intervalo de tiempo $0 \leq t \leq 1$ todas las funciones PAL generadas tendrán una fase positiva, y necesitaremos "p" funciones Rademacher para generar 2^p funciones PAL.

Las expresiones anteriores usan la multiplicación de funciones Rademacher que tienen amplitudes los valores de +1 y -1 si adoptamos la convención de los valores

de 0 para -1 y 1 para +1, la multiplicación de funciones Rademacher puede expresarse como una sumatoria:

$$PAL(n,t) = \sum_{i=1}^{m+1} b_{i-1} R(i,t) \quad (1.19)$$

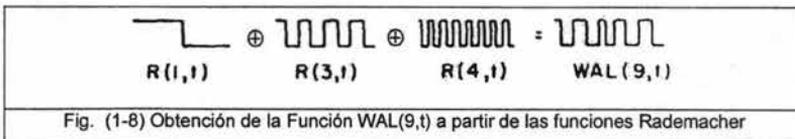
Estas sumatorias de funciones Rademacher debe ser sumatorias binarias de Modulo 2 es decir una sumatoria binaria sin acarreo que obedece a las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} 0 \oplus 0 &= 0 \\ 0 \oplus 1 &= 1 \\ 1 \oplus 0 &= 1 \\ 1 \oplus 1 &= 0 \end{aligned} \quad (1.20)$$

Por ejemplo para generar la función PAL (13,t), $b_3 = 1$ $b_2 = 1$ $b_1 = 0$ $b_0 = 1$:

$$PAL(13,t) = b_0 R(1,t) \oplus b_1 R(2,t) \oplus b_2 R(3,t) \oplus b_3 R(4,t)$$

Para obtener las funciones Walsh en orden natural a partir de este método debemos de aplicar la relación que existe entre ambas por medio del código Gray como se vio anteriormente, por ejemplo la función PAL (13,t) correspondería a la función WAL(9,t), por lo que de igual forma esta función se obtiene por la multiplicación de funciones Rademacher, o por la adición en modulo 2, dependiendo el valor de las amplitudes de estas, como se ve en la siguiente **figura (1-8)** la obtención del función Wal(9,t) a partir de la adición en módulo 2 de las funciones Rademacher 4,3 y1:



WAL (9,t) \Rightarrow 9 en código Gray corresponde a 1101 es decir $b_3 = 1$ $b_2 = 1$ $b_1 = 0$ $b_0 = 1$.
Aplicando la relación (1.19) obtenemos que:

$$WAL(9,t) = R(1,t) \oplus R(3,t) \oplus R(4,t)$$

1.5.3 Método a partir de las matrices Hadamard.- Obtención de las series (WAL_H y PAL)

Las matrices Hadamard son matrices cuadradas, cuyos coeficientes poseen únicamente dos valores +1 y -1 y donde las columnas y las filas son ortogonales unas con otras, en estas matrices es posible intercambiar las filas por las columnas y su propiedad de orgonalidad no se ve afectada, por lo que la matriz de Hadamard es simétrica, su primera columna y su primera fila tiene únicamente valores positivos.

La matriz de menor orden es la de orden 2:

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad -H_2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.21)$$

Las matrices de orden mayores pueden obtenerse a partir de la relación (1.22) utilizando la matriz de orden dos (1.21) con la restricción de que las de orden mayor deben de ser múltiplos de 2, (la variable N debe de ser múltiplo de dos).

$$H_N = H_{N/2} \otimes H_2 \quad (1.22)$$

Donde \otimes significa producto directo o producto **Kronecker**, este producto se resuelve reemplazando cada elemento en la matriz $H_{N/2}$ por la matriz H_2 .

$$H_N = \begin{bmatrix} H_{N/2} & H_{N/2} \\ H_{N/2} & -H_{N/2} \end{bmatrix} \quad (1.23)$$

Para $H_4 = H_2 \otimes H_2$ $N=2$:

$$H_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Para $H_8 = H_4 \otimes H_2$

$$H_8 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{matrix} \text{PAL}(0, t) \\ \text{PAL}(4, t) \\ \text{PAL}(2, t) \\ \text{PAL}(6, t) \\ \text{PAL}(1, t) \\ \text{PAL}(5, t) \\ \text{PAL}(3, t) \\ \text{PAL}(7, t) \end{matrix}$$

En esta última matriz se puede observar que las 8 primeras funciones PAL se encuentran dentro de la matriz Hadamard de orden 8 pero reordenadas, de ser necesario se puede ordenar los elementos de las matrices de acuerdo al ordenamiento natural incluso secuencial, utilizando valores de 1 y -1 en las amplitudes y una fase positiva para que la primera fila y columna tengan únicamente el valor de 1, esto nos podría facilitar enormemente la obtención de la transformada Discreta Walsh ya que consistiría solamente de una multiplicación de matrices.

Si reordenamos la matriz de orden 8 por el ordenamiento Walsh natural PAL tendríamos:

$$P_8 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Para el ordenamiento Walsh secuencial WAL tendríamos:

$$W_8 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

1.5.4 Método a partir de la síntesis Booleana (Obtención de series WAL)

Este método define las funciones discretas Walsh $WAL(i,T)$ como una cadena de bits donde las amplitudes +1 toman el valor de 1 y las amplitudes -1 toman el valor de 0, este método parte de la relación (1.21), en la que se aplican operaciones lógicas como XOR, AND y la sumatoria debe ser en módulo dos, lo que hace fácil su generación por hardware.

$$WAL(i,t) = \sum_{k=1}^p (i_k \oplus i_{k+1}) T_{p-k+1} \quad (1.21)$$

Donde i se debe expresar en binario de la siguiente manera:

$$i = (i_p, i_{p-1} \dots i_2, i_1)_2 \quad (1.22)$$

El intervalo de tiempo se dividirá en N veces de acuerdo a $N = 2^p$, y se expresara el tiempo T en binario desde 0 hasta $N-1$ de acuerdo a la siguiente relación:

$$t = (t_1, t_2, \dots, t_k)_2 \quad (1.23)$$

Donde k es el valor máximo que toma p .

Ejemplo: Para generar la función $WAL(14,t)$ realizamos lo siguiente:

- Expresamos $n = 14$ en binario de acuerdo a la relación (1.22):

$$i_4 = 1, i_3 = 1, i_2 = 1, i_1 = 0, \quad p = 4.$$

- El intervalo de tiempo t se dividirá en $2^4 = 16$ veces, los tiempos desde 0 hasta 15

en binario se muestran en la tabla (VI).

- Sabiendo el valor de $p=4$, $k=4$ aplicamos la ecuación (1.21):

$$WAL(14, T) = (i_1 \oplus i_2)T_{(4-1+1)} + (i_2 \oplus i_3)T_{(4-2+1)} + (i_3 \oplus i_4)T_{(4-3+1)} + (i_4)T_{(4-4+1)}$$

$$WAL(14, T) = (i_1 \oplus i_2)T_{(4)} + (i_2 \oplus i_3)T_{(3)} + (i_3 \oplus i_4)T_{(2)} + (i_4)T_{(1)}$$

$$WAL(14, T) = (0 \oplus 1)T_{(4)} + (1 \oplus 1)T_{(3)} + (1 \oplus 1)T_{(2)} + (1)T_{(1)}$$

$$WAL(14, T) = (1)T_{(4)} + (0)T_{(3)} + (0)T_{(2)} + (1)T_{(1)}$$

A partir de esta ultima igualdad tabulamos los valores ayudándonos de la tabla (VI) donde se encuentran los valores lógicos que tomara T_4, T_3, T_2, T_1 , para después aplicar la operación AND en: $(i_1 \oplus i_2)T_4$, $(i_2 \oplus i_3)T_3$, $(i_3 \oplus i_4)T_2$, $(i_4)T_1$, y finalmente aplicar la sumatoria en módulo 2 de estos últimos términos para encontrar $WAL(14,t)$:

Obtención de la función WAL(14,T)									
T	T_4	T_3	T_2	T_1	$(i_1 \oplus i_2)T_4$	$(i_2 \oplus i_3)T_3$	$(i_3 \oplus i_4)T_2$	$(i_4)T_1$	WAL(14,T)
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	0	0	0	0	0
3	0	0	1	1	0	0	0	1	1
4	0	1	0	0	0	0	0	0	0
5	0	1	0	1	0	0	0	1	1
6	0	1	1	0	0	0	0	0	0
7	0	1	1	1	0	0	0	1	1
8	1	0	0	0	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	1	0	0	1	0
10	1	0	1	0	1	0	0	0	1
11	1	0	1	1	1	0	0	1	0
12	1	1	0	0	1	0	0	0	1
13	1	1	0	1	1	0	0	1	0
14	1	1	1	0	1	0	0	0	1
15	1	1	1	1	1	0	0	1	0

Tabla (VI) Generación de la función Walsh WAL (14,T) por síntesis Booleana.

- La función como cadena de bits quedaría:

$$WAL(14, T) = 0101010110101010$$

- Cambiando los ceros por -1.

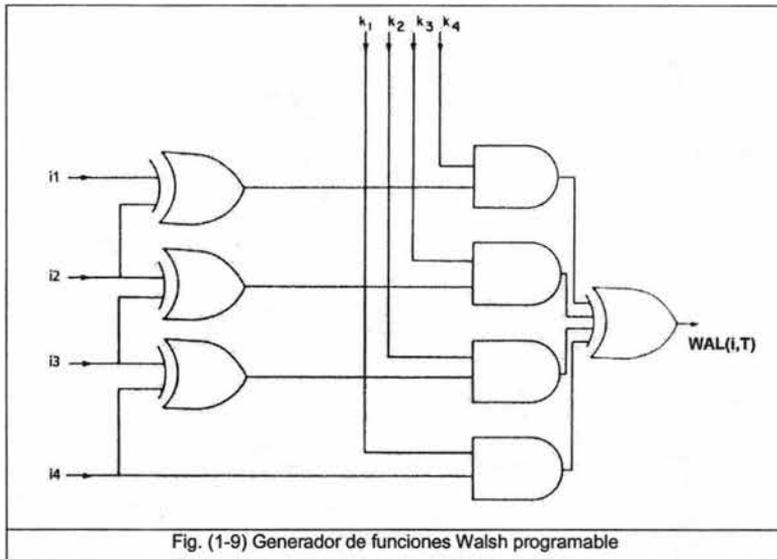
$$WAL(14, T) = -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1$$

- Dándole a la función una fase positiva:

$$WAL(14, T) = 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, 1$$

Este el ultimo es que podemos reemplazar en la fila 15 de la matriz W_{16} .

Dadas estas bases matemáticas podemos desarrollar un generador de funciones Walsh usando compuertas lógicas, como el que se muestra en la **figura (1-9)**, en ella se muestran dos entradas para el circuito lógico generador de hasta la 15va función Walsh, el primer parámetro i_n , corresponde al número en binario de la función Walsh deseada, y el parámetro k_n corresponde a la secuencia.



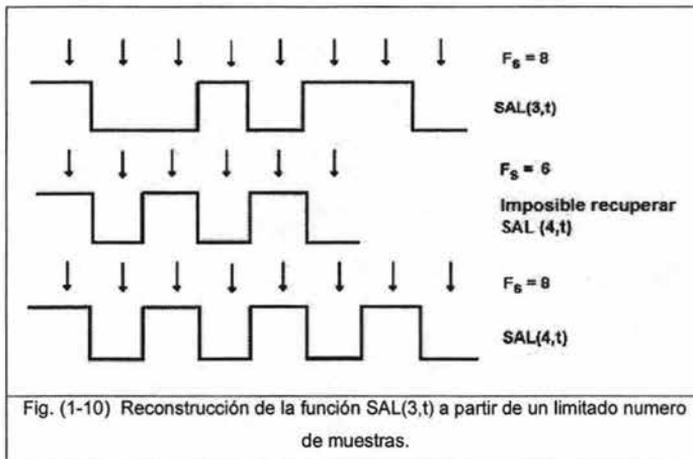
Para este último parámetro podemos colocar un reloj digital que haga incrementos de uno, desde cero a quince.

En este circuito se utilizaron compuertas lógicas OR-exclusiva y AND necesarias para poder realizar la suma en modulo-2

1.6 Muestreo digital de las funciones Walsh

El teorema de muestreo para funciones sinusoidales para delimitar su ancho de banda dice que $2f_s = f_m$ (o el periodo de muestreo $h = 1/f_m = 1/2f_s$) como mínimo necesario para recuperar completamente la señal original.

Un teorema análogo es utilizado en las funciones Walsh el que nos dice que la razón mínima de muestreo debe de ser $f_s = 2^{k+1}$ donde el ancho de banda en términos de secuencia se expresa como una potencia de dos $Z = 2^k$ (o periodo de muestreo $h = 1/2^{k+1}$), esto es muy importante de considerar ya que si se aplica el mismo criterio de duplicar la frecuencia base para obtener la frecuencia de muestreo tal y como se hace con las funciones sinusoidales, no podremos recuperar la función Walsh original como lo vemos en la **figura (1-10)**.



Este muestra lo imposible que es reconstruir la señal $SAL(3,t)$ usando únicamente 6 muestreos, en cambio al usar 8 muestreos que también son validos para $SAL(4,t)$ la señal se recupera completamente.

Capitulo 2

La Transformada Walsh

Capitulo 2

La Transformada Walsh

2.1. El significado de transformar un código

El transformar un código es una secuencia de 2 operaciones, la primera de ellas es una transformación lineal, que transforma un conjunto de N muestras correlacionadas en un conjunto de N muestras o coeficientes no correlacionados, de hecho una transformada optima produce coeficientes no correlacionados los cuales pueden ser cuantificados independientemente con el fin de producir una compresión de los datos.

Por ejemplo N muestras de PCM pueden ser representadas como un vector de la siguiente manera:

$$X^T = [x_0 \ x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{N-1}] \quad (2.1)$$

Y estas son transformadas en N coeficientes en el dominio de la frecuencia o secuencia en el caso de la Transformada Walsh, usando la siguiente expresión, donde A representa dicha transformada:

$$G = AX^T \quad (2.2)$$

El resultado será otro vector:

$$G = [g_0 \ g_1 \ g_2 \ \dots \ g_{N-1}] \quad (2.3)$$

En la ecuación $G = AX^T$, A debe representarse como una matriz $N \times N$, donde sus elementos dependen de la transformada en uso.

La segunda operación es otra operación lineal ya que existe una Matriz B para cada transformada que nos permite realizar el proceso inverso es decir la antitransformada:

$$Y = BG \quad (2.4)$$

$$\text{Donde: } B = A^{-1} \text{ y } G = AX^T$$

$$Y = A^{-1}AX^T = X^T$$

Por lo que el proceso es totalmente reversible. En la práctica la matriz inversa A^{-1} no resulta problema obtenerla debido a que los codificadores utilizan transformadas unitarias:

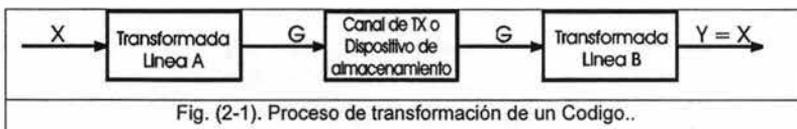
$$A^{-1} = A^T \quad (2.5)$$

Donde T significa la transpuesta y * el conjugado complejo. Las Transformadas sinusoidales, como la transformada del Coseno, Seno y de Fourier, y las no sinusoidales (en el dominio de la secuencia), como la transformada Walsh, Walsh-Hadamard, Haar y Salnt, son todas ellas unitarias.

$$X = A^{*T}G \quad (2.6)$$

Esto significa que la transformación inversa es sencilla de implementar así como la transformada directa.

El modelo de un sistema transformación de código para N muestras puede simplificarse de la siguiente manera:



2.2 La Transformada Discreta Walsh (WDT)

2.2.1 Definición.-

Toda función $f(t)$ que es integrable y además periódica puede ser representada por medio de las series Walsh definidas en el intervalo abierto $(0,1)$, pero en el caso de que ésta función sea no periódica, continua y definida en el intervalo $0 \leq t \leq 1$, para su representación será necesario aplicar el siguiente par de transformación:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} F(k) WAL(k,t) \quad (2.7)$$

$$F(k) = \int_0^1 f(t) WAL(k,t) dt \quad (2.8)$$

Donde la ecuación (2.7) representa la transformada Walsh y la (2.8) la transformada inversa Walsh, pero para usos numéricos es conveniente considerar una transformada discreta donde la función de entrada sea una serie discreta de N términos obtenidos al muestrear dicha función continua en N puntos igualmente espaciados dentro del intervalo abierto (0,1).

N debe ser igual a una potencia de 2, $N = 2^p$. Donde $p = 1, 2, 3 \dots \infty$.

Tomando estas consideraciones de las expresiones (2.7) y (2.8) podemos obtener la Transformada Discreta Walsh (DWT) la cual nos permite transformar una secuencia de N muestras en el dominio del tiempo o espacio en un conjunto de muestras o coeficientes en el dominio espectral de la secuencia, esta definida por la siguiente expresión:

$$X_n = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i WAL(n,i) \quad (2.9)$$

$n = 0, 1, 2 \dots N - 1$

Donde x_i es una valor muestreado de la función original, y **WAL (n,i)** es un valor de la muestra i-ésima de la función Walsh.

Por ejemplo si se desea procesar un conjunto de datos muestreados ($N = 8$), el uso de la expresión (2.9) sería el que se escribe a continuación:

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{1}{8} (x_0 WAL(0,0) + x_1 WAL(0,1) + x_2 WAL(0,2) \dots x_7 WAL(0,7)) \\ X_1 &= \frac{1}{8} (x_0 WAL(1,0) + x_1 WAL(1,1) + x_2 WAL(1,2) \dots x_7 WAL(1,7)) \\ X_2 &= \frac{1}{8} (x_0 WAL(2,0) + x_1 WAL(2,1) + x_2 WAL(2,2) \dots x_7 WAL(2,7)) \\ &\quad \vdots \\ &\quad \vdots \\ X_7 &= \frac{1}{8} (x_0 WAL(7,0) + x_1 WAL(7,1) + x_2 WAL(7,2) \dots x_7 WAL(7,7)) \end{aligned}$$

La transformada discreta inversa Walsh nos permite regresar al dominio del tiempo y esta dada por la expresión:

$$x_i = \sum_{n=0}^{N-1} X_n \text{WAL}(n,i) \quad (2.10)$$

$n = 0, 1, 2 \dots N-1$

En ambas expresiones de la DWT directa (2.9) e inversa (2.10) notamos que la única diferencia entre la transformada y la transformada Walsh inversa es el factor $1/N$, y que en ambas la función $\text{WAL}(n,i)$ toma únicamente valores de ± 1 .

Similarmente se pueden obtener transformadas $X_c(k)$ y $X_s(k)$, utilizando la notación de Harmuth, es decir de las funciones CAL y SAL.

$$X_c(k) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i \text{CAL}(k,i) \quad (2.11)$$

$$X_s(k) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i \text{SAL}(k,i) \quad (2.12)$$

Como un ejemplo numérico de la Transformada Discreta Walsh, suponga que se tomaron 8 muestras $N= 8$, y estas ocho muestras están representadas en una escala de 0 a 255 ya que corresponden a la entrada de PCM. El vector resultante es el siguiente:

$$x_i = [202 \quad 231 \quad 190 \quad 174 \quad 137 \quad 110 \quad 115 \quad 130]$$

Para obtener el vector resultante a la salida reemplazamos los valores del vector de entrada en la expresión (2.9), para los valores correspondientes a $\text{WAL}(n,i)$ nos auxiliaremos de la **figura (2.2)**.

$$X_n = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i \text{WAL}(n,i)$$

$n = 0, 1, 2 \dots N-1$

$$X_0 = 1/8 (202 + 231 + 190 + 174 + 137 + 110 + 115 + 130) = 161.125$$

$$X_1 = 1/8 (202 + 231 + 190 + 174 - 137 - 110 - 115 - 130) = 38.125$$

$$X_2 = 1/8 (202 + 231 - 190 - 174 - 137 - 110 + 115 + 130) = 8.375$$

$$X_3 = 1/8 (202 + 231 - 190 - 174 + 137 + 110 - 115 - 130) = 8.875$$

$$X_4 = 1/8 (202 - 231 - 190 + 174 + 137 - 110 - 115 + 130) = -0.375$$

$$X_5 = 1/8 (202 - 231 - 190 + 174 - 137 + 110 + 115 - 130) = -10.875$$

$$X_6 = 1/8 (202 - 231 + 190 - 174 - 137 + 110 - 115 + 130) = -3.125$$

$$X_7 = 1/8 (202 - 231 + 190 - 174 + 137 - 110 + 115 - 130) = -0.125$$

El vector de salida resultante al aplicar la transformada Discreta Walsh será:

$$X_k = [161.125 \quad 38.125 \quad 8.375 \quad 8.875 \quad -0.375 \quad -10.875 \quad -3.125 \quad -0.125]$$

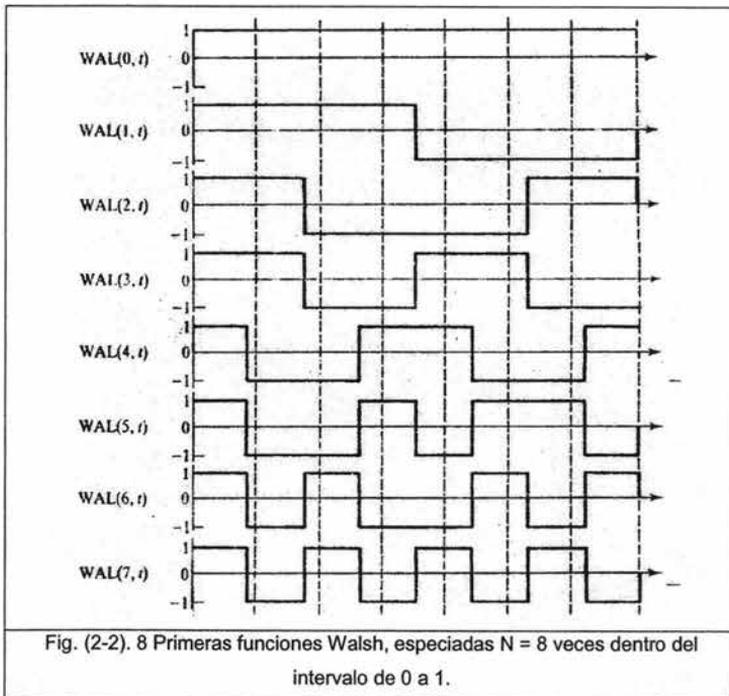


Fig. (2-2). 8 Primeras funciones Walsh, especiadas N = 8 veces dentro del intervalo de 0 a 1.

2.1.2 Representación de la transformada en forma Matricial

La transformada discreta Walsh puede ser definida de una forma mas sencilla y calculada de manera más rápida utilizando una multiplicación de matrices, para su cálculo la expresión matemática que la define es la siguiente:

$$X_k = \left(\frac{1}{N}\right) x_i W_{ki} \tag{2.13}$$

Y la Transformada Inversa Walsh esta definida por:

$$x_i = X_k W_{ki} \tag{2.14}$$

Donde $x_i = [x_0 \ x_1 \ x_2 \dots \ x_{N-1}]^T$ es la secuencia de datos muestreados y W_{ki} es la matriz que contiene las N primeras funciones Walsh:

$$W_{ki} = \begin{bmatrix} W_{01} & W_{02} & \dots & W_{0,N-1} \\ W_{11} & & & W_{1,N-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ W_{N-1,1} & W_{N-1,2} & \dots & W_{N-1,N-1} \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

Obteniendo $X_i = [X_0 \ X_1 \ X_2 \dots \ X_{N-1}]$ que son los N -1 componentes de la DWT. Notamos que W_{ki} es una matriz de $N \times N$ donde N es el número de muestras obtenidas de nuestra señal a transformar, por lo que si hay N datos muestreados necesitamos considerar las N primeras funciones Walsh, cada una muestreada N veces. La k -ésima fila de W_{ki} corresponde a los N valores muestreados a la k -ésima secuencia Walsh.

Por ejemplo para una matriz de $N = 8$ las filas 5 y 6 de la matriz Walsh tendrían los siguientes elementos:

$$\begin{aligned} WAL(4, i) &= [+1 \quad -1 \quad -1 \quad +1 \quad +1 \quad -1 \quad -1 \quad +1] \\ WAL(5, i) &= [+1 \quad -1 \quad -1 \quad +1 \quad -1 \quad +1 \quad +1 \quad -1] \end{aligned}$$

La matriz resultante para $N=8$ se muestra a continuación, como vimos en el capitulo 1 esta tiene la propiedad de ser simétricas y diferentes métodos para obtener la secuencia de cada fila:

$$W_8 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Así el ejemplo anterior teniendo en cuenta el mismo vector de entrada, así como los valores de W_8 , aplicamos la relación (2.13) y tenemos:

$$X = \left(\frac{1}{8}\right) [202 \quad 231 \quad 190 \quad 174 \quad 137 \quad 110 \quad 115 \quad 130] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

El resultado en el vector de salida será:

$$X = [161.12 \quad 38.12 \quad 8.37 \quad 8.87 \quad -0.37 \quad -10.87 \quad -3.12 \quad -0.12]$$

Al aplicar la antitransformada Walsh utilizando como vector de entrada el resultado anterior apoyándonos en la relación (2.14) tenemos:

$$x = [161.12 \quad 38.12 \quad 8.37 \quad 8.87 \quad -0.37 \quad -10.87 \quad -3.12 \quad -0.12] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

El resultado en el vector de salida será:

$$x = [202 \ 230.97 \ 189.99 \ 173.99 \ 137 \ 110 \ 115 \ 130]$$

Como observamos el vector obtenido a la salida de la antitransformada es muy similar al vector que originalmente se tenía, esta pequeña diferencia, radica en que en la operación de multiplicación de la transformada por el factor (1/8) únicamente se consideraron 2 cifras decimales, de tomarse mas de estas cifras en cuenta, la precisión en los resultados aumentara indudablemente, cabe señalar que la multiplicación entre el vector de datos y la matriz W_8 , no es una multiplicación como tal si no que son mas bien operaciones aritméticas, por lo que si se consideran muestras PCM en el vector de entrada estas tendrán valores enteros únicamente, siendo el factor (1/8) como se dijo anteriormente el que proporciona las cifras decimales, al efectuar la transformada.

2.2.3 Transformada Walsh-Paley

Esta transformada utiliza para su cálculo una matriz de transformación bajo el ordenamiento Walsh natural o PAL, la expresión matemática que la define es la siguiente:

$$X_{WP_k} = \left(\frac{1}{N} \right) x_i P_{ki} \quad (2.16)$$

Y la transformada inversa Walsh- Paley esta definida por:

$$x_i = X_k P_{ki} \quad (2.17)$$

Donde $x_i = [x_0 \ x_1 \ x_2 \dots \ x_{N-1}]^T$ es la secuencia de datos muestreados y P_{ki} es la matriz que contiene las N primeras funciones Walsh de orden Natural.

2.2.4 Efecto del corrimiento circular

La transformada discreta de Fourier es invariante a la fase de la señal de entrada por lo que la misma descomposición espectral puede obtenerse independientemente a la fase o recorrimiento de la señal de entrada, este no es el caso para la transformada Discreta Walsh.

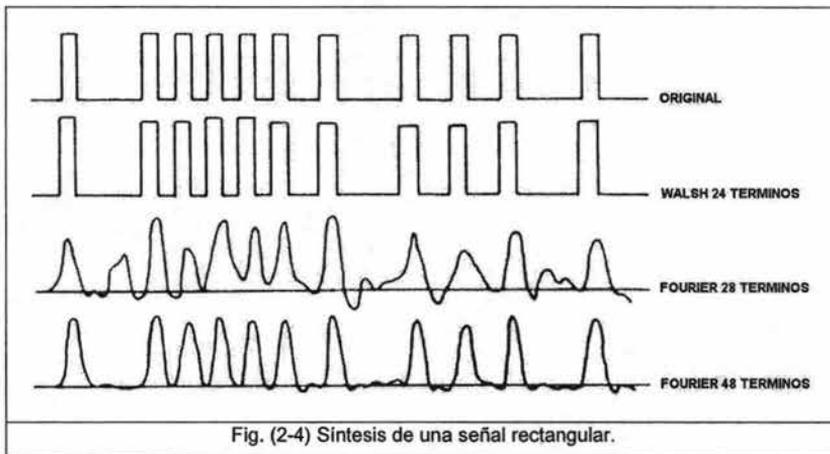
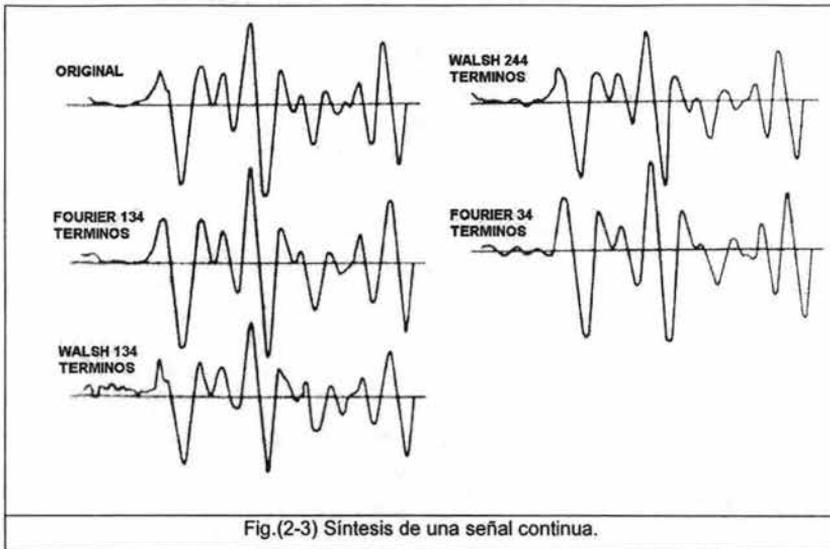
2.3 Comparación entre la transformada discreta Walsh y la transformada discreta de Fourier.

Las ventajas que ofrecen las series Walsh sobre Fourier en la síntesis de una señal compleja pueden estudiarse de diversas formas, pero dependen fundamentalmente del tipo de señal a sintetizar en función del tiempo, ya que las señales puramente digitales tienen promedios de tiempo muy pequeños mientras que señales analógicas tienen resoluciones de tiempo muy grandes incluso de días.

Es por eso que las comparaciones entre ambas transformadas podemos ilustrarlas mejor mediante el siguiente procedimiento:

Tenemos dos señales de similares características a las descritas anteriormente, a ambas se les aplica la transformada Walsh y Fourier y son normalizadas para darle el valor de la unidad a la frecuencia o secuencia mas alta. Además tomamos un criterio de discriminación de los coeficientes obtenidos de las transformadas que llamaremos R , este criterio nos permitirá conservar todos aquellos coeficientes que tengan un valor mayor a R , los que se encuentren por debajo de este valor serán desechados, eliminando así todos aquellos coeficientes que tengan valores muy pequeños reemplazándolos con ceros. Como consecuencia podemos limitar el número de coeficientes con los cuales llevaremos a cabo la reconstrucción de la señal.

La exactitud de la síntesis de estas señales puede observarse las **figuras (2-3) y (2-4)**:



En la primera (**Figura 2-3**) se muestra el efecto de la transformación, discriminación de coeficientes y reconstrucción de una señal analógica continua, que podría ser una señal sísmica, aproximadamente el doble de coeficientes Walsh se requieren para dar una exactitud similar a la de Fourier.

En la segunda de ellas (**Figura 2-4**) se muestra la transformación, discriminación de coeficientes y reconstrucción de una señal rectangular, claramente se ve que la transformada Walsh es más eficiente que la de Fourier, utilizando menos coeficientes y dándole una elevada exactitud.

De ambas observaciones concluimos que la transformación de señales continuas resulta más favorable utilizando Fourier, aunque en una señal rectangular precisamente una señal discontinua la reconstrucción resulta más eficiente al utilizar la transformada Walsh.

Ahora discutiremos las características de estas transformadas pero ya no tomaremos como parámetro la continuidad o discontinuidad en el tiempo sino que las analizaremos de manera discreta, viendo los efectos de los niveles de cuantización e intervalos de muestreo.

Sabemos que los intervalos de muestreo generalmente son tiempos mas pequeños que el intervalo indicado por Nyquist, y la reconstrucción usando la transformada de Fourier resulta una interpolación lineal entre los puntos muestreados, de la señal original. Lo que limita en este caso a la Transformada Walsh, en que el orden de la función Walsh mayor que compone dicha transformada, determina el nivel de cuantización de la señal reconstruida.

Por ejemplo al aplicar la transformada Walsh a una señal y aplicar nuevamente el criterio de discriminación de coeficientes se obtuvo como resultado que 24 de ellos eran diferentes de cero, y entre ellos la función de mayor orden encontrada es $WAL(128,t)$, si sabemos que el número de intervalos en que esta dividida la base tiempo es $N = 1024$, el numero mínimo de puntos de cuantización en los que se reconstruirá la señal será $1024/128 = 8$, limitando así a un valor finito, la exactitud de la representación de la señal.

En cambio con la transformada de Fourier no se encuentra esta limitación en la base de tiempo y se puede obtener una aproximación muy cercana a la función original.

A continuación se muestra los niveles de cuantización para una señal continua y una señal escalón:

No de niveles de cuantización	No de Términos Señal Continua	
	Fourier	Walsh
4	24	43
8	11	25
37	9	23
74	10	25

Tabla (VII)

No de niveles de cuantización	No de Términos Señal Escalón	
	Fourier	Walsh
12	34	24
25	34	24
50	33	24

Tabla (VIII)

En general mientras los niveles permitidos de cuantización se eleven, menos coeficientes se necesitarán para representar a una señal en el dominio de la secuencia o frecuencia.

Como se esperaba el número de coeficientes requeridos para reconstruir una señal continua es mayor en la transformada Walsh, y la razón entre los términos Walsh y Fourier permanece constante a pesar del incremento en los niveles de cuantización.

En funciones discontinuas la cantidad de términos parece ser insensible al aumento de los niveles de cuantización en ambas transformadas.

Concluimos que para señales rectangulares que son generalmente las que se obtienen a la salida de sistemas digitales la transformada Walsh tiene algunas ventajas sobre la de Fourier, particularmente si la señal puede relacionarse de manera binaria a la base de tiempo de las series Walsh.

Un criterio que nos permite medir el nivel de eficiencia en la reconstrucción de una señal es por medio de la técnica del error cuadrático medio.

Esta técnica nos dice que si la señal original muestreada x_i , se le aplica un criterio de selección de coeficientes y se reconstruye a partir de este limitado número de coeficientes y nos da como resultado y_i , el error cuadrático medio M.S.E. (Mean-Square Error) será:

$$M.S.E. = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - y_i)^2 \quad (2.18)$$

De la relación anterior se hizo un estudio para una señal $Sen(x/x)$ utilizando la transformada Fourier y Walsh y se observó que para su reconstrucción, debido a que esta señal esta relacionada estrechamente con la serie de Fourier, cuando se utilizo esta última transformada, se encontro el menor error cuando N es pequeño.

Mientras el número de muestreos se fue elevando la reconstrucción usando la Transformada Walsh dio el menor error para $N > 32$.

La transformada discreta de Fourier esta definida por la siguiente expresión matemática:

$$X_f = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i \exp(-j2\pi i f / N) \quad (2.19)$$

$$f = 0, 1, 2 \dots N-1$$

Si la comparamos con la expresión (2.3), se nota claramente que $WAL(n,i)$ es real y limitada a valores ± 1 , mientras que $\exp(-j\pi i f / N)$ es complejo y puede asumir N diferentes valores para cada coeficiente.

Como conclusión podría afirmarse que la transformada Walsh demuestra ser considerablemente mas fácil y rápida de procesar usando métodos digitales, además que en su obtención únicamente involucra adiciones y sustracciones, mientras que la TDF involucra multiplicación y operaciones con números complejos.

La obtención de la transformada discreta Walsh resulta ser mas precisa, que la TDF debido a que las funciones seno - cosenoidales que intervienen en su obtención no se pueden representar de manera exacta por un número finito de bits, y son truncadas por el sistema mediante ruido.

Finalmente en la tabla siguiente se muestra un sumario que compara las características de la Transformada Fourier y Walsh.

Características de la Transformada de FOURIER	
Indice de tiempo	i
Indice de frecuencia	n
Función Sen	$\text{sen}\left(\frac{2\pi n i}{N}\right)$
Funcion Cos	$\text{cos}\left(\frac{2\pi n i}{N}\right)$
Función Compleja	$\exp\left(j\frac{2\pi n i}{N}\right) = \text{cos}\left(\frac{2\pi n i}{N}\right) + j\text{sen}\left(\frac{2\pi n i}{N}\right)$
Serie en el tiempo	$x_i = A_0 + A_1 \exp\left(\frac{j2\pi n i}{N}\right) + A_2 \exp\left(\frac{j4\pi n i}{N}\right) + \dots + A_{N-1} \exp\left(\frac{j2\pi n i(N-1)}{N}\right)$
Coefficientes complejos de frecuencia	$A_0, A_1 \dots A_N$
Serie de Fourier	$x_i = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N/2} \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi n i}{N}\right) + b_n \text{sen}\left(\frac{2\pi n i}{N}\right) \right)$
Transformada de Fourier	$X_n = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i \exp\left(-j\frac{2\pi n i}{N}\right)$
Transformada Inversa de Fourier	$x_i = \sum_{n=0}^{N-1} X_n \exp\left(j\frac{2\pi n i}{N}\right)$
Transformada del Coseno de Fourier	$X_c(f) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i \cos\left(\frac{2\pi n i}{N}\right) \quad f = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}$
Transformada del Seno de Fourier	$X_s(f) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i \text{sen}\left(\frac{2\pi n i}{N}\right) \quad f = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}$

Tabla (IX)

Características de la Transformada WALSH	
Indice de tiempo	i
Indice de Secuencia	k
Indice del orden Walsh	n
Función Cal	$CAL(k, i) = WAL(2k, i)$
Función SAL	$SAL(k, i) = WAL(2k - 1, i)$
Función Walsh	$WAL(n, i) = WAL(i, n)$
Serie en el tiempo	$x_i = a_0 WAL(0, i) + a_1 WAL(1, i) + \dots + a_{N-1} WAL(N - 1, i)$
Coefficientes de secuencia	$a_0, a_1 \dots a_{N-1}$
Serie Walsh	$x_i = a_0 WAL(0, i) + \sum_{m=1}^{N/2} \sum_{p=1}^{N/2} (a_m SAL(m, i) + b_p CAL(p, i))$
Transformada Walsh	$X_n = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i WAL(n, i)$
Transformada Inversa Walsh	$x_i = \sum_{n=0}^{N-1} X_n WAL(n, i)$
Transformada Walsh Cal	$X_C(k) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i CAL(k, i) \quad k = 1, 2 \dots \frac{N}{2}$
Transformada Walsh Sal	$X_S(k) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i SAL(k, i) \quad k = 1, 2 \dots \frac{N}{2}$

Tabla (X)

2.4 Transformada Rápida Walsh

La base de la eficiencia en la implementación de la transformada Walsh radica en que existe un alto grado de redundancia en la matriz de transformación Walsh, si esta redundancia de alguna manera pudiera eliminarse usando una factorización matricial, seguramente lograríamos elevar la eficiencia en la transformación, bajo este principio es que la Transformada Rápida Walsh FWT (por sus siglas en ingles Fast Walsh Transform) opera.

El cálculo de la transformada Walsh utilizando la expresión (2.9) requiere $2N^2$ operaciones matemáticas (adición o sustracción), Usando las técnicas de factorización matricial se puede desarrollar un algoritmo con el que solo $N \log_2 N + N$ operaciones matemáticas sean suficientes para obtener la transformada Walsh. En particular para la obtención de este algoritmo N debe ser un potencia de 2, ya que es esencial para realizar la factorización.

2.4.1 Algoritmo general de la trasformada rápida Walsh

La obtención de un algoritmo rápido teniendo coeficientes ordenados secuencialmente puede iniciarse a partir de la siguiente igualdad para las funciones Walsh:

$$WAL(n, i) = \prod_{r=0}^{p-1} (-1)^{n_{p-1-r} (i_r + i_{r+1})} \quad (2.20)$$

$$i, n = 0, 1, 2 \dots N-1$$

$$r = 0, 1, 2 \dots p$$

Aquí i y n están expresados en términos binarios, i_r así como n_r solo podrán tener valores de 0 o 1, y así se manejarán durante todo algoritmo.

$$i = (i_{p-1}, i_{p-2} \dots i_1, i_0)_2 \quad (2.21)$$

El algoritmo se desarrolla reemplazando la ecuación (2.20) en la ecuación (2.9) y factorizando el cálculo en p diferentes etapas. Llevado a cabo esta sustitución nosotros obtenemos una expresión de suma y producto para la transformada discreta Walsh denotada por:

$$X_n = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i WAL(n, i) = \frac{1}{N} \prod_{r=0}^{p-1} \sum_{i_r=0}^1 (-1)^{n_{p-1-r}(i_r+i_{r+1})} X_{(i_{p-1} \dots i_0)} \quad (2.22)$$

$$X_n = \sum_{i=0}^{N-1} x_i WAL(n, i) = \prod_{r=0}^{p-1} \sum_{i_r=0}^1 (-1)^{n_{p-1-r}(i_r+i_{r+1})} X_{(i_{p-1} \dots i_0)}$$

Aquí x_i se expresa como $x_{(i_{p-1} \dots i_0)}$ y X_n se expresa como $X_{(n_{p-1} \dots n_0)}$ donde i_p y n_p son los bits binarios de i así como de n con $r = 0, 1, 2, \dots, p$.

El cálculo de la transformada Walsh se lleva a cabo en series de varias fases, una fase por cada potencia de 2 para N .

La primera fase de cálculos se hace para obtener unos coeficientes parciales de transformación A_n ($r = 1$), a partir de los coeficientes de entrada x_i , estos últimos deben obtenerse poniendo $r = 0$ en la ecuación (2.22), así obtenemos los coeficientes parciales de la primera fase ($r = 1$) a partir de los coeficientes de entrada ($r = 0$):

$$A_1(n_{p-1}, i_{p-1} \dots i_1) = \sum_{i_0=0}^1 (-1)^{n_{p-1}(i_0+i_1)} X_{(i_{p-1} \dots i_0)} \quad (2.23)$$

Las fases siguientes se deben de calcular a partir de los resultados obtenidos en las fases previas. La ecuación general para fases intermedias ($r > 1$) de transformación es:

$$A_r(n_{p-1}, n_{p-2}, \dots, n_{p-r}; i_{p-1}, i_{p-2}, \dots, i_r) = \sum_{i_{r-1}=0}^1 (-1)^{n_{p-r}(i_r+i_{r-1})} A_{r-1}(n_{p-1} \dots n_{p-r+1}; i_{p-1} \dots i_{r-1}) \quad (2.24)$$

Los valores de A_0 hasta A_p deberán ser retenidos en un almacenamiento temporal durante el cálculo en curso.

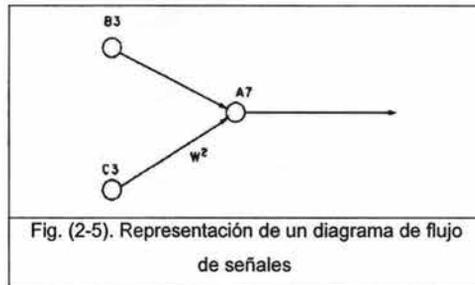
Finalmente debemos normalizar el resultado por una división entre N :

$$X_{(n_{p-1}, n_{p-2}, \dots, n_0)} = \frac{1}{N} A_{p(n_{p-1}, n_{p-2}, \dots, n_0)} \quad (2.25)$$

Así el cálculo completo de los coeficientes de la transformada se debe realizar en $N/\log_2 N$ operaciones aritméticas que en comparación de las N^2 operaciones demandadas por el método directo resulta efectivamente una gran ventaja.

2.4.2 Diagramas de flujos de señales

El cómputo, diseño e implementación de los algoritmos de la transformada rápida Walsh puede desarrollarse de una manera eficiente si se utiliza un diagrama de flujo. Estos consisten en una serie de nodos, cada uno representa una variable que se origina por la suma de otras variables de la parte izquierda del diagrama, esta suma se representa por medio de flechas que salen de los nodos a sumar y llegan a un mismo nodo que es la variable resultante. El valor y signo de los sumandos se modifica dependiendo el valor que se tenga indicado a un lado de la flecha que salga del nodo en cuestión. Por ejemplo se tiene el diagrama de flujo de la **figura (2-5)**:



Este nos indica que la variable A7 se origina de los nodos B3 y C3 este último multiplicado por el valor de W^2 , los cual matemáticamente resulta:

$$A7 = B3 + W^2.C3$$

2.4.3 Obtención del algoritmo FWT para N = 16

Teniendo en cuenta las ecuaciones enunciadas en el punto 2.4.1, las analizaremos de una manea mas profunda, desarrollando un ejemplo, para observar como se calculan estos coeficientes el caso de $N = 16$.

Comenzaremos definiendo los valores de i , n , r y p :

- Para $i, n = 0, 1, 2, 3 \dots 15$ (ó $N-1$).
- Los valores de i y n deben expresarse en binario de acuerdo a la expresión (2.21), $i(i_3, i_2, i_1, i_0)$ y $n(n_3, n_2, n_1, n_0)$
- De la misma expresión (2.21) si $p-1 = 3$, $p = 4$.
- $r = 0, 1, 2, 3, 4$.

Para la primera fase de nuestro algoritmo haremos $r = 1$. Al aplicar la ecuación (2.23) nos percatamos que al ir alternando el valor de i_0 entre 0 y 1, estamos tomando pares adyacentes de datos muestreados, vamos a tomar los dos primeros y observaremos el bit i_1 en x_i . Cuatro valores de, se obtienen.

$$(-1)^{n_{p-1}(i_0+i_1)} \quad \text{Para } i_0 = 0 \text{ ó } 1, \quad n_{p-1} = 0 \text{ ó } 1$$

Esto nos indica si debemos de sumar o restar los dos valores adyacentes de x_i y x_{i+1} (donde i e $i+1$ so valores decimales). De estas sumas y restas los dos valores intermedios se obtienen como:

$$x_i + x_{i+1} \quad \text{y ó} \quad x_i - x_{i+1} \quad \text{ó} \quad x_{i+1} - x_i$$

Dependiendo del signo $(-1)^{n_{p-1}(i_0+i_1)}$ trabajado antes. Este proceso se realiza para los datos adyacentes x_i restantes. Es así como básicamente se desarrolla el algoritmo, la base se concentra en determinar el tipo de operación que se realiza entre dos datos adyacentes.

Retomando el cálculo de la primera fase ($r = 1$), la ecuación (2.20) quedaría:

$$A_1(n_3 ; i_3, i_2, i_1) = \sum_{i_0=0}^1 (-1)^{n_3(i_0+i_1)} x_{(i_3, i_2, i_1, i_0)}$$

Con la que calcularemos las 15 variables de salida de esta primera fase. El cálculo se resume en la tabla a continuación:

Fase 1 (r = 1)		
$A_1 =$	$X_i + X_{i+1}$	Notación decimal
$A_1(0 ; 0,0,0) =$	$X_{(0,0,0,0)} + X_{(0,0,0,1)}$	$A_0 = X_0 + X_1$
$A_1(0 ; 0,0,1) =$	$X_{(0,0,1,0)} + X_{(0,0,1,1)}$	$A_1 = X_2 + X_3$
$A_1(0 ; 0,1,0) =$	$X_{(0,1,0,0)} + X_{(0,1,0,1)}$	$A_2 = X_4 + X_5$
$A_1(0 ; 0,1,1) =$	$X_{(0,1,1,0)} + X_{(0,1,1,1)}$	$A_3 = X_6 + X_7$
$A_1(0 ; 1,0,0) =$	$X_{(1,0,0,0)} + X_{(1,0,0,1)}$	$A_4 = X_8 + X_9$
$A_1(0 ; 1,0,1) =$	$X_{(1,0,1,0)} + X_{(1,0,1,1)}$	$A_5 = X_{10} + X_{11}$
$A_1(0 ; 1,1,0) =$	$X_{(1,1,0,0)} + X_{(1,1,0,1)}$	$A_6 = X_{12} + X_{13}$
$A_1(0 ; 1,1,1) =$	$X_{(1,1,1,0)} + X_{(1,1,1,1)}$	$A_7 = X_{14} + X_{15}$
$A_1(1 ; 0,0,0) =$	$X_{(0,0,0,0)} - X_{(0,0,0,1)}$	$A_8 = X_0 - X_1$
$A_1(1 ; 0,0,1) =$	$-X_{(0,0,1,0)} + X_{(0,0,1,1)}$	$A_9 = -X_2 + X_3$
$A_1(1 ; 0,1,0) =$	$X_{(0,1,0,0)} - X_{(0,1,0,1)}$	$A_{10} = X_4 - X_5$
$A_1(1 ; 0,1,1) =$	$-X_{(0,1,1,0)} + X_{(0,1,1,1)}$	$A_{11} = -X_6 + X_7$
$A_1(1 ; 1,0,0) =$	$X_{(1,0,0,0)} - X_{(1,0,0,1)}$	$A_{12} = X_8 - X_9$
$A_1(1 ; 1,0,1) =$	$-X_{(1,0,1,0)} + X_{(1,0,1,1)}$	$A_{13} = -X_{10} + X_{11}$
$A_1(1 ; 1,1,0) =$	$X_{(1,1,0,0)} - X_{(1,1,0,1)}$	$A_{14} = X_{12} - X_{13}$
$A_1(1 ; 1,1,1) =$	$-X_{(1,1,1,0)} + X_{(1,1,1,1)}$	$A_{15} = -X_{14} + X_{15}$

Tabla (XI)

La fase 2 de nuestro cálculo lo realizamos tomando $r = 2$ y utilizando la ecuación (2.21) la cual una vez sustituidos las variables quedaría establecida:

$$A_2(n_3, n_2 ; i_3, i_2) = \sum_{i_1=0}^1 (-1)^{n_2(i_2+i_1)} A_1(n_3 ; i_3, i_2, i_1)$$

El cálculo se resume en la tabla a continuación:

Fase 2 ($r = 2$)		
$A_2 =$	$A_i + A_{i+1}$	Notación decimal
$A_2(0,0;0,0) =$	$A_1(0;0,0,0) + A_1(0;0,0,1)$	$B_0 = A_0 + A_1$
$A_2(0,0;0,1) =$	$A_1(0;0,1,0) + A_1(0;0,1,1)$	$B_1 = A_2 + A_3$
$A_2(0,0;1,0) =$	$A_1(0;1,0,0) + A_1(0;1,0,1)$	$B_2 = A_4 + A_5$
$A_2(0,0;1,1) =$	$A_1(0;1,1,0) + A_1(0;1,1,1)$	$B_3 = A_6 + A_7$
$A_2(0,1;0,0) =$	$A_1(0;0,0,0) - A_1(0;0,0,1)$	$B_4 = A_0 - A_1$
$A_2(0,1;0,1) =$	$-A_1(0;0,1,0) + A_1(0;0,1,1)$	$B_5 = -A_2 + A_3$
$A_2(0,1;1,0) =$	$A_1(0;1,0,0) - A_1(0;1,0,1)$	$B_6 = A_4 - A_5$
$A_2(0,1;1,1) =$	$-A_1(0;1,1,0) + A_1(0;1,1,1)$	$B_7 = -A_6 + A_7$
$A_2(1,0;0,0) =$	$A_1(1;0,0,0) + A_1(1;0,0,1)$	$B_8 = A_8 + A_9$
$A_2(1,0;0,1) =$	$A_1(1;0,1,0) + A_1(1;0,1,1)$	$B_9 = A_{10} + A_{11}$
$A_2(1,0;1,0) =$	$A_1(1;1,0,0) + A_1(1;1,0,1)$	$B_{10} = A_{12} + A_{13}$
$A_2(1,0;1,1) =$	$A_1(1;1,1,0) + A_1(1;1,1,1)$	$B_{11} = A_{14} + A_{15}$
$A_2(1,1;0,0) =$	$A_1(1;0,0,0) - A_1(1;0,0,1)$	$B_{12} = A_8 - A_9$
$A_2(1,1;0,1) =$	$-A_1(1;0,1,0) + A_1(1;0,1,1)$	$B_{13} = -A_{10} + A_{11}$
$A_2(1,1;1,0) =$	$A_1(1;1,0,0) - A_1(1;1,0,1)$	$B_{14} = A_{12} - A_{13}$
$A_2(1,1;1,1) =$	$-A_1(1;1,1,0) + A_1(1;1,1,1)$	$B_{15} = -A_{14} + A_{15}$

Tabla (XII)

La fase 3 la realizamos tomando $r = 3$ y utilizando la ecuación (2.21) la cual queda establecida:

$$A_3(n_3, n_2, n_1; i_3) = \sum_{i_2=0}^1 (-1)^{n_1(i_3+i_2)} A_2(n_3, n_2; i_3, i_2)$$

El cálculo se resume en la tabla a continuación:

Fase 3 (r = 3)		
$A_3 =$	$A_i + A_{i+1}$	Notación decimal
$A_3(0,0,0 ; 0) =$	$A_2(0,0 ; 0,0) + A_2(0,0 ; 0,1)$	$C_0 = B_0 + B_1$
$A_3(0,0,0 ; 1) =$	$A_2(0,0 ; 1,0) + A_2(0,0 ; 1,1)$	$C_1 = B_2 + B_3$
$A_3(0,0,1 ; 0) =$	$A_2(0,0 ; 0,0) - A_2(0,0 ; 0,1)$	$C_2 = B_0 - B_1$
$A_3(0,0,1 ; 1) =$	$-A_2(0,0 ; 1,0) + A_2(0,0 ; 1,1)$	$C_3 = -B_2 + B_3$
$A_3(0,1,0 ; 0) =$	$A_2(0,1 ; 0,0) + A_2(0,1 ; 0,1)$	$C_4 = B_4 + B_5$
$A_3(0,1,0 ; 1) =$	$A_2(0,1 ; 1,0) + A_2(0,1 ; 1,1)$	$C_5 = B_6 + B_7$
$A_3(0,1,1 ; 0) =$	$A_2(0,1 ; 0,0) - A_2(0,1 ; 0,1)$	$C_6 = B_4 - B_5$
$A_3(0,1,1 ; 1) =$	$-A_2(0,1 ; 1,0) + A_2(0,1 ; 1,1)$	$C_7 = -B_6 + B_7$
$A_3(1,0,0 ; 0) =$	$A_2(1,0 ; 0,0) + A_2(1,0 ; 0,1)$	$C_8 = B_8 + B_9$
$A_3(1,0,0 ; 1) =$	$A_2(1,0 ; 1,0) + A_2(1,0 ; 1,1)$	$C_9 = B_{10} + B_{11}$
$A_3(1,0,1 ; 0) =$	$A_2(1,0 ; 0,0) - A_2(1,0 ; 0,1)$	$C_{10} = B_8 - B_9$
$A_3(1,0,1 ; 1) =$	$-A_2(1,0 ; 1,0) + A_2(1,0 ; 1,1)$	$C_{11} = -B_{10} + B_{11}$
$A_3(1,1,0 ; 0) =$	$A_2(1,1 ; 0,0) + A_2(1,1 ; 0,1)$	$C_{12} = B_{12} + B_{13}$
$A_3(1,1,0 ; 1) =$	$A_2(1,1 ; 1,0) + A_2(1,1 ; 1,1)$	$C_{13} = B_{14} + B_{15}$
$A_3(1,1,1 ; 0) =$	$A_2(1,1 ; 0,0) - A_2(1,1 ; 0,1)$	$C_{14} = B_{12} - B_{13}$
$A_3(1,1,1 ; 1) =$	$-A_2(1,1 ; 1,0) + A_2(1,1 ; 1,1)$	$C_{15} = -B_{14} + B_{15}$

Tabla (XIII)

La fase 4 de nuestro cálculo lo realizamos tomando $r = 4$ y utilizando la ecuación (2.21) la cual queda establecida:

$$A_4(n_3, n_2, n_1, n_0) = \sum_{i_3=0}^1 (-1)^{n_0(i_3)} A_3(n_3, n_2, n_1 ; i_3)$$

El cálculo se resume en la tabla a continuación:

Fase 4 (r = 4)		
$A_4 =$	$A_i + A_{i+1}$	Notación decimal
$A_4(0,0,0,0) =$	$A_3(0,0,0; 0) + A_3(0,0,0; 1)$	$D_0 = C_0 + C_1$
$A_4(0,0,0,1) =$	$A_3(0,0,0; 0) - A_3(0,0,0; 1)$	$D_1 = C_0 - C_1$
$A_4(0,0,1,0) =$	$A_3(0,0,1; 0) + A_3(0,0,1; 1)$	$D_2 = C_2 + C_3$
$A_4(0,0,1,1) =$	$A_3(0,0,1; 0) - A_3(0,0,1; 1)$	$D_3 = C_2 - C_3$
$A_4(0,1,0,0) =$	$A_3(0,1,0; 0) + A_3(0,1,0; 1)$	$D_4 = C_4 + C_5$
$A_4(0,1,0,1) =$	$A_3(0,1,0; 0) - A_3(0,1,0; 1)$	$D_5 = C_4 - C_5$
$A_4(0,1,1,0) =$	$A_3(0,1,1; 0) + A_3(0,1,1; 1)$	$D_6 = C_6 + C_7$
$A_4(0,1,1,1) =$	$A_3(0,1,1; 0) - A_3(0,1,1; 1)$	$D_7 = C_6 - C_7$
$A_4(1,0,0,0) =$	$A_3(1,0,0; 0) + A_3(1,0,0; 1)$	$D_8 = C_8 + C_9$
$A_4(1,0,0,1) =$	$A_3(1,0,0; 0) - A_3(1,0,0; 1)$	$D_9 = C_8 - C_9$
$A_4(1,0,1,0) =$	$A_3(1,0,1; 0) + A_3(1,0,1; 1)$	$D_{10} = C_{10} + C_{11}$
$A_4(1,0,1,1) =$	$A_3(1,0,1; 0) - A_3(1,0,1; 1)$	$D_{11} = C_{10} - C_{11}$
$A_4(1,1,0,0) =$	$A_3(1,1,0; 0) + A_3(1,1,0; 1)$	$D_{12} = C_{12} + C_{13}$
$A_4(1,1,0,1) =$	$A_3(1,1,0; 0) - A_3(1,1,0; 1)$	$D_{13} = C_{12} - C_{13}$
$A_4(1,1,1,0) =$	$A_3(1,1,1; 0) + A_3(1,1,1; 1)$	$D_{14} = C_{14} + C_{15}$
$A_4(1,1,1,1) =$	$A_3(1,1,1; 0) - A_3(1,1,1; 1)$	$D_{15} = C_{14} - C_{15}$

Tabla (XIV)

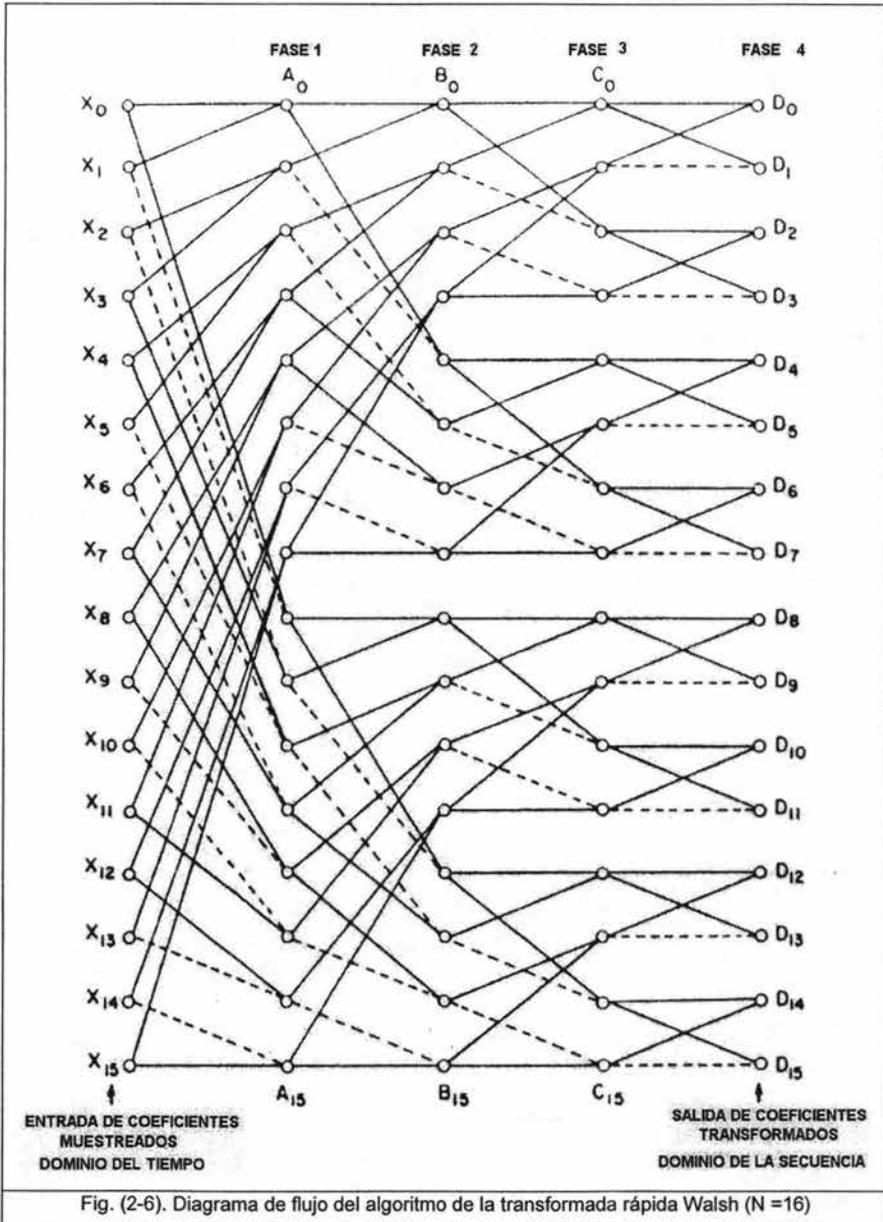
Finalmente solo restaría normalizar el resultado por $(1/N)$, la expresión (2.22) quedaría:

$$X_{(n_3, n_2, n_1, n_0)} = \frac{1}{16} A_4(n_3, n_2, n_1, n_0)$$

Y así obtenemos los 16 valores de respuesta de la transformada Walsh, solo requerimos realizar en 80 operaciones aritméticas, en lugar de las 512 operaciones que habríamos realizado utilizando la transformada Walsh simple.

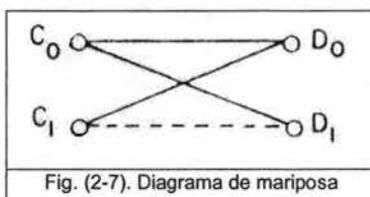
Teniendo en cuenta estas recomendaciones en el punto 2.4.2 podemos graficar el diagrama de flujo del algoritmo de la transformada rápida Walsh secuencialmente ordenada que obtuvimos anteriormente, **figura (2.6)**, las líneas sólidas representan una

multiplicación por (+1), mientras que las líneas punteadas representa una multiplicación por (-1) de la variable que sale del nodo, antes de la sumatoria se realice.



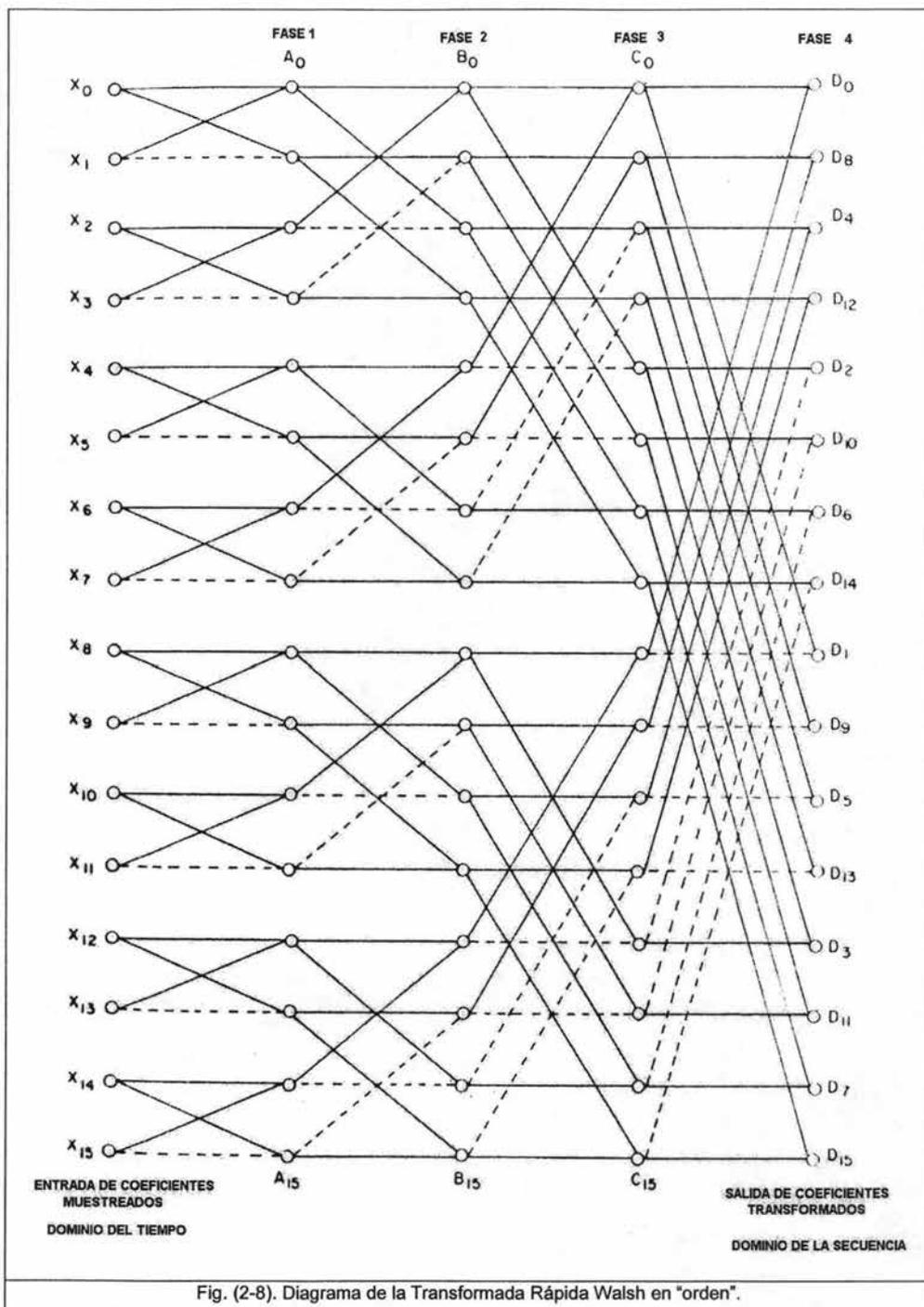
2.4.4 Algoritmos en orden

Si analizamos la ultima fase del algoritmo mostrado en la **figura (2.6)** nos damos cuenta que los valores de salida se obtiene de la combinación de sus dos valores previos. Como se muestra en la figura siguiente:



A este arreglo se le conoce como diagrama de mariposa. Aquí las variable de salida D_1 y D_2 se obtienen de la combinación lineal de C_1 y C_2 , aunque para el caso de D_2 se tenga que modificar el signo de C_2 . Estas mariposas tienen una ventaja inherente de gran ayuda, ya que en las fases de transformación una vez que se lee un par de datos estos pueden reemplazarse por un par de resultados, lo cual hace que no sea necesario que se almacenen todos los valores involucrados en la transformación, si no que se administre la memoria de una manera eficiente, donde los resultados obtenidos sustituyen el lugar de los valores iniciales.

En la **figura (2-8)** se muestra una diagrama de un algoritmo de estas características, los resultados obtenidos están en bits de orden invertido, por lo cual se necesita de un algoritmo que proporcione los resultados en orden secuencial. Pero como podrá notarse el cálculo del algoritmo no requiere de almacenamientos de los resultados en las fases intermedias.



2.5. Transformada Walsh Bidimensional.

La transformada bidimensional finita de un arreglo bidimensional $X_{i,j}$ de N^2 puntos se obtiene por la expresión:

$$X_{m,n} = \frac{1}{N^2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} x_{i,j} WAL(n,i) WAL(m,j) \quad (2.26)$$

Y la transformada inversa por:

$$x_{i,j} = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} X_{m,n} WAL(n,i) WAL(m,j) \quad (2.27)$$

Usando la simetría de la transformada discreta.

Para obtener por ejemplo el término de la transformada $X_{2,3}$, si $N = 8$, aplicando la expresión (2.26) obtenemos:

$$X_{2,3} = \frac{1}{64} \begin{bmatrix} x_{0,0} WAL(3,0) WAL(2,0) + \\ \vdots \\ x_{0,7} WAL(3,0) WAL(2,7) + \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{7,0} WAL(3,7) WAL(2,0) + \\ \vdots \\ x_{7,7} WAL(3,7) WAL(2,7) \end{bmatrix}$$

La transformada puede llevarse a cabo en dos etapas. La primera operación de transformación para la variable i :

$$x_{m,j} = \sum_{i=0}^{N-1} x_{i,j} WAL(n,i) \quad (2.28)$$

Esta es equivalente a realizar la transformada simple a lo largo de cada columna del arreglo. En el segundo paso o etapa se realiza la transformación simple a lo largo de cada fila del arreglo:

$$X_{m,n} = \frac{1}{N^2} \sum_{j=0}^{N-1} x_{m,j} WAL(m,j) \quad (2.29)$$

A continuación se desarrollará un ejemplo el cual ilustrará como se encuentra cada elemento del arreglo de respuesta:

- N = 8
- El arreglo resultante será de 8 x 8, y sus términos irán de $X_{0,0}$ al $X_{7,7}$.
- Es decir que m y n tomarán valores de 0, 1, 2, 3... 7 ó N-1.
- Para una m y n específica aplicamos la ecuación (2.28):

$$x_{m,j} = \begin{bmatrix} x_{0,j} WAL(n,0) + \\ x_{1,j} WAL(n,1) + \\ x_{2,j} WAL(n,2) + \\ \vdots \\ x_{7,j} WAL(n,7) \end{bmatrix}$$

- Podemos aplicar esta expresión 8 veces variando el valor de j de 0, 1, 2... 7. Así obtendremos 8 valores desde $x_{m,0}$ hasta $x_{m,7}$ los cuales reemplazaremos en la siguiente etapa del proceso: al aplicar la expresión (2.29).

$$X_{m,n} = \frac{1}{64} \begin{bmatrix} x_{m,0} WAL(m,0) + \\ x_{m,1} WAL(m,1) + \\ x_{m,2} WAL(m,2) + \\ \vdots \\ x_{m,7} WAL(m,7) \end{bmatrix}$$

- Este proceso deberá repetirse N^2 veces, una por cada elemento del arreglo de respuesta.

El término de secuencia cero de la ecuación (2.27) es una medida del valor promedio de la sumatoria de términos en la matriz de datos:

$$X_{0,0} = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} x_{i,j} \quad (2.30)$$

Si $x_{i,j}$ representa una función real positiva entonces el valor máximo posible para $X_{0,0}$ es $N^2 A$ donde "A" es el valor máximo de la función. Los demás valores en el dominio Walsh que no sean $X_{0,0}$ variaran entre $\pm N^2 A/2$ estableciendo así un limite para los otros valores en el dominio Walsh.

Así como en la transformada simple, la relación de Parseval se puede aplicar de la siguiente forma:

$$\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} |x_{i,j}|^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} |X_{m,n}|^2 \quad (2.31)$$

Esta transformada tiene importantes aplicaciones en reducciones de ancho de banda, debido a que si unos pocos valores en el dominio Walsh son grandes en magnitud los que restan será de magnitud pequeña pudiendo descartarse reduciendo así el ancho de banda para un dato muestreado.

2.6 Transformada Walsh – Hadamard (WHT)

La transformada Hadamard o la transformada Walsh – Hadamard es básicamente similar a la transformada Walsh, la diferencia radica en que las funciones utilizadas en las matrices estan basadas en el ordenamiento Hadamard.

El significado de usar este reordenamiento de Hadamard a las funciones Walsh es obtener una Transformada Walsh – Hadamard que pueda ser procesada de manera más veloz que la DWT.

La transformada Walsh-Hadamard queda definida de la siguiente forma:

$$X_{WHk} = \left(\frac{1}{N} \right) x_i \cdot H_N \quad (2.32)$$

Donde:

N = número de muestras

x_i = Vector con las muestras de la función muestreada

X_{WHk} = Representa los coeficientes obtenidos de la Transformada

H_N = Matriz Walsh-Hadamard

Al utilizar la transformada Walsh-Hadamard para procesar "N" número de muestras el número de operaciones aritméticas que se realizan esta dada por la relación $N(N-1)$ es decir que para una procesamiento de 8 muestras $N = 8$ el número de operaciones a realizar sería de $8(8-1) = 56$, lo que supone un ventaja en el procesamiento de los datos.

La ecuación que define a la transformada inversa Hadamard Walsh es:

$$x_i = X_{WHK} H_N \quad (2.33)$$

Como un ejemplo vamos a obtener la transformada Walsh-Hadamard para una secuencia de datos (1,2,0,3):

Solución:

La secuencia de datos muestreados $x_i = [1, 2, 0, 3]$. $N = 4$.

La matriz Walsh a utilizar H_4 será de 4×4 :

$$H_4 := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Al efectuar la transformada $X_{WHK} = (1/4)(x_i \cdot H_4)$ nos da como resultado:

$$X_{WHK} = (1/4) [6 \ -4 \ 0 \ 2]$$

$X_0 = 1.5$, $X_1 = -1$, $X_2 = 0$ y $X_3 = 0.5$.

2.5. Transformada rápida Walsh-Hadamard FWHT

Existe un algoritmo capaz de procesar las muestras de entrada y proporcionar los mismos resultados utilizando menos de la mitad del número de operaciones que la WHT, este algoritmo es el de la transformada rápida de Walsh-Hadamard, el cual consiste de una serie de sumatorias, divididas por estados, en los cuales se realizan operaciones previas simplificando las operaciones para los estados finales. Para un

vector de entrada de N muestras, la FWHT requiere únicamente de $N \log_2 N$ sumas en $\log_2 N$ estados.

En la siguiente tabla se muestran un algoritmo de FWHT para 8 muestras. Nótese que en el estado 1 se realizan 8 operaciones, en el segundo estado utilizando los resultados anteriores se realizan 8 operaciones y finalmente en el estado 3 se requieren únicamente otras 8 operaciones con lo que el número total de operaciones realizadas sería de $8 + 8 + 8 = 24$ y 8 adiciones al aplicar la división $1/8$ a cada coeficiente.

Algoritmo de FWHT para $N = 8$			
Estado 1		Estado 2	Estado 3
$x_0 = A$	$(A + E)$	$(A + E) + (C + G)$	$[(A + E) + (C + G)] + [(B + F) + (D + H)] = X_{WH0}$
$x_1 = B$	$(B + F)$	$(B + F) + (D + H)$	$[(A + E) + (C + G)] - [(B + F) + (D + H)] = X_{WH1}$
$x_2 = C$	$(C + G)$	$(A + E) - (C + G)$	$[(A + E) - (C + G)] + [(B + F) - (D + H)] = X_{WH2}$
$x_3 = D$	$(D + H)$	$(B + F) - (D + H)$	$[(A + E) - (C + G)] - [(B + F) - (D + H)] = X_{WH3}$
$x_4 = E$	$(A - E)$	$(A - E) + (C - G)$	$[(A - E) + (C - G)] + [(B - F) + (D - H)] = X_{WH4}$
$x_5 = F$	$(B - F)$	$(B - F) + (D - H)$	$[(A - E) + (C - G)] - [(B - F) + (D - H)] = X_{WH5}$
$x_6 = G$	$(C - G)$	$(A - E) - (C - G)$	$[(A - E) - (C - G)] + [(B - F) - (D - H)] = X_{WH6}$
$x_7 = H$	$(D - H)$	$(B - F) - (D - H)$	$[(A - E) - (C - G)] - [(B - F) - (D - H)] = X_{WH7}$

Tabla (XV)

A parte de la eficiencia en el computo, la FWHT nos proporciona otro punto para analizar, Notemos que en cada estado la adición requiere un BIT extra para representar la sumatoria y por lo tanto el tamaño de la palabra se incrementara en 1 BIT por estado, por ejemplo para una entrada PCM de 8 bits por muestras (palabra) en el estado siguiente las sumatorias se realizaran entre palabras de 9 bits y así sucesivamente.

Para transformar un bloque de N muestras de PCM cada una de ellas con una resolución de n bits, la transformada final tendrá una resolución final de $n + \log_2 N$ bits, si se quiere que este representada de manera precisa, por ejemplo si se tiene un paquete de $N = 32$ muestras, se requieren coeficientes de 13 bits, si la muestras tiene una resolución de 8 bits como en el PCM estándar.

Por lo que si deseamos que realmente se comprima la señal, la transformación de cada una de las muestras debe de estar seguida de una cuantización de los resultados o coeficientes de las sumatorias para que sigamos teniendo la resolución de bits original,

de lo contrario la transformada por si misma no tendría resultados en la compresión por la extensión de los resultados.



Fig. (2-9) Transformada directa y cuantización de coeficientes

Al cuantificar los resultados de las operaciones durante la transformada obtendríamos el verdadero potencial de esta, que es que la mayor parte de la energía ha sido comprimida en relativamente pocos coeficientes, como los veremos en los problemas desarrollados.

Características:

N = Número de muestras, n = Resolución de las muestras.

Número total de sumatorias: $N \log_2 N$

Número de estados $\log_2 N$

Número de bits de la palabra (resultado) sin cuantificar: $n + \log_2 N$

Ahora vamos a obtener la transformada Walsh-Hadamard usando el algoritmo de alta velocidad, para la compresión de la siguiente secuencia de datos:

$X_i = [2, 4, 5, 0, 9, 3, 7, 7]$

$N = 8$, Número total de sumatorias: $N \log_2 N = 8 \log_2 8 = 8(3) = 24$, Número de estados $\log_2 N = 3$

Algoritmo de FWHT para $N = 8$			
Estado 1			
$x_0 = A$	$A = 2$	$(A + E) =$	11
$x_0 = B$	$B = 4$	$(B + F) =$	7
$x_0 = C$	$C = 5$	$(C + G) =$	12
$x_0 = D$	$D = 0$	$(D + H) =$	7
$x_0 = E$	$E = 9$	$(A - E) =$	-7
$x_0 = F$	$F = 3$	$(B - F) =$	1
$x_0 = G$	$G = 7$	$(C - G) =$	-2
$x_0 = H$	$H = 7$	$(D - H) =$	-7

Tabla (XVI)

Algoritmo de FWHT para N = 8	
Estado 2	
$(A + E) + (C + G) =$	$11 + 12 = 23$
$(B + F) + (D + H) =$	$7 + 7 = 14$
$(A + E) - (C + G) =$	$-11 - 12 = -1$
$(B + F) - (D + H) =$	$7 - 7 = 0$
$(A - E) + (C - G) =$	$-7 + (-2) = -9$
$(B - F) + (D - H) =$	$1 + (-7) = -6$
$(A - E) - (C - G) =$	$-7 - (-2) = -5$
$(B - F) - (D - H) =$	$1 - (-7) = 8$

Tabla (XVII)

Algoritmo de FWHT para N = 8	
Estado 3	
$[(A + E) + (C + G)] + [(B + F) + (D + H)] = X_{WH0}$	$23 + 14 = 37$
$[(A + E) + (C + G)] - [(B + F) + (D + H)] = X_{WH1}$	$23 - 14 = 9$
$[(A + E) - (C + G)] + [(B + F) - (D + H)] = X_{WH2}$	$-1 + 0 = -1$
$[(A + E) - (C + G)] - [(B + F) - (D + H)] = X_{WH3}$	$-1 - 0 = -1$
$[(A - E) + (C - G)] + [(B - F) + (D - H)] = X_{WH4}$	$-9 + (-6) = -15$
$[(A - E) + (C - G)] - [(B - F) + (D - H)] = X_{WH5}$	$-9 - (-6) = -3$
$[(A - E) - (C - G)] + [(B - F) - (D - H)] = X_{WH6}$	$-5 + 8 = 3$
$[(A - E) - (C - G)] - [(B - F) - (D - H)] = X_{WH7}$	$-5 - 8 = -13$

Tabla (XVIII)

Resultado el vector de datos comprimidos será:

$$FWHT = (1/8)\{37, 9, 5, -33, -15, -3, 9, -19\}$$

$$FWHT = \{4.625, 1.125, -0.125, -0.125, -1.875, -0.375, 0.375, -1.625\}$$

Capitulo 3

**Descomposición
espectral y
filtrado
en términos
de secuencia**

Capitulo 3

Descomposición espectral y filtrado en términos de secuencia

3.1 Características de la descomposición espectral Walsh

Un análisis espectral utilizando funciones Walsh en términos de secuencia en lugar de frecuencia tiene su uso principalmente en el análisis de señales discontinuas y de transitorios, ya que una importante característica en la definición del espectro de potencia usando funciones Walsh es la posibilidad que el espectro pueda ser limitado secuencialmente aunque las señales analizadas sean funciones limitadas en el tiempo, en contra parte el comportamiento de la transformada de Fourier en un espectro de potencia nos dice que una función limitada en el tiempo no puede tener un espectro limitado en frecuencia. Esto le da a las funciones Walsh una aplicación muy importante en el análisis de datos no estacionarios.

Una segunda características de la descomposición espectral Walsh es podemos obtener una reducción del efecto de corrimiento circular, que definimos anteriormente, ya que funciones CAL y SAL correspondientes a una misma secuencia variaran considerablemente en amplitud pero de manera reciproca.

De manera general puede formularse de una definición de la equivalencia de la energía en el dominio del tiempo y de la secuencia, el **teorema de Parserval** nos dice que la energía contenida dentro de una serie ortogonal de coeficientes que representa a una señal, es la misma que cuando se expresa esta señal en el tiempo. Por lo que la energía es la misma en el dominio del tiempo como de la secuencia, como en cualquier otro dominio.

Así como en el análisis de Fourier tenemos dos alternativas que pueden llevarse a cabo para obtener el espectro de energía Walsh.

- 1.- Evaluación directa vía el cuadrado de los valores de la transformada Walsh (método del periodo equivalente).
- 2.- Evaluación indirecta vía la autocorrelación diádica (equivalente al método Wiener-Khintchine).

Solamente el segundo de estos métodos puede ser invariante al recorrimiento circular, las ordenadas y coordenadas en todos los casos están basadas en el concepto general de secuencia en lugar de frecuencia. Las relaciones adicionales requeridas para el análisis de la descomposición espectral están resumidas las tabla (XIX) para Fourier y (XX) para Walsh. Algunas de ellas ya las analizamos con anterioridad:

Características de la descomposición espectral con Fourier	
Propiedad de ortogonalidad	$\sum_{i=0}^{N-1} \exp\left(j \frac{2\pi n i}{N}\right) \exp\left(j \frac{2\pi m i}{N}\right) = \begin{matrix} N & n = m \\ 0 & n \neq m \end{matrix}$
Propiedad de simetría	<i>No aplicable</i>
Teorema del desplazamiento	$\begin{aligned} \cos(n \mp m)i &= \cos(ni) \cos(mi) \pm \operatorname{sen}(ni) \operatorname{sen}(mi) \\ \operatorname{sen}(n \mp m)i &= \operatorname{sen}(ni) \cos(mi) \pm \cos(ni) \operatorname{sen}(mi) \end{aligned}$
Teoremas de la multiplicación	$\begin{aligned} 2 \cos(ki) \cos(pi) &= \cos(k-p)i + \cos(k+p)i \\ 2 \operatorname{sen}(ki) \cos(pi) &= \operatorname{sen}(k-p)i + \operatorname{sen}(k+p)i \\ 2 \cos(ki) \operatorname{sen}(pi) &= -\operatorname{sen}(k-p)i + \operatorname{sen}(k+p)i \\ 2 \operatorname{sen}(ki) \operatorname{sen}(pi) &= \cos(k-p)i - \cos(k+p)i \end{aligned}$
Convolución	$X_i * Y_i = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i y_{(\tau+i)}$
Relacion de producto de la convolución	$x_i * y_i \leftrightarrow X_n \bullet Y_n$ <i>Donde : \leftrightarrow significa transformada</i>
Autocorrelación	$R_F(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i x_{(\tau+i)}$
Espectro Fourier	$P_{(n)} = \frac{1}{N} X_n ^2$
Teoria Wiener - Khintchine Teorema de Parserval	$\begin{aligned} R_F(\tau) &\leftrightarrow P(n) \\ \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i ^2 &= \sum_{n=0}^{N-1} X_n ^2 \end{aligned}$

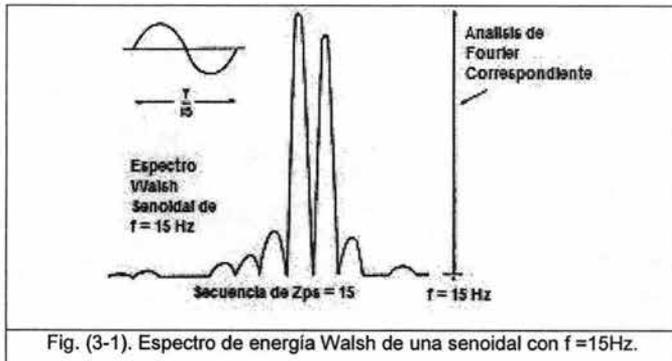
Tabla (XIX)

Características de la descomposición espectral WALSH	
Propiedad de ortogonalidad	$\sum_{i=0}^{N-1} WAL(m,i) WAL(n,i) = \begin{matrix} N & n = m \\ 0 & n \neq m \end{matrix}$
Propiedad de simetría	$WAL(n,i) = WAL(i,n)$
Teorema de desplazamiento	<i>No aplicable</i>
Teorema de multiplicación	$WAL(k,i) WAL(p,i) = WAL[(k \oplus p),i]$ $CAL(k,i) CAL(p,i) = CAL[(k \oplus p),i]$ $SAL(k,i) WAL(p,i) = CAL[(p \oplus (k-1)) + 1, i]$ $CAL(k,i) SAL(p,i) = SAL[(k \oplus (p-1)) + 1, i]$ $SAL(k,i) SAL(p,i) = CAL[(k-1) \oplus (p-1), i]$ <p>Donde : $\oplus \rightarrow$ Adición en modulo 2</p>
Convolución Diádica	$x_i * y_i = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i y_{(\tau \oplus i)}$ <p>Donde : τ significa const. de retraso en la concolución</p>
Relacion de producto de la convolución	$x_i * y_i \leftrightarrow X_k \bullet Y_k$ <p>Donde : \leftrightarrow significa transformada</p>
Autocorrelación Dyadic	$R_w(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i x_{(\tau \oplus i)}$
Espectro Dyadic	$P(0) = X_c^2(0)$ $P(k) = X_c^2(k) + X_s^2(0)$ $P\left(\frac{N}{2}\right) = X_s^2\left(\frac{N}{2}\right)$ $k = 1, 2, \dots, \left(\frac{N}{2} - 1\right)$
Teoría diádica Wiener - Khintchine Teorema de Parserval	$R_w(\tau) \leftrightarrow P(k)$ $\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} [x_i]^2 = \sum_{k=0}^{N-1} [X_k]^2$

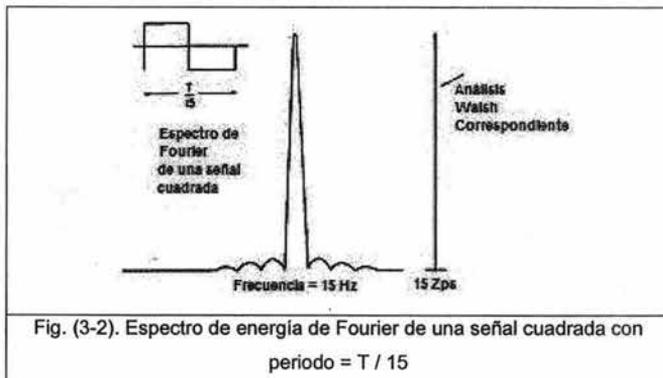
Tabla (XX)

3.2 Comparaciones entre el espectro Walsh y el espectro de Fourier

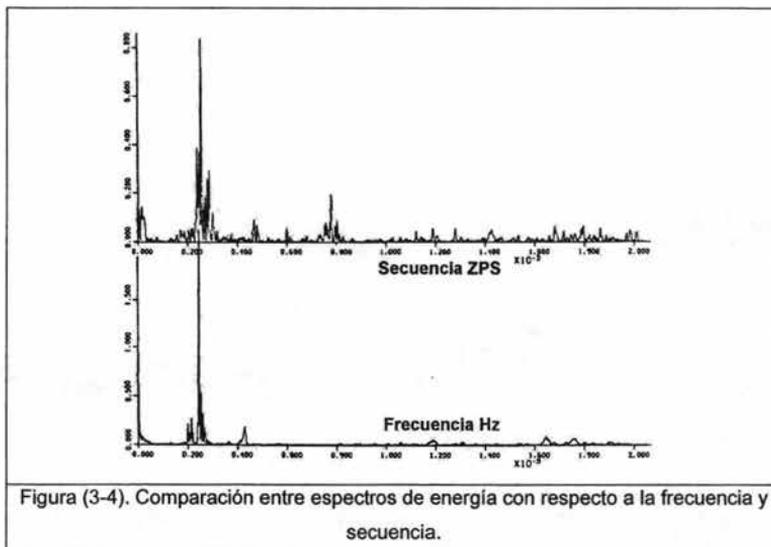
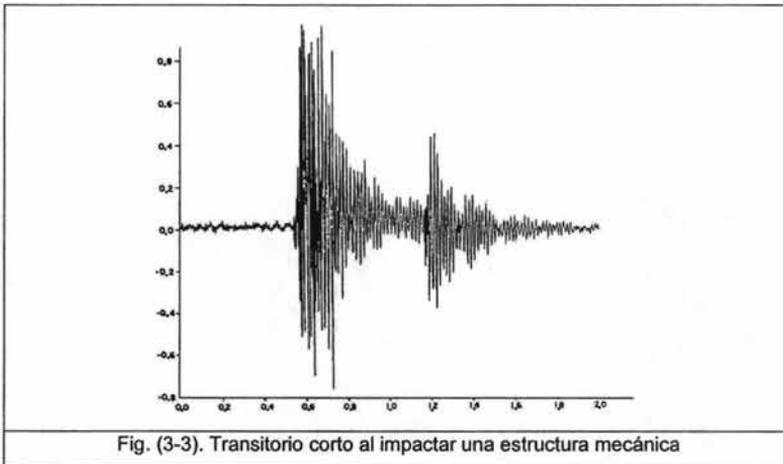
Seleccionar la estimación espectral Walsh o Fourier para un propósito específico dependerá básicamente de las características de la señal analizada. Básicamente la descomposición espectral en secuencia de una señal de variaciones suaves como lo podría ser una onda senoidal, resulta tener un espectro más complejo que el obtenido a través del análisis de Fourier como se puede apreciar en la **figura (3-1)**:



Una complejidad similar se obtiene cuando se aplica el análisis de Fourier a una señal rectangular, observamos que el análisis por Walsh resulta ser más sencillo en este caso **figura (3-2)**:



Analizaremos ahora un transitorio corto **figura (3-3)**, obtenido al impactar o perturbar una estructura mecánica. Una comparación entre el espectro Walsh y Fourier se muestra en la **figura (3-4)**.



Nosotros podemos ver que existen muchas similitudes entre los dos espectros en la región principal del transitorio. De cualquier modo en el espectro Walsh nos muestra

otras regiones de energía de amplitud considerable, a más altas secuencias que la región principal.

En algunos casos esta segunda región es la que resulta de interés a ser analizada, mientras que en otros se requiere de un espectro más concentrado o comprimido. Las razones por las que se obtiene este último caso utilizando Fourier están asociadas al origen de la señal analizada particularmente.

Para el caso del espectro en secuencia Walsh, ya que esta señal se obtiene de el movimiento armónico de una estructura mecánica y por lo tanto definido a través de ecuación diferencial lineal, se espera que esta pueda ser representada por medio de series exponenciales, es decir una suma de términos senoidales y cosenoidales, por lo tanto como mencionamos anteriormente el espectro en secuencia obtenido de una señal sinusoidal será mas complejo que el obtenido por Fourier, es por eso que resultan otras zonas de alta energía a parte de la principal, convenientes para el que desee estudiarlas.

De manera análoga observamos que se obtiene coeficientes extras de amplitud considerable a altas frecuencias cuando se realiza el análisis de Fourier a una señal rectangular sintetizada, como lo podría ser señal PCM (Pulse Code Modulation). La **figura (3-5)** muestra el espectro de una señal PCM obtenido a partir de unas series de ilimitada cantidad de coeficientes armónicos, como lo dice la teoría de Fourier.

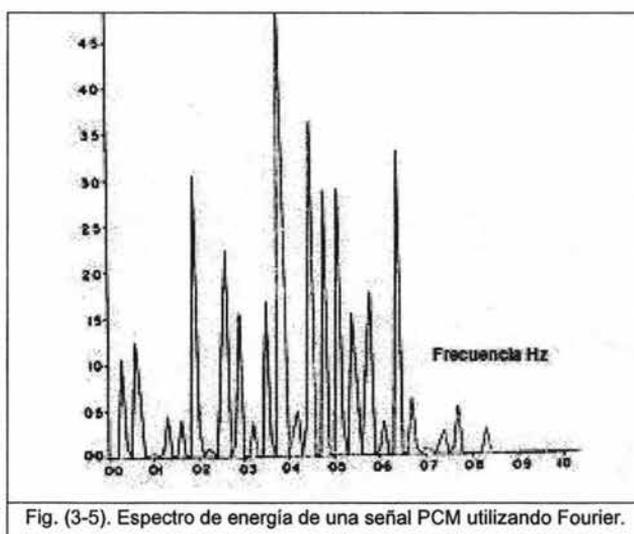
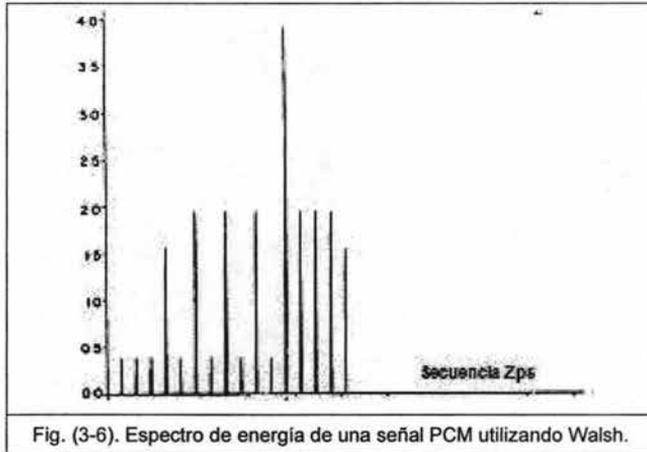


Fig. (3-5). Espectro de energía de una señal PCM utilizando Fourier.

Caso contrario resulta la representación espectral Walsh de esta misma señal PCM, como observamos en la **figura (3-6)** el ancho de banda esta limitado secuencialmente de manera muy precisa, debido al número finito de términos requeridos para sintetizar una señal codificada en binario que tiene una longitud que se relaciona a la base de tiempo Walsh.



Estos ejemplos indican claramente el rol que desempeñan la descomposición espectral Walsh y Fourier para señales discontinuas y continuas con variaciones suaves.

Donde se requiera analizar una señal derivada de una función del tipo sinusoidal como lo podría ser por ejemplo el de una estructura mecánica, el análisis de Fourier resulta el más conveniente para obtener un espectro compacto.

Cuando se requiera analizar una señal que contenga repentinas discontinuidades y un limitado número de niveles como lo podría ser un señal digital sintetizada, el análisis Walsh es el más apropiado para obtener un espectro compacto y limitado.

Como fuere para algunas aplicaciones especiales, como lo podría ser un análisis en línea (tiempo real) donde la transformada Walsh se obtiene por medio de computadora, la velocidad en el procesamiento es más importante que la complejidad del espectro.

3.3 Espectro Walsh via evaluación directa (Método del periodo equivalente).

En este método el espectro Walsh se obtiene vía el cuadrado de los valores de la transformada Walsh, los coeficientes del espectro de potencia se pueden determinar de una forma análoga a la forma periódica en que se calcula el espectro de Fourier:

$$P_x(k) = \text{Re}(X_k)^2 + \text{Im}(X_k)^2 \quad (3.1)$$

Donde $\text{Re}(X_k)$ es el componente real (senoidal) e $\text{Im}(X_k)$ es el componente imaginario (cosenoidal) de la transformada compleja de Fourier.

Para obtener el espectro Walsh nosotros podemos calcular:

$$\begin{aligned} P(0) &= X_{CAL}^2(0) \\ P(k) &= X_{CAL}^2(k) + X_{SAL}^2(k) \\ P(N/2) &= X_{SAL}^2(N/2) \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$k = 1, 2 \dots (N/2 - 1)$$

Dándonos $(N/2)+1$ puntos espectrales.

En resumen el espectro correspondiente a la transformada Walsh puede calcularse la siguiente forma:

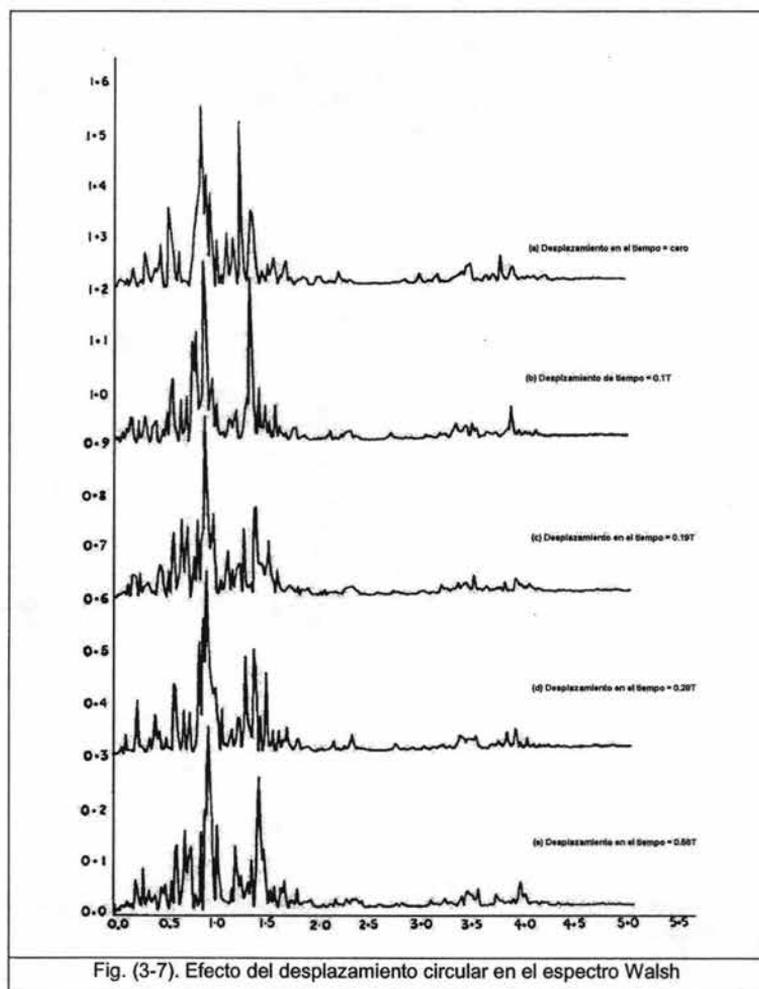
$$P(k) = [|CAL(k,t)|^2 + |SAL(k,t)|^2]^{1/2} \quad (3.3)$$

Con los componentes de fase siguientes:

$$\begin{aligned} \phi(0) &= 0, \pi \\ \phi(k) &= \tan^{-1} [X_{SAL}(k) / X_{CAL}(k)], \quad k = 1, 2, \dots, N/2 - 1 \\ \phi(N/2) &= 2k\pi \pm \pi/2 \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.4)$$

ESTA TESIS NO SALE
DE LA BIBLIOTECA

En la **figura (3-7)** se muestra los espectros de una misma señal recorrida o desplazada aleatoriamente en la base de tiempo, observamos que la forma del espectro permanece casi constante aunque se observan pequeños cambios en la estructura de la energía.



Se nota claramente que aunque la ecuación (3.2) puede representar energía y aunque conforme al teorema de Parseval, $\sqrt{P_x(k)}$ no nos da un espectro en amplitud como el obtenido con $\sqrt{\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t}$ en las funciones circulares, (debido a que se necesita

un teorema como el que relaciona el Seno con el Coseno), las funciones CAL y SAL correspondientes a una misma secuencia variarán considerablemente en amplitud pero de manera reciproca, de esta forma la sumatoria de los cuadrados de los coeficientes de las funciones CAL y SAL, que es parte de una de las definiciones del espectro, reducirá en parte el mencionado efecto circular.

Como un ejemplo numérico podemos obtener la transformada Walsh para una secuencia de datos (1,2,0,3), y calcular además su correspondiente espectro:

Solución:

La secuencia de datos muestreados $x_i = [1, 2, 0, 3]$. $N = 4$.

La matriz Walsh a utilizar W_{ki} será de 4×4 :

$$W_{ki} := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Obteniendo la transformada $X_k = (1/4) \sum x_i W_{ki}$ tenemos:

$$X_k = \frac{1}{4} [1 \ 2 \ 0 \ 3] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$X_k = (1/4) [6 \ 0 \ 2 \ -4]$$

$$X_0 = 1.5, X_1 = 0, X_2 = 0.5 \text{ y } X_3 = -1.$$

Para calcular el espectro tenemos:

$$P(k) = [|CAL(k,t)|^2 + |SAL(k,t)|^2]^{1/2}$$

Donde :

$$P(0) = X_{CAL}^2(0) = (1.5)^2 = 2.25$$

$$P(1) = X_{CAL}^2(1,t) + X_{SAL}^2(1,t) = X_1^2 + X_2^2 = (0)^2 + (0.5)^2 = 0.25$$

$$P(4/2) = P(2) = X_{\text{SAL}}^2(2,t) = X_3^2 = (-1)^2 = 1$$

Con los componentes de fase siguientes:

$$\phi(0) = 0, \pi$$

$$\phi(1) = \tan^{-1} [0 / 0.5] = 0$$

$$\phi(2) = 2\pi + 2k\pi \quad k = 0, 1, 2$$

3.4 Espectro Walsh vía la autocorrelación Diádica (Método Indirecto)

La teoría de Wiener – Khintchine establece de que si a la autocorrelación de una serie de términos de una función en el tiempo, se le aplica la transformada de Fourier obtendremos como resultado su espectro de energía de esa función. En términos matemáticos quedaría establecido de la siguiente manera:

$$P_X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau \quad (3.5)$$

La relación generalizada estaría definida:

$$R_X(\tau) \leftrightarrow P_X(f) \quad (3.6)$$

Para el caso Walsh, una relación muy similar podría ser aplicada entre la transformada Walsh de una función y la autocorrelación diádica de la misma:

$$R_W(\tau) \leftrightarrow P_X(k) \quad (3.7)$$

Donde $P_X(k)$ es el espectro discreto Walsh expresado en términos de secuencia y $R_W(\tau)$ es la autocorrelación diádica. Esto se le conoce como una derivación del tipo lógico de la teoría de Wiener – Khintchine.

3.4.1 Correlación y convolución Walsh

Aquí es donde el comportamiento de las funciones Walsh es muy diferente a las funciones seno-cosenoidales, requiriendo una perspectiva diferente al momento de trabajar con intervalos de tiempo de retraso (lags) ya que son distintos a los que se utilizan en el análisis de Fourier.

Definamos dos series en el tiempo " x_i " y " y_i " las cuales han sido transformadas en valores en el dominio Walsh como " X_k " y " Y_k " respectivamente.

La convolución de dos series en el tiempo se expresa de la siguiente forma:

$$Z(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i y_{\tau-i} = X_k * Y_k \quad (3.8)$$

Donde τ indica el incremento en el valor de retraso.

Reemplazando " x_i " y " $y_{\tau-i}$ " con los valores transformados teniendo $Y_k = Y_k$.

$$\begin{aligned} Z(\tau) &= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \left[\sum_{k=0}^{N-1} X_k \text{WAL}(k, i) \right] \left[\sum_{l=0}^{N-1} Y_l \text{WAL}(l, \tau - i) \right] \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} X_k Y_l \left[\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \text{WAL}(k, i) \text{WAL}(l, \tau - i) \right] \end{aligned} \quad (3.9)$$

La expresión en corchetes es la convolución de las funciones discretas Walsh.

Si nosotros llevamos a cabo una convolución similar usando la transformada de Fourier la función retrasada en tiempo, $Y(\tau-t) \exp(-j2\pi n\tau/N)$ puede ser descompuesta en funciones seno-cosenoidales por el teorema de desplazamiento circular, permitiendo así que la relación (3.10) pueda aplicarse:

$$x(t) * y(t) \leftrightarrow X(f) \bullet Y(f) \quad (3.10)$$

Donde \leftrightarrow indica un operador de transformación. Por lo tanto la convolución de $x(t)$ y $y(t)$ se vuelve equivalente a la transformada inversa del producto de sus transformadas de Fourier $X(f)$ y $Y(f)$.

No existe una relación simple entre las funciones Walsh y una versión retrasada de la misma función, por lo que una equivalencia directa entre los productos de las

transformadas Walsh y la convolución de las mismas en el dominio del tiempo no se puede usar. Como sea, usando la ecuación (1.8), encontramos que este puede jugar una parte similar a la del teorema de recorrimiento en la convolución de Fourier.

De ahí que para dos series:

$$x_i \leftrightarrow X_k \quad y_i \leftrightarrow Y_k \quad (3.11)$$

Ahora definimos la convolución Diádica como:

$$Z(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i \cdot y_{\tau \oplus i} = X_k * Y_k \quad (3.12)$$

Donde * representa la operación de convolución diádica:

$$Z(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i \left[\sum_{k=0}^{N-1} Y_k \text{WAL}(k, \tau \oplus i) \right] \quad (3.13)$$

Usando la ecuación (1.8):

$$\begin{aligned} Z(\tau) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y_k \sum_{i=0}^{N-1} x_i \text{WAL}(k, i) \text{WAL}(k, \tau) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} X_k \cdot Y_k \text{WAL}(k, \tau) \end{aligned} \quad (3.14)$$

Resulta en una relación equivalente a la ecuación (3.10):

$$x_i * y_i \leftrightarrow X_k \bullet Y_k \quad (3.15)$$

Por lo tanto existen dos expresiones para definir la convolución, ambas expresan una forma de convolución, pero mientras la expresión para Fourier implica adiciones aritméticas para el desplazamiento de tiempo **recursivo**, la versión Walsh de convolución requiere, una sustitución por una adición diádica o modulo 2.

Conociendo ambas expresiones podemos ahora comparar la convolución en Fourier con la convolución Walsh.

La autocorrelación discreta en tiempo real esta definida por:

$$R_F(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i x_{i+\tau} \quad (3.16)$$

Donde $i = 0, 1, 2, \dots, m$ y $m \ll N$. Aquí m es el rezago total de la correlación.

La auto-correlación discreta en tiempo diádica esta dada por:

$$R_W(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i x_{i \oplus \tau} \quad (3.17)$$

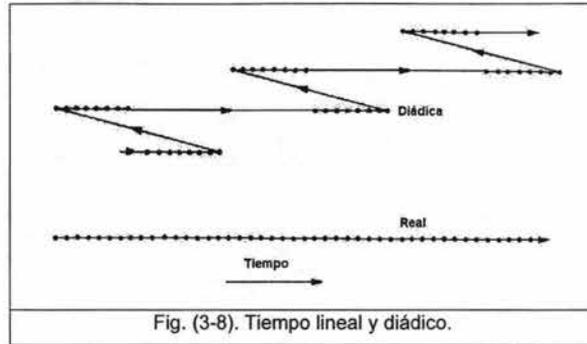
La diferencia entre las dos expresiones reside en el comportamiento de la adición del incremento del tiempo de rezago.

La convolución **diádica** y la correlación son idénticas por que la adición y sustracción en modulo 2 son operaciones idénticas.

3.4.2 Escala de tiempo diádica

Ya que en el dominio del tiempo real se utiliza la adición aritmética para la autocorrelación y en el dominio Walsh esta suma es en modulo 2, hace que el comportamiento de la escala de tiempo diádica sea conocida como el dominio diádico, este se compara en la **figura (3-8)** con el dominio de tiempo real.

En este figura observamos que serie de datos consecutivos para el tiempo real están igualmente espaciados, donde la correlación aritmética tiene un rezago de tiempo que se incrementa uniformemente, en el caso diádico Walsh una serie consecutiva de datos son tomadas por instantes de tiempo junto con una serie de saltos hacia delante y hacia atrás todos de igual duración.

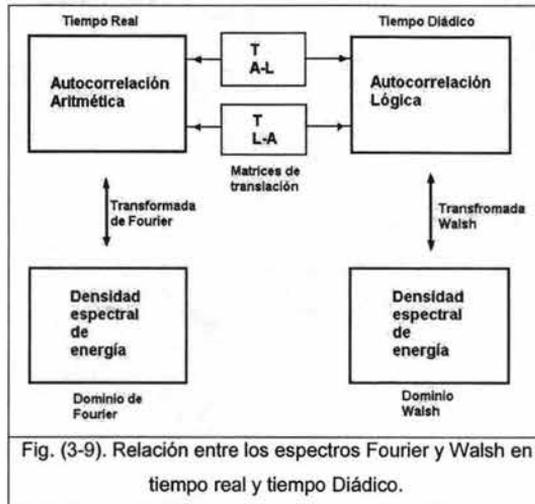


Al realizar una asociación con la convolución aritmética vemos que los resultados obtenidos no los podemos procesar de manera directa y sencilla pero es posible realizar una conversión de la correlación diádica a la correlación aritmética utilizando operaciones matriciales, lo que nos facilitaría el cálculo y lo haría más sencillo.

3.4.3 El espectro secuencial vía autocorrelación

La mayor ventaja de obtener el espectro de energía utilizando este método es que los resultados obtenidos tendrá una invarianza en la fase. El proceso de obtención del espectro se resume en la **figura (3-9)**.

Primeramente se obtiene la correlación aritmética y el resultado es transformado por medio de una operación matricial para producir la autocorrelación diádica de la función en análisis. Posteriormente estos son transformados utilizando la transformada rápida Walsh con lo que se obtiene el espectro de energía como lo indica la ecuación (3.7).



El paso adicional como se muestra es el de la conversión entre la correlación aritmética a diádica, y aunque la obtención de la posterior transformada Walsh solo requiere pocas operaciones, la dicha conversión en la autocorrelación demandara N^2 operaciones si se tiene N datos muestreados lo que alentara el proceso de cálculo.

La conversión entre las dos funciones de correlación se realiza utilizando dos matrices:

$$T_{A-L} = D_N \cdot T_N \quad y \quad T_{L-A} = T_N^{-1} \cdot D_N^{-1} \quad (3.18)$$

Donde T_{A-L} se refiere a una conversión de correlación aritmética a lógica y T_{L-A} será la opción contraria. D_N es una matriz N por N diagonal, y sus elementos están relacionados de manera simple a la representación binaria de los números $0, 1, 2, \dots, N-1$. T_N es también una matriz N por N generada recursivamente.

Algunos métodos establecen que el espectro Walsh se puede obtener a partir de la función de autocorrelación lógica sin la necesidad de utilizar un cambio entre los sistemas aritmético y diádico de autocorrelación. Para lo cual una matriz cuadrada de N por N valores, opera sobre un vector en forma de columna que contiene los valores muestreados de la función de autocorrelación.

Esta matriz esta relacionada con el ordenamiento Paley donde sus filas obedecen ciertas relaciones recursivas. Debido a esta relación se observa cierta redundancia por

lo que la matriz puede ser factorizada en un producto de coeficientes similar al que se realiza con el algoritmo de la FWT.

El espectro Walsh se puede obtener usando únicamente $3N \log_2 N$ adiciones mas $N \log_2 N$ divisiones entre dos, estas divisiones son fácilmente implementadas de manera digital ya que se puede utilizar un registro con desplazamiento a la derecha.

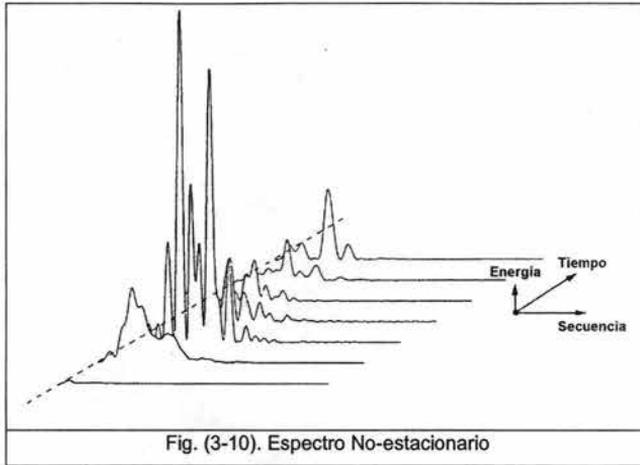
Esto es en resumidas cuentas las mejores aproximaciones sobre la obtención del espectro a través del método de Wiener – Khintchine, sin embargo para algunas aplicaciones donde cierta cantidad de desplazamiento en fase puede ser tolerado, el método de evaluación directa ó método del periodo equivalente, es mas conveniente debido a la simplicidad de sus cálculos.

3.5 Análisis espectral de señales no estacionarias

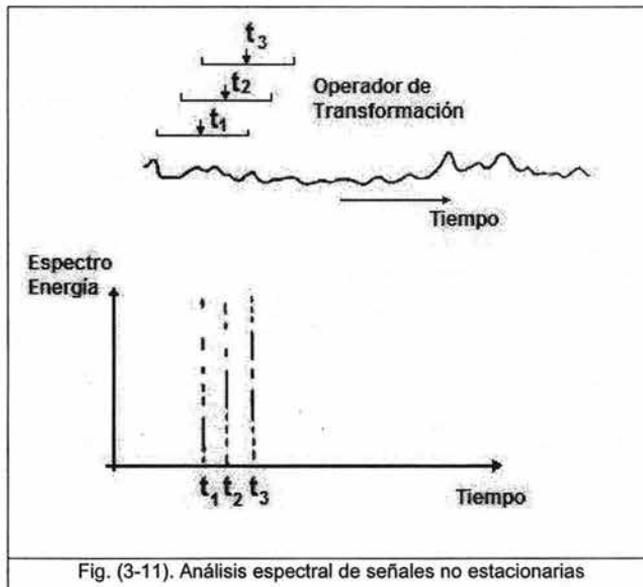
El análisis espectral de datos no estacionarios presenta un problema cuando se quiere representar este espectro para ser analizado en tres dimensiones, es decir presentar el contenido de estos datos en términos de energía, tiempo (o frecuencia) y de secuencia, todos a la vez.

Existen diferentes métodos para lograr esto, uno de ellos es asumiendo que las series de datos analizados son estacionarios o muy cerca de estarlo dentro de un espacio de tiempo pequeño, para posteriormente dividir estos espacios de tiempo consecutivos en espacios aun más pequeños, cada uno de estos últimos puede ser analizado como una serie estacionaria y como una serie de dos dimensiones (energía y secuencia) a partir de solamente una (secuencia).

Un ejemplo se da en la **figura (3-10)**. Aquí se muestra el espectro de cada una de las pequeñas series de tiempo, una detrás de la otra, por lo que los cambios en el contenido del espectro de las series completas puede observarse a lo largo del eje de tiempo (eje punteado) que seria nuestra tercera dimensión.



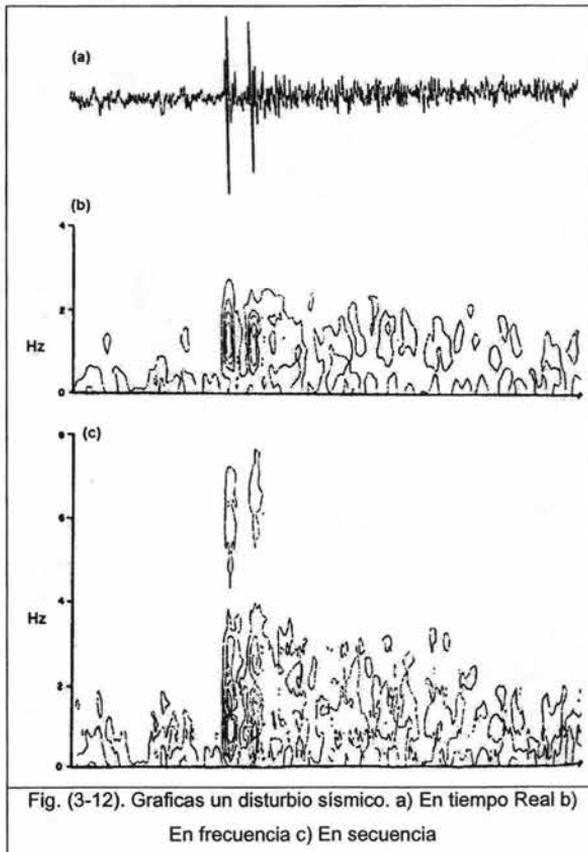
Un método alternativo de análisis consiste en aplicar una transformada en movimiento que actúe en un pequeño segmento de la señal y se desplaza de manera progresiva a lo largo del eje del tiempo para finalmente proporcionarnos un espectro en movimiento. Esta técnica es conocida como análisis espectral de términos pequeños (short term spectral analysis). Y se muestra de en la **figura (3-11)**.



En ella un operador de transformación actúa sobre una longitud corta de tiempo, y se desplaza progresivamente a lo largo del registro de la señal. El espectro de corta longitud resultante estará ubicado dentro una ventana igual a la longitud del operador, teniendo como referencia el tiempo central del operador de transformación.

La resolución del análisis es proporcional a la longitud de la transformada. También se necesita otro pequeño operador adicional para la localización precisa del tiempo central. Si se utiliza una ventana de forma triangular para la transformada secuencial se logra que esta sea más afilada y evita los errores de discontinuidad.

Un ejemplo de este procedimiento es el análisis de un disturbio sísmico registrado por un sismógrafo, como se muestra en la **figura (3-12)** al que se le aplicaron los análisis de Fourier y Walsh.



3.6 Filtrado de señales en secuencia

Debido a que la convolución aritmética no se puede aplicar directamente al filtrado digital Walsh, las investigaciones han llevado a cabo un filtrado en el que se aplica la técnica de Wiener, esta técnica tiene un uso especial en Fourier, se le utiliza en la técnica de filtrado no recursivo. La **figura (3-13)** ilustra de forma generalizada el sistema de filtrado Wiener en una dimensión.

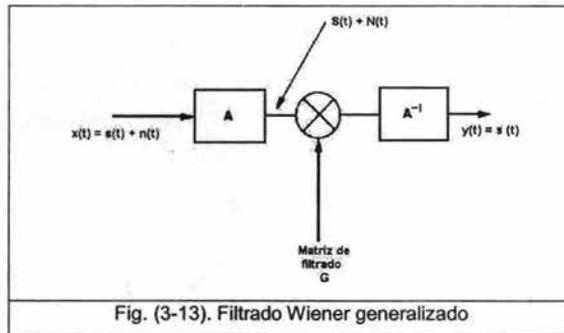


Fig. (3-13). Filtrado Wiener generalizado

Primeramente se asume una señal de entrada en forma de vector $x(t)$, la cual consiste de de la señal $s(t)$ y de ruido $n(t)$, se asume que estos componentes son no correlacionados entre ellos. A esta señal $x(t)$ de entrada se le realiza una operación de transformación unitaria utilizando una matriz de N por N elementos, llamada A , para producir la siguiente igualdad:

$$X(f) = Ax(t) = As(t) + An(t) = S(f) + N(f) \quad (3.19)$$

El vector resultante $X(f)$, se multiplica por una matriz N por N de filtrado que llamaremos G , para posteriormente aplicar la transformada inversa, lo que nos produce a la salida del filtro:

$$y(t) = A^{-1} \cdot G \cdot A \cdot x(t) \quad (3.20)$$

Esta es en resumen la técnica de filtrado Wiener: transformada – modificación – transformada inversa.

Si G se selecciona de manera correcta la respuesta a la salida del filtro consistirá únicamente de la señal $s(t)$ mas un componente de ruido muy reducido $n(t)$.

Idealmente la matriz de filtrado G se selecciona en forma conjunta con la matriz de transformada A , para minimizar el error cuadrático promedio de la señal principal $s(t)$ y su valor estimado $y(t)$.

El filtrado discreto Wiener puede ser implementado por cualquier transformada unitaria incluyendo Fourier, Walsh, Haar y Karhunen-Loeve, el resultado para cada caso nos dará el mismo error cuadrático medio.

Al usar la transformada Walsh con esta técnica es posible usar dos tipos de matrices de filtrado. La matriz de filtrado puede ser un vector generador (es decir contiene componentes diferentes a cero a lo largo de la diagonal únicamente) de la misma forma que lo hace el filtrado no recursivo de Fourier, o puede ser un escalar que a su vez es una matriz 1×1 .

El filtrado vectorial usando la transformada Walsh puede ser extremadamente rápido y se puede llevar a cabo realizando $2N \log_2 N$ adiciones / sustracciones mas N multiplicaciones reales. Sin embargo tiene pocas aplicaciones prácticas al tener únicamente un simple vector

El filtrado escalar es en general el mas conveniente, pero a pesar de que el proceso de transformación sea rápido, la multiplicación por la matriz de filtrado puede demandar arriba de N^2 multiplicaciones. Una reducción del tiempo de computo se obtiene si varios de los valores que están afuera de la diagonal se hacen cero y así es posible obtener un filtro que es económico en el diseño y el tiempo de procesamiento.

3.6.1 Filtrado con un vector basado en secuencia.

Una técnica simple de filtrado Walsh esta referido como filtrado limitado en secuencia. Aquí un vector en forma de columna se emplea en lugar de una matriz diagonal de filtrado. Los coeficientes del vector están limitados a los valores de 0 y 1. En el caso un filtro pasa bajas por ejemplo, todos los coeficientes arriba de cierto valor se hacen cero al multiplicarse por los coeficientes de valor cero del vector de filtrado, todo esto antes de que se aplique la transformada inversa Walsh.

Este es un proceso muy eficiente que puede resultar en un filtro "brick - wall" (o pared de ladrillos) para eliminar ciertos coeficientes no deseados.

Un ejemplo se da en la **figura (3-14)** donde a una señal de secuencia pequeña se le suma una segunda señal comprendida de elementos de más altas secuencias. Llevando a cabo el proceso Wiener, colocando una serie de unos en la parte superior del filtro y ceros en la parte inferior, resulta la señal original de secuencia pequeña reconstruida de manera exacta. El proceso es idealmente adaptado al filtrado de datos rectangulares a los que se les adiciona un componente de ruido, como ocurriría por ejemplo en los sistemas de transmisión digital.

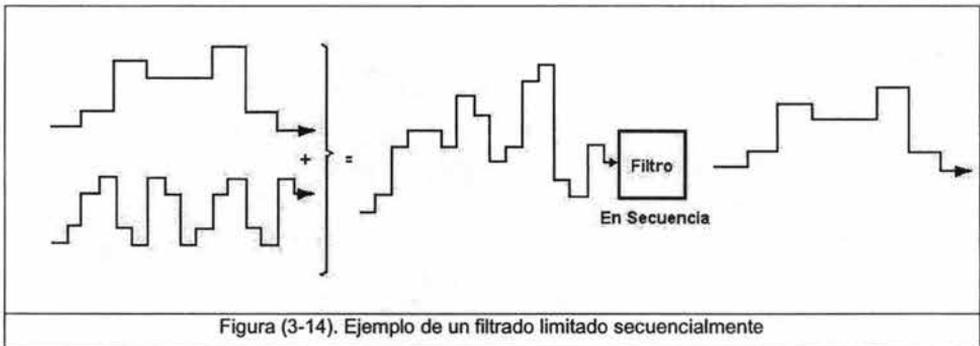
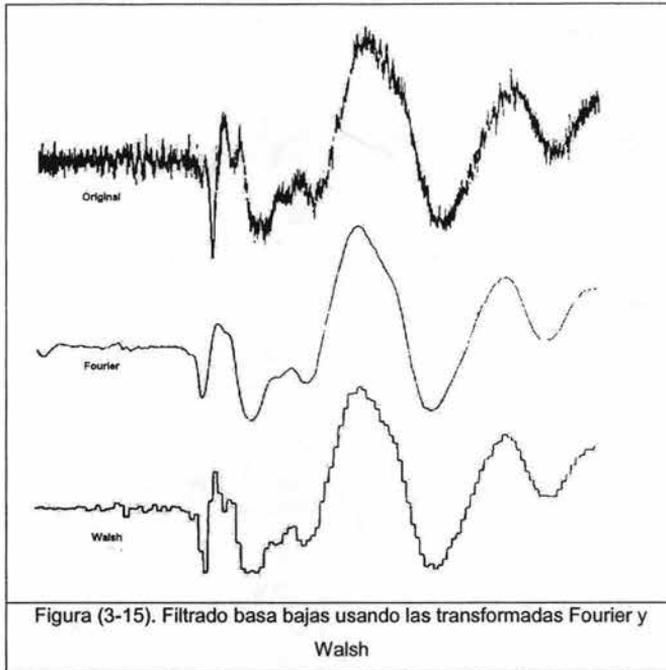
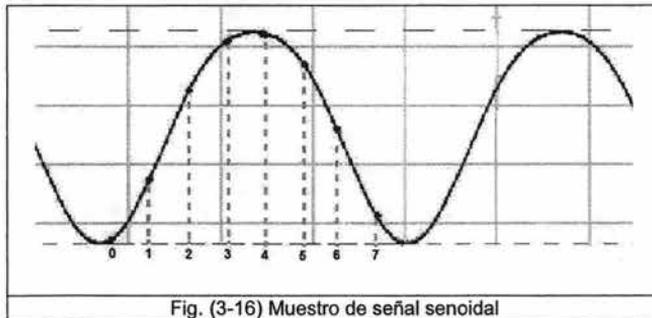


Figura (3-14). Ejemplo de un filtrado limitado secuencialmente

La conveniencia del vector de Filtrado Wiener para los muestreos de señales continuas puede resultar en la representación por escalones de la señal donde podemos utilizar la transformada Walsh. Como un ejemplo se muestra la **figura (3-15)** donde compara el filtrado pasa banda de un transitorio sísmico con perturbaciones, usando Fourier y Walsh.

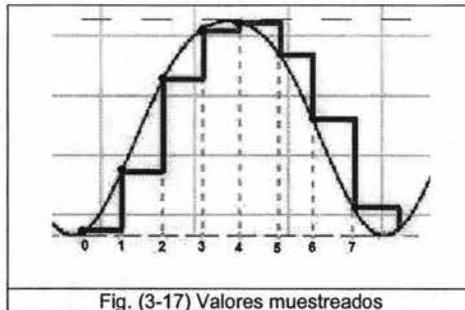


A continuación hemos desarrollado un ejemplo de filtrado con un vector basado en secuencia del medio ciclo de una señal senoidal **figura (3-16)**.



Valores Muestreados	
x ₀	0.015
x ₁	1.429
x ₂	3.571
x ₃	4.360
x ₄	4.542
x ₅	4.140
x ₆	2.576
x ₇	1.034

Tabla(XXI)



Aplicando la transformada Walsh obtenemos los siguientes coeficientes en el dominio de la secuencia:

$$X_k = [2.708 \quad -0.364 \quad -1.444 \quad -0.176 \quad -0.221 \quad 0.0643 \quad 0.518 \quad -0.032]$$

Aplicando un filtro pasa bajas con secuencia de corte = 4 tenemos:

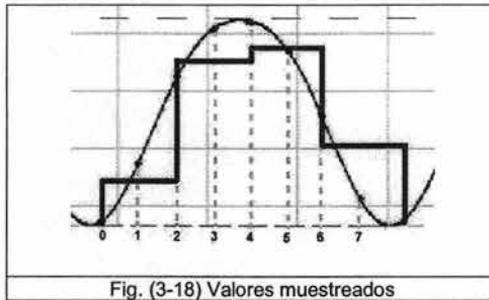
$$X'_k = [2.708 \quad -0.364 \quad -1.444 \quad -0.176 \quad -0.221 \quad 0.0643 \quad 0.518 \quad -0.032] \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nos da como resultado:

$$X'_k = [2.708 \quad -0.364 \quad -1.444 \quad -0.176 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

Aplicando la transformada inversa Walsh

$$x_i = [0.722 \quad 0.722 \quad 3.965 \quad 3.965 \quad 4.341 \quad 4.341 \quad 1.804 \quad 1.804]$$



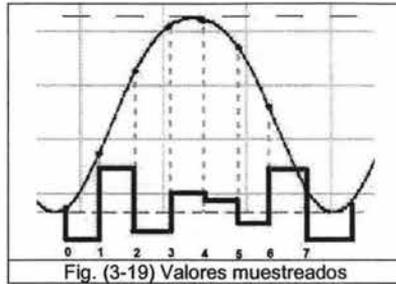
Aplicando un filtro pasa altas con secuencia de corte = 4 tenemos:

$$X'_k = [2.708 \quad -0.364 \quad -1.444 \quad -0.176 \quad -0.221 \quad 0.0643 \quad 0.518 \quad -0.032] \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

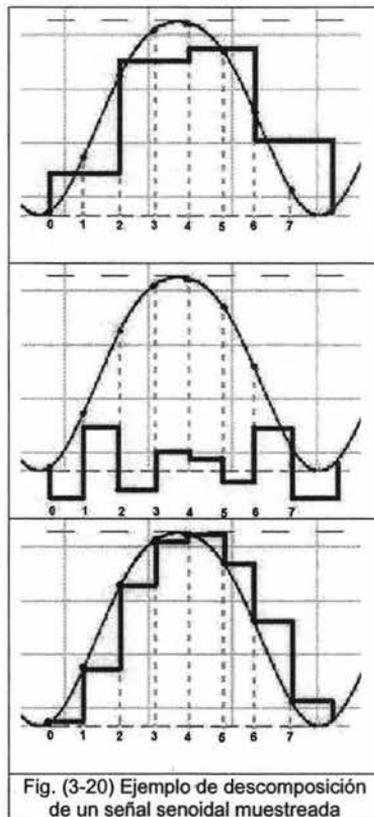
$$X'_k = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -0.221 \quad 0.0643 \quad 0.518 \quad -0.032]$$

Aplicando la transformada inversa Walsh

$$x_i = [-0.707 \quad 0.707 \quad -0.394 \quad 0.394 \quad 0.201 \quad -0.201 \quad 0.771 \quad -0.771]$$



Realizando la suma de lo obtenido con el filtro pasa bajas y el filtro pasa altas tenemos:



Estos ejemplos de filtrado Walsh por medio de un vector basado en secuencia se realizaron con la finalidad de mostrar lo fácil que son de implementar, los resultados

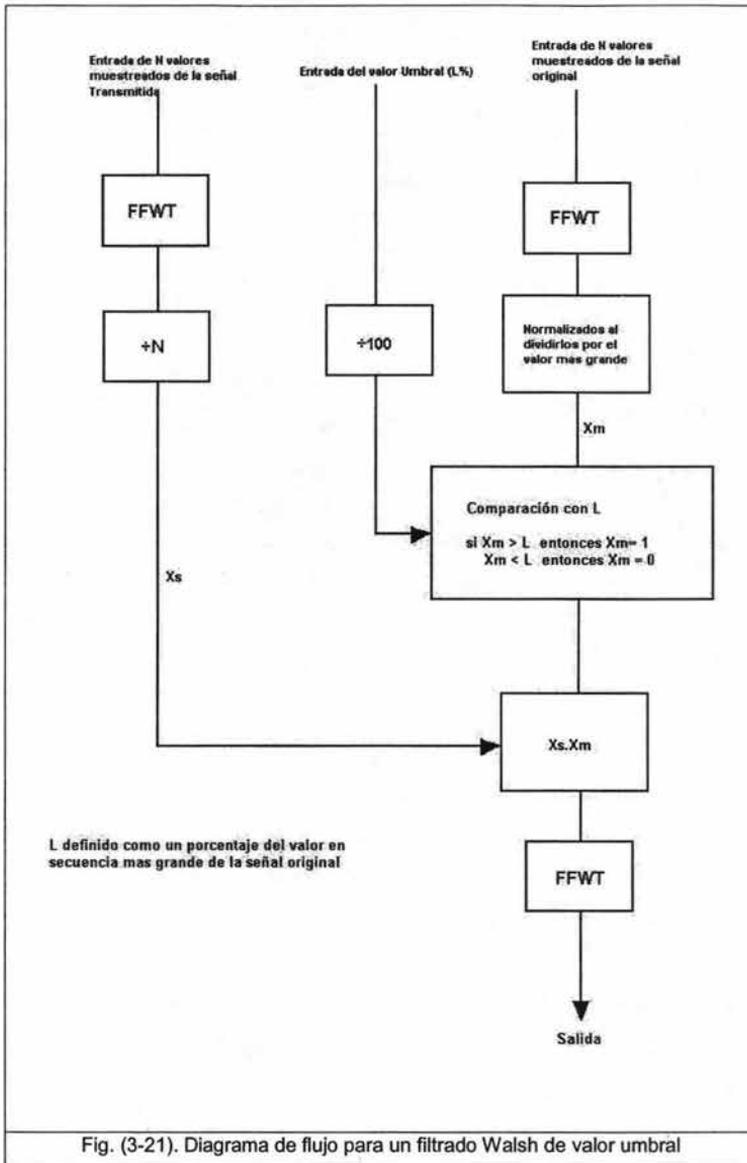
darán señales escalonadas como las que observamos en las figuras anteriores, para reducir este efecto se deberán de tomar mas muestras en el mismo periodo de tiempo.

3.6.2 Filtrado de valor de umbral

Este método de filtrado de valor de umbral (Threshold filtering) para la eliminación de ruido y distorsión de una señal se basa en que se conoce las características señal original, y a partir de esto es que se determina un nivel de umbral que establecerá la relación de filtrado.

Los valores de unos y ceros del vector de filtrado se obtienen de la siguiente forma: se asignarán unos para todos los valores que excedan el valor umbral y cero para todos aquellos valores que estén por debajo de este. Si nosotros consideramos la que síntesis de esta señal se obtiene por medio de la suma de una número de funciones Walsh se vuelve claro que para recuperar la señal original de manera aceptable, el nivel de umbral debe ser seleccionado de manera que contenga el número suficiente de estas funciones Walsh, así para señales de variaciones suaves se espera tener un nivel de umbral bajo para minimizar la distorsión en la reconstrucción de la señal. Donde se requieren pocos términos para sintetizar adecuadamente una señal, como pulsos o funciones discontinuas, se debe usar un nivel de umbral alto.

En la **figura (3-21)** se muestra como se puede implementar un programa de filtrado del tipo umbral, el nivel de umbral "L" se define como un porcentaje del coeficiente de secuencia más largo encontrado en la transformada Walsh de la señal. El valor de L se provee al programa como un parámetro al igual que el N número de muestras.

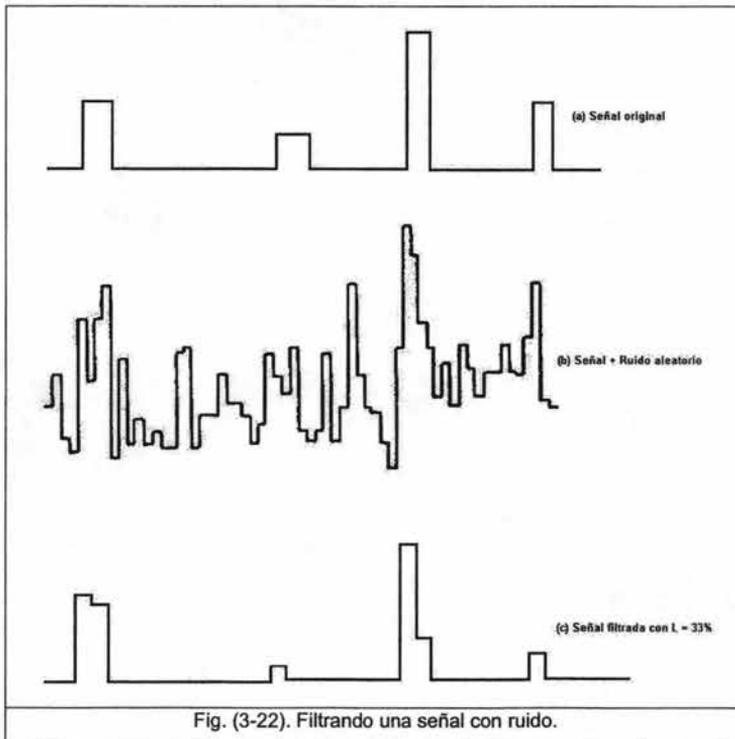


Es interesante llevar a cabo este tipo de filtrado teniendo como entrada una serie de pulsos, teniendo diferentes frecuencias de muestreo y adicionándole cantidades aleatorias de ruido. El efecto de elevar el nivel de umbral nos dará como resultado el estiramiento de los pulsos recuperados, esto es debido a que existe un limitado número

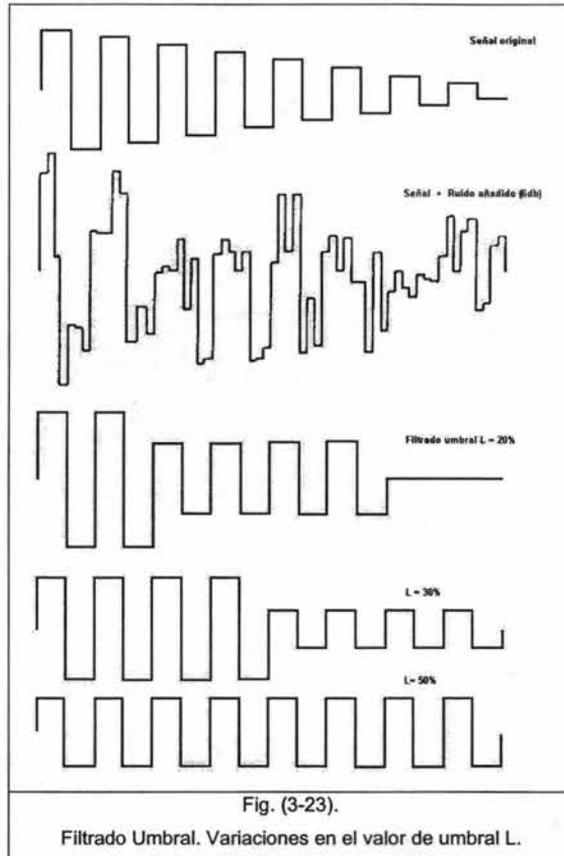
de coeficientes en secuencia diferentes a cero. El estiramiento es inversamente proporcional al ancho de los pulsos, siendo el estiramiento mayor para pulsos estrechos.

La exactitud de la reconstrucción del pulso depende del número de muestras usadas y del nivel de umbral. Para el propósito de identificar un pulso inmerso en ruido nosotros no estaríamos preocupados tanto en la forma de este si no en la relación señal a ruido S/N de la señal filtrada resultante, particularmente si la señal tenía originalmente una relación S/N de valor cero o incluso negativa.

Algunos de los resultados se muestran en la **figura (3-22)** donde una serie de pulsos oscurecidos por un ruido agregado de forma aleatoria, tendiendo un nivel de umbral $L = 33\%$ se puede localizar fácilmente la ubicación de los pulsos aunque como se puede apreciar existe una pequeña distorsión en cuanto al ancho y tamaño de los pulsos.



La **figura (3-23)** nos muestra el efecto de variar el valor de nivel de umbral durante el filtrado de una señal dada, se nota claramente que este filtrado es mas efectivo en la identificación de señales digitales, señales de pulsos.



3.6.3 Filtrado escalar basado en frecuencia

La dificultad de los métodos anteriores de filtrado radica en la determinación de los coeficientes indicados en la matriz de filtrado, para realizar de forma efectiva un filtrado en función de la frecuencia si se desea pasar una señal a una frecuencia determinada, los coeficientes requeridos en el filtrado Walsh son numerosos en un ancho de banda extenso dentro de la secuencia.

Sin embargo existe mucha información sobre el diseño de filtros utilizando la transformada de Fourier y se puede utilizar además las relaciones entre el filtrado Wiener de Fourier y Walsh para poder aplicar un filtrado de tipo secuencial a determinadas frecuencias.

Si nosotros expresamos las dos formas de filtrado (Fourier y Walsh) en forma matricial podemos obtener una relación entre las matrices de filtrado. Primeramente el vector de salida para el filtrado de Fourier sería:

$$y_1(t) = F^{-1} \cdot G_1 \cdot F \cdot x(t) \quad (3.21)$$

Donde F y F^{-1} son la transformada directa e inversa de Fourier, y G_1 es el conjunto de coeficientes de filtrado. Para el caso del proceso Walsh el vector de salida sería:

$$y_2(t) = W^{-1} \cdot G_2 \cdot W \cdot x(t) \quad (3.22)$$

Donde W y W^{-1} son la transformada Walsh directa e inversa y G_2 es el segundo conjunto de coeficientes de filtrado. Si nosotros asumimos que las salidas de ambos procesos serán iguales podemos hacer que $y_1(t) \approx y_2(t)$ y podemos escribir:

$$F^{-1} G_1 F \cdot x(t) = W^{-1} G_2 W \cdot x(t) \quad (3.23)$$

Donde G_1 :

$$G_2 = W \cdot F^{-1} G_1 F \cdot W^{-1} \quad (3.24)$$

Los valores de G_1 se obtiene directamente utilizando técnicas ya conocidas en Fourier, y usando la transformadas rápidas de Fourier y Walsh, se obtiene los valores de G_2 necesarios para obtener la matriz de filtrado. Aunque el proceso de hallar los valores de G_1 y luego de G_2 es más lento, el proceso de filtrado Walsh que se implementara finalmente será mas rápido que si lo hiciéramos directamente por Fourier. Esto sería ideal cuando se tenga operaciones repetitivas del tipo complejo como filtrado de imágenes en dos dimensiones u operaciones en línea.

En el caso del filtrado en una sola dimensión al tener N muestras se realizarán $2N \log_2 N$ adiciones /sustracciones mas N^2 multiplicaciones reales. El cálculo de estas últimas

será el elemento crucial en la efectividad de este tipo de filtrado, ya que el proceso será mucho más rápido si se logra reducir los elementos diferentes de cero.

3.5.4 Filtrado en dos dimensiones

Aplicar la transformada y filtrado a las muestras de una imagen se puede demandar una gran cantidad de recursos de un computador, debido al tamaño de la matriz que se tiene en las imágenes para obtener una buena resolución. Si esto además se pretende realizar en tiempo real, se tiene el problema de que se debe de tener una tasa de transmisión muy alta. Por estas dos razones es que la utilización de la transformada Walsh resulta ser muy conveniente

En términos generales el proceso implica transformar los datos muestreados a un dominio en el que se pueda realizar preferentemente operaciones lineales o no lineales, para después realizar la retransformación de los coeficientes. Utilizando la transformada Walsh todo esto se resume en el método de filtrado general Wiener.

El filtrado lineal se define como una combinación lineal de todos los coeficientes transformados para producir una matriz de N^2 puntos, los cuales se puedan modificar, la expresión general de lo anterior sería:

$$X_{m',n'} = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} X_{m,n} G(m', m, n', n) \quad (3.25)$$

Donde $G(m', m, n', n)$ es la función de filtrado.

Es conveniente considerar esta matriz de filtrado como un producto de dos matrices:

$$G(m', m, n', n) = G_m(m', m) \cdot G_n(n', n) \quad (3.26)$$

Donde las matrices de filtrado $[G_m]$ o $[G_n]$ pueden tomar la forma de una matriz diagonal (o un vector) o en el más complejo de los casos una matriz escalar. Como podemos ver el filtrado en dos dimensiones consiste en realizar dos veces la transformación de las muestras y dos veces el producto por la matriz de filtrado que es esencialmente repetir el procedimiento para el procesamiento en una sola dimensión dos veces.

Cuando nosotros consideramos el filtrado en una sola dimensión, nosotros generalmente deseamos referir las características de transferencia (matriz de filtrado) como los filtros pasa-bajas, pasa-altas, supresores de banda y pasa banda dependiendo los efectos que tenga los datos analizados en el espectro de energía, la forma mas sencilla seria teniendo los valores deseados igual a uno dentro de nuestra banda y como cero los valores no deseados. Esto seria dificil de implementar por Fourier pero de manera sencilla usando Walsh y por lo tanto tendríamos una función de transferencia más sencilla en el diseño.

Las operaciones no lineales que se puede realizar en el filtrado tienen que ver con que a los coeficientes de las imágenes se les aplique operaciones logarítmicas:

$$X_{m',n'} = \frac{K \cdot X_{m,n} \log\{|X_{m,n}|\}}{|X_{m,n}|} \quad (3.27)$$

Y una relación de potencia:

$$X_{m',n'} = \frac{X_{m,n} |X_{m,n}|^k}{|X_{m,n}|} \quad (3.28)$$

Donde: K y k son constantes. Gracias a una operación logarítmica se podrá atenuar los coeficientes de la transformada, por un factor proporcional a su magnitud, la relación de potencia tiende a enfatizar la diferencia entre las bajas y altas amplitudes de los coeficientes y esto se utiliza para dar una mejora en las características de la imagen procesada.

3.6 Filtrado de una señal no estacionaria

Una señal que exhibe características de amplitud en función de la frecuencia así como de tiempo es llamada una señal no estacionaria. Si el periodo de medición o adquisición varía escasamente con la frecuencia de esta señal, la señal puede ser considerada como estacionaria o muy cercana de estarlo.

Una ventaja muy particular de usar las funciones Walsh con este tipo de señales es que $CAL(k,t)$ y $SAL(k,t)$ desaparecen estando afuera de la base de tiempo (por ejemplo $-\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}$). La transformada Walsh X_n también se reduce a cero afuera de los intervalos de secuencia: $-(k+1) \leq \text{Seq} \leq +(k+1)$.

Por consecuencia, cualquier función de tiempo que pueda ser representada como una superposición de un número finito de funciones Walsh es limitada tanto en tiempo como en secuencia, por lo tanto esta señal solo ocupará una área finita del dominio tiempo - secuencia en vez de ocupar una área infinita en el dominio tiempo - frecuencia.

El método para el análisis de este tipo de señales por ejemplo un transitorio, primeramente se saca un promedio de la duración en tiempo de este, para luego dividir este tiempo en pequeños segmentos, los cuales son analizados y procesados como si fuera una señal estacionaria. Los resultados se grafican separadamente en el mismo eje de tiempo (o secuencia) como si fuera un gráfico de tres dimensiones. Un análisis de señales continuo de este tipo es conocido como filtrado en secuencia paralelo.

Este tipo de filtrado tiene mucha similitud con el análisis espectral para señales no estacionarias, aquí se usa un conjunto de filtros supresores de banda o digitales. Es de hecho una forma del análisis espectral en el dominio de la secuencia y da información sobre el contenido secuencial a lo largo de la duración de la señal.

Esto puede ser considerado en la forma convencional tomando cada operación de filtrado como un resultado de una función de respuesta al impulso o de forma alternativa como la aplicación de la propiedad de ortogonalidad Walsh a la función sin filtrar, donde esta es usada para seleccionar el coeficiente Walsh requerido, y el proceso es repetido para M funciones Walsh diferentes.

La función respuesta al impulso esta formada por una versión limitada de la función Walsh:

$$H(n,t) = WAL(n,t) G(t) \quad (3.29)$$

Donde:

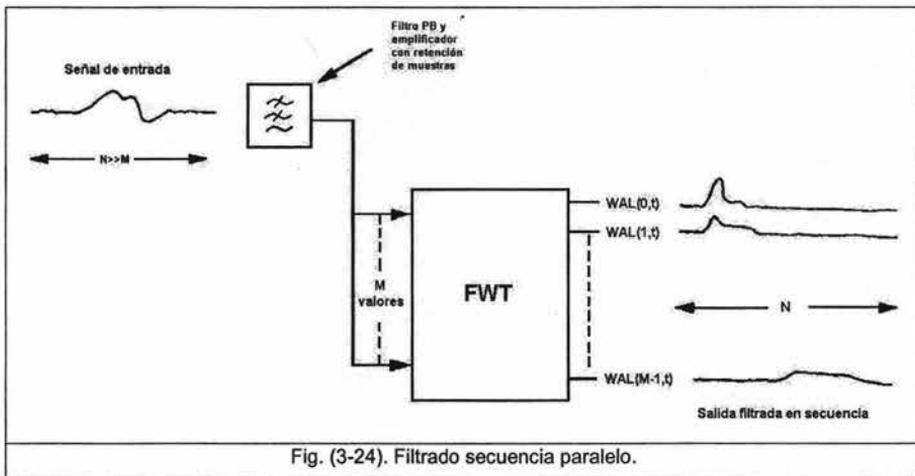
$$\begin{aligned} G(t) &= 1 \quad \text{para } 0 \leq t < T \\ G(t) &= 0 \quad \text{todas las demás} \end{aligned} \quad (3.30)$$

Esto es usado en una función de convolución que nos da por resultado:

$$y(n,t) = \sum_{i=0}^{N-1} WAL(n,i) x(t - ih) \quad (3.31)$$

Donde $h = T/N =$ intervalo de muestreo.

Esto es realizado de forma continua para formar un banco de filtrado transversal tendiendo M salidas en secuencia. Como se observa en la figura (3-24).

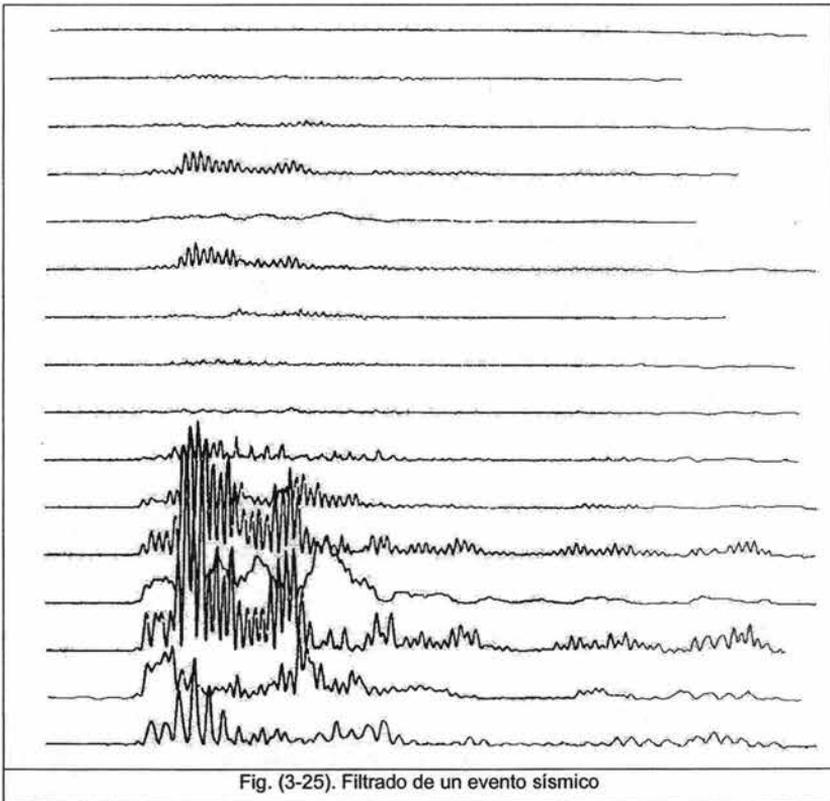


Un limitado conjunto de muestras, conteniendo las M primeras del conjunto total de N, se transforman para darnos M coeficientes transformados, cada uno teniendo un canal de salida donde los resultados son almacenados. El conjunto de muestras de entrada avanza una posición admitiendo al conjunto una muestra nueva del conjunto total de N muestras desechando de igual manera la más antigua del conjunto (por ejemplo la primera).

La transformada de este segundo set se lleva a cabo para proporcionarnos el siguiente conjunto paralelo de M coeficientes. El proceso se repite hasta que el set completo de N

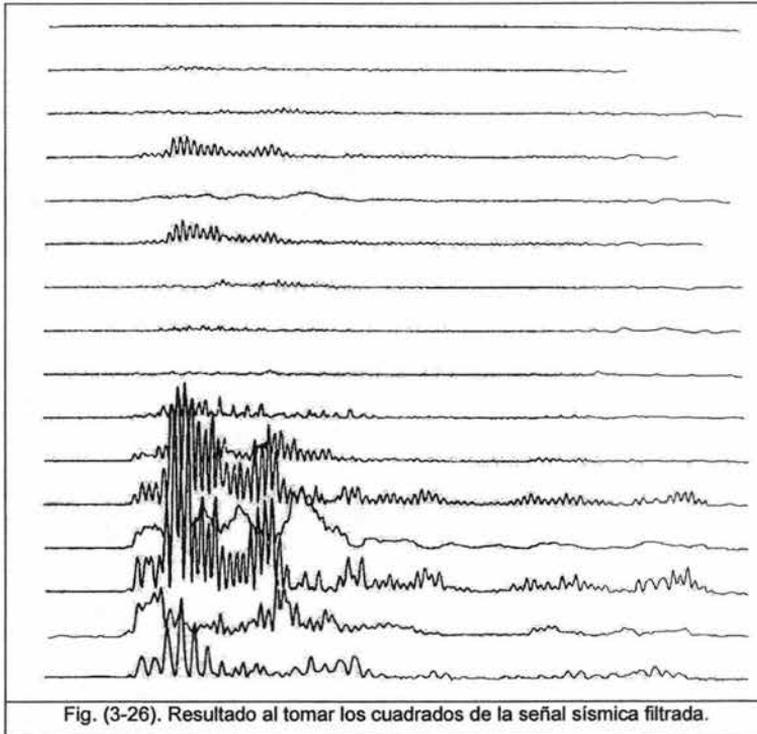
muestras se procesan. La idea es de dar series con M canales de salida cada uno representando el valor continuo de un coeficiente Walsh a lo largo de la duración de la señal de N muestras.

Analizando una señal sísmica, la forma de la señal de salida se muestra en la **figura (3-25)**, donde solo se usan las primeras 16 funciones Walsh.



Existe cierta redundancia usando la técnica que se muestra en la **figura (3-24)**, ya que los pares de señales filtradas CAL y SAL para una misma secuencia contienen la misma información a parte del cambio de signo. Una versión del análisis de energía espectral del filtro en secuencia se puede desarrollar donde los cuadrados de las funciones

filtradas SAL y CAL se suman usando la ecuación (3.3), para darnos $(M/2) + 1$ señales filtradas. Los resultados se muestran en la **figura (3-26)** los cuales se aplicaron sobre el mismo transitorio sísmico. El uso del filtrado en secuencia también produce unos gráficos más sencillos ya que los resultados solo pueden tomar signos positivos.



Capitulo 4

**Aplicaciones
de las funciones
Walsh
en el multiplexado
de señales**

Capítulo 4

Aplicaciones de las funciones Walsh en el multiplexado de señales

El recurso más limitado en un sistema de comunicación electrónica es el espectro electromagnético. En un sistema de comunicaciones vía radio, los usuarios compiten por las frecuencias disponibles. Es por esto que uno de los principales problemas que tiene que resolver un sistema de comunicaciones móviles es sincronizar el acceso simultáneo de usuarios al mismo tiempo. La solución al problema del acceso múltiple tiene grandes implicaciones desde el punto de vista económico pues limita el número de usuarios que pueden utilizar el sistema y por lo tanto, las utilidades que se obtienen.

4.1. Los Esquemas de Acceso Múltiples

Para transmitir una señal de un usuario a otro, la información debe enviarse a través de un canal que posiblemente tenga que ser compartido con muchos otros usuarios que transmiten sus propias señales simultáneamente por el mismo canal. Surge por lo tanto un importante problema que es el de dividir el canal de comunicación entre los varios usuarios que lo requieren, de tal manera que cada receptor puede recuperar la señal con la precisión con la que se envió.

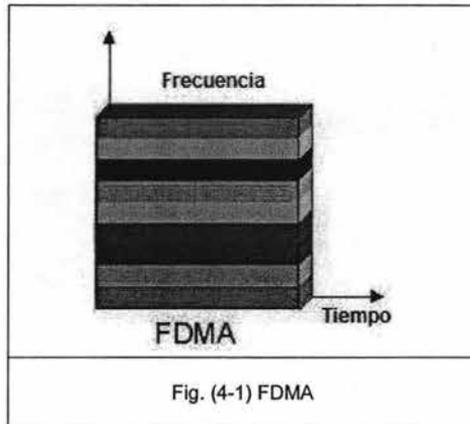
Analizaremos específicamente el caso de comunicaciones inalámbricas, ya que estas continúan aumentando en popularidad, y se requiere que múltiples usuarios puedan compartir la misma frecuencia. Dentro de los tipos comunes de sistemas de acceso múltiple actualmente tenemos:

- El Acceso Múltiple por División de Frecuencia (FDMA)
- El Acceso Múltiple por División de tiempo (TDMA)
- El Acceso Múltiple por División de código (CDMA)

Cada uno de estos esquemas de acceso múltiple plantean soluciones muy diferentes al problema del ancho de banda y se explica en detalle debajo.

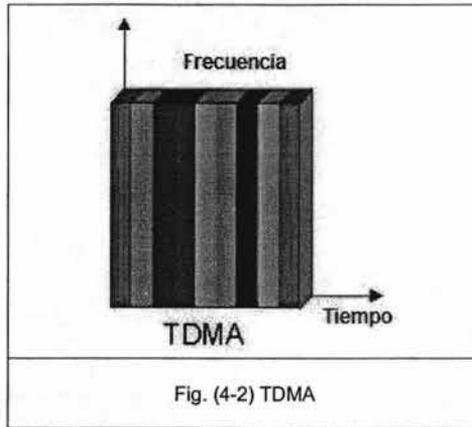
4.1.1 Acceso Múltiple por División de Frecuencia (FDMA)

Cada usuario de FDMA se asigna un canal de frecuencia específico. Nadie más en la misma área puede usar la frecuencia de este canal mientras esta asignada a un usuario. Aunque esta tecnología reducirá la interferencia de señal, también existen grandes limitantes en cuanto al número de usuarios capaces de comunicarse en un mismo momento, **figura (4-1)**.



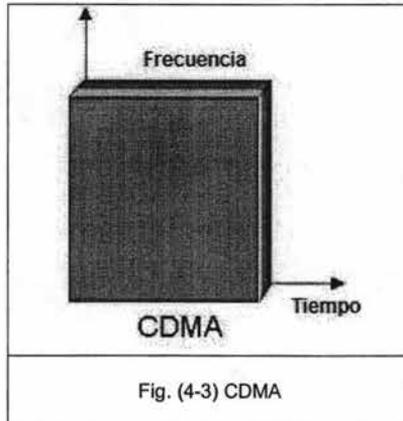
4.1.2 Acceso Múltiple por División de tiempo (TDMA)

Cada usuario de TDMA comparte un canal de frecuencia común, pero usan el canal sólo una cantidad muy corta de tiempo. A cada uno de ellos se le asigna una ranura de tiempo y sólo se le permite transmitir durante esa particular ranura de tiempo. Cuando todas las ranuras de tiempo disponibles en una frecuencia dada se usan, el siguiente usuario debe asignarse una ranura de tiempo en otra frecuencia. Las rodajas de tiempo son tan pequeñas que el oído humano no puede percibir como el tiempo ha sido rebanando, y por consiguiente asume que ellos tienen el canal entero para transmitir su señal, **figura (4-2)**.



4.1.3 Acceso Múltiple por División de código (CDMA)

Los usuarios de CDMA comparten un canal de frecuencia común. Todos los usuarios están al mismo tiempo en la misma frecuencia. Sin embargo, cada par de usuarios se le asigna un código especial que reduce las interferencias además que se incrementa la privacidad, **figura (4-3)**.



Vale la pena notar que mientras los esquemas de acceso múltiple FDMA y TDMA tienen una capacidad limitada por el ancho de banda disponible y el ancho de banda de cada uno de los canales múltiples deseados, en el caso del CDMA no existe este limitante.

En el CDMA, como se verá más adelante, se pueden adicionar nuevos usuarios teniendo presente que el precio que se paga es la pérdida de calidad en la comunicación

4.2 Modelo teórico de multiplexado Walsh

Las funciones Walsh pueden ser utilizadas en muchas de esas áreas donde las técnicas sinusoidales dominaron previamente, principalmente en el diseño de equipo digital y de computación donde las funciones de dos niveles Walsh son compatibles con los algoritmos binarios de los equipos. Así mismo hay muchas características de las funciones Walsh que no tienen una contraparte con las funciones de Fourier lo que permite nuevas ideas en el desarrollo de hardware y software.

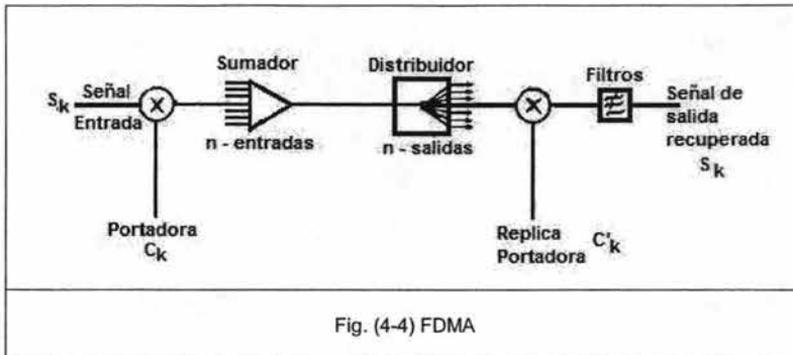
Históricamente los fundamentos matemáticos que dieron origen a posteriores desarrollos en comunicaciones estaban basados en representaciones en secuencia de tiempo continuo muy similar a lo que era las representaciones tiempo – frecuencias continuas.

En la era digital de nuestros días, se ha visto que basta con que se use un conjunto finito de funciones Walsh para representar y alcanzar resultados satisfactorios en la teoría de comunicaciones moderna.

Empezaremos recordando que el multiplexado se refiere a todas aquellas técnicas que permiten la transmisión simultánea de muchas señales independientes dentro de un canal de comunicaciones común. Todas las formas de multiplexado están basadas en sistemas de funciones ortogonales usadas como señales portadoras.

La **figura (4-4)** muestra en forma general un sistema de multiplexaje de señales. Tenemos "n" señales a ser transmitidas cada una se le modifica por una única señal portadora que produce una separación entre cada una de las "n" señales.

El de-multiplexado de todas estas señales se puede llevar a cabo al momento de la recepción combinando la señal multiplexada separadamente con cada una de las señales portadoras únicas, tenemos el caso de FDM, en que diferentes señales son situadas en diferentes partes del espectro de frecuencias y el de-multiplexado en el lado de la recepción se realiza por medio de filtros selectivos de ciertas frecuencias específicas que permite recuperar la señal original. Se utilizaba como señales portadoras señales seno-cosenoidales.



En los primeros experimentos de multiplexado Walsh se reemplazó las señales senocosenoidales que se usaban como portadoras, por señales Walsh en un sistema FDM refiriéndonos a la **figura (4-4)**, la señal enviada sobre un canal sencillo de transmisión $S(t)$ es la suma de los productos de cada una de las señales de entrada, s_k y su portadora asociada c_k ambas expresadas como funciones del tiempo.

$$S(t) = \sum_{k=1}^n s_k(t) \cdot c_k(t) \quad (4.1)$$

Al momento de la recepción, la señal compuesta, $S(t)$, se distribuye a una serie de multiplicadores que tienen una replica de c_k . Los productos son filtrados para remover los productos cross-relacionados a altas frecuencias, y recuperar las señales s_k originales, desafortunadamente la señal recuperada contiene la suma de otras tantas señales multiplexadas por el mismo canal.

Es necesario que las portadoras sean parte de un set de funciones ortogonales, ya que eso permitirá que se identifiquen y que se eliminen al momento de multiplicarlas por sí mismas, para así obtener la señal de salida deseada.

A parte de las señales sinusoidales las funciones Walsh constituyen un conjunto de funciones ortogonales de la misma eficiencia en términos de ancho de banda que las anteriores.

4.2.1 Sistema de multiplexado Walsh

Para el estudio de un sistema digital de transmisión nosotros vamos a considerar el sistema que se muestra en la **figura (4-5)**. Aquí las señales a transmitir a_k y b_k ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) son señales cuantificadas que existen dentro de un intervalo de tiempo finito $0 \leq t \leq T$. Las señales portadoras son secuencias Walsh codificadas $f_i(t)$ y $f_j(t)$ que tienen valores de ± 1 y son ortogonales entre ellas.

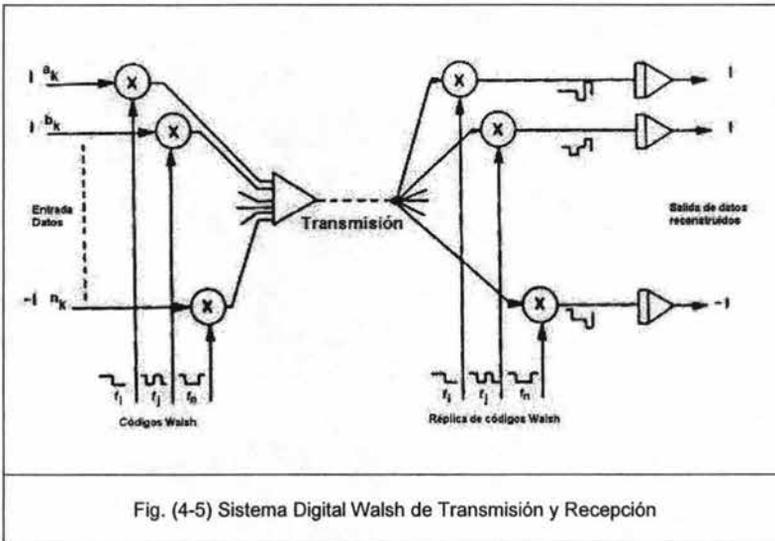


Fig. (4-5) Sistema Digital Walsh de Transmisión y Recepción

Las señales de datos y señales portadoras son multiplicadas por pares y sumadas de manera lineal para la transmisión como se muestra. Se asume que las secuencias codificadas $f_i(t)$ y $f_j(t)$ son almacenadas o recuperadas en la recepción, la señal combinada y transmitida es multiplexada separadamente con cada una de estas secuencias de código y el resultado promedio para una señal representada de forma efectiva, en el caso particular la señal a_k se representa:

$$A_k = \frac{1}{T} \int_0^T a_k \cdot f_i^2(t) dt + \frac{1}{T} \int_0^T b_k \cdot f_i \cdot f_j(t) dt \quad (4.2)$$

Debido a que las señales portadoras $f_i(t)$ y $f_j(t)$ son ortogonales, el segundo término de la ecuación se convierte en cero y podemos escribir:

$$A_k = \frac{1}{T} \int_0^T a_k \cdot f_i^2(t) dt \quad (4.3)$$

Pero $f_i(t) = \pm 1$ por lo que $A_k = a_k$ y la señal deseada es recuperada.

Este sistema, a pesar de ser simple en concepto, sufre muchas desventajas entre ellas la señal transmitida es una señal multi-nivel, que tiene un valor de amplitud – potencia promedio y por lo tanto es susceptible al ruido además el sistema requiere de varios multiplicadores lineales.

Estas dificultades han llevado al desarrollo de sistemas en que la señal transmitida y multiplexada es también binaria de únicamente dos niveles. Esto hace que la potencia pico sea igual a la potencia promedio y por lo tanto que haya una inmunidad óptima para el ruido. Una ventaja adicional es que es más fácil diseñar multiplicadores digitales de operaciones multi-nivel que analógicos.

4.2.2 Sistema de multiplexado por mayoría lógica

Esta técnica de multiplexado digital consiste en la transmisión únicamente del signo de la señal multiplexada, esto es posible debido a que con las señalizaciones digitales solo es necesario determinar el signo del coeficiente de correlación de transmisión por un único canal, para recuperar la información en la recepción.

Los datos binarios a ser transmitidos son modulados cada uno por un conjunto de códigos Walsh que actúan como señales portadoras. Las señales en conjunto sumadas dan origen a una única señal la cual se pasa a través de un dispositivo que detecta y transmite únicamente el signo lógico en el intervalo de un bit del total de las señales moduladas en cada canal. Este sistema es conocido como transmisión por mayoría lógica y se muestra en la **figura (4-6)**.

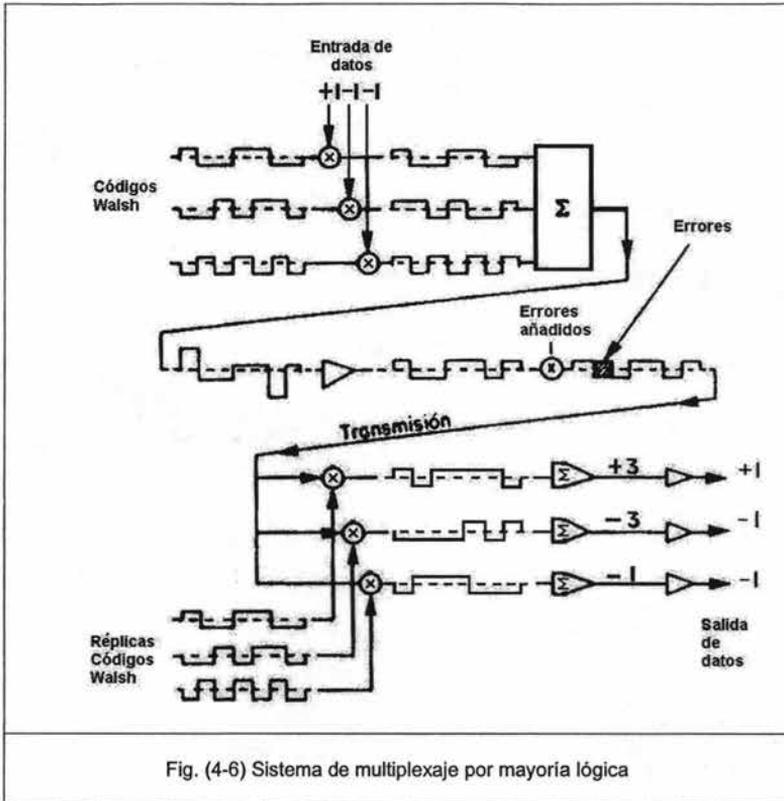


Fig. (4-6) Sistema de multiplexaje por mayoría lógica

El demultiplexado se lleva a cabo al encontrar el coeficiente de correlación de la señal transmitida con cada uno de los mismos códigos Walsh utilizados en la transmisión.

El número de canales que se pueden usar con este sistema depende de la existencia de una matriz donde las filas tengan un coeficiente de correlación de signo invariante después de ser moduladas, sumadas, etc... la matriz puede formarse con funciones Walsh de $WAL(1,t)$ a la $WAL(7,t)$.

Desafortunadamente el uso de una matriz más grande provee una transmisión ambigua de signo. Una solución alterna para poder utilizar mas canales es que la salida de un multiplexor con un conjunto de canales sea a su vez la entrada de un segundo multiplexor donde se tiene la entrada de otros multiplexores y estos a su vez con otros canales, en concreto la idea es tener varios multiplexores agrupando varios canales en

varias etapas. Los multiplexores sucesivos permiten la reducción de la tasa de error, ya que cada multiplexor por si mismo reduce ese error.

Con el uso adecuado de códigos ortogonales como señales portadoras, el sistema ofrece una relación aceptable entre el numero de canales en uso y la corrección automática de errores, esto resulta debido a que la magnitud de los coeficientes de correlación para un canal dado se incrementan de manera inversa al numero de canales mezclados, por lo que el signo correcto se mantiene incluso con la presencia de errores en la señal multiplexada. Esto se ilustra en la **figura (4-6)** donde se agrega un bit de error a la señal mutiplexada y se elimina durante el proceso de recuperación.

En este ejemplo se muestran 3 de los 7 canales posibles, y a pesar de que se tiene cierta capacidad de corrección cuando el sistema esta totalmente lleno es imprescindible que el multiplexor pueda determinar que canales están activos. Debido a la redistribución de potencia en todo el sistema en el momento del multiplexaje, es posible que al momento de realizar la demodulación de un canal inmóvil o vacío, este puede producir una señal a la salida. Por lo tanto se tiene la necesidad de monitorear la actividad de un canal y después de adquirir cierta información, suprimir la salida de un canal inactivo. Esta dificultad puede encontrar una solución al dejar un canal del multiplexor para este propósito, para que almacene información para control de los demás canales.

Finalmente diremos que un sistema de multiplexado por mayoría lógica puede ser construido totalmente usando circuitos digitales, principalmente con memorias de solo lectura y registros de desplazamiento.

4.3 Técnicas de modulación de espectro expandido (SPREAD SPECTRUM)

Los esquemas de acceso múltiple tiene como meta, permitir que varios usuarios de un sistema tengan acceso simultáneamente al canal de comunicaciones. La capacidad de un esquema de acceso múltiple se mide en el número de usuarios que pueden compartir simultáneamente un canal con un ancho de banda fijo. Como es obvio, es preferible un esquema de acceso que permita más usuarios pues se hace un uso más eficiente del espectro pero además que estos usuarios requieran de un servicio de calidad, donde la señal que reciben tenga una relación señal/ruido aceptable, por todo lo anterior es que los esquemas de acceso múltiple en particular CDMA utilizan la

modulación de espectro expandido buscando compartir el canal de comunicaciones con el mayor numero de usuarios posible.

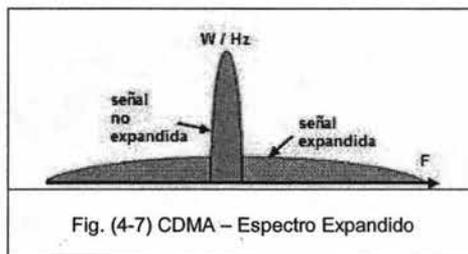
4.3.1 Definición de modulación de espectro expandido

La codificación denominada Espectro Expandido SS (Spread Spectrum) se basa en la ley de C.Shannon sobre la capacidad de canal:

$$C = W \log_2(1 + S/N) \quad (4.4)$$

La capacidad C del canal se relaciona con el ancho de banda W y la relación señal a ruido S/N. Puede efectuarse una comunicación con una S/N insignificante a condición se usa una banda W lo suficientemente ancha. Para transmitir 3 kb/s con una relación señal-a-ruido S/N de 10^{-2} se requiere una banda de 200 kHz.

En base a lo anterior la modulación por espectro expandido busca obtener un mayor redimiendo de un canal teniendo mayor número de usuarios con una relación S/N aceptable, para lo cual antes de la transmisión por un canal, los datos en banda base de un usuario se expanden **figura (4-7)**, usando un único código de expansión para ese usuario en particular, por lo que cada usuario tendrá un código diferente dentro de sus datos a transmitir, que será único, lo que permitirá que muchos usuarios usando diferentes códigos puedan compartir un mismo ancho de banda.



Esta técnica puede compararse a una fiesta **figura (4-8)**, dónde todos estamos en el mismo cuarto y todos hablamos al mismo tiempo. Sin embargo, cada par de invitados usa un idioma diferente para comunicarse. Usando idiomas diferentes hace que el

comunicarse sea muy fácil para los invitados, prestando solo atención a lo que la persona que habla su idioma está diciendo y poniendo a todos los demás fuera de su atención.



El espectro expandido (SS) permite evitar las interferencias denominadas "Jamming". El emisor, antes de enviar la información, divide cada BIT en varias unidades llamadas chips (secuencia grande de bits codificadores) y codifica el BIT antes de enviarlo. Si se tiene una señal de 10 KHz y cada bit es codificado por 100 chips, el ancho de banda necesario para la transmisión de los chips será de 1 Mhz.

Estas técnicas tienen su origen en los sistemas militares y en términos generales existen tres técnicas básicas: dos técnicas en el ensanchado de espectro (spread spectrum) y una ensanchado de tiempo (time hopping).

- Secuencia directa "DS-SS": (spread spectrum) producto convolucional con un código denominado Chips. Ensanchado en modulación. Lo detallaremos mas adelante.
- Frecuencia Hoppers FH-SS: (spread spectrum) saltos de frecuencia siguiendo una secuencia conocida como "Saltos de Frecuencia" (Frequency Hopping): Se asignan N canales a la comunicación y se va saltando entre las diferentes frecuencias multiplexación con un patrón de saltos predeterminado. Si tenemos una señal de 10 KHz y deseamos 100 canales, el ancho de banda necesario para transmitir la señal es de 1 Mhz.

- **Ensanchado de tiempo: (time hopping).** pulsos de modulación FM; a un mensaje transmitido a una tasa R que requiere un intervalo de tiempo T , se le asigna un intervalo de tiempo mayor T_s . Durante el intervalo T_s , la información es transmitida en ráfagas de acuerdo a un plan de saltos preestablecido. Puede ser visto como el equivalente de los saltos de frecuencia pero realizado sobre ranuras de tiempo en vez de frecuencias. Es usado en radares.

4.3.2 Espectro expandido por secuencia directa.

Entre una de las técnicas de espectro expandido más comunes es la de la secuencia directa. En esta técnica la portadora es modulada (expandida) con un código digital. Cada BIT (de duración T_i) de la señal de datos se multiplica por un código (Chip de duración T_c) que cambia una proporción más rápida ($R_c = 1 / T_c$) que la secuencia original de BITS de datos ($R_i = 1 / T_i$), es decir $R_c > R_i$.

Esta técnica de secuencia directa se aplica para obtener una señal digital con un ancho de banda mayor (expandido) para posteriormente transmitirse.

El número de símbolos de código (chips) por bit de señal se llama ganancia de procesamiento, de forma similar la proporción de expansión (SF) se define como:

$$SF = \frac{R_c}{R_i} \quad (4.5)$$

Una vez que la señal se codificó y transmitió por el canal, el código modulador debe de ser conocido tanto por la unidad emisora como por la transmisora, una unidad receptora que no tenga el código correcto solo recibirá ruido aunque este posicionado en la misma frecuencia que otro que si tenga el código correcto.

En la recepción la señal se recibe y se decodifica, para lograr esta tarea, la señal recibida se multiplica (correlacionador) por el mismo código modulador de manera sincronizada.

Debido que el código original se compone de valores binarios 1/-1 o 1/0, esta operación quitará el código completamente de la señal y sólo la señal de datos original permanecerá. Nótese que la operación de expansión es precisamente equivalente a la operación de compresión.

Las distintas comunicaciones son diferenciadas al codificar la información de acuerdo con una clave particular, todas transmitidas en un mismo rango de frecuencias, a todas aquellas que no posean la clave particular recibirán solo ruido el cual se incrementara con el aumento de usuarios, mismo que será considerado como un ruido de fondo (Background noise). Una forma de controlar este ruido es que durante el proceso de ensanchamiento (modulación) se adiciona redundancia a la señal, de manera que es mucho más resistente a las interferencias.

El código o clave particular que mencionamos continuamente, es como ya mencionamos una secuencia binaria de valores 1/-1 o 1/0 y tiene propiedades similares a un ruido aleatorio, esta es quizá la parte mas importante ya que las propiedades de este código permitirá que mientras para unos usuarios la comunicación sea legible para los otros sea solo ruido, las propiedades son las siguientes:

- Balance: Deben tener aproximadamente el mismo número de ceros y de unos.
- Deben de ser códigos ortogonales.
- Debe tener una correlación baja.

Enfocándonos en el último punto sobre la baja correlación debemos tomar en cuenta primero la auto-correlación, definida como el grado de correspondencia entre un código y si mismo con un desplazamiento T (retardo distinto de cero o múltiplo de la secuencia) es igual a:

$$S_1(t) \cdot S_1(t-T) \quad (4.6)$$

Y para la correlación cruzada definida como el grado de correspondencia entre códigos distintos desplazados o no, se define como:

$$S_1(t) \cdot S_2(t-T) \quad (4.7)$$

Los resultados en ambos casos deben de ser de valores muy pequeños.

Generalmente con este tipo de modulación se utilizan factores de SF de 10 o 100, y en términos generales el ancho de banda antes de la modulación es:

$$W \approx 1/T_i = R_i \quad (4.8)$$

Y después de aplicada la modulación:

$$B \approx 1/T_c = R_c = SF * R_i \Rightarrow B \approx SF * W \quad (4.9)$$

4.3.3 Códigos ortogonales en DS-SS

4.3.3.1 Códigos Walsh.- Los códigos Walsh o Walsh-Hadamard normalmente se usan en sistemas de expansión directa por que son muy prácticos y porque ellos exhiben muchas únicas propiedades que los hacen útiles en la codificación y decodificación de señales en estos sistemas.

Una de las ventajas principales de códigos de Walsh-Hadamard es que ellos son ortogonales de baja correlación y por consiguiente eliminan los efectos de interferencia de multi-acceso, cumpliendo así con las propiedades y requerimientos para poder ser empleados en esparcimiento y compresión (Spreading y De-spreading) del espectro.

La secuencia de un canal se codifica generalmente mediante funciones Walsh de 64 bits. Las funciones Walsh utilizadas en este caso requieren de 64 bits y en total tenemos 64 secuencias distintas, a una cierta velocidad llamada frecuencia de chips. Por ejemplo 1,2288 Mb/s para el caso de un canal telefónico celular de voz. Se transmite las secuencias Walsh para codificar un cero lógico y la secuencia invertida para un uno lógico.

La norma IS-95 responsable de establecer las características de CDMA en telefonía celular propone la codificación mediante funciones ortogonales Walsh de 64 bits de largo proporcionando 64 códigos ortogonales.

4.3.3.2 Códigos PN (Pseudo ruido).- Además de las funciones Walsh existen otro tipo de códigos ortogonales llamados funciones "PN" (Pseudo Noise – Pseudo Ruido) que consisten en una secuencia binaria pseudo aleatoria "PRBS" (Pseudo-Random Binary Secuency), estas secuencias ortogonales se obtienen mediante un registro digital realimentado de desplazamiento "LFSR" (Linear Feedback Shift Register).

El número de retroalimentaciones que puede tener el registro depende del tipo de función y de la longitud del registro. Las secuencias aleatorias que se pueden generar con un registro de m bits:

$$N = 2^m - 1 \quad (4.10)$$

Dependiendo del número de bits, es el número de secuencias PN que se pueden obtener. Sin embargo muy pocas secuencias son ortogonales. De la ecuación (4.10) podemos observar que hay N secuencias PN, sin embargo únicamente m son ortogonales.

La norma IS-95 CDMA nos dice que para 64 BITS se obtienen $2^{64} - 1 = 1,8447 \times 10^{19}$ secuencias PN, pero de esas $1,8447 \times 10^{19}$ secuencias PN, solo 64 de ellas son códigos ortogonales, lo que significa m usuarios por portadora.

4.3.4 Transmisión y recepción en CDMA utilizando un código ortogonal

En el transmisor (tx):

D = datos de baja velocidad a transmitir.

C = código ortogonal Walsh ó PN de alta velocidad.

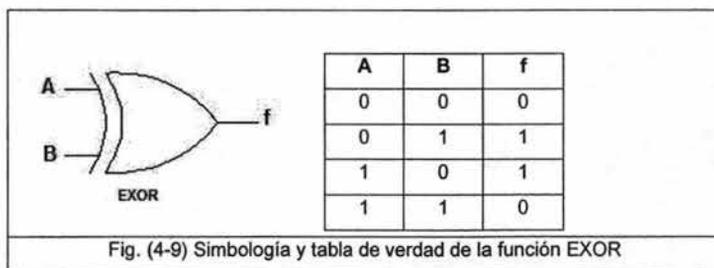
Y = D EXOR C.

En el receptor (rx):

Y = datos recibidos de alta velocidad.

C = el mismo código ortogonal Walsh ó PN.

D = datos recibidos, Y EXOR C.



Ejemplo del funcionamiento del sistema con multi-usuarios:

Usuario 1.

Tx de datos $[D_1] =$ 0000 0000

Código Walsh del usuario 1 $[C_1] =$ 0011 0011

Transmisión del usuario 1 $[Y_1] = D_1 \text{ EXOR } C_1 =$ 0011 0011

Usuario 2.

Tx de datos $[D_2] =$ 0000 0000

Código Walsh del usuario 2 $[C_2] =$ 0000 1111

Transmisión del usuario 2 $[Y_2] = D_2 \text{ EXOR } C_2 =$ 0000 1111

Usuario 3.

Tx de datos $[D_3] =$ 0000 0000

Código Walsh del usuario 3 $[C_3] =$ 1100 1100

Transmisión del usuario 3 $[Y_3] = D_3 \text{ EXOR } C_3 =$ 1100 1100

Recepciones

Rx de datos del usuario 1 de la Tx del usuario 1

$[D_1] = [Y_1] \text{ EXOR } [C_1] \Rightarrow$ 0011 0011 EXOR
0011 0011 =
0000 0000 (dato válido).

Rx de datos del usuario 1 de la Tx del usuario 2

$[D_2] = [Y_2] \text{ EXOR } [C_1] \Rightarrow$ 0000 1111 EXOR
0011 0011 =
0011 1100 (ruido).

Rx de datos del usuario 1 de la Tx del usuario 3

$[D_3] = [Y_3] \text{ EXOR } [C_1] \Rightarrow$ 1100 1100 EXOR
0011 0011 =
1111 1111 (dato no válido).

4.4 Estándar para telefonía celular digital con CDMA (IS95)

Aunque no todos los esquemas de acceso múltiple que mencionamos con anterioridad son los posibles y existentes, si son los mas empleados en la telefonía celular Vale la pena notar que en el concepto mismo de la telefonía celular hay implícito un esquema de acceso múltiple por división de espacio (SDMA - Space Division Multiple Access), que consiste en dividir el espacio en unidades independientes (llamadas células) cada una de ellas con una antena (estación base) encargada de atender todas las comunicaciones en su área de cobertura.

La selección del esquema de acceso múltiple se hace básicamente buscando ampliar la capacidad del sistema celular, y esto se debe al hecho de que las comunicaciones vía celular se están popularizando y el espectro electromagnético disponible es limitado.

El esquema de acceso múltiple TDMA sólo puede ser utilizado en telefonía celular digital y requiere que se implementen mecanismos de sincronización, especialmente en el enlace móvil-base, para garantizar que cada móvil esta transmitiendo durante el tiempo que le corresponde y que no va a interferir con los otros móviles que están utilizando otras ranuras. En el enlace base-móvil la sincronización se requiere para garantizar que cada móvil esté procesando únicamente la información que va dirigida hacia él. Normalmente se aplica en conjunto con el FDMA. Se utiliza FDMA para dividir el canal físico en varios canales lógicos, y cada canal lógico se multiplexa utilizando TDMA.

De igual forma para la telefonía celular con CDMA se aplican en conjunto otras formas de acceso múltiple que hacen que el sistema completo de comunicación sea más robusto y eficiente, claro que la base del sistema es la modulación por división de código y es que una muestra inicial de la eficiencia de CDMA radica en la posibilidad de rehúso de frecuencias a nivel celdas y sectores contiguos (incremento de eficiencia espectral).

La estación base trabaja con antenas direccionales de apertura angular de 60°, cada uno de los 6 sectores dispone de portadoras FDMA (10) y canales CDMA (40). Cada estación base maneja una elevada cantidad de canales (2400).

Debido a que en CDMA no hay rehúso de frecuencias a nivel usuario y en lugar de asignar una portadora por usuario se asigna una portadora para un grupo de usuarios

cada uno con un código diferente transmitiendo al mismo tiempo, su eficiencia en cuanto al número de móviles que puede manejar es mucho mayor que los accesos basados solamente en TDMA y FDMA.

El Uso de CDMA tuvo su inicio en las comunicaciones militares y posteriormente en las comunicaciones civiles. En usos militares CDMA es parte de una familia de técnicas de comunicación digitales que se han usado durante muchos años; CDMA, en particular, se usó ampliamente por los días de Segunda Guerra Mundial, con el fin de resistir los esfuerzos enemigos para bloquear las comunicaciones y esconder el hecho que la comunicación estaba incluso teniendo lugar (baja probabilidad de interceptación), así como de evitar la aglomeración en sistemas militares de radio congestionados y de baja velocidad e incluso radar.

En usos civiles comercialmente fue introducido en 1995, y CDMA se volvió rápidamente una de las tecnologías inalámbricas de más rápido crecimiento en el mundo. Usando un único código para distinguir cada diferente llamada, CDMA permite a más personas compartir el espacio aéreo de telecomunicaciones al mismo tiempo y sin interferencia.

En 1999 la Unión de las Telecomunicaciones Internacional seleccionó CDMA como la norma estándar para la nueva generación de telefonía celular (sistemas inalámbricos 3G "tercera generación"). Muchos distribuidores de servicios inalámbricos están modernizando o están actualizando las redes de 3G en CDMA con la razón de proporcionar más capacidad el tráfico de voz, junto con las capacidades de transmisión de datos a gran velocidad. Hoy, encima de 100 millones de consumidores a nivel mundial confían en CDMA para las comunicaciones de la voz claras, fiables y servicios de datos de vanguardia.

La capacidad aumenta de 8 a 10 veces en comparación de un sistema del teléfono móvil analógico. La calidad de la llamada mejora, con mejor un mejor sonido y más consiente comparado a un sistema del teléfono móvil analógico. Ofrece mucha privacidad por los códigos a emplear en la descompresión, ofrece características de cobertura mejoradas, que permiten la posibilidad de menos celdas celulares, además de que el tiempo de la charla aumenta para los usuarios y se puede demandar mas ancho de banda.

El estándar IS-95 ha sido definido por la TIA (Telecommunications Industry Association) de Estados Unidos, y es compatible con el plan de frecuencias existente en los Estados Unidos para la telefonía celular analógica. Las bandas especificadas son 824 Mhz - 849 Mhz para reverse-link (del móvil a la base) y 869 Mhz - 894 Mhz para forward-link (de la base al móvil). Los canales están separados por 45 Mhz. La velocidad máxima de usuario es de 9.6 Kb/s, y se ensancha a un canal de 1.2288 Mchip/s.

El proceso en ensanche es diferente para cada enlace. En el forwardlink los datos son codificados con un código convolucional y se ensanchan con una secuencia de 64 bits (funciones Walsh). A cada móvil se le asigna una secuencia diferente.

Se proporciona un canal piloto (código piloto) para que cada móvil pueda determinar cómo actuar con respecto a la base. Este canal tiene mayor potencia que todos los demás y proporciona una base coherente que usan los móviles para demodular el tráfico. También proporciona una referencia de tiempo para la correlación del código.

El forward link spreading se hace a través de una banda de 1.2288MHz. Con una longitud de 64 bits, 64 códigos ortogonales Walsh, con una velocidad de código = 1.2288Mb/s.

Para el identificador de los móviles se asigna un código Walsh diferente por cada usuario.

- W_0 = código Walsh 0, usado para el canal piloto (Pilot channel).
- W_1 - W_7 = Usado para canales de voceo (Paging channels).
- W_{32} = Usado para canal de sincronización (Sync. Channel).
- W_8 - W_{31} y W_{33} - W_{63} = Usados para los canales de trafico (Traffic channel).

En el reverse-link se utiliza otro esquema pues los datos pueden llegar a la base por caminos muy diferentes. Los datos son codificados con un código convolucional, código PN largo. Finalmente se ensancha la señal utilizando códigos que son específicos del usuario y de la base.

Los códigos en el reverse link tienen una longitud de 42 bits, $2^{42}-1=4.398 \times 10^{12}$ códigos PN y una velocidad del código = 1.2288Mb/s.

También se usan códigos PN cortos para la identificación de la célula en el rechazo de células, tienen una longitud de 15 bits, $2^{15}-1=32767$ códigos PN cortos y una velocidad del código = 1.2288Mb/s.

El número de usuarios idealmente es de 64 por portadora. Sin embargo tenemos códigos utilizados en Forward Link por lo que quedan 55 canales para el tráfico. Cada usuario contribuye con ruido al sistema, por lo que el número de usuarios que pueden compartir el mismo ancho de banda es limitado.

El control de potencia se debe de hacer en ambas direcciones. De la base al móvil, se hace con el fin de minimizar la interferencia que genera la base sobre las células vecinas. Del móvil a la base se realiza con el fin de evitar que los móviles que están cerca de la base generen una señal tan potente que impida a la base recibir información de los móviles lejanos, se lleva a cabo en pasos de 1 dB, y puede ser de dos maneras: una es tomar como referencia la potencia recibida de la estación base. La otra es recibir instrucciones de la base sobre el ajuste que se debe llevar a cabo.

Finalmente, vale la pena anotar que la señal que se transmite se modula utilizando la técnica QPSK filtrado de la base al móvil y QPSK filtrado con un desplazamiento del móvil a la base.

La separación de la señal CDMA en recepción se puede efectuar mediante 2 métodos (para reducir la interferencia entre canales en la misma celda):

-Tipo "rake": usa técnicas correlativas disponiendo de un filtro adaptado al código de cada suscriptor. Como cada código es conocido y periódico, se genera un espectro con rayas espectrales definidas y separables.

-Tipo "detección de unión": se toma en cuenta el código de los usuarios de la misma celda, suponiendo insignificante la interferencia entre celdas y resolviendo en un paso la separación y equalización. Al conocer todos los códigos que se transmiten en una celda, se puede, por diferencia, identificar uno en particular.

Un problema importante es el sincronismo inicial. Se trata de una búsqueda y detección secuencial sobre un código PN corto, mediante sucesivos corrimientos de un bit y

comparaciones. Luego del sincronismo inicial corresponde un seguimiento (tracking) de la señal entrante.

Resumen de los parámetros y funciones de canalización en CDMA

Parámetro	Función
Frecuencia	Se divide el espectro en canales de 1.23 Mhz, los enlaces forward link y reverse link están separados 45 Mhz, Se le asigna una frecuencia específica de las disponibles en una célula, a una llamada. Se asignan diferentes frecuencias a diferentes llamadas.
Códigos Walsh	Separa los canales de forward link de los diversos usuarios de una misma célula, se asigna en la base el código 0 es para el canal piloto mientras que el 32 es para la sincronización.
Códigos PN Largos	Separa los canales reverse link de los diversos usuarios de una misma célula, depende del tiempo y de la identificación de un usuario, esta compuesto por una secuencia binaria pseudo aleatoria (PRBS) de 43 bits y una máscara específica del usuario.
Códigos PN Cortos	También llamados secuencia de ensanche I y Q, separa diferentes celdas o sectores de celdas. Los códigos I y Q son diferentes pero están basados en PRBS de 15 bits. Ambos códigos se repiten a intervalos de 27.667 ms. Las estaciones base se diferencian por los desplazamientos de tiempo de las secuencias cortas.

Tabla (XXII) Parámetros y funciones de canalización en CDMA

4.5 Desarrollo de una llamada telefónica utilizando CDMA

Cuando se enciende un móvil, éste conoce la frecuencia asignada para el servicio CDMA en el área local. Se sintoniza en dicha frecuencia y busca la señal piloto. Puede encontrar varias señales piloto provenientes de diferentes estaciones base, pero éstas pueden ser diferenciadas porque tienen diferentes desplazamientos de tiempo.

El móvil selecciona la señal piloto más potente y establece referencias de tiempo y frecuencia a partir de ella. Una vez realizado este proceso de selección de la base, el móvil comienza a demodular con el código Walsh 32 que corresponde al canal de sincronización. El canal de sincronización contiene el valor futuro del registro de

desplazamiento de código PN largo (42 bits). El móvil carga dicho valor en su registro y queda sincronizado con el tiempo de la estación base.

Adicionalmente se requiere que el móvil se registre en la base; de esta manera, ésta sabe que el móvil está disponible para recibir llamadas y cuál es su ubicación. Cuando un móvil pasa de una zona a otra y no hay una llamada en curso, realiza un proceso de "idle state handoff." Un "Handoff" es una característica única de los sistemas celulares que consiste en que si un móvil cruza de una célula a otra en medio de una conversación se realice el cambio o traspaso a la otra célula y la conversación no deberá verse afectada por este hecho. Minimizar los handoffs y garantizar que los que se den sean exitosos es una tarea muy importante para los diseñadores de sistemas celulares. Cuando el usuario realiza una llamada, el móvil intenta contactar la estación base con un acceso de prueba. El código PN largo que se utiliza está basado en los parámetros de la celda. Si ocurre una colisión, el móvil no recibe respuesta y espera un tiempo aleatorio antes de intentar de nuevo.

Al establecer contacto con la estación base, esta le asigna un canal de tráfico mediante un código Walsh. A partir de este momento el móvil cambia el código PN largo por uno basado en su número de registro con la base. El código Walsh se utiliza en el forward-link, mientras que el código PN largo se utiliza en el reverse-link.

Cuando un móvil comunicado con una base detecta otra señal piloto suficientemente potente, solicita un proceso de "soft handoff".

Al móvil se le asigna otro código Walsh y otra sincronización piloto. El móvil debe estar en capacidad de recibir ambas señales y combinarlas. Cuando la señal de la base original haya disminuido lo suficiente, el móvil solicita el fin del "soft handoff".

Al finalizar una llamada, los canales se liberan. Cuando el móvil se apaga genera una señal de registro de apagado que se envía a la base para indicar que ya no está disponible para llamadas.

4.6 Ventajas y desventajas de CDMA

Ventajas

- Aprovecha la naturaleza de las conversaciones humanas para proporcionar mayor capacidad.
- No requiere de un filtro ecualizador. Basta con el correlacionador.
- Como todas las células utilizan las mismas frecuencias, no hay necesidad de hacer cambio de frecuencias en el "handoff". Sólo hay que hacer cambio de códigos.
- No se requieren los bits de guarda que hay entre las ranuras en TDMA.
- Al sectorizar, por lo menos en teoría, se obtiene un incremento de la capacidad.
- Menos desvanecimientos.
- La transición es más fácil. En CDMA se utiliza un ancho de banda de 1.25 Mhz, el cual es equivalente al 10% del ancho de banda asignado a las compañías celulares, por lo que se puede hacer una transición lenta y adecuada.
- Mayor capacidad.
- No se requiere gestión ni asignación de frecuencias.
- El efecto de adicionar un usuario extra sobre la calidad, se refleja en todos los usuarios.
- Puede coexistir con sistemas análogos.

Desventajas

- Necesitan de un control de potencia rápido, ya que el nivel de potencia de todas las estaciones móviles que se reciben en la base deben de ser iguales. Si uno de los móviles envía señales con una mayor potencia este distorsionará las señales de los otros móviles, En el peor de los casos un solo móvil que tenga un control de la potencia fuera de los parámetros puede hacer caer la comunicación de toda la célula y de las células cercanas.
- La estaciones móviles que están en la etapa handoff necesitan utilizar frecuencias de mas de una célula por consecuencia la capacidad de estas se reduce.

Capítulo 5

Aplicaciones de la transformada Walsh en el tratamiento digital de imágenes

Capitulo 5

Aplicaciones de la transformada Walsh en el tratamiento digital de imágenes

5.1 Procesamiento de señales multidimensionales

Las señales multidimensionales como lo son las imágenes (fotos) $f(x,y)$, video $f(x,y,t)$, CT y MRI $f(x,y,z,t)$, de los cuales haremos un breve definición mas adelante, requieren de un procesamiento y tratamiento digital debido a que para su transmisión y visualización requieren de una codificación y compresión, además algunos casos estas se encuentran deterioradas, con ruido o ciertas distorsiones por lo que es necesario un procesamiento digital para su realce (Enhancement), restauración, reconstrucción, reconocimiento de patrones, análisis y detección.

Enfocándonos principalmente en el procesamiento y tratamiento de imágenes estas no pueden ser procesadas como tal si trabajamos con datos pictóricos en ves de datos numéricos, por lo que las imágenes deben de ser digitalizadas, es decir convertirlas a una forma numérica antes de iniciar de un procesamiento por computadora.

Las aplicaciones más importantes en el tratamiento de imágenes se encuentran en las áreas médicas, satelitales, radares y en el campo de la astronomía. A continuación se muestran algunos ejemplos de ellas, **figuras (5-1), (5-2) y (5-3)**:



Fig. (5-1) Imagen satelital de un volcán en la península de Kamchatka, Rusia



Fig. (5-2) Imagen satelital de un volcán en Alaska, EEUU



Fig. (5-3) Imagen astronómica de la Galaxia Espiral: "NGC 1232 – VL UT 1 + FORS 1" tomada por European Southern Observatory en 1998

En el campo de la medicina el tratamiento digital de imágenes va desde el procesamiento de imágenes de rayos X, imágenes de ultrasonido, hasta CT y MRI.

La proyección de una tomografía axial automatizada (CT) es un examen simple y seguro donde un explorador computarizado produce una serie de imágenes y puede detectar muchas condiciones que no se perciban en radiografías convencionales, requieren el uso de un tinte radiográfico que es inyectado o dado de forma oral a los pacientes para realzar las imágenes contorneando los vasos sanguíneos o visualizando los órganos del cuerpo.

Por otro lado la proyección de imagen de resonancia magnética (MRI) es una técnica especial de la proyección de imágenes que permite que los médicos perciban imágenes tridimensionales detalladas del interior del cuerpo humano las cuales pueden conducir a la detección temprana y al tratamiento de diversas enfermedades.

En las **figuras (5-4), (5-5), (5-6) y (5-7)**, se muestran algunos ejemplos del uso de imágenes en la medicina.



Fig. (5-4) Imagen médica: Ultrasonido de un feto de 5 meses de gestación.



Fig. (5-5) Imagen médica: placa de rayos X de un rodilla humana

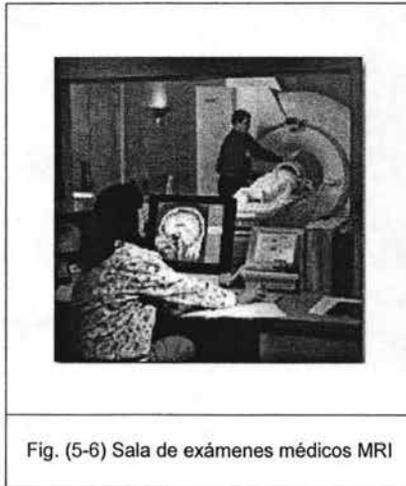


Fig. (5-6) Sala de exámenes médicos MRI

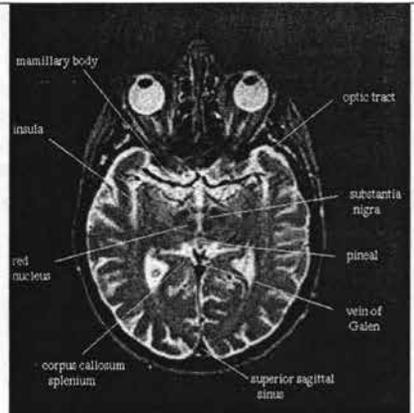


Fig. (5-7) Imagen médica: MRI de un cerebro humano normal.

5.2 Características de las imágenes digitales

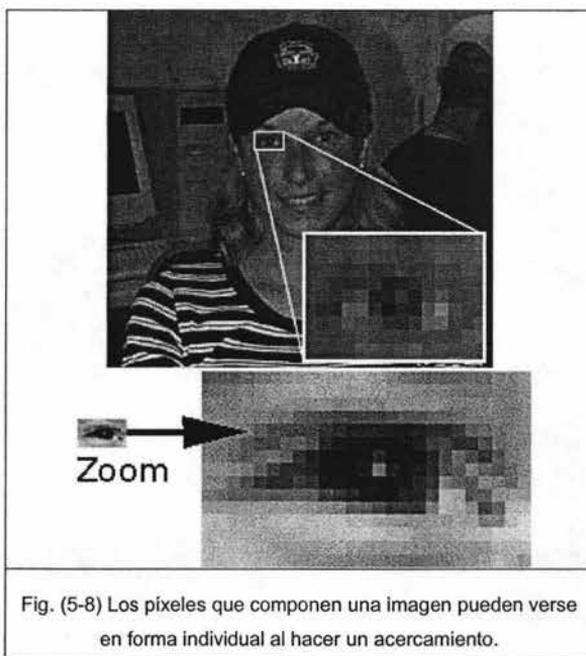
Una imagen es una representación, una semejanza, o una imitación de un objeto o de una cosa, una descripción viva o gráfica, así mismo una imagen digital es una representación electrónica tomada de una escena o escaneada de documentos - fotografías, manuscritos, textos impresos e ilustraciones.

A continuación definiremos las características más importantes que definen a las imágenes digitales:

5.2.1 Píxeles.

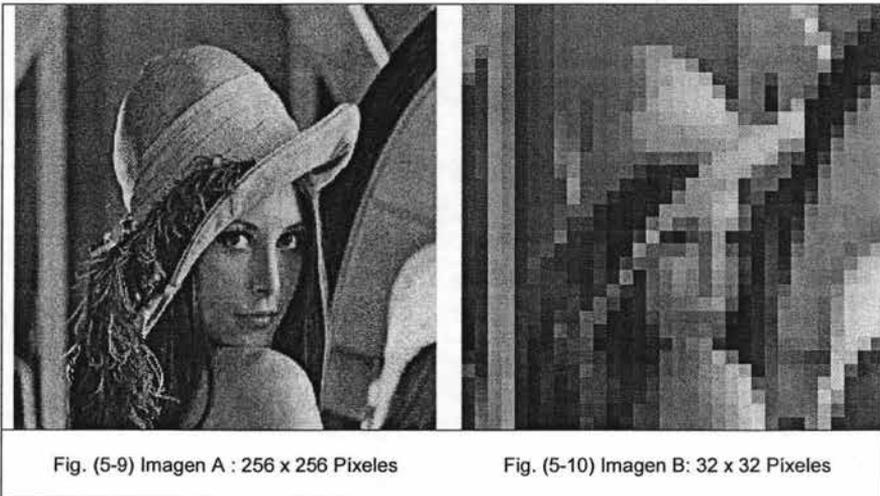
Para obtener una imagen digital se realiza un muestreo de la imagen analógica y se confecciona un mapa de ella en forma de cuadrícula de puntos o elementos de la figura llamados píxeles a cada uno de ellos se le asigna un valor tonal (negro, blanco, matices de gris o color), el cual está representado en un código binario.

Los dígitos binarios ("bits") para cada píxel son almacenados por una computadora en una secuencia, y con frecuencia se los reduce a una representación matemática comprimida. Luego la computadora interpreta y lee los bits para producir una versión analógica para su visualización o impresión. En la **figura (5-8)** se muestra como una imagen esta representada por muchos píxeles y como estos en muchos casos solo son visibles al hacer un acercamiento.



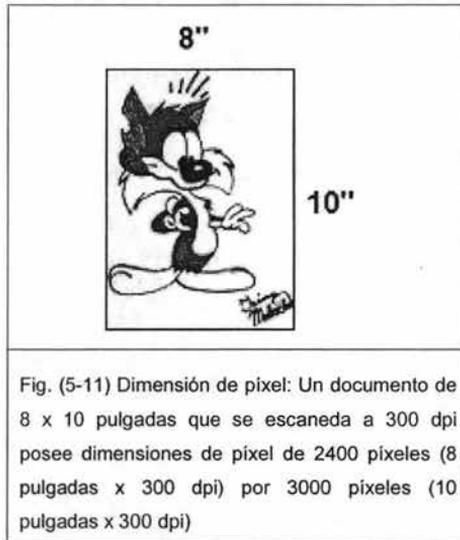
5.2.2. Frecuencia de muestreo.

La frecuencia de muestreo también llamada frecuencia espacial es un buen indicador de la resolución (capacidad de distinguir los detalles espaciales finos). Las unidades dots-per-inch (puntos por pulgada) (dpi) o pixels-per-inch (píxeles por pulgada) (ppi) son términos comunes y sinónimos utilizados para expresar la resolución de las imágenes digitales. Generalmente, pero dentro de ciertos límites, el aumento de la frecuencia de muestreo también ayuda a aumentar la resolución, como podemos observarlo en las siguientes dos imágenes **figura (5-9) y (5-10)**, la imagen A tiene mas dpi que la imagen B, el contraste en la resolución es evidente.



Generalmente una imagen se expresa en dimensiones de píxel quiere decir que son las medidas horizontales y verticales de la imagen, expresadas en píxeles y multiplicadas por el dpi. Una cámara digital también tendrá dimensiones de píxel, expresadas como la cantidad de píxeles en forma horizontal y en forma vertical que definen su resolución (por ejemplo: 2.048 por 3.072).

Ejemplo:



5.2.3. Profundidad de bits.

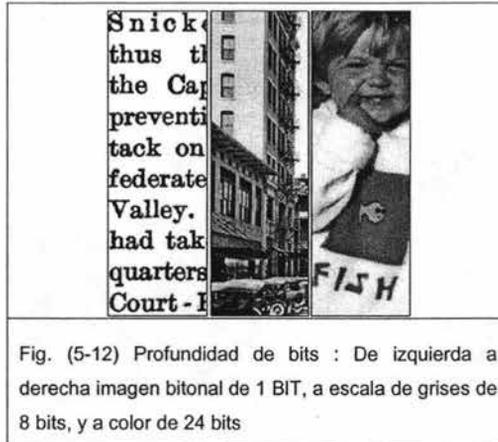
La profundidad de bits en una imagen es determinada por la cantidad de bits utilizados para definir cada píxel. Cuanto mayor sea la profundidad de bits, tanto mayor será la cantidad de tonos (escala de grises o color) que puedan ser representados. La tonalidad en una imagen esta definida por el color que predomina en ellas. Las imágenes digitales se pueden producir en blanco y negro (en forma bitonal), a escala de grises o a color.

Una imagen bitonal está representada por píxeles que constan de 1 BIT cada uno, que pueden representar dos tonos (típicamente negro y blanco), utilizando los valores 0 para el negro y 1 para el blanco o viceversa

Una imagen a escala de grises está compuesta por píxeles representados por múltiples bits de información, que típicamente varían entre 2 a 8 bits o más

Ejemplo: En una imagen de 2 bits, existen cuatro combinaciones posibles: 00, 01, 10 y 11. Si "00" representa el negro, y "11" representa el blanco, entonces "01" es igual a gris oscuro y "10" es igual a gris claro. La profundidad de bits es dos, pero la cantidad de tonos que pueden representarse es 2^2 ó 4. A 8 bits, pueden asignarse 256 o 2^8 tonos diferentes a cada píxel.

En la **figura (5-12)** se muestra de izquierda a derecha una imagen bitonal (1 BIT) una en escala de grises (8 bits) y una en escala de colores (24 bits).



Una imagen a color está típicamente representada por una profundidad de bits entre 8 y 24 o superior a ésta. En una imagen de 24 bits, los bits por lo general están divididos en tres grupos: 8 para el rojo, 8 para el verde, y 8 para el azul. Para representar otros colores se utilizan combinaciones de esos bits. Una imagen de 24 bits ofrece 16,7 millones (2^{24}) de valores de color. Cada vez más, los escáneres están capturando 10 bits o más por canal de color y por lo general imprimen a 8 bits para compensar el "ruido" del escáner y para presentar una imagen que se acerque en el mayor grado posible a la percepción humana.

Cálculos binarios para la cantidad de tonos representados por profundidades de bits comunes

1 BIT (2^1) = 2 tonos

2 bits (2^2) = 4 tonos

3 bits (2^3) = 8 tonos

4 bits (2^4) = 16 tonos

8 bits (2^8) = 256 tonos

16 bits (2^{16}) = 65.536 tonos

24 bits (2^{24}) = 16,7 millones de tonos

En las **figuras (5-13), (5-14) y (5-15)** se muestra la misma imagen pero con diferentes profundidades de bits y concluimos que la inteligibilidad de la imagen no se ve afectada ya que podemos reconocer fácilmente que se trata de la misma imagen, caso opuesto con las **figuras (5-9) y (5-10)** en que se presenta la misma imagen pero con diferentes frecuencias de muestreo y es difícil darse cuenta a simple vista que se trata de la misma imagen.



5.2.4. Archivos de imágenes.

El tamaño del archivo se calcula multiplicando el área de superficie (altura x ancho) de un documento a ser escaneado, por la profundidad de bits y el dpi^2 . Debido a que el archivo de imagen se representa en bytes, que están formados por 8 bits, divide esta cifra por 8.

Fórmula 1 para el tamaño de archivo:

$$\text{Tamaño de archivo} = \frac{(\text{altura} \times \text{ancho} \times \text{profundidad de bits} \times \text{dpi}^2)}{8} \quad (5.1)$$

Por ejemplo, si se captura una imagen de 24 bits con una cámara digital con dimensiones: 8" de alto, 10" de ancho, con un dpi: 300, entonces el tamaño de archivo es igual a:

$$\frac{(8 \times 10 \times 24 \times 300^2)}{8} = 21.6 \text{ M bytes}$$

Si se proporcionan las dimensiones de píxel, multiplíquelas entre sí, y por la profundidad de BIT para determinar la cantidad de bits presentes en un archivo de imagen. De igual manera si la imagen se representa en bytes, que están formados por 8 bits, divida esta cifra por 8

Fórmula 2 para el tamaño de archivo:

$$\text{Tamaño de archivo} = \frac{(\text{dimensiones de pixel} \times \text{profundidad de bits})}{8} \quad (5.2)$$

Ejemplo, si se captura una imagen de 24 bits con una cámara digital con dimensiones de píxel de 2400 x 3000 píxeles entonces el tamaño de archivo es igual a:

$$\frac{(2400 \times 3000 \times 24)}{8} = 21.6 \text{ M bytes}$$

Debido a que las imágenes digitales tienen como resultado archivos muy grandes, la cantidad de bytes con frecuencia se representa en incrementos de 2^{10} (1024) o más:

1 Kilobyte (KB) = 1024 bytes

1 Megabyte (MB) = 1024 KB

1 Gigabyte (GB) = 1024 MB

1 Terabyte (TB) = 1024 GB

5.2.5. Compresión de imágenes.

El término compresión de datos de imágenes se refiere al proceso de reducción del volumen de elementos necesarios para representar una determinada cantidad de información. Los datos son los medios a través de los que se transporta la información. Se pueden utilizar distintas cantidades de datos para describir la misma cantidad de

información. Por lo tanto, hay datos que proporcionan información sin relevancia. Esto es lo que se conoce como redundancia de los datos. La redundancia de los datos es un punto clave en la compresión de datos de imágenes digitales.

En la compresión digital de imágenes, se pueden identificar y aprovechar tres tipos básicos de redundancias: la de codificación, entre píxeles y psicovisual, logrando la compresión de datos es cuando una o varias de estas redundancias se reducen o se eliminan. En este mismo capítulo en el tema 5.4 se describe la implementación de un codificado de imágenes basado en la transformada Walsh que permite la compresión de imágenes aprovechando la redundancia de codificación, entre píxeles y psicovisual.

5.2.6. Imágenes en color.

La teoría del color nos dice que los colores se dividen en 2 categorías denominadas colores primarios aditivos y sustractivos, los aditivos necesitan energía para generarse y crear toda la gama de color (Rojo, Verde, Azul) a la inversa los sustractivos seden energía y se fundamentan en el color blanco (Magenta, amarillo y Cyan), los receptores de TV, las computadoras, cine y el ojo humano funcionan aditivamente esto es añadiendo energía para generar los colores este proceso se denomina síntesis aditiva.

Al proceso contrario se denomina síntesis sustractiva y es utilizado en las imprentas para reproducir imágenes de color en papel.

Hoy la mayoría de las imágenes electrónicas son grabadas en color, en el dominio RGB (Red, Green, Blue). Las imágenes RGB se transforman al espacio luminancia-crominancia, generalmente referido al dominio Y-Cr-Cb, definido como:

$$\begin{aligned}
 Y &= 0.3R + 0.6G + 0.1B \\
 C_r &= \frac{B - Y}{2} + 0.5 \\
 C_b &= \frac{R - Y}{1.6} + 0.5
 \end{aligned}
 \tag{5.3}$$

El canal de la luminancia se refiere a la brillantes de una imagen y los canales de crominancia son Cr que se refiere a la tonalidad y Cb a la saturación, que es la cantidad de pureza del color. Debido a que el ojo humano es relativamente insensible al

contenido de altas frecuencias de los canales de crominancia Cr y Cb son submuestreados por 2 en ambas direcciones.

Esto es ilustrado en la **figura (5-16)** donde los canales de crominancia contienen la mitad de muchas líneas y píxeles por línea comparados al canal de luminancia.

Y1	Y2	Y3	Y4	Cr1	Cr2	Cb1	Cb2
Y5	Y6	Y7	Y8	Cr3	Cr4	Cb3	Cb4
Y9	Y10	Y11	Y12				
Y13	Y14	Y15	Y16				

Fig. (5-16) Submuestreo de los canales de crominancia en comparación con el canal de luminancia.

Con frecuencia se ordenan los píxeles de una imagen a color como no entrelazado (3 exploraciones separadas) o entrelazado (una exploración sencilla). El entrelazamiento hace posible descomprimir la imagen, y convertirla de la representación luminancia-crominancia a RGB para visualizarla con una mínima cantidad de memoria. Para los datos entrelazados, los bloques de la WDT son ordenados de acuerdo a los parámetros especificados en la trama.

A fin de reducir la redundancia psicovisual en las imágenes, usualmente se incorpora las características del sistema visual humano en el proceso de compresión a través de la especificación de matrices de cuantificación.

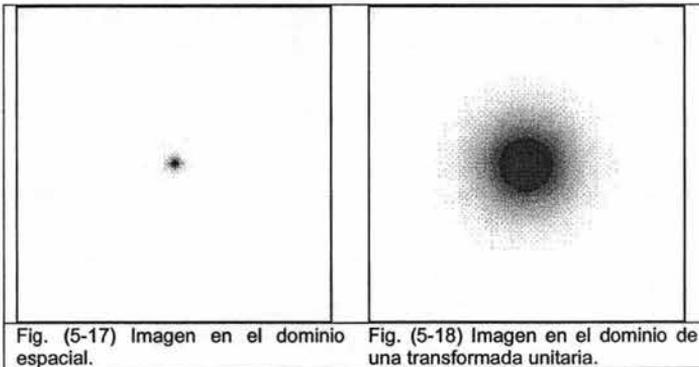
Se conoce que la respuesta en frecuencia del sistema visual humano decae con el incremento de la frecuencia espacial. Además, este decaimiento es más rápido en los dos canales de crominancia. Esto implica que una pequeña variación en la intensidad es más visible en regiones de variación lenta que en las regiones de variación rápida, y también más visible en la luminancia comparada con una variación similar en la crominancia.

Como resultado se admite la especificación de dos matrices de cuantificación, una para la luminancia y otra para los dos canales de crominancia para asignar más bits a la representación de los coeficientes que son visualmente más significativos.

5.3 Transformadas de imágenes digitales

En la codificación, realce, restauración y reconocimiento de patrones por transformación, se utiliza una transformada lineal, reversible para hacer corresponder una imagen con un conjunto de componentes fundamentales o coeficientes, en el dominio de la frecuencia o secuencia. La imagen teniendo sus componentes en tal dominio (frecuencia o secuencia) se puede transformar inversamente al dominio espacial, reproduciendo la imagen tal y como estaba originalmente. Este principio es el fundamento para las técnicas de compresión y realce por transformadas.

La teoría de las transformadas juega un papel muy importante en el procesamiento de imágenes, debido a que el trabajar con la transformada de la imagen en lugar que con la imagen misma puede darnos una mejor visión de las propiedades de la imagen, por ejemplo en las **figura (5-17) y (5-18)** podemos apreciar como la simple imagen de un punto en el dominio espacial tiene una representación mas compleja y detallada en otro dominio.



Para el procesamiento de imágenes, se necesitan transformaciones bidimensionales. En este caso, por cada frecuencia horizontal se lleva a cabo una búsqueda de todas las frecuencias verticales posibles.

Un factor importante que afecta al error de codificación de la transformada y a la complejidad de cálculo es el tamaño de la subimagen o bloque. En la mayoría de las aplicaciones, las imágenes se subdividen de forma que la correlación (redundancia) entre bloques adyacentes se reduce a un nivel aceptable, la subdivisión se hace

respecto de un factor "n" de modo que "n" sea una potencia entera de dos, siendo n la dimensión del bloque. Esta última condición simplifica el cálculo de las transformadas en bloques. En general, tanto el nivel de compresión como la complejidad de cálculo crecen según se incrementa el tamaño del bloque. Los tamaños más populares de los bloques son 8 x 8 y 16 x 16.

Vamos a analizar las características que deben de tener las transformadas para imágenes partiendo de una transformada en una sola dimensión.

Si tenemos una secuencia de una sola dimensión representada en forma de vector f de N términos, a esta secuencia se le puede transformar de la siguiente forma:

$$\vec{g} = T \cdot \vec{f} \quad (5.4)$$

Donde $g(u)$ es la transformada de $f(x)$, y $T(x,u)$ es elemento transformador, así la transformada directa por la relación:

$$g(u) = \sum_{x=0}^{N-1} T(x,u) f(x), \quad 0 \leq u \leq N-1 \quad (5.5)$$

De igual manera la transformada inversa por:

$$f(x) = \sum_{u=0}^{N-1} I(x,u) g(u), \quad 0 \leq x \leq N-1 \quad (5.6)$$

Donde $I(x,u)$ es el elemento transformador inverso:

Si:

$$T^{-1} = T^T \quad (5.7)$$

El elemento transformador es una matriz que es llamada unitaria y la transformada es también llamada unitaria donde las columnas y filas de una matriz unitaria N x N son ortonormales y forman un set completo de vectores base cada uno de ellos de

dimensión N , que permitirán representar una señal cualquiera en el dominio de la secuencia o frecuencia.

Así como una señal de una dimensión puede ser representada por una serie básica de vectores ortonormales, una imagen puede ser representada en términos de un set discreto de arreglos básicos llamados imágenes básicas a través de una transformada bidimensional (o de imágenes).

Para una imagen, la transformada directa e inversa son:

$$g(u, v) = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} T(x, y, u, v) f(x, y) \quad (5.8)$$

$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} I(x, y, u, v) g(u, v) \quad (5.9)$$

Donde nuevamente, $T(x, y, u, v)$ y $I(x, y, u, v)$ son llamados operadores de transformación directo e inverso respectivamente.

El transformador directo se dice que puede ser separado si:

$$T(x, y, u, v) = T_1(x, u) T_2(y, v) \quad (5.10)$$

Se dice que es simétrico si T , es funcionalmente igual a T_2 tal que:

$$T(x, y, u, v) = T_1(x, u) T_2(y, v) \quad (5.11)$$

Los mismos comentarios podemos hacer al respecto del transformador inverso.

Si el operador $T(x, y, u, v)$ de la transformada de una imagen $g(u, v)$ es separable y simétrico entonces la transformada puede ser escrita en forma de matriz:

$$[g] = [T_1] \cdot [f] \cdot [T_1]^T \quad (5.12)$$

Donde $[f]$ es el tamaño original de la imagen, y $[T_i]$ es una matriz transformadora. Si además, $[T_i]$ es una matriz unitaria entonces la transformada es llamada unitaria y separable y la imagen original se recupera por medio de la siguiente relación:

$$[f] = [T_i]^T \cdot [g] \cdot [[T_i]^T]^T = [T_i]^T \cdot [g] \cdot [T_i] \quad (5.13)$$

En la transformación unitaria vemos que la transformada inversa y directa es prácticamente la misma operación.

Así en una transformación unitaria se conserva la energía de la señal. Esta propiedad se llama la propiedad de preservación de energía.

$$|g|^2 = |f|^2 \quad (5.14)$$

Esto significa que cada transformación unitaria simplemente es una rotación del vector en el N el espacio del vector dimensional.

Para el caso de dos dimensiones la propiedad de preservación de energía esta escrita como:

$$\sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} |f(x, y)|^2 = \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} |g(u, v)|^2 \quad (5.15)$$

La compresión de energía.- La mayoría de las transformadas unitarias comprimen o empaquetan un gran fragmento del promedio de energía de la imagen en unos relativamente pocos componentes. Esta propiedad es muy útil para los propósitos de condensación y compresión.

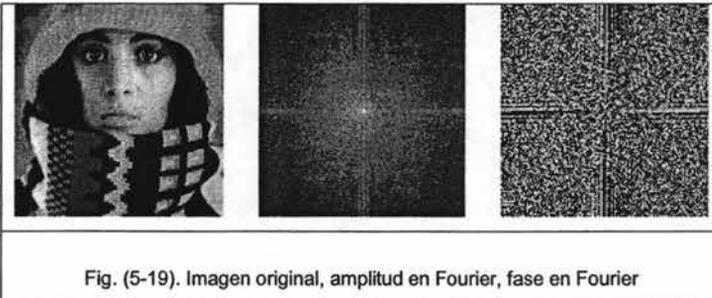
5.3.1 Transformada Discreta de Fourier (FDT).

La transformada discreta de Fourier esta definida por las siguientes relaciones para la transformada directa e inversa:

$$X_{m,n} = \frac{1}{N^2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} x_{i,j} \exp\left(-j \frac{2\pi (ni + mj)}{N}\right) \quad (5.16)$$

$$x_{i,j} = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} X_{m,n} \exp\left(j \frac{2\pi (ni + mj)}{N}\right) \quad (5.17)$$

La transformada de Fourier de una secuencia en general es de valor complejo, y una representación de una secuencia en el dominio de Fourier requiere de los componentes de fase y magnitud. En los varios contextos a menudo se desea reconstruir una imagen teniendo sólo información de dominio parcial, ya sea magnitud o fase. En la **figura (5-19)** se muestra los dominios de amplitud y fase de una imagen.



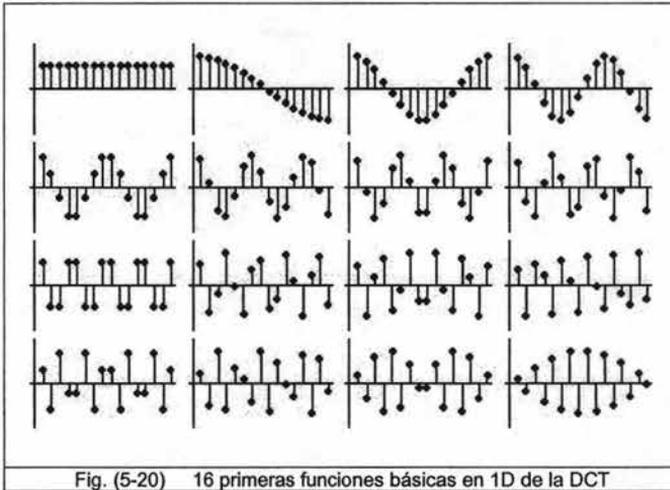
Se ha observado que en la síntesis de una imagen por Fourier, si se utiliza únicamente los componentes de fase exclusivamente, a menudo podremos capturar la mayoría de la inteligibilidad de la imagen original. Una síntesis de una imagen se puede realizar a través de la transformada de Fourier tomando únicamente la magnitud, sin embargo, generalmente esta no captura la inteligibilidad de la imagen original. En un ambiente digital la reconstrucción a partir de la magnitud de Fourier da resultados pobres debido al hecho que los coeficientes de Fourier en el espectro disminuyen rápidamente, es decir, tienden a cero conforme la frecuencia aumenta.

La siguiente ecuación nos permite encontrar el espectro en fase de Fourier, es una ecuación lineal para valores $f(x,y)$ de la imagen para cada frecuencia (u,v) :

$$\tan \phi(u, v) = \frac{I(u, v)}{R(u, v)} = - \frac{\sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \sin[2\pi(ux + vy) / N]}{\sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \cos[2\pi(ux + vy) / N]} \quad (5.18)$$

5.3.2 Transformada Discreta del Coseno (DCT).

La Transformada Discreta del Coseno es un caso especial de la Transformada Discreta de Fourier en la que se eliminan los coeficientes senoidales. En la **figura (5-20)** podemos ver de izquierda a derecha y de arriba abajo, las 16 primeras funciones básicas de la transformada discreta del coseno.



La DCT tiene la propiedad de ser separable, lo que significa que es posible obtener la DCT bidimensional mediante la realización de cálculos en cada dimensión de manera separada.

Para un bloque de tamaño 8x8 el par de Transformadas Discretas del Coseno bidimensionales son:

$$C_{m,n} = a_m a_n \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} x_{i,j} \cos \left[\frac{(2i+1)m\pi}{2N} \right] \cos \left[\frac{(2j+1)n\pi}{2N} \right] \quad (5.19)$$

$$x_{i,j} = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} a_m a_n C_{m,n} \cos \left[\frac{(2i+1)m\pi}{2N} \right] \cos \left[\frac{(2j+1)n\pi}{2N} \right] \quad (5.20)$$

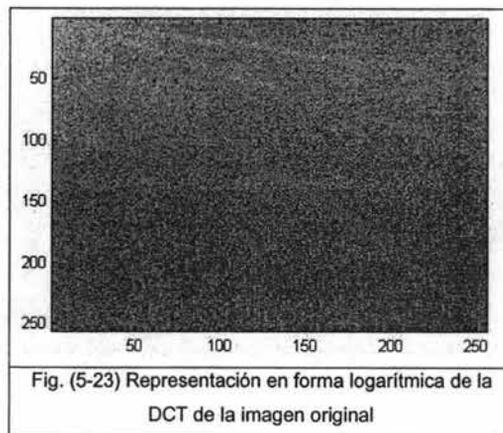
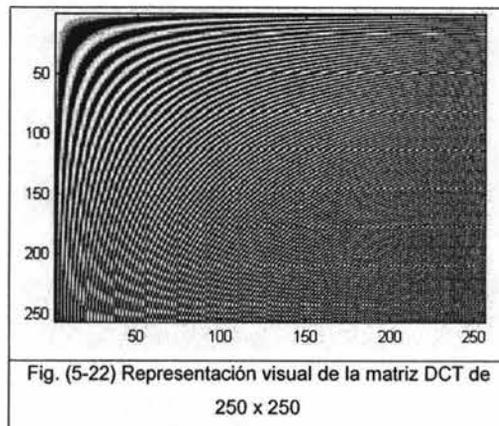
Donde $m, n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ y $a_m = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{N}} & m = 0 \\ \sqrt{\frac{2}{N}} & m = 1, \dots, N-1 \end{cases}$ *Mismo caso para a_n*

(5.21)

La DCT se utiliza principalmente en los procesos de compresión de imágenes. La propia DCT no realiza ninguna compresión, ya que hay tantos coeficientes como muestras, pero convierte los datos de entrada en una forma en la que la redundancia puede detectarse y eliminarse fácilmente.

Las propiedades de la DCT han resultado ser de tal valor práctico que se han convertido en el estándar internacional para los sistemas de codificación por transformación. El hecho de que en la DCT se requieran solamente cálculos reales, facilita su aplicación en los circuitos prácticos. La transformada, es una transformada real, tiene propiedades de compactación de energía excelentes por lo que es muy usada en la compresión de señales.

En las **figuras (5-21), (5-22) y (5-23)** se presenta un caso especial en el que se le aplico un transformada discreta de coseno a todo el bloque en conjunto utilizando la matriz de coeficientes de la **figura (5-22)**, dando como resultado la **figura (5-23)** que esta expresada de forma logarítmica, observamos que en la esquina superior izquierda se concentran coeficientes de un color mas claro, lo que nos representa que son los coeficientes de mayor energía.



5.3.2 Transformada Walsh (WDT)

La transformada Walsh no se basa en términos trigonométricos como la transformada de Fourier, se basa únicamente en unas series donde las funciones únicamente tienen dos valores 1 y -1. Y estas funciones pueden implementarse de una forma más eficiente en un ambiente digital, ya que se requiere únicamente de operaciones lineales y reales para la obtención de la transformada, no como las funciones exponenciales de Fourier que requieren de operaciones complejas.

Los módulos transformadores para la transformada inversa y directa en dos dimensiones son idénticos excepto por la constante $(1/N^2)$, el arreglo formado por los módulos son matrices simétricas que tienen columnas y filas ortogonales, por lo que el arreglo inverso es el mismo que el arreglo directo.

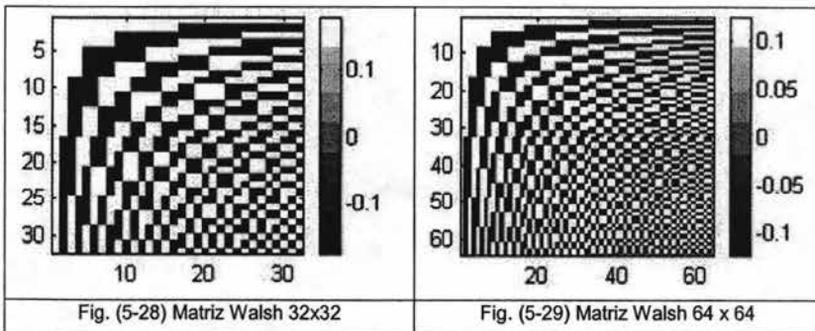
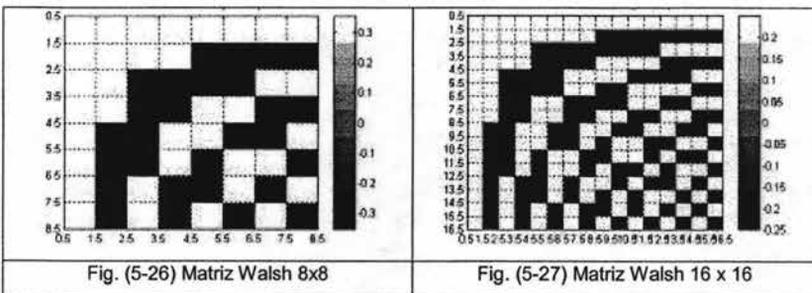
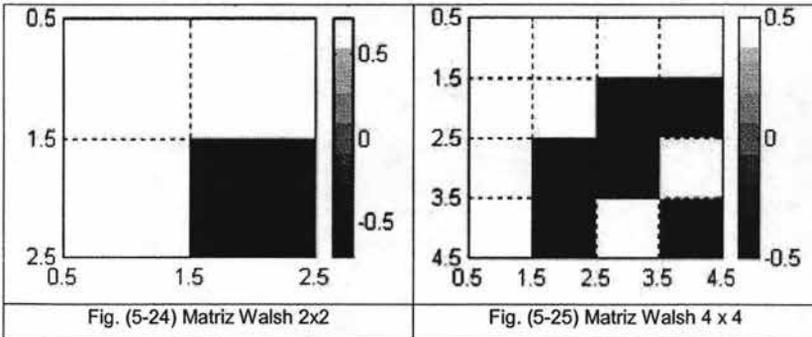
La transformada bidimensional finita de un arreglo bidimensional $X_{i,j}$ de N^2 puntos se obtiene por la expresión, definida anteriormente en el Capítulo 2:

$$X_{m,n} = \frac{1}{N^2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} x_{i,j} \text{WAL}(n,i) \text{WAL}(m,j) \quad (2.20)$$

Y la transformada inversa por, definida anteriormente en el Capítulo 2:

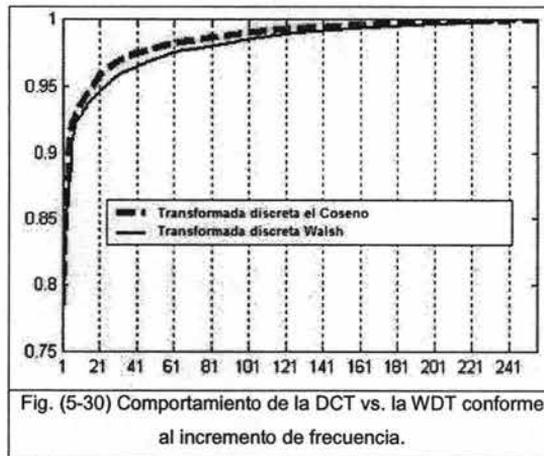
$$x_{i,j} = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} X_{m,n} \text{WAL}(n,i) \text{WAL}(m,j) \quad (2.21)$$

Como ya analizamos anteriormente, el concepto de frecuencia también existe dentro de las funciones Walsh, nosotros podemos pensar a la frecuencia como el número de cruces por cero o el número de transiciones en los vectores de las funciones, a todo esto se le ha dado el nombre de secuencia. En las **figuras (5-24), (5-25), (5-26), (5-27), (5-28) y (5-29)** se muestran diferentes matrices de coeficientes Walsh, donde el color blanco equivale a uno positivo mientras que los cuadros negros corresponden al uno negativo. Dichas matrices unidimensionales son también válidas para la transformada bidimensional.



La transformada Walsh exhibe la propiedad de compactación de energía de la misma forma que lo hacen las demás transformadas que estamos analizando. Debemos mencionar que la dentro de las transformadas bidimensionales de imágenes la transformada discreta del Coseno es la que tiene mejor desempeño en lo que se refiere

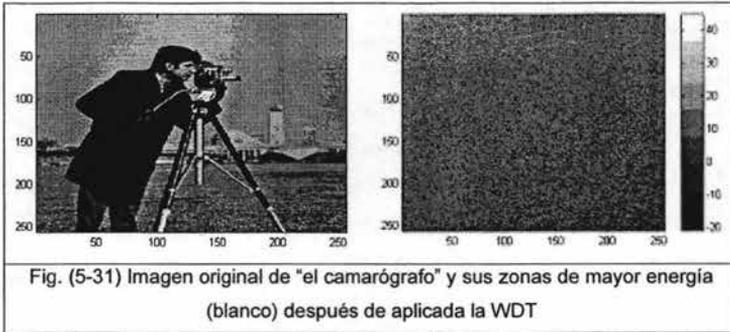
a sintetización de energía, pero como se muestra en la **figura (5-30)** la transformada discreta Walsh tiene un comportamiento muy cercano al de DCT conforme se incrementa la frecuencia en el eje de las "x".



El algoritmo de rápido de la transformada Walsh (Fast Walsh Transform FWT) permite realizar el cómputo de los coeficientes de manera más rápida y eficiente este algoritmo es una modificación del algoritmo rápido para la transformada de Fourier (Fast Fourier Transform FFT).

La transformada Walsh puede implementarse con en circuitos VLSI (circuitos integrados a muy alta escala) de propósito especial, que los hace atractivos para el uso en tiempo real.

En la **figura (5-31)** se muestra la misma imagen de "el camarógrafo" y su correspondiente representación en el Dominio Walsh donde se muestra la zona de mayor energía en la esquina superior izquierda del bloque.



5.3.3 Transformada Walsh – Hadamard

En forma similar a la transformada Walsh, la transformada Hadamard- Walsh en dos dimensiones esta definida por las siguientes ecuaciones:

$$[X'_{WH}] = [x_{ij}][H_N] \quad (5.22)$$

$$[X_{WH}] = \left(\frac{1}{N^2}\right)[X'_{WH}]^T [H_N] \quad (5.23)$$

Donde en la ecuación (5.22) se aplica la transformada Walsh Hadamard parcial en una dimensión, para posteriormente aplicar nuevamente (5.23) la transformada Walsh Hadamard en una dimensión de la transpuesta de la matriz obtenida en (5.22). La gran mayoría de las propiedades que describimos para la transformada Walsh son también validas para esta transformada Walsh Hadamard.

En las figuras (5-32), (5-33), (5-34), (5-35), (5-36) y (5-37) se muestran diferentes matrices de coeficientes Walsh Hadamard, donde el color blanco equivale a uno positivo mientras que los cuadros negros corresponden al uno negativo. Dichas matrices unidimensionales son también válidas para la transformada bidimensional Walsh Hadamard.

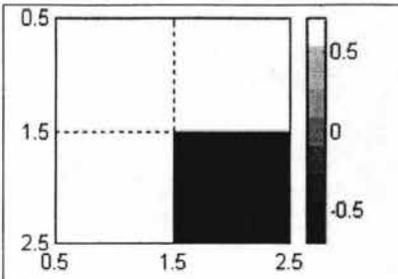


Fig. (5-32) Matriz Walsh Hadamard 32x32

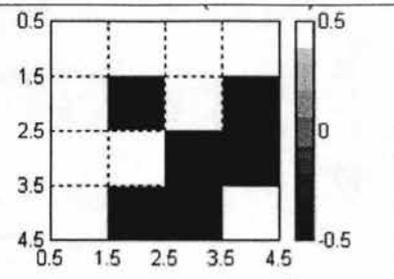


Fig. (5-33) Matriz Walsh Hadamard 64 x 64

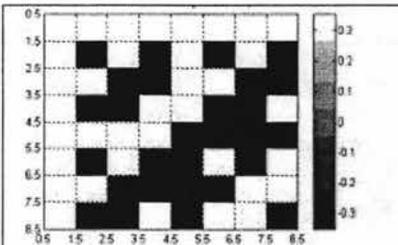


Fig. (5-34) Matriz Walsh Hadamard 32x32

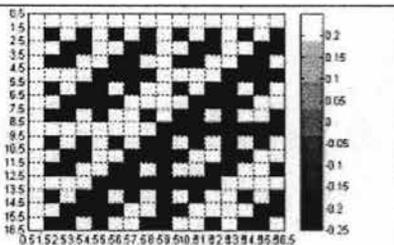


Fig. (5-35) Matriz Walsh Hadamard 64 x 64

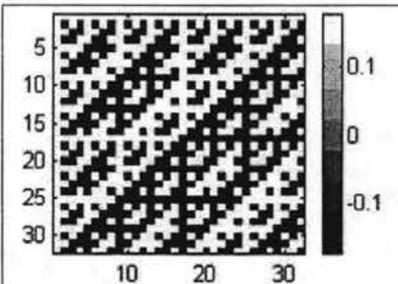


Fig. (5-36) Matriz Walsh Hadamard 32x32

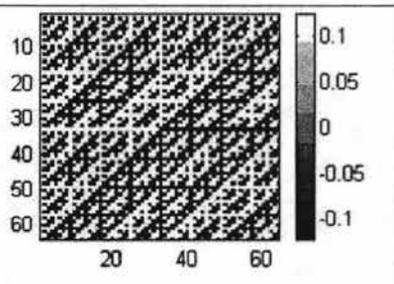
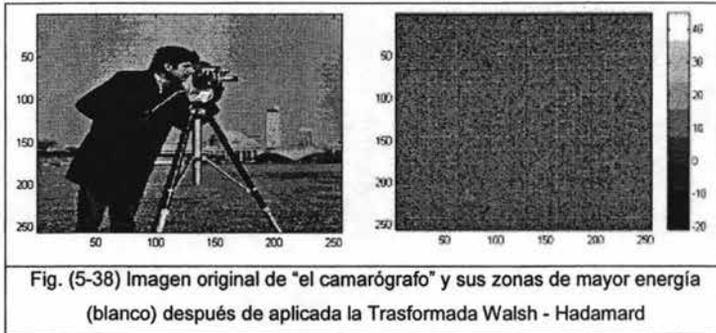


Fig. (5-37) Matriz Walsh Hadamard 64 x 64

Como ya lo habíamos analizado la transformada Walsh difiere únicamente de la transformada Hadamard - Walsh en el orden de sus funciones ortogonales básicas, esto provoca que la transformada no pueda ser procesada utilizando una modificación del algoritmo rápido de la Transformada de Fourier, el algoritmo de alta velocidad a utilizarse es uno propio llamado Fast Hadamard Transform (FHT).

En la **figura (5-38)** se muestra la misma imagen de "el camarógrafo" y su correspondiente representación en el dominio Walsh Hadamard donde se muestran las zonas de mayor energía de forma cuadriculada.



5.4 Implementación de un codificador de imágenes basado en la transformada Walsh

En el dominio de la secuencia, los coeficientes fundamentales representados por los píxeles de brillo, tienden a agruparse en regiones especiales alrededor de las zonas de baja secuencia. Como resultado, hay áreas generalmente grandes de la imagen donde los coeficientes de altas secuencias tienen un valor muy pequeño o cero.

La codificación y compresión de una imagen ocurre porque el proceso de transformación – cuantificación - transformación nos permite eliminar mucha redundancia de la imagen. Debemos tener claro que la WDT no es la que comprime los datos, sino el proceso subsiguiente de cuantización. La WDT simplemente expresa los datos en una forma que facilita ese proceso.

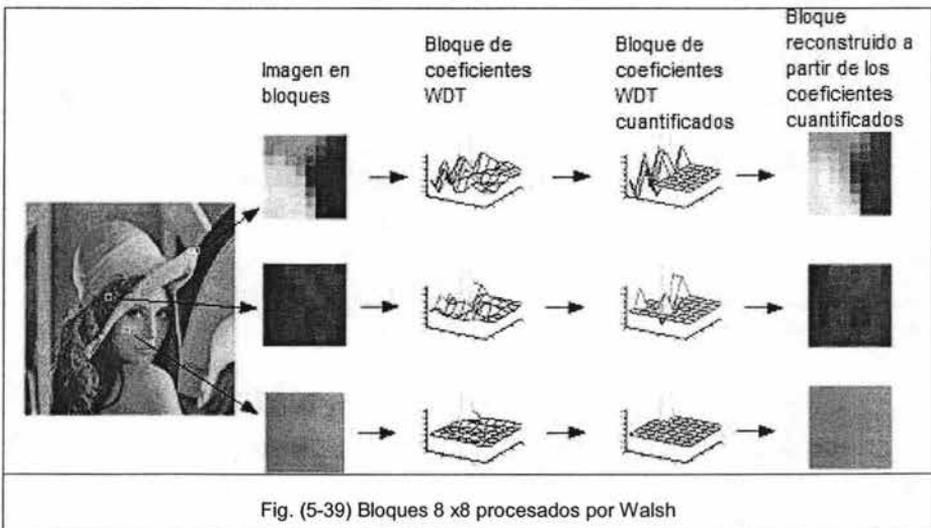
Una vez que se transforman los coeficientes de la imagen, existen varias técnicas para reducir o comprimir estos coeficientes, estas técnicas se basan en el conocimiento sobre la estadística de las señales y sobre el estudio de la percepción visual humana, que aparecerán combinados en sistemas prácticos.

La versión de la imagen en el dominio de la secuencia, es generalmente una representación en términos de energía muy eficiente de la imagen original. Las técnicas de compresión de imágenes por transformadas se aprovechan de esta eficaz

característica de una imagen en el dominio de la secuencia o frecuencia, ya que se pueden eliminar de una manera mas simple los coeficientes que tengan valores muy pequeños.

Debido a que el peso de los coeficientes de valor cercano a cero en el proceso de la transformada inversa es muy pequeño, cuando la imagen se transforma nuevamente hacia el dominio espacial, la eliminación de estos coeficientes antes de aplicar la transformada inversa implica una pequeña distorsión. Adicionalmente, otros coeficientes pueden ser reducidos en su resolución (redondeo) sin que se causen efectos notorios cuando se regrese al dominio espacial.

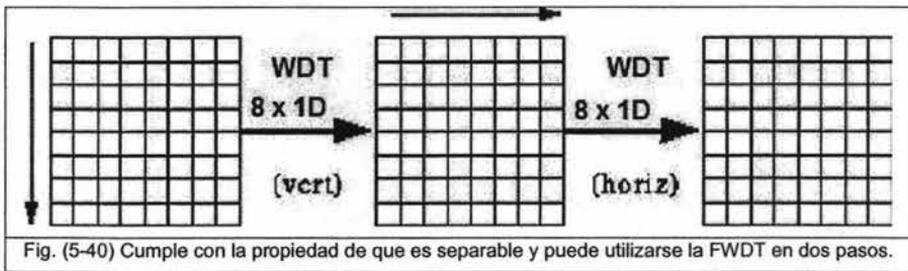
La **figura (5-39)** muestra un resumen del proceso descrito, la imagen es transformada al dominio de la secuencia, posteriormente cuantificada, así puede almacenarse o trasmitirse para luego aplicar la transformada inversa y recuperarse con distorsiones mínimas. A continuación describiremos el proceso Transformación – Cuantificación – Transformación de una forma más detallada tocando algunos puntos importantes dentro de la compresión de imágenes para finalmente exponer algunos ejemplos.



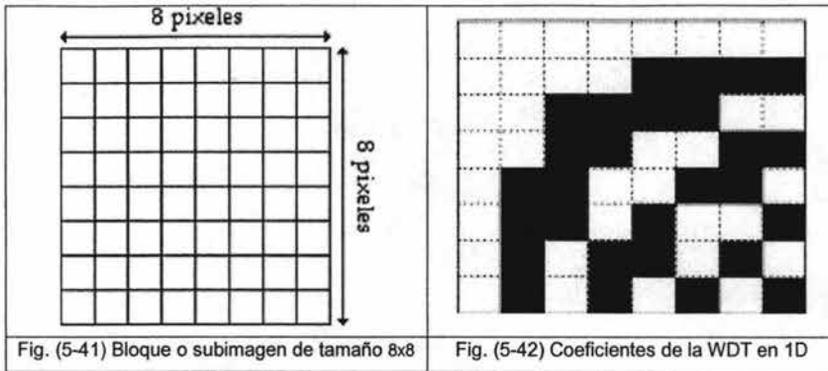
5.4.1 Cálculo de la transformada rápida Walsh:

El proceso de codificación y compresión de imágenes parte de aplicar la WDT a la imagen, esta se divide en bloques de píxeles de tamaño 8×8 o 16×16 que se procesan de izquierda a derecha y de arriba abajo. Según se va encontrando cada bloque o subimagen de 8×8 , se cambian los niveles de sus 64 píxeles, sustrayendo de los mismos la cantidad 2^{n-1} , siendo 2^n , el máximo número de niveles para el caso de una imagen representada en tonos de gris. Esto es, para las imágenes de 8 bits se resta 128 de cada píxel.

Después se calcula la Transformada Discreta Walsh bidimensional del bloque, produciendo un conjunto de 64 valores conocidos como coeficientes Walsh. En la **figura (5-40)** se muestra el proceso de transformación de cada bloque de 8×8 de la imagen:



Los coeficientes obtenidos de la transformada son un indicativo del contenido secuencial de cada uno de estos bloques. La transformada bidimensional se puede obtener aplicando el algoritmo rápido que explicamos en el capítulo 2. Primero se procesan los coeficientes de manera vertical de 8 en 8, posteriormente estos resultados se procesan de manera horizontal de 8 en 8 utilizando el mismo algoritmo. En la **figura (5-41)** se muestra un bloque de 8×8 píxeles que puede ser transformado utilizando dos veces el bloque de coeficientes de la **figura (5-42)** de la transformada Walsh unidimensional.



Una vez obtenida la matriz con los coeficientes Walsh notamos que la distribución de energía ha cambiado, pero sabemos que el total de la energía permanece siendo el mismo dado que la WDT es una transformación unitaria y más aun, el máximo valor de cada coeficiente en la matriz de 8×8 está limitado ya que una entrada de 8 bits puede ser representada por a lo mas 11 bits, debido a la suma de coeficientes positivos, situación que busca evitarse si se quiere comprimir la señal, por esta razón es que antes de aplicar la trasformada bidimensional se les cambia de nivel a sus 64 píxeles, para finalmente redondearlos.

Con la WDT inversa podemos regresar a la imagen original, sin embargo la reconstrucción perfecta de una imagen no es siempre posible si la tomamos únicamente los valores enteros redondeados de la matriz.

5.4.2 Cuantificación.

Este consiste de dos partes:

a) Matriz de cargas.-

El ojo humano no tiene la misma sensibilidad a todas las frecuencias. Por lo tanto, una cuantización de los coeficientes correspondientes a las altas frecuencias es menos sensible para el ojo humano que si se aplica la misma cuantificación en bajas frecuencias.



La **figura (5-43)** muestra que la sensibilidad que tiene el ojo al ruido, vemos que este disminuye con el incremento de la frecuencia, la sensibilidad máxima y una concentración mayor de energía se encuentra alrededor de la esquina superior izquierda de la matriz obtenida de la transformación, como resultado, el coeficiente superior izquierdo suele tratarse como un caso especial y se deja sin modificar.

El coeficiente superior izquierdo lleva la componente continua (DC) del bloque, el cual corresponde al término de secuencia cero Walsh. Se tratará de un valor unipolar (sólo positivo) en el caso de la luminancia y, normalmente, será el valor más alto del bloque, dado que el espectro de las imágenes típicas se encuentra dominado por la componente DC. Hacia la derecha, los coeficientes representan las secuencias espaciales horizontales crecientes y hacia abajo, los coeficientes representan las secuencias espaciales verticales crecientes. El coeficiente inferior derecho representa las secuencias diagonales más altas del bloque. Todos estos coeficientes son bipolares, la polaridad indica si fue invertida la forma de onda espacial original a esa secuencia. La omisión de uno de ellos supone la desaparición de la componente de secuencia adecuada del bloque reconstruido posteriormente. La diferencia entre los bloques originales y los reconstruidos se considera como ruido añadido a los datos deseados.

b) Factores de cuantificación por punto y uniformes

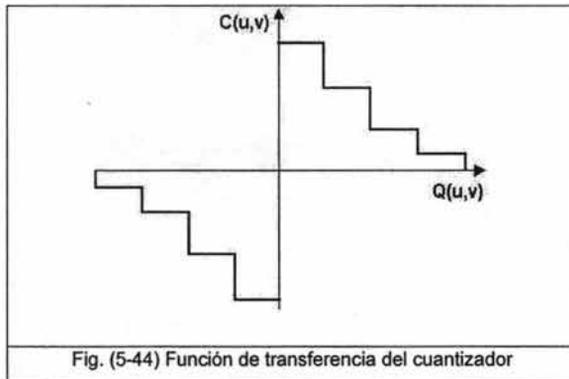
Los coeficientes de la WDT son cuantizados para reducir su magnitud e incrementar el número de coeficientes con valor 0. Un factor de cuantificación por punto (midstep) es en donde el valor de escalón de cuantificación es variado de acuerdo a la localización

de los coeficientes dentro e la matriz de coeficientes. La ecuación para el cuantizador se escribe como:

$$C(u,v) = \frac{\left\lceil F(u,v) \pm \left(\frac{Q(u,v)}{2} \right) \right\rceil}{Q(u,v)} \quad (5.24)$$

Donde: $C(u,v)$ es el coeficiente cuantificado, $F(u,v)$ es el coeficiente de secuencia de la WDT y $Q(u,v)$ es el coeficiente de cuantificación que varía con la posición para el elemento (u,v) en el bloque. En la **figura (5-44)** se muestra la función de transferencia del cuantizador. El signo \pm indica $+$ para un coeficiente positivo de $F(u,v)$ y un $-$ para un coeficiente negativo de $F(u,v)$. El inverso del cuantizador es:

$$F(u,v) = C(u,v)Q(u,v) \quad (5.25)$$



La cuantización es una etapa de pérdida de información. Si cuantificamos con un factor muy grande, la imagen recuperada se verá con demasiados bloques "burdos" de píxeles.

Si empleamos un factor demasiado pequeño se utilizarán muchos bits que esencialmente podrían guardar ruido. Un factor de cuantización alto, da mejores

porcentajes de compresión. Un factor de cuantización demasiado bajo agrega calidad a la imagen recuperada.

En la **figura (5-45)** se muestran tres imágenes que fueron cuantificadas a razón de eliminar la mayor cantidad de coeficientes para lo cual se tomaron valores de cuantificación cada vez mayores.



Un factor de cuantización uniforme puede ser aplicado a toda la imagen, de ser así se le denomina generalmente MQUANT y generalmente es un entero que va del 1 al 32 el cual se envía también como información adicional cuando se transmite una imagen.

5.4.3) Codificación

a) Barrido en zigzag

El barrido zig-zag se la aplica a los coeficientes transformado de un bloque donde la cadena de valores obtenida se dice que esta reordenada según el barrido en zig - zag, como se muestra en la **figura (5-46)**, apreciamos que esta cadena está distribuida cualitativamente según una secuencia espacial creciente.

Este procedimiento de codificación ha sido diseñado de modo que se beneficia de la existencia de largas series de ceros que se producen normalmente en la cuantificación y que son en mayor número consecutivos a partir de esta reordenación en zig - zag.

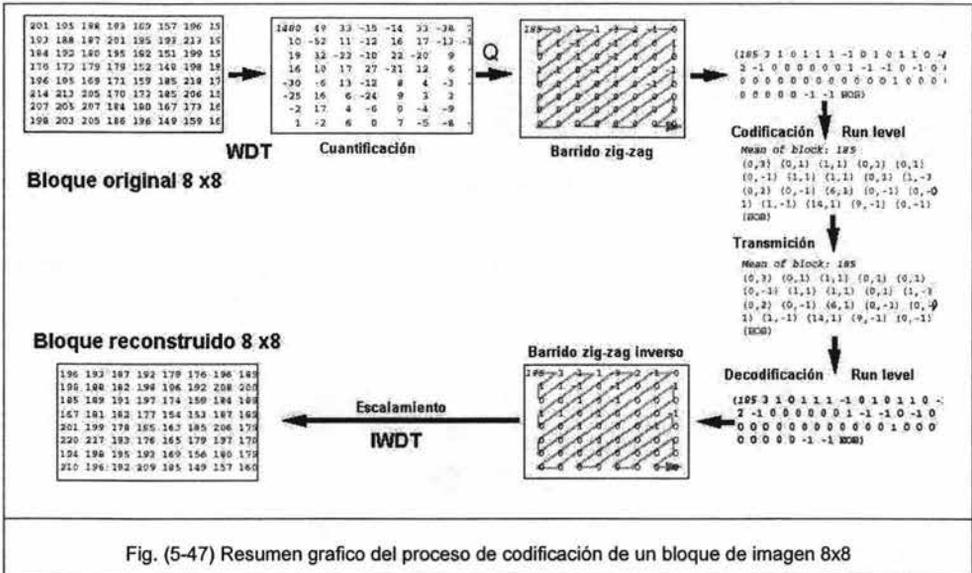


Fig. (5-47) Resumen grafico del proceso de codificación de un bloque de imagen 8x8

c) Reducción de los Coeficientes DC

Esta reducción se realiza entre bloques 8 x 8 de una misma imagen. El coeficiente DC de cada bloque es codificado usando DPCM (Diferencial Pulse Code Modulation). Los coeficientes de DC varían ligeramente entre bloques sucesivos. La codificación de los coeficientes DC explota esta propiedad mediante el uso de la técnica DPCM la cual codifica la diferencia entre los coeficientes DC cuantizados del bloque actual y los coeficientes DC cuantizados de los bloques anteriores. Si se considera el k-ésimo bloque cuantizado, la formula para el código de DPCM está dada por:

$$DPCM CODE_k = (X_{m,n})_k - (X_{m,n})_{k-1} \quad (5.26)$$

La inversa del DPCM calcula el coeficiente actual DC sumando el código DPCM actual con el código del coeficiente predecesor DC.

$$(X_{m,n})_k = DPCM CODE_k + (X_{m,n})_{k-1} \quad (5.27)$$

d) Codificación entropía de Huffman (VLC):

Esta última etapa consiste en codificar los coeficientes con una longitud tanto más corta cuanto más frecuentes sean estadísticamente. Los bloques del modelo DPCM y código de "run-level" pueden ser directamente comprimidos usando codificación con entropía. El estándar de compresión de imágenes de mas usos en la actualidad llamado JPEG utiliza los códigos de Huffman para realizar esta tarea. Los códigos de Huffman trabajan distribuyendo el numero de bits empleados para representar un símbolo, asignando una menor cantidad de bits a los símbolos de mayor frecuencia de aparición y una mayor cantidad de bits a los símbolos que rara vez aparecen.

Por ejemplo si pensamos en la siguiente oración:

Mama la sala de la casa es esa.

Se puede observar que símbolos como la "a" pueden ser codificados con un menor número de bits y símbolos como la "i" pueden ser codificados con más bits. El código de Huffman se construye dependiendo la frecuencia de aparición de cada símbolo como se muestra en la siguiente tabla:

Símbolo	Frecuencia	Código (bits)
m	4	0001
a	18	1
l	6	011
s	8	001
d	2	00001
e	6	010
c	2	00000

Tabla (XXIII). Frecuencias y códigos de Huffman asociados a los símbolos m, a, l, s, d, e y c.

Por lo tanto la frase anterior se puede codificar de la siguiente manera:

0001| 1| 0001| 1| 011| 1| 001| 1| 011| 1| 00001| 010| 011| 1| 00000| 1| 001| 1| 010| 001| 010| 001| 1

Mama la sala de la casa es esa.

Lo cual tomaría 184 bits representarlo en código ASCII con un byte por símbolo.

La codificación de Huffman conjuntamente con la codificación Run-Level y el barrido en zig-zag se puede aplicar a los coeficientes cuantificados de la WDT. La codificación de Huffman también se aplica a los varios tipos de información adicional de la imagen, como el inicio o termino de bloques y número de estos etc....

5.4.4. Reconstrucción de la imagen.-

Como se muestra en la **figura (5-47)** el proceso de reconstrucción de la imagen parte de la decodificación entre los sub-bloques de 8 x 8 de la imagen seguida por la decodificación Run Level de la información contenida dentro de cada uno de los sub-bloques, para a continuación realizar un barrido en zig – zag en sentido contrario al realizado en la codificación para posicionar cada coeficiente dentro de la matriz, finalmente se aplica la transformada inversa Walsh y se recupera la imagen.

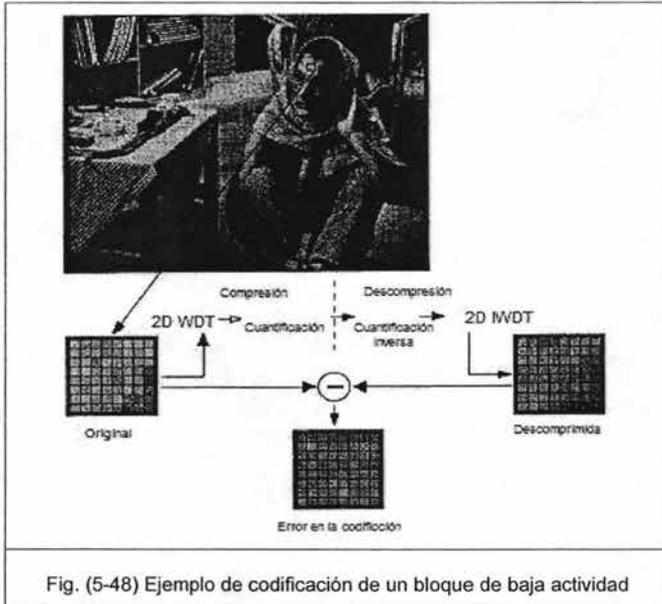
Las variaciones entre la imagen original y la recuperada son mínimas si consideramos que se trata del procesamiento de imágenes muy grandes, que tengan que ser transmitidas grandes distancias con en el caso de las fotografías digitales tomadas por satélites o sondas espaciales o que procesamiento de las mismas en lo que los transductores las convierten de su forma analógica a digital para después procesarlas y desplegarlas en un periférico de salida debe de ser muy rápido, si consideramos todas estas posibles situaciones vemos que una mínima variación es tolerable dentro de los rangos de la calidad.

5.5 Ejemplos de codificación de una imagen basado en la transformada Walsh

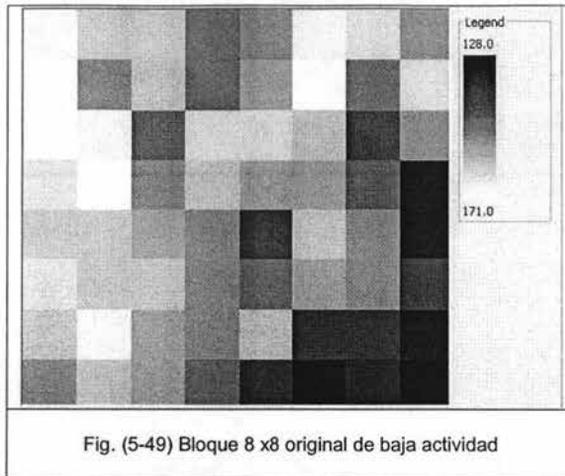
A continuación analizaremos varios ejemplos en los que codificaremos los mismos bloques de píxeles usando diferentes criterios matemáticos con el fin de llegar a la conclusión sobre cual es el procedimiento más eficiente de compresión. Lo que se buscará en todo momento es el poder reconstruir el bloque original a partir de la menor cantidad de coeficientes, sacrificando la fidelidad y legibilidad de la imagen dentro de rangos aceptables. Nuestro análisis empezará con la compresión de un bloque de baja actividad, figura (5-48), esto es que los valores numéricos de este bloque, se mantienen dentro de un intervalo en que entre el mayor y el menor de los coeficientes no se supera las 50 unidades de diferencia.

Posteriormente analizaremos un bloque de gran actividad es decir un bloque que el intervalo antes mencionado es mucho mayor que las 50 unidades, es decir podemos ver juntos valores muy claros como muy oscuros.

5.5.1 Compresión de un bloque de baja actividad



La entrada 8 x 8 que se muestra en la **figura 5-49** representa un bloque en la escala de grises (0-256) y es tomada de una región de baja actividad, esto es que hay pequeñas diferencias entre los valores de los píxeles en la misma área, (los píxeles se encuentran entre el intervalo 171 a 128).



Los valores numéricos de los píxeles de este bloque son:

$$x = \begin{bmatrix} 168 & 161 & 161 & 150 & 154 & 168 & 164 & 154 \\ 171 & 154 & 161 & 150 & 157 & 171 & 150 & 164 \\ 171 & 168 & 147 & 164 & 164 & 161 & 143 & 154 \\ 164 & 171 & 154 & 161 & 157 & 157 & 147 & 132 \\ 161 & 161 & 157 & 154 & 143 & 161 & 154 & 132 \\ 164 & 161 & 161 & 154 & 150 & 157 & 154 & 140 \\ 161 & 168 & 157 & 154 & 161 & 140 & 140 & 132 \\ 154 & 161 & 157 & 150 & 140 & 132 & 136 & 128 \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

a) Reducción de los valores decimales.-

En nuestro primer ejemplo usaremos de la WDT para codificar el bloque que se muestra en la **figura (5-49)**:

Aplicando la WDT bidimensional a la matriz de coeficientes "x" (5.28) tenemos como resultado "X" (5.29).

$$X = \begin{bmatrix} 154.81 & 4.91 & -0.32 & 4.31 & -1.28 & 1 & -0.06 & 0.91 \\ 3.72 & -2.44 & 0.31 & 0.72 & 1.19 & 0.47 & 1.41 & -1.13 \\ -0.78 & -0.32 & 0.44 & -0.78 & 0.25 & -1.34 & 0.97 & 0.81 \\ 2.13 & -2.53 & 0.47 & -1.13 & -1.53 & 1.5 & 2.56 & 0.28 \\ -1.56 & 0.91 & 0.09 & -0.5 & -1.84 & 0.81 & -0.69 & 0.28 \\ 0.72 & 0.19 & -0.13 & 0.28 & -0.75 & -0.09 & -1.09 & 0.88 \\ -0.09 & -0.13 & 0.69 & -0.66 & 0.25 & -0.09 & 0.16 & -0.13 \\ 1.06 & -0.59 & 0.22 & 0.50 & 0.22 & 0.25 & -0.50 & -0.16 \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

Si el procesamiento se llevara a cabo eliminando los valores decimales para simplificar el proceso (mayor velocidad y menor complejidad en la programación) la matriz obtenida de la WDT seria " X' " (5.30):

$$X' = \begin{bmatrix} 154 & 4 & 0 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & -1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

Observamos que cierta compresión se ha llevado a cabo intrínsecamente dentro del proceso de transformación esto es que muchos coeficientes se han reducido a cero, solo 20 de los 64 son distintos de cero, si a partir de estos resultados aplicamos la WDT inversa de " X' " (5.30) el bloque obtenido sería " x' " que se muestra en la **figura (5-50)**; debido a que se pierden valores decimales es que la figura no es exactamente 100% igual a la original.

$$x' = \begin{bmatrix} 164 & 160 & 160 & 152 & 158 & 166 & 158 & 154 \\ 168 & 156 & 160 & 152 & 158 & 166 & 154 & 158 \\ 170 & 162 & 154 & 158 & 160 & 156 & 148 & 148 \\ 162 & 162 & 150 & 154 & 156 & 152 & 148 & 140 \\ 160 & 160 & 156 & 152 & 142 & 162 & 150 & 142 \\ 160 & 160 & 152 & 156 & 146 & 158 & 150 & 142 \\ 158 & 170 & 150 & 158 & 152 & 144 & 140 & 136 \\ 154 & 166 & 150 & 150 & 144 & 144 & 136 & 132 \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

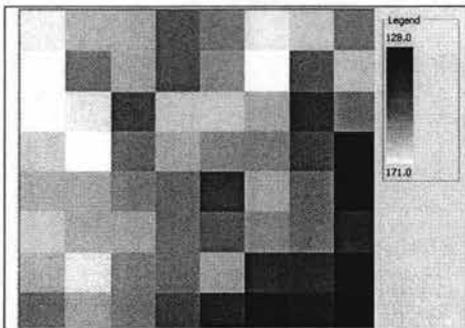


Fig. (5-49) Bloque 8 x8 original de baja actividad

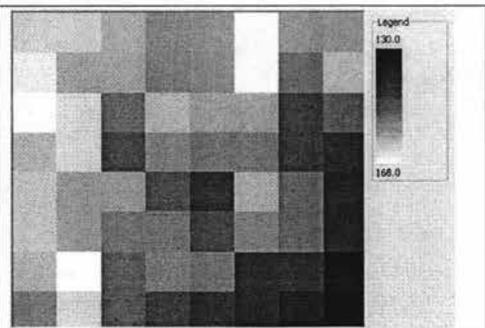
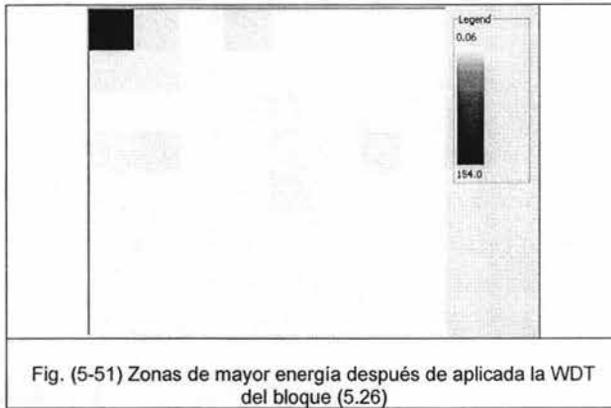


Fig. (5-50) Bloque 8 x8 reconstruido por valores enteros

b) Optimización de los coeficientes de entrada

En la **figura (5-51)** mostramos un cuadro espectral el cual nos permite apreciar donde se concentra la mayor energía una vez aplicada la WDT, como observamos el coeficiente de la esquina superior izquierda es el de mayor amplitud pero también podemos apreciar que la diferencia entre este primer coeficiente y los demás es muy grande esto trae como consecuencia dos importantes situaciones.



La primera es que al momento de aplicar la WDT el componente de DC es decir el de secuencia cero, resulta de la suma promedio de todos los coeficientes, y debido a que en una imagen todos estos son positivos, el resultado puede ser mayor que 256 lo que nos demandaría mas bits para representarlo, es decir si en nuestro sistema de procesamiento destinamos 8 bits (1 byte) para representar un píxel, y si el resultado de uno de los coeficientes sobrepasa el valor de 256 tendríamos que utilizar 9 o 10 bits para representarlo además de destinar un BIT para el signo puesto que los coeficientes Walsh a diferencia de los valores de entrada de las imágenes si pueden ser negativos o positivos, por todo lo anterior si no se tiene en cuenta estas consideraciones no se llevaría a cabo una compresión como tal por que en ves de disminuir el número de bits y la complejidad en las representaciones estaríamos obteniendo lo contrario.

La segunda es que no se llevaría a cabo de manera eficiente la cuantización debido a que la distribución de energía en los coeficientes seria muy abismal por un lado un coeficiente contiendo mas del 90% de la energía y el otro 10% entre los 63 restantes, la discriminación por lo tanto no se llevaría a cabo de la manera correcta.

A continuación vamos a restar el valor promedio de 128 a cada uno de los elementos de la matriz de entrada 8×8 , lo que nos permitirá trabajar con coeficientes de entrada en un rango de 0 a 128.

$$s = \begin{bmatrix} 128 & 128 & 128 & 128 & 128 & 128 & 128 & 128 \\ 128 & 128 & 128 & 128 & 128 & 128 & 128 & 128 \\ 128 & 128 & 128 & 128 & 128 & 128 & 128 & 128 \\ 128 & 128 & 128 & 128 & 128 & 128 & 128 & 128 \\ 128 & 128 & 128 & 128 & 128 & 128 & 128 & 128 \\ 128 & 128 & 128 & 128 & 128 & 128 & 128 & 128 \\ 128 & 128 & 128 & 128 & 128 & 128 & 128 & 128 \\ 128 & 128 & 128 & 128 & 128 & 128 & 128 & 128 \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

$$[y] = [x] - [s] \quad (5.33)$$

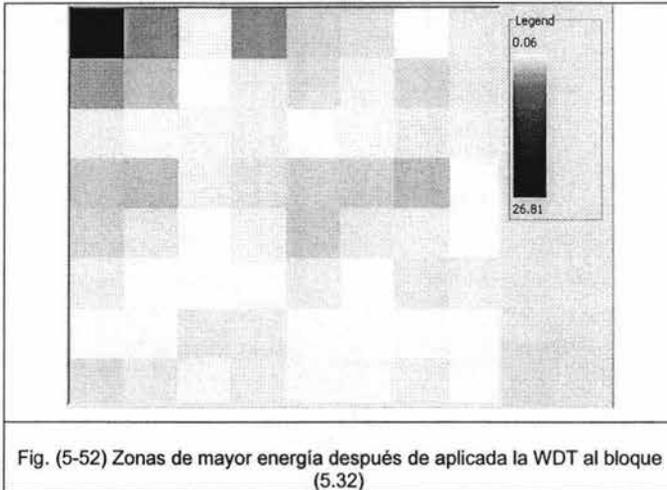
Aplicando la relación (5.33) a nuestra matriz original "x" (5.27) tenemos:

$$y = \begin{bmatrix} 40 & 33 & 33 & 22 & 26 & 40 & 36 & 26 \\ 43 & 26 & 33 & 22 & 29 & 43 & 22 & 36 \\ 43 & 40 & 19 & 36 & 36 & 33 & 15 & 26 \\ 36 & 43 & 26 & 33 & 29 & 29 & 19 & 4 \\ 33 & 33 & 29 & 26 & 15 & 33 & 26 & 4 \\ 36 & 33 & 33 & 26 & 22 & 29 & 26 & 12 \\ 33 & 40 & 29 & 26 & 33 & 12 & 12 & 4 \\ 26 & 33 & 29 & 22 & 12 & 4 & 8 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

Y a continuación aplicamos la WDT bidimensional a la matriz "y" (5.34) utilizando solo partes enteras y obtenemos "Y".

$$Y = \begin{bmatrix} 26 & 4 & 0 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & -1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

El diagrama espectral de esta matriz de coeficientes será:



Como vemos el intervalo de amplitudes ya no es tan abismal con el caso anterior, el elemento de mayor energía continua siendo el de la esquina superior izquierda al igual que todos los elementos de esa esquina.

Aplicando la WDT inversa de "Y"(5.35) obtenemos:

$$y' = \begin{bmatrix} 34 & 34 & 30 & 26 & 28 & 40 & 28 & 28 \\ 38 & 30 & 30 & 26 & 28 & 40 & 24 & 32 \\ 40 & 36 & 24 & 32 & 30 & 30 & 18 & 22 \\ 32 & 36 & 20 & 28 & 26 & 26 & 18 & 14 \\ 34 & 30 & 30 & 22 & 16 & 32 & 24 & 12 \\ 34 & 30 & 26 & 26 & 20 & 28 & 24 & 12 \\ 32 & 40 & 24 & 28 & 26 & 14 & 14 & 6 \\ 28 & 36 & 24 & 20 & 18 & 14 & 10 & 2 \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

Aplicamos una operación inversa en la ecuación (5.33):

$$[x'] = [y'] + [s] \approx [x] \quad (5.37)$$

Obtenemos el siguiente bloque:

$$x' = \begin{bmatrix} 162 & 162 & 158 & 154 & 156 & 168 & 156 & 156 \\ 166 & 158 & 158 & 154 & 156 & 168 & 152 & 160 \\ 168 & 164 & 152 & 160 & 158 & 158 & 146 & 150 \\ 160 & 164 & 148 & 156 & 154 & 154 & 146 & 142 \\ 162 & 158 & 158 & 150 & 144 & 160 & 152 & 140 \\ 162 & 158 & 154 & 154 & 148 & 156 & 152 & 140 \\ 160 & 168 & 152 & 156 & 154 & 142 & 142 & 134 \\ 156 & 164 & 152 & 148 & 146 & 142 & 138 & 130 \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

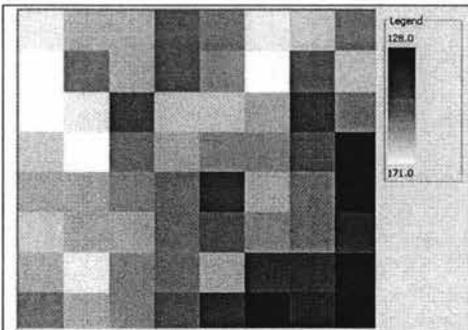


Fig. (5-49) Bloque 8 x 8 original de baja actividad

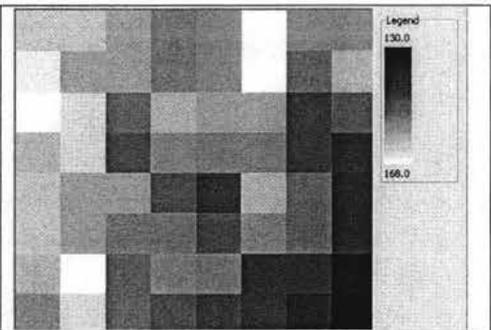


Fig. (5-53) Bloque 8 x 8 reconstruido después de optimizar los coeficientes de entrada (5.36).

c) Aplicando una matriz de cuantificación

En este punto con los ejemplos realizados anteriormente, la compresión de datos todavía no se ha realizado, el objetivo de la compresión es reducir los elementos menos importantes en la reconstrucción posterior y solo conservar los primordiales, esta distinción se realiza localizando los elementos que contengan mayor energía, que como dijimos, se encuentran muy cerca de la esquina superior izquierda de nuestro bloque transformado al dominio de la secuencia.

La matriz de cuantificación tiene por objeto eliminar todos los elementos posibles que tengan poca energía dentro de un bloque de una imagen. A continuación proponemos dos matrices de cuantificación Q_1 y Q_2 .

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

La diferencia entre ambas es que la primera pretende conservar el 51.56 % de los elementos (33 de 64) y la matriz Q2 únicamente 32.81% (21 de 64), obviamente eliminado en ambos casos la mayoría de los elementos de menor energía. El proceso de cuantización de cada elemento de la matriz "Y" es el que dará paso al proceso de compresión en el dominio secuencial se realiza utilizando la siguiente ecuación:

$$Z_{ki} = \text{redondeo} \left[\frac{Y_{ki}}{q_{ki}} \right] = \left[\frac{Y_{ki} \pm \left\lfloor \frac{q_{ki}}{2} \right\rfloor}{q_{ki}} \right] \quad k, i = 0, 1, \dots, 7 \quad (5.41)$$

Como vimos anteriormente q_{kl} denota el kl -th termino de la matriz 8x8 de cuantización Q_1 o Q_2 , y la ecuación (5.41) permite la relación entre el bloque "Y" con las matrices de cuantificación. Las operaciones de suma o resta de elementos se hace para asegurar que el mismo tipo de criterio sea utilizado para valores positivos o negativos,

así los dos términos en el numerador serán sumados o de otra forma los términos se restarán.

Posteriormente cuando se quiere reconstruir el bloque se debe empezar por un proceso de escalamiento esto es que al bloque se le multiplica nuevamente por cada uno de los coeficientes de la matriz de cuantización (un escalar), esto para mantener la proporción original.

$$[Y_{ki}'] = [Z_{ki}][q_{ki}] \quad (5.42)$$

Y finalmente aplicar la WDT inversa de "Y_{ki}'".

Como paso siguiente se aplicara la ecuación (5.41) con la matriz Q₁ al bloque de coeficientes Walsh de dos dimensiones (5.35) y obtenemos como resultado una reducción de coeficientes Z₁:

$$Z_1 = \begin{bmatrix} 26 & 4 & 0 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

Aplicando la ecuación (5.42) – escalamiento- y después la WDT inversa de Z₁ (5.43) obtenemos el bloque reconstruido "x'" (5.44) que se muestra en la **figura (5-54)** y lo comparamos con la imagen original **figura (5-49)**.

$$x' = \begin{bmatrix} 160 & 162 & 156 & 154 & 158 & 164 & 158 & 152 \\ 164 & 162 & 156 & 158 & 162 & 164 & 158 & 156 \\ 168 & 162 & 152 & 158 & 158 & 156 & 146 & 148 \\ 164 & 162 & 152 & 154 & 154 & 156 & 146 & 144 \\ 158 & 160 & 154 & 152 & 144 & 158 & 152 & 138 \\ 162 & 160 & 154 & 156 & 148 & 158 & 152 & 142 \\ 162 & 164 & 154 & 152 & 148 & 146 & 136 & 138 \\ 158 & 164 & 154 & 148 & 144 & 146 & 136 & 134 \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

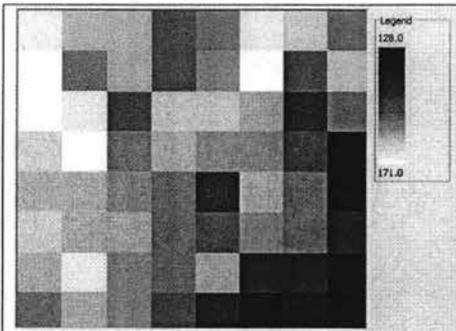


Fig. (5-49) Bloque 8 x 8 original de baja actividad

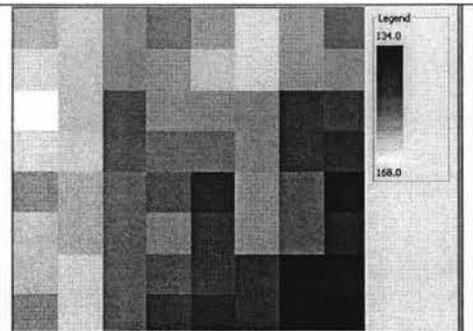


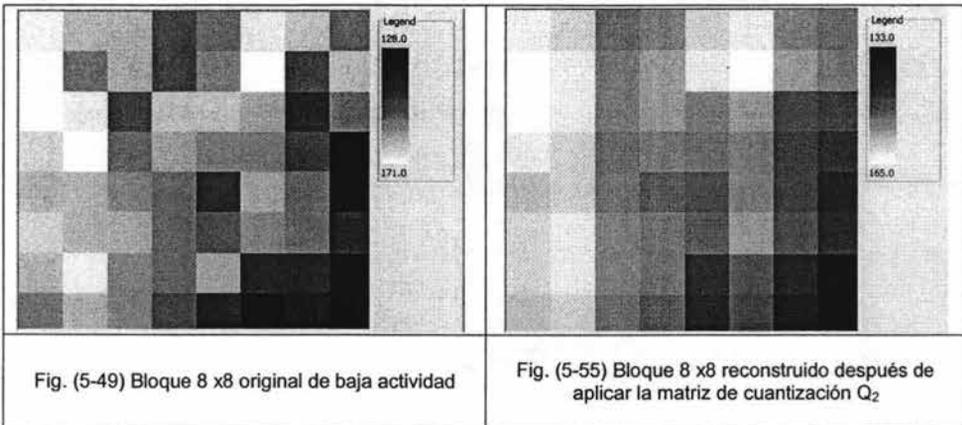
Fig. (5-54) Bloque 8 x 8 reconstruido después de aplicar la matriz de cuantización Q1

Repitiendo el procedimiento anterior con la ecuación (5.41) y la matriz Q_2 , al bloque de coeficientes Walsh de dos dimensiones (5.35) obtenemos como resultado una reducción de coeficientes Z_2 :

$$Z_2 = \begin{bmatrix} 26 & 4 & 0 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

Aplicando la ecuación (5.42) – escalamiento- y después la WDT inversa al bloque (5.45) obtenemos el bloque reconstruido “ x' ” (5.46) que se muestra en la **figura (5-55)** y lo comparamos con la imagen original **figura (5-49)**.

$$x' = \begin{bmatrix} 163 & 161 & 153 & 155 & 161 & 163 & 155 & 153 \\ 165 & 163 & 155 & 157 & 163 & 165 & 157 & 155 \\ 165 & 163 & 155 & 157 & 155 & 157 & 149 & 147 \\ 163 & 161 & 153 & 155 & 153 & 155 & 147 & 145 \\ 159 & 161 & 153 & 151 & 149 & 155 & 147 & 141 \\ 161 & 163 & 155 & 153 & 151 & 157 & 149 & 143 \\ 161 & 163 & 155 & 153 & 143 & 149 & 141 & 135 \\ 159 & 161 & 153 & 151 & 141 & 147 & 139 & 133 \end{bmatrix} \quad (5.46)$$



El proceso de cuantización resulto en que muchos de los elementos de la matriz WDT tomaron el valor de cero, con lo que la compresión se llevo a cabo eficientemente.

El diseño de Q depende de las características visuales y consideraciones de la proporción de la compresión. Todos los standarts de compresión proveen valores ya establecidos para Q , en algunos casos como la matriz Q_3 que se muestra a continuación, los valores de la matriz de cuantización pretenden reducir el término de mayor energía y de alguna forma equilibrar los valores de la matriz.

$$Q_3 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 2 & 1 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 1 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \quad (5.47)$$

La cuantificación en el dominio WDT ha producido ahorros significantes, desde que se necesitan sólo 11 valores representar un bloque comparados a los 64 valores que originalmente se necesitó en la representación; esto representa una proporción de compresión de 10:2. Es decir que por cada 10 coeficientes que antes necesitaba par reconstruir el bloque ahora solo necesito 2.

La matriz Z puede ser representada de una manera aun más eficiente usando una combinación de la codificación Run-Level así como de la codificación Huffman.

Observemos finalmente que $\hat{X} \neq X$ y eso debido a que solo el error causado por la codificación se encuentra dentro de la cuantización, de cualquier forma en este ejemplo se observa que el error de codificación no es un porcentaje considerable.

5.5.2 Compresión de un bloque de alta actividad

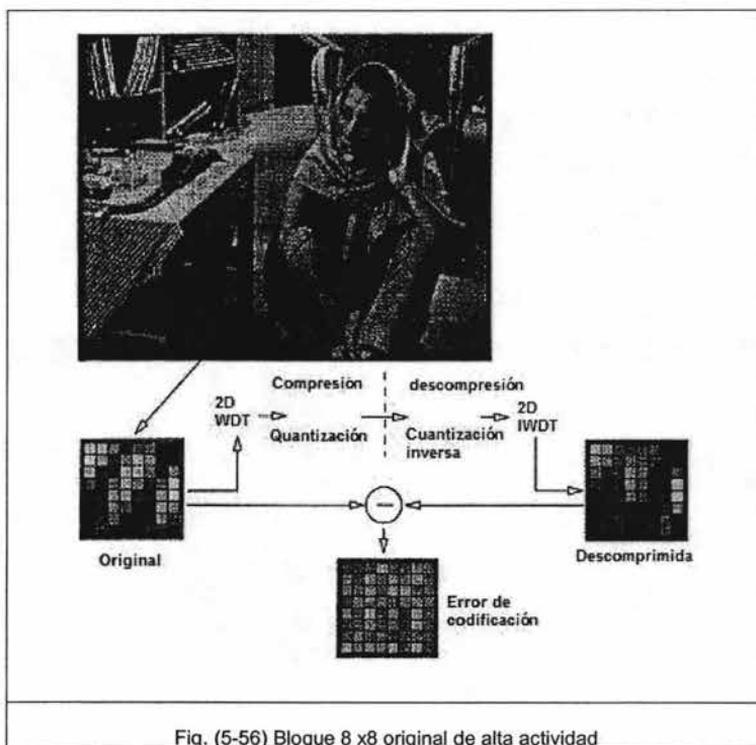
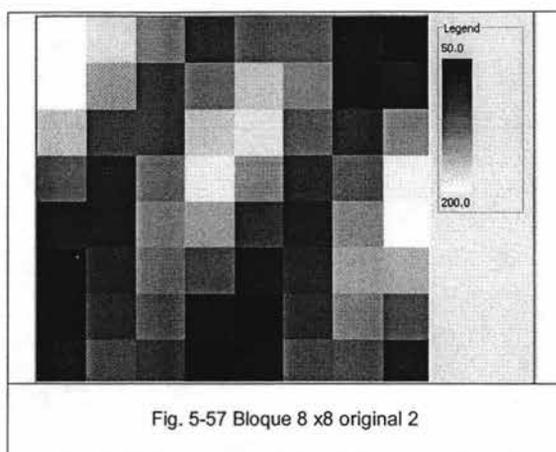


Fig. (5-56) Bloque 8 x8 original de alta actividad

Tenemos en este caso una matriz 8×8 como bloque de entrada de una región de alta actividad, si nosotros hacemos un acercamiento a la imagen nos percatamos de que la imagen tiene dos bordes muy marcados, los valores en píxel para este bloque están dado por (5.48) y corresponde a la **figura 5-57**.

$$x = \begin{bmatrix} 197 & 184 & 144 & 103 & 130 & 133 & 70 & 51 \\ 200 & 158 & 111 & 141 & 179 & 151 & 70 & 73 \\ 172 & 110 & 111 & 179 & 192 & 135 & 95 & 144 \\ 118 & 77 & 139 & 193 & 156 & 102 & 128 & 193 \\ 73 & 75 & 151 & 163 & 110 & 84 & 154 & 197 \\ 54 & 84 & 142 & 122 & 73 & 90 & 160 & 162 \\ 50 & 95 & 130 & 71 & 52 & 101 & 146 & 117 \\ 68 & 115 & 106 & 55 & 63 & 116 & 118 & 72 \end{bmatrix} \quad (5.48)$$



A continuación vamos a restar el valor promedio de 128 a cada uno de los elementos de la matriz de entrada 8 x 8, lo que nos permitirá trabajar en un rango de 0 a 128. Aplicando la WDT bidimensional a "x" (5.46) tenemos como resultado:

$$X = \begin{bmatrix} 7.4 & 1.156 & -2.312 & -4.906 & 2.156 & -1.312 & 1.031 & 0.25 \\ 15.16 & 9.312 & -5.781 & 18.94 & 13.56 & 2.406 & -0.75 & 2.406 \\ -8.875 & 7.781 & 2.250 & 17.84 & -12.34 & 1.625 & 1.156 & 2.812 \\ 4.219 & 5.562 & 0.2812 & 3.688 & -0.063 & -0.531 & 0.125 & 1.219 \\ -0.5 & 1.469 & 0.5 & -2.469 & -0.718 & -1.438 & 0.531 & 0.125 \\ -2.719 & 0.062 & 2.469 & -6.812 & -4.75 & -1.531 & 1.438 & 0.093 \\ -3.25 & 3.281 & 1.125 & 7.469 & -4.531 & 0.8125 & 0.3438 & 1 \\ 2.031 & 1.875 & 0.468 & 0.75 & 0.437 & -0.7812 & 0.875 & 0.8438 \end{bmatrix} \quad (5.49)$$

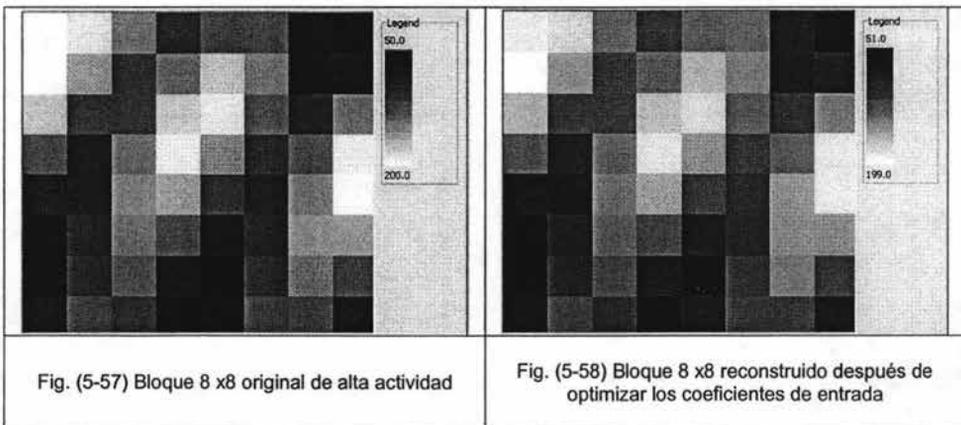
Si eliminamos los valores decimales para simplificar el proceso la matriz obtenida de la WDT sería:

$$Y = \begin{bmatrix} -7 & 1 & -2 & -4 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 15 & 9 & -5 & 18 & 13 & 2 & 0 & 2 \\ -8 & 7 & 2 & 17 & -12 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & -6 & -4 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 1 & 7 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.50)$$

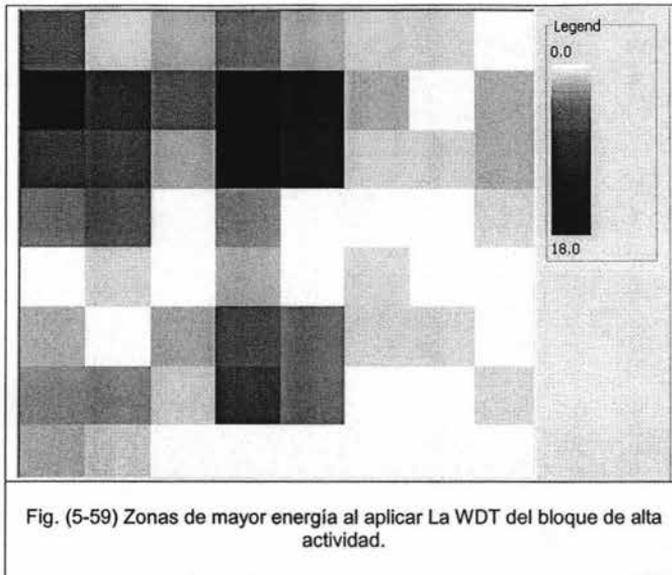
Aplicando la WDT inversa y sumando 128 a cada uno de los elementos obtenemos la reconstrucción final dada por la matriz (5.51).

$$x' = \begin{bmatrix} 191 & 183 & 139 & 111 & 135 & 139 & 75 & 59 \\ 199 & 159 & 115 & 135 & 171 & 151 & 71 & 79 \\ 169 & 113 & 113 & 173 & 185 & 133 & 97 & 145 \\ 129 & 81 & 137 & 189 & 157 & 105 & 125 & 189 \\ 73 & 73 & 145 & 165 & 109 & 89 & 157 & 189 \\ 61 & 85 & 141 & 121 & 77 & 89 & 157 & 157 \\ 51 & 99 & 127 & 75 & 55 & 107 & 147 & 115 \\ 71 & 119 & 107 & 55 & 71 & 115 & 115 & 75 \end{bmatrix} \quad (5.51)$$

Este bloque numérico representado en la escala de grises se muestra en la **figura (5-59)** y se compara con la imagen original se muestra en la **figura (5-58)**:



En la **figura (5-59)** mostramos un cuadro espectral el cual nos permite apreciar donde se concentra la mayor energía una vez aplicada la WDT:



En este punto con los ejemplos realizados anteriormente, la compresión de datos todavía no se ha realizado, para los ejemplos siguientes aplicaremos las matrices de cuantización Q_1 y Q_2 .

Aplicando Q_1 obtenemos:

$$Z_1 = \begin{bmatrix} -7 & 1 & -2 & -4 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 15 & 9 & -5 & 18 & 13 & 2 & 0 & 0 \\ -8 & 7 & 2 & 17 & -12 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.52)$$

Aplicando la ecuación (5.42) – escalamiento- y después la WDT inversa al bloque (5.52) obtenemos el bloque reconstruido " x' " (5.53) que se muestra en la **figura (5-60)** y lo comparamos con la imagen original **figura (5-57)**.

$$x' = \begin{bmatrix} 181 & 171 & 125 & 135 & 137 & 135 & 77 & 79 \\ 195 & 185 & 115 & 125 & 163 & 161 & 63 & 65 \\ 157 & 103 & 121 & 175 & 185 & 131 & 105 & 159 \\ 143 & 89 & 131 & 185 & 159 & 105 & 119 & 173 \\ 75 & 81 & 147 & 141 & 103 & 93 & 155 & 165 \\ 65 & 71 & 145 & 139 & 89 & 79 & 165 & 175 \\ 55 & 105 & 115 & 65 & 59 & 101 & 139 & 97 \\ 65 & 115 & 117 & 67 & 73 & 115 & 129 & 87 \end{bmatrix} \quad (5.53)$$

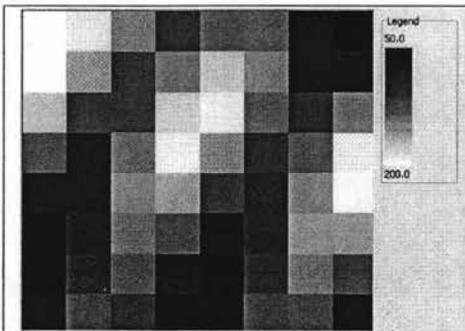


Fig. (5-57) Bloque 8 x8 original de alta actividad

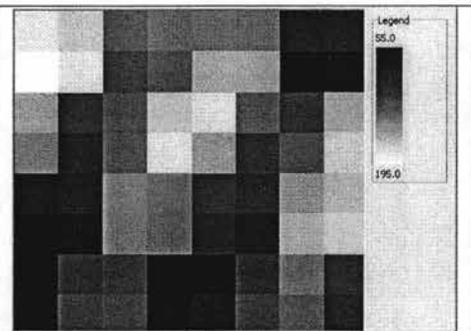


Fig. (5-60) Bloque 8 x8 reconstruido después de aplicar la matriz de cuantización Q1

Repitiendo el procedimiento anterior con la ecuación (5.42) y la matriz Q2, al bloque de coeficientes Walsh de dos dimensiones (5.52) obtenemos como resultado una reducción de coeficientes en la matriz Z_2 (5.54).

$$Z_2 = \begin{bmatrix} -7 & 1 & -2 & -4 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 15 & 9 & -5 & 18 & 13 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 7 & 2 & 17 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.54)$$

Aplicando la ecuación (5.42) – escalamiento- y después la WDT inversa al bloque (5.54) obtenemos el bloque reconstruido " x' " (5.55) que se muestra en la **figura (5-61)** y lo comparamos con la imagen original **figura (5-57)**.

$$x' = \begin{bmatrix} 193 & 165 & 113 & 141 & 159 & 127 & 55 & 87 \\ 195 & 167 & 115 & 143 & 165 & 133 & 61 & 93 \\ 141 & 113 & 137 & 165 & 167 & 135 & 123 & 155 \\ 139 & 111 & 135 & 163 & 161 & 129 & 117 & 149 \\ 61 & 85 & 161 & 137 & 79 & 99 & 179 & 159 \\ 55 & 79 & 155 & 131 & 77 & 97 & 177 & 157 \\ 73 & 97 & 97 & 73 & 79 & 99 & 119 & 99 \\ 79 & 103 & 103 & 79 & 81 & 101 & 121 & 101 \end{bmatrix} \quad (5.55)$$

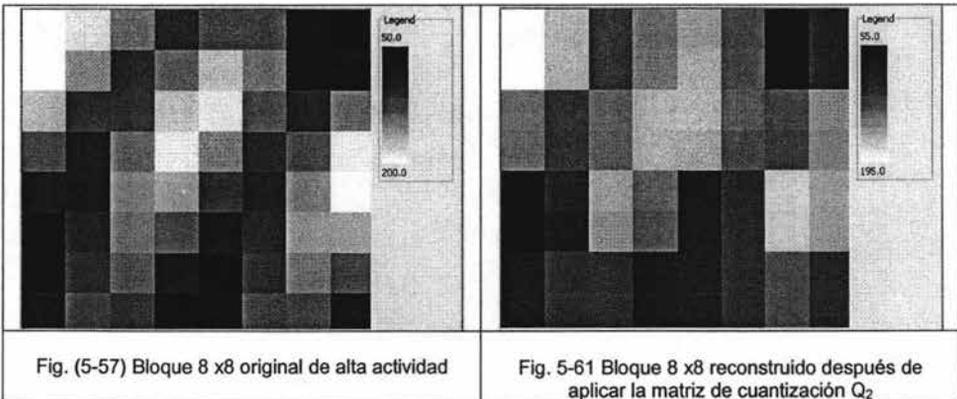


Fig. (5-57) Bloque 8 x8 original de alta actividad

Fig. 5-61 Bloque 8 x8 reconstruido después de aplicar la matriz de cuantización Q_2

La cuantificación en el dominio WDT ha producido ahorros significantes, desde que se necesitan sólo 19 valores representar un bloque comparados a los 64 valores que originalmente se necesitó en la representación; esto representa una proporción de compresión de 10:3, por cada 10 coeficientes que antes necesitaba para representar el bloque ahora solo necesito 3.

La matriz Q debe ser seleccionada de una manera en se pueda optimizar tanto la compresión si sacrificar la inteligibilidad de la imagen.

Conclusiones

- Para sintetizar completamente con cierto grado de precisión cualquier función definida el tiempo solo podemos utilizar un conjunto de funciones ortogonales, las funciones Walsh cumplen con esta propiedad por lo que pueden emplearse en la síntesis de señales.
- La mayoría de las transformadas utilizadas en el procesamiento digital de señales, como la transformada discreta de Fourier (DFT), la transformada rápida de Fourier (FFT), están basadas en funciones senoidales y cosenoidales en cambio existen transformadas basadas en cadenas de pulsos que toman solo valores de ± 1 como la transformada Walsh, que permite que se simplifique y acelere el computo del procesamiento digital de una señal.
- Las funciones Walsh están definidas dentro de un intervalo de tiempo que toma el nombre de "base de tiempo" dentro del cual ocurren transiciones de amplitud que toman únicamente dos valores $+1$ y -1 . Dentro de este intervalo cada función Walsh tiene secuencia diferente como parámetro análogo a la frecuencia, esta secuencia es la mitad del número de cruces por cero de la señal dentro de la base tiempo.
- La transformada discreta Walsh es una transformada análoga a la Transformada de Fourier, por medio de ella podemos sintetizar una señal descomponiéndola en componentes armónicos que en este caso estarían en el dominio de la secuencia en vez de la frecuencia, tiene la ventaja de ser lineal, ya que su procesamiento únicamente intervienen un número reducido de operaciones aritméticas, en contra parte la transformada de Fourier requiere de operaciones con números complejos para su obtención.
- Las funciones Walsh carecen de un teorema de corrimiento circular como en el caso de las funciones seno y cosenoidales donde existe un teorema que las relaciona a ambas e incluso se puede combinar, en el estudio Walsh las funciones CAL y SAL que son funciones Walsh de simetría par e impar, no existe un teorema que relacione a CAL con SAL.
- Las funciones Walsh son simétricas, esto le da importante característica de poder constituir una transformada unitaria donde la transformada y la transformada inversa representen la misma operación matemática, simplificando su aplicación y uso, la única diferencia entre ambos procesos es el factor $1/N$.

- En la mayoría de los casos estas funciones son ordenadas en forma ascendente dependiendo el valor de su secuencia, pero existen diferentes clases de ordenamientos que tienen características diferentes en su generación y ventajas al momento de aplicar las transformadas como la velocidad en el procesamiento de datos.
- Al aplicar la WDT debemos considerar que si la matriz de transformación W_{ki} es una matriz de $N \times N$ debemos considerar al menos N valores de entrada muestreados, dicho de forma inversa si tenemos N valores de entrada muestreados, debemos de considerar las N primeras funciones Walsh para aplicar la transformada, es importante que N sea una potencia de dos.
- La transformación de señales continuas resulta ser mas favorable utilizando Fourier, mientras que en una señal discreta, más precisamente una señal rectangular como los pulsos de bits digitales el procesamiento resulta ser mas favorable utilizando Walsh.
- La transformada rápida Walsh basa su eficiencia en que en la transformada Walsh existe una gran redundancia en la matriz de transformación, y al utilizar una factorización matricial podemos reducir el tiempo de proceso debido a que vamos a realizar menos operaciones, reduciendo de N^2 operaciones aritméticas (adición o sustracción) a solamente $N \log_2 N$.
- El resultado de aplicar una transformada unitaria como la transformada Walsh es que la mayor parte de la energía ha sido comprimida en relativamente pocos coeficientes.
- El análisis espectral utilizando funciones Walsh en términos de secuencia en lugar de frecuencia tiene su uso en el análisis de señales discontinua y de transitorios ya que Walsh hace posible que el espectro pueda ser limitado secuencialmente aunque las señales analizadas sean funciones limitadas en tiempo, en contraparte con Fourier donde se nos dice que una función limitada en el tiempo no puede tener un espectro limitado en frecuencia.
- El proceso de transformación Walsh cumple con el teorema de Parseval que nos dice que la energía contenida dentro de una serie ortogonal de coeficientes que representan una señal es la misma que cuando se expresa en el tiempo, por lo que la energía es la misma en el dominio del tiempo que en el dominio de la secuencia.

- La transformada discreta de Fourier es invariante a la fase de la señal de entrada, por lo que la misma descomposición espectral puede obtenerse de forma independiente de la fase o requerimiento de la señal de entrada, no es el caso para la transformada Walsh.
- Las ventajas que ofrecen las series Walsh sobre Fourier en la síntesis de una señal compleja y en su estimación espectral puede estudiarse de diversas formas, pero dependen fundamentalmente del tipo de señal a sintetizar en función del tiempo, donde se requiera analizar una señal derivada de una función sinusoidal el análisis de Fourier resulta ser mas compacto, en cambio cuando se requiera analizar una señal que contenga repentinas discontinuidades y un número limitado de niveles como una señal digital, el análisis Walsh es el mas apropiado.
- Podemos obtener el espectro por el método evaluación directa o método del periodo equivalente que no acepta un requerimiento de la señal a analizar o por el método de Wiener – Khintchine, que es invariante al desplazamiento de la señal, sin embargo para algunas aplicaciones donde cierta cantidad de desplazamiento en fase puede ser tolerado, el método de evaluación directa es mas conveniente debido a la simplicidad de sus cálculos.
- El filtrado digital Walsh se basa en la técnica de Wiener, esta técnica tiene un uso especial en Fourier y en resumen consiste en: transformada – modificación. – transformada inversa. La modificación se lleva a cabo por medio de una matriz de filtrado G que si se selecciona de manera correcta la respuesta a la salida del filtro consistirá únicamente de la señal original mas un componente de ruido (señal filtrada) muy reducido. Idealmente la matriz de filtrado G se selecciona en forma conjunta con la matriz de transformada.
- Las funciones Walsh puede utilizarse en el multiplexaje de señales digitales, debido a que pueden ser utilizadas en la modulación por división de código, que consiste en que cada señal a ser multiplexada dentro de un mismo canal se le asigna un código diferente que solo podrá ser interpretado por el usuario final que posea dicho código único de modulación- demodulación, dicha técnica se utiliza actualmente en la telefónica celular G-3.
- La transformada Walsh posea un gran simplicidad en su calculo si se la utiliza en la compresión de imágenes digitales, cabe resaltar que el proceso de

compresión no lo realiza la transformada si no que esta operación permite ver los coeficientes de un bloque de píxeles de una imagen de una forma distinta, de como si se estuviera visualizando dicha imagen, con coeficientes pictóricos. La transformada Walsh permite procesar un bloque de píxeles de una imagen para obtener un bloque de coeficientes en el dominio de la secuencia, donde se le podrán aplicar cuantificaciones, barridos y diversos tipos de codificación de una manera mas sencilla, el bloque original se recupera al aplicar la transformada inversa Walsh.

Bibliografía

- **Walsh Functions** 2da edición
K. G. Beauchamp
Editorial: Academia Press
Capítulos: 1, 2, 3
- **Digital Signal Processing** 1er edición
Emmanuel C. Ifeachor – Barrie W Jervis.
Editorial: Adison – Wesley
Capítulos: 1, 2
- **Signal Coding Processing** 2da edición
Graham Wade
Editorial: Cambridge University Press
Capítulos: 1, 2
- **Digital Signal Processing with Field Programmable Gate Arrays**
U. Meyer – Baese
Editorial Spinger
Capítulos: 1, 2
- **Digital Pictures Representation, Compression and Standards**
Arun N. Netravali and Barry G. Haskell
Editorial: Plenum Press
Capítulos: 1, 2, 5
- **Electronica Digital Fundamental**
Antonio Hermosa Donate
Editorial: Alfaomega Marcombo
Capítulos: 1, 2
- **Introducción a los sistemas de comunicación** 3ra edición
F.G. Stremier
Editorial: Adison – Wesley Iberoamericana
Capítulos: 1,2,3

- **Apuntes de procesamiento digital de señales**

Bohumil Psenicka
Facultad de Ingeniería UNAM
Capítulos: 1, 2,3

- **Maple V Aplicaciones Matemáticas para PC**

Agustin Carrillo de Albornoz Torres
Editorial Adison – Wesley Iberoamericana
Capítulos: 2, 5

- **Fórmulas y Tablas de matemática aplicada**

Murria R. Spiegel, Lorenzo Aballanas
Editorial Mc Graw Hill
Capítulos: 1, 2, 3, 4, 5

- **Apuntes de telefonía G-3**

Sony- Ericsson
Capítulos: 4

- **Sistemas Digitales principios y aplicaciones**

Tocci
Editorial Pearson Edición, 2 edición
Capítulos: 1, 2

- **Álgebra lineal Teoría y ejercicios**

Héctor F. Godínez C. y J. Abel Herrera C.
Facultad de Ingeniería UNAM
Capítulos: 1, 2

Artículos electrónicos

- La evolución de la producción digital, Thomás Bethencourt Machado
Ex-director del IORTV. Profesor de la universidad Michigan
Capítulos: 5
- Decision Diagram Method for Calculation of Pruned Walsh Transform
Dragan Jankovic, Radomir S. Stankovic, and Rolf Drechsler, Member, IEEE
Capítulos: 5

- Matrices Circulantes /Circulant Matrices
Teodoro Lara Departamento de Física y Matemáticas
NURR - ULA, Trujillo, Venezuela.
Capítulos: 5
- Generation of Custom DSP Transform IP Cores:
Case Study Transform IP Cores: Case Study ,Walsh, Walsh-Hadamard
Transform
Fang Fang , James C. Hoe, Markus Püschel, Smarapura Misra, Carnegie
Mellon University
Capítulos: 5
- Multiplexación CDMA para Comunicaciones Móviles
Juan Guillermo Lalinde P.
Capítulos: 4
- The Walsh Basis and Dynamical System Models of the Genetic Algorithm
by Alden Wright Computer Science University of Montana, USA
Capítulos: 1, 2
- Applications of Walsh Transform ELE 5431 Professor:W.K.Cham
Capítulos: 1, 2, 5
- Digital Image Processing, Tania Stathaki UK
Capítulos: 5