



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

## APLICACIÓN DEL ANÁLISIS DE FOURIER PARA FILTRAR RUIDO EN PRUEBAS DE PRESIÓN

TESIS

Que para obtener el grado de licenciatura en:

**INGENIERÍA PETROLERA**

Presenta:

**NANCY HERNÁNDEZ RAMÍREZ**

ASESOR: M.I. NÉSTOR MARTÍNEZ ROMERO



México, D.F., Ciudad Universitaria, Septiembre, 2004.



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

ESTA TESIS NO SALE  
DE LA BIBLIOTECA

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
AVENIDA DE LA  
MEXI

FACULTAD DE INGENIERÍA  
DIRECCIÓN  
60-I-594

**SRITA. NANCY HERNÁNDEZ RAMÍREZ**  
**Presente**

En atención a su solicitud, me es grato hacer de su conocimiento el tema que propuso el profesor M. en I. Néstor Martínez Romero y que aprobó esta Dirección para que lo desarrolle usted como tesis de su examen profesional de Ingeniero Petrolero:

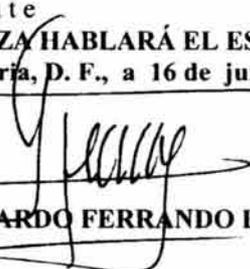
**APLICACIÓN DEL ANÁLISIS DE FOURIER PARA FILTRAR RUIDO EN PRUEBAS DE PRESIÓN**

- INTRODUCCIÓN**
- I CONCEPTOS BÁSICOS DE PRUEBAS DE PRESIÓN**
  - II CONCEPTOS BÁSICOS SOBRE EL ANÁLISIS DE FOURIER Y LA TEORÍA DE SEÑALES**
  - III APLICACIÓN DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER A LAS PRUEBAS DE PRESIÓN**
  - IV CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES**
- BIBLIOGRAFÍA**

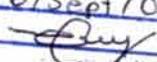
Ruego a usted cumplir con la disposición de la Dirección General de la Administración Escolar en el sentido de que se imprima en lugar visible de cada ejemplar de la tesis el título de ésta.

Asimismo, le recuerdo que la Ley de Profesiones estipula que se deberá prestar servicio social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito para sustentar examen profesional.

Atentamente  
"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"  
Cd. Universitaria, D. F., a 16 de junio de 2004  
EL DIRECTOR

  
M. en C. GERARDO FERRANDO BRAVO

GFB\*JAGC\*gtg  


Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico o impreso el contenido de mi trabajo recepcional.  
NOMBRE: Nancy Hernández Ramírez  
FECHA: 6/Sept/04  
FIRMA: 



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
DIVISIÓN DE INGENIERÍA EN CIENCIAS DE LA TIERRA



TESIS:

**APLICACIÓN DEL ANÁLISIS DE FOURIER PARA FILTRAR RUIDO  
EN PRUEBAS DE PRESIÓN.**

PRESENTADA POR:

NANCY HERNÁNDEZ RAMÍREZ.

DIRIGIDA POR:

M.I. NÉSTOR MARTÍNEZ ROMERO.

**JURADO DEL EXAMEN PROFESIONAL:**

PRESIDENTE: ING. MANUEL VILLAMAR VIGUERAS

VOCAL: M.I. NÉSTOR MARTÍNEZ ROMERO

SECRETARIO: M.I. MARIO BECERRA ZEPEDA

1ER SUPLENTE: DR. VICTOR HUGO ARANA ORTIZ

2DO SUPLENTE: ING. MARTÍN TERRAZAS ROMERO

CD. UNIVERSITARIA, D.F., AGOSTO DEL 2004.

---

# AGRADECIMIENTOS

A mis padres, Rosa Ramírez Paz y Angel Hernández Cabrera, por el cariño y el apoyo que me han brindado toda mi vida

A mis hermanos Nelly y Angel con mucho cariño.

A la familia Ramírez Paz, por su apoyo, consejos y ayuda en estos últimos años que he vivido con ustedes; en especial a mi abuelo Jorge Ramírez Ríos y a mi queridísima Celestina Ramírez Paz, por abrirme las puertas de su casa con cariño y confianza.

A mi tío Jorge Ramírez Paz, por sus consejos, ayuda y sobretodo su amistad.

A mi tío Leobardo Ramírez Paz por su apoyo en estos años que estuve en la Universidad.

A mis amigos, los ingenieros: Gabriela Araiza, Germán López Bautista, Ulises Neri Flores, Manuel A. Silva Romero, Oscar Osorio Peralta, Eva Sánchez Olea e Iván Santamaría Vite, por su amistad incondicional y por enseñarme a amar a nuestra profesión.

A mis amigos, Jordana Espinosa Vera, Paul Hernández Botello, Sandra Mosso López, Pilar Pedraza Serna y Abraham Rodríguez Cinta, por que el anexo no hubiera sido lo mismo sin ustedes. A Oscar Lugo V. Y Sergio Miranda por su amistad.

A la gran familia de corazón, Julieta Carmona Silva, Eric Dávila Hernández, Alan Díaz Vázquez, Karla González Ortiz, Joaquín Hernández Porras, Alejandra Morales Franco, Rodolfo Najera Prieto y Gustavo Prado Morales, por su amistad, consejos y apoyo.

---

A mis amigas Susana Díaz Gutiérrez y Claudia Gutiérrez Piña, con mucho cariño.

Al M.I. Néstor Martínez Romero por su apoyo y confianza para la realización de este trabajo, y por ser un excelente profesor y amigo.

Al M.I. Mario Becerra Zepeda, por la excelencia de sus clases, además por la amistad, apoyo y orientación, que me ha brindado.

Al Dr. Francisco Sánchez Sesma, por su valiosa colaboración en el enriquecimiento de este trabajo.

A la Dra. Jetzabeth Ramírez Sabag por su apoyo durante mi estancia en el Instituto Mexicano del Petróleo.

A mis profesores, que durante toda mi formación académica, han contribuido con su esfuerzo y dedicación, a que yo alcance una de mis metas. Especialmente al M.I. José Angel Gómez Cabrera, al Ing. Carlos Lira Sil, al Ing. José Martínez Pérez, al M.C. Alfredo Velásquez Márquez y al Ing. Manuel Villamar Viguera.

*Gracias a todos.*

*Nancy*

*Hernández*

*Ramírez*

---

---

# ÍNDICE

	<b>Pág.</b>
<b>RELACIÓN DE TABLAS</b>	i
<b>RELACIÓN DE FIGURAS</b>	iii
<b>RESUMEN</b>	xi
<b>CAPÍTULO I INTRODUCCIÓN</b>	1
I.1 EL ANÁLISIS DE FOURIER COMO TÉCNICA MATEMÁTICA	5
I.2 OBJETIVO	8
I.3 DESARROLLO	9
<b>CAPÍTULO II CONCEPTOS BÁSICOS DE PRUEBAS DE PRESIÓN</b>	11
II.1 PRUEBAS DE INTERFERENCIA O DE POZOS MÚLTIPLES	14
II.2 YACIMIENTO HOMOGÉNEO, INFINITO, FLUJO RADIAL.	16
II.3 TÉCNICAS DE ANÁLISIS DE PRUEBAS DE PRESIÓN	22
II.3.1 Ajuste con curvas tipo	22
II.3.2 Técnicas semilogarítmicas	24
II.3.3 Técnica de El-Khatib	26
II.3.4 Técnicas de análisis con tendencia de presión	28
II.4 EL RUIDO EN LAS PRUEBAS DE PRESIÓN	33
<b>CAPÍTULO III CONCEPTOS BÁSICOS SOBRE EL ANÁLISIS DE FOURIER Y LA TEORÍA DE SEÑALES</b>	37
III.1 SISTEMAS Y SEÑALES	37
III.2 TEORÍA DE LA APROXIMACIÓN DE FUNCIONES	39
III.2.1 Error en la Aproximación de Funciones	39

---

III.2.2 Aproximación de Funciones mediante Series de Fourier	42
III.2.3 Aplicación de la aproximación de Funciones	44
III.3 LA TRANSFORMADA DE FOURIER	52
III.3.1 La Existencia de la Transformada de Fourier	56
III.3.2 Propiedades de la Transformada de Fourier	56
III.3.3 Convolución	58
III.4 OTRAS FORMAS DE REPRESENTAR LA TRANSFORMADA DE FOURIER	61
III.5 LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE FUNCIONES PARES E IMPARES	62
III.6 TEORIA DE MUESTREO	65
III.7 LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE ALGUNAS FUNCIONES	69
III. 8 FILTRADO	71
III.8.1 Filtros selectivos en frecuencia.	71
<b>CAPÍTULO IV APLICACIÓN DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER A LAS PRUEBAS DE PRESIÓN</b>	<b>75</b>
IV.1 PROGRAMA QUE CALCULA LA TRANSFORMADA DE FOURIER	75
IV.1.1 Aritmética por computadora y Errores	75
IV.1.2 Algoritmo basado en la definición de la transformada de Fourier.	79
IV.1.3 La Transformada Discreta de Fourier.	86
IV.1.4 La Transformada Rápida de Fourier.	90
IV.1.5 Ejemplo de Cálculo de la Transformada de Fourier.	98
IV.2 TRANSFORMADA DE FOURIER DEL MODELO DE UNA PRUEBA DE PRESIÓN.	109
IV.3 MODELOS DE REPRESENTACIÓN DEL RUIDO Y SU TRANSFORMADA DE FOURIER.	124
IV.3.1 Ruido Gaussiano y de Cuantización.	124
IV.3.2 Ruido por efecto de marea.	136
IV.4 TRANSFORMADA DE FOURIER DEL MODELO DE UN PRUEBA DE PRESIÓN CON RUIDO	145

---

IV.4.1.- Prueba de Presión con ruido Gaussiano y de Cuantización.	146
IV.4.2.- Prueba de Presión con ruido por Efecto de Marea.	157
<b>CAPÍTULO V CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES</b>	167
V.1 CONCLUSIONES	167
V.2 RECOMENDACIONES	168
NOMENCLATURA	171
REFERENCIAS	175
BIBLIOGRAFÍA	177
APÉNDICE A	A-1

---

---

# RELACIÓN DE TABLAS

<b>Tabla</b>	<b>Descripción</b>	<b>Pág.</b>
3-1	Error Promedio	40
3-2	Error cuadrático medio	41
3-3	Datos discretos de la función $f(t)=t$	44
3-4	Coeficientes $b_n$ de la Serie de Fourier para la función $f(t)=t$	47
3-5	Sumandos de la Serie de Fourier de la función $f(t)=t$ para diferentes valores de $n$	48
3-6	Error cuadrático medio $\epsilon^2$	52
3-7	Transformada de Fourier de algunas funciones	69
4-1	Subrutina del algoritmo basado en la definición de la Transformada de Fourier, en Visual Basic™	81
4-2	Resultados obtenidos con diferentes métodos numéricos de integración, para la solución de las ecuaciones (4-15) y (4-16).	84
4-3	Error en los resultados obtenidos para la solución numérica de las ecuaciones (4-15) y (4-16), respecto a la solución analítica.	85
4-4	Tiempo de cálculo en segundos de las ecuaciones (4-15) y (4-16) con diferentes métodos numéricos.	85
4-5	Subrutina de la DFT en Visual Basic™.	91
4-6	Número de multiplicaciones requeridas por los algoritmos de la DFT y la FFT.	97
4-7	Subrutina de la FFT en Visual Basic™.	99

---

# RELACIÓN DE FIGURAS

<b>Figura</b>	<b>Descripción</b>	<b>Pág.</b>
2-1	Registro ideal de presión y gasto para una Prueba de Incremento	13
2-2	Prueba de Pulsos de Presión	16
2-3	Representación esquemática de la geometría de flujo radial	17
2-4	Comportamiento de la presión adimensional contra el tiempo y radio adimensional para el caso de yacimiento homogéneo con comportamiento infinito y flujo radial	19
2-5	Comparación de soluciones considerando pozo finito y la solución de línea fuente	20
2-6	Caída de presión contra tiempo para los casos de yacimiento homogéneo con comportamiento infinito, frontera cerrada y frontera a presión constante	21
2-7	Ajuste de los datos de campo con la solución de línea fuente	23
2-8	Análisis de prueba de interferencia presentada por Lescaurborra	25
2-9	Características de la función derivada de la solución de línea fuente	26
2-10	Curva tipo para pruebas de interferencia con tendencia lineal de represionamiento	30
2-11	Comportamiento de la presión adimensional versus el tiempo y radio adimensional para el caso de yacimiento homogéneo con comportamiento infinito	33
3-1	Aproximación de funciones	41
3-2	Representación gráfica de la función $f(t)=t$	45
3-3	Representación gráfica de los sumandos de la Serie de Fourier de la función $f(t)=t$ para diferentes valores de $n$	49

<b>Figura</b>	<b>Descripción</b>	<b>Pág.</b>
3-4	Función aproximada a $f(t)=t$ para diferentes valores de $k$	51
3-5	Comparación del análisis convencional para la solución de problemas y el uso de transformadas	53
3-6	Interpretación de la Transformada de Fourier	54
3-7	Transformada de Fourier de una función No periódica	55
3-8	Representación esquemática del comportamiento del sistema ante una secuencia de impulsos	60
3-9	a) Una función impar, b) Una función par	63
3-10	Muestreo de la función continua $h(t)$	66
3-11	Transformada de Fourier de una función muestreada, aplicando el Teorema de Convulación en la Frecuencia	66
3-12	Efecto de alisamiento en la Transformada de Fourier, debido a un intervalo de muestreo insuficiente	68
3-13	a) Función $p(t)$ b) Transformada de Fourier de $p(t)$	70
3-14	a) Función $h(t)$ b) Parte Real de la Transformada de Fourier de $h(t)$ c) Parte Imaginaria de la Transformada de Fourier de $h(t)$	70
3-15	a) Función Impulso Unitario $\delta(t)$ b) Transformada de Fourier de la Función Impulso Unitario $\delta(t)$	70
3-16	a) Función constante b) Transformada de Fourier de la Función Constante	71
3-17	Representación gráfica de un filtro pasa-bajas.	72
3-18	Representación gráfica de un filtro pasa-altas.	73
3-19	Representación gráfica de un filtro pasa-banda.	73
3-20	Representación gráfica de un filtro omite-banda.	74
4-1	Gráfica del error total	79

<b>Figura</b>	<b>Descripción</b>	<b>Pág.</b>
4-2	Diagrama de flujo del algoritmo basado en la definición de la Transformada de Fourier.	82
4-3	Representación gráfica de las integrales definidas descritas en las ecuaciones a) (4-15) y b)(4-16).	84
4-4	a) Función $h(t)$ b) Transformada de Fourier $H(f)$ de $h(t)$ .	86
4-5	Representación Gráfica de la función de muestreo $\Delta_0(t)$ .	87
4-6	Representación gráfica de la función Rectangular $x(t)$ .	87
4-7	Representación gráfica de la ecuación (4-28)	89
4-8	Diagrama de flujo del algoritmo de la DFT.	92
4-9	Comparación del número de multiplicaciones requeridas por los algoritmos de la DFT y FFT	97
4-10	a) Parte Real de $G(f)$ b) Parte Imaginaria de $G(f)$	100
4-11	Comparación Gráfica de las técnicas usadas para estimar la Transformada de Fourier. Parte Real, $T = 0.25$ .	101
4-12	Comparación Gráfica de las técnicas usadas para estimar la Transformada de Fourier. Parte imaginaria, $T = 0.25$ .	102
4-13	Comparación Gráfica de las técnicas usadas para estimar la Transformada de Fourier. Parte Real, $T = 0.1$ .	103
4-14	Comparación Gráfica de las técnicas usadas para estimar la Transformada de Fourier. Parte Imaginaria, $T = 0.1$ .	104
4-15	Comparación Gráfica de las técnicas usadas para estimar la Transformada de Fourier. Parte Real, $T = 0.01$ .	105
4-16	Comparación Gráfica de las técnicas usadas para estimar la Transformada de Fourier. Parte Imaginaria, $T = 0.01$ .	106
4-17	Funciones generadas a partir de la duplicación de $N$ datos de la función (4-49).	107

---

<b>Figura</b>	<b>Descripción</b>	<b>Pág.</b>
4-18	Parte Real de la Transformada de Fourier de las funciones mostradas en la Figura 4-16.	107
4-19	Parte Imaginaria de la Transformada de Fourier de las funciones mostradas en la Figura 4-16.	108
4-20	Representación gráfica de una prueba de presión sintética.	109
4-21	Prueba de Presión sintética duplicada.	110
4-22	Transformada de Fourier de una prueba de presión sintética, para diferentes valores del intervalo de muestreo T.	111
4-23	Representación gráfica de una Prueba de presión sintética en el dominio de la frecuencia.	112
4-24	Transformada de Fourier del primer pulso de la prueba de presión sintética.	113
4-25	Transformada de Fourier del segundo pulso de la prueba de presión sintética.	114
4-26	Prueba de Presión sintética en el dominio de la frecuencia, escala semi-logarítmica.	115
4-27	Transformada de Fourier de la prueba de presión sintética. a) Primer pulso y b) Segundo pulso.	116
4-28	Transformada inversa de Fourier de la representación en el dominio de la frecuencia una prueba de presión sintética.	117
4-29	Error debido al cómputo de la antitransformada de Fourier de una prueba de presión sintética en el dominio de la frecuencia.	118
4-30	Resultado del filtro "pasa bajas" hasta una frecuencia de 0.9.	119
4-31	Error del resultado del filtro "pasa bajas", respecto a los datos originales. Hasta una frecuencia de 0.9.	119
4-32	Resultado del filtro "pasa bajas" hasta una frecuencia de 0.5.	120
4-33	Error del resultado del filtro "pasa bajas", respecto a los datos originales. Hasta una frecuencia de 0.5.	121

---

---

<b>Figura</b>	<b>Descripción</b>	<b>Pág.</b>
4-34	Resultado del suavizamiento de la curva para frecuencias mayores a 0.8.	122
4-35	Error del resultado del suavizamiento de la curva para frecuencias mayores a 0.8, respecto a la prueba original.	122
4-36	Error del resultado del suavizamiento de la curva a partir de diferentes frecuencias, respecto a la prueba original.	123
4-37	Funcionamiento de un sensor de presión.	125
4-38	Trasductor piezoeléctrico.	126
4-39	Representación gráfica de la calibración de un sensor de Presión.	127
4-40	Linealidad de una sonda de presión.	128
4-41	Desviación cuadrática media.	129
4-42	Repetibilidad.	129
4-43	Histéresis en el comportamiento de la sonda.	130
4-44	Resolución de la sonda de medición de presión.	130
4-45	Representación gráfica del ruido Gaussiano y de Cuantización. Amplitud 0.05.	131
4-46	Representación gráfica del ruido Gaussiano y de Cuantización. Amplitud 0.1.	132
4-47	Representación gráfica del ruido Gaussiano y de Cuantización. Amplitud 0.15.	132
4-48	Representación gráfica del ruido Gaussiano y de Cuantización. Amplitud 0.2.	133
4-49	Representación gráfica en el dominio de la frecuencia de la Figura 4-44.	134
4-50	Representación gráfica en el dominio de la frecuencia de la Figura 4-45.	134

---

<b>Figura</b>	<b>Descripción</b>	<b>Pág.</b>
4-51	Representación gráfica en el dominio de la frecuencia de la Figura 4-46.	135
4-52	Representación gráfica en el dominio de la frecuencia de la Figura 4-47.	135
4-53	Nivel del mar según fases de la luna	138
4-54	Presión hidrostática generada por el efecto de marea.	140
4-55	Ruido por efecto de marea.	141
4-56	Ruido por efecto de marea, con Luna llena.	142
4-57	Ruido por efecto de marea, con Luna cuarto menguante.	142
4-58	Ruido por efecto de marea, con Luna nueva.	143
4-59	Ruido por efecto de marea, con Luna cuarto creciente.	143
4-60	Efecto de marea en el dominio de la frecuencia.	144
4-61	Efecto de marea en el dominio de la frecuencia y escala semi-logarítmica.	145
4-62	Modelo de un prueba de presión limpia, con ruido gaussiano y de cuantización de amplitud $0.1 \text{ lb/pg}^2$ .	146
4-63	Prueba de presión limpia con ruido gaussiano y de cuantización en el dominio de la frecuencia.	147
4-64	Prueba de presión limpia con ruido gaussiano y de cuantización en el dominio de la frecuencia y escala semi-logarítmica.	147
4-65	Prueba de presión limpia con ruido gaussiano y de cuantización en el dominio de la frecuencia y escala semi-logarítmica, con una banda de frecuencia de 0 a 2.	148
4-66	Resultado de la aplicación de un filtro pasa-bajas, con diferentes frecuencias de corte.	149
4-67	Error de los resultados mostrados en la Figura 4-65, respecto a la prueba de presión limpia.	151

---

<b>Figura</b>	<b>Descripción</b>	<b>Pág.</b>
4-68	Resultado del suavizamiento de la curva, a partir diferentes frecuencias	154
4-69	Error del resultado del suavizamiento de la curva, a partir diferentes frecuencias, respecto a la prueba de presión limpia.	155
4-70	Prueba de Presión con ruido por efecto de marea.	158
4-71	Prueba de presión con ruido por efecto de marea en el dominio de la frecuencia.	158
4-72	Prueba de presión con ruido por efecto de marea en el dominio de la frecuencia, en escala semi-logarítmica.	159
4-73	Resultado de la aplicación de un filtro pasa-bajas, con diferentes frecuencias de corte, a una prueba de presión con ruido por efecto de marea.	160
4-74	Error de los resultados mostrados en la Figura 4-72, respecto a la prueba de presión limpia.	161
4-75	Resultado del suavizamiento de la curva, a partir diferentes frecuencias	163
4-76	Error del resultado del suavizamiento de la curva, a partir diferentes frecuencias, respecto a la prueba de presión limpia.	164

---

---

# RESUMEN

En la industria petrolera es muy importante caracterizar el yacimiento para explotarlo de manera óptima. Las pruebas de presión nos ayudan a conocer algunos de los datos que necesitamos para la correcta explotación de los hidrocarburos.

Sin embargo, las respuestas que recibimos directamente de los sensores de presión no corresponden en la realidad exclusivamente al yacimiento; sino que se encuentran influenciadas por una gran cantidad de factores entre los que se encuentran los efectos de medición de los instrumentos que utilizamos, el efecto de marea, la influencia de fallas y fracturas, etc. por mencionar algunos, ocasionando lo que se conoce como *ruido*. Este *ruido* afecta directamente la interpretación de los resultados obtenidos mediante la prueba de presión, lo cual puede generar que la estrategia de explotación sea inadecuada, provocando pérdidas económicas importantes. En la medida en que seamos capaces de separar la respuesta del yacimiento del ruido estaremos obteniendo interpretaciones más acordes con la realidad.

El objetivo de este trabajo es estudiar el comportamiento del modelo de una prueba de presión "limpia" y con "ruido", en el dominio de la frecuencia; mediante la aplicación del análisis de Fourier y la teoría de señales, y de esta manera obtener algunos procedimientos prácticos que permitan filtrar los datos de la prueba de presión con el fin de obtener resultados confiables. En el desarrollo del trabajo se hace uso de datos sintéticos.

Dada la amplitud del Análisis de Fourier y de las aplicaciones de éste, como lo es el filtrado de señales, este trabajo se enfoca al estudio de los filtros ideales selectivos en frecuencia.

---

# CAPÍTULO I

## INTRODUCCIÓN

Actualmente es indiscutible la importancia mundial que tienen los hidrocarburos como fuente de energía, en el 2001 abastecieron el 37 % de la demanda total, según datos obtenidos de Organización Latinoamericana de Energía (OLADE), a través del Sistema de Información Económico Energética (SIEE)<sup>1</sup>. En el caso específico de México, el panorama es similar ya que los hidrocarburos cubren más del 90% del total de la demanda energética, según la misma fuente.

En el 2002 México se colocó como el 6º productor de petróleo crudo con 3177 miles de barriles diarios, y el 9º productor de gas natural con 4423.5 millones de pies cúbicos por día (MMpcd) a nivel mundial, con exportaciones del orden de 1664.4 miles de barriles diarios de crudo y 0.6 miles de barriles diarios de gas (equivalente a combustóleo)<sup>2</sup>. En el 2000 los ingresos de la industria petrolera representaron el 37% del total de los obtenidos por el gobierno federal<sup>3</sup>. Estos datos nos muestran que las contribuciones de la empresa son vitales para la economía del país.

Dada la importancia del sector, el objetivo del Ingeniero Petrolero es explotar los yacimientos de hidrocarburos de manera óptima, obteniendo el máximo beneficio económico posible y respetando la ecología. Para el cumplimiento de este objetivo es necesario que cada yacimiento tenga un plan dinámico de explotación, que considere aspectos técnicos y económicos, con el objetivo de lograr la mayor rentabilidad posible.

La rentabilidad de los proyectos petroleros depende en gran medida de la cuantificación confiable de la reserva probada y la capacidad productiva de los yacimientos. La reserva que finalmente se extrae de un yacimiento, depende de las acciones realizadas durante su explotación.

Las decisiones para la explotación de los yacimientos se basan en mucho en las características del mismo, como las propiedades petrofísicas, de los fluidos, el tipo de roca, etc. Esta información va siendo recolectada a lo largo de la vida del yacimiento, esta caracterización conduce a la selección de un modelo representativo de las condiciones de flujo de los fluidos del yacimiento.

Actualmente con ayuda de las herramientas de cómputo, se puede predecir el comportamiento del yacimiento, bajo diferentes escenarios de explotación. Con esta información, es posible seleccionar el escenario más apropiado, con base a los recursos técnicos y económicos disponibles.

La definición del modelo del yacimiento, es primordial para la selección de la mejor alternativa de explotación, esto es, la que genere el mayor beneficio económico posible. El modelo se va conformando a partir de los datos disponibles y debe ir actualizándose hasta el final de la explotación del yacimiento.

La caracterización de yacimientos, consiste en detectar y evaluar los elementos constitutivos de la formación que afectan el comportamiento de flujo. Existen dos tipos: la estática y la dinámica. En la caracterización estática, no se requiere el movimiento de fluidos en el medio poroso, que constituye el yacimiento, para realizar la medición. Los datos para la caracterización estática provienen de la información sísmica, los datos geológicos, los registros geofísicos de pozos y de la información de la roca y los fluidos a partir de mediciones de laboratorio.

En la caracterización dinámica, se necesita generar un movimiento de fluidos en el yacimiento para obtener las mediciones. Los datos se obtienen de las pruebas transitorias de presión, los datos de producción, el registro de molinete hidráulico y las pruebas de trazadores. Este trabajo se enfoca al análisis de los datos que se obtienen mediante las pruebas transitorias de presión.

La medición, manipulación y análisis adecuado de la información son de vital importancia para el éxito de la administración de yacimientos. Para recolectar información, se requiere un plan detallado y un seguimiento exhaustivo. El plan debe considerar un listado de la información mínima que se requiere, el tiempo de adquisición y como se va a usar; un aspecto que no debe faltar en el plan, es el conjunto de procedimientos que deben seguirse para realizar las mediciones, a fin de asegurar la calidad y representatividad de la información.

Por medio de las pruebas de presión obtenemos datos, que analizados con diversas técnicas, nos proporcionan información valiosa del comportamiento del yacimiento, que sirve de referencia para decidir la mejor forma de explotación. Existen varios tipos de pruebas, tales como, las de decremento, incremento, fall-off, inyección, DST, impulso y de pozos múltiples. Las pruebas de pozos múltiples tienen la ventaja, sobre los demás tipos de prueba mencionados, de "investigar" volúmenes más grandes del yacimiento.

Como en toda técnica de análisis, la confiabilidad de los resultados que de ésta se obtengan, está íntimamente ligada con la confiabilidad de los datos utilizados, es decir, mientras los datos que se obtengan en campo sean lo más cercanos a la realidad del yacimiento, los resultados serán también representativos del mismo, por lo que se tendrán mejores bases para decidir la técnica de explotación adecuada.

Los datos de presión de fondo, cuando son adecuadamente registrados e interpretados, ofrecen información de gran importancia, tal como, la estimación del

---

volumen original de hidrocarburos, la presión promedio del yacimiento, distancia a discontinuidades de roca o fluidos, distancia a barreras impermeables, extensión y orientación del sistema fracturado, permeabilidad, porosidad, el grado de comunicación entre zonas del yacimiento, las características de una fractura que intersecta el pozo, las características de doble porosidad, la estimación de características (condiciones) de entrada de agua, la confirmación de la presencia de casquete de gas, el establecimiento de grado de comunicación de varios yacimientos a través de un acuífero común, el cálculo de coeficiente de alta velocidad en pozos de gas, la estimación del avance del frente de desplazamiento en procesos de inyección, la eficiencia de la terminación, la determinación de daño por penetración parcial, perforaciones, etc.

Los análisis en general, son laboriosos, debido a la gran cantidad de información generada durante las pruebas, y la necesidad de manipular matemáticamente los efectos de apertura y cierre de los pozos activos y/o observadores. En algunos casos, se requiere de un tratamiento previo, que elimine tendencias de presión presentes en el yacimiento durante las pruebas, el cálculo de algunas de las propiedades de los fluidos por correlaciones así como la determinación precisa de la presión, al inicio de la prueba en los pozos de observación. Aunado a lo anterior, se presenta la necesidad de analizar la prueba mediante diversas técnicas, que permitan verificar la congruencia entre los resultados.

Con base en lo planteado en el párrafo anterior, se explican los numerosos esfuerzos de los especialistas en el área, para desarrollar herramientas computacionales, que permitan ahorrar tiempo y asegurar la calidad de los resultados.

Como ya se ha hecho notar, la calidad de los resultados que se obtengan del análisis de las pruebas de presión, dependen de la calidad de los datos que se utilicen para realizar dicho análisis. En la práctica, los datos que se obtienen de

---

campo, durante una prueba de presión, no son únicamente una representación del comportamiento del yacimiento, sino que se encuentran afectados por diversos factores como el efecto de marea del pozo, la sensibilidad de la sonda de medición, tendencias de presión en el yacimiento, etc.

En el caso ideal de que los datos obtenidos de la prueba de presión representaran únicamente al yacimiento, se tendría una señal "limpia". Al efecto de los factores, que no son propiamente representativos del yacimiento sobre los datos, se le llama "ruido". Por lo que en la realidad se tienen señales con "ruido", es decir, influenciadas por factores diferentes a la respuesta del yacimiento. Para obtener resultados más confiables y por lo tanto más cercanos al comportamiento real del yacimiento, se debe minimizar el efecto del ruido sobre los datos de las pruebas de presión.

## **I.1 EL ANÁLISIS DE FOURIER COMO TÉCNICA MATEMÁTICA**

Los conceptos de señales y sistemas aparecen en una variedad muy amplia de campos, las ideas y técnicas asociadas con estos conceptos juegan un papel importante en áreas tan diversas de la ciencia y la tecnología, como comunicaciones, aeronáutica y astronáutica, diseño de circuitos, acústica, sismología, ingeniería biomédica, sistemas de generación y distribución de energía, control de procesos químicos y procesamiento de voz.

La importancia de los conceptos de señal y sistema, proviene no solo de la diversidad de fenómenos y procesos donde aparecen, sino también de un conjunto de ideas, técnicas de análisis y metodologías que han sido y están siendo desarrolladas y empleadas para resolver los problemas que involucran señales y sistemas. La historia de este desarrollo se extiende a lo largo de muchos siglos, y aunque la mayor parte de este trabajo, fue motivado por problemas específicos, muchas de estas ideas, han demostrado ser de importancia fundamental para

---

problemas de una variedad de aplicaciones más amplia, que aquella para la cual fueron de forma original empleadas.

En la actualidad, una de las herramientas más importantes en el tratamiento de señales, es el análisis de Fourier.

En 1882 el gran matemático, egiptólogo y administrador francés Jean Baptiste Joseph Fourier publicó la *Théorie Analytique de la Chaleur*, basándose en parte en la ley del enfriamiento de Newton, estableció la ecuación diferencial parcial, que gobierna la difusión del calor, solucionándolo por el uso de series infinitas de funciones trigonométricas. A partir de esta teoría establece la denominada Serie de Fourier, según la cual cualquier oscilación periódica, por complicada que sea, se puede descomponer en serie de movimientos ondulatorios simples y regulares, la suma de los cuales es la variación periódica compleja original. Es decir, se puede expresar como una serie matemática en la cual los términos son funciones trigonométricas. Esta serie resultó ser de gran importancia en el posterior desarrollo del análisis matemático, y con interesantes aplicaciones a la resolución de numerosos problemas de física.

Con la *Théorie Analytique de la Chaleur*, Fourier introdujo los métodos sencillos para la solución de los problemas de valor de frontera, que se presentan en el tratamiento analítico de la conducción del calor. Sin embargo, este "gran poema matemático", como Lord Kelvin denominó al análisis de Fourier, se ha extendido a muchas otras aplicaciones físicas diferentes a las del calor<sup>4</sup>. En efecto, el análisis de Fourier, se ha convertido en un instrumento indispensable en el tratamiento de casi toda recóndita cuestión de física moderna, teoría de comunicaciones, sistemas lineales, etc.

A pesar de que las áreas, donde el análisis de Fourier tiene aplicación, son en extremo diversas; estas se encuentran unidas por el uso común de la Transformada de Fourier. La Transformada de Fourier es una técnica que nos

---

permite el análisis de las señales, desde otro punto de vista, esto es, en el campo de la frecuencia.

Debido a la gran cantidad de problemas que son susceptibles de ser atacados con la Transformada de Fourier, y a la aparición de las computadoras digitales, se desarrolló una técnica numérica de solución de la transformada, esto es, la solución de la Transformada de Fourier a partir de datos discretos representativos de la señal. Esta técnica numérica es conocida como "Transformada Discreta de Fourier" o simplemente DFT por sus siglas en inglés (Discrete Fourier Transform).

La DFT, es un método potencial para la solución de aquellos problemas, donde solo se tienen datos discretos y donde ajustarlos a alguna función analítica resulta complicado; o bien, para aquellas funciones que por su complejidad hacen muy difícil la solución analítica de la Transformada de Fourier.

Como será explicado en el capítulo III, si se desea obtener la Transformada de Fourier de  $N$  datos discretos, usando la DFT, el tiempo de cálculo es proporcional a  $N^2$ , esto es el número de operaciones que deben realizarse. Aún con las veloces computadoras modernas, el tiempo de cálculo de la DFT para  $N$  demasiado grandes, se vuelve excesivo; por lo que la comunidad científica se dio a la tarea de desarrollar alguna técnica que redujera el tiempo de cómputo de la DFT; aunque al principio no hubo mucho éxito en este objetivo, en 1965 Cooley y Tukey publicaron en la revista *"Mathematics of Computation"* el artículo *"An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series"* donde presentaron un algoritmo matemático que pronto fue conocido como la Transformada Rápida de Fourier o FFT (Fast Fourier Transform). La FFT, reduce el tiempo de computo de la Transformada de Fourier para  $N$  datos discretos, de  $N^2$  como lo hace la DFT, a  $N \log_2 N$ .

---

Después de que Cooley y Tukey publicaran su algoritmo, se dieron a conocer técnicas similares que estaban siendo utilizadas por otras personas. Rudninick del Instituto Oceánico de La Joya, California, reportó que había usado una técnica similar y que había obtenido la idea de un artículo publicado en 1942 por Danielson y Lanezos. Este artículo, a su vez, hace referencia a Runge como fuente de su método.

Existieron otros métodos similares como el de L. H. Thomas del IBM Watson Laboratory, o el de Yates en 1937; Sin embargo, los artículos de Runge "Zeit für Math und Physik" (1903 y 1905) y "Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften" en coautoría con König, son los que describen esencialmente las ventajas computacionales del algoritmo de la FFT tal como se conoce actualmente.

## **I.2 OBJETIVO**

Dada la importancia de la calidad de la información que se usa para caracterizar los yacimientos, los esfuerzos de los profesionales del área, se centran en mejorarla utilizando tecnología de punta, o bien aplicando las técnicas matemáticas más convenientes.

Los datos de las pruebas de presión, han sido tradicionalmente analizados en el dominio del tiempo, sin que pudiese haber sido eliminado el problema del "ruido" en las señales.

Existe el antecedente del análisis de las Pruebas de Presión, mediante el uso de la Transformada Wavelet, la cual tiene dos características importantes: suaviza la señal básica y retiene o inclusive mejora los detalles. Estas características permiten al usuario el rápido reconocimiento de las señales ocultas por otros eventos o por la frecuencia de los datos en sí.

La transformada Wavelet esta diseñada para trabajar con funciones no estacionarias. La señal producida por una Prueba Transitoria de Presión, se espera

---

que sea variante en frecuencia respecto al tiempo, durante la prueba; entonces la señal es no estacionaria. Sin embargo al tratarse de pruebas de interferencia o pozos múltiples, la señal es generada en un pozo, llamado activo, y medida en otro pozo, llamado observador, por lo que la señal se estabiliza en este proceso, y puede decirse que es estacionaria, en la mayoría de los casos y por lo tanto susceptible de ser llevada al campo de la frecuencia usando la Transformada de Fourier.

El Análisis de Fourier, es una técnica matemática que a pesar de haber sido planteada para solucionar el problema específico de la conducción del calor, ha sido aplicada con éxito, en diversos campos de la ciencia y la tecnología; y es potencialmente aplicable a otros, en los que aún no se ha usado.

El planteamiento del este trabajo de tesis, es analizar los datos de las pruebas de presión en el dominio de la frecuencia, utilizando al Análisis de Fourier como herramienta.

### **I.3 DESARROLLO**

A continuación, se describe brevemente cada uno de los capítulos que conforman el contenido de este trabajo de tesis.

**Capítulo II.** Se muestran los conceptos básicos de las pruebas de presión, los datos que se miden y los resultados que se adquieren, en base al análisis de estos. Así mismo, se plantea la problemática del "ruido" y cual es la manera en que se ha tratado.

**Capítulo III.** Se plantean los conceptos básicos del análisis de Fourier y de la teoría de señales, dichos conceptos, son la base para analizar los datos de las pruebas de presión en el dominio de la frecuencia.

---

**Capítulo IV.** Se llevan al dominio de la frecuencia, diferentes señales, que representan distintos casos de factores, que causan ruido a los datos del modelo de una prueba de presión "limpia". Se analiza el comportamiento de estas señales, en el dominio de la frecuencia. Y se tratan de obtener algunos procedimientos prácticos, que permitan filtrar los datos de la prueba de presión.

**Capítulo V.** En este, se exponen las conclusiones y recomendaciones, resultado del presente trabajo de tesis.

---

# CAPÍTULO II

## CONCEPTOS BÁSICOS DE PRUEBAS DE PRESIÓN

Durante la explotación de los hidrocarburos, es importante contar con información confiable de las condiciones in-situ del yacimiento. El ingeniero petrolero debe tener suficiente información para hacer un análisis adecuado del comportamiento del yacimiento y poder predecir la producción futura bajo varios modos de operación. Mucha de esta información se obtiene a través de las pruebas a pozos.

Los objetivos de las pruebas que se hacen a los pozos varían desde la simple determinación de la cantidad y tipo de fluidos producidos, hasta la determinación de parámetros del yacimiento y heterogeneidades, que se realizan con las pruebas transitorias de presión. Generalmente estas pruebas son clasificadas como:

- Pruebas periódicas de producción.
- Pruebas de productividad.
- Pruebas transitorias de presión.

El propósito de las pruebas periódicas de producción es la determinación de las cantidades relativas de aceite, gas y agua, que son producidas bajo condiciones normales de producción. Las pruebas de productividad, son generalmente realizadas después de la terminación del pozo, para determinar su capacidad de flujo bajo diversas caídas de presión. Las pruebas transitorias de presión requieren un grado mayor de sofisticación y son usadas para determinar el daño a la formación, parámetros del yacimiento, como la permeabilidad, presiones

promedio, volumen del yacimiento y heterogeneidades. El presente capítulo se enfoca al análisis de los datos obtenidos en este último tipo de pruebas.

La base del análisis de las pruebas transitorias de presión, es la observación de los cambios de presión y de los gastos de extracción o inyección de fluidos que los causan; en conjunto con la descripción matemática del proceso de flujo, donde intervienen las propiedades de la roca y las características de los fluidos que se mueven a través de ella.

Las pruebas transitorias de presión se dividen por su tipo en:

- Pruebas de Incremento.
- Pruebas de Decremento.
- Pruebas de Gasto Múltiple.
- Pruebas de Incremento de Inyección y Fall-off.
- Pruebas de interferencia o de pozos múltiples.
- Drill Stem Test

Cada uno de estos tipos, presenta ventajas y limitaciones, y ciertos factores que las hacen particularmente importantes, para la obtención de resultados razonables.

A continuación se hace una pequeña descripción de cada una de éstas:

**Pruebas de Incremento.** Consisten en hacer producir el pozo a un gasto constante, el tiempo suficiente, para establecer una distribución de presiones estable, entonces el pozo, es cerrado como se muestra en la Figura 2-1.

La estabilización de la presión, es importante, de otra manera, se obtendrán datos erróneos. Si ésta no es posible, se deberá usar alguna otra técnica de medición como la de gasto múltiple.

---

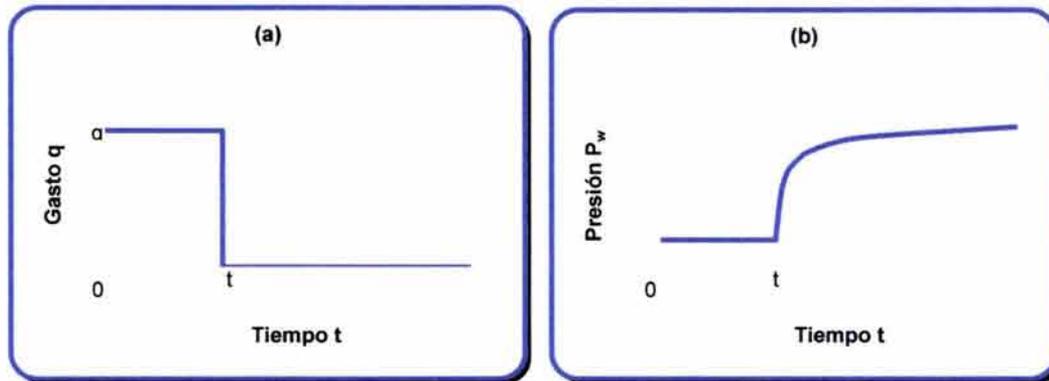


FIGURA 2-1.- REGISTRO IDEAL DE PRESIÓN Y GASTO PARA UNA PRUEBA DE INCREMENTO.

**Pruebas de Decremento.** Este tipo de pruebas, tienen dos ventajas sobre las de incremento. La primera es que la producción continúa durante el periodo de prueba, la segunda, es que además de obtener información sobre la permeabilidad y el daño a la formación, se puede estimar el volumen del yacimiento en comunicación con el pozo; y determinar si existe el aceite o gas suficiente, para justificar la perforación de pozos adicionales, cuando se trata de yacimientos nuevos.

**Pruebas de Gasto Múltiple.** Las pruebas de incremento y decremento, requieren un gasto constante; el cual es algunas veces imposible o poco práctico mantener, por el periodo de tiempo suficiente. Las de gasto múltiple, se pueden aplicar a diversas situaciones de flujo, además, tienen las ventajas de no requerir el cierre del pozo, de minimizar el efecto de almacenamiento y los efectos de segregación de fases. En éstas, es esencial la exactitud en la medición del gasto y la presión, sobre todo la medición del gasto, ya que cualquier cambio de éste, afecta significativamente el comportamiento de la presión.

**Pruebas de Inyección.** Estas, son básicamente simples, debido a la analogía que existe entre la inyección y la producción; por lo que las pruebas de Incremento de Inyección y Fall-off, son paralelas a las de Decremento e Incremento, respectivamente.

Las pruebas de inyección por gastos, se usan normalmente para determinar la presión de fractura en un pozo de inyección. El fluido es inyectado en series, incrementando el gasto, en cada paso, el intervalo de tiempo, debe ser de la misma magnitud. Se debe graficar la presión de fondo vs. el gasto de inyección, sin embargo, si las pérdidas de presión por fricción en el pozo, son pequeñas, se puede usar la presión en superficie.

Durante el desarrollo de la investigación planteada en esta tesis, se consideran solamente las pruebas de interferencia o de pozos múltiples.

## **II.1 PRUEBAS DE INTERFERENCIA O DE POZOS MÚLTIPLES**

Las pruebas de pozos múltiples, consisten en la medición de una respuesta de presión, en pozos denominados de observación, correspondiente a las perturbaciones causadas por la modificación del gasto en el pozo, denominado activo.

Las pruebas de interferencia fueron descritas primeramente por Jacob<sup>5</sup>, para pozos productores de agua, proponiendo un método de análisis, al que refirió como el "método gráfico". Actualmente, este método recibe el nombre de "ajuste con curvas tipo" y ha sido descrito exhaustivamente por Ramey<sup>6</sup> y Earlougher<sup>7</sup>.

En las pruebas de pozos múltiples, las variaciones de presión, son registradas por un registrador (sensor) de alta sensibilidad, colocado en el fondo del pozo de observación; la teoría considera que las ondas de presión viajan a través de todo el yacimiento, utilizando solamente a los fluidos saturantes, como un medio transmisor.

El desarrollo de los métodos de análisis de pruebas transitorias de presión, se basa en los modelos matemáticos de flujo, que involucran varias simplificaciones válidas, bajo las condiciones en que se efectúan las pruebas en el campo.

---

Las suposiciones tradicionales consideran el flujo transitorio en un yacimiento homogéneo, isotrópico, de porosidad y permeabilidad constante, que contiene un fluido ligeramente compresible de viscosidad constante; los efectos gravitacionales son despreciables y los gradientes de presión en el yacimiento son pequeños y también se supone flujo isotérmico.

La derivación de las ecuaciones, que describen el comportamiento de la presión, como una función del tiempo y la distancia, para un fluido que fluye a través de un medio poroso, se basa en tres principios fundamentales: a) una ecuación de conservación de masa, b) una ecuación de transporte o velocidad y c) una ecuación de estado.

En ciertos casos, la respuesta que se obtiene en los pozos de observación para una prueba de interferencia, no corresponde íntegramente al efecto causado por el cambio del gasto en el pozo activo; esto, se debe principalmente a la existencia de tendencias de depresionamiento o represionamiento, presentes en el yacimiento, por la producción histórica o cierre de los pozos; para evitar esta situación se sugirieron las pruebas de pulsos de presión.

Las pruebas de pulsos, consisten en variar cíclicamente el gasto, abriendo y cerrando el pozo activo, tantas veces como sea necesario y registrando la respuesta de presión, en un pozo observador. Bajo estas condiciones, se obtiene una respuesta de presión representada por pulsos de presión. Tal como se observa en la Figura 2-2.

La Figura 2-2, presenta un caso típico de una prueba de pulsos. Las variables que caracterizan este tipo de pruebas, son el tiempo de retraso y la amplitud del pulso. El tiempo de atraso, se define, como el tiempo que le toma a la onda de presión, viajar desde el pozo activo hasta el pozo de observación, y la amplitud del pulso, es la caída de presión causada en el pozo de observación, debida a la perturbación creada en el pozo activo.

---

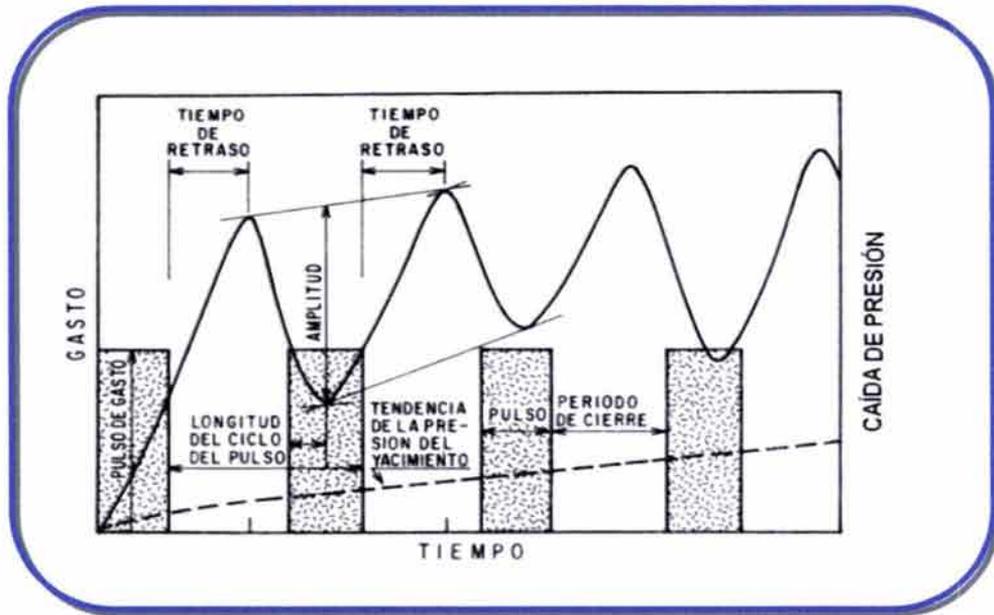


FIGURA 2-2.- PRUEBA DE PULSOS DE PRESIÓN.

A partir de la ecuación teórica, que representa el comportamiento de la presión, en el medio poroso, conocidos los gastos de producción y tiempos de apertura y cierre, así como el tiempo de retraso y la amplitud del pulso, es posible obtener parámetros, tales como la permeabilidad y la porosidad del yacimiento.

Tradicionalmente se ha utilizado el modelo de flujo radial, para analizar las pruebas de interferencia y pulsos, suponiendo que el régimen de flujo que ocurre en el yacimiento, presenta esta geometría; sin embargo, existen situaciones en las que es necesario considerar otras geometrías de flujo tales como la lineal y esférica.

## II.2 YACIMIENTO HOMOGÉNEO, INFINITO, FLUJO RADIAL.

En general un pozo con un radio  $r_w$ , que se termina cubriendo todo el espesor de un yacimiento, crea líneas de flujo radial hacia el pozo, desde el inicio y durante todo el tiempo que se mantiene en producción. En la Figura 2-3 se muestra esquemáticamente el flujo radial.

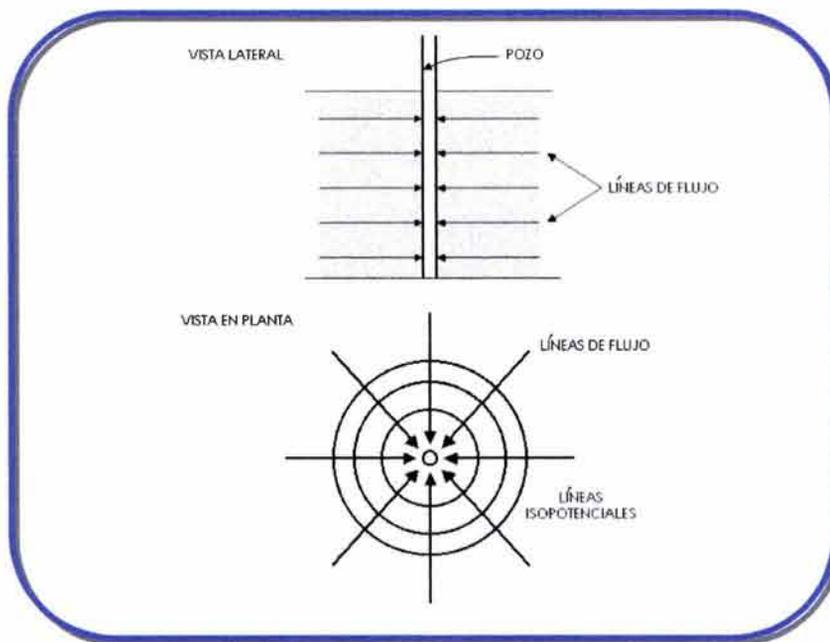


FIGURA 2-3.- REPRESENTACIÓN ESQUEMÁTICA DE LA GEOMETRÍA DE FLUJO RADIAL.

Considerando que la permeabilidad y la porosidad son independientes de la presión y que los gradientes de presión en el yacimiento son pequeños, el problema a resolverse se representa matemáticamente con la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\phi \mu c_t}{k} \frac{\partial p}{\partial t} ; \quad (2-1)$$

Con las condiciones inicial y de frontera siguientes:

$$\begin{aligned} p &= p_i & \text{en } t=0 & \forall r \\ \left( r \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r_w} &= \frac{q\mu}{2\pi kh} & \forall t \geq 0 \\ p &= p_i & \text{si } r \rightarrow \infty & \forall t \end{aligned} \quad (2-2)$$

Históricamente, este tipo de ecuaciones fue estudiado en los problemas de conducción de calor y se presentan también en los estudios de distribución de

potencial eléctrico. En la literatura se han presentado varias técnicas de solución; Polubarinova-Kochina<sup>8</sup>, propone para desarrollar la solución reemplazar la segunda condición de frontera por:

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{q\mu}{2\pi kh} \quad \forall t \geq 0 \quad (2-3)$$

Esta condición se denomina, aproximación de línea fuente a la condición original y supone que el radio del pozo es despreciable. Utilizando la transformada de Boltzmann,  $y = \frac{\phi\mu c_t r^2}{4kt}$ , la ecuación diferencial parcial original, se convierte en una ecuación diferencial ordinaria, cuya solución puede estimarse más fácilmente.

$$p(r, t) = p_i - \frac{\alpha q B \mu}{kh} \left[ -\frac{1}{2} E_i \left( -\frac{\phi\mu c_t r^2}{4\beta kt} \right) \right] \quad (2-4)$$

Esta ecuación representa la solución de la ecuación diferencial planteada y es conocida en la literatura como la solución de línea fuente. La expresión está planteada en unidades generales de campo.

Utilizando las definiciones de variables adimensionales siguientes:

$$t_D = \frac{\beta kt}{\phi\mu c_t r_w^2}; \quad p_D = \frac{kh\Delta p}{\alpha q B \mu}; \quad r_D = \frac{r}{r_w} \quad (2-5)$$

la ecuación (2-4) se transforma en:

$$p_D(t_D, r_D) = -\frac{1}{2} E_i \left( \frac{-r_D^2}{4t_D} \right) \quad (2-6)$$

En la Figura 2-4 se presenta el comportamiento de la presión adimensional contra el grupo  $\frac{t_D}{r_D^2}$ , estimada a partir de la ecuación (2-6). A esta gráfica se le

conoce como la curva tipo, "solución de línea fuente", y es aplicable al análisis de pruebas de interferencia en yacimientos homogéneos infinitos con flujo radial.

Aunque la solución presentada es una aproximación al caso real de un yacimiento infinito con un pozo finito, proporciona resultados casi idénticos a los obtenidos con la solución exacta, cuando se evalúa para valores prácticos de radio y tiempo. En la Figura 2-5, se presenta el comportamiento de la presión adimensional, a varias distancias adimensionales, para un pozo finito en un sistema infinito. Es posible observar que para valores de  $r_D$  mayores que 20, la solución se traslapa con la integral exponencial, esto es, con la solución de línea fuente para todos los tiempos. Asimismo para valores de  $t_D/r_D^2 > 5$  se presentan diferencias del 2% de error para cualquier valor de  $r_D$ . Es importante mencionar, que para la mayoría de los casos de campo, se cumplen cualesquiera de las dos condiciones.

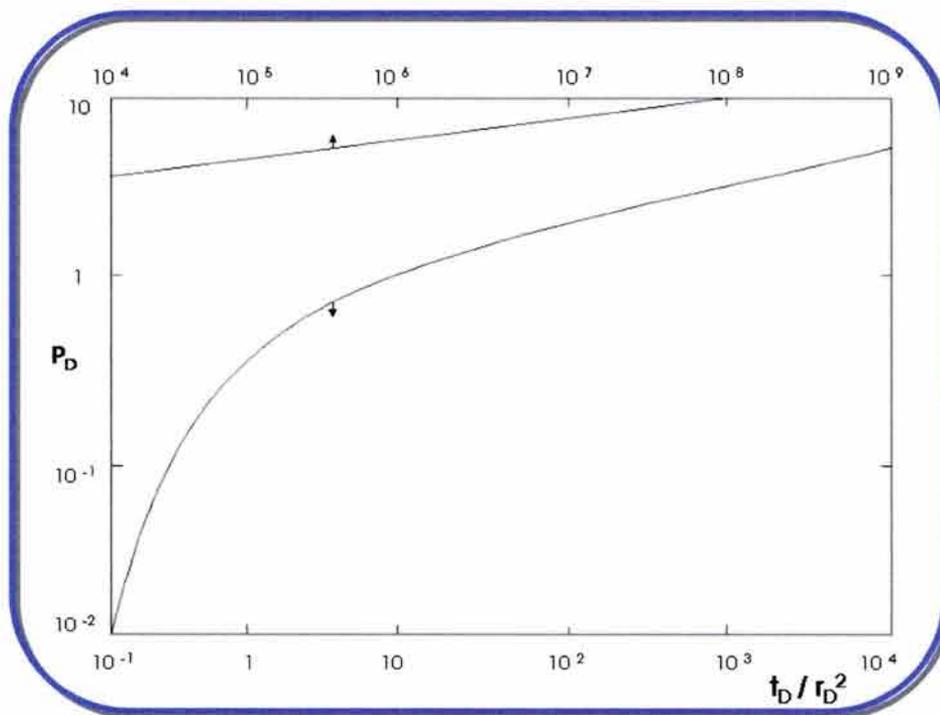


FIGURA. 2-4.- COMPORTAMIENTO DE LA PRESIÓN ADIMENSIONAL CONTRA EL TIEMPO Y RADIO ADIMENSIONAL PARA EL CASO DE YACIMIENTO HOMOGÉNEO CON COMPORTAMIENTO INFINITO Y FLUJO RADIAL.

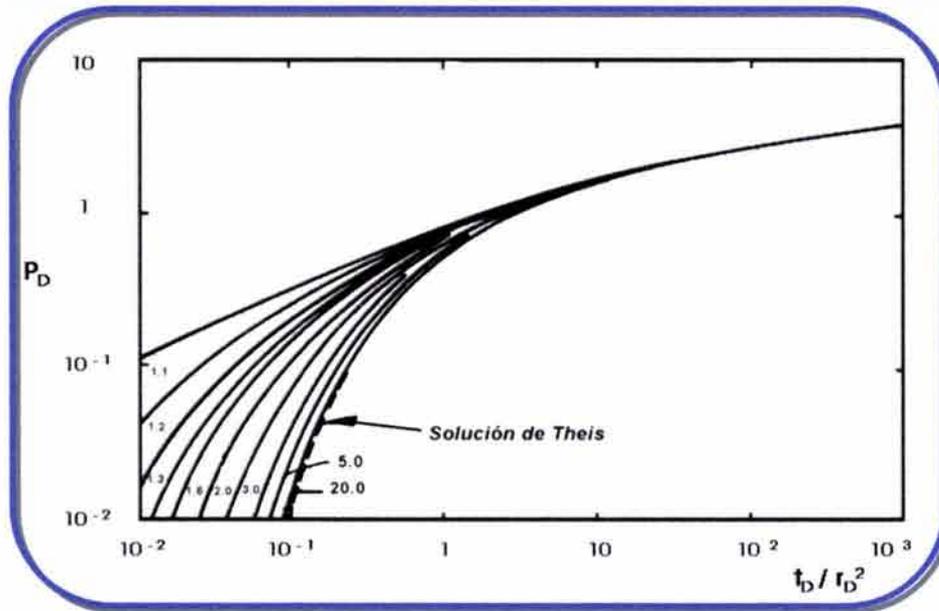


FIGURA. 2-5.- COMPARACIÓN DE SOLUCIONES CONSIDERANDO POZO FINITO Y LA SOLUCIÓN DE LÍNEA FUENTE.

Con la expresión (2-4), se puede calcular el comportamiento de la presión a cualquier radio y tiempo, si se conocen los demás parámetros involucrados, pero si el argumento de la integral exponencial, es suficientemente pequeño, se puede usar la siguiente aproximación:

$$x \leq 0.0025 \quad -E_i(-x) = -\ln(\gamma x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right) - 0.5772 \quad , \quad (2-7)$$

donde  $\gamma$  es la constante de Euler, igual a 1.78. Por tanto, la ecuación (2-4) puede representarse como:

$$p(r, t) = p_i - \frac{\alpha q B \mu}{kh} \left[ \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\beta kt}{\phi \mu c_t r^2}\right) + 0.80907 \right] \quad ,$$

$$\text{para } \frac{\phi \mu c_t r^2}{4 \beta kt} \leq 0.0025 \quad \text{ó} \quad \frac{\beta kt}{\phi \mu c_t r^2} \geq 100 \quad . \quad (2-8)$$

Aunque en el presente trabajo sólo se considera el caso de un yacimiento infinito, es importante discutir brevemente los diferentes comportamientos. En la

Figura 2-6, se presenta el comportamiento de la caída de presión que se obtiene de los casos de yacimiento homogéneo e isotrópico, con diferentes condiciones de frontera externa: infinito, cerrado y a presión constante.

En el caso de yacimiento cerrado, se observa que el comportamiento a tiempos cortos, es idéntico al del yacimiento infinito, pero a medida que el radio de drenaje alcanza la frontera cerrada, se presenta una divergencia hacia valores más altos. Para sistemas a presión constante, como puede ser el caso de un acuífero potente, se tiene también un comportamiento idéntico a tiempos cortos y posteriormente se observa una divergencia, hacia valores menores de caída de presión que los reportados por la solución para un yacimiento infinito.

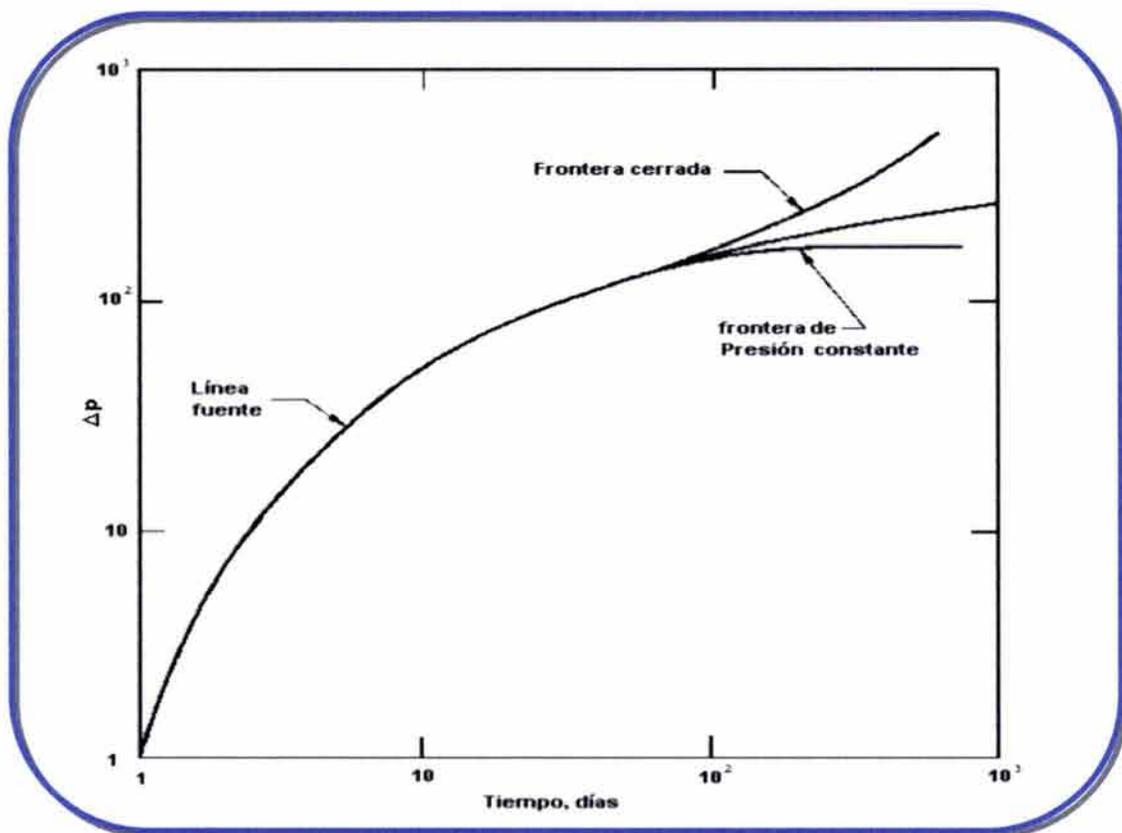


FIGURA. 2-6. CAÍDA DE PRESIÓN CONTRA TIEMPO PARA LOS CASOS DE YACIMIENTO HOMOGÉNEO CON COMPORTAMIENTO INFINITO, FRONTERA CERRADA Y FRONTERA A PRESIÓN CONSTANTE.

## II.3 TÉCNICAS DE ANÁLISIS DE PRUEBAS DE PRESIÓN

### II.3.1 Ajuste con curvas tipo<sup>9</sup>

La aplicación del método de ajuste por medio de curvas tipo, hace uso de la propiedad de los logaritmos, que indica que el logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores. La base del método de ajuste con curvas tipo, puede entenderse fácilmente, cuando se toman logaritmos de las ecuaciones que definen las variables adimensionales; por ejemplo, considerando flujo radial, se tiene:

$$\begin{aligned}\log(p_D) &= \log\left(\frac{kh}{\alpha q B \mu}\right) + \log(p_i - p(r, t)) \\ \log(t_D) &= \log\left(\frac{\beta k}{\phi \mu c_t r_w^2}\right) + \log(t)\end{aligned}\quad (2-9)$$

Si los datos de interferencia de campo, se grafican como el logaritmo de la diferencia entre la presión al inicio de la prueba y las mediciones de presión de fondo, contra el logaritmo del tiempo de registro, se obtiene una curva similar a la curva doble logarítmica, que representa la solución del problema. La diferencia entre las dos gráficas, es una traslación lineal de ambas coordenadas, representadas por los primeros términos de las ecuaciones (2-9). Si se logra un buen ajuste, entonces se puede determinar  $kh/\mu$  a partir del desplazamiento vertical y  $k/\phi\mu c_t$  por medio del desplazamiento horizontal. Es importante resaltar que aunque la discusión anterior se ha presentado para el caso de flujo radial y yacimiento homogéneo infinito, es válida para cualquier tipo de flujo.

El procedimiento de análisis puede exponerse en los pasos básicos siguientes<sup>10</sup>:

- Seleccionar una curva tipo que represente el comportamiento de presión del yacimiento.
- Superponer un papel semitransparente en el cual serán graficados los datos de campo, trazando los ejes principales de la curva tipo, sobre este papel y etiquetando los ejes en los cuales serán graficados los datos utilizando las escalas de la curva tipo
- Ajustar los datos de presión a la curva tipo, moviendo el papel semitransparente de tal manera que los ejes de la curva de datos y los ejes de la curva tipo, se mantengan paralelos
- Finalmente se selecciona un punto de ajuste, leyendo los valores correspondientes a este punto en la curva tipo y se estiman, con las ecuaciones correspondientes, las propiedades del yacimiento.

En la Figura 2-7 se presenta un ejemplo de ajuste con curvas tipo para datos correspondientes a flujo radial. El punto de ajuste seleccionado corresponde a la intersección de  $\Delta p = 10$  psi y  $t = 10$  hrs.; la línea continua corresponde al modelo teórico y los círculos a los datos de campo.

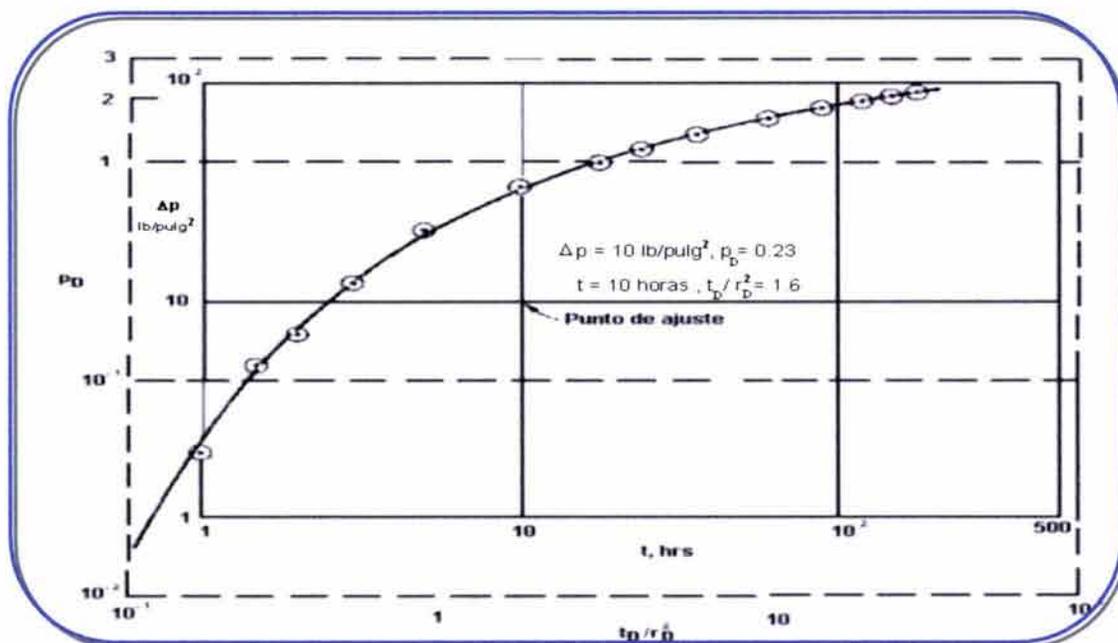


FIGURA.- 2-7. AJUSTE DE LOS DATOS DE CAMPO CON LA SOLUCIÓN DE LÍNEA FUENTE.

Se ha encontrado que los resultados obtenidos por el método de ajuste de curva tipo, presentan un error de aproximadamente el 5%, debido a la subjetividad del analista en el ajuste llevado a cabo en forma manual; aunque esto, no siempre se cumple, ya que depende de varios aspectos, tales como la experiencia, tipo de prueba, registrador de presión, etcétera.

### II.3.2 Técnicas semilogarítmicas<sup>11</sup>

Adicionalmente al ajuste por curvas tipo, es posible utilizar otras técnicas, para analizar pruebas de interferencia con flujo radial. La integral exponencial, presente en la ecuación (2-6), tiene una aproximación logarítmica para valores de  $t_D / r_D^2 \geq 100$ , lo cual presenta poca utilidad en pruebas de interferencia, debido a que es impráctico correr una prueba suficientemente larga, para que los datos en el pozo observador presenten una línea recta semilogarítmica. Sin embargo, si esto, se llegara a presentar en la práctica, para tiempos largos al graficar en papel semilogarítmico el tiempo contra  $\Delta p$ , se tendría una línea recta a partir de la cual se puede estimar T y S, con las expresiones siguientes:

$$T = kh = \frac{162.6qB\mu}{m}; \quad S = \phi c_t h = \frac{kh}{\mu r^2} 10^{\left(\frac{\Delta p_{1hr}}{m} - 3.2275\right)}. \quad (2-10)$$

Otra técnica de interpretación<sup>12</sup>, consiste en graficar el tiempo contra la caída de presión en papel cartesiano, así la máxima pendiente,  $m_{máx}$ , y el tiempo de intersección,  $t_x$ , pueden usarse para calcular valores aproximados de T y S, usando las ecuaciones siguientes:

$$T = kh = \frac{10.5qB\mu}{m_{máx} t_x}; \quad S = \phi c_t h = 0.000262 \frac{kh t_x}{\mu r^2}. \quad (2-11)$$

Para aplicar este método deben cumplirse las restricciones siguientes: a) La prueba de interferencia deberá alcanzar el punto de inflexión, esto es  $t_D = 0.25$ ;

b) No existen efectos de almacenamiento y daño; c) el gasto en el pozo activo se mantiene constante; d) no se presentan efectos de frontera antes del punto de inflexión, y e) no existen tendencias de presión en el yacimiento.

En la Figura 2-8, se presenta un ejemplo de aplicación<sup>13</sup> a una prueba de campo; observe que los resultados obtenidos dependen en cierto grado de la habilidad del analista para el trazo de la recta; en caso de utilizar un programa de cómputo para la estimación, debe tenerse cuidado especial en relación con ruidos aleatorios presentes en la señal de presión, puesto que pueden distorsionar los valores reales de la pendiente y ordenada al origen.

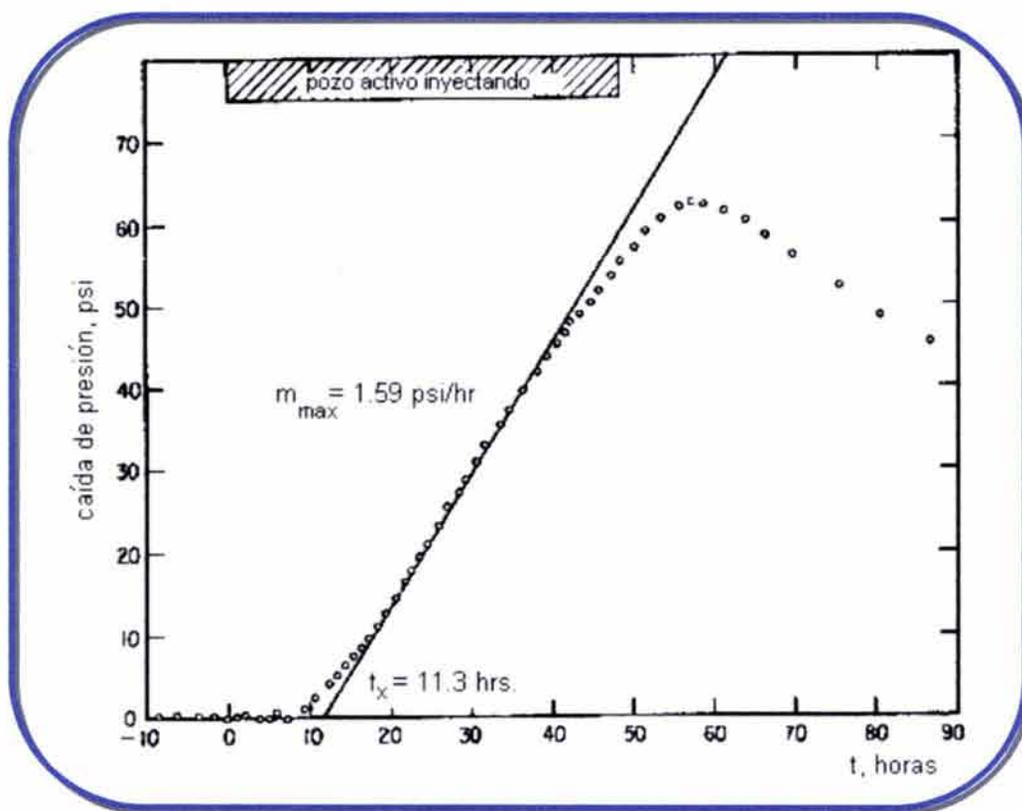


FIGURA. 2-8.- ANÁLISIS DE PRUEBA DE INTERFERENCIA PRESENTADA POR LESCAURBORA<sup>14</sup>.

Tiab y Kumar<sup>15</sup>, proponen usar la derivada de presión respecto al tiempo, para la interpretación en yacimientos homogéneos de comportamiento infinito. Los parámetros de análisis son  $t_{máx}$  y  $p_{máx}$ , que corresponden a los valores máximos del perfil de campo, así T y S se calculan mediante las siguientes expresiones:

$$T = kh = 948 \frac{\phi \mu c_t h r^2}{t_{\text{máx}}}; \quad S = \phi c_t h = 0.0274 \frac{qB}{p_{\text{máx}} r^2} \quad (2-12)$$

En la Figura 2-9, se observa el comportamiento de la función derivada. Note que el valor máximo que alcanza es de 0.73576 y que ocurre a un valor de  $t_D / r_D^2 = 0.25$ , esto es, el punto de inflexión mencionado en la técnica anterior. Este resumen constituye la base teórica de la técnica propuesta por Tiab y Kumar.

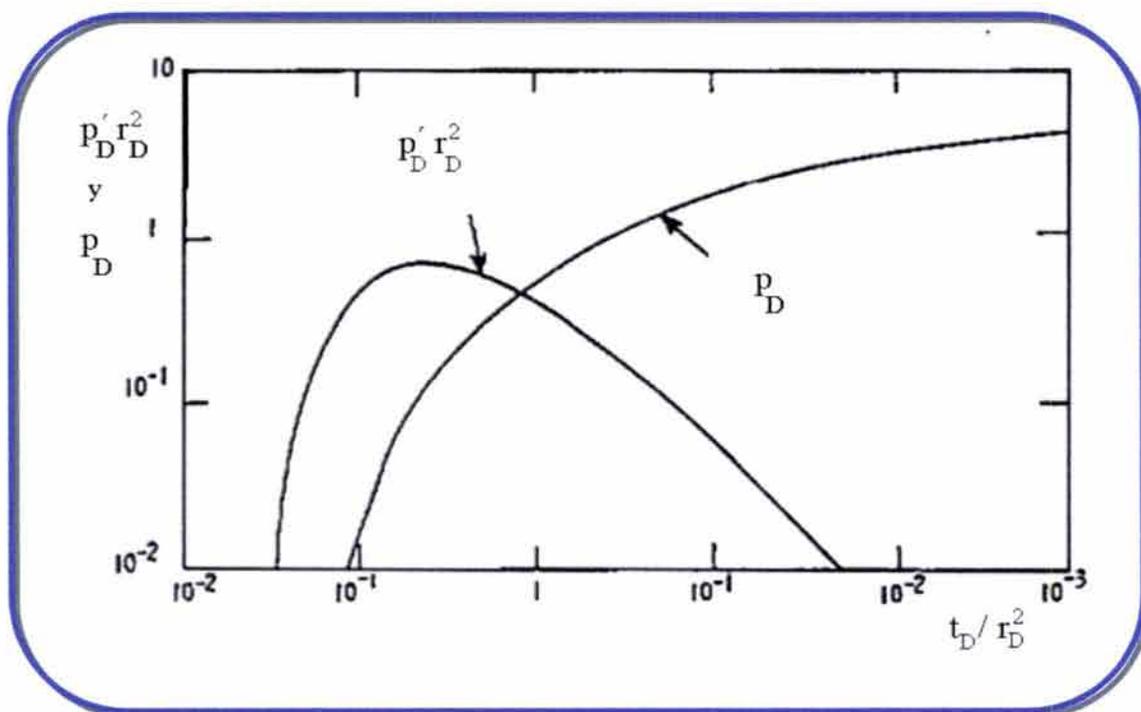


FIGURA. 2-9.- CARACTERÍSTICAS DE LA FUNCIÓN DERIVADA DE LA SOLUCIÓN DE LÍNEA FUENTE<sup>16</sup>.

### II.3.3 Técnica de El-Khatib<sup>17</sup>

En años recientes el uso de la derivada de presión, ha llegado a ser muy popular para la interpretación de datos presión-tiempo. Se ha mostrado en la literatura, que el ajuste convencional mediante curvas tipo, puede ser ampliamente mejorado, mediante un ajuste doble simultáneo. La principal desventaja, en el uso de la derivada, es que ésta se calcula mediante la diferenciación numérica de los datos de presión, por lo cual, cuando existe dispersión en los datos de presión, los resultados son "ruidosos" y en ocasiones difíciles de interpretar.

El-Khatib<sup>18</sup>, deriva la solución de línea fuente, manipulando algebraicamente el resultado, de tal forma, que obtiene una relación lineal entre las variables. De los resultados obtenidos concluye que una gráfica de  $\log \left( t \frac{\partial p}{\partial t} \right)$  contra  $1/t$  conduce a una recta cuya pendiente  $m$  y ordenada  $A$ , se utilizan para calcular  $T$  y  $S$ , de acuerdo con las siguientes expresiones:

$$T = Kh = \frac{\alpha / 2qB}{A}; \quad S = \phi \mu c_t = \frac{Tm}{948r^2} \quad (2-13)$$

A continuación se presenta el desarrollo teórico de la técnica propuesta por Khatib. La derivada de la presión, respecto al tiempo a una distancia  $r$  del pozo activo, obtenida a partir de la ecuación (2-4) se expresa en unidades de campo como:

$$p'(r,t) = - \frac{\alpha / 2qB\mu}{kh} \frac{e^{-948\phi\mu c_t r^2 / kt}}{t}; \quad (2-14)$$

multiplicando la expresión anterior por  $-t$  y tomando logaritmos, se tiene:

$$\text{Ln}(-tp'(r,t)) = \text{Ln}\left(\frac{\alpha / 2qB\mu}{kh}\right) - \frac{948\phi\mu c_t r^2}{kt} \quad (2-15)$$

A partir de un análisis de la ecuación anterior, se concluye que una gráfica de  $\text{Ln} |tp'|$  contra  $1/t$  en papel semilogarítmico presenta una recta cuya pendiente y ordenada al origen pueden usarse para estimar la transmisibilidad,  $T$ , y la capacidad de almacenamiento del yacimiento,  $S$ .

Siguiendo el mismo razonamiento expuesto, la teoría puede extenderse para analizar pruebas de interferencia con dos gastos. Si el gasto en el pozo activo cambia de  $q_1$  a  $q_2$  en el tiempo  $t$ , se puede demostrar que:

$$\ln \left| \Delta t (p' + C) \frac{q_1}{(q_1 - q_2)} \right| = \ln A - \frac{b}{\Delta t} \quad (2-16)$$

$$\text{donde, } C = A \frac{e^{-b/(t + \Delta t)}}{(t + \Delta t)}$$

La expresión anterior permite deducir que al graficar  $\left| \Delta t (p' + C) \frac{q_1}{(q_1 - q_2)} \right|$  contra  $1/t$  en papel semilogarítmico, se obtiene una recta cuya pendiente y ordenada al origen permiten estimar la transmisibilidad y el coeficiente de almacenamiento del yacimiento, como en el caso de un sólo gasto.

Debido a que  $C$  se desconoce, se aplica un procedimiento iterativo iniciando con  $C=0$ , a partir de lo cual, mediante técnicas de regresión o gráficamente, se obtiene una aproximación para  $A$  y  $b$ . Posteriormente estos valores se utilizan para estimar un valor de  $C$ , iterando sucesivamente, hasta llegar a una tolerancia establecida.

### II.3.4 Técnicas de análisis con tendencia de presión

La teoría de análisis convencional, considera que los cambios de presión medidos en el pozo observador, son debidos únicamente, al efecto de los pozos activos. La existencia de una tendencia de represionamiento o depresionamiento en el yacimiento causará errores en los valores estimados de las propiedades de la formación productora, a menos que se considere este efecto en el análisis.

Una de las claves para analizar exitosamente una prueba de interferencia, es la predicción de la tendencia de presión en los pozos observadores durante la prueba. La tendencia de presión, significa el cambio de presión, que ocurriría en los pozos, si el gasto del pozo activo no fuera cambiado. Esta tendencia de presión debe ser sustraída de las mediciones de presión para obtener la respuesta de

interferencia debida al pozo activo. Teóricamente, la tendencia de presión, es la suma, en el pozo de observación, de todos los efectos transitorios de presión, generados por los pozos, activos durante toda la vida productiva del yacimiento. Matemáticamente esta tendencia es muy difícil de estimar, pero puede medirse antes de empezar la prueba y extrapolarla.

Kamal y Brigham<sup>19</sup>, determinaron cualitativamente los errores que se cometen en el análisis de una prueba cuando no se consideran los efectos de tendencia lineal de presión, reportando los resultados siguientes, para valores diferentes de pendientes de la tendencia, tales que reportaran cambios de presión en  $t_D / r_D^2 = 3$  en el rango del 10 al 30%.

Cambio en presión a $t_D / r_D^2 = 3$	10%	20%	30%
Error en kh	-3%	-9%	-16%
Error en $\phi$ ct h	-7.6%	-16.8%	-23.6%

El valor de  $t_D / r_D^2$  igual a tres, lo seleccionaron debido a que corresponde al tiempo en horas, requerido para correr satisfactoriamente una prueba en un yacimiento con propiedades promedio. Como puede observarse, los errores son de consideración e indican que no es posible despreciar los efectos de la tendencia de presión.

Un paradigma generalmente reconocido, es que la integral definida de la presión respecto al tiempo, suaviza la dispersión y elimina el filtrado de datos requerido para el cálculo de la derivada. En lo mejor de nuestro conocimiento, Rodríguez de la Garza y Antúnez Uribe<sup>20</sup> en 1986, propusieron por vez primera, realizar un ajuste a los datos de pruebas de interferencia, mediante curvas tipo con el uso de la integral, y aplicaron su técnica al campo Abkatún, obteniendo buenos resultados. La curva tipo consideró el efecto superpuesto de una tendencia lineal de presión, ver Figura 2-10.

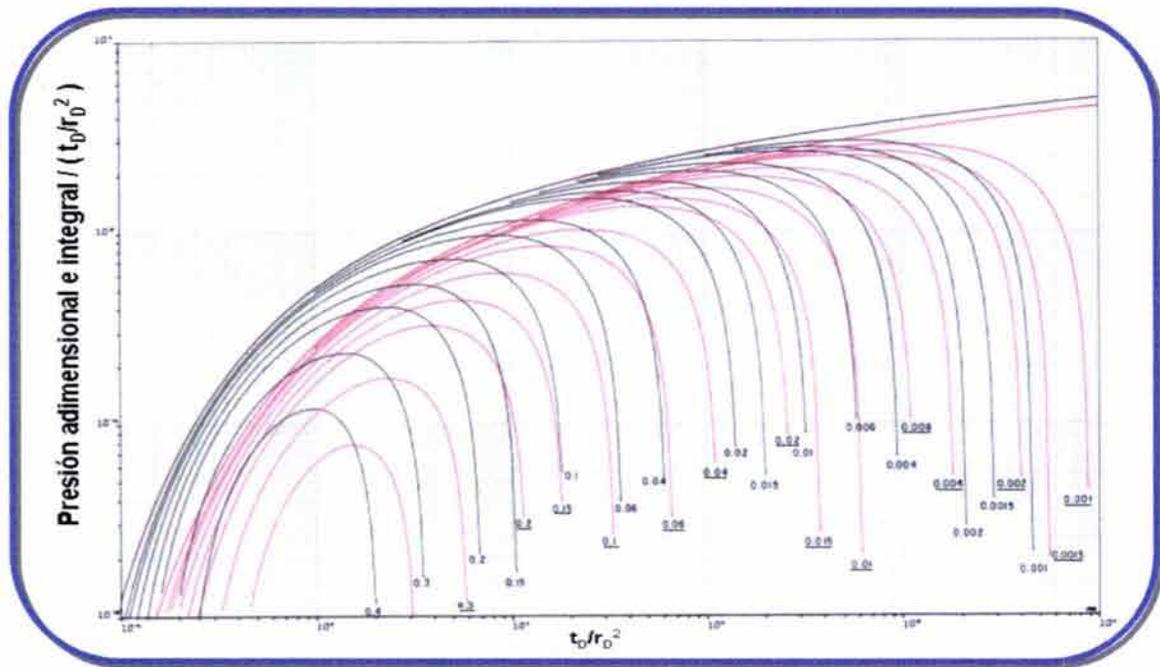


FIGURA 2-10.- CURVA TIPO PARA PRUEBAS DE INTERFERENCIA CON TENDENCIA LINEAL DE REPRESIONAMIENTO<sup>21</sup>.

Estas curvas tipo se desarrollaron considerando la solución de línea fuente y una tendencia lineal de represionamiento en el yacimiento. Todas las curvas tienden a ir hacia arriba y posteriormente hacia abajo y están etiquetadas con el valor de la tendencia de represionamiento.

Cinco Ley<sup>22</sup> y coautores en 1990, presentan una metodología de análisis con curvas tipo, que elimina el efecto de una tendencia de presión lineal presente durante la prueba. Para el caso de pruebas de pozos múltiples, la curva tipo está basada en una función de presión definida como:

$$pmdp(t) = \left| (p_i - p(t)) - t \frac{dp(t)}{dt} \right|; \quad (2-17)$$

El ajuste se hace en una gráfica doble logarítmica de  $pmdp(t)$  contra  $t$ . Para el caso de incremento de presión, la función de presión la definen como:

$$pmdp(\Delta t) = t(p_i - p_{ws} - t \frac{dp_{ws}}{dt}) / 24Q, \quad (2-18)$$

donde Q es la producción acumulada antes de la prueba.

A continuación se presenta el desarrollo teórico de Cinco Ley<sup>23</sup> y coautores para llegar a la metodología de análisis expuesta.

El comportamiento de la caída de presión en un pozo de observación, afectado por la influencia de una tendencia lineal de presión, puede expresarse como:

$$\Delta p_w(t) = q\Delta p_1(t) + \eta_1 t, \quad (2-19)$$

donde  $\Delta p_1(t)$  es la respuesta de presión que el pozo tendría para un gasto unitario a un tiempo t sin el efecto de la tendencia de presión. Note que la ecuación es válida para cualquier clase de prueba transitoria de presión, y para cualquier geometría de flujo;  $\eta_1$  puede ser positiva o negativa dependiendo de que la tendencia sea hacia arriba o hacia abajo, respectivamente.

La función derivada de presión,  $t\Delta p'$ , representa la pendiente de la curva de presión en una gráfica semilogarítmica, para una prueba con tendencia de presión la función derivada es:

$$t\Delta p'_w(t) = qt\Delta p'_1(t) + \eta_1 t, \quad (2-20)$$

Puede observarse que en la expresión anterior se tiene el efecto de la tendencia de presión; por tanto si se subtrae la ecuación (2-20) de (2-19),

$$pmdp(t) = |\Delta p_w(t) - t\Delta p'_w(t)| = |q\Delta p_1(t) - qt\Delta p'_1(t)|, \quad (2-21)$$

se genera una nueva función que elimina automáticamente la tendencia lineal de presión.

La generación de curvas tipo independientes de la tendencia de presión, se basa en la definición de  $pmdp$  y  $F(t_D)$  para diferentes geometrías de flujo, de acuerdo a las ecuaciones (2-22):

$$\begin{array}{ll}
 \text{Flujo lineal} & pmdp = \left| p_{DL} - t_{DL} p'_{DL} \right| / x_D, \quad F(t_D) = t_{DL} / x_D^2 \\
 \text{Flujo esférico} & pmdp = r_D \left| p_{DS} - t_D p'_{DS} \right|, \quad F(t_D) = t_D / r_D^2 \quad . \quad (2-22) \\
 \text{Flujo radial} & pmdp = \left| p_D - t_D p'_D \right|, \quad F(t_D) = t_D / r_D^2
 \end{array}$$

Las curvas tipo se presentan en la Figura 2-11, donde se observa que tienen características diferentes para los distintos tipos de geometría de flujo, lo cual permite identificar fácil y fehacientemente el tipo de flujo predominante en el yacimiento.

El procedimiento<sup>24</sup> para estimar la magnitud de la tendencia de presión, consiste en graficar la diferencia entre la caída de presión medida y la calculada por el modelo matemático contra el tiempo. La pendiente de la recta resultante corresponde con la tendencia lineal de presión presente durante la prueba.

A partir del procedimiento comentado en el párrafo anterior, es posible corroborar la calidad de los resultados de caracterización obtenidos de la prueba de interferencia.

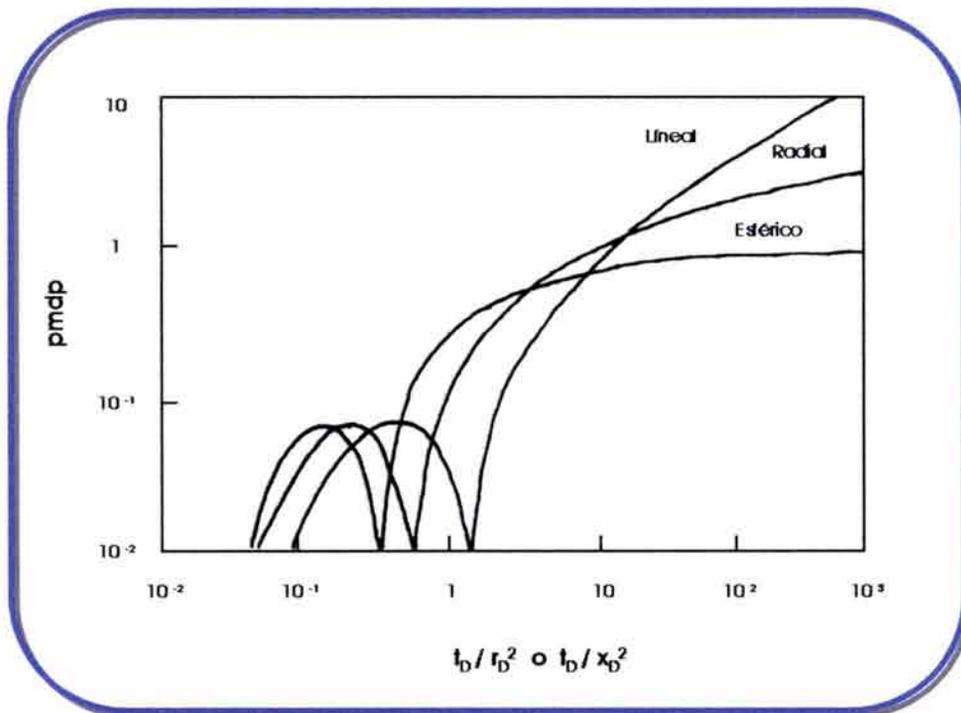


FIGURA.- 2-11. COMPORTAMIENTO DE LA PRESIÓN ADIMENSIONAL VERSUS EL TIEMPO Y RADIO ADIMENSIONAL, PARA EL CASO DE YACIMIENTO HOMOGÉNEO CON COMPORTAMIENTO INFINITO<sup>25</sup>.

En primer lugar si existen mediciones de presión antes del inicio de la prueba, se pueden comparar los valores medidos en campo de la tendencia y los proporcionados por el análisis; si la concordancia no es buena dentro de los límites prácticos, se concluye que el modelo de flujo seleccionado, no es el adecuado.

En segunda instancia, si la gráfica obtenida a través de este procedimiento no presenta un ajuste de tipo lineal, se diagnostica que la tendencia de presión en el yacimiento, no es de tipo lineal, y/o que los datos de campo contienen efectos no contemplados en el modelo de flujo o que el modelo seleccionado no es el adecuado.

## II.4 EL RUIDO EN LAS PRUEBAS DE PRESIÓN

En la operación de toma de registros de pruebas de variación de presión, intervienen factores múltiples que incrementan el riesgo de falla o de inducción de ruidos en la información, por ejemplo, existen equipos de generación de energía

eléctrica ruidosos, malacates con colectores eléctricos (conexiones móviles), conexiones expuestas a fluidos altamente conductivos, a altas presiones, temperaturas y condiciones de corrosión.

Los ruidos en los datos de pruebas de presión, se puede clasificar en dos tipos, los aleatorios y los sistemáticos. Los ruidos aleatorios, se presentan en todos los sistemas de medición y generalmente siguen una distribución estadística de tipo gaussiana. Los ruidos sistemáticos, se generan debido a una operación inadecuada en el manejo de los equipos electrónicos y electromecánicos que se utilizan en la toma de datos, o en operaciones recientes de cambio de gasto en pozos cercanos o en el mismo pozo. Los ruidos de cuantización, se clasifican como sistemáticos, ya que dependen de la sensibilidad de la herramienta de medición.

Existen diferentes tipos de ruido, por ejemplo, los asociados a la resolución de la herramienta de medición o sonda, conocidos como de truncamiento o de cuantización; o los ruidos gaussianos, que son debidos a factores que aparecen aleatoriamente, tanto en la electrónica de la sonda como en el pozo y yacimiento, existen también los ruidos causados por efectos en el yacimiento, como el efecto de marea.

A pesar de que se han realizado grandes avances para mejorar la sensibilidad de los nuevos transductores (herramientas), para la medición de las variaciones en la presión, éstos, aún introducen ruidos, debidos a truncamiento de los datos, por la resolución de la herramienta. Estos ruidos son más evidentes, cuando los cambios máximos de presión en la prueba, son muy pequeños, comparados con el rango de operación de la herramienta de medición (Escala Total). Los errores de truncamiento, son más evidentes en datos densamente muestreados y de manera gráfica dan la apariencia de escalones.

Los problemas de ruido de truncamiento, son más evidentes después del efecto de almacenamiento, ya que las variaciones de presión en esa zona, son comparables a la resolución de la herramienta.

A pesar de que el ruido es inherente a las pruebas de presión, éste se puede reducir, realizando la prueba de manera adecuada. Se debe poner atención en la elección de la sonda, esto es, que la resolución de la misma, sea acorde al rango de presiones que se tiene en el yacimiento; la herramienta debe estar fija y alejada de la zona de disparos; antes de comenzar la medición debe estabilizarse la temperatura y el gasto.

---

# CAPÍTULO III

## CONCEPTOS BÁSICOS SOBRE EL ANÁLISIS DE FOURIER Y LA TEORÍA DE SEÑALES

### **III.1 SISTEMAS Y SEÑALES**

En la naturaleza existen un número infinito de fenómenos, para estudiarlos el ser humano se ha dado a la tarea de representarlos de alguna manera; es aquí donde nacen los conceptos de señales y sistemas.

Una señal, es una función de una más o variables independientes, que contienen información acerca de la naturaleza o comportamiento de un fenómeno. Los sistemas responden a señales particulares, produciendo otras señales. Un sistema se puede ver como cualquier proceso, que produce una transformación de señales; tiene una señal de entrada y una señal de salida, la cual está relacionada con la entrada a través de la transformación del sistema.

Las señales pueden describir una variedad muy amplia de fenómenos físicos. Aunque se pueden representar de muchas maneras, en todos los casos la información dentro de una señal, está contenida en un patrón de variaciones de alguna forma.

Hay dos tipos básicos de señales, de tiempo continuo y de tiempo discreto. En el caso de las señales de tiempo continuo, la variable independiente es continua, es decir, la señal está definida para todo  $t$ ; en el caso de las señales de tiempo discreto, la variable independiente no es continua, es decir, la señal está definida sólo para ciertos puntos en el tiempo.

En una prueba de variación de presión, se conoce la señal de entrada, aplicada al yacimiento, por ejemplo: el gasto, y se mide una señal de respuesta del sistema, la cual puede ser la presión. El propósito del análisis de las pruebas, es identificar o caracterizar al sistema yacimiento pozo, utilizando la información de entrada y de salida del sistema.

La importancia de los conceptos de señal y sistema, proviene no sólo de la diversidad de fenómenos y procesos donde aparecen, sino también de un conjunto de ideas, técnicas de análisis y metodologías, que han sido y están siendo desarrolladas y empleadas para resolver los problemas que involucran señales y sistemas. La historia de este desarrollo, se extiende a lo largo de muchos siglos, y aunque la mayor parte del trabajo, fue motivado por problemas específicos, muchas de estas ideas, han demostrado ser de importancia fundamental para problemas de una variedad de aplicaciones más amplia que aquella, para la cual fueron empleadas de forma original.

El Análisis de Fourier ha sido una herramienta analítica en campos tan diversos como sistemas lineales, óptica, teoría de probabilidad, física cuántica, antenas y análisis de señales.

Algunas de las aplicaciones del Análisis de Fourier en estos campos son: en la óptica para el establecimiento de relaciones generales, que simplifiquen el cálculo de la formación de imágenes, por un sistema óptico; dentro del área de sistemas lineales, se utiliza para el cálculo de la potencia en estado estacionario de circuitos eléctricos o para analizar el movimiento en estado estacionario, en sistemas mecánicos; en la teoría de comunicaciones, para la modulación de la amplitud, la modulación angular y de pulsos, así como en la digitalización y transmisión de voz; en la solución de problemas de valor de frontera, como vibración, conducción de calor y teoría de potenciales; dentro de la teoría de probabilidad, para la obtención de la función de distribución y de densidad de probabilidad y en el cálculo de la esperanza y el momento.

---

## **III.2 TEORÍA DE LA APROXIMACIÓN DE FUNCIONES**

Para el estudio de las señales, casi siempre es necesario ajustarlas a una función analítica, que nos permita manejarlas matemáticamente; es aquí donde la teoría de la aproximación de funciones, adquiere importancia.

La teoría de la aproximación de funciones, nos sirve para encontrar una función analítica a partir de datos discretos. Para aproximar una función, utilizamos expresiones de tipo polinomial, que pueden ser reales o complejas. Entre las técnicas para aproximar funciones, se encuentran las que utilizan polinomios reales, funciones ortogonales reales, como los polinomios de Legendre o funciones ortogonales complejas, como el Análisis de Fourier.

En el caso del Análisis de Fourier, la aproximación de funciones se realiza mediante series de Fourier, que son de tipo complejo. La serie compleja de Fourier, como medio de aproximación sobre los métodos mencionados anteriormente, presenta la ventaja de ser muy general, porque permite aproximar cualquier función en cualquier intervalo. El Análisis de Fourier no está limitado a un intervalo dado, como es el caso de los polinomios de Legendre, que son funciones ortogonales reales.

### **III.2.1 Error en la aproximación de funciones.**

Al tratar de encontrar una función analítica para un grupo de datos discretos, no todos los datos originales, cumplen exactamente con la función analítica, a esta diferencia entre los datos se le conoce como error. El error es una medida de que tanto se parece la función original a la aproximada.

Existen dos formas comunes para expresar el error en un cálculo: el error absoluto y el relativo. El primero, se define como la diferencia entre el valor verdadero y el aproximado.

Con el error absoluto, es muy importante verificar el tamaño del valor verdadero, ya que como se muestra en el siguiente ejemplo, el error es más grave cuanto menor es el valor verdadero. Si se tiene  $3053.64 \pm 0.010$ , se habla de una buena precisión; en cambio si se tiene  $0.040 \pm 0.010$ , es claramente carente de precisión; aunque el valor del error es el mismo en los dos casos, no representa por sí mismo, el grado de precisión; sino que debe ser forzosamente relacionado con la magnitud del valor real.

El empleo del error relativo, es una forma de compensar este problema. El error relativo, se define como el cociente del error absoluto entre el valor verdadero; de esta manera, el error relativo, es independiente de la escala de valor, lo cual es un atributo deseable. Sin embargo, cuando el valor verdadero es cero el error relativo es indefinido.

Cuando se trata de encontrar el error en la aproximación de funciones, se hace mediante el error promedio, el cual evalúa la calidad de la aproximación en todos los puntos dentro de un rango. El error promedio, es la media aritmética de los errores absolutos para cada dato discreto.

En la Tabla 3-1, se muestran los valores reales y aproximados de una función, así como su error y el error promedio ( $\epsilon_0$ ).

TABLA 3-1.- ERROR PROMEDIO

t	f(t) real	f(t) aproximada	Error Absoluto
0	1.0000	1	0.0000
0.5	0.7071	0.5	0.2071
1	0.0000	0	0.0000
1.5	-0.7071	-0.5	-0.2071
2	-1.0000	-1	0.0000
			$\Sigma$ 0.0
			$\epsilon_0$ <b>0.0</b>

Estos datos pueden hacer suponer que el error real es cero, lo cual como se observa en la Figura 3-1, no es verdad, ya que existen dos puntos que no se ajustan exactamente a la función aproximada. Lo anterior nos indica, que el error promedio en algunos casos, no es un buen criterio para evaluar la aproximación, ya que en el proceso se cancelan errores positivos con negativos.

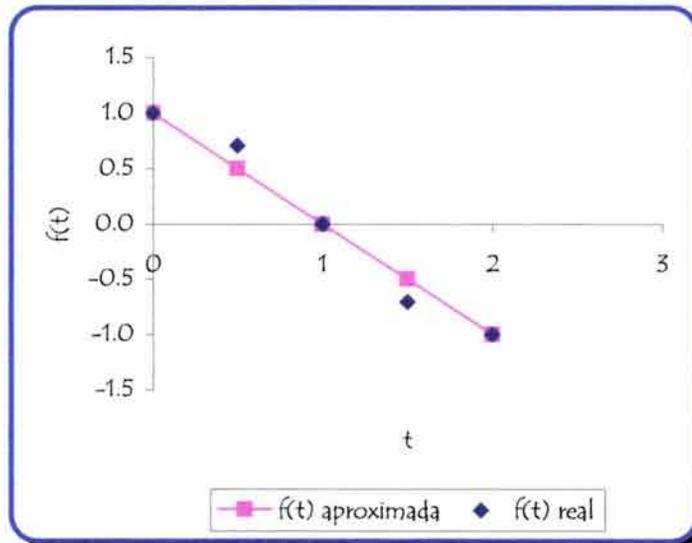


FIGURA 3-1.- APROXIMACIÓN DE FUNCIONES.

Un método para evitar que se cancelen los errores positivos con negativos es el del error cuadrático medio ( $\epsilon^2$ ), que se define, como el promedio o media aritmética, de la diferencia al cuadrado del valor real de la función y el de su aproximada. En la Tabla 3-2, se muestra el error cuadrático medio para el ejemplo anterior.

TABLA 3-2.- ERROR CUADRÁTICO MEDIO

t	f(t) real	f(t) aproximada	Error Absoluto	$[f(t)-f_a(t)]^2$
0	1.0000	1	0.0000	0.0000
0.5	0.7071	0.5	0.2071	0.0429
1	0.0000	0	0.0000	0.0000
1.5	-0.7071	-0.5	-0.2071	0.0429
2	-1.0000	-1	0.0000	0.0000
$\Sigma$			0.0	0.0858
$\epsilon_0$			<b>0.0</b>	$\epsilon^2$ <b>0.017</b>

### III.2.2 Aproximación de funciones mediante Series de Fourier

Una función periódica  $f(t)$  con periodo  $T_0$ , se puede expresar mediante una serie de Fourier como:

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi n f_0 t) + b_n \text{sen}(2\pi n f_0 t) \quad (3-1)$$

Donde  $f_0$  es la frecuencia fundamental y es igual a  $1/T_0$ . La magnitud de los coeficientes de la serie, son evaluados de la siguiente manera:

$$a_0 = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) \partial t \quad (3-2)$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) \cos(2\pi n f_0 t) \partial t \quad (3-3)$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) \text{sen}(2\pi n f_0 t) \partial t \quad (3-4)$$

La serie de Fourier se puede representar también en su primera forma trigonométrica como:

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(2\pi n f_0 t + \phi_n) \quad (3-5)$$

Los coeficientes  $C_n$  y los ángulos  $\phi_n$  se conocen como amplitudes armónicas y ángulos de fase respectivamente, y se evalúan en función de los coeficientes  $a_n$  y  $b_n$ , de la siguiente manera:

$$C_0 = \frac{1}{2} a_0 \quad (3-6)$$

$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad (3-7)$$

$$\phi_n = \tan^{-1} \left( \frac{b_n}{a_n} \right) \quad (3-8)$$

La forma en que la serie de Fourier reconstruye una función, es a través de la suma de  $k$  funciones cosenoidales ( $k=1,2,3,\dots$ ). Estas funciones tienen diferentes amplitudes y períodos, las cuales al sumarse con diferentes ángulos de fase van reconstruyendo a la función original.

Entonces la función aproximada a  $f(t)$ , queda expresada como:

$$f(t) \approx f_a(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^k a_n \cos(2\pi n f_0 t) + b_n \operatorname{sen}(2\pi n f_0 t) \quad (3-9)$$

O bien:

$$f(t) \approx f_a(t) = C_0 + \sum_{n=1}^k C_n \cos(2\pi n f_0 t + \phi_n) \quad (3-10)$$

Como  $f_a(t)$  se aproxima a  $f(t)$  entonces:

$$f(t) = f_a(t) + \varepsilon_k(t) \quad (3-11)$$

Por lo tanto el error  $\varepsilon_k$  es:

$$\varepsilon_k(t) = f(t) - f_a(t) \quad (3-12)$$

Y el error cuadrático medio es:

$$\varepsilon^2 = [f(t) - f_a(t)]^2 \quad (3-13)$$

Entonces el error cuadrático medio mínimo  $\varepsilon^2$ , está definido por:

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} [\varepsilon_k(t)]^2 \partial t = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} [f(t) - f_a(t)]^2 \partial t \quad (3-14)$$

### III.2.3 Aplicación de la aproximación de funciones

En la Tabla 3-3, se muestra una serie de m datos discretos, a los cuales se les aproximará una función analítica mediante el Análisis de Fourier. Como puede observarse en la Figura 3-2, estos datos corresponden a una recta a 45°, cuya función analítica es  $f(t)=t$ .

Para encontrar la función aproximada a  $f(t)=t$ , se utilizará la forma de la Serie de Fourier, expresada en la ecuación (3-9).

TABLA 3-3.- DATOS DISCRETOS DE LA FUNCIÓN  $F(T)=T$

m	t	f(t) real
1	$-\pi$	$-\pi$
2	$-0.9\pi$	$-0.9\pi$
3	$-0.8\pi$	$-0.8\pi$
4	$-0.7\pi$	$-0.7\pi$
5	$-0.6\pi$	$-0.6\pi$
6	$-0.5\pi$	$-0.5\pi$
7	$-0.4\pi$	$-0.4\pi$
8	$-0.3\pi$	$-0.3\pi$
9	$-0.2\pi$	$-0.2\pi$
10	$-0.1\pi$	$-0.1\pi$
11	0	0
12	$0.1\pi$	$0.1\pi$
13	$0.2\pi$	$0.2\pi$
14	$0.3\pi$	$0.3\pi$
15	$0.4\pi$	$0.4\pi$
16	$0.5\pi$	$0.5\pi$
17	$0.6\pi$	$0.6\pi$
18	$0.7\pi$	$0.7\pi$
19	$0.8\pi$	$0.8\pi$
20	$0.9\pi$	$0.9\pi$
21	$\pi$	$\pi$

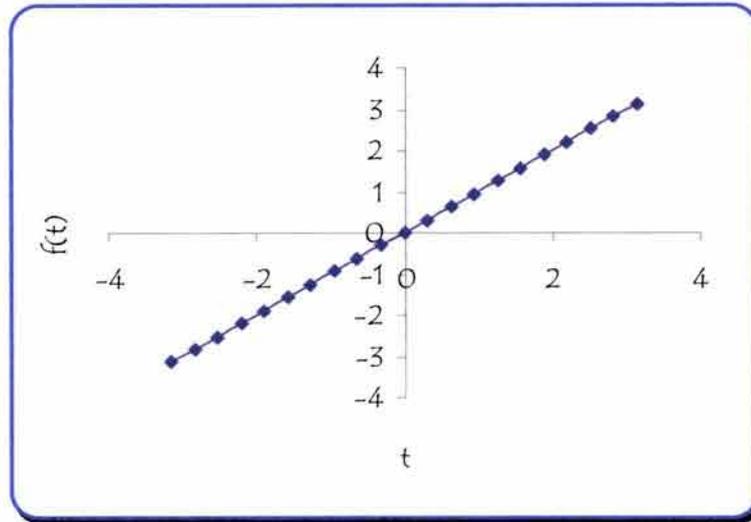


FIGURA 3-2.- REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA FUNCIÓN  $f(t)=t$

Como la función real  $f(t)=t$ , está definida para valores de  $t$  desde  $-\pi$  hasta  $\pi$ , el periodo  $T_0$  de la función es  $2\pi$ , por lo que su frecuencia fundamental, es  $f_0 = 1/2\pi$ .

Sustituyendo estos valores en la ecuación (3-2)

$$a_0 = \frac{2}{2\pi} \int_{-2\pi/2}^{2\pi/2} t \partial t \quad (3-15)$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} t^2 \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi} (\pi^2 - \pi^2) = 0$$

Análogamente utilizando la ecuación (3-3)

$$a_n = \frac{2}{2\pi} \int_{-2\pi/2}^{2\pi/2} t \cos\left(2\pi n \left(\frac{1}{2\pi}\right) t\right) \partial t \quad (3-16)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \cos(nt) \partial t$$

Por partes:

$$\begin{aligned}u &= t & dv &= \cos(nt) \\ du &= dt & v &= \frac{\text{sen}(nt)}{n}\end{aligned}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{t}{n} \text{sen}(nt) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\text{sen}(nt)}{n} dt \right] = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{t}{n} \text{sen}(nt) + \frac{1}{n^2} \cos(nt) \right]_{-\pi}^{\pi} \quad (3-17)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\pi}{n} \text{sen}(n\pi) + \frac{1}{n^2} \cos(n\pi) + \frac{\pi}{n} \text{sen}(-n\pi) - \frac{1}{n^2} \cos(-n\pi) \right] = 0 \quad (3-18)$$

Partiendo de la ecuación (3-4)

$$b_n = \frac{2}{2\pi} \int_{-2\pi/2}^{2\pi/2} t \text{sen} \left( 2\pi n \left( \frac{1}{2\pi} \right) t \right) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \text{sen}(nt) dt \quad (3-19)$$

Por partes:

$$\begin{aligned}u &= t & dv &= \text{sen}(nt) \\ du &= dt & v &= -\frac{\cos(nt)}{n}\end{aligned}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left[ -\frac{t}{n} \cos(nt) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} -\frac{\cos(nt)}{n} dt \right] = \frac{1}{\pi} \left[ -\frac{t}{n} \cos(nt) + \frac{1}{n^2} \text{sen}(nt) \right]_{-\pi}^{\pi} \quad (3-20)$$

$$b_n = -\frac{2}{n} \cos(n\pi) + \frac{2}{\pi n^2} \text{sen}(n\pi) \quad (3-21)$$

Ya que  $\text{sen}(n\pi) = 0$  y  $\cos(n\pi) = (-1)^n$  para  $n = 1, 2, 3, \dots$

$$b_n = -\frac{2}{n} (-1)^n \quad (3-22)$$

En resumen, los coeficientes  $a_0$ ,  $a_n$  y  $b_n$  de la serie son:

$$a_0 = 0$$

$$a_n = 0 \cdot \forall n$$

$$b_n = -\frac{2}{n}(-1)^n$$

En la Tabla 3-4, se muestran los coeficientes  $b_n$  de la serie para diferentes valores de  $n$ .

TABLA 3-4.- COEFICIENTES  $B_N$  DE LA SERIE DE FOURIER PARA LA FUNCIÓN  $F(T)=T$ .

$n$	$b_n$
1	2
2	-1
3	0.6667
4	-0.5
5	0.4
6	-0.3333
7	0.2857
8	-0.25
9	0.2222
10	-0.2

Sustituyendo los valores de los coeficientes  $a_0$ ,  $a_n$  y  $b_n$  en la ecuación (3-9), se encuentra que la función aproximada de  $f(t)=t$ , es:

$$f_a(t) = \frac{1}{2}(0) + \sum_{n=1}^k (0) \cos(2\pi n f_0 t) - \frac{2}{n} (-1)^n \text{sen}(2\pi n f_0 t) \quad (3-23)$$

Como la función real  $f(t)=t$ , está definida para valores de  $t$  desde  $-\pi$  hasta  $\pi$ , el periodo  $T_0$  de la función, es  $2\pi$ , por lo que su frecuencia fundamental, es  $f_0 = 1/2\pi$ , Sustituyendo este valor en la ecuación (3-23), se tiene:

$$f_a(t) = \sum_{n=1}^k -\frac{2}{n} (-1)^n \text{sen}(nt) \quad (3-24)$$

Si se desarrolla cada sumando para valores de  $n$  desde 1 hasta 10, se tienen las siguientes funciones:

TABLA 3-5.- SUMANDOS DE LA SERIE DE FOURIER DE LA FUNCIÓN  $F(T)=T$  PARA DIFERENTES VALORES DE  $N$ .

$n$	Función
1	$2\text{sen}(t)$
2	$-\text{sen}(2t)$
3	$\frac{2}{3}\text{sen}(3t)$
4	$-\frac{1}{2}\text{sen}(4t)$
5	$\frac{2}{5}\text{sen}(5t)$
6	$-\frac{1}{3}\text{sen}(6t)$
7	$\frac{2}{7}\text{sen}(7t)$
8	$-\frac{1}{4}\text{sen}(8t)$
9	$\frac{2}{9}\text{sen}(9t)$
10	$-\frac{1}{5}\text{sen}(10t)$

En la Figura 3-3, se muestra la representación gráfica de cada uno de los sumandos mostrados en la tabla 3-5, para  $t \in (-\pi, \pi)$ .

Sumando las señales de la Figura 3-3, se obtiene la construcción de la función aproximada, La cual se muestra en la Figura 3-4, para  $k = 2, 4, 6, 8$  y 10.

Como puede observarse, al incrementarse el número de coeficientes sumados, que representan funciones sinusoidales, se aumenta la aproximación a la señal original.

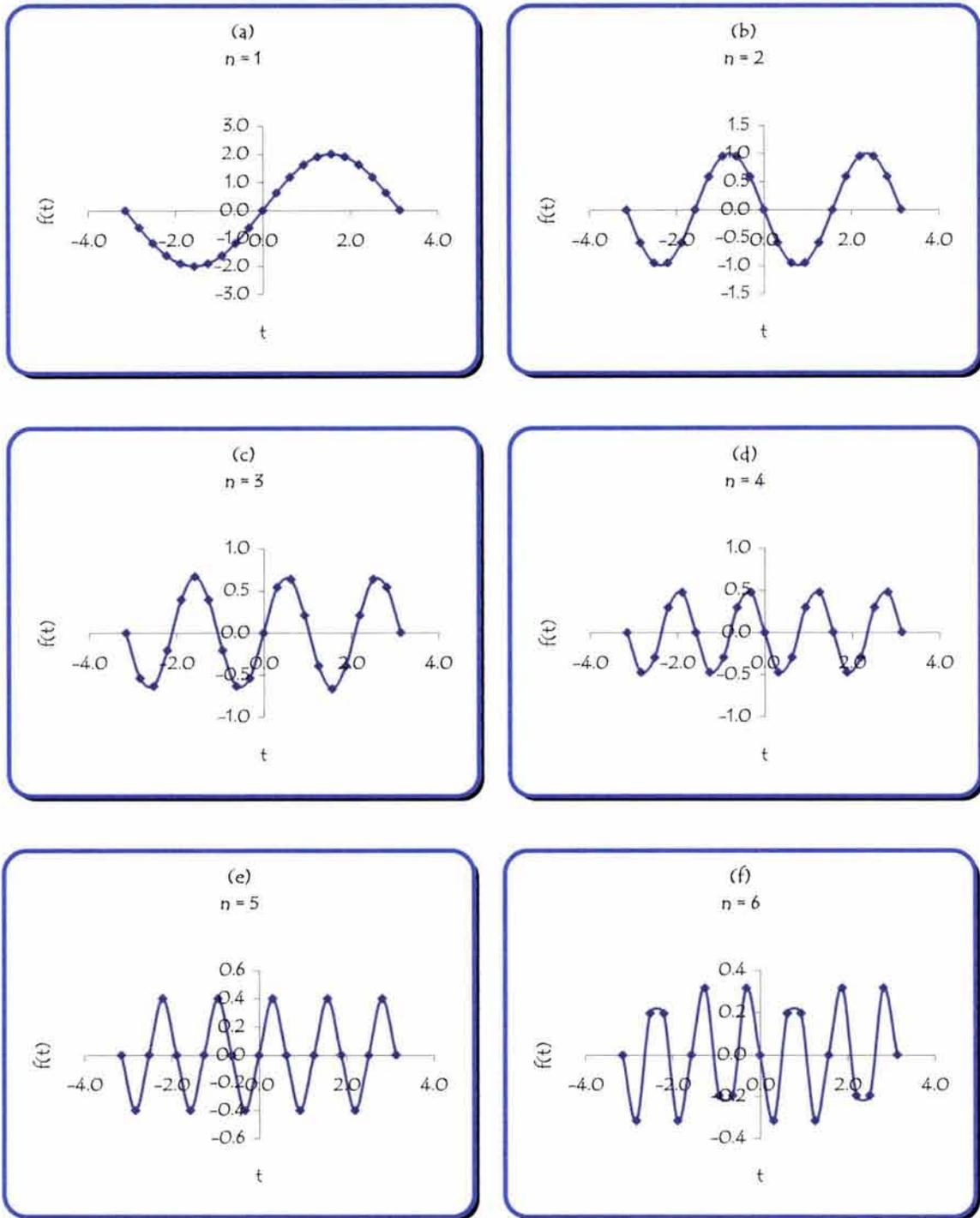


FIGURA 3-3.- REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LOS SUMANDOS DE LA SERIE DE FOURIER, DE LA FUNCIÓN  $f(t)=t$ , PARA DIFERENTES VALORES DE N.

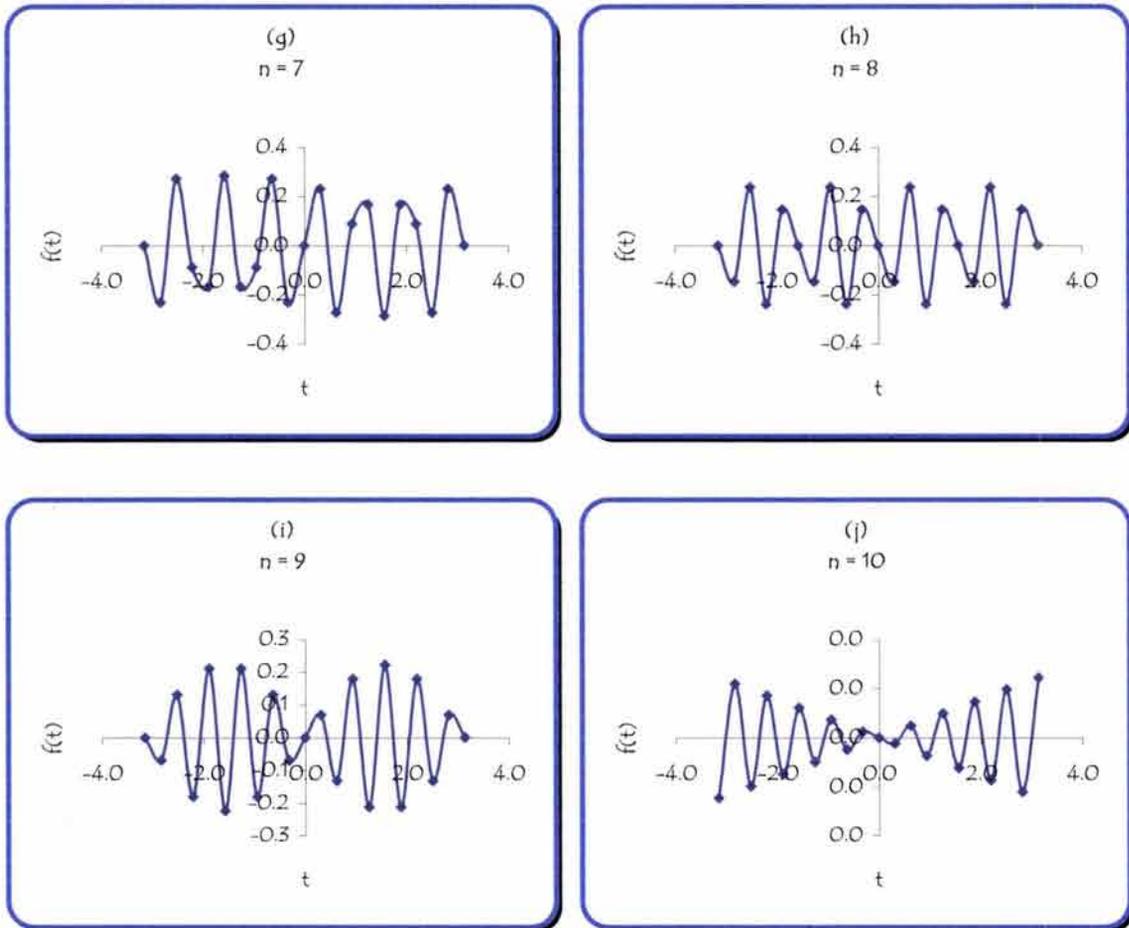


FIGURA 3-3.- CONTINUACIÓN.

Las diferentes funciones que constituyen los sumandos de la serie de Fourier para la función  $f(t)=t$ , son de tipo senoidal; dado que el  $\text{seno}(m\pi)=0$ , para  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Sucede entonces, que el valor de todas las funciones es 0 para los extremos  $\pi$  y  $-\pi$ ; al ser sumadas el valor de la función aproximada, continúa siendo 0 en los mismos extremos.

El error cuadrático medio mínimo  $\varepsilon^2$  quedo definido por la ecuación (3-14). Para el caso específico de la función  $f(t)=t$  es:

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{3} \pi^2 - 2 \sum_{n=1}^k \frac{1}{n^2} \quad (3-25)$$

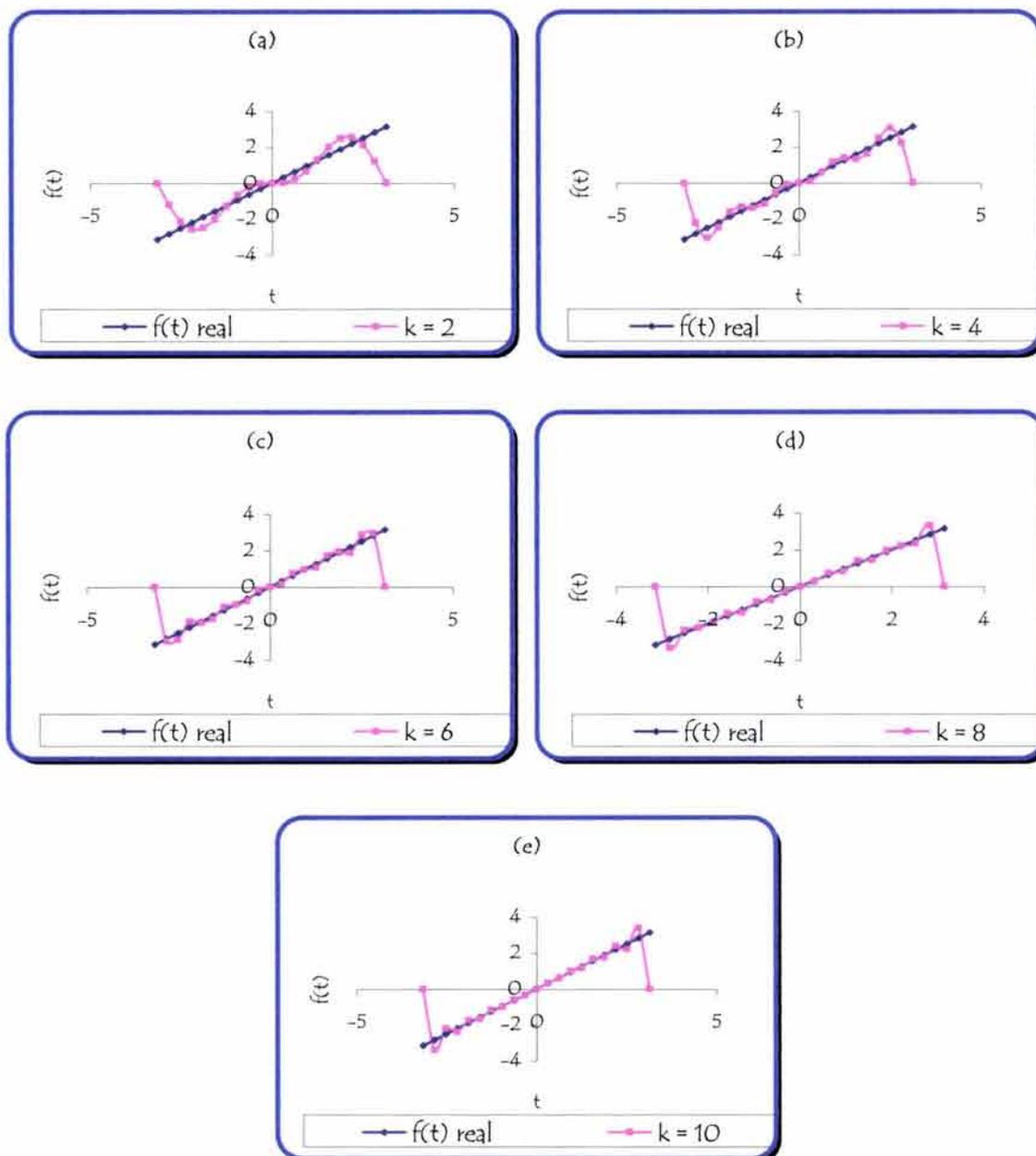


FIGURA 3-4.- FUNCIÓN APROXIMADA A  $f(t)=t$  PARA DIFERENTES VALORES DE  $k$ .

El error cuadrático medio  $\epsilon^2$ , puede obtenerse a partir del promedio o media aritmética del  $\epsilon^2$ , para cada uno de los puntos que ajustan la función.

La diferencia que existe entre la segunda y tercer columna de la tabla 3-6, radica en que  $\epsilon^2$ , mínimo fue obtenido analíticamente, es decir, es el menor error que puede tenerse; el  $\epsilon^2$  obtenido puntualmente, se encuentra afectado por otras

imprecisiones, como el error de precisión al realizar los cálculos, truncamiento o redondeo de las cifras.

TABLA 3-6.- ERROR CUADRÁTICO MEDIO  $\epsilon^2$ .

k	$\epsilon^2$ mínimo	$\epsilon^2$ puntual
2	0.790	1.301
4	0.443	1.034
6	0.307	0.971
8	0.235	0.972
10	0.190	0.885

En la Tabla 3-6 se muestra  $\epsilon^2$ , para diferentes valores de k. En ésta se corrobora, que tal como se observó en la Figura 3-4, si se aumenta el número k de coeficientes, el error tiende a disminuir; por lo que si k tiende a  $\infty$ , entonces se representa a la función original y no solo una aproximación. La función f(t), queda representada totalmente mediante la Serie de Fourier.

### III.3 LA TRANSFORMADA DE FOURIER

Una transformada, es una herramienta matemática, que nos facilita el tratamiento analítico de algún problema, simplificando su solución. Por ejemplo, si se trata de determinar el cociente  $y = x / z$ , cuando se requiere una gran exactitud y no se cuenta con una computadora; el análisis convencional del problema, nos llevaría a determinar el valor de "y" por medio de una división "a mano" muy larga, y si este procedimiento se requiere realizar en reiteradas ocasiones, se consumirá mucho tiempo en este proceso; si se optara por realizar una transformación del problema utilizando las propiedades de los logaritmos, el problema se reduciría a la utilización de las tablas matemáticas y una simple resta. En la Figura 3-5, se muestra el diagrama que relaciona ambos procesos.

En general, las transformadas son técnicas simplificadas para la resolución de problemas, una de estas técnicas, es la transformada de Fourier, que es la que

se utilizará en este trabajo, para el análisis de los datos de las pruebas de presión en el dominio de la frecuencia.

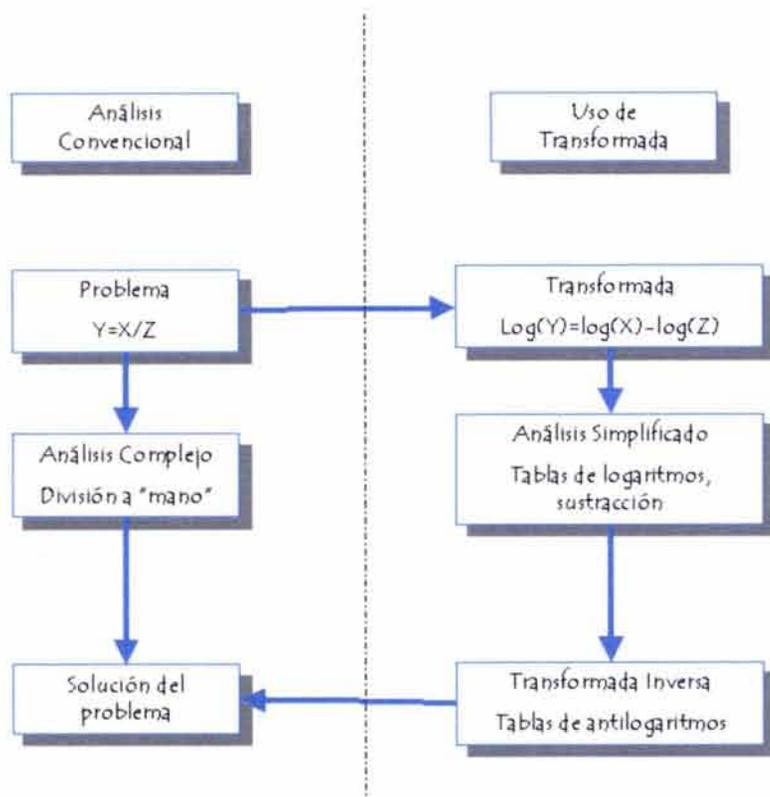


FIGURA 3-5.- COMPARACIÓN DEL ANÁLISIS CONVENCIONAL PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y EL USO DE TRANSFORMADAS.

En esencia, la transformada de Fourier de una función periódica, es la descomposición exacta de ésta, en la suma de componentes sinusoidales de diferentes frecuencias. La representación gráfica de la transformada de Fourier, es un diagrama que muestra la amplitud y frecuencia de cada uno de los componentes sinusoidales. Esta interpretación de la Transformada de Fourier, se muestra en la Figura 3-6.

Como puede observarse en la Figura 3-6, la función  $f(t)$  definida desde  $-\infty$  hasta  $\infty$ , es descompuesta en dos funciones sinusoidales, cuya suma es igual a la función  $f(t)$  original. En el diagrama de la Transformada de Fourier, se muestran impulsos que corresponden a la frecuencia y amplitud de las componentes

sinusoidales, en el caso de la componente a, tiene un periodo igual a  $T_0$ , por lo que, su frecuencia es igual a  $1/T_0$  y una amplitud de  $1/2$ ; en el caso de la componente b, su periodo es de  $T_0/3$ , y su frecuencia es  $3/T_0$ , con una amplitud igual a  $1/4$ .

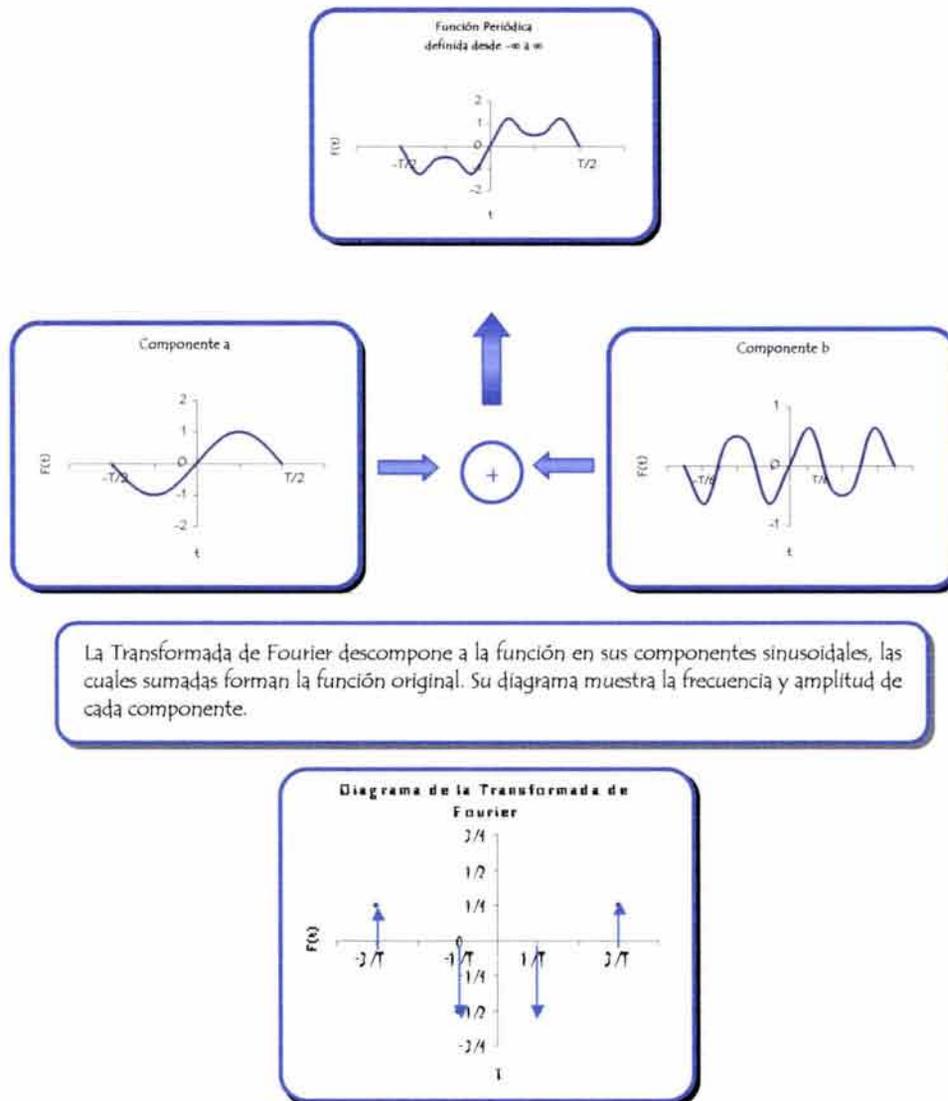


FIGURA 3-6.- INTERPRETACIÓN DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER.

La Transformada de Fourier, identifica la frecuencia de diferentes componentes sinusoidales, que sumadas, forman una función periódica dada. Matemáticamente, esta relación se define, como:

$$F(f) = \mathfrak{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j2\pi ft} \, dt \quad (3-26)$$

El símbolo  $\mathfrak{F}[\ ]$  denota la operación de transformación, análogamente el símbolo  $\mathfrak{F}^{-1}$ , denota la operación inversa, es decir, la Transformada Inversa de Fourier, la cual lleva a una función dada del dominio de la frecuencia al dominio del tiempo, y matemáticamente se expresa, como:

$$f(t) = \mathfrak{F}^{-1}[F(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} F(f) \cdot e^{j2\pi ft} \, df \quad (3-27)$$

Se observa que las ecuaciones (3-26) y (3-27), son análogas entre sí; A esta relación se le conoce como identidad de Fourier. Y a las ecuaciones (3-26) y (3-27) se les llama par de Transformación de Fourier.

Hasta ahora, se ha dado la interpretación de la Transformada de Fourier de una función periódica, pero que ocurre, si la función a transformar no es periódica, entonces, su Transformada de Fourier será una función continua de la frecuencia (f). En la Figura 3-7, se muestra la Transformada de Fourier de una función no periódica.

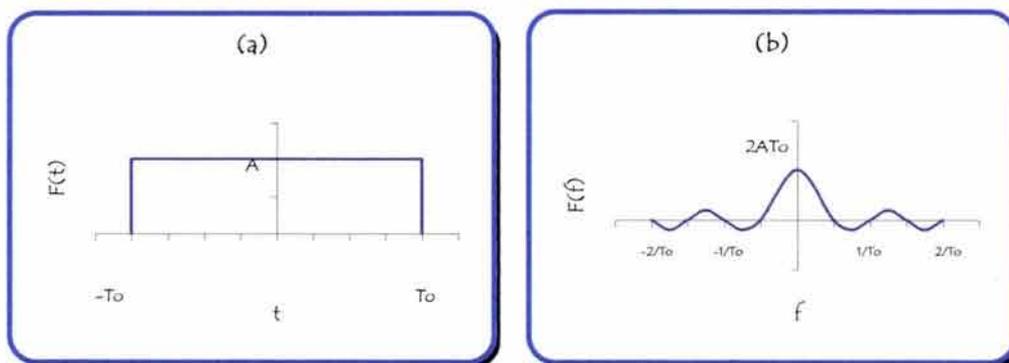


FIGURA 3-7.- TRANSFORMADA DE FOURIER DE UNA FUNCIÓN NO PERIÓDICA

La Transformada de Fourier, indica que la frecuencia de cada componente sinusoidal, no se distingue con valores puntuales, como en el caso de las funciones periódicas, por lo tanto, todas las frecuencias deben ser consideradas. En este caso, la Transformada de Fourier, es la representación de la función en el dominio de la frecuencia, y nos permite analizarla desde otro punto de vista.

### III.3.1 La existencia de la Transformada de Fourier.

La Transformada de Fourier, está bien definida para la mayoría de las funciones que se encuentran en la práctica del análisis científico. Sin embargo, existen algunas condiciones, para asegurar la existencia de la Transformada de Fourier. A continuación se mencionan estas condiciones.

Condición 1. Suficiente pero no necesaria. Si  $h(t)$  es integrable, tal que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty \quad (3-28)$$

entonces, existe la Transformada de Fourier  $H(f)$  y satisface la Transformada inversa.

Condición 2. Si  $h(t) = \beta(t) \text{ sen}(2\pi ft + \alpha)$ , donde  $f$  y  $\alpha$  son constantes arbitrarias. Si  $\beta(t+k) < \beta(t)$ , y para  $|t| > \lambda > 0$ , la función  $h(t)/t$ , es completamente integrable en el sentido de la ecuación (3-3). Entonces existe la Transformada de Fourier  $H(f)$  y satisface la Transformada inversa.

### III.3.2 Propiedades de la Transformada de Fourier.

En este apartado se describen las propiedades básicas de la Transformada de Fourier, las cuales serán de gran utilidad más adelante, al analizar los datos de las pruebas de presión en el dominio de la frecuencia.

**Linealidad.** Si  $x(t)$  y  $y(t)$ , tienen Transformada de Fourier  $X(f)$  y  $Y(f)$  respectivamente, entonces la suma  $x(t) + y(t)$  tiene Transformada de Fourier  $X(f)+Y(f)$ . Ya que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} [x(t) + y(t)] e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt + \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j2\pi ft} dt = X(f) + Y(f) \quad (3-29)$$

**Simetría.** Si  $H(f) = \mathfrak{F}[h(t)]$  entonces  $h(-f) = \mathfrak{F}[H(t)]$ , esto es:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) e^{j2\pi ft} df \quad (3-30)$$

$$h(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) e^{-j2\pi ft} df \quad (3-31)$$

Intercambiando t por f:

$$h(-f) = \int_{-\infty}^{\infty} H(t) e^{-j2\pi ft} dt = \mathfrak{F}[H(t)] \quad (3-32)$$

**Escalamiento.** Si la Transformada de Fourier de  $h(t)$  es  $H(f)$ , entonces la Transformada de Fourier de  $h(kt)$ , donde  $k$  es una constante real mayor que cero, se determina sustituyendo  $t'=kt$  en la integral de Fourier.

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(kt) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} h(t') e^{-j2\pi t'(f/k)} \frac{dt'}{k} = \frac{1}{k} H\left(\frac{f}{k}\right) \quad (3-33)$$

Análogamente si la transformada inversa de Fourier de  $H(f)$  es  $h(t)$ , la transformada inversa de Fourier de  $H(kf)$ ; donde  $k$  es una constante real, es:

$$\mathfrak{F}^{-1}[H(kf)] = \frac{1}{k} h\left(\frac{t}{k}\right) \quad (3-34)$$

La propiedad de escalonamiento, afirma que la contracción de una función en el dominio del tiempo, es equivalente a la expansión de la misma en el dominio de la frecuencia y viceversa.

*Desplazamiento.* Si la función  $h(t)$ , es desplazada por una constante  $t_0$ , entonces sustituyendo  $s=t-t_0$ , la Transformada de Fourier de  $h(t-t_0)$ , es:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t-t_0) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} h(s) e^{-j2\pi f(s+t_0)} ds = e^{-j2\pi f t_0} H(f) \quad (3-35)$$

Análogamente la Transformada Inversa de Fourier de la función  $H(f)$ , desplazada por una constante  $f_0$ , es:

$$\mathfrak{F}^{-1}[H(f-f_0)] = e^{j2\pi t f_0} h(t) \quad (3-36)$$

### III.3.3 Convolución

En este apartado se describe brevemente la propiedad de convolución, la cual es de gran importancia en el Análisis de Fourier. La convolución de dos funciones, es un concepto importante en diversos campos de la ciencia; sin embargo, su significado resulta un poco difícil visualizar y sus verdaderas implicaciones.

Sean  $f_1(t)$  y  $f_2(t)$  dos funciones dadas. La convolución de  $f_1(t)$  y  $f_2(t)$ , está definida por la función:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(t-x) dx \quad (3-37)$$

La cual se expresa simbólicamente, como:

$$h(t) = f_1 * f_2 \quad (3-38)$$

Algunas propiedades de la convolución, son que cumple con las leyes conmutativa y asociativa, que se expresan respectivamente, como:

$$\begin{aligned} f_1 * f_2 &= f_2 * f_1 \\ [f_1 * f_2] * f_3 &= f_1 * [f_2 * f_3] \end{aligned} \quad (3-39)$$

La convolución de cualquier función  $f(t)$  con la función impulso unitario  $\delta(t)$ , es la misma función  $f(t)$ .

La función impulso unitario  $\delta(t)$ , conocida también como función delta, se puede definir de varias maneras. Generalmente se expresa mediante la relación:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq 0 \\ \infty & \text{si } t = 0 \end{cases} \quad (3-40)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t) dt = 1; \quad \varepsilon > 0 \quad (3-41)$$

La ecuación (3-40), indica que  $\delta(t)$ , es cero excepto en  $t=0$ , donde se hace infinita, de tal manera que cumple con (3-41).

Debido a que la convolución no es una operación sencilla, sus teoremas, tanto en el tiempo como en la frecuencia, son de gran utilidad.

El *Teorema de Convolución en el Tiempo*, afirma que si  $\mathfrak{F}[f_1(t)] = F_1(f)$  y  $\mathfrak{F}[f_2(t)] = F_2(f)$ , entonces:

$$\mathfrak{F}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(f) \cdot F_2(f) \quad (3-42)$$

El *Teorema de Convolución en la Frecuencia*, afirma que si  $\mathfrak{F}^{-1}[F_1(f)] = f_1(t)$  y  $\mathfrak{F}^{-1}[F_2(f)] = f_2(t)$ , entonces:

$$\mathfrak{T}^{-1}[F_1(f) * F_2(f)] = f_1(t) \cdot f_2(t) \quad (3-43)$$

o bien:

$$\mathfrak{T}[f_1(t) \cdot f_2(t)] = F_1(f) * F_2(f) \quad (3-44)$$

Estos dos teoremas, simplifican en gran medida, la operación de convolución de dos funciones, ya que convierten una integral en una simple multiplicación.

La Figura 3-8, presenta en forma gráfica, la respuesta de presión del yacimiento, denominado el sistema, ante una secuencia de perturbaciones, indicadas como impulsos correspondientes a los cambios de gasto en el pozo activo.

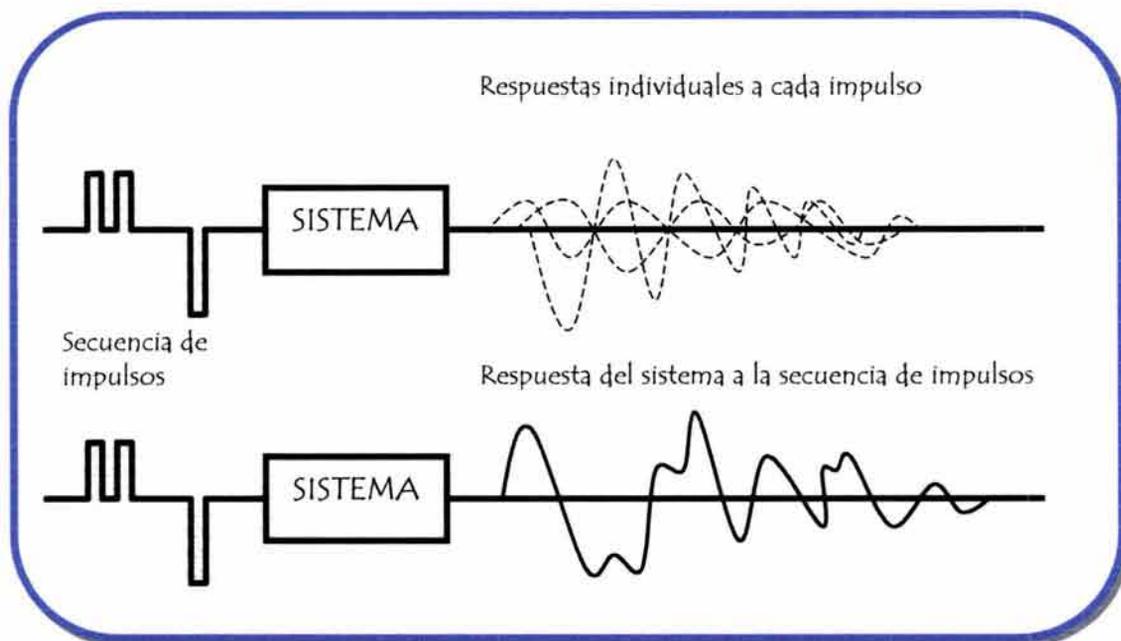


FIGURA 3-8.- REPRESENTACIÓN ESQUEMÁTICA DEL COMPORTAMIENTO DEL SISTEMA ANTE UNA SECUENCIA DE IMPULSOS.

Puede observarse que la respuesta de presión, corresponde a la suma o superposición de respuestas individuales, lo cual se conoce matemáticamente como convolución.

### III.4 OTRAS FORMAS DE REPRESENTAR LA TRANSFORMADA DE FOURIER

En la actualidad se expresa a la transformada de Fourier, en función de la frecuencia angular  $\omega$ , en radianes, la cual se define como  $\omega=2\pi f$ . A la frecuencia angular, cuyo periodo es igual al periodo T de la función, se le llama frecuencia angular fundamental, esta es  $\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi / T$ .

El par de transformación de Fourier, se define entonces como:

$$H(\omega) = a_1 \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3-45)$$

$$h(t) = a_2 \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3-46)$$

Donde los coeficientes  $a_1$  y  $a_2$  toman diferentes valores, dependiendo del autor; algunas veces  $a_1=1$ ,  $a_2=1/2\pi$ ; otras  $a_1 = a_2 = 1/\sqrt{2\pi}$ ; o  $a_1=1/2\pi$ ,  $a_2=1$ . Los valores de  $a_1$  y  $a_2$ , deben cumplir con la condición de que su producto  $a_1 a_2$  sea igual a  $1/2\pi$ .

Debido a que la Transformada de Fourier, es en general compleja, se puede representar de otra forma, separándola en sus componentes real e imaginaria, por conveniencia utilizaremos esta manera en el resto del trabajo.

$$\Im[h(t)] = H(f) = R(f) + jI(f) \quad (3-47)$$

Para obtener las componentes real e imaginaria de la Transformada de Fourier, se utilizarán las identidades de Euler:

$$e^{-j2\pi ft} = \cos(2\pi ft) - j\text{sen}(2\pi ft) \quad (3-48)$$

$$e^{j2\pi ft} = \cos(2\pi ft) + j\text{sen}(2\pi ft) \quad (3-49)$$

Por lo que la Transformada de Fourier de una función real  $f(t)$ , puede escribirse como:

$$\mathfrak{F}[h(t)] = H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cos(2\pi ft) \partial t - j \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \text{sen}(2\pi ft) \partial t \quad (3-50)$$

Por lo que la parte real de la transformada de Fourier de una función real, es:

$$R(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cos(2\pi ft) \partial t \quad (3-51)$$

y la parte imaginaria:

$$I(f) = - \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \text{sen}(2\pi ft) \partial t \quad (3-52)$$

### III.5 LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE FUNCIONES PARES E IMPARES

Las funciones pares e impares, representan un caso especial dentro del análisis de Fourier, por lo que, es importante definir en primer lugar, cuáles son las funciones de estos dos tipos.

Se dice que una función  $f(t)$ , es par si satisface la condición:

$$f(-t) = f(t) \quad (3-53)$$

y se dice que es impar, si:

$$f(-t) = -f(t) \quad (3-54)$$

Se debe notar, que una función par, es simétrica con respecto del eje vertical en el origen, mientras que una función impar, es antisimétrica respecto del eje vertical en el origen; como se muestra en la Figura 3-9.

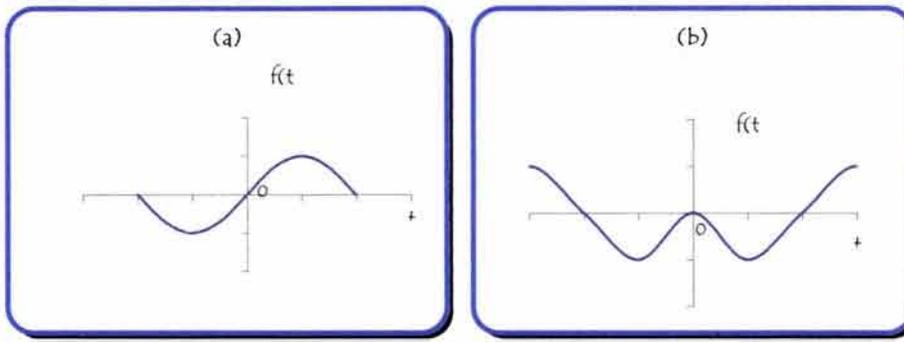


FIGURA 3-9.- A) UNA FUNCIÓN IMPAR, B) UNA FUNCIÓN PAR.

Enseguida se mencionan algunas propiedades de las funciones pares e impares:

- El producto de dos funciones pares, o de dos funciones impares; es una función par.
- El producto de una función par y una impar, es una función impar.
- Si  $f(t)$  es una función par entonces:

$$\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt \quad (3-55)$$

- Si la función  $f(t)$  es impar, entonces:

$$\int_{-a}^a f(t) \partial t = 0$$

$$f(0) = 0 \quad (3-56)$$

Habiendo definido a las funciones par e impar, se observa que la función  $\cos(2\pi ft)$ , es una función par de  $t$  y  $f$ , y que la función  $\text{sen}(2\pi ft)$ , es una función impar de  $t$  y  $f$ .

Analizando la Transformada de Fourier de las funciones par e impar, se tiene que:

Si  $f(t)$ , es una función par, entonces la función a integrar para obtener la parte real de su Transformada de Fourier  $f(t)\cos(2\pi ft)$ , es una función par, ya que como se dijo con anterioridad, la función  $\cos(2\pi ft)$ , es par y el producto de dos funciones pares, es otra función par. Ahora bien, la función  $f(t)\text{sen}(2\pi ft)$  es una función impar, debido a que el producto de una función par y una impar, es una función impar.

Por lo tanto, la Transformada de Fourier de  $f(t)$ , es:

$$\mathfrak{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(2\pi ft)\partial t - j \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\text{sen}(2\pi ft)\partial t = 2 \int_0^{\infty} f(t)\cos(2\pi ft)\partial t - 0 \quad (3-57)$$

Entonces, se puede afirmar, que la Transformada de Fourier  $H(f)$  de una función par  $h(t)$ , es una función real y es igual a:

$$\mathfrak{F}[h(t)] = H(f) = 2 \int_0^{\infty} h(t)\cos(2\pi ft)\partial t \quad (3-58)$$

Haciendo un desarrollo similar, si  $f(t)$ , es una función impar; la función  $f(t)\cos(2\pi ft)$  es impar, y  $f(t)\text{sen}(2\pi ft)$  es par. Por lo que, la Transformada de Fourier de  $f(t)$ , es:

$$\mathfrak{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(2\pi ft) \partial t - j \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \text{sen}(2\pi ft) \partial t = 0 - j2 \int_0^{\infty} f(t) \text{sen}(2\pi ft) \partial t \quad (3-59)$$

Por lo que se afirma, que la Transformada de Fourier  $H(f)$  de la función impar  $h(t)$ , es imaginaria e igual a:

$$\mathfrak{F}[h(t)] = H(f) = -2j \int_0^{\infty} h(t) \text{sen}(2\pi ft) \partial t \quad (3-60)$$

### III.6 TEORÍA DE MUESTREO.

Hasta ahora, se ha mostrado el Análisis de Fourier, para funciones continuas en el tiempo; sin embargo, en la práctica es más común trabajar con funciones discretas; esto también debido a que la solución numérica de la Transformada de Fourier, a la que se puede llegar con el uso de las actuales computadoras, implica discretizar las funciones. En este apartado, se muestran las bases matemáticas, para la obtención de muestras de una función continua.

Si la función  $h(t)$ , es continua en  $t=T$ , entonces la muestra de  $h(t)$  al tiempo  $T$  se expresa, como:

$$h(t) = h(t)\delta(t - T) = h(T)\delta(t - T) \quad (3-61)$$

El impulso que ocurre al tiempo  $T$ , tiene la misma amplitud que la función  $h(t)$ , al tiempo  $T$ . Generalizando, si  $h(t)$ , es continua en  $t = nT$  para  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , entonces,

$$h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(nT)\delta(t - nT) \quad (3-62)$$

La ecuación anterior, es llamada función muestreada  $h(t)$ , con intervalo de muestreo  $T$ . La función muestreada  $h(t)$ , es entonces una secuencia infinita de impulsos equidistantes, cuya amplitud está dada por el valor de  $h(t)$ ,

correspondiente al tiempo en que ocurre el impulso. La Figura 3-10, ilustra gráficamente el concepto de muestreo.

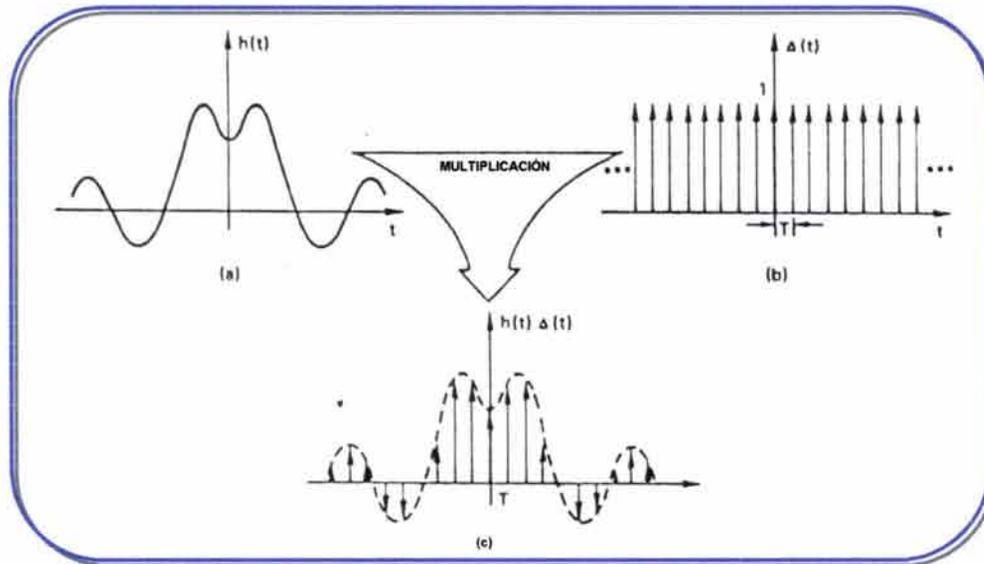


FIGURA 3-10.- MUESTREO DE LA FUNCIÓN CONTINUA  $h(t)$ .

Debido a que la ecuación (3-62), es el producto de la función continua  $h(t)$  y de una secuencia de impulsos, se puede emplear el Teorema de Convención en la Frecuencia para obtener la Transformada de Fourier de la función muestreada. En la Figura 3-11, se ilustra este teorema.

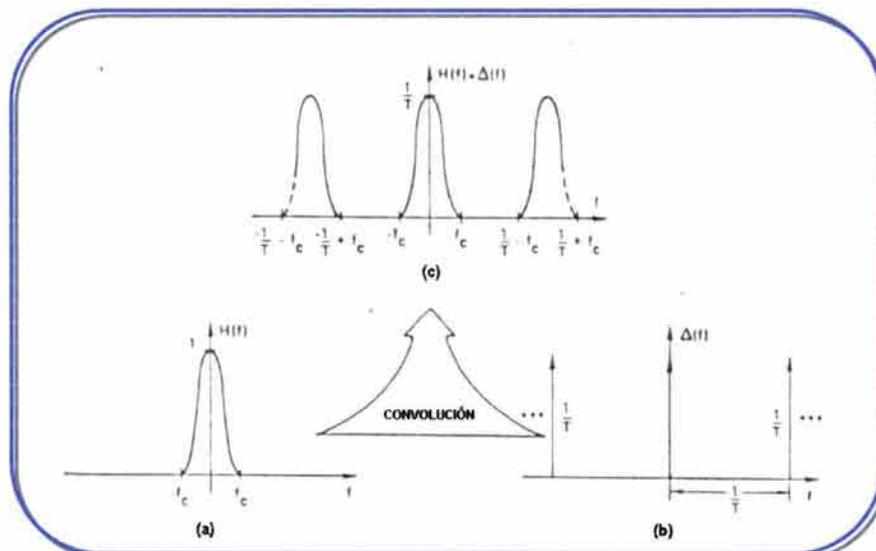


FIGURA 3-11.- TRANSFORMADA DE FOURIER DE UNA FUNCIÓN MUESTREADA, APLICANDO EL TEOREMA DE CONVOLUCIÓN EN LA FRECUENCIA.

La Figura 3-10 (c), es igual al producto de la función continua  $h(t)$ , mostrada en la Figura 3-10 (a) y la secuencia de impulsos  $\Delta(t)$ , ilustrada en la Figura 3-10 (b). A  $\Delta(t)$ , se le llama función de muestreo, la notación  $\Delta(t)$  implica que existe una secuencia infinita de impulsos separados por  $T$ . La Transformada de Fourier de  $h(t)$  y  $\Delta(t)$ , se muestran en la Figura 3-11 (a) y (b) respectivamente. Se hace notar que la Transformada de Fourier de la función de muestreo  $\Delta(t)$ , es  $\Delta(f)$ , a esta función se le denomina función de muestreo en la frecuencia. Aplicando el Teorema de Convención en la Frecuencia se obtiene la transformada de Fourier de la función muestreada  $h(t)$  (Figura 3-10 (c)). Dicha función es el resultado de la convolución de las funciones  $H(f)$  y  $\Delta(f)$ , (Figura 3-11 (a) y (b)). Finalmente, se tiene que la función  $H(f)*\Delta(f)$ , (Figura 3-11 (c)), es la Transformada de Fourier de la función muestreada  $h(t)$  (Figura 3-10 (c)).

La Transformada de Fourier de la función muestreada, es una función periódica, donde cada periodo es igual a la Transformada de Fourier de la función continua  $h(t)$ . Esta afirmación, es válida sólo si el intervalo de muestreo  $T$ , es lo suficientemente pequeño.

Si el intervalo de muestreo  $T$ , es muy grande, se obtienen los resultados mostrados en la Figura 3-12. Debido al incremento de  $T$ , los impulsos equidistantes de  $\Delta f$ , están menos espaciados, por lo que, el resultado de la convolución de éstos con la función  $H(f)$ , es el traslape de los periodos que componen la función; a esta distorsión de la Transformada de Fourier deseada, se le conoce como alisamiento.

Como puede observarse, es muy importante el valor del intervalo de muestreo  $T$ ; el teorema de muestreo uniforme, describe cual es la condición que se debe cumplir para asegurar que no exista alisamiento.

El teorema de muestreo uniforme en el tiempo, afirma que si una función  $f(t)$ , no tiene componentes de frecuencias superiores a  $f_m$  ciclos por

segundo, entonces,  $f(t)$ , se puede determinar por completo, mediante sus valores separados por intervalos uniformes menores de  $1/(2 f_m)$  segundos.

Debido a que  $f(t)$ , no tiene componentes frecuenciales superiores a  $f_m$  ciclos por segundo, entonces  $f(t)$ , es una función de banda limitada.

Al intervalo máximo de muestreo  $T=1/(2 f_m)$ , se le denomina algunas veces como Intervalo de Nyquist.

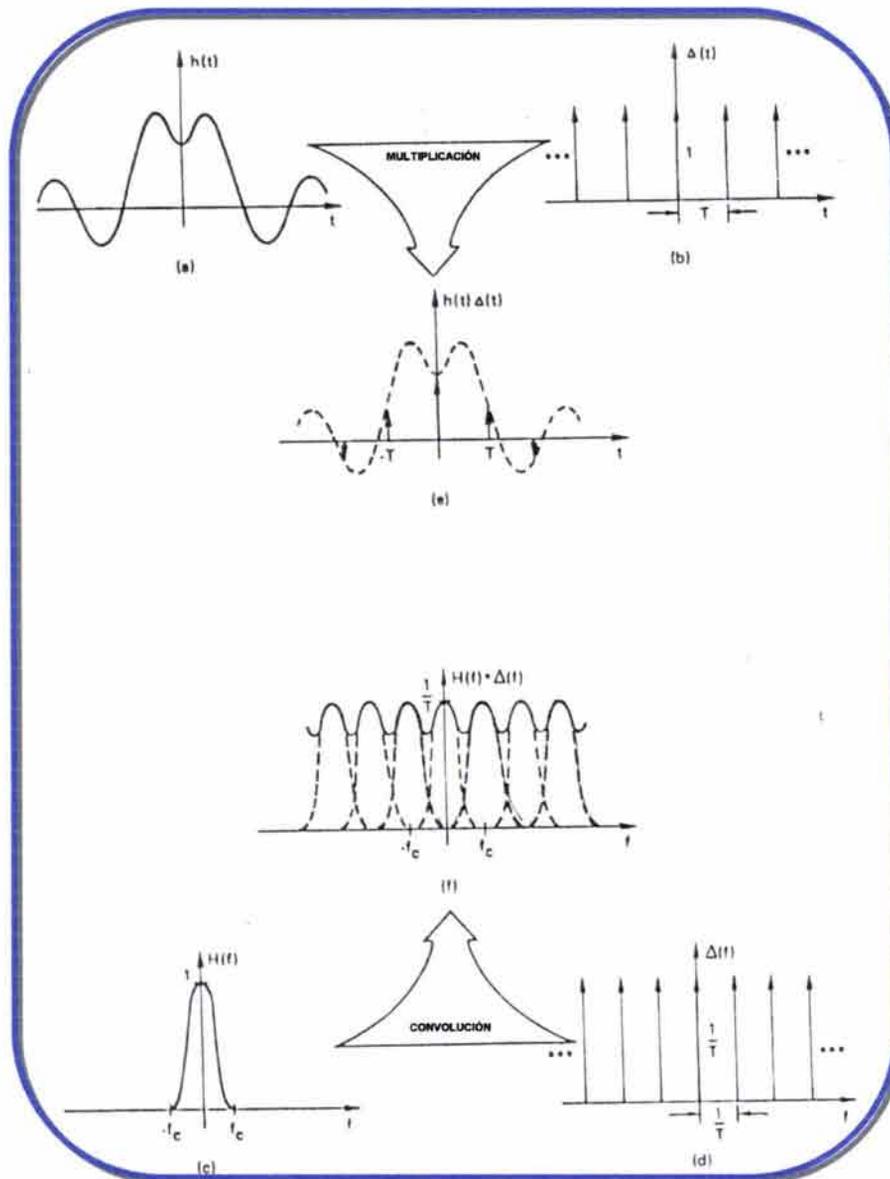


FIGURA 3-12.- EFECTO DE ALISAMIENTO EN LA TRANSFORMADA DE FOURIER, DEBIDO A UN INTERVALO DE MUESTREO INSUFICIENTE.

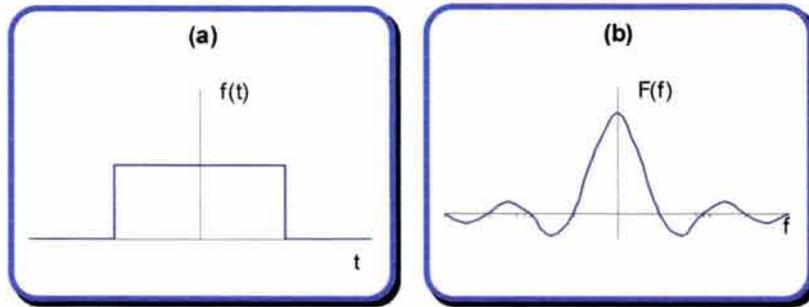
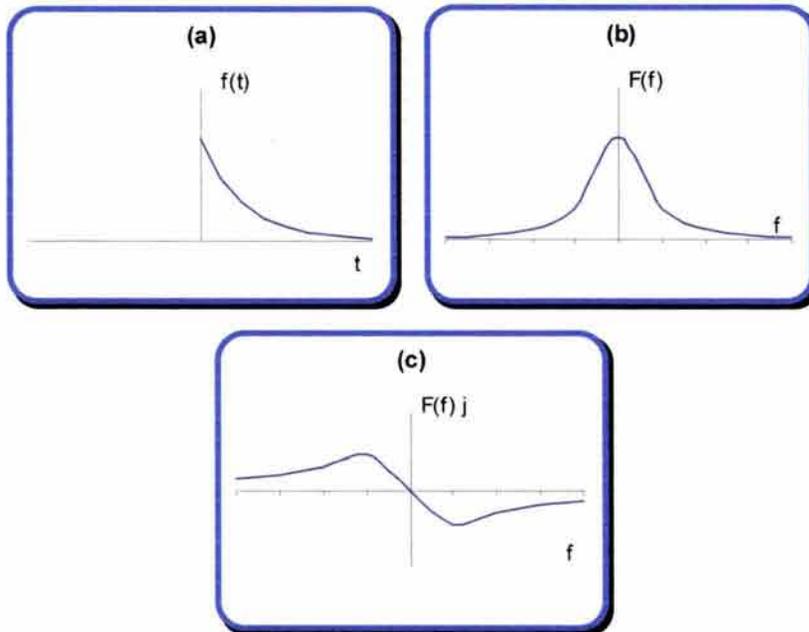
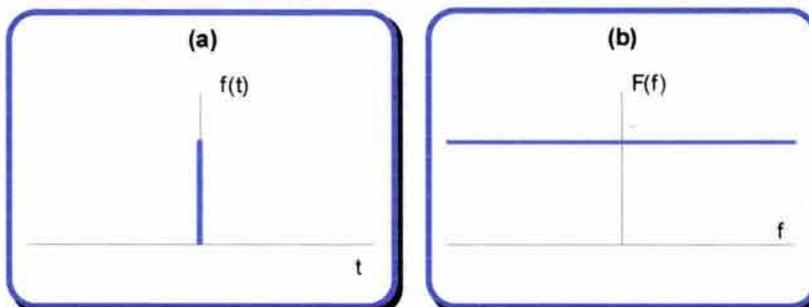
En el capítulo IV, se revisa el significado práctico del intervalo de Nyquist, tomando diferentes intervalos de muestreo.

### III.7 LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE ALGUNAS FUNCIONES.

En la Tabla 3-7, se muestran algunos ejemplos de la Transformada de Fourier de funciones típicas. Las Figuras 3-13 a 3-16, corresponden a la representación gráfica de las primeras funciones mostradas en la tabla.

TABLA 3-7.- TRANSFORMADA DE FOURIER DE ALGUNAS FUNCIONES.

Función $f(t)$	Figura	Transformada de Fourier	Figura
$p(t) = \begin{cases} 1, &  t  < \frac{1}{2}b \\ 0, &  t  > \frac{1}{2}b \end{cases}$	3-13 a)	$\mathfrak{F}[p(t)] = \frac{b \operatorname{sen}(\pi fb)}{\pi fb}$	3-13 b)
$h(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$	3-14 a)	$\mathfrak{F}[h(t)] = \frac{1}{\alpha + j2\pi f}$	3-14 b) 3-14 c)
$\delta(t)$	3-15 a)	$\mathfrak{F}[\delta(t)] = 1$	3-15 b)
$f(t) = A$ $A = \text{cte}$	3-16 a)	$\mathfrak{F}[f(t)] = A2\pi\delta(f)$	3-16 b)
$g(t) = \cos(\omega_0 t)$		$\mathfrak{F}[g(t)] = \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$	
$q(t) = \operatorname{sen}(\omega_0 t)$		$\mathfrak{F}[q(t)] = j[-\pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)]$	
$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$		$\mathfrak{F}[u(t)] = \pi\delta(\omega) - \frac{1}{\omega}j$	

FIGURA 3-13 A) FUNCIÓN  $P(T)$ B) TRANSFORMADA DE FOURIER DE  $P(T)$ FIGURA 3-14 A) FUNCIÓN  $H(T)$ B) PARTE REAL DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE  $H(T)$ C) PARTE IMAGINARIA DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE  $H(T)$ FIGURA 3-15.- A) FUNCIÓN IMPULSO UNITARIO  $\delta(T)$  B) TRANSFORMADA DE FOURIER DE LA FUNCIÓN IMPULSO UNITARIO  $\delta(T)$ .

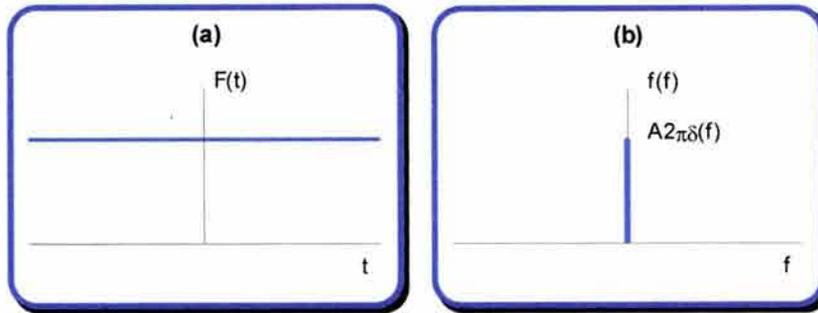


FIGURA 3-16.- A) FUNCIÓN CONSTANTE B) TRANSFORMADA DE FOURIER DE LA FUNCIÓN CONSTANTE

### III.8 FILTRADO.

En una amplia variedad de aplicaciones, resulta de interés cambiar las amplitudes relativas de las componentes de frecuencia en una señal, o quizás eliminar por completo algunas componentes de frecuencia, a este proceso se le conoce como filtrado.

Existen varios tipos de filtros: aquellos, que cambian la forma del espectro, se conocen como filtros conformadores de frecuencia; los diseñados para dejar pasar algunas frecuencias esencialmente no distorsionadas y atenuar de manera significativa o eliminar por completo otras, se denominan filtros selectivos en frecuencia.

#### III.8.1 Filtros selectivos en frecuencia.

Los filtros selectivos en frecuencia, son una clase de filtros específicamente destinados a seleccionar con exactitud o muy aproximadamente algunas bandas de frecuencia y rechazar otras.

Se le llama *filtro ideal* a aquel que tiene la propiedad de transmitir sin distorsión las componentes de frecuencias contenidas dentro de una banda de frecuencias y fuera de esta banda anula al resto de las componentes.

Existen varios tipos de filtros ideales, en todos los casos, las frecuencias de corte son las que definen los límites entre las frecuencias que pasan y las que se eliminan, es decir, entre la banda de paso y la de supresión.

A continuación se describen los principales filtros ideales, cabe aclarar que algunos autores consideran la existencia del filtro "pasa-todo"; el cual simplemente considera todas las frecuencias, es decir sólo existe banda de paso.

**Filtro pasa-bajas.** Este sólo deja pasar a las frecuencias menores a la frecuencia de corte. Matemáticamente se expresa como:

$$H(f) = \begin{cases} 1 & |f| < f_c \\ 0 & |f| > f_c \end{cases} \quad (3-63)$$

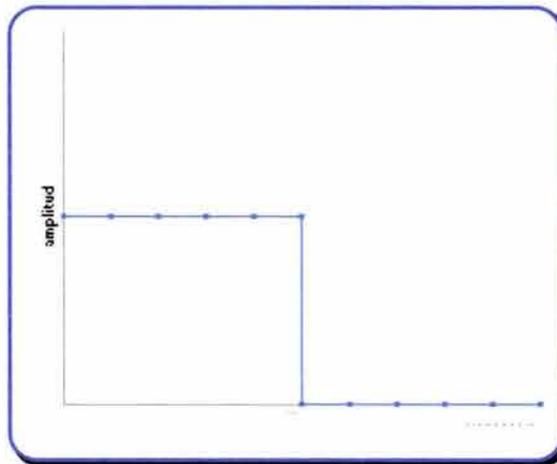


FIGURA 3-17.- REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UN FILTRO PASA-BAJAS.

**Filtro pasa-altas.** Este sólo deja pasar a las frecuencias mayores a la de corte; se define matemáticamente como:

$$H(f) = \begin{cases} 0 & |f| < f_c \\ 1 & |f| > f_c \end{cases} \quad (3-64)$$

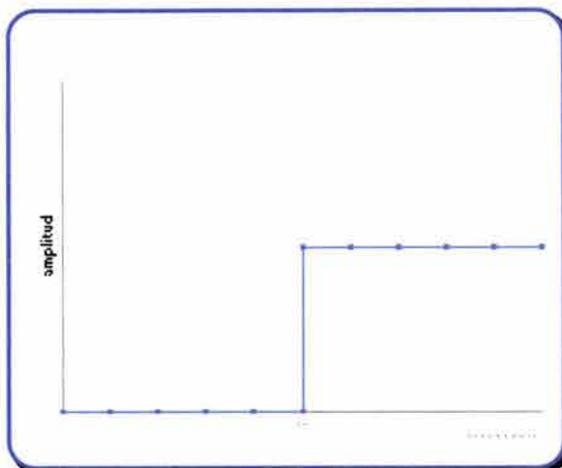


FIGURA 3-18.- REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UN FILTRO PASA-ALTAS.

**Filtro pasa-banda.** Este filtro sólo deja pasar una banda de frecuencias, por lo que su expresión matemática es:

$$H(f) = \begin{cases} 1 & f_{c1} \leq f \leq f_{c2} \\ 0 & \forall !f \end{cases} \quad (3-65)$$

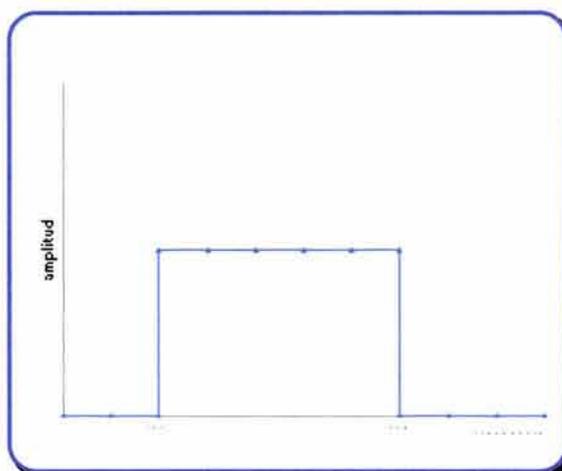


FIGURA 3-19.- REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UN FILTRO PASA-BANDA.

Filtro omite-banda. Este, a la inversa que el anterior omite una banda de frecuencias dada. Matemáticamente se expresa como:

$$H(f) = \begin{cases} 0 & f_{c1} \leq f \leq f_{c2} \\ 1 & \forall \text{ !}f \end{cases} \quad (3-66)$$

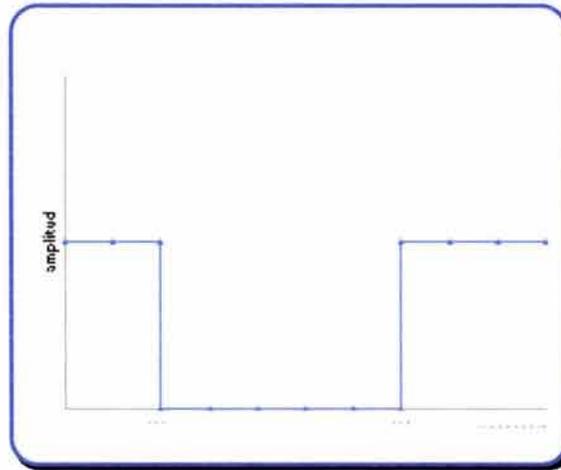


FIGURA 3-20.- REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UN FILTRO OMITE-BANDA.

---

# CAPITULO IV

## APLICACIÓN DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER A LAS PRUEBAS DE PRESIÓN

### **IV.1 PROGRAMA QUE CALCULA LA TRANSFORMADA DE FOURIER**

El cálculo de la Transformada de Fourier de  $n$  datos discretos, puede complicarse en cuanto más grande sea el valor de  $n$ , debido al gran número de operaciones que deben realizarse; sin embargo, ésta no es una limitante, ya que el uso de las computadoras actuales nos permite utilizar esta técnica matemática con facilidad.

Las computadoras resuelven los problemas de forma numérica a través de instrucciones completas y detalladas para cada paso que deba ejecutar, es decir, a través de algoritmos; un algoritmo se define como un procedimiento sistemático que resuelve un problema. Los resultados numéricos son una aproximación, ya que existen limitaciones al nivel de exactitud que se puede alcanzar, debido a la forma en que las computadoras realizan las operaciones aritméticas.

#### **IV.1.1 Aritmética por computadora y errores.**

Al encontrar la solución numérica a un problema a través del uso de computadoras existen errores, éstos se deben a diversos factores.

**Error por truncamiento.** La expresión error por truncamiento, se refiere a los errores provocados por el método en sí (esta expresión se origina del hecho de que los métodos numéricos normalmente pueden compararse con una serie de

Taylor truncada). Por ejemplo para evaluar  $e^x$ , ésta podría aproximarse mediante la cúbica.

$$p_3(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \quad (4-1)$$

Sin embargo, se sabe que para calcular  $e^x$  realmente se requiere una serie infinitamente larga:

$$e^x = p_3(x) + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (4-2)$$

Se observa que al aproximar  $e^x$  con la cúbica, se obtiene una respuesta inexacta. El error se debe al truncamiento de la serie y no tiene nada que ver con la computadora o con la calculadora. Para métodos iterativos, este error puede reducirse mediante iteraciones repetidas, pero como la vida es finita y el tiempo de la computadora es costoso, uno puede darse por satisfecho con una aproximación a la respuesta analítica exacta.

**Error por redondeo.** Todos los dispositivos para realizar cálculos, representan números, salvo los enteros, con alguna imprecisión. Las computadoras digitales operan con números de punto flotante; los valores verdaderos no se expresan exactamente, mediante tales representaciones. El error ocasionado por esta imperfección de la computadora, se denomina error por redondeo.

A fin de analizar en detalle el error por redondeo, es necesario comprender, cómo las cantidades numéricas se representan en las computadoras. En casi todos los casos, los números se almacenan como cantidades de punto flotante, que se parecen mucho a la notación científica. Por ejemplo, el número de punto fijo 13.524, es lo mismo que el número de punto flotante  $.13524 \times 10^2$ , que suele representarse como .13524E2.

Las diversas computadoras manejan técnicas ligeramente diferentes, pero el procedimiento general es semejante. En las computadoras, los números de punto flotante tienen tres partes: el signo (que requiere un bit); la parte fraccionaria, algunas veces denominada mantisa, pero mejor caracterizada como significando o parte significativa; y la parte exponencial, a menudo llamada característica. Las tres partes de los números poseen una longitud total fija, que a menudo es igual a 32 o 64 bits (y algunas veces mayor). La mayor parte de estos bits, sirve para la parte fraccionaria, quizá desde 23 hasta 52 bits, y esta cantidad determina la precisión de la representación. La parte exponencial maneja desde 7 hasta 11 bits, y esta cantidad determina el intervalo de los valores.

Las computadoras representan sus números de punto flotante, en la forma general:

$$\pm .d_1d_2\dots d_p \times B^e$$

Las " $d_i$ ", son dígitos o bits con valores desde cero hasta  $B-1$ . " $B$ " es la base que se utiliza, usualmente, 2, 16 o 10. " $p$ ", es el número de bits (dígitos) significativos; es decir, la precisión. " $e$ ", es el exponente entero, que varía desde  $E_{\min}$  hasta  $E_{\max}$ .

Los bits (dígitos) significativos, constituyen la parte fraccionaria del número. En la mayoría de los casos, los números están normalizados, lo que significa que los dígitos fraccionarios se desplazan y el exponente se ajusta de modo que  $d_1$ , sea diferente de cero. El cero es un caso especial; ya que su parte fraccionaria esta integrada exclusivamente por ceros. El cero no está normalizado y jamás puede estarlo.

En calculadoras manuales, la base  $B$  suele ser 10; en las computadoras, la base a menudo es 2, aunque algunas veces se usa una base 16. Casi todas las computadoras permiten dos e incluso tres tipos de números: de precisión simple,

---

que equivale hasta 6 o 7 dígitos decimales significativos; de doble precisión, equivalente hasta 13 o 14 dígitos decimales significativos; y de precisión extendida, que puede ser equivalente a 19 o 20 dígitos decimales.

Debido a que el número de bits que intervienen en un número de punto flotante es fijo, hay un número finito de valores distintos en el sistema numérico por computadora, en gran contraste con el sistema de números reales. Así, en el sistema numérico de la computadora hay huecos o discontinuidades.

Una medida importante en la aritmética por computadora, es, qué tan pequeña es la diferencia entre dos valores que puede identificar la computadora. Esta cantidad, se denomina eps de la computadora, donde "eps" es una abreviatura de la letra griega épsilon. Esta medida de la exactitud de la máquina, se estandariza al encontrar el menor número de punto flotante, que, cuando se suma al 1.000 de punto flotante, produce un resultado diferente de 1.000.

Cuando se suman o restan dos números de punto flotante, los dígitos del número de menor exponente deben desplazarse para alinear los puntos decimales (la normalización se omite en el sumando). En este desplazamiento pueden perderse algunos de los dígitos significativos de uno de los valores. También puede ser necesario desplazar el resultado y ajustar el exponente para normalizarlo. Algunas computadoras redondean automáticamente la respuesta final; otras simplemente cortan los dígitos adicionales más allá de la precisión del sistema.

Al multiplicar (o dividir), las partes fraccionarias simplemente se multiplican (o se dividen), los exponentes se suman (o se restan) y el resultado se normaliza.

En la Figura 4-1 se muestra la gráfica del error total, en esta se observa que a mayor precisión el error por truncamiento aumenta, mientras que el error por redondeo disminuye.

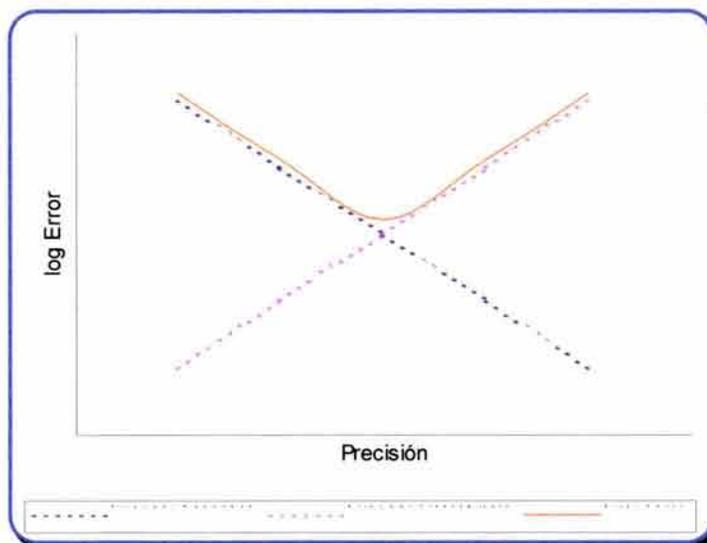


FIGURA 4-1.- GRÁFICA DEL ERROR TOTAL.

#### IV.1.2 Algoritmo basado en la definición de la Transformada de Fourier.

Este algoritmo está basado en la forma de la Transformada de Fourier, mostrada en la ecuación (3-50). Ahora, si consideramos que la función a ser transformada  $f(t)$  es compleja, se tiene:

$$f(t) = f_R(t) + jf_I(t) \quad (4-3)$$

$$\mathfrak{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} [f_R(t) + jf_I(t)] \cos(2\pi ft) \partial t - j \int_{-\infty}^{\infty} [f_R(t) + jf_I(t)] \text{sen}(2\pi ft) \partial t \quad (4-4)$$

Por lo que la transformada de Fourier de  $f(t)$ , tendrá una parte real  $F_R(f)$  y una parte imaginaria  $F_I(f)$ :

$$\mathfrak{F}[f(t)] = F(f) = F_R(f) + jF_I(f) \quad (4-5)$$

$$F_R(f) = \int_{-\infty}^{\infty} [f_R(t) \cos(2\pi ft) + f_I(t) \text{sen}(2\pi ft)] \partial t \quad (4-6)$$

$$F_I(f) = \int_{-\infty}^{\infty} [f_I(t) \cos(2\pi ft) - f_R(t) \text{sen}(2\pi ft)] \partial t \quad (4-7)$$

De manera análoga para la transformada inversa de Fourier, se tiene:

$$\mathfrak{S}^{-1}[F(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} F(f) e^{j2\pi ft} \partial f \quad (4-8)$$

Utilizando la identidad de Euler:

$$e^{j2\pi ft} = \cos(2\pi ft) + j \text{sen}(2\pi ft) \quad (4-9)$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [F_R(f) + jF_I(f)] [\cos(2\pi ft) + j \text{sen}(2\pi ft)] \partial f \quad (4-10)$$

Por lo que, las partes real e imaginaria de la antitransformada, son:

$$f_R(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [F_R(f) \cos(2\pi ft) - F_I(f) \text{sen}(2\pi ft)] \partial f \quad (4-11)$$

$$f_I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [F_I(f) \cos(2\pi ft) + F_R(f) \text{sen}(2\pi ft)] \partial f \quad (4-12)$$

Si la función  $f(t)$  está definida desde "a" hasta "b", es decir,  $f(t)=0$  para  $t < a$  y  $t > b$ ; su transformada de Fourier será entonces:

$$\mathfrak{S}[f(t)] = \int_{-\infty}^a 0 e^{-j2\pi ft} \partial t + \int_a^b f(t) e^{-j2\pi ft} \partial t + \int_b^{\infty} 0 e^{-j2\pi ft} \partial t \quad (4-13)$$

Como puede observarse el resultado de la primera y última integral es 0; por lo que la Transformada de Fourier de la función  $f(t)$  definida en el intervalo  $(a,b)$ , es:

$$\mathfrak{F}[f(t)] = \int_a^b f(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (4-14)$$

Ahora si se considera que esta función consta de un solo periodo; entonces el periodo fundamental de  $f(t)$  es  $T_0 = b-a$ , por lo que su frecuencia fundamental, es:  $f_0 = 1/T_0 = 1/(b-a)$ .

Hasta ahora se han desarrollado las ecuaciones en las que está basado el algoritmo, éste, resuelve numéricamente, a partir de datos discretos las ecuaciones (4-6) y (4-7) o bien (4-11) y (4-12), dependiendo del cálculo que se realice; y obtiene datos discretos en el dominio de la frecuencia. En la Figura 4-2 se muestra el diagrama de flujo de este algoritmo, y en la Tabla 4-1 su código en el lenguaje de programación Visual Basic™.

El muestreo uniforme de datos, se realiza mediante el método de interpolación con Splines cúbicos; y su objetivo es evaluar el efecto del intervalo de Nyquist en el cálculo de la Transformada de Fourier.

TABLA 4-1.- SUBROUTINA DEL ALGORITMO BASADO EN LA DEFINICIÓN DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER, EN VISUAL BASIC™

```

Sub definición(x#(), yreal#(), yimag#(), nd, SIGNO)
  ' SIGNO = 1 estima la Transformada de Fourier
  '      = -1 estima la antitransformada

Dim delta#, delta#, xs#(), fc#, fr#(), ysreal#(), fs#, fi#(), ysimag#()
delta = 1 / (x(nd) - x(1))

For n = 0 To nd - 1
  delta = n * deltao

  For K = 1 To nd
    fc = Cos(delta * 2 * pi * x(K))
    fs = Sin(delta * 2 * pi * x(K))

    If SIGNO = 1 Then
      fr(K) = Yreal(K) * fc + yimag(K) * fs 'parte real
      fi(K) = yimag(K) * fc - Yreal(K) * fs 'parte imaginaria
    Else
      fr(K) = Yreal(K) * fc - yimag(K) * fs 'parte real
      fi(K) = yimag(K) * fc + Yreal(K) * fs 'parte imaginaria
    End If

  Next K
  xs(n + 1) = delta
  ysreal(n + 1) = integral(x(), fr(), nd)
  ysimag(n + 1) = integral(x(), fi(), nd)
Next n

End sub

```

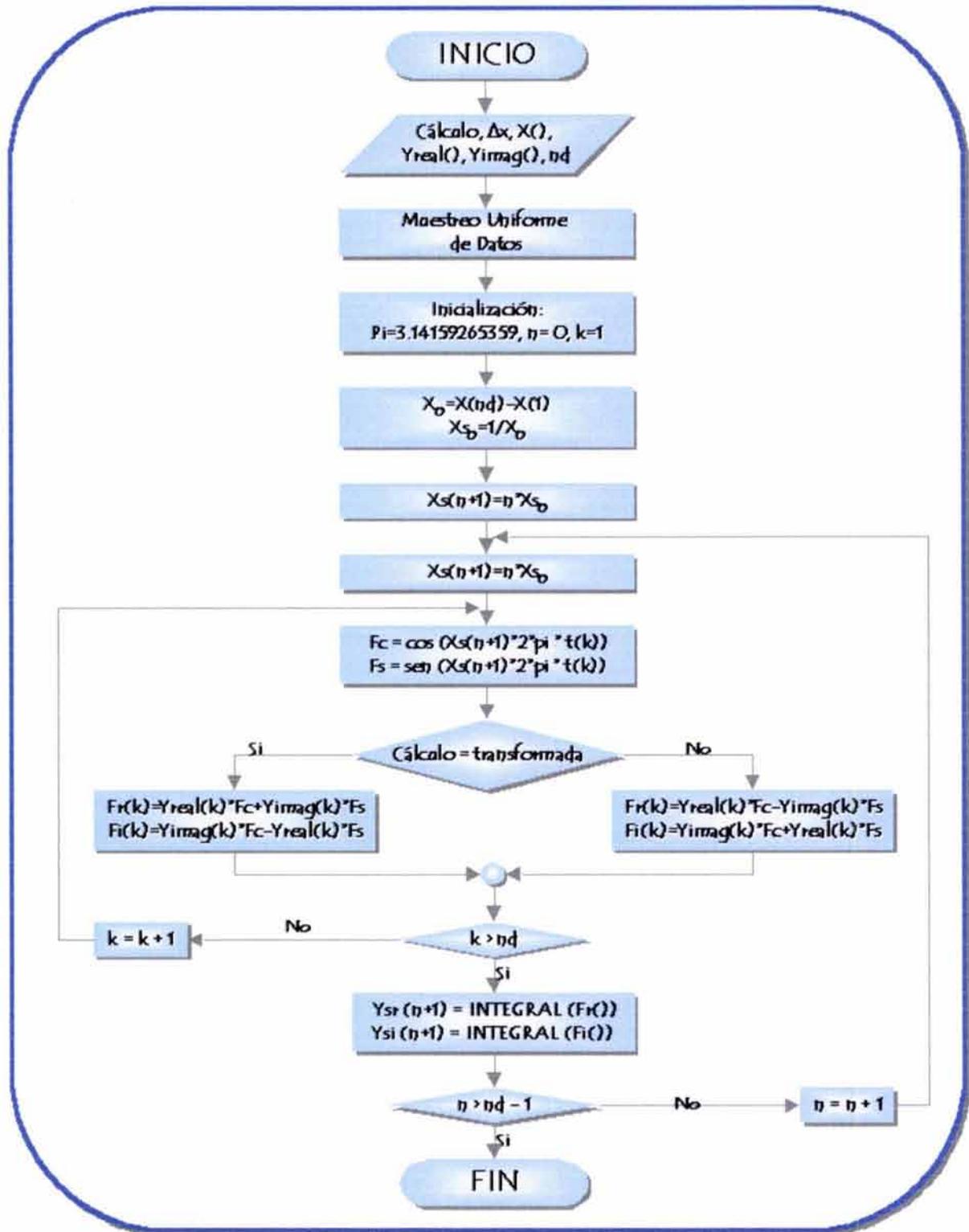


FIGURA 4-2.- DIAGRAMA DE FLUJO DEL ALGORITMO BASADO EN LA DEFINICIÓN DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER.

Un Spline cúbico ajusta una "curva suave" a los puntos, tomando prestada la idea de un instrumento que se usa para dibujar. Este instrumento, es una barra que se flexiona para conformarse a los puntos.

La curva Spline puede ser de varios grados. Supóngase, que se tiene el siguiente conjunto de  $n+1$  puntos de datos o nodos, que no necesariamente tienen que estar uniformemente espaciados:

$$(x_i, y_i), i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

En general, un conjunto de polinomios de enésimo grado, se ajusta entre cada par de puntos adyacentes,  $g_i(x)$ , desde  $x_i$  hasta  $x_{i+1}$ . Si el grado del Spline es uno, entre los puntos solo hay rectas; el problema con el Spline lineal, es que la pendiente es discontinua en los puntos o nodos, los Splines de grado mayor carecen de este problema.<sup>26</sup>

Los Splines cúbicos, ajustan un polinomio de tercer grado entre cada par de puntos adyacentes; El método de interpolación, consiste en evaluar el polinomio correspondiente para cada valor de  $x_i = x_{i-1} + \Delta x$ .

Dada la gran cantidad de métodos de integración numérica, se realizó una evaluación práctica de los más comunes; tomando en cuenta la exactitud de los resultados y el tiempo de cálculo en la solución de las siguientes integrales definidas:

$$\int_2^{11} x^2 dx = 441, \quad (4-15)$$

$$\int_0^{10} \sqrt{10^2 - x^2} dx = 78.5398. \quad (4-16)$$

En la Figura 4-3 se muestra la representación gráfica de estas integrales.

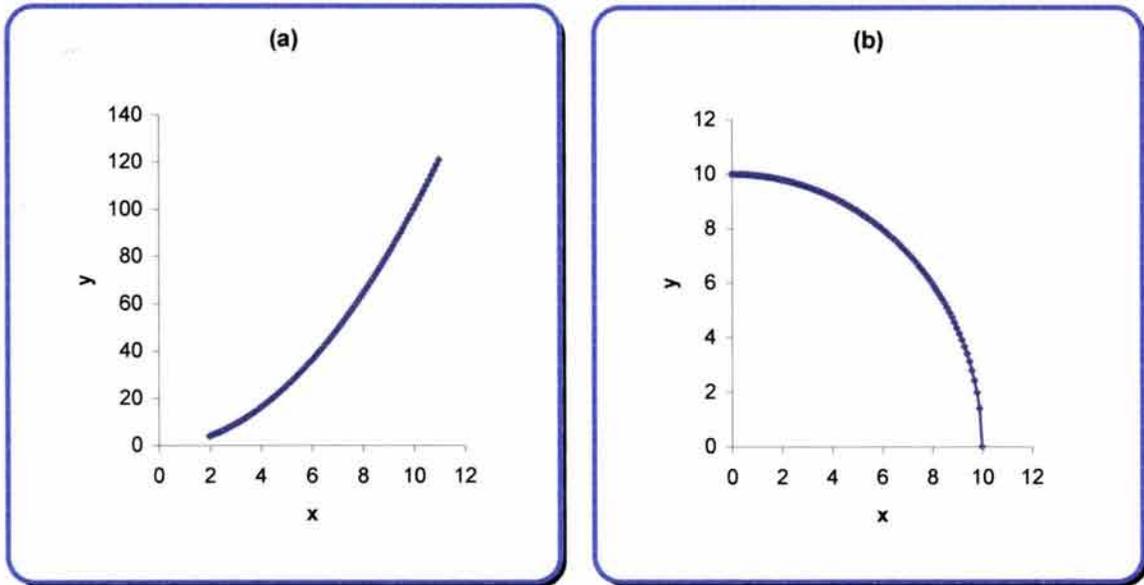


FIGURA 4-3.- REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LAS INTEGRALES DEFINIDAS DESCRITAS EN LAS ECUACIONES A) (4-15) Y B)(4-16).

Los métodos que se utilizaron fueron: regla del Rectángulo, del Trapecio, de Simpson, Cuadraturas adaptadas y Splines cúbicos. En la Tabla 4-2, se muestran los resultados obtenidos por cada uno de éstos, en la Tabla 4-3, el error de éste, respecto a la solución analítica y en la Tabla 4-4, el tiempo de cálculo en segundos.

TABLA 4-2.- RESULTADOS OBTENIDOS CON DIFERENTES MÉTODOS NUMÉRICOS DE INTEGRACIÓN, PARA LA SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES (4-15) Y (4-16).

Función	# de datos	Análítica	Rectángulo	Trapecio	R. Simpson	Cuadraturas Adaptadas	Splines cúbicos
4-15	10	441	440.3925	442.215	354.2535	<b>441</b>	<b>441</b>
	100	441	440.9939	451.9916	442.62	451.9793	<b>441</b>
	1000	441	440.9999	441.0001	440.07	<b>441</b>	<b>441.0000</b>
4-16	10	78.5398	<b>78.8103</b>	77.6131	75.079	78.0894	78.0897
	100	78.5398	<b>78.5364</b>	78.3619	78.0106	78.3951	78.5275
	1000	78.5398	78.5278	78.5265	78.4929	78.5266	<b>78.5394</b>

TABLA 4-3.- ERROR EN LOS RESULTADOS OBTENIDOS PARA LA SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LAS ECUACIONES (4-15) Y (4-16), RESPECTO A LA SOLUCIÓN ANALÍTICA.

Función	# de datos	Analítica	Rectángulo	Trapezio	R. Simpson	Cuadraturas Adaptadas	Splines cúbicos
4-15	10	0	0.6075	-1.215	86.7465	<b>0</b>	<b>0</b>
	100	0	0.0061	-10.9916	-1.62	-10.9793	<b>0</b>
	1000	0	1E-04	-1E-04	0.93	<b>0</b>	<b>0</b>
4-16	10	0	<b>-0.2705</b>	0.9267	3.4608	0.4504	0.4501
	100	0	<b>0.0034</b>	0.1779	0.5292	0.1447	0.0123
	1000	0	0.012	0.0133	0.0469	0.0132	<b>0.0004</b>

TABLA 4-4.- TIEMPO DE CÁLCULO EN SEGUNDOS DE LAS ECUACIONES (4-15) Y (4-16) CON DIFERENTES MÉTODOS NUMÉRICOS.

Función	# de datos	Rectángulo	Trapezio	R. Simpson	Cuadraturas Adaptadas	Splines cúbicos
4-15	10	6.00E-02	<b>0.00E+00</b>	<b>0.00E+00</b>	<b>0.00E+00</b>	<b>0.00E+00</b>
	100	6.00E-02	<b>0.00E+00</b>	<b>0.00E+00</b>	5.00E-02	<b>0.00E+00</b>
	1000	1.16E+00	1.15E+00	2.31E+00	6.75E+00	<b>6.00E-02</b>
4-16	10	<b>0.00E+00</b>	<b>0.00E+00</b>	<b>0.00E+00</b>	<b>0.00E+00</b>	<b>0.00E+00</b>
	100	5.00E-02	<b>0.00E+00</b>	<b>0.00E+00</b>	1.10E-01	<b>0.00E+00</b>
	1000	1.16E+00	1.15E+00	2.31E+00	6.97E+00	<b>0.00E+00</b>

Como puede observarse de las tablas 4-2 a 4-4, el método que obtuvo los mejores resultados en el menor tiempo, es la integración numérica con Splines cúbicos; por lo tanto, éste es el método elegido para ser usado en el algoritmo para el cálculo de la transformada de Fourier basado en su definición.

La integración con Splines cúbicos, se realiza integrando cada uno de los polinomios de tercer grado que se ajustan entre cada par de puntos adyacentes. Supóngase, que se tienen  $n$  pares de puntos  $(x_i, y_i)$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ ; entonces se ajustan  $n-1$  polinomios de tercer grado de la forma:

$$g_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3, \quad (4-17)$$

donde  $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ ; la integral desde  $x_i$  hasta  $x_{i+1}$  del polinomio  $g_i$  es:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} g_i(x) dx = a_i(x_{i+1} - x_i) + \frac{b_i}{2}(x_{i+1} - x_i)^2 + \frac{c_i}{3}(x_{i+1} - x_i)^3 + \frac{d_i}{4}(x_{i+1} - x_i)^4. \quad (4-18)$$

La integral de la función  $f(x)$  definida por los  $n$  pares de puntos, será la suma de la integral de los polinomios ajustados entre cada par de puntos adyacentes.

$$\int_{x_1}^{x_n} f(x) dx = \sum_{i=1}^{n-1} \left[ a_i(x_{i+1} - x_i) + \frac{b_i}{2}(x_{i+1} - x_i)^2 + \frac{c_i}{3}(x_{i+1} - x_i)^3 + \frac{d_i}{4}(x_{i+1} - x_i)^4 \right]. \quad (4-19)$$

### IV.1.3 La Transformada discreta de Fourier.

La transformada discreta de Fourier o DFT por sus siglas en inglés (Discrete Fourier Transform), es un caso especial de la transformada continua de Fourier (TCF), que se analizó en el capítulo III de esta tesis.

Considérese la función  $h(t)$  y su transformada de Fourier  $H(f)$  mostradas en la Figura 4-4; para discretizarlas, es necesario en primer lugar, hacer un muestreo de la función  $h(t)$ ; esto es, multiplicarla por la función de muestreo  $\Delta_0(t)$  (Figura 4-5) con un intervalo de muestreo  $T$ .

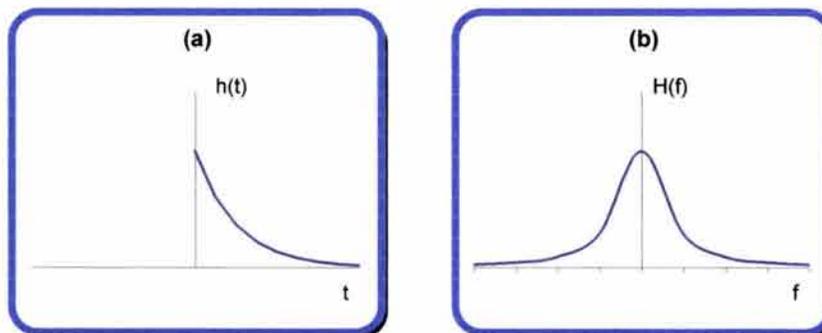


FIGURA 4-4.- A) FUNCIÓN  $H(T)$  B) TRANSFORMADA DE FOURIER  $H(F)$  DE  $H(T)$ .

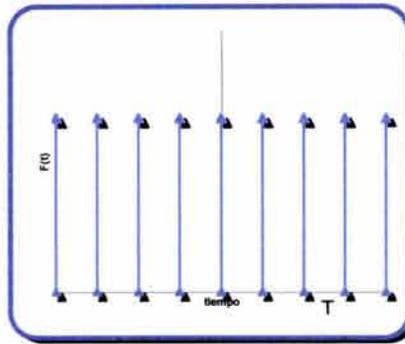


FIGURA 4-5 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA FUNCIÓN DE MUESTREO  $\Delta_0(T)$ .

$$h(t)\Delta_0(t) = h(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(kT)\delta(t - kT). \quad (4-20)$$

Ahora es necesario truncar la función, para hacerla finita en el tiempo; esto, se logra multiplicando la ecuación (4-20) por la función rectangular  $x(t)$  mostrada en la Figura 4-6.

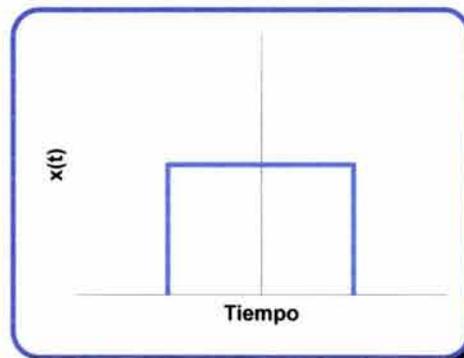


FIGURA 4-6 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA FUNCIÓN RECTANGULAR  $x(T)$ .

$$x(t) = \begin{cases} 1 & -T/2 < t < T_0 - T/2 \\ 0 & \text{cualquier otro } t \end{cases} \quad (4-21)$$

En este caso,  $T_0$ , es la duración de la función de truncamiento; la función truncada es:

$$h(t)\Delta_0(t)x(t) = \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(kT)\delta(t - kT) \right] x(t) = \sum_{k=0}^{N-1} h(kT)\delta(t - kT). \quad (4-22)$$

Se supone que existen N impulsos equidistantes en el intervalo truncado, esto es  $N = T_0/T$ . El truncamiento en el dominio del tiempo, resulta en el efecto de ondulado en el dominio de la frecuencia.

El último paso para discretizar el par de funciones  $h(t)$  y  $H(f)$ , es muestrear la función  $H(f)$ , esto es, multiplicarla por la función  $\Delta_1(t)$ , la cual está formada por "r" impulsos equidistantes separados por  $1/T_0$ ; En el dominio del tiempo, esto es, equivalente a la convolución de las funciones  $h(t)$  discreta y truncada y la función  $\Delta_1(t)$ .

$$\Delta_1(t) = T_0 \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(t - rT_0). \quad (4-23)$$

La convolución de las funciones representadas en las ecuaciones (4-22) y (4-23) es la función:

$$[h(t)\Delta_0(t)x(t)] * \Delta_1(t) = T_0 \sum_{r=-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{k=0}^{N-1} h(kT) \delta(t - kT - rT_0) \right]. \quad (4-24)$$

Para desarrollar la transformada de Fourier de la ecuación (4-24), se debe recordar, que la transformada de una función periódica, es una secuencia de impulsos equidistantes.

$$\mathfrak{F}[h(t)] = H\left(\frac{n}{T_0}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \delta(f - nf_0); \quad f_0 = \frac{1}{T_0} \quad (4-25)$$

De la representación de funciones en series de Fourier tenemos:

$$\alpha_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T/2}^{T/2} h(t) e^{-j2\pi n t / T_0} dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4-26)$$

Sustituyendo (4-24) en (4-26), integrando para un solo periodo y como  $T_0 = NT$ ; (4-26) puede escribirse como:

$$\alpha_n = \sum_{k=0}^{N-1} h(kT) e^{-j2\pi kn/N}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4-27)$$

Sustituyendo esta última en (4-25)

$$H\left(\frac{n}{T_0}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-1} h(kT) e^{-j2\pi kn/N}. \quad (4-28)$$

La ecuación (4-28), es una función periódica y se ilustra en la Figura 4-7. Sin embargo solo existen N valores distintos a ser calculados con (4-28), por lo que ésta se convierte en:

$$H\left(\frac{n}{NT}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} h(kT) e^{-j2\pi mk/N}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4-29)$$

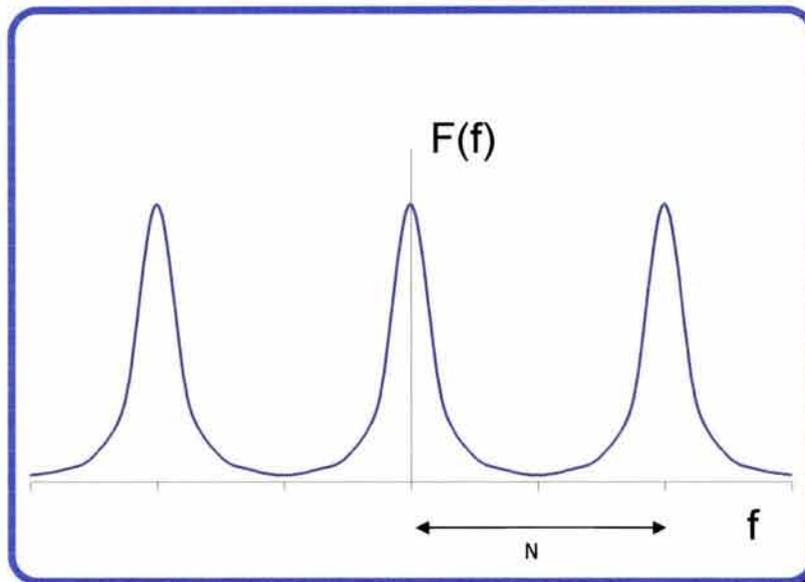


FIGURA 4-7.- REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA ECUACIÓN (4-28).

La ecuación (4-29) es la DFT; esta expresión relaciona N muestras en el tiempo con N muestras en la frecuencia, por medio de la transformada continua de Fourier (TCF); por lo que se comprueba que la DFT, es un caso especial de la TCF. Si se supone que N muestras de la función original  $h(t)$ , son un periodo de la

función, entonces su transformada de Fourier, está dada por N muestras obtenidas con la ecuación (4-29).

Haciendo un desarrollo similar, se tiene que la DFT inversa está dada por:

$$g(kT) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} G\left(\frac{n}{NT}\right) e^{j2\pi nk/N} \quad k=0, 1, \dots, N-1 \quad (4-30)$$

El algoritmo de la DFT, utiliza las ecuaciones (4-29) y (4-30), para la obtención de la transformada o transformada inversa de Fourier de N datos discretos. En la Figura 4-8 se muestra el diagrama de flujo de este algoritmo y en la Tabla 4-5 su código en el lenguaje de programación Visual Basic™.

#### IV.1.4 La Transformada rápida de Fourier.

El algoritmo de la Transformada Rápida de Fourier, o FFT por sus siglas en inglés (Fast Fourier Transform), es simplemente un algoritmo que calcula la DFT más rápidamente que otros.

Considérese la forma de la DFT mostrada en la ecuación (4-29)

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x_0(k) e^{-j2\pi nk/N} \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4-31)$$

Se ha sustituido "kT" por "k" y "n/NT" por "n" para simplificar la notación. Nótese que la ecuación (4-31), describe el cálculo de N ecuaciones. Por ejemplo, si N = 4 y se define W como:

$$W = e^{-j2\pi/N} \quad (4-32)$$

Entonces (4-31) se desarrolla

$$\begin{aligned}
 X(0) &= x_0(0)W^0 + x_0(1)W^0 + x_0(2)W^0 + x_0(3)W^0 \\
 X(1) &= x_0(0)W^0 + x_0(1)W^1 + x_0(2)W^2 + x_0(3)W^3 \\
 X(2) &= x_0(0)W^0 + x_0(1)W^2 + x_0(2)W^4 + x_0(3)W^6 \\
 X(3) &= x_0(0)W^0 + x_0(1)W^3 + x_0(2)W^6 + x_0(3)W^9
 \end{aligned}
 \tag{4-33}$$

TABLA 4-5.- SUBROUTINA DE LA DFT EN VISUAL BASIC™.

```

Sub DFT(x#(), yreal#(), yimag#(), nd, SIGNO, T)
  '   SIGNO = 1 estima la Transformada de Fourier
  '   SIGNO = -1 estima la antitransformada

Dim xs#(), ysreal#(), ysimag#(), n%, K%

If SIGNO = 1 Then

  For n = 0 To nd - 1
    xs(n + 1) = n / (nd * T)
    ysreal(n + 1) = 0: ysimag(n + 1) = 0

    For K = 0 To nd - 1
      ysreal(n + 1) = ysreal(n + 1) + Yreal(K + 1) * Cos(2 * pi * n * K / nd)
      ysimag(n + 1) = ysimag(n + 1) + Yreal(K + 1) * Sin(2 * pi * n * K / nd)
    Next K

    ysreal(n + 1) = ysreal(n + 1) * T
    ysimag(n + 1) = -T * ysimag(n + 1)
  Next n

Else
  T = x(2) - x(1)

  For K = 0 To nd - 1
    xs(K + 1) = K / (T * nd)
    ysreal(K + 1) = 0: ysimag(K + 1) = 0

    For n = 0 To nd - 1
      ysreal(K + 1) = ysreal(K + 1) + Yreal(n + 1) * Cos(2 * pi * n * K / nd) - yimag(n + 1) * Sin(2 * pi * n * K / nd)
      ysimag(K + 1) = ysimag(K + 1) + Yreal(n + 1) * Sin(2 * pi * n * K / nd) + yimag(n + 1) * Cos(2 * pi * n * K / nd)
    Next n

    ysreal(K + 1) = ysreal(K + 1) * T
    ysimag(K + 1) = ysimag(K + 1) * T
  Next K

End If

End Sub

```

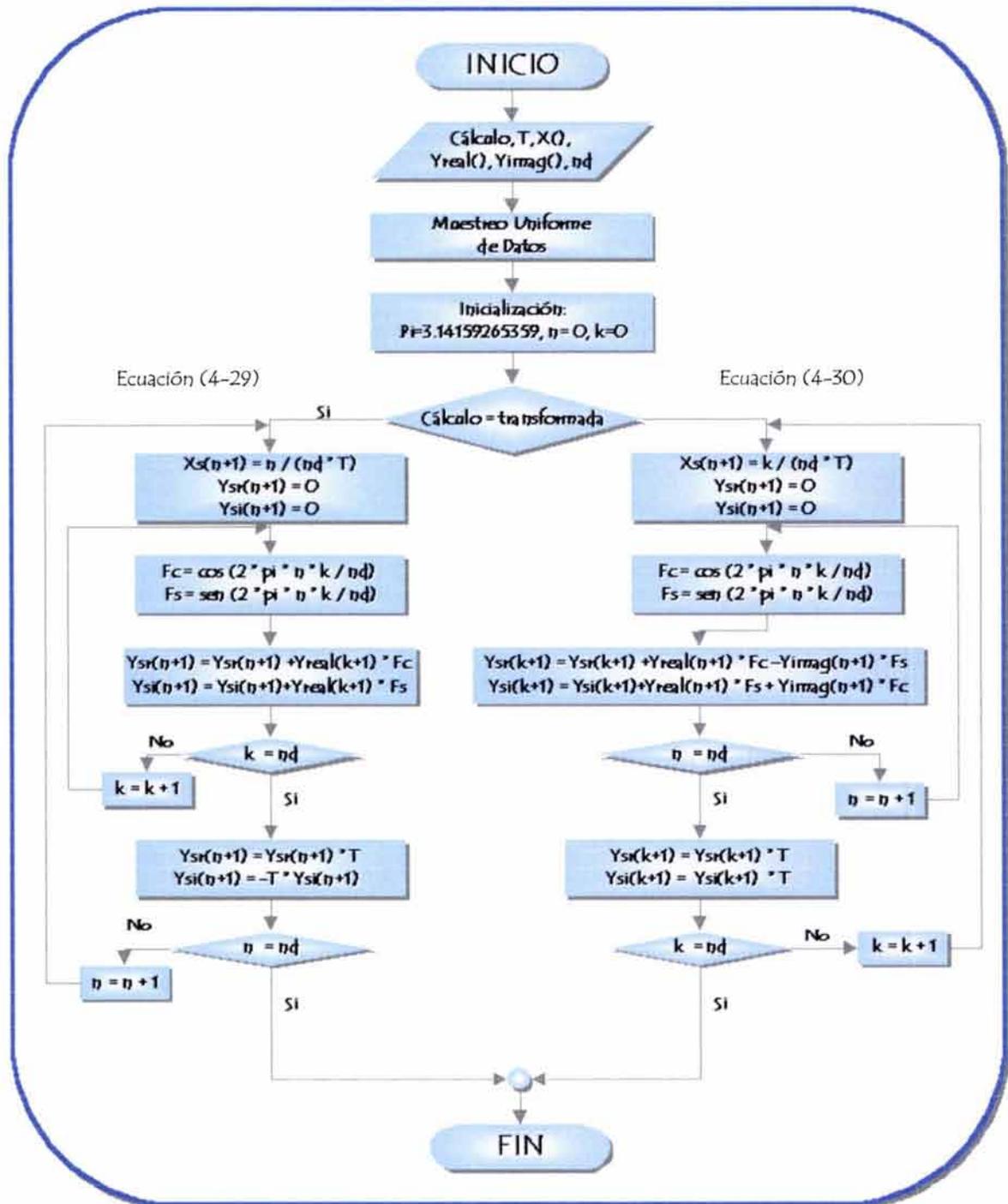


FIGURA 4-8.- DIAGRAMA DE FLUJO DEL ALGORITMO DE LA DFT.

Las ecuaciones (4-33), pueden representarse fácilmente en forma de matrices:

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 \\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6 \\ W^0 & W^3 & W^6 & W^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(0) \\ x_0(1) \\ x_0(2) \\ x_0(3) \end{bmatrix} \quad (4-34)$$

O en su forma compacta:

$$[X(n)] = [W^{nk}] \cdot [x_0(k)] \quad (4-35)$$

Como  $W$  y posiblemente  $x_0(k)$ , son números complejos, son necesarias  $N^2$  multiplicaciones y  $N(N-1)$  sumas, para calcular la ecuación 4-35. La FFT debe su éxito, al hecho de que el algoritmo reduce el número de operaciones requeridas.

El algoritmo de la FFT, requiere que el número de datos cumpla con la relación  $N = 2^\gamma$ , donde  $\gamma$  es un número entero; A continuación se desarrolla el cálculo de la FFT para el ejemplo mostrado en la ecuación (4-34), donde  $N = 4$  por lo tanto  $\gamma = 2$ .

Si  $N = 4$ ,  $n = 2$  y  $k = 3$ ; entonces:

$$\begin{aligned} W^{nk} &= W^6 = e^{(-j2\pi/4)6} = e^{-j3\pi} \\ e^{-j3\pi} &= \cos(3\pi) - j\text{sen}(3\pi) \\ \text{Como : } \cos(n\pi) &= (-1)^n \quad \text{y} \quad \text{sen}(n\pi) = 0 \\ e^{-j3\pi} &= e^{-j\pi} \\ e^{-j\pi} &= e^{(-j2\pi/4)2} = W^2 = W^{nk \cdot \text{mod} \cdot N} \end{aligned} \quad (4-36)$$

$$W^{nk} = W^{nk \cdot \text{mod} \cdot N} \quad (4-37)$$

La operación "mod", es el residuo de la división entera de dos números, en este caso el residuo de  $nk/N$ .

Si se reescribe la ecuación (4-34) usando la identidad (4-37):

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & W^1 & W^2 & W^3 \\ 1 & W^2 & W^0 & W^2 \\ 1 & W^3 & W^2 & W^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(0) \\ x_0(1) \\ x_0(2) \\ x_0(3) \end{bmatrix} \quad (4-38)$$

El siguiente paso, es factorizar la matriz cuadrada en la ecuación (4-38), como se muestra a continuación:

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(2) \\ X(1) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & W^0 & 0 & 0 \\ 1 & W^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W^1 \\ 0 & 0 & 1 & W^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^0 \\ 1 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(0) \\ x_0(1) \\ x_0(2) \\ x_0(3) \end{bmatrix} \quad (4-39)$$

Las columnas de las matrices cuadradas, se enumeran 0, 1, 2 y 3. Nótese que la multiplicación de ambas, es igual a la matriz cuadrada de la ecuación (4-38), con la salvedad de que las columnas 1 y 2 han sido intercambiadas; para mantener la igualdad, se han intercambiado también los renglones 1 y 2 del vector  $X(n)$ .

Para examinar el número de multiplicaciones requeridas para la solución de (4-39), tenemos:

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_1(1) \\ x_1(2) \\ x_1(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^0 \\ 1 & 0 & W^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0(0) \\ x_0(1) \\ x_0(2) \\ x_0(3) \end{bmatrix} \quad (4-40)$$

El vector  $x_1(k)$ , es igual al producto de las dos últimas matrices del lado derecho de la ecuación (4-39).

El elemento  $x_1(0)$ , se calcula con una multiplicación y una adición complejas:

$$x_1(0) = x_0(0) + W^0 x_0(2) \quad (4-41)$$

El elemento  $x_1(1)$ , también se calcula con una multiplicación y una adición, para calcular  $x_1(2)$ , solo se requiere una suma compleja ya que  $W^0 = -W^2$ ;

$$\begin{aligned} x_1(2) &= x_0(0) + W^2 x_0(2) \\ x_1(2) &= x_0(0) - W^0 x_0(2) \end{aligned} \quad (4-42)$$

La multiplicación  $W^0 x_0(2)$ , ya ha sido calculada para determinar  $x_1(0)$  en la ecuación (4-41); por la misma razón  $x_1(3)$ , es calculado con solo una suma. El vector intermedio  $x_1(k)$ , es calculado por cuatro sumas y dos multiplicaciones complejas.

Volviendo a la ecuación (4-39)

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(2) \\ X(1) \\ X(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(0) \\ x_2(1) \\ x_2(2) \\ x_2(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & W^0 & 0 & 0 \\ 1 & W^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W^1 \\ 0 & 0 & 1 & W^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_1(1) \\ x_1(2) \\ x_1(3) \end{bmatrix} \quad (4-43)$$

El término  $x_2(0)$ , se determina mediante una multiplicación y una suma:

$$x_2(0) = x_1(0) + W^0 x_1(1) \quad (4-44)$$

El elemento  $x_2(1)$ , se calcula con una suma, ya que  $W^0 = -W^2$ ;  $x_2(2)$  por medio de una suma y una multiplicación, y  $x_2(3)$  por solo una suma.

El cálculo del vector  $X(n)$ , por medio de la ecuación (4-39), requiere un total de cuatro multiplicaciones y ocho adiciones; mientras que por medio de (4-34), requieren dieciséis multiplicaciones y doce sumas. El proceso de factorización

introduce ceros en las matrices, y como resultado reduce el número de multiplicaciones requeridas. Para el ejemplo anterior, el proceso reduce a la mitad el número de multiplicaciones, esto es, un factor de 2 a 1. La eficiencia de la FFT, se debe a que el tiempo de cómputo es gobernado en su mayor parte, por el número de multiplicaciones requeridas.

Para  $N = 2^\gamma$  el algoritmo de la FFT, es un procedimiento que factoriza una matriz de  $N \times N$  en  $\gamma$  matrices de  $N \times N$ , donde cada una de éstas, tiene la propiedad especial de minimizar el número de multiplicaciones y adiciones complejas.

Generalizando los resultados del ejemplo anterior, se tiene que la FFT, requiere  $N\gamma/2$  multiplicaciones y  $N\gamma$  sumas, ambas complejas; mientras que el cálculo directo de la DFT, requiere  $N^2$  multiplicaciones y  $N(N-1)$  adiciones. Debido a que el tiempo de cómputo es proporcional al número de multiplicaciones, la relación aproximada del tiempo de cálculo directo respecto al de la FFT, es:

$$\frac{N^2}{N\gamma/2} = \frac{2N}{\gamma} \quad (4-45)$$

Por ejemplo para  $N = 1024$ ,  $\gamma = 10$  la relación es de 204.8 a 1. En la Tabla 4-6, se muestra el número de multiplicaciones necesarias con cada uno de los métodos y en la Figura 4-9 su representación gráfica.

El procedimiento de factorización ocasiona que el resultado del cómputo sea el vector:

$$\overline{X(n)} = \begin{bmatrix} X(0) \\ X(2) \\ X(1) \\ X(3) \end{bmatrix} \quad \text{en lugar del vector} \quad X(n) = \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} \quad (4-46)$$

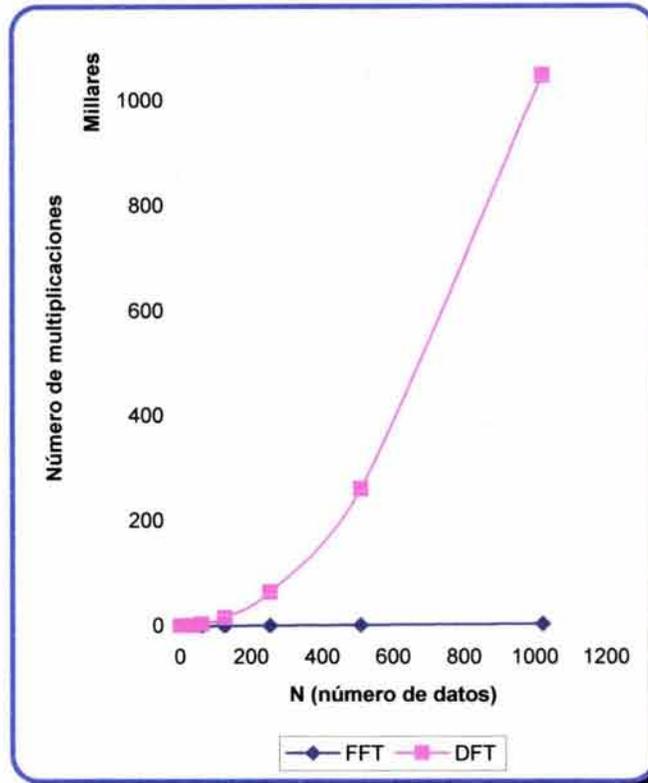


FIGURA 4-9.- COMPARACIÓN DEL NÚMERO DE MULTIPLICACIONES REQUERIDAS POR LOS ALGORITMOS DE LA DFT Y FFT

TABLA 4-6.- NÚMERO DE MULTIPLICACIONES REQUERIDAS POR LOS ALGORITMOS DE LA DFT Y LA FFT.

$\gamma$	N	FFT	DFT
1	2	1	4
2	4	4	16
3	8	12	64
4	16	32	256
5	32	80	1024
6	64	192	4096
7	128	448	16384
8	256	1024	65536
9	512	2304	262144
10	1024	5120	1048576

La técnica para obtener  $X(n)$  a partir de  $\overline{X(n)}$ , consiste en rescribir  $\overline{X(n)}$  con su argumento en sistema binario.

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(2) \\ X(1) \\ X(3) \end{bmatrix} \quad \text{se convierte en} \quad \begin{bmatrix} X(00) \\ X(10) \\ X(01) \\ X(11) \end{bmatrix} \quad (4-47)$$

Si se invierten los bits de los argumentos binarios de (4-47), entonces:

$$\overline{X(n)} = \begin{bmatrix} X(00) \\ X(10) \\ X(01) \\ X(11) \end{bmatrix}, \quad \text{invertido:} \quad \begin{bmatrix} X(00) \\ X(01) \\ X(10) \\ X(11) \end{bmatrix} = X(n) \quad (4-48)$$

El entero obtenido de invertir los bits del entero "k", se denomina como "i". Si "i" es menor que k, implica que el nodo ha sido intercambiado en una operación previa, así se asegura la obtención de X(n) a partir de.

En la Tabla 4-7 se muestra el código, en el lenguaje de programación Visual Basic™ del algoritmo de la FFT<sup>27</sup>, desarrollado por la autora de la presente tesis, a partir del código FORTRAN original.

#### IV.1.5 Ejemplo de Cálculo de la Transformada de Fourier.

Hasta ahora se han descrito tres diferentes algoritmos para la obtención de la Transformada de Fourier de N datos discretos, sin embargo, ¿Cuál de ellos es el adecuado para aplicar a las pruebas de presión? ; con el fin de dar una respuesta a esta pregunta, se hace una comparación entre los resultados de cada uno de éstos.

La función elegida para realizar la comparación es:

$$g(t) = e^{-t} \quad 0 \leq t \leq 8 \quad (4-49)$$

TABLA 4-7.- SUBROUTINA DE LA FFT EN VISUAL BASIC™.

```

Static Sub nlgn(n, X1#(), Xi#(), SIGNO)
'   SIGNO = 1 estima la transformada de Fourier
'   -1 estima la antittransformada

Dim Lx, Nblock, Iblock, Lblock, Lbhalf, L%, K, FK, FLX, V, WK, WKI, IStart
Dim i, J, JH, Q, QI, II, Hold, HoldI
ReDim m(n)

Lx = 2 ^ n
ReDim Preserve X1#(1 To Lx), Xi#(1 To Lx)

For i = 1 To n: m(i) = 2 ^ (n - i): Next i

For L = 1 To n
  Nblock = 2 ^ (L - 1): Lblock = Lx / Nblock: Lbhalf = Lblock / 2: K = 0

  For Iblock = 1 To Nblock
    FK = K: FLX = Lx: V = SIGNO * 6.2831853 * FK / FLX
    WK = Cos(V): WKI = Sin(V): IStart = Lblock * (Iblock - 1)

    For i = 1 To Lbhalf
      J = IStart + i: JH = J + Lbhalf
      Q = X1#(JH) * WK - Xi#(JH) * WKI
      QI = X1#(JH) * WKI + Xi#(JH) * WK
      X1#(JH) = X1#(J) - Q: Xi#(JH) = Xi#(J) - QI
      X1#(J) = X1#(J) + Q: Xi#(J) = Xi#(J) + QI
    Next i

    For i = 2 To n
      II = i
      If K < m(i) Then GoTo NL8
      K = K - m(i)
    Next i
  NL8: K = K + m(II)
  Next Iblock
Next L

K = 0

For J = 1 To Lx
  If K < J Then GoTo NL9
  Hold = X1#(J): HoldI = Xi#(J): X1#(J) = X1#(K + 1): Xi#(J) = Xi#(K + 1)
  X1#(K + 1) = Hold: Xi#(K + 1) = HoldI
NL9: For i = 1 To n: II = i
      If K < m(i) Then GoTo NL10
      K = K - m(i):
    Next i
  NL10: K = K + m(II)
  Next J

If SIGNO < 0 Then Exit Sub

For i = 1 To Lx: X1#(i) = X1#(i) / FLX: Xi#(i) = Xi#(i) / FLX: Next i

End Sub

```

La Transformada de Fourier analítica  $G(f)$  de  $g(t)$  es:

$$G(f) = \frac{1}{1 + (2\pi f)^2} - j \frac{2\pi f}{1 + (2\pi f)^2} \quad (4-50)$$

En la Figura 4-10, se muestra la representación gráfica de la parte real e imaginaria de la función  $G(f)$ .

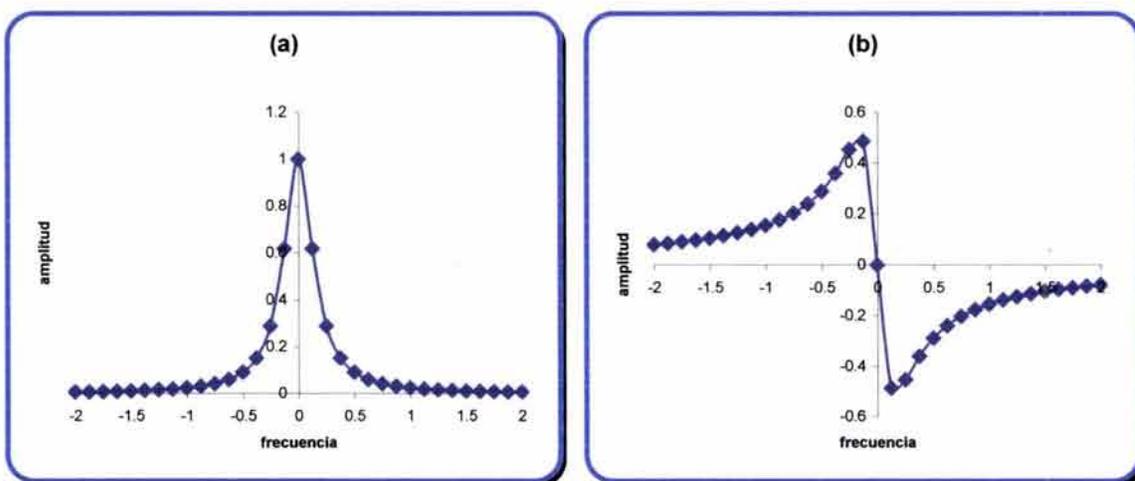


FIGURA 4-10.- A) PARTE REAL DE  $G(f)$  B) PARTE IMAGINARIA DE  $G(f)$

Se toman diferentes intervalos de muestreo, con el fin de evaluar la importancia del intervalo de Nyquist, definido en el capítulo III. El primer intervalo de muestreo elegido, es  $T = 0.25$ , por lo que el número de datos  $N = 32$ .

En el caso especial de la FFT, el número de datos  $N$  se ajusta para que cumpla con la relación  $N = 2^\gamma$ , para este caso  $\gamma = 5$ .

En la Figura 4-11, se muestran los resultados obtenidos con cada método para la parte real de  $G(f)$ , con un intervalo de muestreo  $T = 0.25$ ; en comparación con la solución analítica y en la Figura 4-12 la parte imaginaria de  $G(f)$ .

En el caso de la FFT, no se conoce el valor de la frecuencia, ya que la entrada a la subrutina son los vectores  $f(t)$  real e imaginaria, para valores de  $t$

uniformemente espaciados; y la salida, de la misma, son los vectores  $F(f)$  real e imaginaria; Por lo que se grafica la amplitud de frecuencias uniformemente espaciadas vs.  $N$ , es decir, el número de dato, para  $n = 1, 2, \dots, N$ . Debido a esto, no se puede comparar en la gráfica, con la solución analítica, solo se puede tomar en cuenta la forma de la curva.

En la Figura 4-11, puede observarse que las curvas que representan la parte real de la Transformada de Fourier, obtenidas por cada uno de los métodos, son simétricas respecto al dato  $n = N/2$ , esto se debe, a que la parte real de la ecuación (4-50) es par, y si tomamos en cuenta que la Transformada de Fourier discreta, es una función periódica, de la cual sólo tomamos los  $N$  valores distintos que la representan (Figura 4-7), se puede afirmar que los resultados para  $n > N/2$ , representan los datos para frecuencias negativas.

La parte imaginaria de la función (4-50), es impar, y por lo tanto asimétrica respecto a  $n = N/2$  (Figura 4-12; y por las razones expuestas en el párrafo anterior, los resultados para  $n > N/2$ , representan las frecuencias negativas.

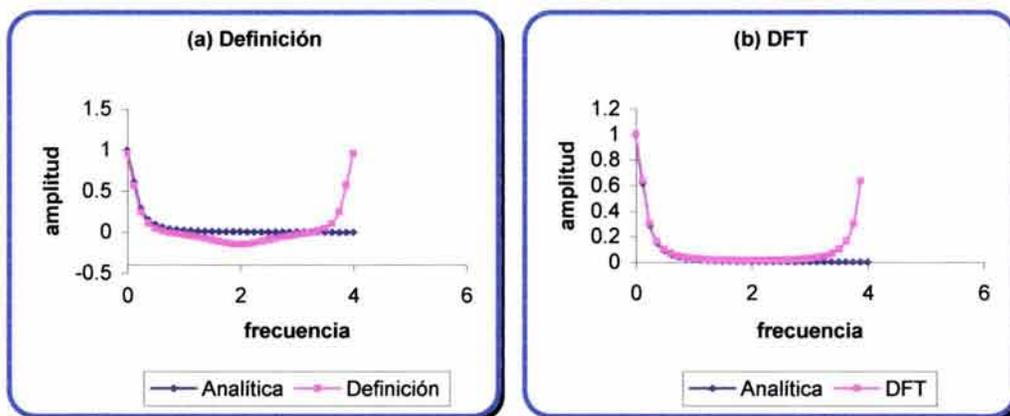


FIGURA 4-11.- COMPARACIÓN GRÁFICA DE LAS TÉCNICAS USADAS PARA ESTIMAR LA TRANSFORMADA DE FOURIER. PARTE REAL,  $T = 0.25$ .

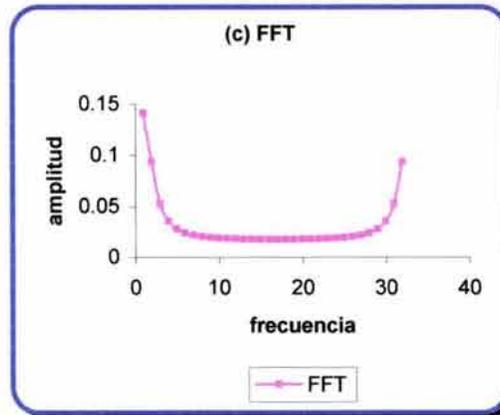
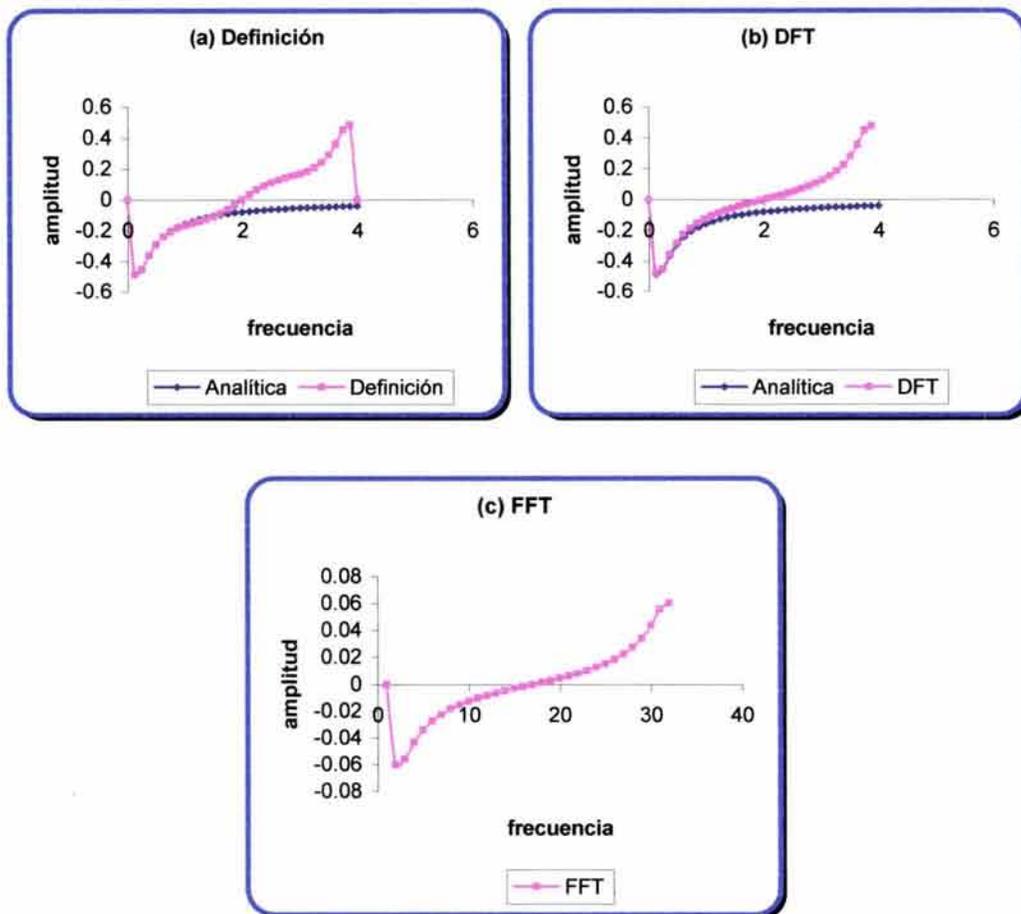


FIGURA 4-11.- CONTINUACIÓN

FIGURA 4-12.- COMPARACIÓN GRÁFICA DE LAS TÉCNICAS USADAS PARA ESTIMAR LA TRANSFORMADA DE FOURIER. PARTE IMAGINARIA,  $T = 0.25$ .

La comparación de los resultados obtenidos numéricamente con la solución analítica, debe hacerse para los datos  $n \leq N/2$ , por medio de una inspección a las Figuras 4-11 y 4-12, se observa que la DFT, tiene un mejor ajuste para un intervalo de muestreo  $T = 0.25$ .

En el siguiente experimento se tomó un intervalo de muestreo  $T = 0.1$ , los resultados de éste, se muestran en las Figuras 4-13 y 4-14, para la parte real e imaginaria de la Transformada de Fourier, respectivamente.

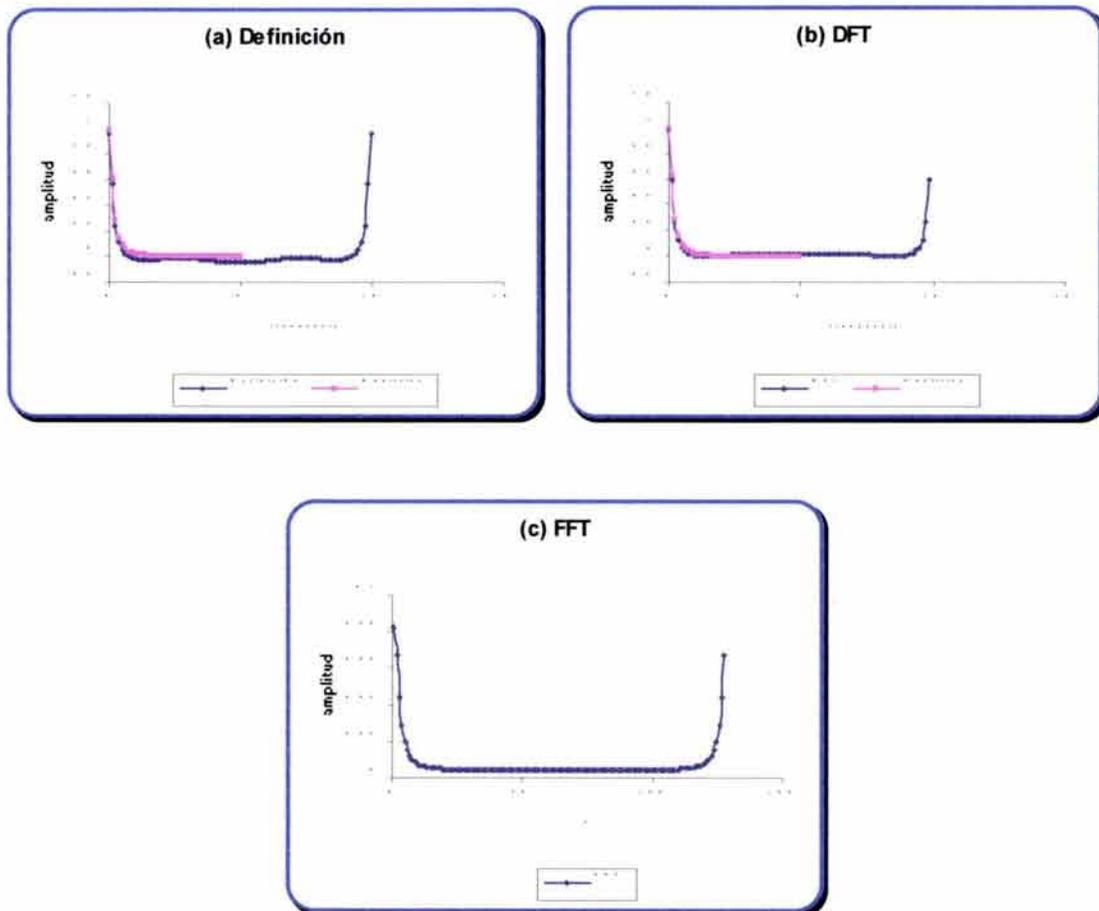


FIGURA 4-13.- COMPARACIÓN GRÁFICA DE LAS TÉCNICAS USADAS PARA ESTIMAR LA TRANSFORMADA DE FOURIER. PARTE REAL,  $T = 0.1$ .

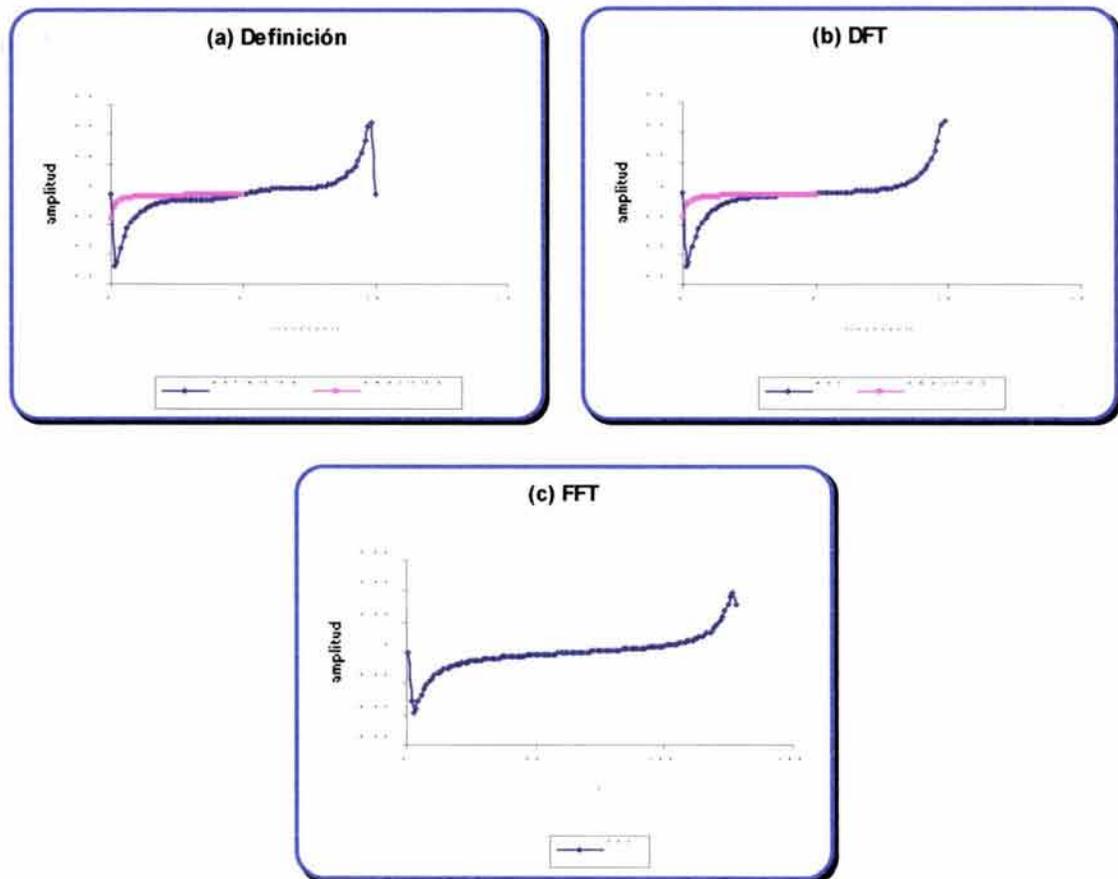


FIGURA 4-14.- COMPARACIÓN GRÁFICA DE LAS TÉCNICAS USADAS PARA ESTIMAR LA TRANSFORMADA DE FOURIER. PARTE IMAGINARIA,  $T = 0.1$ .

En las Figuras 4-13 y 4-14, se observa que el ajuste de la curva obtenida a partir de la definición mejoró, sin embargo, la DFT continúa teniendo mejor ajuste. La Transformada analítica se ha graficado hasta  $n = N/2$ , debido a que, como se explicó anteriormente, los resultados para  $n > N/2$ , representan a las frecuencias negativas.

En las Figuras 4-15 y 4-16, se muestran las curvas obtenidas para un intervalo  $T = 0.01$ , es decir, para 800 datos ( $N$ ); en éstas, se ve claramente que el ajuste a la función analítica, en todos los casos, es mejor que en los casos anteriores; por lo que se comprueba que entre mayor sea el número de muestras o datos, se tiene un mejor ajuste.

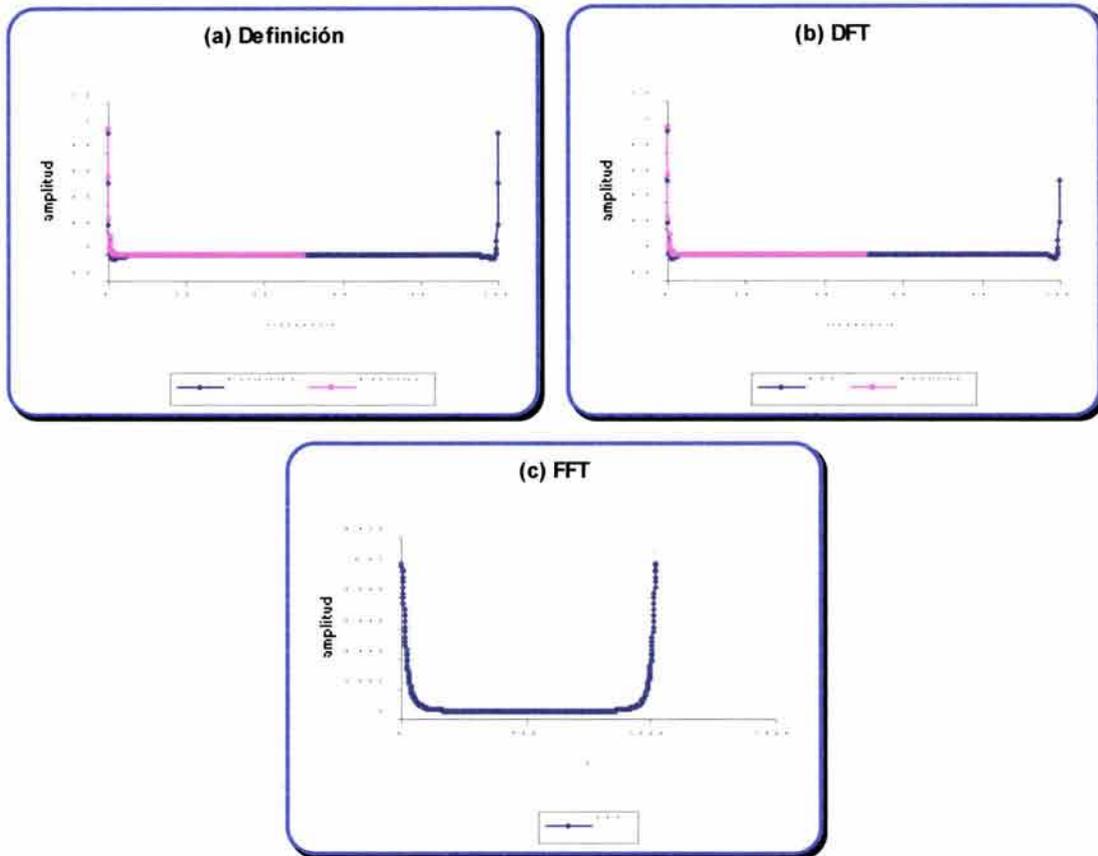


FIGURA 4-15.- COMPARACIÓN GRÁFICA DE LAS TÉCNICAS USADAS PARA ESTIMAR LA TRANSFORMADA DE FOURIER. PARTE REAL,  $T = 0.01$ .

El método que se considera el más apropiado para aplicar al análisis de los datos de las Pruebas de Presión, es la DFT, debido a que en los experimentos mostrados con anterioridad, mostró el mejor ajuste para diferentes valores del intervalo de muestreo  $T$ , sin que éste, tuviese que ser demasiado pequeño como en el caso de la definición; adicionalmente se considera que el número de datos manejados es del orden de 2000, por lo que, el tiempo de cómputo no representa mayor problema, como lo sería en el caso de otras aplicaciones, como los registros geofísicos a pozos o sísmica, donde se manejan millones de datos.

Como se estudió en el Capítulo III, la Transformada de Fourier de las funciones pares, es una función real, es decir, la parte imaginaria de ésta, es cero; para simplificar el análisis de los datos en las Pruebas de Presión, en el dominio de

la frecuencia, se hará un espejo de los datos, para simular una función par y evitar trabajar con la parte compleja.

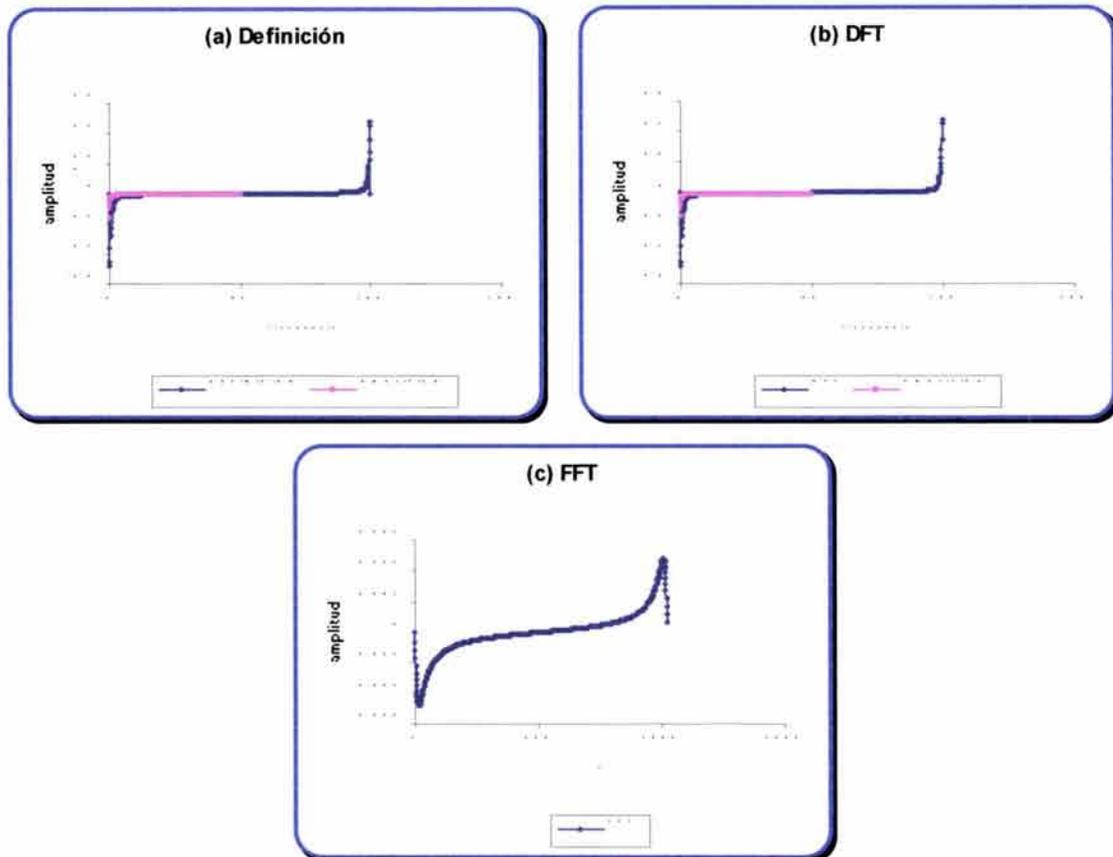


FIGURA 4-16.- COMPARACIÓN GRÁFICA DE LAS TÉCNICAS USADAS PARA ESTIMAR LA TRANSFORMADA DE FOURIER. PARTE IMAGINARIA,  $T = 0.01$ .

A continuación se presenta la investigación realizada, para definir la mejor práctica en el tratamiento de los datos de pruebas de presión.

Considérese la función exponencial mostrada en la ecuación (4-49), de la cual se han obtenido  $N$  datos, éstos son duplicados de diferentes maneras, formando las funciones mostradas en la Figura 4-17, todas éstas son simétricas, respecto al eje  $y$  o al dato  $N$ ; la parte real de su Transformada de Fourier, se muestra en la Figura 4-18 y en la Figura 4-19, la parte imaginaria.

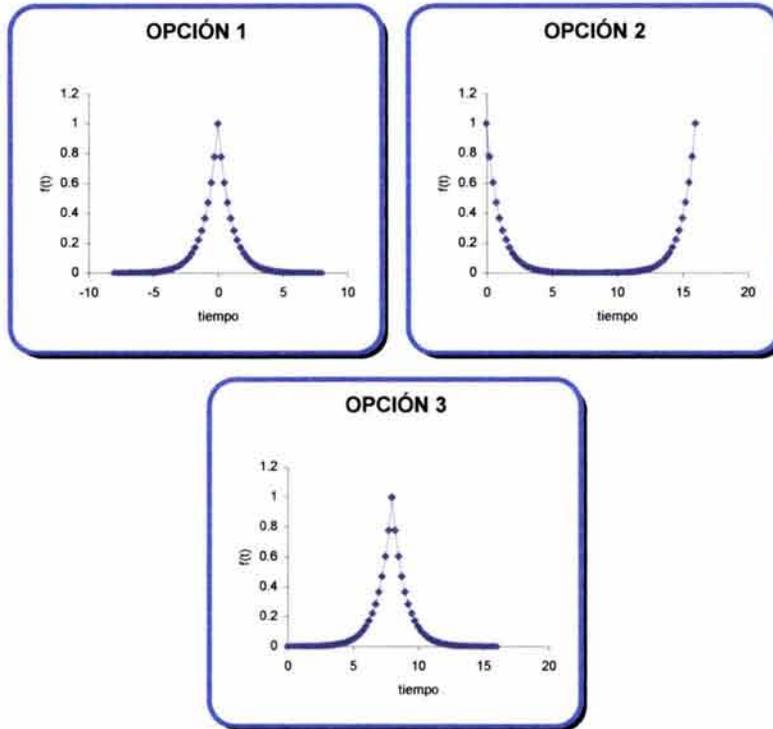


FIGURA 4-17.- FUNCIONES GENERADAS A PARTIR DE LA DUPLICACIÓN DE N DATOS DE LA FUNCIÓN (4-49).

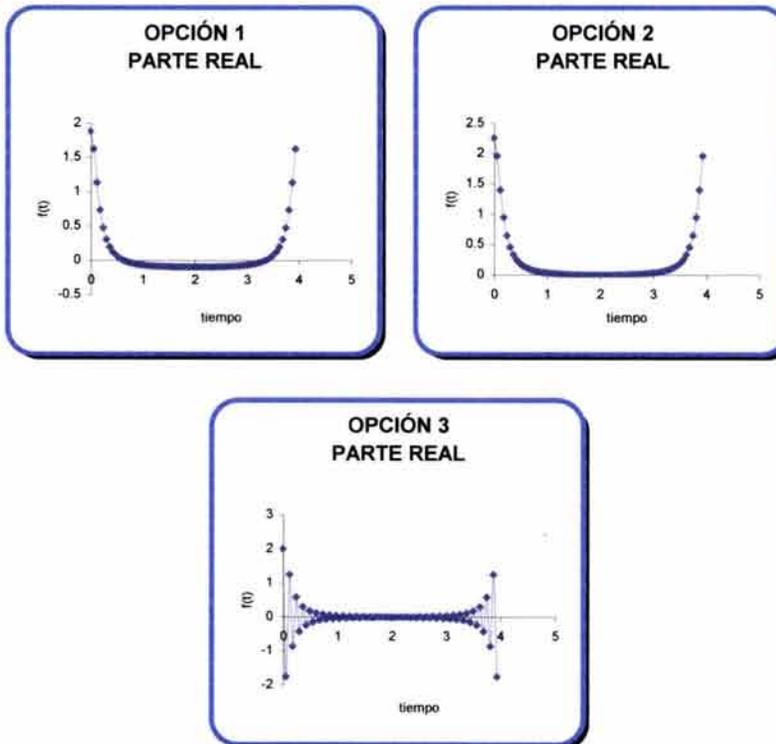


FIGURA 4-18.- PARTE REAL DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE LAS FUNCIONES MOSTRADAS EN LA FIGURA 4-17.

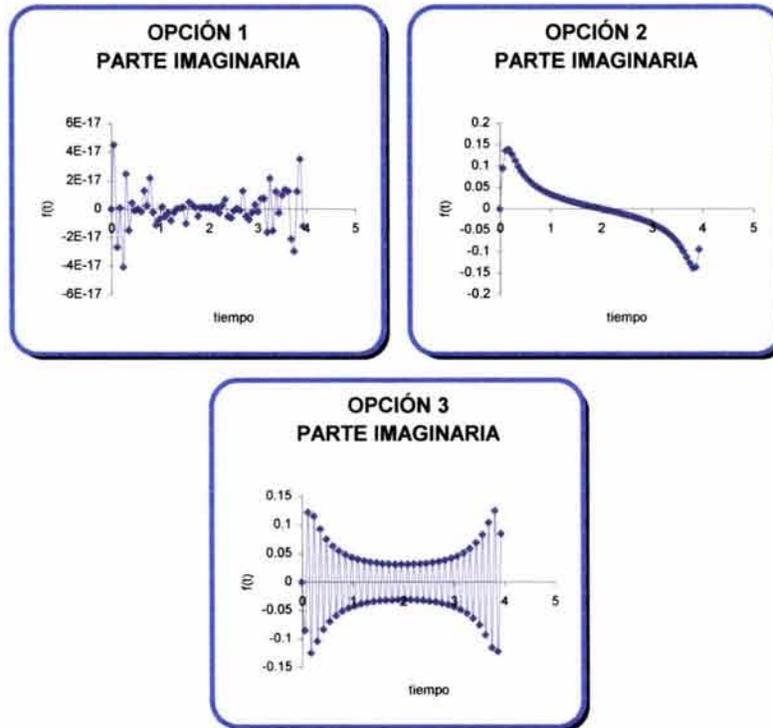


FIGURA 4-19.- PARTE IMAGINARIA DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE LAS FUNCIONES MOSTRADAS EN LA FIGURA 4-17.

La Opción 1 de la Figura 4-17, es una función par, por lo que  $f(t) = f(-t)$ ; En la Figura 4-19, se comprueba que la parte imaginaria de su Transformada de Fourier, es cero; y la parte real de la misma, es el doble de la parte real de la transformada de la función sin duplicar, es decir, dos veces la parte real de la ecuación 4-50.

Esto se debe al hecho, de que la parte real de la transformada de Fourier, es una integral definida, desde  $-a$  hasta  $a$  de una función par, y como se explicó en el Capítulo III, esta integral es igual al doble de la integral definida desde 0 hasta  $a$  de la misma función.

Como se explicó anteriormente la DFT, es una sumatoria, donde el valor del  $k$ -ésimo tiempo es  $t=kT$ , donde  $T$ , es el intervalo de muestreo de la función, en el caso de las opciones 2 y 3, la parte imaginaria de su Transformada de Fourier, es diferente de cero, debido a que se tienen solo valores de tiempo positivos, y por lo

tanto, también valores de  $k$  positivos, al realizarse la sumatoria, ésta resulta en el doble de la parte imaginaria de la función sin duplicar.

Con base en los resultados obtenidos, se concluye que para el análisis de los datos de las pruebas de presión, los datos de entrada se duplicarán como se muestra en la opción 1 de la Figura 4-17.

## IV.2 TRANSFORMADA DE FOURIER DEL MODELO DE UNA PRUEBA DE PRESIÓN.

En el Capítulo II del presente trabajo de tesis, se planteó el modelo de una prueba de presión, para un yacimiento homogéneo e infinito con flujo radial (ecuación 2-6); a partir de éste, se generó una prueba sintética<sup>28</sup>, cuya gráfica se muestra en la Figura 4-20.

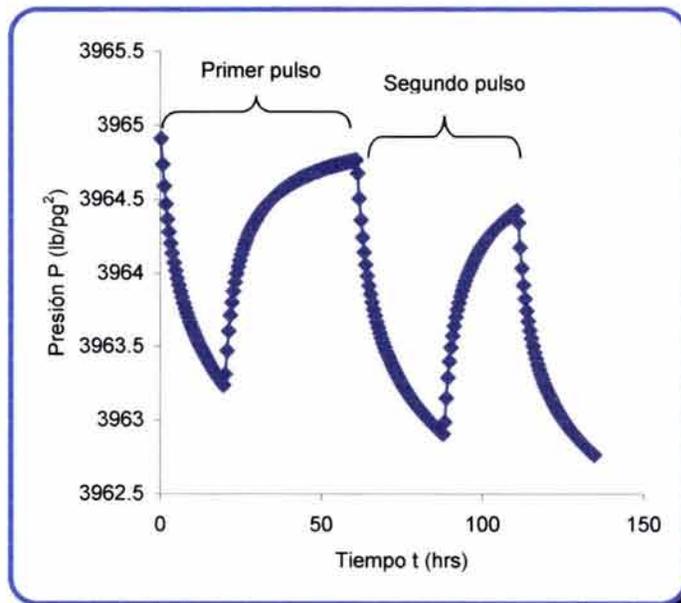


FIGURA 4-20.- REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UNA PRUEBA DE PRESIÓN SINTÉTICA.

El objetivo de este trabajo de tesis, es analizar los datos obtenidos con las pruebas de presión en el dominio de la frecuencia, en este caso la Figura 4-20, es

la representación de una prueba de presión "limpia", ya que el modelo es la idealización del comportamiento del yacimiento.

Como se explicó con anterioridad, para eliminar la parte imaginaria de la transformada de Fourier, se duplicarán los datos para tener una función par (Figura 4-21). En la Figura 4-22, se muestra la transformada de Fourier de estos datos, para diferentes intervalos de muestreo.

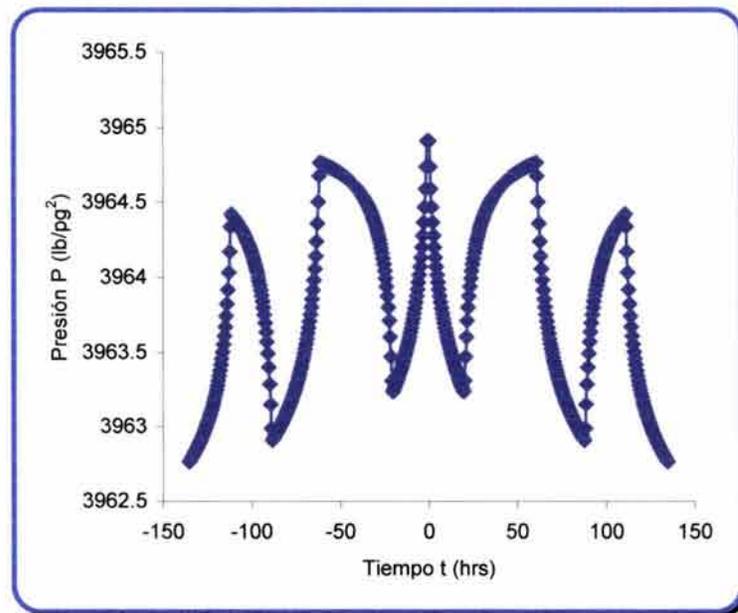


FIGURA 4-21.- PRUEBA DE PRESIÓN SINTÉTICA DUPLICADA.

Se puede observar que al disminuir el intervalo de muestreo  $T$ , se obtiene información de frecuencias más altas, para frecuencias bajas las amplitudes son mayores en la prueba de presión; para analizar mejor esto en la Figura 4-23, se muestra la prueba en el dominio de la frecuencia, para valores entre 0 y 1.

En este acercamiento se observa, que, para este caso en especial, las amplitudes oscilan entre 30 y  $-50$  para valores bajos de frecuencia, y van disminuyendo paulatinamente para frecuencias mayores a 0.2 aproximadamente. Se debe recordar que estos valores corresponden al doble de la parte real de la transformada de los datos originales.

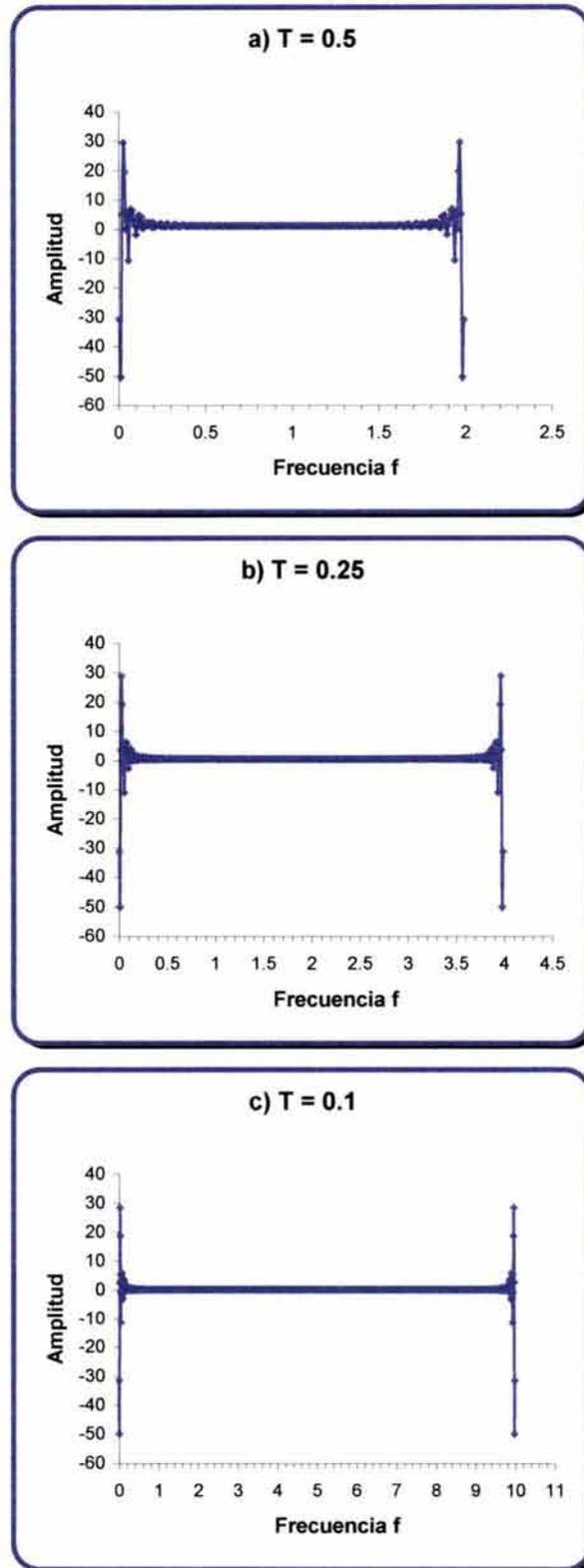


FIGURA 4-22.- TRANSFORMADA DE FOURIER DE UNA PRUEBA DE PRESIÓN SINTÉTICA, PARA DIFERENTES VALORES DEL INTERVALO DE MUESTREO  $T$ .

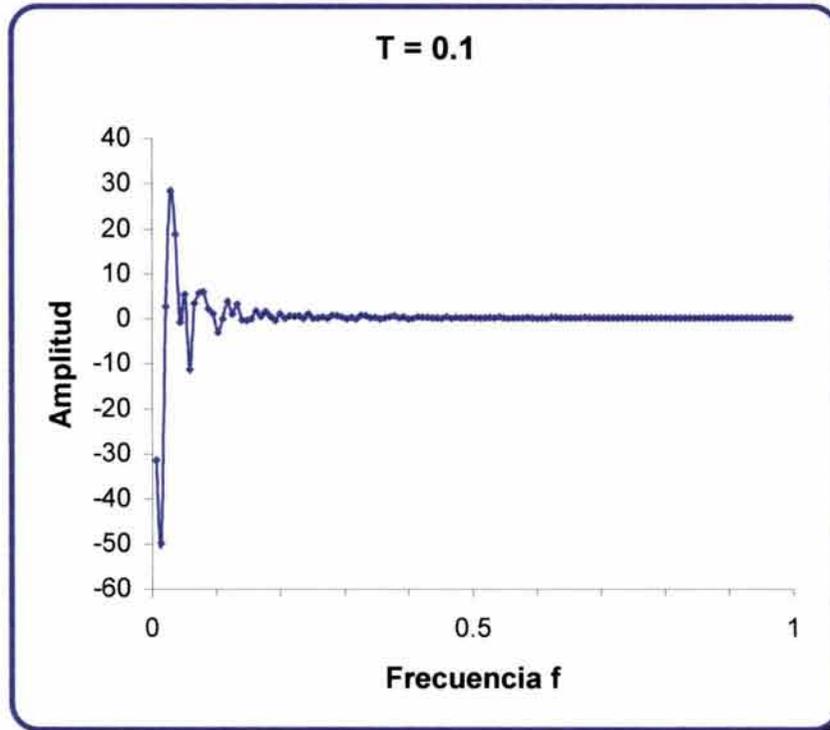


FIGURA 4-23.- REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UNA PRUEBA DE PRESIÓN SINTÉTICA EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA.

En la Figura 4-20, se observa que la prueba está formada por ciclos o pulsos, la transformada de Fourier del primero de éstos, es decir, para  $0 \leq t \leq 61$ ; se muestra en la Figura 4-24 (a); como en el caso anterior, se tienen amplitudes altas para frecuencias bajas, las cuales se detallan en la Figura 4-24 (b), en este caso, se tienen amplitudes que oscilan entre 16 y 0, las cuales decrecen para acercarse a cero para frecuencias cercanas a 0.3.

Haciendo un análisis similar con el segundo pulso, se obtienen los resultados mostrados en la Figura 4-25 (a), las frecuencias bajas se muestran con más detalle en la Figura 4-25 (b); en éstas, se puede observar que las amplitudes varían desde  $-1.5$  hasta 28 aproximadamente y tienden a cero para frecuencias mayores a 0.4.

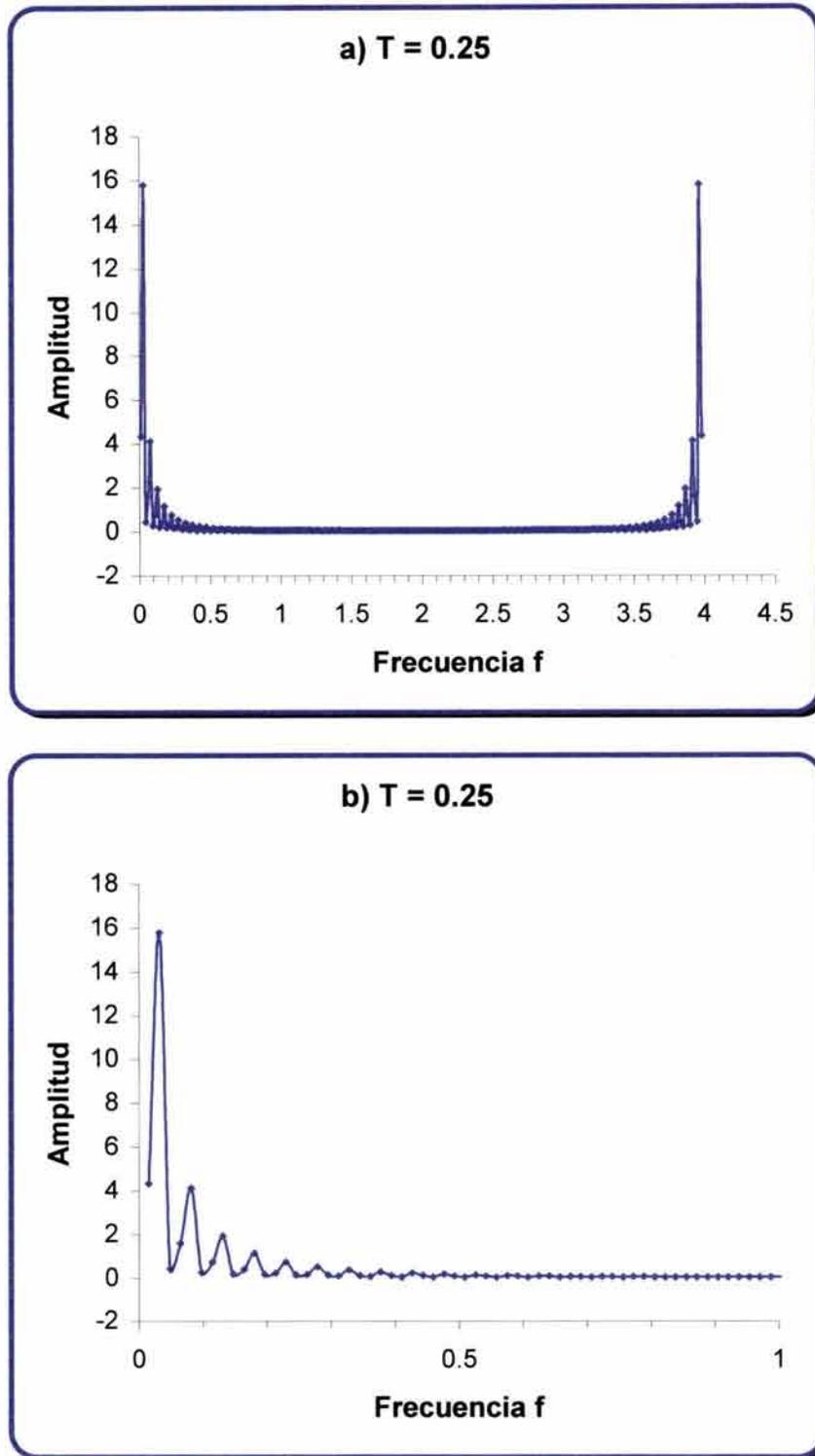


FIGURA 4-24.- TRANSFORMADA DE FOURIER DEL PRIMER PULSO DE LA PRUEBA DE PRESIÓN SINTÉTICA.

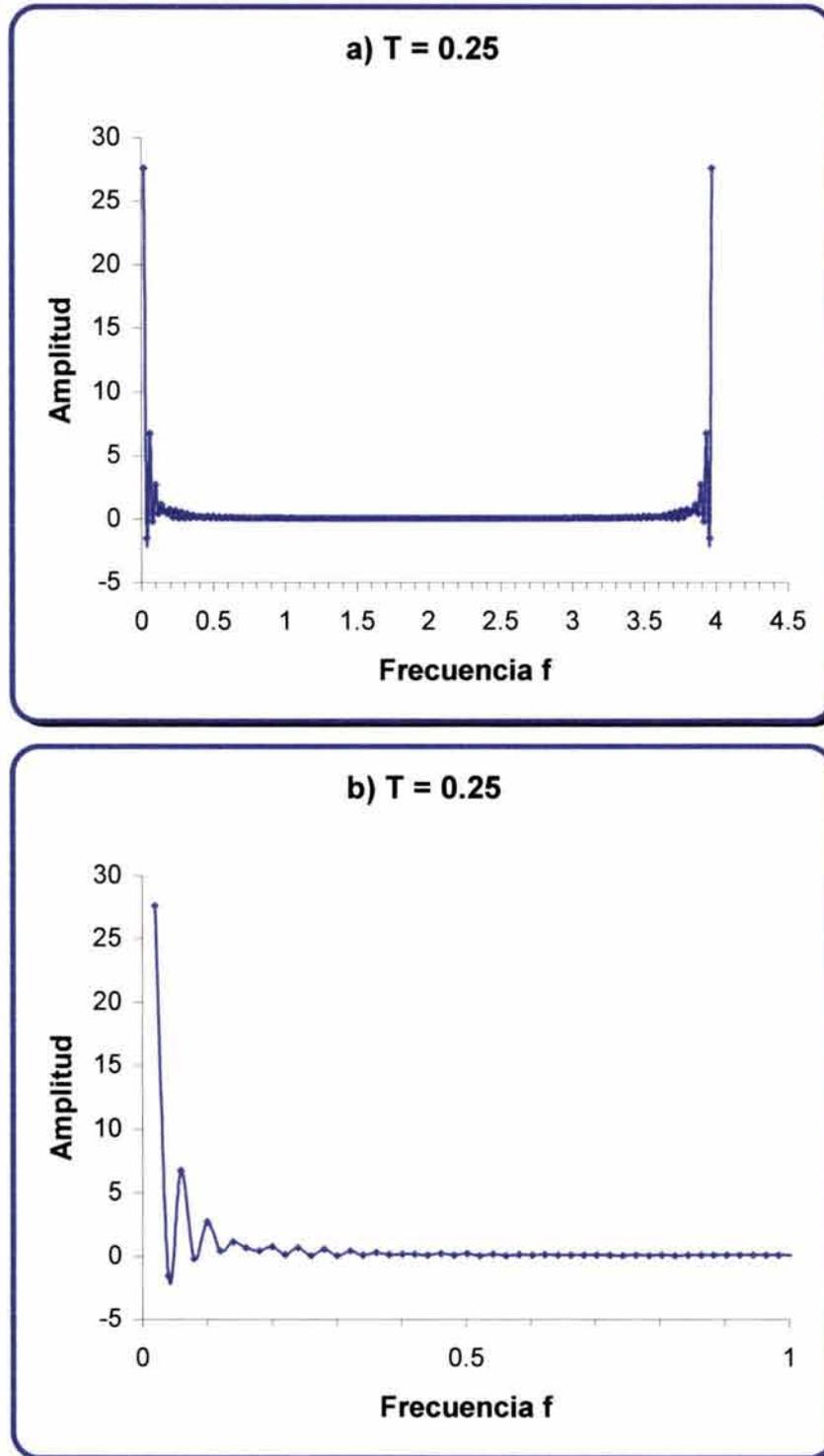


FIGURA 4-25.- TRANSFORMADA DE FOURIER DEL SEGUNDO PULSO DE LA PRUEBA DE PRESIÓN SINTÉTICA.

Hasta ahora se han mostrado los resultados en gráficas con escala normal, para observar con más detalle las diferencias en amplitud, se usa la escala semi-logarítmica en el eje y.

En la Figura 4-26, se muestra la prueba de presión sintética, en el dominio de la frecuencia en una escala semi-logarítmica, es importante aclarar, que se ha tomado el valor absoluto de las amplitudes negativas, ya que cualquier logaritmo está definido solo para valores positivos. Estos puntos se encuentran resaltados con color rojo para su fácil identificación.

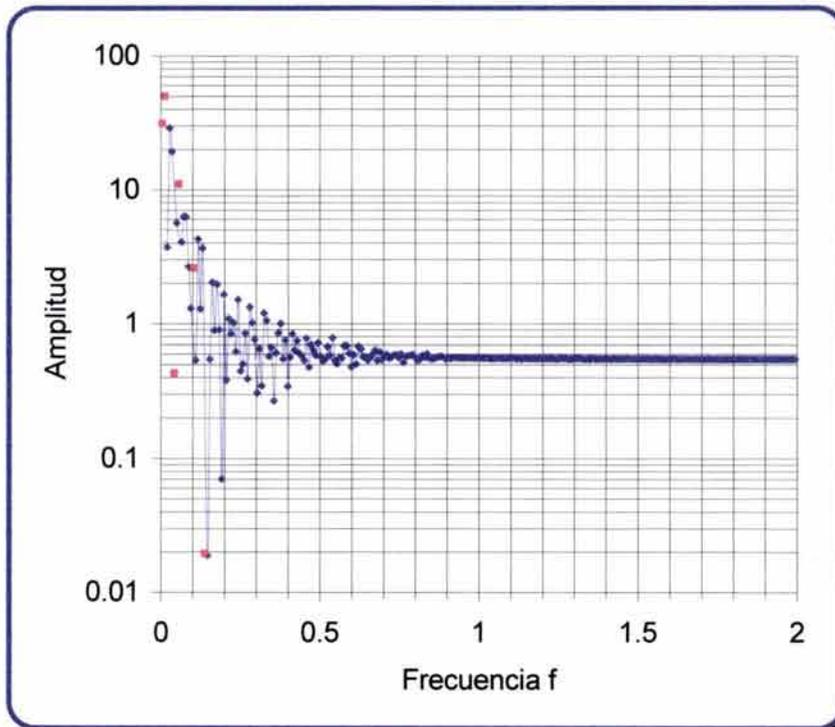


FIGURA 4-26.- PRUEBA DE PRESIÓN SINTÉTICA EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA, ESCALA SEMI-LOGARÍTMICA.

En la gráfica anterior, se observa que para frecuencias mayores a 0.8 la curva se vuelve casi constante con un valor de amplitud de 0.6 aproximadamente, en las siguientes figuras, se muestran en escala logarítmica la transformada de Fourier de los pulsos que forman la muestra.

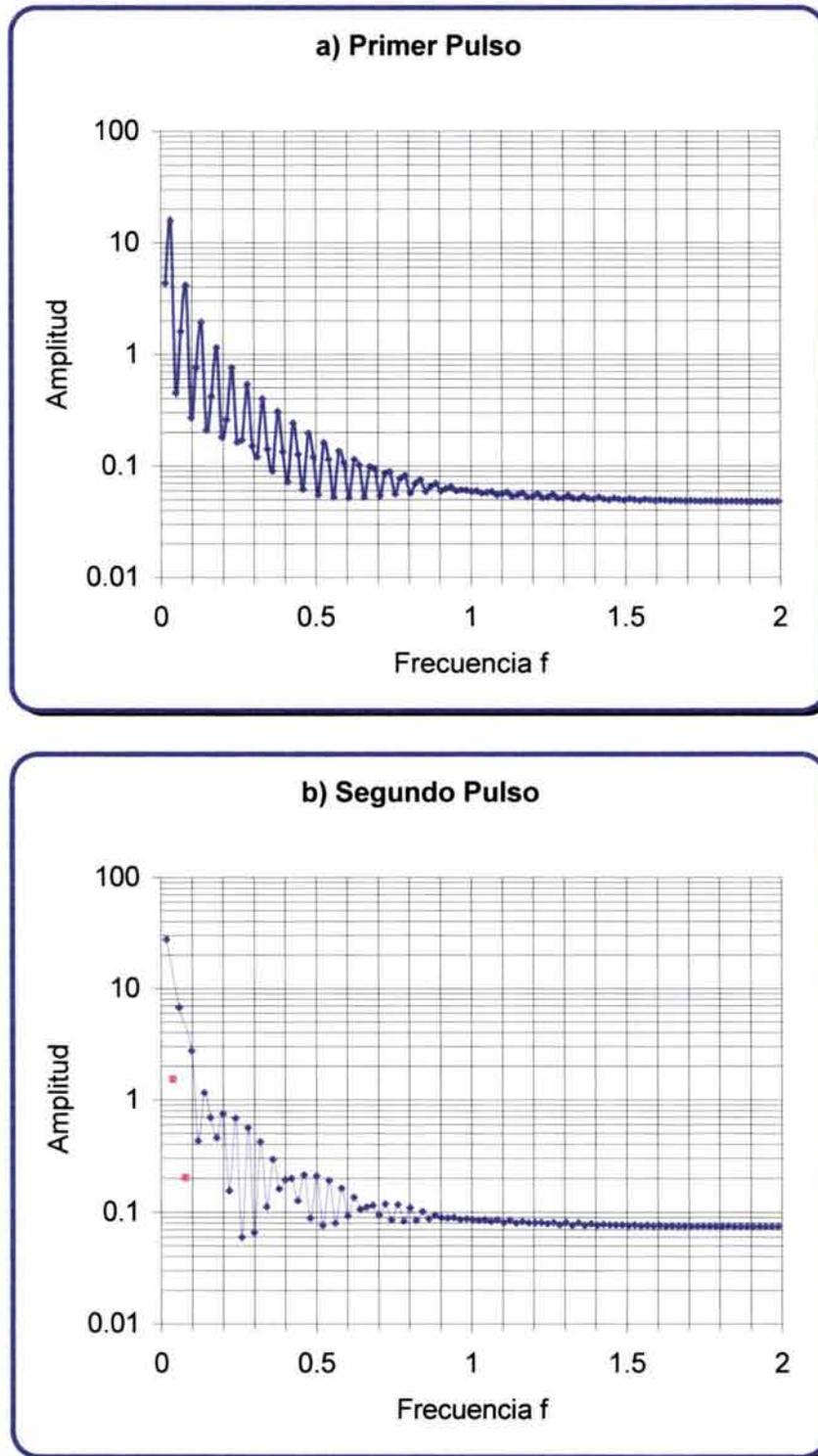


FIGURA 4-27.- TRANSFORMADA DE FOURIER DE LA PRUEBA DE PRESIÓN SINTÉTICA.  
A) PRIMER PULSO Y B) SEGUNDO PULSO.

En la Figura 4-27, se observa que para frecuencias mayores a 1, la función tiende a ser constante en el dominio de la frecuencia.

Con base al análisis de las figuras anteriores, se concluye que la prueba de presión sintética en el dominio de la frecuencia, tiende a ser una constante conforme incrementa el valor de la frecuencia.

Una parte importante en el análisis de las pruebas de presión, es la manera en que las modificaciones que se realizan en el dominio de la frecuencia, afectan a la función en el dominio del tiempo, para evaluar esto, se estudia el caso de un filtro "pasa bajas" y del suavizamiento de la curva en la frecuencia.

Para evaluar la manera en que el cálculo afecta el regreso a el dominio del tiempo, se ha obtenido la transformada inversa de Fourier, de la representación en el dominio de la frecuencia de la prueba de presión sintética mostrada en la Figura 4-11. El resultado obtenido se muestra a continuación, en la Figura 4-28.

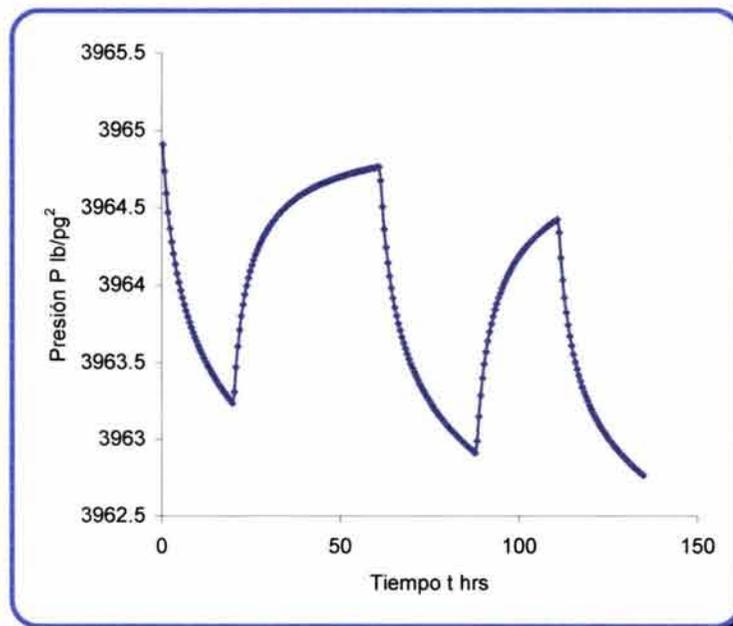


FIGURA 4-28.- TRANSFORMADA INVERSA DE FOURIER DE LA REPRESENTACIÓN EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA UNA PRUEBA DE PRESIÓN SINTÉTICA.

En la siguiente figura, se muestra el error entre la curva correspondiente a la transformada inversa de Fourier y los datos originales, teóricamente éste debería ser cero, ya que se tomaron los resultados de la transformada de los datos originales; sin embargo existe un error mínimo, debido a la manipulación de los datos dentro del cómputo de la Transformada y antitransformada de Fourier.

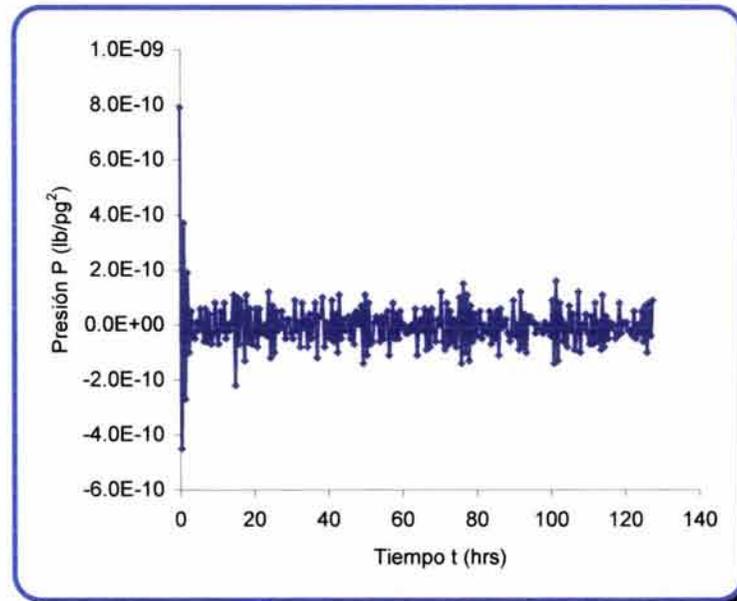


FIGURA 4-29.- ERROR DEBIDO AL CÁMPUTO DE LA ANTITRANSFORMADA DE FOURIER DE UNA PRUEBA DE PRESIÓN SINTÉTICA EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA.

Los errores debido al cómputo, se consideran despreciables, ya que su magnitud es del orden de  $2 \times 10^{-10}$ , este dato es importante, para analizar las variaciones por efecto del truncamiento de los datos en el dominio de la frecuencia, al utilizar un filtro pasa bajas o del suavizamiento de la curva.

Como se explicó en el capítulo anterior, un filtro "pasa bajas" trunca los datos del dominio de la frecuencia a partir de cierto valor, conservando solo las frecuencias bajas. En la Figura 4-26, se observa que la prueba de presión sintética en el dominio de la frecuencia, se vuelve casi constante para frecuencias mayores a 0.9; se utilizó un filtro "pasa bajas" para truncar las frecuencias mayores a este

valor, el resultado de este experimento se muestra en la Figura 4-30, y en la Figura 4-31, el error respecto a los datos originales.

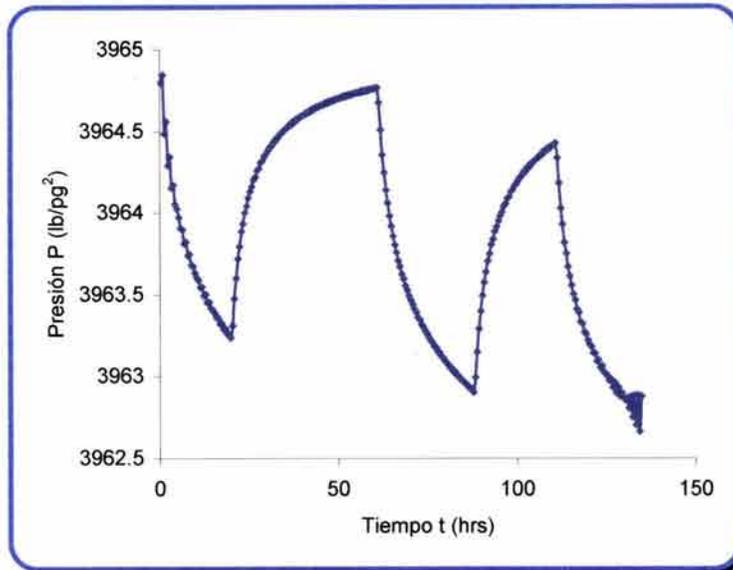


FIGURA 4-30.- RESULTADO DEL FILTRO "PASA BAJAS" HASTA UNA FRECUENCIA DE 0.9.

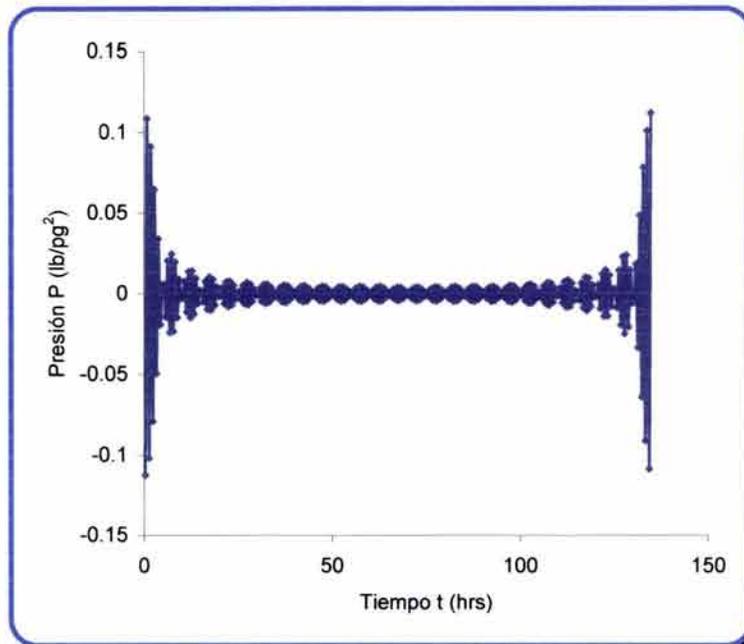


FIGURA 4-31.- ERROR DEL RESULTADO DEL FILTRO "PASA BAJAS", RESPECTO A LOS DATOS ORIGINALES. HASTA UNA FRECUENCIA DE 0.9.

En el caso del filtro "pasa bajas" para una frecuencia máxima de 0.9, se observa que el error en la presión respecto a los datos originales varía de  $-0.12$  a

0.12. A continuación, se muestran los resultados para el mismo tipo de filtro con una frecuencia máxima de 0.5.

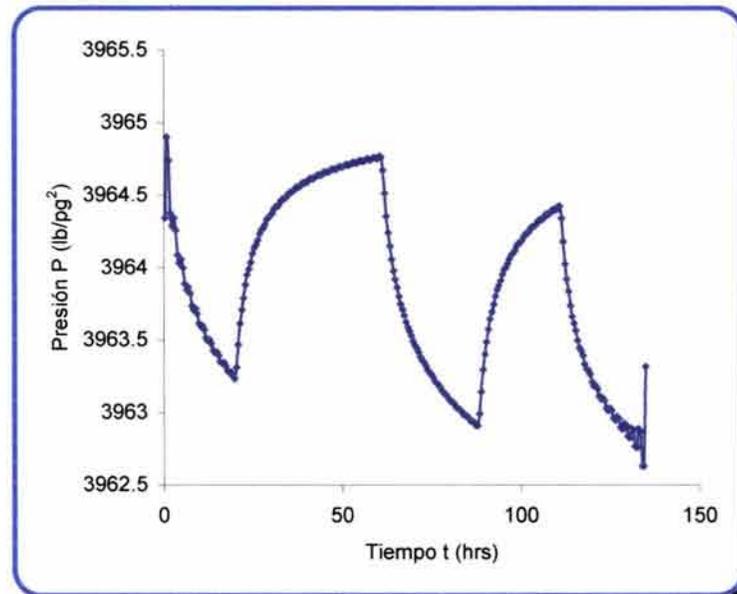


FIGURA 4-32.- RESULTADO DEL FILTRO "PASA BAJAS" HASTA UNA FRECUENCIA DE 0.5.

El filtro "pasa bajas" para la frecuencia máxima de 0.5, arroja resultados cuyo error, respecto a los datos originales, varía en un rango de presión de  $-0.6$  a  $0.6$  psi., observe la Figura 4-33; esto es, con una amplitud de 1.2 unidades de presión.

Con base en el análisis de las Figuras 4-28 a 4-33, se concluye que un filtro "pasa bajas", afecta en mayor medida a la prueba de presión, en cuanto menor sea la frecuencia limite a considerar; los datos que se ven más afectados son los iniciales y los finales, teniendo en estos puntos el mayor error y la mayor oscilación de resultados.

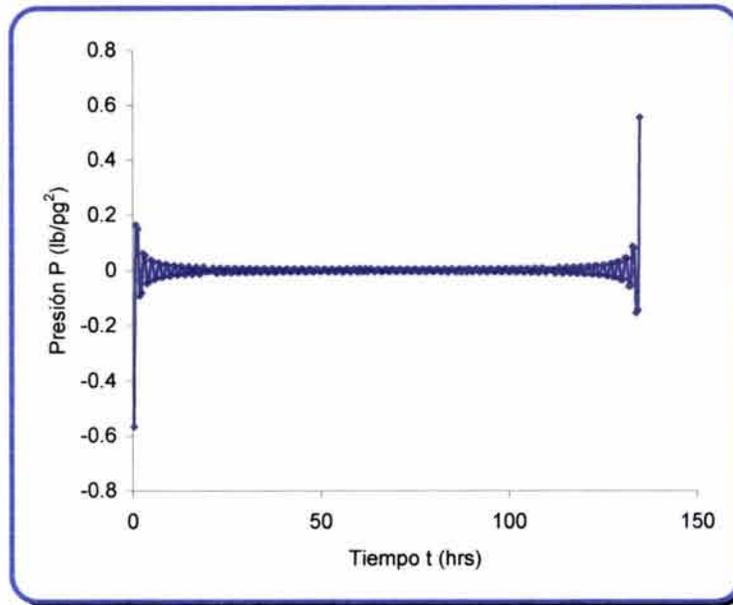


FIGURA 4-33.- ERROR DEL RESULTADO DEL FILTRO "PASA BAJAS", RESPECTO A LOS DATOS ORIGINALES. HASTA UNA FRECUENCIA DE 0.5.

La prueba de presión sintética en el dominio de la frecuencia, tiende a ser una constante en cuanto aumenta el valor de la frecuencia. Sí para esta parte de la curva se suaviza la curva, es decir, se toma el promedio aritmético de las amplitudes en esos puntos, y se hace constante, se modifica el resultado de la transformada inversa de la prueba como se muestra a continuación.

En la Figura 4-26, se observa que la curva de la prueba de presión sintética en el dominio de la frecuencia, se vuelve constante para valores de frecuencia mayores a 0.8, por lo que a partir de este valor, se tomará el promedio aritmético de las amplitudes correspondientes; en la Figura 4-34, se muestra la inversión de la curva resultante, es decir, en el dominio del tiempo.

En la Figura 4-35, se muestra la gráfica del error resultante respecto a los datos originales; se observa que este varía desde  $-0.015$  a  $0.015$ ; esto es, una amplitud de 0.03 psi, lo cual es mucho menor, al error obtenido, aplicando un filtro pasabajos.

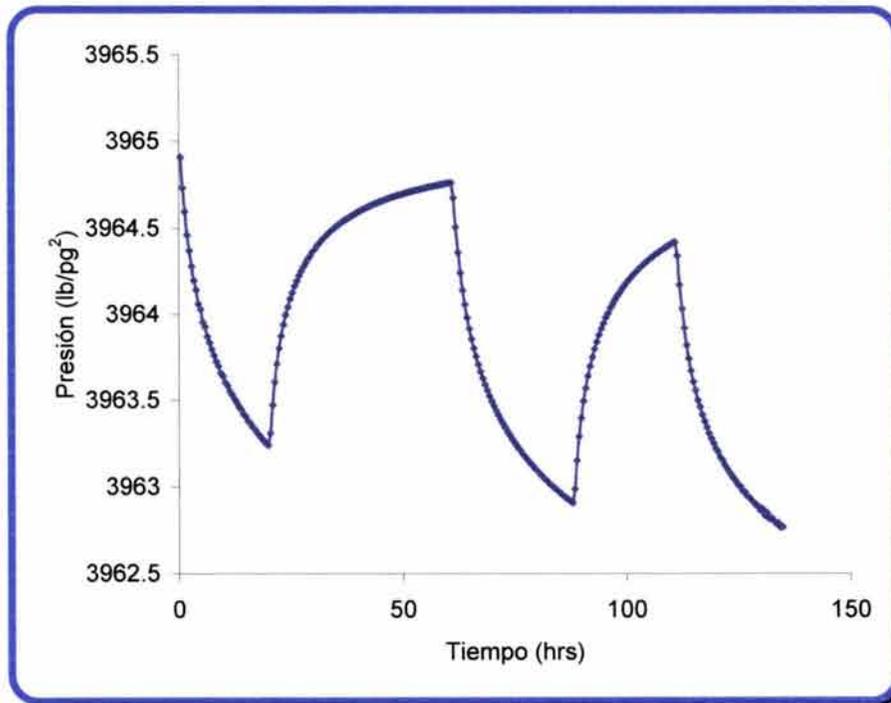


FIGURA 4-34.- RESULTADO DEL SUAVIZAMIENTO DE LA CURVA PARA FRECUENCIAS MAYORES A 0.8.

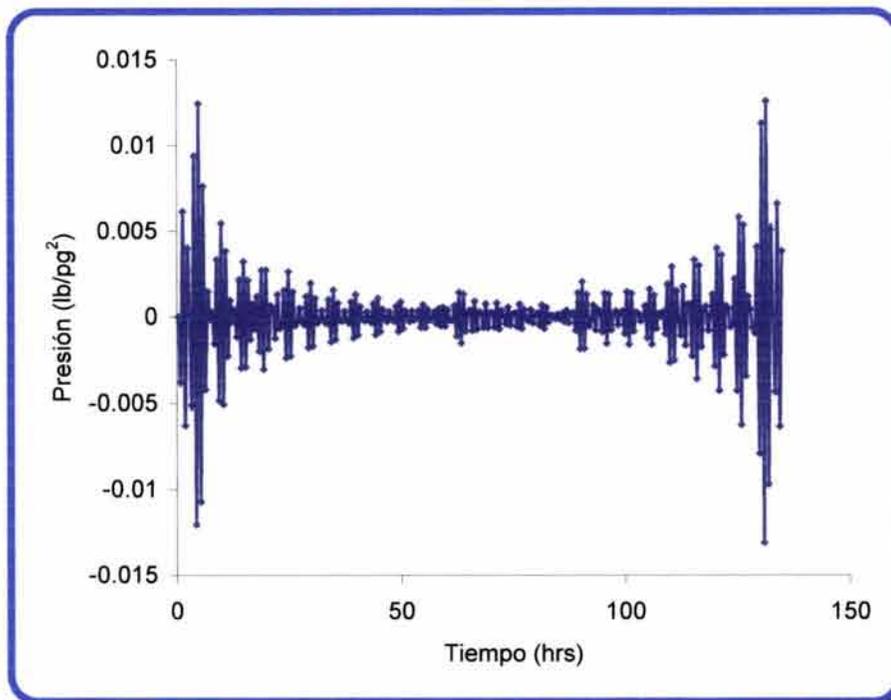


FIGURA 4-35.- ERROR DEL RESULTADO DEDEL SUAVIZAMIENTO DE LA CURVA PARA FRECUENCIAS MAYORES A 0.8, RESPECTO A LA PRUEBA ORIGINAL.

Como una primer hipótesis, se tiene que: el tomar el promedio aritmético de los datos en el dominio de la frecuencia para llevarlos al dominio del tiempo, causa un error menor al que causa el uso de un filtro "pasa bajas".

Para analizar esta hipótesis, se tomaron diferentes frecuencia a partir de las cuales se toma el promedio aritmético, en la Figura 4-36, se muestran las gráficas del error obtenido para cada caso.

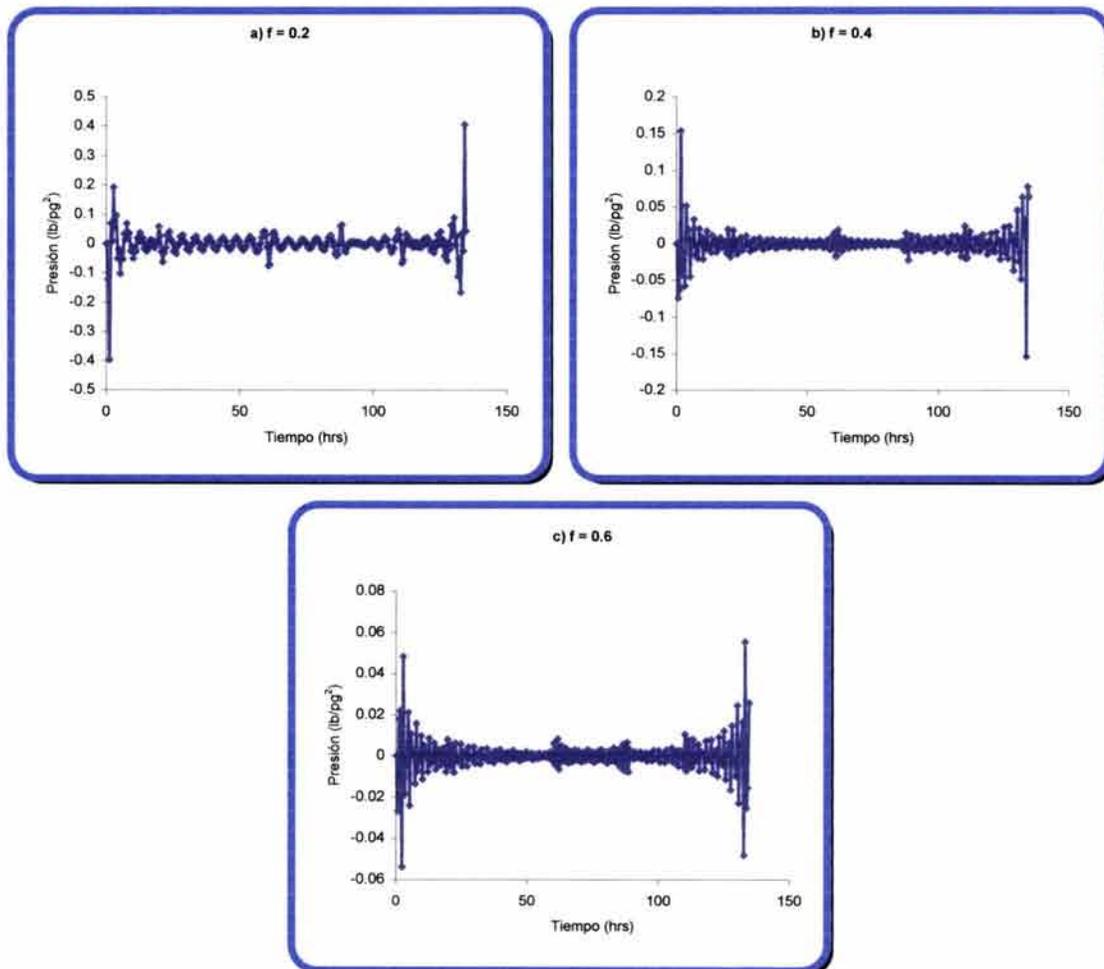


FIGURA 4-36.- ERROR DEL RESULTADO DEL SUAVIZAMIENTO DE LA CURVA A PARTIR DE DIFERENTES FRECUENCIAS, RESPECTO A LA PRUEBA ORIGINAL.

Analizando en conjunto las Figuras 4-26 y 4-36, se observa que a partir de la frecuencia igual a 0.2, la amplitud de la prueba varía de 0.2 a 2, y el error al

tomar el promedio aritmético de los datos a partir de esta frecuencia, es mayor que para frecuencias iguales a 0.4 y 0.6. En estos dos últimos casos, la amplitud de la curva 4-25 varía de 0.3 a 0.9 y de 0.5 a 0.6 respectivamente; en la Figura anterior se observa que el rango de error, para cada uno de éstos, es de  $-0.15$  a  $0.15$  y de  $-0.06$  a  $0.06$  aproximadamente.

Con base en el análisis de los casos anteriores, tanto para un filtro "pasa bajas" como para la modulación de amplitud, se concluye que esta última, afecta en menor medida a la prueba original, teniéndose el menor error para estos casos.

Es importante mencionar, que el experimento se realizó considerando aisladamente los diferentes pulsos, resultando en conclusiones similares.

### **IV.3 MODELOS DE REPRESENTACIÓN DEL RUIDO Y SU TRANSFORMADA DE FOURIER.**

#### **IV.3.1 Ruido Gaussiano y de Cuantización.**

El ruido Gaussiano, se presenta aleatoriamente tanto en la sonda de medición, como en el pozo y yacimiento; se debe a diversos factores como los equipos de generación eléctrica, malacates, etc.

El ruido de cuantización, se debe al equipo de medición. A través de los años se han desarrollado diversos tipos de sondas de medición de presión, para pruebas de pozos, éstas incluyen desde las de tubo de bourdon helicoidal, hasta las de cristal de cuarzo.

Para medir la presión se usa un elemento mecánico, que se diseña y construye para deformarse cuando se le aplica presión. Con este mecanismo se convierte la presión en movimiento mecánico; en seguida este movimiento debe ser manipulado para obtener una salida de tipo eléctrico o de algún otro tipo. Finalmente puede ser necesario el acondicionamiento de la señal, dependiendo del

---

tipo de sensor y de la aplicación. En la Figura 4-37, se ilustran estos tres bloques del funcionamiento de un medidor de presión.

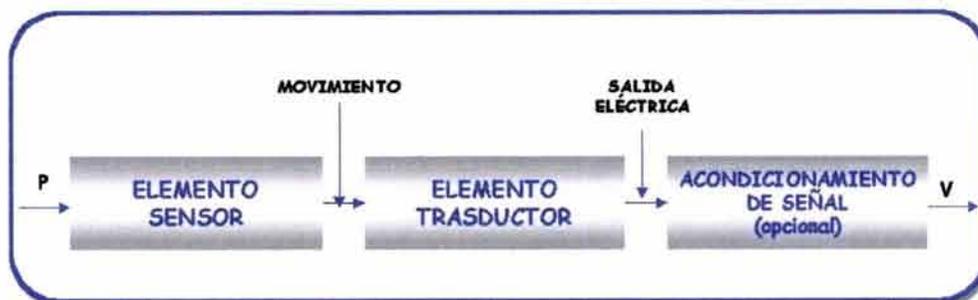


FIGURA 4-37.- FUNCIONAMIENTO DE UN SENSOR DE PRESIÓN.

Los sensores de presión electromecánicos o transductores de presión, convierten el movimiento mecánico generado por un dispositivo en una señal eléctrica. Estos sensores son más útiles y adaptables que los mecánicos, especialmente cuando son aplicados a la adquisición de datos (como es el caso de las pruebas de presión) y control de sistemas. En éstos, la señal eléctrica de salida es directamente proporcional a la presión aplicada dentro de un amplio rango de presión. Para la medición dinámica de la presión, es muy importante considerar las características de frecuencia del transductor.

Existe una gran variedad de medidores del tipo electromecánico, uno de éstos, es el transductor piezoeléctrico (Figura 4-38), éstos miden la presión en base a una corriente eléctrica generada por un cristal, generalmente de cuarzo. Existen cerámicas especiales, polarizadas artificialmente para que posean la propiedad de la piezoelectricidad, siendo éstas, más sensibles que los cristales naturales.

El cuarzo es un mineral que posee una propiedad llamada piezoelectricidad. La piezoelectricidad, es la capacidad que poseen determinados minerales para producir corrientes eléctricas, cuando se les aplica presión. Los materiales piezoeléctricos manifiestan fenómenos eléctricos y mecánicos reversibles, es decir, si se aplica una carga mecánica a las caras de un cristal, aparecen cargas eléctricas en ellas; por el contrario, si se aplican cargas eléctricas, entonces se

produce una deformación de las caras del cristal, en forma idéntica a como hubiera sido necesario hacerlo para inducir cargas de forma mecánica.

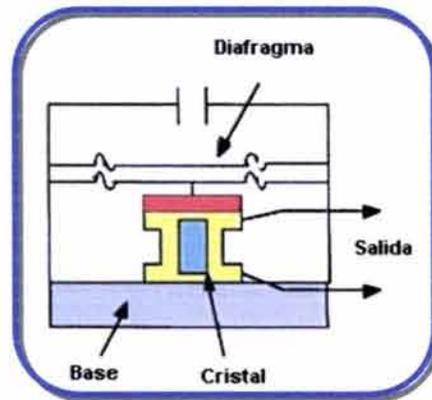


FIGURA 4-38.- TRASDUCTOR PIEZOELÉCTRICO.

La señal de salida de los sensores piezoeléctricos tiene alta impedancia, por lo que requiere un acondicionamiento especial de la señal, como amplificadores de carga y cable coaxial con tratamiento para ruido; por lo tanto, algunos diseños tienen un amplificador integrado, la salida es entonces una señal de baja impedancia; esto, reduce los problemas de cableado y simplifican el acondicionamiento de la señal. Es importante recordar, que los sensores piezoeléctricos, dan una señal de salida solo cuando existe un cambio en la de entrada, esto significa, que son ideales para medir variaciones de presión.

Para dar una medición de la presión, a partir de la señal eléctrica de salida, las sondas deben calibrarse, es decir, se debe tener una relación de la presión aplicada y la corriente generada. Para lograrlo se realizan pruebas de laboratorio, en las cuales se aplica una presión conocida y se mide la corriente generada por el cristal para diferentes temperaturas; con estas mediciones, se genera un banco de datos (Figura 4-39), a los cuales se les ajusta una función que generalmente es del tipo:

$$P_c = G + Hs + Is^2 + Js^3 \quad (4-51)$$

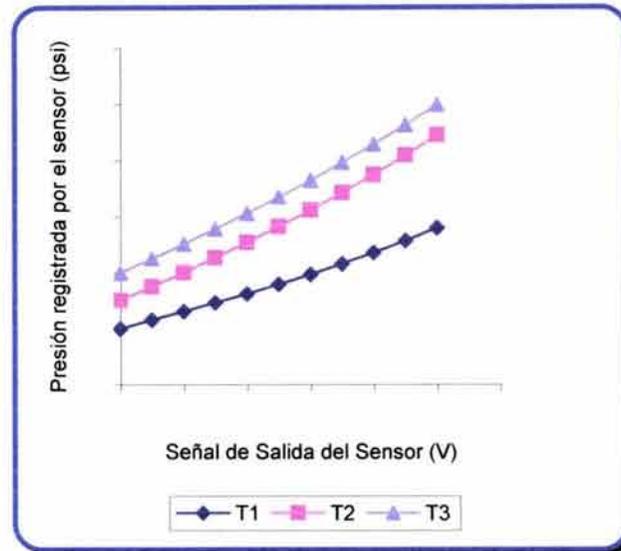


FIGURA 4-39.- REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA CALIBRACIÓN DE UN SENSOR DE PRESIÓN.

Los coeficientes G, H, I y J, se obtiene durante la calibración, en función de la Temperatura; "s" es la señal de salida de la sonda en voltz o Hertz.

Los parámetros de medición que describen el funcionamiento de los transductores, se dividen típicamente en estáticos y dinámicos; dentro de los primeros se encuentran la precisión, la resolución, la estabilidad y la sensibilidad.

La precisión se define como la suma algebraica de todos los errores que influyen la medición de la presión, éstos son causados a su vez por otros factores:

**Linealidad.** El sensor de presión puede modelarse con una línea recta, en función de la presión real aplicada como:

$$V_{salida} = k_0 + k_1 P \quad (4-52)$$

donde  $k_0$  representa las pérdidas, generalmente por efecto de la temperatura, y  $k_1$  la sensibilidad a la presión expresada en Voltz / unidad de

presión. La linealidad se refiere a la desviación del comportamiento real de la sonda respecto al ideal, ecuación 4-52. La linealidad se ilustra en al Figura 4-40.

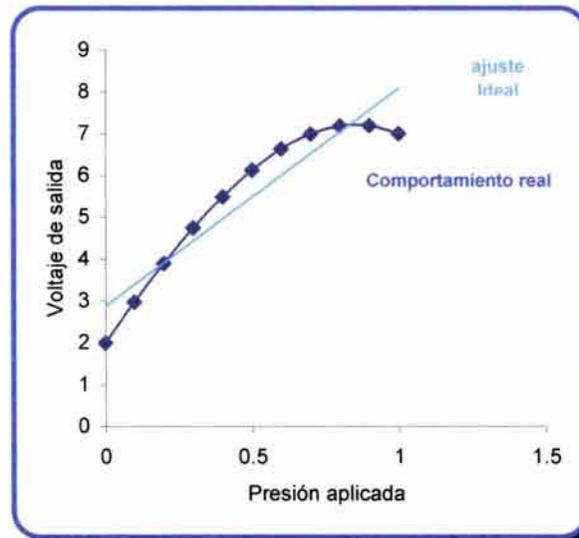


FIGURA 4-40.- LINEALIDAD DE UNA SONDA DE PRESIÓN.

**Desviación cuadrática media (DCM).** Expresa la diferencia entre la presión real aplicada al transductor y la respuesta expresada por el sensor, en el n-simo punto de presión y temperatura, medido durante la calibración.

$$DCM = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} (Pc_i - Pa_i)^2} \quad (4-53)$$

La DCM, es una medida de la calidad del ajuste matemático a la respuesta del sensor a una temperatura constante, Figura 4-41; es función de la linealidad del transductor y del procedimiento de calibración.

**Repetibilidad.** Es la capacidad del sensor de producir la misma señal de salida con la aplicación consecutiva de la misma presión. Figura 4-42.

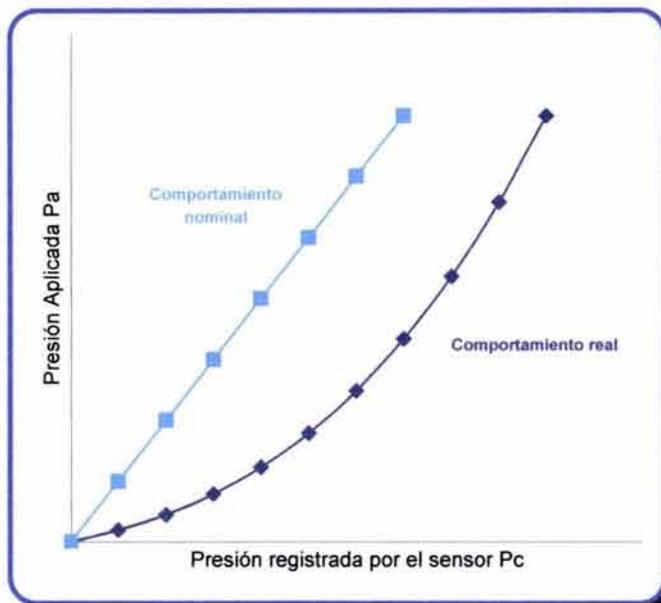


FIGURA 4-41.- DESVIACIÓN CUADRÁTICA MEDIA.

**Histéresis.** Es la capacidad del sensor de producir la misma señal de salida, cuando se aplica el mismo incremento y decremento de presión consecutivamente. Figura 4-43.

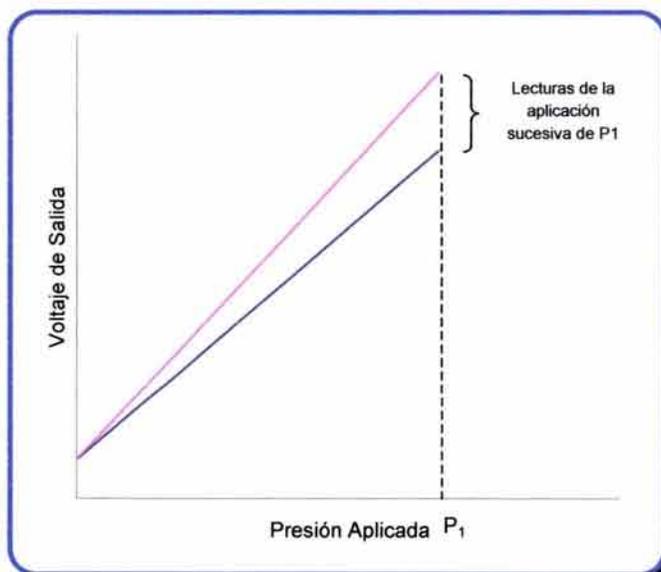


FIGURA 4-42.- REPETIBILIDAD.

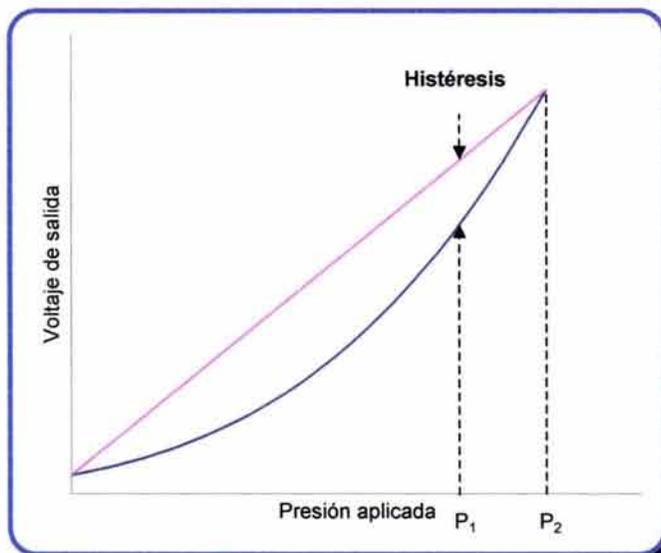


FIGURA 4-43.- HISTÉRESIS EN EL COMPORTAMIENTO DE LA SONDA.

La resolución se define como el mínimo cambio de presión que es detectado por el sensor, Figura 4-44, cuando se hace referencia a la resolución de la sonda, deben tomarse en cuenta a los componentes electrónicos asociados.

La resolución de la sonda, es igual a la suma de tres factores: la resolución del sensor, la resolución del digitalizador y el ruido electrónico inducido por el arreglo de amplificadores.

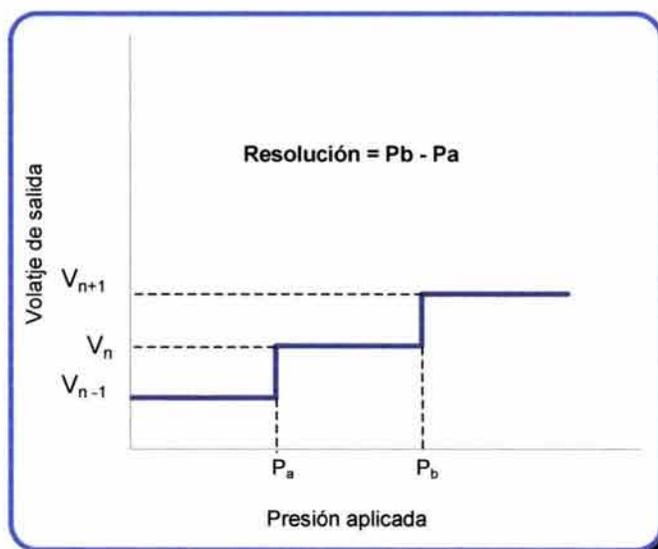


FIGURA 4-44.- RESOLUCIÓN DE LA SONDA DE MEDICIÓN DE PRESIÓN.

El funcionamiento y el procedimiento de calibración de las sondas, aunados a la sensibilidad del cuarzo para percibir los cambios de presión y temperatura, generan errores de cuantización en la medición; estos errores están directamente relacionados a la resolución y la presión de la sonda; y tienen una distribución aleatoria, por lo que será analizado en conjunto con el ruido Gaussiano.

Para generar el ruido Gaussiano y de cuantización, en este trabajo, se generan una serie de números aleatorios con diferentes amplitudes, usando la función random (rnd) del lenguaje de programación Visual Basic®. En las Figuras 4-45 a 4-46, se muestra la representación gráfica de este tipo de ruido, con amplitudes hasta del 10% de la caída de presión total de la prueba de presión sintética, mostrada anteriormente.

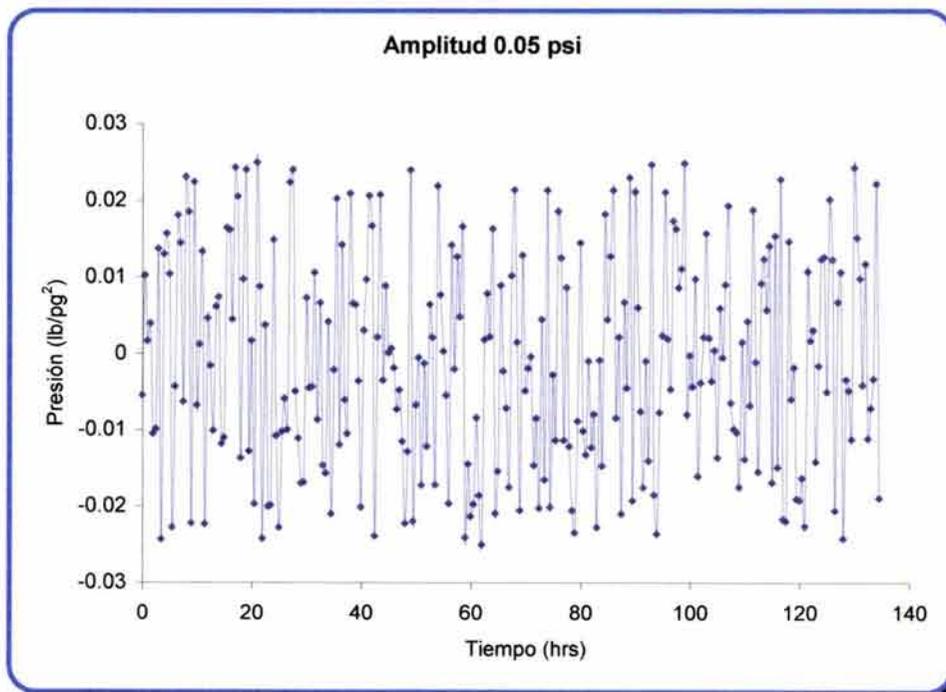


FIGURA 4-45.- REPRESENTACIÓN GRÁFICA DEL RUIDO GAUSSIANO Y DE CUANTIZACIÓN. AMPLITUD 0.05.

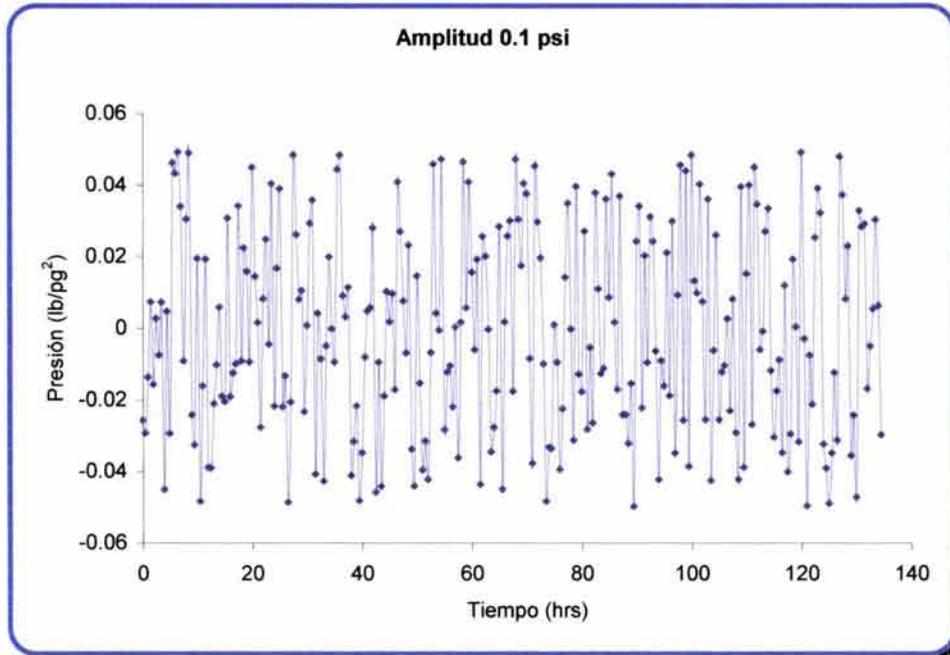


FIGURA 4-46.- REPRESENTACIÓN GRÁFICA DEL RUIDO GAUSSIANO Y DE CUANTIZACIÓN. AMPLITUD 0.1.

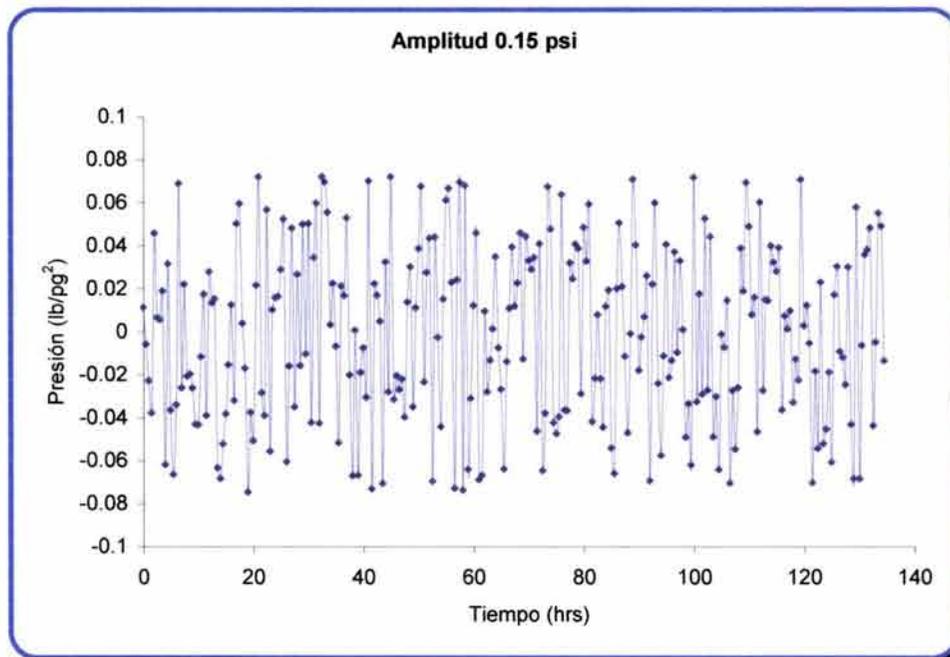


FIGURA 4-47.- REPRESENTACIÓN GRÁFICA DEL RUIDO GAUSSIANO Y DE CUANTIZACIÓN. AMPLITUD 0.15.

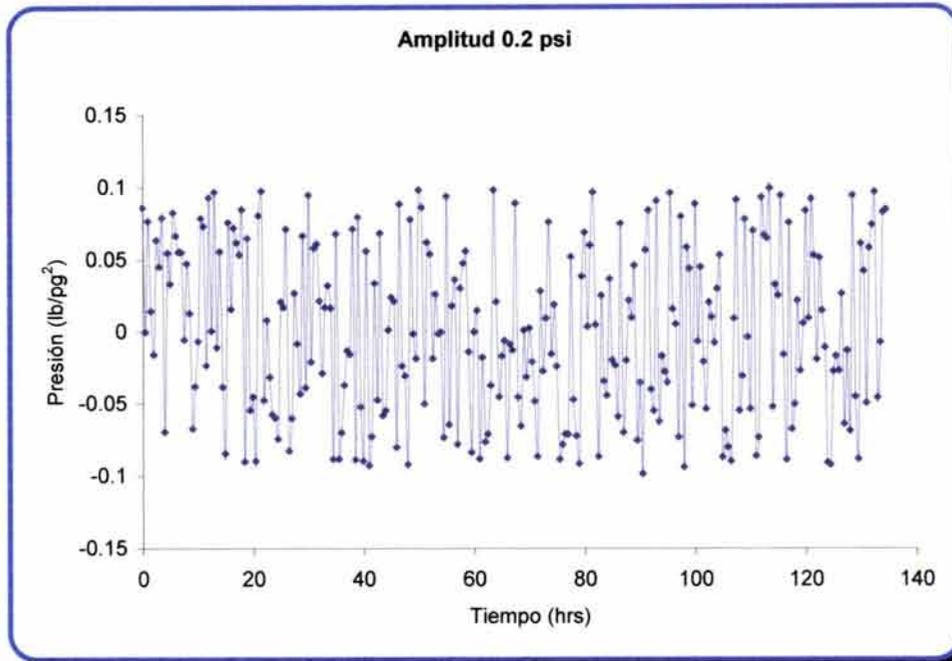


FIGURA 4-48.- REPRESENTACIÓN GRÁFICA DEL RUIDO GAUSSIANO Y DE CUANTIZACIÓN. AMPLITUD 0.2.

En la Figuras 4-49 a 4-52, se muestra la representación de las figuras anteriores en el dominio de la frecuencia. Como puede observarse, el ruido Gaussiano y de Cuantización abarca todo el rango de frecuencias, debido a su naturaleza aleatoria.

Este hecho sugiere que la mejor forma de tratar el ruido aleatorio en las pruebas de presión, sea el suavizamiento de la curva en el dominio de la frecuencia, ya que la utilización de un filtro ideal como los descritos en el capítulo III, solamente eliminarían una parte del ruido, junto con características de la prueba.

Más adelante se detalla la respuesta del ruido a los filtros ideales, específicamente a un filtro pasa-bajas, y al el suavizamiento de la curva.

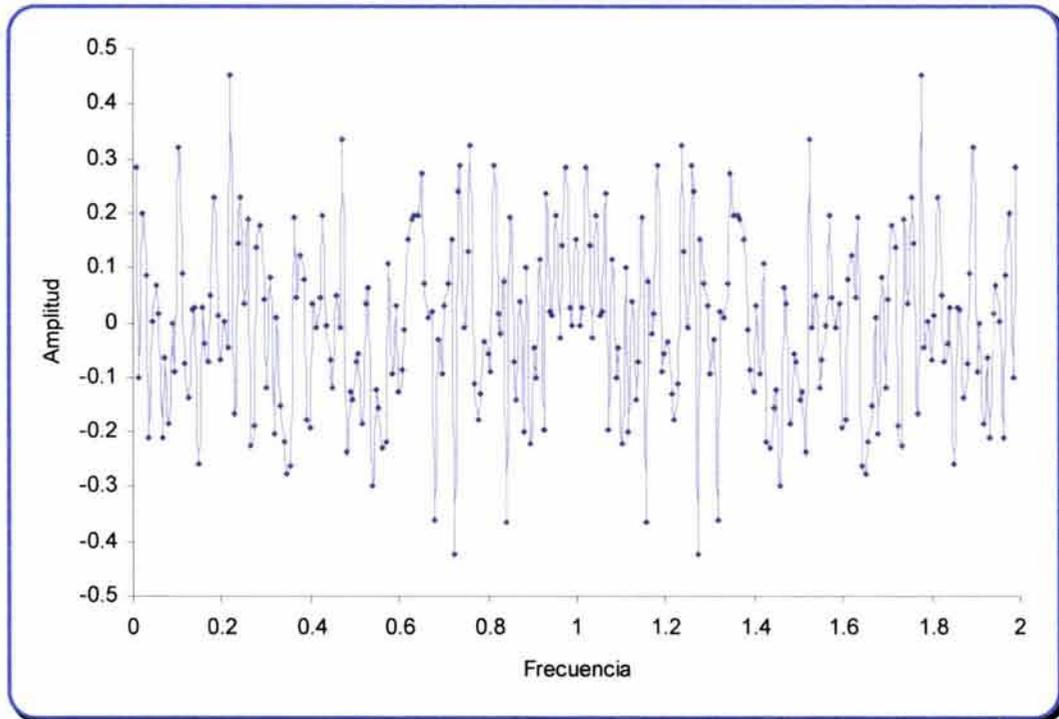


FIGURA 4-49.- REPRESENTACIÓN GRÁFICA EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA DE LA FIGURA 4-45.

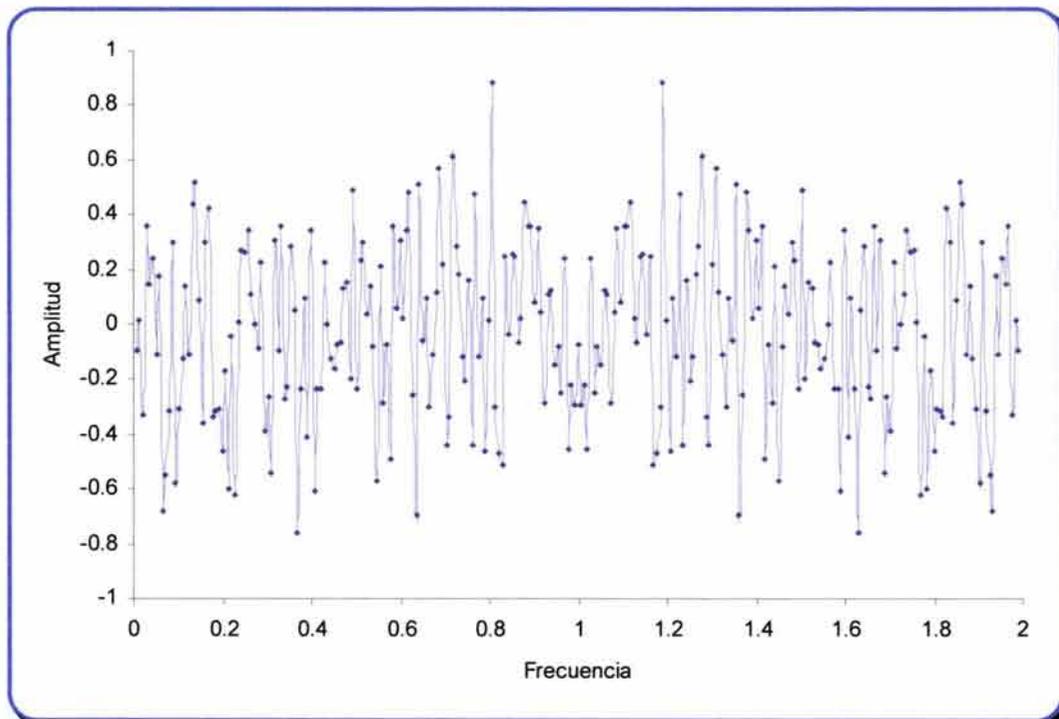


FIGURA 4-50.- REPRESENTACIÓN GRÁFICA EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA DE LA FIGURA 4-46.

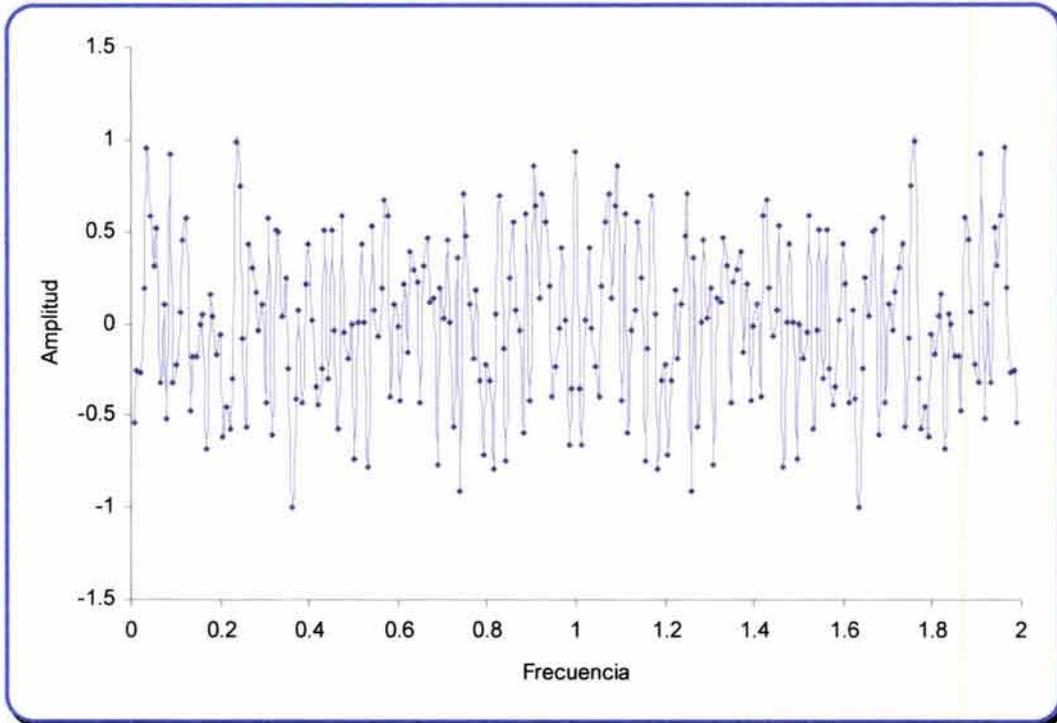


FIGURA 4-51.- REPRESENTACIÓN GRÁFICA EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA DE LA FIGURA 4-47.

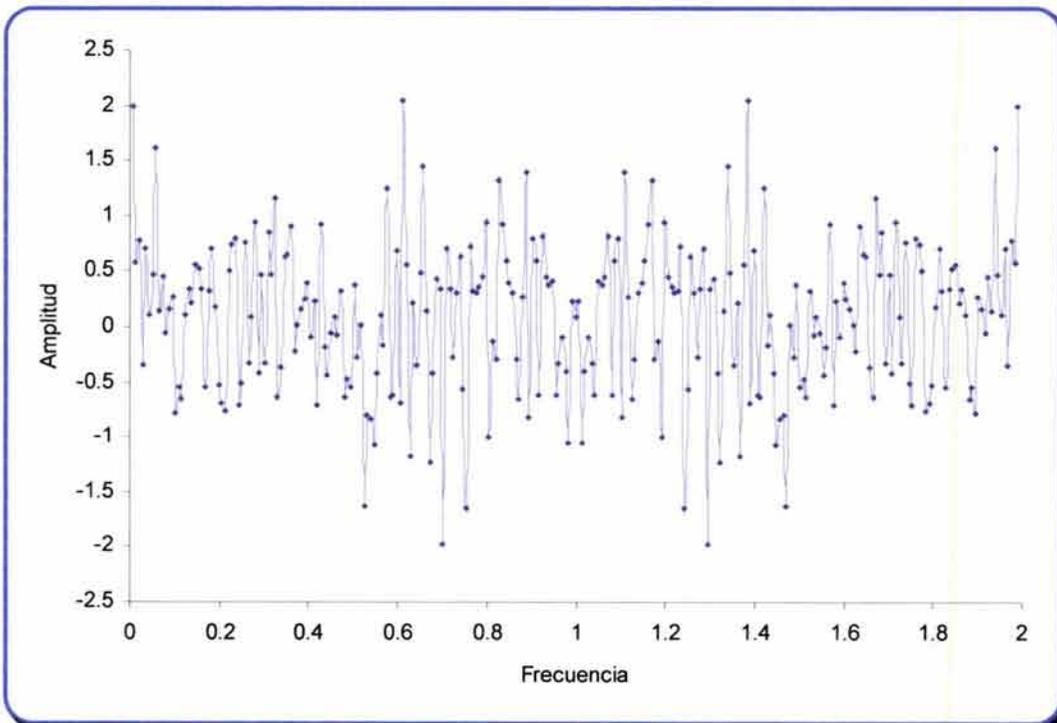


FIGURA 4-52.- REPRESENTACIÓN GRÁFICA EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA DE LA FIGURA 4-48.

### IV.3.2 Ruido por efecto de marea.

Los efectos de las fuerzas periódicas de marea, sobre las acumulaciones de fluidos en los estratos porosos de la tierra, han sido observados desde hace más de un siglo, principalmente en minas y pozos de agua abiertos, en los que hasta la mínima fluctuación en el nivel del agua, es fácilmente detectable y registrable. Sólo, después de la aparición de los sensores de presión de alta sensibilidad, fue posible tener una observación similar en yacimientos petroleros.

Las fluctuaciones cíclicas de la presión, como son medidas en acuíferos y yacimientos, son generalmente consecuencia de la dilatación periódica del sistema poroso ( $\Delta_A$ ), debida al efecto de marea. Existen tres diferentes mecanismos por los cuales se produce este efecto final, la dilatación total ( $\Delta_A$ ) se considera como la suma de tres efectos parciales diferentes:

- El Efecto de marea en la tierra sólida  $\Delta_E$
- El efecto de marea barométrico  $\Delta_B$
- El efecto de marea oceánica  $\Delta_O$

Entonces:

$$\Delta_A = \Delta_E + \Delta_B + \Delta_O \quad (4-54)$$

El efecto de marea sobre la Tierra sólida es consecuencia directa de la deformación de la corteza terrestre por la acción gravitatoria del sol y la luna sobre la Tierra. El mecanismo causante del efecto de marea oceánica y barométrica es inducido por la dilatación y compresión de los estratos causado por la variación periódica de la fuerza compresiva de sobrecarga.

A pesar de ser tres los mecanismos causantes del efecto de marea, en la práctica se ha comprobado que el más importante es el de tipo oceánico, el cual tiene mayor amplitud, en comparación con los de tipo barométrico y terrestre; se

---

ha medido variaciones de 1 y 0.015 lb/pg<sup>2</sup> de presión respectivamente para estos efectos. Por esta razón, si se interpreta el efecto de marea oceánica, los otros efectos pueden ignorarse <sup>29</sup>.

El fenómeno de las mareas oceánicas, es bien conocido desde la antigüedad. El hecho de su carácter periódico y su variación con la fase lunar, llevo a relacionar el flujo y reflujo del mar, con la atracción gravitatoria de la Luna y el Sol.

El origen de las fuerzas de marea, se debe a que la Tierra es un cuerpo extenso, y el campo gravitatorio producido por la Luna o por el Sol, no es homogéneo en todos sus puntos, ya que hay unos puntos que están más cercanos y otros más alejados de dichos cuerpos celestes; aunado a esto, se encuentran los movimientos de traslación de la tierra alrededor del sol, y de la luna en torno a la tierra, ambos, según la 1ra Ley de Kepler, en orbitas elípticas, lo que ocasiona que la distancia entre estos cuerpos, varíe a lo largo del año.

Un concepto teórico, aunque útil, en el estudio de las mareas, es el de la altura de equilibrio. Suponemos para ello, que la Tierra es perfectamente rígida (es decir, que no cambia de forma o dimensiones en ningún caso) y que está recubierta de una capa líquida uniforme, de densidad muy pequeña, de forma que su distribución no cambie apreciablemente el campo gravitatorio. Se considera también que, la posición de los astros no varía con el tiempo, es decir, una situación puramente estática. Con estas condiciones, la capa líquida postulada ajustará su forma a la de una superficie equipotencial. Esta superficie se apartará de la forma esférica, debido al efecto de la marea, del astro que se considere. A la altura que alcanza la capa de líquido, sobre la esfera, en las condiciones expuestas, se le llama altura de marea estática.

La deformación que experimenta la superficie real de la Tierra, bajo la acción de la fuerza de marea, puede estimarse mediante diversas teorías y

---

también medirse. Las redes de estaciones de medición, dispuestas al efecto, han mostrado que, las deformaciones que produce la marea lunar en la superficie real de la Tierra, alcanzan un valor máximo de unos 78 cm.

En conclusión, la marea es la oscilación en el nivel del mar por efecto del campo gravitatorio, que genera principalmente la luna. En la Figura 4-53, se muestra una gráfica del nivel del mar, para los dos primeros meses del presente año, respecto a las fases lunares; medido en la estación mareográfica de Cd. del Carmen, Campeche de la Secretaria de Marina. En el Apéndice A se muestran las gráficas y tablas proporcionadas por esta institución.<sup>30</sup>

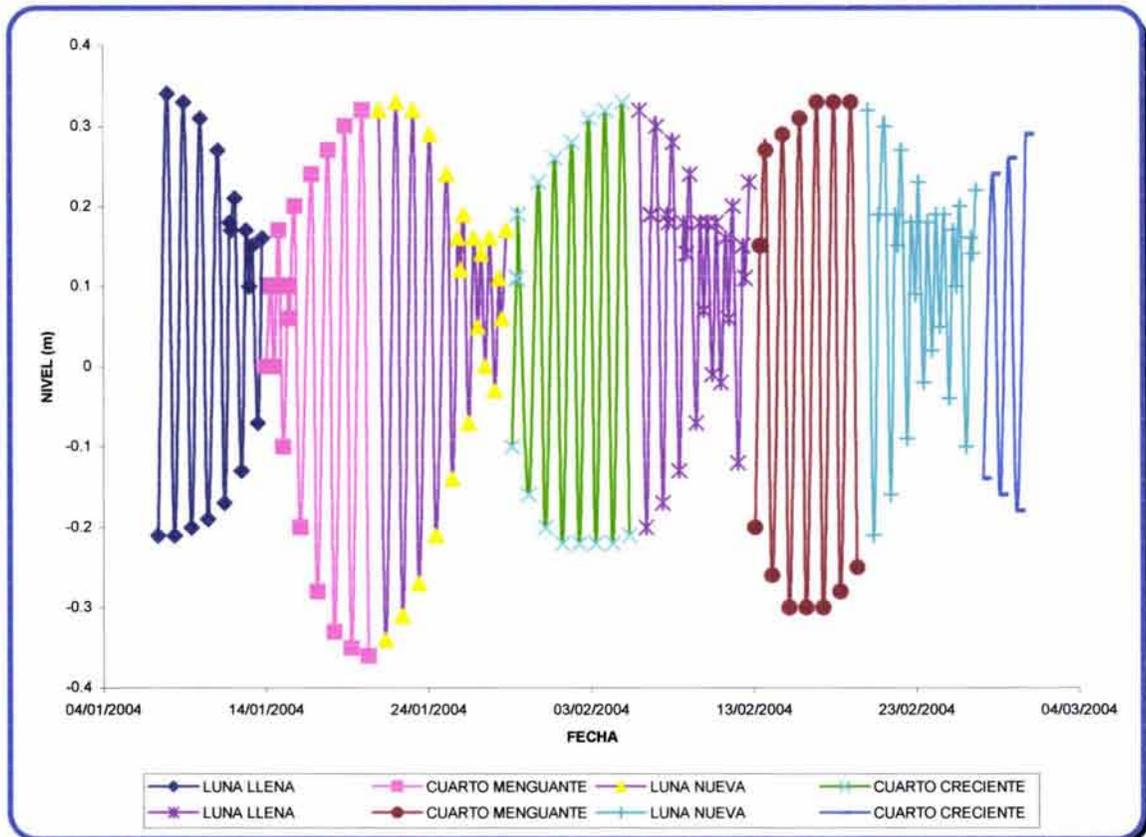


FIGURA 4-53.- NIVEL DEL MAR SEGÚN FASES DE LA LUNA

Como se mencionó anteriormente, el efecto de marea oceánica, causa la variación periódica en la presión de los fluidos confinados en los estratos porosos

de la tierra, debido a la oscilación del nivel del mar, que genera una sobrecarga cíclica sobre el yacimiento.

Para describir de mejor manera, el efecto de marea oceánica, es necesario recordar algunos conceptos de presión, como son la presión de sobrecarga, la de formación y la hidrostática.

**Presión de sobrecarga.** La ejercida por el peso combinado de la matriz de roca y los fluidos, contenidos en los espacios porosos de la misma, sobre las formaciones subyacentes. El gradiente de sobrecarga normal es de 1.0 lb/(pg<sup>2</sup>pie) y corresponde a una formación con una densidad promedio de 2.31 g/cm<sup>3</sup>; la experiencia indica, que el máximo gradiente de sobrecarga en rocas clásticas puede ser probablemente de 1.35 lb/(pg<sup>2</sup>pie).

**Presión de Formación.** Es la que actúa sobre los fluidos en el espacio poroso de la formación. La presión de formación normal será igual a la ejercida por una columna hidrostática de agua desde la superficie hasta la superficie de la formación. Para un gradiente normal de presión de sobrecarga igual a 1 lb/(pg<sup>2</sup>pie), la presión de formación será de 0.465 lb/(pg<sup>2</sup>pie).

**Presión hidrostática.** Es la generada por el peso de una columna de fluido, de altura "D" y densidad  $\rho$ , sobre una unidad de área:

$$P_h = \rho D \quad (4-54)$$

Si se considera que, para una altura del nivel del mar de 0 mts., la presión del yacimiento no se encuentra afectada por la presión, que este causa; cualquier variación de este nivel generará una presión hidrostática adicional, cuya magnitud esta influenciada por la densidad del agua de mar.

La densidad del agua del mar, consiste en su peso derivado de la cantidad de masa de sales por unidad de volumen de agua, por lo que, es directamente

proporcional a su salinidad. La salinidad está dada, principalmente, por los cloruros, sulfatos y carbonatos que se encuentran disueltos en el agua del mar, y su distribución no es uniforme ni constante, varía de un lugar a otro.

La densidad del agua, depende fundamentalmente de la temperatura y la salinidad, se expresa en gramos por centímetro cúbico. El agua pura (destilada) alcanza un máximo de densidad a 4 °C y es igual a 1 g/cc. La densidad del agua de mar de 35% de salinidad, es de 1.0267 g/cc.

En la Figura 4-54, se muestra la presión hidrostática, generada por el nivel del mar, mostrado en la figura 4-53, se considera una densidad del agua de mar de 1.03 g/cc.

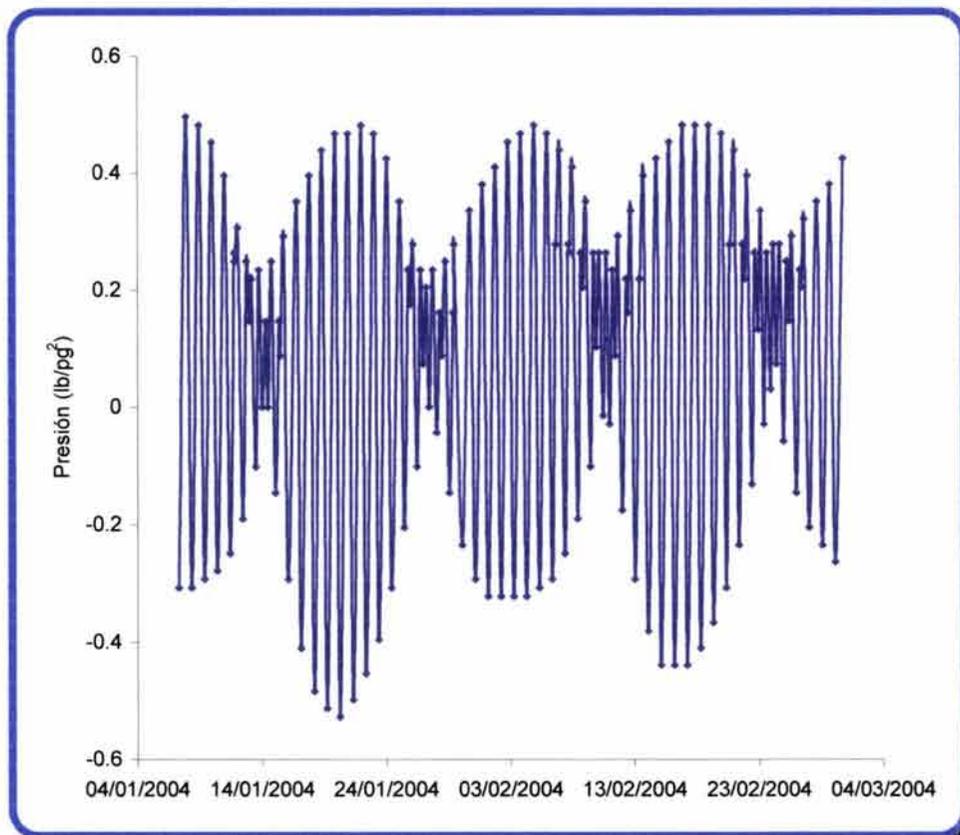


FIGURA 4-54.- PRESIÓN HIDROSTÁTICA GENERADA POR EL EFECTO DE MAREA.

La presión hidrostática generada por el nivel de la marea, es absorbida en un 53.5% por la roca y un 46.5% por los fluidos del yacimiento. En la Figura 4-55, se muestra el ruido, causado por el efecto de marea, en los datos de las pruebas de presión; el cual corresponde al 46.5% de la presión hidrostática generada por el nivel del mar.

En la Figura 4-55, se muestra el efecto de marea, para los meses de enero y febrero del año 2004, sin embargo las pruebas de presión no tienen una duración tan extensa; por el contrario, éstas, suelen ser de días solamente; adicionalmente, se sabe, que el efecto de marea está influenciado por las fases lunares. Es por esta razón que en las Figuras 4-56 a 4-59, se muestra el efecto de marea, para las distintas fases lunares, con una duración de 40 horas.

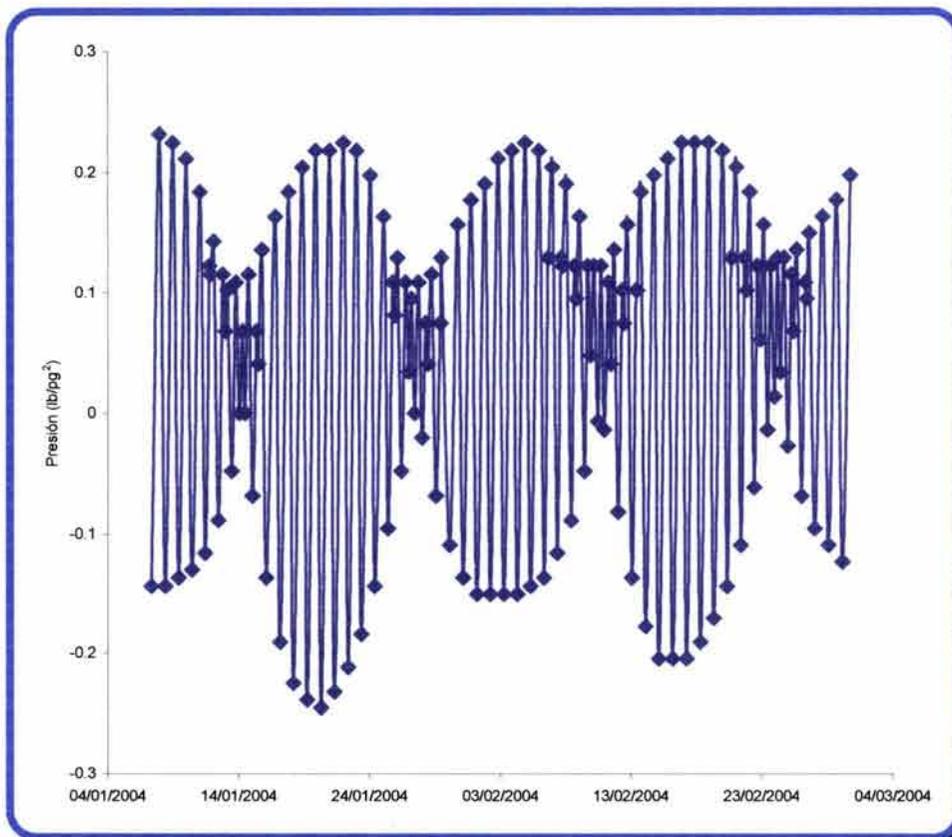


FIGURA 4-55.- RUIDO POR EFECTO DE MAREA.

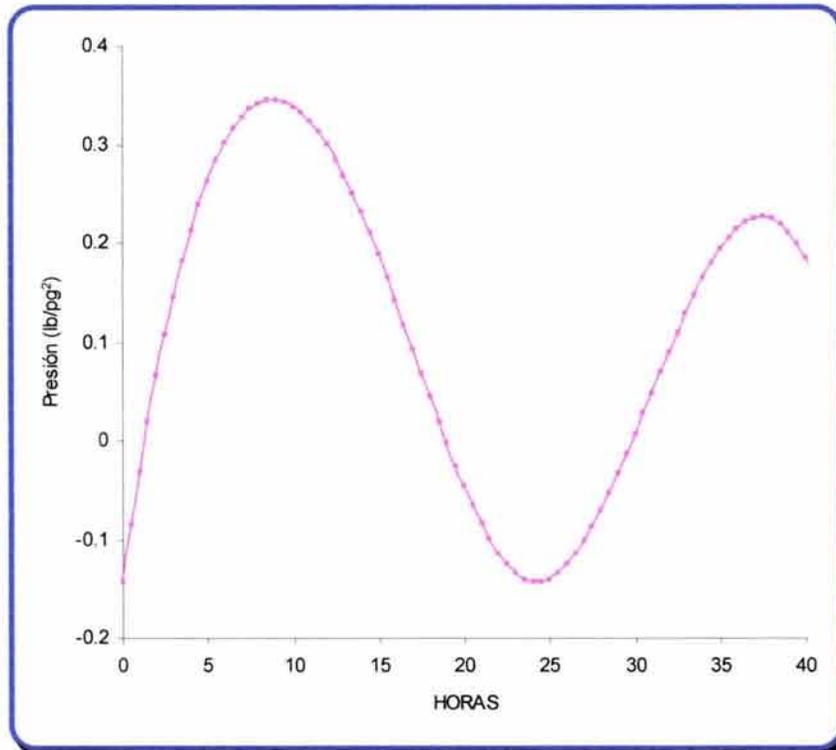


FIGURA 4-56.- RUIDO POR EFECTO DE MAREA, CON LUNA LLENA.

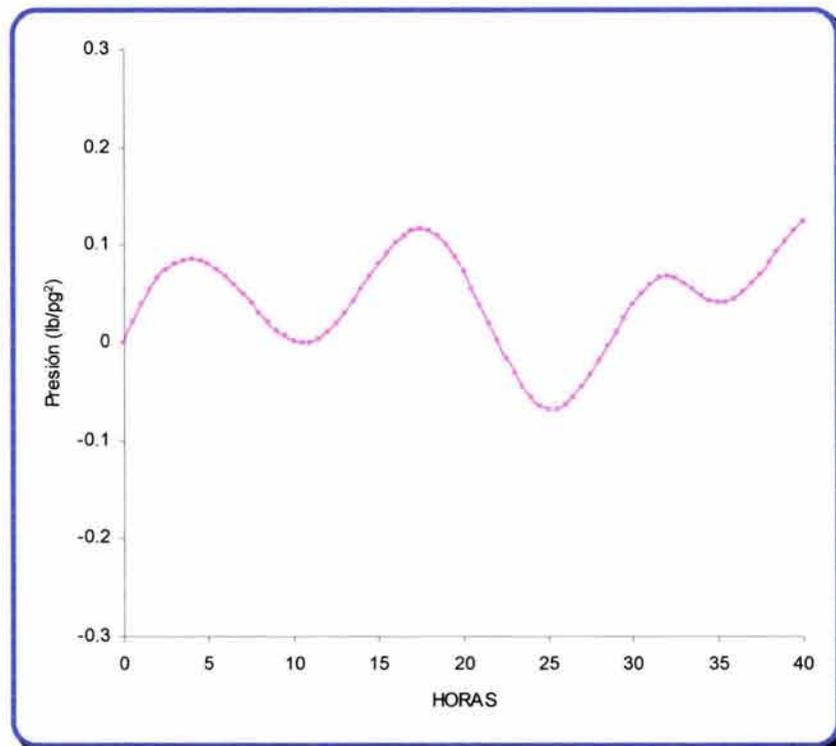


FIGURA 4-57.- RUIDO POR EFECTO DE MAREA, CON LUNA CUARTO MENGUANTE.

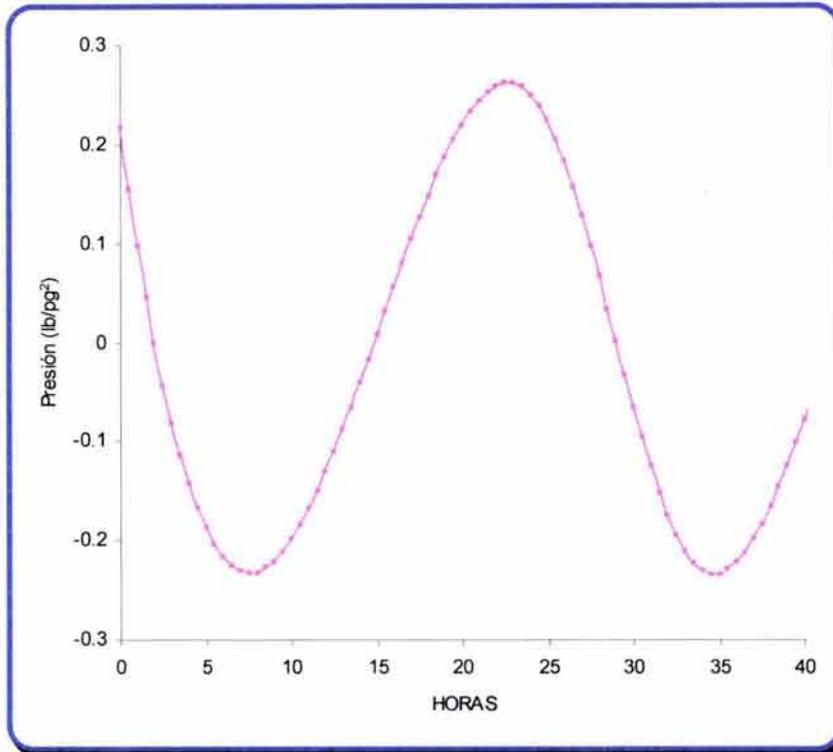


FIGURA 4-58.- RUIDO POR EFECTO DE MAREA, CON LUNA NUEVA.

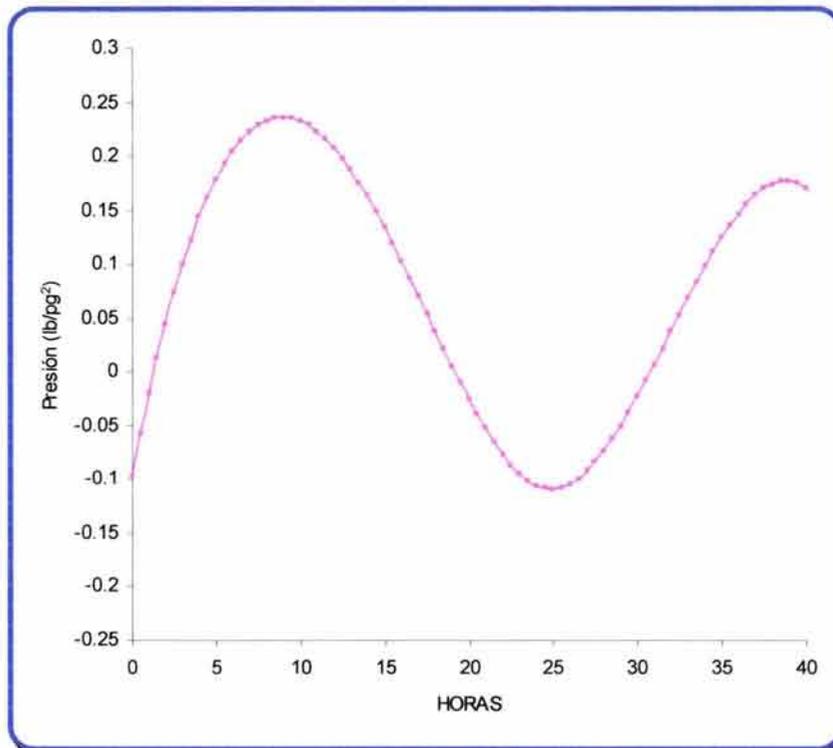


FIGURA 4-59.- RUIDO POR EFECTO DE MAREA, CON LUNA CUARTO CRECIENTE.

Como puede observarse en las gráficas anteriores, el comportamiento del efecto de marea es periódico, los siguientes resultados están basados en los datos de la Figura 4-57, por ser esta de la que se tienen mayor número de mediciones, como se puede constatar en el apéndice A.

En la Figura 4-60 se muestra el efecto de marea en el dominio de la frecuencia. En ésta se observa que para frecuencias bajas se tienen grandes amplitudes, las cuales disminuyen acercándose a cero para frecuencias más altas.

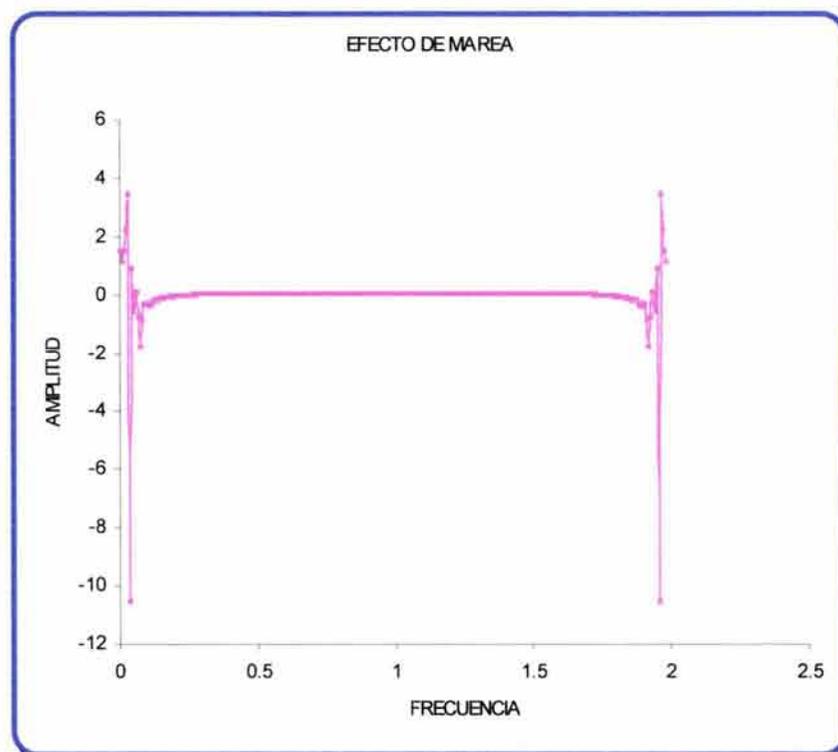


FIGURA 4-60.- EFECTO DE MAREA EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA.

En la Figura 4-61, se muestra en escala semi-logarítmica, se tomó el valor absoluto de las amplitudes negativas y se han colocado con color rojo para su identificación. Se observa que para frecuencias bajas se tienen en su mayoría frecuencia negativas y conforme aumenta la frecuencia incrementa la amplitud para volverse una constante, en 0.7; a partir de la frecuencia igual a 0.8 aproximadamente

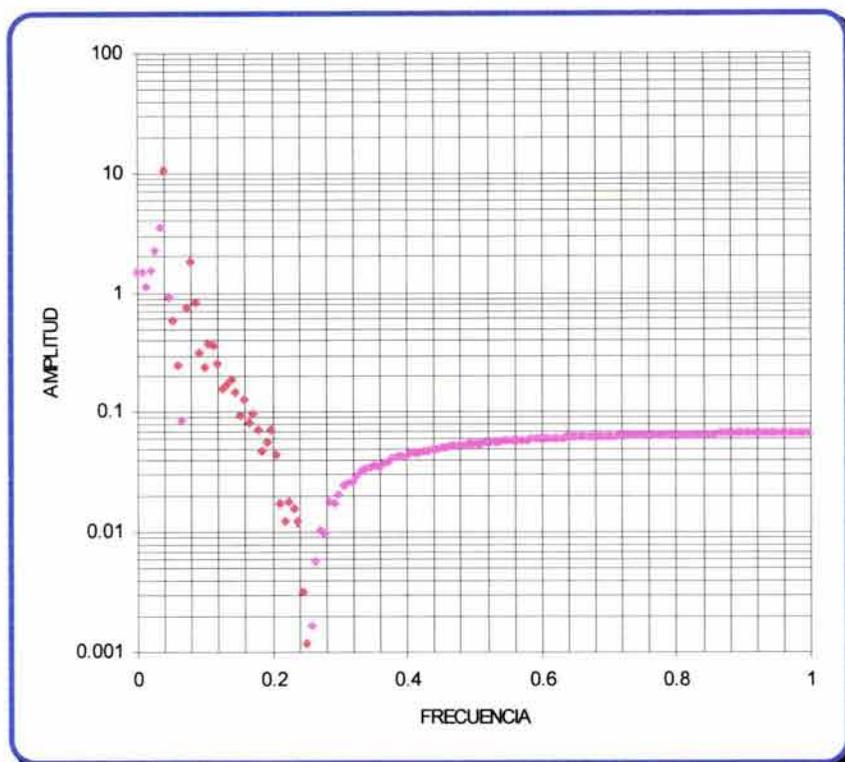


FIGURA 4-61.- EFECTO DE MAREA EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA Y ESCALA SEMI-LOGARÍTMICA.

#### IV.4 TRANSFORMADA DE FOURIER DEL MODELO DE UNA PRUEBA DE PRESIÓN CON RUIDO

Hasta ahora, se ha mostrado el comportamiento, en el dominio de la frecuencia, de una prueba de presión sintética y de diferentes tipos de ruido, por separado; en adelante se mostrará el análisis, que se realizó, del comportamiento de la prueba afectada por uno o varios tipos de ruido.

El método de análisis consistió en mostrar, como afecta el ruido a la prueba de presión en el dominio del tiempo, después se observó su comportamiento en el dominio de la frecuencia, en donde se hizo un tratamiento, de suavizamiento de la curva o truncamiento, a los datos en el dominio de la frecuencia; tratando de eliminar el ruido; por último, se observaron los resultados obtenidos en el dominio del tiempo, aplicando la antitransformada de Fourier.

#### IV.4.1.- Prueba de Presión con Ruido Gaussiano y de Cuantización.

Como se mencionó, con anterioridad, los ruidos de cuantización y gaussiano, son de tipo aleatorio; para este ejemplo, se considero una amplitud de  $0.1 \text{ lb/pg}^2$ . de amplitud del ruido. En la Figura 4-62, se muestra el efecto de éste, sobre el modelo de la prueba de presión sintética, mostrado en la Figura 4-20.

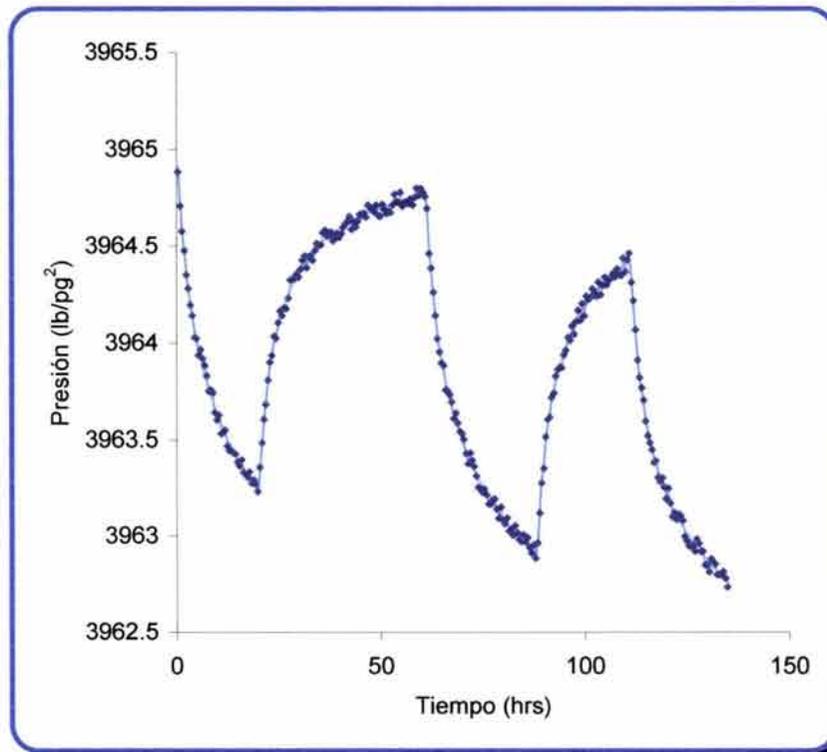


FIGURA 4-62.- MODELO DE UN PRUEBA DE PRESIÓN LIMPIA, CON RUIDO GAUSSIANO Y DE CUANTIZACIÓN DE AMPLITUD  $0.1 \text{ LB/PG}^2$ .

Como puede observarse en la figura anterior el efecto del ruido gaussiano y de cuantización, genera que la curva de la prueba de presión presente oscilaciones pequeñas. Esta curva con ruido, se comporta en el dominio de la frecuencia como se muestra en la Figura 4-63. En la Figura 4-64 se presenta este mismo comportamiento en escala semi-logarítmica, los valores negativos se muestran con su valor absoluto y en color rojo.

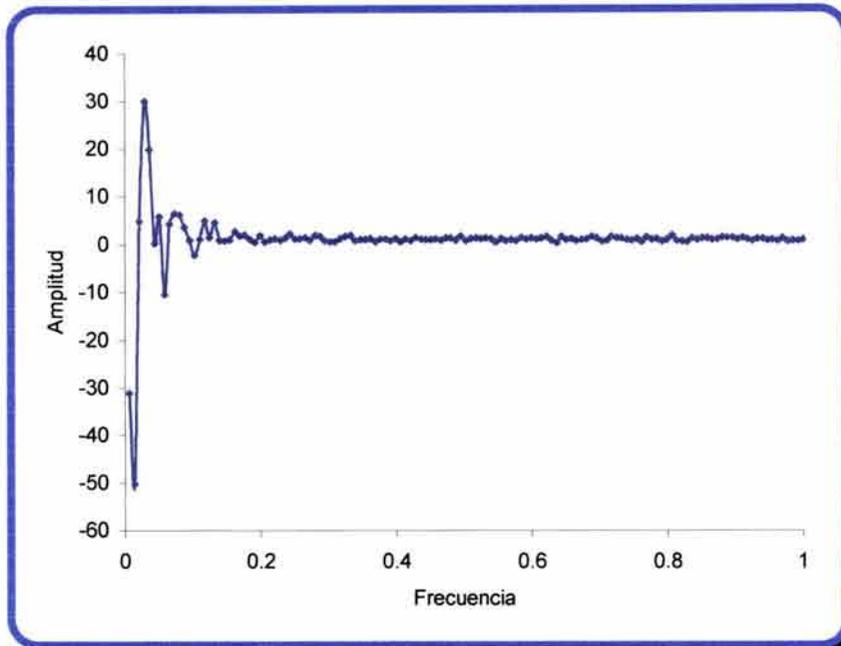


FIGURA 4-63.- PRUEBA DE PRESIÓN LIMPIA CON RUIDO GAUSIANO Y DE CUANTIZACIÓN EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA.

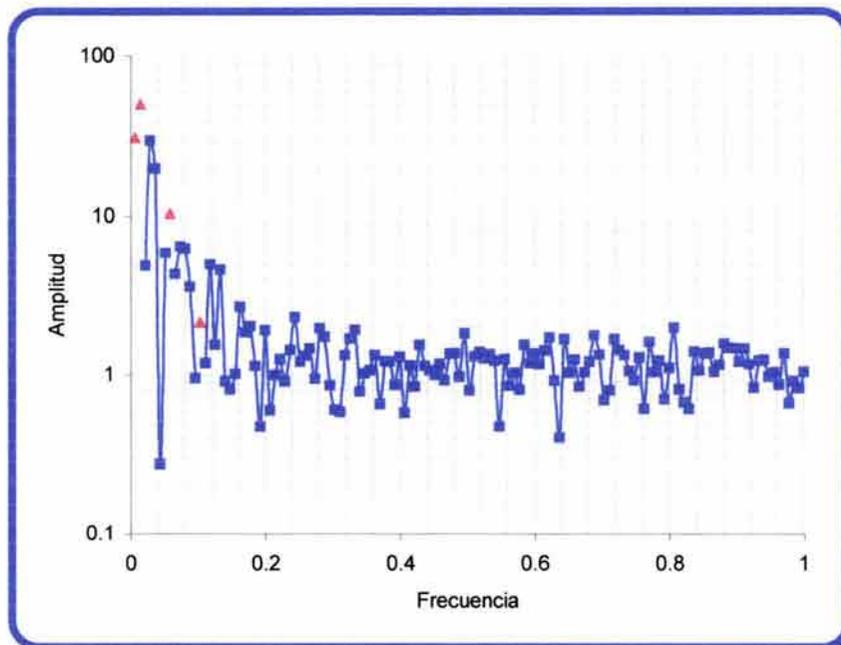


FIGURA 4-64.- PRUEBA DE PRESIÓN LIMPIA CON RUIDO GAUSIANO Y DE CUANTIZACIÓN EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA Y ESCALA SEMI-LOGARÍTMICA.

Comparando la figura anterior con la Figura 4-26 se observa que el rango de amplitud aumenta considerablemente, es decir el ruido Gaussiano y de Cuantización puede observarse con mayor facilidad en el dominio de la frecuencia.

Para incrementar la banda de frecuencia, se obtuvo la transformada de Fourier de la prueba de presión con ruido, con un intervalo de muestreo  $T= 0.25$ , el resultado de esta se muestra en la Figura 4-65.

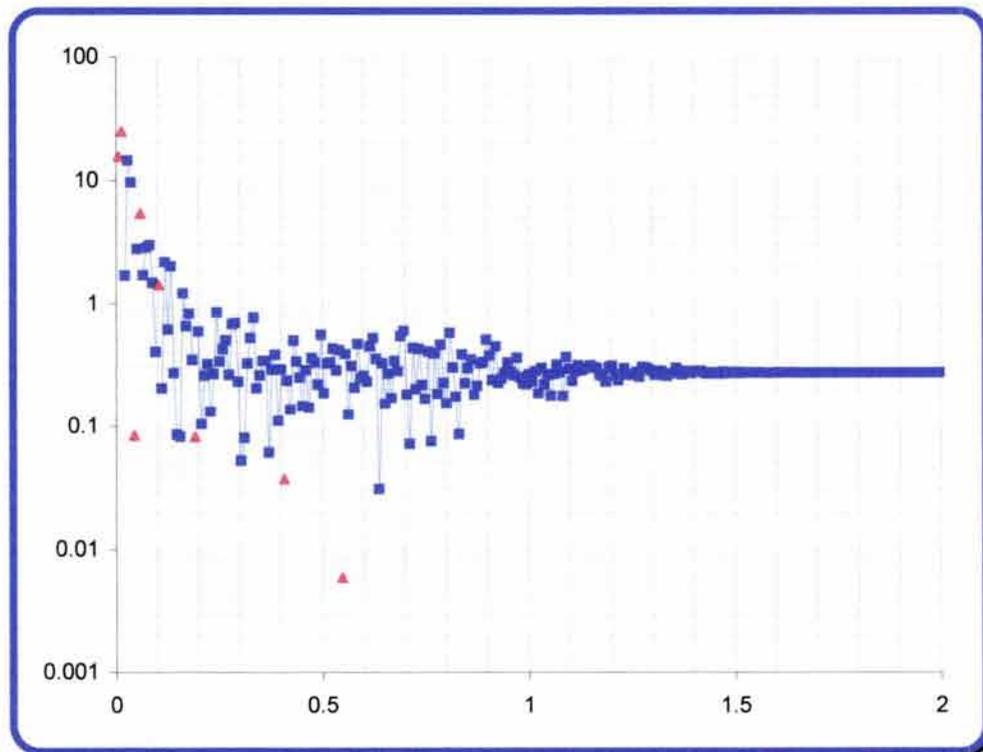


FIGURA 4-65.- PRUEBA DE PRESIÓN LIMPIA CON RUIDO GAUSSIANO Y DE CUANTIZACIÓN EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA Y ESCALA SEMI-LOGARÍTMICA, CON UNA BANDA DE FRECUENCIA DE 0 A 2.

En la figura anterior se observa que el rango de amplitud disminuye conforme aumenta la frecuencia y se vuelve constante para frecuencias mayores a 1.5 aproximadamente. Sin embargo la información fundamental de la prueba de presión limpia se encuentra en las bajas frecuencias, y son estas las más afectadas por el ruido Gaussiano y Cuantización.

Uno de los objetivos de este trabajo de tesis es buscar la manera de eliminar el ruido de la prueba de presión utilizando filtros ideales o el suavizamiento de la curva en el dominio de la frecuencia, en la Figura 4-26 se muestra que la mayor parte de información acerca de la prueba esta contenida en las bajas frecuencias, por lo que el filtro más indicado para utilizar es un filtro pasa-bajas.

En las Figura 4-66 se muestra el resultado, en el dominio del tiempo, después de la aplicación de un filtro pasa-bajas, con diferentes frecuencias de corte. Así mismo en las Figura 4-67, el error del los resultados anteriores respecto a la prueba de presión limpia.

En las Figuras 4-66 y 4-67 se observa que la aplicación de un filtro pasa-bajas, induce mayor error que el propio ruido, la amplitud de este es de  $0.1 \text{ lb/pg}^2$ , y la amplitud del error después de la aplicación de un filtro pasa-bajas es de 2, 1.4, 1, 0.4 y  $0.12 \text{ lb/pg}^2$  para las diferentes frecuencias de corte respectivamente.

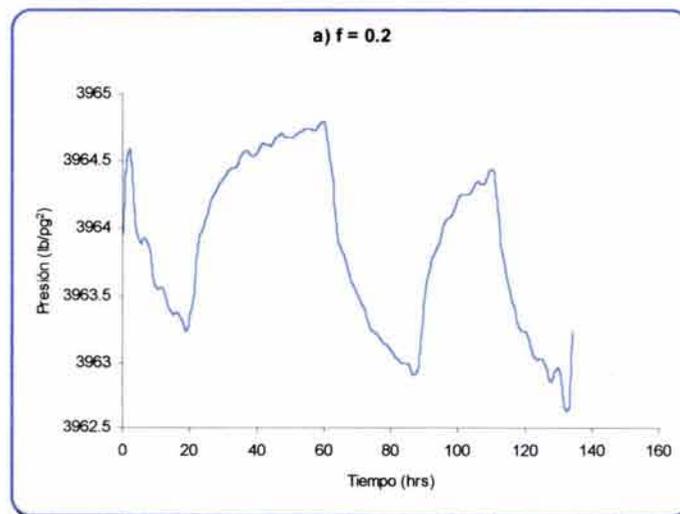


FIGURA 4-66.- RESULTADO DE LA APLICACIÓN DE UN FILTRO PASA-BAJAS, CON DIFERENTES FRECUENCIAS DE CORTE.

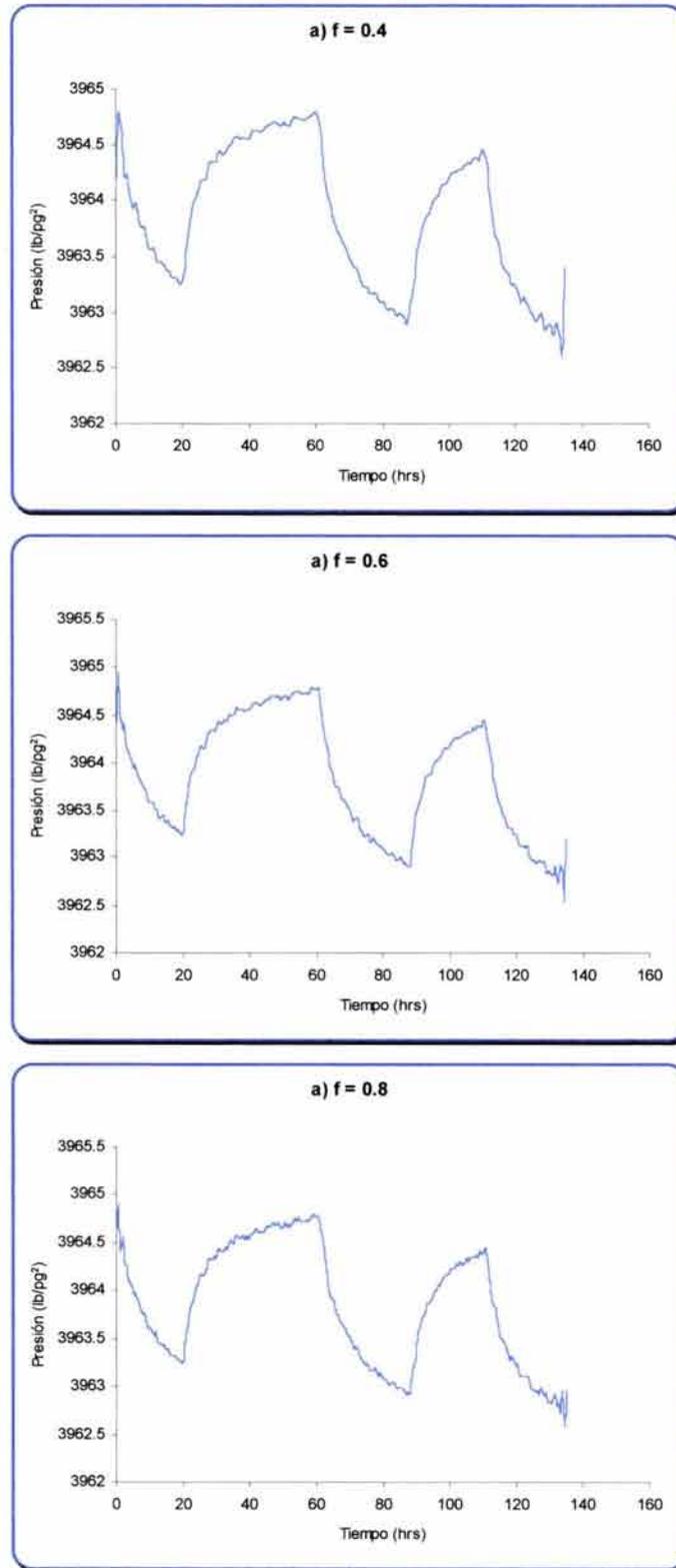


FIGURA 4-66.- CONTINUACIÓN.

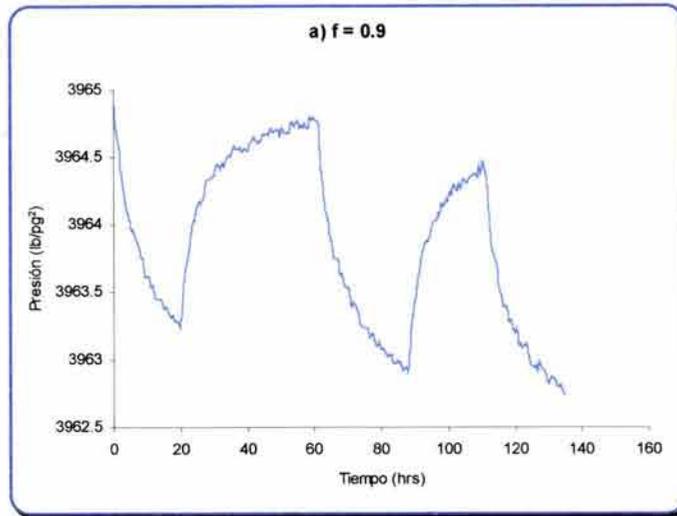


FIGURA 4-66.- CONTINUACIÓN.

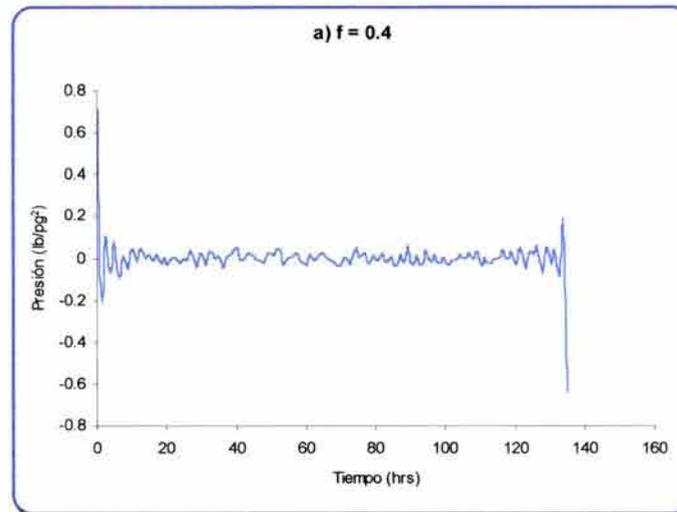
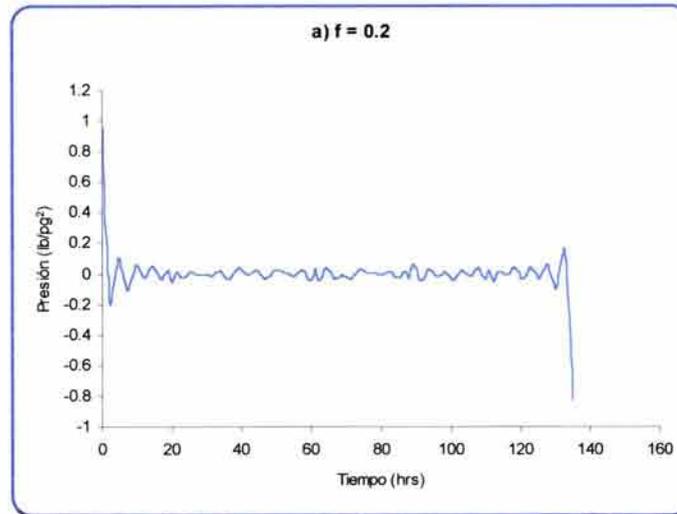


FIGURA 4-67.- ERROR DE LOS RESULTADOS MOSTRADOS EN LA FIGURA 4-66, RESPECTO A LA PRUEBA DE PRESIÓN LIMPIA.

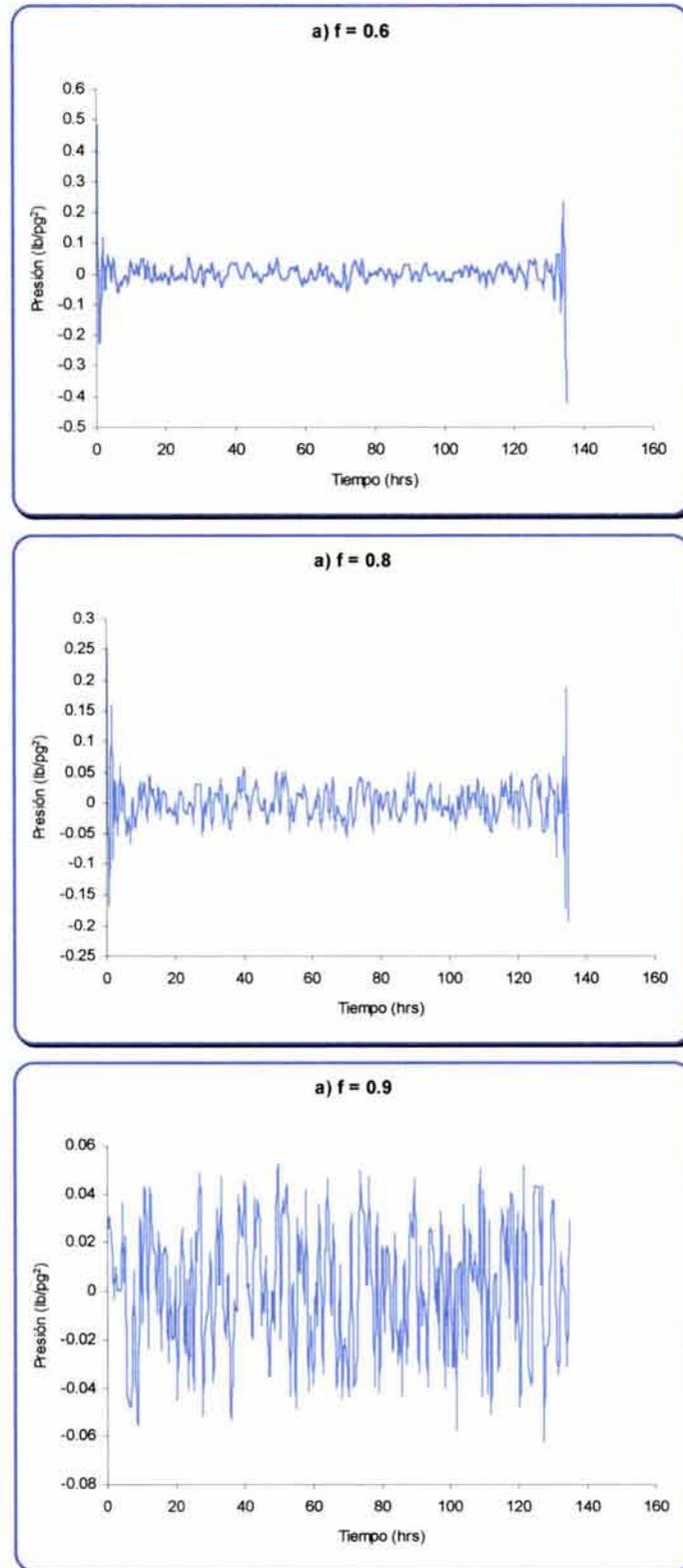


FIGURA 4-67.- CONTINUACIÓN.

La respuesta de la prueba de presión con ruido Gaussiano y de Cuantización a la aplicación de un filtro pasa-bajas, no es la deseada, y se debe a la naturaleza aleatoria de estos tipos de ruido. Al aplicar el filtro sólo se omite una parte del error causado por el ruido, mientras que la parte restante subsiste, además de que se genera otro error al quitar parte de la prueba, estos dos errores se suman para originar los resultados mostrados en las graficas anteriores.

El error ocasionado por quitar parte de la prueba al aplicar un filtro pasa-bajas fue analizado en la sección 4.2, en esta se observa que en cuanto menor es la frecuencia de corte el error aumenta, por otro lado al omitir la mayor parte del ruido el error debido a este disminuye. En su conjunto, la prueba y el ruido Gaussiano y de Cuantización, al tener una frecuencia de corte menor el error aumenta y al incrementarla disminuye; sin embargo este no puede ser menor al ruido.

Por lo anterior se puede concluir que el uso de un filtro pasa-bajas a una prueba de presión limpia con ruido Gaussiano y de Cuantización, afecta en mayor medida a los componentes de la prueba que a los del ruido.

La segunda opción propuesta para el tratamiento de los datos en el dominio de la frecuencia el suavizamiento de la curva, tomando el promedio aritmético de la amplitud para una banda de frecuencia dada.

Los resultados en el dominio del tiempo de este suavizamiento, a partir de diferentes frecuencias, se muestran en la Figura 4-68 y el error de estos respecto a la prueba de presión limpia en la Figura 4-69.

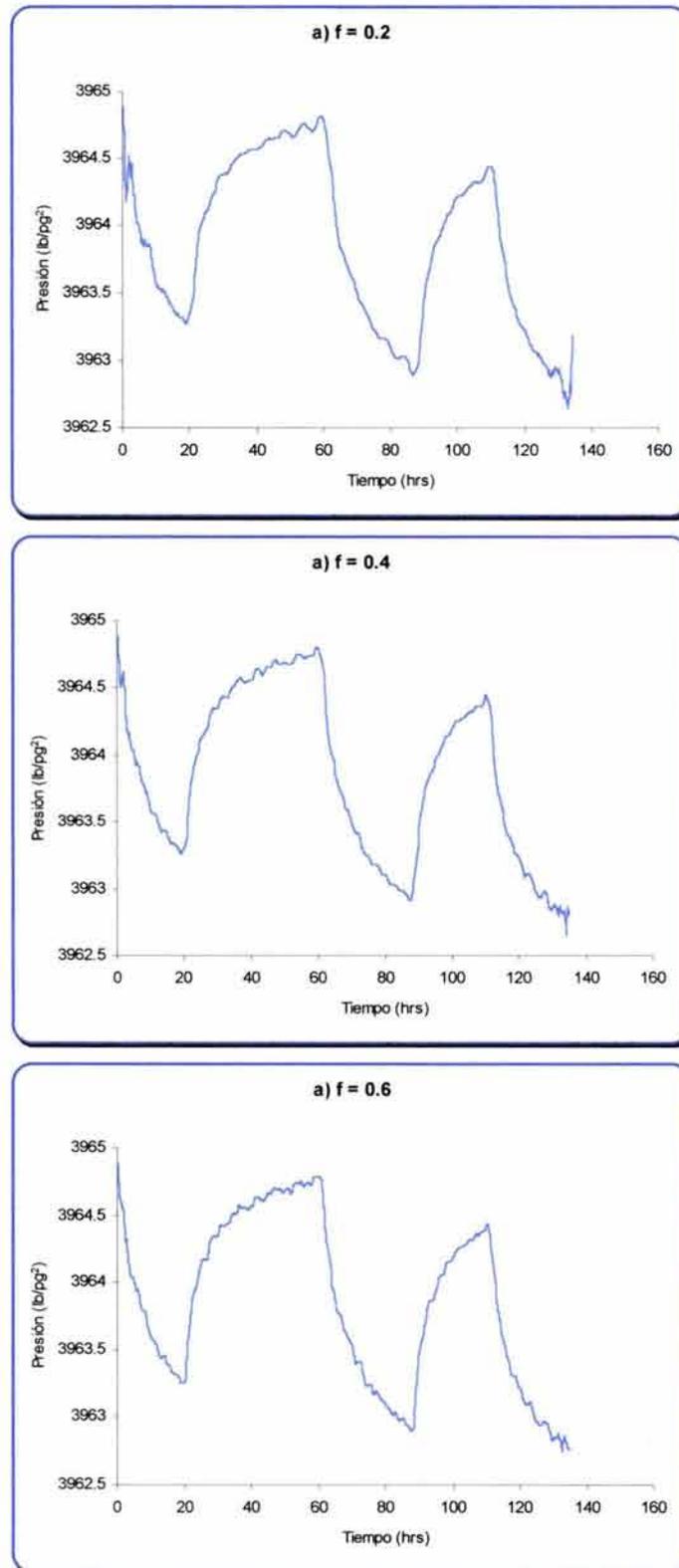


FIGURA 4-68.- RESULTADO DEL SUAVIZAMIENTO DE LA CURVA, A PARTIR DIFERENTES FRECUENCIAS

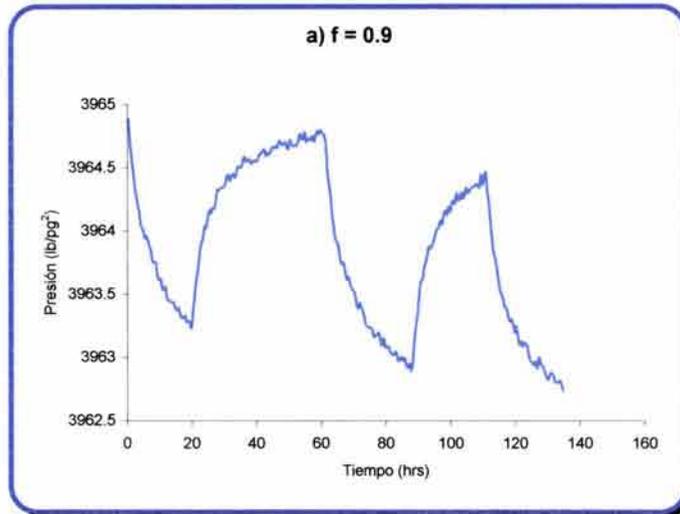
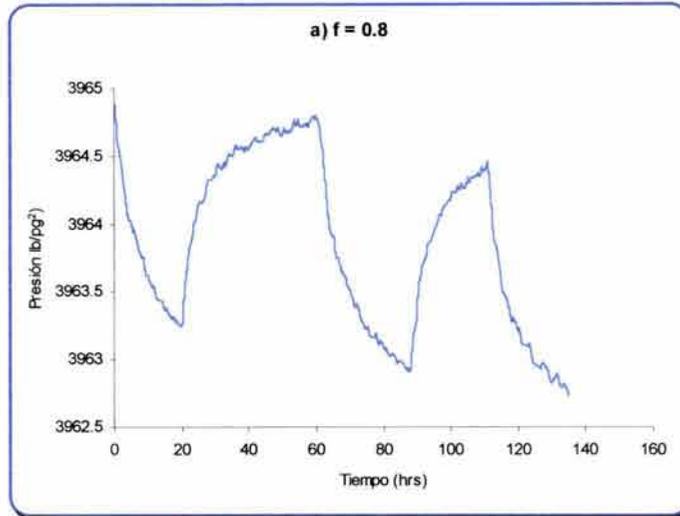


FIGURA 4-68.- CONTINUACIÓN.

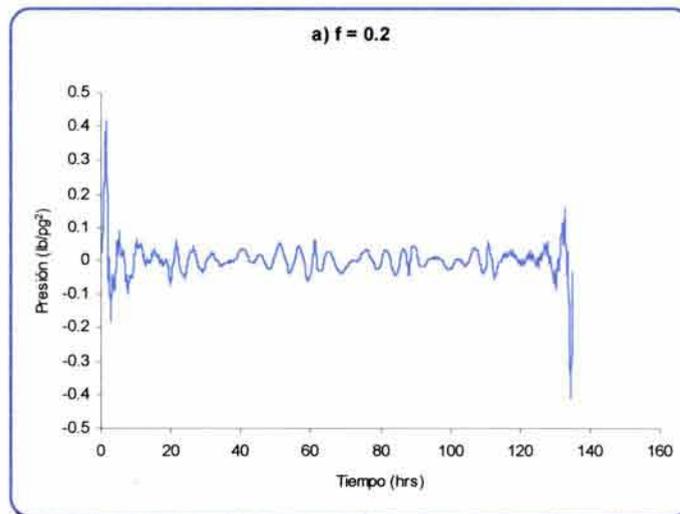


FIGURA 4-69.- ERROR DEL RESULTADO DEL SUAVIZAMIENTO DE LA CURVA, A PARTIR DE DIFERENTES FRECUENCIAS, RESPECTO A LA PRUEBA DE PRESIÓN LIMPIA.

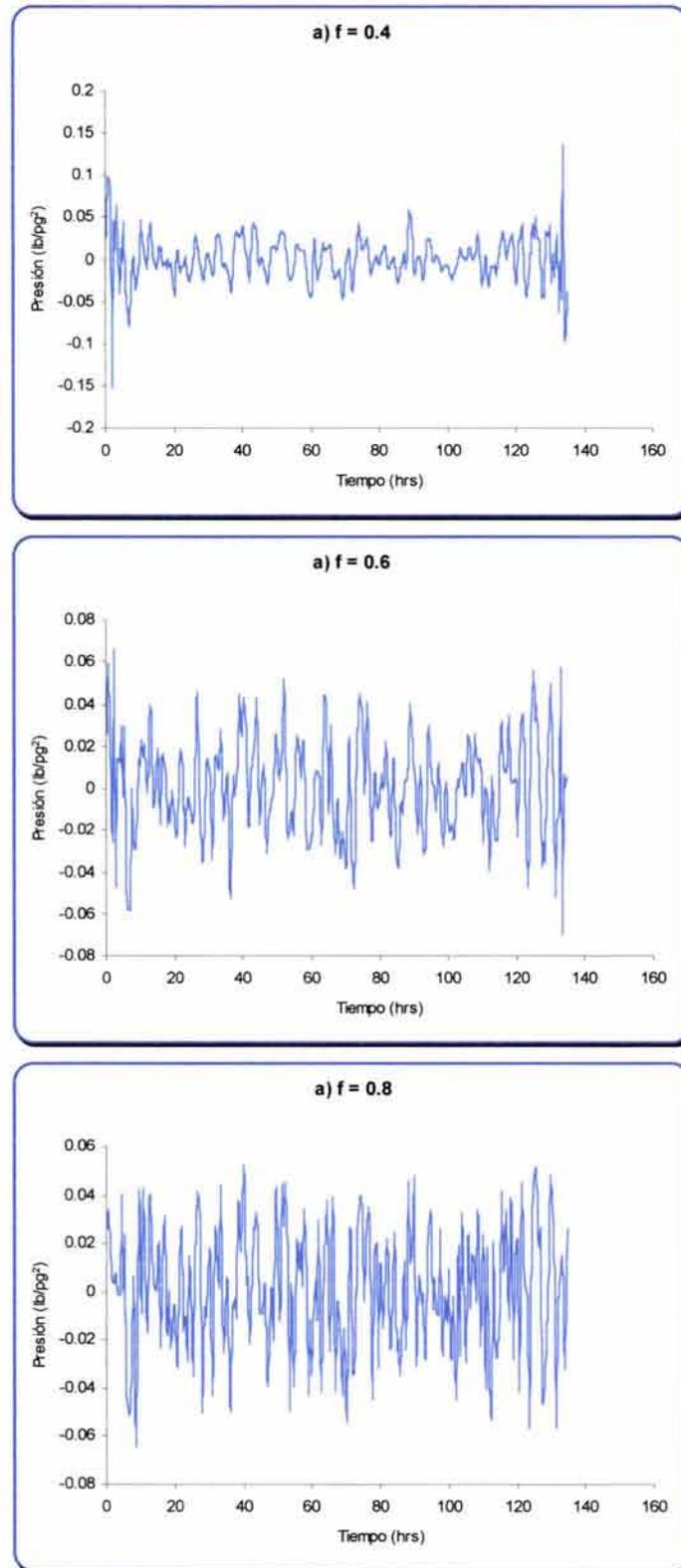


FIGURA 4-69.- CONTINUACIÓN.

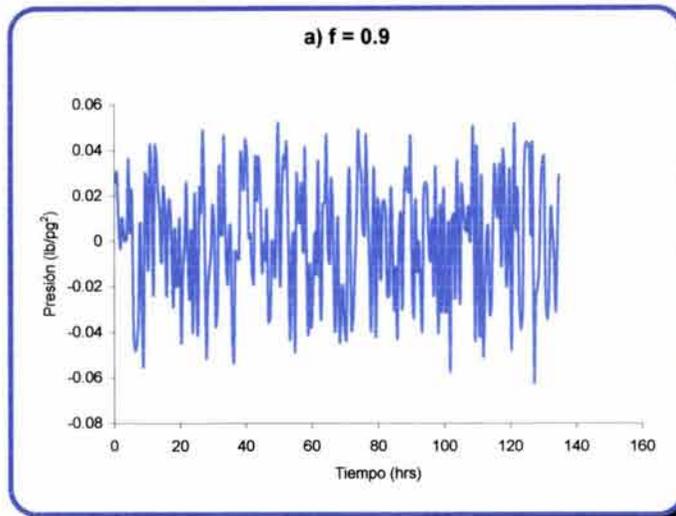


FIGURA 4-69.- CONTINUACIÓN.

En las figuras anteriores se observa que, el error resultante después del suavizamiento de la curva es mayor que el ruido que afecta originalmente la prueba, el cual tiene una amplitud de 0.1 lb/pg<sup>2</sup>, en comparación con 0.8, 0.3, 0.16, 0.12 y 0.11 lb/pg<sup>2</sup> de amplitud del error. Este es, sin embargo, menor que el ocasionado por el filtro pasa-bajas, por lo que se puede afirmar que el suavizamiento de la curva afecta en menor medida a los componentes de la prueba de presión que un filtro ideal pasa-bajas.

#### IV.4.2 Prueba de Presión con ruido por Efecto de Marea.

En la Figura 4-70, se muestra la representación gráfica de la prueba de presión limpia afectada por el efecto de marea, en esta se observa que el efecto crea una oscilación de los datos respecto a los originales.

En la Figura 4-71 y 4-72 se muestra el comportamiento de la prueba de presión con ruido en el dominio de la frecuencia, en escala cartesiana y semi-logarítmica, respectivamente.

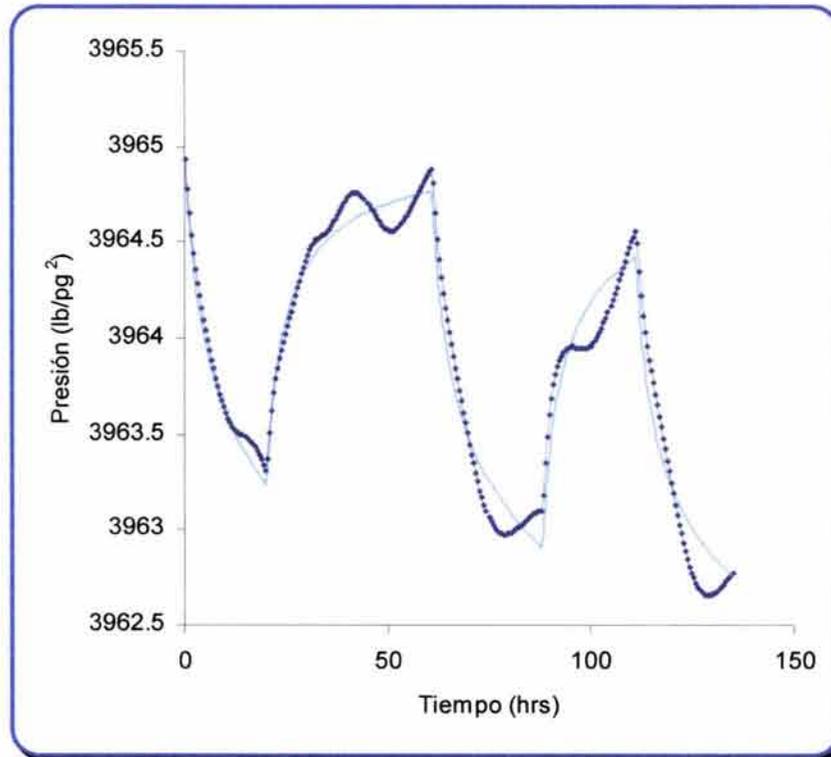


FIGURA 4-70.- PRUEBA DE PRESIÓN CON RUIDO POR EFECTO DE MAREA.

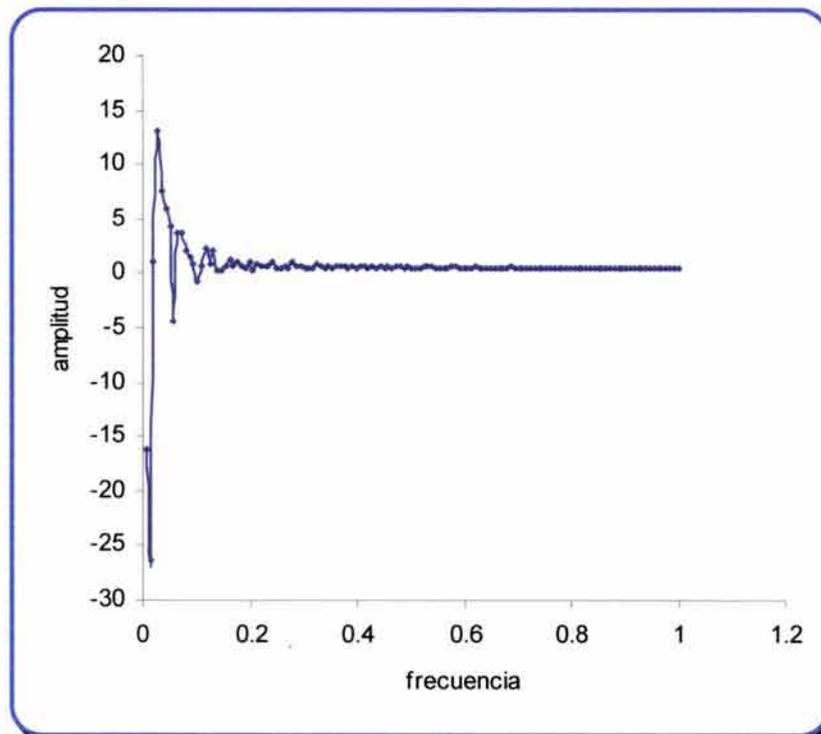


FIGURA 4-71.- PRUEBA DE PRESIÓN CON RUIDO POR EFECTO DE MAREA EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA.

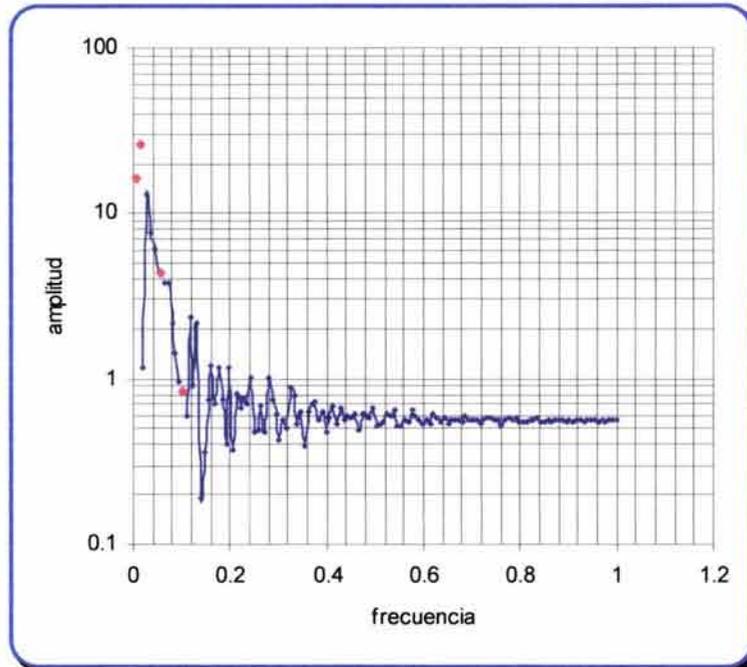


FIGURA 4-72.- PRUEBA DE PRESIÓN CON RUIDO POR EFECTO DE MAREA EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA, EN ESCALA SEMI-LOGARÍTMICA.

En las figuras anteriores se observa que, el mayor rango de amplitudes se encuentra en las bajas frecuencias y este se reduce conforme aumenta el valor de la frecuencia, para volverse constante para valores mayores a 0.6 en frecuencia aproximadamente. Este comportamiento es muy similar al de la prueba limpia, mostrado en la Figura 4-26.

La información de la señal correspondiente al ruido por efecto de marea, se encuentra en su mayoría en las bajas frecuencias, al igual que para el modelo de la prueba de presión. Por lo que los resultados al aplicar un filtro pasa-bajas para diferentes frecuencias de corte, no son los deseados, Estos se muestran en la Figura 4-73, y el error correspondiente a los mismos respecto a la prueba limpia en la Figura 4-74.

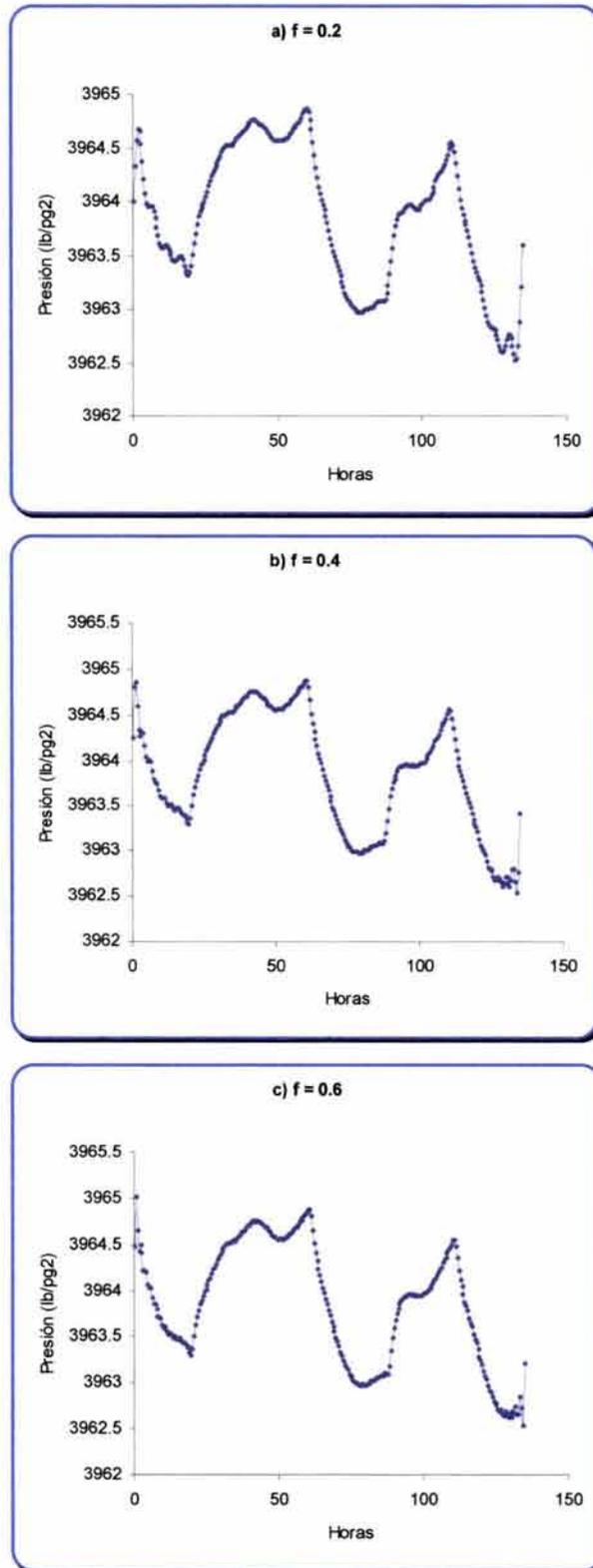


FIGURA 4-73.- RESULTADO DE LA APLICACIÓN DE UN FILTRO PASA-BAJAS, CON DIFERENTES FRECUENCIAS DE CORTE, A UNA PRUEBA DE PRESIÓN CON RUIDO POR EFECTO DE MAREA.

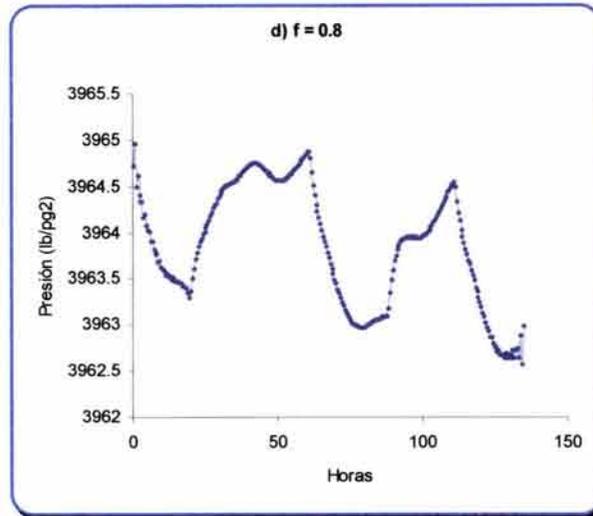


FIGURA 4-73.- CONTINUACIÓN.

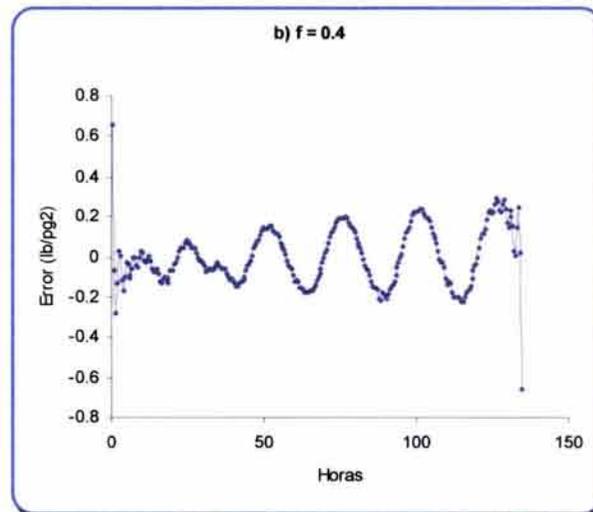
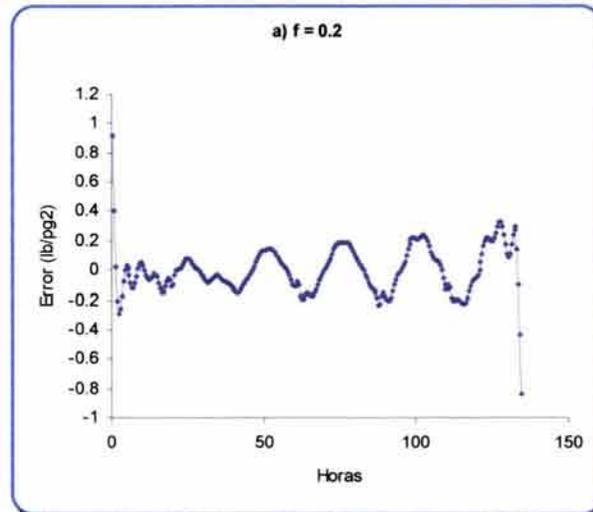


FIGURA 4-74.- ERROR DE LOS RESULTADOS MOSTRADOS EN LA FIGURA 4-73, RESPECTO A LA PRUEBA DE PRESIÓN LIMPIA.

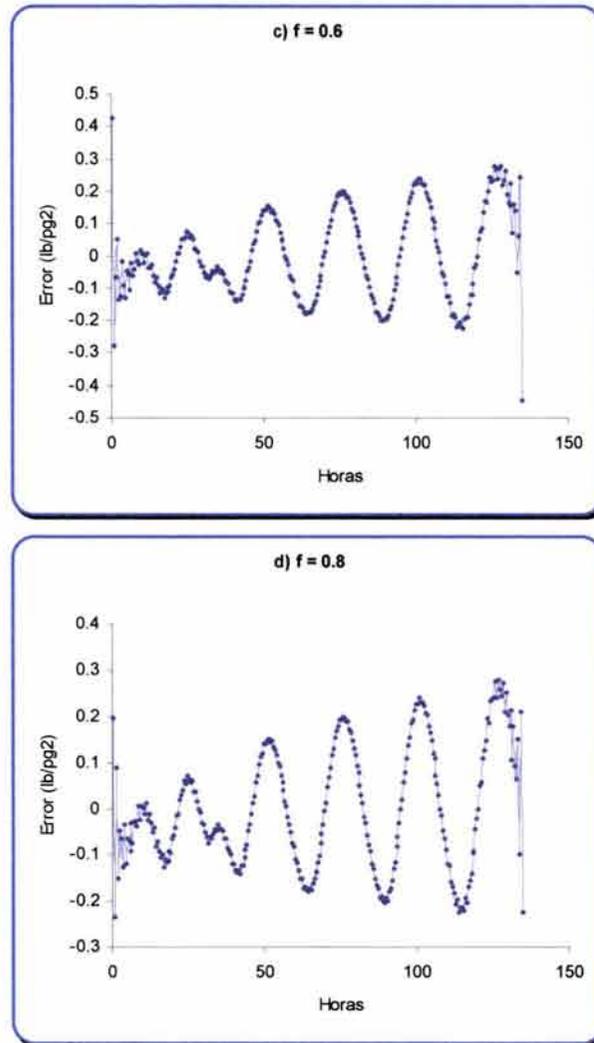


FIGURA 4-74.- CONTINUACIÓN.

Se esperaría obtener al menos un error menor al propio efecto de marea, sin embargo este es mayor en todos los casos con la utilización de un filtro pasabajas, esto debido a la parte de la prueba de presión que es omitida.

En la Figuras 4-75 y 4-76, se muestra el resultado de suavizar la curva de frecuencia, volviendo constante la banda de frecuencias superior a diferentes valores dados y el error de este suavizamiento respecto a la prueba de presión limpia.

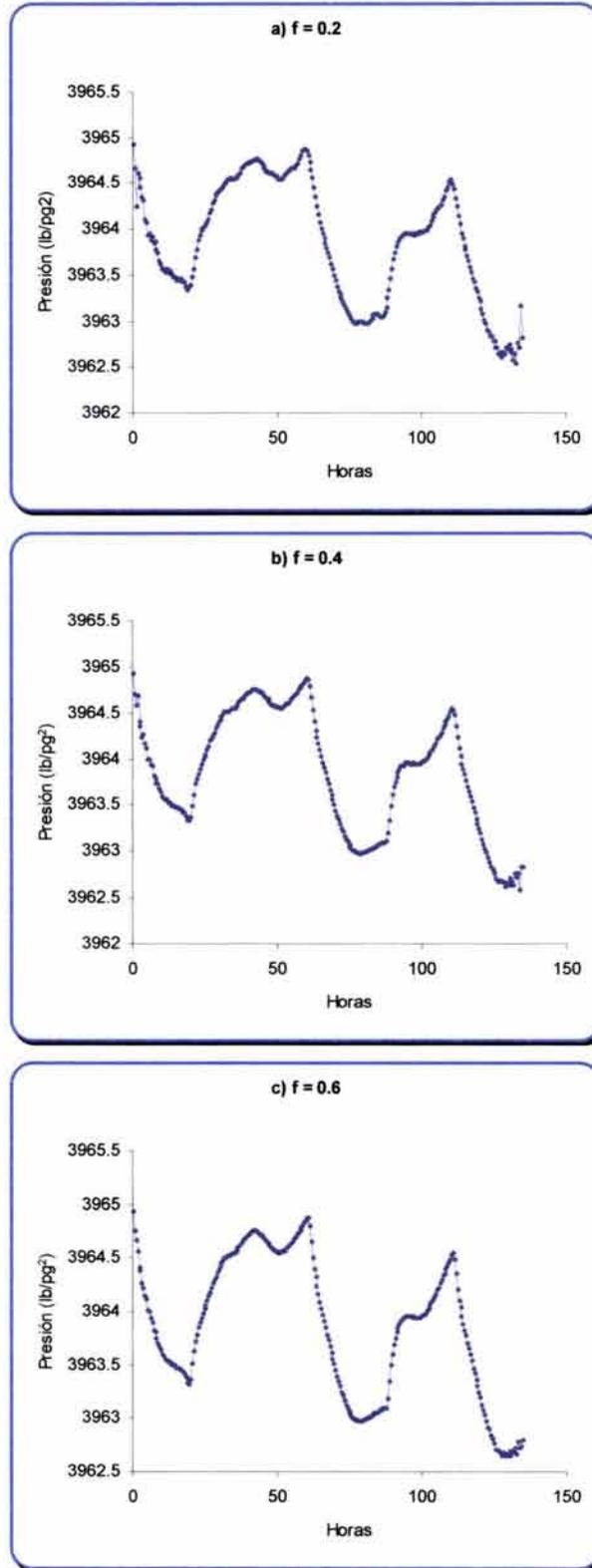


FIGURA 4-75.- RESULTADO DEL SUAVIZAMIENTO DE LA CURVA, A PARTIR DIFERENTES FRECUENCIAS

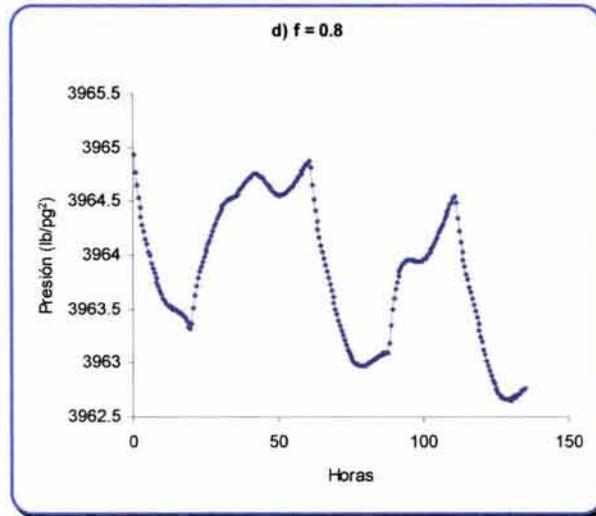


FIGURA 4-75.- CONTINUACIÓN.

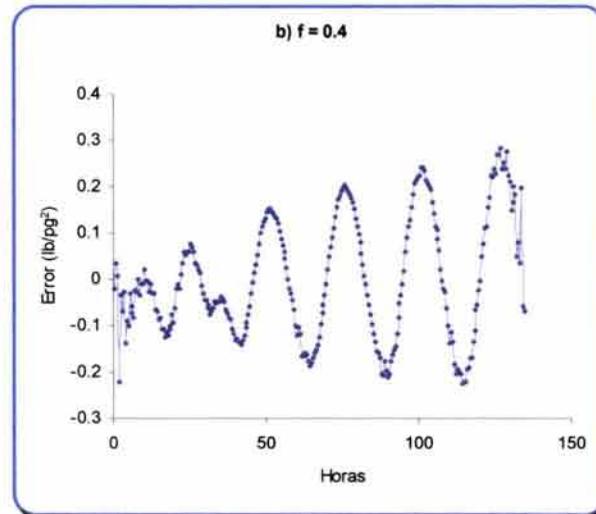
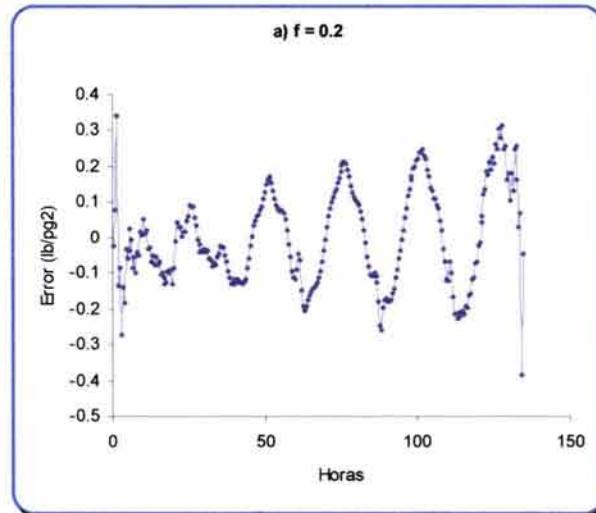


FIGURA 4-76.- ERROR DEL RESULTADO DEL SUAVIZAMIENTO DE LA CURVA, A PARTIR DE DIFERENTES FRECUENCIAS, RESPECTO A LA PRUEBA DE PRESIÓN LIMPIA.

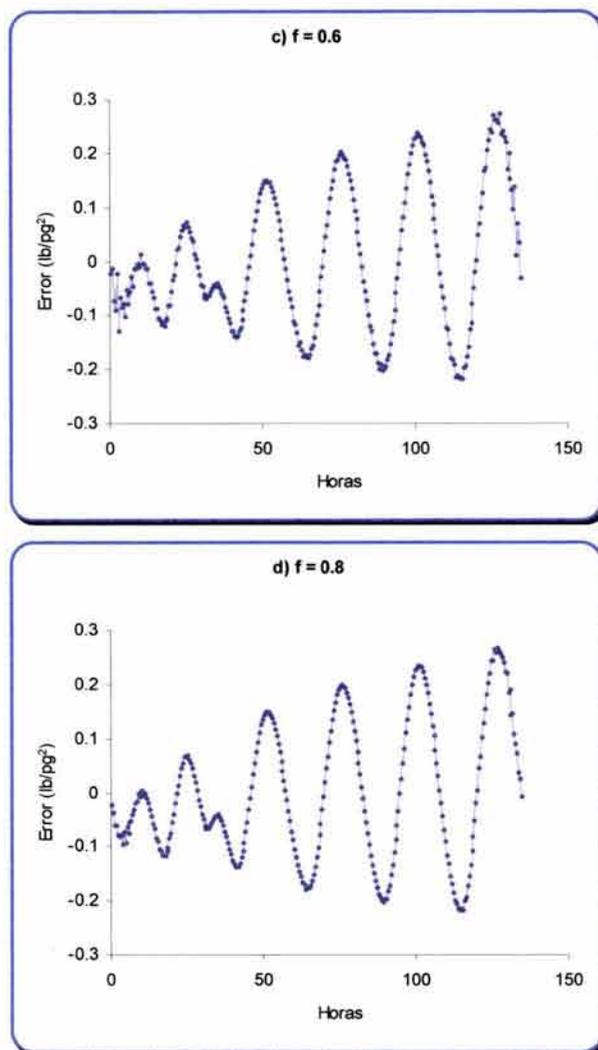


FIGURA 4-76.- CONTINUACIÓN.

El error de los resultados mostrados, son menores que los obtenidos con la utilización de un filtro pasa-bajas, pero siguen siendo mayores que el propio ruido por efecto de marea; y este incrementa para los últimos datos de la prueba.

Como se ha visto en esta sección, la naturaleza, del ruido Gaussiano, de Cuantización y por Efecto de Marea; ocasiona que los filtros ideales y el suavizamiento de la curva en el dominio de la frecuencia, no sean las técnicas más adecuadas para el tratamiento de los datos. Sin embargo como se explicó en el Capítulo III, existen otros tipos de filtro, cuyo análisis no se incluye en este trabajo de tesis.

---

# CAPÍTULO V

## CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.

### **V.1 CONCLUSIONES.**

➤ Existen varios tipos de Pruebas Transitorias de Presión; sin embargo, las de interferencia o pozos múltiples proveen información de un área mayor del yacimiento, en éstas, la señal de presión generada en el pozo activo es una señal estable cuando llega al pozo de observación, donde es medida.

➤ Las frecuencias bajas son las más representativas del modelo de una prueba de presión, para las altas frecuencias la amplitud tiende a ser una constante; es decir, al incrementarse los valores de frecuencia el rango de amplitud disminuye, hasta que esta se vuelve una constante.

➤ La respuesta del modelo de una Prueba de Presión a la aplicación de un filtro ideal pasa-bajas, es la mayor oscilación de los datos iniciales y finales; por lo que se puede afirmar que la información de las altas frecuencias corresponde, en su mayoría, a los datos extremos en el dominio del tiempo.

➤ El suavizamiento de la curva representativa de la Prueba de Presión en el dominio de la frecuencia, tomando el promedio aritmético de las amplitudes a partir de cierta frecuencia dada, afecta en menor medida los datos en el dominio del tiempo que la utilización de un filtro ideal pasa-bajas.

➤ La Transformada de Fourier del ruido Gaussiano y de Cuantización, abarca toda la banda de frecuencias, debido a su naturaleza aleatoria; por lo que

un filtro ideal pasa-bajas o el suavizamiento de la curva, solo eliminan una parte de este tipo de ruido.

➤ La representación del ruido por Efecto de Marea en el dominio de la frecuencia, indica que las frecuencias bajas tienen mayor amplitud y que esta última tiende a ser constante con el incremento de la frecuencia; se observa que tiene un comportamiento muy similar al del modelo de una Prueba de pulsos de Presión.

➤ La aplicación del Análisis de Fourier para analizar los datos de una Prueba de Presión en el dominio de la frecuencia, es un área de oportunidad muy amplia, la cual requiere, aún, de más investigación.

➤ El ruido Guassiano y de Cuantización es detectable, con mayor facilidad en el dominio de la frecuencia, debido a que se encuentra en toda la banda de frecuencias.

➤ En la investigación de la aplicación de un filtro ideal pasa-bajas y del suavizamiento de la curva en el dominio de la frecuencia, para eliminar ruidos presentes en la señal de la prueba de presión, no se obtuvo un procedimiento eficiente con resultados prácticos; sin embargo, existen una gran cantidad de filtros, para ser aplicados al tema.

➤ Se considera que el presente trabajo constituye un apoyo para posteriores investigaciones en el campo del análisis de pruebas de presión.

## **V.2 RECOMENDACIONES**

➤ Dada la amplia variedad de filtros, como los mencionados en el capítulo III de este trabajo de tesis, y técnicas para el tratamiento de las señales en el dominio de la frecuencia, se requiere de mayor investigación. A las pruebas de

---

Presión pueden aplicarse otro tipo de filtros, que no fueron estudiados en este trabajo de tesis, como lo son, los conformadores de frecuencia.

➤ Pueden estudiarse otras técnicas, utilizadas con éxito en otras áreas, como lo es el procesamiento digital de imágenes, en la que existen procedimientos específicos para la eliminación de ruido aleatorio.

➤ Se recomienda analizar la alternativa de superponer la señal de campo al modelo teórico, que simula el flujo de fluidos en el medio poroso, esto es, el ruido de la señal. A partir del análisis del ruido puede identificarse la presencia de efectos de marea, fronteras impermeables, así como el ruido Gaussiano y de Cuantización.

---

---

# NOMENCLATURA

## CONSTANTES

SÍMBOLO	DESCRIPCIÓN	VALOR
$\alpha$	Constante de conversión	141.2
$\beta$	Constante de conversión	0.0002637
$\gamma$	Constante de Euler	1.78
$\pi$	Número pi	3.1416
e	Número e	2.7183
j	Unidad imaginaria.	$\sqrt{-1}$
$\forall !$	Símbolo matemático que significa para todas(os) las(os) demás	-----

---

## VARIABLES

SÍMBOLO	DESCRIPCIÓN	UNIDADES
$\Delta()$	Función de muestreo en tiempo o frecuencia	-----
$\Delta_A$	Efecto de marea total	-----
$\Delta_B$	Efecto de marea barométrico	-----
$\Delta_E$	Efecto de marea en al Tierra sólida	-----
$\Delta_O$	Efecto de marea oceánica	-----
$\Delta p$	Caída de Presión	lb/pg <sup>2</sup>
$\epsilon_0$	Error promedio	-----
$\epsilon^2$	Error cuadrático medio	-----
$\epsilon_k$	Error entre una función y su aproximada	-----
$\phi$	Porosidad	fracción

---

SÍMBOLO	DESCRIPCIÓN	UNIDADES
$\phi_n$	Ángulos de fase en la Serie de Fourier	-----
$\mathfrak{F}[ ]$	Transformada de Fourier	-----
$\mathfrak{F}^{-1}[ ]$	Transformada Inversa de Fourier	-----
$\eta_1$	Pendiente de la tendencia lineal de presión	-----
$\mu$	viscosidad	cp
$\rho$	Densidad	g/cm <sup>3</sup> (gcc)
$\Sigma$	Sumatoria	-----
$\omega$	Frecuencia angular	radianes
$\omega_0$	Frecuencia angular fundamental	radianes
A	Intersección en la técnica de El-Khatib	-----
$a_0$	Coficiente de la Serie de Fourier	-----
$a_n$	Coficientes de la Serie de Fourier	-----
B	Factor de volumen	Vol. @ c.y./ Vol. @ c.e.
$b_n$	Coficientes de la Serie de Fourier	-----
C	Constante de almacenamiento del pozo	bl/(lb/pg <sup>2</sup> )
$C_n$	Amplitudes armónicas en al Serie de Fourier	-----
$c_t$	Compresibilidad total	(lb/pg <sup>2</sup> ) <sup>-1</sup>
D	Altura de la columna hidrostática	m, ft
$E_i(-x)$	Integral Exponencial	$-E_i(-x) = \int_x^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$
f	Frecuencia	seg <sup>-1</sup> , hrs <sup>-1</sup>
F(f)	Función en el dominio de la frecuencia	-----
f(t)	Función en el dominio del tiempo	-----
$f_0$	Frecuencia fundamental	seg <sup>-1</sup> , hrs <sup>-1</sup>
$f_c$	Frecuencia de corte	seg <sup>-1</sup> , hrs <sup>-1</sup>
h	Espesor neto de la formación	ft
k	Permeabilidad	mD
m	Pendiente de la Gráfica semilogarítmica t contra $\Delta p$	-----

<b>SÍMBOLO</b>	<b>DESCRIPCIÓN</b>	<b>UNIDADES</b>
p	Presión	lb/pg <sup>2</sup>
P <sub>h</sub>	Presión hidrostática	lb/pg <sup>2</sup>
pmdp	Función de Análisis de pruebas de Interferencia	-----
q	Gasto	bpd
r	Distancia radial	ft
t	Tiempo	h
T	Transmisibilidad	mD-ft
T	Intervalo de muestreo en el tiempo	seg, hrs
T <sub>0</sub>	Periodo fundamental	seg, hrs
t <sub>x</sub>	Tiempo de intersección en gráfica cartesiana t contra Δp	-----

## ÍNDICES Y SUBÍNDICES

<b>SÍMBOLO</b>	<b>DESCRIPCIÓN</b>
a	Aproximada
D	Adimensional
i	Condiciones iniciales
I	Imaginario
máx	Máximo
R	Real

## ABREVIATURAS

<b>SÍMBOLO</b>	<b>DESCRIPCIÓN</b>
DFT	Transformada Discreta de Fourier
DST	Drill Stem Test
FFT	Transformada Rápida de Fourier

---

<b>SÍMBOLO</b>	<b>DESCRIPCIÓN</b>
MMpcd	Millones de pies cúbicos por día.
OLADE	Organización Latinoamericana de Energía.
SIEE	Sistema de Información Económico Energética.
TCF	Transformada Continua de Fourier

---

---

# REFERENCIAS

1. Organización Latinoamericana de Energía (OLADE), Sistema de Información Económico Energética (SIEE).  
[http://www.olade.org.ec/sieehome/estadisticas/consumo\\_mundial.html](http://www.olade.org.ec/sieehome/estadisticas/consumo_mundial.html).
2. Petróleos Mexicanos, Anuario Estadístico 2003, México, 2003. pp. 46,58
3. Petróleos Mexicanos, Anuario Estadístico 2001, México, 2001. p. 11
4. Hsu Hwei P., "Análisis de Fourier", 1ra. Reimpresión, Ed. Adison Wesley Longman de México S.A. de C.V., México, 1998. p. I
5. Kamal, M. M., "Interference and Pulse Testing – A Review", artículo SPE 10042, JPT (Diciembre 1983) 2257-2270.
6. Ramey, H. J. Jr., "Short Time Well Test Data Interpretation in the Presence of Skin Effect and Wellbore Storage", JPT (Enero 1970). 97-104; Trans AIME, 249.
7. Earlougher, Robert C. JR., "Advances in Well Test Analysis", Monograph Volume 5, Society of Petroleum Engineers, 1977.
8. Matthews C. S. y Rusell D. G., "Pressure Buildup and Flow Test in Wells", Monograph Volume 1, SPE Henry L. Doherty Series, 1967.
9. Gutiérrez Ruiz, M. E., "Uso de Curvas Tipo en el Análisis de Pruebas de Interferencia y de un solo Pulso", Tesis de Licenciatura en Ingeniería Petrolera, Facultad de Ingeniería, UNAM, 1984.
10. Ramey, H. J. Jr., *ob. cit.*
11. Earlougher, Robert C. JR., *ob. cit.*
12. Lescarboursa, A. Jaime, Walter, C. Herbert. , "Design and Analysis of Interference Test", artículo 5314, Presentado en la Reunión regional de la SPE en California, Ventura, abril 1975.
13. Ibíd.
14. loc. Cit.

- 
15. Djebbar Tiab y Kumar Anil., "Application of the  $P'_d$  function to Interference Analysis", Artículo SPE 6053, JPT. Agosto 1980. 1465-1470
  16. Ibíd.
  17. El-Khatib, Noaman, A.F., "A New Approach to Interference Test Analysis", SPE Formation Evaluation. Diciembre 1987. 609-610.
  18. Ibíd..
  19. Kamal, M. M. y Brigham, W. E., "The Effect of Linear Pressure Trends on Interference Test", JPT. Noviembre 1975. 1383-1384.
  20. Martínez Romero, N., "Nuevos Procedimientos para la Caracterización Dinámica de Yacimientos a partir de Pruebas de Pozos Múltiples", Tesis de Maestría en Ingeniería, Facultad de Ingeniería, UNAM, 2000. pp 52-53.
  21. Ibíd.
  22. Cinco Ley, H., Macias Chapa, L. Samaniego Verduzco, F. Y Morales Gil, C., "Analysis of Well Tests Affected by a Pressure Trend", Artículo SPE 20554, Septiembre 1990. 23-26. Presentado en la Annual Technical Conference and Exhibition New Orleans, LA.
  23. Ibíd..
  24. Cinco Ley, H., Macias Chapa, L. Samaniego Verduzco, F. Y Morales Gil, C., ob.cit.
  25. ibíd.
  26. Gerald, C.F. y Wheatley, P.O., "Análisis Numérico con Aplicaciones", 6ª Edición, Ed. Pearson Education, México, 2000. p. 238.
  27. Brigham E. O. "The Fast Fourier Transform", Ed. Prentice Hall, New Jersey, USA, p. 164.
  28. Martínez Romero, N., ob. cit.
  29. Hemala, M.L., Balnaves, C. "Tidal Effect in Petroleum Well Testing", Artículo SPE 14607, 1986.
  30. Secretaría de Marina, Predicción de Mareas 2004, Estación mareográfica Cd. del Carmen, Campeche.  
[http://www.semar.gob.mx/%7Ehidrocart/grafnum/grafnum\\_cdcarmen.htm](http://www.semar.gob.mx/%7Ehidrocart/grafnum/grafnum_cdcarmen.htm)
-

---

# BIBLIOGRAFÍA

1. Allen, T. O. y Roberts, A. P., "Production Operations", Volumen 1, 3ra. Edición, Oil and Gas Consultants International Inc., Tulsa, 1989.
2. Anguiano Rojas R., "Introducción al Análisis de Fourier", 1ra. Reimpresión. Facultad de Ingeniería, UNAM. 2001.
3. Cinco Ley, H., Macias Chapa, L. Samaniego Verduzco, F. Y Morales Gil, C., "Analysis of Well Tests Affected by a Pressure Trend", Artículo SPE 20554, Septiembre 1990.
4. Díaz de Argandoña, J., "Geofísica. Campo Gravitatorio Terrestre", Universidad Pedagógica de Valencia, Departamento de Física Aplicada. Enero, 2004.
5. Djebbar Tiab y Kumar Anil., "Application of the  $P'_d$  function to Interference Analysis", Artículo SPE 6053, JPT. Agosto 1980.
6. Earlougher, Robert C. JR., "Advances in Well Test Analysis", Monograph Volume 5, Society of Petroleum Engineers, 1977.
7. El-Khatib, Noaman, A.F., "A New Approach to Interference Test Analysis", SPE Formation Evaluation. Diciembre 1987.
8. Gerald, C. F. y Wheatley, P. O., "Análisis Numérico con Aplicaciones", 6ta. Edición. Pearson Education, México, 2000.

- 
9. González Tamez, F., "Filtro para Ruido de Truncamiento en Pruebas de Variación de Presión", Tesis de Maestría en Ingeniería, Facultad de Ingeniería, UNAM, 2000.
  10. Gutiérrez Ruiz, M. E., "Uso de Curvas Tipo en el Análisis de Pruebas de Interferencia y de un solo Pulso", Tesis de Licenciatura en Ingeniería Petrolera, Facultad de Ingeniería, UNAM, 1984.
  11. Hemala, M. L. y Balnaves, C. "Tidal Effect in Petroleum Well Testing", Artículo SPE 14607, 1986.
  12. Hsu Hwei P., "Análisis de Fourier", 1ra. Reimpresión, Ed. Adison Wesley Longman de México S.A. de C.V., México, 1998.
  13. Kamal, M. M. y Brigham, W. E., "The Effect of Linear Pressure Trends on Interference Test", JPT. Noviembre 1975.
  14. Kamal, M. M., "Interference and Pulse Testing – A Review", artículo SPE 10042, JPT (Diciembre 1983) 2257-2270.
  15. Kikani y Fair, P. S., "Pitfalls in Pressure Gauge Performance", Artículo SPE 30613, 1995.
  16. Lescarbours, A. Jaime, Walter, C. Herbert., "Design and Analysis of Interference Test", artículo 5314, Presentado en la Reunión regional de la SPE en California, Ventura, abril 1975.
  17. Martínez Romero, N., "La Caracterización Dinámica, un Factor Clave para la Administración de los Yacimientos Petrolíferos". Trabajo de Ingreso a la Academia de Ingeniería. México, 2003.

18. Martínez Romero, N., "Nuevos Procedimientos para la Caracterización Dinámica de Yacimientos a partir de Pruebas de Pozos Múltiples", Tesis de Maestría en Ingeniería, Facultad de Ingeniería, UNAM, 2000.
19. Matthews C. S. y Rusell D. G., "Pressure Buildup and Flow Test in Wells", Monograph Volume 1, SPE Henry L. Doherty Series, 1967.
20. Oppenheim A., Willsky A., "Señales y Sistemas", Segunda Edición, Prentice Hall Hispanoamericana, México, 1997.
21. Oran Brigham E., "The Fast Fourier Transform", Prentice Hall Inc., New Jersey.
22. Petróleos Mexicanos, Anuario Estadístico 2001, México, 2001.
23. Petróleos Mexicanos, Anuario Estadístico 2003, México, 2003.
24. Ramey, H. J. Jr., "Short Time Well Test Data Interpretation in the Presence of Skin Effect and Wellbore Storage", JPT (Enero 1970). Trans AIME, 249.
25. Schlumberger, "Sensors".
26. Soliman, M. Y., Ansah, J., Stephenson, S. y Mandal, B. "Application of Wavelet Transform to Analysis of Pressure Transient Data", Artículo SPE 71571, 2001.

---

# APÉNDICE

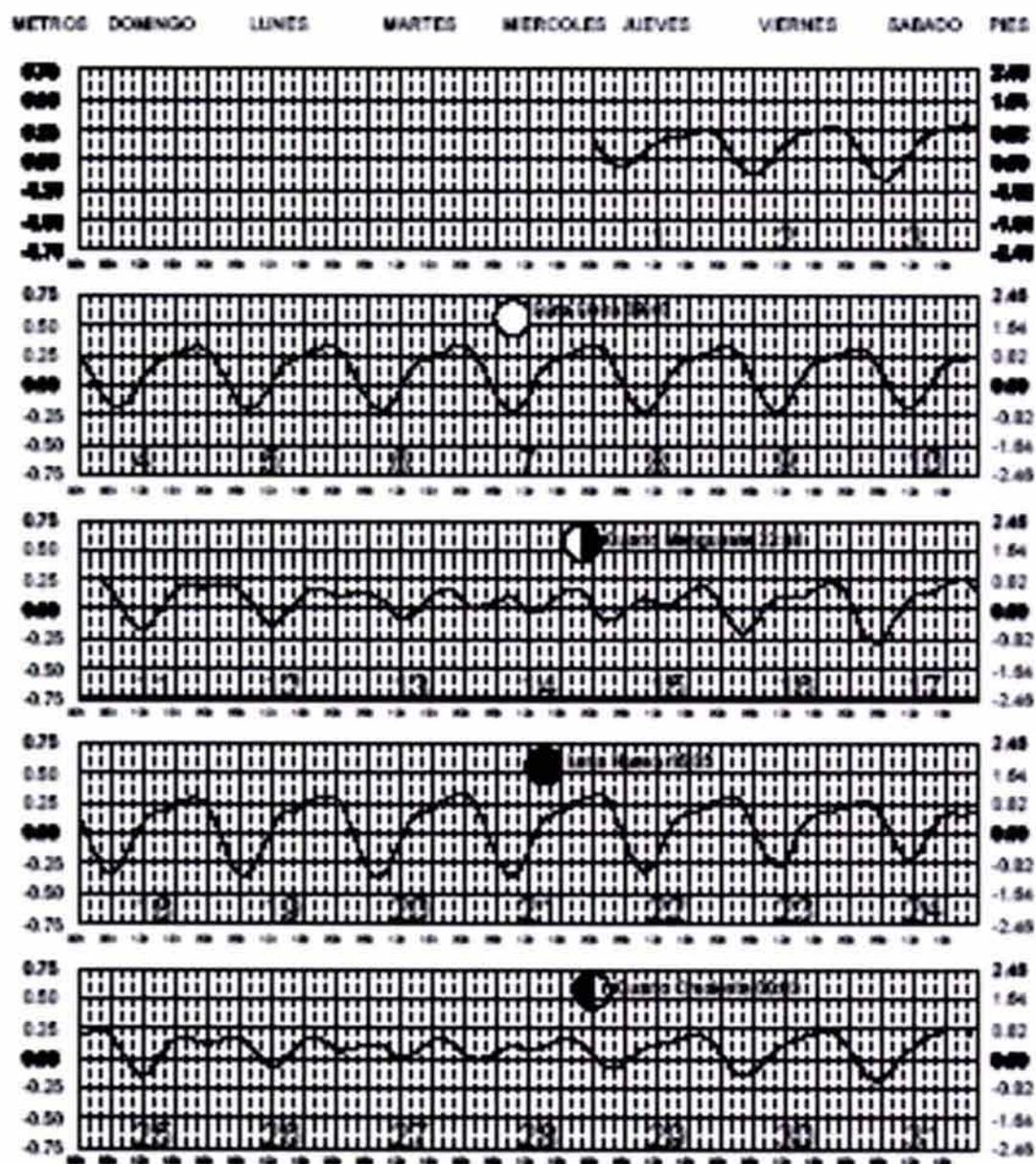
## A

TABLAS Y GRAFICAS DE LA PREDICCIÓN DE MAREAS 2004.

Estación mareográfica Cd. del Carmen, Campeche.

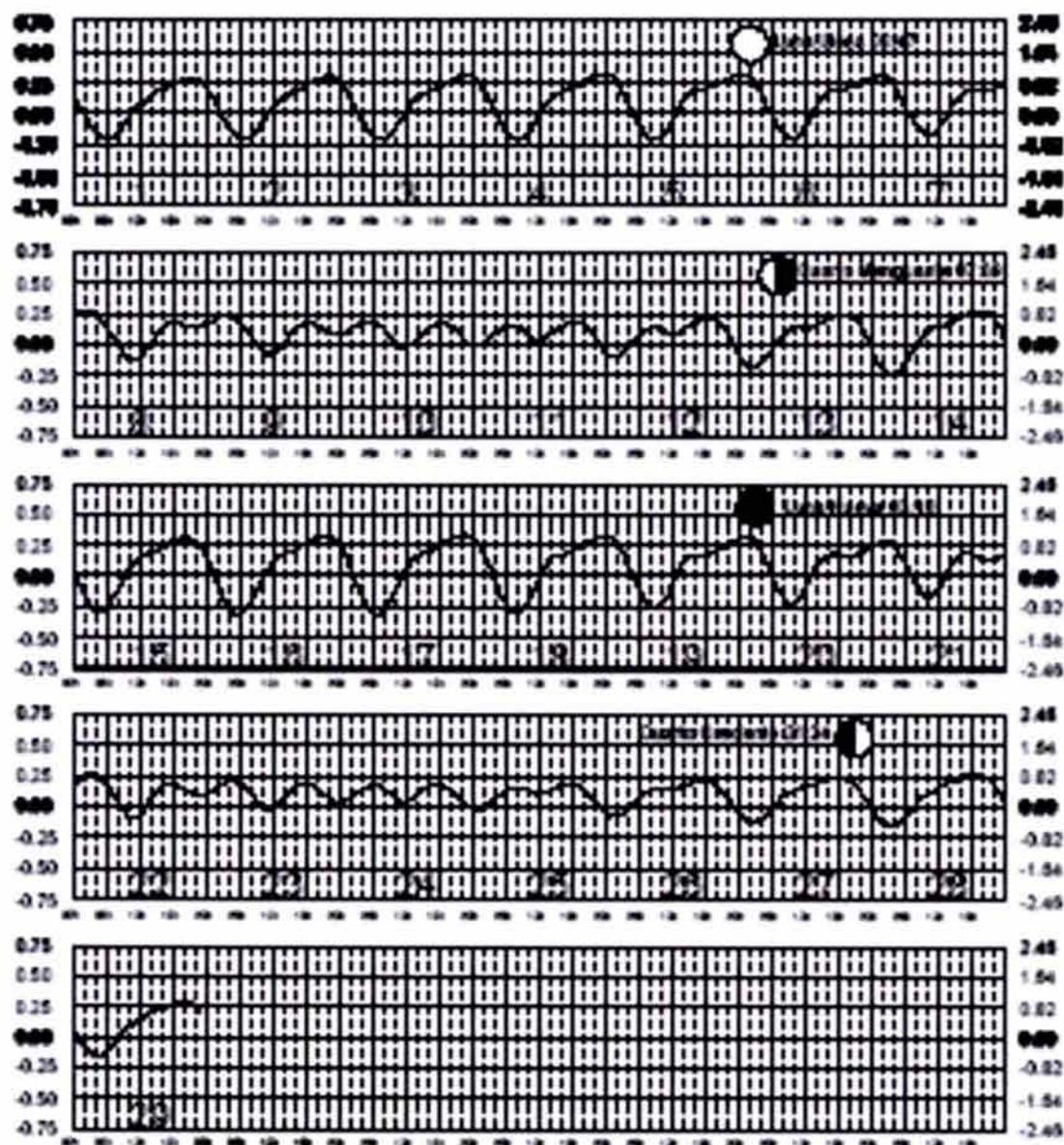
Secretaría de Marina

## GRÁFICA ENERO, 2004.



**GRÁFICA FEBRERO, 2004.**

METROS DOMINGO LUNES MARTES MIÉRCOLES JUEVES VIERNES SÁBADO FES



**TABLA DE DATOS ENERO Y FEBRERO, 2004.**

FASES DE LA LUNA							
LUNA LLENA		CUARTO MENGUANTE		LUNA NUEVA		CUARTO CRECIENTE	
FECHA HORA	NIVEL DEL MAR (m)						
07/01/2004 09:27	-0.21	14/01/2004 01:39	0	21/01/2004 00:07	0.32	29/01/2004 03:17	-0.1
07/01/2004 23:31	0.34	14/01/2004 08:19	0.1	21/01/2004 09:00	-0.34	29/01/2004 10:46	0.11
08/01/2004 10:05	-0.21	14/01/2004 13:04	0	22/01/2004 01:18	0.33	29/01/2004 12:17	0.11
08/01/2004 23:57	0.33	14/01/2004 20:06	0.17	22/01/2004 09:56	-0.31	29/01/2004 12:43	0.19
09/01/2004 10:42	-0.2	15/01/2004 02:46	-0.1	23/01/2004 02:18	0.32	30/01/2004 04:17	-0.16
10/01/2004 00:35	0.31	15/01/2004 10:10	0.1	23/01/2004 10:46	-0.27	30/01/2004 19:15	0.23
10/01/2004 11:17	-0.19	15/01/2004 12:53	0.06	24/01/2004 03:07	0.29	31/01/2004 05:12	-0.2
11/01/2004 01:54	0.27	15/01/2004 20:05	0.2	24/01/2004 11:27	-0.21	31/01/2004 19:57	0.26
11/01/2004 11:49	-0.17	16/01/2004 03:51	-0.2	25/01/2004 03:57	0.24	01/02/2004 06:07	-0.22
11/01/2004 19:43	0.18	16/01/2004 20:29	0.24	25/01/2004 11:57	-0.14	01/02/2004 20:48	0.28
11/01/2004 21:35	0.17	17/01/2004 04:50	-0.28	25/01/2004 20:11	0.16	02/02/2004 07:02	-0.22
12/01/2004 03:23	0.21	17/01/2004 21:10	0.27	26/01/2004 00:33	0.12	02/02/2004 21:41	0.31
12/01/2004 12:18	-0.13	18/01/2004 05:49	-0.33	26/01/2004 05:13	0.19	03/02/2004 07:50	-0.22
12/01/2004 19:37	0.17	18/01/2004 22:03	0.3	26/01/2004 12:14	-0.07	03/02/2004 22:31	0.32
13/01/2004 00:24	0.1	19/01/2004 06:54	-0.35	26/01/2004 20:08	0.16	04/02/2004 08:30	-0.22
13/01/2004 04:50	0.15	19/01/2004 23:02	0.32	27/01/2004 01:23	0.05	04/02/2004 23:20	0.33
13/01/2004 12:45	-0.07	20/01/2004 07:59	-0.36	27/01/2004 06:44	0.14	05/02/2004 09:06	-0.21
13/01/2004 19:52	0.16			27/01/2004 12:26	0		
				27/01/2004 19:34	0.16		
				28/01/2004 02:17	-0.03		
				28/01/2004 08:54	0.11		
				28/01/2004 12:43	0.06		
				28/01/2004 19:46	0.17		

FASES DE LA LUNA							
LUNA LLENA		CUARTO MENGUANTE		LUNA NUEVA		CUARTO CRECIENTE	
FECHA HORA	NIVEL DEL MAR (m)						
06/02/2004 00:17	0.32	13/02/2004 02:23	-0.2	20/02/2004 01:32	0.32	27/02/2004 02:32	-0.14
06/02/2004 09:40	-0.2	13/02/2004 10:49	0.15	20/02/2004 09:43	-0.21	27/02/2004 17:29	0.24
06/02/2004 16:57	0.19	13/02/2004 11:54	0.15	20/02/2004 17:01	0.19	28/02/2004 03:43	-0.16
06/02/2004 18:02	0.19	13/02/2004 19:10	0.27	20/02/2004 19:06	0.19	28/02/2004 18:26	0.26
07/02/2004 01:19	0.3	14/02/2004 03:35	-0.26	21/02/2004 02:27	0.3	29/02/2004 04:46	-0.18
07/02/2004 10:16	-0.17	14/02/2004 20:00	0.29	21/02/2004 10:18	-0.16	29/02/2004 19:28	0.29
07/02/2004 17:08	0.19	15/02/2004 04:40	-0.3	21/02/2004 17:21	0.19		
07/02/2004 19:22	0.18	15/02/2004 20:59	0.31	21/02/2004 21:51	0.15		
08/02/2004 02:17	0.28	16/02/2004 05:44	-0.3	22/02/2004 03:18	0.27		
08/02/2004 10:53	-0.13	16/02/2004 22:04	0.33	22/02/2004 10:46	-0.09		
08/02/2004 17:23	0.18	17/02/2004 06:57	-0.3	22/02/2004 17:28	0.18		
08/02/2004 21:30	0.14	17/02/2004 23:12	0.33	22/02/2004 23:15	0.09		
09/02/2004 03:13	0.24	18/02/2004 08:07	-0.28	23/02/2004 04:17	0.23		
09/02/2004 11:28	-0.07	19/02/2004 00:27	0.33	23/02/2004 11:06	-0.02		
09/02/2004 17:47	0.18	19/02/2004 09:01	-0.25	23/02/2004 17:19	0.18		
09/02/2004 23:02	0.07			24/02/2004 00:02	0.02		
10/02/2004 04:59	0.18			24/02/2004 05:40	0.19		
10/02/2004 11:58	-0.01			24/02/2004 11:20	0.05		
10/02/2004 18:09	0.18			24/02/2004 17:35	0.19		
11/02/2004 00:14	-0.02			25/02/2004 00:46	-0.04		
11/02/2004 07:17	0.16			25/02/2004 07:18	0.17		
11/02/2004 12:17	0.06			25/02/2004 11:40	0.1		
11/02/2004 18:18	0.2			25/02/2004 17:02	0.2		
12/02/2004 01:16	-0.12			26/02/2004 01:34	-0.1		
12/02/2004 09:10	0.15			26/02/2004 08:59	0.16		
12/02/2004 12:21	0.11			26/02/2004 11:51	0.14		
12/02/2004 18:32	0.23			26/02/2004 17:03	0.22		