



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

MODELACION DE LA RESPUESTA ELECTRICA DE
ESTRUCTURAS 3-D EN UN SEMIESPACIO
CONDUCTOR

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

INGENIERO GEOFISICO

P R E S E N T A :

ADRIAN MISAEL LEON SANCHEZ

Directores: Dr. Andrés Tejero Andrade
Dra. Elsa Leticia Flores Márquez

MEXICO, D. F.

2004



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA
DIRECCIÓN
60-I-750

SR. ADRIÁN MISAEL LEÓN SÁNCHEZ
Presente

En atención a su solicitud, me es grato hacer de su conocimiento el tema que propuso el profesor Dr. Andrés Tejero Andrade y que aprobó esta Dirección para que lo desarrolle usted como tesis de su examen profesional de Ingeniero Geofísico:

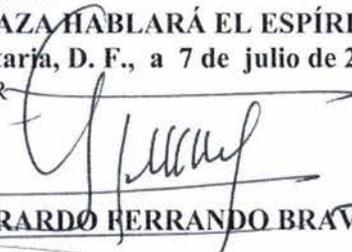
**MODELACIÓN DE LA RESPUESTA ELÉCTRICA DE ESTRUCTURAS 3-D
EN UN SEMIESPACIO CONDUCTOR**

RESUMEN
INTRODUCCIÓN
I TEORÍA DE LOS MÉTODOS DE CORRIENTE CONTINUA
II TEORÍA DE LA MODELACIÓN DE ESTRUCTURAS 3-D EN UN SEMIESPACIO CONDUCTOR
III ALGORITMO NUMÉRICO
IV APLICACIONES DEL MODELADO ELÉCTRICO
V CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES
BIBLIOGRAFÍA
ANEXOS

Ruego a usted cumplir con la disposición de la Dirección General de la Administración Escolar en el sentido de que se imprima en lugar visible de cada ejemplar de la tesis el título de ésta.

Asimismo, le recuerdo que la Ley de Profesiones estipula que se deberá prestar servicio social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito para sustentar examen profesional.

Atentamente
"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"
Cd. Universitaria, D. F., a 7 de julio de 2004
EL DIRECTOR


M. en C. GERARDO FERRANDO BRAVO

GFB*JAGC*gtg


A:

Mis padres
Daniel Misael León Chávez y María Dolores Sánchez Fuentes

Familia Romero León
Claudia, Héctor, Sebastián y _____

Rossana León Sánchez

Paul Daniel León Sánchez

Mi familia

Mis BROS

Mis amigos

AGRADECIMIENTOS

Al Dr. Andrés Tejero Andrade, por su tiempo y dedicación prestados al desarrollo de este trabajo, muchas gracias.

A la Dra. Elsa Leticia Flores Márquez, por sus sugerencias y conocimientos aportados al presente trabajo.

Al Ing. Javier Urbieto Gómez, por la ayuda prestada y buenos ratos.

Al Dr. René Chávez y al Ing. Jaime Ruiz por sus propuestas que ayudaron a mejorar este trabajo.

A la UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO por haberme regalado los mejores momentos de mi vida como estudiante.

MODELACIÓN DE LA RESPUESTA ELÉCTRICA DE
ESTRUCTURAS 3-D EN UN SEMIESPACIO
CONDUCTOR

León Sánchez Adrián Misael

INDICE

INDICE	I
INDICE DE FIGURAS	IV
RESUMEN	1
INTRODUCCIÓN	2
CAPITULO 1. TEORÍA DE LOS MÉTODOS ELÉCTRICOS EN CORRIENTE CONTINUA.	5
1.1 Conceptos básicos	5
1.1.1 Ecuaciones fundamentales	5
1.1.2 Fuente puntual en un semiespacio	6
1.1.3 Dispositivo eléctrico	8
1.1.4 Concepto de resistividad aparente	10
1.2 Modalidades en los métodos eléctricos	10
1.2.1 Sondeo Eléctrico Vertical	10
1.2.1.1 Medio estratificado	11
1.2.1.2 Interpretación del sondeo eléctrico vertical	12
1.2.2 Perfilaje Eléctrico	12
1.2.2.1 Tipos de anomalías	13
1.2.2.2 Interpretación del perfilaje eléctrico	13
1.2.3 Tomografía Eléctrica	15
1.2.3.1 Toma de datos de campo	15
1.2.3.2 Inversión de los datos de una pseudosección	16
1.3 Potencial en $z=0$, producido por un electrodo puntual en un semiespacio conductor heterogéneo	16
CAPITULO 2. MODELACIÓN DE ESTRUCTURAS 3D EN UN SEMIESPACIO CONDUCTOR	19
2.1 Hipótesis	19
2.1.1 Discretización del medio en paralelepípedos homogéneos.	19
2.1.2 La función potencial bajo la hipótesis de dispersión débil.	20
2.1.3 Principio de superposición	24
2.2 Diferencia de potencial propuesta para la modelación	24
2.3 Cálculo de la resistividad aparente	26
CAPITULO 3. ALGORITMO NUMÉRICO	27
3.1 Solución numérica de la integral	28
3.1.1 Introducción	28
3.1.2 Cuadraturas de Gauss	28

3.1.3	Uso de las cuadraturas de gauss	30
3.2	Características generales del algoritmo de modelación	30
3.3	Propiedades	31
3.3.1	Simetría	31
3.3.2	Reciprocidad	31
3.4	Modelos	33
3.4.1	Medio estratificado	34
3.4.2	Dique conductor y resistivo	35
3.4.2.1	Dique conductor	36
3.4.2.2	Dique resistivo	37
3.4.3	Paralelepípedo infinito y paralelepípedo finito	38
3.4.3.1	Paralelepípedo infinito	38
3.4.3.2	Paralelepípedo finito	39
3.5	Eficiencias y restricciones del algoritmo	43
3.5.1	Eficiencia medio estratificado	44
3.5.2	Eficiencia dique resistivo	45
3.5.3	Eficiencia dique conductor	46
3.5.4	Eficiencia paralelepípedo infinito.	49
3.5.4.1	Arreglo WENNER	49
3.5.4.2	Arreglo DIPOLO-DIPOLO	52
3.5.4.3	Arreglo WENNER-SCHLUMBERGER	55
3.5.5	Restricciones del algoritmo de modelación	59
CAPITULO 4. APLICACIONES DEL MODELADO ELÉCTRICO		60
4.1	Ejemplos sintéticos	60
4.1.1	Algoritmo de Loke vs algoritmo propuesto	61
4.1.1.1	Arreglo WENNER	62
4.1.1.2	Arreglo DIPOLO-DIPOLO	63
4.1.1.3	Arreglo WENNER-SCHLUMBERGER	64
4.1.2.	Algoritmo de Fox vs algoritmo propuesto	65
4.2	Ejemplo de campo	66
4.2.1	Introducción	66
4.2.2	Delegación Álvaro Obregón	66
4.2.3	Marco geológico	67
4.2.4	Calle Puerto Madero	67
4.2.5	Calle Pedro Aguirre de la Cerda	70
4.2.6	Discusión de resultados	71
4.3	Modelación 2-D vs modelación 3-D	72
4.3.1	Arreglo WENNER	73
4.3.2	Arreglo DIPOLO-DIPOLO	74
4.3.3	Arreglo WENNER-SCHLUMBERGER	75
CAPITULO 5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES		77
5.1	Conclusiones	77
5.2	Recomendaciones	79

BIBLIOGRAFÍA	80
APÉNDICE A Medio estratificado. Propiedad de reciprocidad.	82
APÉNDICE B Dique conductor. Propiedad de simetría y reciprocidad arreglo WENNER.	83
APÉNDICE C Dique resistivo. Propiedad de simetría y reciprocidad. arreglo DIPOLO-DIPOLO.	84
APÉNDICE D Paralelepípedo infinito. propiedad de simetría y reciprocidad. arreglo WENNER-SCHLUMBERGER	85
APÉNDICE E Paralelepípedo finito. Propiedad de simetría y reciprocidad. arreglo WENNER.	86
APÉNDICE F Eficiencia. Comparación algoritmo propuesto vs algoritmo Fox	88
APÉNDICE G Eficiencia. Paralelepípedo infinito. Arreglo WENNER.	89
APÉNDICE H Eficiencia. Paralelepípedo infinito. Arreglo DIPOLO-DIPOLO.	91
APÉNDICE I Eficiencia. Paralelepípedo infinito. Arreglo WENNER-SCHLUMBERGER	95

INDICE DE FIGURAS

Figura 1.1	Fuente puntual en un semiespacio	6
Figura 1.2a	Dispositivos Eléctricos simétricos con sus respectivos factores geométricos. Arreglo WENNER	9
Figura 1.2b	Dispositivos Eléctricos simétricos con sus respectivos factores geométricos. Arreglo WENNER-SCHLUMBERGER	9
Figura 1.3	Dispositivo DIPOLO-DIPOLO	9
Figura 1.4	Modelo Medio Estratificado	11
Figura 1.5	Contacto entre dos capas, dispositivo simétrico	14
Figura 1.6	Contacto entre dos medios, dispositivo dipolar	14
Figura 1.7	Capa ancha resistiva, dispositivo simétrico	14
Figura 1.8	Capa ancha conductora, dispositivo dipolar	14
Figura 1.9	Capa delgada resistiva, dispositivo simétrico	14
Figura 1.10	Capa delgada conductora, dispositivo dipolar	14
Figura 1.11	Semiespacio uniforme con varias inhomogeneidades	17
Figura 2.1	Modelo básico de modelación	20
Figura 2.2	Diagrama de cambio de coordenadas	21
Figura 2.3	Esquema del calculo del potencial total haciendo uso de la hipótesis de dispersión débil	23
Figura 2.4	Esquema del calculo de la resistividad total haciendo uso de la hipótesis de dispersión débil	23
Figura 3.1	Diagrama de flujo del algoritmo numérico	32
Figura 3.2	Modelo de Medio Estratificado	34
Figura 3.3	Características generales del levantamiento	35
Figura 3.4	Propiedad de simetría. Dique Conductor	37
Figura 3.5	Dique Resistivo. Propiedad de simetría	38
Figura 3.6	Modelo 2D usado para la comprobación de la simetría y la reciprocidad	39
Figura 3.7a	Modelo 3-D del sondeo	41
Figura 3.7b	Posición de las líneas del sondeo con respecto al modelo	41
Figura 3.8	Prueba de eficiencia. Dique Resistivo	46
Figura 3.9	Dique Conductor para el algoritmo de Fox	46
Figura 3.10	Comparación Algoritmo Propuesto vs. Algoritmo Fox. Nivel 1	47
Figura 3.11	Comparación Algoritmo Propuesto vs. Algoritmo Fox. Nivel 3	48
Figura 3.12	Comparación Algoritmo Propuesto vs. Algoritmo Fox. Nivel 5	49
Figura 3.13	Nivel 1. Arreglo WENNER	50
Figura 3.14	Nivel 5. Arreglo WENNER	51
Figura 3.15	Nivel 8. Arreglo WENNER	52
Figura 3.16	Nivel 1. Arreglo DIPOLO-DIPOLO	53
Figura 3.17	Nivel 5. Arreglo DIPOLO-DIPOLO	54
Figura 3.18	Nivel 8. Arreglo DIPOLO-DIPOLO	55
Figura 3.19	Nivel 1. Arreglo WENNER-SCHLUMBERGER	56
Figura 3.20	Nivel 5. Arreglo WENNER-SCHLUMBERGER	57
Figura 3.21	Nivel 8. Arreglo WENNER-SCHLUMBERGER	58
Figura 4.1	Asignación de los puntos de atribución	61

Figura 4.2	Modelo utilizado en la comparación del algoritmo de Locke con el algoritmo propuesto	61
Figura 4.3	Pseudosección obtenida a partir del algoritmo de Locke. Arreglo WENNER	62
Figura 4.4	Pseudosección obtenida a partir del algoritmo propuesto. Arreglo WENNER	62
Figura 4.5	Pseudosección obtenida a partir del algoritmo de Locke. Arreglo DIPOLO-DIPOLO	63
Figura 4.6	Pseudosección obtenida a partir del algoritmo propuesto. Arreglo DIPOLO-DIPOLO	63
Figura 4.7	Pseudosección obtenida a partir del algoritmo de Locke. Arreglo WENNER-SCHLUMBERGER	64
Figura 4.8	Pseudosección obtenida a partir del algoritmo propuesto. Arreglo WENNER-SCHLUMBERGER	64
Figura 4.9	Pseudosección de resistividad aparente del algoritmo de Fox	65
Figura 4.10	Pseudosección de resistividad aparente del algoritmo propuesto	65
Figura 4.11 ^a	Localización de la Calle Puerto Madero	68
Figura 4.11b	Localización de la calle Pedro Aguirre	68
Figura 4.12	Imagen eléctrica obtenida en la Calle Puerto Madero de la Delegación Álvaro Obregón	68
Figura 4.13	Modelo de la caverna encontrada en la Calle Puerto Madero	69
Figura 4.14	Imagen eléctrica del modelo de la caverna encontrada en la Calle Puerto Madero	69
Figura 4.15	Imagen eléctrica obtenida en la Calle Pedro Aguirre de la Delegación Álvaro Obregón. Sin tomar en cuenta la Topografía	70
Figura 4.16	Imagen eléctrica obtenida en la Calle Pedro Aguirre de la Delegación Álvaro Obregón. Tomando en cuenta la Topografía	70
Figura 4.17	Modelo de cueva para la calle Pedro Aguirre.	71
Figura 4.18	Imagen eléctrica obtenida a partir del modelo de cueva para la calle Pedro Aguirre	71
Figura 4.19	Modelo 3-D del subusuelo	72
Figura 4.20	Arreglo WENNER. Línea 1, Línea 2, Línea 3, Línea 4, Línea 5, Línea 6, Línea 7	73
Figura 4.21	Arreglo DIPOLO-DIPOLO. Línea 1, Línea 2, Línea 3, Línea 4, Línea 5, Línea 6, Línea 7	74
Figura 4.22	Arreglo WENNER-SCHLUMBERGER. Línea 1, Línea 2, Línea 3, Línea 4, Línea 5, Línea 6, Línea 7	75

RESUMEN

En el presente trabajo se desarrolla un modelo directo de la respuesta eléctrica de estructuras tridimensionales en un semiespacio conductor. La teoría en la que está basada la modelación propone el cálculo de un potencial eléctrico a partir de la solución de ecuaciones integrales y haciendo uso de la hipótesis de dispersión débil (Eskola, 1992). Para la solución numérica de las integrales se utilizó la Cuadratura de Gauss, debido a las ventajas que presenta para su programación.

Se creó un algoritmo numérico de modelación en el Lenguaje de Programación FORTRAN 90, con el cual se puede simular la obtención de datos de resistividad aparente haciendo uso de los tipos de arreglos más comunes (WENNER, DIPOLO-DIPOLO y WENNER-SCHLUMBERGER).

El paralelepípedo es el modelo geométrico básico que se usa para llevar a cabo la modelación. Por medio de este cuerpo geométrico se generaron modelos sintéticos y geológicos del subsuelo, con los cuales se demuestra el buen funcionamiento de la modelación propuesta.

Esta modelación se aplicó a la técnica geoelectrica denominada Tomografía Eléctrica, que ha demostrado dar muy buenos resultados cuando se desea conocer la distribución de la resistividad en el subsuelo.

INTRODUCCIÓN

Las técnicas de interpretación automatizada desarrolladas en el campo de la geofísica en los últimos años involucran dos procesos que están íntimamente ligados. El primero es el proceso de la modelación, donde se conocen los parámetros físicos y la estructura y se desea determinar su respuesta; esto es lo que se conoce como el problema directo. El segundo es el de inversión donde se conoce la respuesta y se desea determinar los parámetros físicos y la estructura, esto en la literatura científica se ha denominado como problema inverso.

En las últimas décadas los dos procesos antes mencionados han tendido un gran avance, ya que ambos están ligados íntimamente con el desarrollo de la capacidad y rapidez de cálculo de las computadoras actuales.

El presente trabajo es una contribución a la necesidad del Departamento de Geofísica de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México por desarrollar sus propios algoritmos de modelación e inversión.

Este trabajo presenta nuevos procedimientos numéricos en la modelación de la respuesta eléctrica de las estructuras geológicas cuando se hace uso de campos eléctricos estacionarios.

Los métodos eléctricos de campo estacionario, en sus diferentes modalidades, son quizás las técnicas mayormente empleadas en la exploración geofísica debido, principalmente, a su sencillez en la teoría, su poder de resolución para exploración somera y la vasta experiencia acumulada en su aplicación e interpretación alrededor del mundo. Estos métodos experimentaron una revolución profunda a partir de la década de los años setenta con el trabajo fundamental de Ghosh (1971), quien introduce la teoría de filtros digitales para calcular la curva de resistividades aparentes dado los espesores y resistividades de una Tierra 1-D. El método propuesto por Ghosh permitió el desarrollo de los métodos de inversión como el propuesto por Inman (1975). En un principio las técnicas de inversión automatizadas necesitan de un modelo inicial, pero con el avance de la teoría de inversión esta restricción fue eliminada.

Uno de los primeros métodos que no necesitaba de modelo inicial es el de Zhody (1975); posteriormente con la introducción de la teoría de Backus y Gilbert (1968) fue posible determinar la función de resistividad verdadera $\rho(z)$ como lo demuestra el trabajo de Oldenburg (1978) y de Esparza y Gómez-Treviño (1997). En forma paralela con el avance de las computadoras se pudieron tratar modelos más complejos para la Tierra. Entre los primeros trabajos están el de Mufti (1976) y Dey y Morrison (1979) que permitían determinar la curva de resistividades aparentes para una Tierra 2-D empleando la técnica de diferencias finitas. De igual forma como sucedió para una Tierra 1-D se desarrollaron técnicas de interpretación automatizadas.

En años recientes se ha desarrollado la técnica de imagen eléctrica, que permite mostrar la distribución de la resistividad verdadera en el subsuelo, como se discute en los trabajos de Shima y Saito (1988), Barker (1992), Loke y Barker (1995), Lesur (1999), Esparza (1991), Pérez (1995). En forma paralela nuevas técnicas en la toma de datos se desarrollaron como lo muestra el trabajo de Griffiths y Turnbull (1985).

Actualmente existen diversas técnicas de modelación, las cuales proponen soluciones numéricas a partir de los métodos:

- Diferencias Finitas
- Elemento Finito
- Ecuaciones integrales

Loke (1994) propone un modelo 2-D de la Tierra que se obtiene al dividir el subsuelo en un número determinado de bloques rectangulares, cada uno con una resistividad constante formando una malla rectangular. La solución del problema directo para encontrar las resistividades aparentes se resuelve por medio de la función potencial empleando alguna técnica numérica, como pueden ser los métodos de diferencias-finitas o elemento-finito, y posteriormente se aplica una técnica de optimización no lineal iterativa para determinar las resistividades de los bloques. Retomando la formulación de diferencias-finitas hecha por Dey y Morrison (1979), Loke (1994) realizó algunos cambios para la obtención de buenos valores de resistividad aparente calculados. El método de diferencias-finitas básicamente determina el potencial en los nodos de la malla rectangular, la cual consiste de L nodos en la dirección horizontal y M en la dirección vertical. Cada uno de los bloques puede tener un valor de resistividad diferente. Haciendo uso de una malla lo suficientemente fina, las estructuras geológicas complejas se pueden modelar con gran calidad.

La teoría principal en la que esta basada este trabajo propone el cálculo del potencial eléctrico, necesario para el cálculo de la resistividad aparente, a partir del método de ecuaciones integrales. Tejero (2001) propone una solución a dicho problema, demostrando que un potencial eléctrico puede ser calculado a partir de una integral de volumen, haciendo uso de funciones de Green generalizadas.

El hecho de que las ecuaciones de la modelación propuesta sean ecuaciones integrales, trae consigo la necesidad de hipótesis (suposiciones) impuestas sobre las variables y parámetros del modelo, sin las cuales encontrar una solución no sería posible. Tal es el caso de la hipótesis de dispersión débil, propuesta por Eskola (1992), y con la cual se desprecian las corrientes secundarias generadas en los cuerpos debido a la presencia del campo principal. Ésta hipótesis permite encontrar una forma más sencilla de calcular el potencial eléctrico.

Teniendo en cuenta lo anterior se creó un programa de computadora, en el Lenguaje de Programación FORTRAN 90, con el cual se podrá realizar la modelación de estructuras 2-D y 3-D del subsuelo, haciendo uso de paralelepípedos como modelos principales.

Por lo cual, en el Capítulo 1 se presenta la teoría y conceptos básicos que rodean a cualquier Método Geoeléctrico de Corriente Continua, tales como Ecuaciones fundamentales, Dispositivo o Arreglo eléctrico, Resistividad Aparentes, etc. También se hace un pequeño resumen de las técnicas utilizadas tradicionalmente en dicho método de prospección, así como las consideraciones físicas y matemáticas que permiten obtener una ecuación, que describe al potencial eléctrico.

En el Capítulo 2 se presentan las suposiciones (hipótesis) fundamentales que se realizaron para llegar a una teoría básica de modelación, tales como la discretización del medio en paralelepípedos homogéneos, la función potencial bajo la hipótesis de dispersión débil y el principio de superposición. También se explica, de una manera sencilla, como se llegó a

una ecuación con la que se puede calcular la diferencia de potencial necesaria para el cálculo de la resistividad aparente.

En el Capítulo 3 se presenta el algoritmo numérico de modelación. Se discute la teoría básica de integración numérica con la cual esta calculada la integración triple necesaria en el cálculo del potencial eléctrico. El algoritmo es sometido a pruebas de lógica del mismo, tales como la propiedad de simetría y reciprocidad. Estas dos propiedades se aplican a diferentes modelos como: Medio estratificado, Dique Resistivo, Dique Conductor, Paralelepípedo Infinito y Paralelepípedo Finito. Cabe mencionar que las pruebas de simetría y reciprocidad sirven para comprobar la lógica del programa, no así su exactitud, ya que esta última depende más de las ecuaciones utilizadas. El Capítulo continúa con las pruebas de Eficiencia, en las cuales se comprobará la exactitud del algoritmo. Para esta prueba los resultados que arroja el algoritmo propuesto serán comparados con los resultados que arrojan programas previamente realizados (Tejero, 2001; Cifuentes, 1994; Fox, 1980; Loke, 1994). En la parte final de este capítulo se presentan las restricciones que deben ser tomadas en cuenta antes de hacer uso del algoritmo propuesto.

En el Capítulo 4 se presentan las aplicaciones del algoritmo propuesto. Se comparan los resultados de este algoritmo con los resultados del algoritmo de Loke (algoritmo que puede llevar a cabo una modelación según la técnica de Tomografía Eléctrica). Esta comparación se llevará a cabo usando modelos sintéticos del subsuelo. El capítulo continúa con la comparación entre los datos del algoritmo propuesto y datos obtenidos directamente en campo. Los datos de campo se obtuvieron con el objetivo de determinar cavernas en la Delegación Álvaro Obregón de la Ciudad de México, D.F. Esta comparación dará una visión de la posible respuesta del algoritmo propuesto ante casos reales. En la parte final de este capítulo y haciendo uso de un modelo 3-D del subsuelo, se pretende mostrar que la interpretación de imágenes eléctricas, cuya teoría de inversión considera una Tierra 2-D como modelo inicial, puede arrojar una mala localización de cuerpos en el subsuelo, por lo tanto, las nuevas técnicas de interpretación deben evolucionar hacia una interpretación 3-D del subsuelo.

En el Capítulo 5 se dan las conclusiones y recomendaciones que se obtuvieron en la realización de este trabajo.

CAPITULO 1. TEORÍA DE LOS MÉTODOS ELÉCTRICOS EN CORRIENTE CONTINUA.

Los métodos geofísicos de exploración han tenido por objetivo, desde sus inicios, el estudio y la localización de las estructuras ocultas en el interior de la Tierra, delimitadas por el contraste de alguna de sus propiedades físicas con las del medio circundante. Algunos de los métodos de exploración más comunes son los llamados Métodos Geoeléctricos, que a través de los años y de diferentes investigaciones, han encontrado diversas técnicas de aplicación. Dentro de los Métodos Geoeléctricos se encuentra el llamado Método Eléctrico de Corriente Continua.

En este capítulo presentamos las ecuaciones y conceptos fundamentales que aparecen en cualquier Método Geoeléctrico.

De la misma manera se inicia con el desarrollo matemático y físico necesario para tener una función potencial que nos permita llevar a cabo la modelación que se propone.

1.1 CONCEPTOS BÁSICOS

El objetivo principal de los Métodos Eléctricos de Corriente Continua es la delimitación espacial de los cuerpos, ocultos, por debajo de la superficie terrestre. Esta técnica de exploración utiliza conceptos tales como: diferencia de potencial, dispositivo eléctrico y la propiedad física llamada *resistividad aparente*, propiedad que puede ser considerada como la más importante de los Métodos Geoeléctricos.

1.1.1 ECUACIONES FUNDAMENTALES

Para establecer las leyes del Método Eléctrico de Corriente Continua, se partirá de las ecuaciones de Maxwell (Orellana, 1972):

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{E}(\vec{r}) &= -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r})}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H}(\vec{r}) &= \vec{J}(\vec{r}) + \frac{\partial \vec{D}(\vec{r})}{\partial t}\end{aligned}\tag{1.1}$$

donde, por tratarse de un campo estacionario, habrán de anularse las derivadas temporales, teniendo:

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = 0\tag{1.2}$$

$$\nabla \times \vec{H}(\vec{r}) = \vec{J}(\vec{r})\tag{1.3}$$

En el método eléctrico de corriente continua la ecuación que es de interés es la (1.2). Si se considera una fuente puntual, como es el caso de un electrodo de corriente, las ecuaciones que rigen el campo eléctrico son:

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = 0 \quad (1.4)$$

$$\nabla \cdot \vec{J}(\vec{r}) = I\delta(\vec{r}) \quad (1.5)$$

entonces, el teorema de Helmholtz dice que el Campo Eléctrico proviene del gradiente de un potencial, por lo tanto:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla U(\vec{r}) \quad (1.6)$$

Y sustituyendo la ecuación (1.6) en la ecuación (1.5), se tiene:

$$\nabla^2 U(\vec{r}) = -I\rho\delta(\vec{r}) \quad (1.7)$$

En una región donde no existe fuente, el potencial se reduce a:

$$\nabla^2 U(\vec{r}) = 0 \quad (1.8)$$

Que es la ecuación de Laplace; en esta región también $\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = 0$.

1.1.2 FUENTE PUNTUAL EN UN SEMIESPACIO

Un semiespacio se define como un medio de resistividad ρ separado en la interface por un medio de resistividad infinita (figura 1.1).

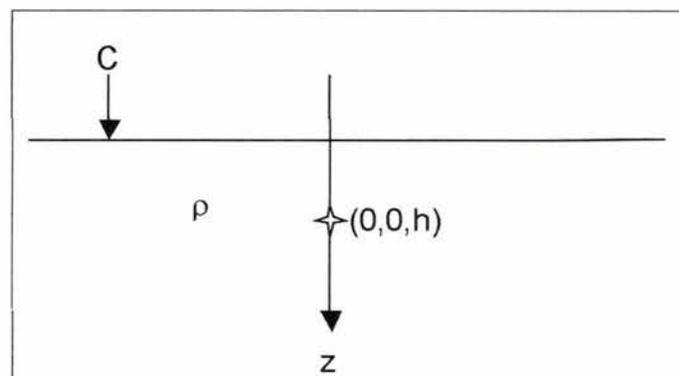


Figura 1.1. Fuente puntual en un semiespacio

Para encontrar el potencial producido por una fuente puntual C en la frontera de ambos semiespacios, el problema se puede expresar como la solución de:

$$\nabla^2 U(\vec{r}) = -I\rho\delta(\vec{r}); \quad z > 0 \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial U(\vec{r})}{\partial \eta} = 0; \quad z = 0 \quad (1.10)$$

Si se emplean funciones de Green, la solución del potencial puede ser expresada como:

$$U(\vec{r}) = -\int_V G(\vec{r}, \vec{r}') \nabla^2 U(\vec{r}) dv + \int_S \left(G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial U(\vec{r})}{\partial \eta} - U(\vec{r}) \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial \eta} \right) ds \quad (1.11)$$

Donde la función de Green satisface la ecuación diferencial expresada como:

$$\nabla^2 G(\vec{r}) = -\delta(\vec{r}, \vec{r}'); \quad z > 0 \quad (1.12a)$$

$$\frac{\partial G(\vec{r})}{\partial \eta} = 0; \quad z = 0 \quad (1.12b)$$

La función de Green para el problema del semiespacio que satisface a las ecuaciones (1.12a) y (1.12b) es:

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2}} \right) \quad (1.13)$$

Sustituyendo las ecuaciones (1.9), (1.10) y (1.12b) en la ecuación (1.11) el potencial $U(\vec{r})$ puede quedar expresado como:

$$U(\vec{r}) = I\rho \int_V G(\vec{r}, \vec{r}') \delta(\vec{r}') dv \quad (1.14)$$

De las propiedades de las funciones impulsos la integral de la ecuación (1.14) es:

$$\int_V G(\vec{r}, \vec{r}') \delta(\vec{r}') dv = G(\vec{r}, h) \quad (1.15)$$

Donde $\delta(\vec{r}) = \delta(x', y', z'-h)$.

Sustituyendo la ecuación (1.15) en la (1.14), el potencial puede ser expresado como:

$$U(\vec{r}) = I\rho G(\vec{r}, h) \quad (1.16)$$

y la ecuación (1.13) en la (1.16) se tiene

$$U(\vec{r}) = \frac{I\rho}{4\pi} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-h)^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+h)^2}} \right] \quad (1.17)$$

Al tener la fuente puntual localizada en la interface, es decir, cuando $h=0$ se tiene que:

$$U(\vec{r}) = \frac{I\rho}{2\pi R} \quad (1.18)$$

donde $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

1.1.3 DISPOSITIVO ELÉCTRICO

La medida del potencial eléctrico necesario para calcular de la resistividad de los distintos medios se hace mediante el uso de un dispositivo, al cual se le ha llamado dispositivo eléctrico o electródico.

En su forma más sencilla, el dispositivo eléctrico es representado por dos electrodos: uno de corriente y otro de medida de potencial. Despejando la resistividad ρ de la ecuación (1.18), que es el parámetro a saber en el Método Geoelectrico, se tiene:

$$\rho = 2\pi R \frac{U(\vec{r})}{I} \quad (1.19)$$

donde $2\pi R$ es el factor geométrico, éste parámetro se asocia directamente a la posición de los electrodos y de cada dispositivo eléctrico. Tomando en cuenta que se pueden definir diversos tipos de arreglos o dispositivos de acuerdo a un número de electrodos y diversas relaciones de posición entre éstos, se ha generalizado la ecuación (1.19) como:

$$\rho = k \frac{\Delta U}{I} \quad (1.20)$$

donde $k=2\pi R$ es el factor geométrico del dispositivo eléctrico empleado.

Dependiendo del número de electrodos y/o de su disposición en el terreno, se definen diversos tipos de dispositivos eléctricos. Basándose en el número de electrodos se les llamará cuádrupolos, tripolos, etc.; o por la disposición simétricos, lineales, compuestos, etc.

Los dispositivos más utilizados por los Métodos Geoelectricos son los simétricos y los dipolares.

a) Dispositivos Simétricos

Constan de 4 electrodos, 2 de corriente y 2 de potencial, se les llama así porque la disposición de un electrodo de corriente y uno de potencial con respecto a los restantes es simétrica a partir de un punto cero u origen. En general el factor geométrico de todos los arreglos queda definido por:

$$k = \frac{2\pi}{\frac{1}{AM} - \frac{1}{BM} - \frac{1}{AN} + \frac{1}{BN}} \quad (1.21)$$

Donde A y B son la posición de los electrodos de corriente y M y N son la posición de los electrodos de potencial.

Los dispositivos simétricos más conocidos son los llamados WENNER y WENNER-SCHLUMBERGER. En la figura 1.2 se muestra la disposición que guardan los electrodos A, B, M y N para cada uno de los dispositivos antes mencionados, además en dicha figura también se muestra del factor geométrico que se utiliza para cada uno de ellos.

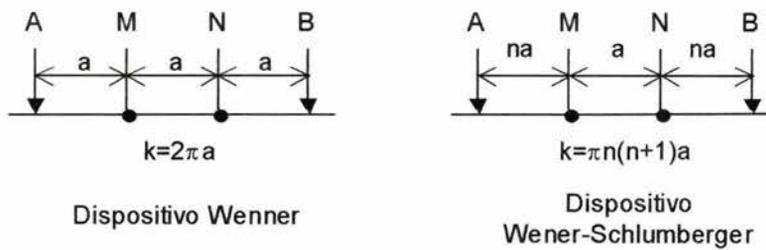


Figura 1.2. Dispositivos Eléctricos simétricos con sus respectivos factores geométricos.
 a = abertura entre electrodos, n = nivel de profundidad

b) Dispositivos Dipolares

También constan de 4 electrodos, dos de corriente y dos de potencial, solo que ahora se agrupan en A y B, que son los de corriente y que están lo suficientemente cerca entre sí con respecto a una distancia en la cual se miden sus efectos en M y N, que son los de potencial y que a su vez también se encuentran cerca uno del otro. El caso más común de este tipo de dispositivo es el llamado DIPOLO-DIPOLO, cuya disposición y factor geométrico se representan en la figura 1.3.

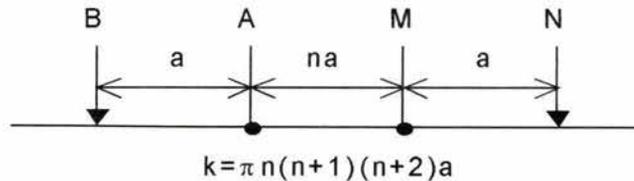


Figura 1.3. Dispositivo DIPOLO-DIPOLO.
 a = abertura entre electrodos, n = nivel teórico de medida de profundidad

1.1.4 CONCEPTO DE RESISTIVIDAD APARENTE

Como ya se ha mencionado, la variable índice que expresa los resultados de las mediciones de los Métodos Geoelectricos, y la que se ha tomado como base en la interpretación, es la llamada resistividad aparente (ρ_a). Este índice ayuda a normalizar los datos y facilita la comparación entre mediciones hechas en diferentes áreas y condiciones no similares.

Para comprender mejor este concepto se supone un semiespacio homogéneo de resistividad ρ en donde se hacen medidas de diferencia de potencial (ΔU) dada una corriente (I), con cualquier dispositivo eléctrico, el valor de resistividad que se obtendrá con la ecuación (1.20), y para cualquier posición, será la resistividad verdadera. Si este semiespacio es un medio heterogéneo, al obtener las medidas de ΔU y de I , los valores de resistividad serán ficticios y dependerán de los valores de resistividad que conforman al medio heterogéneo y de las dimensiones del dispositivo eléctrico. Esta resistividad calculada tampoco puede considerarse como promedio de todas las resistividades, puesto que puede ocurrir que ésta sea mayor o menor que las que forman el semiespacio. Esta resistividad ficticia que se obtiene de medidas sobre un medio heterogéneo es la *resistividad aparente*. Tomando en cuenta todo lo anterior la ecuación (1.20) se podrá expresar en términos de la resistividad aparente como:

$$\rho_a = k \frac{\Delta U}{I} \quad (1.22)$$

1.2 MODALIDADES EN LOS MÉTODOS ELÉCTRICOS

Los Métodos Geoelectricos tuvieron su origen entre los años 1920 y 1930 con los trabajos de los hermanos Schlumberger. Tradicionalmente, el Método Geoelectrico de Corriente Continua se realiza con dos técnicas comunes de campo: Perfil Eléctrico y Sondeos Eléctricos Verticales. Actualmente también se realiza la técnica denominada Tomografía Eléctrica.

1.2.1 SONDEO ELÉCTRICO VERTICAL

Uno de las Métodos Geoelectricos más conocidos a nivel mundial es el llamado Sondeo Eléctrico Vertical (SEV), este método ha tenido por objeto la investigación de la distribución de resistividad con respecto a la profundidad. La investigación se realiza mediante un dispositivo cuadripolar que se mantiene fijo respecto a un punto central, variando la abertura de los electrodos de corriente, con lo que se logra obtener una medida de resistividad aparente a mayor profundidad. El cálculo de la resistividad aparente, para este tipo de sondeo, se realiza utilizando la ecuación (1.22).

1.2.1.1 MEDIO ESTRATIFICADO

Los primeros investigadores encontraron que el modelo básico para tratar un SEV es el medio estratificado, que consiste de n capas o estratos (figura 1.4), que se suponen homogéneos e isótropos, por lo que cada uno de ellos cumplirán la ecuación de Laplace (ecuación 1.8). También se encontró que la única excepción que se tiene para este modelo se encuentra en la primera capa, en donde al tener fuentes, éstas contribuirán con una solución particular en la solución general de dicha ecuación.

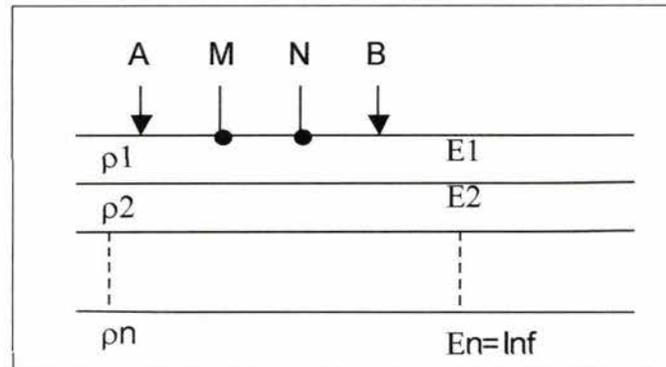


Figura 1.4. Modelo del Medio Estratificado.

El rumano Sabba Stefanescu (Orellana, 1972) demuestra que el potencial, en la superficie ($z=0$), producido por una fuente puntual sobre un medio estratificado, puede ser expresado como :

$$U = \frac{I\rho_1}{2\pi} \int_0^{\infty} k(\lambda)J_0(\lambda) d\lambda \quad (1.23)$$

en la ecuación anterior $k(\lambda)$ es la función que se define por los espesores y resistividades de las capas de un medio estratificado particular, y es llamada función Kernel o característica, que puede ser obtenida por la función de recurrencia de Pekeris (Köefoed, 1979) que es:

$$k_i = \frac{k_{i+1} + p_i \tanh(\lambda E_i)}{p_i + k_{i+1} \tanh(\lambda E_i)} \quad (1.24)$$

donde $p_i = \rho_i / \rho_{i+1}$.

Por lo tanto, se encontró que al aplicar la ecuación (1.23) para cada una de las fuentes (principio de superposición), se puede obtener una ΔU de los electrodos M y N de potencial y con la ecuación (1.22) se definirá una curva de resistividad aparente para el dispositivo empleado.

1.2.1.2 INTERPRETACIÓN DEL SONDEO ELÉCTRICO VERTICAL

Se han desarrollado muchos métodos de interpretación de las curvas de resistividad aparente obtenidas a partir de la realización de un SEV.

Principalmente las interpretaciones de un SEV se dividen en dos tipos que se denominan interpretación cualitativa e interpretación cuantitativa.

La interpretación cualitativa se usa como una interpretación previa, dado que no se pueden obtener valores de resistividad ni espesores de capas. Esta interpretación utiliza el trazado de mapas y perfiles como apoyo principal, ya que en estos mapas se representa la distribución espacial de alguna característica o parámetro de las curvas obtenidas a partir de un SEV. Este tipo de interpretación se puede comparar con la construcción de un mapa topográfico, dado que el mapa topográfico se construye a través de la unión de puntos que se encuentran a la misma altura. De esta misma forma en la interpretación cualitativa se crean mapas en los cuales se unen puntos que representen la misma resistividad obtenida a partir de un SEV.

La interpretación cuantitativa es más importante, ya que gracias a ella se podrá determinar la distribución espacial de la resistividad en el subsuelo. Los métodos que más se han utilizado en este tipo de interpretación son los gráficos y los numéricos.

Uno de los métodos gráficos utiliza los cortes geoelectricos proporcionados por Orellana (1982), este método se denomina de *punto auxiliar*. Otro método gráfico, denominado de *superposición*, consiste en comparar la curva de campo con las curvas teóricas de un catálogo.

Gracias al gran crecimiento de las computadoras, se generan los métodos de interpretación numéricos, dado que ahora se tiene la capacidad de realizar varios cálculos iterativos. Estos métodos se han dividido en dos ramas, la directa y la inversa.

Con el método directo se llega a una solución a partir de una curva de campo. Con el método inverso se hace uso del tanteo o aproximaciones sucesivas a partir de una solución aproximada cuya curva de campo sintética se calcula y la diferencia de ésta y la original se va reduciendo por medio de un método recursivo, hasta llegar a un mínimo.

1.2.2 PERFILAJE ELECTRICO

Otro Método Geoelectrico muy conocido es el denominado Perfil Eléctrico o Calicata Eléctrica. Con él se desea encontrar las variaciones laterales de resistividad del subsuelo. Es un método de investigación horizontal a profundidad aproximadamente constante y adecuado para detectar cuerpos que se presentan como heterogeneidades laterales de resistividad.

1.2.2.1 TIPOS DE ANOMALIAS

De acuerdo a diversas investigaciones, se ha observado que el perfilaje eléctrico depende mucho del tipo de dispositivo utilizado (simétrico o dipolar), así como de las dimensiones del mismo y del cuerpo que se pretende ubicar. Orellana (1982) describe y clasifica las anomalías principales como:

- a) Contacto entre dos medios.
- b) Capa ancha.
- c) Capa delgada.
- d) Heterogeneidades de tamaño finito.
- e) Anomalías producidas por el relieve del terreno

En los tres primeros tipos de anomalías el recubrimiento que pudiera tener cada caso tiene un efecto importante, debido a que atenúa las anomalías. Dicha atenuación depende del espesor del recubrimiento. Además las anomalías también son afectadas por las características conductoras del recubrimiento. En las figuras 1.5–1.10 se muestran las posibles anomalías obtenidas a partir de los modelos que representan.

En los tres primeros tipos de anomalía se han considerado las heterogeneidades de tamaño infinito en dirección normal al perfil, cosa que en el cuarto tipo no se cumple, por lo tanto, este tipo de anomalía sufrirá una atenuación mayor cuando se encuentre un recubrimiento.

Para el quinto tipo de anomalía, en general, los valles y las depresiones producen anomalías positivas y las lomas y elevaciones del terreno producen anomalías negativas. El efecto en las curvas de resistividad aparente depende en gran medida de la relación entre el tamaño del dispositivo y el de la ladera.

1.2.2.2 INTERPRETACION DEL PERFILAJE ELÉCTRICO

La interpretación de las curvas de resistividad obtenidas a partir de un perfilaje eléctrico puede realizarse de dos formas, la interpretación cualitativa y la cuantitativa.

La interpretación cualitativa se inicia revisando las curvas, con lo cual se podrá desechar las anomalías producidas por perturbaciones eléctricas o accidentes del terreno. Además se deben relacionar las curvas corregidas con información subterránea y geológica disponible. También se debe comparar la información de todas las curvas obtenidas para poder tener un seguimiento de las posibles anomalías.

La interpretación cuantitativa tiene por finalidad la determinación de la posición, anchura y/o busamiento aproximados de las heterogeneidades detectadas.

Para esta interpretación se debe contar con una buena calidad en la información obtenida en campo, dado que se tienen que comparar todas las anomalías para poder determinar si el cuerpo tiene o no busamiento. La anchura y la posición de los contactos son las

interpretaciones más difíciles de hacer, ya que ambas dependen principalmente de la geometría del cuerpo anómalo y del dispositivo empleado.

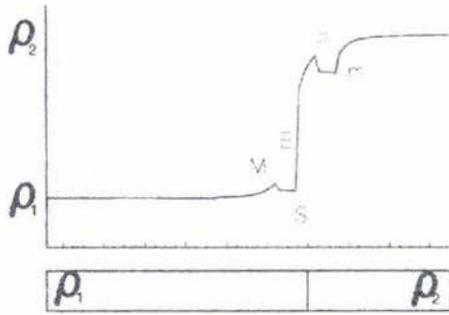


Figura 1.5. Contacto entre dos capas, dispositivo simétrico.

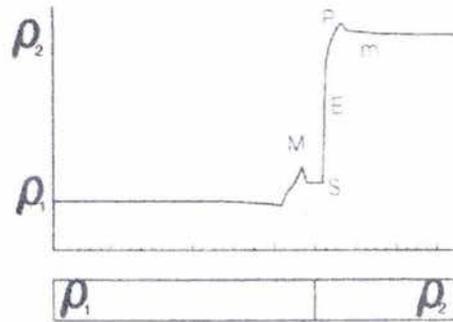


Figura 1.6. Contacto entre dos medios, dispositivo dipolar.

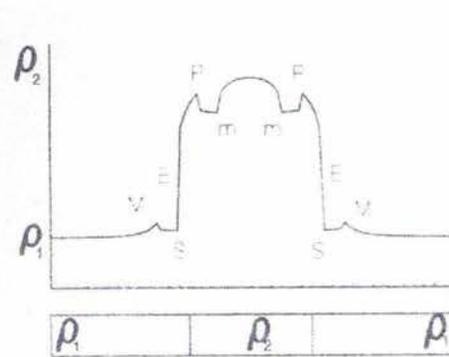


Figura 1.7. Capa ancha resistiva, dispositivo simétrico.

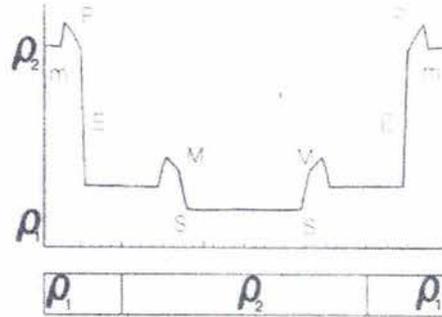


Figura 1.8. Capa ancha conductora, dispositivo dipolar.

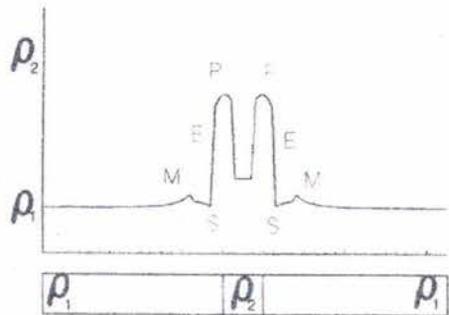


Figura 1.9. Capa delgada resistiva, dispositivo simétrico.

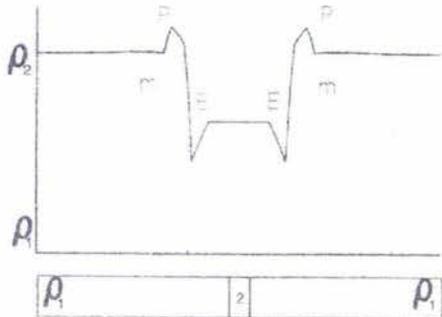


Figura 1.10. Capa delgada conductora, dispositivo dipolar.

1.2.3 TOMOGRAFÍA ELÉCTRICA

En años recientes se ha desarrollado la técnica de imagen eléctrica, que permite mostrar la distribución de la resistividad verdadera en el subsuelo. Esta nueva técnica es denominada Tomografía Eléctrica.

El término Tomografía causa confusión en la comunidad geofísica internacional y nacional, debido que el término se asocia más a una distribución de fuentes y receptores en distintos puntos, sin embargo, cuando las fuentes y receptores se encuentran en una misma línea, como puede ser en arreglos multielectrodos, no se considera que sea una técnica tomográfica sino más bien se trata de una técnica de perfilaje o calicateo eléctrico. El término tomografía implica que un fenómeno físico se está observando o describiendo por secciones (Tomografía Médica) y no se refiere a un arreglo particular de fuentes y receptores. Aunque el arreglo de fuentes y receptores colineales para una tomografía eléctrica y perfilaje eléctrico en el plano $z=0$ sea similar, el objetivo es totalmente distinto. El perfilaje eléctrico busca interpretar cada una de las curvas de campo para poder determinar contactos o ubicación y profundidad del cuerpo que causa la anomalía, mientras que en la tomografía el objetivo principal es poder determinar una imagen eléctrica que muestre la distribución de la resistividad del subsuelo en todo punto de una sección.

Una imagen eléctrica se obtiene mediante técnicas de inversión las cuales necesitan resolver el problema directo; para tal fin un modelo del subsuelo debe ser propuesto. Para el caso de la Tomografía Eléctrica el modelo propuesto debe ser, debido a que la naturaleza es más compleja de lo que se puede modelar, lo bastante simple para un cálculo rápido, y lo suficientemente complejo para que permita una representación bastante real de las estructuras del subsuelo. Un primer acercamiento a este problema consiste en proponer una resistividad constante para un determinado volumen del terreno, de tal manera que el semiespacio heterogéneo se construye al combinar varios de estos volúmenes, sin embargo, se debe considerar que la geometría del volumen no debe ser muy compleja, dado que se requiere un cálculo rápido. Una geometría sencilla puede ser la del paralelepípedo, por lo tanto, se pueden utilizar paralelepípedos para representar un medio 3-D y prismas con rumbo infinito para un medio 2-D. Este procedimiento consiste en un mallado regular sobre el semiespacio, el cual permanece constante en el proceso de inversión y donde el único parámetro a determinar es la resistividad de cada prisma. Entre más fino sea el mallado, mejor representación del subsuelo se puede obtener. Sin embargo, queda limitado por la densidad y la calidad de los datos observados que limitan el número de prismas que se pueden emplear.

La técnica de tomografía eléctrica se puede dividir en dos etapas. La primera es la toma de datos de campo y la segunda la inversión de los mismos, la cual produce la imagen eléctrica. A continuación se describen estas dos etapas.

1.2.3.1 TOMA DE DATOS DE CAMPO

Para investigar la variación de la resistividad en dos dimensiones, se puede usar una configuración o modalidad de cuatro electrodos. Las medidas pueden ser hechas en

cualquier secuencia. El desarrollo práctico de esta técnica es el siguiente: se extiende una batería de electrodos, en línea, separados por una distancia constante “a” variando la separación de éstos para cada nivel, con la finalidad de incrementar la profundidad de investigación. Se inyecta corriente eléctrica dentro del terreno por medio de dos electrodos, llamados electrodos de corriente (A y B), que inducen un campo potencial en el subsuelo. La respuesta es medida como una caída de potencial o de voltaje a través de otro par de electrodos, llamados electrodos de potencial (M y N).

Esta combinación de mediciones se puede expresar como resistividad aparente mediante la siguiente ecuación: $\rho_a = k \frac{\Delta U}{I}$, donde ρ_a es la resistividad aparente, k es el factor geométrico asociado a cada tipo de arreglo de electrodos, ΔU es la diferencia de potencial medida en el terreno e **I** es la corriente eléctrica que se inyecta al mismo.

La ecuación anterior se utiliza para la construcción de una pseudosección de resistividades aparentes, la cual involucra los datos de resistividad transversales como una sección a profundidad, donde cada valor de resistividad aparente se grafica como si fuera la resistividad verdadera de un punto inmediatamente debajo del centro del arreglo de electrodos y a una profundidad proporcional al espaciamiento de electrodos. Los datos contorneados proporcionan una imagen aproximada de la distribución de la resistividad en el plano de la sección.

1.2.3.2 INVERSIÓN DE LOS DATOS DE UNA PSEUDOSECCION

El conjunto de datos en forma de pseudosección se emplea para generar imágenes eléctricas 2-D. Las medidas de la variación de la resistividad aparente en la superficie permiten generar un modelo de la distribución espacial de la resistividad aparente del subsuelo (pseudosección), la manera de transformar una pseudosección de resistividades aparentes a una sección de resistividades verdaderas es utilizando un algoritmo de inversión, con el cual automáticamente se determina un modelo bidimensional de resistividad verdadera, lo que se conoce como imagen eléctrica.

1.3 POTENCIAL EN Z=0, PRODUCIDO POR UN ELECTRODO PUNTUAL EN UN SEMIESPACIO CONDUCTOR HETEROGÉNEO

Suponiendo una Tierra 3-D formada por un semiespacio homogéneo de resistividad ρ_0 , en donde existe un conjunto de inhomogeneidades, como se muestra en la figura 1.11. Si se inyecta corriente dentro del semiespacio, se establece un campo eléctrico primario que crea corrientes de conducción en las inhomogeneidades en el subsuelo.

La ecuación que satisface el potencial eléctrico para una fuente puntual en la superficie $z=0$ es:

$$\nabla \cdot \left[\frac{\nabla U}{\rho(\mathbf{r})} \right] = -I\delta(\mathbf{r}) \quad z > 0 \quad (1.25)$$

$$\frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial z} = 0 \quad z = 0$$

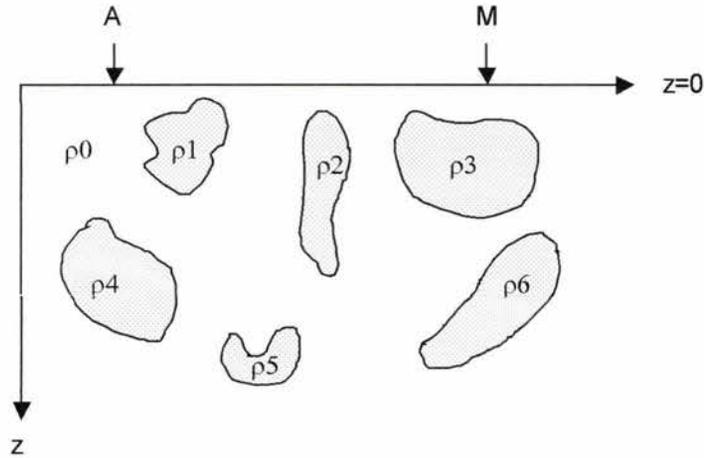


Figura 1.11. Semiespacio uniforme con varias inhomogeneidades.

De la primera identidad de Green (Tijonov, 1980) la solución de la ecuación (1.25) se expresa como:

$$U(\mathbf{r}) = -\int_V \nabla' U(\mathbf{r}') \cdot \nabla' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dv - \int_S U(\mathbf{r}') \nabla' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \eta ds \quad (1.26)$$

Tejero (2002) demuestra que el gradiente de la función de Green se puede expresar de la siguiente manera:

$$\nabla G = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{(x-x')\mathbf{i} + (y-y')\mathbf{j} + (z-z')\mathbf{k}}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{3/2}} + \frac{(x-x')\mathbf{i} + (y-y')\mathbf{j} - (z+z')\mathbf{k}}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2]^{3/2}} \right] + k\mathbf{k}' \quad (1.27)$$

$$\nabla' G \cdot \eta = -k \quad (1.28)$$

donde $k = \frac{1}{\int_S ds}$ es el inverso de la superficie infinita.

Sustituyendo las ecuaciones (1.27) y (1.28) en (1.26) y recordando que $\nabla' U(\mathbf{r}') = -E(\mathbf{r}')$, la función potencial se expresa como:

$$U(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \vec{E}(\vec{r}') \cdot \left[\frac{(x-x')\vec{i} + (y-y')\vec{j} + (z-z')\vec{k}}{\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \right]^{3/2}} + \frac{(x-x')\vec{i} + (y-y')\vec{j} - (z+z')\vec{k}}{\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2 \right]^{3/2}} \right] dv - \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V E_z(\vec{r}') dv \right] k + k \int_S U(\vec{r}') ds \quad (1.29)$$

En la ecuación (1.29) las dos últimas integrales, la de volumen y la de superficie, dan resultados finitos y recordando que $k=0$, estas integrales no contribuyen al valor total del potencial, por lo tanto, el potencial puede ser expresado como:

$$U(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \vec{E}(\vec{r}') \cdot \left[\frac{(x-x')\vec{i} + (y-y')\vec{j} + (z-z')\vec{k}}{\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \right]^{3/2}} + \frac{(x-x')\vec{i} + (y-y')\vec{j} - (z+z')\vec{k}}{\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2 \right]^{3/2}} \right] dv \quad (1.30)$$

Sin embargo, el interés es determinar $U(\vec{r})$ en $z=0$, entonces de la ecuación (1.30) el potencial se expresa como:

$$U(\vec{r}) = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_V \vec{E}(\vec{r}') \cdot \left[\frac{(x-x')\vec{i} + (y-y')\vec{j} - (z)\vec{k}}{\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z)^2 \right]^{3/2}} \right] dv \quad (1.31)$$

Si \vec{E} es el campo eléctrico total en la región, entonces de la ley de Ohm se puede expresar como:

$$\rho(\vec{r})\vec{J}(\vec{r}) = \vec{E}(\vec{r}) \quad (1.32)$$

donde ρ es la resistividad del punto y \vec{J} la densidad de corriente total en el espacio.

Sustituyendo (1.32) en (1.31) se tiene que el potencial en $z=0$, producido por un electrodo puntual en un semiespacio heterogéneo esta expresado por:

$$U(\vec{r}) = -\frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}')\vec{J}(\vec{r}') \cdot \left[\frac{(x-x')\vec{i} + (y-y')\vec{j} - (z)\vec{k}}{\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z)^2 \right]^{3/2}} \right] dv \quad (1.33)$$

La ecuación (1.33) tiene la ventaja de expresar el potencial como una integral de volumen. Caso contrario a como sucede con diferentes autores, quienes expresan el potencial como una integral de superficie.

Sin embargo la ecuación (1.33) implica que el vector densidad de corrientes de conducción total $\vec{J}(\vec{r})$ debe de conocerse, lo cual no es un problema sencillo. En el próximo capítulo se discutirá como obviar el conocer completamente a $\vec{J}(\vec{r})$.

CAPITULO 2. MODELACIÓN DE ESTRUCTURAS 3-D EN UN SEMIESPACIO CONDUCTOR.

En este capítulo se tratará de poner en claro las hipótesis, consideraciones y procedimientos que se asumen para llevar a cabo la modelación de estructuras 3-D que se propone en este trabajo.

Se hace uso del concepto utilizado por Eskola (1992) y denominado “problema de dispersión débil”, éste ayudará a simplificar las ecuaciones usadas en el cálculo del potencial eléctrico.

Esta hipótesis permite considerar al fenómeno eléctrico como un fenómeno lineal, lo cual simplifica considerablemente el cálculo de la resistividad aparente.

2.1 HIPOTESIS

Las Hipótesis asumidas en este trabajo son esencialmente 2:

1. Discretización del medio en paralelepípedos homogéneos.
2. La función potencial bajo la hipótesis de dispersión débil.

Para encontrar la expresión del potencial total se hace uso del principio de superposición, el cual satisface el campo electromagnético.

2.1.1 DISCRETIZACIÓN DEL MEDIO EN PARALELEPÍPEDOS HOMOGENEOS.

En el subtema 1.2.3, se presentó un pequeño resumen sobre la Tomografía Eléctrica, y se mencionó que una de las principales partes de esta técnica es la modelación de estructuras (problema directo). En el subtema 1.3, se asume una Tierra 3-D formada por un semiespacio homogéneo de resistividad ρ_0 , en donde existe un conjunto de inhomogeneidades (figura 1.11).

Tomando en cuenta lo anterior y dado que el objetivo de este trabajo es llevar a cabo la modelación de estructuras 3-D, se hará uso del paralelepípedo como cuerpo geométrico básico, puesto que con este cuerpo geométrico se tiene un modelo que es lo bastante simple, ya que permite un calculo rápido. Además la superposición de varios paralelepípedos permitirá llevar a cabo una representación bastante real de las estructuras del subsuelo. En la figura 2.1 se presenta este modelo básico del que se hará uso.

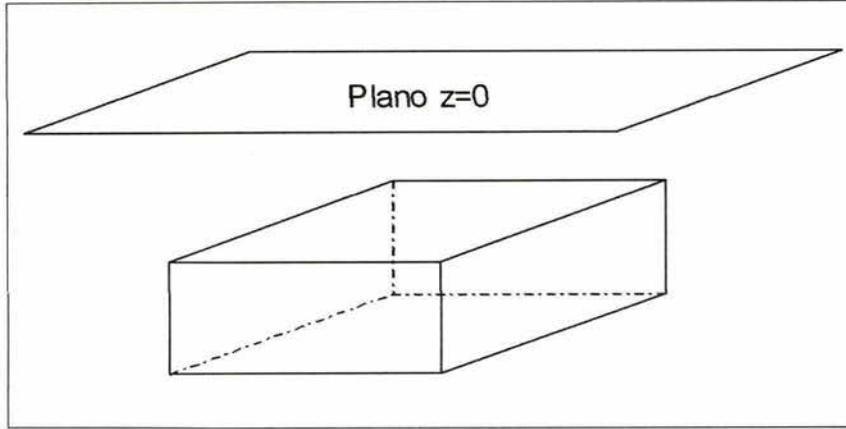


Figura 2.1. Modelo básico de modelación.

2.1.2 LA FUNCIÓN POTENCIAL BAJO LA HIPÓTESIS DE DISPERSIÓN DÉBIL.

Una expresión más sencilla para el potencial, representado por la ecuación (1.33), se logra si se considera que las corrientes secundarias son despreciables con respecto a las corrientes primarias, es decir, $\vec{J}_s(\vec{r}) \ll \vec{J}_p(\vec{r})$, lo que Eskola (1992) llama un problema de dispersión débil (weak scattering problem), por lo tanto:

$$U(\vec{r}) = -\frac{1}{2\pi} \int_V \rho(\vec{r}') \vec{J}_p(\vec{r}') \cdot \left[\frac{(x-x')\vec{i} + (y-y')\vec{j} - (z')\vec{k}}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z')^2]^{3/2}} \right] dv \quad (2.1)$$

La ecuación (2.1) determina el potencial en $z=0$, que es producido por una fuente puntual que también se coloca en el mismo plano, y es válida para una Tierra 3-D y cuando las corrientes de conducción secundarias son despreciables.

$\vec{J}_p(\vec{r})$ es el vector de corrientes de la fuente para un electrodo puntual con coordenadas $(x_s, y_s, 0)$. De la ecuación de continuidad para campos estacionarios se tiene que $\oint_V \nabla \cdot \vec{J}_p(\vec{r}) dV = 0$; entonces si la corriente total entra por el punto de coordenadas de la fuente y el balance de las corrientes que entran y salen de una superficie semiesférica con centro en la fuente se mantiene igual a cero, entonces se tiene que:

$$\oint_{S_r} \nabla \cdot \vec{J}_p(\vec{r}) dV = \int_{S_r} \vec{J}_p(\vec{r}) \cdot d\vec{S}_r = I \quad (2.2)$$

De la ecuación (2.2) se deduce que para $z_s=0$:

$$\vec{J}_p(\vec{r}) = \frac{I}{2\pi} \left[\frac{(x-x_s)\vec{i} + (y-y_s)\vec{j} + z\vec{k}}{[(x-x_s)^2 + (y-y_s)^2 + z^2]^{3/2}} \right] \quad (2.3)$$

Al sustituir la ecuación (2.3) en la ecuación (2.1), el potencial queda expresado para puntos $(x,y,0)$ y coordenadas de fuente $(x_s,y_s,0)$ como:

$$U(\vec{r}) = -\frac{I}{4\pi^2} \int_V \left[\frac{(x'-x_s)(x-x') + (y'-y_s)(y-y') - z'^2}{\left[(x'-x_s)^2 + (y'-y_s)^2 + z'^2 \right]^{3/2} \left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + z'^2 \right]^{3/2}} \rho(x',y',z') \right] dV \quad (2.4)$$

Donde “ x_s ” y “ y_s ” son las coordenadas de la fuente; x' , y' y z' son las coordenadas de cuerpo sobre las que se realiza la integración y “ x ”, “ y ” son las coordenadas de campo, es decir, las del punto de observación. La ecuación (2.4) se puede utilizar para calcular el potencial producido por una fuente puntual colocada en cualquier punto sobre el plano $z=0$. Esta ecuación, además, cumple con el principio de superposición, principio que será presentado en el siguiente subtema.

En el presente trabajo todas las variables de la ecuación (2.4) deben estar referenciadas a un sistema de referencia móvil. Dicho sistema, para la modelación propuesta, se encuentra ubicado en el centro de paralelepípedo que se pretende modelar, por lo tanto, es necesario hacer un cambio de coordenadas cada vez que se quiera llevar a cabo el cálculo del potencial. Lo anterior se hace para respetar los principios en los que está basada la integración numérica.

La figura 2.2 presenta los sistemas de referencia que se utilizaron para realizar dicho cambio de coordenadas. El sistema de referencia móvil $x_0y_0z_0$ se considera que está colocado en el centro del paralelepípedo a modelar y el sistema de referencia xyz es el sistema de coordenadas de referencia fijo [desde este momento se le llamará al sistema $x_0y_0z_0$ como sistema de coordenadas centrales (SCC) y al sistema xyz como sistema de coordenadas de referencia (SCR)]. Un punto en el espacio tendría un vector de posición \vec{r}_0 y \vec{r} con respecto al SCC y al SCR, respectivamente. El vector \vec{a} es un vector de posición que ubica el centro del SCC con respecto al SCR.

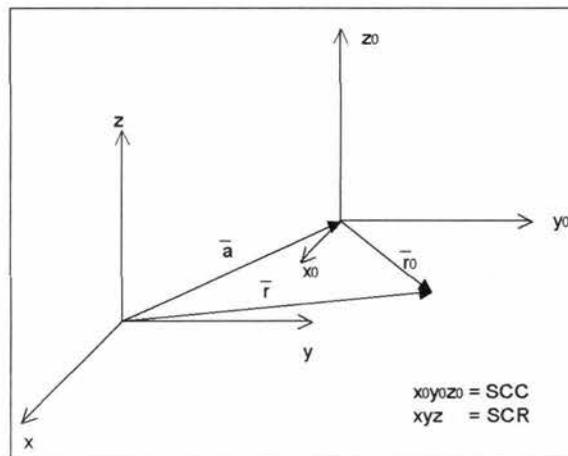


Figura 2.2. Diagrama de cambio de coordenadas. \vec{r} vector de posición con respecto a al eje xyz . \vec{r}_0 vector de posición con respecto al eje $x_0y_0z_0$. \vec{a} es un vector definido con respecto al eje xyz .

Haciendo uso de la figura 2.2 y del álgebra vectorial se tiene que:

$$\vec{r}_0 = -\vec{a} + \vec{r}$$

Definiendo al vector \vec{a} como:

$$\vec{a} = XA\vec{i} + YA\vec{j} + ZA\vec{k}$$

donde XA, YA y ZA están medidos con respecto al SCR, por lo tanto:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a} = (x_0 + XA)\vec{i} + (y_0 + YA)\vec{j} + (z_0 + ZA)\vec{k},$$

es decir que:

$$x = x_0 + XA \quad (2.5)$$

$$y = y_0 + YA \quad (2.6)$$

$$z = z_0 + ZA \quad (2.7)$$

$$x_s = x_{0s} + XA \quad (2.8)$$

$$y_s = y_{0s} + YA \quad (2.9)$$

$$z_s = z_{0s} + ZA \quad (2.10)$$

De una forma similar a la anterior, también se pueden definir puntos dentro del paralelepípedo con respecto al SCR de la siguiente forma:

$$x' = x_0' + XA \quad (2.11)$$

$$y' = y_0' + YA \quad (2.12)$$

$$z' = z_0' + ZA \quad (2.13)$$

Estas ecuaciones (2.5 – 2.13) se usan para hacer el cambio de coordenadas en el SCR a coordenadas en el SCC.

La ecuación (2.4) está definida en un SCR, y como anteriormente se expresó, es mejor resolver la ecuación (2.4) si ésta se encuentra definida con respecto a SCC.

Por lo tanto al sustituir de la ecuación (2.5) a la ecuación (2.13) en la ecuación (2.4) se puede encontrar que:

$$U(\vec{r}) = -\frac{I}{4\pi^2} \int_V \left[\frac{[(x_0' - x_{0s})(x_0 - x_0') + (y_0' - y_{0s})(y_0 - y_0') - (z_0' + ZA)^2] \rho(x', y', z')}{[(x_0' - x_{0s})^2 + (y_0' - y_{0s})^2 + (z_0' + ZA)^2]^{3/2} [(x_0 - x_0')^2 + (y_0 - y_0')^2 + (z_0' + ZA)^2]^{3/2}} \right] dV \quad (2.14)$$

Ecuación que está completamente referenciada al SCC.

La hipótesis de dispersión débil permite afirmar que las corrientes secundarias formadas en los cuerpos son despreciables con respecto a la corriente primaria generada en el electrodo

puntual, lo cual es equivalente a decir que los cuerpos que se encuentren rodeados por el medio no se afectan entre sí, cuando éstos están lo suficientemente cercanos. Por lo tanto, el potencial total puede ser calculado como la suma de los potenciales individuales producidos por cada cuerpo que se encuentre rodeado por el medio. Lo que lleva a la representación de un fenómeno lineal. La figura 2.3 muestra un ejemplo de lo dicho anteriormente. En esta figura M puede considerarse como el potencial producido por el Medio y C como el potencial producido por el cuerpo.

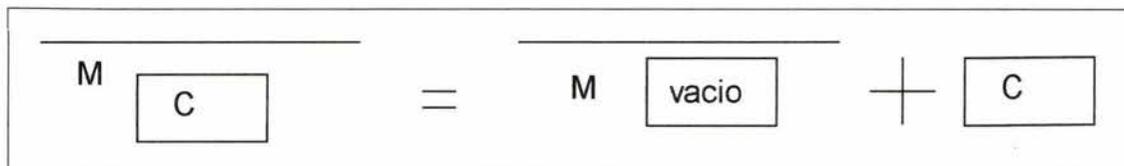


Figura 2.3. Esquema del calculo del potencial total haciendo uso de la hipótesis de dispersión débil.

La figura anterior puede ser expresada como:

$$U_{TOTAL} = U_{MEDIO} + U_{CUERPO} \quad (2.15)$$

La representación de la figura (2.3) considera que las corrientes totales en los medios son conocidas.

El cálculo de la resistividad también puede ser explicado de una manera similar a la expuesta para el cálculo del potencial total. Esto se muestra en la figura 2.4.

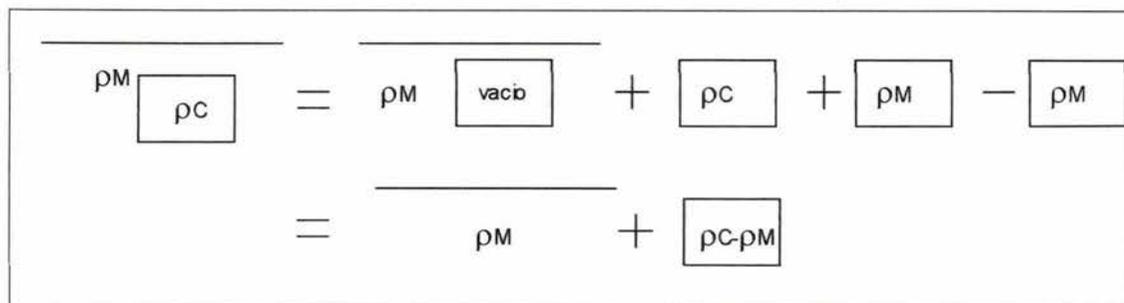


Figura 2.4. Esquema del calculo de la resistividad total haciendo uso de la hipótesis de dispersión débil.

En la figura 2.4 al término:

$$\Delta\rho = \rho_C - \rho_M \quad (2.16)$$

se le conoce como contraste de resistividades, donde $\Delta\rho$ es el contraste de resistividades, ρ_M es la resistividad del medio encajonante y ρ_C es la resistividad del cuerpo enterrado. Este contraste permite incluir el valor de la resistividad del medio dentro de la función que calcula el potencial, el cual es constante y que puede salir fuera de la integral. Entonces la función potencial se puede expresar como:

$$U(r) = -\frac{I}{4\pi^2} \Delta\rho(x', y', z') \int_V \left[\frac{[(x_0' - x_{0s})(x_0 - x_0') + (y_0' - y_{0s})(y_0 - y_0') - (z_0' + ZA)^2]}{[(x_0' - x_{0s})^2 + (y_0' - y_{0s})^2 + (z_0' + ZA)^2]^{3/2} [(x_0 - x_0')^2 + (y_0 - y_0')^2 + (z_0' + ZA)^2]^{3/2}} \right] dV \quad (2.17)$$

Que es el potencial producido por un electrodo puntual en el plano $z=0$.

2.1.3 PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN

El potencial para una fuente puntual está expresado por la ecuación (2.17), para un arreglo tetrapolar de fuentes la solución del potencial se puede encontrar por superposición (Orellana, 1972):

$$U(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{i=2} U(\vec{r}_i) \quad (2.18)$$

El principio de superposición permite el cálculo de la diferencia de potencial necesaria para determinar la resistividad aparente.

2.4 DIFERENCIA DE POTENCIAL PROPUESTA PARA LA MODELACIÓN

En todo Método Geoeléctrico es necesario calcular la diferencia de potencial que existe entre los electrodos M y N. Para poder llevar a cabo esta diferencia de potencial es necesario considerar cuatro efectos, que son los siguientes:

1. Potencial generado por el electrodo A y medido en el electrodo M (U_{AM}).
2. Potencial generado por el electrodo A y medido en el electrodo N (U_{AN}).
3. Potencial generado por el electrodo B y medido en el electrodo M (U_{BM}).
4. Potencial generado por el electrodo B y medido en el electrodo N (U_{BN}).

Entonces, la diferencia de potencial entre los electrodos M y N esta dada por:

$$\Delta U_N^M = U_M - U_N \quad (2.19)$$

donde

$$U_M = U_{AM} + U_{BM} \quad (2.20)$$

$$U_N = U_{AN} + U_{BN} \quad (2.21)$$

entonces

$$\Delta U_N^M = U_{AM} + U_{BM} - U_{AN} - U_{BN} \quad (2.22)$$

Haciendo uso de la ecuación (2.17) y recordando que la corriente eléctrica tiene un valor negativo en el electrodo B se puede escribir que:

$$U_{AM} = -\frac{I}{4\pi^2} \Delta\rho \int_V \left[\frac{[(x_0' - x_{0s})(x_0 - x_0') + (y_0' - y_{0s})(y_0 - y_0') - (z_0' + ZA)^2]}{[(x_0' - x_{0s})^2 + (y_0' - y_{0s})^2 + (z_0' + ZA)^2]^{3/2} [(x_0 - x_0')^2 + (y_0 - y_0')^2 + (z_0' + ZA)^2]^{3/2}} \right] dV \quad (2.23)$$

$$U_{BM} = \frac{I}{4\pi^2} \Delta\rho \int_V \left[\frac{[(x_0' - x_{os})(x_0 - x_0') + (y_0' - y_{os})(y_0 - y_0') - (z_0' + ZA)^2]}{[(x_0' - x_{os})^2 + (y_0' - y_{os})^2 + (z_0' + ZA)^2]^{3/2} [(x_0 - x_0')^2 + (y_0 - y_0')^2 + (z_0' + ZA)^2]^{3/2}} \right] dV \quad (2.24)$$

$$U_{AN} = -\frac{I}{4\pi^2} \Delta\rho \int_V \left[\frac{[(x_0' - x_{os})(x_0 - x_0') + (y_0' - y_{os})(y_0 - y_0') - (z_0' + ZA)^2]}{[(x_0' - x_{os})^2 + (y_0' - y_{os})^2 + (z_0' + ZA)^2]^{3/2} [(x_0 - x_0')^2 + (y_0 - y_0')^2 + (z_0' + ZA)^2]^{3/2}} \right] dV \quad (2.25)$$

$$U_{BN} = \frac{I}{4\pi^2} \Delta\rho \int_V \left[\frac{[(x_0' - x_{os})(x_0 - x_0') + (y_0' - y_{os})(y_0 - y_0') - (z_0' + ZA)^2]}{[(x_0' - x_{os})^2 + (y_0' - y_{os})^2 + (z_0' + ZA)^2]^{3/2} [(x_0 - x_0')^2 + (y_0 - y_0')^2 + (z_0' + ZA)^2]^{3/2}} \right] dV \quad (2.26)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.23), (2.24), (2.25) y (2.26) en la ecuación (2.22) se tiene que:

$$\begin{aligned} \Delta U_N^M = & -\frac{I}{4\pi^2} \Delta\rho \int_V \left[\frac{[(x_0' - x_{os})(x_0 - x_0') + (y_0' - y_{os})(y_0 - y_0') - (z_0' + ZA)^2]}{[(x_0' - x_{os})^2 + (y_0' - y_{os})^2 + (z_0' + ZA)^2]^{3/2} [(x_0 - x_0')^2 + (y_0 - y_0')^2 + (z_0' + ZA)^2]^{3/2}} \right]_{AM} dV + \\ & + \frac{I}{4\pi^2} \Delta\rho \int_V \left[\frac{[(x_0' - x_{os})(x_0 - x_0') + (y_0' - y_{os})(y_0 - y_0') - (z_0' + ZA)^2]}{[(x_0' - x_{os})^2 + (y_0' - y_{os})^2 + (z_0' + ZA)^2]^{3/2} [(x_0 - x_0')^2 + (y_0 - y_0')^2 + (z_0' + ZA)^2]^{3/2}} \right]_{BM} dV + \\ & + \frac{I}{4\pi^2} \Delta\rho \int_V \left[\frac{[(x_0' - x_{os})(x_0 - x_0') + (y_0' - y_{os})(y_0 - y_0') - (z_0' + ZA)^2]}{[(x_0' - x_{os})^2 + (y_0' - y_{os})^2 + (z_0' + ZA)^2]^{3/2} [(x_0 - x_0')^2 + (y_0 - y_0')^2 + (z_0' + ZA)^2]^{3/2}} \right]_{AN} dV - \\ & - \frac{I}{4\pi^2} \Delta\rho \int_V \left[\frac{[(x_0' - x_{os})(x_0 - x_0') + (y_0' - y_{os})(y_0 - y_0') - (z_0' + ZA)^2]}{[(x_0' - x_{os})^2 + (y_0' - y_{os})^2 + (z_0' + ZA)^2]^{3/2} [(x_0 - x_0')^2 + (y_0 - y_0')^2 + (z_0' + ZA)^2]^{3/2}} \right]_{BN} dV \end{aligned} \quad (2.27)$$

En el lado derecho de la ecuación (2.27) el término $\frac{I}{4\pi^2} \Delta\rho$ y la integración sobre el volumen son comunes en los cuatro términos, entonces, pueden ser factorizados, por lo tanto:

$$\begin{aligned} \Delta U_N^M = & \frac{I}{4\pi^2} \Delta\rho \int_V \left[- \left[\frac{[(x_0' - x_{os})(x_0 - x_0') + (y_0' - y_{os})(y_0 - y_0') - (z_0' + ZA)^2]}{[(x_0' - x_{os})^2 + (y_0' - y_{os})^2 + (z_0' + ZA)^2]^{3/2} [(x_0 - x_0')^2 + (y_0 - y_0')^2 + (z_0' + ZA)^2]^{3/2}} \right]_{AM} + \right. \\ & + \left[\frac{[(x_0' - x_{os})(x_0 - x_0') + (y_0' - y_{os})(y_0 - y_0') - (z_0' + ZA)^2]}{[(x_0' - x_{os})^2 + (y_0' - y_{os})^2 + (z_0' + ZA)^2]^{3/2} [(x_0 - x_0')^2 + (y_0 - y_0')^2 + (z_0' + ZA)^2]^{3/2}} \right]_{BM} + \\ & + \left[\frac{[(x_0' - x_{os})(x_0 - x_0') + (y_0' - y_{os})(y_0 - y_0') - (z_0' + ZA)^2]}{[(x_0' - x_{os})^2 + (y_0' - y_{os})^2 + (z_0' + ZA)^2]^{3/2} [(x_0 - x_0')^2 + (y_0 - y_0')^2 + (z_0' + ZA)^2]^{3/2}} \right]_{AN} - \\ & \left. - \left[\frac{[(x_0' - x_{os})(x_0 - x_0') + (y_0' - y_{os})(y_0 - y_0') - (z_0' + ZA)^2]}{[(x_0' - x_{os})^2 + (y_0' - y_{os})^2 + (z_0' + ZA)^2]^{3/2} [(x_0 - x_0')^2 + (y_0 - y_0')^2 + (z_0' + ZA)^2]^{3/2}} \right]_{BN} \right] dV \end{aligned} \quad (2.28)$$

La ecuación (2.28) es la que será utilizada para calcular la diferencia de potencial necesaria para el cálculo de la resistividad aparente que se propone en la modelación.

2.3 CALCULO DE LA RESISTIVIDAD APARENTE.

El potencial total puede ser encontrado como la suma del potencial producido por el medio encajonante y el potencial producido por el cuerpo a modelar, o dicho de otra forma como la suma del potencial primario (medio) y un potencial secundario (cuerpo), es decir:

$$U_{TOTAL}=U_{PRIMARIO}+U_{SECUNDARIO} \quad (2.29)$$

Haciendo uso de la ecuación (1.19) y despejando el potencial de ésta, y después de eliminar las variables y constantes comunes, la ecuación (2.29) puede escribirse de la siguiente manera:

$$\rho_a=\rho_{MEDIO} + \rho_{CUERPO} \quad (2.30)$$

Donde ρ_a es la resistividad aparente, ρ_{MEDIO} es la resistividad verdadera del medio encajonante y ρ_{CUERPO} es la resistividad que se calcula cuando se hace uso tanto de la diferencia de potencial (ecuación 2.28), y el cálculo final de la resistividad aparente (ecuación 1.19).

La ecuación (2.30) es la que se usa para calcular los valores de resistividad aparente en la modelación propuesta, sin embargo, esta ecuación solo es válida cuando se consideran cuerpos 3-D sumergidos en un medio homogéneo de resistividad constante.

CAPITULO 3. ALGORITMO NUMÉRICO

En los capítulos anteriores se mencionaron todas las consideraciones teóricas que se tomaron en cuenta para poder obtener los valores de resistividad aparente.

En este capítulo se mencionarán algunos de los resultados que avalan el buen funcionamiento de la teoría y del algoritmo de modelación.

Se inicia el capítulo con la presentación de la teoría básica de integración numérica con la que se resolvió el problema del cálculo de la diferencia de potencial, cálculo expresado por la ecuación (2.28).

A continuación se exponen las dos propiedades básicas con las que se comprobó que la lógica del algoritmo de modelación es la correcta. Estas propiedades son:

1. Propiedad de simetría.
2. Propiedad de reciprocidad.

Para comprobar estas propiedades se hará uso de tablas de datos obtenidos a partir del algoritmo de modelación. Modelos básicos tales como Tierra Estratificada, Dique Vertical Conductor y Resistivo y Paralelepípedo rodeado por un semiespacio conductor son usados para comprobar estas dos propiedades.

La eficiencia del algoritmo de modelación se comprobó al comparar los resultados que arroja el mismo con los resultados que arrojan otros algoritmos de modelación (Cifuentes, 1992; Loke, 1995; Tejero, 2001 y Fox, 1980). Considerando que los resultados de los algoritmos antes mencionados son reales se presentan los errores que existen entre los datos que arroja la modelación y los datos de dichos algoritmos. Los errores en ocasiones son bastante altos, sobre todo en cuerpos que son resistivos con respecto al medio encajonante.

El criterio principal que se usó para afirmar que el algoritmo de modelación funciona correctamente es la gran similitud que existe entre las gráficas de datos de los distintos modelos, puesto que de esta manera es más fácil percibir si el algoritmo de modelación calcula datos lógicos.

Hay que hacer notar que todas las figuras que se utilizan para mostrar la simetría, reciprocidad y eficiencia del algoritmo propuesto utilizan dos ejes coordenados en la dirección Y, donde uno de ellos corresponde a los valores del algoritmo propuesto y el otro eje corresponde al otro algoritmo de modelación. Todos los datos que a continuación se presentan son de resistividad aparente.

Cabe señalar que el algoritmo de modelación se realizó completamente en el lenguaje de programación FORTRAN 90. También se hace uso de subrutinas de integración numérica obtenidas a partir del libro NUMERICAL RECIPES IN FORTRAN y de las librerías IMLS FORTRAN NUMERICAL LIBRARIES incluidas dentro del software de programación. Más adelante, se muestra un pequeño diagrama de flujo que muestra los pasos más importantes que el algoritmo sigue para arrojar un valor de resistividad aparente.

3.1 SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA INTEGRAL

Como ya se mencionó, el problema fundamental es la solución de la ecuación (2.28). Este es un problema que puede ser resuelto vía la integración numérica en tres dimensiones. Se decidió que el método a utilizar sería el método de integración por cuadraturas de Gauss, gracias a su versatilidad y exactitud en la solución de integrales. A continuación se presenta la teoría básica que envuelve al método de integración antes mencionado.

3.1.1 INTRODUCCIÓN

Los métodos de integración numérica se pueden utilizar para integrar funciones dadas, ya sea mediante una tabla o en forma analítica. Incluso en el caso en que sea posible la integración analítica, la integración numérica puede ahorrar tiempo y esfuerzo si sólo se desea conocer el valor numérico de la integral. Los métodos de integración numérica se obtienen de integrar los polinomios de interpolación. Por consiguiente, las distintas fórmulas de interpolación darán por resultado distintos métodos de integración numérica. Por ejemplo, los métodos que utilizan las fórmulas de Newton-Cotes se basan en las fórmulas de interpolación con puntos separados uniformemente y se deducen al integrar las fórmulas de interpolación de Newton hacia adelante y hacia atrás. Las cuadraturas de Gauss se basan en la interpolación polinomial, usando las raíces de un polinomio ortogonal, como los polinomios de Legendre. Hay métodos de integración que se aplican a integrales con límites infinitos y a las integrales de funciones singulares. En la tabla 3.1 aparece un resumen de las ventajas y desventajas de los métodos de Integración numérica.

Método	Ventajas	Desventajas
Regla del Trapecio	Sencillez. Óptima par integrales impropias.	Necesita un gran número de subintervalos para una buena precisión.
Regla de 1/3 de Simpson	Sencillez. Más precisión que la regla del Trapecio.	Sólo con un número par de intervalos.
Regla de 3/8 de Simpson	El mismo orden de precisión que la regla de 1/3.	Solo con intervalos cuyo número sea múltiplo de 3.
Fórmulas de Newton-Cotes	Utiliza puntos con igual separación. Se dispone de fórmulas abiertas y cerradas.	Las fórmulas de orden superior no necesariamente son más precisas.
Cuadraturas de Gauss	Más precisión que las fórmulas de Newton-Cotes. No se utilizan los valores de la función en los extremos.	Los puntos no están separados uniformemente.

Tabla 3.1. Resumen de los métodos de integración numérica.

3.1.2 CUADRATURAS DE GAUSS

Las cuadraturas de Gauss son métodos de integración numérica que utilizan puntos de Legendre (raíces de polinomios de Legendre). Las cuadraturas de Gauss no se pueden utilizar para integrar una función dada en forma de tabla con intervalos de separación

uniforme debido a que los puntos de Legendre no están separados de esa manera; sin embargo, son más adecuadas para funciones analíticas. La ventaja de este método de integración es que su precisión es mayor a la de cualquier otro.

Las cuadraturas de Gauss difieren en forma significativa de las fórmulas de Newton-Cotes ya que los N puntos de la retícula (llamados puntos de Gauss) se obtienen mediante las raíces del polinomio de Legendre $P_N(x)=0$, donde $P_N(x)$ es el polinomio de Legendre de orden N .

La cuadratura de Gauss encuentra el valor de una integral exclusivamente en el intervalo $[-1,1]$ y está dada por (Nakamura, 1992):

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \sum_{k=1}^N w_k f(x_k) \quad (3.1)$$

Donde N es el número de puntos de Gauss, los w_i son los pesos y las x_i son los puntos de Gauss, tanto los w_i como los x_i pueden encontrarse en cualquier libro de métodos numéricos.

La fórmula de integración de Gauss puede aplicarse a cualquier intervalos arbitrario $[a,b]$ con la transformación (Nakamura, 1992):

$$x = \frac{2z - a - b}{b - a} \quad (3.2)$$

donde z es la coordenada orginal en $a < z < b$ y x es la coordenada normalizada en $-1 \leq x \leq 1$. La transformación de x en z es (Nakamura, 1992):

$$z = \frac{(b - a)x + a + b}{2} \quad (3.3)$$

Por medio de esta transformación, la integral se puede escribir como

$$\int_a^b f(z)dz = \int_{-1}^1 f(z)(dz/dx)dx = \frac{b-a}{2} \sum_{k=1}^N w_k (fz_k) \quad (3.4)$$

Donde $dz/dx=(b-a)/2$. Los valores de z_k se obtienen al sustituir la ecuación (3.3) por los puntos de Gauss; a saber,

$$z_k = \frac{(b - a)x_k + a + b}{2} \quad (3.5)$$

La anterior es la teoría básica en la que esta basada la integración en una dimensión por medio de las cuadraturas de Gauss. Dado que el problema principal es encontrar la solución de una integral triple, esta misma teoría es aplicable, resolviéndola como una integral reiterada.

3.1.3 USO DE LAS CUADRATURAS DE GAUSS

En el subtema 1.2.3 se mencionó que para una modelación 3-D se usarían paralelepípedos y para una modelación 2-D se usarían también paralelepípedos, pero en esta ocasión con rumbo tendiendo al infinito.

Toda la teoría que se mencionó en los dos capítulos anteriores esta encaminada a la modelación 3-D del subsuelo, sin embargo, con el presente algoritmo también será posible realizar una modelación 2-D. Por lo tanto, cuando se desee realizar una modelación 2-D es necesario que los límites de integración de una de las tres variables vayan desde $-\infty$ hasta ∞ . La solución a dicho problema de integración se resuelve con dos subrutinas diferentes de integración, una subrutina especialmente creada para resolver integrales que se encuentren en el intervalo $[-\infty, \infty]$ más otra subrutina de integración que resuelve problemas con intervalos finitos. La subrutina que ayuda a resolver el problema que contiene el intervalo $[-\infty, \infty]$, denominada DQDAGI, forma parte de las librerías IMLS FORTRAN NUMERICAL LIBRARIES que se encuentran incluidas en el software de programación. Las subrutinas de integración que resuelven integrales en intervalos finitos, denominadas QGAUS, forman parte de las subrutinas publicadas en el libro NUMERICAL RECIPES IN FORTRAN.

La subrutina DQDAGI usa un esquema adaptativo global en un intento de reducir el error absoluto. DQDAGI inicialmente transforma un intervalo infinito o semi-infinito en un intervalo finito $[0,1]$. Entonces DQDAGI usa una regla del Gauss-Kronrod de 21 puntos para estimar la integral y el error. DQDAGI biseca cualquier intervalo con un error estimado aceptable y continua su proceso hasta terminar. Esta rutina esta diseñada para manejar singularidades en los puntos finales del intervalo. La rutina emplea un proceso de extrapolación conocido como ε -algorítmico (Piessens et al, 1983). La subrutina QGAUS realiza la integración de acuerdo a la teoría mencionada en el subtema 3.1.2.

Para una modelación en 3-D, como se trata de intervalos finitos en las tres direcciones del eje coordenado, solamente se hace uso de la subrutina QGAUS.

3.2 CARACTERÍSTICAS GENERALES DEL ALGORITMO DE MODELACIÓN.

El algoritmo tiene por objetivo realizar la modelación de estructuras 3-D usando la técnica denominada Tomografía Eléctrica, resolviendo la integral que se presenta en la ecuación (2.28).

Para poder calcular la resistividad aparente es necesario proporcionar las características generales del sondeo (número de electrodos, espaciamento entre electrodos, niveles de profundidad, número de líneas de sondeo, espaciamento entre líneas de sondeo, corriente eléctrica inducida al terreno, resistividad del medio y número de cuerpos a modelar). También hace uso de las características generales del cuerpo a modelar (límites de integración inferior y superior en la dirección x, límites de integración inferior y superior en la dirección y, límites de integración inferior y superior en la dirección z, componentes XA, YA y ZA del vector \vec{a} , vector representado en la figura 2.2, y resistividad del cuerpo a

modelar). Para utilizar el algoritmo se tienen que crear dos archivos diferentes, en uno se colocan las características generales del sondeo y en el otro se colocan las características generales del cuerpo a modelar.

El algoritmo de modelación está diseñado para modelar una Tomografía Eléctrica haciendo uso de cualquiera de los arreglos de electrodos más comunes: WENNER, DIPOLO-DIPOLO y WENNER-SCHLUMBERGER.

El algoritmo solicita el tipo de arreglo a utilizar y después los nombres de los archivos antes mencionados. Al ingresar toda la información requerida, éste realizará el número de líneas de sondeo que se hayan requerido, cambiará automáticamente tanto los niveles como la abertura entre electrodos que correspondan para cada nivel, calculará la diferencia de potencial entre los electrodos M y N usando la ecuación (2.28) y realizará el cálculo de la resistividad aparente asignándolo a su correspondiente punto de atribución. Al finalizar, se entrega al usuario un archivo que contiene las resistividades aparentes correspondientes al modelo y sondeo requeridos.

En la figura 3.1 se muestra un diagrama de flujo que presenta las características generales del algoritmo numérico de modelación.

3.3 PROPIEDADES

Son dos las propiedades básicas que debe cumplir el algoritmo numérico de modelación: la simetría y la reciprocidad. Estas dos pruebas permiten comprobar la lógica del programa, no así su exactitud, ya que esta última depende más de las consideraciones hechas (hipótesis) en la teoría de modelación empleada.

3.3.1 SIMETRÍA

Para un modelo 2-D del subsuelo la propiedad de simetría consiste en comprobar que los datos arrojados por el algoritmo son simétricos con respecto al centro del levantamiento.

Para un modelo 3-D del subsuelo también se debe cumplir que los datos sean simétricos con respecto al centro del levantamiento, pero al mismo tiempo, se debe cumplir que los datos son también simétricos con respecto al centro de las líneas de sondeo. Esto será explicado con mayor detenimiento más adelante.

3.3.2 RECIPROCIDAD

En los circuitos eléctricos usuales, compuestos por redes, se cumple el llamado Principio de Reciprocidad, que dice que en cualquier red compuesta por elementos lineales, si la aplicación de una diferencia de potencial ΔV entre dos terminales determinadas produce una corriente I en cierta rama del circuito, entonces la aplicación de la misma ΔV en los extremos de la rama hace circular la misma intensidad I entre las primeras terminales.

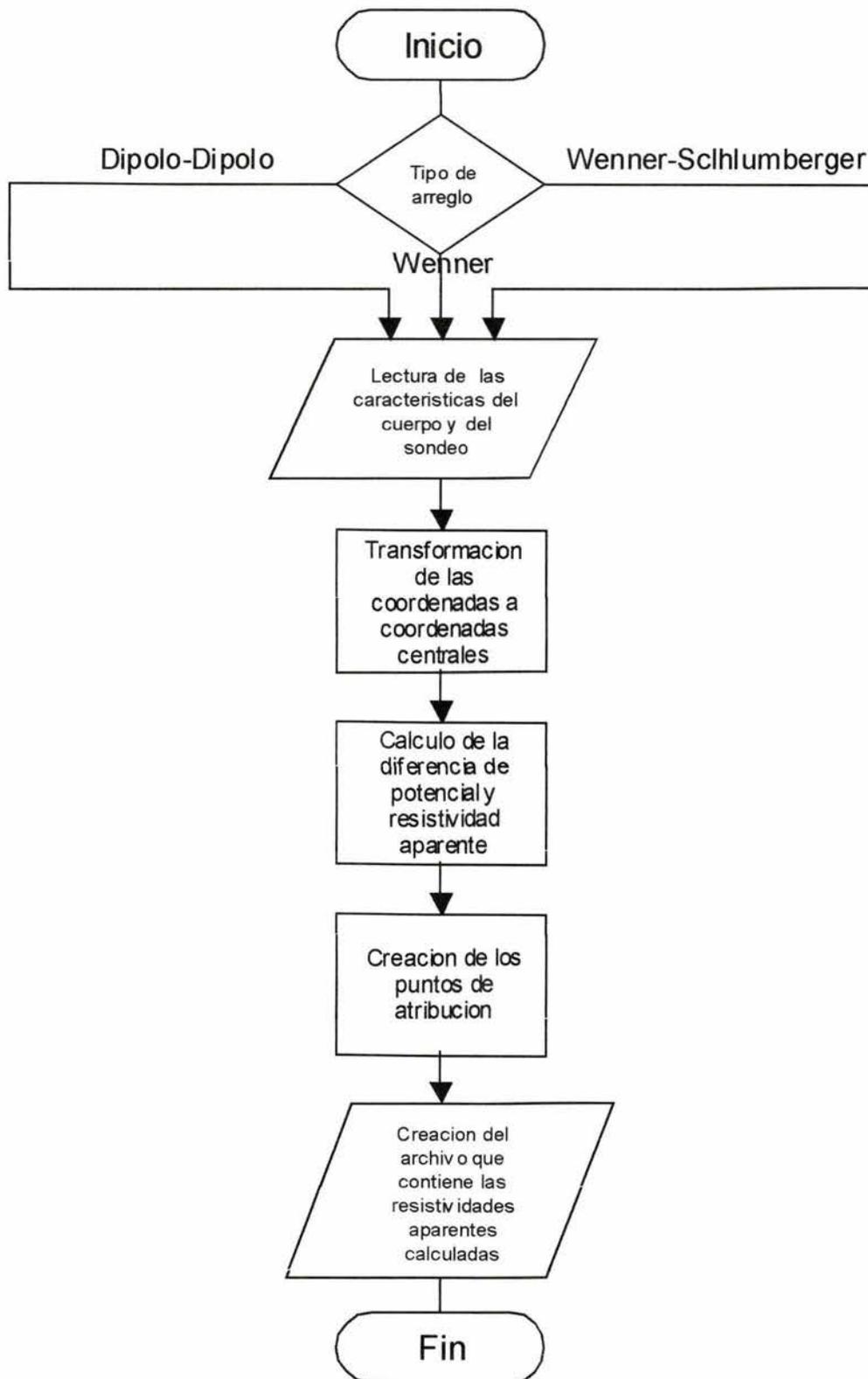


Figura 3.1. Diagrama de flujo del algoritmo numérico.

En los medios continuos, que son los que intervienen en los Métodos Geoeléctricos, también se cumple el principio de Reciprocidad.

Si se combinan la ecuación (1.21) y (1.22) quedaría la siguiente expresión:

$$\rho_a = \left(\frac{2\pi}{\frac{1}{AM} - \frac{1}{BM} - \frac{1}{AN} + \frac{1}{BN}} \right) \frac{\Delta V}{I} \quad (3.6)$$

Si en la ecuación (3.6) se cambian entre sí los electrodos A y M, por una parte, y los electrodos B y N por otra, vuelve a obtenerse la misma ecuación. Esto quiere decir que si los electrodos de corriente cambian su posición con los de potencial, todo permanece igual y el coeficiente del arreglo permanece constante, por lo tanto, al intercambiar los electrodos entre sí, siempre se debe de obtener el mismo resultado.

3.4 MODELOS

En el Capítulo 1 se mencionaron tres técnicas de campo utilizadas para encontrar la distribución espacial de la resistividad del subsuelo, El Sondeo Eléctrico Vertical, El Perfilaje Eléctrico y la Tomografía Eléctrica, por lo tanto, se consideró necesario que las pruebas de simetría y reciprocidad se aplicaran a los modelos básicos del subsuelo que utilizan las técnicas antes mencionadas:

1. Tierra Estratificada.
2. Dique resistivo y conductor.
3. Paralelepípedo con rumbo infinito y rumbo finito.

En la tabla 3.2 se muestran los modelos y las pruebas a las que fueron sometidos.

Modelo	Simetría	Reciprocidad
Medio Estratificado (2-D)		X
Dique Conductor (2-D)	X	X
Dique Resistivo (2-D)	X	X
Paralelepípedo (2-D)	X	X
Paralelepípedo (3-D)	X	X

Tabla 3.2. Modelos y las pruebas a las que fueron sometidos.

Hay que mencionar que para la modelación del Medio Estratificado como de los Diques se consideraron paralelepípedos.

3.4.1 MEDIO ESTRATIFICADO

Como se mencionó en el Capítulo 1 el Sondeo Eléctrico Vertical es la técnica más indicada para encontrar las características resistivas del subsuelo cuando éste se trata de un medio estratificado, sin embargo, la modelación propuesta en este trabajo es una modelación basada en la Tomografía Eléctrica, por lo tanto, es por esta razón que para simular un SEV con los datos obtenidos a partir de la modelación propuesta solamente se tomó el primer dato de cada nivel de profundidad. Con esto se pretende simular la toma de datos por medio de un SEV.

Los parámetros que se usaron para la modelación del medio estratificado se muestran en la figura 3.2.

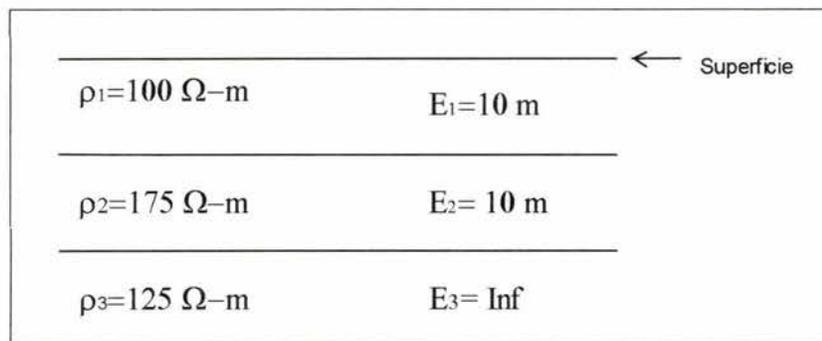


Figura 3.2. Modelo de Medio Estratificado.

Como se muestra en la tabla 3.2 el modelo anterior solamente fue sometido a la prueba de reciprocidad, dado que la toma de datos se realizó sobre cuerpos horizontales de gran extensión lateral y no hay un cuerpo enterrado en el medio con el que se pueda comprobar la propiedad de simetría.

Las características generales del levantamiento para este modelo son las siguientes:

- 51 electrodos con 2 metros de separación entre cada uno.
- 16 niveles de profundidad, que son los máximos permitidos por el arreglo de electrodos.

Los datos arrojados por el algoritmo fueron obtenidos a partir de un arreglo WENNER. La tabla 3.3 corresponde al levantamiento cuando los electrodos están colocados en su lugar correspondiente y la tabla 3.4 corresponde al levantamiento cuando los electrodos se intercambiaron (reciprocidad).

Como se observa en las tablas los valores son iguales cuando se comparan uno a uno, esto quiere decir que el algoritmo numérico respeta la propiedad de reciprocidad cuando se utiliza un medio estratificado como modelo básico.

En el APÉNDICE A se presentan más datos con los que se puede comprobar la propiedad de reciprocidad, estos fueron obtenidos a partir de los arreglos DIPOLO-DIPOLO y WENNER-SCHLUMBERGER.

Nivel	Wenner
1	100.1843647
2	101.4613981
3	104.0156439
4	107.1367188
5	111.2555684
6	116.4574737
7	120.6225836
8	123.3334911
9	126.4343375
10	129.7442827
11	130.9604397
12	130.7160384
13	131.5289814
14	133.5690287
15	135.0118857
16	135.6688178

Tabla 3.3. Electrodo colocados en su posición original.

Nivel	Wenner
1	100.1843647
2	101.4613981
3	104.0156439
4	107.1367188
5	111.2555684
6	116.4574737
7	120.6225836
8	123.3334911
9	126.4343375
10	129.7442827
11	130.9604397
12	130.7160384
13	131.5289814
14	133.5690287
15	135.0118857
16	135.6688178

Tabla 3.4. Electrodo intercambiados (reciprocidad).

3.4.2 DIQUE CONDUCTOR Y RESISTIVO

En el subtema anterior, el algoritmo se utilizó para simular un SEV, en esta ocasión se quiere ver el funcionamiento del algoritmo como si se estuviera realizando un Perfilaje Eléctrico. Por tal motivo los datos que arrojó la modelación se analizarán por niveles de profundidad. En las tablas que a continuación se presentan solamente se exponen los resultados del primer nivel de profundidad.

Tanto para el dique conductor como para el dique resistivo se utilizaron las mismas características generales del sondeo, que son las siguientes:

- 20 electrodos con 8 metros de separación entre cada uno.
- La longitud de los diques es de 6 metros, con espesor semi-infinito y anchura infinita.
- Los diques fueron colocados entre los electrodos números 10 y 11, como se muestra en la figura 3.3. Esto garantizó que el cuerpo se encuentre en el centro del levantamiento.

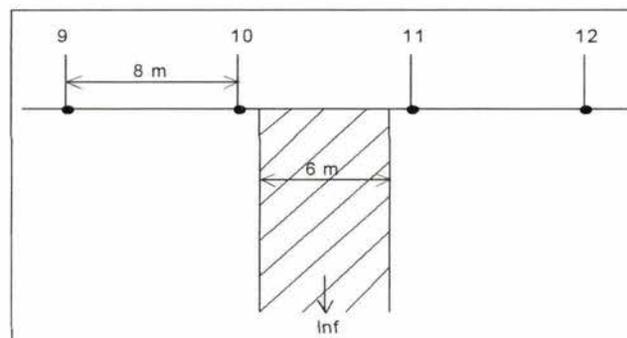


Figura 3.3. Características generales del levantamiento.

3.4.2.1 DIQUE CONDUCTOR

Se consideró un dique de 10 Ω -m, rodeado por un medio de 100 Ω -m. Los datos se obtuvieron a partir de un arreglo DIPOLO-DIPOLO.

A partir de la tabla 3.5 se observa que para el primer nivel de profundidad los datos son simétricos con respecto al No. de dato 9, también se observa que el No. de dato 1 y el 17 son iguales; el 2 y el 16 también lo son y así sucesivamente hasta llegar al centro de la tabla.

Los datos de la tabla 3.5 se graficaron en la figura 3.4, donde se grafica No. de Dato contra resistividad aparente. En esta figura es mucho más clara la propiedad de simetría y es claro que todos los datos son simétricos con respecto al No. de dato 9.

La propiedad de reciprocidad se puede comprobar al comparar los datos expuestos en la tabla 3.6 (datos obtenidos al intercambiar la posición de los electrodos en el algoritmo de modelación) y los datos de la tabla 3.5.

Más datos son expuestos en el APÉNDICE B. En éste se muestran las propiedades de simetría y reciprocidad, cuando se usó el arreglo WENNER, y los resultados que se obtuvieron cuando se utilizan los dos primeros niveles de profundidad.

No. de dato	Nivel	Resistividad Aparente
1	1	100.0187426
2	1	100.0321
3	1	100.0598322
4	1	100.1253427
5	1	100.3119353
6	1	101.0287471
7	1	105.873465
8	1	66.29088062
9	1	97.61689394
10	1	66.29088062
11	1	105.873465
12	1	101.0287471
13	1	100.3119353
14	1	100.1253427
15	1	100.0598322
16	1	100.0321
17	1	100.0187426

Tabla 3.5. Datos utilizados para comprobar la propiedad de simetría para un dique conductor.

No. de dato	Nivel	Resistividad Aparente
1	1	100.0187426
2	1	100.0321
3	1	100.0598322
4	1	100.1253427
5	1	100.3119353
6	1	101.0287471
7	1	105.873465
8	1	66.29088062
9	1	97.61689394
10	1	66.29088062
11	1	105.873465
12	1	101.0287471
13	1	100.3119353
14	1	100.1253427
15	1	100.0598322
16	1	100.0321
17	1	100.0187426

Tabla 3.6. Datos obtenidos al intercambiar la posición de los electrodos (reciprocidad).



Figura 3.4. Propiedad de simetría. Dique Conductor.

3.4.2.2 DIQUE RESISTIVO

Este modelo se llevó a cabo considerando un dique de 100 Ω -m y un medio encajonante de 10 Ω -m. Los datos son el resultado del uso de un arreglo WENNER-SCHLUMBERGER.

Con la figura 3.5, obtenida a partir de la tabla 3.7, se demuestra la propiedad de simetría. En la figura 3.5 puede observarse como todos los valores son simétricos con respecto al No. de dato 9. Con la tabla 3.8 se demuestra la propiedad de reciprocidad cuando se comparan sus valores con los de la tabla 3.7.

En el APÉNDICE C se muestran más datos, con los que pueden ser comprobadas estas dos propiedades, cuando se utilizó un arreglo DIPOLO-DIPOLO y 2 niveles de profundidad.

No. de dato	Nivel	Resistividad Aparente
1	1	10.01924689
2	1	10.03323656
3	1	10.06275578
4	1	10.13437602
5	1	10.34872758
6	1	11.26919515
7	1	20.49361095
8	1	7.431163644
9	1	48.03338014
10	1	7.431163644
11	1	20.49361095
12	1	11.26919515
13	1	10.34872758
14	1	10.13437602
15	1	10.06275578
16	1	10.03323656
17	1	10.01924689

Tabla 3.7. Propiedad de simetría. Dique Resistivo.

No. de dato	Nivel	Resistividad Aparente
1	1	10.01924689
2	1	10.03323656
3	1	10.06275578
4	1	10.13437602
5	1	10.34872758
6	1	11.26919515
7	1	20.49361095
8	1	7.431163644
9	1	48.03338014
10	1	7.431163644
11	1	20.49361095
12	1	11.26919515
13	1	10.34872758
14	1	10.13437602
15	1	10.06275578
16	1	10.03323656
17	1	10.01924689

Tabla 3.8. Propiedad de Reciprocidad. dique resistivo.

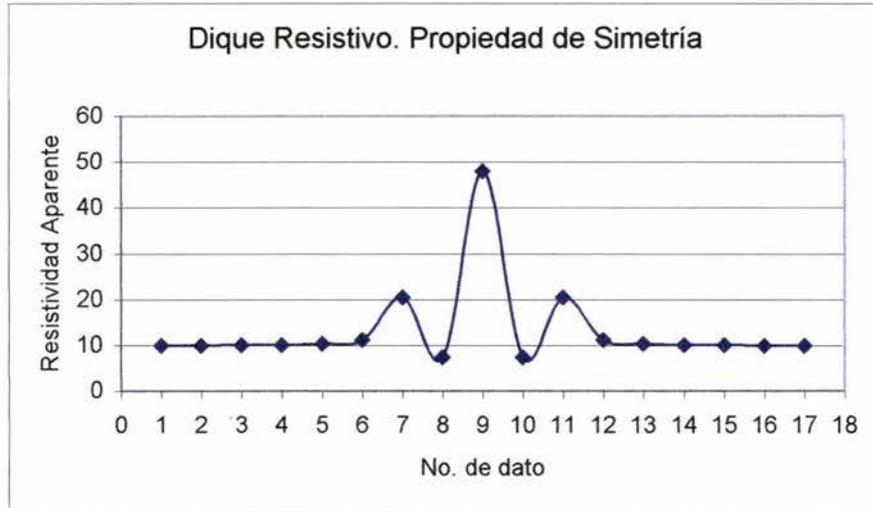


Figura 3.5. Dique Resistivo. Propiedad de simetría.

3.4.3 PARALELEPÍPEDO INFINITO Y PARALELEPIPEDO FINITO

Todos los modelos anteriores se han localizado en el centro del levantamiento, sin embargo, para los siguientes modelos se probó que sucedería cuando el cuerpo no está centrado con respecto al centro del mismo.

3.4.3.1 PARALELEPÍPEDO INFINITO

Las características que se utilizaron para este modelo son las siguientes:

- Prisma de 12 metros de largo con 3 metros de espesor. Este prisma se considero con ancho infinito en la dirección Y.
- La profundidad del techo de cuerpo es de tres metros.
- 30 electrodos, 2 niveles de profundidad y una abertura de electrodos de 3 metros.
- El cuerpo se colocó entre el electrodo número 13 y el electrodo número 17.
- La resistividad del medio es de 100 Ohm-metro y la del cuerpo de 500 Ohm-metro.
- Se realizó una línea colocada exactamente en el centro del cuerpo.

La figura 3.6 muestra las características antes mencionadas.

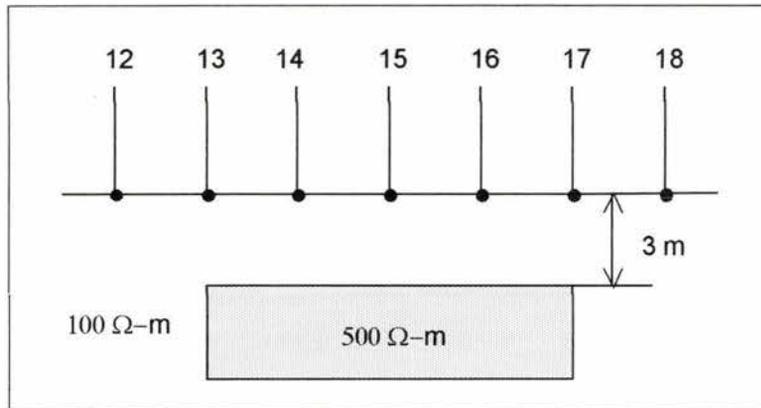


Figura 3.6. Modelo 2-D usado para la comprobación de la simetría y la reciprocidad.

Las tablas 3.9 y 3.10 muestran los resultados del primer nivel de profundidad, estos datos fueron obtenidos a partir de un arreglo de electrodos WENNER.

Como ya se mencionó, el cuerpo no está centrado con respecto al centro del levantamiento, por lo tanto, la propiedad de simetría se respeta solamente para ciertos datos, esto es, de la tabla 3.9 se observa que el dato 1 y el 26 son iguales, el 2 y el 25 también lo son y así sucesivamente hasta llegar al centro de la tabla. El único valor que no tiene otro valor con el cual compararse es el dato 27, dado que el cálculo de éste no es simétrico con respecto al centro del sondeo. Con esto se muestra que el algoritmo de modelación proporciona resultados lógicos según el lugar en el que se coloquen los cuerpos a modelar.

La propiedad de Reciprocidad se puede comprobar con la tabla 3.10 al comparar los datos de la misma con los datos de la tabla 3.9. Al compararse dato a dato se observa que los valores de las tablas son los mismos.

En el APÉNDICE D se presentan más resultados (obtenidos a partir del arreglo WENNER-SCHLUMBERGER) con los cuales se pueden comprobar las propiedades de simetría y reciprocidad. Los datos de este apéndice representan el Nivel 2 de profundidad.

3.4.3.2 PARALELEPÍPEDO FINITO

Hasta este momento se han comprobado las propiedades de simetría y reciprocidad para una modelación 2-D.

En este subtema se comprobarán las propiedades de simetría y reciprocidad cuando se utiliza un modelo 3-D del subsuelo. Estas dos propiedades se comprobarán para dos casos:

1. Cuando se comparen resultados de un levantamiento.
2. Cuando se comparen resultados de levantamientos diferentes.

No. de dato	Nivel	Resistividad Aparente
1	1	100.0113999
2	1	100.0176012
3	1	100.0283666
4	1	100.0481789
5	1	100.0873763
6	1	100.1723607
7	1	100.379733
8	1	100.9690242
9	1	102.959754
10	1	109.7356399
11	1	122.5152269
12	1	135.8255553
13	1	146.7906858
14	1	146.7906858
15	1	135.8255553
16	1	122.5152269
17	1	109.7356399
18	1	102.959754
19	1	100.9690242
20	1	100.379733
21	1	100.1723607
22	1	100.0873763
23	1	100.0481789
24	1	100.0283666
25	1	100.0176012
26	1	100.0113999
27	1	100.0076518

Tabla 3.9. Propiedad de Simetría. Paralelepípedo Infinito.

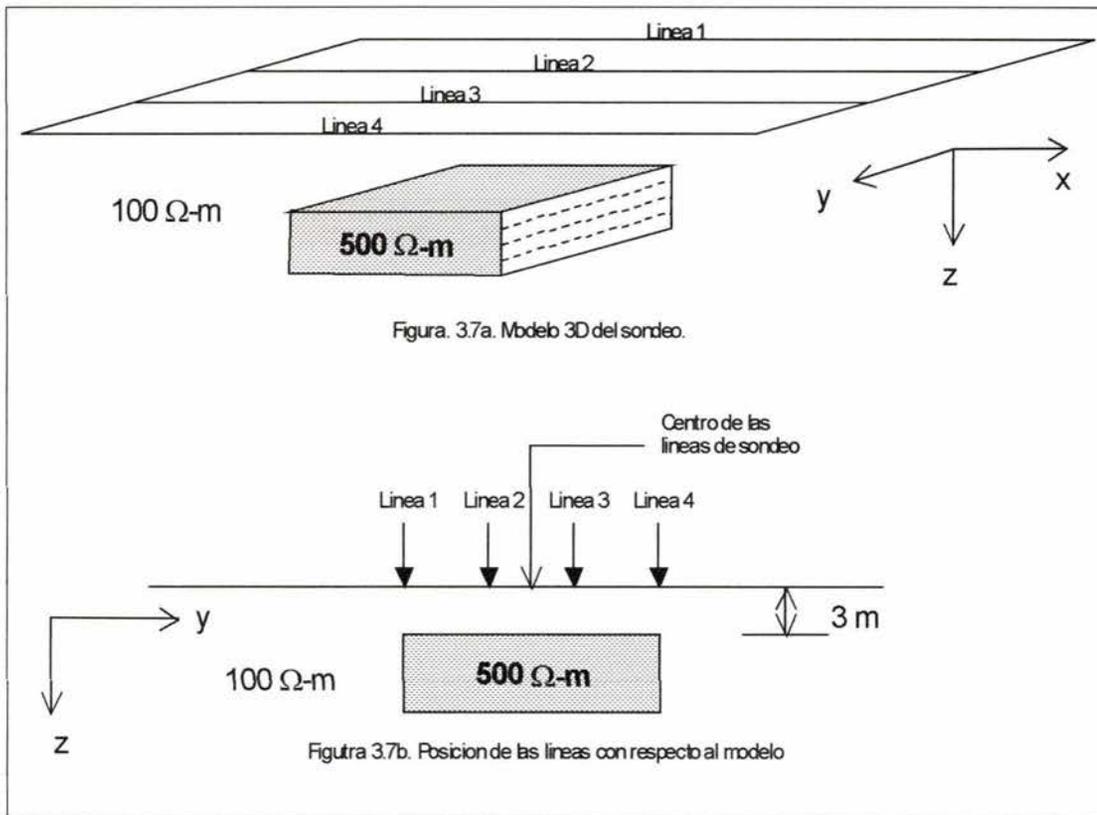
No. de dato	Nivel	Resistividad Aparente
1	1	100.0113999
2	1	100.0176012
3	1	100.0283666
4	1	100.0481789
5	1	100.0873763
6	1	100.1723607
7	1	100.379733
8	1	100.9690242
9	1	102.959754
10	1	109.7356399
11	1	122.5152269
12	1	135.8255553
13	1	146.7906858
14	1	146.7906858
15	1	135.8255553
16	1	122.5152269
17	1	109.7356399
18	1	102.959754
19	1	100.9690242
20	1	100.379733
21	1	100.1723607
22	1	100.0873763
23	1	100.0481789
24	1	100.0283666
25	1	100.0176012
26	1	100.0113999
27	1	100.0076518

Tabla 3.10. Propiedad de Reciprocidad. Paralelepípedo Infinito.

Para estas pruebas se utilizaron las siguientes características:

- a) Paralelepípedo de 12 metros de largo, 12 metros de ancho y con 3 metros de espesor.
- b) La profundidad del techo del cuerpo es de tres metros.
- c) 30 electrodos, 2 niveles de profundidad y una abertura de electrodos de 3 metros.
- d) El cuerpo se colocó entre el electrodo número 13 y el electrodo número 17.
- e) La resistividad del medio es de 100 Ohm-metro y la del medio de 500 Ohm-metro.
- f) Se realizaron 4 líneas de sondeo, colocadas exactamente encima del cuerpo con separación de 4 metros entre cada una.

En las figuras 3.7a y 3.7b se muestra la geometría del sondeo utilizado.



La propiedad de simetría, para este modelo, puede comprobarse haciendo uso de la tabla 3.11, en esta se presentan los resultados obtenidos a partir de un arreglo DIPOLO-DIPOLO.

En la tabla 3.11 se muestran los resultados de las cuatro líneas de sondeo que aparecen en la figura 3.7b. De esta figura se deduce que los datos de la línea 1 deben ser iguales a los datos de la línea 4 y que los datos de la línea 2 deben ser iguales a los de la línea 3 dada la simetría con respecto al centro de las líneas de sondeo. Esto es claro en esta misma tabla.

De igual forma que en comprobaciones anteriores, al comparar el No. de dato 1 de cada línea con el No. de dato 26 de las mismas, se observa que éstos son iguales, de igual forma el dato 2 con el dato 25 y así sucesivamente hasta llegar al centro de las columnas. Este modelo tampoco está centrado con respecto al centro del levantamiento, por lo tanto, el dato 27 es el único que no puede ser comparado con ningún otro.

Por lo tanto, la propiedad de simetría se respeta cuando se comparan datos de la misma línea sondeo y cuando se comparan los datos de líneas diferentes.

La propiedad de reciprocidad se comprueba haciendo uso de la tabla 3.12 y comparando sus valores con los de la tabla 3.11.

En el APÉNDICE E se presentan los resultados de simetría y reciprocidad, cuando se utilizó un arreglo WENNER. En este apéndice se presentan datos correspondientes al Nivel 2 de profundidad.

No. de dato	Nivel	Línea 1	Línea 2	Línea 3	Línea 4
1	1	99.99676257	99.99646854	99.99646854	99.99676257
2	1	99.99466088	99.99408362	99.99408362	99.99466088
3	1	99.99079092	99.98958662	99.98958662	99.99079092
4	1	99.9832455	99.9805462	99.9805462	99.9832455
5	1	99.96749309	99.96090418	99.96090418	99.96749309
6	1	99.93177626	99.91397403	99.91397403	99.93177626
7	1	99.84229503	99.78811701	99.78811701	99.84229503
8	1	99.59113031	99.40356698	99.40356698	99.59113031
9	1	98.83335713	98.13007282	98.13007282	98.83335713
10	1	97.40842805	95.58603821	95.58603821	97.40842805
11	1	101.314719	103.2086598	103.2086598	101.314719
12	1	112.7463718	125.276947	125.276947	112.7463718
13	1	117.3336261	134.0631511	134.0631511	117.3336261
14	1	117.3336261	134.0631511	134.0631511	117.3336261
15	1	112.7463718	125.276947	125.276947	112.7463718
16	1	101.314719	103.2086598	103.2086598	101.314719
17	1	97.40842805	95.58603821	95.58603821	97.40842805
18	1	98.83335713	98.13007282	98.13007282	98.83335713
19	1	99.59113031	99.40356698	99.40356698	99.59113031
20	1	99.84229503	99.78811701	99.78811701	99.84229503
21	1	99.93177626	99.91397403	99.91397403	99.93177626
22	1	99.96749309	99.96090418	99.96090418	99.96749309
23	1	99.9832455	99.9805462	99.9805462	99.9832455
24	1	99.99079092	99.98958662	99.98958662	99.99079092
25	1	99.99466088	99.99408362	99.99408362	99.99466088
26	1	99.99676257	99.99646854	99.99646854	99.99676257
27	1	99.99796058	99.99780284	99.99780284	99.99796058

Tabla 3.11. Propiedad de Simetría. Paralelepípedo Finito.

No. de dato	Nivel	Línea 1	Línea 2	Línea 3	Línea 4
1	1	99.99676257	99.99646854	99.99646854	99.99676257
2	1	99.99466088	99.99408362	99.99408362	99.99466088
3	1	99.99079092	99.98958662	99.98958662	99.99079092
4	1	99.9832455	99.9805462	99.9805462	99.9832455
5	1	99.96749309	99.96090418	99.96090418	99.96749309
6	1	99.93177626	99.91397403	99.91397403	99.93177626
7	1	99.84229503	99.78811701	99.78811701	99.84229503
8	1	99.59113031	99.40356698	99.40356698	99.59113031
9	1	98.83335713	98.13007282	98.13007282	98.83335713
10	1	97.40842805	95.58603821	95.58603821	97.40842805
11	1	101.314719	103.2086598	103.2086598	101.314719
12	1	112.7463718	125.276947	125.276947	112.7463718
13	1	117.3336261	134.0631511	134.0631511	117.3336261
14	1	117.3336261	134.0631511	134.0631511	117.3336261
15	1	112.7463718	125.276947	125.276947	112.7463718
16	1	101.314719	103.2086598	103.2086598	101.314719
17	1	97.40842805	95.58603821	95.58603821	97.40842805
18	1	98.83335713	98.13007282	98.13007282	98.83335713
19	1	99.59113031	99.40356698	99.40356698	99.59113031
20	1	99.84229503	99.78811701	99.78811701	99.84229503
21	1	99.93177626	99.91397403	99.91397403	99.93177626
22	1	99.96749309	99.96090418	99.96090418	99.96749309
23	1	99.9832455	99.9805462	99.9805462	99.9832455
24	1	99.99079092	99.98958662	99.98958662	99.99079092
25	1	99.99466088	99.99408362	99.99408362	99.99466088
26	1	99.99676257	99.99646854	99.99646854	99.99676257
27	1	99.99796058	99.99780284	99.99780284	99.99796058

Tabla 3.12. Propiedad de Reciprocidad. Paralelepípedo Finito.

3.5 EFICIENCIAS Y RESTRICCIONES DEL ALGORITMO

En este tema se comparan los datos obtenidos por el algoritmo de modelación propuesto con los datos arrojados por otros algoritmos de modelación (Cifuentes, 1992; Loke, 1995; Tejero, 2001; Fox, 1980).

Enseguida se presentan los modelos que se utilizaron para llevar a cabo las pruebas de eficiencia del algoritmo y los algoritmos con los que fueron comparados:

1. Medio estratificado (Tejero, 2001).
2. Dique Resistivo (Cifuentes, 1992).
3. Dique Conductor (Fox, 1980).
4. Paralelepípedo infinito (Loke, 1995).

Hay que hacer notar que los errores más altos se presentan en los datos que se obtienen cuando el sondeo está exactamente por encima de los modelos, es decir, que los valores de

resistividad aparente obtenidos en la modelación propuesta se incrementan cuando el sondeo pasa por encima del modelo, sin embargo, la detectabilidad de los modelos es muy similar en todas las modelaciones.

Ya se mencionó que la similitud que existe entre las gráficas que se presentan a continuación, es el parámetro que se consideró como principal al momento de decidir si el algoritmo de modelación puede ser aceptado.

Al final de este tema se analizaran las restricciones que se pudieron encontrar en el desarrollo del algoritmo de modelación.

3.5.1 EFICIENCIA MEDIO ESTRATIFICADO

Para comprobar la eficiencia del algoritmo usando como modelo un medio estratificado, se utilizaron solamente los primeros datos de cada nivel de profundidad para simular un SEV. Esto se hizo de esta manera ya que el programa propuesto por Tejero (2001) es un programa de modelación de SEV.

Para realizar esta prueba se utilizó el mismo modelo y las mismas características del sondeo que se utilizaron en el subtema 3.4.1.

En la tabla 3.13 se muestran los resultados que arroja el algoritmo de modelación propuesto y el algoritmo de modelación propuesto por Tejero (2001). Para obtener el porcentaje de error se tomó como valor real los resultados del algoritmo de Tejero (2001).

Algoritmo propuesto	Algoritmo Tejero (2001)	Porcentaje de Error (%)
100.184	100.038	0.14594454
101.461	100.29	1.16761392
104.016	100.896	3.09229305
107.137	101.9	5.13935231
111.256	103.265	7.7383431
116.457	104.908	11.0086933
120.623	106.736	13.0106056
123.333	108.663	13.5004555
126.434	110.618	14.2978539
129.744	112.546	15.2808629
130.96	114.408	14.4675198
130.716	116.178	12.5135568
131.529	117.838	11.6184932
133.569	119.381	11.8846383
135.012	120.801	11.7639755
135.669	122.1	11.1130221

Tabla 3.13. Porcentaje de error para el medio estratificado

De la tabla 3.13 puede observarse que el valor más alto de error es de 15.2808629% que puede manejarse como bastante aceptable.

3.5.2 EFICIENCIA DIQUE RESISTIVO.

El algoritmo de Cifuentes (1992) fue diseñado para la modelación de un perfilaje eléctrico, por lo tanto, solamente se utilizó el primer nivel de profundidad. Los porcentajes de error que se muestran en las siguientes tablas consideran que los resultados obtenidos por Cifuentes (1992) son resultados reales.

La resistividad del dique se consideró de 100 Ω -m y la del medio encajonante de 10 Ω -m. Las otras características del sondeo son las mismas que se mencionan en el subtema 3.4.2. La figura 3.3 muestra la posición que guarda el modelo con respecto al disposición de los electrodos.

La tabla 3.14 muestra los resultados que arrojan los dos algoritmos y los porcentajes de error que existen entre ellos. Los valores que se exponen son de resistividad aparente.

No. de dato	Cifuentes (1992)	Propuesto	Porcentaje de error (%)
1	10.0101	10.0192469	0.09137661
2	10.0167	10.0332366	0.1650899
3	10.0301	10.0627558	0.32557781
4	10.0606	10.134376	0.7333163
5	10.145	10.3487276	2.00815752
6	10.463	11.2691952	7.70520071
7	10.428	20.493611	96.5248461
8	10.2908	7.43116364	27.7882804
9	15.7086	48.0333801	205.7776
10	10.2908	7.43116364	27.7882804
11	10.428	20.493611	96.5248461
12	10.463	11.2691952	7.70520071
13	10.145	10.3487276	2.00815752
14	10.0606	10.134376	0.7333163
15	10.0301	10.0627558	0.32557781
16	10.0167	10.0332366	0.1650899
17	10.0101	10.0192469	0.09137661

Tabla 3.14. Prueba de eficiencia. Dique resistivo.

Como puede observarse en la tabla 3.14 los porcentajes de error más altos son del 96.5248461% y 205.7776%.

Se podría pensar que estos errores son demasiado altos como para aceptar un buen funcionamiento del algoritmo propuesto, sin embargo, de la figura 3.8 se puede observar un comportamiento muy similar en los datos arrojados por los dos algoritmos. Con el hecho de que el comportamiento de las figuras sea similar, se puede afirmar que el algoritmo propuesto arroja resultados lógicos.

Hay que hacer notar que la figura 3.8 tiene un eje secundario Y, colocado a la derecha de la misma. Esto se hizo de esta manera para tener una mejor comparación entre las figuras.



Figura 3.8. Prueba de eficiencia. Dique Resistivo.

3.5.3 EFICIENCIA DIQUE CONDUCTOR

Para poder obtener la misma cantidad de datos que presenta Fox se utilizó el siguiente modelo:

1. 23 electrodos con 1 metro de separación entre cada uno.
2. Resistividad del dique de $25 \Omega\text{-m}$ rodeado por un medio de $100 \Omega\text{-m}$.
3. Largo del dique 0.5 metros. Ancho infinito y espesor semi-infinito.
4. El techo del dique se encuentra a 0.5 metros de la superficie.

La geometría del levantamiento se observa en la figura 3.9.

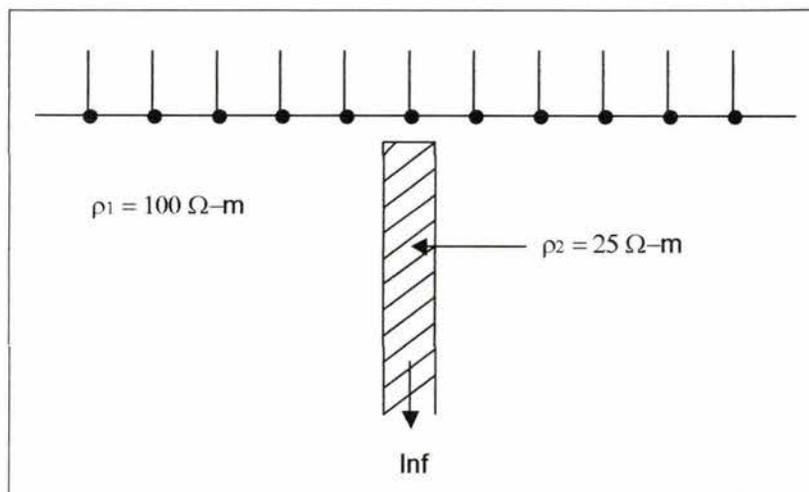


Figura 3.9. Dique Conductor para el algoritmo de Fox.

Los datos obtenidos a partir del algoritmo de Fox corresponden a 6 niveles de profundidad. A continuación se comparan los niveles 1, 3 y 5. Los niveles 2, 3 y 4 pueden observarse en el APÉNDICE F.

En la tabla 3.15 y figura 3.10 se presentan los datos correspondientes al nivel 1. La figura 3.11 y la tabla 3.16 muestran los datos del nivel 3. Finalmente la tabla 3.17 y figura 3.12 contienen los datos del nivel 5. Todos los datos representan resistividad aparente.

En la tabla 3.15 se pueden observar que el error más alto es 8.5486 % el cual es bastante bajo. También en la figura 3.10, el hecho de que las figuras muestren una forma muy similar da la pauta para aceptar el buen funcionamiento del algoritmo propuesto.

Los errores máximos que se observan en las tablas 3.16 y 3.17 son, respectivamente, 11.0074503% y 10.7364647%, sin embargo, la gran similitud entre las curvas de cada figura demuestran el buen funcionamiento del algoritmo propuesto, dado que se tienen resultados lógicos.

Algoritmo propuesto	Algoritmo Fox	Porcentaje de Error (%)
100.212156	97	3.31150118
100.653542	98	2.70769641
100.308599	97	3.41092634
91.180824	84	8.5486
91.180824	84	8.5486
100.308599	97	3.41092634
100.653542	98	2.70769641
100.212156	97	3.31150118

Tabla 3.15. Comparación Algoritmo Propuesto vs. Algoritmo Fox. Nivel 1.

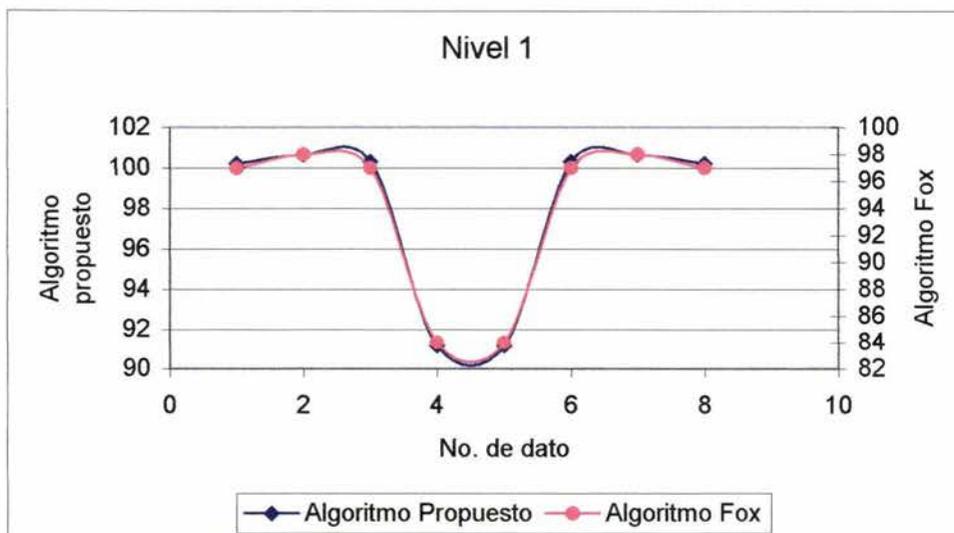


Figura 3.10. Comparación Algoritmo Propuesto vs. Algoritmo Fox. Nivel 1.

Algoritmo propuesto	Algoritmo Fox	Porcentaje de Error (%)
100.778273	102	1.19777162
101.631264	104	2.27763061
98.4691486	100	1.53085141
88.3035272	80	10.379409
94.3563328	85	11.0074503
94.3563328	85	11.0074503
88.3035272	80	10.379409
98.4691486	100	1.53085141
101.631264	104	2.27763061
100.778273	102	1.19777162

Tabla 3.16. Comparación Algoritmo Propuesto vs. Algoritmo Fox. Nivel 3.

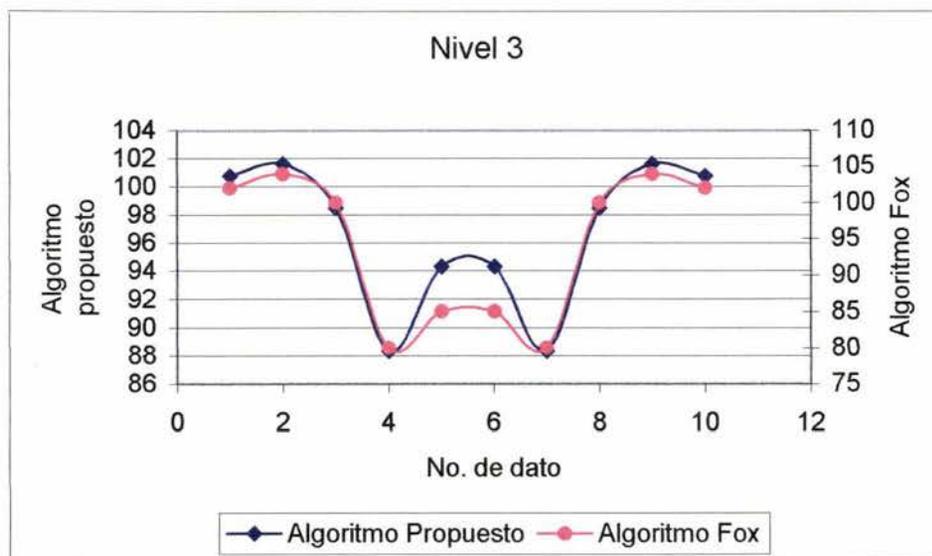


Figura 3.11. Comparación Algoritmo Propuesto vs. Algoritmo Fox. Nivel 3.

Algoritmo propuesto	Algoritmo Fox	Porcentaje de Error (%)
101.966346	106	3.80533375
96.613218	98	1.41508368
87.7438804	80	9.67985046
95.7642648	87	10.0738676
97.4480889	88	10.7364647
97.4480889	88	10.7364647
95.7642648	87	10.0738676
87.7438804	80	9.67985046
96.613218	98	1.41508368
101.966346	106	3.80533375

Tabla 3.17. Comparación Algoritmo Propuesto vs. Algoritmo Fox. Nivel 5.

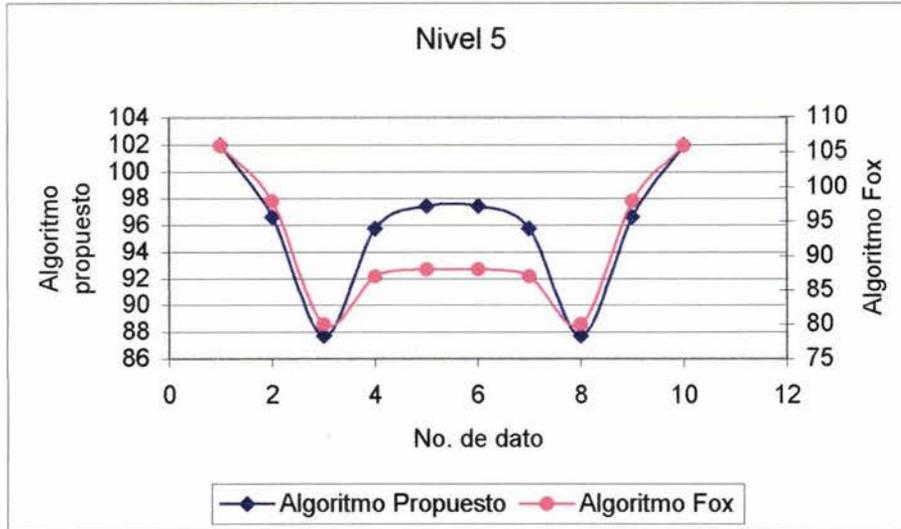


Figura 3.12. Comparación Algoritmo Propuesto vs. Algoritmo Fox. Nivel 5.

3.5.4 EFICIENCIA PARALELEPÍPEDO INFINITO.

Para comprobar la eficiencia del algoritmo propuesto, cuando se utilizó un paralelepípedo como modelo, se compararon sus resultados con los resultados que del algoritmo de modelación de Loke (1995).

Las características del levantamiento y del paralelepípedo a modelar son las mismas que se utilizaron en el subtema 3.4.3.1., la única excepción es que en esta ocasión se utilizaron 8 niveles de profundidad.

Todas las figuras siguientes contienen un eje secundario en la dirección Y, esto al igual que en los subtemas anteriores se hizo para tener un mejor manejo de las escalas y mostrar la similitud entre las respuestas de ambos métodos.

3.5.4.1 ARREGLO WENNER

Las siguientes tablas y datos representan resistividad aparente y fueron obtenidas a partir de un arreglo WENNER.

A continuación se presentan las tablas 3.18, 3.19 y 3.20. Estas tablas se grafican en las figuras 3.13, 3.14 y 3.15, respectivamente. Las figuras antes mencionadas presentan la información para los niveles 1, 5 y 8.

En las tres tablas los errores más altos que pueden encontrarse son del 31.2811404% y 29.2057798%, sin embargo, al igual que en subtemas anteriores, la similitud que existe entre los datos de cada una de las tres figuras es el criterio principal que se usa para afirmar que el algoritmo propuesto puede ser aceptado.

Para una mejor verificación del funcionamiento del algoritmo, en el APÉNDICE G se muestran las tablas y figuras correspondientes a los niveles 2, 3, 4, 6 y 7 de profundidad.

No. de dato	Algoritmo Loke	Algoritmo propuesto	Porcentaje de Error (%)
1	98.94	100.0114	1.08287837
2	99.07	100.017601	0.95649657
3	99.09	100.028367	0.94698413
4	99.11	100.048179	0.94660369
5	99.12	100.087376	0.9759646
6	99.15	100.172361	1.03112523
7	99.21	100.379733	1.17904747
8	99.4	100.969024	1.57849516
9	100.04	102.959754	2.91858661
10	102.4	109.73564	7.16371087
11	107.85	122.515227	13.5977998
12	111.97	135.825556	21.3053102
13	113.61	146.790686	29.2057798
14	113.61	146.790686	29.2057798
15	111.97	135.825556	21.3053102
16	107.85	122.515227	13.5977998
17	102.4	109.73564	7.16371087
18	100.04	102.959754	2.91858661
19	99.4	100.969024	1.57849516
20	99.22	100.379733	1.16885003
21	99.15	100.172361	1.03112523
22	99.12	100.087376	0.9759646
23	99.11	100.048179	0.94660369
24	99.1	100.028367	0.93679775
25	99.09	100.017601	0.93611984
26	99.07	100.0114	0.95023706
27	99	100.007652	1.01783012

Tabla 3.18. Prueba de eficiencia. Nivel 1.

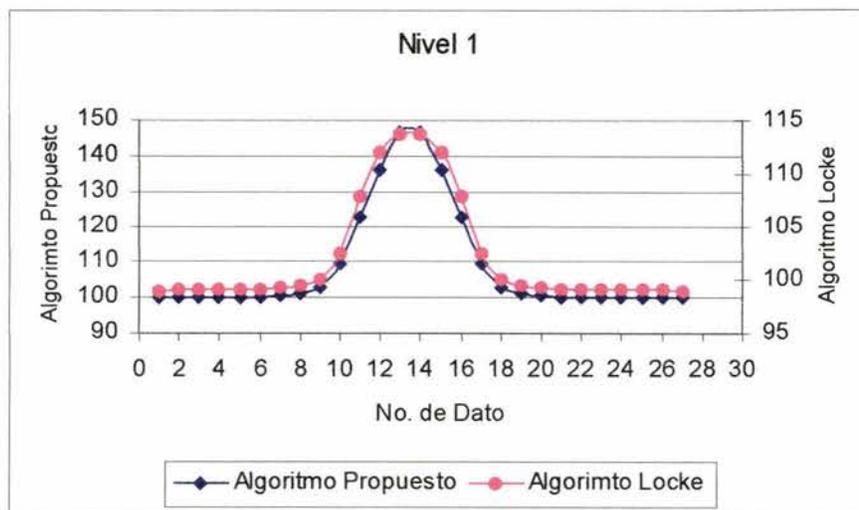


Figura 3.13. Nivel 1. Arreglo WENNER

No. de dato	Algoritmo Loke	Algoritmo propuesto	Porcentaje de Error (%)
1	105.6	107.354728	1.66167448
2	104.68	99.5766821	4.87516038
3	105.05	100.262048	4.55778357
4	107.32	112.484257	4.81201737
5	108.76	125.952619	15.8078516
6	109.79	137.754656	25.4710415
7	110.61	145.210069	31.2811404
8	110.62	145.210069	31.2692727
9	109.8	137.754656	25.4596143
10	108.78	125.952619	15.7865595
11	107.35	112.484257	4.78272663
12	105.11	100.262048	4.61226491
13	104.77	99.5766821	4.95687495
14	105.78	107.354728	1.48868241
15	105.54	113.651314	7.68553543

Tabla 3.19. Prueba de eficiencia. Nivel 5.

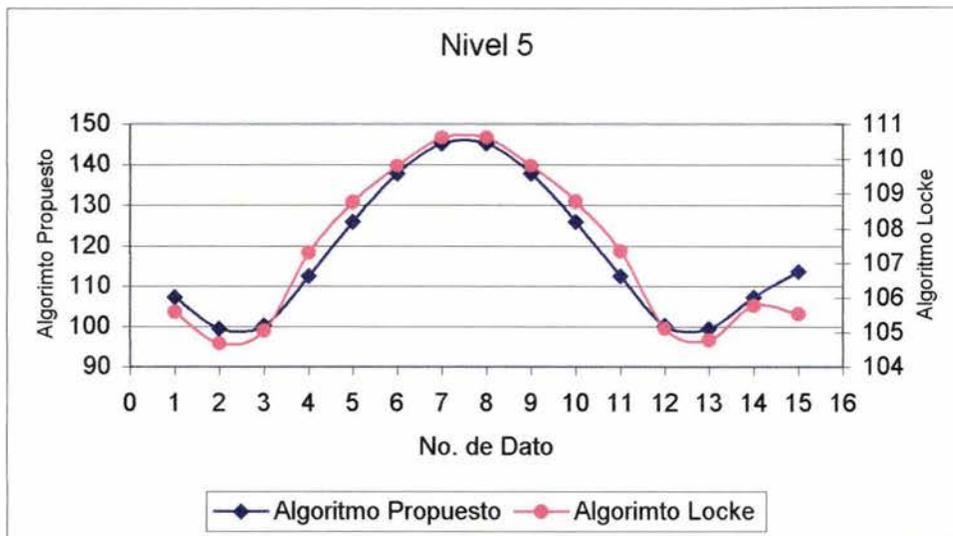


Figura 3.14. Nivel 5. Arreglo WENNER.

No. de dato	Algoritmo Loke	Algoritmo propuesto	Porcentaje de Error (%)
1	105.51	125.646516	19.0849358
2	105.03	123.857811	17.9261268
3	104.69	122.445218	16.9598031
4	105.08	123.857811	17.8700143
5	105.63	125.646516	18.9496504
6	104.9	121.294587	15.6287771

Tabla 3.20. Prueba de eficiencia. Nivel 8.

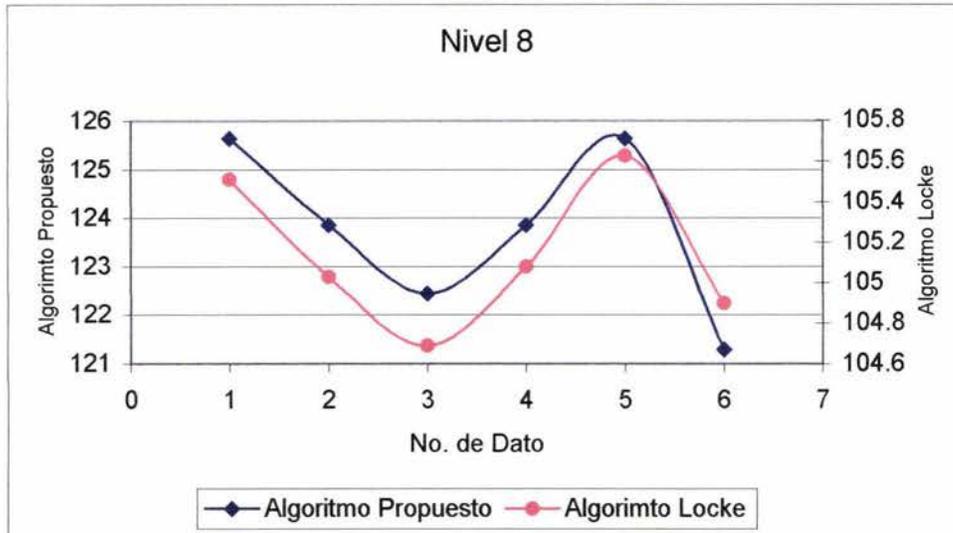


Figura 3.15. Nivel 8. Arreglo WENNER.

3.5.4.2 ARREGLO DIPOLO-DIPOLO

A continuación se presentan las tablas 3.21, 3.22 y 3.23 con sus correspondientes figuras (3.16, 3.17 y 3.18), y que representan la información para los niveles 1, 5 y 8.

En las tablas siguientes se pueden encontrar porcentajes de error como los siguientes: 54.2101616% y 49.9189724%. Al igual que con el arreglo WENNER estos porcentajes pueden parecer bastante altos, sin embargo, la forma de las figuras es muy parecida, lo que indica que el algoritmo propuesto es confiable.

En las figuras 3.17 y 3.18 se observa un mal comportamiento de los datos obtenidos a partir del algoritmo de Loke. Este comportamiento no presenta un comportamiento suavizado de la curva y se observa entre el número de dato 4 y 9 de la figura 3.17 y también entre el dato 11 y el 16 de la figura 3.18. Estos resultados pueden ser ocasionados por problemas de cálculo del algoritmo de Loke, donde tales problemas de cálculo pueden ser producidos por el tamaño de la malla utilizada, dado que este algoritmo está basado en el método de diferencias finitas. Sin embargo, la similitud entre gráficas es grande.

Para una mejor verificación del buen funcionamiento del algoritmo, en el APÉNDICE H se muestran las tablas y figuras correspondientes a los niveles 2, 3, 4, 6 y 7.

No. de dato	Algoritmo Loke	Algoritmo propuesto	Porcentaje de Error (%)
1	99.03	99.9887161	0.9681067
2	98.95	99.9826157	1.04357319
3	98.92	99.9720664	1.06355277
4	98.91	99.952759	1.05425029
5	98.9	99.9148774	1.02616518
6	98.89	99.8338448	0.95443907
7	98.85	99.6408381	0.80003855
8	98.72	99.1194073	0.40458596
9	98.24	97.581567	0.67022902
10	96.62	94.7123253	1.9744097
11	99.57	102.515687	2.95840836
12	117.13	125.379974	7.0434334
13	127.89	134.557956	5.21382122
14	127.89	134.557956	5.21382122
15	117.13	125.379974	7.0434334
16	99.57	102.515687	2.95840836
17	96.62	94.7123253	1.9744097
18	98.24	97.581567	0.67022902
19	98.72	99.1194073	0.40458596
20	98.85	99.6408381	0.80003855
21	98.89	99.8338448	0.95443907
22	98.9	99.9148774	1.02616518
23	98.91	99.952759	1.05425029
24	98.92	99.9720664	1.06355277
25	98.92	99.9826157	1.07421722
26	98.94	99.9887161	1.05995155
27	98.99	99.9924136	1.01264127

Tabla 3.21. Prueba de eficiencia. Nivel 1.

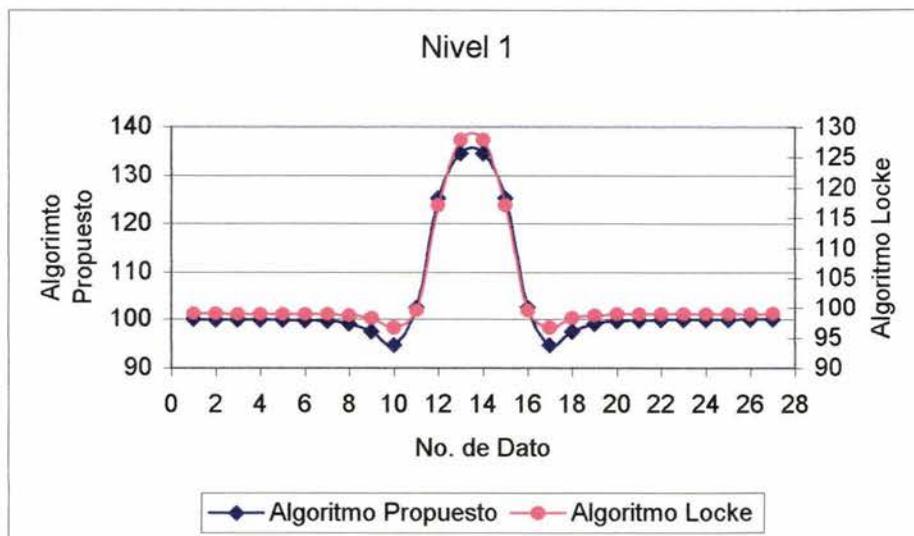


Figura 3.16. Nivel 1. Arreglo DIPOLLO-DIPOLLO.

No. de dato	Algoritmo Loke	Algoritmo propuesto	Porcentaje de Error (%)
1	99.42	98.92671	0.49616773
2	99.04	98.1563844	0.89218051
3	98.63	96.6330128	2.02472592
4	97.85	93.4768942	4.46919343
5	96	87.5451858	8.80709814
6	93.91	87.2317853	7.11129241
7	103.81	125.411921	20.8090948
8	115.16	168.18264	46.0425844
9	125.82	191.793152	52.4345512
10	140.31	203.765587	45.2252776
11	138.47	184.475485	33.2241533
12	138.47	184.475485	33.2241533
13	140.31	203.765587	45.2252776
14	125.82	191.793152	52.4345512
15	115.15	168.18264	46.0552672
16	103.8	125.411921	20.8207334
17	93.9	87.2317853	7.10140011
18	95.98	87.5451858	8.78809566
19	97.82	93.4768942	4.43989549
20	98.57	96.6330128	1.96508793
21	98.92	98.1563844	0.77195267
22	99.15	98.92671	0.22520419
23	99.41	99.3411689	0.06923957

Tabla 3.22. Prueba de eficiencia. Nivel 5.

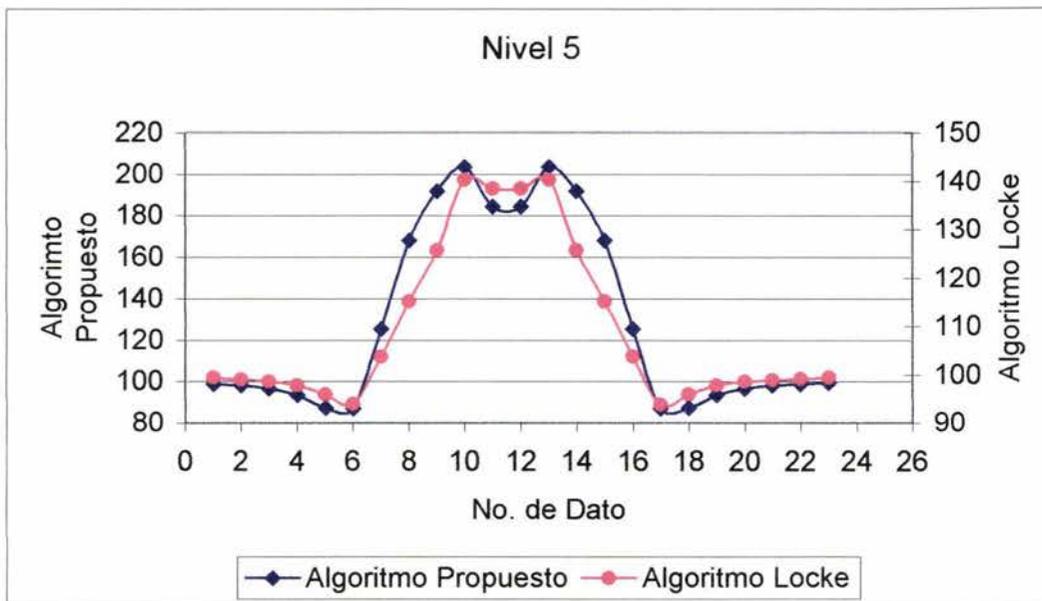


Figura 3.17. Nivel 5. Arreglo DIPOLO-DIPOLO.

No. de dato	Algoritmo Loke	Algoritmo propuesto	Porcentaje de Error (%)
1	97.49	90.2210348	7.45611368
2	95.09	83.6059787	12.0770021
3	93.74	87.3230905	6.84543365
4	105.21	132.475901	25.915693
5	113.59	170.232993	49.8661794
6	119.36	184.018986	54.1714024
7	124.66	179.614436	44.0834558
8	111.06	132.886239	19.6526555
9	99.75	95.7070589	4.05307377
10	97.74	87.2424002	10.7403313
11	99.74	95.7070589	4.04345407
12	111.05	132.886239	19.6634302
13	124.64	179.614436	44.1065758
14	119.33	184.018986	54.2101616
15	113.55	170.232993	49.9189724
16	105.16	132.475901	25.9755617
17	93.65	87.3230905	6.75590978
18	94.94	83.6059787	11.9380886
19	97.2	90.2210348	7.18000538
20	98.4	94.4610507	4.00299724

Tabla 3.23. Prueba de eficiencia. Nivel 8.

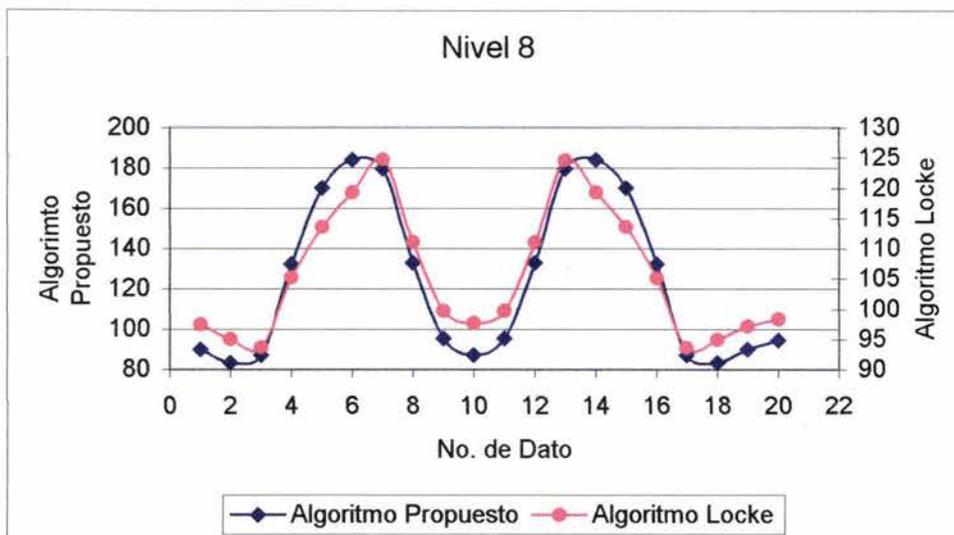


Figura 3.18. Nivel 8. Arreglo DÍPOLO-DÍPOLO.

3.5.4.3 ARREGLO WENNER-SCHLUMBERGER

A continuación se presentan las tablas 3.24, 3.25 y 3.26 con sus correspondientes figuras (3.19, 3.20 y 3.21), y que representan la información para los niveles 1, 5 y 8 de profundidad.

Para una mejor verificación del buen funcionamiento del algoritmo, en el APÉNDICE I se muestran las tablas y figuras correspondientes a los niveles 2, 3, 4, 6 y 7.

No. de dato	Algoritmo Loke	Algoritmo propuesto	Porcentaje de Error (%)
1	98.94	100.0114	1.08287837
2	99.07	100.017601	0.95649657
3	99.09	100.028367	0.94698413
4	99.11	100.048179	0.94660369
5	99.12	100.087376	0.9759646
6	99.15	100.172361	1.03112523
7	99.21	100.379733	1.17904747
8	99.4	100.969024	1.57849516
9	100.04	102.959754	2.91858661
10	102.4	109.73564	7.16371087
11	107.85	122.515227	13.5977998
12	111.97	135.825556	21.3053102
13	113.61	146.790686	29.2057798
14	113.61	146.790686	29.2057798
15	111.97	135.825556	21.3053102
16	107.85	122.515227	13.5977998
17	102.4	109.73564	7.16371087
18	100.04	102.959754	2.91858661
19	99.4	100.969024	1.57849516
20	99.22	100.379733	1.16885003
21	99.15	100.172361	1.03112523
22	99.12	100.087376	0.9759646
23	99.11	100.048179	0.94660369
24	99.1	100.028367	0.93679775
25	99.09	100.017601	0.93611984
26	99.07	100.0114	0.95023706
27	99	100.007652	1.01783012

Tabla 3.24. Prueba de eficiencia. Nivel 1.

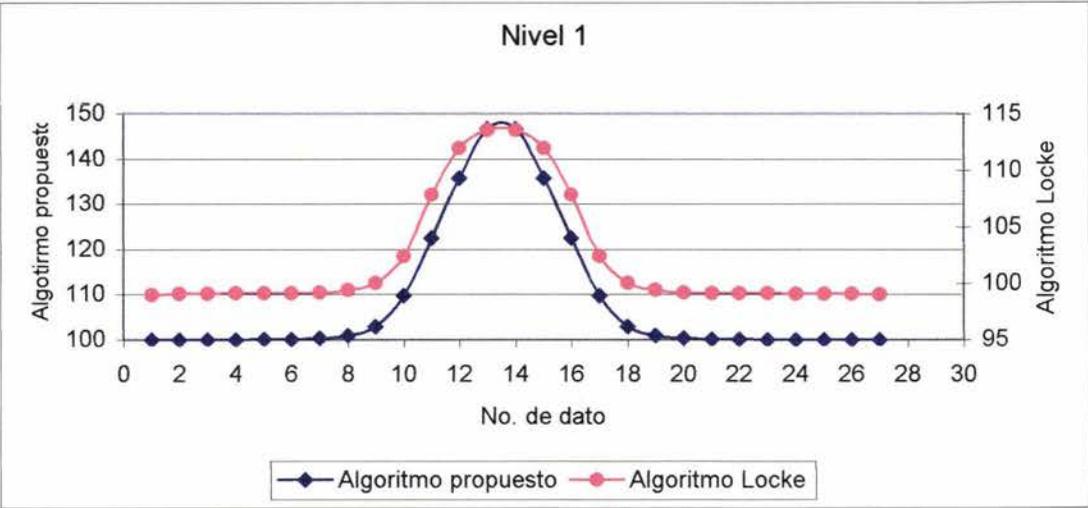


Figura 3.19. Nivel 1. Arreglo WENNER-SCHLUMBERGER.

No. de dato	Algoritmo Locke	Algoritmo propuesto	Porcentaje de Error (%)
1	101.12	108.539267	7.33709199
2	103.57	115.50342	11.5220819
3	106.03	119.19429	12.4156277
4	107.99	117.193342	8.52240229
5	109.27	111.242568	1.80522366
6	109.46	104.612169	4.42886119
7	112.89	117.818113	4.3654118
8	119.53	158.876233	32.9174543
9	119.88	178.280657	48.7159302
10	119.88	178.280657	48.7159302
11	119.53	158.876233	32.9174543
12	112.89	117.818113	4.3654118
13	109.47	104.612169	4.43759154
14	109.29	111.242568	1.78659337
15	108.02	117.193342	8.49226276
16	106.08	119.19429	12.3626415
17	103.65	115.50342	11.436006
18	101.3	108.539267	7.14636468
19	99.95	104.328742	4.3809329

Tabla 3.25. Prueba de eficiencia. Nivel 5.

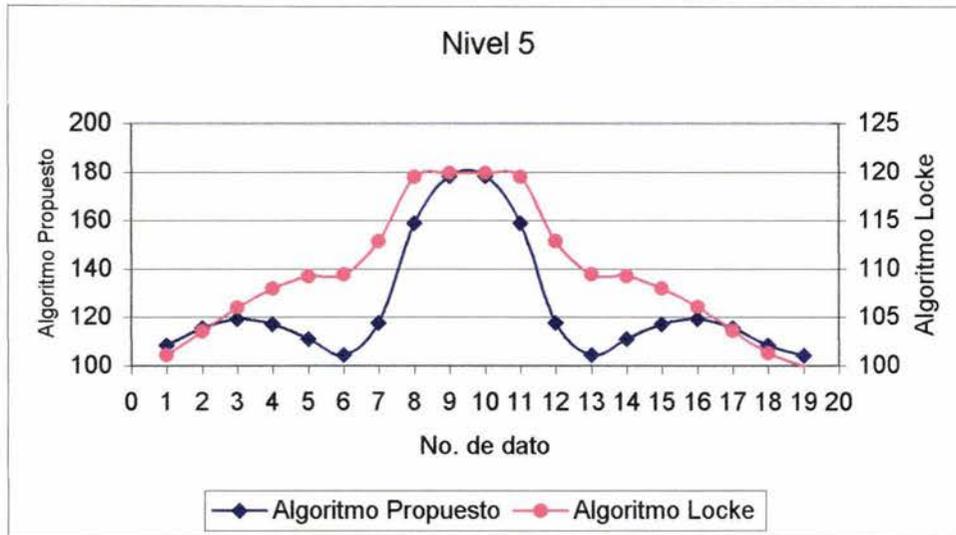


Figura 3.20. Nivel 5. Arreglo WENNER-SCHLUMBERGER.

En la figura 3.20 entre los números de datos 3 y 8 y entre el 11 y el 16 se observa un comportamiento que no conserva la respuesta típica, por lo que se puede argumentar que el algoritmo de Locke puede presentar problemas de eficiencia, debido al refinamiento de la malla empleada.

No. de dato	Algoritmo Loke	Algoritmo propuesto	Porcentaje de Error (%)
1	97.94	87.0313163	11.1381292
2	97.26	83.6538191	13.989493
3	98.05	83.9797978	14.3500278
4	104.21	104.904885	0.66681231
5	115.46	154.965533	34.2157747
6	118.39	177.231338	49.7012741
7	118.4	177.231338	49.6886304
8	115.48	154.965533	34.1925298
9	104.24	104.904885	0.63784067
10	98.1	83.9797978	14.3936822
11	97.35	83.6538191	14.0690096
12	98.1	87.0313163	11.2830619
13	99.93	93.3479614	6.58664926

Tabla 3.26. Prueba de eficiencia. Nivel 8.

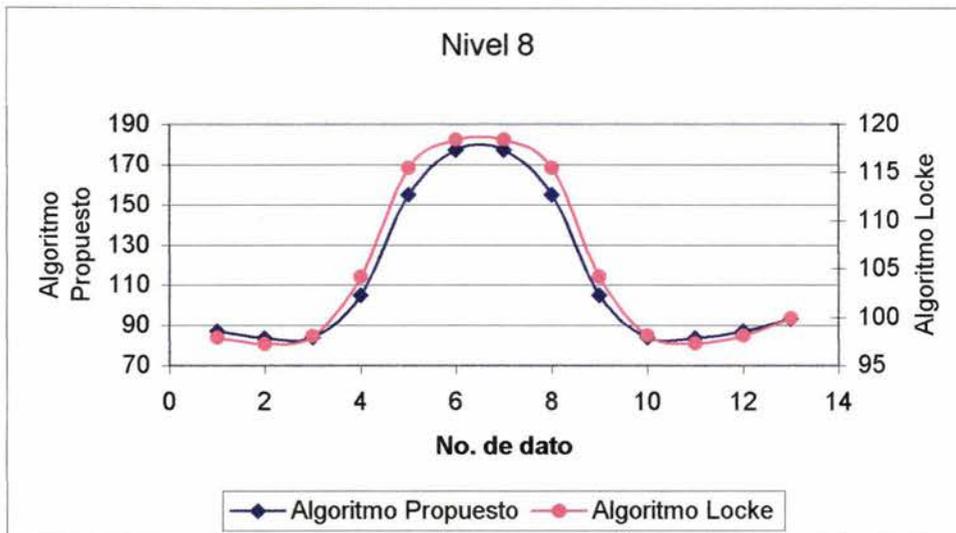


Figura 3.21. Nivel 8. Arreglo WENNER-SCHLUMBERGER.

Para el arreglo WENNER-SCHLUMBERGER los valores más altos de error son los siguientes: 34.2157747% y 49.7012741%. De igual forma que los dos arreglos anteriores los errores son altos pero la forma de las figuras es muy similar.

Por lo tanto, se puede concluir que dado que todas las figuras antes mostradas son muy similares y tomando en cuenta que el algoritmo de Loke es un algoritmo que está comercializado, es decir, que su buen funcionamiento ha sido probado, se puede concluir que el algoritmo propuesto en este trabajo tiene una eficiencia aceptable, puesto que aún cuando los errores son altos, siempre se obtienen resultados lógicos.

3.5.5 RESTRICCIONES DEL ALGORITMO DE MODELACIÓN

Hasta el momento se ha comprobado que los resultados del algoritmo de modelación propuesto pueden ser aceptados por la similitud que guardan éstos con los resultados que presentan otros algoritmos de modelación, sin embargo hay ciertas restricciones que los modelos que se utilicen deben de respetar. Las restricciones más importantes son las siguientes:

1. Los cuerpos a modelar deben ser paralelepípedos, donde se deben conservar las siguientes relaciones de longitudes:

Para un modelado 2D

$$\left. \begin{array}{l} \frac{a}{Lx} \\ \frac{a}{Lz} \end{array} \right\} < 1$$

donde “a” es la abertura que existe entre los electrodos y Lx y Lz son las longitudes en las direcciones “X” y “Z”. Recordar que la longitud en la dirección “Y”, para un modelo 2D del subsuelo, se toma como infinito en este algoritmo de modelación.

Para un modelo 3D

$$\left. \begin{array}{l} \frac{a}{Lx} \\ \frac{a}{Ly} \\ \frac{a}{Lz} \end{array} \right\} < 1$$

donde “a” es la abertura que existe entre los electrodos y Lx, Ly y Lz son las longitudes en las direcciones “X”, “Y” y “Z”.

2. El techo de los cuerpos no puede estar colocado en la superficie o muy cerca a ella. Las razones de esta restricción son las siguientes:
 - a. Si el techo se encontrara en la superficie traería consigo la aparición de una singularidad en la integral a resolver, que no se considera en el algoritmo.
 - b. La aparición de la pequeña capa superior, provoca mucha variación en los datos, ya que los electrodos nunca se colocan en el cuerpo que se supone está expuesto en superficie, es decir, no hay contacto galvánico entre el electrodo y el cuerpo; por lo tanto, estos resultados estarían falseados.

CAPITULO 4. APLICACIONES DEL MODELADO ELÉCTRICO

En los tres capítulos anteriores se ha presentado la teoría y los resultados del algoritmo de modelación propuesto. También se ha concluido que aún cuando los errores de cálculo que se presentan en la prueba de eficiencia pueden ser muy altos, el hecho de que la forma de todas las gráficas sean muy similares ayuda a afirmar que la respuesta del algoritmo propuesto es aceptable.

En el presente capítulo se comparan los resultados de la modelación propuesta con datos sintéticos y datos de campo, pero en esta ocasión no se presentan tablas de datos, sino pseudosecciones de resistividades aparentes e imágenes eléctricas, que son el resultado final de un trabajo de Tomografía Eléctrica. Con estas dos pruebas se pretende reafirmar el buen funcionamiento del algoritmo.

Como parte final del capítulo se realiza un experimento con el cual se pretende mostrar que la presencia o no presencia de un cuerpo puede causar malas interpretaciones cuando se hace una inversión de datos, donde la teoría de inversión utiliza una Tierra 2-D. Con esta prueba también se pretende demostrar que las técnicas de interpretación de datos deben evolucionar de tal forma que estas técnicas de interpretación estén diseñadas para una Tierra 3-D.

4.1 EJEMPLOS SINTÉTICOS

En este tema se utilizarán dos modelos que ya conocidos.

Uno de ellos está basado completamente en el modelo del paralelepípedo con ancho infinito. Se utilizó exactamente la misma información (características del cuerpo y levantamiento) para llevar a cabo esta prueba. La única diferencia que existe en esta prueba es que en esta ocasión se calcularon 8 niveles de profundidad. Al igual que en el subtema 3.4.3.1 los resultados del algoritmo propuesto son comparados con el algoritmo de modelación de Loke (algoritmo realizado para una modelación 2-D).

El otro ejemplo sintético se basa en el modelo estudiado por Fox y que se estudió en el subtema 3.5.3 (dique vertical). También para este ejemplo se utilizaron las mismas características del modelo y del sondeo.

Cabe señalar que la asignación de los puntos de atribución para cada valor de resistividad aparente se llevó a cabo conforme a lo que se muestra en la figura 4.1 y que cada punto de atribución depende del tipo y dimensiones del arreglo de electrodos utilizado.

Las pseudosecciones de resistividad aparente fueron obtenidas haciendo uso del software SURFER en su versión 7.0. La interpolación se realizó utilizando una interpolación tipo TRIANGULAR, que fue el tipo de interpolación que mejor representó las pseudosecciones de resistividad aparente, para el modelo del paralelepípedo. Para el modelo del dique se utilizó una interpolación tipo KRIGING.

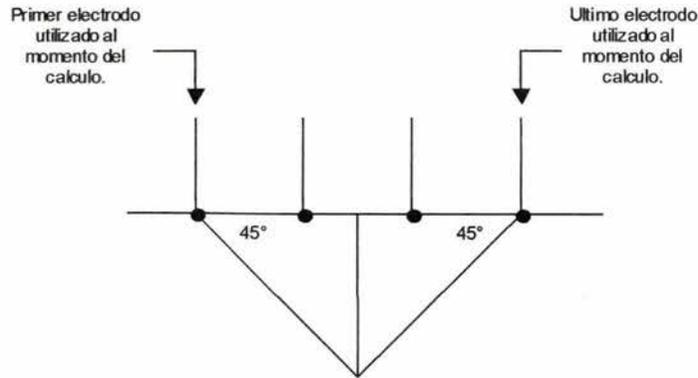


Figura 4.1. Asignación de los puntos de atribución.

Los ejes que se presentan en las pseudosecciones corresponden al eje X y Z. Ambos se encuentran expresados en metros.

Las escalas gráficas que se observan a la derecha de las figuras representan resistividad aparente y tiene por objetivo mostrar cuanto varía un modelado con respecto del otro.

4.1.1 ALGORITMO DE LOKE vs ALGORITMO PROPUESTO

A continuación se repiten las características del modelo que se utilizó para realizar las pseudosecciones de resistividad aparente:

- g) Prisma de 12 metros de largo con 3 metros de espesor. Este prisma se considero con ancho infinito en la dirección Y.
- h) La profundidad del techo de cuerpo es de tres metros.
- i) 30 electrodos, 8 niveles de profundidad y una abertura de 3 metros entre cada electrodo.
- j) La resistividad del medio es de 100 Ohm-metro y la del cuerpo de 500 Ohm-metro.
- k) El cuerpo se colocó entre el electrodo número 13 y el electrodo número 17 (figura 4.2).

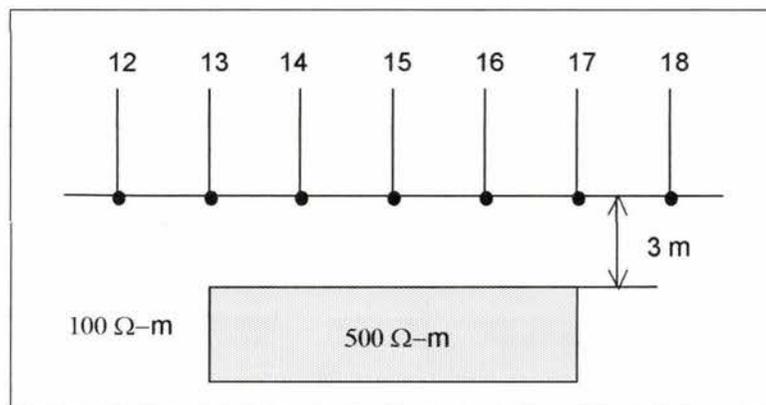


Figura 4.2. Modelo utilizado en la comparación del algoritmo de Loke con el algoritmo propuesto.

Las pseudosecciones de resistividad aparente del algoritmo de Loke y del algoritmo propuesto se presentan por arreglos de electrodos usados.

4.1.1.2 ARREGLO WENNER

Las pseudosecciones de resistividad aparente siguientes se obtuvieron utilizando el arreglo WENNER.

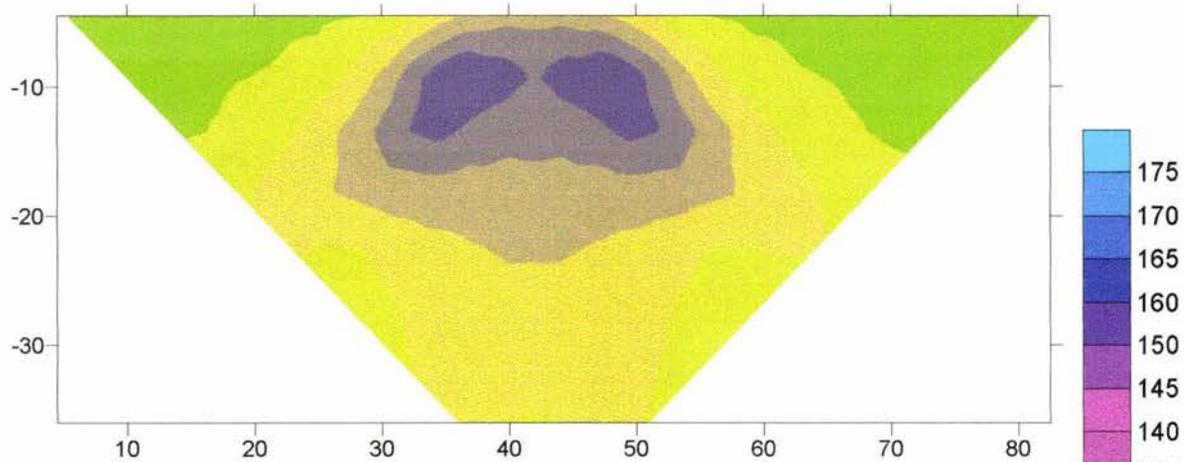


Figura 4.3. Pseudosección obtenida a partir del algoritmo de Loke. Arreglo WENNER.

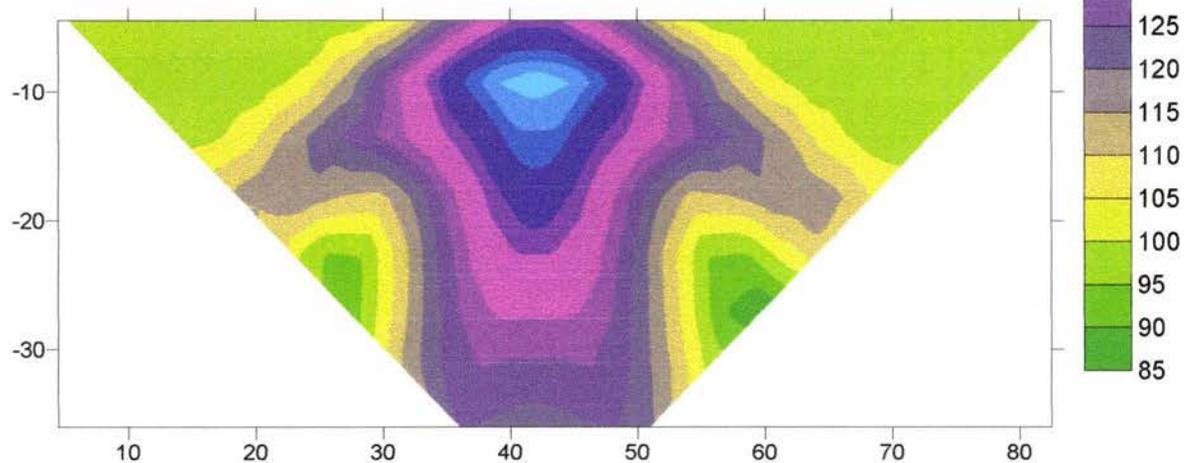


Figura 4.4. Pseudosección obtenida a partir del algoritmo propuesto. Arreglo WENNER.

En la figura 4.3 se podría interpretar la presencia de dos cuerpos que se encuentran entre los 32 y 52 metros en la dirección "X" y entre los 6 y 14 metros de profundidad. Esto puede ser causado, tal vez, por un error que exista en el algoritmo de Loke.

La figura 4.4 muestra la presencia de un cuerpo entre los 6 y 16 de profundidad y entre los 36 y 48 en la dirección "X".

La posición espacial mostrada anteriormente depende de los puntos de atribución a los que fueron adjudicados todos los datos de resistividad aparente.

4.1.1.3 ARREGLO DIPOLO-DIPOLO

Las pseudosecciones de resistividad aparente siguientes se obtuvieron utilizando el arreglo DIPOLO-DIPOLO.

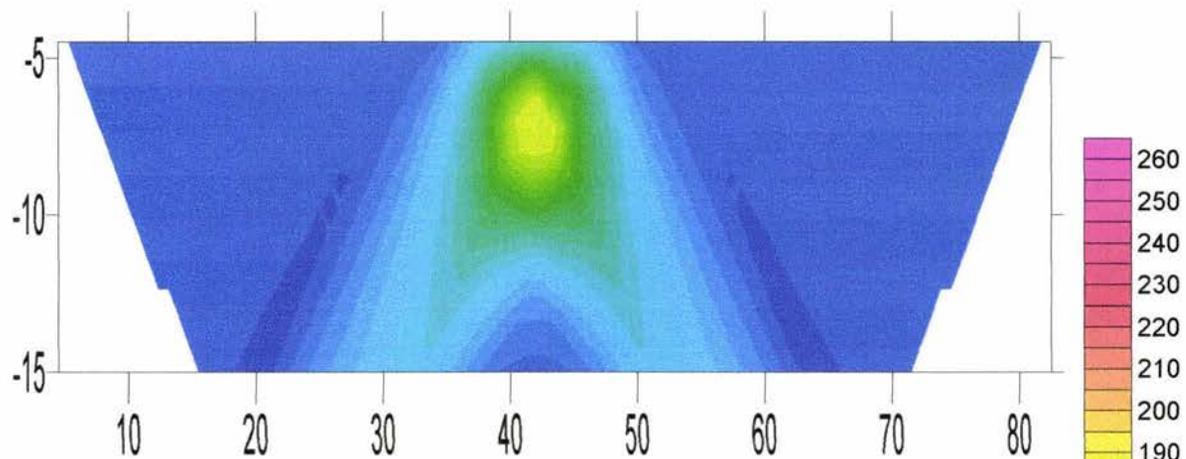


Figura 4.5. Pseudosección obtenida a partir del algoritmo de Loke. Arreglo DIPOLO-DIPOLO.

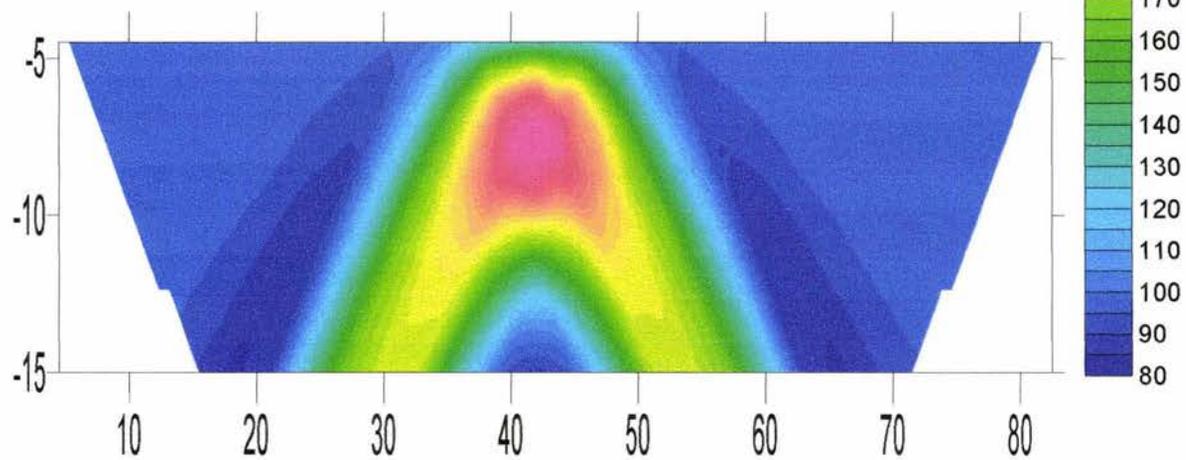


Figura 4.6. Pseudosección obtenida a partir del algoritmo propuesto. Arreglo DIPOLO-DIPOLO

La figura 4.5 muestra la presencia de un cuerpo entre los 6 y 9 metros de profundidad y entre los 38 y 46 metros en la dirección "X".

La figura 4.6 muestra la presencia de un cuerpo entre los 6 y 9 metros de profundidad y entre los 38 y 46 metros en la dirección "X".

La localización de este cuerpo también depende de los puntos de atribución que se utilizaron.

En esta ocasión los dos algoritmos presentan un solo cuerpo y puede observarse en las figuras 4.5 y 4.6 un mismo comportamiento, lo cual confirma el buen funcionamiento del algoritmo propuesto.

4.1.1.4 ARREGLO WENNER-SCHLUMBERGER

Las siguientes pseudosecciones se obtuvieron usando un arreglo WENNER-SCHLUMBERGER.

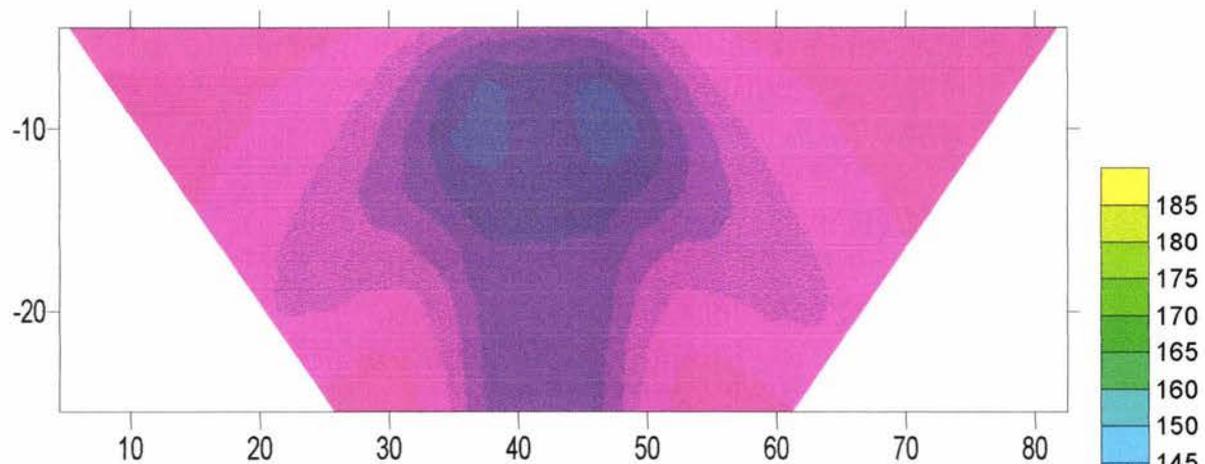


Figura 4.7. Pseudosección obtenida a partir del algoritmo de Loke. Arreglo WENNER-SCHLUMBERGER

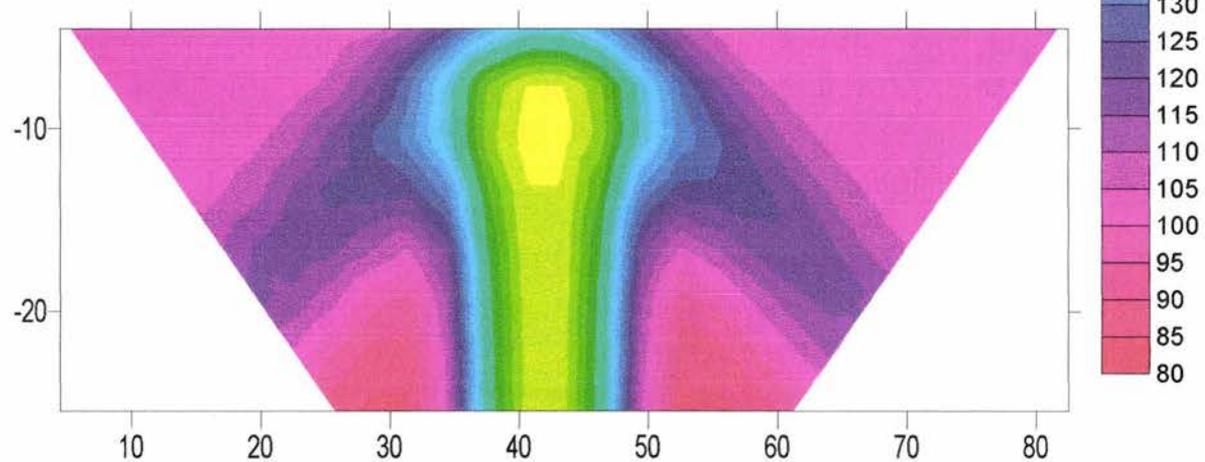


Figura 4.8. Pseudosección obtenida a partir del algoritmo propuesto. Arreglo WENNER-SCHLUMBERGER

En la figura 4.7 se muestra la presencia de un cuerpo que se podría colocar entre los 6 y 14 metros de profundidad y entre los 34 y 50 metros en la dirección "X".

En la figura 4.8 se puede apreciar la presencia de un cuerpo entre los 36 y 48 metros en la dirección “X”, sin embargo, la anomalía se extiende mucho en la dirección “Z”, lo cual hace muy difícil de apreciar la dimensión que tiene en dicha dirección

Al igual que los casos anteriores esta localización depende de los puntos de atribución a los que se asigno cada valor de resistividad aparente.

Hay que hacer notar que el algoritmo de Loke vuelve a presentar lo que podría ser interpretado como la presencia de dos cuerpos, cosa que no sucede en el algoritmo propuesto.

4.1.2. ALGORITMO DE FOX vs ALGORITMO PROPUESTO

Las características del modelo utilizado son las mismas que se utilizaron en el subtema 3.5.3. Fox solamente utilizó un arreglo DIPOLO-DIPOLO. Las pseudosecciones de resistividad aparente, obtenidas a partir de los dos algoritmos, del arreglo DIPOLO-DIPOLO son:

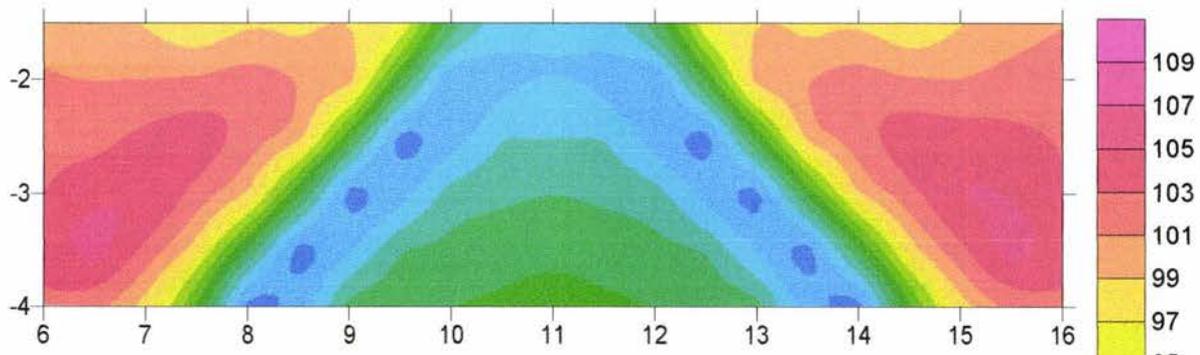


Figura 4.9 . Pseudosección de resistividad aparente del algoritmo de Fox.

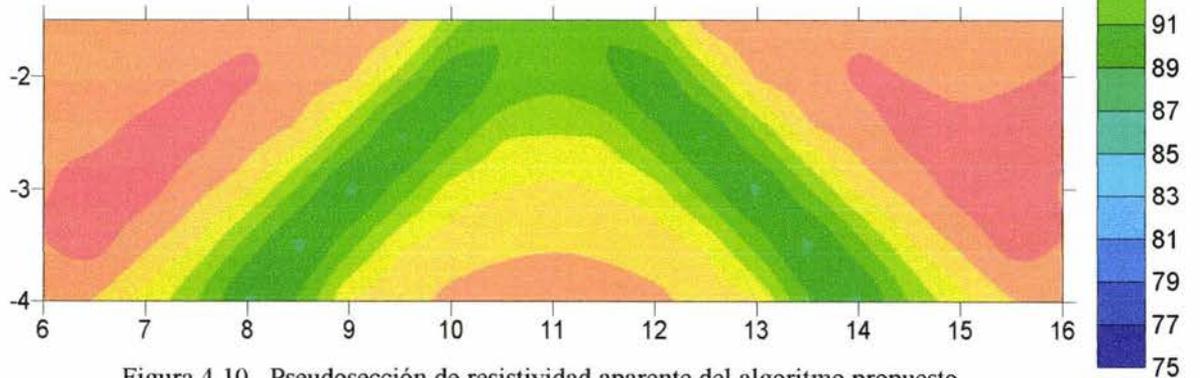


Figura 4.10 . Pseudosección de resistividad aparente del algoritmo propuesto.

En las dos figuras anteriores se observa un mismo comportamiento, también hay que recordar que en la prueba de eficiencia, para este modelo, los errores entre estos dos algoritmos fueron bastante bajos, por lo que, el comportamiento similar de las

pseudosecciones de resistividad aparente es otra muestra clara del buen funcionamiento del algoritmo de modelación propuesto.

4.2 EJEMPLO DE CAMPO

A partir de imágenes eléctricas obtenidas en campo, en las cuales se observa la presencia de cavernas, se sometió al algoritmo de modelación propuesto a la modelación de dos cuerpos que tienen aproximadamente las mismas dimensiones y características resistivas de los cuerpos que se aprecian en las imágenes eléctricas antes mencionadas.

Los datos obtenidos de la modelación de dichos cuerpos serán invertidos haciendo uso del Software RES2DINV, software que tiene por objetivo la inversión de datos obtenidos en campo. Con esto se pretende mostrar que la modelación que se propone en este trabajo arroja buenos resultados cuando se modelan estructuras geológicas reales.

4.2.1 INTRODUCCIÓN

La Universidad Nacional Autónoma de México y la Delegación Álvaro Obregón de la Ciudad de México firmaron en 1995 un programa de investigación para localizar zonas de alto riesgo, en particular en zonas minadas sobre las cuales existen muchos asentamientos humanos.

4.2.2 DELEGACIÓN ÁLVARO OBREGÓN

La Ciudad de México esta localizada en el Cinturón Volcánico Trans-Mexicano (CVTM), en el centro de México. El CVTM es una provincia Pilo-Cauternaria calco-alcalina que atraviesa México de Oeste a Este. La región comprende la mayoría del vulcanismo histórico y actual de México e incluye estratovolcanes adesíticos-dasíticos, de vulcanismo riolítico y mayores centros reolíticos. La Ciudad de México se localiza en una cuenca a una altura de 2200 m s.n.m. y aproximadamente a 300 Km al este de la Trinchera de América Central. Las sierras volcánicas que rodean la cuenca son: La Sierra Nevada al Este, La Sierra de Guadalupe al Norte, La Sierra de Chichinautzin al Sur y la Sierra de las Cruces al Oeste.

Los diferentes procesos humanos que definen el desarrollo urbano e industrial influyen en la calidad de vida de la población.

En los últimos 35 años la insuficiencia de viviendas para la población se ha incrementados en la zona. En los años cuarenta y cincuenta y a causa del crecimiento anárquico de las áreas urbanas, la mayoría del material utilizado con propósitos de construcción se obtuvieron de minas excavadas en las cierras del oeste. Dichos materiales fueron empleados para la construcción de casas, departamentos y edificios del gobierno en el centro de la Ciudad de México. Cuando la industria decayó a principios de los años sesenta,

la mayoría de estas minas, terminaron en cavidades que fueron abandonadas o rellenas con desperdicios. Debido a su tamaño, posteriormente estas cavidades fueron utilizadas por familias enteras como refugios, o tenían otros usos por la gente que vivía en los alrededores. Las colonias de esta Delegación, se han asentado sobre zonas minadas en los pasados 20 años. Actualmente, la localización de éstas estructuras es desconocida. Muchos accidentes han ocurrido desde entonces; las cavernas se han colapsado y hogares completos literalmente han sido tragados por el terreno.

4.2.3 MARCO GEOLÓGICO

El área estudiada se encuentra al suroeste del Valle de México (figura 4.9). El relieve es abrupto y compuesto de una serie de colinas y barrancas profundas. Las rocas superficiales son depósitos de materiales ígneos arrojados por volcanes ubicados dentro de la Sierra de las Cruces. Estos eventos geológicos produjeron avalanchas de material piroclástico, tobas y brechas que se positaron en las faldas de la Sierra. Las rocas volcánicas que conforman el relieve del área de estudio son de la era Cenozoica, y es conocida como la formación Tarango. Este horizonte geológico es una secuencia compuesta de losas de arena, piedra pómez interestratificadas con arcillas y calizas. La piedra pómez se produjo violentas explosiones y depositadas en zonas bajas. La columna estratigráfica de la formación Tarango se divide en dos unidades. La Unidad A es la más joven, se encuentra en las pendientes de las barrancas y consiste de fragmentos de rocas arrastrados por corrientes de agua. Estos deslizamientos fueron producidos por la saturación del agua de lluvia llevándolos hacia abajo a gran velocidad por efecto de gravedad. Estas rocas están compactadas y hospedadas de una matriz de arena con esquinas angulosas. La Unidad B es una secuencia piroclástica, un producto de erupciones volcánicas. La piedra pómez, travertino, arena y material aluvial son los principales tipos de roca que forman esta unidad. Dichas rocas se utilizaron para utilizar ladrillos. Esta unidad forma la “corona” o partes más altas de las colinas de esta área. La industria minera explotó las secciones más bajas en las arenas pumisíticas. Las minas principales se localizan en esta zona, y la posición estratigráfica define la calidad y dureza de los materiales. Las cavidades encontradas dentro de esta unidad tiene rangos de profundidad de 5 a 8 metros. El tamaño de las cámaras principales es variable, de 2 a 3 y 30 metros.

4.2.4 CALLE PUERTO MADERO

Esta línea de estudio se realizó en la Calle Puerto Madero de la Delegación Álvaro Obregón, la cual se puede localizar en la figura 4.11a.

Para la toma de datos se usaron 26 electrodos con un espaciamiento de 4 metros y once niveles de profundidad.

La imagen eléctrica obtenida a partir del levantamiento antes mencionado se muestra en la figura 4.12. Para la obtención de esta imagen se utilizó un arreglo WENNER-SCHLUMBERGER.

En la figura 4.12 se observa la presencia de un cuerpo que se encuentra aproximadamente a 13 metros de profundidad y un largo de aproximadamente 24 metros. Después de realizado el estudio se supo que ésta caverna está rellena, por tal razón se observa una anomalía de baja resistividad.

A partir de la figura 4.12 se determinó que para la modelación de la estructura geológica se utilizaría el modelo que se muestra en la figura 4.13.

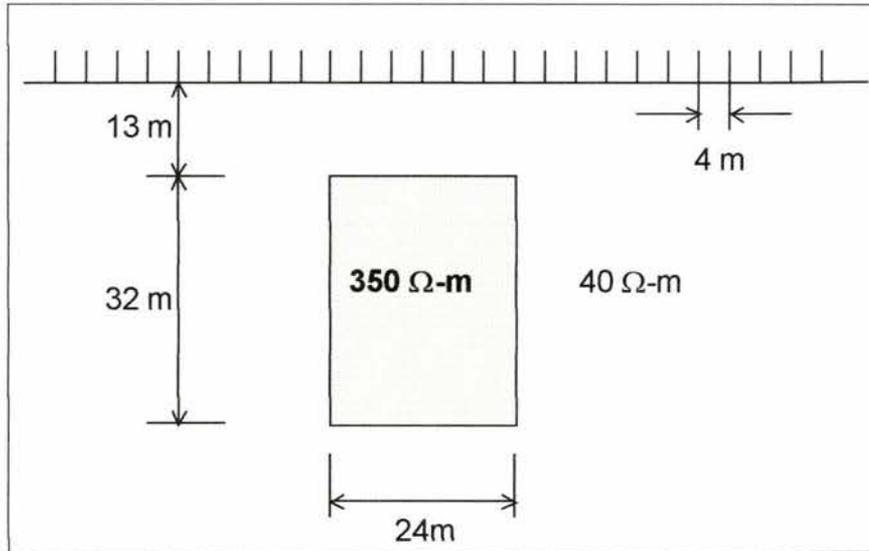


Figura 4.13. Modelo de la caverna encontrada en la Calle Puerto Madero.

La inversión de los datos obtenidos del modelado se muestra en la figura 4.14.

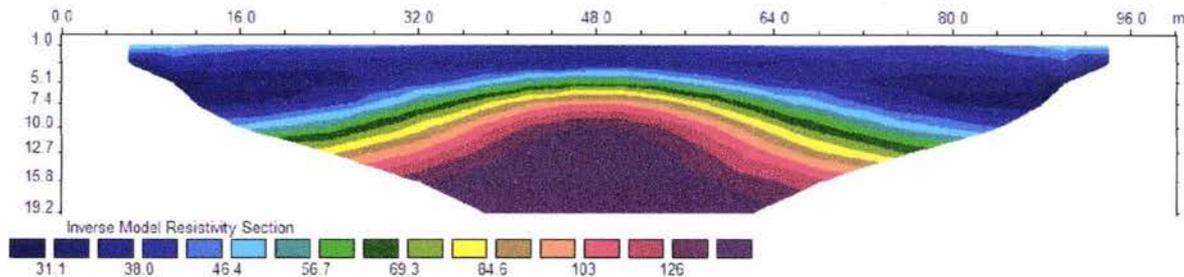


Figura 4.14. Imagen eléctrica del modelo de la caverna encontrada en la Calle Puerto Madero.

De las figuras 4.13 y 4.14 se puede concluir que los resultados que arroja la modelación son bastante buenos, ya que la forma de la anomalía es muy parecida a la que se muestra en la figura 4.12. Además las dimensiones de la caverna modelada son muy parecidas a las de la imagen original.

4.2.5 CALLE PEDRO AGUIRRE DE LA CERDA

La localización de la calle se muestra en la figura 4.11b. Para realizar la construcción de la imagen eléctrica se utilizaron 46 electrodos con una abertura de 5 metros entre cada uno y 11 niveles de profundidad.

La imagen eléctrica obtenida a partir del levantamiento anterior, sin tomar en cuenta la topografía del sitio, se muestra en la figura 4.15. Para la obtención de esta imagen se utilizó un arreglo WENNER-SCHLUMBERGER.

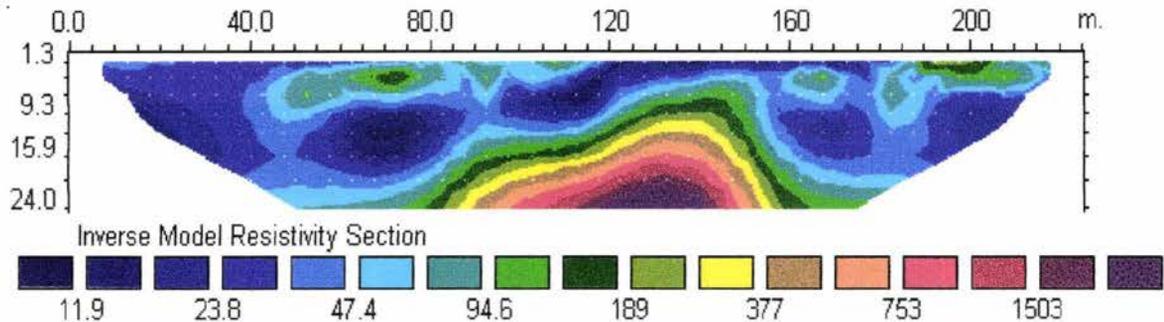


Figura 4.15. Imagen eléctrica obtenida en la Calle Pedro Aguirre de la Delegación Álvaro Obregón. Sin tomar en cuenta la Topografía.

En la figura 4.15 se observa la presencia de un cuerpo donde su largo es aproximadamente de 30 a 40 metros y profundidad del techo del cuerpo aproximadamente a 17 metros.

La figura 4.16 es el resultado de la inversión de los datos de campo cuando se tomó en cuenta la topografía.

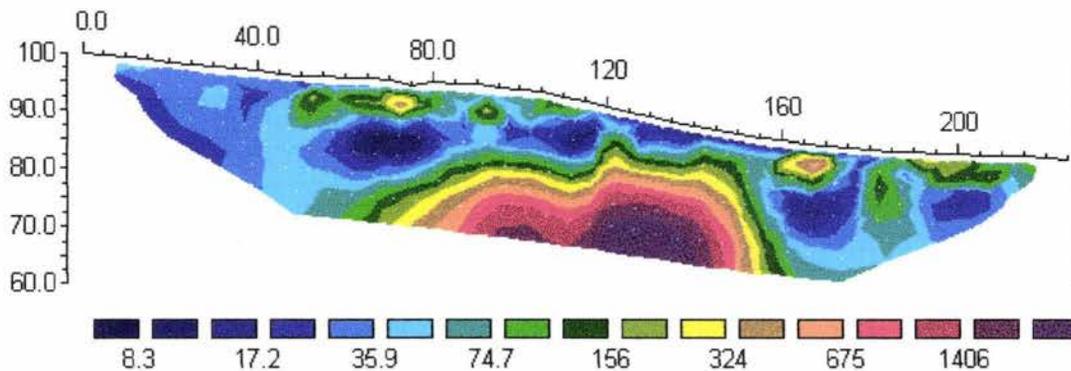


Figura 4.16. Imagen eléctrica obtenida en la Calle Pedro Aguirre de la Delegación Álvaro Obregón. Tomando en cuenta la topografía.

A partir de la figura 4.16 se obtuvo el siguiente modelo (figura 4.17). Este modelo contempla la presencia de un segundo cuerpo. La imagen eléctrica (figura 4.18), obtenida a partir de la modelación, es comparada con la figura 4.15, puesto que ninguna de las dos utiliza la topografía del lugar.

Hay que hacer notar que la imagen eléctrica resultante de la modelación de la caverna propuesta no presenta la variación topográfica dado que la teoría esta basada en cálculos que se realizan en el plano $z=0$.

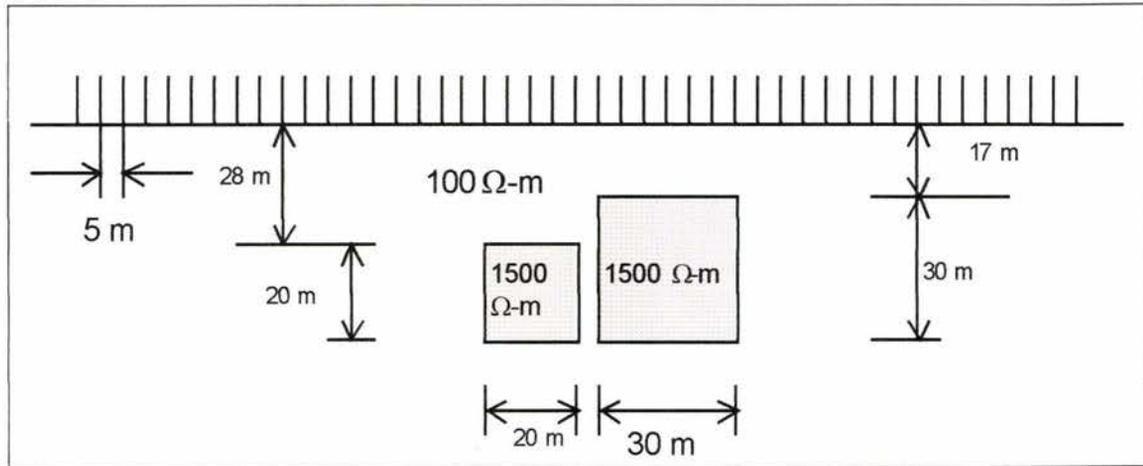


Figura 4.17. Modelo de cueva para la calle Pedro Aguirre.

La inversión de los datos obtenidos a partir de la modelación se presentan en la figura 4.18.

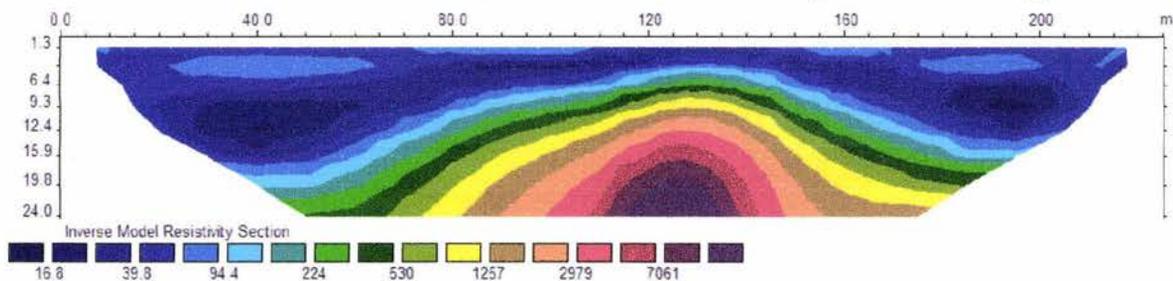


Figura 4.18. Imagen eléctrica obtenida a partir del modelo de cueva para la calle Pedro Aguirre.

Al comparar las figuras 4.15 y 4.18 se puede ver que el comportamiento de las dos imágenes eléctricas es muy similar, sin embargo, hay que resaltar el hecho de que la resistividad que se presenta en la imagen 4.18 es mucho mayor que la que se presenta en la figura 4.15.

4.2.6 DISCUSIÓN DE RESULTADOS

Al igual que sucedió en el capítulo anterior, los valores de resistividad aparente no son los mismos cuando se comparan las figuras correspondientes a los diferentes estudios, pero como ya se ha dicho las anomalías son similares y eso es lo ayuda a afirmar que la modelación propuesta es adecuada.

Con estos ejemplos se ha tratado de demostrar que la modelación que se propone puede ser utilizada para la modelación de estructuras geológicas, que son las estructuras de interés en la prospección eléctrica.

4.3 MODELACIÓN 2-D vs MODELACIÓN 3-D

Este tema tiene por objetivo el demostrar que las interpretaciones de pseudosecciones de resistividad aparente, donde la teoría de inversión considera una Tierra 2-D como modelo inicial, pueden originar una mala localización de estructuras. Para demostrar lo antes mencionado se usó un modelo 3-D del subsuelo. Los datos obtenidos por la modelación fueron invertidos para obtener sus imágenes eléctricas, y a través de estas se pretende mostrar que las nuevas técnicas de interpretación deberían basarse en una teoría donde el modelo inicial de la Tierra fuese 3-D.

El modelo utilizado es el mismo que se utilizó en el subtema 3.4.3.2, la única diferencia es que en esta ocasión se calcularon 7 líneas de sondeo con separación de 2 metros entre cada una. El modelo utilizado se puede apreciar en la figura 4.19.

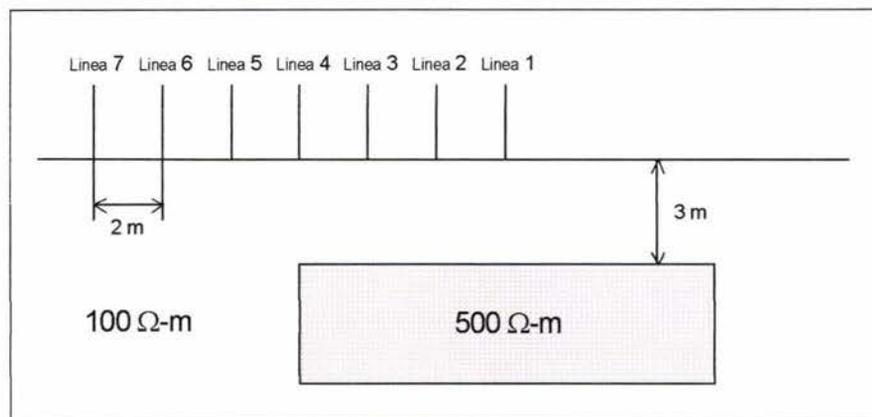


Figura 4.19. Modelo 3-D del subsuelo.

Es claro que las imágenes eléctricas que se obtienen a partir de las líneas de sondeo 1, 2, 3 y 4 deben contener en ellas la presencia de un cuerpo, puesto que estas líneas pasan sobre él.

Las líneas 5, 6 y 7 son las líneas de mayor interés en esta prueba, puesto que la presencia de un cuerpo en dichas imágenes comprueba que éste puede ser detectado a cierta distancia. Por lo tanto, se mostraría que en los trabajos de prospección eléctrica, en los cuales solamente se tiene una línea de estudio, las interpretaciones de dicha línea deben considerar que tal vez la línea no pasó sobre el cuerpo y que solamente se están viendo los efectos del mismo a cierta distancia.

A continuación se presentan las imágenes eléctricas para las líneas 7 de figura 4.19. Los resultados serán mostrados según el tipo de arreglo de electrodos utilizado.

El software usado para la inversión es el mismo que se utilizó en tema anterior, RES2DINV. También hay que hacer énfasis en que la teoría en la que está basada la inversión de dicho software considera un modelo 2-D de la Tierra.

4.3.1 ARREGLO WENNER

La figura 4.20 presenta las imágenes eléctricas para las 7 líneas cuando se utilizó un arreglo WENNER.

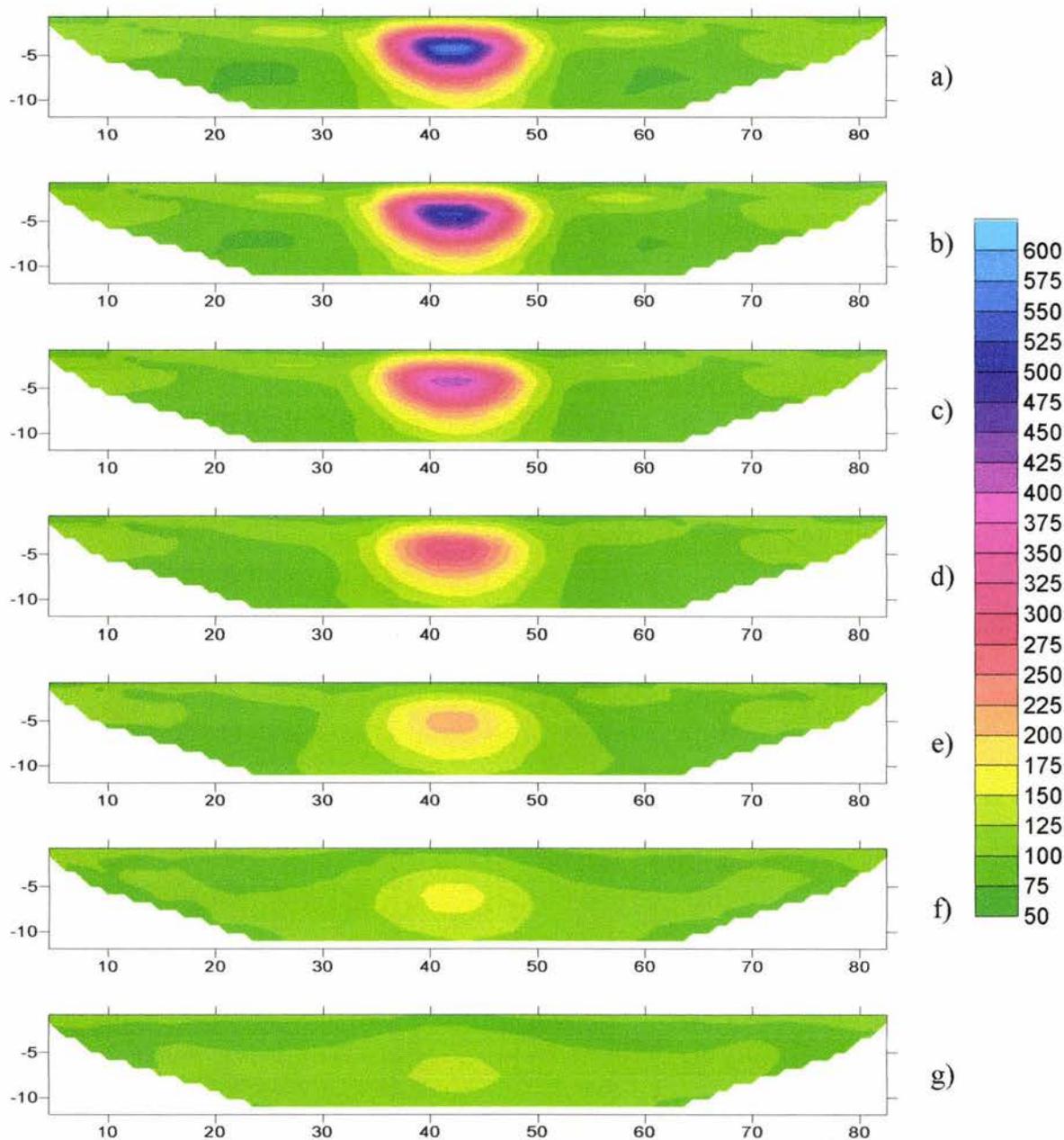


Figura 4.20. ARREGLO WENNER. a) Línea 1, b) Línea 2, c) Línea 3, d) Línea 4, e) Línea 5, f) Línea 6, g) Línea 7.

En las 7 figuras anteriores se observa como la detectabilidad del cuerpo va disminuyendo conforme las líneas se van alejando del centro del mismo. Hay que hacer notar que en la línea 7 todavía se alcanza a distinguir un poco la presencia del cuerpo.

4.3.2 ARREGLO DIPOLO-DIPOLO

La figura 4.21 presenta las imágenes eléctricas para las 7 líneas cuando se utilizó un arreglo DIPOLO-DIPOLO.

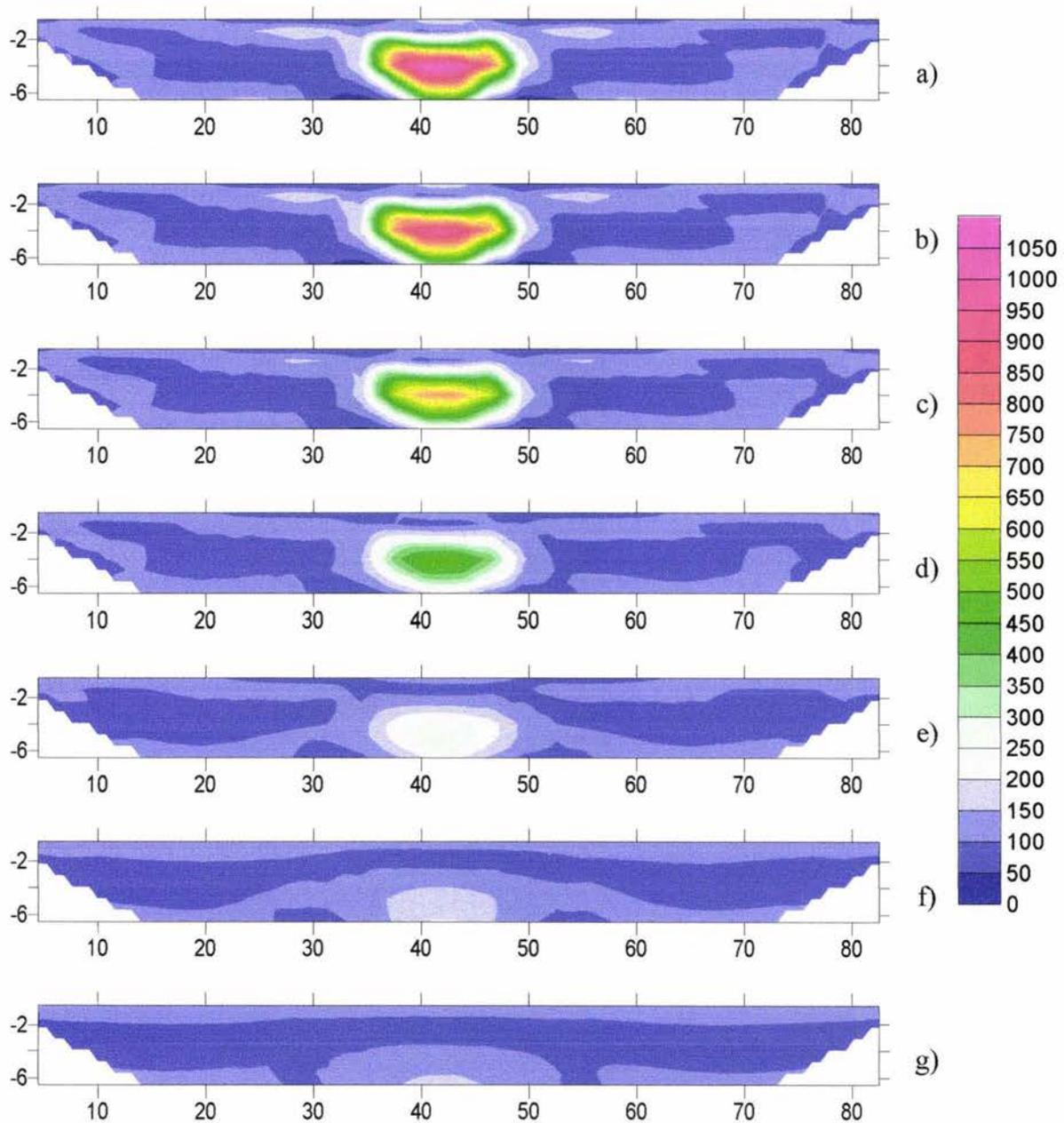


Figura 4.21. ARREGLO DIPOLO DIPOLO. a) Línea 1, b) Línea 2, c) Línea 3, d) Línea 4, e) Línea 5, f) Línea 6, g) Línea 7.

En las 7 figuras anteriores se observa como la detectabilidad del cuerpo va disminuyendo conforme las líneas se van alejando del centro del mismo. También en las líneas 6 y 7

todavía se alcanza a distinguir muy poco la presencia del cuerpo. Además en las imágenes se observa que el techo del cuerpo se profundiza conforme las líneas se alejan del cuerpo.

4.3.3 ARREGLO WENNER-SCHLUMBERGER

La figura 4.22 presenta las imágenes eléctricas para las 7 líneas cuando se utilizó un arreglo WENNER-SCHLUMBERGER.

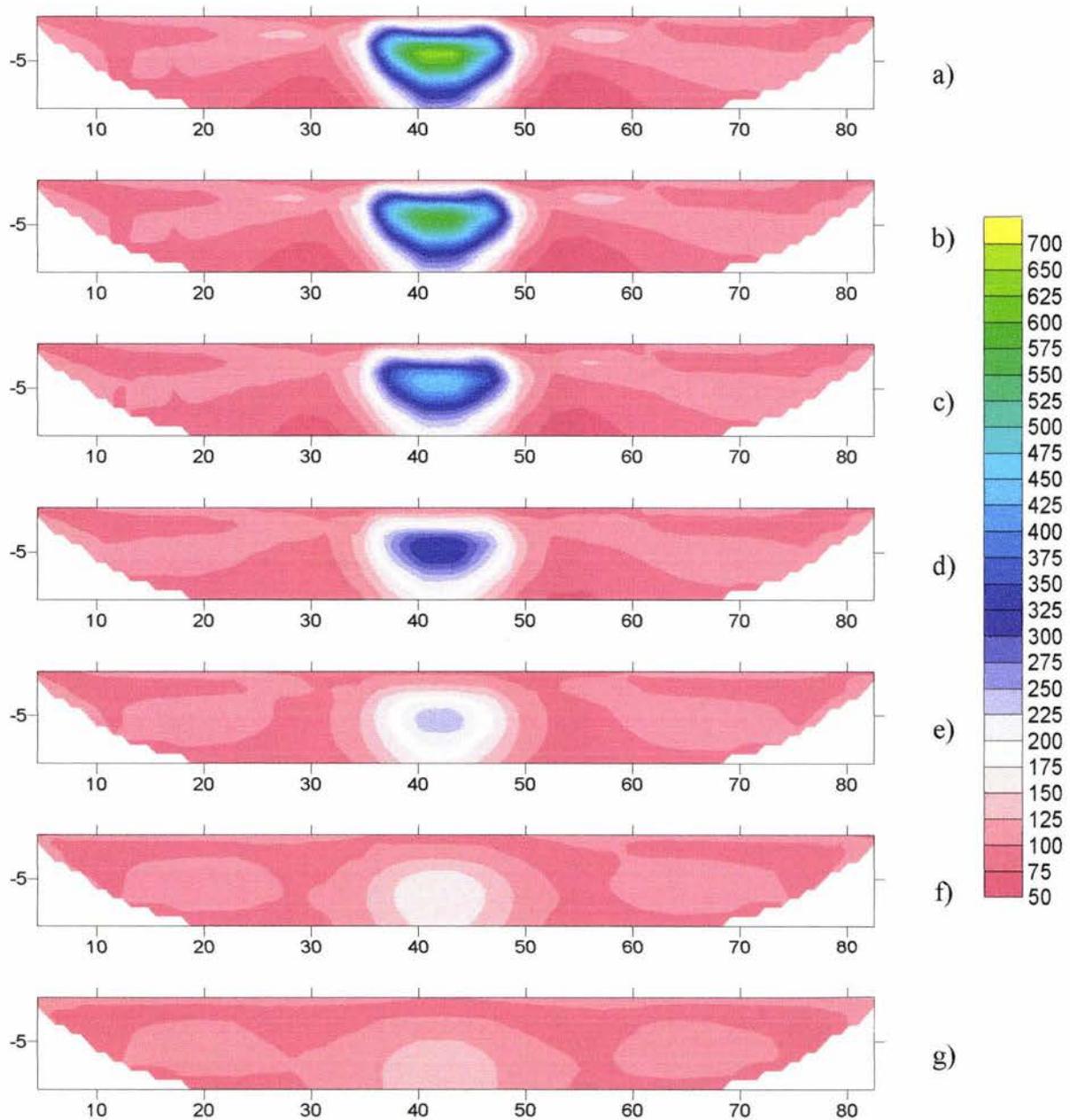


Figura 4.22. ARREGLO WENNER-SCHLUMBERGER. a) Línea 1, b) Línea 2, c) Línea 3, d) Línea 4, e) Línea 5, f) Línea 6, g) Línea 7.

De la misma forma que sucedió en los arreglos de electrodos anteriores, en las 7 figuras anteriores se observa como la presencia del cuerpo va desapareciendo conforme las líneas se van alejando del centro del mismo. En las líneas 6 y 7 todavía se puede percibir la presencia del cuerpo. Hay que hacer notar que la presencia del cuerpo también se profundiza un poco conforme las líneas de sondeo se alejan del cuerpo y que la resistividad del mismo disminuye al mismo tiempo.

Con las figuras 4.20–4.22 se trató de demostrar que las técnicas de interpretación basadas en una inversión, cuya teoría fue diseñada para una Tierra 2-D, puede causar la mala localización de un cuerpo.

Por lo tanto, lo que queda es migrar a nuevas técnicas de interpretación, en donde la teoría se base en una Tierra 3-D, con la cual se puedan evitar problemas como los que en este tema se presentaron.

CAPITULO 5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5.1 CONCLUSIONES

La Tomografía Eléctrica ha demostrado ser de mucha utilidad cuando se desea conocer la distribución espacial de la resistividad en el subsuelo, puesto que se tienen imágenes donde se pueden apreciar muy bien las propiedades físicas y dimensiones de cuerpos que se encuentran bajo la superficie de la Tierra. Además, tiene la ventaja de que su interpretación hace uso total e integral de todos los datos obtenidos en cada estudio, contrariamente a como sucede con el SEV y el perfilaje eléctrico donde se interpretan individualmente los SEV's o líneas de perfilaje.

El hecho de haber utilizado la hipótesis de dispersión débil y no hacer uso de las corrientes secundarias que se generan en el semiespacio, es la causa principal de los errores obtenidos, sin embargo, la modelación propuesta nunca reflejó un comportamiento alejado del fenómeno físico modelado. En cambio esta hipótesis permitió una formulación numérica rápida y confiable.

El uso de funciones de Green en el cálculo del potencial eléctrico ha demostrado ser un método que es confiable, eficiente y rápido.

El método de integración numérica que utiliza las cuadraturas de Gauss mostró ser muy eficiente en el cálculo de integrales triples, dado que el tiempo de cálculo solamente toma algunos segundos.

El cambio de coordenadas que se propuso ayudó a que el algoritmo de modelación respetara la teoría en la cual trabaja el método numérico de integración utilizado, con lo que se logró que fuera más eficiente.

El lenguaje de programación FORTRAN 90 es una herramienta bastante útil y sencilla en el desarrollo de algoritmos.

Las propiedades de simetría y reciprocidad ayudaron a comprobar que la lógica del algoritmo numérico fuera correcta. Estas dos propiedades fueron de gran utilidad ya que también ayudaron a mostrar que los modelos utilizados se localizaban exactamente en la posición en la que fueron colocados.

Las pruebas de eficiencia demostraron que con la teoría y algoritmo de modelación nunca se obtuvieron resultados ilógicos, aún cuando los errores que existen entre datos son bastante grandes (especialmente para cuerpos resistivos). La forma de las gráficas siempre presentó un comportamiento suave, que es lo observado generalmente en estos métodos prospectivos.

Las pseudosecciones de resistividad aparente son también otra forma de demostrar que la modelación propuesta es aceptable. Estas pseudosecciones muestran claramente el buen funcionamiento de la teoría y del algoritmo de modelación. También es posible afirmar que existen algunos errores en el algoritmo de modelación de Loke, dado que este algoritmo, en algunos casos, propone la presencia de dos cuerpos, cuando se sabe que solamente existe uno.

Las imágenes eléctricas, obtenidas a partir de la modelación, son otra forma de demostrar el buen funcionamiento de la teoría y del algoritmo de modelación. Desafortunadamente los valores de resistividad que arroja la inversión superan los valores resistividad con los que fue hecha la modelación, sin embargo, la buena localización de los cuerpos y el buen contraste de resistividad que reportan las imágenes eléctricas, son suficientes para la delimitación de un cuerpo anómalo.

La modelación también ha demostrado arrojar buenos resultados cuando se pretende modelar estructuras geológicas reales. Los buenos resultados que arroja la modelación de las cavernas son tal vez los mejores ejemplos del buen funcionamiento de la teoría y del algoritmo de modelación.

También es posible afirmar que las actuales técnicas de interpretación, que están basadas en un teoría que considera unan Tierra 2-D como modelo inicial, no son la optimas, ya que se puede interpretar la presencia de un cuerpo, aún cuando éste no esta presente.

Esto da la pauta para afirmar que las técnicas de interpretación de imágenes eléctricas deben de evolucionar, de tal forma que las teorías de inversión y la toma de datos de campo consideren una Tierra 3-D como modelo inicial.

También con el presente trabajo se ha dado el primer paso para que el Departamento de Geofísica Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México cuente con sus propios algoritmos de interpretación, cuando se usa la Tomografía Eléctrica.

El Departamento de Geofísica de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México cuenta con un pequeño algoritmo que es capaz de llevar a cabo la modelación de estructuras 2-D y 3-D que se encuentren rodeados por un medio encajonante, con el cual se puede ayudar a los alumnos de la Carrera a tener un mejor entendimiento de esta técnica de toma de datos (Tomografía Eléctrica) y de las ventajas que se tiene al tener una imagen que contenga las características resistivas y espaciales de las estructuras geológicas.

Además con este algoritmo será posible tener una mejor planeación de futuros convenios del Departamento de Geofísica, es decir, se podrán determinar cuales son las mejores características que debe tener un levantamiento, dependiendo del la profundidad y del objetivo de investigación.

5.2 RECOMENDACIONES

Como ya se mencionó, ya se cuenta con un pequeño algoritmo de modelación, sin embargo, éste se podría mejorar bastante incluyendo algunos de los aspectos siguientes:

1. Incluir en la teoría de modelación la presencia de lo que se podría llamar como Topografía, o dicho de otra manera, que los cálculos del potencial eléctrico puedan ser calculados sobre una superficie $z \neq 0$.
2. Tomar en cuenta en la teoría de modelación que los cuerpos a modelar puedan estar expuestos en la superficie.
3. Mejorar la eficiencia del algoritmo de modelación. Puesto que éste podría ser corregido de tal forma que el tiempo de cálculo sea menor.
4. Intentar disminuir los errores entre datos para los distintos modelos.

También se recuerda que se deben tomar en cuenta los dos puntos que se mencionan en el subtema 3.5.5, esto con el objetivo de que las modelaciones requeridas den mejores resultados.

También se recomienda continuar con la investigación para desarrollar nuevas y rápidas técnicas de interpretación, ya que esto es posible gracias a la tecnología actual, puesto que las modelaciones no podrían haberse realizado sin el gran avance de la misma.

ESTA TESIS NO SALE
DE LA BIBLIOTECA

BIBLIOGRAFÍA

- BACKUS, G; GILBERT, F; The resolving Power of Gross Earth Data, 1968, Geophysical Journal of Royal Astronomical Society, 169-205.
- BARKER, R, A simple algorithm for electrical imaging of subsurface, 1992, First Break, Vol. 10, No. 2, 53-62.
- CIFUENTES, GERARDO, Interpretación de Anomalías Geoeléctricas por Análisis de Fourier, Tesis de Licenciatura, Facultad de Ingeniería, U.N.A.M., 1994.
- DEY, A; MORRISON, H.F; Resistivity modeling for arbitrarily shaped three-dimensional structures, 1979, Geophysics, 44, 753-780.
- ESKOLA, L., Geophysical interpretation Using Integral Equations, 1992, Chapman and Hall.
- ESPARZA-HERNANDEZ, J.F., Suficiencia de las ecuaciones de Maxwell en relación con los problemas electromagnéticos inversos, Tesis Doctoral, CICESE.
- ESPARZA, J.F.; GOMEZ-TREVIÑO, E., 1-D inversion of resistivity and induced polarization data for the least number of layers, 1997, Geophysics, 62, 1724-1729.
- FOX, R.C.; et al, Topographic effects in resistivity and induced-polarization surveys, 1980, Geophysics, 45, 75-93.
- GARCÍA MERAYO, FÉLIX, Fortran 90, España, Paraninfo, 1999, 277 pp.
- GOMEZ-TREVIÑO, E.; et al, Imaging low-frequency and dc electromagnetic fields using a simple linear approximation, 2001, Geophysics, 66, 1067-1081.
- GHOSH, D.P., The application of linear filter theory to the direct interpretation of Geoelectric Sounding Measurement, 1971, Geophysical prospecting, 19, 192-217.
- GRIFFITHS, D.H.; TURNBULLLO, J.; A multi-electrod array for resistivity surveying, 1985, First Break, Vol. 3, No. 7, 16-20.
- IAKUBOVSKII, IU. V.; LIAJOV, L. L., Exploración Eléctrica, 3a Edición, España, Reverté, 1980, 421 pp.
- LIPSCHUTZ, SEYMOUR; POE, ARTHUR T., Programación con Fortran, México, McGraw-Hill, 1979, 314 pp.
- LOKE, M.H.; BAKER, R.D.; Least-squares deconvolution of apparent resistivity pseudosections, 1995, Geophysics, 60, 1682-1690.
- LOKE, M.H.; BAKER, R.D.; Least-squares inversion of apparent resistivity pseudosection by a quasi-Newton Method, 1996, Geophysical Prospecting, 44, 131-152.
- INMAN, J.R., Resistivity inversion with ridge regression, 1975, Geophysics, 40, 798-817.

- LESUR, V., et al, 2-D and 3-D interpretation of electrical tomography measurements, Part 1: The forward problem, 1999, Geophysics, 64, No. 2.
- LESUR, V., et al, 2-D and 3-D interpretation of electrical tomography measurements, Part 2: The inverse problem, 1999, Geophysics, 64, No. 2.
- MEISSENER, LOREN P., Fortran 90, USA, PWS Publishing Company, 1995, 679 pp.
- MUFTY, I.R., Finite difference resistivity modeling for arbitrarily shaped two-dimensional structures, 1976, Geophysics, 41, 62-78.
- NAKAMURA, SHOICHIRO, Métodos Numéricos aplicados con Software, México, Prencice may, 1992, 570 pp.
- OLDENBUR, W.D. The interpretation of direct current resistivity measurements, Geophysics, 43, 610-625.
- ORELLANA, ERNESTO, Prospección Geoeléctrica en Corriente Continua, 2ª edición, España, Paraninfo, 1982, 569 pp.
- PEREZ-FLORES, M.A., Inversión rápida en 2-D de datos de resistividad, magnetotélúricos y electromagnéticos de fuente controlada a bajo número de inducción, 1995, Tesis Doctoral, CICESE.
- PIESSENS, R., QUADPACK, USA, Spring-Verlag, 1983.
- PRESS, H. WILLIAM, el al., Numerical Recipes in Fortran, 2ª edición, U.S.A., Cambridge University Press, 1992, 963 pp.
- SCHEID, FRANCIS; DICOSTANZO, ROSA ELENA, Métodos Numéricos, 2ª Edición, México, McGraw-Hill, 1991, 709 pp.
- SHIMA, H.; SAITO, H., Application of resistivity tomography for detectio of faults an evaluation of their hydraulic continuity: some numerical experiments, 1988, 58th SEG meeting, Ahaheim expanded abstracts, 204-207.
- TEJERO ANDRADE, ANDRÉS, Modelación de la respuesta magnetométrica empleando aproximación de Born con conductividad de referencia variable, Tesis de Doctorado, Instituto de Geofísica, U.N.A.M., 2002
- URBIETA GOMEZ, JAVIER, La Tomografía Eléctrica en los Métodos de Corriente Continua, Tesis de Licenciatura, Facultad de Ingeniería, U.N.A.M., 2001.
- ZHODY, A.A.R., Automatic interpretation of Schlumberger sounding curves, using modified Dar Zarrouk function, 1975, Geological survey bulletin, 1313-E.

APÉNDICE A.

MEDIO ESTRATIFICADO. PROPIEDAD DE RECIPROCIDAD.

Los datos presentados son resistividades aparentes.

Datos con los electrodos en su posición normal					
Nivel	Wenner	Nivel	Dipolo-Dipolo	Nivel	Wenner-Schlumberger
1	100.1843647	1	99.82748147	1	100.1843647
2	101.4613981	2	99.37533774	2	100.931983
3	104.0156439	3	98.73333146	3	102.4733485
4	107.1367188	4	98.36172903	4	104.585389
5	111.2555684	5	99.01332631	5	107.0771187
6	116.4574737	6	101.1539711	6	110.0829557
7	120.6225836	7	104.4163814	7	113.6243961
8	123.3334911	8	107.8629699	8	117.3762221
9	126.4343375	9	110.6887683	9	120.5180725
10	129.7442827	10	112.5612276	10	122.3005301
11	130.9604397	11	113.5542153	11	123.1921594
12	130.7160384	12	114.0086404	12	124.221021
13	131.5289814	13	114.4778366	13	126.099565
14	133.5690287	14	115.7124249	14	129.0146775
15	135.0118857	15	118.5201747	15	132.4331097
16	135.6688178	16	123.3042943	16	135.5884259

Datos con los electrodos intercambiados (Reciprocidad)					
Nivel	Wenner	Nivel	Dipolo-Dipolo	Nivel	Wenner-Schlumberger
1	100.1843647	1	99.82748147	1	100.1843647
2	101.4613981	2	99.37533774	2	100.931983
3	104.0156439	3	98.73333146	3	102.4733485
4	107.1367188	4	98.36172903	4	104.585389
5	111.2555684	5	99.01332631	5	107.0771187
6	116.4574737	6	101.1539711	6	110.0829557
7	120.6225836	7	104.4163814	7	113.6243961
8	123.3334911	8	107.8629699	8	117.3762221
9	126.4343375	9	110.6887683	9	120.5180725
10	129.7442827	10	112.5612276	10	122.3005301
11	130.9604397	11	113.5542153	11	123.1921594
12	130.7160384	12	114.0086404	12	124.221021
13	131.5289814	13	114.4778366	13	126.099565
14	133.5690287	14	115.7124249	14	129.0146775
15	135.0118857	15	118.5201747	15	132.4331097
16	135.6688178	16	123.3042943	16	135.5884259

APÉNDICE B

DIQUE CONDUCTOR. PROPIEDAD DE SIMETRÍA Y RECIPROCIDAD ARREGLO WENNER.

Los valores que se presentan son de resistividad aparente.

Wenner			
Nivel	Propiedad de Simetría	Nivel	Propiedad de reciprocidad
1	99.98075311	1	99.98075311
1	99.96676344	1	99.96676344
1	99.93724422	1	99.93724422
1	99.86562398	1	99.86562398
1	99.65127242	1	99.65127242
1	98.73080485	1	98.73080485
1	89.50638905	1	89.50638905
1	102.5688364	1	102.5688364
1	61.96661986	1	61.96661986
1	102.5688364	1	102.5688364
1	89.50638905	1	89.50638905
1	98.73080485	1	98.73080485
1	99.65127242	1	99.65127242
1	99.86562398	1	99.86562398
1	99.93724422	1	99.93724422
1	99.96676344	1	99.96676344
1	99.98075311	1	99.98075311
2	99.57772264	2	99.57772264
2	99.09575056	2	99.09575056
2	97.59969826	2	97.59969826
2	90.28207372	2	90.28207372
2	100.8176785	2	100.8176785
2	102.3276641	2	102.3276641
2	78.90757434	2	78.90757434
2	78.90757434	2	78.90757434
2	102.3276641	2	102.3276641
2	100.8176785	2	100.8176785
2	90.28207372	2	90.28207372
2	97.59969826	2	97.59969826
2	99.09575056	2	99.09575056
2	99.57772264	2	99.57772264

APÉNDICE C

DIQUE RESISTIVO. PROPIEDAD DE SIMETRÍA Y RECIPROCIDAD. ARREGLO DIPOLO-DIPOLO.

Los valores que se presentan son de resistividad aparente.

Dipolo-Dipolo			
Nivel	Propiedad de Simetría	Nivel	Propiedad de reciprocidad
1	9.981257413	1	9.981257413
1	9.967899973	1	9.967899973
1	9.940167752	1	9.940167752
1	9.874657334	1	9.874657334
1	9.688064701	1	9.688064701
1	8.971252913	1	8.971252913
1	4.126534972	1	4.126534972
1	43.70911938	1	43.70911938
1	12.38310606	1	12.38310606
1	43.70911938	1	43.70911938
1	4.126534972	1	4.126534972
1	8.971252913	1	8.971252913
1	9.688064701	1	9.688064701
1	9.874657334	1	9.874657334
1	9.940167752	1	9.940167752
1	9.967899973	1	9.967899973
1	9.981257413	1	9.981257413
2	9.902785477	2	9.902785477
2	9.826857809	2	9.826857809
2	9.659639755	2	9.659639755
2	9.230180303	2	9.230180303
2	7.839334821	2	7.839334821
2	1.235405776	2	1.235405776
2	52.24063184	2	52.24063184
2	11.06793031	2	11.06793031
2	11.06793031	2	11.06793031
2	52.24063184	2	52.24063184
2	1.235405776	2	1.235405776
2	7.839334821	2	7.839334821
2	9.230180303	2	9.230180303
2	9.659639755	2	9.659639755
2	9.826857809	2	9.826857809
2	9.902785477	2	9.902785477

APÉNDICE D

PARALELEPÍPEDO INFINITO. PROPIEDAD DE SIMETRÍA Y RECIPROCIDAD.
ARREGLO WENNER-SCHLUMBERGER.

Los valores presentados son de resistividad aparente.

Wenner-Schlumberger			
Nivel	Resistividad Aparente	Nivel	Resistividad Aparente
2	100.092021	2	100.092021
2	100.1497251	2	100.1497251
2	100.2575929	2	100.2575929
2	100.4755246	2	100.4755246
2	100.9613665	2	100.9613665
2	102.1859469	2	102.1859469
2	105.6846673	2	105.6846673
2	115.0475294	2	115.0475294
2	129.1096654	2	129.1096654
2	147.4533822	2	147.4533822
2	170.4030237	2	170.4030237
2	180.4341293	2	180.4341293
2	180.4341293	2	180.4341293
2	170.4030237	2	170.4030237
2	147.4533822	2	147.4533822
2	129.1096654	2	129.1096654
2	115.0475294	2	115.0475294
2	105.6846673	2	105.6846673
2	102.1859469	2	102.1859469
2	100.9613665	2	100.9613665
2	100.4755246	2	100.4755246
2	100.2575929	2	100.2575929
2	100.1497251	2	100.1497251
2	100.092021	2	100.092021
2	100.0591703	2	100.0591703

APÉNDICE E

PARALELEPÍPEDO FINITO. PROPIEDAD DE SIMETRÍA Y RECIPROCIDAD.
ARREGLO WENNER.

Los valores presentados son de resistividad aparente.

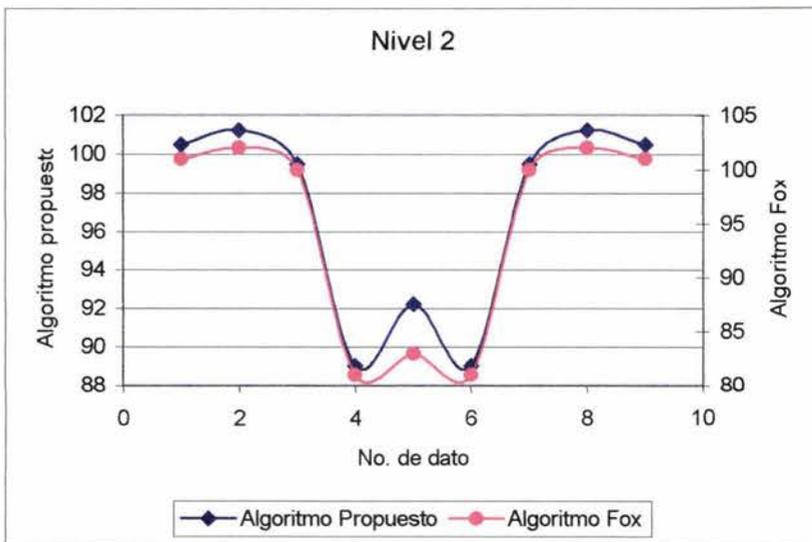
SIMETRÍA				
Nivel	Línea 1	Línea 2	Línea 3	Línea 4
2	100.0637635	100.0721041	100.0721041	100.0637635
2	100.1160033	100.1348847	100.1348847	100.1160033
2	100.2258013	100.2726695	100.2726695	100.2258013
2	100.4779392	100.6078608	100.6078608	100.4779392
2	101.1215283	101.5301561	101.5301561	101.1215283
2	102.9342967	104.3666532	104.3666532	102.9342967
2	107.5445641	112.0758668	112.0758668	107.5445641
2	113.8871525	122.6000503	122.6000503	113.8871525
2	121.1876156	134.8743333	134.8743333	121.1876156
2	129.3670012	149.2749759	149.2749759	129.3670012
2	134.6873917	158.7234033	158.7234033	134.6873917
2	136.0503645	161.0768845	161.0768845	136.0503645
2	134.6873917	158.7234033	158.7234033	134.6873917
2	129.3670012	149.2749759	149.2749759	129.3670012
2	121.1876156	134.8743333	134.8743333	121.1876156
2	113.8871525	122.6000503	122.6000503	113.8871525
2	107.5445641	112.0758668	112.0758668	107.5445641
2	102.9342967	104.3666532	104.3666532	102.9342967
2	101.1215283	101.5301561	101.5301561	101.1215283
2	100.4779392	100.6078608	100.6078608	100.4779392
2	100.2258013	100.2726695	100.2726695	100.2258013
2	100.1160033	100.1348847	100.1348847	100.1160033
2	100.0637635	100.0721041	100.0721041	100.0637635
2	100.0370418	100.0410188	100.0410188	100.0370418

RECIPROCIDAD				
Nivel	Línea 1	Línea 2	Línea 3	Línea 4
2	100.0637635	100.0721041	100.0721041	100.0637635
2	100.1160033	100.1348847	100.1348847	100.1160033
2	100.2258013	100.2726695	100.2726695	100.2258013
2	100.4779392	100.6078608	100.6078608	100.4779392
2	101.1215283	101.5301561	101.5301561	101.1215283
2	102.9342967	104.3666532	104.3666532	102.9342967
2	107.5445641	112.0758668	112.0758668	107.5445641
2	113.8871525	122.6000503	122.6000503	113.8871525
2	121.1876156	134.8743333	134.8743333	121.1876156
2	129.3670012	149.2749759	149.2749759	129.3670012
2	134.6873917	158.7234033	158.7234033	134.6873917
2	136.0503645	161.0768845	161.0768845	136.0503645
2	134.6873917	158.7234033	158.7234033	134.6873917
2	129.3670012	149.2749759	149.2749759	129.3670012
2	121.1876156	134.8743333	134.8743333	121.1876156
2	113.8871525	122.6000503	122.6000503	113.8871525
2	107.5445641	112.0758668	112.0758668	107.5445641
2	102.9342967	104.3666532	104.3666532	102.9342967
2	101.1215283	101.5301561	101.5301561	101.1215283
2	100.4779392	100.6078608	100.6078608	100.4779392
2	100.2258013	100.2726695	100.2726695	100.2258013
2	100.1160033	100.1348847	100.1348847	100.1160033
2	100.0637635	100.0721041	100.0721041	100.0637635
2	100.0370418	100.0410188	100.0410188	100.0370418

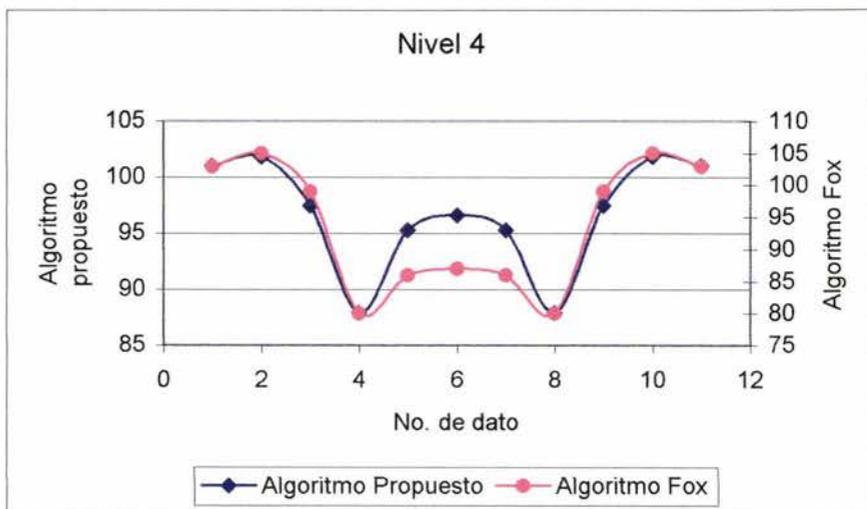
APÉNDICE F.

EFICIENCIA. COMPARACIÓN ALGORITMO PROPUESTO vs ALGORITMO FOX.

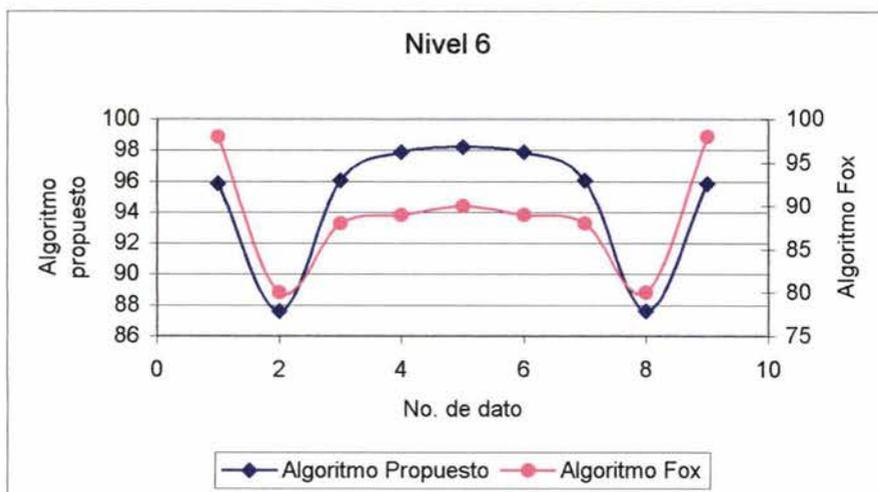
Nivel 2		
Algoritmo propuesto	Algoritmo Fox	Porcentaje de Error (%)
100.499147	101	0.49589392
101.238772	102	0.7463017
99.4947635	100	0.50523649
89.0245486	81	9.90685008
92.227412	83	11.1173639
89.0245486	81	9.90685008
99.4947635	100	0.50523649
101.238772	102	0.7463017
100.499147	101	0.49589392



Nivel 4		
Algoritmo propuesto	Algoritmo Fox	Porcentaje de Error (%)
101.017724	103	1.92453948
101.858327	105	2.99206934
97.4884118	99	1.52685675
87.9517064	80	9.93963298
95.271026	86	10.7802628
96.613599	87	11.0501138
95.271026	86	10.7802628
87.9517064	80	9.93963298
97.4884118	99	1.52685675
101.858327	105	2.99206934
101.017724	103	1.92453948

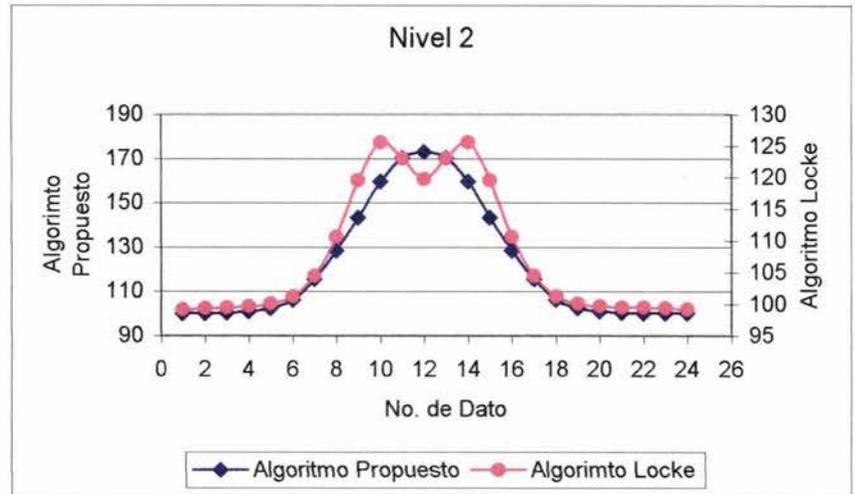


Nivel 6		
Algoritmo propuesto	Algoritmo Fox	Porcentaje de Error (%)
95.8479898	98	2.19592874
87.6063559	80	9.50794489
96.0704646	88	9.17098251
97.8670037	89	9.96292549
98.2012761	90	9.11252896
97.8670037	89	9.96292549
96.0704646	88	9.17098251
87.6063559	80	9.50794489
95.8479898	98	2.19592874

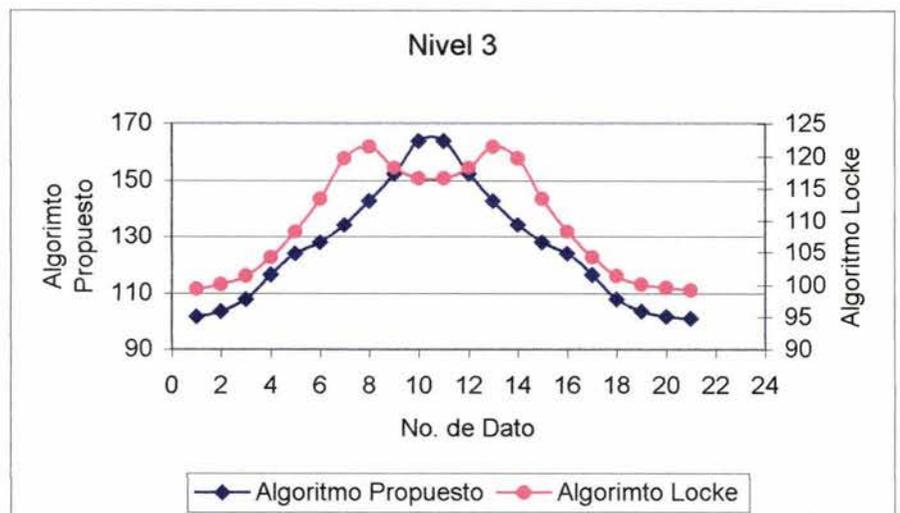


APÉNDICE G. EFICIENCIA. PARALELEPÍPEDO INFINITO. ARREGLO WENNER

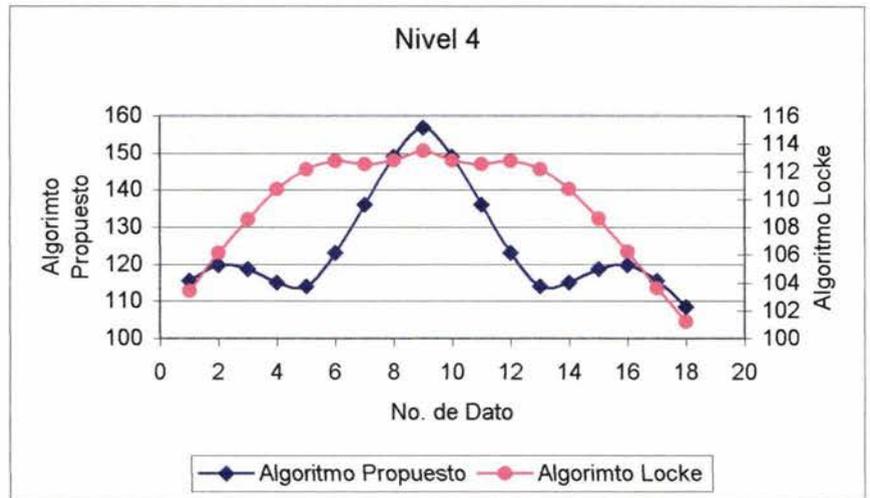
Nivel 2		
Algoritmo Locke	Algoritmo propuesto	Porcentaje de Error (%)
99.19	100.194983	1.01318936
99.39	100.329014	0.94477708
99.51	100.593199	1.08853331
99.7	101.164517	1.46892334
100.12	102.55004	2.42712748
101.27	106.311561	4.97833633
104.46	115.700968	10.7610258
110.6	128.564305	16.2425903
119.55	143.316683	19.8801196
125.66	159.77455	27.1482974
123.03	170.462837	38.5538786
119.84	173.201512	44.5272965
123.03	170.462837	38.5538786
125.66	159.77455	27.1482974
119.55	143.316683	19.8801196
110.6	128.564305	16.2425903
104.46	115.700968	10.7610258
101.27	106.311561	4.97833633
100.13	102.55004	2.41689807
99.71	101.164517	1.45874693
99.54	100.593199	1.05806661
99.45	100.329014	0.88387525
99.37	100.194983	0.83021286
99.23	100.121797	0.89871676



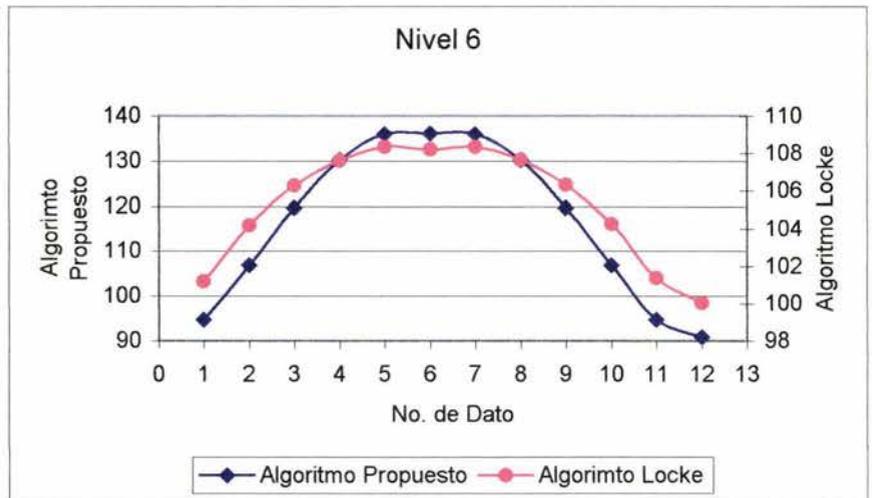
Nivel 3		
Algoritmo Locke	Algoritmo propuesto	Porcentaje de Error (%)
99.36	101.847471	2.50349377
100.05	103.66286	3.61105407
101.38	107.918641	6.44963591
104.23	116.370017	11.6473344
108.31	123.913277	14.4061279
113.42	127.988675	12.8448904
119.68	134.233759	12.1605609
121.44	142.961227	17.7216954
118.15	152.297236	28.9015965
116.56	163.907093	40.6203611
116.56	163.907093	40.6203611
118.15	152.297236	28.9015965
121.44	142.961227	17.7216954
119.68	134.233759	12.1605609
113.43	127.988675	12.834942
108.33	123.913277	14.3850061
104.25	116.370017	11.6259153
101.41	107.918641	6.41814504
100.13	103.66286	3.52827285
99.55	101.847471	2.30785676
99.19	101.015943	1.84085353



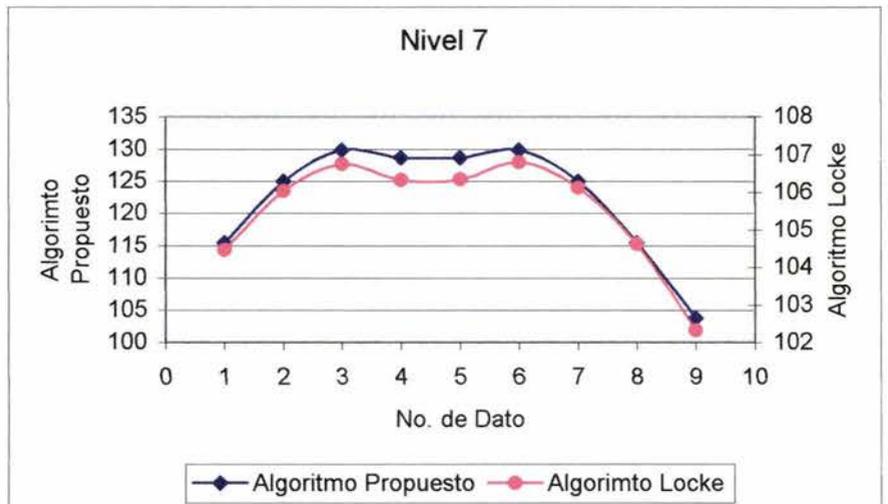
Nivel 4		
Algoritmo Locke	Algoritmo propuesto	Porcentaje de Error (%)
103.44	115.554931	11.7120374
106.15	119.688835	12.7544367
108.55	118.682823	9.33470584
110.72	115.120987	3.97487968
112.16	114.079743	1.71161106
112.75	123.089031	9.16987187
112.55	136.015824	20.849244
112.83	149.156152	32.1954728
113.52	156.805704	38.1304648
112.83	149.156152	32.1954728
112.55	136.015824	20.849244
112.76	123.089031	9.16019026
112.18	114.079743	1.69347741
110.74	115.120987	3.95610148
108.59	118.682823	9.29443152
106.24	119.688835	12.6589181
103.62	115.554931	11.5179806
101.18	108.513098	7.24757677



Nivel 6		
Algoritmo Locke	Algoritmo propuesto	Porcentaje de Error (%)
101.21	94.7440144	6.3886825
104.19	106.95205	2.65097408
106.27	119.628694	12.5705218
107.64	130.202137	20.9607368
108.35	136.026877	25.5439569
108.21	136.11886	25.7913876
108.36	136.026877	25.5323711
107.67	130.202137	20.9270336
106.32	119.628694	12.5175823
104.27	106.95205	2.57221626
101.37	94.7440144	6.53643638
100.04	90.9110377	9.12531213



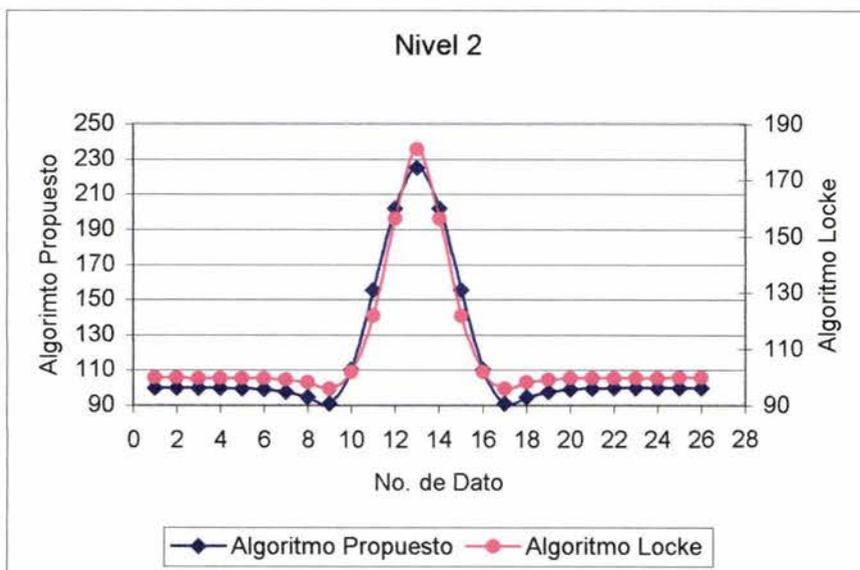
Nivel 7		
Algoritmo Locke	Algoritmo propuesto	Porcentaje de Error (%)
104.47	115.430826	10.4918407
106.04	125.025521	17.9041123
106.76	129.906097	21.6804953
106.33	128.701151	21.0393599
106.34	128.701151	21.0279776
106.8	129.906097	21.6349221
106.12	125.025521	17.8152286
104.61	115.430826	10.3439691
102.33	103.800955	1.43746187



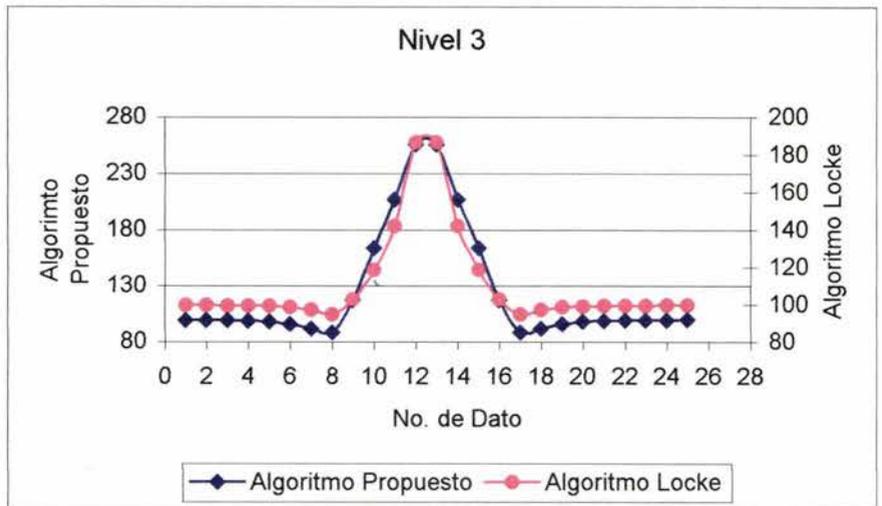
APÉNDICE H.

EFICIENCIA. PARALELEPÍPEDO INFINITO. ARREGLO DIPOLO-DIPOLO.

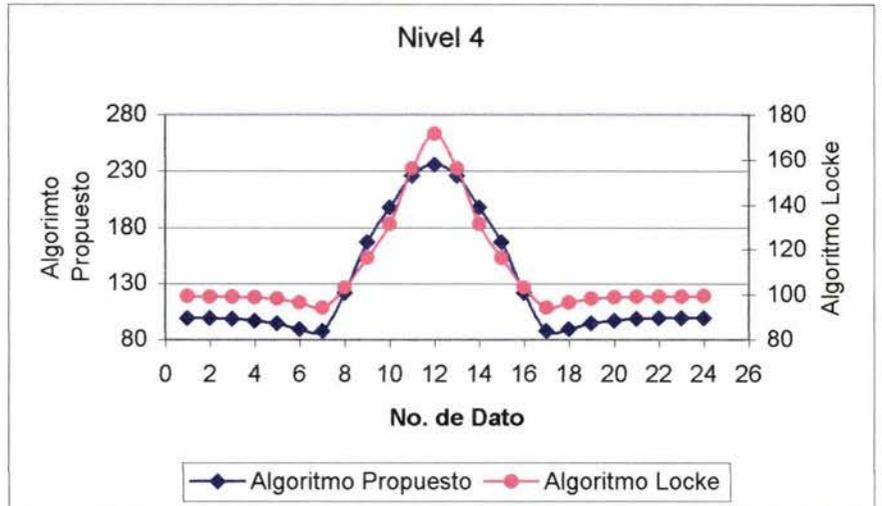
Nivel 2		
Algoritmo Locke	Algoritmo propuesto	Porcentaje de Error (%)
99.9	99.9436153	0.04365893
99.75	99.9112032	0.16160723
99.69	99.8534738	0.16398215
99.66	99.7439851	0.08427165
99.61	99.5197992	0.090554
99.5	99.0164794	0.48595032
99.21	97.7692141	1.4522587
98.24	94.5966105	3.70866196
95.9	90.9537689	5.15769665
101.82	110.646341	8.66857261
121.7	155.398325	27.6896668
156.43	202.131983	29.2156127
181.13	225.173271	24.3158342
156.43	202.131983	29.2156127
121.7	155.398325	27.6896668
101.82	110.646341	8.66857261
95.9	90.9537689	5.15769665
98.24	94.5966105	3.70866196
99.2	97.7692141	1.44232446
99.5	99.0164794	0.48595032
99.6	99.5197992	0.08052293
99.65	99.7439851	0.09431523
99.68	99.8534738	0.17403071
99.7	99.9112032	0.21183872
99.74	99.9436153	0.20414605
99.85	99.9627821	0.11295157



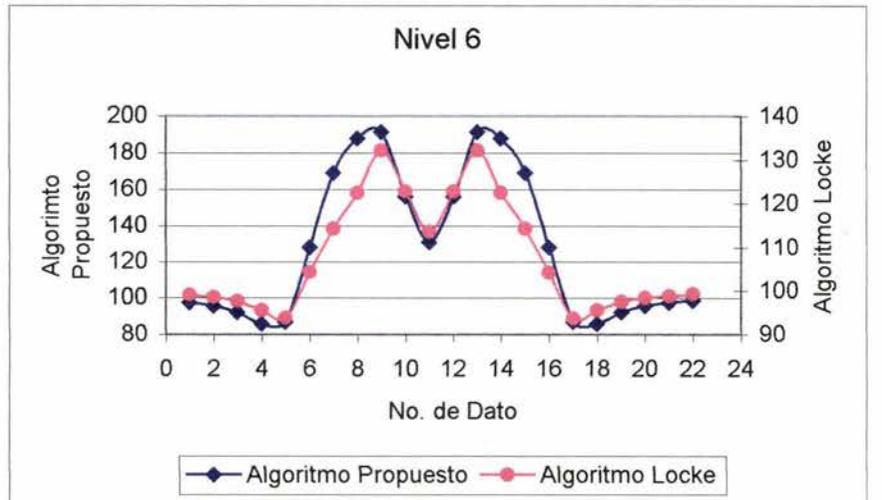
Nivel 3		
Algoritmo Locke	Algoritmo propuesto	Porcentaje de Error (%)
99.75	99.8209905	0.07116838
99.54	99.7108948	0.17168457
99.43	99.5081208	0.07856861
99.33	99.1081145	0.22338212
99.14	98.2534811	0.89420907
98.67	96.2808864	2.42131709
97.33	91.832677	5.64812806
94.86	88.8369416	6.34941855
102.63	117.095848	14.0951457
118.75	164.164374	38.2436835
142.19	207.232018	45.7430323
186.39	255.64107	37.153855
186.39	255.64107	37.153855
142.19	207.232018	45.7430323
118.75	164.164374	38.2436835
102.63	117.095848	14.0951457
94.86	88.8369416	6.34941855
97.32	91.832677	5.63843305
98.67	96.2808864	2.42131709
99.13	98.2534811	0.88421151
99.31	99.1081145	0.20328815
99.4	99.5081208	0.10877341
99.46	99.7108948	0.25225701
99.53	99.8209905	0.29236457
99.69	99.8842916	0.19489579



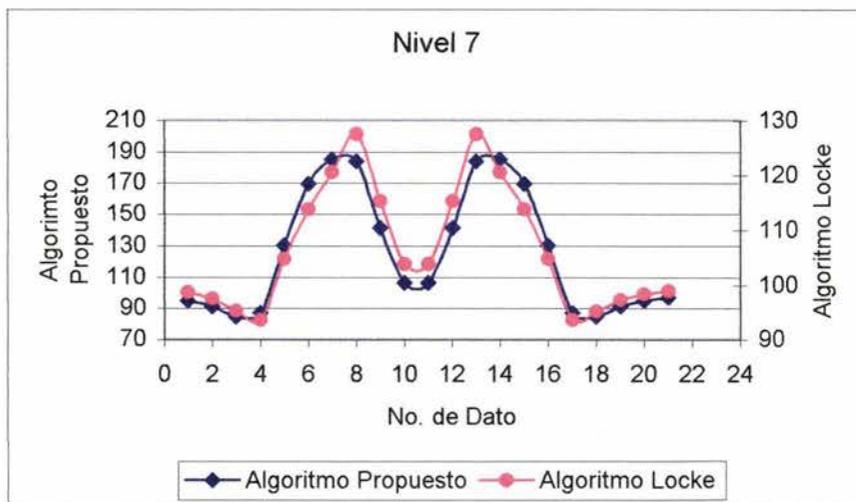
Nivel 4		
Algoritmo Locke	Algoritmo propuesto	Porcentaje de Error (%)
99.59	99.5365837	0.05363623
99.32	99.2295843	0.09103476
99.12	98.6430214	0.48121326
98.84	97.4410953	1.41532245
98.21	94.8253594	3.44632991
96.57	89.4835091	7.33819087
94.25	87.7364697	6.91090753
103.26	121.826596	17.9804342
116.51	166.928983	43.2743824
131.5	198.186664	50.7122917
156.35	226.157063	44.6479453
171.81	235.673942	37.17126
156.35	226.157063	44.6479453
131.5	198.186664	50.7122917
116.51	166.928983	43.2743824
103.26	121.826596	17.9804342
94.24	87.7364697	6.90102966
96.57	89.4835091	7.33819087
98.2	94.8253594	3.43649756
98.81	97.4410953	1.38539086
99.07	98.6430214	0.43098676
99.22	99.2295843	0.00965962
99.34	99.5365837	0.19788975
99.54	99.7075732	0.16834761



Nivel 6		
Algoritmo Locke	Algoritmo propuesto	Porcentaje de Error (%)
99.15	97.6692755	1.49341861
98.54	95.8587275	2.72099905
97.59	92.2605671	5.46104407
95.56	85.9605817	10.0454357
93.74	87.0792352	7.10557377
104.31	128.240424	22.9416393
114.34	168.995752	47.8010775
122.6	187.916142	53.2758092
132.22	191.457879	44.8025101
122.91	155.905159	26.8449751
113.62	131.119596	15.4018627
122.91	155.905159	26.8449751
132.21	191.457879	44.8134625
122.59	187.916142	53.2883123
114.33	168.995752	47.8140051
104.29	128.240424	22.9652162
93.72	87.0792352	7.08574995
95.52	85.9605817	10.0077662
97.52	92.2605671	5.39318387
98.41	95.8587275	2.5924931
98.87	97.6692755	1.21444781
99.24	98.6131424	0.63165823



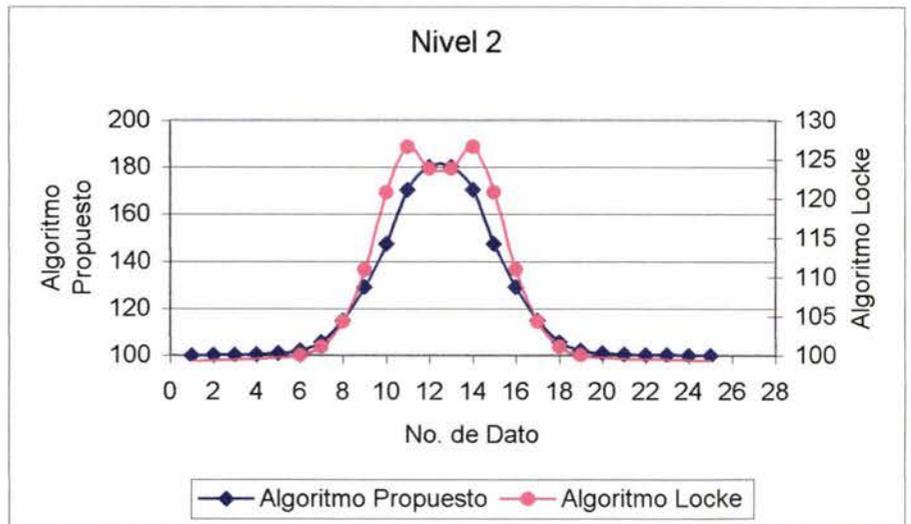
Nivel 7		
Algoritmo Locke	Algoritmo propuesto	Porcentaje de Error (%)
98.63	95.132812	3.54576501
97.45	91.1781222	6.43599572
95.26	84.6662291	11.1209017
93.69	87.1376516	6.99364754
104.77	130.546803	24.6032289
113.86	169.651734	49.0002937
120.63	185.534185	53.8043482
127.59	184.241702	44.4013655
115.34	141.298417	22.5059974
103.88	106.489741	2.51226516
103.88	106.489741	2.51226516
115.34	141.298417	22.5059974
127.58	184.241702	44.412684
120.61	185.534185	53.8298526
113.84	169.651734	49.0264708
104.73	130.546803	24.6508191
93.64	87.1376516	6.94398588
95.18	84.6662291	11.0461977
97.31	91.1781222	6.30138509
98.33	95.132812	3.25148788
98.96	97.1948491	1.78370136



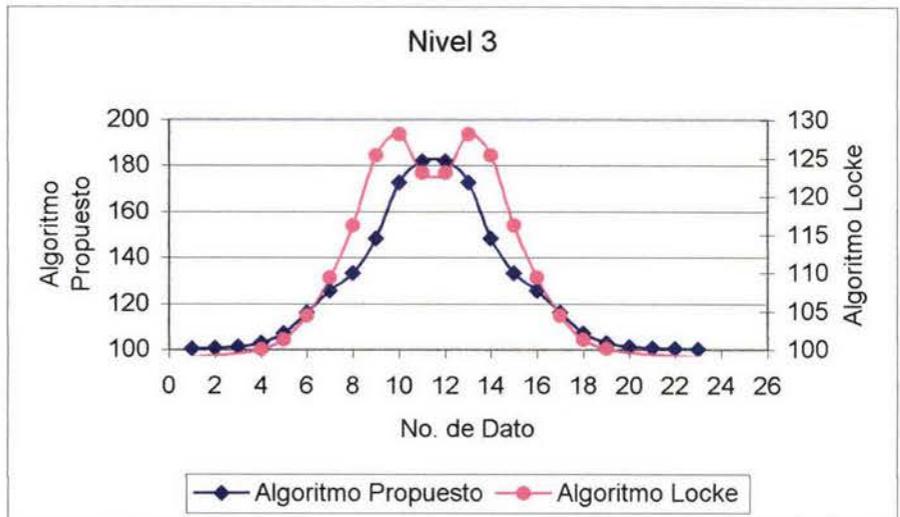
APÉNDICE I.

EFICIENCIA. PARALELEPÍPEDO INFINITO. ARREGLO WENNER-SCHLUMBERGER

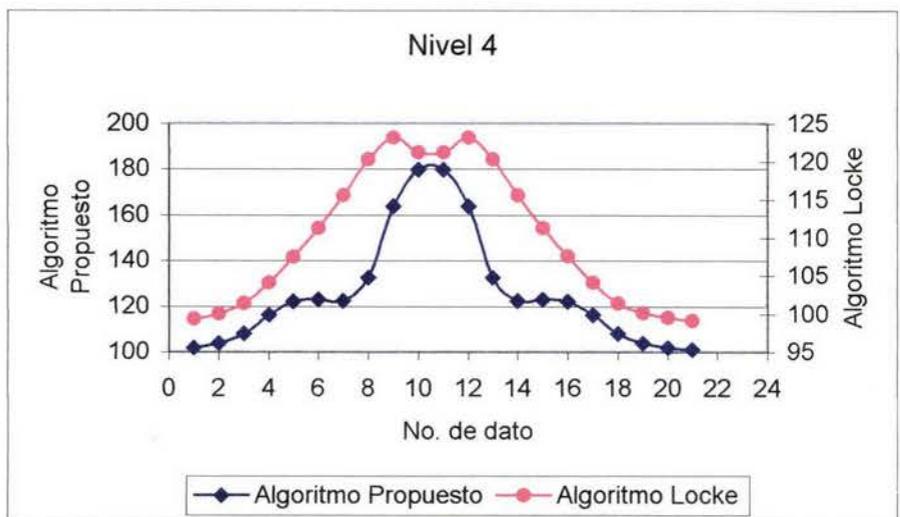
Nivel 2		
Algoritmo Locke	Algoritmo propuesto	Porcentaje de Error (%)
99.25	100.092021	0.84838386
99.43	100.149725	0.72385103
99.5	100.257593	0.76139993
99.58	100.475525	0.89930163
99.73	100.961366	1.23470016
100.1	102.185947	2.08386307
101.18	105.684667	4.4521322
104.38	115.04753	10.219898
110.95	129.109665	16.3674317
120.79	147.453382	22.0741638
126.61	170.403024	34.5889141
123.87	180.43413	45.6641074
123.87	180.43413	45.6641074
126.61	170.403024	34.5889141
120.79	147.453382	22.0741638
110.96	129.109665	16.3569444
104.38	115.04753	10.219898
101.18	105.684667	4.4521322
100.11	102.185947	2.0736659
99.74	100.961366	1.2245503
99.59	100.475525	0.88917016
99.52	100.257593	0.74115045
99.48	100.149725	0.67322585
99.43	100.092021	0.66581614
99.31	100.05917	0.75437551



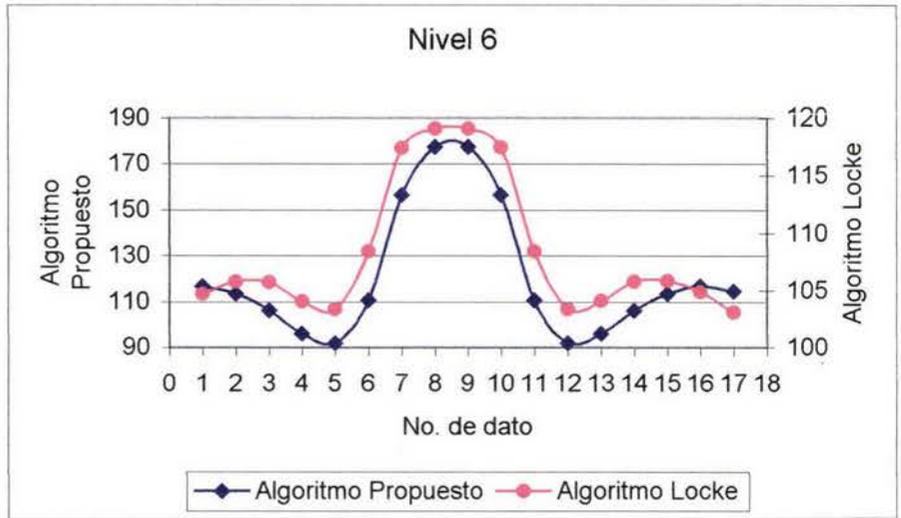
Nivel 3		
Algoritmo Locke	Algoritmo propuesto	Porcentaje de Error (%)
99.08	100.45565	1.38842335
99.35	100.799685	1.45916931
99.61	101.516073	1.9135353
100.12	103.166133	3.04248219
101.37	107.313689	5.863361
104.44	116.384211	11.4364329
109.4	125.887282	15.0706413
116.24	133.221863	14.6093113
125.38	148.363889	18.3313837
128.15	172.896243	34.9170837
123.13	182.103106	47.8949938
123.13	182.103106	47.8949938
128.15	172.896243	34.9170837
125.39	148.363889	18.3219467
116.24	133.221863	14.6093113
109.41	125.887282	15.060124
104.45	116.384211	11.425764
101.38	107.313689	5.85291876
100.13	103.166133	3.03219132
99.64	101.516073	1.88285077
99.42	100.799685	1.38773356
99.27	100.45565	1.19436875
99.1	100.275914	1.18659333



Nivel 4		
Algoritmo Locke	Algoritmo propuesto	Porcentaje de Error (%)
99.34	101.974651	2.65215532
100.04	103.86286	3.82133187
101.38	108.163289	6.69095404
104.09	116.207796	11.6416527
107.55	122.190575	13.6128076
111.3	122.997049	10.5094781
115.56	122.348208	5.87418452
120.26	132.447144	10.1339965
123.13	163.914765	33.1233373
121.18	179.706379	48.2970615
121.18	179.706379	48.2970615
123.14	163.914765	33.1125265
120.26	132.447144	10.1339965
115.57	122.348208	5.86502347
111.3	122.997049	10.5094781
107.57	122.190575	13.591684
104.11	116.207796	11.6202058
101.42	108.163289	6.64887517
100.12	103.86286	3.73837436
99.53	101.974651	2.45619521
99.15	101.095281	1.96195742



Nivel 6		
Algoritmo Locke	Algoritmo propuesto	Porcentaje de Error (%)
104.69	116.837062	11.6028867
105.75	113.604201	7.42714057
105.71	106.385446	0.63896139
104.05	96.2910988	7.45689686
103.34	92.0529018	10.9222936
108.38	110.603905	2.05195115
117.45	156.591225	33.3258618
119.11	177.597761	49.1039891
119.11	177.597761	49.1039891
117.46	156.591225	33.3145111
108.39	110.603905	2.04253589
103.36	92.0529018	10.93953
104.08	96.2910988	7.48357146
105.76	106.385446	0.59138246
105.84	113.604201	7.33579096
104.87	116.837062	11.4113303
103.07	114.640383	11.2257527



Nivel 7		
Algoritmo Locke	Algoritmo propuesto	Porcentaje de Error (%)
103.44	103.874698	0.42024193
101.36	93.9611604	7.29956551
99.56	87.0271774	12.5882107
99.93	86.5571727	13.3821949
105.8	106.974474	1.11008872
116.23	155.505249	33.7909741
118.66	177.3117	49.4283664
118.66	177.3117	49.4283664
116.24	155.505249	33.7794642
105.81	106.974474	1.1005329
99.97	86.5571727	13.4168524
99.61	87.0271774	12.6320877
101.45	93.9611604	7.38180345
103.61	103.874698	0.25547558
104.22	111.181267	6.67939647

