00384

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

TEORÍA DE PUNTOS CRÍTICOS PARA FUNCIONALES FUERTEMENTE INDEFINIDAS CON PERTURBACIÓN DE SIMETRÍAS Y APLICACIONES A SISTEMAS ELÍPTICOS NO LINEALES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACÁDEMICO

DE

DOCTOR EN CIENCIAS

(MATEMÁTICAS)

PRESENTA:

SERGIO HERNÁNDEZ LINARES

DIRECTORA DE TESIS:
DRA. MÓNICA ALICIA CLAPP JIMÉNEZ LABORA

AGOSTO **2004**

Teoría de puntos críticos para funcionales fuertemente indefinidas con perturbación de simetrías y aplicaciones a sistemas elípticos no lineales

Alumno: Sergio Hernández Linares

Directora de Tesis: Dra. Mónica Alicia Clapp Jiménez Labora

Esta tesis se desarrolló bajo el auspicio de la UNAM a través de una beca de la DGEP, y con el apoyo del Proyecto PAPIIT IN110902.

México D.F., a 25 de agosto del 2004.

La ciencia es un juego, pero un juego con la realidad, un juego con los cuchillos afilados ... Si alguien corta con cuidado una imagen en mil trozos, puedes resolver el rompecabezas si vuelves a colocar las piezas en su sitio. En un juego científico, tu rival es el Buen Señor. No sólo ha dispuesto el juego, sino también las reglas, aunque no sean del todo conocidas. Ha dejado la mitad para que tú las descubras o las determines. Un experimento es la espada templada que puedes empuñar con éxito contra los espíritus de la oscuridad pero que también puede derrotarte vergonzosamente. La incertidumbre radica en cuántas reglas ha creado el propio Dios de forma permanente y cuántas parecen provocadas por la inercia mental; la solución sólo se vuelve posible mediante la superación de este límite. Tal vez esto sea lo más apasionante del juego. Porque, en tal caso, luchas contra la frontera imaginaria entre Dios y tú, una frontera que quizás no exista.

Erwin Schrödinger

A mi mamá

Agradecimientos

Quiero comenzar agradeciendo a mi asesora de tesis, la Dra. Mónica Clapp, por el apoyo, la paciencia y el tiempo que me dedicó, pero sobre todo por sus cautivadoras ideas y su manera apasionada de transmitirlas.

Al IMATE, por ese espacio para trabajar y por todo el apoyo brindado.

A la UNAM, que por medio de diferentes dependencias (DGAPA, DGEP) me apoyó económicamente durante mis estudios de posgrado, además de la gran calidad humana como científica de los profesores que intervinieron en mi formación académica.

A Geovana, Lizeth, Eric, Marcos, Efren, Gerardo, Eduardo, Jorge y a todos los del cubo 02 cuya amistad y apoyo son invaluables; y a toda la banda de becarios del IMATE.

Índice General

Capítulo 1

Introducción

El objetivo principal de esta tesis consiste en dar condiciones adecuadas que aseguren la existencia de una infinidad de puntos críticos de funcionales fuertemente indefinidos no simétricos, como aquéllos asociados a sistemas elípticos fuertemente indefinidos cuyo Hamiltoniano es supercuadrático pero no es simétrico. Las aplicaciones que obtenemos aseguran la existencia de una infinidad de soluciones de tales sistemas, incluyendo algunos con no linealidades supercríticas.

1.1 Antecedentes

1.1.1 Puntos críticos de funcionales simétricos

Muchos problemas que surgen de la física, la biología y otros contextos tienen una formulación variacional. Es decir, encontrar soluciones de ellos equivale a encontrar puntos críticos de un funcional con valores reales definido en un espacio o en una variedad de Banach, por lo general de dimensión infinita.

Cuando la dimensión del espacio es finita el cálculo diferencial clásico nos da criterios para garantizar la existencia de puntos críticos; de hecho, es bien sabido que todo funcional definido sobre un conjunto cerrado y acotado de un espacio de dimensión finita alcanza su mínimo y su máximo. Es bien sabido también que esta propiedad en general no se cumple en espacios de dimensión infinita, debido a que no todos los conjuntos cerrados y acotados son compactos.

Muchos funcionales que aparecen en ecuaciones diferenciales están definidos en todo un espacio de Banach de dimensión infinita, o bien en la esfera unitaria de un tal espacio. Es decir, el dominio no es, por lo general, compacto. Un modo de introducir cierta compacidad al problema que nos permita obtener puntos críticos es requiriendo que el funcional satisfaga alguna condición de compacidad. La más usual es la llamada condición de Palais-Smale.

Definición 1.1 (Condición de Palais-Smale) *Sea Φ un funcional de clase C^1 sobre un espacio de Banach X. Se dice que Φ satisface la condición de Palais-Smale (en c) si toda sucesión (x_n) en X tal que*

$$\Phi(x_n) \to c \quad y \quad \Phi'(x_n) \to 0$$

tiene una subsucesión convergente.

El Principio Variacional de Ekeland [31] garantiza que todo funcional de clase C^1, acotado inferiormente, que satisface la condición de Palais-Smale, alcanza su mínimo.

Sin embargo, en muchas aplicaciones el funcional involucrado no está acotado ni inferior ni superiormente. Un criterio muy útil para asegurar la existencia de un punto crítico de un funcional tal es el llamado Teorema de Paso de Montaña debido a Ambrosetti y Rabinowitz [1], [40].

Teorema 1.2 (de Paso de Montaña, Ambrosetti-Rabinowitz, 1973) *Sea X un espacio de Banach y $\Phi \in C^1(X,\mathbb{R})$ un funcional tal que $\Phi(0) = 0$, que satisface la condición de Palais-Smale, y las siguientes condiciones:*
(Φ_1) Existen constantes $\rho, \alpha > 0$ tales que $\Phi|_{\partial B_\rho} \geq \alpha$.
(Φ_2) Existe $e \in X \backslash B_\rho$ tal que $\Phi(e) \leq 0$.
Entonces Φ posee un valor crítico $c \geq \alpha$, dado por

$$c = \inf_{g\in\Gamma} \sup_{t\in[0,1]} \Phi(g(t))$$

donde $\Gamma = \{g \in C([0,1], X) : g(0) = 0, \quad g(1) = e\}$.

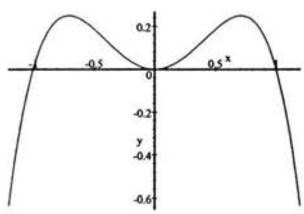
Aquí B_ρ denota a la bola cerrada en X de radio ρ y centro en el origen y ∂B_ρ denota a su frontera. Este teorema básicamente dice que si la gráfica de la función es como el cráter de un volcán o bien como un valle rodeado de montañas, entonces el camino óptimo para salir del centro del cráter o valle ($x = 0$) a un punto específico fuera de él ($x = e$), pasa por un paso de montaña (un punto silla) de altura c (valor crítico).

Si el funcional tiene simetrías, más específicamente, si el funcional es par (es decir, $\Phi(x) = \Phi(-x)$), los puntos críticos diferentes de cero aparecen por pares $\pm x$. Las simetrías aumentan la complejidad topológica de la gráfica del funcional y es de esperarse que ocasionen la aparición de múltiples puntos críticos. En efecto, Ambrosetti y Rabinowitz probaron la siguiente versión simétrica del Teorema de Paso de Montaña [1], [40].

Teorema 1.3 (Paso de Montaña Simétrico, Ambrosetti-Rabinowitz, 1973) *Sea X un espacio de Banach real de dimensión infinita y sea $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ un funcional par que satisface la condición de Palais-Smale y las siguientes dos condiciones:*
(Φ_1) *Existen constantes $\rho, \alpha > 0$ tales que $\Phi\mid_{\partial B_\rho} \geq \alpha$.*
(Φ_2) *Para cada subespacio de dimensión finita $W \subset X$ existe $R > 0$ tal que $\Phi(u) \leq 0$ para toda $u \in W \backslash B_R$.*
Entonces Φ posee una sucesión no acotada de valores críticos (positivos).

Resultados análogos para simetrías más generales fueron probados por Bartsch, Clapp y Puppe [18], [8].

Obsérvese que las hipótesis de este teorema implican que el funcional no está acotado superiormente. Por ejemplo, la gráfica de $\Phi(x) = \|x\|^2 - \|x\|^4$ tiene la forma de cráter de un volcán:



$$\Phi(x) = \|x\|^2 - \|x\|^4$$

Más aún, si $\dim X = \infty$, entonces Φ satisface todas las hipótesis del Teorema de Paso de Montaña Simétrico excepto la condición de Palais-Smale: Los únicos puntos críticos de este funcional son el origen y la esfera de radio $1/\sqrt{2}$, con valores críticos 0 y $1/4$ respectivamente, sin embargo, no toda sucesión en la esfera de radio $1/\sqrt{2}$ tiene una subsucesión convergente (ya que una esfera en un espacio de dimensión infinita no es compacta).

Un ejemplo típico de aplicación del Teorema Simétrico de Paso de Montaña es el siguiente: Consideremos el problema de Dirichlet no lineal

$$(\mathcal{D}_0) \qquad \begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-2}\, u & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

donde Ω es un dominio abierto acotado suave de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, y $2 < p < 2^*$, y $2^* = \frac{2N}{N-2}$ es el exponente crítico de Sobolev. Este es un problema simétrico, es decir, si u es solución de $(\mathcal{D}_0)$ entonces $-u$ también lo es. Las soluciones de $(\mathcal{D}_0)$ son los puntos críticos del funcional

$$\Phi(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx - \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p\, dx$$

definido en el espacio de Sobolev $H_0^1(\Omega)$. Este es un funcional par y satisface las condiciones (Φ_1) y (Φ_2) del Teorema Simétrico de Paso de Montaña. El Teorema de Rellich-Kondrakov [12] garantiza que Φ satisface la condición de Palais-Smale si $p < 2^*$. De modo que $(\mathcal{D}_0)$ tiene una infinidad de soluciones.

Notemos que la parte cuadrática de este funcional es la forma cuadrática asociada al producto escalar en $H_0^1(\Omega)$. Si consideramos, por ejemplo, el sistema elíptico

$$(\mathcal{S}) \qquad \begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-2}\, u & \text{en } \Omega \\ -\Delta v = -\, |v|^{q-2}\, v & \text{en } \Omega \\ u = 0, \quad v = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

con $2 < p, q < 2^*$, resulta que el funcional asociado

$$\Phi(u,v) := \frac{1}{2}\int_\Omega (|\nabla u|^2 - |\nabla v|^2)dx - \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p\, dx - \frac{1}{q}\int_\Omega |v|^q\, dx$$

definido en $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ no satisface la condición (Φ_1) del Teorema de Paso de Montaña. Más aún, su parte cuadrática tiene una infinidad de valores propios positivos y una infinidad de valores propios negativos (contados con sus respectivas multiplicidades). En la literatura, a un funcional con esta propiedad se le llama fuertemente indefinido *y,* si el número de valores propios negativos es finito, se le llama semidefinido, véase por ejemplo [7]. De hecho, este funcional es fuertemente indefinido en el sentido que definiremos más adelante (véase la Definición 1.5).

La demostración del Teorema Simétrico de Paso de Montaña se basa en el siguiente principio de Lusternik-Schnirelmann: Si el conjunto de subnivel $\Phi^b := \{x \in X : \Phi(x) \leq b\}$ no se puede deformar en el conjunto de subnivel Φ^a entonces Φ debe tener un valor crítico en el intervalo $[a, b]$ (si Φ satisface la condición de Palais-Smale). La dificultad en el caso fuertemente indefinido se puede ilustrar observando la forma cuadrática

$$\Phi(u,v) := \|u\|^2 - \|v\|^2, \qquad (u,v) \in X_1 \oplus X_2.$$

Su único punto crítico es el origen y, puesto que $\Phi^{-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, tiene el tipo de homotopía de la esfera unitaria en X_2, una condición necesaria y suficiente para que el conjunto de subnivel Φ^ε no se pueda deformar en $\Phi^{-\varepsilon}$ es que $\dim X_2 < \infty$. Es decir, el punto crítico 0 de Φ no afecta la topología de los conjuntos de subnivel de Φ; de modo que el principio de Lusternik-Schnirelmann podría no detectar los puntos críticos de un funcional fuertemente indefinido.

El primero en tratar exitosamente este tipo de problemas fue Rabinowitz [42] quien restringió el problema fuertemente indefinido a subespacios de dimensión finita, encontró puntos críticos de las restricciones y controló el crecimiento de los valores críticos cuando la dimensión de los subespacios tendía a ∞. A partir de entonces se han desarrollado varios métodos para tratar este tipo de problemas. Un enfoque muy usado se debe a Benci y Rabinowitz [10] quienes mostraron que el principio de Lusternik-Schnirelman continúa funcionando si se restringe la clase de deformaciones de manera adecuada.

Un enfoque distinto basado en aproximaciones de tipo Galerkin, (mismo que seguiremos en este trabajo) se debe a Bartsch y Clapp [7]. La idea es reducir el problema fuertemente indefinido a un problema semidefinido. El resultado requiere una condición de compacidad más fuerte que la condición de Palais-Smale, la cual se cumple en muchos casos interesantes. Para ilustrar dicho resultado mencionaremos un caso especial de él.

Teorema 1.4 (Bartsch-Clapp, 1996) *Sea $X = X^1 \oplus X^2$ un espacio de Hilbert, sean*

$$X_1^1 \subset \cdots \subset X_k^1 \subset \cdots \subset X^1, \qquad X_1^2 \subset \cdots \subset X_k^2 \subset \cdots \subset X^2$$

sucesiones de subespacios de dimensión finita de X^1 y X^2, y sea $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ un funcional par, que satisface las siguientes condiciones:
(PS^*) Toda sucesión (x_n) tal que $x_n \in X^1 \oplus X_{k_n}^2$, $k_n \to \infty$,

$$\Phi(x_n) \to c \quad y \quad (\Phi\,|_{X^1 \oplus X_{k_n}^2})'(x_n) \to 0$$

tiene una subsucesión que converge a un punto crítico de Φ.
(MP_1) Existen constantes $\rho, \alpha > 0$ tales que $\Phi(x^1) \geq \alpha$ si $x^1 \in X^1$ y $\|x^1\| = \rho$.
(MP_2) Para cada subespacio de dimensión finita $W \subset X$ existe $R > 0$ tal que $\Phi(x) \leq 0$ para toda $x \in W$ con $\|x\| \geq R$.
(A) Para cada $k \geq 1$, $\sup \Phi(X_k^1 \oplus X^2) < \infty$.
Entonces, si $\dim X_k^1 \to \infty$, Φ posee una sucesión no acotada de valores críticos.

Obsérvese que no hay restricción sobre la dimensión de X^2. El resultado de Bartsch y Clapp es de hecho más general que el aquí enunciado: Incluye, en particular, el caso en el que el funcional Φ es par únicamente respecto a la variable $x^1 \in X^1$, es decir, las simetrías pueden tener un espacio de puntos fijos de dimensión infinita. Este resultado se aplica para obtener una infinidad de soluciones de sistemas elípticos del tipo del sistema $(\mathcal{S})$ considerado arriba, véase [7].

Motivados por este resultado, damos la siguiente definición.

Definición 1.5 *Sea $X = X^1 \oplus X^2$ un espacio de Banach con $\dim X^1 = \infty$, y sea $\Phi : X \to \mathbb{R}$ un funcional que satisface las condiciones (MP_1), (MP_2) y (A) del Teorema 1.4. Decimos que Φ es fuertemente indefinido si $\dim X^2 = \infty$. En caso contrario, decimos que Φ es semidefinido.*

En todos los resultados mencionados hasta el momento las simetrías juegan un papel esencial para garantizar la existencia de una infinidad de puntos críticos. Veremos ahora qué sucede cuando perturbamos las simetrías.

1.1.2 Perturbación de simetrías

Como mencionamos anteriormente, las simetrías aumentan la complejidad topológica de la gráfica de un funcional y ocasionan la aparición de múltiples puntos críticos. Es de esperarse que, si perturbamos un funcional par de modo tal que las simetrías desaparezcan pero sin que se altere esencialmente la topología de su gráfica, el nuevo funcional tendrá, a su vez, múltiples puntos críticos. Demostrar este hecho no es para nada trivial, ya que los invariantes topológicos usuales, como son la categoría equivariante de Lusternik-Schnirelmann o el género de Krasnoselskii, si bien son herramientas excelentes en el caso simétrico, no son de ninguna ayuda en el caso no simétrico. De hecho aún no hay un método concluyente que garantice una infinidad de puntos críticos para este tipo de funcionales.

Los primeros resultados en esta dirección surgieron a principios de los 80's y se deben a Bahri-Berestycki [4], Struwe [48] y Rabinowitz [43],[44], quienes utilizaron un invariante topológico, introducido originalmente por Krasnoselskii, que refleja ciertas propiedades no simétricas de los conjuntos simétricos. Consideraron el problema

$$(\mathcal{D}_0') \qquad \begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-2}\, u + f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

donde Ω es un dominio abierto acotado suave de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, y $2 < p < 2^*$, y $f \in L^2(\Omega)$, y probaron resultados como el que sigue.

Teorema 1.6 (Bahri-Berestycki, 1981) *Para cada $f \in L^2(\Omega)$ el problema $(\mathcal{D}_0')$ tiene una infinidad de soluciones si*

$$2 < p < p_N$$

donde p_N es la raíz más grande de la ecuación $2(N-1)p^2 - (N+2)p - N = 0$.

Posteriormente Bahri y Lions [6] utilizaron la desigualdad semiclásica de Cwickel [26], Lieb [39] y Rosenbljum [45] para acotar superiormente los índices de Morse del funcional par, y así obtener una mejor cota (superior) sobre p.

Teorema 1.7 (Bahri-Lions, 1988, [6]) *Para cada $f \in L^2(\Omega)$ el problema $(\mathcal{D}_0')$ tiene una infinidad de soluciones si*

$$2 < p < \frac{2(N-1)}{N-2}. \tag{1.1}$$

Nótese que $\frac{2(N-1)}{N-2} < 2^*$. Por otro lado, previamente Bahri [3] había demostrado que

Teorema 1.8 (Bahri, 1981) *Para casi toda $f \in L^2(\Omega)$ el problema $(\mathcal{D}_0')$ tiene infinidad de soluciones si*

$$2 < p < \frac{2N}{N-2} = 2^*.$$

En vista de este resultado existe la conjetura de que $(\mathcal{D}_0')$ tiene una infinidad de soluciones para toda $2 < p < 2^*$ y para toda $f \in L^2(\Omega)$. Hasta la fecha esta conjetura no ha podido ser demostrada.

Un resultado análogo al de Bahri-Lions para perturbaciones de no linealidades pares más generales fue demostrado por Tanaka [49].

Recientemente Bolle [13] introdujo un nuevo método que produce buenos resultados para problemas donde las simetrías son perturbadas por una condición no homogénea a la frontera, es decir, problemas del tipo

$$(\mathcal{D}') \qquad \begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-2}\, u + f & \text{en } \Omega \\ u = u_0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

donde Ω es un dominio abierto acotado suave de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, y $2 < p < 2^*$, $u_0 \in C^2(\partial\Omega)$ y $f \in C^0(\overline{\Omega})$. La idea básica de Bolle consiste en dar condiciones para que las propiedades de enlace (la complejidad topológica) que tienen los conjuntos de subnivel de ciertos valores críticos (valores minimax dados por un invariante topológico adecuado) del funcional par se preserven bajo la perturbación. Basándose en esta idea Bolle, Ghoussoub y Tehrani [14] demostraron un teorema abstracto de multiplicidad de puntos críticos el cual permite obtener resultados no triviales para funcionales semidefinidas con perturbación de simetrías que detallamos a continuación. El contexto es el siguiente:

Sea E un espacio de Hilbert, con una descomposición en suma directa

$$E = E^+ \oplus E^-.$$

Sea

$$E_1^+ \subset E_2^+ \subset \cdots \subset E^+$$

una sucesión de subespacios de dimensión finita de X^+, tal que $\dim E_k^+ = k$. Para cada $k \geq 1$, definimos

$$E_k := E_k^+ \oplus E^-.$$

Sea $\Phi : E \times [0,1] \to \mathbb{R}$ un funcional de clase C^2. Pensamos a Φ como una trayectoria de funcionales

$$\Phi_t : E \to \mathbb{R}, \qquad \Phi_t(u) = \Phi(u,t), \qquad 0 \leq t \leq 1.$$

Supongamos que

(P1) Φ satisface la *condición de Palais-Smale para trayectorias*, es decir, toda sucesión (u_k, t_k) en $E\times[0,1]$ tal que $\Phi_{t_k}(u_k) \to c$ y $\|(\Phi_{t_k})'(u_k)\| \to 0$, tiene una subsucesión convergente en $E \times [0,1]$.

(P2) Para cada $b \in \mathbb{R}$ existe $C = C(b)$ tal que

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\Phi(u,t)\right| \leq C(\|\Phi_t'(u)\| + 1)(\|u\| + 1) \qquad \text{si} \quad |\Phi_t(u)| \leq b.$$

(P3) Existen dos funciones continuas $\theta_1, \theta_2 : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\theta_1 \leq \theta_2$, las cuales son Lipschitz en la segunda variable, tales que

$$\theta_1(t, \Phi_t(u)) \leq \frac{\partial}{\partial t}\Phi(u,t) \leq \theta_2(t, \Phi_t(u)) \qquad \text{si} \quad \Phi_t'(u) = 0.$$

(P4) Para cada subespacio de dimensión finita W de E,

$$\sup_{0\leq t\leq 1} \Phi_t(w) \to -\infty \quad \text{cuando } w \in W,\ \|w\| \to \infty.$$

(P5) El funcional Φ_0 es par, es decir, Φ_0 es invariante bajo la acción antípoda.

Consideremos los valores

$$c_k = \inf_{g\in G} \sup_{x\in E_k} \Phi_0\left(g\left(x\right)\right), \qquad k = 1, 2, ... \tag{1.2}$$

donde

$$G = \left\{g \in C\left(E, E\right) : g \text{ es impar, y } g\left(x\right) = x \text{ si } \|x\| \text{ grande}\right\}.$$

Teorema 1.9 (Bolle-Ghoussoub-Tehrani, 2000) *Supongamos que Φ satisface **(P1)**-**(P5)**. Si la sucesión*

$$\left(\frac{c_{k+1} - c_k}{\max\limits_{0\leq t\leq 1}|\theta_1(t, c_{k+1})| + \max\limits_{0\leq t\leq 1}|\theta_2(t, c_k)| + 1}\right) \tag{1.3}$$

es no acotada, entonces Φ_1 tiene una sucesión no acotada de valores críticos.

Obsérvese que $c_k \geq \Phi_0(0)$ pues $0 \in g(E_k)$ $\forall g \in G$, y, dado que E_k es de dimensión finita, la propiedad **(P4)** garantiza que $c_k < \infty$. De hecho, estos valores minimax son valores críticos del funcional par Φ_0. Si E^- tuviese dimensión infinita, la propiedad **(P4)** no bastaría para garantizar que los valores minimax c_k sean finitos; en este caso, una condición suficiente para que los valores minimax c_k sean finitos es que Φ_0 esté acotado superiormente sobre E_k. Más adelante veremos que, si Φ_t es fuertemente indefinido en el sentido de la Definición 1.5, la sucesión (c_k) está acotada, es decir, la condición (1.3) del Teorema 1.9 no se cumple (véase el Comentario 2.6.2). De modo que no podemos aplicar este teorema para obtener la existencia de una infinidad de valores críticos en el caso fuertemente indefinido.

Usando este resultado y las cotas para los índices de Morse de los puntos críticos del funcional par obtenidas por Bahri y Lions [6], Bolle, Ghoussoub y Tehrani [14] demostraron que el problema de Dirichlet no homogéneo $(\mathcal{D}')$ tiene una infinidad de soluciones si

$$2 < p < \frac{2N}{N-1}, \tag{1.4}$$

mejorando así un resultado previo de Candela y Salvatore [23].

Un resultado análogo para perturbaciones de funcionales invariantes bajo la acción de un grupo de Lie compacto arbitrario fue demostrado por Clapp, Hernández-Martínez y el autor de esta tesis en [20], y fue aplicado para demostrar la existencia de una infinidad de soluciones de sistemas elípticos de tipo gradiente (véase sección 1.2.2) con perturbación de simetrías arbitrarias. Incluimos en la tesis una generalización parcial de la aplicación dada en [20] (Teoremas 3.9, 3.1).

Los sistemas de tipo gradiente son los más sencillos desde el punto de vista variacional, ya que el funcional asociado a ellos es semidefinido. Nuestro objetivo principal es estudiar sistemas elípticos cuyo funcional asociado es fuertemente indefinido y no es simétrico. Para estos, consideraremos sistemas elípticos no cooperativos (véase sección 1.2.3)

$$(\mathcal{H}) \qquad \begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-2}u + f_u(x,u,v) & \text{en } \Omega \\ \quad \Delta v = |v|^{q-2}v + f_v(x,u,v) & \text{en } \Omega \\ u = 0, \quad v = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

donde Ω es un dominio abierto acotado suave de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, $p \in (2, 2^*)$, $q \in (2, \infty)$ y f es un término de orden menor que no es necesariamente simétrico en (u,v).

Sistemas elípticos que inducen funcionales fuertemente indefinidos han sido profusamente estudiados en las últimas dos décadas. Por ejemplo por Benci y Rabinowitz [10], Hulshof y van der Vorst [34], De Figueiredo y Felmer [29], Costa y Magalhães [21, 22], De Figueiredo y Magalhães [30], Bartsch y Clapp [7], Kryszewski y Szulkin [37], Bartsch y De Figueiredo [9], entre otros. Todos estos resultados se refieren a sistemas elípticos que dependen subcríticamente de ambas variables, es decir, $p, q < 2^*$, y todos ellos requieren alguna condición de simetría en f. Resultados de existencia de soluciones para sistemas Hamiltonianos críticos (en un sentido más fuerte que el considerado aquí) fueron obtenidos recientemente por Hulshof, Mitidieri y van der Vorst [35].

Recientemente de Figueiredo y Ding [28] consideraron el caso $q \geq 2^*$ y probaron que, bajo condiciones de crecimiento adecuadas, el sistema $(\mathcal{H})$ tiene una infinidad de soluciones si f es una función par, es decir, si $f(x,u,v) = f(x,-u,-v)$.

Aquí demostraremos un resultado análogo para funciones f que no son necesariamente pares (Teorema 1.12). Para ello probaremos primero un teorema de multiplicidad de puntos críticos que produce resultados no triviales para funcionales fuertemente indefinidos con perturbación de simetrías (Teorema 1.10). A continuación enunciamos y discutimos nuestros resultados.

1.2 Los resultados

1.2.1 El teorema abstracto

El resultado abstracto que presentamos aquí es un teorema de multiplicidad de puntos críticos que produce resultados no triviales para funcionales fuertemente indefinidos con perturbación de simetrías (véase capítulo cuatro). Está basado en una aproximación tipo Galerkin, como la considerada por Bartsch y Clapp en [7], que nos permite reducir el estudio de funcionales fuertemente indefinidos con perturbación de simetrías a un problema semidefinido. La ventaja de este enfoque es que podemos hacer uso de los métodos de teoría de Morse desarrollados por Bahri-Lions [6] y Tanaka [49] para obtener buenos resultados en las aplicaciones a sistemas elípticos. Una adaptación adecuada del método de Bolle [13] nos permite, a su vez, tener control del crecimiento de los niveles del funcional bajo la perturbación.

Sin embargo, a diferencia del caso simétrico estudiado en [7] y del caso semidefinido estudiado en [14], el problema fuertemente indefinido con perturbación de simetrías requiere de un conocimiento detallado de la topología de los conjuntos de subnivel de las aproximaciones del funcional simétrico asociado. Una discusión más detallada de este punto se dará en la sección.

Enunciamos a continuación nuestro resultado.

Sea X un espacio de Banach con una descomposición en suma directa

$$X = X^+ \oplus X^* \oplus X^-.$$

De acuerdo con esta descomposición denotaremos por $u = (u^+, u^0, u^-)$ a los puntos de X. Sean

$$X_1^+ \subset X_2^+ \subset \cdots \subset X^+, \qquad X_1^* \subset X_2^* \subset \cdots \subset X^*, \qquad X_1^- \subset X_2^- \subset \cdots \subset X^-$$

sucesiones de subespacios de dimensión finita de X^+, X^* y X^-, tal que $\dim X_k^+ = k$. Para cada $k, n \geq 1$, definimos

$$X^n := X^+ \oplus X_n^* \oplus X_n^- \quad \text{y} \quad X_k^n := X_k^+ \oplus X_n^* \oplus X_n^-.$$

y denotamos por $\mathcal{F}$ a la familia de subespacios de X

$$\mathcal{F} = \{X^n : n \geq 1\}.$$

Consideramos la involución $\iota : X \to X$ dada por

$$\iota(u^+, u^*, u^-) = (-u^+, u^*, -u^-).$$

Entonces $X^* = \{u \in X : \iota u = u\}$ es el conjunto de puntos fijos de ι. Diremos que un subespacio V de X es *ι-invariante* si $\iota u \in V$ para toda $u \in V$. Diremos que una función $\sigma : V \to W$ entre dos subespacios ι-invariantes es *ι-equivariante* si $\sigma(\iota u) = \iota\sigma(u)$ para toda $u \in V$.

Sea $\Phi : X \times [0,1] \to \mathbb{R}$ un funcional de clase C^1, y sea $\Phi^n : X^n \times [0,1] \to \mathbb{R}$ su restricción a $X^n \times [0,1]$. Pensamos a Φ y Φ^n como trayectorias de funcionales

$$\begin{aligned} \Phi_t &: X \to \mathbb{R}, \quad \Phi_t(u) = \Phi(u,t), \quad 0 \leq t \leq 1, \\ \Phi_t^n &: X^n \to \mathbb{R}, \quad \Phi_t^n(u) = \Phi^n(u,t), \quad 0 \leq t \leq 1, \ n \geq 1, \end{aligned}$$

y denotamos por

$$\Phi_t'(u) := \frac{\partial}{\partial u}\Phi(u,t), \qquad (\Phi_t^n)'(u) := \frac{\partial}{\partial u}\Phi^n(u,t)$$

a sus derivadas (respecto a u). Supondremos que Φ tiene las siguientes propiedades:

(H1) Φ satisface la *condición (PS^*) para trayectorias con respecto a $\mathcal{F}$*, es decir, toda sucesión (u_k, t_k) en $X \times [0,1]$ tal que

$$u_k \in X^{n_k}, \quad n_k \to \infty, \quad t_k \to t, \quad \Phi_{t_k}(u_k) \to c, \quad \left\|(\Phi_{t_k}^{n_k})'(u_k)\right\| \to 0,$$

tiene una subsucesión que converge a un punto crítico de Φ_t en X.

(H2) Para cada $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, y $b \in \mathbb{R}$ existe una constante $C = C(n,b)$ tal que

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\Phi(u,t)\right| \leq C(\left\|(\Phi_t^n)'(u)\right\|_{(X^n)'} + 1)(\|u\| + 1) \qquad \text{si } u \in X^n, \ \text{y } |\Phi_t(u)| \leq b.$$

(H3) Existen dos funciones continuas $\theta_1, \theta_2 : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\theta_1 \leq \theta_2$, las cuales son Lipschitz continuas en la segunda variable, tales que

$$\theta_1(t, \Phi_t(u)) \leq \frac{\partial}{\partial t}\Phi(u,t) \leq \theta_2(t, \Phi_t(u)) \qquad \text{si} \;\; \Phi_t'(u) = 0.$$

(H4) Para cada subespacio de dimensión finita W de E,

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} \Phi_t(w) \to -\infty \quad \text{cuando } w \in W, \;\; \|w\| \to \infty.$$

(H5) $\Phi_0(\iota u) = \Phi_0(u)$ para toda $u \in X$, y existe $M \geq 0$ tal que $\Phi_t(u^*) \leq M$ para cada $t \in [0,1]$, $u^* \in X^*$.

(H6) $\sup\{\Phi_0(u) : u \in X_k^+ \oplus X^* \oplus X^-\} =: M_k < \infty$.

(H7) Para cada $k \geq 1$ existen $n_k \geq 1$ y una función $\gamma_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no decreciente que cumple lo siguiente: Para toda $n \geq n_k$, toda función continua ι-equivariante $\sigma : X_k^n \to X^n$ y toda $R > 0$ tales que $\sigma(u) = u$ si $\|u\| > R$, existen una función continua ι-equivariante $\widetilde{\sigma} : X_{k+1}^n \to X^n$ y una $\widetilde{R} > R$ tales que $\widetilde{\sigma}(u) = \sigma(u)$ para $u \in X_k^n$, $\sigma(u) = u$ para $\|u\| > \widetilde{R}$, y

$$\sup \Phi_0(\widetilde{\sigma}(X_{k+1}^n)) \leq \gamma_k(\sup \Phi_0(\sigma(X_k^n))).$$

Probaremos el siguiente teorema en el siguiente capítulo:

Teorema 1.10 *Supongamos que Φ satisface **(H1)-(H7)**. Entonces existe una sucesión (c_k) de números reales (véase Definición 2.2) tales que, si la sucesión*

$$\left(\frac{c_{k+1} - c_k}{\max\limits_{0 \leq t \leq 1} |\theta_1(t, c_{k+1})| + \max\limits_{0 \leq t \leq 1} |\theta_2(t, c_k)| + 1} \right) \tag{1.5}$$

es no acotada, entonces Φ_1 tiene una sucesión no acotada de valores críticos.

Si $\Phi_t : X \to \mathbb{R}$ es semidefinido en el sentido de la Definición 1.5 con $X^1 = X^+$ y $X^2 = X^* \oplus X^-$, y satisface las propiedades **(P1)-(P4)** del Teorema 1.9 entonces satisface las condiciones **(H1)-(H7)** (véase 2.6.1). Más aún, los valores c_k del Teorema 1.10 coinciden con los del teorema de Bolle, Ghoussoub y Tehrani (1.2). Sin embargo, si Φ_t es fuertemente indefinido, aún cuando satisfaga las condiciones **(P1)-(P4)** del Teorema 1.9, dicho teorema no es aplicable ya que la sucesión (c_k) definida en (1.2) va a estar siempre acotada (véase 2.6.2). De modo que el Teorema 1.9 no puede ser aplicado para obtener la existencia de una infinidad de valores críticos en el caso fuertemente indefinido. Si $\dim(X^* \oplus X^-) = \infty$, los valores c_k proporcionados por el Teorema 1.10 no coinciden con los definidos en (1.2) y, como veremos en las aplicaciones del Capítulo 4, la sucesión de dichos valores no va a estar necesariamente acotada. Nuestros valores c_k se obtienen como límites de valores críticos adecuados de los funcionales pares semidefinidos $\Phi_0^n : X^n \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$. Esto permite, en las aplicaciones, usar métodos de teoría de Morse para estimar el crecimiento de las c_k's, y derivar condiciones para que la sucesión (1.5) sea no acotada. De modo que, básicamente, este teorema nos permite reducir el estudio de funcionales fuertemente indefinidos con perturbación de simetrías al estudio de funcionales semidefinidos con perturbación de simetrías, tal y como ocurre en el caso simétrico considerado por Bartsch y Clapp [7].

Las condiciones esenciales que permiten esta reducción son, por una parte, la condición (PS^*) para trayectorias con respecto a $\mathcal{F}$, que es una extensión de la condición (PS^*) introducida por Bahri y Berestycki [5] y Li y Liu [38], y que aparece en el teorema de Bartsch y Clapp enunciado arriba (Teorema 1.4). Y, por otra parte, la condición **(H7)**. Esta requiere de un conocimiento bastante fino de la topología de los conjuntos de subnivel del funcional simétrico Φ_0. Por lo general, en las aplicaciones, no es sencillo comprobar que esta propiedad se cumple. Recientemente Castro y Clapp [15] mostraron que cierto tipo de funcionales satisfacen la condición **(H7)**. Usaremos ideas análogas en nuestras aplicaciones a sistemas elípticos fuertemente indefinidos, es decir, el funcional asociado al sistema es fuertemente indefinido.

Además de que nuestro resultado produce resultados no triviales para funcionales fuertemente indefinidos, es una extensión del teorema de Bolle, Ghoussoub y Tehrani (Teorema 1.9) en los siguientes dos sentidos: En primer lugar, nuestro resultado es válido para espacios de Banach y funcionales de clase C^1 (y no sólo para espacios de Hilbert y funcionales de clase C^2). En segundo lugar, nuestro resultado no requiere que el conjunto de puntos fijos sea $X^* = \{0\}$, ni siquiera que X^* sea de dimensión finita. Pero el aspecto más importante es que nuestro resultado no requiere que Φ sea semidefinida, es decir, no requiere que $\dim(X^* \oplus X^-)$ sea finita. Este requerimiento juega un papel esencial para que la sucesión (1.3) no sea necesariamente acotada. Estas ventajas serán utilizadas para probar la existencia de una infinidad de soluciones de sistemas elípticos no simétricos fuertemente indefinidos (Teorema 4.1).

1.2.2 Aplicaciones a sistemas gradientes

Aplicaremos el Teorema 1.10 para obtener una infinidad de soluciones $v = (v_1, \ldots, v_m) : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^m$ del sistema elíptico

$$(\mathcal{G}) \qquad \begin{cases} -\Delta v = \nabla_v H(x, v) & \text{en } \Omega \\ v = u_0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

donde Ω es un dominio suave y acotado de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, $u_0 \in C^2(\partial\Omega, \mathbb{R}^m)$, y $H \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ es de la forma

$$H(x,u) = F(x,u) + f(x,u).$$

Un sistema elíptico de este tipo se llama *sistema gradiente [27]*, y se dice que es *autónomo* si la no linealidad H no depende de x.

Supondremos que F y f satisfacen las siguientes condiciones:

$(\mathbf{F}_1)$ Existe $p \in (2, 2^*)$ y $a_0 > 0$ tal que, para toda $(x,u) \in \Omega \times \mathbb{R}^m$,

$$|\nabla_u F(x,u)| \leq a_0(|u|^{p-1} + 1).$$

$(\mathbf{F}_2)$ Existen $\mu > 2$ y $R > 0$ tales que $\left(\frac{2^*}{2^*-1}\right)(p-1) \leq \mu$ y

$$0 < \mu F(x,u) \leq \nabla_u F(x,u) \cdot u \quad \text{si} \quad |u| \geq R.$$

$(\mathbf{F}_4)$ $F(x,-u) = F(x,u)$ para toda $(x,u) \in \Omega \times \mathbb{R}^m$.

$(\mathbf{f})$ Existen $\gamma \in [0,1)$ y $d_0 > 0$ tales que, para toda $(x,u) \in \Omega \times \mathbb{R}^m$,

$$\begin{aligned} |f(x,u)| + |\nabla_u f(x,u) \cdot u| &\leq d_0(|F(x,u)|^\gamma + 1) \\ |\nabla_u f(x,u)| &\leq d_0(|\nabla_u F(x,u)|^\gamma + 1) \end{aligned}$$

Observe que integrando por partes la condición $(\mathbf{F}_2)$ se obtiene

$(\mathbf{F}_3)$ Existen $b_1, b_2 > 0$ tales que, para toda $(x,u) \in \Omega \times \mathbb{R}^m$,

$$F(x,u) \geq b_1 |u|^\mu - b_2.$$

Si $f \neq 0$ ó $u_0 \neq 0$ el funcional asociado al problema $(\mathcal{G})$ no es par (aunque sí es semidefinido). Probaremos el siguiente resultado:

Teorema 1.11 *Si se cumplen (F_1), (F_2), (F_4) y (f), entonces el problema $(\mathcal{G})$ tiene una infinidad de soluciones si*

$$\max\left\{\frac{p-1}{\mu}, \gamma\right\} < \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2^*}\right) N.$$

Si f es de la forma $f(x,u) = \widetilde{f}(x)u$ entonces f satisface la condición (f) con $\gamma = \frac{1}{\mu}$. En este caso, la condición $\max\left\{\frac{p-1}{\mu}, \gamma\right\} < \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2^*}\right)N$ de nuestro teorema es equivalente a la condición $\frac{\mu}{\mu-p+1} < \frac{2}{N}\frac{p}{p-2}$. Esta última es la condición obtenida por Candela, Salvatore y Squassina en [25], de modo que nuestro resultado extiende el Teorema 1.1 de [25] a no linealidades más generales.

En los casos particulares en los que, o bien $u_0 = 0$, o bien $F(x,u) = F(u)$ no depende de x y $f(x,u) = \widetilde{f}(x)u$, obtendremos resultados más fuertes (véanse los Teoremas 3.9 y 3.11), que extienden resultados previos de Bahri-Lions [6], Tanaka [49] y Bolle, Ghoussoub y Tehrani [14] para una sóla ecuación (es decir, para $m = 1$), así como resultados de Clapp [19], Candela y Salvatore [23], Candela, Salvatore y Squassina [24, 25], Clapp, Hernández-Martínez y el autor de esta tesis [20] para sistemas de ecuaciones.

Los resultados obtenidos por Clapp, Hernández-Martínez y el autor de esta tesis en [20] abarcan simetrías más generales. Prueban que varios de los resultados presentados aquí para sistemas de tipo gradiente siguen siendo válidos si F, en vez de ser par, es invariante bajo la acción ortogonal de un toro $\mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$, o de un q-toro $\mathbb{Z}/q \times \cdots \times \mathbb{Z}/q$, o de un q-grupo cíclico $\mathbb{Z}/q^r$, con q primo, $q > 1$, que actúa sin puntos fijos en $\mathbb{R}^m$, mejorando así un resultado previo de Clapp [19].

Para mantener la unidad en la exposición no incluímos en esta tesis los resultados de [20] en toda su generalidad, es decir, para simetrías arbitrarias. Consideramos sólo el caso clásico donde el grupo es $\mathbb{Z}/2$, pero extendemos los resultados de [20] al caso no autónomo.

1.2.3 Sistemas elípticos fuertemente indefinidos

Consideraremos sistemas elípticos de la forma

$$(\mathcal{H}_{\mathcal{G}}) \qquad \begin{cases} -\Delta u = H_u(x,u,v) & \text{en } \Omega \\ \Delta v = H_v(x,u,v) & \text{en } \Omega \\ u = 0, \quad v = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

donde Ω es un dominio acotado y suave en $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, y $H \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. A este tipo de sistemas se les suele llamar *sistemas elípticos no cooperativos*. Más exactamente, consideraremos sistemas elípticos no cooperativos de la forma

$$(\mathcal{H}) \qquad \begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-2}\, u + f_u(x,u,v) & \text{en } \Omega \\ \Delta v = |v|^{q-2}\, v + f_v(x,u,v) & \text{en } \Omega \\ u = 0, \quad v = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

donde Ω es un dominio acotado y suave en $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, y $f \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Obsérvese que $H(x,u,v) = \frac{1}{p}\,|u|^p + \frac{1}{q}\,|v|^q + f(x,u,v)$.

Nos interesa especialmente el caso en que la función f no es simétrica, y el sistema es subcrítico en u y supercrítico en v, es decir, $p \in (2, 2^*)$, $q \in [2^*, \infty)$, donde $2^* = \frac{2N}{N-2}$ es el exponente crítico de Sobolev, y f es un término no simétrico de orden menor. Probaremos el siguiente teorema:

Teorema 1.12 *Si* $p \in (2, \frac{2N-2}{N-2})$, $q \in [p, \infty)$, *y* $f \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ *satisface*

$$\begin{aligned} |f_u(x,u,v)| &\leq d_0(|u|^{\gamma p-1} + |v|^{\sigma-1} + 1) \\ |f_v(x,u,v)| &\leq d_0(|u|^{\gamma p-1} + |v|^{\gamma q-1} + 1) \end{aligned} \tag{1.6}$$

para toda $(x,u,v) \in \Omega \times \mathbb{R}^2$, *y constantes* $d_0 > 0$, $0 \leq \sigma - 1 \leq \frac{q}{p}(\gamma p - 1)$, *y* $\frac{1}{p} \leq \gamma < \min\left\{\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2^*}\right)N, \frac{q}{q-1}\left(\frac{2^*-1}{2^*}\right)\right\}$ *entonces el sistema* $(\mathcal{H})$ *tiene una infinidad de soluciones.*

A diferencia de nuestros resultados para sistemas gradientes, este resultado requiere del Teorema 1.10 en toda su fuerza: El funcional asociado a este sistema es un funcional de clase C^1 definido en un espacio de Banach (pero no de Hilbert), y es además fuertemente indefinido.

Si, adicionalmente, f es par (es decir, si $f(x,u,v) = f(x,-u,-v)$) de Figueiredo y Ding [28] probaron que el Teorema 1.12 es válido bajo condiciones de crecimiento más débiles sobre f. Nuestras condiciones se derivan básicamente de consideraciones que involucran al índice de Morse, análogamente a lo que ocurre en el caso de Bahri-Lions (Teorema 1.7) y Tanaka [49]. En particular, si $f(x,u,v) = g(x)u$ y $p \in (2, \frac{2N-2}{N-2})$, el teorema anterior asegura la existencia de una infinidad de soluciones del problema elíptico perturbado

$$-\Delta u = |u|^{p-2}\, u + g(x) \ \text{ en } \Omega, \qquad u = 0 \ \text{ en } \partial\Omega,$$

que es justamente el resultado de Bahri-Lions (Teorema 1.7).

Para demostrar este teorema usaremos, como mencionamos antes, nuestro resultado abstracto. Un punto fundamental para ver que el funcional asociado al sistema $(\mathcal{H})$ satisface las hipótesis del Teorema 1.10 consiste en un análisis cuidadoso de los conjuntos de subnivel de las aproximaciones del funcional simétrico asociado. La descripción que daremos aquí nos permitirá además obtener estimaciones para la energía de las soluciones de $(\mathcal{H})$, análogas a las dadas por Bahri-Lions en el caso de una sóla ecuación simétrica [6] y recientemente extendidas por Castro y Clapp al caso de una sóla ecuación perturbada [15].

1.3 Organización de la tesis

La tesis está organizada de la siguiente manera:

En el Capítulo 2 demostramos nuestro resultado abstracto aplicable tanto para funcionales semidefinidos como fuertemente indefinidos con perturbación de simetrías, es decir, el Teorema 1.10.

En el Capítulo 3 aplicamos nuestro resultado abstracto para establecer la existencia de una infinidad de soluciones de sistemas elípticos de tipo gradiente. Probamos el Teorema 1.11 y los resultados anunciados en la sección 1.2.2.

En el Capítulo 4 aplicamos nuestro resultado abstracto para establecer la existencia de una infinidad de soluciones de sistemas elípticos no cooperativos fuertemente indefinidos y probamos una versión más general del Teorema 1.12 citado arriba y las estimaciones mencionadas.

En el Capítulo 5 mencionamos algunos problemas que quedaron pendientes y que planeamos desarrollar en un futuro próximo.

Incluímos un apéndice en el cual damos un bosquejo de la prueba del Lema de Deformación, usada en el Capítulo 2 (véase el Lema 2.5) y, finalmente probamos la diferenciabilidad de los funcionales que aparecen en nuestras aplicaciones.

Capítulo 2

Puntos críticos de funcionales fuertemente indefinidos con perturbación de simetrías

El objetivo de este capítulo es probar el Teorema 1.10, el cual da un criterio para la existencia de una infinidad de puntos críticos de funcionales fuertemente indefinidos con perturbación de simetrías. Empezaremos recordando las hipótesis de ese resultado.

2.1 Hipótesis del teorema

Sea X un espacio de Banach con una descomposición en suma directa

$$X = X^+ \oplus X^* \oplus X^-.$$

De acuerdo con esta descomposición denotaremos por $u = (u^+, u^*, u^-)$ a los puntos de X.

Sean

$$X_1^+ \subset X_2^+ \subset \cdots \subset X^+, \qquad X_1^* \subset X_2^* \subset \cdots \subset X^*, \qquad X_1^- \subset X_2^- \subset \cdots \subset X^-$$

sucesiones de subespacios de dimensión finita de X^+, X^* y X^-, tal que $\dim X_k^+ = k$. Para cada $k, n \geq 1$, definimos

$$X^n := X^+ \oplus X_n^* \oplus X_n^- \quad \text{y} \quad X_k^n := X_k^+ \oplus X_n^* \oplus X_n^- \ ;$$

y denotamos por $\mathcal{F}$ a la familia de subespacios de X

$$\mathcal{F} = \{X^n : n \geq 1\}$$

Consideramos la involución $\iota : X \to X$ dada por

$$\iota(u^+, u^*, u^-) = (-u^+, u^*, -u^-).$$

Entonces $X^* = \{u \in X : \iota u = u\}$ es el conjunto de puntos fijos de ι.

Definición 2.1 *Diremos que un subespacio V de X es ι-invariante si $\iota u \in V$ para toda $u \in V$. Diremos que una función $\sigma : V \to W$ entre dos subespacios ι-invariantes es ι-equivariante si $\sigma(\iota u) = \iota\sigma(u)$ para toda $u \in V$, y que es ι-invariante si $\sigma(\iota u) = \sigma(u)$ para toda $u \in V$.*

Sea $\Phi : X \times [0,1] \to \mathbb{R}$ un funcional de clase C^1, y sea $\Phi^n : X^n \times [0,1] \to \mathbb{R}$ su restricción a $X^n \times [0,1]$. Pensamos a Φ y Φ^n como trayectorias de funcionales

$$\begin{aligned} \Phi_t &: X \to \mathbb{R}, \quad \Phi_t(u) = \Phi(u,t), \quad 0 \le t \le 1, \\ \Phi_t^n &: X^n \to \mathbb{R}, \quad \Phi_t^n(u) = \Phi^n(u,t), \quad 0 \le t \le 1,\ n \ge 1, \end{aligned}$$

y denotamos por

$$\Phi_t'(u) := \frac{\partial}{\partial u}\Phi(u,t), \qquad (\Phi_t^n)'(u) := \frac{\partial}{\partial u}\Phi^n(u,t)$$

a sus derivadas (respecto a u). Supondremos que Φ tiene las siguientes propiedades:

(H1) Φ satisface la *condición (PS***) para trayectorias con respecto a $\mathcal{F}$*, es decir, toda sucesión (u_k, t_k) en $X \times [0,1]$ tal que

$$u_k \in X^{n_k}, \quad n_k \to \infty, \quad t_k \to t, \quad \Phi_{t_k}(u_k) \to c, \quad \left\|(\Phi_{t_k}^{n_k})'(u_k)\right\| \to 0,$$

tiene una subsucesión que converge a un punto crítico de Φ_t en X.

(H2) Para cada $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, y $b \in \mathbb{R}$ existe una constante $C = C(n,b)$ tal que

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\Phi(u,t)\right| \le C(\left\|(\Phi_t^n)'(u)\right\|_{(X^n)'} + 1)(\|u\| + 1) \qquad \text{si } u \in X^n, \ \text{ y } |\Phi_t(u)| \le b.$$

(H3) Existen dos funciones continuas $\theta_1, \theta_2 : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\theta_1 \le \theta_2$, las cuales son Lipschitz continuas en la segunda variable, tales que

$$\theta_1(t, \Phi_t(u)) \le \frac{\partial}{\partial t}\Phi(u,t) \le \theta_2(t, \Phi_t(u)) \qquad \text{si } \Phi_t'(u) = 0.$$

(H4) Para cada subespacio de dimensión finita W de X y $a \in \mathbb{R}$ existe $R > 0$ tal que $\Phi_t(w) \leq a$ para todas $t \in [0,1]$ y $w \in W$ con $\|w\| \geq R$.

(H5) $\Phi_0(\iota u) = \Phi_0(u)$ para toda $u \in X$, y existe $M \geq 0$ tal que $\Phi_t(u^*) \leq M$ para cada $t \in [0,1]$, $u^* \in X^*$.

(H6) $\sup\{\Phi_0(u) : u \in X_k^+ \oplus X^0 \oplus X^-\} =: M_k < \infty$ para toda $k \geq 1$.

(H7) Para cada $k \geq 1$ existen $n_k \geq 1$ y una función $\ell_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no decreciente que cumple lo siguiente: Para toda $n \geq n_k$, toda función continua ι-equivariante $\sigma : X_k^n \to X^n$ y toda $R > 0$ tales que $\sigma(u) = u$ si $\|u\| > R$, existen una función continua ι-equivariante $\widetilde{\sigma} : X_{k+1}^n \to X^n$ y una $\widetilde{R} > R$ tales que $\widetilde{\sigma}(u) = \sigma(u)$ para $u \in X_k^n$, $\widetilde{\sigma}(u) = u$ para $\|u\| > \widetilde{R}$, y

$$\sup \Phi_0(\widetilde{\sigma}(X_{k+1}^n)) \leq \ell_k(\sup \Phi_0(\sigma(X_k^n))).$$

El objetivo de este capítulo es demostrar el siguiente resultado, enunciado en la introducción:

Teorema 1.10. *Supongamos que Φ satisface (H1)-(H7). Entonces existe una sucesión (c_k) de números reales tales que, si la sucesión*

$$\left(\frac{c_{k+1} - c_k}{\max\limits_{0 \leq t \leq 1} |\theta_1(t, c_{k+1})| + \max\limits_{0 \leq t \leq 1} |\theta_2(t, c_k)| + 1} \right) \tag{2.1}$$

no está acotada, entonces Φ_1 tiene una sucesión no acotada de valores críticos.

A continuación definiremos los valores c_k involucrados en este teorema.

2.2 Definición de c_k y propiedad de enlace

Definición 2.2 *Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos*

$$c_k^n := \inf_{\sigma \in \Gamma_k^n} \sup_{u \in X_k^n} \Phi_0(\sigma(u))$$

donde Γ_k^n es el conjunto de las funciones continuas $\sigma \in C^0(X_k^n, X^n)$ que cumplen las siguientes tres propiedades:

(i) σ es ι-equivariante, es decir, $\sigma(\iota(u)) = \iota(\sigma(u))$ para cada $u \in X_k^n$,

(ii) Existe $R > 0$ tal que $\sigma(u) = u$ si $\|u\| > R$.

(iii) $\sigma(u) = u$ para toda $u \in X_n^*$.

Una consecuencia importante de la definición de c_k^n es la siguiente propiedad de enlace.

Proposición 2.3 *Sea* $e \in X_{k+1}^+ \setminus X_k^+$ *y sea*

$$\vartheta : \{v + se \in X_{k+1}^n : v \in X_k^n,\ s \in [0, \infty)\} \to X^n$$

una función continua con las siguientes propiedades:
i) $\vartheta \mid X_k^n$ *es* ι*-equivariante.*
ii) Existe $R > 0$ *tal que* $\vartheta(u) = u$ *si* $\|u\| > R$.
iii) $\vartheta(v) = v$ *para toda* $v \in X_n^*$.
Entonces existe un punto $(v_0, s_0) \in X_k^n \times [0, \infty)$ *tal que*

$$\Phi_0(\vartheta(v_0 + s_0 e)) \geq c_{k+1}^n.$$

Demostración: Consideremos la extensión $\widetilde{\vartheta} : X_{k+1}^n \to X^n$ de ϑ definida como sigue:

$$\widetilde{\vartheta}(v + se) := \iota\vartheta(\iota v - se) \quad \text{si } (v, s) \in X_k^n \times (-\infty, 0].$$

Recordemos que, por hipótesis, $\dim X_{k+1}^n = \dim X_k^n + 1$. Dado que $\vartheta \mid X_k^n$ es ι-equivariante, $\widetilde{\vartheta}$ está bien definida y es continua. Además, por definición, $\widetilde{\vartheta}$ es ι-equivariante y satisface que $\widetilde{\vartheta}(u) = u$ si $\|u\| > R$, y que $\widetilde{\vartheta}(v) = v$ para toda $v \in X_n^*$. Es decir, $\widetilde{\vartheta} \in \Gamma_{k+1}^n$. Por definición de c_{k+1}^n existe $u_0 \in X_{k+1}^n$ tal que $\Phi_0(\widetilde{\vartheta}(u_0)) \geq c_{k+1}^n$ y, como $\Phi_0 \circ \iota = \Phi_0$ por la propiedad **(H5)**, también ιu_0 satisface que $\Phi_0(\widetilde{\vartheta}(\iota u_0)) \geq c_{k+1}^n$. De modo que, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $u_0 = v_0 + s_0 e$ con $(v_0, s_0) \in X_k^n \times [0, \infty)$. ∎

Obsérvese que básicamente lo que dice este resultado es que

$$\Phi_0^{\geq c_{k+1}^n} \cap \sigma\left(X_k^n \times [0, \infty)\right) \neq \emptyset, \quad \forall \sigma \in \Gamma_{k+1}^n.$$

En la sección 3 veremos que esta propiedad de enlace se preserva, en un cierto sentido, bajo el flujo gradiente de la familia Φ_t. Ello nos permitirá encontrar valores críticos para Φ_1.

Dado que la inclusión $X_k^n \hookrightarrow X^n$ pertenece a Γ_k^n, la propiedad **(H6)** garantiza que

$$c_k^n \leq \sup_{u \in X_k^n} \Phi_0(u) \leq M_k < \infty \quad \text{para toda } k, n \geq 1. \tag{2.2}$$

Notemos además que

$$\Phi_0(0) \leq c_k^n \leq c_{k+1}^n \quad \text{para toda } k, n \geq 1 \tag{2.3}$$

Los valores c_k que aparecen en el Teorema 1.10 se definen como sigue.

Definición 2.4 *Para cada $k \geq 1$ definimos*

$$c_k := \limsup_{n\to\infty} c_k^n.$$

En vista de (2.2) este límite es finito, y por (2.3) cumple que

$$\Phi_0(0) \leq c_k \leq c_{k+1} < \infty \quad \text{para toda } k \geq 1.$$

Sin pérdida de generalidad (tomando una subsucesión si es necesario) podemos suponer que

$$c_k^n \to c_k \quad \text{cuando } n \to \infty.$$

Supondremos también, de aquí en adelante, que las condiciones **(H1)**-**(H7)** se cumplen y que la sucesión (1.5) del Teorema 1.10

$$\left(\frac{c_{k+1} - c_k}{\max\limits_{0\leq t\leq 1} |\theta_1(t, c_{k+1})| + \max\limits_{0\leq t\leq 1} |\theta_2(t, c_k)| + 1} \right)$$

no está acotada.

2.3 Un lema de deformación

Una de las condiciones esenciales que permite reducir el estudio de funcionales fuertemente indefinidos con perturbación de simetrías al estudio de funcionales semidefinidos con perturbación de simetrías es la condición (PS^*) para trayectorias con respecto a $\mathcal{F}$, que es una extensión de la condición (PS^*) introducida por Bahri y Berestycki [5] y Li y Liu [38], y que juega también un papel importante en el teorema de Bartsch y Clapp enunciado en la introducción (Teorema 1.4).

La propiedad **(H1)** implica, en particular, que cada $\Phi_t : X \to \mathbb{R}$ satisface la *condición (PS^*) con respecto a $\mathcal{F}$*, es decir, que toda sucesión (u_k, t) en $X \times [0,1]$ tal que

$$u_k \in X^{n_k}, \quad n_k \to \infty, \quad \Phi_t(u_k) \to c, \quad \|(\Phi_t^{n_k})'(u_k)\| \to 0,$$

tiene una subsucesión que converge a un punto crítico de Φ_t en X.

Esta propiedad es suficiente para demostrar el siguiente lema de deformación. Denotamos por

$$\Phi_t^{\leq a} := \{u \in X : \Phi_t(u) \leq a\}$$

a los conjuntos de subnivel de Φ_t. El siguiente Lema de Deformación fue demostrado por Bartsch y Clapp [7]

Lema 2.5 (de deformación)
a) Para toda $t \in [0,1]$ *y toda* $c \in \mathbb{R}$, $K_c = \{u \in X : \Phi_t(u) = c,\ \Phi_t'(u) = 0\}$ *es compacto.*
b) Si Φ_t *no tiene ningún valor crítico en el intervalo* $[a,b]$ *entonces existen* $n_0 \in \mathbb{N}$, *y una sucesión de homotopías* $H^n : X^n \times [0,1] \to X^n$, $n \geq n_0$, *tales que*

$$\begin{array}{lll} b.1) & H^n(u,0) = u & \forall u \in X^n \\ b.2) & H^n(u,s) = u & \forall u \in \Phi_t^{\leq a} \cap X^n,\ 0 \leq s \leq 1, \\ b.3) & H^n(u,1) \in \Phi_t^{\leq a} \cap X^n & \forall u \in \Phi_t^{\leq b} \cap X^n \end{array}$$

Si $t = 0$ *entonces* H^n *satisface además*

$$H^n(\iota u, s) = \iota H^n(u,s) \quad \forall u \in X^n,\ 0 \leq s \leq 1.$$

Demostración: a) Como Φ_t satisface la condición (PS^*) con respecto a $\mathcal{F}$, toda sucesión (u_n) en K_c tiene una subsucesión que converge a un punto crítico u de Φ_t. Por la continuidad de Φ_t se cumple que $u \in K_c$.

b) Si Φ_t no tiene ningún valor crítico en $[a,b]$ entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para toda $n \geq n_0$, $\Phi_t^n = \Phi_t\,|_{X^n}$ no tiene ningún valor crítico en $[a,b]$. De lo contrario, existiría una sucesión

$$u_k \in X^{n_k}, \quad n_k \to \infty, \quad \Phi_t(u_k) \to c \in [a,b], \quad (\Phi_t^{n_k})'(u_k) = 0.$$

Como Φ_t satisface la condición (PS^*) con respecto a $\mathcal{F}$ la sucesión (u_k) contendría una subsucesión convergente a un punto crítico de Φ_t con valor crítico en $[a,b]$ contradiciendo nuestra hipótesis. El lema clásico de deformación de Palais para funcionales en espacios de Banach (véase Apéndice A) asegura la existencia de las homotopías deseadas.
Si $t = 0$ entonces, por la hipótesis **(H5)**, Φ_0 es ι-invariante y su flujo gradiente negativo se puede tomar ι-equivariante. Por tanto, las homotopías satisfacen

$$H^n(\iota u, s) = \iota H^n(u,s) \quad \forall u \in X^n,\ 0 \leq s \leq 1,$$

como se afirma. ∎

Nótese que el lema no afirma que las homotopías de los incisos b) y c) deban ser compatibles entre sí, es decir, no afirma que H^n sea la restricción de H^{n+1}. Una consecuencia de este lema, que no usaremos en la demostración del Teorema 1.10 pero que vale la pena señalar, es la siguiente.

Corolario 2.6 *Si* $c_k > M$ *(con* M *como en* ***(H5)****) entonces* c_k *es un valor crítico de* Φ_0.

Demostración: Supongamos que c_k es un valor regular de Φ_0. La condición (PS^*) con respecto a $\mathcal{F}$ asegura la existencia de $\varepsilon > 0$ tal que Φ_0 no tiene valores críticos en $[c_k - 2\varepsilon, c_k + 2\varepsilon]$. Podemos suponer que $c_k - 2\varepsilon > M$. Para $a = c_k - 2\varepsilon$ y $b = c_k + 2\varepsilon$, escogemos n_0 y H^n como en el lema anterior. Suponemos además que $c_k^n \in [c_k - \varepsilon, c_k + \varepsilon]$ para toda $n \geq n_0$. Sea $\sigma \in \Gamma_k^n$ tal que $\sup_{u \in B_k^n} \Phi_0(\sigma(u)) \leq c_k^n + \varepsilon$, y sea $\widehat{\sigma}(u) = H^n(\sigma(u), 1)$. Como $H^n(\,\cdot\,, 1)$ es ι-equivariante, $\widehat{\sigma} \in \Gamma_k^n$. Pero $\sup_{u \in B_k^n} \Phi_0(\widehat{\sigma}(u)) \leq c_k - 2\varepsilon \leq c_k^n - \varepsilon$ contradiciendo la definición de c_k^n. ■

En la demostración anterior jugó un papel esencial el hecho de que $H^n(\,\cdot\,, t)$ es ι-equivariante. Una homotopía tal existe porque Φ_0 es ι-invariante. Dado que Φ_1 no es ι-invariante no se puede aplicar a ella un argumento semejante. Veremos a continuación que las hipótesis del Teorema 1.10 garantizan que la propiedad de enlace de los valores c_k^n de Φ_0 (Proposición 2.3) se preserva a lo largo del flujo gradiente negativo de la familia Φ_t. Es decir, la topología de la gráfica de Φ_t no cambia de manera esencial. Esto nos permitirá probar que Φ_1 tiene una infinidad de valores críticos.

2.4 Preservación de enlaces

De las propiedades **(H1)** y **(H3)** se obtiene el siguiente resultado.

Lema 2.7 *Para cada $b, \delta > 0$ existen $n_0 \in \mathbb{N}$ y $\rho > 0$ tales que*

$$\theta_1(t, \Phi_t(u)) - \delta < \frac{\partial}{\partial t}\Phi(u,t) < \theta_2(t, \Phi_t(u)) + \delta$$

para toda $(u,t) \in X^n \times [0,1]$ con $n \geq n_0$, $|\Phi_t(u)| < b$ y $\|(\Phi_t^n)'(u)\| < \rho$.

Demostración: Argumentando por contradicción, supongamos que existen b, $\delta > 0$, y $(u_k, t_k) \in X^{n_k} \times [0,1]$ tales que

$$n_k \to \infty, \quad t_k \to t, \quad |\Phi_{t_k}(u_k)| < b, \quad \text{y} \quad \left\| \left(\Phi_{t_k}^{n_k}\right)'(u_k) \right\| \to 0$$

cuando $k \to \infty$, y que además cumplen

$$\theta_1(t_k, \Phi_{t_k}(u_k)) - \delta \geq \frac{\partial}{\partial t}\Phi(u_k, t_k) \quad \text{ó} \quad \frac{\partial}{\partial t}\Phi(u_k, t_k) \geq \theta_2(t_k, \Phi_{t_k}(u_k)) + \delta.$$

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que (u_k, t_k) satisface la primera desigualdad

$$\theta_1(t_k, \Phi_{t_k}(u_k)) - \delta \geq \frac{\partial}{\partial t}\Phi(u_k, t_k)$$

Por **(H1)** existe una subsucesión de (u_k) que converge a un punto crítico u de Φ_t. Entonces, por continuidad,

$$\theta_1(t, \Phi_t(u)) - \delta \geq \frac{\partial}{\partial t}\Phi(u, t)$$

contradiciendo **(H3)**. ∎

Fijemos $\delta > 0$. Para θ_1 y θ_2 como en **(H3)** consideremos los flujos $\zeta_1, \zeta_2 : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidos por

$$\begin{cases} \zeta_1(0, s) = s \\ \frac{\partial}{\partial t}\zeta_1(t, s) = \theta_1(t, \zeta_1(t, s)) - \delta \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} \zeta_2(0, s) = s \\ \frac{\partial}{\partial t}\zeta_2(t, s) = \theta_2(t, \zeta_2(t, s)) + \delta \end{cases}.$$

Nótese que ζ_1 y ζ_2 son continuas, que $\zeta_1 \leq \zeta_2$, y que $\zeta_1(t, \cdot\,)$ y $\zeta_2(t, \cdot\,)$ son no-decrecientes en la segunda variable.

Adaptando el método de Bolle [13] usaremos el flujo gradiente de la familia de funcionales Φ_t para definir deformaciones que preserven los conjuntos de subnivel y supernivel de la familia, en el siguiente sentido:

Proposición 2.8 *Para cada par de números reales $d_1 \leq d_2$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ y, para cada $n \geq n_0$ y cada $\nu = 1, 2$, existe una homotopía $\eta_\nu^n : X^n \times [0,1] \to X^n$ con las siguientes propiedades:*

i) $\eta_\nu^n(u, 0) = u$ para cada $u \in X^n$.

ii) $\eta_\nu^n(u, t) = u$ si $\Phi_t(u) \leq \min_{0\leq t\leq 1} \zeta_\nu(t, d_1) - 1$ ó $\Phi_t(u) \geq \max_{0\leq t\leq 1} \zeta_\nu(t, d_2) + 1$.

iii) $\eta_\nu^n(\cdot, t) : X^n \to X^n$ es un homeomorfismo para cada $t \in [0,1]$.

iv) Si $c \in [d_1, d_2]$ y $\Phi_0(u) \geq c$ entonces $\Phi_t(\eta_1^n(u, t)) \geq \zeta_1(t, c)$ para cada $t \in [0,1]$.

v) Si $c \in [d_1, d_2]$ y $\Phi_0(u) \leq c$ entonces $\Phi_t(\eta_2^n(u, t)) \leq \zeta_2(t, c)$ para cada $t \in [0,1]$.

Demostración: Extenderemos el argumento de Bolle [13, Proof of Theorem 3] a espacios de Banach y funcionales de clase C^1 como sigue. Sea $M^n = \{(u,t) \in X^n \times [0,1] : (\Phi_t^n)'(u) \neq 0\}$ y sea $W^n : M^n \to X^n$ un campo vectorial pseudogradiente para la aplicación $(u,t) \mapsto (\Phi_t^n)'(u)$, esto es, W^n es localmente Lipschitz y satisface

$$\|W^n(u,t)\| \leq 2\,\|(\Phi_t^n)'(u)\| \quad \text{y} \quad (\Phi_t^n)'(u)\,(W^n(u,t)) \geq \|(\Phi_t^n)'(u)\|^2 \qquad (2.4)$$

para cada $(u,t) \in M^n$. Dicho campo existe (véase Apéndice A). Sea $\alpha_\nu = \min\{\zeta_\nu(t, d_1) : 0 \leq t \leq 1\}$ y $\beta_\nu = \max\{\zeta_\nu(t, d_2) : 0 \leq t \leq 1\}$. Para $b = \max\{|\alpha_\nu|, |\beta_\nu| : \nu = 1, 2\}$

y la δ que fijamos arriba, escojamos $n_0 \in \mathbb{N}$ y $\rho > 0$ como en el Lema 2.7. Sean $\lambda_\nu, \mu \in C^\infty(\mathbb{R}, [0,1])$ tales que $\lambda_\nu \equiv 0$ en $(-\infty, \alpha_\nu - \frac{1}{2}] \cup [\beta_\nu + \frac{1}{2}, \infty)$ y $\lambda_\nu \equiv 1$ en $[\alpha_\nu, \beta_\nu]$, y $\mu \equiv 0$ en $[-\frac{\rho}{2}, \frac{\rho}{2}]$ y $\mu \equiv 1$ en $(-\infty, -\rho] \cup [\rho, \infty)$.

Fijemos $n \geq n_0$ y consideremos los campos vectoriales $V_\nu^n : X^n \times [0,1] \to X^n$ dados por

$$V_1^n(u,t) = 4\left((\frac{\partial}{\partial t}\Phi)^-(u,t) + 1 + \theta_1^+(t, \zeta_1(t,c))\right)\lambda_1(\Phi_t(u))\mu(\|W^n(u,t)\|)\frac{W^n(u,t)}{\|W^n(u,t)\|^2}$$
$$V_2^n(u,t) = -4\left((\frac{\partial}{\partial t}\Phi)^+(u,t) + 1 + \theta_2^-(t, \zeta_2(t,c))\right)\lambda_2(\Phi_t(u))\mu(\|W^n(u,t)\|)\frac{W^n(u,t)}{\|W^n(u,t)\|^2}$$

si $(u,t) \in M^n$, y por $V_\nu^n = 0$ en caso contrario; donde $h^\pm := \max\{\pm h, 0\} \geq 0$. Obsérvese que $V_\nu^n(u,t) = 0$ si $\Phi_t(u) \notin [\alpha_\nu - \frac{1}{2}, \beta_\nu + \frac{1}{2}]$ ó $\|W^n(u,t)\| \leq \frac{\rho}{2}$. Por otro lado, si $\Phi_t(u) \in [\alpha_\nu - \frac{1}{2}, \beta_\nu + \frac{1}{2}]$ y $\|W^n(u,t)\| \geq \frac{\rho}{2}$ entonces las condiciones **(H2)** y (2.4) implican que

$$\begin{aligned}\|V_\nu^n(u,t)\| &\leq \frac{4(\left|(\frac{\partial}{\partial t}\Phi)(u,t)\right| + 1 + |\theta_\nu(t, \zeta_\nu(t,c))|)}{\|W^n(u,t)\|} \\ &\leq \frac{C_1(\|(\Phi_t^n)'(u)\| + 1)(\|u\| + 1)}{\|W^n(u,t)\|} \\ &= C_1\left(\frac{\|(\Phi_t^n)'(u)\|}{\|W^n(u,t)\|} + \frac{1}{\|W^n(u,t)\|}\right)(\|u\| + 1) \\ &\leq C_1\left(1 + \frac{2}{\rho}\right)(\|u\| + 1) \leq C_2(\|u\| + 1)\end{aligned}$$

para algunas constantes positivas C_1 y C_2. Esto, y el hecho de que V_ν^n es localmente Lipschitz (véase [33]) implican la existencia de un flujo global $\eta_\nu^n : X^n \times [0,1] \to X^n$ dado por

$$\begin{cases} \eta_\nu^n(u,0) = u \\ \frac{\partial}{\partial t}\eta_\nu^n(u,t) = V_\nu^n(\eta_\nu^n(u,t), t) \end{cases}.$$

(véase [46], Capítulo 4). Las propiedades *i)-iii)* son inmediatas. Probemos *iv):* Sea $u \in X^n$ tal que $\Phi_0(u) \geq c$ con $c \in [d_1, d_2]$. Sea $f(t) := \Phi_t(\eta_1^n(u,t))$. Dado que $f(0) = \Phi_0(u) \geq c = \zeta_1(0,c)$ es suficiente mostrar que

$$f(t) = \zeta_1(t,c) \Longrightarrow f'(t) > \frac{\partial}{\partial t}\zeta_1(t,c) = \theta_1(t, \zeta_1(t,c)) - \delta. \tag{2.5}$$

Así, supongamos que $f(t) = \zeta_1(t,c)$. Entonces $\lambda_1(f(t)) = 1$ debido a que $\alpha \leq \zeta_1(t,c) \leq \beta$. Así, tomando

$$\varphi(t) := (\frac{\partial}{\partial t}\Phi)^-(\eta_1^n(u,t), t) + 1 + \theta_1^+(t, \zeta_1(t,c)),$$

obtenemos que

$$\begin{aligned}
f'(t) &= (\Phi_t^n)'(\eta_1^n(u,t))\,(V_1^n(\eta_1^n(u,t),t)) + \frac{\partial}{\partial t}\Phi(\eta_1^n(u,t),t) \\
&= 4\varphi(t)\mu(\|W^n(\eta_1^n(u,t),t)\|)\frac{(\Phi_t^n)'(\eta_1^n(u,t))\,(W^n(\eta_1^n(u,t),t))}{\|W^n(\eta_1^n(u,t),t)\|^2} + \frac{\partial}{\partial t}\Phi(\eta_1^n(u,t),t) \\
&\geq \varphi(t)\mu(\|W^n(\eta_1^n(u,t),t)\|) + \frac{\partial}{\partial t}\Phi(\eta_1^n(u,t),t).
\end{aligned}$$

Si $\|W^n(\eta_1^n(u,t),t)\| < \rho$ entonces $\|(\Phi_t^n)'(\eta_1^n(u,t))\| < \rho$ y, por el Lema 2.7,

$$f'(t) \geq \frac{\partial}{\partial t}\Phi(\eta_1^n(u,t),t) > \theta_1(t,\zeta_1(t,c)) - \delta.$$

Si $\|W^n(\eta_1^n(u,t),t)\| \geq \rho$ entonces $\mu(\|W^n(\eta_1^n(u,t),t)\|) = 1$, y así

$$f'(t) \geq \varphi(t) + \frac{\partial}{\partial t}\Phi(\eta_1^n(u,t),t) \geq \theta_1(t,\zeta_1(t,c)) > \theta_1(t,\zeta_1(t,c)) - \delta.$$

Esto prueba (2.5). Por lo tanto, η_1^n satisface *iv)*. De manera totalmente análoga se prueba que η_2^n satisface *v)*. ∎

Definición 2.9 *Dado un subconjunto A de X^n, definimos $\Gamma_k^n(A)$ como el conjunto de todas las funciones continuas $\tau \in C^0(X^n, X^n)$ tales que:*
(i) $\tau(u) = u$ *para toda* $u \in A$
(ii) *Existe* $R > 0$ *tal que* $\tau(u) = u$ *si* $u \in X_{k+1}^n$ *y* $\|u\| \geq R$.

Sea $M \geq 0$ como en **(H5)**, y sean ℓ_k y n_k como en **(H7)**. Probaremos a continuación una propiedad de enlace para Φ_1.

Proposición 2.10 *Para cada $k \in \mathbb{N}$ tal que*

$$M + 1 \leq \zeta_2(t, c_k) < \zeta_1(t, c_{k+1}) \quad \text{para toda } t \in [0,1], \tag{2.6}$$

existen $0 < \varepsilon_k < 1$ y $m_k \geq n_k$ y, para cada $n \geq m_k$, existen dos subconjuntos $A_k^n \subset B_k^n$ de X^n con las siguientes propiedades:

a) $\sup \Phi_1(A_k^n) \leq \zeta_2(1, c_k + \varepsilon_k) < \zeta_1(1, c_{k+1} - \varepsilon_k)$.
b) $\sup \Phi_1(B_k^n) \leq \zeta_2(1, \ell_k(c_k + \varepsilon_k))$.
c) $\inf_{\tau \in \Gamma_k^n(A_k^n)} \sup \Phi_1(\tau(B_k^n)) \geq \zeta_1(1, c_{k+1} - \varepsilon_k)$.

Demostración: Fijemos $0 < \varepsilon_k < 1$ tal que

$$\zeta_2(t, c_k + \varepsilon_k) < \zeta_1(t, c_{k+1} - \varepsilon_k) \quad \text{para toda } t \in [0,1]. \tag{2.7}$$

Esto es posible por (2.6) y por la continuidad de ζ_1, ζ_2. Por definición de c_k y c_{k+1} existe $m_k \geq n_k$ tal que, para cada $n \geq m_k$,

$$c_k^n < c_k + \varepsilon_k \quad \text{y} \quad c_{k+1}^n > c_{k+1} - \varepsilon_k,$$

Tomando m_k suficientemente grande, por la Proposición 2.8, podemos suponer además que existen homotopías $\eta_\nu^n : X^n \times [0,1] \to X^n$ que satisfacen las propiedades *i)-v)* de la Proposición 2.8 con $d_1 = d_2 = c_{k+1} - \varepsilon_k$ si $\nu = 1$, y con $d_1 = c_k + \varepsilon_k$ y $d_2 = \ell_k(c_k + \varepsilon_k)$ si $\nu = 2$. En particular, estas homotopías cumplen que

$$\Phi_t(\eta_1^n(u,t)) \geq \zeta_1(t, c_{k+1} - \varepsilon_k) \quad \text{si} \quad \Phi_0(u) \geq c_{k+1} - \varepsilon_k \tag{2.8}$$
$$\Phi_t(\eta_2^n(u,t)) \leq \zeta_2(t, c) \quad \text{si} \quad \Phi_0(u) \leq c \;\; \text{y} \;\; c \in [c_k + \varepsilon_k, \ell_k(c_k + \varepsilon_k)] \tag{2.9}$$

para toda $t \in [0,1]$. Fijemos $n \geq m_k$ y tomemos $\sigma \in \Gamma_k^n$ tal que

$$\sup \Phi_0(\sigma(X_k^n)) \leq c_k + \varepsilon_k, \tag{2.10}$$

es decir,

$$\sigma(X_k^n) \subset X^n \cap \Phi_0^{\leq c_k + \varepsilon_k}.$$

Por (2.9) con $c = c_k + \varepsilon_k$ se tiene que

$$(\eta_2^n)_t(\sigma(X_k^n)) \subset X^n \cap \Phi_t^{\leq \zeta_2(t, c_k + \varepsilon_k)},$$

y por (2.8) se tiene que

$$(\eta_1^n)_t(\Phi_0)^{> c_{k+1} - \varepsilon_k} \subset X^n \cap \Phi_t^{\geq \zeta_1(t, c_{k+1} - \varepsilon_k)},$$

Estas desigualdades, junto con (2.7), implican que

$$(\eta_2^n)_t(\sigma(X_k^n)) \cap (\eta_1^n)_t(\Phi_0^n)^{> c_{k+1} - \varepsilon_k} = \emptyset \text{ para toda } t \in [0,1], \tag{2.11}$$

donde $(\Phi_0^n)^{> c_{k+1} - \varepsilon_k} := \{u \in X^n : \Phi_0(u) > c_{k+1} - \varepsilon_k\}$.
Por la propiedad **(H7)** σ tiene una extensión $\widetilde{\sigma} \in \Gamma_{k+1}^n$ tal que

$$\begin{aligned} \sup \Phi_0(\widetilde{\sigma}(X_{k+1}^n)) &\leq \ell_k \left(\sup \Phi_0(\sigma(X_k^n))\right) \\ &\leq \ell_k(c_k + \varepsilon_k). \end{aligned} \tag{2.12}$$

pues ℓ_k es no decreciente. Tomemos $e \in X_{k+1}^+ \setminus X_k^+$ y definamos

$$A_k^n := \{(\eta_2^n)_1(\sigma(u)) : u \in X_k^n\}, \text{ y}$$
$$B_k^n := \{(\eta_2^n)_1(\widetilde{\sigma}(u+te)) : u \in X_k^n,\ t \geq 0\}.$$

Claramente se tiene que $A_k^n \subset B_k^n \subset X^n$. Veamos que estos conjuntos satisfacen las propiedades *a)*, *b)* y *c)*:

a) Por (2.9) y (2.6) se tiene que

$$\begin{aligned}\sup \Phi_1(A_k^n) &= \sup \Phi_1((\eta_2^n)_1(\sigma(X_k^n))) \\ &\leq \zeta_2(1, c_k + \varepsilon_k) < \zeta_1(1, c_{k+1} - \varepsilon_k).\end{aligned}$$

b) Por (2.12) y (2.9) con $c = \ell_k(c_k + \varepsilon_k)$ se tiene

$$\begin{aligned}\sup \Phi_1(B_k^n) = \sup\{\Phi_1((\eta_2^n)_1(\widetilde{\sigma}(u+te))) : u \in X_k^n,\ t \geq 0\} \\ \leq \zeta_2(1, \ell_k(c_k + \varepsilon_k)).\end{aligned}$$

c) Basta probar que para cada $\tau \in \Gamma(A_k^n)$ existe $w_0 \in B_k^n$ tal que

$$\Phi_1(\tau(w_0)) \geq \zeta_1(1, c_{k+1} - \varepsilon_k). \tag{2.13}$$

Sea $\tau \in \Gamma_k^n(A_k^n)$, es decir, $\tau : X^n \to X^n$ es continua y $\tau(u) = u$ para toda $u \in A_k^n$ y para toda $u \in X_{k+1}^n$ con $\|u\|$ suficientemente grande. Consideremos la función

$$\vartheta : \{u + te : u \in X_k^n,\ t \in [0, \infty)\} \to X^n$$

definida como sigue:

$$\vartheta(u+te) = \begin{cases} (\eta_1^n)_{2t}^{-1} \circ (\eta_2^n)_{2t} \circ \sigma(u) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ (\eta_1^n)_1^{-1} \circ \tau \circ (\eta_2^n)_1 \circ \widetilde{\sigma}(u + (2t-1)e) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Como $\tau(u) = u$ para toda $u \in A_k^n$, esta función está bien definida y es continua. Además cumple que $\vartheta(u) = \sigma(u)$ para cada $u \in X_k^n$, en particular, $\vartheta \mid X_k^n$ es ι-invariante y $\vartheta(u) = u$ para cada $u \in X_n^*$. Por definición de $\widetilde{\sigma}$ y la propiedad **(H4)**, existe $R > 0$ tal que, si $u \in X_{k+1}^n$ y $\|u\| \geq R$, entonces $\widetilde{\sigma}(u) = u$ y $\Phi_t(u) \leq M$ para toda $t \in [0,1]$. Por la propiedad **(H5)** y nuestras hipótesis se tiene que

$$M + 1 \leq \min\left\{\min_{0 \leq t \leq 1} \zeta_2(t, c_k + \varepsilon_k), \quad \min_{0 \leq t \leq 1} \zeta_1(t, c_{k+1} - \varepsilon_k)\right\},$$

y así, la Proposición 2.8 nos asegura que $(\eta_\nu^n)_t(u) = u$ si $u \in X_{k+1}^n$ y $\|u\| \geq R$. Por tanto, ϑ satisface las hipótesis del Lema 2.3 y, en consecuencia, existe un punto $(u_0, t_0) \in X_k^n \times [0, \infty)$ tal que

$$\Phi_0(\vartheta(u_0 + t_0 e)) \geq c_{k+1}^n > c_{k+1} - \varepsilon_k. \tag{2.14}$$

Si $t_0 \leq 1/2$ entonces $(\eta_1^n)_{2t_0}(\vartheta(u_0 + t_0 e)) = (\eta_2^n)_{2t_0}(\sigma(u_0))$, contradiciendo (2.11). Por lo tanto $t_0 > 1/2$ y $(\eta_1^n)_1(\vartheta(u_0 + t_0 e)) = \tau\left[(\eta_2^n)_1(\widetilde{\sigma}(u_0 + (2t_0 - 1)e)\right]$. Las desigualdades (2.8) y (2.14) implican que

$$\Phi_1(\tau\left[(\eta_2^n)_1(\widetilde{\sigma}(u_0 + (2t_0 - 1)e)\right]) = \Phi_1((\eta_1^n)_1(\vartheta(u_0 + t_0 e))) \geq \zeta_1(1, c_{k+1} - \varepsilon_k)$$

y, como $w_0 := (\eta_2^n)_1(\widetilde{\sigma}(u_0 + (2t_0 - 1)e) \in B_k^n$, se cumple (2.13). Esto prueba *c)*. ■

2.5 Propiedades de enlace y valores críticos.

La proposición anterior garantiza que los conjuntos A_k^n, B_k^n tienen la siguiente propiedad de enlace respecto del funcional Φ_1^n:

$$\tau(B_k^n) \cap (\Phi_1^n)^{>\zeta_1(1, c_{k+1} - \varepsilon_k)} \neq \emptyset \quad \text{para toda } \tau \in \Gamma_k^n(A_k^n),$$

donde $(\Phi_1^n)^{>\zeta_1(1, c_{k+1} - \varepsilon_k)} := \{u \in X^n : \Phi_1^n(u) > \zeta_1(1, c_{k+1} - \varepsilon_k)\}$. Esta propiedad, junto con la condición de Palais-Smale **(H1)** garantiza que se cumple lo siguiente.

Proposición 2.11 *Sea k tal que existen $0 < \varepsilon_k < 1$, $m_k \geq 1$ y, para cada $n \geq m_k$, dos subconjuntos $A_k^n \subset B_k^n$ de X^n que satisfacen las propiedades* a)-c) *de la Proposición 2.10. Definimos*

$$\widetilde{c}_k^n := \inf_{\tau \in \Gamma_k^n(A_k^n)} \sup_{u \in B_k^n} \Phi_1(\tau(u))$$

y

$$\widetilde{c}_k := \limsup_{n \to \infty} \widetilde{c}_k^n.$$

Entonces $\widetilde{c}_k$ es un valor crítico de $\Phi_1 : X \to X$ tal que

$$\zeta_2(1, c_k) < \widetilde{c}_k \leq \zeta_2(1, \ell_k(c_k + 1)).$$

Demostración: Como nuestros datos satisfacen las condiciones de la Proposición 2.10, se cumple

$$\zeta_2(1, c_k + \varepsilon_k) < \zeta_1(1, c_{k+1} - \varepsilon_k) \leq \widetilde{c}_k^n \leq \sup \Phi_1(B_k^n) \leq \zeta_2(1, \ell_k(c_k + \varepsilon_k)) < \infty,$$

para toda n suficientemente grande, ya que la identidad de X^n pertenece a $\Gamma_k^n(A_k^n)$. Así, dado que ℓ_k es no decreciente, pasando al límite obtenemos

$$\zeta_2(1, c_k) < \widetilde{c}_k \leq \zeta_2(1, \ell_k(c_k + 1)) < \infty.$$

Supongamos que $\widetilde{c}_k$ es un valor regular. Entonces, por la condición de Palais-Smale **(H1),** existe $\varepsilon > 0$ tal que Φ_1 no tiene valores críticos en $[\widetilde{c}_k - 2\varepsilon, \widetilde{c}_k + 2\varepsilon]$. Escogemos ε de modo que

$$\widetilde{c}_k - 2\varepsilon > \zeta_2(1, c_k + \varepsilon_k). \tag{2.15}$$

Por el Lema de Deformación 2.5 existe $k_0 \geq m_k$ y para cada $n \geq k_0$ existe una función continua $H^n : X^n \times [0,1] \to X^n$ tal que

$$\begin{array}{lll} b.1) & H^n(u,0) = u & \forall u \in X^n \\ b.2) & H^n(u,s) = u & \forall u \in \Phi_t^{\leq \widetilde{c}_k - 2\varepsilon} \cap X^n,\ 0 \leq s \leq 1, \\ b.3) & H^n(u,1) \in \Phi_t^{\leq \widetilde{c}_k - 2\varepsilon} \cap X^n & \forall u \in \Phi_t^{\leq \widetilde{c}_k + 2\varepsilon} \cap X^n. \end{array}$$

Podemos suponer que $\widetilde{c}_k^n \in [\widetilde{c}_k - \varepsilon, \widetilde{c}_k + \varepsilon]$ para toda $n \geq k_0$. Sea $\tau \in \Gamma_k^n(A_k^n)$ tal que

$$\sup_{u \in B_k^n} \Phi_1(\tau(u)) \leq \widetilde{c}_k^n + \varepsilon \leq \widetilde{c}_k + 2\varepsilon,$$

y sea $\widetilde{\tau}(u) = H^n(\tau(u), 1)$. Si probamos que $\widetilde{\tau} \in \Gamma_k^n(A_k^n)$ entonces, por la desigualdad anterior y la condición *b.3)*, tendríamos que

$$\sup_{u \in B_k^n} \Phi_1(\widetilde{\tau}(u)) \leq \widetilde{c}_k - 2\varepsilon < \widetilde{c}_k^n,$$

lo cual contradice la definición de $\widetilde{c}_k^n$, y así habríamos probado que $\widetilde{c}_k$ es un valor crítico de Φ_1. De modo que basta probar que $\widetilde{\tau} \in \Gamma_k^n(A_k^n)$.
(i) Como nuestros datos satisfacen la condición *a)* de la Proposición 2.10, la desigualdad (2.15) garantiza que

$$\sup_{A_k^n} \Phi_1 \leq \zeta_2(1, c_k + \varepsilon_k) < \widetilde{c}_k - 2\varepsilon$$

y así, por *b.2)*, si $u \in A_k^n$ entonces $\widetilde{\tau}(u) = H^n(\tau(u), 1) = H^n(u, 1) = u$.
(ii) Por la propiedad **(H4)** existe $R > 0$ tal que si $u \in X_{k+1}^n$ y $\|u\| \geq R$, entonces $\Phi_1(u) \leq \zeta_2(1, c_k + \varepsilon_k)$. Tomando R suficientemente grande podemos suponer que $\tau(u) = u$ para toda $u \in X_{k+1}^n$ tal que $\|u\| \geq R$. Así, aplicando de nuevo *b.2)*, tenemos que $\widetilde{\tau}(u) = H^n(\tau(u), 1) = H^n(u, 1) = u$ si $u \in X_{k+1}^n$ y $\|u\| \geq R$.
Esto demuestra que $\widetilde{\tau} \in \Gamma_k^n(A_k^n)$. ■

Para demostrar el Teorema 1.10 deberemos pues probar que las hipótesis de la Proposición 2.10 se cumplen para una infinidad de k's. Notemos primero que si la sucesión (1.5) no es acotada tampoco lo son las siguientes sucesiones.

Lema 2.12 *Las sucesiones*

$$\left(\min_{0\le t\le 1}(\zeta_1(t,c_{k+1})-\zeta_2(t,c_k))\right) \quad y \quad \left(\min_{0\le t\le 1}\zeta_2(t,c_k)\right)$$

no están acotadas superiormente.

Demostración: Por definición de los flujos ζ_ν y por el Teorema 4.1.5 de [46] se tiene, para cada $t \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}|\zeta_\nu(t,s)-s| &\le e^{k_\nu t}\int_0^t |\theta_\nu(\xi,s)+(-1)^\nu\delta|\,d\xi \\ &\le A_\nu\left(\max_{0\le t\le 1}|\theta_\nu(t,s)|+\delta\right)\end{aligned}$$

donde k_ν es la constante de Lipschitz para θ_ν y $A_\nu = e^{k_\nu}$. Es decir, si $\overline{\theta}_\nu(s) := \max\limits_{0\le t\le 1}|\theta_\nu(t,s)|$ tenemos

$$|s-\zeta_\nu(t,s)| \le A\left(\overline{\theta}_\nu(s)+\delta\right),\ \forall t\in[0,1]$$

para $\nu = 1,2$ y $A = \max\{A_1,A_2\} > 0$. Tomando $s = c_{k+1}$ para $\nu = 1$, y $s = c_k$ para $\nu = 2$ y usando la desigualdad del triángulo se tiene

$$\begin{aligned}0 \le c_{k+1}-c_k &= (c_{k+1}-\zeta_1(t,c_{k+1})) + (\zeta_1(t,c_{k+1})-\zeta_2(t,c_k)) + (\zeta_2(t,c_k)-c_k) \\ &\le \zeta_1(t,c_{k+1})-\zeta_2(t,c_k) + A\left(\overline{\theta}_1(c_{k+1})+\overline{\theta}_2(c_k)+2\delta\right),\end{aligned}$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $2\delta < 1$, de modo que

$$0 \le \frac{c_{k+1}-c_k}{\overline{\theta}_1(c_{k+1})+\overline{\theta}_2(c_k)+1} \le \frac{\zeta_1(t,c_{k+1})-\zeta_2(t,c_k)}{\overline{\theta}_1(c_{k+1})+\overline{\theta}_2(c_k)+1} + A,$$

y dado que la sucesión (1.5) es no acotada, se sigue que

$$\left(\min_{0\le t\le 1}(\zeta_1(t,c_{k+1})-\zeta_2(t,c_k))\right)$$

es no acotada superiormente. Y, como $\zeta_1 \le \zeta_2$, la sucesión

$$\left(\min_{0\le t\le 1}\zeta_2(t,c_k)\right)$$

tampoco está acotada superiormente. ∎

Demostración del Teorema 1.10.: Por el lema anterior, tomando una subsucesión si es necesario, podemos suponer que

$$M+1 \leq \zeta_2(t,c_k) < \zeta_1(t,c_{k+1}) \quad \text{para toda } t\in[0,1] \text{ y } k\geq 1.$$

Entonces existen A_k^n, B_k^n subconjuntos de X^n que satisfacen las propiedades *a)*-*c)* de la Proposición 2.10 para toda $n \geq m_k$. Por la Proposición 2.11 los valores $\widetilde{c}_k$ son valores críticos de $\Phi_1 : X \to X$ y satisfacen

$$\widetilde{c}_k \geq \zeta_2(1,c_k).$$

Por el lema anterior, $\widetilde{c}_{k+1} \to \infty$ cuando $k \to \infty$. ∎

2.6 Conclusiones y comentarios

2.6.1 El caso semidefinido

Si $\dim(X^\star \oplus X^-) < \infty$ entonces las propiedades **(H6)** y **(H7)** son consecuencia de la propiedad **(H4)**.

En efecto, la propiedad **(H4)** garantiza que $\Phi_0(u) \leq 0$ para toda $u \in X_k^+ \oplus X^\star \oplus X^-$ tal que $\|u\| \geq R$ y, como la bola de radio R en $X_k^+ \oplus X^\star \oplus X^-$ es compacta, Φ_0 está acotada superiormente en $X_k^+ \oplus X^\star \oplus X^-$. Es decir, se cumple **(H6)**.

En cuanto a **(H7)**, si $\sigma : X_k^+ \oplus X^\star \oplus X^- \to X$ es una función continua ι-equivariante tal que $\sigma(u) = u$ si $\|u\| > R$, entonces, por el Teorema de Extensión de Tietze, existe una función continua ι-equivariante $\widetilde{\sigma} : X_{k+1}^+ \oplus X^\star \oplus X^- \to X$ tal que $\widetilde{\sigma}(u) = \sigma(u)$ si $u \in X_k^+ \oplus X^\star \oplus X^-$, y $\sigma(u) = u$ para $\|u\| > R$. Definimos ℓ_k como la función constante con valor

$$\ell_k \equiv \sup \Phi_0(\widetilde{\sigma}(X_{k+1}^+ \oplus X^\star \oplus X^-)).$$

Como antes, este supremo es finito por la propiedad **(H4)**.

Si $\dim(X^\star \oplus X^-) < \infty$, las propiedades **(H1)**-**(H5)** coinciden con las dadas por Bolle, Ghoussoub y Tehrani [14]. Sin embargo, aún en este caso, nuestro resultado extiende al suyo (véase el Teorema 1.9) en dos sentidos: En primer lugar, nuestro resultado es válido para espacios de Banach y funcionales de clase C^1 (y no sólo para espacios de Hilbert y funcionales de clase C^2). En segundo lugar, nuestro resultado no requiere que el conjunto de puntos fijos sea $X^\star = \{0\}$.

2.6.2 El caso fuertemente indefinido

La ventaja esencial de nuestro resultado respecto del Teorema 1.9 es que no requiere que $\dim(X^* \oplus X^-)$ sea finita, pues esto permite aplicarlo a funcionales Φ_t fuertemente indefinidos. Este requerimiento juega un papel esencial para que la sucesión (1.3) no sea necesariamente acotada.

En efecto, consideremos por simplicidad el caso en el que $X^* = \{0\}$ y

$$\Phi_0(u) \leq 0 \quad \text{para toda } u \in \{u \in X_k^+ \oplus X^- : \|u\| \geq R\} \cup \{0\} \times X^-.$$

Entonces se cumple lo siguiente.

Lema 2.13 *Si* $\dim(X^-) = \infty$ *entonces existe una homotopía* $\Psi : S_R(X_k^+ \oplus X^-) \times [0,1] \to S_R(X_k^+ \oplus X^-)$ *tal que* $\Psi(u,0) = u$, $\Psi(u,1) \in S_R X^-$, *y* $\Psi(-u,t) = -\Psi(u,t)$.

Demostración: Por simplicidad, denotemos

$$S_k := S_R(X_k^+ \oplus X^-), \qquad S_0 := S_R X^-,$$

y a los hemisferios de S_k por B_k^+ y B_k^-, de modo que

$$S_k = B_k^+ \cup B_k^- \quad \text{y} \quad S_{k-1} = B_k^+ \cap B_k^-.$$

Demostremos la afirmación por inducción. Si $k = 0$ la homotopía $\Psi : S_0 \times [0,1] \to S_0$, $\Psi(u,t) = u$ cumple las condiciones del enunciado. Supongamos que existe $\Psi : S_{k-1} \times [0,1] \to S_{k-1}$ que cumple dichas condiciones. Como $\dim(X^-) = \infty$, las esferas S_k, $k = 0, 1, ...,$ son contraíbles. Por tanto, la función $\Psi_1 = \Psi(\,\cdot\,, 1) : S_{k-1} \to S_0$ tiene una extensión

$$\overline{\Psi}_1 : B_k^+ \to S_0.$$

Consideremos la función

$$\overline{\Psi}^\partial : \left(B_k^+ \times \{0,1\}\right) \cup \left(S_{k-1} \times [0,1]\right) \to S_k$$

dada por

$$\overline{\Psi}^\partial(u,t) = \begin{cases} u & \text{si } t = 0 \\ \overline{\Psi}_1(u) & \text{si } t = 1 \\ \Psi(u,t) & \text{si } u \in S_{k-1} \end{cases}$$

Como S_k es contraíble, esta función tiene una extensión

$$\overline{\Psi}^+ : B_k^+ \times [0,1] \to S_k.$$

Definimos $\overline{\Psi} : S_k \times [0,1] \to S_k$ como sigue:

$$\overline{\Psi}(u,t) = \begin{cases} \overline{\Psi}^+(u,t) & \text{si } u \in B_k^+ \\ -\overline{\Psi}^+(-u,t) & \text{si } u \in B_k^- \end{cases}$$

Esta homotopía cumple las condiciones del enunciado. ∎

Supongamos pues que $\dim(X^-) = \infty$ y escojamos Ψ como en el lema anterior. La función

$$\sigma : (X_k^+ \oplus X^-) \cup \{u \in X : \|u\| \geq R+1\} \longrightarrow (X_k^+ \oplus X^-) \cup \{u \in X : \|u\| \geq R+1\}$$

dada por

$$\sigma(u) = \begin{cases} u & \text{si } \|u\| \geq R+1 \\ \frac{\|u\|}{R}\Psi(\frac{Ru}{\|u\|}, 1 - \|u\| + R) & \text{si } R \leq \|u\| \leq R+1 \\ \frac{\|u\|}{R}\Psi(\frac{Ru}{\|u\|}, 1) & \text{si } 0 \leq \|u\| \leq R \end{cases}$$

es contínua e impar. Por el Teorema de Extensión de Tietze, podemos pensar a esta función como la restricción de una función contínua e impar $\sigma : X \to X$. Por definición de Ψ, esta función cumple que

$$\sigma(X_k^+ \oplus X^-) \subset \{u \in X_k^+ \oplus X^- : \|u\| \geq R\} \cup \left(\{0\} \times X^-\right).$$

Así, nuestra elección de R garantiza que $\Phi_0(\sigma(X_k^+ \oplus X^-)) \subset (-\infty, 0]$ y, en consecuencia, si definimos c_k como Bolle, Ghoussoub y Tehrani [14], es decir, si

$$c_k := \inf_{\sigma \in \mathcal{G}} \sup_{u \in X_k^+ \oplus X^-} \Phi_0(\sigma(u))$$

donde $\mathcal{G} := \{\sigma \in C^0(X,X) : \sigma \text{ es impar y } \sigma(u) = u \text{ si } \|u\| \text{ es grande}\}$, entonces $\Phi_0(0) \leq c_k \leq 0$. De modo que los valores minimax c_k estan acotados, y así, la sucesión (1.3) es acotada.

Las ventajas arriba mencionadas serán utilizadas para probar la existencia de una infinidad de soluciones de sistemas elípticos no simétricos fuertemente indefinidos (Teorema 4.1). Nótese además que nuestro resultado no requiere que el conjunto de puntos fijos X^* sea de dimensión finita.

2.6.3 El método de Galerkin

Los valores críticos c_k del funcional simétrico Φ_0 se definieron como límites de valores críticos adecuados de los funcionales pares semidefinidos $\Phi_0^n : X^n \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$. Esto permite, en las aplicaciones, usar métodos de teoría de Morse para estimar el crecimiento de las c_k's, y derivar condiciones para que la sucesión (1.5) sea no acotada. En este sentido nuetro resultado permite aprovechar la riqueza topológica de las aproximaciones semidefinidas para estudiar funcionales fuertemente indefinidos, tal y como ocurre en el caso simétrico considerado por Bartsch y Clapp [7].

2.6.4 La propiedad (H1)

Esta propiedad es la extensión natural a trayectorias de funcionales de la condición (PS^*), introducida por Bahri y Berestycki [5] y Li y Liu [38], que permite reducir el estudio de funcionales fuertemente indefinidos al estudio de funcionales semidefinidos.

En las aplicaciones, el aspecto crucial para comprobar que esta propiedad se cumple, consiste en demostrar que toda sucesión (u_k, t_k) tal que

$$u_k \in X^{n_k}, \quad n_k \to \infty, \quad t_k \to t, \quad \Phi_t(u_k) \to c, \quad \|(\Phi_t^{n_k})'(u_k)\| \to 0,$$

está acotada en $X \times [0,1]$. Si esto ocurre, y si $\Phi_t' = A + K$ donde A es un operador de Fredholm y K es completamente continua, entonces Φ satisface **(H1)** (véase [7]).

2.6.5 La propiedad (H7)

Esta propiedad garantiza que los valores minimax de la restricción del funcional Φ_1 a X_k^n, proporcionados por la propiedad de enlace, estén acotados uniformemente con respecto a n, lo cual, como vimos en la sección anterior, permite usar la condición **(H1)** para obtener valores críticos de Φ_1.

Nótese que toda función $\sigma \in C^0(X_k^n, X^n)$ ι-equivariante tal que $\sigma(u) = u$ para $\|u\|$ suficientemente grande tiene una extensión $\widetilde{\sigma} \in C^0(X_{k+1}^n, X^n)$ ι-equivariante tal que $\widetilde{\sigma}(u) = u$ para $\|u\|$ suficientemente grande. La afirmación esencial en la propiedad **(H7)** es que

$$\sup \Phi_0(\widetilde{\sigma}(X_{k+1}^n)) \leq \ell_k(\sup \Phi_0(\sigma(X_k^n)))$$

para alguna función ℓ_k que no depende de n. En nuestra aplicación del Capítulo 4 esta función será de hecho también independiente de k.

Comprobar que la propiedad **(H7)** se cumple, requiere de un conocimiento bastante preciso de la topología de los conjuntos de subnivel del funcional simétrico Φ_0. Recientemente Castro y Clapp [15] desarrollaron un método para probar que cierto tipo de funcionales cumplen esta propiedad. Usaremos ese método en las aplicaciones del Capítulo 4 a sistemas elípticos fuertemente indefinidos.

Capítulo 3

Sistemas elípticos de tipo gradiente

En este capítulo daremos una aplicación de nuestro teorema abstracto (Teorema 1.10) a sistemas de ecuaciones diferenciales parciales, elípticos, no simétricos, de tipo gradiente. El funcional asociado a este tipo de sistemas es semidefinido. Los resultados que obtenemos aquí extienden resultados recientes de Candela, Salvatore y Squassina a no linealidades más generales, y recuperan, como caso particular, otros resultados previos.

3.1 Sistemas elípticos de tipo gradiente con condición de frontera no homogénea

Aplicaremos el Teorema 1.10 para obtener una infinidad de soluciones $v = (v_1, \dots, v_m) : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^m$ del sistema elíptico de tipo gradiente con condición de frontera no homogénea

$$(\mathcal{G}) \qquad \begin{cases} -\Delta v = \nabla_v H(x,v) & \text{en } \Omega \\ v = u_0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

donde Ω es un dominio suave y acotado de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, $u_0 \in C^2(\partial\Omega, \mathbb{R}^m)$, y $H \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ es de la forma

$$H(x,u) = F(x,u) + f(x,u)$$

F y f satisfacen las siguientes condiciones:

$(\mathbf{F}_1)$ Existe $p \in (2, 2^*)$ y $a_0 > 0$ tal que, para toda $(x,u) \in \Omega \times \mathbb{R}^m$,

$$|\nabla_u F(x,u)| \leq a_0(|u|^{p-1} + 1).$$

$(\mathbf{F}_2)$ Existen $\mu > 2$ y $R > 0$ tales que $\left(\frac{2^*}{2^*-1}\right)(p-1) \leq \mu$ y

$$0 < \mu F(x,u) \leq \nabla_u F(x,u) \cdot u \quad \text{si} \quad |u| \geq R.$$

($\mathbf{F}_4$) $F(x,-u) = F(x,u)$ para toda $(x,u) \in \Omega \times \mathbb{R}^m$.

(**f**) Existen $\gamma \in [0,1)$ y $d_0 > 0$ tales que, para toda $(x,u) \in \Omega \times \mathbb{R}^m$,

$$\begin{aligned} |f(x,u)| + |\nabla_u f(x,u) \cdot u| &\leq d_0(|F(x,u)|^\gamma + 1) \\ |\nabla_u f(x,u)| &\leq d_0(|\nabla_u F(x,u)|^\gamma + 1) \end{aligned}$$

Observe que integrando por partes la condición ($\mathbf{F}_2$) se obtiene

($\mathbf{F}_3$) Existen $b_1, b_2 > 0$ tales que, para toda $(x,u) \in \Omega \times \mathbb{R}^m$,

$$F(x,u) \geq b_1 |u|^\mu - b_2.$$

Probaremos el siguiente resultado, previamente enunciado en la sección 1.2.2:

Teorema 3.1 *Si se cumplen* (F_1), (F_2), (F_4) *y* (f), *entonces el problema* $(\mathcal{G})$ *tiene una infinidad de soluciones si*

$$\max\left\{\frac{p-1}{\mu}, \gamma\right\} < \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2^*}\right) N.$$

3.1.1 Formulación variacional

Sea $u_0 \in C^2\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m\right)$ una extensión de la función dada u_0 tal que satisface $\Delta u_0 = 0$. El problema $(\mathcal{P})$ es equivalente a

$$(\mathcal{G}') \qquad \left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u = \nabla_u H(x, u+u_0) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{array} \right.$$

es decir, u es solución de $(\mathcal{G}')$ si y sólo si $v = u + u_0$ es solución de $(\mathcal{G})$.

Si $u = (u_1, \ldots, u_m)$ es una solución clásica de $(\mathcal{G}')$, es decir, si $u \in C^2(\overline{\Omega})$ y cumple

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u_i = \nabla_{u_i} H(x, u+u_0) & \text{en } \Omega \\ u_i = 0, \ i = 1, \ldots, m & \text{en } \partial\Omega \end{array} \right.$$

entonces, multiplicando por $\varphi_i \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R})$ ambos lados de cada ecuación, integrando sobre Ω, y usando la identidad de Green obtenemos

$$\int_\Omega (-\Delta u_i)\, \varphi_i \, dx = \int_\Omega \nabla u_i \cdot \nabla \varphi_i \, dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial n} \varphi_i \, ds,$$

y dado que φ_i se anula en la frontera de Ω , obtenemos

$$\int_\Omega \nabla u_i \cdot \nabla \varphi_i \, dx = \int_\Omega \frac{\partial H(x, u+u_0)}{\partial u_i} \varphi_i \, dx, \text{ para toda } \varphi_i \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}),$$

o bien

$$\int_\Omega \nabla u_i \cdot \nabla \varphi_i \, dx - \int_\Omega \frac{\partial H(x, u+u_0)}{\partial u_i} \varphi_i \, dx = 0, \text{ para toda } \varphi_i \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}).$$

Por densidad se tiene que

$$\int_\Omega \nabla u_i \cdot \nabla \varphi_i dx - \int_\Omega \frac{\partial H(x, u+u_0)}{\partial u_i} \varphi_i dx = 0, \text{ para toda } \varphi_i \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}), \ i = 1, \dots, m.$$

Sumando estas ecuaciones, se obtiene la siguiente ecuación equivalente

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx - \int_\Omega \nabla_u H(x, u+u_0) \cdot \varphi \, dx = 0, \text{ para toda } \varphi \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^m). \tag{3.1}$$

A las soluciones de (3.1) se les llama *soluciones débiles* de $(\mathcal{G}')$. Probaremos la existencia de una infinidad de soluciones débiles a las que llamaremos simplemente soluciones. Los resultados de regularidad para problemas elípticos garantizan que una solución débil es solución clásica si los datos del problema son suficientemente regulares (véase [48] Apéndice B). Veremos a continuación que las soluciones débiles son los puntos críticos de un funcional de clase C^1 en un espacio de Hilbert.

Consideremos el espacio de Sobolev $X := H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ equipado con el producto escalar usual

$$\langle u, v \rangle := \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v) \, dx = \sum_{i=1}^m \int_\Omega (\nabla u_i \cdot \nabla v_i) \, dx.$$

A la norma inducida por este producto escalar la denotaremos por $\|\cdot\|$. Denotaremos por $|\cdot|_r$ a la norma en $L^r(\Omega, \mathbb{R}^m)$, es decir,

$$|u|_r := \left(\sum_{i=1}^m \int_\Omega |u_i|^r \right)^{1/r}.$$

Sea

$$H(x, u, t) := F(x, u + tu_0) + tf(x, u + u_0).$$

De la condición (F_1) e integrando obtenemos

$$\begin{aligned} |F(x,u) - F(x,0)| &= \left| \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s} F(x, su) ds \right| \le \int_0^1 |\nabla_u F(x, su) \cdot u| \, ds \\ &\le d_1 \int_0^1 (|u|^p + 1) ds. \end{aligned}$$

Así, dado que $F(\cdot,0)$ es continua en $\overline{\Omega}$, se tiene

$$F(x,u) \leq d_2(|u|^p + 1). \tag{3.2}$$

De esta desigualdad, junto con (f), obtenemos

$$|H(x,u,t)| \leq d_1(|u|^p + 1) \quad \text{para toda } (x,u,t) \in \Omega \times \mathbb{R}^m \times [0,1].$$

Del Teorema de Encaje de Sobolev, dado que $p \in (2, 2^*)$, se sigue que el funcional

$$\Phi(u,t) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx - \int_\Omega H(x,u,t)dx$$

está bien definido en $X \times [0,1]$. Denotaremos por Φ_t al funcional $\Phi_t(u) := \Phi(u,t)$, y por Φ_t' a su derivada.

Proposición 3.2 *$\Phi \in C^1(H_0^1(\Omega,\mathbb{R}^m) \times [0,1], \mathbb{R})$, y*

$$\Phi_t'(u)\, v = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \; dx - \int_\Omega \nabla_u H(x,u,t) \cdot v \; dx.$$

En particular, los puntos críticos de Φ_1 (es decir, los puntos u tales que $\Phi_1'(u)\, v = 0$ para toda $v \in X$) son las soluciones (débiles) de $(\mathcal{G}')$.

Demostración: Véase la Proposición A.6 del apéndice A. ∎

Así pues, para probar el Teorema 3.1 basta mostrar que Φ satisface las condiciones del Teorema 1.10 con

$$X^+ := H_0^1(\Omega,\mathbb{R}^m), \quad X^* = X^- := \{0\}, \quad \text{y} \quad \mathcal{F} = \{X^n = X : n \in \mathbb{N}\}.$$

Recordemos que, dado que $\dim(X^* \oplus X^-) = 0 < \infty$, automáticamente se cumplen las condiciones **(H6)** y **(H7)**, véase la Sección 2.6 del Capítulo 2. Probaremos a continuación que Φ cumple las condiciones **(H1)**-**(H5)**.

Supondremos en adelante que se cumplen las hipótesis del Teorema 3.1.

3.1.2 Propiedades (H1)-(H5)

Dado que $X^n = X$, la condición **(H1)** coincide con la condición **(P1)** de Bolle-Ghoussoub-Tehrani [14] . Para probar **(H1)** necesitaremos el siguiente lema.

Lema 3.3 *Sean $u_k \in X$, $t_k \in [0,1]$ tales que $\Phi_{t_k}(u_k) \to d$ y $(\Phi_{t_k})'(u_k) \to 0$ cuando $k \to \infty$. Entonces (u_k) es acotada en X.*

Demostración: Las propiedades (F_2) y (f) implican

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\nabla_u H(x,u,t)\cdot u - H(x,u,t) &= \frac{1}{2}\nabla_u F(x,u+tu_0)\cdot u - F(x,u+tu_0)\\
&\quad +t\left(\frac{1}{2}\nabla_u f(x,u+u_0)\cdot u - f(x,u+u_0)\right)\\
&= \frac{1}{2}\nabla_u F(x,u+tu_0)\cdot (u+tu_0) - F(x,u+tu_0)\\
&\quad +t\left(\frac{1}{2}\nabla_u f(x,u+u_0)\cdot (u+u_0) - f(x,u+u_0)\right)\\
&\quad -\frac{t}{2}\left(\nabla_u F(x,u+tu_0)\cdot u_0 + \nabla_u f(x,u+u_0)\cdot u_0\right)\\
&\geq (\frac{\mu}{2}-1)F(x,u+tu_0) - d_0(|F(x,u+u_0)|^\gamma+1)\\
&\quad -d_1\left(|\nabla_u F(x,u+u_0)|+1\right)\\
&\geq d_1 F(x,u+tu_0) - d_2, \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad se debe a que $\mu > p-1$. Así,

$$\begin{aligned}
\Phi_{t_k}(u_k) - \frac{1}{2}(\Phi_{t_k})'(u_k)u_k &= \int_\Omega (\frac{1}{2}\nabla_u H(x,u_k,t_k)\cdot u_k - H(x,u_k,t_k))\\
&\geq d_1\int_\Omega F(x,u_k+t_ku_0) - d_2.
\end{aligned}$$

De esta desigualdad, de las hipótesis del lema, y de (F_3), se obtiene

$$|u_k|_\mu^\mu \leq d(1+||u_k||). \qquad (3.4)$$

Por otro lado, se sigue de (f) y (F_1) que

$$\begin{aligned}
|\nabla_u f(x,u)| &\leq d_0(|\nabla_u F(x,u)|^\gamma + 1)\\
&\leq d(|u|^{\gamma(p-1)}+1). \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

Usando una vez más la condición (F_1) obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \nabla_u H(x,u_k,t_k)\cdot u_k &= \int_\Omega \nabla_u F(x,u_k+t_ku_0)\cdot u_k + t_k\int_\Omega \nabla_u f(x,u_k+u_0)\cdot u_k\\
&\leq \int_\Omega |\nabla_u F(x,u_k+t_ku_0)|\,|u_k| + t_k\int_\Omega |\nabla_u f(x,u_k+u_0)|\,|u_k|\\
&\leq c_1\int_\Omega \left(|u_k+t_ku_0|^{p-1} + t_k|u_k+u_0|^{(p-1)\gamma}+1\right)|u_k|\\
&\leq d(\int_\Omega (|u_k|^p+1).
\end{aligned}$$

Por hipótesis, se tiene que, $\theta := \mu/(1+\mu-p) \leq 2^*$. Así, usando la desigualdad de Hölder, el Teorema de Encaje de Sobolev y la desigualdad (3.4), obtenemos .

$$\int_\Omega |u_k|^p \leq \left||u_k|^{p-1}\right|_{\frac{\mu}{p-1}} |u_k|_\theta = |u_k|_\mu^{p-1} |u_k|_\theta \leq d(1+\|u_k\|^{1+[(p-1)/\mu]}),$$

Esto muestra que

$$\int_\Omega \nabla_u H(x,u_k,t_k)\cdot u_k \leq d(1+\|u_k\|^\sigma)$$

con $1<\sigma<2$ de lo que se sigue que

$$|\nabla u_k|_2^2 = (\Phi_{t_k})'(u_k)(u_k) + \int_\Omega \nabla_u H(x,u_k,t_k)\cdot u_k \leq d(1+\|u_k\|^\sigma), \tag{3.6}$$

es decir,

$$\|u_k\|^2 \leq d(1+\|u_k\|^\sigma)$$

con $\sigma<2$. Por lo tanto (u_k) debe ser acotada en X. ■

Proposición 3.4 Φ *satisface* ***(H1)***.

Demostración: Sea $u_k \in X$, $t_k \in [0,1]$ tal que $\Phi_{t_k}(u_k) \to d$ y $(\Phi_{t_k})'(u_k) \to 0$ cuando $k\to\infty$. Por el lema anterior tenemos que (u_k) es acotada en X. Así, existe una subsucesión $u_k \rightharpoonup u$ que converge débilmente en X. Más aún, por el Teorema de Rellich-Kondrakov, $u_k \to u$ converge fuertemente en $L^s(\Omega)$ para cada $s\in[1,2^*)$. Se sigue de (F_1), de la desigualdad (3.5) y de la desigualdad de Hölder que

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega \nabla_u H(x,u_k,t_k)\cdot(u_k-u)\right| &= \left|\int_\Omega (\nabla_u F(x,u_k+t_ku_0)+t_k\nabla_u f(x,u_k+u_0))\cdot(u_k-u)\right|\\ &\leq d_1\int_\Omega (|u_k|^{p-1}+1)\,|u_k-u|\\ &\leq d_2(|u_k|_p^{p-1}\,|u_k-u|_p + |u_k-u|_p).\end{aligned}$$

Así,

$$\int_\Omega \nabla u_k\cdot\nabla(u_k-u) = (\Phi_{t_k})'(u_k)(u_k-u) + \int_\Omega \nabla_u H(x,u_k,t_k)\cdot(u_k-u) \longrightarrow 0$$

cuando $k\to\infty$, esto es, $u_k\to u$ converge fuertemente en X. Claramente u es un punto crítico de Φ_t. ■

Proposición 3.5 *Φ satisface (**H2**) y (**H3**) con $\theta_2(t,s) = A(s^2+1)^{\frac{\delta}{2}} = -\theta_1(t,s)$, para alguna constante $A > 0$ y $\delta = \max\left\{\frac{p-1}{\mu}, \gamma\right\}$.*

Demostración: De la desigualdad (3.3) se sigue que

$$\begin{aligned}\Phi_t(z) - \frac{1}{2}\Phi_t'(u)u &= \int_\Omega (\frac{1}{2}\nabla_u H(x,u,t)\cdot u - H(x,u,t)) \\ &\geq d_1 \int_\Omega F(x, u+tu_0) - d_2.\end{aligned}$$

Por otro lado, de (f) y (F_2) obtenemos

$$\begin{aligned}|f(x,u)|^{1/\gamma} &\leq d_0^{1/\gamma}(|F(x,u)|^\gamma + 1)^{1/\gamma} \\ &\leq d_4(|F(x,u)| + 1) \\ &\leq d_5(F(x,u)+1).\end{aligned}$$

Esto muestra, usando la desigualdad de Hölder y las dos desigualdades anteriores, que

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial}{\partial t}\Phi(u,t)\right| &\leq \int_\Omega |\nabla_u F(x, u_k + tu_0)|\,|u_0| + \int_\Omega |f(x,u)| \\ &\leq d_7\left(|u_k + tu_0|_\mu^{p-1} + 1\right) + d_6\left(\int_\Omega |f(x,u)|^{1/\gamma}\right)^\gamma \\ &\leq d_8\left(\left|\Phi_t(u) - \frac{1}{2}\Phi_t'(u)u + 1\right|^{\frac{p-1}{\mu}} + \left|\Phi_t(u) - \frac{1}{2}\Phi_t'(u)u + 1\right|^\gamma\right) \\ &\leq d_9\left|\Phi_t(u) - \frac{1}{2}\Phi_t'(u)u + 1\right|^\delta,\end{aligned} \tag{3.7}$$

con $\delta = \max\left\{\frac{p-1}{\mu}, \gamma\right\}$.

Si $|\Phi_t(z)| \leq b$, dado que $0 < \delta < 1$, esta desigualdad implica que

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\Phi(u,t)\right| \leq C(\|\Phi_t'(u)\|\,\|u\| + 1) \leq C(\|\Phi_t'(u)\| + 1)(\|u\| + 1).$$

Esto prueba (**H2**). Si $\Phi_t'(u) = 0$ entonces de la desigualdad (3.7) obtenemos

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\Phi(u,t)\right| \leq d_7\,|\Phi_t(u) + 1|^\delta \leq A(\Phi_t(u)^2 + 1)^{\frac{1}{2}\delta} = \theta_2(t, \Phi_t(u)) = -\theta_1(t, \Phi_t(u)).$$

Esto prueba (**H3**). ■

Proposición 3.6 Φ *satisface (H4).*

Demostración: De las propiedades (f) y (F_3) obtenemos

$$\begin{aligned}\Phi_t(u) &= \frac{1}{2}|\nabla u|_2^2 - \int_\Omega F(x, u+tu_0) - t\int_\Omega f(x, u+u_0) \\ &\leq \frac{1}{2}|\nabla u|_2^2 - \int_\Omega F(x, u+tu_0) + d_0\int_\Omega (|F(x, u+u_0)|^\gamma + 1) \\ &\leq \frac{1}{2}|\nabla u|_2^2 - d_2\int_\Omega F(x, u+tu_0) + d_3 \\ &\leq \frac{1}{2}|\nabla u|_2^2 - d_4|u|_\mu^\mu + d_3. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Dado que $\mu > 2$ se tiene que, para cualquier subespacio de dimensión finita W de X y $a \in \mathbb{R}$, existe $R > 0$ tal que $\Phi_t(u) \leq a$ si $u \in W$ y $\|u\| \geq R$, es decir, se cumple **(H4)**. ■

Proposición 3.7 Φ *satisface (H5).*

Demostración: Como $X^* = \{0\}$ y Φ es continua, $\Phi_t(0) \leq M$ para todo $t \in [0,1]$. Por (F_4), se tiene que Φ_0 es un funcional par, es decir, $\Phi_0(-u) = \Phi_0(u)$. Esto prueba **(H5)**. ■

3.1.3 Crecimiento de los valores minimax c_k

Sean $X_1 \subset X_2 \subset \cdots \subset X_k \subset \cdots$ una sucesión de subespacios vectoriales de X tales que $\dim(X_k) = k$. Dado que $X^* = X^- := \{0\}$, los valores c_k definidos en la Sección 2.2 son simplemente

$$c_k := \inf_{\sigma\in\Gamma_k} \sup_{u\in X_k} \Phi_0(\sigma(u))$$

donde Γ_k es el conjunto de las funciones continuas $\sigma \in C^0(X_k, X)$ que cumplen las siguientes dos propiedades:

(i) σ es impar, es decir, $\sigma(-u) = -\sigma(u)$ para cada $u \in X_k$,

(ii) Existe $R > 0$ tal que $\sigma(u) = u$ si $\|u\| > R$.

Para completar la demostración del Teorema 3.1 necesitamos mostrar que la sucesión (1.5) del Teorema 1.10

$$\left(\frac{c_{k+1} - c_k}{\max\limits_{0\leq t\leq 1}|\theta_1(t, c_{k+1})| + \max\limits_{0\leq t\leq 1}|\theta_2(t, c_k)| + 1}\right)$$

no está acotada. Probaremos la siguiente estimación.

Proposición 3.8 *Existe una constante positiva C tal que*

$$Ck^{\nu} \leq c_k \qquad \text{para toda } k \text{ suficientemente grande,}$$

donde $\nu := \frac{2}{N}\frac{p}{p-2}$.

Demostración: Como se mostró anteriormente (3.2), la condición (F_1) implica que

$$F(x,u) \leq d_1(|u|^p + 1)$$

Así, para alguna constante $d \geq d_1$ se tiene que

$$\begin{aligned}\Phi_0(u) &= \frac{1}{2}|\nabla u|_2^2 - \int_\Omega F(x,u) \\ &\geq \frac{1}{2}|\nabla u|_2^2 - d\,|u|_p^p - d \\ &=: \Psi(u) - d.\end{aligned}$$

Esto muestra que, para cada k,

$$c_k(\Psi) := \inf_{\sigma\in\Gamma_k}\sup_{u\in X_k}\Psi(\sigma(u)) \leq \inf_{\sigma\in\Gamma_k}\sup_{u\in X_k}\Phi_0(\sigma(u)) + d = c_k + d. \tag{3.9}$$

Tanaka demostró [49, Theorem B] que que existe $u_k = (u_k^1, \dots, u_k^m) \in X$ tal que

$$\begin{aligned}\Psi(u_k) = \widetilde{\Psi}\left(u_k^1\right) + \cdots + \widetilde{\Psi}\left(u_k^m\right) &\leq c_k(\Psi), \\ \widetilde{\Psi}'(u_k^i) &= 0, \\ \mu_0(u_k) = \mu_0(u_k^1) + \cdots + \mu_0(u_k^m) &\geq k\end{aligned} \tag{3.10}$$

donde $\mu_0(u)$ denota el índice de Morse más la nulidad de Ψ en u, y $\widetilde{\Psi}(v) = \frac{1}{2}|\nabla v|_2^2 - d\,|v|_p^p$ para cada $v \in H_0^1(\Omega)$. Entonces para alguna $i \in \{1, \dots, m\}$ se tiene que

$$\mu_0(u_k^i) \geq \frac{k}{m}. \tag{3.11}$$

La desigualdad clásica de Cwickel [26], Lieb [39], y Rosenbljum [45] nos dice que

$$\mu_0(u_k^i) \leq C_1 \int_\Omega |u_k^i|^\alpha \tag{3.12}$$

con $\alpha := \frac{N}{2}(p-2)$. Por otra parte, como u_k^i es un punto crítico de $\widetilde{\Psi}$, se tiene que

$$0 = \widetilde{\Psi}'(u_k^i)\left(u_k^i\right) = \left|\nabla u_k^i\right|_2^2 - dp\left|u_k^i\right|_p^p$$

de modo que

$$\widetilde{\Psi}(u_k^i) = \frac{1}{2}\left|\nabla u_k^i\right|_2^2 - d\left|u_k^i\right|_p^p = \frac{d(p-2)}{2}\left|u_k^i\right|_p^p \geq 0.$$

Como $p < 2^* = \frac{2N}{N-2}$ se tiene que $\alpha < p$. Por tanto, combinando (3.9), (3.10), (3.12) y (3.11) obtenemos

$$c_k + d \geq c_k(\Psi) \geq \widetilde{\Psi}\left(u_k^i\right) = \frac{d(p-2)}{2}\left|u_k^i\right|_p^p \geq C_2\left|u_k^i\right|_\alpha^p \geq C_3 k^\nu \tag{3.13}$$

con $\nu = \frac{p}{\alpha} = \frac{2}{N}\frac{p}{p-2}$. Por tanto, para k suficientemente grande,

$$Ck^\nu \leq c_k.$$

■

Demostración del Teorema 3.1: Aplicaremos el Teorema 1.10. De las Proposiciones 3.4-3.7 obtenemos las propiedades (**H1**)-(**H5**). Las propiedades (**H6**)-(**H7**) son consecuencia de (**H4**), véase 2.6.1. Sólo falta mostrar que la sucesión (1.5) es no acotada. Supongamos, por contradicción, que existe $B > 0$ tal que

$$c_{k+1} - c_k \leq B(\theta(c_{k+1}) + \theta(c_k) + 1)$$

donde $\theta(s) = |\theta_1(t,s)| = |\theta_2(t,s)| = A(s^2+1)^{\delta/2}$ con $\delta := \max\left\{\frac{p-1}{\mu}, \gamma\right\}$ (véase la Proposición 3.5). Argumentando como en [44, (10.47)], esto implica que existe una constante $D > 0$ tal que

$$c_k \leq Dk^{1/(1-\delta)} \quad \text{para toda } k,$$

lo cual contradice la Proposición 3.8 si $\delta < \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2^*}\right)N$, como habíamos supuesto. ■

3.1.4 Comentarios

(1) Nótese que la condición

$$\max\left\{\frac{p-1}{\mu}, \gamma\right\} < \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2^*}\right)N$$

del Teorema 3.1 depende de las funciones θ_1 y θ_2 para las que se cumple **(H3)**. En los casos particulares del problema $(\mathcal{G})$ que consideraremos a continuación, las funciones θ_1 y θ_2 que obtendremos nos permitirán debilitar esta condición.
(2) Si f es de la forma $f(x,u) = \widetilde{f}(x) \cdot u$, con $\widetilde{f} \in C\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m\right)$, entonces f satisface la condición (f) con $\gamma = \frac{1}{\mu}$. En efecto, como $\widetilde{f}$ está acotada en $\overline{\Omega}$, usando (F_3) obtenemos

$$|f(x,u)| \leq a_1 |u| \leq a_2(F(x,u)^{1/\mu} + 1).$$

Y dado que $\nabla_u f(x,u) = \widetilde{f}(x)$ la condición (f) se cumple. Así pues, en este caso, la condición $\max\left\{\frac{p-1}{\mu}, \gamma\right\} < \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2^*}\right) N$ de nuestro Teorema 3.1 es equivalente a la condición $\frac{\mu}{\mu-p+1} < \frac{2}{N}\frac{p}{p-2}$. Esta última es la condición obtenida por Candela, Salvatore y Squassina en [25], de modo que nuestro resultado extiende el Teorema 1.1 de [25] a no linealidades más generales (si bien, en [25] se consideran operadores elípticos más generales).

3.2 Sistemas elípticos de tipo gradiente con condición de frontera homogénea

Consideremos ahora el problema $(\mathcal{G})$ con condición de frontera $u_0 = 0$, es decir,

$$(\mathcal{G}_0) \qquad \begin{cases} -\Delta u = \nabla_u H(x,u) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

En este caso obtenemos un resultado mejor:

Teorema 3.9 *Si se cumplen (F_1), (F_2), (F_4) y (f), entonces el problema $(\mathcal{G}_0)$ tiene una infinidad de soluciones si*

$$\gamma < \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2^*}\right) N.$$

La trayectoria de funcionales asociada a este problema es $\Phi : H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^m) \times [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$\Phi(u,t) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx - \int_\Omega H(x,u,t)dx$$

donde

$$H(x,u,t) := F(x,u) + tf(x,u).$$

Como antes tomamos $X = X^+ = H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ y $X^* = X^- = \{0\}$. Este funcional satisface lo siguiente.

Proposición 3.10 Φ *satisface (**H3**) con* $\theta_2(t,s) = A(s^2+1)^{\gamma/2} = -\theta_1(t,s)$, *para alguna constante* $A > 0$.

Demostración: De la desigualdad (3.3) se sigue que

$$\Phi_t(z) - \frac{1}{2}\Phi_t'(u)u = \int_\Omega (\frac{1}{2}\nabla_u H(x,u,t)\cdot u - H(x,u,t)) \geq d_1 \int_\Omega F(x,u) - d_2.$$

Por otro lado, de (f) y (F_2) obtenemos

$$\begin{aligned}|f(x,u)|^{1/\gamma} &\leq d_0^{1/\gamma}(|F(x,u)|^\gamma + 1)^{1/\gamma}\\ &\leq d_4(|F(x,u)| + 1)\\ &\leq d_5(F(x,u) + 1).\end{aligned}$$

Esto muestra , usando la desigualdad de Hölder y las dos desigualdades anteriores, que

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\Phi(u,t)\right| \leq \int_\Omega |f(x,u)| \leq d_6\left(\int_\Omega |f(x,u)|^{1/\gamma}\right)^\gamma \leq d_7\left|\Phi_t(u) - \frac{1}{2}\Phi_t'(u)u + 1\right|^\gamma. \tag{3.14}$$

Si $\Phi_t'(u) = 0$ entonces de la desigualdad (3.14) obtenemos

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\Phi(u,t)\right| \leq d_7\,|\Phi_t(u) + 1|^\gamma \leq A(\Phi_t(u)^2 + 1)^{\gamma/2} = \theta_2(t,\Phi_t(u)) = -\theta_1(t,\Phi_t(u)).$$

Esto prueba (**H3**). ■

Demostración del Teorema 3.9: Aplicaremos el Teorema 1.10. De las Proposiciones 3.4-3.7 obtenemos las propiedades (**H1**)-(**H2**)-(**H4**)-(**H5**). Las propiedades (**H6**)-(**H7**) son consecuencia de (**H4**), véase 2.6.1. La propiedad (**H3**) se probó en la proposición anterior. Sólo falta mostrar que la sucesión (1.5) es no acotada. Supongamos, por contradicción, que existe $B > 0$ tal que

$$c_{k+1} - c_k \leq B(\theta(c_{k+1}) + \theta(c_k) + 1)$$

donde $\theta(s) = |\theta_1(t,s)| = |\theta_2(t,s)| = A(s^2+1)^{\gamma/2}$ (véase la proposición anterior). Como antes, esto implica que existe una constante $D > 0$ tal que

$$c_k \leq Dk^{1/(1-\gamma)} \quad \text{para toda } k.$$

Dado que $\gamma < \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2^*}\right)N$, esto contradice la Proposición 3.8. ■

3.2.1 Comentarios

(1) Si f es de la forma $f(x,u) = \widetilde{f}(x)\cdot u$ entonces cumple la condición (f) con $\gamma = \frac{1}{\mu}$, véase 3.1.4 (2). En este caso, la condición $\gamma < \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2^*}\right) N$ de nuestro Teorema 3.9 es equivalente a $\frac{\mu}{\mu-1} < \frac{2}{N}\frac{p}{p-2}$, que es la condición obtenida por Candela, Salvatore y Squassina en [25], de modo que nuestro resultado extiende el Teorema 1.3 de [25] a no linealidades más generales.
(2) Para $m = 1$, es decir, en el caso de una sóla ecuación, y $f(x,u) = \widetilde{f}(x)u$ la condición $\gamma < \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2^*}\right) N$ coincide con la obtenida por Bahri-Lions (1.1) para $F(u) = |u|^p$, y por Tanaka [49] para $F(x,u) = F(u)$.

3.3 El caso autónomo

Consideremos ahora otro caso especial de $(\mathcal{G})$ en el que H es de la forma

$$H(x,u) = F(u) + \widetilde{f}(x)\cdot u, \quad \text{y} \quad \widetilde{f} \in C(\Omega, \mathbb{R}^m),$$

es decir, consideremos el problema

$$(\mathcal{G}^*) \qquad \begin{cases} -\Delta u = \nabla_u F(u) + \widetilde{f}(x) & \text{en } \Omega \\ u = u_0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Nótese que f cumple la condición (f) con $\gamma = \frac{1}{\mu}$, véase 3.1.4 (2). En este caso se obtiene también un mejor resultado, ya que es posible obtener una "mejor cota" para la condición (**H3**). Más precisamente,

Teorema 3.11 *Si se cumplen (F_1), (F_2), y (F_4), entonces el problema $(\mathcal{G}^*)$ tiene una infinidad de soluciones si*

$$\frac{1}{2} < \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2^*}\right) N.$$

De manera completamente análoga a la del Teorema 3.9, la demostración de este teorema es consecuencia de la siguiente proposición.

Proposición 3.12 *Φ satisface **(H3)** con $\theta_2(t,s) = A(s^2+1)^{1/4} = -\theta_1(t,s)$, para alguna constante $A > 0$.*

Demostración: Sea u un punto crítico de Φ_t. Entonces $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^m)$ es una solución clásica del sistema

$$(\mathcal{G}')_t \qquad \begin{cases} -\Delta u = \nabla_u H(u + tu_0) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

y así, usando la identidad de Green, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\Phi(u,t) &= -\int_\Omega \nabla F(u + tu_0) \cdot u_0 - \int_\Omega f \cdot u \\ &= \int_\Omega \Delta u \cdot u_0 - \int_\Omega f \cdot u + t \int_\Omega f \cdot u_0 \\ &= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \cdot u_0 - \int_\Omega f \cdot u + t \int_\Omega f \cdot u_0 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Sea $v = u + u_0$ y sea $D_{\partial\Omega} v = D_{\partial\Omega} u_0$ la componente de la derivada de u tangencial a $\partial\Omega$. Procediendo como en [14] se muestra que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial\Omega} \left(\frac{1}{2} \left| D_{\partial\Omega} u_0 \right|^2 - \frac{1}{2} \left| \frac{\partial v}{\partial n} \right|^2 \right) \right| &= \left| \int_{\partial\Omega} \left(\frac{1}{2} \left| \nabla v \right|^2 - \frac{1}{2} \left| \frac{\partial v}{\partial n} \right|^2 \right) \right| \\ &\leq a \left(\|u\| + 1 \right)^2 + b \left| \int_\Omega F(v) \right| \\ &\leq c \left(\left| \Phi_t(u) \right| + 1 \right). \end{aligned} \tag{3.16}$$

De las ecuaciones (3.15) y (3.16) se sigue que

$$\left| \frac{\partial}{\partial t}\Phi(u,t) \right| \leq A \left(\left| \Phi_t(u) \right|^2 + 1 \right)^{1/4}.$$

Esto prueba (**H3**). ■

3.3.1 Comentarios

(1) Para el caso de una sóla ecuación (es decir, cuando $m = 1$) este resultado fue probado por Bolle, Ghoussoub y Tehrani [14]. Observe que $\frac{1}{2} < \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2^*} \right) N$ es equivalente a $p < \frac{2N}{N-1}$, que es la condición dada en [14], véanse los comentarios previos a la desigualdad (1.4).

(2) El Teorema 3.11 fue demostrado por Clapp, Hernández-Martínez y el autor de esta tesis en [20]. De hecho, probaron que el Teorema 3.9, con $F(x,u) = F(u)$

y $f(x,u) = \widetilde{f}(x) \cdot u$, el Teorema 3.11 continúa siendo válido si F, en vez de ser par, es invariante bajo la acción ortogonal de un toro $\mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$, o de un q-toro $\mathbb{Z}/q \times \cdots \times \mathbb{Z}/q$, o de un q-grupo cíclico $\mathbb{Z}/q^r$, con q primo, $q > 1$, que actúa sin puntos fijos en $\mathbb{R}^m$, mejorando así un resultado previo de Clapp [19].

Capítulo 4

Sistemas elípticos fuertemente indefinidos

En este capítulo daremos una aplicación de nuestro teorema abstracto (Teorema 1.10) a sistemas elípticos no cooperativos, cuyo funcional asociado es fuertemente indefinido. Los resultados que obtenemos aquí extienden resultados recientes obtenidos por de Figueiredo y Ding [28] para no linealidades simétricas, al caso no simétrico.

4.1 Multiplicidad de soluciones de un sistema elíptico no cooperativo, fuertemente indefinido

Consideremos el sistema elíptico no cooperativo:

$$(\mathcal{H}) \qquad \begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-2}\, u + f_u(x,u,v) & \text{en } \Omega \\ \quad \Delta v = |v|^{q-2}\, v + f_v(x,u,v) & \text{en } \Omega \\ u = 0, \quad v = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

donde Ω es un dominio acotado y suave en $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, y $f \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

Nos interesa especialmente el caso en que la función f no es simétrica, y el sistema es subcrítico en u y supercrítico en v, es decir, $p \in (2, 2^*)$, $q \in [2^*, \infty)$, donde $2^* = \frac{2N}{N-2}$ es el exponente crítico de Sobolev, y f es un término no simétrico de orden menor que $|u|^p + |v|^q$ en el infinito.

En esta sección probaremos el siguiente teorema.

Teorema 4.1 *Sean $p \in (2, 2^*)$, $q \in (2, \infty)$, y $f \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Si existen $d > 0$,*

$\gamma \in [0,1)$, $\gamma < \min\left\{ \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2^*}\right) N,\ \frac{q}{q-1}\left(\frac{2^*-1}{2^*}\right)\right\}$ *tales que*

$$\begin{array}{ll} (f_1) & |f(x,z)| + |f_z(x,z)z| \leq d(|u|^{\gamma p} + |v|^{\gamma q} + 1) \\ (f_2) & |f_z(x,z)| \leq d(|u|^{\gamma(p-1)} + |v|^{\gamma(q-1)} + 1) \end{array}$$

para toda $x \in \Omega$, $z = (u,v) \in \mathbb{R}^2$, *entonces el problema* $(\mathcal{H})$ *tiene una sucesión de soluciones* $z_k = (u_k, v_k)$ *que satisface*

$$C_1 k^{\nu} \leq \Phi_1(z_k) \leq C_2 k^{\nu},$$

con $\nu := \frac{2p}{N(p-2)}$ *y* C_1, C_2 *constantes positivas.*

El Teorema 1.12 mencionado en la introducción es un caso especial de éste, véase la sección 4.5.

A diferencia del caso de sistemas gradientes, este resultado requiere del Teorema 1.10 en toda su fuerza. Como veremos a continuación, el funcional asociado es un funcional de clase C^1 en un espacio de Banach (no de Hilbert), y es además fuertemente indefinido (véase A.8).

4.2 Formulación variacional

Consideremos una solución clásica $(u,v) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ de clase C^2 del sistema elíptico fuertemente indefinido $(\mathcal{H})$. De igual manera como se procedió en el caso homogéneo, se tiene que u y v satisfacen las ecuaciones

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi dx - \int_\Omega |u|^{p-2} u\varphi dx - \int_\Omega \frac{\partial f(x,u,v)}{\partial u}\varphi dx &= 0, \text{ para cada } \varphi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}), \\ \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla \psi dx + \int_\Omega |v|^{q-2} v\psi dx + \int_\Omega \frac{\partial f(x,u,v)}{\partial v}\psi dx &= 0, \text{ para cada } \psi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Restando estas ecuaciones se obtiene la siguiente ecuación equivalente

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi dx - \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \psi dx - \int_\Omega \nabla_z H(x,u,v) \cdot (\varphi, \psi)\, dx = 0,\ \forall\ \varphi, \psi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}) \tag{4.1}$$

donde

$$H(x,z) := \frac{1}{p}|u|^p + \frac{1}{q}|v|^q + f(x,z), \qquad x \in \Omega,\ z = (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

A las funciones (u,v) que satisfacen la ecuación (4.1) se les llama *soluciones débiles* de $(\mathcal{H})$. Si los datos del problema satisfacen condiciones de regularidad adecuadas, las soluciones débiles son soluciones clásicas (véase el Apéndice B de [48]). De modo que nos ocuparemos únicamente de la existencia de soluciones débiles, a las que llamaremos simplemente soluciones.

Como en el caso gradiente, las soluciones débiles son puntos críticos de un funcional definido en un espacio adecuado. Para ver esto, consideremos los valores propios de $-\Delta$ en $H_0^1(\Omega)$, $0<\lambda_1\leq\cdots\leq\lambda_j\leq\cdots$, contados con sus respectivas multiplicidades, y sea $e_j\in H_0^1(\Omega)$ la función propia correspondiente a λ_j tal que $|e_j|_2=1$. Consideremos el espacio de Banach $H_0^1(\Omega)\cap L^q(\Omega)$ equipado con la norma $||v||_{(q)}:=(|\nabla v|_2^2+|v|_q^2)^{1/2}$, y definamos $V^q(\Omega)$ como la cerradura de $span\{e_k:k\geq 1\}$ como subespacio de $H_0^1(\Omega)\cap L^q(\Omega)$, el cual es un espacio de Banach. Sea X la suma directa

$$X:=H_0^1(\Omega)\oplus V^q(\Omega).$$

Denotemos a los elementos de X por $z=(u,v)$, y a sus normas por

$$||z||_q:=(|\nabla u|_2^2+||v||_{(q)}^2)^{1/2}=(|\nabla u|_2^2+|\nabla v|_2^2+|v|_q^2)^{1/2},$$

donde $|\cdot|_r$ es la norma usual en $L^r(\Omega)$. Definamos

$$\begin{aligned} X_k^+ &: = span\{e_1,...,e_k\}\subset H_0^1(\Omega)=:X^+,\\ X_n^- &: = span\{e_1,...,e_n\}\subset V^q(\Omega)=:X^-,\end{aligned}$$

y $X^*:=\{0\}$. La proyección $H_0^1(\Omega)\to span\{e_1,...,e_n\}\subset H_0^1(\Omega)$ induce el operador continuo

$$P_n:V^q(\Omega)\to X_n^-$$

el cual satisface $P_nv\to v$ en $V^q(\Omega)$ cuando $n\to\infty$ para cada $v\in V^q(\Omega)$; esto debido a que $\cup_{n\geq 1}X_n^-$ es denso en X^-.

Sea

$$H(x,z,t):=\frac{1}{p}|u|^p+\frac{1}{q}|v|^q+tf(x,z),\qquad x\in\Omega,\ z=(u,v)\in\mathbb{R}^2.$$

Obsérvese que la condición (f_1) implica

$$|H(x,z,t)|\leq c\left(|u|^p+|v|^q+1\right),\quad \forall\, x\in\Omega,\ z=(u,v)\in\mathbb{R}^2,$$

para alguna constante positiva c. Así, el funcional

$$\Phi(z,t):=\frac{1}{2}\int_\Omega\left(|\nabla u|^2-|\nabla v|^2\right)dx-\int_\Omega H(x,z,t)dx$$

está bien definido en $X\times[0,1]$. Más aún, la Proposición A.7 asegura la diferenciabilidad de Φ, es decir, se cumple lo siguiente.

Proposición 4.2 *El funcional $\Phi \in C^1(X \times [0,1], \mathbb{R})$, y su derivada está dada por*

$$\Phi_t'(u,v)(\varphi,\psi) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx - \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \psi \, dx - \int_\Omega \nabla_z H(x,u,v,t) \cdot (\varphi,\psi) \, dx.$$

En particular, puntos críticos de $\Phi_1 := \Phi(\,\cdot\,,1)$ son las soluciones débiles de $(\mathcal{H})$, esto debido a que $C_c^\infty(\Omega,\mathbb{R}) \subset V^q(\Omega)$, (véase el lema A.12).

Comenzaremos mostrando que Φ satisface las condiciones (H1)-(H7) del Teorema 1.10. Como en el Capítulo 2 definimos

$$X^n := X^+ \oplus X_n^-, \qquad X_k^n := X_k^+ \oplus X_n^-,$$

y $\Phi_t^n : X^n \to \mathbb{R}$ es el funcional definido por $\Phi_t^n(z) = \Phi(z,t)$, $z \in X^n$.

4.3 Propiedades (H1)-(H6)

Para probar (H1) necesitaremos los siguientes dos lemas.

Lema 4.3 *Sea $z_k \in X^{n_k}$, $t_k \in [0,1]$ tal que $n_k \to \infty$, $\Phi_{t_k}(z_k) \to c$ y $(\Phi_{t_k}^{n_k})'(z_k) \to 0$ cuando $k \to \infty$. Entonces (z_k) es acotada en X.*

Demostración: De la propiedad (f_2) obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}H_z(x,z,t)\cdot z - H(x,z,t) &= \frac{p-2}{2p}|u|^p + \frac{q-2}{2q}|v|^q + t\left(\frac{1}{2}f_z(x,z) - f(x,z)\right)\\ &\geq \frac{p-2}{2p}|u|^p + \frac{q-2}{2q}|v|^q - d_0\left(|u|^{\gamma p} + |v|^{\gamma q} + 1\right)\\ &\geq d_1\left(|u|^p + |v|^q\right) - d_2. \quad (4.2)\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}d(1+\|z_k\|_q) \geq \Phi_{t_k}(z_k) - \frac{1}{2}(\Phi_{t_k}^{n_k})'(z_k)(z_k) &= \int_\Omega (\frac{1}{2}H_z(x,z_k,t_k)z_k - H(x,z_k,t_k))\\ &\geq d_1\left(|u_k|_p^p + |v_k|_q^q\right) - d_3.\end{aligned}$$

de donde obtenemos

$$|u_k|_p^p + |v_k|_q^q \leq d(1+\|z_k\|_q). \qquad (4.3)$$

Y así, haciendo $z_k = (u_k, v_k)$, y usando (f_2) obtenemos

$$\int_\Omega H_u(x, z_k, t_k)u_k = |u_k|_p^p + t_k \int_\Omega f_u(x, z_k)u_k$$
$$\leq d \int_\Omega (|u_k|^p + |v_k|^{\gamma(q-1)} |u_k| + 1).$$

Por hipótesis, $\eta = q/(q - \gamma(q-1)) < 2^*$. Entonces, usando la desigualdad de Hölder, el Teorema de Encaje de Sobolev y la desigualdad (4.3), obtenemos

$$\int_\Omega |v_k|^{\gamma(q-1)} |u_k| \leq |v_k|_q^{\gamma(q-1)} |u_k|_\eta \leq d(1 + \|z_k\|_q^{1+\gamma(q-1)/q}).$$

que junto con (4.3) se sigue que

$$\int_\Omega H_u(x, z_k, t_k)u_k \leq d(1 + \|z_k\|_q^\sigma)$$

con $1 < \sigma < 2$. De esta desigualdad y la condición (f_1), se obtiene

$$\begin{aligned}
-\int_\Omega H_v(x, z_k, t_k)v_k &= \int_\Omega H_u(x, z_k, t_k)u_k - \int_\Omega H_z(x, z_k, t_k) \cdot z_k \\
&\leq d(1 + \|z_k\|_q^\sigma) - \int_\Omega (|u_k|^p + |v_k|^q) \\
&\quad + d_1 \int_\Omega (|u_k|^{\gamma p} + |v_k|^{\gamma q} + 1) \\
&\leq d(1 + \|z_k\|_q^\sigma) - d_2 \int_\Omega (|u_k|^p + |v_k|^q) + d_3 \\
&\leq d_4(1 + \|z_k\|_q^\sigma).
\end{aligned}$$

De aquí concluimos que, para k suficientemente grande,

$$|\nabla u_k|_2^2 = (\Phi_{t_k}^{n_k})'(z_k)(u_k, 0) + \int_\Omega H_u(x, z_k, t_k)u_k \leq d(1 + \|z_k\|_q^\sigma) \tag{4.4}$$

y

$$|\nabla v_k|_2^2 = -(\Phi_{t_k}^{n_k})'(z_k)(0, v_k) - \int_\Omega H_v(x, z_k, t_k)v_k \leq d(1 + \|z_k\|_q^\sigma). \tag{4.5}$$

De las desigualdades (4.3), (4.4) y (4.5) obtenemos

$$\|z_k\|_q^2 \leq d(1 + \|z_k\|_q^\sigma)$$

con $\sigma < 2$. Por lo tanto (z_k) es acotada en X. ∎

Lema 4.4 $|b|^q - |a|^q \leq q\,|b|^{q-2}\, b\,(b-a)$ *para todo* $a, b \in \mathbb{R}$ *y* $q > 2$.

Demostración: Sea $f(t) = |(1-t)\,a + tb|^q$, entonces $f(1) - f(0) = f'(\xi)$ para algún $\xi \in (0,1)$, donde $f'(t) = q\,|(1-t)\,a + tb|^{q-2}\,((1-t)\,a + tb)\,(b-a)$. Como

$$f''(t) = q\,(q-1)\,|(1-t)\,a + tb|^{q-2}\,(b-a)^2 \geq 0$$

para toda $t \in [0,1]$, f' es creciente, y así
$|b|^q - |a|^q = f(1) - f(0) = f'(\xi) \leq f'(1) = q\,|b|^{q-2}\, b\,(b-a)$. ∎

Proposición 4.5 Φ *satisface (H1).*

Demostración: Sea $z_k \in X^{n_k}$, $t_k \in [0,1]$ tal que $n_k \to \infty$, $t_k \to t$, $\Phi_{t_k}(z_k) \to d$ y $(\Phi_{t_k}^{n_k})'(z_k) \to 0$ cuando $k \to \infty$. Denotemos por $z_k = (u_k, v_k)$. Dado que (z_k) es acotado en X, existe una subsucesión tal que $u_k \rightharpoonup u$ débilmente en $H_0^1(\Omega)$ y $v_k \rightharpoonup v$ débilmente en $H_0^1(\Omega) \cap L^q(\Omega)$. Más aún, por el Teorema de Rellich-Kondrakov, $u_k \to u$ fuertemente en $L^s(\Omega)$ para toda $s \in [1, 2^*)$ y, por interpolación, $v_k \to v$ fuertemente en $L^s(\Omega)$ para cada $s \in [1, \max\{q, 2^*\})$. Se sigue de la condición (f_2) y la desigualdad de Hölder que

$$\begin{aligned}
\left| \int_\Omega H_u(x, z_k, t_k)(u_k - u) \right| &= \left| \int_\Omega (|u_k|^{p-1} + t_k f_u(x, z_k))(u_k - u) \right| \\
&\leq d_1 \int_\Omega (|u_k|^{p-1} + |v_k|^{\gamma(q-1)} + 1)\,|u_k - u| \\
&\leq d_2(|u_k|_p^{p-1}\,|u_k - u|_p + |v_k|_q^{\gamma(q-1)}\,|u_k - u|_\eta + |u_k - u|_1)
\end{aligned}$$

con $\eta = q/(q - \gamma(q-1)) < 2^*$. Y así,

$$\int_\Omega \nabla u_k \nabla (u_k - u) = (\Phi_{t_k}^{n_k})'(z_k)(u_k - u, 0) + \int_\Omega H_u(x, z_k, t_k)(u_k - u) \longrightarrow 0 \quad \text{cuando } k \to \infty,$$

es decir, $u_k \to u$ fuertemente en $H_0^1(\Omega)$.
La proyección $P_n : V^q(\Omega) \to V^q(\Omega)_n$ satisface $P_n v \to v$ en $V^q(\Omega)$ cuando $n \to \infty$ para cada $v \in V^q(\Omega)$. Así, $(v_k - P_{n_k} v) \to 0$ en $L^s(\Omega)$ para cada $s \in [1, \max\{q, 2^*\})$. Argumentando como en la desigualdad anterior,

$$\begin{aligned}
\left| \int_\Omega t_k f_v(x, z_k)(v_k - P_{n_k} v) \right| &\leq d_1 \int_\Omega (|u_k|^{p-1} + |v_k|^{\gamma(q-1)} + 1)\,|v_k - P_{n_k} v| \\
&\leq d_2(|u_k|_p^{p-1}\,|v_k - P_{n_k} v|_p + |v_k|_q^{\gamma(q-1)}\,|v_k - P_{n_k} v|_\eta \\
&\qquad + |v_k - P_{n_k} v|_1),
\end{aligned}$$

con $\eta < 2^*$ definida como en la desigualdad anterior. De aquí que,

$$\int_\Omega t_k f_v(x, z_k)(v_k - P_{n_k} v) \longrightarrow 0 \quad \text{cuando } k \to \infty.$$

De esto inferimos

$$\begin{aligned}
|\nabla v_k|_2^2 - |\nabla v|_2^2 + o(1) &= \int_\Omega \nabla v_k \nabla (v_k - P_{n_k} v) \\
= -(\Phi_{t_k}^{n_k})'(z_k)(0, v_k - P_{n_k} v) &- \int_\Omega H_v(x, z_k, t_k)(v_k - P_{n_k} v) \\
&= o(1) - \int_\Omega |v_k|^{q-2} v_k (v_k - P_{n_k} v) \\
= o(1) + \int_\Omega |v_k|^{q-2} v_k (v - v_k) &+ \int_\Omega |v_k|^{q-2} v_k (P_{n_k} v - v) \\
&= o(1) + \int_\Omega |v_k|^{q-2} v_k (v - v_k) \\
&\leq o(1) + \frac{1}{q}(|v|_q^q - |v_k|_q^q)
\end{aligned}$$

donde $o(1) \to 0$ cuando $k \to \infty$. La última igualdad se debe a que $v_k \rightharpoonup v$ débilmente en $L^q(\Omega)$ y, por tanto, está acotada, y $P_n v \to v$ en $L^q(\Omega)$. La última desigualdad es consecuencia del Lema 4.4. De modo que, de la semicontinuidad inferior débil de la norma se sigue que

$$0 \leq \liminf |\nabla v_k|_2^2 - |\nabla v|_2^2 \leq \limsup |\nabla v_k|_2^2 - |\nabla v|_2^2 \leq \frac{1}{q}(|v|_q^q - \liminf |v_k|_q^q) \leq 0.$$

Por lo tanto, existe una subsucesión tal que $v_k \to v$ fuertemente en $V^q(\Omega)$. Esto prueba que $z_k \to z$ fuertemente en X. Así, esto implica que $\Phi'_{t_k}(z_k)\zeta \to \Phi'_t(z)\zeta$ para cada $\zeta \in X$ y, de aquí que $\Phi'_t(z)\zeta = 0$ para cada $\zeta \in \cup_{n\geq 1} X^n$. Dado que $\cup_{n\geq 1} X^n$ es denso en X, z es un punto crítico de Φ_t. ∎

Proposición 4.6 *Φ satisface (H2) y (H3) con $\theta_2(t, s) = A(s^2 + 1)^{\gamma/2} = -\theta_1(t, s)$, $A > 0$.*

Demostración: De la desigualdad (4.2) se sigue que

$$\begin{aligned}
\Phi_t(z) - \frac{1}{2}\Phi'_t(z)z &= \int_\Omega (\frac{1}{2} H_z(x, z, t) \cdot z - H(x, z, t)) \\
&\geq d_1 \left(|u|_p^p + |v|_q^q \right) - d_3.
\end{aligned}$$

Por otro lado, (f_1) implica

$$\begin{aligned}|f(x,z)|^{1/\gamma} &\leq d_0^{1/\gamma}(|u|^{\gamma p}+|v|^{\gamma q}+1)^{1/\gamma}\\ &\leq d_4(|u|^p+|v|^q+1)\end{aligned}$$

Usando Hölder y estas dos desigualdades se tiene que

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\Phi(z,t)\right| \leq \int_\Omega |f(x,z)| \leq d_6\left(\int_\Omega |f(x,z)|^{1/\gamma}\right)^\gamma \leq d_7\left|\Phi_t(z)-\frac{1}{2}\Phi_t'(z)z+1\right|^\gamma. \quad (4.6)$$

Si $z\in X^n$ y $|\Phi_t(z)|\leq b$, de esta desigualdad se tiene

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\Phi(z,t)\right| \leq C(\left\|(\Phi_t^n)'(z)\right\|_{X^n}\|z\|_q+1) \leq C(\left\|(\Phi_t^n)'(z)\right\|_{X^n}+1)(\|z\|_q+1).$$

Esto prueba (H2). Si $\Phi_t'(z)=0$ entonces (4.6) implica

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\Phi(z,t)\right| \leq d_7|\Phi_t(z)+1|^\gamma \leq A(\Phi_t(z)^2+1)^{\gamma/2}=\theta_2(t,\Phi_t(z))=-\theta_1(t,\Phi_t(z)).$$

Esto prueba (H3). ∎

Proposición 4.7 Φ *satisface (H4) y (H6).*

Demostración: De la propiedad (f_1) se obtiene

$$\begin{aligned}\Phi_t(z) &= \frac{1}{2}|\nabla u|_2^2-\frac{1}{2}|\nabla v|_2^2-\frac{1}{p}|u|_p^p-\frac{1}{q}|v|_q^q-t\int_\Omega f(x,z)\\ &\leq \frac{1}{2}|\nabla u|_2^2-\frac{1}{p}|u|_p^p-\frac{1}{q}|v|_q^q+d_0\int_\Omega(|u|^{\gamma p}+|v|^{\gamma q}+1)\\ &\leq \frac{1}{2}|\nabla u|_2^2-d_1|u|_p^p-d_2|v|_q^q+d_3\end{aligned}$$

Por lo tanto, dado que $p>2$, se sigue que Φ_t está acotado superiormente sobre cualquier subespacio lineal $U\oplus V^q(\Omega)$ de X con $\dim U<\infty$, pues todas las normas en U son equivalentes; es decir, se tiene (H6). Más aún, para cada subespacio lineal de dimensión finita W de X y, para cada $a\in\mathbb{R}$, existe $R>0$ tal que $\Phi_t(z)\leq a$ si $z\in W$ y $\|z\|_q\geq R$, es decir, se tiene (H4). ∎

Proposición 4.8 Φ *satisface (H5).*

Demostración: Como $X^* = \{0\}$ y Φ es continua, $\Phi_t(0) \leq M$ para todo $t \in [0,1]$. Además, Φ_0 es una función par:

$$\Phi_0(u,v) = \frac{1}{2}|\nabla u|_2^2 - \frac{1}{2}|\nabla v|_2^2 - \frac{1}{p}|u|_p^p - \frac{1}{q}|v|_q^q$$
$$= \frac{1}{2}|\nabla(-u)|_2^2 - \frac{1}{2}|\nabla(-v)|_2^2 - \frac{1}{p}|(-u)|_p^p - \frac{1}{q}|(-v)|_q^q$$
$$= \Phi_0(-u,-v).$$

Es decir, se tiene (H5). ■

4.4 La propiedad (H7)

Veremos ahora que Φ_0 satisface (H7), de hecho, probaremos que (H7) se cumple con $\ell(t) = \alpha t + \beta$, donde α, β son constantes positivas independientes de k. Dividiremos la demostración en una serie de lemas. Los dos primeros se encuentran en [15]. Damos aquí una demostración detallada de ellos.

Lema 4.9 *Sea Ω un dominio acotado suave en $\mathbb{R}^N$. Entonces existe $a \in \mathbb{R}$ tal que:*
(i) $(x', a) \in \Omega$ para algún $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$, y
(ii) si $(x', b) \in \Omega$ y $b \geq a$, entonces $(x', t) \in \Omega$ para toda $a \leq t \leq b$.

Demostración: Sean $e_N = (0, ..., 0, 1) \in \mathbb{R}^N$, $M = \max\{x \cdot e_N : x \in \overline{\Omega}\}$ y $K = \{x \in \overline{\Omega} : x \cdot e_N = M\}$. Observe que M es el valor máximo (pues Ω es acotado) de la proyección ortogonal de $\overline{\Omega}$ en la última coordenada, $P_N(x_1, ..., x_N) = x_N$, y que $K = P_N^{-1}(M)$ es cerrado. Por ser la proyección una función abierta se tiene que $K \subset \partial\Omega$. De modo que, como $\partial\Omega$ es compacta, K es también compacto.
Sea $\nu : \partial\Omega \to \mathbb{R}^N$ el campo vectorial normal unitario exterior a Ω y sea $\mathcal{O} = \{x \in \partial\Omega : \nu(x) \cdot e_N > 0\}$. Dado que $\partial\Omega$ es suave tenemos que ν es continua y, por tanto, $\mathcal{O}$ es abierto en $\partial\Omega$. Como $\nu(x) = e_N$ si $x \in K$, se tiene que $K \subset \mathcal{O}$. Dado que $\partial\Omega$ es compacto, existe $\varepsilon > 0$ tal que el conjunto $A := \{x \in \partial\Omega : x \cdot e_N \geq M - \varepsilon\} \subset \mathcal{O}$ (pues de no ser así existiría una sucesión (x_n) en $\partial\Omega \backslash \mathcal{O}$ tal que $x_n \cdot e_N \to M$ y $x_n \to x$ y así, por continuidad, $x \cdot e_N = M$, es decir, $x \in K$ y $x \in \partial\Omega \backslash \mathcal{O}$ lo cual es una contradicción, pues $\mathcal{O}$ es una vecindad de K).
Así, para cada $(x', t) \in A$ existe $\overline{\varepsilon} > 0$ tal que $(x', s) \notin \Omega$ si $t < s < t + \overline{\varepsilon}$ y $(x', s) \in \Omega$ si $t - \overline{\varepsilon} < s < t$. Es decir, para cada $(x', t) \in A$,

$$(\{x'\} \times [a, M]) \cap \partial\Omega = \{(x', t)\} \quad \text{y} \quad \{x'\} \times [a, t) \subset \Omega$$

donde $a := M - \varepsilon$. ■

Definamos

$$\begin{aligned} I(u) &:= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p, \qquad J(v) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 + \frac{1}{q}\int_\Omega |v|^q, \text{ y} \\ I^\#(u) &:= 2\int_\Omega |\nabla u|^2 - \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p. \end{aligned}$$

Lema 4.10 *Existe una función continua par $\tau : H_0^1(\Omega) \to [0,\infty)$ con las siguientes propiedades:*

(i) $I([(1-s)+s\tau(u)]u) \leq I(u)$ *para toda* $u \in H_0^1(\Omega)$, $0 \leq s \leq 1$.

(ii) Si $I^\#(u) \leq 0$ *entonces* $\tau(u) = 1$.

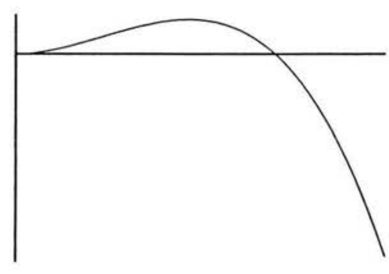
(iii) Si $2I(u) \leq \max_{t\geq 0} I(tu)$ *entonces* $I^\#(\tau(u)u) \leq 0$.

(iv) $I^\#(\tau(u)u) \leq \max\{\alpha I(u), 0\}$, *donde* $\alpha := 2^{(3p-2)/(p-2)}$.

Demostración: Para cada $v \in H_0^1(\Omega)$ tal que $\|v\| = 1$ consideremos la función

$$f_v : [0,\infty) \to \mathbb{R}, \qquad f_v(t) = I(tv) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{|v|_p^p}{p}t^p.$$

Como $p > 2$, la gráfica de esta función es de la forma:



Observe que f_v tiene un único máximo $\widehat{t}_v := \left(\frac{\|v\|^2}{|v|_p^p}\right)^{\frac{1}{p-2}} > 0$, $f_v(\widehat{t}_v) > 0$, f_v es estrictamente creciente en $[0, \widehat{t}_v]$ y estrictamente decreciente en $[\widehat{t}_v, \infty)$, y $f_v(t) \to -\infty$ cuando $t \to \infty$. De modo que existen t_v^-, $t_v^+ > 0$ únicos, tales que $0 < t_v^- < \widehat{t}_v < t_v^+$ y

$$2I(tv) \geq \max_{t\geq 0} I(tv) = I(\widehat{t}_v v) \iff t \in [t_v^-, t_v^+].$$

Sea $t_v^* > 0$ el único cero positivo de I, es decir, $t_v^* > 0$ y $I(t_v^* v) = 0$. Obsérvese que $t_v^* > t_v^+$, por definición de t_v^+. Sea

$$\rho(tv) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \le t \le t_v^- \\ \dfrac{(t - t_v^-)\,\widehat{t}_v}{\widehat{t}_v - t_v^-} & \text{si} \quad t_v^- \le t \le \widehat{t}_v \\ \dfrac{(t_v^* - \widehat{t}_v)\,(t - \widehat{t}_v)}{t_v^+ - \widehat{t}_v} + \widehat{t}_v & \text{si} \quad \widehat{t}_v \le t \le t_v^+ \\ t_v^* & \text{si} \quad t_v^+ \le t \le t_v^* \\ t & \text{si} \quad t_v^* \le t \end{cases}$$

Para cada $u \in H_0^1(\Omega)$ denotemos por $t := \|u\|$ y por $v := \frac{u}{\|u\|}$ si $u \neq 0$, y definamos

$$\tau(u) = \begin{cases} \dfrac{\rho(tv)}{t} & \text{si} \quad u \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad u = 0 \end{cases}$$

Observemos que

$$\rho(tv) \le t \Leftrightarrow 0 \le t \le \widehat{t}_v, \text{ y}$$
$$\rho(tv) \ge t \Leftrightarrow \widehat{t}_v \le t$$

es decir

$$\tau(u) \le 1 \Leftrightarrow 0 \le t \le \widehat{t}_v$$
$$\tau(u) \ge 1 \Leftrightarrow \widehat{t}_v \le t$$
$$\tau(u) = 1 \text{ si } t_v^* \le t$$

Veamos que τ satisface las condiciones requeridas:

i) Si $\tau(u) \le 1$ (y por lo anterior $0 \le t \le \widehat{t}_v$) y $0 \le s \le 1$ entonces $\lambda = (1-s) + s\tau(u) \le 1$ y así $\lambda t \le t$, es decir

$$I(\lambda u) = I(\lambda tv) = f_v(\lambda t) \le f_v(t) = I(tv) = I(u)$$

pues f_v es creciente si $0 \le t \le \widehat{t}_v$.
Si $\tau(u) \ge 1$ ($\Leftrightarrow t \ge \widehat{t}_v$) y $0 \le s \le 1$ entonces $\lambda = (1-s) + s\tau(u) \ge 1$ y así $\lambda t \ge t$, es decir

$$I(\lambda u) = f_v(\lambda t) \le f_v(t) = I(u)$$

pues f_v es decreciente si $t \ge \widehat{t}_v$. En ambos casos tenemos la propiedad i).

ii) Por definición de t_v^* se tiene que $I^{\#}(t_v^* v) = 0$ y además se tiene que

$$I^{\#}(u) = I^{\#}(tv) \leq 0 \Leftrightarrow t \geq t_v^*$$

y así, $\tau(u) = 1$, es decir, se tiene la propiedad *ii*).

iii) Por definición de t_v^-, $\widehat{t_v}$ y t_v^+ se tiene

$$2f_v(t) = 2I(tv) = 2I(u) \leq \max_{s\geq 0} I(su) = \max_{s\geq 0} I(stv) = I\left(\widehat{t_v}v\right) = f_v\left(\widehat{t_v}\right)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$0 \leq t \leq t_v^- \text{ ó } t \geq t_v^+.$$

Así, si $0 \leq t \leq t_v^-$, entonces $\tau(u) = 0$, de aquí que $I^{\#}(\tau(u)u) = 0$. Si $t \geq t_v^+$ entonces $\rho(tv) \geq t_v^*$, y así

$$2\|\tau(u)u\|^2 = 2\left\|\frac{\rho(tv)}{t}(tv)\right\|^2 = 2\|\rho(tv)v\|^2 \leq \frac{1}{p}|\rho(tv)v|_p^p = \frac{1}{p}|\tau(u)u|_p^p$$

es decir $I^{\#}(\tau(u)u) = 2\|\tau(u)u\|^2 - \frac{1}{p}|\tau(u)u|_p^p \leq 0$; por lo tanto se tiene *iii*).

iv) Probemos primero que se cumple

$$\max_{t\geq 0} I^{\#}(tu) = 2^{\frac{2p}{p-2}} \max_{t\geq 0} I(tu). \tag{4.7}$$

En efecto, si $g_u(t) = I^{\#}(tu) = 2t^2\|u\|^2 - \frac{t^p}{p}|u|_p^p$, $t \geq 0$, entonces existe un único $\widehat{t_u^{\#}} > 0$ tal que

$$\max_{t\geq 0} I^{\#}(tu) = g_u(\widehat{t_u^{\#}}).$$

De hecho, dado que $g_u'(t) = t\left(4\|u\|^2 - t^{p-2}|u|_p^p\right)$, se tiene que

$$\widehat{t_u^{\#}} = \left(\frac{4\|u\|^2}{|u|_p^p}\right)^{\frac{1}{p-2}}, \quad \text{y}$$

$$g_u(\widehat{t_u^{\#}}) = \left(\frac{p-2}{2p}\right)\left(\frac{2\|u\|}{|u|_p}\right)^{\frac{2p}{p-2}}$$

Por otro lado, recordemos que

$$\max_{t\geq 0} I(tu) = f_u\left(\widehat{t_u}\right),$$

$$\widehat{t_u} = \left(\frac{\|u\|^2}{|u|_p^p}\right)^{\frac{1}{p-2}} \quad \text{y}$$

$$f_u\left(\widehat{t_u}\right) = \left(\frac{p-2}{2p}\right)\left(\frac{\|u\|}{|u|_p}\right)^{\frac{2p}{p-2}}$$

y así

$$\frac{g_u(\widehat{t_u^{\#}})}{f_u\left(\widehat{t_u}\right)} = 2^{\frac{2p}{p-2}}.$$

Esto demuestra (4.7). De aquí se sigue que

$$\begin{aligned} I^{\#}(\tau(u)\,u) &\leq \max_{t\geq 0} I^{\#}(tu) = 2^{\frac{2p}{p-2}} \max_{t\geq 0} I(tu) \\ &\leq 2^{\frac{3p-2}{p-2}} I(u) \quad \text{si } \max_{t\geq 0} I(tu) \leq 2I(u). \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$I^{\#}(\tau(u)\,u) \leq 0 \quad \text{si } \max_{t\geq 0} I(tu) \geq 2I(u).$$

Por lo tanto

$$I^{\#}(\tau(u)\,u) \leq 2^{\frac{3p-2}{p-2}} \max\{I(u), 0\} = \max\{\alpha I(u), 0\}.$$

donde $\alpha := 2^{\frac{3p-2}{p-2}}$. ∎

Recordemos que $X^n := X^+ \oplus X_n^-$. En adelante denotaremos a las componentes de una función $\varphi : Y \to X^n$ como sigue

$$\varphi := (\varphi^+, \varphi^-), \quad \varphi^+ : Y \to X^+, \quad \varphi^- : Y \to X_n^-.$$

Lema 4.11 *Existen $\alpha, \beta > 0$, que dependen sólo de Ω y de p, con la siguiente propiedad: Para toda función continua $\varphi : X_k^n \to X^n$ tal que $\varphi(z) = z$ si $\|z\| \geq R$, existen una función continua $\psi : X_k^n \times [0, \infty) \to X^n$ y una $R' \geq R$ tales que:*
(i) $\psi(z, 0) = \varphi(z)$ *para toda* $z \in X_k^n$.
(ii) $\Phi_0(\psi(z, s)) \leq -1$ *si* $\|z\| \geq R'$ *ó* $s \geq R'$.
(iii) $\Phi_0(\psi(z, s)) \leq \max\{\alpha\Phi_0(\varphi(z)) + \beta, 0\}$ *para toda* $z \in X_k^n$, $s \geq 0$.

Demostración: Sea a como en el Lema 4.9. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $a = 0$. Sea $\tau : H_0^1(\Omega) \to [0, \infty)$ como en el Lema 4.10, y escribamos $x = (x', x_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^N$.
Dado $u \in H_0^1(\Omega) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$, $x \in \Omega$ y $0 \leq s \leq 2$, definamos

$$u_s(x) := \begin{cases} (1 - s + s\tau(u))\, u(x) & \text{si} \quad 0 \leq s \leq 1 \\ \tau(u)\, u(x', sx_N) & \text{si} \quad x_N \geq 0 \text{ y } 1 \leq s \leq 2 \\ \tau(u)\, u(x', x_N) & \text{si} \quad x_N \leq 0 \text{ y } 1 \leq s \leq 2 \end{cases}$$

Si denotamos

$$\begin{aligned}\Omega^- &:= \{(x', x_N) \in \Omega : x_N \le 0\}\\ \Omega^+ &:= \{(x', x_N) \in \Omega : x_N \ge 0\}\\ \Omega_s^1 &:= \{(x', x_N) \in \Omega : 0 \le x_N \le \frac{M}{s}\}\\ \Omega_s^2 &:= \{(x', x_N) \in \Omega : \frac{M}{s} \le x_N \le M\}\end{aligned}$$

se tiene que $\Omega = \Omega^- \cup \Omega_s^1 \cup \Omega_s^2$, y $u_s \in H_0^1(\Omega)$ para cada $0 \le s \le 2$; y si además $1 \le s \le 2$ se tiene que $u_s(x) = \tau(u)\, u(x)$ en Ω^-, $u_s(x) = 0$ en Ω_s^2, y

$$\begin{aligned}\|u_s\|^2 = \int_\Omega |\nabla u_s|^2 dx &= \int_{\Omega^-} |\nabla u_s|^2 dx + \int_{\Omega_s^1} |\nabla u_s|^2 dx + \int_{\Omega_s^2} |\nabla u_s|^2 dx\\ &= (\tau(u))^2 \left(\int_{\Omega^-} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega_s^1} |\nabla u(x', sx_N)|^2 dx\right)\\ = (\tau(u))^2 \left(\int_{\Omega^-} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega_s^1} |\nabla u(h_s(x))|^2 dx\right)&, \text{ con } h_s(x', x_N) = (x', sx_N)\\ &= (\tau(u))^2 \left(\int_{\Omega^-} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{s}\int_{\Omega_s^1} |\nabla u(h_s(x))|^2 |\det J(h_s)|\, dx\right)\\ &= (\tau(u))^2 \left(\int_{\Omega^-} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{s}\int_{\Omega^+} |\nabla u(y)|^2 dy\right),\ h_s(\Omega_s^1) = \Omega^+\\ &\le (\tau(u))^2 \left(\int_{\Omega^-} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega^+} |\nabla u(x)|^2 dx\right), \text{ pues } s \ge 1\\ &= \|\tau(u)\, u\|^2 \le s\, \|\tau(u)\, u\|^2, \text{ pues } s \ge 1.\end{aligned}$$

Es decir,

$$\|u_s\|^2 \le s\, \|\tau(u)\, u\|^2, \text{ para cada } 1 \le s \le 2. \tag{4.8}$$

De manera similar, si $1 \le s \le 2$ tenemos

$$\begin{aligned}|u_s|_p^p &= \int_{\Omega^-} |u_s|^p dx + \int_{\Omega_s^1} |u_s|^p dx\\ &= \int_{\Omega^-} |\tau(u)\, u|^p dx + \frac{1}{s}\int_{\Omega^+} |\tau(u)\, u|^p dx\\ \ge \frac{1}{s}\int_{\Omega^-} |\tau(u)\, u|^p dx &+ \frac{1}{s}\int_{\Omega^+} |\tau(u)\, u|^p dx, \text{ pues } s \ge 1\\ &= \frac{1}{s} |\tau(u)\, u|_p^p.\end{aligned}$$

Es decir

$$|u_s|_p^p \geq \frac{1}{s} |\tau(u) u|_p^p, \text{ para cada } 1 \leq s \leq 2. \tag{4.9}$$

De (4.8) y (4.9) se sigue que, para cada $1 \leq s \leq 2$,

$$\begin{aligned} sI(u_s) = \frac{s}{2} \|u_s\|^2 - \frac{s}{p} |u_s|_p^p \leq \frac{s^2}{2} \|\tau(u) u\|^2 - \frac{1}{p} |\tau(u) u|_p^p \\ \leq 2 \|\tau(u) u\|^2 - \frac{1}{p} |\tau(u) u|_p^p, \\ = I^{\#}(\tau(u) u), \end{aligned}$$

es decir

$$I(u_s) \leq I^{\#}(\tau(u) u), \text{ para cada } 1 \leq s \leq 2. \tag{4.10}$$

Por otro lado, por el Lema 4.10 *(i)*, se tiene que

$$I(u_s) \leq I(u), \text{ para cada } 0 \leq s \leq 1. \tag{4.11}$$

Sea $\Omega_2 = \Omega_2^1 \cup \Omega^-$. Dado que $\Omega_2 \subsetneq \Omega$, por el Lema 4.9 i) podemos elegir una $w \in C_c^\infty(\Omega \backslash \Omega_2)$, $w \neq 0$, tal que

$$\int_\Omega |\nabla w|^2 \, dx = \int_\Omega |w|^p \, dx \tag{4.12}$$

Definamos $\psi = (\psi^+, \psi^-) : X_k^n \times [0, \infty) \to X^n$ como sigue:

$$\psi^+(z,s) := \begin{cases} [\varphi^+(z)]_s & \text{si } 0 \leq s \leq 2 \\ [\varphi^+(z)]_2 + (s-2)\omega & \text{si } 2 \leq s \end{cases}$$

$$\psi^-(z,s) := \begin{cases} [(1-s) + \alpha s]\varphi^-(z) & \text{si } 0 \leq s \leq 1 \\ \alpha\varphi^-(z) & \text{si } 1 \leq s \end{cases}$$

con $\alpha := 2^{(3p-2)/(p-2)}$. Obsérvese que $\psi^+(z,0) = [\varphi^+(z)]_0 = \varphi^+(z)$ y $\psi^-(z,0) = \varphi^-(z)$, es decir, ψ es una extención de φ; y así, se tiene i).
Por otro lado, si $0 \leq s \leq 1$ del Lema 4.10 i) se sigue que

$$I(\psi^+(z,s)) = I([\varphi^+(z)]_s) = I((1 - s + s\tau(\varphi^+(z)))\varphi^+(z)) \leq I(\varphi^+(z));$$

si $1 \leq s \leq 2$ de (4.10) se sigue que

$$I(\psi^+(z,s)) = I([\varphi^+(z)]_s) \leq I^{\#}(\tau(\varphi^+(z))\varphi^+(z));$$

y si $s \geq 2$ por definición de w tenemos que

$$\begin{aligned}
I\left(\psi^{+}(z,s)\right) &= I\left(\left[\varphi^{+}(z)\right]_2 + (s-2)\,w\right)\\
&= \frac{1}{2}\left\|\left[\varphi^{+}(z)\right]_2 + (s-2)\,w\right\|^2 - \frac{1}{p}\left(\left|\left[\varphi^{+}(z)\right]_2 + (s-2)\,w\right|_p^p\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\left\|\left[\varphi^{+}(z)\right]_2\right\|^2 + \left\|(s-2)\,w\right\|^2\right) - \frac{1}{p}\left(\left|\left[\varphi^{+}(z)\right]_2\right|_p^p + \left|(s-2)\,w\right|_p^p\right)\\
&= I\left(\left[\varphi^{+}(z)\right]_2\right) + I\left((s-2)\,w\right)\\
&\leq I^{\#}\left(\tau\left(\varphi^{+}(z)\right)\varphi^{+}(z)\right) + I\left((s-2)\,w\right), \text{ por el caso anterior } (s=2).
\end{aligned}$$

Resumiendo estos tres casos obtenemos

$$I\left(\psi^{+}(z,s)\right) \leq \left\{\begin{array}{ll} I\left(\varphi^{+}(z)\right) & \text{si } \; 0 \leq s \leq 1 \\ I^{\#}\left(\tau\left(\varphi^{+}(z)\right)\varphi^{+}(z)\right) & \text{si } \; 1 \leq s \leq 2 \\ I^{\#}\left(\tau\left(\varphi^{+}(z)\right)\varphi^{+}(z)\right) + I\left((s-2)\,w\right) & \text{si } \; s \geq 2 \end{array}\right. \tag{4.13}$$

Por otro lado, si $0 \leq s \leq 1$ y $\lambda(s) = [(1-s) + \alpha s]$ tenemos

$$\begin{aligned}
J\left(\psi^{-}(z,s)\right) &= J\left(\lambda(s)\,\varphi^{-}(z)\right)\\
&= \frac{\lambda^2(s)}{2}\left\|\varphi^{-}(z)\right\|^2 + \frac{\lambda^q(s)}{q}\left|\varphi^{-}(z)\right|_q^q\\
&\geq \frac{1}{2}\left\|\varphi^{-}(z)\right\|^2 + \frac{1}{q}\left|\varphi^{-}(z)\right|_q^q = J\left(\varphi^{-}(z)\right),
\end{aligned}$$

donde la desigualdad se da porque $\alpha > 1$ y así $\lambda(s) \geq 1$ para toda $0 \leq s \leq 1$.
Si $s \geq 1$, entonces

$$\begin{aligned}
J\left(\psi^{-}(z,s)\right) &= J\left(\alpha\varphi^{-}(z)\right)\\
&= \frac{\alpha^2}{2}\left\|\varphi^{-}(z)\right\|^2 + \frac{\alpha^q}{q}\left|\varphi^{-}(z)\right|_q^q\\
&\geq \frac{\alpha}{2}\left\|\varphi^{-}(z)\right\|^2 + \frac{\alpha}{q}\left|\varphi^{-}(z)\right|_q^q = \alpha J\left(\varphi^{-}(z)\right)
\end{aligned}$$

donde la desigualdad se da porque $\alpha > 1$. Juntando estos dos casos tenemos que

$$J\left(\psi^{-}(z,s)\right) \geq \left\{\begin{array}{ll} J\left(\varphi^{-}(z)\right) & \text{si } \; 0 \leq s \leq 1 \\ \alpha J\left(\varphi^{-}(z)\right) & \text{si } \; 1 \leq s \end{array}\right. \tag{4.14}$$

Así, por (4.13), (4.14) y el Lema 4.10 *(iv)*, tenemos que

$$\Phi_0\left(\psi(z,s)\right) = I\left(\psi^{+}(z,s)\right) - J\left(\psi^{-}(z,s)\right)$$
$$\leq \begin{cases} I\left(\varphi^{+}(z)\right) - J\left(\varphi^{-}(z)\right) = \Phi_0\left(\varphi(z)\right) & \text{si } 0 \leq s \leq 1 \\ I^{\#}\left(\tau\left(\varphi^{+}(z)\right)\varphi^{+}(z)\right) - \alpha J\left(\varphi^{-}(z)\right) & \text{si } 1 \leq s \leq 2 \\ I^{\#}\left(\tau\left(\varphi^{+}(z)\right)\varphi^{+}(z)\right) + I\left((s-2)\,w\right) - \alpha J\left(\varphi^{-}(z)\right) & \text{si } s \geq 2 \end{cases}$$
$$\leq \begin{cases} \Phi_0\left(\varphi(z)\right) & \text{si } 0 \leq s \leq 1 \\ \max\{\alpha\Phi_0(\varphi(z)), 0\} & \text{si } 1 \leq s \leq 2 \\ \max\{\alpha\Phi_0(\varphi(z)) + \beta, 0\} & \text{si } s \geq 2 \end{cases}$$

donde $\beta := \max\{I\left(tw\right) : t \geq 0\} = I\left(\widehat{t}_w w\right) = I\left(w\right) > 0$ pues $\widehat{t}_w = 1$ por definición de w. Es decir, se cumple *iii)*.
Veamos que se satisface *ii)*. Dado que X_k^n es de dimensión finita (y así todas las normas son equivalentes en X_k^n) y $p > 2$ podemos tomar $R' \geq \max\{R, 2\}$ tal que $I^{\#}\left(u\right) + I\left(w\right) \leq -1$ para toda $u \in X_k^n$ con $\|u\| \geq R'$, y además tal que

$$I\left((r-2)\,w\right) \leq -\max_{v \in X_k^n} I^{\#}\left(\tau\left(\varphi^{+}(v)\right)\varphi^{+}(v)\right) - 1, \quad \text{si } r \geq R', \tag{4.15}$$

pues $I\left(tw\right) \to -\infty$ cuando $t \to \infty$. Si $r \geq R' \geq 2$ entonces por (4.13), y (4.15)

$$\begin{aligned} I\left(\psi^{+}(z,r)\right) &\leq I^{\#}\left(\tau\left(\varphi^{+}(z)\right)\varphi^{+}(z)\right) + I\left((r-2)\,w\right) \\ &\leq I^{\#}\left(\tau\left(\varphi^{+}(z)\right)\varphi^{+}(z)\right) - \max_{z \in X_k^n} I^{\#}\left(\tau\left(\varphi^{+}(z)\right)\varphi^{+}(z)\right) - 1 \\ &\leq -1. \end{aligned}$$

Sea $z = (u,v)$. Si $0 \leq r \leq 1$ y $\|u\| \geq R'$ entonces, por (4.13) y dado que $R' \geq R$, se tiene

$$I\left(\psi^{+}(z,r)\right) \leq I\left(\varphi^{+}(z)\right) = I\left(u\right) \leq I^{\#}\left(u\right) \leq -1.$$

Si $1 \leq r \leq 2$ y $\|u\| \geq R'$ entonces, por (4.13) y dado que $R' \geq R$, usando el Lema 4.10 *(ii)* se tiene

$$\begin{aligned} I\left(\psi^{+}(z,r)\right) \leq I^{\#}\left(\tau\left(\varphi^{+}(z)\right)\varphi^{+}(z)\right) &= I^{\#}\left(\tau\left(u\right)u\right) \\ &= I^{\#}\left(u\right) \leq -1. \end{aligned}$$

Si $2 \leq r \leq R'$ y $\|u\| \geq R'$ entonces, por (4.13) y por definición de $R' \geq R$, se tiene

$$\begin{aligned} I\left(\psi^{+}(z,r)\right) \leq I^{\#}\left(\tau\left(\varphi^{+}(z)\right)\varphi^{+}(z)\right) &+ I\left((r-2)\,w\right) \\ &= I^{\#}\left(u\right) + I\left((r-2)\,w\right) \\ &\leq I^{\#}\left(u\right) + I\left(w\right) \leq -1. \end{aligned}$$

Así, de todos estos casos tenemos

$$I\left(\psi^{+}(z,r)\right) \leq -1, \quad \text{si } \|u\| \geq R' \text{ ó } r \geq R'$$

y, dado que $\Phi_0(z) \leq I(u)$, concluimos que

$$\Phi_0(\psi(z,r)) \leq -1, \quad \text{si } \|u\| \geq R' \text{ ó } r \geq R'.$$

Esto prueba *(ii)*. ■

Lema 4.12 *Sea* $D := \{z \in X^n : \Phi_0(z) \leq -1\}$. *Entonces*

(a) $z \in D$, $s \geq 1 \Longrightarrow sz \in D$.

(b) D *es homotópicamente equivalente a la esfera unitaria en* X^n.

Demostración: a) Sea $z \in D$, y $s \geq 1$, entonces $s^p \geq s^2$ y $s^q \geq s^2$ pues $p > 2$ y $q > 2$. Como $z \in D$ entonces

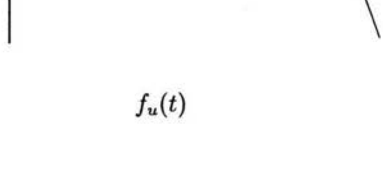
$$\begin{aligned}\Phi_0(sz) &= \frac{s^2}{2}\left(\|u\|^2 - \|v\|^2\right) - \frac{s^p}{p}|u|_p^p - \frac{s^q}{q}|v|_q^q \\ &\leq \frac{s^2}{2}\left(\|u\|^2 - \|v\|^2\right) - \frac{s^2}{p}|u|_p^p - \frac{s^2}{q}|v|_q^q \\ &= s^2\Phi_0(z) \leq -s^2 \leq -1\end{aligned}$$

es decir, $sz \in D$; y así tenemos a).

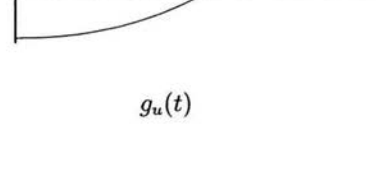
b) Sea $z = (u,v) \in X$ tal que $\|u\|^2 + \|v\|^2 = 1$. Probaremos primero que existe un único $t_z > 0$ tal que $\Phi_0(t_z z) = -1$. En efecto: $t > 0$ satisface $\Phi_0(tz) = -1$ si y sólo si

$$f_u(t) := \frac{\|u\|^2}{2}t^2 - \frac{|u|_p^p}{p}t^p = \frac{\|v\|^2}{2}t^2 + \frac{|v|_q^q}{q}t^q - 1 =: g_v(t).$$

Como $p, q > 2$, las gráficas de f_u y g_u son de la forma:



$f_u(t)$



$g_u(t)$

Es decir, $f_u(0) = 0$, f_u tiene un único punto crítico en $(0, \infty)$ y éste corresponde a un valor máximo positivo, y $f_u(s) \to -\infty$ cuando $s \to \infty$; en tanto que g_v es convexa y $g_v(0) = -1$. De modo que existe un único punto t_z tal que $f_u(t_z) = g_v(t_z)$.
Más aún, si denotamos por SX^n a la esfera unitaria en X^n, tenemos que la función

$$SX^n \to \partial D, \qquad z \mapsto t_z z,$$

es continua y, de hecho, es un homeomorfismo con inverso $z \mapsto \frac{z}{\|z\|}$. Por *a*) se tiene además que ∂D es un retracto por deformación de D, de modo que D es homotópicamente equivalente a la esfera SX^n. ■

Proposición 4.13 Φ *satisface (H7). Más precisamente, existen* $\alpha, \beta > 0$, *que dependen sólo de* Ω *y de* p, *con la siguiente propiedad: Para toda función impar continua* $\sigma : X_k^n \to X^n$ *tal que* $\sigma(z) = z$ *si* $\|z\| \geq R$, *existen una función impar continua* $\widetilde{\sigma} : X_{k+1}^n \to X^n$ *y una* $\widetilde{R} \geq R$ *que satisfacen:*
(i) $\widetilde{\sigma}(z) = \sigma(z)$ *si* $z \in X_k^n$.
(ii) $\widetilde{\sigma}(z) = z$ *si* $\|z\| \geq \widetilde{R}$.
(iii) $\Phi_0(\widetilde{\sigma}(z)) \leq \max\{\alpha\Phi_0(\sigma(\pi(z))) + \beta, 0\}$ *donde* $\pi : X_{k+1}^n \to X_k^n$ *es la proyección ortogonal.*

Demostración: Sea $\sigma : X_k^n \to X^n$ una función continua e impar tal que $\sigma(z) = z$ si $\|z\| \geq R$. Por el Lema 4.11 existen $\psi : X_k^n \times [0, \infty) \to X^n$ y $R' \geq R$ que cumplen las propiedades *(i)*, *(ii)* y *(iii)* de dicho lema. Fijemos $e \in X_{k+1}^n$ ortogonal a X_k^n con $\|e\| = 1$, y extendamos σ al semiespacio $W = \{v + te : v \in X_k^n, t \geq 0\}$ de X_{k+1}^n mediante

$$\overline{\sigma}(v + te) = \psi(v, t) \quad \text{si } v \in X_k^n,\ t \geq 0,$$

Por otro lado, dado que X_{k+1}^n es un espacio de dimensión finita y ψ satisface la condición *(ii)* del Lema 4.11, existe $R'' \geq R'$ tal que $\Phi_0(w) \leq -1$ y $\Phi_0(\overline{\sigma}(w)) \leq -1$ para toda $w \in W$ con $\|w\| = R''$. Dado que $\{z \in X^n : \Phi_0(z) \leq -1\} =: D$ es homotópicamente equivalente a la esfera unitaria en X^n (por el lema anterior), D es contraíble. De aquí que exista una homotopía

$$\Psi : \{w \in W : \|w\| = R''\} \times [0, 1] \to D$$

tal que $\Psi(w, 0) = \overline{\sigma}(w)$, $\Psi(w, 1) = w$, y $\Psi(z, t) = z$ para $z \in X_k^n$, $t \in [0, 1]$. Sea $\widetilde{R} := R'' + 1$ y definamos $\widetilde{\sigma} : X_{k+1}^n \to X^n$ como

$$\widetilde{\sigma}(w) = \begin{cases} \overline{\sigma}(w) & \text{si } w \in W,\ \|w\| \leq R'' \\ \frac{\|w\|}{R''}\Psi(R''\frac{w}{\|w\|}, \|w\| - R'') & \text{si } w \in W,\ R'' \leq \|w\| \leq \widetilde{R} \\ w & \text{si } w \in W,\ \widetilde{R} \leq \|w\| \\ -\widetilde{\sigma}(-w) & \text{si } -w \in W \end{cases}$$

Dado que σ es impar y las propiedades de Ψ, $\widetilde{\sigma}$ esta bien definida y es, por definición, una extensión impar de σ a X^n_{k+1} que satisface $\widetilde{\sigma}(w) = w$ si $\|w\| \geq \tilde{R}$, es decir, se cumplen las primeras dos condiciones *(i)* y *(ii)*. Obsérvese que, por el lema anterior, $tu \in D$ si $u \in D$ y $t \geq 1$. De aquí que $\Phi_0(\widetilde{\sigma}(w)) \leq -1$ si $\|w\| \geq R''$ y, por el Lema 4.11,

$$\Phi_0(\widetilde{\sigma}(v+te)) = \Phi_0(\psi(v,|t|)) \leq \alpha \max\{\Phi_0(\varphi(v)), 0\} + \beta \quad \text{si } \|v+te\| \leq R''.$$

Esto prueba *(iii)*. ■

4.5 Crecimiento de los valores minimax c_k

Para completar la demostración del Teorema 3.1 necesitamos mostrar que la sucesión (1.5) del Teorema 1.10

$$\left(\frac{c_{k+1} - c_k}{\max\limits_{0\leq t\leq 1} |\theta_1(t, c_{k+1})| + \max\limits_{0\leq t\leq 1} |\theta_2(t, c_k)| + 1} \right)$$

no está acotada, donde

$$c_k := \limsup_{n\to\infty} c^n_k, \qquad c^n_k := \inf_{\sigma\in\Gamma^n_k} \sup_{u\in X^n_k} \Phi_0(\sigma(u)),$$

y Γ^n_k es el conjunto de las funciones continuas $\sigma \in C^0(X^n_k, X^n)$ con las siguientes dos propiedades:

(i) σ es impar, es decir, $\sigma(u) = -\sigma(u)$ para cada $u \in X^n_k$,

(ii) Existe $R > 0$ tal que $\sigma(u) = u$ si $\|u\| > R$.

Probaremos las siguientes estimaciones.

Proposición 4.14 *Existen constantes positivas C_1, C_2 tales que*

$$C_1 k^\nu \leq c_k \leq C_2 k^\nu$$

donde $\nu := \frac{2}{N}\frac{p}{p-2}$.

Demostración: Denotemos por $\Phi^n_0 : X^n \to \mathbb{R}$ la restricción de Φ_0 a $X^n = H^1_0(\Omega) \oplus V^q(\Omega)_n$. Usando un resultado de Tanaka tenemos que, para cada $k, n \geq 1$ existe $z^n_k = (u^n_k, v^n_k) \in X^n$ tal que

$$\Phi_0(z^n_k) \leq c^n_k, \quad (\Phi^n_0)'(z^n_k) = 0 \quad \text{y} \quad \mu_0(z^n_k) \geq k+n \tag{4.16}$$

donde $\mu_0(z_k^n)$ denota el índice de Morse más la nulidad de z_k^n, véase [49]. Denotemos por $\Phi_0(z) = I(u) - J(v)$ donde

$$I(u) = \left(\frac{1}{2}|\nabla u|_2^2 - \frac{1}{p}|u|_p^p\right), \qquad J(v) = \left(\frac{1}{2}|\nabla v|_2^2 + \frac{1}{q}|v|_q^q\right).$$

Dado que el cero es el único punto crítico de J, se sigue de (4.16) que $z_k^n = (u_k^n, 0)$ y que

$$I(u_k^n) = \Phi_0(z_k^n) \leq c_k^n, \qquad I'(u_k^n) = 0, \qquad \text{y} \quad \mu_0(u_k^n) \geq k,$$

donde la última desigulda se debe al hecho de que

$$\mu_0(z_k^n) = \mu_0(u_k^n) + \dim(V^q(\Omega)_n) = \mu_0(u_k^n) + n. \tag{4.17}$$

La desigualdad clásica de Cwickel [26], Lieb [39], y Rosenbljum [45] nos dice que

$$k \leq \mu_0(u_k^n) \leq C_1 \int_\Omega |u_k^n|^\alpha \tag{4.18}$$

con $\alpha := \frac{N}{2}(p-2)$. Así, usando el hecho de que u_k^n es un punto crítico de I , es decir, que

$$0 = I'(u_k^n)(u_k^n) = |\nabla u_k^n|_2^2 - |u_k^n|_p^p$$

tenemos que

$$I(u_k^n) = \frac{(p-2)}{2p}|u_k^n|_p^p.$$

Por otro lado, como $p < \frac{2N}{N-2} =: 2^*$ se tiene que $\alpha < p$, de modo que de la desigualdad (4.18) obtenemos

$$C_1 k^\nu \leq C_3 \left(\int_\Omega |u_k^n|^\alpha\right)^{p/\alpha} \leq \frac{(p-2)}{2p}|u_k^n|_p^p = I(u_k^n) \leq c_k^n$$

con $\nu = \frac{p}{\alpha} = \frac{2}{N}\frac{p}{p-2}$; es decir

$$C_1 k^\nu \leq c_k^n \qquad \text{para toda } n \text{ y } k.$$

Tomando el límite cuando $n \to \infty$ obtenemos la primera desigualdad de esta proposición:

$$C_1 k^\nu \leq c_k := \lim_{n\to\infty} \sup c_k^n$$

Veamos la segunda desigualdad. Sea

$$\Gamma_k^+ := \{\sigma^+ \in C^0(X_k^+, X^+) : \sigma^+ \text{ es impar, y } \sigma^+(u) = u \text{ si } \|u\| \text{ es suficientemente grande}\}.$$

Si $\sigma^+ \in \Gamma_k^+$ y $\sigma \in C^0(X_k^n, X^n)$ está dada por $\sigma(u,v) = (\sigma^+(u), v)$, entonces, por *(H4)*, $\Phi_0(\sigma(z)) \leq 0$ para $\|z\|$ suficientemente grande. Argumentando como en la demostración de la Proposición 4.13 podemos suponer que $\sigma \in \Gamma_k^n$, y que

$$\max_{z\in X_k^n} \Phi_0(\sigma(z)) = \max_{u\in X_k^+} \Phi_0(\sigma^+(u)).$$

Entonces, de la desigualdad (40) en [6] se obtiene

$$c_k^n \leq \inf_{\sigma^+\in\Gamma_k^+} \max_{u\in X_k^+} \Phi_0(\sigma^+(u)) \leq B_2 k^\nu$$

para toda n. Es decir, se tiene la segunda desigualdad. ∎

4.6 Demostración de los Teoremas 4.1 y 1.12

Demostración del Teorema 4.1: Aplicaremos el Teorema 1.10. De las Proposiciones 4.5, 4.6, 4.7, 4.8 y 4.13 obtenemos las propiedades (**H1**)-(**H7**). Sólo falta mostrar que la sucesión (1.5) es no acotada. Procediendo como en la demostración del Teorema 3.1, supongamos, por contradicción, que existe $B > 0$ tal que

$$c_{k+1} - c_k \leq B(\theta(c_{k+1}) + \theta(c_k) + 1)$$

donde $\theta(s) = |\theta_1(t,s)| = |\theta_2(t,s)| = A(s^2+1)^{\gamma/2}$ (véase la Proposición 4.6). Como en [44, (10.47)] esto implica que existe una contante $D > 0$ tal que

$$c_k \leq D k^{1/(1-\gamma)} \quad \text{para toda } k,$$

lo cual contradice la Proposición 4.14 si $\gamma < \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2^*}\right) N$, como habíamos supuesto. Así, el Teorema 1.10 nos da la existencia de una sucesión de valores críticos $(\widetilde{c}_k)$ de Φ_1 que satisface

$$\zeta_2(1, c_k) < \widetilde{c}_k \leq \zeta_2(1, \alpha(c_k+1) + \beta) \tag{4.19}$$

con $\alpha, \beta > 0$ como en la Proposición 4.13 (véase la Proposición 2.11). Para nuestra función particular θ, tenemos que $s \leq \zeta_2(1,s) \leq A_1(s+1)$. Así, de (4.19) y del Lema 4.14 se obtiene

$$C_1 k^\nu \leq \widetilde{c}_k \leq C_2 k^\nu$$

con $\nu := \frac{2p}{N(p-2)}$. ■

Demostración del Teorema 1.12: Supongamos que $p \in (2, \frac{2N-2}{N-2})$, $q \in [p, \infty)$, y que $f \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ satisface

$$\begin{aligned} |f_u(x,u,v)| &\leq d_0(|u|^{\gamma p-1} + |v|^{\sigma-1} + 1) \\ |f_v(x,u,v)| &\leq d_0(|u|^{\gamma p-1} + |v|^{\gamma q-1} + 1) \end{aligned} \tag{4.20}$$

para toda $(x,u,v) \in \Omega \times \mathbb{R}^2$, y constantes $d_0 > 0$, $0 \leq \sigma - 1 \leq \frac{q}{p}(\gamma p - 1)$, y $\frac{1}{p} \leq \gamma < \min\left\{\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2^*}\right) N, \frac{q}{q-1}\left(\frac{2^*-1}{2^*}\right)\right\}$. Nótese que, dado que $p > 2$, $\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2^*}\right) N < \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}\right) N = 1$, de modo que γ cumple las condiciones del Teorema 4.1. Probaremos que f satisface las propiedades $(\mathbf{f}_1)$ y $(\mathbf{f}_2)$ para esta γ. Así, el Teorema 1.12 es un caso particular del Teorema 4.1.
Como $0 \leq \sigma - 1 \leq \frac{q}{p}(\gamma p - 1)$ y $p \leq q$ se tiene

$$\begin{aligned} |f_z(x,u,v)| \leq |f_u(x,u,v)| + |f_v(x,u,v)| &\leq d_1\left(|u|^{\gamma p-1} + |v|^{\gamma q-1} + |v|^{\sigma-1} + 1\right) \\ &\leq d_2\left(|u|^{\gamma p-1} + |v|^{\gamma q-1} + 1\right), \end{aligned}$$

es decir, se cumple $(\mathbf{f}_2)$. Para probar $(\mathbf{f}_1)$ basta ver que

$$\begin{aligned} |f_z(x,z) \cdot z| &\leq a_1(|u|^{\gamma p} + |v|^{\gamma q} + 1), \text{ y} \\ |f(x,u,v)| &\leq a_2(|u|^{\gamma p} + |v|^{\gamma q} + 1). \end{aligned}$$

Probemos la primera desigualdad: La desigualdad $|f_z(x,u,v)\, z| \leq |f_u(x,u,v)|\,|u| + |f_v(x,u,v)|\,|v|$, junto con las hipótesis (4.20) sobre f, nos dan

$$|f_z(x,u,v)\, z| \leq d_1(|u|^{\gamma p} + |v|^{\gamma q} + |u|^{\gamma p-1}|v| + |v|^{\sigma-1}|u| + |u| + |v|)$$

y, usando la desigualdad de Young y las hipótesis $\sigma - 1 \leq \frac{q}{p}(\gamma p - 1)$ y $\gamma \geq \frac{1}{p}$, obtenemos

$$|f_z(x,u,v)\, z| \leq a_1(|u|^{\gamma p} + |v|^{\gamma q} + 1).$$

Para la segunda desigualdad basta proceder como en (3.2) y usar las hipótesis (4.20) sobre f, es decir

$$
\begin{aligned}
|f(x,u,v)| - |f(x,0,0)| &\le |f(x,u,v) - f(x,u,0)| + |f(x,u,0) - f(x,0,0)| \\
&\le \int_0^{|v|} |f_v(x,u,\zeta)|\, d\zeta + \int_0^{|u|} |f_u(x,\zeta,0)|\, d\zeta \\
&\le d_1(|u|^{\gamma p-1}|v| + |v|^{\gamma q} + 1) + d_1(|u|^{\gamma p} + 1).
\end{aligned}
$$

Usando la desigualdad de Young, se obtiene

$$|f(x,u,v)| \le a_2\left(|v|^{\gamma q} + |u|^{\gamma p} + 1\right),$$

es decir, se cumple la segunda desigualdad. ∎

4.7 Comentarios

Si $p \in (2, \frac{2N-2}{N-2})$, el Teorema 4.1 garantiza la existencia de una infinidad de soluciones de la ecuación

$$-\Delta u = |u|^{p-2}u + \widetilde{f}(x) \ \text{ in } \Omega, \qquad u = 0 \ \text{ on } \partial\Omega \tag{4.21}$$

(basta aplicarlo con $q \in (2,p)$ y $f(x,u,v) = \widetilde{f}(x)u$). Es decir, el resultado de Bahri y Lions [6] que mencionamos en la introducción (véase el Teorema 1.7) se obtiene también como un caso particular del teorema principal de este capítulo. Las estimaciones superiores del Teorema 4.1 para las energías de dichas soluciones,

$$\Phi_1(z_k) \le C_2 k^{\nu}, \qquad \nu := \frac{2p}{N(p-2)},$$

fueron recientemente establecidas por Castro y Clapp [15] para el caso particular de la ecuación (4.21).

Si f es una función par (es decir, si $f(x,u,v) = f(x,-u,-v)$) de Figueiredo y Ding [28] probaron que el Teorema 1.12 es válido bajo condiciones de crecimiento más débiles sobre f. Como en el caso de Bahri-Lions (Teorema 1.7), nuestras condiciones sobre f se derivan básicamente de las estimaciones para el índice de Morse de Cwickel [26], Lieb [39] y Rosenbljum [45]. Dado que ese resultado es el mejor que se tiene hasta el momento para una sóla ecuación, nuestras hipótesis sobre f son adecuadas.

Sin embargo, de Figueiredo y Ding [28] prueban la existencia de una infinidad de soluciones para Hamiltonianos $H(x,u,v)$ pares más generales que los considerados aquí.

La dificultad para obtener multiplicidad de soluciones para Hamiltonianos más generales que no sean pares radica en verificar que se cumple la condición **(H7)**. Esta propiedad, como mencionamos antes (véase 2.6.5), requiere de un conocimiento bastante preciso de la topología de los conjuntos de subnivel del funcional par Φ_0.

Capítulo 5

Perspectivas a futuro

Para concluir, mencionaremos algunos problemas que se nos quedaron pendientes y que planeamos desarrollar en un futuro próximo.

5.1 Soluciones múltiples de sistemas no cooperativos para Hamiltonianos más generales

Consideremos el sistema elíptico no cooperativo

$$(\mathcal{H}^*) \qquad \begin{cases} -\Delta u = H_u(x,u,v) & \text{in } \Omega \\ -\Delta v = -H_v(x,u,v) & \text{in } \Omega \\ u = 0, \quad v = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

donde Ω es un dominio acotado suave en $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, y H es de la forma

$$H(x,u,v) = |v|^q + F(x,u,v) + f(x,u,v)$$

con $q \in (2,\infty)$, y $F, f \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Si F satisface condiciones de crecimiento adecuadas, análogas a las consideradas por de Figueiredo y Ding [28], y alguna de las siguientes condiciones de simetría:

$$\begin{aligned} F(x,-u,v) &= F(x,u,v) \quad \text{para toda } (x,u,v) \in \Omega \times \mathbb{R}^2, \\ \text{o bien } F(x,-u,-v) &= F(x,u,v) \quad \text{para toda } (x,u,v) \in \Omega \times \mathbb{R}^2, \end{aligned}$$

y si f satisface condiciones análogas a las del Teorema 4.1, es posible demostrar que la trayectoria de funcionales asociada a este problema

$$\Phi(z,t) := \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - |\nabla v|^2\right) dx - \int_\Omega H(x,z,t)dx, \qquad z = (u,v) \in H_0^1(\Omega) \oplus V^q(\Omega),$$

con $H(x,z,t) := |v|^q + F(x,z) + tf(x,z)$, satisface las condiciones **(H1)**-**(H6)** del Teorema 1.10 y que la sucesión

$$\left(\frac{c_{k+1} - c_k}{\max_{0 \le t \le 1} |\theta_1(t, c_{k+1})| + \max_{0 \le t \le 1} |\theta_2(t, c_k)| + 1} \right)$$

no está acotada.

De modo que, para poder asegurar la existencia de una infinidad de soluciones del sistema $(\mathcal{H}^*)$ requerimos investigar bajo qué condiciones se cumple la condición **(H7)**. Por ejemplo, dado que el funcional

$$\Phi_0(z) := \frac{1}{2} \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - |\nabla v|^2 \right) dx - \int_\Omega \left(\frac{1}{p} |u|^p + \frac{1}{q} |v|^q \right) dx$$

satisface **(H7)** (véase la Proposición 4.13), tenemos que, si un funcional Ψ_0 satisface

$$c_1 \Phi_0(z) - c_2 \le \Psi_0(z) \le c_3 \Phi_0(z) + c_4,$$

entonces el funcional Ψ_0 satisface **(H7)**.

Un primer problema al que nos avocaremos es investigar bajo qué condiciones se cumple la condición **(H7)** para Hamiltonianos más generales.

5.2 Otros problemas

Otros problemas que queremos abordar próximamente son los siguientes:

1. Nos interesa estudiar la existencia de soluciones múltiples del sistema fuertemente indefinido $(\mathcal{H})$ considerado en el Capítulo 4, pero con condiciones no homogéneas a la frontera. Investigaremos bajo qué condiciones adicionales se cumplen las condiciones de nuestro teorema abstracto en este caso.

2. Asímismo, nos interesa aplicar nuestro teorema abstracto a sistemas elípticos de un tipo diferente a los considerados en esta tesis, es decir, a sistemas de tipo Hamiltoniano (véase [27]) de la forma

$$\begin{cases} -\Delta u = H_v(x,u,v) & \text{en } \Omega \\ \Delta v = H_u(x,u,v) & \text{en } \Omega \\ u = u_0, \quad v = v_0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

donde Ω es un dominio acotado en $\mathbb{R}^N$, $N \ge 3$, y $H \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, y establecer condiciones sobre el Hamiltoniano H que garanticen la existencia de una infinidad de soluciones de este sistema cuando H no es par. El espacio donde está definido el funcional asociado a este sistema es un espacio de Sobolev fraccionario, y una primera dificultad radica en obtener estimaciones inferiores para el crecimiento de los valores minimax. Específicamente, en este caso no podemos usar directamente la desigualdad (4.18). Además está el problema de probar la condición **(H7)**.

3. Usando métodos análogos a los desarrollados en [19, 20] planeamos extender el Teorema 1.10 a grupos de simetrías más generales que el grupo $\mathbb{Z}_2$.

4. Nos interesa además establecer un teorema dual a nuestro resultado abstracto, similar al Teorema 3.18 de [50] (véase también Proposición 2.2 de [28]) , y aplicarlo a un problema cóncavo-convexo, ya sea semidefinido o fuertemente indefinido, para establecer la existencia de dos sucesiones de valores críticos del funcional asociado, una de ellas convergiendo a cero y la otra a infinito.

Apéndice A

Lema de deformación. Diferenciabilidad de funcionales.

A.1 Lema de deformación

El lema de deformación juega un papel muy importante para probar la multiplicidad de puntos críticos. Para obtener un lema de deformación para funcionales Frechet diferenciables sobre espacios de Banach se requiere de una generalización del concepto de gradiente: la noción de *pseudogradiente* introducida por Palais en 1966.

Definición A.1 *Sea M un espacio métrico, X un espacio normado y $h : M \to X' \backslash \{0\}$ un mapeo continuo. Un campo vectorial pseudogradiente para h sobre M es un campo vectorial continuo localmente Lipschitz $V : M \to X$ tal que, para cada $u \in M$,*

$$\|V(u)\| \leq 2\,\|h(u)\| \tag{A.1}$$

$$h(u)\,(V\,(u)) \geq \|h\,(u)\|^2 \,. \tag{A.2}$$

A un punto $v = V\,(u) \in M$ que satisface las desigualdades anteriores se le llama vector pseudogradiente para h en u.

Obsérvese que si X es un espacio de Hilbert, $\Phi : X \to \mathbb{R}$ de clase C^1, $M := \{x \in X : \Phi'\,(x) \neq 0\}$ y $h := \Phi'$, entonces $V := \nabla\Phi$ definido por $\langle \nabla\Phi(x), v\rangle := \Phi'\,(x)\,(v)$ satisface las condiciones (A.1) y (A.2). Así, un campo pseudogradiente es efectivamente un generalización del concepto de campo gradiente. Si el funcional Φ es de clase C^2 y está definido sobre un espacio de Hilbert, entonces el gradiente de Φ es localmente Lipschitz.

Las deformaciones que aparecen en el lema de deformación están dadas por el flujo de un campo vectorial pseudogradiente. La condición de que V sea localmente Lipschitz se requiere para que dicho flujo sea un flujo global.

Observe que suma convexa de campos vectoriales pseudogradientes sigue siendo un campo vectorial pseudogradiente. Así, en general un campo vectorial pseudogradiente no es único y, más aún, su existencia no parece evidente para espacios de Banach. Esta nos la garantiza el siguiente lema. La idea de su demostración es probar la existencia local de campos vectoriales pseudogradientes y luego pegarlos mediante una partición de la unidad localmente Lipschitz. La demostración de los siguientes resultados se encuentra, por ejemplo, en [50]. La incluimos aquí para conveniencia del lector.

Lema A.2 *Sea M un espacio métrico, X un espacio normado y $h : M \to X'\backslash\{0\}$ un mapeo continuo. Entonces existe un campo vectorial pseudogradiente para h sobre M.*

Demostración: Como

$$\|h(v)\| = \sup_{\|u\|=1} \{h(v)(u) : u \in X\},$$

para cada $v \in M$, existe $x \in X$ con $\|x\| = 1$ tal que

$$\frac{2}{3}\|h(v)\| < h(v)(x) \leq \|h(v)\|.$$

Definamos $y = \frac{3}{2}\|h(v)\| x$. Como $h(v)$ es lineal,

$$\|y\| < 2\|h(v)\|, \quad h(v)(y) > \|h(v)\|^2. \tag{A.3}$$

Para cada $v \in M$ existe una vecindad abierta N_v de v tal que

$$\|y\| \leq 2\|h(u)\|, \quad h(u)(y) \geq \|h(u)\|^2$$

para toda $u \in N_v$. En efecto, como h es continua, $f_1(u) = 2\|h(u)\| - \|y\|$ y $f_2(u) = h(u)(y) - \|h(u)\|^2$ son tambien continuas en M, de modo que $N_v := f_1^{-1}(0,\infty) \cap f_2^{-1}(0,\infty)$ es abierto y contiene a v por (A.3). La familia

$$\mathcal{N} := \{N_v : v \in M\}$$

es una cubierta abierta de M. Dado que M es un espacio métrico, y por tanto paracompacto, existe una subcubierta localmente finita $\mathcal{M} := \{M_j : j \in J\}$ de $\mathcal{N}$ (véase el Teorema de Stone [32, Teo. 5.1.3]). Definamos $\rho_j(u) := \text{dist}(u, X\backslash M_j)$ como la distancia de u a $X\backslash M_j$. Es fácil ver que la familia de funciones

$$\beta_j(u) := \frac{\rho_j(u)}{\sum_{k\in J} \rho_k(u)}, \quad j \in J$$

forma una partición de la unidad localmente Lipschitz subordinada a $\mathcal{M}$ ([33, Prop. 1.2.11]).
Para cada $j \in J$, escojemos $v_j \in M$ tal que $M_j \subset \dot{N}_{v_j}$. Por (A.3) existe y_j tal que cumple

$$\|y_j\| < 2\,\|h\,(v)\|\,, \quad h\,(v)\,(y_j) > \|h\,(v)\|^2$$

para toda $v \in M_j$. Dado que $\mathcal{M}$ es un refinamiento localmente finito, la función

$$V(u) = \sum_{j \in J} y_j \beta_j(u)$$

está bien definida. Más aún, cada $u \in M$ tiene una vecindad tal que esta función es una suma finita de funciones Lipschitz en dicha vecindad, por lo que V es localmente Lipschitz. Finalmente, $V(u)$ es un campo vectorial pseudogradiente para h. En efecto: $\beta_j(u) \neq 0$ sí y sólo sí $u \in M_j$ y, por construcción, y_j es un vector pseudogradiente para h en u para toda $u \in M_j \subset N_{v_j}$. Así, como $V(u)$ es una combinación convexa de vectores pseudogradientes para h en u, $V(u)$ es un vector pseudogradiente para h en u.
■

El siguiente lema cuantitativo de deformación se debe a M. Willem, véase [50, Lemma 2.3].

Lema A.3 *Sea X un espacio de Banach, $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R})$, $S \subset X$, $c \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ tales que*

$$\|\Phi'(u)\| \geq \frac{8\varepsilon}{\delta}, \qquad \forall u \in \Phi^{-1}\left([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon]\right) \cap S_{2\delta}. \tag{A.4}$$

Entonces existe una homotopía continua $\eta : X \times [0,1] \to X$ tal que:
(i) $\eta\,(u,t) = u \quad si\ t = 0\ ó\ u \in \Phi^{-1}\left([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon]\right) \cap S_{2\delta}$.
(ii) $\eta\,(u,1) \in \Phi^{\leq c-\varepsilon}$ para todo $u \in \Phi^{\leq c+\varepsilon} \cap S$.
(iii) $\eta\,(\cdot,t)$ es un homeomorfismo de X para todo $t \in [0,1]$.

Demostración: Por el lema anterior existe un campo vectorial pseudogradiente W para Φ' en $M := \{x \in X : \Phi'(x) \neq 0\}$. Definamos

$$\begin{aligned} A &:= \Phi^{-1}\left([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon]\right) \cap S_{2\delta}, \\ B &:= \Phi^{-1}\left([c - \varepsilon, c + \varepsilon]\right) \cap S_{\delta}, \\ \psi\,(u) &:= \frac{\operatorname{dist}(u, X \backslash A)}{\operatorname{dist}(u, X \backslash A) + \operatorname{dist}(u, B)} \\ V\,(u) &:= \begin{cases} \dfrac{-\psi(u) W(u)}{\|W\,(u)\|^2} & \text{si} \quad u \in A \\ 0 & \text{si} \quad u \in X \backslash A \end{cases} \end{aligned}$$

Así, ψ es localmente Lipschitz y tal que $\psi = 1$ en B y $\psi = 0$ en $X \backslash A$, y V es un campo vectorial localmente Lipschitz (véase [33, Ejem. 1.2.10]). Además, dado que W satisface las desigualdades (A.2) y (A.4), V satisface $\|V(u)\| \leq \frac{1}{\|W(u)\|} \leq \frac{\delta}{8\varepsilon}$, es decir,

$$\|V(u)\| \leq C\,(1+\|u\|)\,, \quad \forall u \in X. \tag{A.5}$$

Así, para cada $u \in X$ el problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\sigma\,(t,u) = V\,(\sigma\,(t,u)) \\ \quad \sigma\,(0,u) = u \end{cases}$$

tiene una solución única $\sigma\,(\cdot,u)$ definida en todo $\mathbb{R}$. Más aún, σ es continua en $\mathbb{R} \times X$ (véase, por ejemplo, [46, cap. 4]). Definamos $\eta : X \times [0,1] \to X$ como $\eta\,(u,t) := \sigma\,(8\varepsilon t, u)$. Es fácil ver que η satisface las condiciones requeridas (véase [50, Lemma 2.3]). ■

A.2 Diferenciabilidad de los funcionales involucrados en las aplicaciones de los Capítulos 3 y 4.

En esta sección demostraremos algunos resultados que garantizan la diferenciabilidad de los funcionales semidefinidos y fuertemente indefinidos que surgieron en nuestras aplicaciones.

Una clase importante de operadores que suelen surgir en el análisis no lineal son los llamados *operadores de Nemitski,* que aparecen también en nuestras aplicaciones y que a continuación definiremos.

Definición A.4 *Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$ y sea $h : \Omega \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. El operador de Nemitski asociado a h, denotado también por h, está definido como sigue:*

$$h(u) : \Omega \to \mathbb{R}, \qquad h(u)\,(x) = h\,(x, u\,(x))\,, \qquad u \in (M\,(\Omega))^m\,,\ x \in \Omega.$$

donde $M\,(\Omega)$ es el espacio de funciones Lebesgue medibles con valores reales.

Se dice que h es una *función de Carathéodory* o que satisface la *condición* (C) si:

i) $s \mapsto h\,(x,s)$ es continua para casi toda $x \in \Omega$,

ii) $x \mapsto h\,(x,s)$ es medible para cada $s \in \mathbb{R}^m$.

Observe que si h satisface la condición (C)

$$h\,(u) \in M\,(\Omega) \quad \text{para cada } u \in (M\,(\Omega))^m\,.$$

A.2.1 Continuidad de los operadores de Nemitski

Supongamos que p_i, $r \geq 1$ para cada $i \in \{1, ..., m\}$ y que además

$$|h(x,s)| \leq c\left(1 + \sum_{i=1}^{m} |s_i|^{p_i/r}\right) \tag{A.6}$$

para alguna constante $c > 0$. Bajo todas estas hipótesis se tiene

Teorema A.5 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado y $h : \Omega \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ una función que satisface la condición (C) y que cumple (A.6). Entonces el operador de Nemitski inducido por h es un operador continuo de $L^{p_1}(\Omega) \times \cdots \times L^{p_m}(\Omega)$ a $L^r(\Omega)$.*

Para la demostración de este teorema véase [51, Prop. 26.6], [11, 2.2.1], [2, Teo. 2.2], ó [48, Apendice C]. Véase además [2, Teo. 2.6 y Teo. 2.9] para la diferenciabilidad de operadores de Nemitski. Usaremos este resultado para probar las Proposiciones 3.2 y 4.2 de los Capítulos 3 y 4 respectivamente.

A.2.2 Demostración de la Proposición 3.2

El funcional asociado al sistema elíptico $(\mathcal{G})$

$$(\mathcal{G}) \qquad \begin{cases} -\Delta v = \nabla_v H(x,v) & \text{en } \Omega \\ v = u_0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

esta dado por

$$\Phi_t(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx - \int_\Omega H(x,u,t)dx$$

donde

$$H(x,u,t) := F(x, u + tu_0) + tf(x, u + u_0),$$

Ω es un dominio suave y acotado de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, $u_0 \in C^2(\partial\Omega, \mathbb{R}^m)$, $F, f \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ y satisfacen las siguientes condiciones:

$(\mathbf{F}_1)$ Existe $p \in (2, 2^*)$ y $a_0 > 0$ tal que, para toda $(x,u) \in \Omega \times \mathbb{R}^m$,

$$|\nabla_u F(x,u)| \leq a_0(|u|^{p-1} + 1).$$

(f) Existen $\gamma \in [0,1)$ y $d_0 > 0$ tales que, para toda $(x,u) \in \Omega \times \mathbb{R}^m$,

$$\begin{aligned} |f(x,u)| + |\nabla_u f(x,u) \cdot u| &\leq d_0(|F(x,u)|^\gamma + 1) \\ |\nabla_u f(x,u)| &\leq d_0(|\nabla_u F(x,u)|^\gamma + 1) \end{aligned}$$

Proposición A.6 *Si F satisface* $(\mathbf{F}_1)$ *y f satisface* $(\mathbf{f})$ *entonces el funcional Φ es de clase C^1 en $X = H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$, y su derivada está dada por*

$$\Phi_t'(u)\, v = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \; dx - \int_\Omega \nabla_u H(x,u,t) \cdot v \; dx.$$

Demostración: La derivada de Gateaux del funcional Φ_t en u en la dirección v es

$$D_v \Phi_t(u) := \frac{d}{ds} \Phi_t(u + sv)\,|_{s=0} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \; dx - \int_\Omega \nabla_u H(x,u,t) \cdot v \; dx.$$

Así, basta demostrar que la derivada de Gateaux $D\Phi_t : X \to X'$ es continua, donde X' es el dual topológico de X, es decir, basta probar que el operador $\Psi : X \to X'$ definido por

$$\Psi(u)\, v := \int_\Omega \nabla_u H(x,u,t) \cdot v \; dx$$

es continuo. Sea $u_n \to u$ una sucesión convergente en X. Por los Teoremas de Encaje de Sobolev, y como por hipótesis $p < 2^*$, se tiene que $u_n \to u$ en $L^p(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Por otro lado, usando las desigualdades de Hölder y Sobolev se tiene

$$\begin{aligned} |\Psi(u_n)\, v - \Psi(u)\, v| &\leq \int_\Omega |\nabla_u H(x,u_n,t) - \nabla_u H(x,u,t)|\, |v|\, dx \\ &\leq |\nabla_u H(x,u_n,t) - \nabla_u H(x,u,t)|_{\frac{p}{p-1}}\, |v|_p \\ &\leq c\, |\nabla_u H(x,u_n,t) - \nabla_u H(x,u,t)|_{\frac{p}{p-1}}\, \|v\|\,. \end{aligned}$$

Dado que F satisface $(\mathbf{F}_1)$, el operador $\nabla_u H : L^p(\Omega, \mathbb{R}^m) \to L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$ definido como $\nabla_u H(u)(x) := \nabla_u H(x, u(x), t)$ es una función continua por el Teorema A.5 con $p_i = p$ y $r = \frac{p}{p-1}$. De aquí se sigue que Ψ es continua. ∎

A.2.3 Demostración de la Proposición 4.2

El funcional asociado al sistema elíptico $(\mathcal{H})$

$$(\mathcal{H}) \qquad \begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-2}\, u + f_u(x,u,v) & \text{en } \Omega \\ \quad \Delta v = |v|^{q-2}\, v + f_v(x,u,v) & \text{en } \Omega \\ u = 0, \quad v = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

está dado por

$$\Phi(z,t) := \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - |\nabla v|^2\right) dx - \int_\Omega H(x,z,t)dx$$

donde

$$H(x,z,t) := \frac{1}{p}|u|^p + \frac{1}{q}|v|^q + tf(x,z), \qquad x\in\Omega,\ z=(u,v)\in\mathbb{R}^2,$$

Ω es un dominio acotado y suave en $\mathbb{R}^N$, $N\geq 3$, $p\in(2,2^*)$, $q\in(2,\infty)$ y $f\in C^1(\overline{\Omega}\times\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ satisface:

$$\begin{array}{ll}(f_1) & |f(x,z)| + |f_z(x,z)z| \leq d(|u|^{\gamma p} + |v|^{\gamma q} + 1)\\ (f_2) & |f_z(x,z)| \leq d(|u|^{\gamma(p-1)} + |v|^{\gamma(q-1)} + 1)\end{array}$$

para toda $x\in\Omega, z=(u,v)\in\mathbb{R}^2$.

Proposición A.7 *Si F satisface* $(\mathbf{f}_1)-(\mathbf{f}_2)$ *entonces el funcional Φ es de clase C^1 en $X=H_0^1(\Omega)\oplus V^q(\Omega)$. Su derivada esta dada por*

$$\begin{aligned}\Phi_t'(u,v)(\varphi,\psi) &= \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla\varphi dx - \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla\psi dx - \int_\Omega \nabla_z H(x,u,v,t)\cdot(\varphi,\psi)\,dx\\ &= \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla\varphi dx - \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla\psi dx - \int_\Omega |u|^{p-2}u\varphi dx - \int_\Omega |v|^{q-2}v\psi dx\\ &\qquad -t\int_\Omega \nabla_z f(x,z)\cdot w dx.\end{aligned}$$

Demostración: Sean $z=(u,v)$, $w=(\varphi,\psi)\in X$. La derivada de Gateaux del funcional Φ_t en z en la dirección w es

$$D_w\Phi_t(z) := \frac{d}{ds}\Phi_t(z+sw)\,|_{s=0} = \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla\varphi - \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla\psi - \int_\Omega \nabla_z H(x,z,t)\cdot w.$$

Así, basta demostrar que el operador $\Psi : X\to X'$ definido por

$$\Psi(z)w := \int_\Omega \nabla_z H(x,z,t)\cdot w\ dx$$

es continuo, con $z=(u,v)$, $w=(\varphi,\psi)\in X$. Procediendo como en la proposición anterior, sea $z_n=(u_n,v_n)\to z=(u,v)$ en X, entonces $u_n\to u$ en $L^p(\Omega)$ y $v_n\to v$ en

$L^{\overline{q}}(\Omega)$, donde $\overline{q} = \max\{2^*, q\}$; y usando las desigualdades de Hölder y Sobolev se tiene

$$
\begin{aligned}
|\Psi(z_n) \cdot w - \Psi(z) \cdot w| &= \left| \int_\Omega (\nabla_z H(x, z_n, t) - \nabla_z H(x, z, t)) \cdot w dx \right| \\
&\leq \int_\Omega \left| |u_n|^{p-2} u_n - |u|^{p-2} u \right| |\varphi| + \left| |v_n|^{q-2} v_n - |v|^{p-2} v \right| |\psi| \\
&+ \int_\Omega |f_u(x, z_n) - f_u(x, z)| |\varphi| + \int_\Omega |f_v(x, z_n) - f_v(x, z)| |\psi| \\
&\leq |g(u_n) - g(u)|_{\frac{p}{p-1}} |\varphi|_p + |h(u_n) - h(u)|_{\frac{q}{q-1}} |\psi|_{\overline{q}} \\
&+ |f_u(x, z_n) - f_u(x, z)|_r |\varphi|_{2^*} + |f_v(x, z_n) - f_v(x, z)|_r |\psi|_{\overline{q}}, \\
&\leq c \left(|g(u_n) - g(u)|_{\frac{p}{p-1}} + |h(u_n) - h(u)|_{\frac{q}{q-1}} \right) \|w\|_q \\
&+ c\left(|f_u(x, z_n) - f_u(x, z)|_r + |f_v(x, z_n) - f_v(x, z)|_r \right) \|w\|_q
\end{aligned}
$$

donde $g(u) = |u|^{p-2} u$, $h(u) = |v|^{q-2} v$, $\gamma r = \min\{\frac{2^*}{p-1}, \frac{\overline{q}}{q-1}\}$ tal que $\frac{1}{r} + \frac{1}{2^*} \leq 1$ lo cual se cumple dado que $\gamma \in [0, 1)$. Dado que f satisface $(\mathbf{f}_1) - (\mathbf{f}_2)$, los operadores $g : L^p(\Omega) \to L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$, $h : L^q(\Omega) \to L^{\frac{q}{q-1}}(\Omega)$ y $f_u, f_v : L^p(\Omega) \times L^{\overline{q}}(\Omega) \to L^r(\Omega)$ definidos como sigue: $g(u)(x) := g(u(x))$, $h(v)(x) := h(v(x))$ y $f_u(z)(x) := f_u(x, z(x))$, $f_v(z)(x) := f_v(x, z(x))$ son funciones continuas por el Teorema A.5; y de aquí se sigue que Ψ es continua. ■

El siguiente lema muestra que el funcional asociado al sistema elíptico no cooperativo del capítulo cuatro es fuertemente indefinido.

Lema A.8 *El funcional* $\Phi_t(z) := \frac{1}{2} \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - |\nabla v|^2 \right) dx - \int_\Omega H(x, z, t) dx$, $z = (u, v) \in X = H_0^1(\Omega) \oplus V^q(\Omega)$ *es fuertemente indefinido para cada* $t \in [0, 1]$ *en el sentido de la definición 1.5 si* $\int_\Omega |f(x, u, 0)| \leq c_1 \|u\|^\beta$, *si* $\|u\| \leq 1$, *para alguna constante* $c_1 \geq 0$ *y* $\beta > 2$, *donde* $\|u\|^2 = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx$.

Demostración: Tomemos $X^1 = H_0^1(\Omega)$, $X^2 = V^q(\Omega)$ y $X_k^1 = X_k^+$ definido en la sección 4.2. Por hipótesis y usando los Teoremas de encaje de Sobolev tenemos $\Phi_t(u, 0) = \frac{1}{2} \|u\|^2 - \frac{1}{p} |u|_p^p - t \int_\Omega f(x, u, 0) dx \geq \frac{1}{2} \|u\|^2 - \frac{1}{p} |u|_p^p - c_1 \|u\|^\beta \geq \frac{1}{2} \|u\|^2 - \frac{c^p}{p} \|u\|^p - c_1 \|u\|^\beta$, así, dado que $p, \beta > 2$ y tomando ρ suficientemente pequeño se tiene *(MP_1)*. Dado que Φ satisface la condición **(H4)** (véase Proposición 4.7) se tiene *(MP_2)*. De hecho, de la demostración de la proposición 4.7 se obtuvo

$$\Phi_t(z) \leq \frac{1}{2} |\nabla u|_2^2 - d_1 |u|_p^p - d_2 |v|_q^q + d_3$$

lo cual implica la condición (A). ■

Observación A.9 *En el lema anterior uno puede prescindir de la condición*

$$\int_\Omega |f(x,u,0)| \leq c_1 \|u\|^\beta, \ \ si \ \ \|u\| \leq 1$$

definiendo de manera adecuada X^1, X^2 y X_k^1, (véase [50, Theorem 3.7]).

Para probar que los puntos críticos de Φ_1 son soluciones débiles de $(\mathcal{H})$ se requiere probar que $C_c^\infty(\Omega) \subset V^q(\Omega)$, para lo cual requeriremos los siguientes lemas.

Lema A.10 ([17], Chap. IV, Theorem 8) *Existe una constante positiva $C = C(N,\Omega)$ tal que*

$$|e_n|_\infty^2 \leq C\lambda_n^{N/2} \qquad si\ N \geq 3.$$

donde e_n es la función propia correspondiente al valor propio λ_n de $-\Delta$ en $H_0^1(\Omega)$.

Demostración: Por calculo directo, tenemos que

$$\begin{aligned} \nabla\left(|\varphi|^{2\alpha-2}\varphi\right) &= |\varphi|^{2\alpha-2}\nabla\varphi + \varphi\nabla\left(|\varphi|^{2\alpha-2}\right) \\ |\nabla|\varphi|^\alpha| &= \alpha|\varphi|^{\alpha-2}\varphi\nabla\varphi \end{aligned} \tag{A.7}$$

de esta última desigualdad se tiene

$$|\varphi|^{2\alpha-2}|\nabla\varphi|^2 = \frac{|\nabla|\varphi|^\alpha|^2}{\alpha^2} \tag{A.8}$$

Sea $\varphi \in C_c^2(\Omega)$ y $\alpha > \frac{1}{2}$, entonces, usando integración por partes, (A.7) y (A.8) tenemos

$$\begin{aligned} -\int_\Omega |\varphi|^{2\alpha-2}\varphi\Delta\varphi &= \int_\Omega \nabla\left(|\varphi|^{2\alpha-2}\varphi\right)\cdot\nabla\varphi \\ &= (2\alpha-1)\int_\Omega |\varphi|^{2\alpha-2}|\nabla\varphi|^2 \\ &= \frac{(2\alpha-1)}{\alpha^2}\int_\Omega |\nabla|\varphi|^\alpha|^2. \end{aligned}$$

Así, poniendo $\varphi = e_n$ en esta última igualdad, tenemos

$$\lambda_n \int_\Omega |e_n|^{2\alpha} = \frac{(2\alpha-1)}{\alpha^2}\int_\Omega |\nabla|e_n|^\alpha|^2 \tag{A.9}$$

Por otro lado, por los Teoremas de encaje de Sobolev, se tiene que

$$c_1 \left|f\right|_{2^*}^2 \leq \int_\Omega \left|\nabla f\right|^2, \qquad \forall f \in C_c^2(\Omega)$$

que junto con la igualdad (A.9) se tiene

$$\lambda_n \int_\Omega \left|e_n\right|^{2\alpha} \geq \frac{(2\alpha - 1)}{\alpha^2} c_1 \left|\left|e_n\right|^\alpha\right|_{2^*}^2. \tag{A.10}$$

Si hacemos $\beta = \frac{N}{N-2}$ y $\alpha = \beta^k$ con $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ y así, $2^*\beta^k = 2\beta^{k+1}$ y de aquí obtenemos

$$\left|\left|e_n\right|^{\beta^k}\right|_{2^*}^2 = \left|e_n\right|_{2\beta^{k+1}}^{2\beta^k}$$

que junto con (A.10) tenemos

$$\left|e_n\right|_{2\beta^{k+1}} \leq \left[\frac{\lambda_n}{c_1} \frac{\beta^{2k}}{\left(2\beta^k - 1\right)}\right]^{\frac{1}{2\beta^k}} \left|e_n\right|_{2\beta^k}, \qquad \forall k \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

y por inducción tenemos

$$\left|e_n\right|_{2\beta^{k+1}} \leq \prod_{l=0}^{k} \left[\frac{\lambda_n}{c_1} \frac{\beta^{2l}}{\left(2\beta^l - 1\right)}\right]^{\frac{1}{2\beta^l}} \left|e_n\right|_2 \tag{A.11}$$

Por otro lado, dado que $|\Omega| < \infty$ y si $f \in L^\infty(\Omega)$ entonces $f \in L^s(\Omega)$ $\forall s \geq 1$, y $|f|_p \to |f|_\infty$ cuando $p \to \infty$; así, tomando el límite en ambos lados de (A.11) cuando $k \to \infty$ se tiene

$$\begin{aligned}
\left|e_n\right|_\infty &\leq \left[\lim_{k\to\infty} \prod_{l=0}^{k} \left[\frac{\lambda_n}{c_1} \frac{\beta^{2l}}{\left(2\beta^l - 1\right)}\right]^{\frac{1}{2\beta^l}}\right] \left|e_n\right|_2 \\
&= \left[\lim_{k\to\infty} \prod_{l=0}^{k} \left(\frac{\lambda_n}{c_1}\right)^{\frac{1}{2\beta^l}}\right] \left[\lim_{k\to\infty} \prod_{l=0}^{k} \left(\frac{\beta^{2l}}{\left(2\beta^l - 1\right)}\right)^{\frac{1}{2\beta^l}}\right] \left|e_n\right|_2 \\
&= \left[\left(\frac{\lambda_n}{c_1}\right)^{\frac{1}{2}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\beta}\right)^l}\right] \left[\lim_{k\to\infty} \prod_{l=0}^{k} \left(\frac{\beta^{2l}}{\left(2\beta^l - 1\right)}\right)^{\frac{1}{2\beta^l}}\right] \left|e_n\right|_2 \\
&= \left(\frac{\lambda_n}{c_1}\right)^{\frac{N}{4}} c(n) \left|e_n\right|_2
\end{aligned}$$

donde $c(n) = \left[\lim_{k\to\infty} \prod_{l=0}^{k} \left(\frac{\beta^{2l}}{(2\beta^l - 1)}\right)^{\frac{1}{2\beta^l}}\right]$ es finito, pues esta serie se puede acotar por

$$\begin{aligned} c(n) = \prod_{l=0}^{\infty} \left(\frac{\beta^{2l}}{(2\beta^l - 1)}\right)^{\frac{1}{2\beta^l}} &\leq \prod_{l=0}^{\infty} \beta^{\frac{l}{2\beta^l}} \\ &\leq \beta^{\frac{1}{2}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{l}{\beta^l}} \end{aligned}$$

donde claramente $\sum_{l=0}^{\infty} \frac{l}{\beta^l}$ es acotado. ■

Lema A.11 *Si* $\varphi \in C_c^{2m}(\Omega)$ *entonces*

$$\left|\int_\Omega \varphi e_n\right| \leq \lambda_n^{-m} \left|\Delta^m \varphi\right|_2 \tag{A.12}$$

donde e_n *y* λ_n *son como en el lema anterior.*

Demostración: Aplicando varias veces integración por partes, tenemos

$$\begin{aligned} \int_\Omega \varphi e_n &= -\frac{1}{\lambda_n} \int_\Omega \varphi \Delta e_n = -\frac{1}{\lambda_n} \int_\Omega \Delta\varphi e_n \\ &= \left(-\frac{1}{\lambda_n}\right)^2 \int_\Omega \Delta\varphi \Delta e_n = \left(-\frac{1}{\lambda_n}\right)^2 \int_\Omega \left(\Delta^2 \varphi\right) e_n \\ &\vdots \\ &= \left(-\frac{1}{\lambda_n}\right)^m \int_\Omega \left(\Delta^m \varphi\right) e_n \end{aligned}$$

y usando Hölder tenemos

$$\begin{aligned} \left|\int_\Omega \varphi e_n\right| &= \left(\frac{1}{\lambda_n}\right)^m \left|\int_\Omega \left(\Delta^m \varphi\right) e_n\right| \\ &\leq \lambda_n^{-m} \left|\left(\Delta^m \varphi\right)\right|_2 \left|e_n\right|_2 \\ &= \lambda_n^{-m} \left|\left(\Delta^m \varphi\right)\right|_2 \end{aligned}$$

es decir, se tiene (A.12). ■

Corolario A.12 *Si* $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ *entonces*

$$\varphi_m = \sum_{n=1}^{m} \langle \varphi, e_n \rangle_{L^2(\Omega)} e_n \to \varphi \qquad en\ L^\infty(\Omega)$$

en particular, dado que $|\Omega| < \infty$ *se tiene que* $\varphi_m \to \varphi$ *en* $L^q(\Omega)$, *para cada* $q \geq 1$; *y dado que* $\varphi_m \to \varphi$ *en* $H_0^1(\Omega)$ *donde* $\varphi_m \in V^q(\Omega)$ *se tiene que* $\varphi \in V^q(\Omega)$, *es decir,* $C_c^\infty(\Omega) \subset V^q(\Omega)$.

Demostración: Usando el Lema A.11, Hölder y Lema A.10

$$\begin{aligned}
|\varphi(x) - \varphi_k(x)| &= \left| \sum_{n=k+1}^{\infty} \langle \varphi, e_n \rangle_{L^2(\Omega)} e_n(x) \right| \\
&\leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \left| \int_\Omega \varphi e_n \right| |e_n(x)| \\
&\leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \lambda_n^{-m} |(\Delta^m \varphi)|_2 |e_n|_2 \\
&\leq c_2 |(\Delta^m \varphi)|_2 \sum_{n=k+1}^{\infty} \lambda_n^{-m} |e_n|_\infty \\
&\leq c_2 c_3 |(\Delta^m \varphi)|_2 \sum_{n=k+1}^{\infty} \lambda_n^{-m} \lambda_n^{\frac{N}{4}}
\end{aligned}$$

es decir

$$|\varphi - \varphi_k|_\infty \leq c_4 |(\Delta^m \varphi)|_2 \sum_{n=k+1}^{\infty} \lambda_n^{\frac{N}{4} - m}$$

y tomando m suficientemente grande (fija) y tomando k suficientemente grande se tiene que el lado derecho de esta desigualdad se puede hacer tan pequeña como se quiera, es decir $|\varphi - \varphi_k|_\infty \to 0$ cuando $k \to \infty$. ■

Bibliografía

[1] A. Ambrosetti, P.H. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. Funct. Anal. **14** (1973), 349-381.

[2] A. Ambrosetti, G. Prodi, *A primer of nonlinear analysis*, Cambridge University Press (1993).

[3] A. Bahri, *Topological results on a certain class of functionals and applications*, J. Funct. Anal. 41 (1981), 397-427.

[4] A. Bahri, H. Berestycki, *A perturbation method in critical point theory and applications*, Trans. Amer. Math. Soc. **276** (1981), 1-32.

[5] A. Bahri, H. Berestycki, *Existence of forced oscillations for some nonlinear differential equations*, Comm. Pure Appl. Math. **37** (1984), 403-442.

[6] A. Bahri, P.L. Lions, *Morse index of some min-max critical points. I. Application to multiplicity results*, Comm. Pure Appl. Math. **41** (1988),1027-1037.

[7] Th. Bartsch, M. Clapp, *Critical point theory for indefinite functionals with symmetries,* J. Funct. Anal. **138** (1996), 107-136.

[8] Th. Bartsch, M. Clapp, D. Puppe, *A mountain pass theorem for actions of compact Lie groups*, J. Reine. Angew. Math. **419** (1991), 55-66.

[9] Th. Bartsch, D. G. De Figueiredo, *Infinitely many solutions of nonlinear elliptic systems,* Topics in nonlinear analysis, 51-67, PNLDE **35**, Birkhäuser, Basel 1999.

[10] V. Benci, P. H. Rabinowitz, *Critical point theorems for indefinite functionals,* Invent. Math. **52** (1979), 241-273.

[11] M. Berger, *Nonlinearity and functional analysis,* Academic Press, 1977.

[12] H. Brezis, *Análisis Funcional,* Alianza Editorial, Madrid, 1984.

[13] Ph. Bolle, *On the Bolza problem,* J. Diff. Equ. **152** (1999), 274-288.

[14] Ph. Bolle, N. Ghoussoub, H. Tehrani, *The multiplicity of solutions to non-homogeneous boundary value problems*, Manuscripta Math. **101** (2000), 325-350.

[15] A. Castro, M. Clapp, *Upper estimates for the energy of solutions of nonhomogeneous boundary value problems*, preprint 2004.

[16] K.-C. Chang, *Infinite dimensional Morse theory and multiple solution problems,* PNLDE **6**, Birkhäuser, Boston 1993.

[17] I. Chavel, *Eigenvalues in riemannian geometry,* Pure and Applied Mathematics, Academic Press, London, 1984.

[18] M. Clapp, D. Puppe, *Critical point theory with symmetries*, J. Reine. Angew. Math., **418** (1991), 1-29.

[19] M. Clapp, *Critical point theory for perturbations of symmetric functionals,* Comment. Math. Helvetici **71** (1996), 570-593.

[20] M. Clapp, S. Hernández-Linares, E. Hernández-Martínez, *Linking-preserving perturbations of symmetric functionals,* J. Diff. Equ. **185** (2002), 181-199.

[21] D. G. Costa, C. A. Magalhães, *A variational approach to non-cooperative elliptic systems,* Nonl. Anal. TMA **25** (1995), 699-715.

[22] D. G. Costa, C. A. Magalhães, *A unified approach to a class of strongly indefinite functionals,* J. Diff. Equ. **125** (1996), 521-547.

[23] A.M. Candela, A. Salvatore, *Multiplicity results of an elliptic equation with non homogeneous boundary conditions,* Topol. Methods Nonlinear Anal. **78**, (1998), 1-18.

[24] A.M. Candela, A. Salvatore, M. Squassina, *Multiple solutions for semilinear elliptic systems with non-homogeneous boundary conditions,* Nonlinear Anal. **51**, (2002), 249-270.

[25] A.M. Candela, A. Salvatore, M. Squassina, *Semilinear elliptic systems with lack of symmetry,* por aparecer en Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems.

[26] M. Cwickel, *Weak type estimates and the number of bound states of Schrödinger operators,* Ann. Math. **106** (1977), 93-102.

[27] D. G. De Figueiredo, *Semilinear elliptic systems,* 2° Congreso Latinoamericano de Matemáticos, UMALCA, Cancún 2004.

[28] D. G. De Figueiredo, Y. H. Ding, *Strongly indefinite functionals and multiple solutions of elliptic systems,* Trans. Am. Math. Soc. **355** (2003), 2973-2989.

[29] D. G. De Figueiredo, P. L. Felmer, *On superquadratic elliptic systems,* Trans. Amer. Math. Soc. **343** (1994), 97-116.

[30] D. G. De Figueiredo, C. A. Magalhães, *On nonquadratic Hamiltonian elliptic systems,* Adv. Diff. Equ. **1** (1996), 881-898.

[31] I. Ekeland, *On the variational principle,* J. Math. Anal. Appl. **47** (1974), 324-353.

[32] Engelking, Ryszard, *General Topology,* Sigma Series in pure Mathematics; Vol. 6, Berlin, 1989.

[33] S. Hernández-Linares, *Teoremas de Paso de Montaña y sus aplicaciones*, Tesis de Licenciatura, Universidad Autónoma de Coahuila, 1995.

[34] J. Hulshof, R. van der Vorst, *Differential systems with strong indefinite variational structure,* J. Funct. Anal. **19** (1993), 32-58.

[35] J. Hulshof, E. Mitidieri, R. van der Vorst, *Strongly indefinite systems with critical Sobolev exponent,* Trans. Amer. Math. Soc. **350** (1998), 2349-2365.

[36] M. A. Krasnoselskii, *Topological methods in the theory of nonlinear integral equations,* Macmillan, New York 1964.

[37] W. Kryszewski, A. Szulkin, *An infinite-dimensional Morse theory with applications,* Trans. Amer. Math. Soc. **349** (1997), 3181-3234.

[38] S. J. Lie, J. Q. Liu, *Some existence theorems on multiple critical points and their applications,* Kexue Tongbao **17** (1984) [in chinese].

[39] E. H. Lieb, *Bounds on the eigenvlues of the Laplace and Schrödinger operators,* Bull. Amer. Math. Soc. **82** (1976), 751-753.

[40] P.H. Rabinowitz, *Variational methods for nonlinear eigenvalue problems*, Eigenvalues of Nonlinear Problems (G. Prodi, ed.), C.I.M.E., Edizioni Cremonese, Roma, 1975, pp. 141-195.

[41] P.H. Rabinowitz, *Some minimax theorems and applications to nonlinear partial diferential equations, Nonlinear Análisis: A collected of papers in honor of Erich Röthe, Academic Press, New York, 1978, pp. 161-177.*

[42] P.H. Rabinowitz, *Periodic solutions of Hamiltonian systems,* Comm. Pure Appl. Math. **31** (1978), 157-184.

[43] P.H. Rabinowitz, *Multiple critical points of perturbed symmetric functionals*, Trans. Amer. Math. Soc. **272** (1982), 753-770.

[44] P.H. Rabinowitz, *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations*, Reg. Conf. Ser. Math. **65**, Amer. Math. Soc., Providence, RI 1986.

[45] G. Rosenbljum, *The distribution of the discrete spectrum for singular differential operators*, Soviet Math. Dokl. **13** (1972), 245-249.

[46] L. Schwartz, *Analyse II*, Hermann, Paris, 1992.

[47] E.H. Spanier, *Algebraic topology*, McGraw-Hill, New York, 1966.

[48] M. Struwe, *Infinitely many critical points for functionals which are not even and applications to superlinear boundary value problems,* Manuscripta Math. **32** (1980), 335-364.

[49] K. Tanaka, *Morse indices at critical points related to the symmetric mountain pass theorem and applications*, Commun. in Partial Diff. Eq. **14** (1989), 99-128.

[50] M. Willem, *Minimax theorems*, PNLDE **24**, Birkhäuser, Boston, 1996.

[51] E. Zeidler, *Nonlinear functional Analysis and its applications*, vol. II-B, 1990.