UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"VERSIONES DEL TEOREMA DE CAUCHY"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

VICTOR ALBERTO CRUZ BARRIGUETE

DIRECTOR DE TESIS: M. EN C. JOSE ANTONIO GOMEZ ORTEGA

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

2004

VNIVERSIDAD NACIONAL AVFNºMA DE MEXICO

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"Versiones del Teorema de Cauchy"

realizado por Cruz Barriguete Víctor Alberto

con número de cuenta 40000096-1 **, quien cubrió los créditos de la carrera de:** Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	M. en C. José Antonio Gómez Ortega	JGS.
Propietario	Dr. José Guadalupe Reyes Victoria	
Propietario	Dr. Javier Páez Cárdenas	
Suplente	Mat. Rita Xóchitl Vázquez Padilla	
Suplente	M. en C. Emma Lam Osnaya	Emma Lam O.

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. Alejandro Bravo Mojica
Coordinador de la Carrera de Matemáticas

MATEMATICAS

Versiones del Teorema de Cauchy

Victor Alberto Cruz Barriguete

Agradecimientos

La esencia de la matemática reside en su libertad. Cantor.

A mi madre por todo lo que pasó para que lograra este sueño. A mi hermana por estar conmigo en esos momentos difíciles y darme ánimos. A la memoria de mi Padre y abuelitos Lucrecia y Gilberto. A mi familia por su apoyo incondicional en esta aventura. Muy en especial a Francisco Kreitler, Gabriela Corres, Josefina Zárate, Victor Cruz, Gloria Castillo, Maria Isabel Domínguez, Raúl Chin, Clara Barriguete, Lucia Cruz, Yolanda Herrera, Natalia Godina, Maria del Carmen González, Antonia González y Marcelina Barrita. A los que me mostraron por primera vez el camino; Isaul Pineda, Guadalupe Cruz†, Dalila Leyva, César Caballero, David González y Ricardo Díaz. A todos los profesores de la Facultad de Ciencias de quienes me queda un excelente recuerdo, muy en especial a José Antonio Gómez, José Guadalupe Reyes, Emma Lam, Alejandro Díaz Barriga, César Sousa, Juan Rico, Leopoldo Morales, Rita Vázquez, Armando García, César Guevara, Oscar Palmas y Javier Páez. A los buenos amigos que he encontrado; Jaime Lugo, Joel Vázquez, Yuval Matarasso, Ignacio González, Leonardo Faustinos, José Juan Ley, Israel Villagómez, Danitza Ramírez, Jazmín Ibarra, Martha Barrios, Gloria López, Juan Olguín, David González, Tizoc Villalobos, Claudia Reyes, Luis Rios, Clarisa Zárate, Vicente Prieto y Marcos Pérez. A los alumnos que he tenido dando clases en la Facultad de Ciencias . A la Fundación UNAM por el apoyo económico para poder realizar mis estudios. A todos los que han pasado por mi vida y me han enseñado algo valioso. Gracias.

Índice general

Presentación

El camino más corto entre
dos verdades en el dominio real
pasa a través del dominio complejo.
Hadamard.

En este trabajo damos algunas versiones del *Teorema de Cauchy* que consideramos importantes por sus consecuencias en el análisis complejo.

Comenzamos con un recorrido histórico del desarrollo de la demostración del teorema que inicia con el trabajo de Cauchy. Aquí puede observarse la dificultad que presenta la hipótesis de continuidad sobre la derivada de la función. También se presentan versiones interesantes e ingeniosas para su época en donde se hace uso explícito o implícito de la hipótesis de tal continuidad, como por ejemplo en la prueba dada por Briot y Bouquet. Se comenta la hipótesis de la curva de integración empezando en un rectángulo y llegando a la versión más general donde se pide únicamente que la curva cerrada sea diferenciable a trozos. Comentamos también la prueba al teorema dada por Goursat.

En la segunda parte se dan las herramientas que necesitaremos para el desarrollo del trabajo como son la diferenciabilidad de una función, la condición de que una función sea holomorfa y criterios relacionados para saber cuando una función cumple estas condiciones. También se define lo que es integrar una función a lo largo de una curva y las propiedades de tal integral. Aquí encontramos algunos resultados del análisis complejo que utilizamos posteriormente.

En el Capítulo 3 trabajamos la versión homotópica del teorema de Cauchy, no sin antes dar unos resultados de topología algebraica y definir lo que es la gavilla de funciones holomorfas.

En el Capítulo 4 se dan primeramente resultados sobre particiones de la unidad para un uso técnico en el capítulo. Definimos el índice en un punto con respecto a una curva cerrada para demostrar el Teorema del Residuo y pasar a la versión homológica del teorema de Cauchy. También se tratará la ecuación $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \phi$.

Para el Capítulo 5 se trata lo concerniente a los primeros grupos de cohomología de una gavilla con respecto a cierta cubierta y funciones localmente constantes. Después se da el resultado conocido como la versión cohomológica del teorema de Cauchy y sus consecuencias como, por ejemplo, que el primer grupo de cohomología sea cero en un conjunto abierto de $\mathbb{C}$ es equivalente a que toda función holomorfa tenga una primitiva.

En el último capítulo se analizan algunas propiedades de homotopía libre y damos la prueba de Dixon del teorema de Cauchy, una de las pruebas más simples. Utilizando los resultados anteriores, mostramos las equivalencias lógicas del teorema de Cauchy. En esta parte también puede encontrarse las implicaciones que tiene el teorema de Cauchy en dominios simplemente conexos y finalmente un análisis breve sobre las pruebas del teorema dadas en libros clásicos de variable compleja.

Capítulo 1

Introducción

Augustin Louis Cauchy (1789-1857)

Desde sus orígenes la variable compleja se utilizó para resolver problemas de cálculo diferencial. Científicos como D'Alambert y Euler comenzaron a desarrollar la teoría de funciones de variable compleja en esa dirección. Sin embargo, Cauchy es uno de los primeros en formalizar la teoría de la variable compleja.

Augustin Louis Cauchy, quien nació el 21 de agosto de 1789 y falleció el 23 de mayo de 1857, fue un matemático y físico francés famoso por sus trabajos en Análisis Matemático. Sus textos *Cours d'analyse* (1821) y *Exercises d'analyse et de physique mathematique* (1840-1847) fueron muy influyentes para la matemática moderna. Destaca en ellos el estudio cuidadoso de las condiciones para la convergencia de las series. Otros trabajos de importancia fueron *Analyse algébrique* y el *Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal* cuyo propósito fue formalizar el análisis infinitesimal.

En 1814, Cauchy presenta en la *Academia de Ciencias* su obra titulada *Mémoire sur les intégrales définies*. Este trabajo contiene sus descubrimientos acerca de la teoría de los residuos. La primera publicación del trabajo aparece en 1825 con notas adicionales y con algunos cambios de notación en 1882. En este trabajo frecuentemente se combinan dos ecuaciones reales en una ecuación compleja. El primer teorema probado en la memoria es:

> *Si una función de una variable compleja es holomorfa en cierta región y continua sobre la frontera, la integral de la función tomada a lo largo de la frontera de la región es igual a cero.*

Sus argumentos son del siguiente estilo. Las regiones consideradas son transformadas de forma inyectiva y continua sobre un rectángulo en el plano real. La transformación o aplicación sobre el plano complejo $M + iN$ es obtenida tomando funciones M y N con derivadas de todos los órdenes con respecto a x e y, continuas en x e y.

Sea $f(M+iN) = P+iQ$ una función holomorfa de $M+iN$ en una cierta región Ω del plano $M + iN$ y consideremos que $M = \phi(x,y)$ y $N = \psi(x,y)$ son funciones continuas en las variables x e y definidas en un rectángulo R con frontera ∂R, que poseen derivadas parciales de todos los órdenes con respecto a x e y en R y sobre ∂R. Además, sean

$$S + iT = f(M + iN)\frac{\partial(M + iN)}{\partial x} \tag{1.1}$$

$$U + iV = f(M + iN)\frac{\partial(M + iN)}{\partial y}. \tag{1.2}$$

Diferenciando 1.1 y 1.2

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial y}+i\frac{\partial T}{\partial y}&=f'(M+iN)\frac{\partial(M+iN)}{\partial x}\frac{\partial(M+iN)}{\partial y}+\\&+f(M+iN)\frac{\partial^2(M+iN)}{\partial x\partial y}\\\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial V}{\partial x}&=f'(M+iN)\frac{\partial(M+iN)}{\partial y}\frac{\partial(M+iN)}{\partial x}+\\&+f(M+iN)\frac{\partial^2(M+iN)}{\partial x\partial y}.\end{aligned}$$

Como bajo las condiciones anteriores se tiene que,

$$\frac{\partial^2(M+iN)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2(M+iN)}{\partial y\partial x}$$

sucede que,

$$\frac{\partial S}{\partial y}+i\frac{\partial T}{\partial y}=\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial V}{\partial x}.$$

Entonces

$$\frac{\partial S}{\partial y}=\frac{\partial U}{\partial x}\quad \text{y}\quad \frac{\partial T}{\partial y}=\frac{\partial V}{\partial x}. \tag{1.3}$$

Multipliquemos las ecuaciones anteriores por $dxdy$ e integremos de $x=0$ a $x=a$ y de $y=0$ a $y=b$. Como el integrando es continuo, el orden de integración puede cambiarse[1]. Esto nos lleva a la igualdad

$$\int_0^a\int_0^b\frac{\partial S}{\partial y}dydx=\int_0^b\int_0^a\frac{\partial U}{\partial x}dxdy. \tag{1.4}$$

Sean $S(x,b)=S$, $S(x,0)=s$, $U(a,y)=U$ y $U(0,y)=u$, entonces

$$\int_0^a Sdx-\int_0^a sdx=\int_0^b Udy-\int_0^b udy. \tag{1.5}$$

De manera similar, tomando $T(x,b)=T$, $T(x,0)=t$, $V(a,y)=V$ y $V(0,y)=v$, obtenemos

$$\int_0^a Tdx-\int_0^a tdx=\int_0^b Vdy-\int_0^b vdy. \tag{1.6}$$

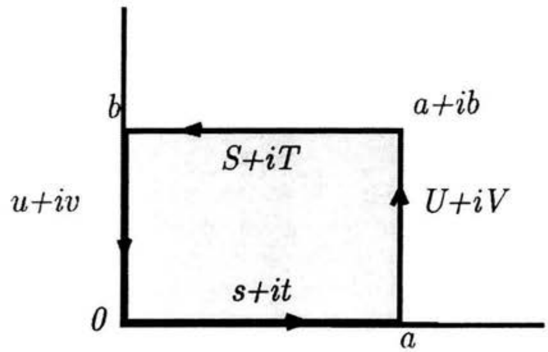
[1]Esto se debe al Teorema de Fubini.

Multiplicando en la ecuación (1.6) por $-i$, y en (1.5) por -1 y realizando la suma se tiene la igualdad

$$\int_0^a (s+it)dx + \int_0^b (U+iV)dy - \int_0^a (S+iT)dx - \int_0^b (u+iv)dy = 0$$

o, equivalentemente

$$\int_{\partial R} f(M+iN)\frac{d(M+iN)}{d(x+iy)}d(x+iy) = 0.$$



Esto se puede resumir en el siguiente resultado.

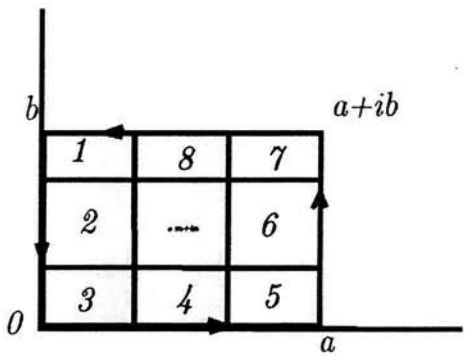
Teorema fundamental 1. *Sea $f(M+iN)$ una función de $M+iN$ en una región S del plano $M+iN$ que es continua en S y sobre ∂S, y sean $M=\phi(x,y)$ y $N=\psi(x,y)$ funciones continuas de x e y en un rectángulo $R=\{(x,y): 0\le x\le a, 0\le y\le b\}$ tales que sobre la frontera ∂R, poseen derivadas parciales continuas de todos los órdenes con respecto a x e y. Además estas funciones aplican la región cerrada S sobre el rectángulo cerrado R de manera uno a uno y continuamente. Entonces la integral de $f(M+iN)d(M+iN)$ a lo largo de ∂R en el sentido positivo se anula, es decir*

$$\int_{\partial R} f(M+iN)d(M+iN) = 0.$$

En la segunda parte, Cauchy demuestra el siguiente resultado:

Teorema fundamental 2. *Sea $f(M+iN)$ una función holomorfa de $M+iN$ en una cierta región S del plano $M+iN$, excepto por un polo* *simple* $m + in$ *contenido en* S, *y continua sobre la frontera* ∂S *de* S, *salvo quizás en este polo. Sean* $M = \phi(x, y)$ *y* $N = \psi(x, y)$ *funciones continuas de* x *e* y *y sobre la frontera* ∂R *de un rectángulo* R *que poseen derivadas parciales continuas de todos los órdenes y que aplican la región* S *sobre el rectángulo* R *de manera uno a uno, continuamente y de tal forma que* $m = \phi(X, Y)$ *y* $n = \psi(X, Y)$. *Sea* $R' = \{(x, y) : a' \leq x \leq a'', b' \leq y \leq b''\}$ *un rectángulo en el interior de* R *y que contiene a* (X, Y) *en* $\partial R'$. *Entonces la integral de* $f(M + iN)d(M + iN)$ *tomada a lo largo de* ∂R *en sentido positivo es igual a la integral de* $f(M + iN)d(M + iN)$*tomada en sentido positivo a lo largo de* $\partial R'$, *es decir:*

$$\int_{\partial R} f(M + iN)d(M + iN) = \int_{\partial R'} f(M + iN)d(M + iN).$$



La demostración se sigue del Teorema Fundamental 1 aplicándolo a los rectángulos 1, 2,..., 8 (véase [12]). La intención original de estos resultados es llegar al *Teorema del Residuo*[2].

Este trabajo fue considerado como innovador en su época debido a que contenía ideas originales. También se puede ver que los resultados requieren en buena parte de resultados de análisis real y el siguiente paso era encontrar demostraciones que dependieran únicamente de z como variable compleja.

Ahora se sabe que el Teorema Fundamental 1, y conocido como el teorema de Cauchy, fué comunicado por Gauss a Bessel en una carta fechada el 18 de diciembre de 1811, en la que incluía además la prueba. En su obra

[2]Véase Capítulo 4.

Comptes Rendus, Cauchy prueba el teorema basándose en la fórmula de Green (de la misma manera que Gauss lo había probado). Esta demostración fue expuesta luego por Riemann en 1851 durante su famosa disertación inaugural en Göttingen.

Hasta ese momento todas las demostraciones utilizaban la continuidad de la derivada.

Una prueba interesante que también utiliza la continuidad de la derivada es la dada por Briot y Bouquet en [23] que apareció en 1875. Esta demostración funciona en regiones Ω que son en *forma de estrella* o *estrelladas* desde $z_0 \in \Omega$, esto quiere decir que para cualquier $z \in \Omega$, el segmento entre z_0 y z está contenido en Ω. Supongamos que Ω es estrellada desde el origen. Consideremos una curva cerrada simple γ contenida en Ω y parametrizada por $\phi\colon [0,1] \to \Omega$. Si la región es estrellada las curvas γ_α con $\alpha \in [0,1]$ y parametrizadas por $\alpha\phi(t)$ están contenidas en Ω. Tomamos $\tilde{\alpha} = \alpha + h$ con h pequeña de tal manera que la curva cerrada $\tilde{\gamma_\alpha}$ quede contenida en Ω. Definamos la función $\varphi(\alpha) = \int_{\gamma_\alpha} f dz = \int_0^1 f(\alpha\phi(t))\alpha\phi'(t)dt$. Esta función es continua pues la diferencia $\varphi(\tilde{\alpha}) - \varphi(\alpha)$ se aproxima a cero conforme h tiende a cero. Esto nos lleva a que la integral $\int_{\gamma_\alpha} f dz$ es una función continua de α. Veremos ahora que en realidad ésta función es constante, mostrando que $\varphi'(\alpha) = 0$. Como f es $\mathbb{C}$-diferenciable[3] en Ω, ésta puede desarrollarse en serie de potencias[4]. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} f(z+w) &= f(z) + f'(z)\,w + \frac{f''(z)}{2!}\,w^2 + \cdots \\ &= f(z) + \varepsilon_1(w) \end{aligned}$$

donde $\varepsilon_1(w)$ tiende a cero si w tiende a cero. Y también por ser f una función $\mathbb{C}$-diferenciable,

$$\frac{f(z+w) - f(z)}{w} = f'(z) + \varepsilon_2(w)$$

donde $\varepsilon_2(w)$ cumple que tiende a cero si w tiende a cero.
Deseamos encontrar $\lim_{h\to 0} \frac{\varphi(\tilde{\alpha})-\varphi(\alpha)}{h}$. Pero

$$\frac{\varphi(\tilde{\alpha}) - \varphi(\alpha)}{h} = \int_0^1 \left(\alpha \frac{f(\tilde{\alpha}\phi(t)) - f(\alpha\phi(t))}{h} + f(\tilde{\alpha}\phi(t))\right)\phi'(t)dt. \qquad (1.7)$$

[3]Decimos que f es $\mathbb{C}$-diferenciable en Ω si $\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ existe para toda $z \in \Omega$.
[4]Véase la página 29.

Observemos que:

$$f(\tilde{\alpha}\phi(t)) = f(\alpha\phi(t)) + \varepsilon_1(h\phi(t))$$
$$\frac{f(\tilde{\alpha}\phi(t)) - f(\alpha\phi(t))}{h} = \phi f'(\alpha\phi(t)) + \phi(t)\varepsilon_2(h\phi(t)).$$

La función $F(z) = zf(z)$ es también $\mathbb{C}$-diferenciable en Ω y $F'(z) = f(z) + zf'(z)$. Por tanto $F'(\alpha\phi(t)) = f(\alpha\phi(t)) + \alpha\phi(t)f'(\alpha\phi(t))$. Ahora regresando a la ecuación 1.7,

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \Big(\alpha\frac{f(\tilde{\alpha}\phi(t)) - f(\alpha\phi(t))}{h} + f(\tilde{\alpha}\phi(t))\Big)\phi'(t)dt = \\
= \quad &\int_0^1 \Big(\alpha\phi(t)f'(\alpha\phi(t)) + \alpha\varepsilon_2(h\phi(t))\phi(t) + f(\alpha\phi(t)) + \varepsilon_1(h\phi(t))\Big)\phi'(t)dt \\
= \quad &\int_0^1 \Big(\alpha\phi(t)f'(\alpha\phi(t)) + f(\alpha\phi(t))\Big)\phi'(t)dt \\
+ \quad &\int_0^1 \Big(\alpha\varepsilon_2(h\phi(t))\phi(t) + \varepsilon_1(h\phi(t))\Big)\phi'(t)dt \\
= \quad &\frac{1}{\alpha}\int_0^1 F'(\alpha\phi(t))\alpha\phi'(t)dt + \int_0^1 \Big(\alpha\varepsilon_2(h\phi(t))\phi(t) + \varepsilon_1(h\phi(t))\Big)\phi'(t)dt \\
= \quad &0 + \int_0^1 \Big(\alpha\varepsilon_2(h\phi(t))\phi(t) + \varepsilon_1(h\phi(t))\Big)\phi'(t)dt.
\end{aligned}$$

Observemos que

$$\lim_{h\to 0}\int_0^1 \Big(\alpha\varepsilon_2(h\phi(t))\phi(t) + \varepsilon_1(h\phi(t))\Big)\phi'(t)dt = 0.$$

Por tanto

$$\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(\tilde{\alpha}) - \varphi(\alpha)}{h} = 0.$$

Luego $\varphi'(\alpha) = 0$ para $\alpha \neq 0$, por tanto φ es constante para $\alpha \neq 0$ y por continuidad de φ, se tiene $\varphi(\alpha) = \varphi(0) = 0$ para toda $\alpha \in [0, 1]$. Esto prueba el teorema de Cauchy para regiones estrelladas.

Decimos que la función $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ (donde $z = x + iy$) satisface las *ecuaciones de Cauchy-Riemann* en el punto (x, y) si se satisfacen simultáneamente las ecuaciones

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) \quad \text{y} \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y).$$

Dichas condiciones se deben a D'Alambert quien enunció y probó en 1752 que las relaciones se cumplen si y sólo si $f(z)$ es $\mathbb{C}$-diferenciable en el punto (x, y).

En notación moderna, el teorema de Cauchy de 1846 se puede enunciar de la siguiente forma

Teorema 1. *Si $f(z)$ es $\mathbb{C}$-diferenciable en la región Ω con derivada continua en una región Ω y $R \subset \Omega$ es un rectángulo cerrado, entonces*

$$\int_{\partial R} f(z)dz = 0.$$

Como $f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$ es $\mathbb{C}$-diferenciable sobre Ω, se cumple que

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Al aplicar la fórmula de Green en un rectángulo R a las integrales de línea, tenemos:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial R} f(z)dz &= \int_{\partial R} Pdx - Qdy + i\int_{\partial R} Qdx + Pdy \\
&= \int\int_R \Big(-\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)dxdy + i\int\int_R \Big(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\Big)dxdy \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Para extender el teorema, el siguiente paso fue sustituir R por un polígono P con lados paralelos a una de las direcciones. Consideremos dos casos:

Caso 1. Si P es simple[5], por el teorema de Jordan[6], P tiene por interior un dominio acotado Ω simplemente conexo. Dividamos P en rectángulos contenidos en Ω. Usando el Teorema 1 se sigue el resultado.

Caso 2. Si P no es simple, tomamos cada una de las componentes cerradas y las dividimos como en el caso anterior.

[5]Una curva se llama *simple* si no tiene autointersecciones.

[6]El *Teorema de la curva de Jordan* dice que si γ una curva simple cerrada en $\mathbb{C}$, entonces $\mathbb{C}\setminus\Omega$ puede descomponerse de manera única como la unión ajena de dos regiones A y B tales que, A es acotada y simplemente conexa (llamada el interior de γ), γ puede contraerse a cualquier punto de $A \cup \gamma$ y las fronteras de A y B son γ. Para ver más detalles, puede consultarse [26].

De esta manera se sigue el resultado para polígonos[7].

Consideremos ahora el siguiente resultado, el cual entenderemos como un primer resultado de cohomología (véase Capítulo 5).

Teorema 2. *Sea Ω un dominio acotado y simplemente conexo. Si $f(z)$ es $\mathbb{C}$-diferenciable en Ω con derivada continua, entonces existe $F(z)$ tal que $F'(z) = f(z)$.*

Exhibamos $F(z)$ explícitamente. Elijamos un punto $a \in \Omega$ y sea

$$F(z) = \int_a^z f(t)dt$$

donde la curva de integración es una línea poligonal con segmentos paralelos a los ejes coordenados. Se puede ver que la integral es independiente de la curva (véase la página 48). Ahora mostraremos que la derivada de F en un punto $z_0 \in \Omega$ es $f(z_0)$. En efecto,

$$\frac{F(z_0+h) - F(z_0)}{h} - f(z_0) = \frac{1}{h}\int_{z_0}^{z_0+h} [f(t) - f(z_0)]dt$$

donde la curva de integración puede ser tomada como la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuando $|h|$ es suficientemente pequeña. Entonces

$$\left|\frac{F(z_0+h) - F(z_0)}{h} - f(z_0)\right| \leq \max_{t \in [z_0, z_0+h]} |f(t) - f(z_0)| \frac{|h|}{|h|}.$$

Por la continuidad de $f(z)$ en z_0 se tiene $F'(z_0) = f(z_0)$ lo cual completa la prueba.

Sea $\gamma \colon I = [0,1] \to \Omega$ una curva continua y consideremos la partición del segmento I por los puntos $0 = t_0 < \ldots < t_n = 1$, obteniendo segmentos $[t_{k-1}, t_k]$ con $k = 1, \ldots, n$. Esto nos da una partición de la curva γ en arcos parciales γ_k $(k = 1, \ldots, n)$ con puntos iniciales $z_{k-1} = \gamma_k(t_{k-1})$ y finales $z_k = \gamma_k(t_k)$. El punto final de cada arco (excepto el último) coincide con el punto inicial del arco que le sigue. Uniendo los puntos $z_0, \ldots, z_{n-1}$ en este orden mediante segmentos, obtenemos una poligonal Γ inscrita en la curva γ. Los lados de esta poligonal son las cuerdas de los arcos γ_k. La longitud de Γ es

$$\sum_{k=1}^{n} |z_k - z_{k-1}|.$$

[7] Puede verse con mayor detalle en [13].

Si esta magnitud, independientemente de la partición considerada, queda acotada

$$\sum_{k=1}^{n} |z_k - z_{k-1}| \leq C < \infty,$$

la curva γ se llama *rectificable*. Para esta curva rectificable γ, y para $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ una función definida y continua en γ: consideremos alguna partición de la curva γ en arcos γ_k y utilizando la notación anterior formemos para la función $f(z)$ la suma

$$S = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_{k-1})(z_k - z_{k-1}).$$

Cada término de esta suma es el producto de $f(z)$ en cierto punto ξ_{k-1} del arco γ_k por la diferencia de los puntos finales e iniciales del arco. Introduzcamos para abreviar, la siguiente notación

$$u(\xi_k, \eta_k) = u_k,\ v(\xi_k, \eta_k) = v_k,\ x_k - x_{k-1} \doteq \Delta x_{k-1},\ y_k - y_{k-1} = \Delta y_{k-1}.$$

Entonces podemos escribir

$$f(\xi_k) = u_k + iv_k,\ z_k - z_{k-1} = \Delta x_{k-1} + i\Delta y_{k-1},$$

y por tanto,

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_{k-1})(z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n}(u_{k-1} + iv_{k-1})(\Delta x_{k-1} + i\Delta y_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n}(u_{k-1}\Delta x_{k-1} - v_{k-1}\Delta y_{k-1}) + i\sum_{k=1}^{n}(v_{k-1}\Delta x_{k-1} + u_{k-1}\Delta y_{k-1}). \end{aligned}$$

Observemos que las partes real e imaginaria de la suma S son sumas formadas para la misma partición de la curva γ. Para los siguientes pares de funciones reales: la primera, para $u(x,y)$ y $-v(x,y)$, y la segunda, para $v(x,y)$ y $u(x,y)$. Como las funciones $u(x,y)$ y $v(x,y)$ son continuas y la curva γ es rectificable, las sumas indicadas convergen a un límite determinado al aumentar indefinidamente las particiones de la curva (es decir, cuando la máxima diferencia de los valores extremos del parámetro t tiende a cero). De hecho, los límites son:

$$\int_\gamma u(x,y)dx - v(x,y)dy \quad \text{y} \quad \int_\gamma v(x,y)dx + u(x,y)dy.$$

De aquí decimos que, bajo las mismas condiciones, la integral de la función compleja $f(z)$ también tiende a un límite, en este caso:

$$\int_\gamma u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int_\gamma v(x,y)dx + u(x,y)dy$$

Este límite se designa mediante $\int_\gamma f(z)dz$ y se llama la *integral de la función $f(z)$ tomada a lo largo de la curva γ*. Así,

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)dz &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_{k-1})(z_k - z_{k-1}) \\ &= \int_\gamma u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int_\gamma v(x,y)dx + u(x,y)dy.\end{aligned}$$

Cambiemos ahora el polígono P por una curva regular Γ contenida en Ω. De esta forma, tenemos el teorema de Cauchy para curvas regulares.

Teorema 3. *Sean Ω un dominio acotado y simplemente conexo, $f(z)$ una función $\mathbb{C}$-diferenciable en Ω con derivada continua y Γ una curva regular cerrada en Ω. Entonces*

$$\int_\Gamma f(z)dz = 0.$$

Si L es un arco regular de Γ que va del punto a al punto b, por el teorema fundamental del Cálculo y el Teorema 2

$$\int_\Gamma f(z)dz = F(b) - F(a). \tag{1.8}$$

Si $\Gamma = L$, entonces $a = b$ y hemos terminado[8].

Fué Edouard Goursat quien demostró por primera vez el teorema para curvas rectificables sin hacer uso de la hipótesis de la derivada continua. Sin embargo, su demostración publicada en 1884 no dejaba claro como librarse de esta hipótesis. Por fin en 1900 podemos decir que el teorema queda demostrado cuando Goursat publica su artículo *Sur la définition générale des fonctions Analytiques d' après Cauchy*, en el cual él mismo menciona: *Me he dado cuenta hace mucho tiempo de que la demostración del teorema de Cauchy que di en 1883, no suponía la continuidad de la derivada.*

[8]Este análisis se encuentra en [13]

Para responder a un pedido que me ha sido efectuado por el profesor Osgood, indicaré, aquí rápidamente como se puede hacer esta extensión. Cabe mencionar también que E. Moore da una prueba en 1900 sin suponer la continuidad de la derivada. Dicha prueba puede consultarse en [27] o [16].

En la prueba, Goursat encara directamente el problema para una curva cerrada rectificable arbitraria. A pesar de que para esta prueba no se hace uso explícito del Lema 1 que se presenta a continuación, la prueba del mismo aparece en su artículo de 1900. En este mismo año Goursat define por primera vez el conjunto de funciones para el cual es válido el teorema de Cauchy y demuestra que es el de todas las funciones $\mathbb{C}$-diferenciables.

Definición 1. Sea γ una curva cerrada simple y denotemos por $int(\gamma)$ el interior de la región que encierra. Consideremos $f(z)$ holomorfa en $\gamma \cup int(\gamma)$. Dado $\varepsilon > 0$ diremos que γ satisface ser *(α)-relativa a ε* si existe en $\gamma \cup int(\gamma)$ un punto z' tal que $|f(z) - f(z') - f'(z')(z - z')| \leq |z - z'|\varepsilon$ para todo $z \in \gamma$.

Lema 1 (de Goursat). *Sea $f(z)$ una función continua que admite derivada en todos los puntos de $\gamma \cup int(\gamma)$ donde γ es una curva cerrada simple. Consideremos, además, $\varepsilon > 0$ un número positivo. Entonces siempre es posible descomponer el área $int(\gamma)$ en regiones tales que el contorno de cada una de ellas satisfagan la condición (α) relativa a ε.*

Esta propiedad que establece el Lema 1 es la que deben cumplir las funciones para que sea válida la prueba de 1883. Puede verse que esta propiedad la cumplen las funciones $\mathbb{C}$-diferenciables. Además puede cambiarse en la condición (α) *para todo $z \in \gamma$* por *para cualquier $z \in \gamma \cup int(\gamma)$* y el lema sigue siendo válido (véase [14]). De este lema se sigue el siguiente resultado.

Corolario 1. *Sea γ una curva cerrada simple. Consideremos $f(z)$ una función diferenciable en $\gamma \cup int(\gamma)$. Entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe un conjunto finito $A = \{z_i\}$ de puntos de $\gamma \cup int(\gamma)$ tales que, para todo $z \in \gamma \cup int(\gamma)$, existe $z_r \in A$ que satisface*

$$|f(z) - f(z_r) - (z - z_r)f'(z_r)| \leq |z - z_r|\varepsilon.$$

Puede probarse este resultado sin probar el Lema 1 basándose únicamente en la compacidad de $\gamma \cup int(\gamma)$.

Definición 2. Sea $f(z)$ una función holomorfa en un dominio Ω. Diremos que $f(z)$ *es uniformemente diferenciable en* Ω si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para $z, z' \in \gamma \cup int(\gamma)$ con $|z - z'| < \delta$ se cumple

$$|f(z) - f(z') - f'(z)(z - z')| < \varepsilon|z' - z|.$$

El conjunto de funciones continuamente diferenciables está contenido en el de las funciones holomorfas con derivada continua. Esto nos lleva a pensar que el Lema 1 de Goursat ayuda a comprender el porqué de la continuidad de la derivada de toda función holomorfa, aunque sea de modo intuitivo.

A continuación veremos una prueba parecida a la de Goursat utilizando los teoremas anteriores. La diferencia de esta prueba con la de Goursat y Moore radica en que se utiliza como la curva el contorno de un rectángulo (en las pruebas originales la curva era el contorno de un triángulo). Para nuestro objetivo, demostraremos los lemas siguientes:

Lema 2. $\int_{\partial R} dz = 0$ *donde R es un rectángulo cerrado.*

Lema 3. $\int_{\partial R} z dz = 0$

Del Teorema 1, el resultado se sigue para funciones C^1. El objetivo es demostrar estos lemas sin utilizarlo. Sean $z_0, \ldots, z_n = z_0$ puntos distintos de ∂R con la propiedad

$$|z_j - z_{j-1}| \leq \delta, \quad j = 1, \ldots, n.$$

De la definición de la integral tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\partial R} dz &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} (z_j - z_{j-1}) = z_n - z_0 = 0 \\ \int_{\partial R} z dz &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} z_j(z_j - z_{j-1}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} z_{j-1}(z_j - z_{j-1}). \end{aligned}$$

Como los límites de una y otra suma son iguales, su media aritmética tendrá el mismo límite, es decir

$$\int_{\partial R} z dz = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} (z_j^2 - z_{j-1}^2) = \frac{1}{2}(z_n^2 - z_0^2) = 0.$$

Formulemos el teorema de Cauchy conocido también como el *Teorema de Cauchy-Goursat.*

Teorema 4. *Sea $f(z)$ una función holomorfa en Ω. Si el rectángulo cerrado R está contenido en Ω, entonces*

$$\int_{\partial R} f(z) dz = 0$$

Observemos que no podemos usar el Teorema 1 pues no sabemos que para $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ las derivadas parciales de u y v sean continuas. Dividamos el rectángulo R en cuatro rectángulos utilizando los puntos medios de los lados de R. Si

$$\left| \int_{\partial R} f(z)dz \right| = G$$

entonces alguno de los nuevos rectángulos, digamos R_1, cumple

$$\left| \int_{\partial R_1} f(z)dz \right| \geq \frac{G}{4}.$$

Ahora dividamos R_1 en cuatro rectángulos del mismo tamaño y llamémosle R_2 al que cumple la desigualdad

$$\left| \int_{\partial R_2} f(z)dz \right| \geq \frac{G}{4^2}.$$

Continuando el proceso, obtenemos una sucesión de rectángulos

$$R_1 \supset R_2 \supset \cdots$$

donde cada R_i tiene la mitad de perímetro del anterior R_{i-1} y que además cumple

$$\left| \int_{\partial R_n} f(z)dz \right| \geq \frac{G}{4^n}$$

Si k es el perímetro de ∂R, entonces $\frac{k}{2^n}$ es el perímetro de ∂R_n. Como la sucesión de rectángulos cerrados y anidados cumple que su diámetro tiende a cero, existe un único punto z_0 contenido en todos ellos. Además, como $f'(z_0)$ existe, la función

$$\phi(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0)$$

tiende a cero cuando z se aproxima a z_0. Para la función $f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \phi(z)(z - z_0)$ tenemos por los Lemas 2 y 3 que

$$\int_{\partial R_n} f(z)dz = \int_{\partial R_n} \phi(z)(z - z_0)dz$$

Como $\phi(z) \to 0$ cuando $z \to z_0$, si tomamos $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|z - z_0| < \delta$ implica que $|\phi(z)| < \varepsilon$, podemos determinar un entero

m suficientemente grande tal que $|\phi(z)| < \varepsilon$ para z en ∂R_m. Cuando z está sobre ∂R_m es claro que $|z - z_0|$ es menor que el perímetro de ∂R_m, entonces

$$\frac{G}{4^m} \leq \Big| \int_{\partial R_m} f(z)dz \Big| \leq \varepsilon \frac{k}{2^m} \frac{k}{2^m}.$$

Como ε es arbitraria se tiene que $G = 0$. Esto prueba el teorema.

Otra manera de demostrar el teorema de Cauchy es mediante el Teorema de Cauchy en su versión homotópica o el Teorema de deformación cuya redacción aparece en el trabajo de Cauchy como *Teorema Fundamental 2*. Esta versión necesita la siguiente definición.

Definición 3. Sean γ_1 y γ_2 dos curvas de $[0,1]$ en Ω. Decimos que son *homotópicas* si existe una función continua $H\colon [0,1] \times [0,1] \to \Omega$ tal que

1. $H(0,s) = \gamma_1(s)$, $H(1,s) = \gamma_2(s)$ para todo $s \in [0,1]$.
2. $H(t,0) = a$, $H(t,1) = b$ para todo $t \in [0,1]$ (o bien, 2'. $H(t,0) = H(t,1)$ para todo $t \in [0,1]$, para curvas cerradas)

La función H es llamada *homotopía*. La condición 2 indica que H fija los extremos y la 2' que H es una homotopía de curvas cerradas. También decimos que γ_1 y γ_2 son dos curvas homotópicas diferenciables si la función de homotopía H satisface que las derivadas parciales H_t, H_s, H_{ts} existen y son continuas en $[0,1] \times [0,1]$.

Con lo anterior se formula el siguiente resultado

Teorema 5. *Si γ_1 y γ_2 son curvas continuamente diferenciables homotópicamente diferenciables en Ω y $f(z)$ es $\mathbb{C}$-diferenciable entonces*

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

Una primera prueba utiliza que f' es continua en Ω. Consideremos

$$I = \int_{\partial([0,1]\times[0,1])} f dH = \int_{\partial([0,1]\times[0,1])} f(H(t,s))(H_t(t,s)dt + H_s(t,s)ds).$$

Por el teorema de Green

$$\int_{\partial([0,1]\times[0,1])} fH_s ds + fH_t dt = \iint_{[0,1]\times[0,1]} \Big(\frac{\partial f H_s}{\partial t} - \frac{\partial f H_t}{\partial s}\Big) dtds.$$

Como
$$\frac{\partial f H_s}{\partial t} = f' H_t H_s + f H_{st} = f' H_s H_t + f H_{ts} = \frac{\partial f H_t}{\partial s}$$
por tanto, $I = 0$. Usando 2 o 2' de la Definición 3 tenemos
$$I = \int_{\gamma_1} f(z)dz - \int_{\gamma_2} f(z)dz = 0.$$

La segunda prueba se basa en la idea de los rectángulos de la demostración del teorema de Cauchy-Goursat también con una homotopía diferenciable y usando la idea de Vyborny en [18].

Una prueba que no necesita que H sea una homotopía continuamente diferenciable se verá mas adelante y cuya formulación queda de la siguiente manera

Teorema 6. *Sea $f(z)$ una función holomorfa en Ω y consideremos γ_1 y γ_2 curvas cerradas (o con extremos fijos) en Ω que son homotópicas en Ω. Entonces*
$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

De este teorema de Cauchy se deduce la siguiente versión.

Teorema 7. *Sea $f(z)$ una función holomorfa en Ω. Consideremos γ una curva cerrada homotópica a un punto en Ω. Entonces*
$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

Si Ω es una región simplemente conexa, toda curva cerrada es homotópica a un punto, de aquí se deduce el teorema para dominios simplemente conexos que se verá en el Capítulo 3.

Mediante el teorema de la curva de Jordan, el teorema de Cauchy se puede enunciar de la siguiente manera.

Teorema 8. *Si $f(z)$ es holomorfa en una región Ω y $\gamma\colon I \to \Omega$ es una curva cerrada simple con el interior de γ en Ω, entonces*[9]
$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

[9] En este trabajo este teorema es llamada la Versión Homológica y puede verse en el Capítulo 4.

Otras formulaciones del teorema de Cauchy pueden verse en [7]. Cabe mencionar que el teorema de Cauchy sigue siendo válido si $f(z)$ es $\mathbb{C}$-diferenciable en los puntos de un simplemente conexo Ω excepto en un conjunto finito de puntos $\{z_i\}$ de Ω, siempre que $f(z)$ verifique para todos los puntos z_i que[10]

$$\lim_{z \to z_i} (z - z_i) f(z) = 0.$$

Dentro de las consecuencias importantes del teorema de Cauchy podemos mencionar el *Teorema del Residuo*, la *Fórmula Integral de Cauchy* y la *Fórmula Integral de Cauchy para derivadas*, entre otras (véase el Capítulo 6).

Por otra parte si $f(z_1, \ldots, z_n)$ es una función holomorfa en el polidisco cerrado $P = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_j - w_j| \leq r_j \quad \text{para todo } j = 1, \ldots, n\}$. Entonces si $(z_1, \ldots, z_n)$ es interior a P, se tiene

$$f(z_1, \ldots, z_n) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\gamma_1} \cdots \int_{\gamma_n} \prod_{i=1}^{n} \frac{f(t_1, \ldots, t_n)}{t_i - z_i} dt_1 \cdots dt_n$$

donde $\gamma_i = \{u_i \in \mathbb{C} : |u_i - w_i| = r_i\}$. Para esta parte puede consultarse [1],[17] y [22].

También el teorema de Cauchy tiene aplicaciones en el dominio real. Por ejemplo, permite calcular integrales impropias de variable real. Sugerimos consultar [19], [21] o [25].

En adelante trataremos las versiones del teorema de Cauchy que a nuestro juicio son las más importantes y generales. Las herramientas que utilizaremos son algunos resultados básicos de Geometría Algebraica, Topología Algebraica y Análisis Complejo cuyo origen se encuentra en la teoría de funciones de varias variables complejas. Para estos tópicos, se sugiere consultar [1].

[10] Esta condición equivale a que los puntos z_i son singularidades removibles.

Capítulo 2

Preliminares

En este capítulo daremos los resultados básicos para el desarrollo del trabajo. Aquí podremos encontrar lo que entenderemos por $\mathbb{C}$-diferenciabilidad así como condiciones equivalentes para que una función sea de este tipo. También daremos la definición de integración de una función a lo largo de una curva, sus propiedades y resultados clásicos de sobre integración. En esta parte se demuestra el *Teorema de Cauchy* para el disco.

2.1. Diferenciación

Sea f una función con valores complejos, definida en un abierto Ω de $\mathbb{C}$. Decimos que f es $\mathbb{C}$*-diferenciable en* a si existe el límite siguiente :

$$\lim_{z\to 0} \frac{f(z+a)-f(a)}{z}.$$

En tal caso denotaremos al límite como $f'(a)$ y lo llamaremos la derivada de f en a. Decimos que f es $\mathbb{C}$*-diferenciable* en Ω si f es $\mathbb{C}$-diferenciable en a para todo $a \in \Omega$. Si este es el caso la función de Ω en $\mathbb{C}$ que asocia a cada a el número $f'(a)$, es denotada por f' y se llama la derivada de f.

De aquí en adelante Ω será un *dominio*, es decir un conjunto abierto y conexo de $\mathbb{C}$, a menos que se diga algo más al respecto.

Sea f una función definida en Ω. Si f es $\mathbb{C}$-diferenciable en $a \in \Omega$, entonces existen las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(a)$ donde estas se definen por:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{f(a+ih)-f(a)}{h}.$$

Es claro que se cumplen las relaciones:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(a) = f'(a).$$

Para una función $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ para la cual sus primeras derivadas parciales existen en a, definimos:

$$\frac{\partial f}{\partial z}(a) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}(a) - i\frac{\partial f}{\partial y}(a)\Big)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}(a) + i\frac{\partial f}{\partial y}(a)\Big).$$

Notemos que cuando f es $\mathbb{C}$-diferenciable en $a \in \Omega$, se cumplen las relaciones $f'(a) = \frac{\partial f}{\partial z}(a)$ y $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) = 0$. Para cuando $f = u + iv$ donde u, v son sus funciones coordenadas que toman valores reales, tenemos que si f es $\mathbb{C}$-diferenciable en a entonces

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a) = \frac{\partial v}{\partial y}(a) \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(a) = -\frac{\partial v}{\partial x}(a).$$

Si f es una función con valores complejos tal que $f = u + iv$, con u, v funciones coordenadas, las ecuaciones siguientes son equivalentes y se les conoce como las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(a) &= -i\frac{\partial f}{\partial y}(a)\\
\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) &= 0\\
\frac{\partial u}{\partial x}(a) = \frac{\partial v}{\partial y}(a) &\;,\quad \frac{\partial u}{\partial y}(a) = -\frac{\partial v}{\partial x}(a)\\
\frac{\partial f}{\partial x}(a) &= \frac{\partial f}{\partial z}(a).
\end{aligned}$$

Como $\mathbb{C}$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y a la vez un $\mathbb{C}$-espacio vectorial, tenemos dos tipos de aplicaciones lineales de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$: las lineales sobre $\mathbb{R}$ y las lineales sobre $\mathbb{C}$. Toda aplicación $T\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ que es $\mathbb{C}$-lineal tiene la forma $T(z) = \lambda z$ con $\lambda \in \mathbb{C}$, ya que $T(z) = zT(1)$ por lo que tomamos $\lambda = T(1)$ (en este caso además es $\mathbb{R}$-lineal). La conjugación $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ con regla $g(z) = \overline{z}$ es una aplicación $\mathbb{R}$-lineal pero no $\mathbb{C}$-lineal como puede comprobarse fácilmente.

Para una aplicación $T\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ que es $\mathbb{R}$-lineal, se tiene que $T(az) = aT(z)$ para $a \in \mathbb{R}$, de modo que, si $z = x + iy$, entonces

$$\begin{aligned} T(z) &= T(x+iy) = xT(1) + yT(i) = \Big(\frac{z+\bar{z}}{2}\Big)T(1) + \Big(\frac{z-\bar{z}}{2i}\Big)T(i) \\ &= \Big(\frac{T(1)-iT(i)}{2}\Big)z + \Big(\frac{T(1)+iT(i)}{2}\Big)\bar{z}. \end{aligned}$$

Entonces si hacemos $\lambda = \left(\frac{T(1)-iT(i)}{2}\right)$ y $\mu = \left(\frac{T(1)+iT(i)}{2}\right)$, tenemos que

$$T(z) = \lambda z + \mu \bar{z}.$$

Recíprocamente una función de esta forma es $\mathbb{R}$-lineal. Luego una aplicación $T\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es $\mathbb{R}$-lineal si y sólo si es de la forma $T(z) = \lambda z + \mu\bar{z}$ siendo $\lambda := \frac{1}{2}(T(1) - iT(i))$, $\mu := \frac{1}{2}(T(1) + iT(i))$. Una aplicación $\mathbb{R}$-lineal $T\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $T(z) = \lambda z + \mu\bar{z}$ es $\mathbb{C}$-lineal, cuando $\mu = 0$ o equivalentemente, cuando $T(i) = iT(1)$.

Si $\mathbb{C}$ es identificado con $\mathbb{R}^2$ mediante $z = x + iy \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, entonces toda matriz real de 2×2, digamos $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, induce una aplicación de multiplicación por la derecha $T\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+cy \\ bx+dy \end{pmatrix}$$

que es $\mathbb{R}$-lineal.

Esta aplicación satisface $T(1) = a + ib$ y $T(i) = c + id$. Luego la matriz real A induce una aplicación $\mathbb{C}$-lineal cuando se tenga que $T(i) = iT(1)$, lo cual es equivalente a que $c + id = -b + ia$ y por tanto $c = -b$ y $d = a$. Es decir, la matriz deberá ser de la forma $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ y $T(z) = (a + ib)z$. Puede verse fácilmente que la recíproca también es cierta.

Consideremos $\mu\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$ definida por la regla $\mu(x+iy) = (x,y)$, con $x, y \in \mathbb{R}$. La aplicación μ es un isomorfismo de $\mathbb{R}$-espacios vectoriales, con inversa $\mu^{-1}(x,y) = x+iy$. Sean $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ con $f = u+iv$ donde u, v son funciones coordenadas y $a \in \Omega$. Supongamos que f tiene primeras derivadas parciales en a. Sea $d(u,v)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la función inducida por la matriz jacobiana de f, esto es la aplicación $\mathbb{R}$-lineal definida por

$$\begin{aligned}
d(u,v)(\xi,\eta) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(a) & \frac{\partial u}{\partial y}(a) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(a) & \frac{\partial v}{\partial y}(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \\
&= \Big(\frac{\partial u}{\partial x}(a)\cdot\xi + \frac{\partial u}{\partial y}(a)\cdot\eta\,,\ \frac{\partial v}{\partial x}(a)\cdot\xi + \frac{\partial v}{\partial y}(a)\cdot\eta\Big).
\end{aligned}$$

Finalmente, definimos la aplicación $\mathbb{R}$-lineal $df_a\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mediante

$$df_a = \mu^{-1} \circ d(u,v) \circ \mu,$$

podemos ahora observar que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{C} & \xrightarrow{df_a} & \mathbb{C} \\
\mu\downarrow & & \downarrow\mu \\
\mathbb{R}^2 & \xrightarrow{d(u,v)} & \mathbb{R}^2
\end{array}$$

Por tanto tenemos que para $h = \xi + i\eta \in \mathbb{C}$, la aplicación $df_a\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ está dada por

$$\begin{aligned}
df_a(h) &= \mu^{-1} \circ d(u,v) \circ \mu(h) \\
&= \mu^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(a)\cdot\xi + \frac{\partial u}{\partial y}(a)\cdot\eta \\ \frac{\partial v}{\partial x}(a)\cdot\xi + \frac{\partial v}{\partial y}(a)\cdot\eta \end{pmatrix} \\
&= \Big(\frac{\partial u}{\partial x}(a)\cdot\xi + \frac{\partial u}{\partial y}(a)\cdot\eta\Big) + i\Big(\frac{\partial v}{\partial x}(a)\cdot\xi + \frac{\partial v}{\partial y}(a)\cdot\eta\Big) \\
&= \Big(\frac{\partial u}{\partial x}(a) + i\frac{\partial v}{\partial x}(a)\Big)\xi + \Big(\frac{\partial v}{\partial x}(a) + i\frac{\partial v}{\partial y}(a)\Big)\eta \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(a)\cdot\xi + \frac{\partial f}{\partial y}(a)\cdot\eta \\
&= \Big(\frac{\partial f}{\partial z}(a) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a)\Big)\xi + (-i)\Big(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) - \frac{\partial f}{\partial z}(a)\Big)\eta \\
&= \frac{\partial f}{\partial z}(a)\cdot(\xi + i\eta) + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a)\cdot(\xi - i\eta) \\
&= \frac{\partial f}{\partial z}(a)\cdot h + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a)\cdot\bar{h}
\end{aligned}$$

Consecuentemente $df_a : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es $\mathbb{C}$-lineal, si y sólo si, $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) = 0$ y en este caso, $df_a(h) = \frac{\partial f}{\partial z}(a)h$ para todo $h \in \mathbb{C}$.

Las funciones $\mathbb{C}$-diferenciables forman un $\mathbb{C}$-álgebra[1] y se tiene que, si U, V son subconjuntos abiertos de $\mathbb{C}$, $f: U \to \mathbb{C}$ y $g: V \to \mathbb{C}$ son $\mathbb{C}$-diferenciables tal que $f(U) \subset V$, entonces, $g \circ f : U \to \mathbb{C}$ es también $\mathbb{C}$-diferenciable sobre U. Además, si $a \in U$, tenemos $(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$.

Un resultado que garantiza que una función sea $\mathbb{C}$-diferenciable en Ω es el siguiente: Una función $f: \Omega \to \mathbb{C}$ donde $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ existen, son continuas y además, $\frac{\partial f}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial y}$ en Ω, es $\mathbb{C}$-diferenciable en Ω (véase [1] para una demostración).

Un resultado que generaliza el anterior, y que asegura que la continuidad de las parciales no es un hecho que se debe tener de antemano, es el Teorema de Looman-Menchoff: *Sea f continua en Ω. Si $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ existen en cada punto de Ω y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann $\frac{\partial f}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial y}$, entonces f es $\mathbb{C}$-diferenciable en Ω* (para la demostración de este resultado puede consultarse [1]).

Sea f una función de valores complejos definida en Ω. Decimos que f es ***holomorfa** sobre* Ω si para todo $a \in \Omega$, existe una vecindad U de a, $U \subset \Omega$, y existe una sucesión $\{a_n\}_{n \geq 0}$ de números complejos tales que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n \tag{2.1}$$

converge a $f(z)$ para cada $z \in U$.

Dada $f: \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa en Ω, no es difícil ver que ésta es $\mathbb{C}$-diferenciable alrededor de cada $a \in \Omega$ (en la vecindad de U donde es válido el desarrollo (2.1)) y con derivada en tal vecindad de a igual a

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-a)^{n-1}, \tag{2.2}$$

por lo que una función holomorfa es infinitamente diferenciable. Además, los

[1] Forman un $\mathbb{C}$-espacio vectorial con la suma de funciones y producto por escalares complejos y un anillo conmutativo con la suma y producto de funciones.

coeficientes a_n los obtenemos al evaluar en a la función f y sus respectivas derivadas de la siguiente manera:

$$a_0 = f(a),\ a_1 = f'(a),\ a_2 = \tfrac{f''(a)}{2!},\ \text{y en general},\ a_n = \tfrac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Las funciones de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ son por lo anterior $\mathbb{C}$-diferenciables en el conjunto donde la serie es convergente.

Se puede mostrar que una *serie de potencias* se esta forma es convergente en un disco con centro en a y radio R donde $R^{-1} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, conocido como el *radio de convergencia* de la serie de potencias.

A la expresión 2.1 se le conoce como el *desarrollo en serie de Taylor* de la función f alrededor de a.

2.2. Integración

Sea X un espacio topológico. Una *curva* en X es una aplicación continua $\gamma\colon [a,b] \to X$ donde $[a,b] = \{t \in \mathbb{R} : a \leq t \leq b\}$. Los puntos $\gamma(a)$ y $\gamma(b)$ son los extremos de la curva, $\gamma(a)$ es el punto inicial y $\gamma(b)$ es el punto final de γ. También decimos que γ va de $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$. Una curva $\gamma\colon [a,b] \to X$, es cerrada si $\gamma(a) = \gamma(b)$. Denotaremos por $Ima(\gamma) = \{\gamma(t) : t \in [a,b]\}$, la imagen, traza o recorrido de la curva.

Dadas $\gamma_i\colon [a_i,b_i] \to X$ con $i = 1,2$, dos curvas en un espacio topológico X, decimos que γ_2 es una *reparametrización* de γ_1 si existe una función continua estrictamente creciente $\phi\colon [a_2,b_2] \to [a_1,b_1]$ y suprayectiva, tal que $\gamma_1 \circ \phi = \gamma_2$. Para este caso, $Ima(\gamma_1) = Ima(\gamma_2)$.

De acuerdo con lo anterior, al considerar $\phi\colon [0,1] \to [a,b]$ con $\phi(t) = (1-t)a + tb$ y una curva $\hat{\gamma}\colon [a,b] \to X$, podemos construir la curva $\gamma = \hat{\gamma} \circ \phi$ que es una reparametrización de la curva original, por lo que podemos considerar que todas las curvas están parametrizadas en el intervalo $[0,1]$.

La siguiente definición indica como unir tramos de curvas.

Sean $\gamma_i\colon [0,1] \to X$ con $i = 1,2$ curvas en X de tal manera que $\gamma_1(1) =$

$\gamma_2(0)$. Definimos su *producto* $\gamma_1 \cdot \gamma_2$ como la curva $\gamma\colon [0,1] \to X$ dada por:

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \gamma_2(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

Esta nueva curva es continua, está bien definida y además, $Ima(\gamma) = Ima(\gamma_1) \cup Ima(\gamma_2)$.

Definimos la curva $\gamma^{-1}\colon [0,1] \to X$, llamada la *inversa* de γ, como $\gamma^{-1}(t) = \gamma(1-t)$. Notemos que γ^{-1} es la curva γ recorrida en sentido opuesto y que $Ima(\gamma^{-1}) = Ima(\gamma)$.

Diremos que la curva $\gamma\colon [0,1] \to \Omega$ es *(continuamente) diferenciable a trozos* si existe una partición $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_k = 1$ del intervalo [0,1] tal que $\gamma|_{(a_j, a_{j+1})}$ es (continuamente) diferenciable para cada $j = 0, 1, \ldots, k-1$. Observemos que si $\gamma\colon [0,1] \to \Omega$ es diferenciable a trozos en Ω, entonces γ^{-1} también, y si γ_1, γ_2 son diferenciables a trozos en Ω, entonces $\gamma_1 \cdot \gamma_2$ también lo es.

Ahora consideremos $\gamma\colon [0,1] \to \Omega$ una curva diferenciable a trozos en Ω y sea f una función con valores complejos definida sobre Ω. Definimos la *integral de f a lo largo de γ* (escrita como: $\int_\gamma f dz = \int_\gamma f(z)dz$) mediante la fórmula

$$\int_\gamma f dz = \int_0^1 f(\gamma(t))(\gamma'(t))dt$$

cuando la integral de la derecha existe.

No es difícil ver que si consideramos γ_1 y γ_2 curvas diferenciables a trozos en Ω de tal manera que γ_2 es una reparametrización de γ_1, entonces

$$\int_{\gamma_2} f dz = \int_{\gamma_1} f dz.$$

En lo siguiente entenderemos como curva a una curva diferenciable a trozos, a menos que se especifique otra cosa.

Sea $\gamma\colon [0,1] \to \Omega$ una curva en Ω. La *longitud* de γ es

$$L(\gamma) = \int_0^1 |\gamma'(t)| dt.$$

Sea $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ continua y consideremos $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$ curvas en Ω de manera tal que la curva $\gamma_1 \cdot \gamma_2$ este definida, entonces:

$$\int_{\gamma_1 \cdot \gamma_2} f dz = \int_{\gamma_1} f dz + \int_{\gamma_2} f dz.$$

y

$$\int_{\gamma^{-1}} f dz = -\int_{\gamma} f dz.$$

Además, $L(\gamma_1 \cdot \gamma_2) = L(\gamma_1) + L(\gamma_2)$ y $L(\gamma^{-1}) = L(\gamma)$ (para la demostración de estos resultados puede consultarse [1]).

Un resultado importante para la integración de funciones complejas es el siguiente teorema de análisis real, que se puede consultar en [33].

2.1 Teorema (de Green). *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio con frontera $\partial\Omega$ suave y orientada positivamente. Supongamos que u y v son funciones reales de clase C^1 en $\overline{\Omega}$. Entonces*[2]

$$\int_{\partial\Omega} u dx + v dy = \int\int_{\Omega} (v_x - u_y) dx dy.$$

Ahora veremos como se aplica el teorema de Green al estudio de funciones de variable compleja. Si $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ es tal que sus funciones componentes $u, v\colon \Omega \to \mathbb{R}$ son de clase C^1 en $\overline{\Omega}$ y $\partial\Omega$ es suave y orientada positivamente, entonces, dado que:

$$f dz = (u + iv)(dx + idy) = udx - vdy + i(vdx + udy),$$

se tiene

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} f dz &= \int_{\partial\Omega} udx - vdy + i\int_{\partial\Omega} vdx + udy \\
&= -\int\int_{\Omega} (v_x + u_y) dx dy + i\int\int_{\Omega} (u_x - v_y) dx dy \\
&= i\int\int_{\Omega} \big((u_x - v_y) + i(v_x + u_y)\big) dx dy \\
&= 2i\int\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dx dy.
\end{aligned}$$

[2]Como siempre v_x, es la parcial de la función v con respecto a x, también la denotaremos como $\frac{\partial v}{\partial x}$. Análogamente v_y, u_x y u_y representan las derivadas parciales correspondientes.

Si $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ es una función $\mathbb{C}$-diferenciable con funciones componentes de clase C^1 en una vecindad en $\overline{\Omega}$, entonces de la identidad

$$\int_{\partial\Omega} f dz = 2i \int\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dx dy,$$

podemos concluir el Teorema de Cauchy que asegura

$$\int_{\partial\Omega} f dz = 0.$$

En particular tenemos una prueba inmediata del *Teorema de Cauchy-Goursat.*

2.2 Teorema (Cauchy-Goursat). *Si $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ es $\mathbb{C}$-diferenciable con funciones componentes de clase C^1 y si el rectángulo cerrado $R = [a,b] \times [c,d] = \{z \in \mathbb{C} : a \leq \Re e\ z \leq b,\ c \leq \Im m\ z \leq d\}$ está contenido en Ω, entonces*

$$\int_{\partial R} f dz = 0.$$

Y no es difícil tener la siguiente versión de la fórmula de Cauchy que permite expresar a f puntualmente en términos de una integral.

Sean Ω un abierto de $\mathbb{C}$, f una función $\mathbb{C}$-diferenciable en Ω con funciones componentes de clase C^1 y $R = [a,b] \times [c,d]$ un rectángulo cerrado contenido en Ω. Entonces, para cualquier $w \in int(R) = \{z \in \mathbb{C} : a < \Re e\ z < b,\ c < \Im m\ z < d\}$ se cumple la igualdad

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} \frac{f(z)}{z - w} dz.$$

Otro teorema importante que se debe a Morera es el siguiente:

2.3 Teorema (de Morera). *Sea $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ una función continua. Supongamos que para todo rectángulo cerrado $R \subset \Omega$ se tiene $\int_{\partial R} f dz = 0$, entonces f es $\mathbb{C}$-diferenciable.*

2.4 Corolario (de Morera). *Si f es continua en Ω y $\mathbb{C}$-diferenciable en $\Omega \setminus \{a\}$ para algún $a \in \Omega$, entonces f es $\mathbb{C}$-diferenciable en Ω*

Véase [19] para los detalles de estos resultados.

2.1 Definición. Una *primitiva de $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ sobre Ω* es una función $F\colon \Omega \to \mathbb{C}$ cuya derivada en Ω es f, es decir $F' = f$ en Ω.

A continuación presentamos algunos resultados necesarios para demostrar el Teorema de existencia de primitiva en el disco y el teorema de Cauchy en el disco.

2.5 Proposición. *Sea $\phi\colon [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{C}$ una función continua y definimos $g\colon [c,d] \to \mathbb{C}$ como*

$$g(s) = \int_a^b \phi(t,s)dt.$$

Entonces g es continua. Mas aún, si $\frac{\partial \phi}{\partial s}$ existe y es una función continua sobre $[a,b] \times [c,d]$, entonces g es continuamente diferenciable y se tiene

$$g'(s) = \int_a^b \frac{\partial \phi}{\partial s}(t,s)dt. \tag{2.3}$$

Demostración. Primero veremos que g es continua en $s_0 \in [a,b]$. Como la función ϕ es uniformemente continua, se tiene que para $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|s - s_0| < \delta$, entonces $|\phi(t,s) - \phi(t,s_0)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ para $t \in [a,b]$. Entonces

$$\begin{aligned} |g(s) - g(s_0)| &= \left| \int_a^b (\phi(t,s) - \phi(t,s_0))dt \right| \\ &\leq \int_a^b |\phi(t,s) - \phi(t,s_0)|dt \\ &< \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} dt = \varepsilon \end{aligned}$$

y por tanto la función $g\colon [c,d] \to \mathbb{C}$ es continua en s_0 y entonces en $[c,d]$. Sea s_0 un punto fijo en $[c,d]$ y sea $\varepsilon > 0$. Denotemos por φ a $\frac{\partial \phi}{\partial s}$. Como

φ es unifomemente continua en $[a,b] \times [c,d]$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $|\varphi(u,v) - \varphi(t,s)| < \varepsilon$ cuando $(u-t)^2 + (v-s)^2 < \delta^2$. En particular

$$|\varphi(t,s) - \varphi(t,s_0)| < \varepsilon \tag{2.4}$$

si $|s - s_0| < \delta$ y $t \in [a,b]$ es arbitrario. Así, tenemos

$$\left| \int_{s_0}^{s} (\varphi(t,\tau) - \varphi(t,s_0))d\tau \right| \leq \varepsilon |s - s_0|. \tag{2.5}$$

Para cada $t \in [a,b]$, la función $\Phi\colon [c,d] \to \mathbb{C}$ definida mediante $\Phi(s) = \phi(t,s) - s\varphi(t,s_0)$ es una primitiva de $\varphi(t,s) - \varphi(t,s_0)$. Por el Teorema fundamental del Cálculo y la desigualdad 2.5, se tiene

$$|\Phi(s) - \Phi(s_0)| = \left| \int_{s_0}^{s} \Phi'(\tau)d\tau \right| = \left| \int_{s_0}^{s} (\varphi(t,\tau) - \varphi(t,s_0))d\tau \right| \leq \varepsilon |s - s_0| \tag{2.6}$$

cuando $|s - s_0| < \delta$. Pero de la definición de g y de la desigualdad 2.6 tenemos

$$\begin{aligned}
\left| \frac{g(s) - g(s_0)}{s - s_0} \right. &- \left. \int_a^b \varphi(t,s_0)dt \right| = \\
&= \left| \frac{\int_a^b \phi(t,s)dt - \int_a^b \phi(t,s_0)dt}{s - s_0} - \int_a^b \varphi(t,s_0)dt \right| \\
&= \left| \frac{\int_a^b [\phi(t,s) - \phi(t,s_0) - (s - s_0)\varphi(t,s_0)]dt}{s - s_0} \right| \\
&\leq \frac{1}{|s - s_0|} \int_a^b |\phi(t,s) - \phi(t,s_0) - (s - s_0)\varphi(t,s_0)|dt \\
&\leq \frac{1}{|s - s_0|} \int_a^b |\Phi(s) - \Phi(s_0)|dt \\
&\leq \varepsilon(b - a)
\end{aligned}$$

si $0 < |s - s_0| < \delta$. Por tanto g es diferenciable y g' está dada por la fórmula 2.3. □

2.6 Proposición. *Sea $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ una función $\mathbb{C}$-diferenciable y supongamos que $\overline{D}(a,r) \subset \Omega$. Si escribimos $\gamma(t) = a + re^{it}$ para $t \in [0, 2\pi]$, entonces*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Demostración. Si consideramos el conjunto $G_1 = \{\frac{1}{r}(z-a) : z \in \Omega\}$ y a la función $g(z) = f(a+rz)$ definida en G_1 vemos que sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $a = 0$ y $r = 1$, y por tanto tenemos que $\overline{D}(0,1) \subset \Omega$.

Fijemos z condicionada a $|z| < 1$. Afirmamos que

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(e^{it})e^{it}}{e^{it}-z}dt; \end{aligned}$$

o equivalentemente, que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{it})e^{it}}{e^{it}-z}dt - 2\pi f(z) \\ &= \int_0^{2\pi} \Big(\frac{f(e^{it})e^{it}}{e^{it}-z} - f(z)\Big)dt \end{aligned}$$

Consideremos la función

$$\phi(t,s) = \frac{f(z+s(e^{it}-z))e^{it}}{e^{it}-z} - f(z)$$

definida para $s \in [0,1]$ y $t \in [0,2\pi]$. Como $|z+s(e^{it}-z)| = |z(1-s)+se^{it}| \leq 1$, ϕ está bien definida y es continuamente diferenciable. Sea

$$g(s) = \int_0^{2\pi} \phi(t,s)dt.$$

Esta función g tiene derivada continua. Tenemos que

$$\begin{aligned} g(0) &= \int_0^{2\pi} \phi(t,0)dt \\ &= \int_0^{2\pi} \Big(\frac{f(z)e^{it}}{e^{it}-z} - f(z)\Big)dt \\ &= f(z)\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}}{e^{it}-z}dt - 2\pi f(z) \\ &= 0 \end{aligned}$$

debido a que $\int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}-z}dt = 2\pi i$. Demostraremos que g es constante. Derivando tenemos

$$g'(s) = \int_0^{2\pi} e^{it}f'(z+s(e^{it}-z))dt.$$

Para $0 < s \leq 1$ se tiene que $\Phi(t) = is^{-1}f(z + s(e^{it} - z))$ es una primitiva de $\phi_2(t) = e^{it}f'(z + s(e^{it} - z))$. Por tanto $g'(s) = \Phi(2\pi) - \Phi(0) = 0$ para $0 < s \leq 1$. Entonces g' es continua, $g' = 0$ y por tanto g es constante. Ya que $g(0) = 0$, se sigue la afirmación. □

2.7 Teorema. *Si $f \colon D(a,R) \to \mathbb{C}$ es una función $\mathbb{C}$-diferenciable, entonces $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ para $|z-a| < R$.*

Demostración. Sea $0 \leq r \leq R$ tal que $\overline{D}(a,r) \subset D(a,R)$. Si $\gamma(t) = a + re^{it}$ para $t \in [0, 2\pi]$, entonces por la proposición anterior

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw, \quad (\text{para } |z-a| < r) \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-a}\frac{1}{1-\frac{z-a}{w-a}}dw \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n dw, \quad (\text{ya que } |z-a| < r = |w-a|). \end{aligned}$$

Pero como $|z-a| < r$ y w esta sobre $Ima(\gamma)$,

$$\frac{|f(w)||z-a|^n}{|w-a|^{n+1}} \leq \frac{M}{r}\left(\frac{|z-a|}{r}\right)^n$$

donde $M = \text{máx}\{|f(w)| : |w-a| = r\}$. Como $\frac{|z-a|}{r} < 1$, por el criterio M de Weierstrass[3], tenemos que $\sum f(w)\frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}$ converge uniformemente para w sobre $Ima(\gamma)$ y por tanto podemos intercambiar la suma con la integral[4]

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw\right](z-a)^n$$

[3]El *Criterio M de Weierstrass* dice que dada una sucesión de funciónes $\{f_n\}$ acotadas en D que satisfacen que para cada n existe una constante M_n tal que $|f_n(x)| < M_n$ para toda $x \in D$, entonces si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge, la serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente en D. Esto puede consultarse en [7] o [19].

[4]Esto se puede garantizar mediante el siguiente resultado. *Sea γ una curva rectificable en $\mathbb{C}$ y supongamos que f_n y f son funciones continuas en $Ima(\gamma)$. Si $\text{lím}_{n\to\infty} f_n = f$ de manera uniforme en $Ima(\gamma)$, entonces*

$$\int_\gamma f = \lim_{n\to\infty}\int_\gamma f_n.$$

Para mas detalles se sugiere al lector consultar [7].

Tomemos

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw$$

entonces a_n es independiente de z y por tanto la serie converge en $|z-a| < r$. El valor de a_n es independiente de γ, es decir, no depende de r ya que $a_n = \frac{f^n(a)}{n!}$ (véase la página 30). Por tanto

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$$

para $|z-a| < r$. En virtud de que r es arbitrario, se tiene que esta representación es válida para $|z-a| < R$. □

Es claro con la ayuda de este teorema que si una función $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ es $\mathbb{C}$-diferenciable en el abierto Ω, entonces es holomorfa en Ω y como ya hemos resaltado que holomorfa implica $\mathbb{C}$-diferenciable, tenemos que estos dos conceptos son equivalentes. De ahora en adelante nos referiremos como holomorfa en Ω.

2.2 Definición. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto. Denotamos $\mathcal{H}(\Omega)$ a la $\mathbb{C}$-álgebra de funciones holomorfas sobre Ω.

2.8 Lema. *Si la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ tiene radio de convergencia R y $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|} = 1$, entonces la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n (z-a)^n$$

tiene radio de convergencia R.

Demostración. Como $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|} = 1$, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ se tiene

$$1-\varepsilon < \sqrt[n]{|b_n|} < 1+\varepsilon.$$

Esto implica que

$$(1-\varepsilon)\sqrt[n]{|a_n|} < \sqrt[n]{|a_n b_n|} < (1+\varepsilon)\sqrt[n]{|a_n|}.$$

Por tanto tenemos:

$$(1-\varepsilon)\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n b_n|} \leq (1+\varepsilon)\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Como ε es arbitrario, se tiene

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n b_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

lo que prueba el lema. $\square$

2.9 Proposición (Existencia de una primitiva en el disco). *Si f es una función holomorfa en $D(a, R)$, entonces f tiene una primitiva en $D(a, R)$.*

Demostración. Por el Teorema 2.7 se tiene que $f(z) = \sum a_n(z-a)^n$ para $|z-a| < R$. Sea

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{a_n}{n+1}\Big)(z-a)^{n+1}.$$

Como el $\lim_{n\to\infty}(n+1)^{\frac{1}{n}} = 1$, por el Lema 2.8 se tiene que esta serie de potencias tiene el mismo radio de convergencia de $\sum a_n(z-a)^n$. Entonces, F está definida en $D(a, R)$. Mas aún, $F'(z) = f(z)$ para $|z-a| < R$ (véase la página 30). $\square$

2.10 Teorema (de Cauchy para el disco). *Sean $f\colon D(a, R) \to \mathbb{C}$ una función holomorfa y $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ una curva cerrada diferenciable a trozos contenida en $D(a, R)$. Entonces*

$$\int_\gamma f dz = 0$$

Demostración. Por la Proposición 2.9, existe una función $F \in \mathcal{H}(D(a, R))$ que es primitiva de f. Si γ es una curva cerrada diferenciable a trozos, entonces por la definición de $\int_\gamma f dz$ (véase la página 31), se tiene

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f dz &= \int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\
&= \int_0^1 F'(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\
&= \int_0^1 (F\circ\gamma)'(t)dt \\
&= F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)).
\end{aligned}$$

Como la curva γ es cerrada, se tiene que $\gamma(0) = \gamma(1)$ y por tanto

$$\int_\gamma f dz = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)) = 0$$

lo que prueba el Teorema. □

Ahora, enunciamos sin demostración otros teoremas del Análisis Complejo.

2.11 Teorema (de continuación analítica). *1. Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Si $U \subset \Omega$ es un abierto no vacío tal que $f|_U \equiv 0$, entonces $f \equiv 0$ sobre Ω.*

2. Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio y $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$. Si el conjunto $\{z \in \Omega : f(z) = g(z)\}$ tiene un punto de acumulación en Ω, entonces $f \equiv g$.

2.12 Teorema (del mapeo abierto). *Si $f \colon \Omega \to \mathbb{C}$ es una función holomorfa no constante, entonces f es una aplicación abierta. Es decir, para cualquier $U \subset \Omega$ abierto se tiene que $f(U)$ es abierto en $\mathbb{C}$.*

Un resultado que también emplearemos es el que tiene que ver con *desarrollos de Laurent* y que mencionamos a continuación.

2.13 Teorema (El desarrollo de Laurent). *Sean $0 \leq r_1 \leq r_2 \leq \infty$ y $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z| < r_2\}$. Para cualquier $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ existe una única familia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de números complejos tales que:*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \quad \text{para } z \in \Omega.$$

La serie anterior converge uniformemente y absolutamente en cualquier subconjunto compacto de Ω.

En particular tenemos que si $a \in \Omega$, $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$ y si $r > 0$ es tal que $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - a| < r\} \subset \Omega$, entonces f tiene un desarrollo de la forma,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n \quad 0 < |z - a| < r$$

conocido como *desarrollo de Laurent* de f en a. A la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ se le conoce como la *parte regular de f* en a y a la serie $\sum_{-\infty}^{-1} a_n(z-a)^n$ como la *parte singular* o *principal de f* en a.

Capítulo 3

Versión Homotópica del Teorema de Cauchy

En este capítulo lo iniciamos definiendo y mostrando algunos resultados referentes a levantamientos y aplicaciones cubrientes. También veremos la construcción de gérmenes de funciones y la gavilla de funciones holomorfas. Todo esto será utilizado en la demostración de la versión homotópica del teorema de Cauchy.

3.1 Definición. Sea X un espacio topológico de Hausdorff. Diremos que X es una *variedad n-dimensional* si para cada $a \in X$, existe una U vecindad abierta de a que es homeomorfa a un abierto de $\mathbb{R}^n$. Si $\phi\colon U \to \Omega$ es el homeomorfismo, donde Ω es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, entonces la pareja (U, ϕ) es llamada una *carta*. Al conjunto de cartas, $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in \mathcal{I}}$ tal que $X = \cup_{i \in \mathcal{I}} U_i$ donde $\mathcal{I}$ es un conjunto de índices, se le llama un *atlas* para X.

3.2 Definición. Sean $X, \tilde{X}$ variedades n-dimensionales y $p\colon \tilde{X} \to X$ un homeomorfismo local[1]. Sean Y un espacio topológico y $f\colon Y \to X$ una aplicación continua. Un *levantamiento* de f, es una aplicación continua $\tilde{f}\colon Y \to \tilde{X}$ tal que $p \circ \tilde{f} = f$.

$$\begin{array}{ccc} & & \tilde{X} \\ & \overset{\tilde{f}}{\nearrow} & \downarrow p \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

Si la aplicación $\tilde{f}$ existe, diremos que f puede ser levantada.

[1] $p\colon \tilde{X} \to X$ es un homeomorfismo local si para cada $x \in \tilde{X}$, existen abiertos $U \in \tilde{X}$ y $V \subset X$ tales que $x \in U$ y $p|_U^V\colon U \to V$ es homeomorfismo.

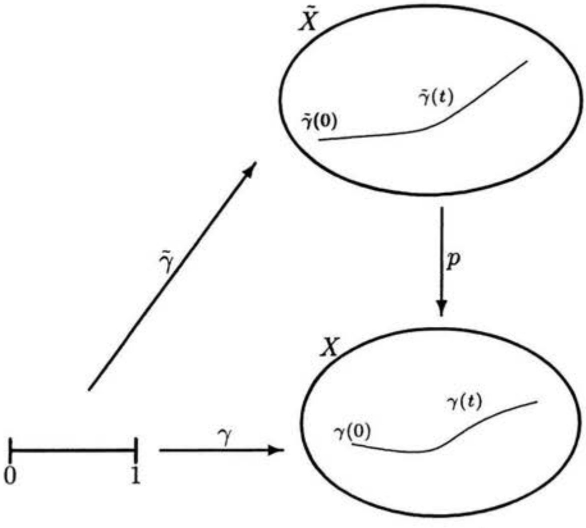


Figura 3.1: Levantamiento de una curva

3.1 Ejemplo. El levantamiento puede no existir. Consideremos $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ definida por $p(z) = e^{2\pi i t}$ y $f\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ la función identidad. Supongamos que existe un levantamiento $\tilde{f}\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ de f con respecto de p. Entonces se tendrá que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ \mathbb{S}^1 \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"] & \mathbb{S}^1 \end{tikzcd}$$

Por lo tanto el diagrama induce el siguiente diagrama de grupos fundamentales, también conmutativo,

$$\begin{tikzcd} & \pi_1(\mathbb{R}) \arrow[d, "p_*"] \\ \pi_1(\mathbb{S}^1) \arrow[ur, "\tilde{f}_*"] \arrow[r, "f_*"] & \pi_1(\mathbb{S}^1). \end{tikzcd}$$

Pero como $\pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$, $\pi_1(\mathbb{R}) = \{e\}$, $f_*(a) = a$ para todo $a \in \mathbb{Z}$ y $p_*(e) = a_0$ para algún $a_0 \in \mathbb{Z}$, se tiene que $a = f_*(a) = (p_* \circ \tilde{f}_*)(a) = p_*(e) = a_0$, lo cual es una contradicción. Por tanto el levantamiento no existe. Para mas detalles, puede consultarse [31].

3.2 Ejemplo. El levantamiento generalmente no es único. Si consideramos la función exponencial $exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y las curvas $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}^*$ donde $\gamma(t) = e^{2\pi it}$ para cualquier $t \in [0,1]$ y $\tilde{\gamma}\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ con $\tilde{\gamma}(t) = 2\pi i(t+k)$ donde $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ son continuas y además $(exp) \circ \tilde{\gamma} = \gamma$. Por lo tanto $\tilde{\gamma}$ es un levantamiento de γ con respecto al homeomorfismo local exp y como $k \in \mathbb{Z}$ es arbitraria tenemos varios levantamientos de la curva γ.

3.1 Lema. *Sean $p\colon \tilde{X} \to X$ homeomorfismo local, Y un espacio conexo Hausdorff, $f\colon Y \to X$ una aplicación continua y supongamos que f_1 y f_2 son levantamientos de f. Entonces, si existe un punto $y_0 \in Y$ tal que $f_1(y_0) = f_2(y_0)$, se tiene que $f_1 = f_2$ en Y.*

Demostración. Sea $E = \{y \in Y : f_1(y) = f_2(y)\}$, tenemos que $y_0 \in E$ y por tanto este conjunto es no vacío. Afirmamos que E es cerrado. Para esto, probaremos que $Y \setminus E$ es abierto. Para cualquier $x \in Y \setminus E$ se tiene que $f_1(x) \neq f_2(x)$, entonces existen vecindades $V_{f_1(x)}$ y $V_{f_2(x)}$ de $f_1(x)$ y $f_2(x)$ respectivamente tales que $V_{f_1(x)} \cap V_{f_2(x)} = \emptyset$. Consideremos $W = f_1^{-1}(V_{f_1(x)}) \cap f_2^{-1}(V_{f_2(x)})$, observemos que W es no vacío pues $x \in W$, además, W es abierto por ser intersección finita de abiertos. Sea $y \in W$, entonces $f_1(y) \in V_{f_1(x)}$ y $f_2(y) \in V_{f_2(x)}$. Esto implica que $f_1(y) \neq f_2(y)$. Por tanto $W \subset Y \setminus E$ y $Y \setminus E$ es abierto, lo cual nos lleva a que el conjunto E es cerrado. Ahora veremos que E es abierto. Sea $y \in E$ y $\tilde{a} = f_1(y) = f_2(y)$. Por hipótesis existe una $\tilde{U}$ vecindad de $\tilde{a}$ tal que $p(\tilde{U}) = U$ abierto y $p|_{\tilde{U}}$ es un homeomorfismo. Como f_1 y f_2 son continuas, existe V vecindad de y tal que $f_i(V) \subset \tilde{U}$ y $p(f_1(v)) = f(v) = p(f_2(v))$. Ya que $p|_{\tilde{U}}$ es inyectiva sucede que $f_1(v) = f_2(v)$, luego $V \subset E$ y entonces E es abierto. Como Y es conexo y E es distinto del vacío, abierto y cerrado se tiene que $E = Y$. $\square$

3.3 Definición. Sean $X, \tilde{X}$ variedades y $p\colon \tilde{X} \to X$ una aplicación continua. Decimos que p es una *aplicación cubriente* si para cada $a \in X$ existe una vecindad U de a con las propiedades:

1. $p^{-1}(U) = \cup_{j \in J} \tilde{U}_j$ con $\tilde{U}_k \cap \tilde{U}_l = \emptyset$ para $k \neq l$
2. $\tilde{U}_j$ es un conjunto abierto de $\tilde{X}$ tal que $p|_{\tilde{U}_j}$ es homeomorfismo sobre U para todo $j \in J$.

3.3 Ejemplo. Sea $\mu\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{a\}$ donde $z \mapsto a + e^z$. Afirmamos que μ es una aplicación cubriente. Claramente μ es una aplicación continua. Consideremos $b \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$ y $c \in \mathbb{C}$ tal que $a + e^c = b$. Como μ es un homeomorfismo local (pues e^z lo es), existe una vecindad abierta V_0 de c y una vecindad abierta U de b tal que $\mu\colon V_0 \to U$ es un homeomorfismo.

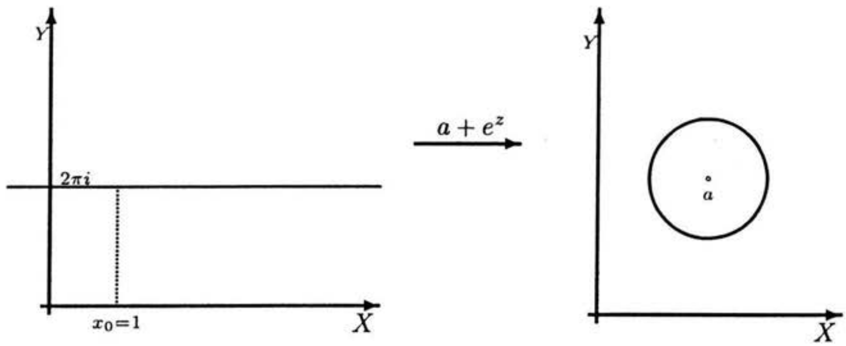


Figura 3.2: El cubriente $a+e^z$

Entonces $\mu^{-1}(U) = \cup_{n\in\mathbb{Z}} V_n$ donde $V_n := 2\pi in + V_0$. Sea $V_k \cap V_l \neq \emptyset$ con $k \neq l$, existe un $z \in V_0$ tal que $z + 2\pi ik = z + 2\pi il$ luego $k = l$ lo cual es una contradicción. Así, $V_k \cap V_l = \emptyset$ para $k \neq l$. Por tanto, se tiene que μ es una aplicación cubriente.

3.2 Proposición. *Sea $p\colon \tilde{X} \to X$ una aplicación cubriente, $\tilde{a} \in \tilde{X}$ tal que $p(\tilde{a}) = a$ y $\gamma\colon I = [0,1] \to X$ una curva con $\gamma(0) = a$. Entonces existe un levantamiento $\tilde{\gamma}\colon I \to \tilde{X}$ de γ con $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{a}$.*

Demostración. Para cualquier $x \in X$, existe una vecindad U_x de x conexa tal que $p^{-1}(U_x) = \cup_{j\in J}\tilde{U}_j$ donde $\tilde{U}_j$ es una vecindad en $\tilde{X}$. Como I es compacto y γ es continua, entonces podemos encontrar puntos $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{p+1} = 1$ que satisfacen que $\gamma([t_\nu, t_{\nu+1}])$ está contenida en U_x para alguna x y para cualquier $\nu = 0, \ldots, p$. Elegimos $x_\nu \in X$ tal que $\gamma(t) \in U_{x_\nu}$ para $t_\nu \leq t \leq t_{\nu+1}$ para $\nu = 0, \ldots, p$. Por hipótesis, U_{x_0} es una componente conexa tal que $p^{-1}(U_{x_0}) = \cup_{j\in J}\tilde{U_{0,j}}$ donde la unión es ajena y $p_{0,j} = p|_{\tilde{U_{0,j}}}$ es un homeomorfismo sobre U_{x_0}. Definamos γ' en $[t_0, t_1]$ mediante

$$\tilde{\gamma}(t) = p_{0,j_0}^{-1} \circ \gamma(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1$$

donde j_0 es el índice para cada $\tilde{a} \in \tilde{U_{0,j_0}}$. Supongamos que $\tilde{\gamma}$ está bien definida sobre $[t_0, t_\nu]$ y sea

$$p^{-1}(U_{x_\nu}) = \cup_{j\in J}\tilde{U_{\nu,j}}$$

donde la union es ajena y $p_{\nu,j} = p|_{\tilde{U}_{\nu,j}}$ es un homeomorfismo sobre U_{x_ν}. Definamos $\tilde{\gamma}$ sobre $[t_\nu, t_{\nu+1}]$ como

$$\tilde{\gamma}(t) = p_{\nu,j}^{-1} \circ \gamma(t), \quad t_\nu \leq t \leq t_{\nu+1}$$

donde j_ν es el índice en J_ν para $\tilde{\gamma}(t_\nu) \in \tilde{U}_{\nu,j_\nu}$. La prueba termina si definimos inductivamente $\tilde{\gamma}(t)$ para $t \in [0,1]$. □

Sea $a \in \mathbb{C}$. Consideremos el conjunto de parejas (U, f) donde U es un abierto que contiene a a y $f \in \mathcal{H}(U)$. Definamos la relación $(U, f) \sim (V, g)$ si existe W vecindad de a con $W \subset U \cap V$ y tal que $f|_W = g|_W$. Es claro que $\sim$ es una relación de equivalencia. Una clase de equivalencia obtenida por esta relación es llamada un *germen* de función holomorfa en a y se denota f_a. Denotamos $\mathcal{O}_a$ al conjunto de todos los gérmenes en a. Si $f_a \in \mathcal{O}_a$, definimos el valor $f_a(a)$ del germen f_a en a como $f_a(a) = f(a)$, tomando cualquier representante (U, f) de f_a. De la definición de la relación de equivalencia este valor no depende del representante (U, f) de f_a. De la misma forma definimos los valores en a de la k-ésima derivada de f_a como $f_a^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$, donde (U, f) es un representante de f_a.

3.3 Proposición. *$\mathcal{O}_a$ tiene estructura de $\mathbb{C}$-álgebra local.*

Demostración. Sean $f_a, g_a \in \mathcal{O}_a$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Tomemos $(U, f), (V, g)$ representantes de f_a y g_a respectivamente. Definimos $f_a + g_a, f_a g_a$ y λf_a a los gérmenes de a definidos por: $(U \cap V, f + g), (U \cap V, fg), (U, \lambda f)$ respectivamente. Con estas operaciones no es difícil ver que $\mathcal{O}_a$ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial con la suma y producto por escalares, y anillo conmutativo con la multiplicación y adición de funciones. Sea $\mathcal{M}_a$ el conjunto de no-unidades. Afirmamos que $f_a \in \mathcal{M}_a$ si y sólo si $f_a(a) = 0$. La prueba es como sigue, si $f_a(a) \neq 0$, entonces para (U, f) un representante de f_a, tenemos que $f(a) \neq 0$; por continuidad de f, existe una vecindad V de a tal que $f(z) \neq 0$ para $z \in V$. Si g_a es el germen en a de $(V, \frac{1}{f})$, entonces $f_a g_a = 1$ y por tanto f_a es unidad y entonces $f_a \notin \mathcal{M}_a$. Si f_a es unidad, entonces $f_a g_a = 1$ para alguna $g_a \in \mathcal{O}_a$. Sean $(U, f), (V, g)$ representantes de f_a, g_a respectivamente, entonces $f(z)g(z) = 1$ en una vecindad de a, es decir, $f(z) \neq 0$ en esa vecindad. Por tanto $f_a(z) = f(z) \neq 0$ en una vecindad de a. Así, hemos visto que $\mathcal{M}_a = \{f_a \in \mathcal{O}_a : f_a(a) = 0\}$. Sean $f_a, g_a \in \mathcal{M}_a$. Se tiene que $f_a(a) = g_a(a) = 0$, por tanto $(f_a + g_a)(a) = f_a(a) + g_a(a) = 0$ y entonces $f_a + g_a \in \mathcal{M}_a$. Además $g_a f_a \in \mathcal{O}_a$ y $(g_a f_a)(a) = 0$, luego $g_a f_a \in \mathcal{M}_a$. Por lo tanto $\mathcal{M}_a$ es un subanillo. Sea $h_a \in \mathcal{O}_a$, entonces $h_a f_a \in \mathcal{O}_a$ y $(h_a f_a)(a) = h_a(a) f_a(a) = 0$, así $h_a f_a \in \mathcal{M}_a$ y por tanto $\mathcal{M}_a$ es un ideal de

$\mathcal{O}_a$. Como todo ideal propio de $\mathcal{O}_a$ que consiste de no-unidades está contenido en $\mathcal{M}_a$. Esto nos lleva a que $\mathcal{M}_a$ es un ideal maximal. □

3.4 Lema. *$\frac{\mathcal{O}_a}{\mathcal{M}_a}$ es isomorfo a $\mathbb{C}$.*

Demostración. Sea $\varphi\colon \mathcal{O}_a \to \mathbb{C}$ definido mediante la regla $\varphi(f_a) = f_a(a)$. Tenemos que φ es un homomorfismo de anillos pues $\varphi\ (f_a + g_a) = (f_a + g_a)(a) = f_a(a)+g_a(a) = \varphi(f_a)+\varphi(g_a)$ y $\varphi(f_a g_a) = (f_a g_a)(a) = f_a(a)g_a(a) = \varphi(f_a)\varphi(g_a)$. Dado $c \in \mathbb{C}$ tomemos (W, h) de tal manera que $h(z) = c$ para cualquier $z \in W$. Entonces $h_a(a) = c$. Así $\varphi(h_a) = h_a(a) = c$ y por tanto φ es un epimorfismo. Por definición, $\ker\varphi = \{f_a \in \mathcal{O}_a : f_a(a) = 0\} = \mathcal{M}_a$. Entonces por el Primer Teorema de Isomorfismos para Anillos tenemos:

$$\frac{\mathcal{O}_a}{\ker\varphi} = \frac{\mathcal{O}_a}{\mathcal{M}_a} \cong Im\ \varphi = \mathbb{C}.$$

□

Consideremos $\mathcal{O} = \cup_{a\in\mathbb{C}}\mathcal{O}_a$, introducimos una topología en $\mathcal{O}$ de la siguiente manera. Sea $f_a \in \mathcal{O}_a$ y sea (U, f) un representante de f_a. Denotamos mediante

$$N(U, f) := \{f_z \in \mathcal{O}_z : f_z \quad \text{es el germen en } z \in U \text{ definido por } (U, f)\}.$$

El conjunto $\{N(U, f)\}$ forma un *sistema fundamental de vecindades*[2] de f_a y entonces induce una topología en $\mathcal{O}$.

Definimos la aplicación $p\colon \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ como $p(f_a) = a$ para todo $f_a \in \mathcal{O}_a$. No es difícil ver que p es continua.

3.4 Definición. El espacio $\mathcal{O}$ con la aplicación $p\colon \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ es llamado la *gavilla*[3] de gérmenes de funciones holomorfas sobre $\mathbb{C}$.

[2]**Definición.** Sea X un conjunto y supongamos que para cada $x \in X$ existe una colección N_x de subconjuntos de X tal que

- Para cada $U \in N_x$, $x \in U$.
- Si $U, V \in N_x$, entonces existe $W \in N_x$ tal que $W \subset U \cap V$.
- Si $U \in N_x$ y $V \in N_y$, entonces para cada $z \in U \cap V$, existe $W \in N_z$ tal que $W \subset U \cap V$.

La colección $\{N_x : x \in X\}$ se llama un *sistema fundamental de vecindades* (véase [7]).

[3]El concepto de *gavilla* fue introducido de manera formal por Jean Leray y Henri

3.5 Proposición. *$\mathcal{O}$ es un espacio de Hausdorff.*

Demostración. Sea $f_a \in \mathcal{O}_a$ y $g_b \in \mathcal{O}_b$. Supongamos que $f_a \neq g_b$. Si $a \neq b$, sean (U, f) y (V, g) representantes de f_a y g_a respectivamente. Consideremos $U' \subset U$ y $V' \subset V$ vecindades de a y b respectivamente tales que $U' \cap V' = \emptyset$ (esto es posible pues $\mathbb{C}$ un espacio de Hausdorff). Entonces $N(U', f)$ y $N(V', g)$ son vecindades ajenas de f_a y g_b. Ahora si $a = b$, consideremos (U, f) y (V, g) representantes de f_a y $g_b = g_a$. Sea D un disco con centro en a tal que $D \subset U \cap V$. Afirmamos que si $f_a \neq g_a$, $N(D, f) \cap N(D, g) = \emptyset$. Esto se sigue de lo siguiente: si $h_z \in N(D, f) \cap N(D, g)$, entonces f y g definen el germen de h_z en z. Luego, por definición, existe $W \subset D$ tal que $f|_W = g|_W$ y por el Principio de continuación analítica (Teorema 2.11), $f \equiv g$ sobre D. Así, $f_a = g_a$, lo que es una contradicción.

□

3.6 Proposición. *La aplicación $p\colon \mathcal{O} \to \mathbb{C}$, $p(f_a) = a$ es un homeomorfismo local.*

Demostración. Sean $f_a \in \mathcal{O}_a$ y (U, f) un representante de f_a, entonces $p(N(U, f)) = U$. Si V es un abierto en $\mathbb{C}$ que contiene a a, entonces $p(N(U \cap V, f)) = U \cap V \subset V$, por lo que p es continua; además, ya que $p(N(U, f)) = U$, se tiene que p es una aplicación abierta. Finalmente $p|_{N(U,f)}$ es inyectiva con inversa $z \mapsto f_z =$ germen en z definido por (U, f). Entonces para cualquier $N(U, f)$, $p|_{N(U,f)}$ es un homeomorfismo sobre su imagen U. □

3.7 Corolario. *$\mathcal{O}$ es una 2-variedad.*

3.5 Definición. Definimos la aplicación *derivada* $d\colon \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ de la siguiente manera. Si $f_a \in \mathcal{O}_a$ y (U, f) es un representante de f_a, definimos $d(f_a) = (f')_a$, el germen en a de f', donde f' es la función derivada $f'\colon U \to \mathbb{C}$.

3.8 Proposición. *$d\colon \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ es una aplicación cubriente.*

Demostración. Sea $f_a \in \mathcal{O}$ y sea (U, f) un representante de f_a. Consideremos D un disco con centro en a tal que $D \subset U$ y sea F una primitiva de f sobre D (la cual existe en virtud de la Proposición 2.9). Sea $\mathcal{D} = N(D, f)$, y para cada $c \in \mathbb{C}$ definamos $U_c = N(D, F + c)$. Afirmamos que

---

Cartan en 1950. Los ejemplos mas importantes de gavillas se encuentran en el campo de la topología algebraica, geometría diferencial, varias variables complejas y geometría algebraica. Dentro de los ejemplos de gavillas encontramos las siguientes: en el análisis complejo, la gavilla de funciones holomorfas; en la geometría diferencial, la gavilla de formas diferenciales y en el álgebra, la gavilla de anillos locales (véase [30]).

$d^{-1}(\mathcal{D}) = \cup_{c\in\mathbb{C}} U_c$, en efecto, sean $z \in D, g_z \in \mathcal{O}_z$ con $dg_z = f_z$ y sea W una vecindad conexa de z, $W \subset D$, entonces $g' = f$ en una vecindad de z. Así, $g' = f$ sobre W, lo cual nos lleva a que $\frac{d}{dz}(g - F) = 0$ sobre W y por tanto $g = F + c$ sobre W y $g_z \in U_c$, entonces $d(U_c) = N(D, f) = \mathcal{D}$, lo cual muestra la igualdad y que d es continua. Ahora veamos que $d|_{U_c}$ es homeomorfismo sobre $\mathcal{D}$, pero para todo $c \in \mathbb{C}, d|_{U_c}$ es inyectiva, pues d manda elementos distintos de U_c a gérmenes con puntos diferentes de D, por tanto d es una aplicación cubriente. □

3.6 Definición. Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ una región, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $\gamma\colon [0,1] \to \Omega$ una curva en Ω. Una *primitiva de f a lo largo de γ* es un levantamiento con respecto a $d\colon \mathcal{O} \to \mathcal{O}$, es decir, es una función continua $\Gamma\colon [0,1] \to \mathcal{O}$ que cumpla que $(d \circ \Gamma)(t)$ sea el germen de f en $\gamma(t)$ (el cual existe en virtud de que d es aplicación cubriente).

Es claro de la definición que si F_1 y F_2 son dos primitivas de f a lo largo de γ, entonces difieren en una constante.

3.9 Lema. *Sean $\Omega \subset \mathbb{C}, f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $\gamma\colon [0,1] \to \Omega$ una curva diferenciable a trozos. Entonces para $F\colon [0,1] \to \mathcal{O}$ una primitiva de f a lo largo de γ se tiene*

$$\int_\gamma f dz = F(1)(\gamma(1)) - F(0)(\gamma(0)).$$

Demostración. Sea $G\colon [0,1] \to \mathcal{O}$ definida de la siguiente manera:
Para cada $t \in [0,1]$ consideramos a $D_t \subset \Omega$ un disco abierto centrado en $\gamma(t)$ y tomamos a h una primitiva de f en D_t de manera que

$$h(\gamma(t_0)) = \int_0^{t_0} f(\gamma(s))\gamma'(s)ds. \tag{3.1}$$

Entonces, definimos $G(t)$ como el germen de h en $\gamma(t)$. Claramente $(d \circ G)(t)$ es el germen en $\gamma(t)$ de h', es decir, es el germen de f en $\gamma(t)$. Para ver que G es levantamiento falta solamente ver que es continua. Sea $t_0 \in [0,1]$ y D un disco pequeño con centro en $\gamma(t_0)$ y $h \in \mathcal{H}(D)$ la primitiva de f en D que cumple 3.1. Tomemos $\delta > 0$ tal que $\gamma(t) \in D$ para $|t - t_0| < \delta$. Por hipótesis $h(\gamma(t_0)) = \int_0^{t_0} f(\gamma(s))\gamma'(s)ds$. Como para t con $|t - t_0| < \delta$ se tiene que

$$\begin{aligned} h(\gamma(t)) - h(\gamma(t_0)) &= \int_{t_0}^{t} \frac{d}{ds} h(\gamma(s))ds \\ &= \int_{t_0}^{t} f(\gamma(s))\gamma'(s)ds \end{aligned}$$

pues $h' = f$ sobre D, luego $h(\gamma(t)) = \int_0^t f(\gamma(s))\gamma'(s)ds$ y por tanto, $G(t)$ es el germen de h en $\gamma(t)$ para $|t - t_0| < \delta$. Luego $G(t) \in N(D,h)$ para $|t - t_0| < \delta$, por lo que G es continua en t_0. Pero hemos observado que dos primitivas de f a lo largo de γ difieren en una constante, por lo que $F(t) = G(t) + c$ para alguna c y para todo $t \in [0,1]$, por tanto

$$\begin{aligned} F(1)(\gamma(1)) - F(0)(\gamma(0)) &= G(1)(\gamma(1)) - G(0)(\gamma(0)) \\ &= \int_0^1 f(\gamma(s))\gamma'(s)ds \\ &= \int_\gamma f dz \end{aligned}$$

lo que prueba el Lema. □

3.7 Definición. Sean $\Omega \subset \mathbb{C}, f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $\gamma\colon [0,1] \to \Omega$ una curva continua. Definimos $\int_\gamma f dz = \phi(1) - \phi(0)$, donde $\phi(t)$ es el valor de $F(t)$ en $\gamma(t)$ para $0 \leq t \leq 1$ y tal que $F\colon [0,1] \to \mathcal{O}$ es una primitiva de f a lo largo de γ.

3.10 Lema. *Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Si f tiene una primitiva sobre Ω, entonces para cualquier curva cerrada $\gamma\colon [0,1] \to \Omega$ se tiene que $\int_\gamma f dz = 0$.*

Demostración. Si H es una primitiva de f sobre Ω, entonces $F\colon [0,1] \to \mathcal{O}$ definida por $F(t) = H_{\gamma(t)}$ (el germen de H en $\gamma(t)$) es una primitiva de f a lo largo de γ y además $H(\gamma(t))$ es el valor en t de $F(t)$. Entonces si $\gamma(0) = \gamma(1)$ tenemos que,

$$\int_\gamma f dz = H(\gamma(1)) - H(\gamma(0)) = 0$$

□

3.8 Definición. Sean X una variedad, $I = [0,1]$ y $\gamma_0, \gamma_1\colon I \to X$ dos curvas en X. Decimos que γ_0 y γ_1 son *homotópicas* si existe una aplicación continua $F\colon I \times I \to X$ tal que $F(t,0) = \gamma_0(t)$ y $F(t,1) = \gamma_1(t)$ para todo $t \in I$. Sea $\gamma_u(t) = F(t,u)$. Decimos que F es una *homotopía* de γ_0 y γ_1. Decimos que F fija a $\gamma_0(0) = a$ si $F(0,u) = a$ para todo $u \in I$. Si además $\gamma_0(1) = b$, decimos que F fija los puntos finales de γ_0 y γ_1 si $F(0,u) = a$ para cualquier $u \in I$ y $F(1,u) = b$ para cualquier $u \in I$.

3.11 Teorema (general de Monodromía). *Sean $X, \tilde{X}$ variedades y $p\colon \tilde{X} \to X$ un homeomorfismo local. Sea $\tilde{a} \in \tilde{X}$ y $a = p(\tilde{a})$. Consideremos γ_0, γ_1 curvas en X que empiezan en a y sea $\{\gamma_u\}_{u\in I}$ una homotopía*

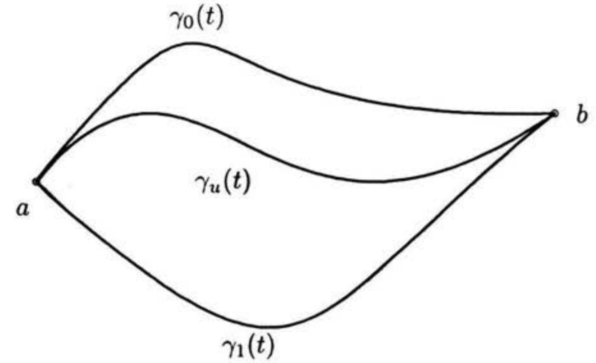


Figura 3.3: Curvas con homotopía que fija los extremos

de γ_0 a γ_1 que fija a a. Supongamos que para todo $u \in I$, γ_u tiene un levantamiento $\tilde{\gamma_u}$ con respecto a $p\colon \tilde{X} \to X$ tal que $\tilde{\gamma_u}(0) = \tilde{a}$. Entonces, $\{\tilde{\gamma_u}\}_{u\in I}$ es una homotopía entre los levantamientos $\tilde{\gamma_0}$ y $\tilde{\gamma_1}$.

La demostración del teorema general de Monodromía puede consultarse en [1] o [5].

3.12 Proposición. *Sean $X, \tilde{X}$ variedades n-dimensionales y $p\colon \tilde{X} \to X$ un homeomorfismo local. Sea $\tilde{a} \in \tilde{X}, a = p(\tilde{a})$ y $b \in X$. Consideremos γ_0, γ_1 curvas en X que inician en a y terminan en b. Supongamos que existe $\{\gamma_u\}_{u\in I}$ homotopía entre γ_0 y γ_1 con extremos a y b. Si para todo $u \in I$, γ_u tiene un levantamiento $\tilde{\gamma_u}$ con respecto a p que empieza en $\tilde{a}$, entonces $\tilde{\gamma_0}$ y $\tilde{\gamma_1}$ tienen los mismos puntos finales y $\tilde{\gamma_u}(1)$ es independiente de u.*

Demostración. Por el teorema general de Monodromía, se tiene que la aplicación $\tilde{F}\colon I\times I \to \tilde{X}$ definida por $\tilde{F}(t,u) = \tilde{\gamma_u}(t)$ es continua. En particular, la aplicación $F(1,u)\colon I \to \tilde{X}$ definida como $u \mapsto \tilde{\gamma_u}(1)$ es continua. Esta aplicación es un levantamiento de la aplicación constante $u \mapsto \gamma(1) = b$ lo mismo que la aplicación constante definida como $u \mapsto \tilde{\gamma}_0(1)$, además se tiene que $F(0,1) = \tilde{\gamma}_0(1)$. Entonces, por el Lema 3.1, es también constante. Por tanto $\tilde{\gamma_0}$ y $\tilde{\gamma_1}$ tienen los mismos puntos finales y $\tilde{\gamma_u}(1)$ es independiente de u. $\square$

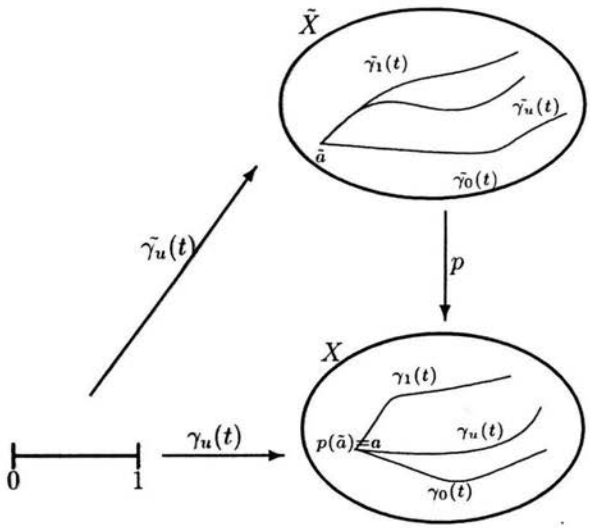


Figura 3.4: El Teorema General de Monodromía

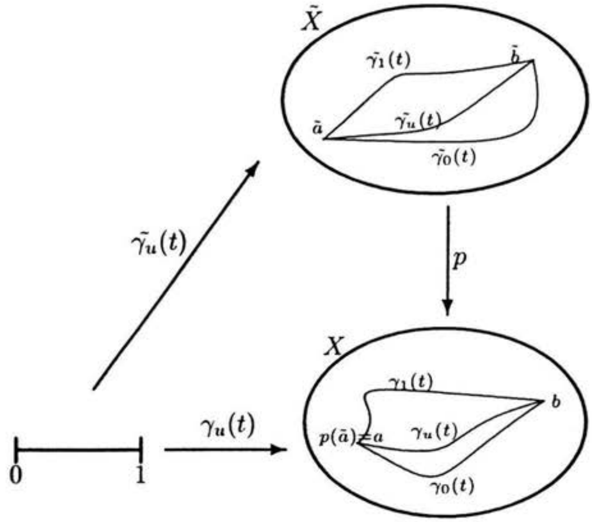


Figura 3.5: Proposición 3.12

3.13 Teorema (Versión Homotópica del Teorema de Cauchy). *Consideremos $\Omega \subset \mathbb{C}$ una región y sean γ_0, γ_1 curvas en Ω con los mismos extremos a, b. Supongamos que existe una homotopía entre γ_0 y γ_1 en Ω que fija los extremos. Entonces, para **toda** $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ se tiene*

$$\int_{\gamma_0} f dz = \int_{\gamma_1} f dz.$$

Demostración. Sea $\{\gamma_u\}_{u\in I}$ una homotopía entre γ_0 y γ_1 que fija los extremos. Sea $\Gamma_u \colon I \to \mathcal{O}$ definida por $\Gamma_u(t)$ igual al germen en $\gamma_u(t)$ de f. Entonces $\{\Gamma_u\}_{u\in I}$ es una homotopía en $\mathcal{O}$ entre Γ_0 y Γ_1 que fija los puntos extremos f_a y f_b. Sea F_a el germen en a de una primitiva de f en alguna vecindad de a. Entonces, como $d \colon \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ es cubriente, Γ_u tiene un levantamiento $\tilde{\Gamma_u} \colon I \to \mathcal{O}$ tal que $\tilde{\Gamma_u}(0) = F_a$. Por la Proposición 3.12, $\tilde{\Gamma_0}(1) = \tilde{\Gamma_1}(1)$, y este germen tiene el mismo valor en $b = \gamma_0(1) = \gamma_1(1)$. Sea α tal valor, entonces

$$\int_{\gamma_0} f dz = \alpha - F_a(a) = \int_{\gamma_1} f dz.$$

□

3.9 Definición. Sea X un espacio de Hausdorff arco conexo. Decimos que X es *simplemente conexo* si dadas γ_0, γ_1 dos curvas en X con los mismos puntos extremos a y b, existe una homotopía $\{\gamma_u\}_{u\in I}$ en X entre γ_0 y γ_1 que fija los extremos.

3.10 Definición. Sean X un espacio Hausdorff arco conexo, $a \in X$ y γ una curva cerrada que inicia y termina en a. Decimos que γ es *homotópica a la constante* a, si existe una homotopía $\{\gamma_u\}_{u\in I}$ entre $\gamma_0 = \gamma$ y la curva γ_1 definida como $\gamma_1(t) = a$ para cualquier $t \in I$, que además, fija los puntos extremos.

Observemos que si X es simplemente conexo, toda curva cerrada es homotópica a un punto. El recíproco también es cierto (la prueba de esto sera considerada mas adelante).

3.14 Teorema (de Cauchy). *Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un dominio simplemente conexo, entonces para cualquier $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y toda γ curva cerrada en Ω, es válida la igualdad*

$$\int_{\gamma} f dz = 0$$

Demostración. Sean las curvas $\gamma_0(t) = \gamma(t)$ y $\gamma_1(t) = \gamma_0(0)$ en la versión homotópica del teorema de Cauchy (Teorema 3.13). Se tiene entonces

$$\int_\gamma f dz = \int_{\gamma_0} f dz = 0.$$

□

3.15 Teorema. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio simplemente conexo. Entonces toda $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tiene una primitiva en Ω.*

Demostración. Sea $\phi\colon \Omega \to \mathcal{O}$ tal que $\phi(z)$ es el germen de f en z. Entonces, como $d\colon \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ es cubriente, sabemos que existe una aplicación continua $\Phi\colon \Omega \to \mathcal{O}$ tal que $d \circ \Phi = \phi$. Definimos F sobre Ω por $F(z)$ igual al valor de $\Phi(z)$ en z. Afirmamos que $F \in \mathcal{H}(\Omega)$. Si $z_0 \in \Omega$ y (U, ψ) es un representante de $\Phi(z_0)$, entonces por la continuidad de Φ se tiene que si $\Phi(z)$ es el germen en z de ψ en una vecindad V de z_0, entonces $F|_V = \psi|_V$, lo cual prueba que $F \in \mathcal{H}(\Omega)$. Por tanto como $d \circ \Phi = \phi$ se tiene que $F' = f$ sobre Ω. Lo que concluye la prueba. □

Capítulo 4

Versión Homológica del Teorema de Cauchy

Aquí trataremos la versión homotópica del teorema de Cauchy. Para este fin, daremos resultados sobre particiones de la unidad para un uso técnico. Después definiremos lo que es el índice de una curva cerrada con respecto de un punto para dar paso a la demostración del teorema del residuo, la fórmula de Cauchy y la versión homotópica del teorema de Cauchy. También se mostrara la existencia de una función $u \in C^\infty(\Omega)$ que cumpla la ecuación $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \phi$ para $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Esto último será necesario para el siguiente capítulo.

4.1. Particiones de la unidad

Sean Ω un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ y $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ una cubierta abierta de Ω.

4.1 Definición. Consideremos una función $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$. El *soporte* de f denotado por $supp(f)$ está definido por:

$$supp(f) = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}$$

4.2 Definición. Una *partición de la unidad* relativa (o subordinada) a $\mathcal{U}$ es $\{\phi_i\colon \Omega \to \mathbb{R}\}_{i\in I}$ una familia de funciones C^∞ (con el mismo conjunto de índices I de la cubierta $\mathcal{U}$), que tiene las siguientes propiedades:

1. $\phi_i \geq 0$ en Ω y $supp(\phi_i) \subset U_i$.

2. La familia de conjuntos cerrados $\{supp(\phi_i)\}_{i\in I}$ es localmente finita (es decir, para un conjunto compacto $K \subset \Omega$, el conjunto $\{i \in I : K \cap supp(\phi_i) \neq 0\}$ es finito).

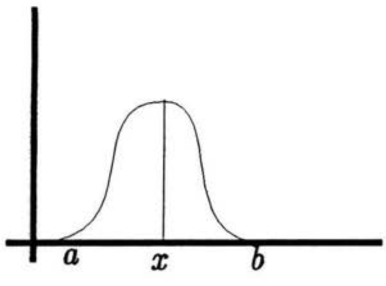


Figura 4.1:

3. $\sum_{i \in I} \phi_i = 1$ en Ω.

4.1 Lema. *Sean A, B subconjuntos cerrados ajenos de $\mathbb{R}^n$ con A acotado. Entonces existe una función ϕ: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase C^∞ tal que $\phi(x) \equiv 1$ en A y $\phi(x) \equiv 0$ en B.*

Demostración. Sean $0 < a < b$ dos números reales. Consideremos la función (véase figura 4.1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con regla

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x-b} - \frac{1}{x-a}} & \text{para } a < x < b, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es fácil ver que $f(x)$ es C^∞ en $\mathbb{R}$. Ahora construimos la función

$$F(x) = \frac{\int_x^b f(t)dt}{\int_a^b f(t)dt}$$

Observemos que $F(x)$ es también C^∞ en $\mathbb{R}$ y que

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x \geq b, \\ 1 & \text{para } x \leq a, \\ \text{decrece desde 1 hasta 0} & \text{para } a \leq x \leq b \end{cases}$$

como lo muestra la figura 4.2.
Definamos ahora la función $\psi(x)$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mediante la fórmula

$$\psi(x_1, \ldots, x_n) = F(x_1^2 + \cdots + x_n^2) = F\Big(\sum_{i=1}^n x_i^2\Big)$$

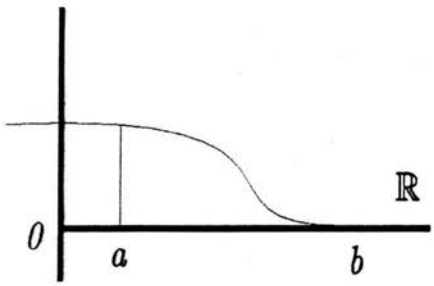


Figura 4.2:

Si tomamos $r^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ vemos que $\psi(x)$ es C^∞ en $\mathbb{R}^n$ y

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } r^2 \geq b, \\ 1 & \text{para } r^2 \leq a, \\ \text{decrece desde 1 hasta 0} & \text{para } a \leq r^2 \leq b. \end{cases}$$

Con la ayuda de una construcción como la anterior, podemos asegurar que si S y S' son dos esferas concéntricas en $\mathbb{R}^n$ y S incluye a S', entonces existe una función suave $\psi(x)$ tal que $\psi(x) \equiv 0$ fuera de la bola limitada por S, y $\psi(x) \equiv 1$ en la bola limitada por S'. Consideremos ahora los conjuntos cerrados A y B. Como A es compacto, existe un conjunto finito de esferas $\{S_i\}_{i=1}^{m}$ tales que las correspondientes bolas abiertas D_i con $\partial\overline{D_i} = S_i$ constituyen una cubierta del conjunto A, es decir, $A \subset \cup_{i=1}^{m} D_i$. Ya que $A \cap B = \emptyset$, podemos considerar que $\overline{D_i} \cap B = \emptyset$ para cualquier i. Ahora, para todo i existe una esfera mas pequeña S_i' concéntrica con S_i, $S_i' \subset S_i$, tal que el conjunto de esferas $\{S_i'\}$ también es cubierta de A, es decir, $A \subset \cup_{i=1}^{m} D_i'$. Sean $\psi_i(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ funciones tales que:

$$\psi_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{en } D_i', \\ 0 & \text{en } D_i. \end{cases}$$

Se define la función $\varphi \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = 1 - \prod_{i=1}^{m} (1 - \psi_i(x)).$$

Claramente $\varphi(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\varphi(x) \equiv 1$ en A y $\varphi(x) \equiv 0$ en B. □

4.2 Lema. *Sean U un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$ y K un subconjunto compacto contenido en U. Entonces existe $\phi \in C^\infty(U)$ tal que $\phi(x) > 0$ para todo $x \in K$.*

Demostración. La función ψ definida sobre $\mathbb{R}$ mediante

$$\psi(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-t}} & \text{si } t < 1, \\ 0 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

es C^∞ en $\mathbb{R}$. La función $\xi \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida mediante $\xi(x_1, ..., x_n) = \psi(2(x_1^2 + \cdots + x_n^2))$ es C^∞ en $\mathbb{R}^n$ y cumple que $\xi(0) > 0$, $supp\ (\xi) = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum x_i^2 \leq \frac{1}{2}\}$. Sea $\delta > 0$ la distancia[1] entre K y $\mathbb{R}^n \setminus U$. Definimos para cualquier $a \in K$, una función $\phi_a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ como $\phi_a(x) = \xi(\frac{x-a}{\delta})$. Observemos que $\phi_a(a) > 0$, $supp(\phi_a) \subset U$, que los conjuntos definidos como $V_a = \{x \in U : \phi_a(x) > 0\}$ son abiertos y $\cup_{a \in U} V_a = U \supset K$. Entonces, por ser K compacto, existen $a_1, \ldots, a_p \in K$ tales que $\cup_{i=1}^p V_{a_i} \supset K$. La función $\phi = \phi_{a_1} + \cdots + \phi_{a_p}$ tiene las propiedades que pide el Lema. □

4.3 Teorema. *Sea Ω un abierto en $\mathbb{R}^n$ y $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ una cubierta de Ω. Entonces existe una partición de la unidad relativa a $\mathcal{U}$.*

Demostración. No es difícil ver que existe una cubierta abierta $\{V_j\}_{j \in J}$ localmente finita de Ω tal que[2] $V_j \Subset \Omega$ para cualquier $j \in J$, y que sea un refinamiento de $\mathcal{U}$, es decir, para todo $j \in J$ existe $i \in I$ tal que $V_j \subset U_i$. Elegimos una aplicación $\tau \colon J \to I$ tal que $V_j \subset U_{\tau(j)}$. Entonces existen subconjuntos compactos $K_j \subset V_j$ tales que $\cup_j K_j = \Omega$. Sea $\psi_j \in C_0^\infty(V_j)$ con $\psi_j(x) > 0$ para $x \in K_j$. Sea $\psi = \sum_{j \in J} \psi_j$, entonces $\{V_j\}$ es localmente finita, la suma $\sum_{j \in J} \psi_j$ es una suma finita sobre cualquier subconjunto compacto de Ω, entonces $\psi_j \in C_0^\infty(\Omega)$. Así, $\psi_j > 0$ sobre K_j y entonces $\psi > 0$ sobre $\Omega = \cup K_j$. Sea $\xi_j = \frac{\psi_j}{\psi}$, $\{\xi_j\}$ es una partición de la unidad relativa a $\{V_j\}$. Para $i \in I$ sea $J_i = \tau^{-1}(i)$ y definimos $\phi_i = \sum_{j \in J_i} \xi_j$, entonces $\{\phi_i\}$ es una partición de la unidad relativa a $\mathcal{U}$. □

4.4 Teorema. *Sea Ω un abierto en $\mathbb{R}^n$ y sea $X \subset \Omega$ un subconjunto cerrado de Ω. Sea U un abierto en Ω con $X \subset U$. Entonces existe $\phi \in C^\infty(\Omega)$, $0 \leq \phi \leq 1$ tal que $\phi|_X = 1$ y $\phi|_{\Omega \setminus U} = 0$.*

---

[1] La distancia entre un compacto K y un cerrado F, se define como $d = \text{mín}\{d(x, y) : x \in K, y \in F\}$

[2] $V_j \Subset \Omega$ indica que V_j es relativamente compacto en Ω, es decir, la cerradura de V_j en Ω es un conjunto compacto

Demostración. Sean $V = \Omega \setminus X$ y $\{\phi_U, \phi_V\}$ una partición de la unidad relativa a la cubierta $\{V, U\}$ de Ω, entonces como $supp(\phi_V) \subset V$ se tiene que $\phi_V|_X = 0$. Como $\phi_U + \phi_V = 1$ sobre Ω, se tiene además que $\phi_U|_X = 1$, luego $supp(\phi_U) \subset U$. Entonces, tomando $\phi = \phi_U$ tenemos el resultado. □

4.5 Teorema. *Sea Ω un abierto en $\mathbb{R}^n$ y sean X_1, X_2 dos subconjuntos cerrados de Ω con $X_1 \cap X_2 = \emptyset$. Sean $\phi_1, \phi_2 \in C^\infty(\Omega)$, entonces existe $\phi \in C^\infty(\Omega)$ con $\phi|_{X_1} = \phi_1|_{X_1}$ y $\phi|_{X_2} = \phi_2|_{X_2}$. Mas aún, si $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, I es un intervalo con puntos extremos a, b y $\phi_1(\Omega) \cup \phi_2(\Omega) \subset I$, entonces podemos elegir ϕ tal que $\phi(\Omega) \subset I$.*

Demostración. El teorema anterior garantiza la existencia de esta función $\alpha \in C^\infty(\Omega), 0 \leq \alpha \leq 1$ tal que $\alpha|_{X_1} = 1$ y $\alpha|_{X_2} = 0$. Entonces si tomamos $\phi = \alpha\phi_1 + (1 - \alpha)\phi_2$, tenemos el resultado. □

4.2. Versión Homológica del Teorema de Cauchy

En esta sección trataremos el concepto de índice de una curva cerrada con respecto a un punto. Aquí puede encontrarse la prueba de que el índice siempre es un número entero y que es independiente de la curva. También damos la prueba de la versión homológica el teorema de Cauchy en cuya demostración utilizaremos el teorema del residuo.

4.3 Definición. Consideremos $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ una curva cerrada en $\mathbb{C}$ y $a \in \mathbb{C} \setminus Ima(\gamma)$. La aplicación $\phi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{a\}$ definida por $\phi(z) = a + e^z$ es una aplicación cubriente. Sea $\tilde{\gamma}$ un levantamiento de γ. Definimos el *índice de γ* con respecto a a como el número $n(\gamma, a)$ definido por

$$n(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i}\Big[\tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0)\Big]$$

El índice está bien definido:

4.6 Lema. *Si $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ es una curva cerrada, $a \in \mathbb{C} \setminus Ima(\gamma)$ y γ_1, γ_2 son levantamientos de γ con respecto a la aplicación $z \mapsto a + e^z$, entonces $\gamma_2(1) - \gamma_2(0) = \gamma_1(1) - \gamma_1(0)$. Entonces, $n(\gamma, a)$ depende únicamente de γ y a pero no del levantamiento.*

Demostración. Como tenemos que $a+e^{\gamma_1(0)} = \gamma(0) = a+e^{\gamma_2(0)}$, existe $n \in \mathbb{Z}$ de tal manera que $\gamma_2(0) = \gamma_1(0) + 2\pi i n$. Las aplicaciones $t \mapsto \gamma_1(t) + 2\pi i n$ y γ_2 son dos levantamientos con el mismo punto inicial $t = 0$. Entonces por Lema 3.1 se tiene que $\gamma_2(t) = \gamma_1(t) + 2\pi i n$ para todo t, en particular $\gamma_2(1) - \gamma_2(0) = \gamma_1(1) - \gamma_1(0)$. □

4.7 Lema. *Si $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ es una curva cerrada y $a \in \mathbb{C} \setminus Ima(\gamma)$, se tiene que $n(\gamma, a)$ es un entero.*

Demostración. Si $\tilde{\gamma}$ es el levantamiento de γ, entonces $a + e^{\tilde{\gamma}(1)} = \gamma(1) = \gamma(0) = a + e^{\tilde{\gamma}(0)}$. Entonces $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{\gamma}(0) + 2\pi i n$ para algún $n \in \mathbb{Z}$. □

4.8 Lema. *Para una curva cerrada γ se cumple la igualdad*

$$n(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - a}.$$

Demostración. Consideremos $d\colon \mathcal{O} \to \mathcal{O}$, la aplicación derivada (ver Definición 3.5) y $\eta\colon \mathbb{C} \setminus \{a\} \to \mathcal{O}$ la aplicación definida mediante la regla $\eta(w) =$ germen en w de la función $f(z) = \frac{1}{z-a}$. Sean $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ una curva cerrada, $\Gamma = \eta \circ \gamma$ y $\tilde{\Gamma}$ un levantamiento de Γ con respecto a d. Tomemos $w = \gamma(t), t \in [0,1]$ y F_w el germen en $\tilde{\Gamma}(t)$. El par (D, F) es un representante de F_w en un disco D centrado en w, por la definición de la aplicación d, tenemos que $F'(z) = \frac{1}{z-a}$ para $z \in D$. Entonces $\frac{d}{dz}[(z-a)e^{-F(z)}] = (1 - (z-a)F'(z))e^{-F(z)} = 0$ para cualquier $z \in D$.

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{O} \arrow[d, "d"] \\ {[0,1]} \arrow[ur, "\tilde{\Gamma}"] \arrow[r, "\Gamma"] \arrow[d, "\gamma"] & \mathcal{O} \\ \mathbb{C} \setminus \{a\} \arrow[ur, "\eta"] & \end{tikzcd}$$

Sea $\gamma_1(t) =$ el valor en $\gamma(t)$ del germen $\tilde{\Gamma}(t)$. Observemos que $(\gamma(t') - a)e^{-\gamma_1(t')} = (\gamma(t') - a)e^{-F(\gamma(t'))}$ para t' suficientemente cercano a t. Como $(z-a)e^{-F(z)}$ es constante sobre D, la aplicación $t \mapsto (\gamma(t) - a)e^{-\gamma_1(t)}$ es localmente constante sobre D. Además $t \mapsto (\gamma(t) - a)e^{-\gamma_1(t)}$ es localmente constante sobre $[0,1]$. Si $\alpha = (\gamma(0) - a)e^{-\gamma_1(0)}$ y $c \in \mathbb{C}$ es tal que $e^c = \alpha$, entonces la aplicación $t \mapsto \tilde{\gamma}(t) = \gamma_1(t) + c$ es un levantamiento de γ (con respecto a $z \mapsto a + e^z$). Entonces $2\pi i\, n(\gamma, a) = \tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0) = \tilde{\Gamma}(1)(\gamma(1)) - \tilde{\Gamma}(0)(\gamma(0)) = \int_\gamma \frac{dz}{z-a}$. □

4.9 Lema. *Sean $a \in \mathbb{C}$ y γ_1, γ_2 curvas con punto final e inicial $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$. Supongamos que γ_1 y γ_2 son homotópicas en $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ (con homotopía fija en z_0). Entonces $n(\gamma_1, a) = n(\gamma_2, a)$.*

Demostración. Por la versión homotópica del teorema de Cauchy (Teorema 3.13) aplicado a la función $z \mapsto (z-a)^{-1}$ se sigue el resultado. $\square$

4.4 Definición. Sean Ω un dominio en $\mathbb{C}$ y $\gamma\colon [0,1] \to \Omega$ una curva cerrada en Ω. Decimos que γ *es homóloga a* 0 *en* Ω, y escribimos $\gamma \sim_\Omega 0$, si el conjunto $\mathcal{S} = \{a \in \mathbb{C} \setminus Ima(\gamma) : n(\gamma, a) \neq 0\}$ está contenido en Ω.

4.10 Lema. *Si $\gamma\colon [0,1] \to \Omega$ es una curva cerrada de Ω que es homotópica a una constante en Ω, entonces $\gamma \sim_\Omega 0$.*

Demostración. Sea $a \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Si γ es homotópica a una constante en $\Omega \subset \mathbb{C} \setminus \{a\}$, entonces $\int_\gamma \frac{1}{z-a} dz = 0$, por lo que $n(\gamma, a) = 0$. $\square$

4.5 Definición. Sean Ω abierto en $\mathbb{C}$ y E un subconjunto discreto de Ω. Consideremos $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus E)$, y elegimos $r > 0$ de tal manera que $\overline{D}(a,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| \leq r\} \subset \Omega$ y $\overline{D}(a,r) \cap E = \{a\}$. Entonces f tiene un desarrollo en serie de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad 0 < |z-a| < r.$$

Al coeficiente c_{-1} lo llamamos el *residuo de f en a* y lo denotamos $res_f(a)$.

4.11 Teorema (del Residuo). *Sean Ω un abierto en $\mathbb{C}$ y E un conjunto discreto en Ω. Sea γ una curva cerrada en $\Omega \setminus E$ que es homotópica a una curva constante en Ω. Entonces para todo $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus E)$ el conjunto $\{a \in E : n(\gamma, a) \neq 0\}$ es finito y tenemos*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f dz = \sum_{a \in E} res_f(a)\, n(\gamma, a) \tag{4.1}$$

Demostración. Sean $\gamma\colon [0,1] \to \Omega \setminus E$ y $F\colon I \times I \to \Omega$ una homotopía entre γ y una curva constante (la homotopía fija $\gamma(0) = \gamma(1)$). Sea $K = F(I \times I)$. Como K es compacto por ser la imagen continua de un conjunto compacto y E es discreto se tiene que $K \cap E$ es finito. Si $a \in E$ y $a \notin K$, entonces F es una homotopía entre γ en una curva constante en $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ por lo que, $n(\gamma, a) = 0$. Entonces $\{a \in E : n(\gamma, a) \neq 0\} \subset E \cap K$ y por tanto es finito. Sea $E \cap K = \{a_1, \ldots, a_p\}$ y consideremos g_j la parte principal de f en a_j, entonces $f - g_1 - \cdots - g_p$ es holomorfa en un conjunto abierto $U \supset K$ y γ es homotópica a una constante en U. Por la versión homotópica del teorema de Cauchy (Teorema 3.13) se tiene:

$$\int_\gamma f dz = \sum_{j=1}^{p} \int_\gamma g_j dz.$$

Sea $g_j(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n^{(j)}(z-a_j)^n$ la parte principal del desarrollo en serie de Laurent de f en a_j. Esta serie converge uniformemente sobre $Ima(\gamma)$, y entonces

$$\int_\gamma g_j dz = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n^{(j)} \int_\gamma (z-a_j)^n dz = 2\pi i c_{-1}^{(j)} n(\gamma, a_j).$$

Ya que $(z-a_j)^n$ tiene por primitiva a $\frac{(z-a_j)^{n+1}}{n+1}$ sobre $\mathbb{C}\setminus\{a\}$ para $n \neq -1$, entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f dz = \sum_{j=1}^{p} n(\gamma, a_j)c_{-1}^{(j)} = \sum_{j=1}^{p} n(\gamma, a_j) res_f(a_j) = \sum_{a\in E} n(\gamma, a) res_f(a).$$

□

4.12 Teorema (Fórmula de Cauchy). *Sean Ω un conjunto abierto en $\mathbb{C}$ y γ una curva cerrada en Ω homotópica a una constante. Consideremos $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $a \in Ima(\gamma)$. Entonces*

$$n(\gamma, a)f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a} dz.$$

Demostración. La función $g\colon \Omega\setminus\{a\} \to \mathbb{C}$ definida por $g(z) = \frac{f(z)}{z-a}$ es holomorfa sobre $\Omega\setminus\{a\}$ y se tiene

$$res_g(a) = \lim_{z\to a}(z-a)\frac{f(z)}{z-a} = \lim_{z\to a} f(z) = f(a).$$

Entonces por Teorema 4.11 se cumple que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a} dz = f(a) n(\gamma, a).$$

□

4.13 Proposición. *Toda curva $\gamma\colon [0,1] \to \Omega$ es homotópica a una curva diferenciable a trozos $\Gamma\colon [0,1] \to \Omega$ mediante una homotopía que deja fijos los puntos extremos.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $D(\gamma(t),\varepsilon) \subset \Omega$ para cualquier $t \in [0,1]$. Sea $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_p = 1$ de tal manera que $|\gamma(t) - \gamma(t_\nu)| < \frac{\varepsilon}{2}$ para cualquier $t_\nu < t < t_{\nu+1}$ $\nu = 0,\ldots,p-1$. Definimos $\Gamma\colon I \to \Omega$ de la siguiente manera. Si $t_\nu < t < t_{\nu+1}$, sea $\Gamma(t) = \alpha_\nu t + \beta_\nu$ tal que $\alpha_\nu, \beta_\nu \in \mathbb{C}$ y se eligen de manera que $\gamma(t_\nu) = \alpha_\nu t_\nu + \beta_\nu$ y $\gamma(t_{\nu+1}) = \alpha_\nu t_{\nu+1} + \beta_\nu$. Entonces Γ es diferenciable a trozos. Mas aún, $|\gamma(t_{\nu+1}) - \gamma(t_\nu)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Así, $|\Gamma(t) - \gamma(t_\nu)| = |\Gamma(t) - \Gamma(t_\nu)| < \frac{\varepsilon}{2}$ (el segmento entre $\gamma(t_\nu)$ y $\gamma(t_{\nu+1})$ está en el disco $D(\gamma(t_\nu),\frac{\varepsilon}{2})$, entonces $|\Gamma(t) - \gamma(t)| < \varepsilon$ para $0 \leq t \leq 1$). La aplicación $F(t,u) = (1-u)\gamma(t) + u\Gamma(t)$ con $0 \leq t \leq 1$ y $0 \leq u \leq 1$, es una homotopía entre Γ y γ, ya que $F(t,u) \in \Omega$ para cualquier u,t. Además como $|F(t,u) - \gamma(t)| = u|\Gamma(t) - \gamma(t)| < \varepsilon$, es continua. Y fija los extremos debido a que se cumplen las relaciones

$$\begin{aligned} F(0,0) = \gamma(0) = \beta_0 = \Gamma(0) = F(0,1) \\ F(1,0) = \gamma(1) = \alpha p - 1 + \beta_{p-1} = \Gamma(1) = F(1,1). \end{aligned}$$

□

4.14 Teorema (Versión Homológica del Teorema de Cauchy). *Sean Ω un dominio en $\mathbb{C}$ y $\gamma\colon [0,1] \to \Omega$ una curva cerrada en $\mathbb{C}$, con $\gamma \sim_\Omega 0$. Entonces para cualquier $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tenemos:*

$$\int_\gamma f dz = 0$$

Demostración. Por la proposición anterior existe $\Gamma\colon [0,1] \to \Omega$ curva diferenciable a trozos que es homotópica a γ con los extremos fijos, por el Lema 4.9, $n(\gamma,a) = n(\Gamma,a)$ para $a \in \Omega$ y entonces $\Gamma \sim_\Omega 0$. Por la versión homotópica del teorema de Cauchy (Teorema 3.13) se tiene que para cualquier $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ se cumple

$$\int_\gamma f dz = \int_\Gamma f dz.$$

Sea $\{R_n\}$ una sucesión de funciones racionales cuyos polos[3] están fuera de

[3]Si f es una función holomorfa en una región Ω que contine alguna vecindad agujerada de z_0, entonces z_0 es una sigularidad aislada. Además, si en el desarrollo de Laurent de z_0 todos los c_{-n} con $n \in \mathbb{N}$, excepto un número finito son cero diremos que z_0 es un polo.

Ω y de tal manera que $\lim_{n\to\infty} R_n = f$ uniformemente sobre $Ima(\Gamma)$[4], entonces

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Gamma R_n dz = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 R_n(\Gamma(t))\Gamma'(t)dt = \int_0^1 f(\Gamma(t))\Gamma'(t)dt = \int_\Gamma f dz.$$

Por otra parte sea E_n el conjunto de polos de R_n, es decir, $E_n \subset \mathbb{C}\setminus\Omega$. Por el teorema del Residuo (4.11 Teorema) se tiene que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R_n dz = \sum_{a\in E_n} n(\Gamma,a)res_{R_n}(a) = 0$$

pues $n(\Gamma,a) = 0$ para cualquier $a \notin \Omega$. Entonces

$$\int_\Gamma f dz = \lim_{n\to\infty}\int_\Gamma R_n dz = 0$$

lo que demuestra que $\int_\gamma f dz = 0$. □

4.3. La ecuación $\frac{\partial u}{\partial \bar z} = \phi$

En ésta sección mostraremos la existencia de una función $u \in C^\infty(\Omega)$ que cumple la ecuación $\frac{\partial u}{\partial \bar z} = \phi$ para una función $\phi \in C_0^\infty$. La existencia de esta función nos será importante en el siguiente capítulo.

4.15 Lema. *Sean R, R' rectángulos cerrados en $\mathbb{C}$ tales que $R' \subset int(R)$. Consideremos un abierto U que contiene a $R\setminus int(R')$ y $\phi \in C_0^\infty(U)$. Entonces*

$$2i\iint_{R\setminus R'}\frac{\partial\phi}{\partial\bar z}dxdy = \int_{\partial R}\phi dz - \int_{\partial R'}\phi dz.$$

Demostración. Sean $K = R\setminus int(R')$ y $\alpha \in C_0^\infty(U)$ tal que $\alpha|_K = 1$. Definamos una función ψ sobre una vecindad V de R por

$$\psi(z) = \begin{cases}\alpha(z)\phi(z) & \text{si } z\in U,\\ 0 & \text{si } z \in V\setminus U.\end{cases}$$

[4]Esto se garantiza mediante:
Teorema Clásico de Runge. Si $\mathbb{C}\setminus\Omega$ es conexo, entonces toda función en $\mathcal{H}(\Omega)$ puede aproximarse uniformemente por funciones racionales en Ω.
Véase [1] o [32].

Entonces

$$2i \iint_R \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}} dxdy = \int_{\partial R} \psi dz = \int_{\partial R} \phi dz, \tag{4.2}$$

y

$$2i \iint_{R'} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}} dxdy = \int_{\partial R'} \psi dz = \int_{\partial R'} \phi dz. \tag{4.3}$$

Restando 4.3 en 4.2 se tiene el resultado. □

4.16 Lema.

$$\iint_{|z|<1} \frac{1}{|z|} dxdy = 2\pi.$$

Demostración. Si cambiamos a coordenadas polares haciendo $z = re^{i\theta}$, obtenemos

$$\iint_{|z|<1} \frac{1}{|z|} dxdy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \Big(\frac{1}{r}\Big) r dr d\theta = 2\pi$$

□

4.17 Teorema. *Sea $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{C})$. Entonces, para $w \in \mathbb{C}$ se tiene*

$$\iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}} \frac{1}{z-w} dxdy = -\pi \phi(w)$$

Demostración. Si reemplazamos z por $z + w$ (w fijo), la fórmula de cambio de variable en una integral doble nos lleva a

$$\iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}} \frac{1}{z-w} dxdy = \iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}}(z+w) \frac{1}{z} dxdy.$$

Como ϕ tiene soporte compacto, podemos encontrar R un rectángulo que contiene al origen y tal que $\phi(z + w) = 0$ para cualquier $z \notin int(R)$. Consideremos $R_\varepsilon = [-\varepsilon, \varepsilon] \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ con ε un número real positivo pequeño de tal manera que $R_\varepsilon \subset int(R)$. Entonces por el Lema 4.15

$$\begin{aligned} 2i \iint_{R \setminus R_\varepsilon} \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}}(z+w) \frac{1}{z} dxdy &= 2i \iint_{R \setminus R_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \Big(\frac{\phi(z+w)}{z} \Big) dxdy \\ &= -\int_{\partial R_\varepsilon} \frac{\phi(z+w)}{z} dz \end{aligned}$$

pues $\phi(z+w) = 0$ para $z \in \partial R$. Ahora,

$$\int_{\partial R_\varepsilon} \frac{\phi(z+w)}{z} dz = \int_{\partial R_\varepsilon} \frac{\phi(z+w) - \phi(w)}{z} dz + 2\pi i \phi(w).$$

Como $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{C})$, entonces existe $M > 0$ tal que $|\phi(z+w) - \phi(w)| \leq M|z|$. Así,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left| \int_{\partial R_\varepsilon} \frac{\phi(z+w) - \phi(w)}{z} dz \right| \leq \lim_{\varepsilon \to 0} M \cdot L(\partial R_\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} M \cdot 8\varepsilon = 0.$$

Por el Lema 4.16

$$2i \iint_R \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}}(z+w) \frac{1}{z} dx dy = -2\pi i \phi(w).$$

Como $\phi(z+w) = 0$ para $z \notin R$, se tiene

$$\iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}} \frac{1}{z-w} dx dy = \iint_R \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}}(z+w) \frac{1}{z} dx dy = -\pi \phi(w).$$

□

4.18 Teorema. *Sea $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{C})$. Definimos una función u sobre $\mathbb{C}$ como*

$$u(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\phi(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta$$

($\zeta = \xi + i\eta$, ξ, $\eta \in \mathbb{R}$ y $d\xi d\eta$ denotan la medida de Lebesgue en el ζ-plano). Entonces $u \in C_0^\infty(\mathbb{C})$ y se tiene

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \phi.$$

Demostración. De igual manera que en el Teorema 4.17 si reemplazamos ζ por $\zeta + z$, tenemos que

$$u(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\phi(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta = -\frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\phi(\zeta + z)}{\zeta} d\xi d\eta,$$

como $\frac{1}{\zeta}$ es integrable sobre cualquier conjunto compacto (por el Lema 4.16), es continua. Sea $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Entonces

$$\frac{u(z+h) - u(z)}{h} = -\frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{1}{\zeta} \frac{\phi(\zeta + z + h) - \phi(\zeta + z)}{h} d\xi d\eta$$

Para z y ζ fijos se tiene

$$\lim_{h\to 0} \frac{\phi(\zeta+z+h)-\phi(\zeta+z)}{h} = \frac{\partial \phi}{\partial \xi}(\zeta+z)$$

Mas aún, como ϕ es continuamente diferenciable y tiene soporte compacto, éste límite converge uniformemente en ζ para z en todo subconjunto compacto de $\mathbb{C}$. Ahora, como $\frac{1}{|\zeta|}$ es integrable sobre cada conjunto compacto, concluimos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}(z) &= \lim_{h\to 0} \frac{u(z+h)-u(z)}{h} \\
&= -\frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{1}{\zeta} \frac{\partial \phi}{\partial \xi}(\zeta+z) d\xi d\eta \\
&= -\frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial \phi}{\partial \xi}(\zeta) \frac{1}{\zeta - z} d\xi d\eta
\end{aligned}$$

y este límite es uniforme para z en cualquier conjunto compacto en $\mathbb{C}$, por tanto $\frac{\partial u}{\partial x}$ es continua. Similarmente se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial y}(z) &= -\frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{1}{\zeta} \frac{\partial \phi}{\partial \eta}(\zeta+z) d\xi d\eta \\
&= -\frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial \phi}{\partial \eta}(\zeta) \frac{1}{\zeta - z} d\xi d\eta
\end{aligned}$$

y es continua. Repitiendo estos argumentos, podemos establecer que la función u pertenece a $C_0^\infty(\mathbb{C})$.
Finalmente

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y}\Big) \\
&= -\frac{1}{2\pi}\Big(\iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial \phi}{\partial x}(\zeta)\frac{1}{\zeta - z} d\xi d\eta + i \iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial \phi}{\partial \eta}(\zeta)\frac{1}{\zeta - z} d\xi d\eta\Big) \\
&= -\frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{C}} \Big(\frac{\partial \phi}{\partial \xi}(\zeta) + i\frac{\partial \phi}{\partial \eta}(\zeta)\Big)\frac{1}{\zeta - z} d\xi d\eta \\
&= -\frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{C}} 2\frac{\partial \phi}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta)\frac{1}{\zeta - z} d\xi d\eta \\
&= -\frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial \phi}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta)\frac{1}{\zeta - z} d\xi d\eta,
\end{aligned}$$

así por el Teorema 4.17 se tiene,

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \phi(z)$$

□

4.19 Teorema (Variante de la Fórmula Integral de Cauchy). *Sean Ω un abierto en $\mathbb{C}$ y K un compacto de Ω. Sea $\alpha \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\alpha = 1$ sobre cualquier vecindad de K. Entonces, para toda función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ se tiene*

$$f(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_\Omega \frac{\partial \alpha}{\partial \bar{\zeta}} f(\zeta)\frac{1}{\zeta - z}d\xi d\eta \quad \textit{para } z \in K.$$

Demostración. Definimos $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ por

$$\phi(z) = \begin{cases} \alpha(z)f(z) & \text{si } z \in \Omega, \\ 0 & \text{si } z \in \mathbb{C}\setminus\Omega. \end{cases}$$

Entonces para $z \in K$ se tiene

$$\begin{aligned} f(z) &= \phi(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_\Omega \frac{\partial \phi}{\partial \bar{\zeta}}\frac{1}{\zeta - z}d\xi d\eta \\ &= -\frac{1}{\pi}\iint_\Omega \Big(\frac{\partial \alpha}{\partial \bar{\zeta}} f + \alpha\frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}\Big)d\xi d\eta \\ &= -\frac{1}{\pi}\iint_\Omega \frac{\partial \phi}{\partial \bar{\zeta}}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\xi d\eta. \end{aligned}$$

□

4.6 Definición. Sea Ω un abierto en $\mathbb{C}$ y $A \subset \Omega$. Definimos $\hat{A}$ como la unión de A con todas las componentes conexas de $\Omega \setminus A$ que son relativamente compactas en Ω.

4.20 Teorema. *Sean Ω un abierto en $\mathbb{C}$ y $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Entonces, existe $u \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \phi$ sobre Ω.*

Demostración. Si K es un subconjunto compacto de Ω, sea $\alpha \in C_0^\infty(\Omega)$ con $\alpha \equiv 1$ en una vecindad de K, por el Teorema 4.18, aplicado a $\alpha\phi$ (en lugar de ϕ), existe $v \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\frac{\partial v}{\partial \bar{z}} = \alpha\phi = \phi$ en una vecindad de K. Sea $\{K_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de conjuntos compactos en Ω tales que $K_n \subset int(K_{n+1})$, $\cup K_n = \Omega$ y $K_n = \hat{K_n}$. Aplicando lo anterior a cada K_n, se tiene que existe $v_n \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\frac{\partial v_n}{\partial \bar{z}} = \phi$ sobre una vecindad de K_n. Entonces $v_{p+1} - v_p \in \mathcal{O}(K_p)$. Elegimos $h_p \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $|v_{p+1} - v_p - h_p| < \frac{1}{2^p}$. Definimos u sobre Ω como

$$u = v_p \sum_{q\geq p}(v_{q+1} - v_q - h_q) - h_1 - \cdots - h_{p-1}$$

sobre K_p. Esta expresión define a u independientemente de p. Entonces $w_q = v_{q+1} - v_q - h_q \in \mathcal{H}(int(K_p))$ para $q \geq p$ y la serie $\sum_{q \geq p} w_p$ converge uniformemente sobre K_p. Así, encontramos $u - v_p \in \mathcal{H}(int(K_p))$, tal que $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial v_p}{\partial \bar{z}} = \phi$ sobre K_p. Entonces como $p \geq 1$ es arbitrario, el resultado se obtiene. $\square$

Capítulo 5

Versión Cohomológica del Teorema de Cauchy

En este capítulo se definen los primeros Grupos de Cohomología con coeficientes en $\mathbb{C}$, con respecto a una cubierta $\mathcal{U}$ de un dominio Ω y se utilizan resultados sobre funciones localmente constantes para mostrar la versión cohomológica del teorema de Cauchy.

5.1. Grupos de cohomología

Supongamos que X es un espacio topológico y que $\mathcal{I}$ es un sistema de conjuntos abiertos en X. Una *pregavilla* de grupos abelianos sobre X es un par $(\mathcal{F}, \rho)$ que consiste de:

- Una familia $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}(U)\}_{U \in \mathcal{I}}$ de grupos abelianos.
- Una familia $\rho = \{\rho_V^U : \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U); U, V \in \mathcal{I}\, V \subset U\}$ de homomorfismos de grupos con las siguientes propiedades:
    - $\rho_U^U = id_{\mathcal{F}(U)}$ para todo $U \in \mathcal{I}$
    - $\rho_W^V \circ \rho_V^U = \rho_W^U$ para $W \subset V \subset U$

Denotaremos mediante $\mathcal{F}$ a $(\mathcal{F}, \rho)$.

Una pregavilla $\mathcal{F}$ es llamada *gavilla* sobre un espacio topológico X si para todo $U \subset X$ y cualquier familia de subconjuntos abiertos $U_i \subset U$, $i \in I$ tal que $U = \cup_{i \in I} U_i$ se cumple:

- Si $f, g \in \mathcal{F}(U)$ son elementos tal que $f|_{U_i} = g|_{U_i}$ para cualquier $i \in I$, entonces $f = g$.

- Si para elementos $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ con $i \in I$ tales que $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$ para cualesquiera $i, j \in I$, existe $f \in \mathcal{F}(U)$ de tal manera que $f|_{U_i} = f_i$ para cualquier $i \in I$.

Sean X un espacio topológico y $\mathcal{F}$ una gavilla de grupos abelianos. Supongamos que existe una familia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ de subconjuntos de X tal que $X = \cup_{i \in I} U_i$. Para cada entero $q = 0, 1, 2, \ldots$, definimos el q-grupo cocadena de $\mathcal{F}$, con respecto a $\mathcal{U}$ como el conjunto

$$\mathcal{C}^q(\mathcal{U}, X) := \prod_{(i_0, \ldots, i_q) \in I^{q+1}} \mathcal{F}(U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_q}).$$

Los elementos de $\mathcal{C}^q(\mathcal{U}, X)$ son llamados q-cocadenas. Una q-cocadena es una familia $(f_{i_0, \ldots, i_q})_{(i_0, \ldots, i_q) \in I^{q+1}}$ tal que $f_{i_0, \ldots, i_q} \in \mathcal{F}(U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_q})$ para cada $(i_0, \ldots, i_q) \in I^{q+1}$. La suma de dos cocadenas está definida componente a componente, lo que da a $\mathcal{C}^q(\mathcal{U}, X)$ una estructura de grupo.

Definamos ahora los operadores coborde

$$\delta \colon \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \quad \text{y} \quad \delta \colon \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to \mathcal{C}^2(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

Para $(f_i)_{i \in I} \in \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ definimos su imagen bajo $\delta \colon \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ como $\delta((f_i)_{i \in I}) = (g_{ij})_{i,j \in I}$ donde $g_{ij} := f_i - f_j \in \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$.

Para $(f_{ij})_{i,j \in I} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ definimos su imagen bajo $\delta \colon \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to \mathcal{C}^2(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ como $\delta(\ (f_{ij})_{i,j,k \in I}\ ) = (\ g_{ijk}\ )_{i,j,k \in I}$ donde $g_{ijk} := f_{ij} + f_{jk} + f_{ki} \in \mathcal{F}(U_i \cap U_j \cap U_k)$.

5.1 Observación. Los operadores coborde son homomorfismos de grupos.

5.2 Observación. $\delta \circ \delta = 0$

Sea

$$\mathcal{Z}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := \ker(\mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} \mathcal{C}^2(\mathcal{U}, \mathcal{F}))$$

que llamaremos el conjuntos de los 1-*cociclos* y

$$\mathcal{B}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) := Ima(\mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}))$$

que será el conjunto de 1-*bordes*. Por la Observación 5.2, $\mathcal{B}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ es un grupo normal de $\mathcal{Z}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

5.1 Definición. El grupo cociente

$$\mathcal{H}^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) := \frac{\mathcal{Z}^1(\mathcal{U},\mathcal{F})}{\mathcal{B}^1(\mathcal{U},\mathcal{F})} = \frac{\ker(\delta)}{Ima(\delta)}$$

es llamado el *Primer Grupo de Cohomología* con coeficientes en $\mathcal{F}$ con respecto a la cubierta $\mathcal{U}$.

El cero-grupo de Cohomología

Definimos también el conjunto de 0-*cociclos* como

$$\mathcal{Z}^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) := \ker(\mathcal{C}^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} \mathcal{C}^1(\mathcal{U},\mathcal{F}))$$

y el conjunto de 0-*bordes* mediante

$$\mathcal{B}^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) := 0$$

Por tanto podemos también considerar al grupo cociente,

$$H^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) := \frac{\mathcal{Z}^0(\mathcal{U},\mathcal{F})}{\mathcal{B}^0(\mathcal{U},\mathcal{F})} = \mathcal{Z}^0(\mathcal{U},\mathcal{F})$$

a este grupo le llamamos el *cero-grupo de cohomología* con coeficientes en $\mathcal{F}$ con respecto a la cubierta $\mathcal{U}$.

De la definición de δ, si tomamos una 0-cocadena $(f_i) \in \mathcal{C}^0(\mathcal{U},\mathcal{F})$ en $\mathcal{Z}^0(\mathcal{U},\mathcal{F})$ se tiene que $f_i|_{U_i\cap U_j} = f_j|_{U_i\cap U_j}$ para cualquier $i,j \in I$. Los elementos f_i definen un elemento global $f \in \mathcal{F}(X)$ y por tanto se tiene un isomorfismo natural entre $H^0(\mathcal{U},\mathcal{F})$ y $\mathcal{F}(X)$, es decir

$$H^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \mathcal{Z}^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) \cong \mathcal{F}(X).$$

El grupo $H^0(\mathcal{U},\mathcal{F})$ es independiente de la cubierta $\mathcal{U}$ y por tanto lo podemos definir como

$$H^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) := \mathcal{F}(X)$$

El grupo $H^0(\mathcal{U},\mathcal{F})$ nos da el número de componentes conexas de X pues si $f_i \neq f_j$ entonces $c_i \neq c_j$ con c_i y c_j constantes y por tanto $\mathcal{U}$ tiene tantas componentes como constantes c_i distintas existan.

5.2. Versión Cohomológica del Teorema de Cauchy

En ésta parte daremos la prueba de la versión cohomológica del teorema de Cauchy y algunas de sus consecuencias como por ejemplo, que el primer grupo de cohomología para un dominio simplemente conexo es cero.

5.1 Teorema. *Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y sea $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ una cubierta de Ω. Supongamos que para cada par $i, j \in I$ se tiene una función $\phi_{ij} \in C^\infty(U_i \cap U_j)$. Supongamos además que para cada tres índices $i, j, k \in I$ tenemos que $\phi_{ik} = \phi_{ij} + \phi_{jk}$ sobre $U_i \cap U_j \cap U_k$. Entonces, existe una familia de funciones $\{\phi_i\}_{i\in I}$ con $\phi_i \in C^\infty(U_i)$ tal que $\phi_i - \phi_j = \phi_{ij}$ sobre $U_i \cap U_j$ para cualquier $i, j \in I$.*

Demostración. Sea $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ una partición de la unidad relativa a $\mathcal{U}$. Para cada abierto U_i de la cubierta, definimos $\tilde{\phi}_i \colon U_i \to \mathbb{C}$ mediante:

$$\tilde{\phi}_i(x) = \begin{cases} \alpha_j(x)\phi_{ij}(x) & \text{si } x \in U_i \cap U_j, \\ 0 & \text{si } x \in U_i \setminus (U_i \cap U_j) \end{cases}.$$

Entonces $\tilde{\phi}_i \in C^\infty(U_i)$. Definamos la función

$$\phi_i = \sum_{j\in I} \alpha_j \phi_{ij} \quad \text{sobre } U_i.$$

Entonces, como la familia $\{supp(\alpha_j)\}$ es locamente finita, la suma anterior contiene un número finito de términos distintos de cero en una vecindad de cada punto de U_i, por tanto, $\phi_i \in C^\infty(U_i)$. Veremos ahora que cumplen la ecuación. Entonces, debido a que $\phi_{ij} + \phi_{jk} = \phi_{ik}$ sobre $U_i \cap U_j \cap U_k$, tomando $i = k = j$ se tiene $2\phi_{ii} = \phi_{ii}$ lo que implica que $\phi_{ii} = 0$ sobre U_i. Si $k = i$, obtenemos que $\phi_{ij} + \phi_{ji} = \phi_{ii} = 0$, de donde $\phi_{ij} = -\phi_{ji}$ en $U_i \cap U_j$. Sean $k, l \in I$, entonces

$$\phi_k - \phi_l = \sum_{j\neq k,l} \alpha_j(\phi_{kj} - \phi_{lj}) + \alpha_l\phi_{kl} - \alpha_k\phi_{lk}$$

Ya que $\phi_{kj} - \phi_{lj} = \phi_{kj} + \phi_{jl} = \phi_{kl}$ y $\phi_{kl} = -\phi_{lk}$ se obtiene que:

$$\phi_k - \phi_l = \sum_{j\neq k,l} \alpha_j(\phi_{kl}) + \alpha_l\phi_{kl} + \alpha_k\phi_{kl} = \sum_{j\in I} \alpha_j\phi_{kl} = \phi_{kl}$$

lo cual prueba la afirmación. $\square$

5.2 Teorema. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ una región y $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ una cubierta abierta de Ω. Supongamos que para todo $i, j \in I$ existen $f_{ij} \in \mathcal{H}(U_i \cap U_j)$ (con la convención de que $\mathcal{H}(\emptyset) = \{0\}$) y que la familia $\{f_{ij}\}$ satisface la condición $f_{ij} + f_{jk} = f_{ik}$ sobre $U_i \cap U_j \cap U_k$ para cualesquiera $i, j, k \in I$. Entonces existe la familia $\{f_i\}_{i\in I}$, donde $f_i \in \mathcal{H}(U_i)$, tal que $f_i - f_j = f_{ij}$ en $U_i \cap U_j$ para cualesquiera $i, j \in I$.*

Demostración. Por el Teorema 5.1 podemos encontrar una familia $\{\phi_i\}_{i\in I}$ donde $\phi_i \in C^\infty(U_i)$ de tal manera que $\phi_i - \phi_j = f_{ij}$ en $U_i \cap U_j$ para todo $i, j \in I$. En particular $(\frac{\partial \phi_i}{\partial \bar{z}}) - (\frac{\partial \phi_j}{\partial \bar{z}}) = \frac{\partial f_{ij}}{\partial \bar{z}} = 0$ sobre $U_i \cap U_j$, ya que $f_{ij} \in \mathcal{H}(U_i \cap U_j)$. Podemos definir $\phi \in C^\infty(\Omega)$ mediante $\phi|_{U_i} = \frac{\partial \phi_i}{\partial \bar{z}}$ para cualquier $i \in I$, que está bien definida. Sea $u \in C^\infty(\Omega)$ tal que $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \phi$ en Ω (la función u existe en virtud del Teorema 4.20) y sean $f_i = \phi_i - u$ en U_i, es claro que $f_i \in \mathcal{H}(U_i)$. Además, para $i, j \in I$, se tiene que $f_i - f_j = (\phi_i - u) - (\phi_j - u) = \phi_i - \phi_j = f_{ij}$ en $U_i \cap U_j$ como se deseaba demostrar. □

Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ y sea $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ una cubierta de Ω, es decir, $\Omega = \cup_{i\in I} U_i$. Sea $J \subset I \times I$ el conjunto de pares (i, j) tal que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Consideremos para un abierto $V \subset \mathbb{C}$ el conjunto de funciones con valores complejos definida en V que son localmente constantes y que se denotará como $\mathbb{C}(V)$ (si V es conexo, entonces las funciones son constantes). En este caso tenemos

$$\mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{C}) = \prod_{(i,j)\in J} \mathbb{C}(U_i \cap U_j)$$

y los elementos de tal conjunto son llamados 1-*cocadenas* del cubriente $\mathcal{U}$ con valores en $\mathbb{C}$.

Definamos

$$\mathcal{Z}^1(\mathcal{U}, \mathbb{C}) = \{\{c_{ij}\} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{C}) \colon c_{ij} + c_{jk} + c_{ki} = 0 \text{ sobre } U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset\}$$

Para el conjunto de 0-cocadenas $\mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathbb{C}) = \prod_{i\in I} \mathbb{C}(U_i)$, definimos la aplicación $\delta \colon \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathbb{C}) \to \mathcal{Z}^1(\mathcal{U}, \mathbb{C})$ de la siguiente manera. Si $(c_i)_{i\in I} \in \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathbb{C})$ con $c_i \in \mathbb{C}(U_i)$ entonces $(\delta c)_{ij} = c_i|_{U_i\cap U_j} - c_j|_{U_i\cap U_j} = c_i - c_j$ en $U_i \cap U_j$ para $(i, j) \in J$. Llamamos $\mathcal{B}^1(\mathcal{U}, \mathbb{C}) = Ima(\delta)$.

5.3 Observación. Los conjuntos $\mathcal{Z}^1(\mathcal{U}, \mathbb{C})$ y $\mathcal{B}^1(\mathcal{U}, \mathbb{C})$ son grupos aditivos y $\mathbb{C}$-espacios vectoriales. Además $\mathcal{B}^1$ es un subgrupo normal de $\mathcal{Z}^1$.

5.4 Observación. Con lo anterior podemos definir el grupo cociente

$$H^1(\mathcal{U},\mathbb{C}) := \frac{\mathcal{Z}^1(\mathcal{U},\mathbb{C})}{\mathcal{B}^1(\mathcal{U},\mathbb{C})}.$$

5.2 Definición. El grupo $H^1(\mathcal{U},\mathbb{C})$ se llama el *primer grupo de cohomología* con coeficientes en $\mathbb{C}$ con respecto a la cubierta $\mathcal{U}$.

5.3 Definición. Definimos $H^0(\mathcal{U},\mathbb{C}) := \mathcal{Z}^0(\mathcal{U},\mathbb{C}) = \ker\delta$ y se llama el *0-grupo de cohomología* con coeficientes en $\mathbb{C}$ con respecto a la cubierta $\mathcal{U}$.

Observemos que de la igualdad $H^0(\mathcal{U},\mathbb{C}) = \mathcal{Z}^0(\mathcal{U},\mathbb{C})$ obtenemos el número de componentes conexas de X (véase la página 73).

5.3 Teorema. *Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio y $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ una cubierta de Ω por discos abiertos (es decir, cada U_i es un disco). Supongamos que $\mathcal{H}^1(\mathcal{U},\mathbb{C}) = 0$. Entonces toda $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, tiene una primitiva en Ω.*

Demostración. Sea $J = \{(i,j) \in I\times I : U_i\cap U_j \neq \emptyset\}$. En cada disco U_i tenemos, por el Teorema 2.9, que f tiene una primitiva F_i. Si $(i,j)\in J$, definimos $c_{ij} = F_i - F_j$ en $U_i\cap U_j$. Como $U_i\cap U_j$ es conexo, c_{ij} es constante, ya que las primitivas difieren en una constante. Si $i,j,k\in I$ son tales que $U_i\cap U_j\cap U_k \neq \emptyset$, entonces $c_{ij}+c_{jk}+c_{ki} = (F_i-F_j)+(F_j-F_k)+(F_k-F_i) = 0$. Por tanto $\xi = \{(c_{ij})_{(i,j)\in J}\} \in \mathcal{Z}^1(\mathcal{U},\mathbb{C})$. Pero $\mathcal{H}^1(\mathcal{U},\mathbb{C}) = 0$, entonces existe $c = (c_i)_{i\in I} \in \mathcal{C}^0(\mathcal{U},\mathbb{C})$ tal que $\delta(c) = \xi$. Es decir, existe una familia $(c_i)_{i\in I} \in \prod \mathbb{C}(U_i)$ con $F_i - F_j = c_i - c_j$ en $U_i\cap U_j$ para cualquier $(i,j)\in J$. Ahora definimos $F\colon \Omega \to \mathbb{C}$ como $F|_{U_i} = F_i - c_i$ donde F_i es una primitiva de f en U_i, entonces como $F_i - c_i = F_j - c_j$ en $U_i\cap U_j$, la función F está bien definida. Además $F' = F_i' = f$ en U_i para todo $i\in I$, por lo tanto F es una primitiva de f en Ω. □

Sean $\Omega\subset\mathbb{C}$ un dominio y $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ una cubierta abierta de Ω por discos U_i. Definimos un homomorfismo (de $\mathbb{C}$-espacios vectoriales)

$$\delta_{\mathcal{U}}\colon \mathcal{H}(\Omega) \to H^1(\mathcal{U},\mathbb{C})$$

de la siguiente manera: Sea $f\in\mathcal{H}(\Omega)$. Para cada disco U_i tenemos que $f|_{U_i}$ tiene una primitiva F_i en U_i por el Teorema 2.9. Como $(F_i - F_j)' = f - f = 0$ en $U_i\cap U_j$, entonces $c_{ij} = F_i - F_j$ es constante sobre $U_i\cap U_j$. La familia $\{c_{ij}\}_{(i,j)\in J}$ (donde $J = \{(i,j)\in I\times I : U_i\cap U_j\neq\emptyset\}$) está en $\mathcal{Z}^1(\mathcal{U},\mathbb{C})$, ya que $c_{ij} + c_{jk} = (F_i - F_j) + (F_j + F_k) = (F_i - F_j) = c_{ik}$ en $U_i\cap U_j\cap U_k$. Definimos $\delta_{\mathcal{U}}(f)$ a la clase en $H^1(\mathcal{U},\mathbb{C})$ de $\{c_{ij}\}$. Sea $\{G_i\}_{i\in I}$ otra familia tal que $G_i\in\mathcal{H}(U_i)$ y $G_i' = f$ en U_i. Entonces$(d/dz)(G_i - F_i) = 0$ en U_i, y como U_i es conexo, entonces $c_i = G_i - F_i$ es una constante. Si denotamos el elemento de $\mathcal{Z}^1(\mathcal{U}, \mathbb{C})$ obtenido mediante $\{G_i\}$ por $\gamma = \{\gamma_{ij}\}_{(i,j)\in J}$ donde $\gamma_{ij} = G_i - G_j$ en $U_i \cap U_j$, tenemos $\gamma_{ij} - c_{ij} = c_i - c_j$ en $U_i \cap U_j$ y entonces $\{\gamma_{ij} - c_{ij}\} \in \mathcal{B}^1(\mathcal{U}, \mathbb{C})$. Así, $\delta_{\mathcal{U}}(f)$ no depende de la elección de las primitivas $\{F_i\}$, por lo que está bien definida.

Sea $d_\Omega \colon \mathcal{H}(\Omega) \to \mathcal{H}(\Omega)$ el operador derivada $f \mapsto f' = \frac{df}{dz}$. Entonces, la ecuación $d_\Omega(F) = f$ denota simplemente que F es la primitiva de f sobre Ω.

5.4 Teorema (Versión Cohomológica del Teorema de Cauchy). *Sean Ω un dominio en $\mathbb{C}$ y $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ una cubierta abierta de Ω por discos U_i. Entonces la siguiente sucesión es exacta*

$$0 \to \mathbb{C} \xrightarrow{i_\Omega} \mathcal{H}(\Omega) \xrightarrow{d_\Omega} \mathcal{H}(\Omega) \xrightarrow{\delta_{\mathcal{U}}} H^1(\mathcal{U}, \mathbb{C}) \to 0$$

donde i_Ω asigna a cada número $c \in \mathbb{C}$, la función constante c sobre Ω.

Demostración. Afirmamos primero que la aplicación i_Ω es inyectiva. Esto es claro pues si c es una constante y $i_\Omega(c) = 0$, entonces $c = 0$.
Consideremos $\ker(d_\Omega)$. Tenemos que $d_\Omega(f) = \frac{df}{dz} = 0$ si y sólo si f es constante (ya que Ω es conexo). Por tanto $Ima(i_\Omega) = \ker(d_\Omega)$.
Ahora veremos que $\ker (\delta_{\mathcal{U}}) = Ima (d_\Omega)$. Primero mostraremos que $Ima(d_\Omega) \subset \ker(\delta_{\mathcal{U}})$. Supongamos que $d_\Omega(F) = f$, y recordemos que definimos $\delta_{\mathcal{U}}(f)$ tomando la familia (F_i) de primitivas tal que $F_i = F|_{U_i}$. Entonces $\delta_{\mathcal{U}}(f)$ está en la clase de $F_i - F_j = 0$ sobre $U_i \cap U_j$. Así $\delta_{\mathcal{U}}(f) = 0$ y por tanto $Ima(d_\Omega) \subset \ker(\delta_{\mathcal{U}})$. Ahora veamos que $\ker(\delta_{\mathcal{U}}) \subset Ima(d_\Omega)$. Sea $f \in \ker(\delta_{\mathcal{U}})$, $F_i \in \mathcal{H}(U_i)$ una primitiva de f sobre U_i y $c_{ij} = F_i - F_j$ sobre $U_i \cap U_j$. Si $\delta_{\mathcal{U}}(f) = 0$, entonces existe una familia $\{c_{ij}\}_{i\in I}$, donde c_i es localmente constante (y por tanto constante) sobre U_i tal que $c_i - c_j = c_{ij}$ sobre $U_i \cap U_j$. Entonces $F_i - F_j = c_i - c_j$ ó $F_i - c_i = F_j - c_j$ sobre $U_i \cap U_j$. Por tanto si F es una función sobre Ω con $F|_{U_i} = F_i - c_i$, entonces $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ y se tiene que $d_\Omega(F)|_{U_i} = (\frac{d}{dz})(F_i - c_i) = f|_{U_i}$ donde c_i es localmente constante, luego $f \in Ima(d_\Omega)$.
Finalmente veamos que, $\delta_{\mathcal{U}}(\mathcal{H}(\Omega)) = H^1(\mathcal{U}, \mathbb{C})$. Demostraremos que $H^1(\mathcal{U}, \mathbb{C}) \subset \delta_{\mathcal{U}}(\mathcal{H}(\Omega))$. Sea $\xi \in H^1(\mathcal{U}, \mathbb{C})$ y $\{c_{ij}\} \in \mathcal{Z}(\mathcal{U}, \mathbb{C})$. Supongamos que ξ es la clase en $H^1(\mathcal{U}, \mathbb{C})$ de $\{c_{ij}\}$. Ahora, c_{ij} es localmente constante, entonces $c_{ij} \in \mathcal{H}(U_i \cap U_j)$. Por el Teorema 5.2, existe una familia $\{F_i\}_{i\in I}$ con $F_i \in \mathcal{H}(U_i)$ de tal manera que $F_i - F_j = c_{ij}$ en $U_i \cap U_j$. Entonces: $\frac{dF_i}{dz} - \frac{dF_j}{dz} = \frac{dc_{ij}}{dz} = 0$ sobre $U_i \cap U_j$ (c_{ij} es localmente constante). Así, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f|_{U_i} = \frac{dF_i}{dz}$. Por último mostraremos que

$\delta_{\mathcal{U}}(\mathcal{H}(\Omega)) \subset H^1(\mathcal{U}, \mathbb{C})$. Consideremos $\delta_{\mathcal{U}}(f)$, definimos $\delta_{\mathcal{U}}(f)$ eligiendo una primitiva F_i de f sobre U_i. Entonces $\delta_{\mathcal{U}}(f)$ es la clase en $H^1(\mathcal{U}, \mathbb{C})$ de $\{(F_i - F_j)|U_i \cap U_j\}$, es decir, de $\{c_{ij}\}$. Entonces $\delta_{\mathcal{U}}(f) = \xi$ $\square$

5.5 Corolario. *Sea Ω un subconjunto de $\mathbb{C}$ abierto. Entonces cualquier función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tiene una primitiva, si y sólo si, $H^1(\mathcal{U}, \mathbb{C}) = 0$ para alguna $\mathcal{U}$ cubierta de discos abiertos de Ω. Si esta condición se satisface para una cubierta $\mathcal{U}$ ésta se satisface para cualquier otra cubierta.*

Demostración. Si $H^1(\mathcal{U}, \mathbb{C}) = 0$, entonces $\ker(\delta_{\mathcal{U}}) = \mathcal{H}(\Omega)$, pero como $Ima(d_\Omega) = \ker(\delta_{\mathcal{U}})$ se tiene que d_Ω es suprayectiva lo que garantiza que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tenga una primitiva en Ω. Reciprocamente si cada $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tiene una primitiva se tiene que d_Ω es suprayectiva, por lo que debería suceder en la sucesión exacta del Teorema 5.4 que $H^1(\mathcal{U}, \mathbb{C}) = 0$. $\square$

5.5 Observación. El Teorema anterior sigue siendo válido para una cubierta $\mathcal{U}$ por conjuntos abiertos U_i conexos y simplemente conexos debido al Teorema 3.15.

5.6 Corolario. *Sea Ω un conjunto abierto conexo y simplemente conexo de $\mathbb{C}$. Entonces para cualquier cubierta $\mathcal{U}$ de Ω de conjuntos abiertos conexos y simplemente conexos, se tiene que $H^1(\mathcal{U}, \mathbb{C}) = 0$.*

Demostración. Si Ω es simplemente conexo, entonces $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tiene primitiva, por el Teorema 3.15. Así, $d_\Omega(\mathcal{H}(\Omega)) = \mathcal{H}(\Omega)$ y por tanto $\ker \delta_{\mathcal{U}} = \mathcal{H}(\Omega)$. Entonces $\{0\} = \delta_{\mathcal{U}}(\mathcal{H}(\Omega)) = H^1(\mathcal{U}, \mathbb{C})$, lo que prueba la afirmación. $\square$

Capítulo 6

Consecuencias del Teorema de Cauchy

6.1. Relación entre homotopía y homología en la Teoría de Cauchy

Homotopía Libre

6.1 Definición. Dos curvas cerradas $\gamma, \tilde{\gamma}$ son llamadas *homotópicamente libres en* X si existe una aplicación continua $\psi\colon I \times I \to X$ con las siguientes propiedades:

$$\begin{array}{rcll} \psi(0,t) & = & \gamma(t) & \text{para toda } t \in I \\ \psi(1,t) & = & \tilde{\gamma}(t) & \text{para toda } t \in I \\ \psi(s,0) & = & \psi(s,1) & \text{para toda } s \in I \end{array}$$

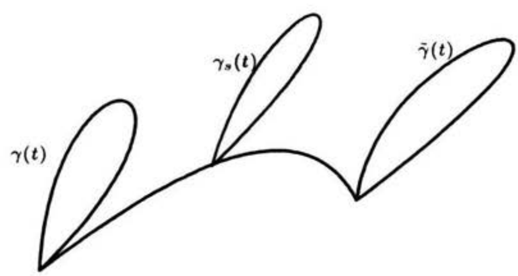


Figura 6.1: Homotopía libre de curvas

Todas las curvas $\gamma_s: I \to X$ definidas por $\gamma_s(t) = \psi(s,t)$ son cerradas. Los puntos iniciales trazan la curva $\delta: I \to X$ definida por $\delta(s) = \psi(s,0)$.

6.1 Proposición. *Si γ y $\tilde{\gamma}$ homotópicamente libres en X, entonces las curvas γ y $\delta \cdot \tilde{\gamma} \cdot \delta^{-1}$ son homotópicas con los mismos puntos iniciales y finales en X.*

Demostración. Si $\psi: I \times I \to X$ es la homotopía entre γ y $\tilde{\gamma}$, definimos $\chi: I \times I \to X$ por $\chi(s,t) = \delta(s) \cdot \psi(s,t) \cdot \delta(1-s)$; ésta es una homotopía libre con los mismos puntos iniciales y finales en X □

6.2 Teorema (de Cauchy para curvas con homotopía libre). *Sean γ y $\tilde{\gamma}$ curvas cerradas, continuamente diferenciables en un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$ y homotópicamente libres, entonces para toda $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ se tiene*

$$\int_\gamma f dz = \int_{\tilde{\gamma}} f dz.$$

Demostración. Recordemos que si $\psi: I \times I \to X$ es la homotopía libre entre γ y $\tilde{\gamma}$ entonces $\chi: I \times I \to X$ definida por $\chi(s,t) = \delta(s) \cdot \psi(s,t) \cdot \delta(1-s)$ da la homotopía entre γ y $\delta \cdot \tilde{\gamma} \cdot \delta^{-1}$, que tiene los mismos puntos iniciales y finales. Entonces

$$\int_\gamma f dz = \int_{\delta \cdot \tilde{\gamma} \cdot \delta^{-1}} f dz = \int_\delta f dz + \int_{\tilde{\gamma}} f dz - \int_\delta f dz = \int_{\tilde{\gamma}} f dz.$$

□

Homotopía y Homología nula

6.2 Definición. Una curva γ en Ω es llamada *homotópicamente nula en* Ω si es homotópicamente libre a una curva constante, es decir, si existe una homotopía con los mismos extremos en Ω entre γ y la curva constante $t \mapsto \gamma(0)$.

6.3 Proposición. *Toda curva cerrada continuamente diferenciable γ que es homotópicamente nula en Ω es homológicamente nula en Ω, además*

$$\int_\gamma f dz = 0$$

para toda $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

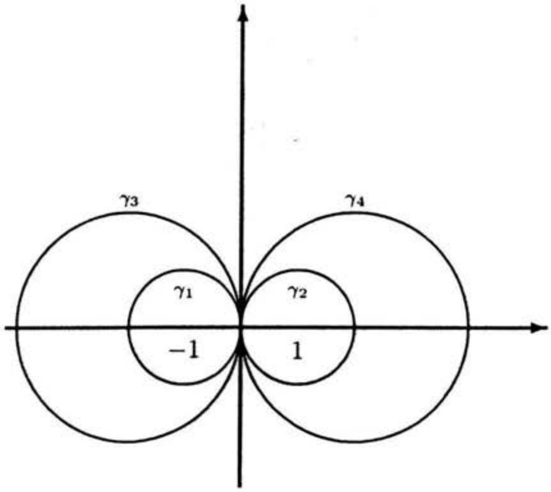


Figura 6.2: Curva homológicamente nula pero no homotópicamente nula

Demostración. Como γ es homotópicamente nula en Ω entonces para cualquier $a \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ el índice $n(\gamma, a)$ es igual a cero. Luego γ es homológicamente nula y por el teorema de Cauchy (Teorema 4.14) se sigue que

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

□

6.1 Observación. la homología nula es consecuencia de la homotopía nula.

6.2 Observación. La homología nula no implica la existencia de una homotopía nula. En el conjunto $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$, consideremos $\gamma_1 = -1 + e^{i\theta}$, $\gamma_2 = 1 + e^{i(\theta+\pi)}$, $\gamma_3 = -2 + 2e^{i\theta}$ y $\gamma_4 = 2 + 2e^{i(\theta+\pi)}$ con $\theta \in [0, 2\pi]$. Observemos que 0 es punto final e inicial de las curvas. La curva $\gamma = \gamma_4 \cdot {\gamma_3}^{-1} \cdot {\gamma_2}^{-1} \cdot \gamma_1$ es homológicamente nula pero no homotópicamente nula en Ω, pues toda deformación de la curva a un punto tiene que pasar por el 1 y -1.

6.2. Equivalencias lógicas del Teorema de Cauchy

En esta sección veremos las equivalencias entre el teorema de Cauchy, el Teorema del Residuo y la Fórmula integral de Cauchy.

6.4 Teorema. *Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Si $\gamma_1, \gamma_2 \colon I \to \Omega$ son dos curvas diferenciables a trozos con los mismos puntos iniciales y finales, se tiene*

$$\int_{\gamma_1} f dz = \int_{\gamma_2} f dz.$$

2. *Existe $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $F' = f$ en Ω.*

3. *Si $\gamma \colon I \to \Omega$ es una curva cerrada diferenciable a trozos entonces*

$$\int_{\gamma} f dz = 0$$

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2) Consideremos z_0 un punto fijo en Ω y z cualquier otro punto en Ω. Como Ω es dominio, existe γ una curva diferenciable a trozos contenida en Ω que conecta a z y z_0. Consideremos $F(z) = \int_\gamma f(\xi)d\xi$. Esto define una función F en Ω. Por hipótesis se tiene que el valor de F depende de z y no de la trayectoria siempre que la trayectoria esté contenida en Ω, por tanto F está bien definida. Sea $\varepsilon > 0$. Puesto que Ω es abierto y f es continua en z, existe un número $\delta > 0$ de tal manera que $D(z, \delta) \subset \Omega$ y $|f(\xi) - f(z)| < \varepsilon$ siempre que $|\xi - z| < \delta$. Supongamos que $|w - z| < \delta$. Conectemos z con w mediante un segmento de recta $\tilde{\gamma}$. Observemos que este segmento $\tilde{\gamma}$ está contenido en $D(z, \delta)$ y que

$$F(w) - F(z) = \int_{\gamma\cdot\tilde{\gamma}} f(\xi)d\xi - \int_{\gamma} f(\xi)d\xi = \int_{\tilde{\gamma}} f(\xi)d\xi.$$

Así obtenemos que

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(w)-F(z)}{w-z}-f(z)\right| &= \left|\frac{F(w)-F(z)-(w-z)f(z)}{w-z}\right| \\
&= \frac{\left|\int_{\tilde{\gamma}} f(\xi)d\xi - f(z)\int_{\tilde{\gamma}} d\xi\right|}{|w-z|} \\
&= \frac{\left|\int_{\tilde{\gamma}}(f(\xi)-f(z))d\xi\right|}{|w-z|} \\
&\leq \frac{\int_{\gamma}|f(\xi)-f(z)||d\xi|}{|w-z|} \\
&\leq \frac{\varepsilon L(\tilde{\gamma})}{|w-z|} \\
&= \frac{\varepsilon|w-z|}{|w-z|} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Esto implica que $\lim_{w\to z}\frac{F(w)-F(z)}{w-z} = f(z)$, por tanto F es $\mathbb{C}$-diferenciable **en** z y cumple $F' = f$; como esto sucede para cada $z \in \Omega$, se tiene (3).

2) $\Rightarrow$ 3) Supongamos que existe $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $F' = f$ en Ω y sea $\gamma\colon I \to \Omega$ una curva cerrada diferenciable a trozos en Ω. Entonces se tiene:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f dz &= \int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\
&= \int_0^1 F'(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\
&= \int_0^1 (F\circ\gamma)'(t)dt \\
&= F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)) = 0
\end{aligned}$$

3) $\Rightarrow$ 1) **Sean** $\gamma_1, \gamma_2\colon [0,1] \to \Omega$ dos curvas con los mismos puntos finales e iniciales. Consideremos la curva cerrada $\gamma := \gamma_1 \cdot {\gamma_2}^{-1}$ que está parametrizada en el intervalo $[0,1]$ por

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \gamma_2(2-2t) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

Por hipótesis $\int_\gamma f dz = 0$, entonces :

$$0 = \int_\gamma f dz = \int_{\gamma_1 \cdot \gamma_2{}^{-1}} f dz = \int_{\gamma_1} f dz - \int_{\gamma_2} f dz.$$

Por tanto:

$$\int_{\gamma_1} f dz = \int_{\gamma_2} f dz.$$

□

6.5 Teorema. *Son equivalentes:*

1. *Teorema del residuo.*
2. *Teorema de Cauchy en su forma homológica.*
3. *Fórmula integral de Cauchy.*

Demostración.

1) $\Rightarrow$ 2) Se sigue de la prueba del Teorema 4.14.

2) $\Rightarrow$ 3) Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y consideremos γ una curva cerrada tal que $\gamma \sim_\Omega 0$. Sea $a \in \Omega \setminus Ima(\gamma)$. Definamos

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)-f(a)}{z-a} & z \in \Omega \setminus \{a\}, \\ f'(a) & z = a. \end{cases}$$

por el corolario del teorema de Morera, g es holomorfa en Ω. Luego de (2) se tiene

$$\int_\gamma g(z) dz = 0$$

y por tanto

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a} dz = \frac{f(a)}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z-a} = n(\gamma, a) f(a)$$

si $a \in \Omega \setminus Ima(\gamma)$.

3) $\Rightarrow$ 2) Se sigue de la prueba del Teorema 6.8.

2) $\Rightarrow$ 1) Se sigue de la prueba del Teorema 6.10. □

6.3. La prueba de Dixon y el Teorema del Residuo

Uno de los resultados centrales del análisis complejo es el *Teorema del Residuo.* En el Capítulo 3 vimos que mediante el Teorema del Residuo se podía obtener la versión homológica del teorema de Cauchy (Teorema 4.14). A continuación veremos la manera de obtener el teorema del Residuo como una consecuencia del teorema de Cauchy. En esta parte utilizaremos la demostración dada por John Dixon en [9] y simplificada por Peter A. Loeb en [10] y [11].

Es importante mencionar que Dixon en el artículo citado buscaba principalmente una demostración corta y transparente del teorema de Cauchy ya que las pruebas dadas en los libros clásicos de variable compleja no son muy claras. Su prueba está basada en propiedades locales de funciones holomorfas que se obtienen del teorema de Cauchy para el disco y de la existencia de primitivas en el disco. Al parecer ésta es la prueba más natural y elemental del resultado sin suponer hipótesis adicionales.

6.6 Proposición. *Si γ es una curva en un dominio Ω, entonces para cada $z \in Ima(\gamma)$ existe una curva $\tilde{\gamma}$ en Ω con $z \notin Ima(\tilde{\gamma})$ tal que $\int_\gamma f dz = \int_{\tilde{\gamma}} f dz$ para cualquier $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.*

Demostración. Supongamos primero que la curva γ es constante e igual a z, entonces $Ima(\gamma) = \{z\}$ y claramente $\int_\gamma f dz = 0$. Ahora como Ω es abierto, existe un disco $D(z,r) \subset \Omega$ y cualquier circunferencia $\tilde{\gamma}$ en $D(z,r)$ que no pase por z, cumple que $\int_{\tilde{\gamma}} f(z)dz = 0$ (por el teorema de Cauchy para el disco), luego $\int_\gamma f(z)dz = \int_{\tilde{\gamma}} f(z)dz = 0$. Supongamos ahora que existe $\xi \neq z$ con $\xi \in Ima(\gamma)$, tomamos $r > 0$ tal que $D(z,r) \subset \Omega$ y $\xi \notin D(z,r)$. Podemos suponer que γ: $[0,1] \to \Omega$ es tal que $\gamma(0) = \gamma(1) = \xi$. Por la continuidad uniforme de la curva γ, existe un número natural n tal que si $s,t \in [0,1]$ y $|t-s| < \frac{1}{n}$ entonces $|\gamma(t) - \gamma(s)| < r$. Dividamos el intervalo $[0,1]$ con los puntos $0 < \frac{1}{n} < \cdots < \frac{(n-1)}{n} < 1$. Sean $0 < x_0 < x_1 < \ldots < x_m = 1$ los puntos de la partición $\frac{k}{n}$ tales que $\gamma(\frac{k}{n}) \neq z$. Si tomamos x_i, x_{i+1} puntos consecutivos, y si entre ellos hay puntos de la forma $\frac{k}{n}$ (en cuyo caso cumplen que $\gamma(\frac{k}{n}) = z$) o bien otros puntos t_0 con $\gamma(t_0) = z$, entonces la curva $\gamma(t)$ con $x_i \leq t \leq x_{i+1}$, está en el disco $D(z,r)$. Si este es el caso reemplazamos la curva γ sobre el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ por una curva que vaya de $\gamma(x_i)$ a $\gamma(x_{i+1})$ y contenida en el conjunto $D(z,r) \setminus \{z\}$. Por el teorema de Cauchy aplicado al disco $D(z,r)$ este reemplazo no cambia el valor de la integral para $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ sobre γ o sobre la curva modificada. Mediante este procedimiento encontramos $\tilde{\gamma}$ tal que $z \notin Ima(\tilde{\gamma})$ y con $\int_\gamma f dz = \int_{\tilde{\gamma}} f dz$ para $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. □

6.7 Proposición. *Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y consideremos la función $\varphi \colon \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ definida como:*

$$\varphi(w,z) = \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} & si\ w \neq z, \\ f'(w) & si\ w = z. \end{cases}$$

Entonces para cada $z \in \Omega$, $\varphi(\cdot, z)$ es holomorfa en Ω. Además, la función definida como $g(z) = \int_\gamma \varphi(w,z)dw$ es holomorfa sobre Ω, donde γ es una curva cerrada simple.

Demostración. Con $z \in \Omega$ fijo, la función $\varphi(\cdot, z)$ es holomorfa sobre $\Omega \setminus \{z\}$ y continua en Ω. Por el corolario del teorema de Morera, $\varphi(\cdot, z)$ es holomorfa en Ω. La función $g(z) = \int_\gamma \varphi(w,z)dw$ es holomorfa en $\Omega \setminus Ima(\gamma)$. Fijemos $z \in Ima(\gamma)$. Por la proposición anterior podemos reemplazar γ con otra curva $\tilde{\gamma}$ que no pase por z y tal que en un disco abierto $D(z,\varepsilon)$, los valores de g no cambien sobre $D(z,\varepsilon)$. Esto implica que g es holomorfa sobre $D(z,\varepsilon)$, y por tanto sobre Ω. □

6.8 Teorema. *Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ y γ una curva cerrada diferenciable a trozos en Ω. Supongamos que γ es homóloga a 0 en Ω, es decir cada $w \notin \Omega$ está en $S = \{w \in \mathbb{C} \setminus Ima(\gamma) : n(\gamma, w) = 0\}$. Entonces, para cada $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ se cumplen:*

1. $\int_\gamma f(z)dz = 0$.

2. $n(\gamma,w)\, f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-w} dz$, *para cualquier $w \in \Omega \setminus Ima(\gamma)$.*

Demostración. Consideremos las aplicaciones φ y g de la Proposición 6.7 y $h \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida como:

$$h(w) = \begin{cases} \int_\gamma \varphi(w,z)dz & \text{sobre } \Omega, \\ \int_\gamma \frac{f(z)}{z-w} dz & \text{sobre } S. \end{cases}$$

Observemos que $\Omega \cup S = \mathbb{C}$ y para todos los puntos $z \in \Omega \cap S$, tenemos

$$\begin{aligned} g(z) &= \int_\gamma \varphi(w,z)dw \\ &= \int_\gamma \frac{f(w)-f(z)}{w-z}dw \\ &= \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw - \int_\gamma \frac{f(z)}{w-z}dw \\ &= h(z) - f(z)\int_\gamma \frac{dw}{w-z} \\ &= h(z) - 2\pi i\, f(z) n(\gamma,z) = h(z). \end{aligned}$$

Ahora extendamos la función g a una función entera mediante $g(z) = h(z)$ para $z \notin \Omega$. Como la imagen de γ es acotada y S contiene una vecindad del infinito, $\lim_{z\to\infty} g(z) = 0$, tenemos que existe $R > 0$ tal que $|g(z)| < 1$ para $|z| > R$ y por continuidad g está acotada en $|z| \leq R$, luego g está acotada en $\mathbb{C}$. Entonces por el Teorema de Liouville[1] g es constante y dado que $\lim_{z\to\infty} g(z) = 0$, la constante es igual a 0. Así, para todos los puntos $z \in \Omega \setminus Ima(\gamma)$ se tiene:

$$f(z)\, n(\gamma,z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{w-z}dw = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw$$

lo cual demuestra 2.
Cambiando $f(z)$ por $f(z)(z-w)$ en la parte 2 del Teorema tenemos:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma \frac{f(z)(z-w)}{z-w}dw = 2\pi i\, n(\gamma,w)f(w)(w-w) = 0$$

□

6.3 Definición. Un *ciclo* Γ es un conjunto finito de curvas rectificables[2] y cerradas $\{\gamma_i : 1 \leq i \leq n\}$. La imagen de Γ es $Ima(\Gamma) = \cup_{i=1}^n Ima(\gamma_i)$. Para toda función f continua sobre $Ima(\Gamma)$, la *integral de f sobre* Γ es, $\int_\Gamma f dz = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} f dz$. Mas aún, para $a \notin Ima(\Gamma)$ se define el *índice* de Γ en a por $n(\Gamma,a) = \sum_{i=1}^n n(\gamma_i,a)$. También diremos que Γ es un *ciclo en un conjunto abierto* Ω si $Ima(\Gamma) \subset \Omega$.

---

[1]**Teorema de Liouville.** Si f es entera y acotada , entonces f es constante.

[2]Véase la página 16.

Con estas definiciones podemos extender el teorema de Cauchy de la siguiente forma:

6.9 Teorema. *Sean Ω un dominio en $\mathbb{C}$ y Γ un ciclo en Ω tal que* $n(\Gamma, a) = 0$ *para todo $a \notin \Omega$, es decir $\Gamma \sim_\Omega 0$. Entonces se verifican:*

1. *(El Teorema Integral de Cauchy). Para toda $f \in \mathcal{H}(\Omega)$*

$$\int_\Gamma f(z)dz = 0$$

2. *(La Fórmula Integral de Cauchy). Para toda $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y para cualquier $w \in \Omega \setminus Ima(\Gamma)$,*

$$f(z)\, n(\Gamma, w) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z - w} dz.$$

Demostración. La prueba es similar a la del anterior. $\square$

6.4 Definición. Una función f tiene una *singularidad aislada* en $z = a$ si existe $R > 0$ tal que f está definida y es holomorfa en $D(a, R) \setminus \{a\}$.

6.10 Teorema (del Residuo). *Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a_1, \ldots, a_m\})$ donde $a_1, \ldots, a_m$ son singularidades aisladas de f. Si γ es una curva cerrada suave en Ω que no pasa por algún a_k y si $\gamma \sim_\Omega 0$ en Ω, entonces*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f dz = \sum_{k=1}^{m} n(\gamma, a_k)\, res_f(a_k).$$

Demostración. Sean $m_k = n(\gamma, a_k)$ para $1 \le k \le m$ y elijamos números positivos $r_1, \ldots, r_m$ de manera que cada dos discos $D(a_k, r_k)$ no se intersequen, ninguno de estos intersequen a γ, y cada disco esté contenido en Ω. Sea $\gamma_k(t) = a_k + r_k\, exp(-2\pi i m_k t)$ para $0 \le t \le 1$. Entonces para $1 \le j \le m$

$$n(\gamma, a_j) + \sum_{k=1}^{m} n(\gamma_k, a_j) = 0.$$

Entonces como $\gamma \sim_\Omega 0$ y $\overline{D}(a_k, r_k) \subset \Omega$,

$$n(\gamma, a) + \sum_{k=1}^{m} n(\gamma_k, a) = 0$$

para todo $a \notin \Omega \setminus \{a_1, \ldots, a_m\}$. Por el teorema anterior (Teorema 6.9) tenemos:

$$0 = \int_\gamma f dz + \sum_{k=1}^{m} \int_{\gamma_k} f dz.$$

Si $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a_k)^n$ es el desarrollo de Laurent de f alrededor de $z = a_k$, entonces esta serie converge uniformemente sobre $\partial D(a_k, r_k)$. Así, $\int_{\gamma_k} f dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{\gamma_k} (z-a_k)^n dz$. Pero $\int_{\gamma_k} (z-a_k)^n dz = 0$ si $n \neq 1$ pues $(z-a_k)^n$ tiene primitiva. Entonces

$$\int_{\gamma_k} f dz = c_{-1} \int_{\gamma_k} (z-a_k)^{-1} dz = 2\pi i\ n(\gamma_k, a_k)\ res_f(a_k) = 2\pi i(-m_k)\ res_f(a_k).$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f dz = \sum_{k=1}^{n} n(\gamma, a_k)\ res_f(a_k)$$

□

6.4. El Teorema de Cauchy y los dominios simplemente conexos

Entre las consecuencias importantes del teorema de Cauchy está su relación con los dominios simplemente conexos y la existencia de primitivas y ramas de logaritmos. Antes de ver esto probaremos algunas proposiciones.

6.11 Teorema. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio tal que $\int_\gamma f = 0$ para toda curva cerrada γ en Ω y toda función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Entonces Ω es simplemente conexo.*

Demostración. Si Ω no es simplemente conexo, entonces existe una curva cerrada $\gamma_0 \in \Omega$ y $z_0 \notin \Omega$ tal que $n(\gamma_0, z_0) \neq 0$. Sea $\phi(z) = \frac{1}{2\pi i(z-z_0)}$, entonces ϕ es holomorfa en Ω y $\int_{\gamma_0} \phi = n(\gamma_0, z_0) \neq 0$, una contradicción. □

6.12 Proposición. *Sean Ω un dominio simplemente conexo en $\mathbb{C}$ y consideremos $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Si f no se anula en Ω, entonces existe $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $e^g = f$ sobre Ω.*

Demostración. Como f no se anula, $\frac{f'}{f}$ es holomorfa sobre Ω, luego por la Proposición 6.4 existe ϕ una primitiva en Ω de $\frac{f'}{f}$. Entonces

$$\frac{d}{dz}(fe^{-\phi}) = (f' - f\phi')e^{-\phi} = (f' - f\frac{f'}{f})e^{-\phi} = 0.$$

Esto nos lleva a que $fe^{-\phi}$ es igual a una constante $c \neq 0$. Si $\alpha \in \mathbb{C}$ es tal que $e^{\alpha} = c$ se tiene que $f = e^{\phi+\alpha}$, por tanto la función holomorfa $g = \phi + \alpha$ es la buscada. $\square$

6.3 Observación. Una función g que cumple $e^g = f$ es llamada una *rama de logaritmo sobre* Ω. Además si $e^{g_1} = f = e^{g_2}$ donde $g_1, g_2 \in \mathcal{H}(\Omega)$ consideremos $g = g_1 - g_2$. Entonces $e^g \equiv 1$ y de aquí que $g'e^g = 0$. Así $g' = 0$ y entonces g es constante con $e^g = 1$. Por tanto $g = 2\pi i n$ para algún $n \in \mathbb{Z}$, lo que nos muestra que dos ramas de logaritmo de una función difieren en un múltiplo entero de $2\pi i$.

6.4 Observación. Otra prueba de la Proposición anterior la podemos obtener mediante los siguientes argumentos: Sabemos por el Ejemplo 3.3 que $exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ es una aplicación cubriente, si suponemos que la función $f\colon \Omega \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ es holomorfa en un conjunto simplemente conexo Ω. Entonces por ser exp una aplicación cubriente, existe un levantamiento $g\colon \Omega \to \mathbb{C}$ de f respecto a exp, esto es una g que cumple $exp(g) = f$. Además, por el Ejemplo 3.2, dado el levantamiento g, podemos encontrar todos los levantamientos mediante $g_n = g + 2\pi i n$ con $n \in \mathbb{N}$.

6.13 Proposición. *Sean Ω un dominio simplemente conexo en $\mathbb{C}$ y una función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ que no se anula en Ω, entonces para $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, existe $h \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $h^n = f$.*

Demostración. Por la Proposición 6.12, sabemos que existe $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $e^g = f$. Basta tomar $h = e^{\frac{g}{n}}$. $\square$

6.14 Teorema. *Sea Ω un dominio en $\mathbb{C}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. *Ω es simplemente conexo.*
2. *$\mathbb{P}\setminus\Omega$ es conexo*[3].
3. *$\mathbb{C}\setminus\Omega$ no tiene componentes conexas compactas.*
4. *Para cada $a\in\mathbb{C}\setminus\Omega$ y toda curva cerrada γ en Ω, el índice $n(\gamma,a)=0$ (es decir, toda curva cerrada γ en Ω es homóloga a cero).*
5. *Para todo $f\in\mathcal{H}(\Omega)$ y toda curva cerrada γ en Ω, $\int_\gamma f(z)dz=0$.*
6. *Para todo $f\in\mathcal{H}(\Omega)$ existe una sucesión de polinomios que converge a f en $\mathcal{H}(\Omega)$.*
7. *Toda función f en $\mathcal{H}(\Omega)$ tiene una primitiva.*
8. *Para cualquier cubierta abierta $\mathcal{U}=\{U_i\}_{i\in I}$ de Ω de discos abiertos se tiene que $H^1(\mathcal{U},\mathbb{C})=0$.*
9. *Para todo $f\in\mathcal{H}(\Omega)$ que no se anula en Ω, existe $g\in\mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f=e^g$.*
10. *Para todo $f\in\mathcal{H}(\Omega)$ que no se anula en Ω, existe $g\in\mathcal{H}(\Omega)$ tal que $g^2=f$.*
11. *Ω es homeomorfo al disco unitario.*
12. *Para todo $u\colon\Omega\to\mathbb{R}$ armónica, existe una función armónica $v\colon\Omega\to\mathbb{R}$ tal que $f=u+iv$ es holomorfa en Ω.*

Demostración.

1) $\Rightarrow$ 2) Sea Ω simplemente conexo. Si $\Omega=\mathbb{C}$, entonces $\mathbb{P}\setminus\Omega=\{\infty\}$ es claramente conexo. Supongamos que $\Omega\neq\mathbb{C}$. Entonces por el Teorema del Mapeo de Riemann[4] existe una biyección holomorfa $\phi\colon D\to\Omega$. Sea $K=\overline{\Omega}\setminus\Omega$ la frontera de Ω en $\mathbb{P}$ ($\overline{\Omega}$ es la cerradura en $\mathbb{P}$). Sea K_n la cerradura de $\mathbb{P}$ del conjunto $\phi(A_n)$ donde $A_n=\{z\in\mathbb{C}:1-\frac{1}{n}<|z|<1\}$. Entonces, como A_n es conexo y $\mathbb{P}$ es compacto, K_n es compacto y conexo, además $K_{n+1}\subset K_n$. Consideremos $L=\cap_{n\geq1}K_n$. Afirmamos que $L=K$. En efecto, $a\in K$ si y sólo si existe la sucesión $\{z_n\}$ con $z_n\in A_n$ tal que a es punto

[3] $\mathbb{P}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$

[4] **Teorema del Mapeo de Riemann.** Si $\Omega\neq\mathbb{C}$ es un dominio simplemente conexo en $\mathbb{C}$, entonces existe un homeomorfismo holomorfo del disco $D(0,1)$ sobre Ω.

límite de $\{\phi(z_n)\}$, es decir, si y sólo si $a \in \overline{\phi(A_n)} = K_n$ para una infinidad de índices n, lo cual pasa si y sólo si $a \in L = \cap_{n\geq 1} K_n$ (observemos que $K_{n+1} \subset K_n$). Ahora veremos que K es conexo. Supongamos que $K = A \cup B$ donde A, B son conjuntos compactos ajenos y sean U, V conjuntos abiertos ajenos en $\mathbb{P}$ tales que $A \subset U$ y $B \subset V$. Entonces $(\mathbb{P} \setminus (U \cup V)) \cap K = \emptyset$. Como $\mathbb{P} \setminus (U \cup V)$ es compacto pues es un cerrado dentro de un compacto y ya que $K = \cap_{n\geq 1} K_n$, se tiene que $(\mathbb{P} \setminus (U \cup V)) \cap (\cap_{n=1}^{m} K_n) = \emptyset$ para alguna m, es decir, $K_m \subset U \cup V$. Pero $K_m \cap U \supset A$, $K_m \cap V \supset B$. Esto es imposible puesto que K_m es conexo. Supongamos ahora que $\mathbb{P} \setminus \Omega = S_1 \cup S_2$ donde S_1, S_2 son conjuntos compactos ajenos. Afirmamos que toda componente conexa C de $\mathbb{P} \setminus \Omega$ está dentro de $K = \bar{\Omega} \setminus \Omega$. Si $C \cap \bar{\Omega} = \emptyset$, entonces cada punto de C tiene un abierto contenido en $\mathbb{P}$ que no interseca a $\bar{\Omega}$, por tanto C es abierto en $\mathbb{P}$. Pero C es cerrado en $\mathbb{P} \setminus \Omega$, entonces lo es en $\mathbb{P}$. Esto lleva a que $C = \mathbb{P}$ y por tanto es conexo ya que $\mathbb{P}$ lo es. Ahora, si $C \cap K \neq \emptyset$ para alguna componente conexa C de $\mathbb{P} \setminus \Omega$, entonces si consideramos S_1, S_2 uniones de componentes conexas, tenemos que $A = S_1 \cap K$, $B = S_2 \cap K$ y son no vacíos. Entonces $K = A \cup B$ es una union de conjuntos no vacíos, disjuntos, cerrados, lo cual contradice la conexidad de K, por tanto $\mathbb{P} \setminus \Omega$ es conexo.

2) $\Rightarrow$ 3) Supongamos que $\mathbb{C} \setminus \Omega$ tiene una componente conexa compacta C. Sea N una vecindad de C en $\mathbb{C} \setminus \Omega$ que sea abierta y cerrada en $\mathbb{C} \setminus \Omega$ y que también sea relativamente compacta[5] en $\mathbb{C}$. Como N es cerrada en $\mathbb{C} \setminus \Omega$, N es cerrada en $\mathbb{C}$ y por tanto es compacta. Ahora, N es abierta en $\mathbb{P} \setminus \Omega$, pues es abierta en $\mathbb{C} \setminus \Omega$. Así, N es compacta en $\mathbb{P} \setminus \Omega$. Como es abierta y cerrada, N es la unión de componentes conexas de $\mathbb{P} \setminus \Omega$, donde ninguna de éstas contiene $\{\infty\}$. Entonces $\mathbb{P} \setminus \Omega$ no puede ser conexo.

3) $\Rightarrow$ 4) Supongamos que $\mathbb{C} \setminus \Omega$ no tiene componentes conexas compactas, entonces por un corolario del teorema de Runge[6], existe una sucesión de polinomios $\{F_n\}$ en $\mathbb{C}$ de tal manera que convergen a f en subconjuntos compactos de Ω. Por tanto, para una curva cerrada γ se tiene

$$\int_\gamma f dz = \lim_{n\to\infty} \int_\gamma F_n = 0.$$

debido a que cada F_n tiene una primitiva sobre $\mathbb{C}$, luego en $\mathbb{C} \setminus \Omega$. Por el

[5]**Proposición.** Sea X un espacio de Hausdorff localmente compacto. Consideremos K una componente conexa de X que sea compacta. Entonces K tiene un sistema fundamental de vecindades $\mathcal{N}$ en X cuyas vecindades son abiertas y cerradas en X. Véase [1] en la página 111.

[6]**Corolario.** Sea Ω un abierto en $\mathbb{C}$. Entonces el conjunto de restricciones de polinomios en z sobre Ω es denso en $\mathcal{H}(\Omega)$ si y sólo si $\mathbb{C} \setminus \Omega$ no tiene componentes conexas compactas. Véase [1] en la página 115.

Teorema 6.4, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tiene una primitiva. Aplicando esto a $f(z) = \frac{1}{z-a}$ con $a \notin \Omega$ se tiene que $\int_\gamma \frac{1}{z-a}dz = 0$ para toda curva cerrada γ. Entonces $n(\gamma, a) = 0$ para cualquier $a \notin \Omega$ y por tanto $\gamma \sim_\Omega 0$.

4) $\Rightarrow$ 5) Se tiene del Teorema 4.14.

5) $\Rightarrow$ 1) Se tiene del Teorema 6.11.

2) $\Rightarrow$ 6) Esto se debe en realidad a un corolario del teorema de Runge[7] que no tratamos por escapar a los propósitos del trabajo, se puede consultar en [1] o [7].

6) $\Rightarrow$ 5) Consideremos γ una curva cerrada en Ω y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Por hipótesis, existe una sucesión de polinomios $\{p_n\}$ que convergen a f en Ω. Como cada polinomio tiene una primitiva, entonces se tiene para todo $n \in \mathbb{N}$ que $\int_\gamma p_n(z)dz = 0$. Ya que $\{p_n\}$ converge a f uniformemente sobre la $Ima(\gamma)$, tenemos que $\int_\gamma f(z)dz = \lim_{n\to\infty} \int_\gamma p_n(z)dz = 0$.

1) $\Rightarrow$ 7) Como Ω es simplemente conexo, por el Teorema 3.15, se tiene el resultado.

7) $\Rightarrow$ 5) Se sigue del Teorema 6.4.

7) $\Leftrightarrow$ 8) Se sigue del Corolario 5.5.

1) $\Rightarrow$ 9) Se tiene de la Proposición 6.12.

9) $\Rightarrow$ 10) Se tiene de la Proposición 6.13.

10) $\Rightarrow$ 11) Si $\Omega = \mathbb{C}$ entonces la función $h(z) = \frac{z}{1+|z|}$ da un homeomorfismo de Ω en D. Si $\Omega \neq \mathbb{C}$, el resultado es en realidad un Lema para la demostración del Teorema del Mapeo de Riemann[8], véase [1] páginas 148-150 para una prueba de este resultado.

11) $\Rightarrow$ 12) Supongamos que $\Omega \neq \mathbb{C}$. Por el teorema del Mapeo de Riemann existe $h\colon \Omega \to D$ que es un homeomorfismo holomorfo. Si $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ es armónica, entonces $u_1 = u \circ h^{-1}\colon \Omega \to \mathbb{R}$ es una función armónica sobre D. Definimos $v_1(x,y) = \int_0^y u_{1x}(x,t)dt + \phi(x)$ donde ϕ se determinará de manera que cumpla las ecuaciones de Cauchy-Riemann $v_{1x} = -u_{1y}$. Diferenciando con respecto a x tenemos:

$$v_{1x}(x,y) = \int_0^y u_{1xx}(x,t)dt + \phi'(x) = -\int_0^y u_{1yy}(x,t)dt + \phi'(x) =$$
$$= -u_{1y}(x,y) + u_{1y}(x,0) + \phi'(x)$$

Entonces $\phi'(x) = u_{1y}(x,0)$. Un cálculo directo muestra que $u_1(x,y)$ y $v_1(x,y) = \int_0^y u_{1x}(x,t)dt - \int_0^x u_{1y}(s,0)ds$ satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Así para u_1 existe una función $v_1\colon D \to \mathbb{R}$ tal que $f_1 = u_1 + iv_1$

[7] **Corolario del Teorema de Runge.** Si $\mathbb{P}\backslash\Omega$ es conexo, entonces para cada $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ existe una sucesión de polinomios $\{p_n\}$ tal que convergen a f en Ω.

[8] **Lema.** Sea $\Omega \neq \mathbb{C}$ un dominio. Supongamos que para cada $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ que no se anula existe una función $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $g^2 = f$. Entonces Ω es isomorfo analíticamente a D.

es holomorfa en D. Sea $f = f_1 \circ h$. entonces f es holomorfa en D y u es la parte real de f, entonces $v = \Im m\ f = v_1 \circ h$ es la armónica conjugada. De la misma manera como se resolvió para un disco, se prueba para cuando Ω es igual a $\mathbb{C}$.

12) $\Rightarrow$ 9) Supongamos que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ nunca se anula. Sean $u = \Re e\ f$ y $v = \Im m\ f$. Si $U\colon \Omega \to \mathbb{R}$ se define como $U(x,y) = log|f(z)|$, entonces U es armónica. Sea V una función armónica sobre Ω tal que $g = U + iV$ es holomorfa en Ω. La función $h = e^g$ es holomorfa en Ω, nunca se anula y cumple $|h| = |e^g| = e^{log|f|} = |f|$ en Ω, por lo que $\frac{f}{h}$ es holomorfa en Ω y su imagen no es abierta por lo que deberá ser constante en Ω, luego $f = c_1 e^g = e^{g+c}$.

1) $\Rightarrow$ 11) Si $\Omega = \mathbb{C}$, entonces $h(z) = \frac{z}{1+|z|}$ nos da un homeomorfismo entre $\mathbb{C}$ y $D(0,1)$. Si $\Omega \neq \mathbb{C}$, por el Teorema del Mapeo de Riemann se tiene que existe un homeomorfismo holomorfo entre Ω y el disco unitario, luego un homeomorfismo.

11) $\Rightarrow$ 1) Si $\Omega = \mathbb{C}$, claramente es simplemente conexo. Si $\Omega \neq \mathbb{C}$, entonces consideremos un homeomorfismo $h\colon \Omega \to D(0,1)$. Sean γ una curva cerrada en Ω tal que $\gamma(0) = \gamma(1) = z_0 \in \Omega$. Entonces $\sigma(s) = h(\gamma(s))$ es una curva cerrada en D. Como D es simplemente conexo[9], existe una función continua $\varphi\colon I^2 \to D$ tal que $\varphi(s,0) = \sigma(s)$, $\varphi(s,1) = h(z_0)$ para todo $s \in [0,1]$ y $\varphi(0,t) = \varphi(1,t)$ para $t \in [0,1]$. Si consideramos $\Gamma = h^{-1} \circ \varphi$, tenemos que Γ es una homotopía continua de I^2 en Ω entre la curva γ y la curva constante igual a $h^{-1}(0) = z_0$. Por tanto Ω es simplemente conexo.

□

[9] D es simplemente conexo pues es conexo y $(1-t)\sigma(s) \in D$ para toda $t \in [0,1]$ da la homotopía entre la curva σ y el punto 0.

6.5. Análisis de las pruebas dadas al Teorema de Cauchy en libros clásicos de variable compleja

En el libro de Ahlfors [21], se presenta primeramente la versión para el rectángulo y el disco. La prueba para el rectángulo no varía mucho de la que se ve en la introducción. La versión que se trabaja con mayor detalle es la versión homológica. Aquí la prueba se basa en aproximar las curvas por polígonos y utiliza la Fórmula Integral de Cauchy. Primero se supone Ω acotado y después se prueba para Ω no acotado.

En el libro de Marsden [19] se da una versión preliminar cuya formulación utiliza que f sea continua sobre y en el interior de una curva cerrada simple de clase C^1 y cuya demostración utiliza el teorema de Green. Esta versión es mejorada utilizando el teorema de deformación que utiliza la condición adicional de que la homotopía sea derivable. La versión presentada es la versión homotópica aplicada a una curva cerrada homotópica a un punto en Ω. Cabe mencionar que se utiliza fuertemente que la curva y la homotopía son C^1 por tramos. Da indicaciones de como considerar el caso en que la homotopía sea solamente continua.

La prueba presentada en el libro de Conway [7] utiliza la idea de la prueba de Dixon. Primero se demuestra la fórmula integral de Cauchy y después una versión más general de la misma. Luego, se formula la primera versión donde se pide que se considere Ω un abierto de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $\{\gamma_i\}_{i=1}^{n}$ curvas cerradas rectificables en Ω tales que $\sum n(\gamma_i, w) = 0$ para cualquier $w \in \Omega$. Entonces $\sum_{i=1}^{m} \int_{\gamma_i} f = 0$. Observemos que esta versión no es más que la versión homológica probada anteriormente y cuya demostración se obtiene como consecuencia de la Fórmula Integral de Cauchy. La segunda versión aquí presentada utiliza la noción de homotopía y cuya formulación es un corolario obtenido en este trabajo. Entre los problemas que tiene esta demostración está el no justificar que la homotopía es diferenciable. La tercera versión es la versión homotópica para curvas cerradas. En la demostración se supone que la homotopía es de clase C^2. El autor aclara aquí que se resolverá este caso especial. La cuarta versión es la que se obtiene como corolario y que pide que Ω sea simplemente conexo.

En el libro de Stewart [16] se prueba primeramente el lema que dice:

6.15 Lema. *Sea $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$ una curva contenida en un abierto Ω. Entonces existe una subdivisión $a < t_0 < \ldots < t_n = b$ de tal manera que para cada curva $\gamma_r = \gamma|_{[t_{r-1},t_r]}$ está contenida en un disco abierto $D_r \subset \Omega$.*

Con este resultado y considerando que la integral no cambia para dos curvas homotópicas con extremos fijos, es posible cambiar una curva por otra diferenciable a trozos. Después se da la prueba de Moore, la cual, como ya se comentó, necesita nuevamente que f' exista a diferencia de otras pruebas que necesitan f' sea continua. Esta prueba se realiza para un triángulo contenido en un dominio Ω. La versión del teorema de Cauchy aquí presentada es la versión homológica. En este libro resalta el análisis que hace del teorema de Cauchy.

Otro libro que presenta una prueba interesante es el Kodaira [29]. En él se presenta una versión homológica donde se hace un tratamiento muy extenso de la descomposición celular. Si $\Gamma(t,s)$ es una aplicación continua del rectángulo R en el plano complejo $\mathbb{C}$ tal que $\Gamma_t(t,s)$, $\Gamma_s(t,s)$ y $\Gamma_{ts}(t,s) = \Gamma_{st}(t,s)$ existen y son continuas, se explica bajo qué condiciones $\Gamma(R)$ es llamada una célula. En este trabajo se muestra que dada una región Ω se puede dar una descomposición celular y mediante la prueba de que la integral sobre cada célula es cero se obtiene el Teorema de Cauchy en su versión homológica.

Otro libro consultado es el de Shilov [28] el cual da la versión del teorema de Cauchy para conjuntos simplemente conexos y cuya demostración se basa en llevar la curva cerrada a una poligonal cerrada y después dividir la poligonal en triángulos. Por último considera cada triángulo y muestra que la integral sobre la frontera del triángulo es igual a cero. La prueba es muy parecida a la mostrada en la página 21 para rectángulos.

Por último tenemos el libro de Nevanlinna [20]. Este libro presenta la prueba de Goursat para triángulos y se platica la prueba general en donde se utiliza la invarianza de la integral para cualquier curva y las propiedades de homotopía. Se hace, además, una mención especial cuando el dominio es simplemente conexo.

Bibliografía

[1] R. Narasimhan, *Complex Analysis in one variable*, Birkhaüser, Boston-Basel-Berlin, 1988.

[2] M. Kline, *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*, Alianza Universidad, Madrid, 1992.

[3] K. Ríbnikov, *Historia de las Matemáticas*, Editorial Mir, Moscú, 1991.

[4] A. N. Kolmogorov, A. P. Yushkevich, *Mathematics of the 19th Century*, Birkhaüser–Verlag, Basel-Boston-Berlin, 1996

[5] O. Forster, *Lectures on Riemmann Surfaces*, Springer-Verlag, New York, 1993.

[6] B. A. Dubrovin, A. T. Fomenko, S. P. Nóvikov, *Geometría Moderna, Métodos y aplicaciones*, Editorial URSS, España, 2000.

[7] J. B. Conway, *Functions of One Complex Variable I*, Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg, 1978.

[8] C. A. Berenstein, R. Gay, *Complex Variables, An Introduction*, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1991.

[9] J. D.Dixon, *Shorter Notes: A Brief Proof of Cauchy's Integral Theorem*, American Mathematical Society, Vol.29, No. 3, 625-626, 1971.

[10] P. A. Loeb, *A Note on Dixon's Proof of Cauchy's Integral Theorem*, American Mathematical Monthly, Vol.98, No. 3, 242-244, 1991.

[11] P. A. Loeb, *A Further Simplification of Dixon's Proof of Cauchy's Integral Theorem*, American Mathematical Monthly, Vol. 100, No. 7, 680-681, 1993.

[12] H. J. Ettlinger, *Cauchy's Paper of 1814 on Definite Integrals*, Annals of Mathematics, 2nd Ser., Vol. 23, No. 3, 255-270, 1922.

[13] D. V. Widder, *A Simplified Approach to Cauchy's Integral Theorem*, American Mathematical Monthly, Vol. 53, No. 7, 359-363, 1946.

[14] L. V. Dieulefait, *Teorema de la Integral de Cauchy*, Serie "B"Trabajos de Matemática, Universidad Nacional de Córdoba, Facultad de Matemática, Astronomía y Física, No. 20, 1993.

[15] A. W. Guzmán, *Teorema de la Integral de Cauchy*, Serie "B"Trabajos de Matemática, Universidad Nacional de Córdoba, Facultad de Matemática, Astronomía y Física, No. 20, 1993.

[16] I. Stewart, D. Tall, *Complex Analysis*, Cambridge University Press, Great Britain, 1992.

[17] R. Narashiman, *Several Complex Variables*, The University Press, Cambridge-London- New York- New-Rochelle- Melbourne- Sydney, 1978.

[18] R. Vyborny, *On the Use of a Differentiable Homotopy in the Proof of the Cauchy Theorem*, The American Mathematical Monthly, Vol. 86, No. 5, 380-382, 1979.

[19] J. E. Marsden, M. J. Hoffman, *Análisis Básico de Variable Compleja*, Editorial Trillas, México- Argentina-España-Colombia, 1996.

[20] R. Nevanlinna, V. Paatero, *Introduction to Complex Analysis*, Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts-California- London-Ontario, 1964.

[21] L. V. Ahlfors, *Complex Analysis*, McGraw-Hill International Editions, 1979.

[22] L. Bers, *Introduction to Several Complex Variables*, Courant Institute, 1964.

[23] C. Briot, J. Bouquet, *Théorie des fonctions elliptiques*, Gauthier Villars, Paris, 1875.

[24] R. Remmert, *Theory of Complex Functions*, Springer-Verlag, New York- Berlín- Heidelberg- London, 1990.

[25] E. Lindelöf, *Le Calcul des Résidus et ses aplications a la théorie des fonctions*, Editions Jaques Gabay, 1989.

[26] L.C. Kinsey, *Topology of Surfaces*, Sringer- Verlag, New York- Berlin-Hidelberg, 1993.

[27] J. Gray, *Goursat, Pringsheim, Walsh, and the Cauchy Integral Theorem*, The Math. Intelligencer, Vol. 22, No. 4, 60-66,77, 2000.

[28] G. E. Shilov, *Elementary Real and Complex Analysis*, Dover Publications, Inc., New York, 1973.

[29] K. Kodaira, *Introduction to Complex Analysis*, Cambridge University, 1984.

[30] J. A. Seebach, L. A. Seebach, L. A. Steen, *What is a sheaf?*, The American Mathematical Monthly, Vol. 77, No. 7, 681-703, 1970.

[31] C. Prieto *Topología Básica*, Fondo de Cultura Económica, México, 2003.

[32] R. Remmert *Classical Topics in Complex Function Theory*, Springer-Verlag, New York- Berlín- Heidelberg- London, 1991.

[33] J. Marsden *Cálculo Vectorial*, Pearson Education, México- Argentina-Brasil- España, 1998.

Índice alfabético