UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

PAQUETE INTERACTIVO PARA ANALISIS DE PRODUCTOS DERIVADOS.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

ACTUARIO

PRESENTA:

ANGEL ELIUD HERNANDEZ AGUILAR

DIRECTOR DE TESIS:

M. EN C. JESUS AGUSTIN CANO GARCES

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

2004

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVTONOMA DE
MEXICO

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

Paquete interactivo para análisis de productos derivados

realizado por Ángel Eliud Hernández Aguilar con número de cuenta 9953829-9

quién cubrió los créditos de la carrera de Actuaría

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	M. en C. Jesús Agustín Cano Garcés
Propietario	M. en A.P. María del Pilar Alonso Reyes
Propietario	Act. Martha Martínez Juárez
Suplente	Act. Jaime Vázquez Alamilla
Suplente	Act. Eric Manuel Rodríguez Herrera

Consejo Departamental de Matemáticas

Act. Jaime Vázquez Alamilla.

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL DE MATEMATICAS

Índice general

INTRODUCCIÓN

Uno de los acontecimientos más significativos en los mercados financieros en años recientes ha sido el nacimiento y crecimiento de los productos derivados. Los productos derivados son instrumentos financieros cuyo valor depende completamente del valor de otro u otros instrumentos financieros. Los productos derivados[1] se pueden basar en acciones, bonos, divisas, entre otros instrumentos y bienes de inversión[2]. A todos estos instrumentos financieros y bienes de inversión se les llama bienes subyacentes. Los derivados pueden ser negociados en mercados establecidos, como el Chicago Board Options Exchange (CBOE) en Estados Unidos, y el Mercado Mexicano de Derivados (MexDer) en México, o fuera de los mercados financieros establecidos, es decir, entre instituciones financieras y sus clientes, lo cual se conoce como el mercado "over-the-counter"(OTC).

El principal propósito de los derivados es que estos sirven para reducir el riesgo inherente en la fluctuación de los precios de acciones, tasas de interés, divisas etc. Sin embargo, estos instrumentos también son utilizados por especuladores que tratan de hacer dinero negociando con ellos.

Algunas de las funciones que tienen los derivados son las siguientes:

- Inversionistas que deseen proteger sus portafolios de instrumentos financieros contra movimientos negativos en los precios de estos últimos.
- Sirven de cobertura para empresas o gobiernos que tengan compromisos de pago en divisas.
- Deudores a tasa flotante que deseen protegerse contra movimientos negativos en las tasas de interés.
- Especuladores que busquen utilidades por el movimiento en los precios de los bienes subyacentes.
- Empresas que deseen asegurar utilidades futuras.

[1] Los productos derivados también se conocen como derivados financieros o simplemente derivados.
[2] Ver apéndice A.

Los principales productos derivados son los siguientes: Futuros, Forwards, Opciones, Swaps, entre otros.

Un futuro, como su nombre lo indica, es un contrato obligatorio entre dos partes para comprar o vender un bien subyacente en una fecha futura, a un precio pactado con anterioridad. Existen futuros para casi todos los bienes que se pueda uno imaginar, incluso existen futuros de maíz, petróleo, y hasta condiciones del clima en una cierta época del año.

Por otro lado, los contratos forward se definen exactamente igual que los futuros, excepto que los primeros se negocian en mercados establecidos mientras que los segundos se negocian "over-the-counter". Normalmente los contratos forward se pueden ajustar más a las necesidades de las partes que los negocian.

Una opción es un contrato que da el derecho, mas no la obligación, de comprar o vender un bien subyacente en una fecha determinada, a un precio establecido. Cuando hablamos de derecho nos referimos a que la parte que tiene el derecho de comprar o vender el bien puede no ejercer tal derecho en el momento en que vence la opción.

Un Swap es un contrato en el que dos contrapartes fijan un monto predeterminado de dinero. Una de las contrapartes se compromete a pagar un porcentaje a tasa fija de dicho monto y la otra contraparte se compromete a pagar un porcentaje a tasa flotante del mismo monto durante un tiempo predeterminado.

HISTORIA DE LOS DERIVADOS

El concepto de derivados no es tan nuevo como se puede pensar. Cierto tipo de instrumentos derivados fueron usados en la Grecia Antigua (año 330 antes de Cristo). Los agricultores, para reducir el riesgo de un precio desfavorable de su cosecha en el futuro, pactaban acuerdos adelantados en los cuales se acordaba un precio para entregar su cosecha unos meses después. En el año de 1636, en Amsterdam, los agricultores y compradores de tulipanes hacían acuerdos adelantados para limitar el riesgo en el caso en que la cosecha fuera pobre.

En Estados Unidos, el establecimiento del New York Stock Exchange (NYSE) en 1790 creó la necesidad por parte de los inversionistas de un mercado de derivados formal y organizado. Es importante destacar que para el año de 1900 las transacciones con derivados ya se hacían "over-the-counter".

En 1973 se creó el Chicago Board Options Exchange, acontecimiento que impulsó de manera considerable el mercado de derivados.

Los productos derivados, como se había mencionado antes, se crearon debido a la necesidad de reducir el riesgo por las fluctuaciones en los precios de mercado, entre otras razones. No obstante, por el uso indebido de estos instrumentos, muchas empresas se han declarado en bancarrota por no tener reglas y restricciones para el uso de los derivados, pues así como ayudan a reducir el riesgo en muchas transacciones, también pueden ser muy peligrosos si no se tiene cuidado al negociarlos. En el año de 1995, el banco Barings se declaró en bancarrota después de que uno de sus empleados, Nick Leeson, perdió 1.4 billones de dólares por "apostar"que el índice Nikkei 225 de las principales acciones japonesas no se movería más allá de su rango normal durante un cierto intervalo de tiempo. El supuesto de este señor se vino abajo después del terremoto de Kobe el 17 de enero de 1995, día en el que Leeson tuvo que reconocer sus pérdidas. Así como éste, existen muchos casos en los que los derivados llevaron a la quiebra a distintas empresas.

En el año de 1997 los profesores Robert C. Merton y Myron S. Scholes recibieron el premio Nobel de economía después de que en 1973 publicaran el tan famoso modelo de Black-Merton-Scholes para valuar opciones. Curiosamente, un año después de que Merton y Scholes recibieran el premio Nobel, el fondo de inversiones del cual eran los principales accionistas tuvo que ser rescatado por un costo de 3.5 billones de dólares ante el temor de que el colapso de dicho fondo tuviera un efecto desastroso en las instituciones financieras alrededor del mundo.

En el año 2001, la compañía más grande de energía en Estados Unidos, Enron, fue la primera empresa estadounidense que se declaró en quiebra después de utilizar indebidamente derivados sobre energéticos. En el año 2003, el Departamento de Defensa de los Estados Unidos propuso crear futuros sobre terrorismo, propuesta que fracasó poco tiempo después. El Departamento de Defensa pensaba que este mercado de futuros podría servir para predecir y prevenir ataques terroristas futuros.

CHICAGO BOARD OPTIONS EXCHANGE

El Chicago Board Options Exchange, comúnmente llamado CBOE, ha revolucionado el mundo financiero en los últimos 31 años. El CBOE fue creado en abril de 1973. Esta nueva organización introdujo el universo de las opciones estandarizadas, es decir, opciones cuyas especificaciones son previamente establecidas antes de ser negociadas. Cuando el CBOE abrió sus puertas a los inversionistas de todo el mundo sólo se negociaban opciones de compra sobre 16 acciones. Después de cuatro años de operación, las opciones de venta también fueron incluidas en las operaciones del CBOE.

En Marzo de 1983 se dio uno de los mayores acontecimientos en la vida del CBOE. Se comenzó a negociar opciones sobre índices accionarios como el Standard & Poor's 100 Index (SPX) o el Índice Dow Jones 30, los cuales son utilizados por los inversionistas como parámetro para formar sus portafolios de acciones. El valor de la opción depende del nivel de los índices accionarios.

Para el año de 1989 se introdujeron las opciones sobre tasas de interés. Este tipo de opciones permiten a los inversionistas protegerse contra movimientos desfavorables en las tasas o simplemente para especular sobre el movimiento de las mismas.

Existen otros mercados de opciones tanto en Estados Unidos como en el resto del mundo. Sin embargo, el CBOE es por mucho el rey de las opciones, ya que es una institución que constantemente se encuentra inovando para ofrecer cada vez mejores productos a los inversionistas de todo el mundo que deseen operar opciones.

MERCADO MEXICANO DE DERIVADOS (MEXDER)

El Mercado Mexicano de Derivados (MexDer) surge en México debido a la apertura del sistema financiero mexicano a la inversión extranjera, y para responder a la necesidad del sector empresarial de contar con instrumentos financieros adecuados para protegerse de fluctuaciones en los precios de mercado de divisas, acciones, entre otros instrumentos financieros. El MexDer es la bolsa de futuros y opciones, independiente de la Bolsa Mexicana de Valores (BMV), que provee las instalaciones y servicios necesarios para cotizar y negociar contratos estandarizados de futuros y opciones. El MexDer inició operaciones el 15 de diciembre de 1998 después del esfuerzo realizado por integrantes profesionales de la Bolsa Mexicana de Valores (BMV), la Asociación Mexicana de Intermediarios Bursátiles (AMIB) y la S.D. Indeval. El MexDer ha sido un gran adelanto en el ámbito financiero mexicano ya que ofrece nuevas y mejores oportunidades tanto a inversionistas mexicanos como extranjeros de administrar los riesgos en sus portafolios de instrumentos negociados en los distintos mercados financieros de México.

SOFTWARE

El objetivo del presente trabajo es profundizar en el extenso tema de los contratos forward y las opciones. Para lograr este propósito viene incluido un software interactivo programado en Matlab cuyo objetivo es complementar los temas que se verán en los capítulos siguientes.[3]

[3] En el apéndice A se anexa una pequeña explicación de cómo se utiliza este programa en Matlab.

Capítulo 1

Forwards

Un contrato forward es un derivado particularmente simple debido a la facilidad con que se calcula su valor. Este contrato es usualmente privado entre dos instituciones financieras o entre una institución financiera y uno de sus clientes corporativos y normalmente es negociado fuera de los mercados financieros.

1.1. Contratos Forward

Definición 1.1. (Contrato Forward)

Un contrato forward es un acuerdo *obligatorio* para comprar o vender un bien a un precio K en una fecha futura T.

Los tiempos t y T son los tiempos[1] de inicio y vencimiento del contrato respectivamente. Al precio K se le denomina precio de entrega y se fija en la fecha t. Es importante señalar que la variable $T - t$, medida en años, denota el tiempo de duración del contrato.

Una de las partes del contrato forward asume la *posición corta* comprometiéndose a vender el bien subyacente en el tiempo T, al precio K. Asimismo, la otra parte asume la *posición larga*, comprometiéndose a comprar el bien subyacente en el tiempo T y al mismo precio.

Ejemplo 1.1.

Supongamos que el precio de una acción de Telmex el día 3 de enero del 2003 es de \$14 pesos en la Bolsa Mexicana de Valores. Un inversionista A desea comprar 150 acciones de Telmex el 3 de julio del 2003; además este inversionista piensa que la cotización de la acción en el mercado va a subir por lo que pacta con otro inversionista B un contrato forward para que este último le venda las 150 acciones a un precio de \$15 por acción dentro de seis meses. Esto significa que el inversionista A se compromete a comprar las acciones y el inversionista B se compremete

[1] Se utilizará indistintamente fechas o tiempos para las fechas t y T.

a venderlas a ese precio dentro de los seis meses que quedaron estipulados en el contrato. De esta forma, según la definición (1.1) se tiene que:

i) Bien subyacente: Acciones de Telmex.

ii) Precio de entrega, $K = \$15$ por acción.

iii) Duración del contrato forward, $T - t = 0.5$ años.

iv) Posición corta: Inversionista B.

v) Posición larga: Inversionista A.

Normalmente ninguna cantidad de dinero cambia de manos antes del vencimiento del contrato forward y una vez ocurrido éste se producirá el intercambio especificado en el contrato. Una de las características de los contratos forward es que K se fija de tal modo que el valor del contrato sea cero en el tiempo t para cualquiera de las dos posiciones (corta o larga), es decir, no cuesta tomar alguna de estas dos posiciones.

Cabe señalar que en un contrato forward, el precio de mercado del bien subyacente al tiempo T, denotado por S_T, determina completamente las ganancias o pérdidas que pueden obtener las dos posiciones del contrato. Para entender mejor esto, consideremos el contrato forward del ejemplo (1.1). A continuación analizaremos las distintas formas en que el precio de mercado S_T afecta, tanto a la posición larga como a la posición corta dentro del contrato forward.

POSICIÓN LARGA.

En nuestro ejemplo la posición larga es asumida por el inversionista A quien se compromete a comprar las acciones pagando $15 \times 150 = \$2,250$ en la fecha de vencimiento T : 3 julio 2003. Analizaremos a continuación tres posibles escenarios que puede enfrentar el inversionista A:

a) Precio de la acción al tiempo T, $S_T = \$17$.
Al tiempo T, el inversionista A compra las 150 acciones de Telmex por $15 \times 150 = \$2,250$. Sin embargo, en el mercado la acción se cotiza en \$17. Si el inversionista A vende las acciones en el mercado, recibirá por ellas $\$17 \times 150 = \$2,550$. De esta manera el inversionista A obtiene una ganancia de

$$\$2,550 - \$2,250 = \$300$$

b) Precio de la acción al tiempo T, $S_T = \$12$
Al tiempo T, el inversionista B compra las 150 acciones de Telmex por $\$15 \times 150 = \$2,250$. No obstante, comprar las acciones en el mercado cuesta $\$12 \times 150 = \$1,800$. De esta forma el inversionista obtiene una pérdida de

$$\$2,250 - \$1,800 = \$450$$

c) Precio de la acción al tiempo T, $S_T = \$15$
Al tiempo T, el precio de entrega coincide con el valor de la acción, así la posición larga no obtiene ni pérdidas ni ganancias por comprar las acciones mediante el contrato forward.

En resumen, podemos observar que si el precio de mercado del bien subyacente es menor que el precio de entrega de éste en la fecha de vencimiento del contrato forward entonces la posición larga del contrato obtiene pérdidas, de lo contrario, si el precio del subyacente es mayor al precio de entrega, obtiene ganancias.

POSICIÓN CORTA.

Como habíamos mencionado antes, la persona que adopta la posición corta se compromete a vender el bien subyacente, en este caso las 150 acciones de Telmex, a \$15 por acción. Analizaremos a continuación tres posibles escenarios que puede enfrentar el inversionista B:

a) Precio de la acción al tiempo T, $S_T = \$13$.
Al tiempo T, el inversionista B recibe $\$15 \times 150 = \$2,250$ del inversionista A por la venta de las 150 acciones de Telmex siendo que éstas realmente valen $\$13 \times 150 = \$1,950$, así, el inversionista B obtiene una ganancia de

$$\$2,250 - \$1,950 = \$300$$

b) Precio de la acción al tiempo T, $S_T = \$18$.
Al tiempo T, el inversionista B recibe $\$15 \times 150 = \$2,250$ del inversionista A por la venta de las 150 acciones de Telmex. Sin embargo, dichas acciones ahora valen $\$18 \times 150 = \$2,700$. De esta manera, el inversionista B obtiene una pérdida de

$$\$2,700 - \$2,250 = \$450.$$

c) Precio de la acción al tiempo T, $S_T = \$15$.
Esto significa que el precio de entrega y el precio de mercado de la acción son iguales, lo que implica que el inversionista B no obtiene pérdidas ni ganancias por realizar la transacción con el inversionista A.

En resumen, podemos observar que si el precio de mercado del bien subyacente es menor que el precio de entrega de éste en la fecha de vencimiento del contrato forward entonces la posición corta del contrato obtiene ganancias, de lo contrario, si el precio del subyacente es mayor al precio de entrega, obtiene pérdidas.

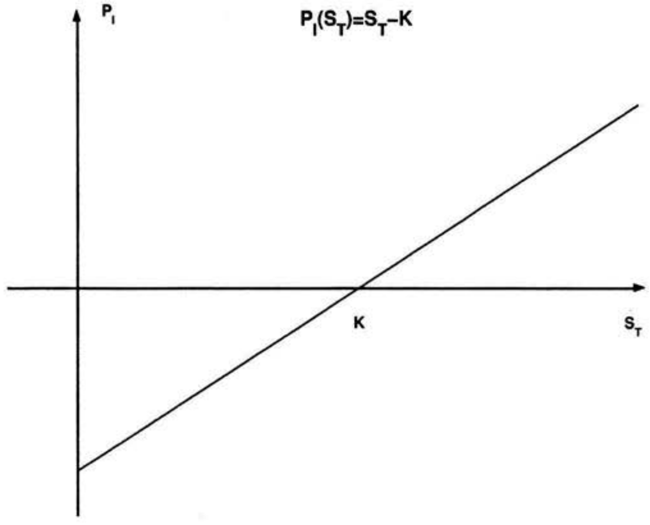

Figura 1.1: Función de pago de un contrato forward largo con precio de entrega K

Definición 1.2. (Funciones de pago)

Dado un contrato forward, definimos

i) $P_l(S_T) = S_T - K$ la función de pago de una unidad del bien para la posición larga.

ii) $P_c(S_T) = K - S_T$ la función de pago de una unidad del bien para la posición corta.

donde S_T es el precio de mercado de una unidad del bien subyacente al tiempo T.

De la definición (1.2) se tiene lo siguiente:

i) Si $S_T > K$ entonces $P_l(S_T) > 0$ y $P_c(S_T) < 0$.

ii) Si $S_T < K$ entonces $P_l(S_T) < 0$ y $P_c(S_T) > 0$.

iii) Si $S_T = K$ entonces $P_l(S_T) = 0 = P_c(S_T)$.

Para el inciso *i)*, tenemos que si $S_T > K$, la posición larga compra el bien al tiempo T por K unidades monetarias, sin embargo, el bien se cotiza en el mercado a S_T unidades monetarias, así, si la posición larga vende el bien inmediatamente en el mercado obtiene una ganancia de $S_T - K$ unidades monetarias. Haciendo

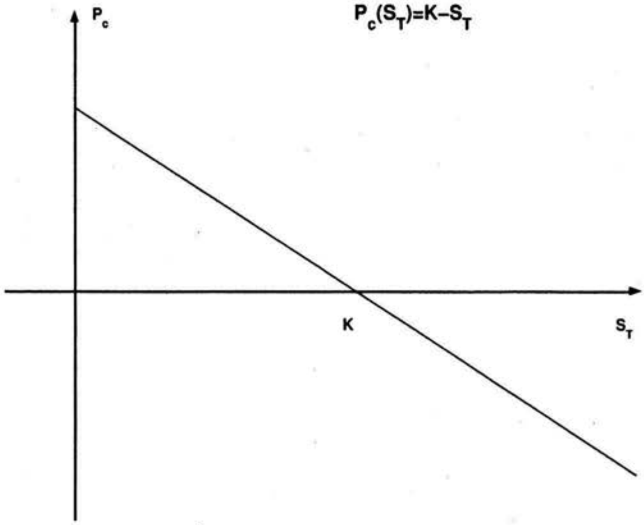

Figura 1.2: Función de pago de un contrato forward corto con precio de entrega K

un análisis similar para la posición corta se tiene que ésta obtiene una pérdida de $K - S_T$ por vender el bien a un precio menor del que se cotiza en el mercado. Para los incisos *ii*) y *iii*) el análisis es totalmente análogo.

1.2. CÁLCULO DEL PRECIO FORWARD

Antes de comenzar con el análisis del precio forward es necesario definir la variable τ. Definimos a τ como una fecha entre las fechas de inicio y vencimiento del contrato forward. Esta variable denotará la fecha actual (hoy).

Definición 1.3. (Precio Forward)

Dado un contrato forward, definimos el precio forward al tiempo τ, denotado por $F(\tau, T)$, como el precio de entrega que tendría el contrato forward si éste comenzara al tiempo τ, con la misma fecha de vencimiento T.

Observación 1.1.

De la definición (1.3) se tiene que el precio forward al tiempo $\tau = t$ coincide con el precio de entrega K del contrato, es decir, $K = F(t, T)$.

Los resultados que se desarrollarán en este apartado corresponden a contratos forward basados en bienes de inversión con una y sólo una de las siguientes características:

i) que no pagan dividendos

ii) que pagan dividendos discretos

iii) que pagan un rendimiento continuo

iv) divisas.

Para facilitar los cálculos que presentaremos más adelante son necesarios algunos supuestos, a saber:

i) No existen costos por transacciones.

ii) Las ganancias o pérdidas obtenidas de los contratos forward están sujetas a la misma tasa de impuestos.

iii) Se puede prestar y pedir prestado dinero a la misma tasa de interés.

iv) Se permiten las ventas en corto[2] y los bienes son divisibles.

v) No existen oportunidades de arbitraje[3].

Siguiendo esta última premisa, el precio forward se fija de tal modo que no existan oportunidades de arbitraje.

1.2.1. CONTRATOS FORWARD BASADOS EN BIENES DE INVERSIÓN QUE NO PAGAN DIVIDENDOS

En esta sección analizaremos la relación entre el precio forward y el precio de mercado de un bien subyacente que no paga dividendos.

Ejemplo 1.2.

Consideremos una acción de Telmex cuyo precio de mercado actual es de \$10 y que se espera no pague dividendos durante un año, tiempo de duración del contrato forward. Supongamos que la tasa de interés libre de riesgo es 6 % anual capitalizable de forma continua.

Supongamos ahora que el precio de entrega es de \$12 por acción. Un inversionista puede tomar la siguiente estrategia:

i) Pedir prestados $\$1,000$ a la tasa de interés libre de riesgo del 6 % anual por un año.

[2]Ver apéndice A.
[3]Ver apéndice A.

ii) Comprar 100 acciones de Telmex.

iii) Entrar en un contrato forward para vender las 100 acciones por \$1,200 dentro de un año.

Al terminar el año, el inversionista, para liquidar su deuda, está obligado a pagar $1,000 \cdot e^{.06\times 1} = \$1,061.84$. Al vender las 100 acciones al precio pactado en el contrato forward recibirá $\$1,200$, de tal modo que el inversionista obtiene una ganancia libre de riesgo de

$$\$1,200 - \$1,061.84 = \$138.16$$

De esta manera, si el precio de entrega es mayor a \$10.6184, el inversionista siempre obtiene gananacias sin invertir dinero alguno. Así, para evitar oportunidades de arbitraje es necesario que el precio de entrega sea menor o igual a \$10.6184.

Supongamos ahora que el precio de entrega es de \$8. Un inversionista puede optar por la siguiente estrategia:

i) Vender en corto 100 acciones de Telmex.

ii) Invertir los \$1,000, obtenidos por la venta en corto de las acciones, a la tasa de interés libre de riesgo del 6 % por un año.

iii) Entrar en un contrato forward para comprar 100 acciones por \$800 en un año.

Al finalizar el año del contrato, el inversionista obtiene \$1,061.84 de la inversión hecha a la tasa del 6 %, sin embargo, para comprar las acciones, él paga \$800 pactados en el contrato forward de tal manera que el inversionista obtiene un beneficio libre de riesgo de

$$\$1,061.84 - \$800 = \$261.84$$

esto sin que invierta un solo centavo de su bolsa. Cualquier precio de entrega por debajo de \$10.6184 permite a los inversionistas hacer dinero vendiendo en corto las acciones y tomando la posición larga en un contrato forward. De esta manera la única forma de evitar oportunidades de arbitraje es que el precio de entrega se fije en \$10.6184

Una vez establecida la fecha de vencimiento de un contrato forward basado en un bien de inversión que no paga dividendos, se tiene que el precio forward al tiempo τ debe cumplir la siguiente igualdad:

$$F(\tau, T) = S_\tau \cdot e^{r(T-\tau)} \tag{1.1}$$

donde

S_τ: Precio de una unidad del bien suyacente en el tiempo τ.

r: Tasa de interés anual libre de riesgo capitalizable de forma continua.

T: Fecha de vencimiento del contrato.

$T-\tau$: Tiempo que resta para el vencimiento del contrato.

Para mostrar que la igualdad (1.1) debe cumplirse en general, veremos que si fuera falsa entonces existiría oportunidad de arbitraje.

Supongamos que $F(\tau,T) > S_\tau \cdot e^{r(T-\tau)}$, entonces un inversionista podría elegir la siguiente estrategia:

i) Pedir prestado S_τ unidades monetarias a la tasa de interés libre de riesgo r por un periodo de tiempo $T-\tau$.

ii) Comprar el bien subyacente.

iii) Tomar la posición corta en el contrato forward.

Al tiempo T, el inversionista vende el bien subyacente al precio establecido en el contrato, $F(\tau,T)$, y paga $S_\tau \cdot e^{r(T-\tau)}$ para liquidar su deuda. Por hipótesis se tiene que

$$F(\tau,T) > S_\tau \cdot e^{r(T-\tau)}$$

de modo que el inversionista obtiene un beneficio sin riesgo alguno de

$$F(\tau,T) - S_\tau \cdot e^{r(T-\tau)}$$

Por otro lado, supongamos que $F(\tau,T) < S_\tau \cdot e^{r(T-\tau)}$, entonces un inversionista podría elegir la siguiente estrategia:

i) Vender en corto el bien a S_τ unidades monetarias.

ii) Invertir S_τ a la tasa de interés libre de riesgo r.

iii) Tomar la posición larga en el contrato forward.

Al tiempo T, el inversionista compra el bien subyacente por $F(\tau,T)$ unidades monetarias, cierra la posición corta y obtiene $S_\tau \cdot e^{r(T-\tau)}$ de la inversión realizada a la tasa r. Como $F(\tau,T) < S_\tau \cdot e^{r(T-\tau)}$ se tiene que el inversionista obtiene una ganancia libre de riesgo de

$$S_\tau \cdot e^{r(T-\tau)} - F(\tau,T)$$

así, sólo cuando se cumple la ecuación (1.1) no existen oportunidades de arbitraje.

1.2.2. CONTRATOS FORWARD BASADOS EN BIENES DE INVERSIÓN QUE PROVEEN DIVIDENDOS DISCRETOS

Ahora consideraremos contratos forward sobre instrumentos que proveen una cantidad conocida de dinero periódicamente.

Ejemplo 1.3.

Supongamos que tenemos un contrato forward largo para comprar un bono, que provee dividendos mediante cupones pagaderos cada seis meses, cuyo precio de mercado es de \$700. Supondremos que el contrato vence dentro de un año y que el bono vence en 10 años. Así, el contrato forward es un contrato para comprar, dentro de un año, un bono por 9 años. Los cupones son de \$30 y la tasa de interés libre de riesgo es 12 % anual (capitalizable de forma continua).

Analizaremos dos posibles escenarios para el precio de entrega del contrato forward.

a) Si el precio de entrega es K=\$740, entonces un inversionista podría elegir la siguiente estrategia:

i) Pedir prestados \$700 a la tasa de interés libre de riesgo del 12 % anual capitalizable continuamente.

ii) Comprar el bono.

ii) Tomar la posición corta en un contrato forward para vender el bono dentro de un año por \$740.

A los seis meses de la compra, el inversionista recibe \$30 del primer cupón los cuales invierte a seis meses al 12 %. Asimismo, al final del año recibe \$30 del segundo cupón y vende el bono al precio de entrega pactado en el contrato forward, es decir, \$740. Además, el inversionista obtiene

$$\$30 \cdot e^{.12\times .5} = \$31.8551$$

de la inversión que realizó hace seis meses. Por otro lado, tiene una deuda de $\$700 \cdot e^{.12\times 1} = \$789.2478$. De este modo, la ganancia libre de riesgo obtenida por el inversionista es de

$$\$30 + \$740 + \$31.8551 - \$789.2478 = \$12.6073$$

b) Si el precio de entrega es $K = \$710$, un inversionista puede optar por la siguiente estrategia:

i) Vender en corto el bono.

ii) Invertir el dinero obtenido a la tasa libre de riesgo.

iii) Tomar la posición larga en el contrato forward para comprar el bono dentro de un año por \$710.

Como el inversionista vende el bono, éste debe pagar los cupones del mismo. De los \$700 obtenidos de la venta del bono el inversionista invierte

$$\$30 \cdot e^{-(.12\times.5)} = \$28.2529$$

a seis meses para pagar el primer cupón del bono. Así sólo invierte

$$(\$700 - \$28.2529) = 671.7471$$

a un año. De la suma obtenida al año igual a

$$(\$700 - \$28.2529) \cdot e^{.12\times 1} = \$757.3927$$

\$30 son usados para pagar el segundo cupón y \$710 se utilizan para comprar el bono según el contrato forward. De este modo, el inversionista obtiene una ganancia libre de riesgo de

$$\$757.3927 - \$30 - \$710 = \$17.3927$$

La primera estrategia produce beneficios cuando el precio forward es mayor a \$727.3927, mientras que la segunda produce beneficios si es menor a \$727.3927. Es inmediato que para que no haya oportunidades de arbitraje, el precio forward debe ser de \$727.3927.

Haciendo abstracción del ejemplo anterior denotaremos por I a la suma de los valores presentes de los dividendos que provee el bien durante la vida del contrato forward. Así, se tiene que el precio forward, al tiempo τ, para este caso cumple

$$F(\tau, T) = (S_\tau - I) \cdot e^{r(T-\tau)} \tag{1.2}$$

donde

S_τ: Precio de una unidad del bien subyacente en el tiempo τ.

r: Tasa de interés anual libre de riesgo capitalizable de forma continua.

T: Fecha de vencimiento del contrato.

I: Suma de los valores presentes de los dividendos que provee el bien durante la vida del contrato.

$T - \tau$: Tiempo restante para el vencimiento del contrato.

Veremos que la ecuación (1.2) es correcta.

Supongamos que $F(\tau, T) > (S_\tau - I) \cdot e^{r(T-\tau)}$, esto es lo mismo que afirmar que $F(\tau, T) + I \cdot e^{r(T-\tau)} > S_t \cdot e^{r(T-\tau)}$. Un inversionista puede optar por la siguiente estrategia:

i) Pedir prestado S_τ unidades monetarias.

ii) Comprar el bien.

iii) Tomar la posición corta en un contrato forward para vender el bien al tiempo T por $F(\tau, T)$ unidades monetarias.

Al tiempo T el inversionista vende el bien subyacente por $F(\tau, T)$ unidades monetarias. Como al tiempo τ el inversionista compró el bien, entonces recibe el monto de los dividendos que provee éste, equivalentes a I en el tiempo τ e iguales a $I \cdot e^{r(T-\tau)}$ en el tiempo T. En total, el inversionista recibe

$$F(\tau, T) + I \cdot e^{r(T-\tau)}$$

sin embargo, éste paga $S_\tau \cdot e^{(T-\tau)}$ para liquidar su deuda. Por hipótesis se tiene que

$$F(\tau, T) + I \cdot e^{r(T-\tau)} > S_\tau \cdot e^{r(T-\tau)}$$

de modo que el inversionista obtiene un beneficio libre de riesgo de

$$F(\tau, T) + I \cdot e^{r(T-\tau)} - S_\tau \cdot e^{r(T-\tau)}$$

Por otra parte, si ahora suponemos que $F(\tau, T) < (S_\tau - I) \cdot e^{r(T-\tau)}$, es decir, $F(\tau, T) + I \cdot e^{r(T-\tau)} < S_\tau \cdot e^{r(T-\tau)}$. Un inversionista puede optar por la siguiente estrategia:

i) Vender en corto el bien por S_τ unidades monetarias.

ii) Invertir S_τ a la tasa de interés libre de riesgo r.

iii) Tomar la posición larga en un contrato forward para comprar el bien, al tiempo T, por $F(\tau, T)$ unidades monetarias.

Al tiempo T, el inversionista recibe $S_\tau \cdot e^{r(T-\tau)}$ de la inversión que realizó al tiempo τ. Como el inversionista vendió el bien entonces debe pagar los dividendos iguales a I al tiempo τ e iguales a $I \cdot e^{r(T-\tau)}$ al tiempo T. Además el inversionista paga, $F(\tau, T)$ unidades monetarias, por la compra del bien pactado en el contrato forward. Así, en total, el inversionista paga al tiempo T

$$F(\tau, T) + I \cdot e^{r(T-\tau)}$$

y obtiene $S_\tau \cdot e^{r(T-\tau)}$. Por hipótesis se tiene que $F(\tau, T) + I \cdot e^{r(T-\tau)} < S_\tau \cdot e^{r(T-\tau)}$ de tal forma que el inversionista obtiene una ganancia libre de riesgo de

$$S_\tau \cdot e^{r(T-\tau)} - \left(F(\tau, T) + I \cdot e^{r(T-\tau)}\right)$$

De esta forma hemos demostrado que la ecuación (1.2) se cumple.

En el ejemplo (1.3) se tiene que $S_\tau = \$700$, $r = 0.12$, $T - \tau = 1$. Asimismo, $I = 30 \cdot e^{-.12\times.5} + 30 \cdot e^{-.12\times1} = \$54.8605$ por lo que

$$F(\tau, T) = (\$700 - \$54.8605) \cdot e^{.12\times1} = \$727.3927$$

que es igual al resultado obtenido con anterioridad.

1.2.3. Contratos forward basados en bienes de inversión con dividendos continuos

Ahora analizaremos el caso en el que el bien subyacente paga dividendos de manera continua a una cierta tasa q. En la práctica los dividendos no son pagados de forma continua pero en algunas situaciones el supuesto de la tasa continua de dividendos es una buena aproximación a la realidad.

El precio forward al tiempo τ para este tipo de contratos debe cumplir la siguiente igualdad:

$$F(\tau, T) = S_\tau \cdot e^{(r-q)(T-\tau)} \tag{1.3}$$

donde

S_τ: Precio de una unidad del bien subyacente en el tiempo τ.

r: Tasa de interés anual libre de riesgo capitalizable de forma continua.

q: Tasa continua de rendimiento del bien subyacente.

T: Fecha de vencimiento del contrato.

$T - \tau$: Tiempo que resta para el vencimiento del contrato.

Veremos que la ecuación (1.3) es correcta.

Supongamos que $F(\tau, T) > S_\tau \cdot e^{(r-q)(T-\tau)}$, entonces un inversionista podría elegir la siguiente estrategia:

i) Pedir prestado $e^{-q(T-\tau)}$ a la tasa de interés libre de riesgo r.

ii) Comprar $e^{-q(T-\tau)}$ del bien, es decir, debe pagar $S_\tau \cdot e^{-q(T-\tau)}$ por el bien.

iii) Invertir los dividendos del bien en el bien.

iv) Adquirir la posición corta en un contrato forward.

Al tiempo T, el inversionista tiene una deuda de $S_\tau \cdot e^{(r-q)(T-\tau)}$. Por otro lado, obtiene una unidad del bien ($e^{-q(T-\tau)} \times e^{q(T-\tau)} = 1$) ya que invirtió los dividendos en el mismo bien. Bajo los términos del contrato forward, el inversionista vende el bien por $F(\tau, T)$ al tiempo T. Como $F(\tau, T) > S_\tau \cdot e^{(r-q)(T-\tau)}$ entonces el inversionista obtiene una ganancia libre de riesgo de

$$F(\tau, T) - S_\tau \cdot e^{(r-q)(T-\tau)}$$

Supongamos ahora que $F(\tau, T) < S_\tau \cdot e^{(r-q)(T-\tau)}$, entonces un inversionista puede optar por la siguiente estrategia:

i) Vender en corto $e^{-q(T-\tau)}$ del bien.

ii) Invertir $S_\tau \cdot e^{-q(T-\tau)}$, obtenidos de la venta en corto, a la tasa de interés libre de riesgo r.

iii) Tomar la posición larga en un contrato forward.

Al tiempo T, el inversionista obtiene $S_\tau \cdot e^{(r-q)(T-\tau)}$ unidades monetarias por la inversión que hizo al principio. Por otro lado, como vendió en corto el bien debe regresarlo. Sin embargo, bajo los términos del contrato forward, el inversionista compra el bien por $F(\tau, T)$ al tiempo T y cierra la posición corta. Por hipótesis $F(\tau, T) < S_\tau \cdot e^{(r-q)(T-\tau)}$ de modo que el inversionista obtiene una ganancia libre de riesgo de

$$S_\tau \cdot e^{(r-q)(T-\tau)} - F(\tau, T)$$

Así pues, la única forma en que no existen posibilidades de hacer arbitraje es que

$$F(\tau, T) = S_\tau \cdot e^{(r-q)(T-\tau)}$$

De este modo la ecuación (1.3) es correcta.

1.2.4. CONTRATOS FORWARD SOBRE DIVISAS

En esta sección analizaremos la cotización de contratos forward para la compra o venta de una determinada cantidad de divisas. Para comprender mejor este tipo de contratos consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.4.

Un inversionista mexicano debe liquidar una deuda en dólares estadounidenses en seis meses. Supongamos que el tipo de cambio actual es de aproximadamente \$10 pesos por dólar. El inversionista tiene el riesgo de que el peso se deprecie frente al dólar de modo que necesitaría más pesos para adquirir los dólares necesarios para pagar dicha deuda. Debido a esto, el inversionista decide tomar la posición larga en un contrato forward para comprar los dólares que requiere para liquidar la deuda, es decir, en este contrato el bien subyacente es una cierta cantidad de divisas, en este caso dólares. Así pues, el inversionista ha fijado el tipo de cambio en seis meses eliminando la incertidumbre que podría existir de no haber entrado en un contrato forward.

En general, si se desea comprar divisas del país β con divisas del país α mediante un contrato forward, se denotará:

S_τ: Precio spot al tiempo τ cotizado en la divisa del país α de una unidad de la moneda del país β, en otras palabras, es la cantidad de unidades de la moneda del país α necesarias para comprar una unidad de la moneda del país β.

$F(\tau, T)$: Precio forward al tiempo τ cotizado en la divisa del país α de una unidad de la moneda del país β.

r_α: Tasa de interés anual libre de riesgo, capitalizable continuamente, del país α.

r_β : Tasa de interés anual libre de riesgo, capitalizable continuamente, del país β.

Para los contratos forward sobre divisas, el precio forward al tiempo τ, $F(\tau, T)$, debe cumplir la siguiente relación

$$F(\tau, T) = S_\tau \cdot e^{(r_\alpha - r_\beta)(T-\tau)} \tag{1.4}$$

Veremos que si la ecuación (1.4) no fuera correcta entonces existirían oportunidades de arbitraje. Supongamos primero que $F(\tau, T) > S_\tau \cdot e^{(r_\alpha - r_\beta)(T-\tau)}$, entonces un inversionista puede tomar la siguiente estrategia:

i) Pedir prestado $S_\tau \cdot e^{-r_\beta(T-\tau)}$ en la moneda del país α a la tasa r_α.

ii) Comprar $e^{-r_\beta(T-\tau)}$ unidades de la moneda del país β e invertirlos a la tasa r_β.

iii) Tomar la posición corta en un contrato forward cotizado en divisas del país α para vender una unidad de la moneda del país β.

Al tiempo T, la inversión hecha en la moneda del país β genera una unidad de la moneda de este país ($e^{-r_\beta(T-\tau)} \times e^{r_\beta(T-\tau)} = 1$) que es vendida por $F(\tau, T)$ de acuerdo a lo establecido en el contrato. Por otro lado, el inversionista necesita $S_\tau \cdot e^{(r_\alpha - r_\beta)(T-\tau)}$ para liquidar su deuda, pero por hipótesis se tiene que

$$F(\tau, T) > S_\tau \cdot e^{(r_\alpha - r_\beta)(T-\tau)}$$

así, el inversionista obtiene una ganancia libre de riesgo de

$$F(\tau, T) - S_\tau \cdot e^{(r_\alpha - r_\beta)(T-\tau)}$$

con lo que hace arbitraje.

Supongamos ahora que $F(\tau, T) < S_\tau \cdot e^{(r_\alpha - r_\beta)(T-\tau)}$, un inversionista puede elegir la siguiente estrategia:

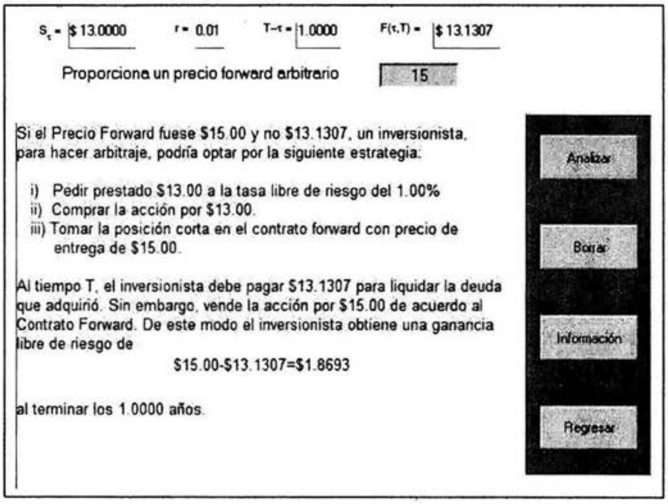

Figura 1.3: Resultado del ejemplo (1.5)

i) Pedir prestado $e^{-r_\beta(T-\tau)}$ en la moneda del país β a la tasa r_β.

ii) Comprar $S_\tau \cdot e^{-r_\beta(T-\tau)}$ unidades de la moneda del país α e invertirlos a la tasa r_α.

iii) Tomar la posición larga en un contrato forward cotizado en divisas del país α para comprar una unidad de la moneda del país β.

Al tiempo T, el inversionista tiene una deuda de $e^{-r_\beta(T-\tau)} \times e^{r_\beta(T-\tau)} = 1$ unidad monetaria del país β, además, la inversión realizada en el país α genera $S_\tau \cdot e^{(r_\alpha - r_\beta)(T-\tau)}$ unidades de la moneda del país α. El inversionista compra una unidad de la moneda del país β por $F(\tau, T)$, cantidad establecida en el contrato forward. Con dicha unidad de la moneda β liquida su deuda y obtiene una ganancia neta libre de riesgo de

$$S_\tau \cdot e^{(r_\alpha - r_\beta)(T-\tau)} - F(\tau, T)$$

unidades de la moneda α, con lo que hace arbitraje. De esta manera la ecuación (1.4) queda demostrada.

Nótese que este tipo de contratos forward puede clasificarse como un contrato forward basado en un bien de inversión que provee rendimientos continuos. Esto puede verificarse notando que la ecuación (1.4) y la ecuación (1.3) son la misma si se reemplaza r_α por r y r_β por q en la ecuación (1.3).

Ejemplo 1.5.

Consideremos los siguientes datos:

i) Precio de la acción que no provee dividendos, $S_t = \$13$.

ii) Tasa de interés libre de riesgo, $r = 1\,\%$

iii) Tiempo para el vencimiento, $T - t = 1$.

El precio forward para este contrato forward es \$13.1307. Con el software, en la parte de contratos forward, el usuario puede analizar que pasaría si el precio forward para un contrato forward distinto al correcto. Si metemos los datos de arriba en el programa y suponemos que el precio forward es \$15 y no \$13.1307 entonces el programa te describe una forma sencilla en la que se puede hacer arbitraje. Este es un ejemplo de la forma en que se puede utilizar el programa en Matlab para analizar contratos forward.

Los contratos forward son instrumentos financieros muy utilizados actualmente en el mundo de las finanzas debido a que sirven de cobertura principalmente evitando grandes pérdidas a inversionistas, empresas e incluso gobiernos. Además, estos derivados no se operan en mercados financieros establecidos de modo que se ajustan más a las necesidades de quienes los usan. En el siguiente capítulo trataremos el fascinante mundo de las opciones, que a pesar de que su definición es muy sencilla, el cálculo del precio de éstas requiere de matemática avanzada que no siempre es fácil de entender.

Capítulo 2

Opciones

En este capítulo estudiaremos otros productos derivados de gran importancia en las finanzas modernas, las opciones. Una opción da, al poseedor de ésta, el derecho, *mas no la obligación*, de comprar o vender un bien en una fecha determinada a un precio establecido con anterioridad. A las opciones que otorgan el derecho de comprar un bien se les denomina *opciones de compra* y a las que otorgan el derecho de venderlo se les denomina *opciones de venta*. De acuerdo con la literatura estadounidense, a las primeras las llamaremos *calls* y a las segundas *puts*.

Al igual que en forwards, en opciones existen dos posiciones; la posición larga la tiene el comprador de la opción y la posición corta la tiene el emisor de la misma. Este último tiene la obligación de vender (comprar) el bien si la posición larga decide ejercer el derecho otorgado por el call (put).

Otra manera de clasificar las opciones es de acuerdo al tiempo en el que puede ser ejercido el derecho que éstas otorgan. Una *opción europea* es aquella que sólo puede ser ejercida en la fecha de vencimiento de la misma. Por otro lado, una *opción americana* es aquella que se puede ejercer durante la vida de la opción, es decir, en cualquier momento antes del vencimiento de la opción. En lo que sigue del capítulo analizaremos solamente opciones europeas.

2.1. Calls

Definición 2.1. (Opción Call Europea)

Una *opción call europea* es el derecho de comprar un bien a un precio E, llamado precio de ejercicio, en una fecha futura T (fecha de vencimiento de la opción). El derecho que otorga la opción call puede ser ejercido únicamente en la fecha de vencimiento de la opción. El call se puede comprar, en el tiempo t, con $t < T$, por un precio c_t llamado prima.

Como se puede apreciar, según la definición (2.1), tomar la posición larga en un call implica un gasto de c_t, al contrario de un contrato forward, cuyo valor es nulo al inicio del mismo.

El emisor de la opción call, el que asume la posición corta, está obligado a vender el bien al precio de ejercicio pactado, siempre y cuando el comprador de la opción decida ejercer el derecho que le otorga la misma.

Si el precio de mercado del bien subyacente al tiempo T, denotado por S_T, es mayor que el precio de ejercicio del call, el comprador ejercerá la opción[1] debido a que ésta le otorga el derecho de comprar el bien a un precio menor del que pagaría si comprara el bien en el mercado. Así, el emisor del call deberá entregar el bien por el precio de ejercicio. Normalmente, el emisor sólo paga al comprador del call la diferencia entre el precio de mercado y el precio de ejercicio, es decir paga $S_T - E$. Por otro lado, si $S_T \leq E$, el comprador del call no ejercerá el derecho[2] que ha comprado y el emisor no tiene que pagar nada. De este modo el emisor del call desea recibir el costo de la prima, a cambio de garantizar un pago futuro en el caso en que el precio del bien subyacente fuese mayor que el precio de ejercicio.

Ejemplo 2.1. (Opción Call)

Un inversionista A desea comprar 100 acciones de Telmex dentro de tres meses y quiere asegurar, hoy, t : 22 de marzo de 2003, el precio actual de \$15 por acción. En este caso, el inversionista A compra 100 opciones call europeas a un inversionista B, con fecha de vencimiento T : 22 de junio de 2003. Cada opción otorga el derecho de comprar la acción de Telmex dentro de 3 meses. El inversionista paga por cada opción \$1. Supongamos que la tasa de interés libre de riesgo es de 10 % anual capitalizable de forma continua. De acuerdo a la definición (2.1) se tiene que:

i) Bien subyacente: acción de Telmex.

ii) Precio de la acción al tiempo t, $S_t = \$15$.

iii) Precio de ejercicio: $E = \$15$.

iv) Tiempo para el vencimiento de la opción: $T - t = .25$ años(3 meses).

v) Prima: $c_t = \$1$.

vi) Posición Larga: Inversionista A.

vii) Posición Corta: Inversionista B.

viii) Monto de la inversión al tiempo t: $100 \times \$1 = \$100$.

[1]Ejercer una opción es el proceso de ejercer el derecho que otorga la opción, ya sea de comprar o vender el bien subyacente.

[2]Por simplicidad supondremos que no ejerce la opción cuando $S_T = E$ ya que sí ejercer o no la opción resulta en el mismo beneficio.

Al igual que en forwards, el precio del bien subyacente al tiempo T, S_T, determina las pérdidas o ganancias que pueden obtener tanto el comprador como el emisor de la opción. Para comprender mejor esto, consideremos el ejemplo (2.1). A continuación analizaremos dos posibles escenarios que puede enfrentar el inversionista A.

a) Precio de la acción al tiempo T, $S_T = \$17$.

Al tiempo T, se tiene que $S_T > E$, es decir, el precio de mercado de la acción es mayor que el precio de ejercicio. El inversionista A ejerce las opciones, comprando las acciones a \$15 cada una. Si el inversionista vende las acciones inmediatamente en el mercado a \$17 obtiene un beneficio de

$$(\$17 - \$15) \times 100 = \$200$$

Sin embargo, la inversión que realizó al tiempo t fue de \$100.00 para comprar las opciones, así pues, el inversionista obtiene una ganancia neta de

$$\$200 - \$100 \cdot e^{.1 \times .25} = \$97.47$$

b) Precio de la acción al tiempo T, $S_T = \$13$

Al tiempo T, se tiene que $S_T < E$, es decir, el precio de mercado de la acción es mayor que el precio de ejercicio. El inversionista A no ejerce las opciones pues le conviene más comprar las acciones en el mercado que mediante el derecho que le otorgan las opciones. Así pues, la posición larga decide no ejercer la opción obteniendo una pérdida de

$$\$100 \cdot e^{.1 \times .25} = \$102.53$$

equivalente al costo de la inversión hecha inicialmente.

A continuación analizaremos cómo afectan estos dos escenarios a la posición corta, es decir, al inversionista B.

a) Precio de la acción al tiempo T, $S_T = \$17$.

Al tiempo T, la posición larga ejerce las opciones comprando cada acción por \$15. Como $S_T > E$ la posición corta pierde \$2 por acción debido a que la acción se cotiza en \$17 en el mercado y está obligado por la opción a vender las acciones a \$15 cada una. Sin embargo, la posición corta, al tiempo t, recibió \$100. De esta forma obtiene una pérdida neta de

$$\$200 - \$100 \cdot e^{.1 \times .25} = \$97.47$$

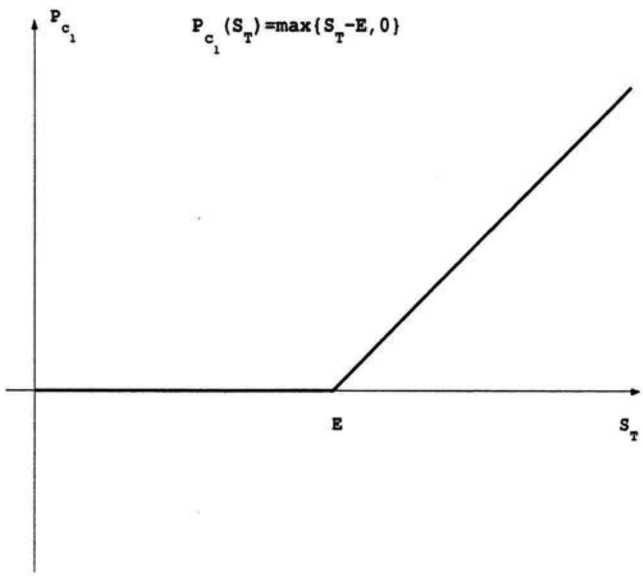

Figura 2.1: Función de pago de un call largo.

b) Precio de la acción al tiempo T, $S_T = \$13$.

Al tiempo T, se tiene que $E > S_T$; la posición larga no ejerce la opción, así, la posición corta no vende las acciones al precio de ejercicio. De esta manera, el inversionista B obtiene una ganancia neta de

$$\$100 \cdot e^{.1 \times .25} = \$102.53$$

que equivalen a la prima que recibió inicialmente.

En el ejemplo anterior tomamos en cuenta el costo de la prima, sin embargo, nuestro principal propósito será enfocarnos en la función de pago de la opción, sin tomar en cuenta las ganancias o pérdidas netas, ni el valor de la opción. Este último problema será atacado posteriormente.

Definición 2.2. (Funciones de pago de una opción call europea)

Dada una opción call europea, definimos

i) $P_{c_l}(S_T) = \text{máx}\{S_T - E, 0\}$ la función de pago para la posición larga, al tiempo T, de una unidad del bien.

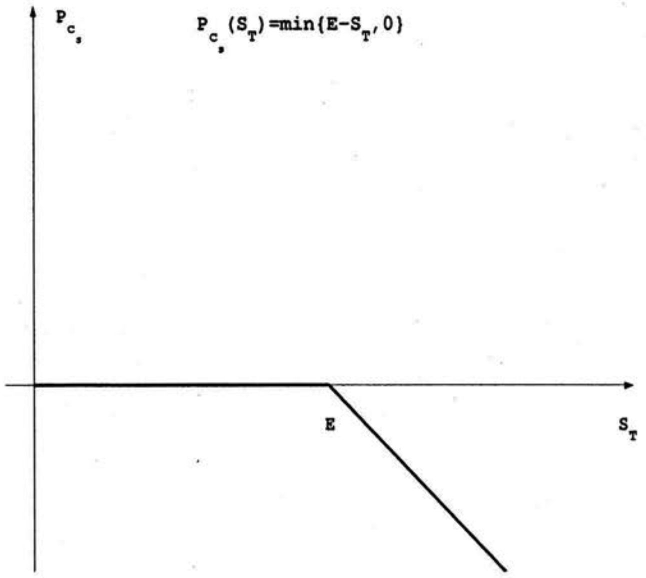

Figura 2.2: Función de pago de un call corto.

ii) $P_{c_s}(S_T) = \text{mín}\{E - S_T, 0\}$ la función de pago para la posición corta, al tiempo T, de una unidad del bien.

A la función $P_{c_l}(S_T)$ también se le conoce como el valor del call al tiempo T, es decir, $P_{c_l}(S_T) = c_T$. Este valor determinaría el precio del call si éste fuera comprado al tiempo T.

Analizaremos el inciso *i)*.

Si $S_T > E$ se tiene que $S_T - E > 0$, entonces la posición larga ejerce la opción y compra el bien por E unidades monetarias. Si la posición larga vende el bien en el mercado recibirá S_T unidades monetarias por él, obteniendo un beneficio de $S_T - E$ unidades monetarias. De esta manera

$$P_{c_l}(S_T) = S_T - E = \text{máx}\{S_T - E, 0\}$$

Si $S_T \leq E$ se tiene que $S_T - E < 0$, entonces la posición larga no compra el bien mediante la opción, así, la posición larga obtiene un pago de 0 unidades monetarias, es decir

$$P_{c_l}(S_T) = 0 = \text{máx}\{S_T - E, 0\}$$

El análisis para el inciso *ii)* es totalmente análogo.

2.2. PUTS

Definición 2.3. (Opción put europea)

Una *opción put europea* es el derecho de vender un bien a un precio E, llamado precio de ejercicio, en una fecha futura T (fecha de vencimiento de la opción). El derecho que otorga el put puede ser ejercido únicamente en el tiempo T. El put se puede comprar, en el tiempo t, con $t < T$, por un precio p_t llamado prima.

El emisor de la opción put deberá comprar el bien al precio de ejercicio pactado en la opción. Si el precio del bien subyacente, S_T, es menor que el precio de ejercicio E, es decir $S_T < E$, el comprador ejercerá el put debido a que éste le otorga el derecho de vender el bien a un precio mayor del que obtendría si vendiera el bien en el mercado. Así, el emisor del put deberá pagar $E - S_T$ al comprador de la opción. Por otro lado, si $S_T \geq E$ el comprador del put no ejercerá el derecho[3] que ha comprado y el emisor no tiene que pagar nada. De esta manera, el emisor del put desea recibir el costo de la prima, a cambio de garantizar un pago futuro si el precio del bien subyacente es menor que el precio de ejercicio.

Ejemplo 2.2. (Opción put)

Un inversionista A, que posee 100 acciones de Telmex, piensa que la cotización de éstas en el mercado va a bajar por lo que compra una opción put (por cada acción) a otro inversionista B, para vender las acciones a \$16 cada una. Supongamos que el precio actual de la acción es de \$14 y que el tiempo de vencimiento de la opción es de 6 meses. El inversionista paga por cada opción \$2. Supongamos también que la tasa libre de riesgo anual capitalizable continuamente es $r = 10\,\%$. Para este ejemplo, según la definición (2.3), se tiene lo siguiente:

i) Bien subyacente: acciones de Telmex.

ii) Precio de la acción al tiempo t, S_t=\$14.

iii) Precio de ejercicio: $E = \$16$.

iv) Tiempo de vencimiento de la opción: $T - t = 0.5$ años.

v) Prima: p_t=\$2.

vi) Posición larga: Inversionista A.

vii) Posición corta: Inversionista B.

viii) Inversión inicial: $\$2 \times 100 = \$200$

A continuación analizaremos dos posibles escenarios que puede enfrentar el inversionista A.

[3] Por simplicidad supondremos que la posición larga no ejerce el put si $S_T = E$.

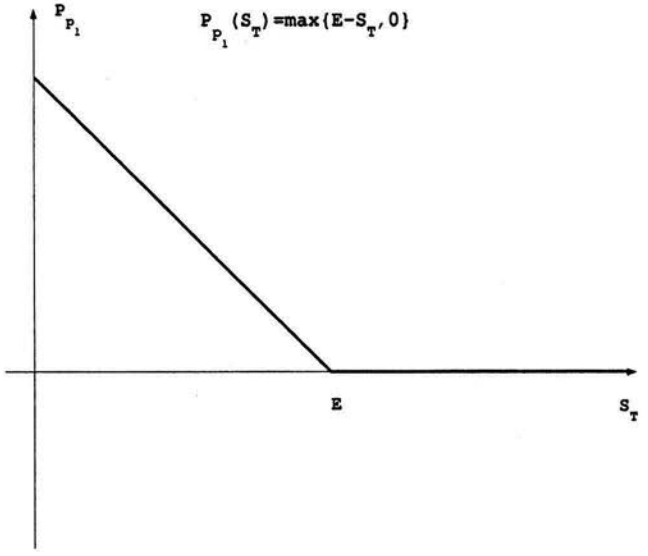

Figura 2.3: Función de pago de un put largo.

a) Precio de la acción al tiempo T, $S_T = \$13$.

Al tiempo T se tiene que $S_T < E$; el inversionista A ejerce las opciones para vender cada acción por $E = \$16$, obteniendo un beneficio de

$$(\$16 - \$13) \times 100 = \$300$$

Sin embargo, al tiempo t, el inversionista A pagó \$200. De esta forma, el inversionista A obtiene una ganancia neta de

$$\$300 - \$200 \cdot e^{.1 \times .50} = \$89.74$$

b) Precio de la acción al tiempo T, $S_T = \$19$.

Al tiempo T se tiene que $S_T > E$. El inversionista A no ejerce la opción debido a que es mejor vender las acciones en el mercado que mediante el derecho que otorga la opción. De esta forma, el inversionista A obtiene una pérdida neta de

$$\$200 \cdot e^{.1 \times .5} = \$210.25$$

Es necesario recordar que la posición corta del put está obligada a comprar las acciones al precio de ejercicio pactado si es que el comprador del put decide ejercer el derecho que le otorga la opción.

Ahora analizaremos los dos casos anteriores para el inversionista B, es decir, el emisor del put.

a) Precio de la acción al tiempo T, $S_T = \$13$.

Al tiempo T, la posición larga ejerce la opción y el inversionista B compra cada acción por \$16 siendo que éstas valen \$13, así pues, obtiene una pérdida de $(\$16 - \$13) \times 100 = \$300$, sin embargo, al inicio de la opción recibió \$200. De esta manera el inversionista B obtiene una pérdida neta de

$$\$300 - \$200 \cdot e^{.1 \times .5} = \$89.74$$

b) Precio de la acción al tiempo T, $S_T = \$19$.

Al tiempo T la posición larga no ejerce la opción; el inversionista B no está obligado a comprar las acciones a \$16, así, éste obtiene una ganancia neta de

$$\$200 \cdot e^{.1 \times .5} = \$210.25$$

equivalentes al costo de la prima que recibió al tiempo t.

Definición 2.4. (Funciones de pago de una opción put europea)

Dada una opción put europea, definimos

i) $P_{p_l}(S_T) = \text{máx}\{E - S_T, 0\}$ la función de pago para la posición larga, al tiempo T, de una unidad del bien.

ii) $P_{p_s}(S_T) = \text{mín}\{S_T - E, 0\}$ la función de pago para la posición corta, al tiempo T, de una unidad del bien.

A la función $P_{p_l}(S_T)$ también se le conoce como el valor del put al tiempo T, es decir, $P_{p_l}(S_T) = p_T$. Este valor determinaría el precio de la opción si ésta fuera comprada al tiempo T. A continuación analizaremos el inciso *i)*.

Al tiempo T, si $S_T \geq E$, la posición larga no ejerce la opción debido a que es más conveniente para ésta vender el bien en el mercado que mediante la opción put, es decir, la posición larga obtiene un beneficio de 0 unidades monetarias. Como $S_T > E$ entonces $E - S_T < 0$, así

$$P_{p_l}(S_T) = 0 = \text{máx}\{E - S_T, 0\}$$

Si $S_T < E$ la posición larga ejerce la opción obteniendo un beneficio de $E - S_T > 0$, es decir, obtiene

$$P_{p_l}(S_T) = E - S_T = \text{máx}\{E - S_T, 0\}$$

El análisis para el inciso *ii)* es totalmente análogo.

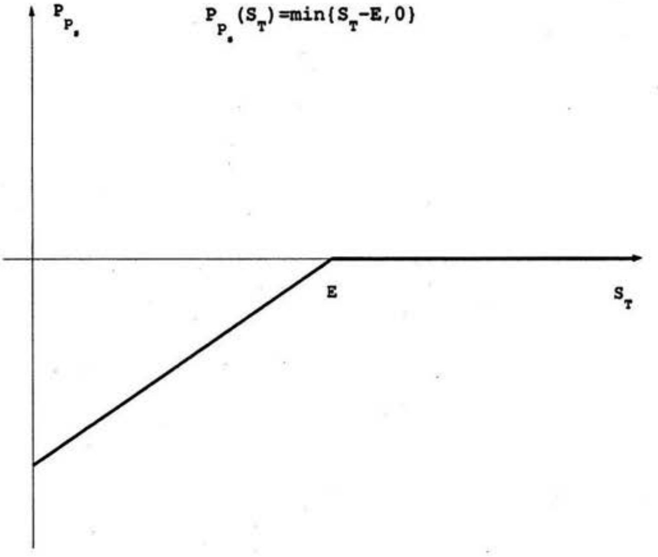

Figura 2.4: Función de pago de un put corto.

2.3. COTAS PARA LOS PRECIOS DE LAS OPCIONES

De aquí en adelante analizaremos opciones sobre acciones, por lo cual daremos la siguiente notación:

- t: Fecha actual.
- S_t: Precio actual de la acción.
- E: Precio de ejercicio.
- S_T: Precio de la acción al tiempo T.
- r: Tasa de interés anual libre de riesgo convertible continuamente.
- c_t: Precio de una opción call europea, al tiempo t, para comprar una acción.
- p_t: Precio de una opción put europea, al tiempo t, para vender una acción.

De aquí en adelante utilizaremos los mismos supuestos de la sección (1.2) a menos que se especifique otra cosa.

El propósito del estudio de las opciones es calcular los valores de c_t y p_t, sin embargo, es importante conocer qué variables afectan a los precios de las opciones. Con el fin de entender cuáles son estas variables y de que manera afectan a c_t y p_t, determinaremos cotas superiores e inferiores para los precios de las opciones.

2.3.1. COTAS SUPERIORES

Las cotas superiores que encontraremos en esta parte sirven tanto para opciones sobre acciones que no proveen dividendos como para opciones sobre acciones que sí proveen dividendos durante la vida de la opción.

Una opción call europea no puede valer más que el precio de la acción, es decir,

$$c_t \leq S_t \tag{2.1}$$

De otra manera ningún inversionista estaría dispuesto a comprar una opción call pues sería más barato comprar la acción que el derecho a comprarla.

Por otro lado, una opción put no puede valer más que el valor presente del precio de ejercicio pactado en la opción, es decir,

$$p_t \leq E \cdot e^{-r(T-t)} \tag{2.2}$$

Supongamos que $p_t > E \cdot e^{-r(T-t)}$, entonces un inversionista puede optar por la siguiente estrategia:

i) Emitir el put por p_t unidades monetarias.

ii) Invertir las p_t unidades monetarias a la tasa de interés libre de riesgo.

Al tiempo T, el inversionista obtiene $p_t \cdot e^{r(T-t)}$ de la inversión hecha. Si la posición larga ejerce la opción, el inversionista debe comprar la acción por E unidades monetarias, pero por hipótesis $p_t > E \cdot e^{-r(T-t)}$, es decir, $p_t \cdot e^{r(T-t)} > E$. Así, el inversionista obtiene una ganancia de

$$p_t \cdot e^{r(T-t)} - E$$

Si la posición larga no ejerce la opción, el inversionista gana

$$p_t \cdot e^{r(T-t)}$$

Sin importar que haga la posición larga del put, el inversionista obtiene ganancias, es decir, hace arbitraje. De esta manera, queda demostrada la desigualdad (2.2).

2.3.2. COTA INFERIOR PARA UN CALL SOBRE UNA ACCIÓN QUE NO PROVEE DIVIDENDOS

En el ejemplo (2.1) se tiene que $S_t = \$15$, $E = \$15$, $r = 10\,\%$, $T - t = .25$, sin embargo, supongamos que $c_t = \$0.30$. Demostraremos que, con este precio de la opción, un inversionista puede hacer arbitraje.

Consideremos un inversionista que opta por la siguiente estrategia:

i) Vender en corto la acción por \$15.

ii) Comprar el call por \$0.30

El inversionista, al tiempo t, recibe $\$15 - \$0.30 = \$14.70$ de las dos transacciones anteriores. Si invierte esta cantidad obtiene $\$14.70 \cdot e^{.1 \times .25} = \$15.0721$ al tiempo T. Si $S_T > E$ el inversionista ejerce el call comprando la acción por \$15 y cierra la posición corta, es decir, regresa la acción que pidió prestada. Así, el inversionista obtiene una ganancia libre de riesgo de

$$\$15.0721 - \$15 = \$0.0721$$

Por el contrario, si $S_T \leq E$, el inversionista no ejerce la opción y compra la acción en el mercado obteniendo una ganancia libre de riesgo de

$$\$15.0721 - \$S_T > \$0.0721$$

Sin importar que valor tome S_T el inversionista obtiene ganancias, con lo que hace arbitraje. Con este ejemplo, podemos observar que el precio de la opción, c_t, debe tener una cota inferior para evitar oportunidades de arbitraje.

Por definición de opción call, es claro que $c_t \geq 0$, de otra manera, nadie estaría dispuesto a asumir la posición corta del call, ya que esta posición es la que asume el riesgo de que la posición larga ejerza la opción. Una cota inferior para c_t es

$$\max\{S_t - E \cdot e^{-r(T-t)}, 0\} \tag{2.3}$$

Supongamos que $c_t < S_t - E \cdot e^{-r(T-t)}$ [4] es decir, $0 \leq E < (S_t - c_t) \cdot e^{r(T-t)}$. Un inversionista puede optar por la siguiente estrategia:

i) Vender en corto la acción por S_t unidades monetarias.

ii) Comprar el call por c_t unidades monetarias.

iii) Invertir $S_t - c_t > 0$ unidades monetarias a la tasa libre de riesgo, r.

Al tiempo T, el inversionista recibe $(S_t - c_t) \cdot e^{r(T-t)}$ de la inversión hecha al tiempo t. Si $S_T > E$, el inversionista ejerce la opción, comprando la acción por E unidades monetarias, y cierra la posición corta. Por hipótesis $(S_t - c_t) \cdot e^{r(T-t)} > E$ entonces el inversionista obtiene una ganancia neta de

$$(S_t - c_t) \cdot e^{r(T-t)} - E$$

Por otro lado, si $S_T \leq E$, el inversionista no ejerce la opción y compra la acción en el mercado por S_T unidades monetarias. Por hipótesis

$$(S_t - c_t) \cdot e^{r(T-t)} > E \geq S_T$$

[4] El caso en que $S_t - E \cdot e^{-r(T-t)} < 0$ es trivial, pues $c_t \geq 0$.

entonces el inversionista obtiene una ganancia neta de

$$(S_t - c_t) \cdot \mathrm{e}^{r(T-t)} - S_T$$

con lo que hace arbitraje.

2.3.3. COTA INFERIOR PARA UN PUT EUROPEO SOBRE UNA ACCIÓN QUE NO PROVEE DIVIDENDOS

En el ejemplo (2.2) se tiene que $S_t = \$14$, $E = \$16$, $r = 10\%$, $T - t = .5$, sin embargo, supongamos que $p_t = \$1$. Mostraremos que, con este precio de la opción, un inversionista puede hacer arbitraje. Consideremos un inversionista que opta por la siguiente estrategia:

i) Pedir prestado \$15 a la tasa de interés libre de riesgo, r.

ii) Comprar la acción.

iii) Comprar el put.

Al tiempo T, el inversionista debe pagar $\$15 \cdot \mathrm{e}^{.1\times.5} = \$15.7690$ para pagar su deuda. Si $S_T < \$16$, el inversionista ejerce la opción para vender la acción a \$16, paga su deuda y obtiene una ganancia neta de

$$\$16 - \$15.7690 = \$0.2310$$

Si $S_T \geq \$16$, el inversionista no ejerce la opción, vende la acción por S_T y obtiene una ganancia neta aún mayor de

$$S_T - \$15.7690 > \$0.2310$$

Sin importar qué valor tenga S_T el inversionista gana dinero sin invertir un sólo peso, con lo que hace arbitraje.

Por definición de opción put, es claro que $p_t \geq 0$, de otra manera nadie estaría dispuesto a asumir la posición corta del put. Una cota inferior para p_t es

$$\max\{E \cdot \mathrm{e}^{-r(T-t)} - S_t, 0\} \tag{2.4}$$

Supongamos que $p_t < E \cdot \mathrm{e}^{-r(T-t)} - S_t$[5], es decir, $(p_t + S_t) \cdot \mathrm{e}^{r(T-t)} < E$.. Un inversionista puede optar por la siguiente estrategia para hacer arbitraje.

i) Pedir prestado $p_t + S_t$ unidades monetarias a la tasa de interés libre de riesgo, r.

ii) Comprar la acción por S_t unidades monetarias.

[5]El caso en que $E \cdot \mathrm{e}^{-r(T-t)} - S_t < 0$ es trivial, pues $p_t \geq 0$.

iii) Comprar la opción put por p_t unidades monetarias.

Al tiempo T, el inversionista debe pagar $(p_t + S_t) \cdot e^{r(T-t)}$ para liquidar su deuda. Si $S_T < E$, el inversionista ejerce la opción para vender la acción por E unidades monetarias. Por hipótesis $(p_t + S_t) \cdot e^{r(T-t)} < E$, entonces el inversionista paga su deuda y obtiene una ganancia neta de

$$E - (p_t + S_t) \cdot e^{r(T-t)}$$

Si $S_T \geq E$, el inversionista no ejerce la opción y vende la acción por S_T unidades monetarias en el mercado, así, paga su deuda y obtiene una ganancia todavía mayor de

$$S_T - (p_t + S_t) \cdot e^{r(T-t)}$$

Sin importar qué valor tome S_T, el inversionista hace arbitraje.

2.3.4. COTA INFERIOR PARA UN CALL SOBRE UNA ACCIÓN QUE PROVEE DIVIDENDOS PERIÓDICOS

Ahora analizaremos cómo son las cotas cuando la acción provee dividendos. Denotamos a D como el valor presente de la suma de los dividendos que provee la acción durante la vida de la opción. Una cota inferior para c_t es

$$\max\{S_t - D - E \cdot e^{-r(T-t)}, 0\} \tag{2.5}$$

Supongamos que $c_t < S_t - D - E \cdot e^{-r(T-t)}$. Despejando, la desigualdad anterior es equivalente a $0 \leq E \leq (S_t - D - c_t) \cdot e^{r(T-t)}$. Demostraremos que si esto pasa, un inversionista puede hacer arbitraje con la siguiente estrategia:

i) Vender en corto la acción por S_t unidades monetarias.

ii) Comprar el call por c_t unidades monetarias.

iii) Invertir $S_t - c_t > 0$ unidades monetarias a la tasa de interés libre de riesgo, r.

Al tiempo T, el inversionista recibe $(S_t - c_t) \cdot e^{r(T-t)}$ unidades monetarias de la inversión hecha al tiempo t. Como el inversionista vendió la acción tiene que pagar los dividendos equivalentes a $D \cdot e^{r(T-t)}$ al tiempo T, es decir, en total obtiene $(S_t - D - c_t) \cdot e^{r(T-t)}$ unidades monetarias. Si $S_T > E$ el inversionista ejerce la opción, comprando la acción por E unidades monetarias, y cierra la posición corta. Por hipótesis se tiene que $E \leq (S_t - D - c_t) \cdot e^{r(T-t)}$, entonces el inversionista obtiene una ganancia neta de

$$(S_t - D - c_t) \cdot e^{r(T-t)} - E$$

Si $S_T \leq E$ el inversionista no ejerce la opción y compra la acción en el mercado por S_T obteniendo una ganancia aún mayor de

$$(S_t - D - c_t) \cdot \mathrm{e}^{r(T-t)} - S_T$$

Sin importar qué valor tome S_T el inversionista obtiene ganancias por lo que hace arbitraje.

2.3.5. Cota inferior para un put sobre una acción que provee dividendos periódicos

De igual forma denotamos a D como el valor presente de la suma de los dividendos que provee la acción durante la vida de la opción. Una cota inferior para p_t es

$$\max\{D + E \cdot \mathrm{e}^{-r(T-t)} - S_t, 0\} \tag{2.6}$$

Supongamos que $p_t < D+E\cdot \mathrm{e}^{-r(T-t)} - S_t$. Despejando se tiene que la desigualdad anterior es igual a $(S_t + p_t - D) \cdot \mathrm{e}^{r(T-t)} < E$. Demostraremos que si esto sucede un inversionista, para hacer arbitraje, puede optar por la siguiente estrategia:

i) Pedir prestado $S_t + p_t$ unidades monetarias.

ii) Comprar la acción por S_t unidades monetarias.

iii) Comprar el put por p_t unidades monetarias.

Al tiempo T, el inversionista debe pagar $(S_t + p_t) \cdot \mathrm{e}^{r(T-t)}$ para liquidar su deuda. Como la acción provee dividendos iguales a D al tiempo t, el inversionista sólo debe pagar $(S_t + p_t - D) \cdot \mathrm{e}^{r(T-t)}$. Si $S_T < E$, el inversionista ejerce la opción vendiendo la acción por E unidades monetarias. Por hipótesis $(S_t + p_t - D) \cdot \mathrm{e}^{r(T-t)} < E$, así, el inversionista obtiene una ganancia neta de

$$E - (S_t + p_t - D) \cdot \mathrm{e}^{r(T-t)}$$

Por otro lado, si $S_T \geq E$ el inversionista no ejerce la opción y vende la acción en el mercado por S_T obteniendo de esta forma una ganancia aún mayor de

$$S_T - (S_t + p_t - D) \cdot \mathrm{e}^{r(T-t)}$$

Sin importar qué valor tome S_T el inversionista obtiene ganancias sin invertir dinero, por lo que hace arbitraje.

2.3.6. COTA INFERIOR PARA UN CALL SOBRE UNA ACCIÓN QUE PROVEE DIVIDENDOS CONTINUOS

Analizaremos ahora la cota inferior para una opción sobre una acción que provee dividendos continuos a una tasa q anual. Una cota inferior para c_t es

$$\max\{S_t \cdot e^{-q(T-t)} - E \cdot e^{-r(T-t)}, 0\} \tag{2.7}$$

Consideremos los siguientes dos portafolios al tiempo t:

Portafolio x: Una opción call Europea más una cantidad de $E \cdot e^{-r(T-t)}$ unidades monetarias invertidas a la tasa libre de riesgo, r.

Portafolio y: $e^{-q(T-t)}$ acciones, con los dividendos reinvertidos en más acciones.

Antes de analizar estos dos portafolios presentaremos la siguiente notación:

$$V_\tau(z) : \text{Valor del portafolio } z \text{ al tiempo } \tau.$$

Para demostrar que $c_t \geq \max\{S_t \cdot e^{-q(T-t)} - E \cdot e^{-r(T-t)}, 0\}$ utilizaremos el siguiente resultado.

Proposición 2.1.

Dados un portafolio α y un portafolio β tales que $V_T(\alpha) \geq V_T(\beta)$, entonces se tiene que $V_t(\alpha) \geq V_t(\beta)$ con $t < T$.[6]

Analizaremos el valor del *portafolio x* y el *portafolio y*.

Al tiempo T, en el *portafolio x* tenemos E unidades monetarias de la inversión hecha. Si $S_T > E$ se ejerce la opción comprando la acción por S_T unidades monetarias por lo que $V_T(x) = S_T$. Por otro lado, si $S_T \leq E$ la opción no se ejerce y $V_T(x) = E$. De este modo se tiene que

$$V_T(x) = \max\{S_T, E\} \tag{2.8}$$

En el *portafolio y*, al tiempo T, se tiene una acción debido a que los dividendos se invirtieron en acciones, así pues, se tiene que

$$V_T(y) = S_T \tag{2.9}$$

que es el valor de la acción en el mercado.

Si comparamos la ecuaciones (2.8) y (2.9) se tiene que $V_T(x) \geq V_T(y)$, así, por la proposición (2.1) tenemos que $V_t(x) \geq V_t(y)$ no obstante,

$$V_t(x) = c_t + E \cdot e^{-r(T-t)}$$

[6]Demostración en el apéndice A.

pues el call cuesta c_t unidades monetarias y

$$V_t(y) = S_t \cdot e^{-q(T-t)}$$

pues es el valor en el mercado de las $e^{-q(T-t)}$ acciones. De esta forma tenemos que

$$c_t + E \cdot e^{-r(T-t)} \geq S_t \cdot e^{-q(T-t)}$$

es decir

$$c_t \geq S_t \cdot e^{-q(T-t)} - E \cdot e^{-r(T-t)}$$

con lo que queda demostrada (2.7)

2.3.7. COTA INFERIOR PARA UN PUT SOBRE UNA ACCIÓN QUE PROVEE DIVIDENDOS CONTINUOS

La cota inferior para un put sobre una acción que provee dividendos continuos es

$$\text{máx}\{E \cdot e^{-r(T-t)} - S_t \cdot e^{-q(T-t)}, 0\} \tag{2.10}$$

Probaremos este resultado considerando los siguientes portafolios:

Portafolio x: Una opción put Europea más $e^{-q(T-t)}$ acciones, con los dividendos reinvertidos en más acciones.

Portafolio y: Una cantidad de $E \cdot e^{-r(T-t)}$ unidades monetarias invertidas a la tasa de interés libre de riesgo, r.

Analizaremos ambos portafolios para demostrar que (2.10) es correcta.

Al tiempo T, en el *portafolio* x tenemos una acción ya que los dividendos de las acciones se reinvirtieron en más acciones ($e^{-q(T-t)} \cdot e^{q(T-t)} = 1$). Si $S_T \geq E$ la opción no se ejerce y $V_T(x) = S_T$ que es el valor de mercado de la acción. Por otro lado si $S_T < E$ la opción se ejerce vendiendo la acción que se tiene por E unidades monetarias, así, $V_T(y) = E$. De esta forma se tiene que

$$V_T(x) = \text{máx}\{S_T, E\} \tag{2.11}$$

A su vez, en el *portafolio* y se tiene, al tiempo T, E unidades monetarias por lo que

$$V_T(y) = E \tag{2.12}$$

Si comparamos las ecuaciones (2.11) y (2.12) se tiene que $V_T(x) \geq V_T(y)$, de modo que por la proposición (2.1) se puede asegurar que $V_t(x) \geq V_t(y)$, pero $V_t(x) = p_t + S_t \cdot e^{-q(T-t)}$ y $V_t(y) = E \cdot e^{-r(T-t)}$ con lo que se obtiene

$$p_t + S_t \cdot e^{-q(T-t)} \geq E \cdot e^{-r(T-t)}$$

o

$$p_t \geq E \cdot e^{-r(T-t)} - S_t \cdot e^{-q(T-t)}$$

quedando demostrada (2.10)

2.4. PARIDAD PUT-CALL

A continuación analizaremos una relación muy importante entre los precios de una opción call y una opción put con el mismo precio de ejercicio y las mismas fechas de inicio y vencimiento. A este resultado se le conoce como *la paridad put-call.* Supongamos que tenemos un put y un call sobre una acción que no provee dividendos, ambas con precio de ejercicio E, y fecha de vencimiento T, entonces se tiene que

$$c_t + E \cdot e^{-r(T-t)} = p_t + S_t \tag{2.13}$$

cuando la acción provee dividendos periódicos la paridad put-call es

$$c_t + D + E \cdot e^{-r(T-t)} = p_t + S_t \tag{2.14}$$

y cuando la acción provee dividendos continuos la paridad put-call es

$$c_t + E \cdot e^{-r(T-t)} = p_t + S_t \cdot e^{-q(T-t)} \tag{2.15}$$

Para ilustrar mejor esta relación analizaremos un ejemplo antes de demostrarlo formalmente.

Ejemplo 2.3.

Consideremos los siguientes datos:

i) Precio de la acción que no provee dividendos, $S_t = \$50$.

ii) Precio de ejercicio, $E = \$53$

iii) Tasa de interés libre de riesgo, $r = 8\,\%$

iv) Tiempo para el vencimiento, $T - t = 1$.

Supongamos que el precio del call es $c_t = \$3$. En este caso, según la ecuación (2.13), el precio del put debe ser

$$p_t = \$3 - \$53e^{-.08\times 1} - \$50 = \$1.9251$$

Si el precio del put no fuese éste entonces existe la posibilidad de que un inversionista pueda hacer arbitraje. Supongamos que $p_t = \$3$, entonces un inversionista puede optar por la siguiente estrategia:

i) Vender en corto la acción por \$50.

ii) Vender el put por \$3.

iii) Pedir prestado \$48.9251 a la tasa libre de riesgo del 8 %.

iv) Comprar el call por \$3.

Esta estrategia genera una ganancia al tiempo t de

$$\$50 + \$3 - \$3 = \$50$$

que invertidos a la tasa libre de riesgo equivalen a $\$50 \cdot e^{.08\times 1} = 54.1643$ al tiempo T. Si $S_T > \$53$ el inversionista ejerce el call y compra la acción por \$53. Por otra parte el put no es ejercido y el inversionista no está obligado a vender la acción. Si $S_T \leq \$53$ el inversionista debe comprar la acción por \$53 debido a que éste emitió el put además de que no ejerce la opción call. De cualquier forma, sin importar cúal sea el precio de mercado de la acción, el inversionista compra la acción por \$53. Esta acción es utilizada para cerrar la posición corta. Por otro lado, el inversionista debe pagar $\$48.9251 \cdot e^{.08\times 1} = \$53$ para liquidar su deuda, así, el inversionista obtiene una ganancia neta de

$$\$54.1643 - \$53 = 1.1643$$

Supongamos ahora que $p_t = \$1$, entonces un inversionista puede optar por la siguiente estrategia:

i) Pedir prestado \$51 a la tasa libre de riesgo del 8 %.

ii) Comprar la acción por \$50.

iii) Comprar el put por \$1.

iv) Vender el call por \$3.

Si el inversionista invierte los \$3, recibidos en el tiempo t, a la tasa libre de riesgo obtiene $\$3 \cdot e^{.08\times 1} = \$3.2498$ al tempo T. Si $S_T > \$53$ el inversionista debe vender la acción por \$53 debido a que la contraparte del inversionista ejerce el put que éste emitió. Por otro lado, si $S_T \leq \$53$ el inversionista ejerce el put para vender la acción por \$53 además de que no se ejerce el call por lo que el inversionista no se ve obligado a comprar la acción al precio de ejercicio. Sin importar el valor del precio de mercado de la acción, el inversionista la vende en \$53. Sin embargo, el inversionista debe pagar $\$51 \cdot e^{.08\times 1} = \$55.2476$ para liquidar su deuda. De este modo, el inversionista obtiene una ganancia neta de

$$\$3.2498 + \$53 - \$55.2476 = \$1.0022$$

La única forma en que no se dan oportunidades de arbitraje es que $p_t = \$1.9251$.

Ahora probaremos las ecuaciones de manera más general. Utilizaremos técnicas de arbitraje para demostrar que la ecuación (2.14) se cumple.

Supongamos que $c_t + D + E \cdot e^{-r(T-t)} < p_t + S_t$, si arreglamos la ecuación multiplicando por $e^{r(T-t)}$ se tiene que $D \cdot e^{r(T-t)} + E < (p_t + S_t - c_t) \cdot e^{r(T-t)}$, entonces un inversionista puede optar por la siguiente estrategia:

i) Vender en corto la acción por S_t unidades monetarias.

ii) Vender el put por p_t unidades monetarias.

iii) Comprar el call por c_t unidades monetarias.

iv) Pedir prestado $E \cdot e^{-r(T-t)}$ unidades monetarias a la tasa de interés libre de riesgo, r.

v) Invertir $S_t + p_t - c_t > 0$ a la tasa de interés libre de riesgo, r.

Al tiempo T el inversionista obtiene $(S_t + p_t - c_t) \cdot e^{r(T-t)}$ unidades monetarias de la inversión hecha al tiempo t. Como el inversionista vendió la acción, éste debe pagar los dividendos iguales a $D \cdot e^{r(T-t)}$ al tiempo T. Si $S_T > E$ el inversionista ejerce el call comprando la acción por E unidades monetarias, asimismo, el put no se ejerce y el inversionista no se ve obligado a comprar la acción al precio de ejercicio pactado. Si $S_T \leq E$ el inversionista no ejerce el call, sin embargo, debe comprar la acción al precio de ejercicio E. De cualquier modo, sin importar cuál sea el valor de S_T, el inversionista compra la acción por E unidades monetarias. Por otro lado, el inversionista debe pagar E unidades monetarias para pagar su deuda, pero por hipótesis se tiene que $D \cdot e^{r(T-t)} + E < (p_t + S_t - c_t) \cdot e^{r(T-t)}$, así, el inversionista obtiene una ganancia neta de

$$\Big((p_t + S_t - c_t) \cdot e^{r(T-t)} \Big) - D \cdot e^{r(T-t)} - E$$

con lo que hace arbitraje.

Supongamos ahora que $c_t + D + E \cdot e^{-r(T-t)} > p_t + S_t$, es decir

$$(c_t + D) \cdot e^{r(T-t)} + E > (p_t + S_t) \cdot e^{r(T-t)}$$

entonces un inversionista puede optar por la siguiente estrategia:

i) Pedir prestado $(S_t + p_t)$ unidades monetarias a la tasa de interés libre de riesgo, r.

ii) Comprar el call por p_t unidades monetarias.

iii) Comprar la acción por S_t unidades monetarias.

iv) Vender el call por c_t unidades monetarias.

v) Invertir las c_t unidades monetarias a la tasa de interés libre de riesgo, r.

Al tiempo T, el inversionista recibe $D \cdot e^{r(T-t)}$ de los dividendos de la acción. Si $S_T > E$, el inversionista no ejerce el put y debe vender la acción por E unidades monetarias ya que este vendió el call. Si $S_T \leq E$, el call no se ejerce y el inversionista no vende la acción por E unidades monetarias, sin embargo, éste si ejerce el put para vender la acción por E unidades monetarias. De cualquier manera, sin importar cuál sea el precio de mercado de la acción, el inversionista vende la acción por E unidades monetarias. Por otra parte, el inversionista debe pagar $(p_t + S_t) \cdot e^{r(T-t)}$ unidades monetarias para saldar su deuda, pero por hipótesis tenemos que

$$(c_t + D) \cdot e^{r(T-t)} + E > (p_t + S_t) \cdot e^{r(T-t)}$$

de manera que el inversionista obtiene una ganancia neta de

$$\Big((c_t + D) \cdot e^{r(T-t)} + E \Big) - (p_t + S_t) \cdot e^{r(T-t)}$$

con lo que hace arbitraje. De este modo queda demostrada la ecuación (2.14). En particular si $D = 0$ la ecuación se cumple, por lo que la ecuación (2.13) también queda demostrada.

Demostraremos ahora la ecuación (2.15). Consideremos los siguientes portafolios:

Portafolio x: Una opción call europea más una cantidad de $E \cdot e^{-r(T-t)}$ unidades monetarias invertidas a la tasa libre de riesgo, r.

Portafolio y: Una opción put más $e^{-q(T-t)}$ acciones, con los dividendos reinvertidos en más acciones.

Analizaremos el valor de los dos portafolios para mostrar que la ecuación (2.15) es correcta.

Al tiempo T, en el *portafolio* x tenemos E unidades monetarias de la inversión hecha. Si $S_T > E$, el inversionista ejerce el call comprando la acción por E unidades monetarias. Si el inversionista vende la acción en el mercado recibe S_T unidades monetarias por ésta por lo que $V_T(x) = S_T$. Por otro lado, si $S_T \leq E$ el inversionista no ejerce el call y $V_T(x) = E$. De este modo se tiene que

$$V_T(x) = \text{máx}\{S_T, E\}$$

En el *portafolio* y, al tiempo T, se tiene una acción debido a que los dividendos se invirtieron en acciones. Si $S_T > E$, el put no se ejerce y el inversionista vende la acción en S_T unidades monetarias con lo que $V_T(y) = S_T$. Por otro lado, si $S_T \leq E$

el inversionista ejerce el put vendiendo la acción en E unidades monetarias por lo que $V_T(y) = E$. De este modo se tiene que

$$V_T(y) = \text{máx}\{S_T, E\}$$

Así pues, tenemos que $V_T(x) = V_T(y)$ lo que implica que $V_t(x) = V_t(y)$, pero $V_t(x) = c_t + E \cdot e^{-r(T-t)}$ y $V_t(y) = p_t + S_t \cdot e^{-q(T-t)}$, de manera que

$$c_t + E \cdot e^{-r(T-t)} = p_t + S_t \cdot e^{-q(T-t)}$$

con lo que queda demostrada la ecuación (2.15)

La *paridad put-call* es una igualdad importante en la teoría de opciones, pues nos muestra la relación que existe entre un call y un put con las mismas características. Utilizando la *paridad put-call*, al conocer el precio de cualquiera de las dos opciones, se puede calcular el precio de la otra de manera muy sencilla.

2.5. PORTAFOLIOS DE OPCIONES

Según las definiciones (2.2) y (2.4), la función de pago de una opción, ya sea call o put, es una función continua lineal por pedazos, de tal forma que cualquier combinación lineal de estas funciones sigue siendo una función continua lineal por pedazos. El problema que analizaremos en esta sección es el siguiente:

Dada una función de pago continua lineal por pedazos, encontrar un portafolio de opciones que genere esa función de pago.

Analizaremos primero un ejemplo para después pasar al problema general.

Ejemplo 2.4.

Supongamos que un inversionista desea obtener un portafolio de opciones que tenga la siguiente función de pago como función de S_T:

$$P(S_T) = \begin{cases} 0 & \text{si } S_T < 30 \\ 2(S_T - 30) & \text{si } 30 \leq S_T \leq 60 \\ -3(S_T - 80) & \text{si } 60 \leq S_T \leq 70 \\ -2(S_T - 85) & \text{si } 70 \leq S_T \leq 85 \\ 0 & \text{si } S_T > 85 \end{cases}$$

Como se puede observar en la gráfica (2.5), la función $P(S_T)$ es una función continua lineal por pedazos. Asimismo, es fácil notar que la función queda completamente determinada con sólo seis puntos, a saber:

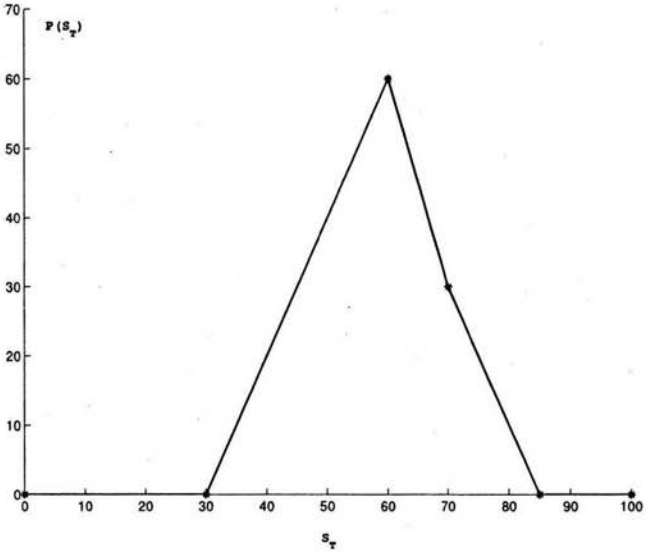

Figura 2.5: Gráfica de la función $P(S_T)$

$$(S_0, P(S_0)) = (0,0) \qquad (S_1, P(S_1)) = (30,0)$$
$$(S_2, P(S_2)) = (60,60) \qquad (S_3, P(S_3)) = (70,30)$$
$$(S_4, P(S_4)) = (85,0) \qquad (S_5, P(S_5)) = (100,0)$$

A estos puntos los llamaremos nodos. Por otra parte, es fácil verificar que en los puntos $(30,0), (60,60), (70,30), (85,0)$ cambia la pendiente de la función de pago P.

Para encontrar el portafolio de opciones que genere esta función de pago, consideraremos todos los puts y calls con precios de ejercicio iguales a las abcisas de los cuatro nodos intermedios que encontramos. Sea π el portafolio que contiene estas opciones. La función de pago del portafolio π es

$$P_\pi(S_T) = \sum_{i=1}^{4} p_i \cdot put(S_T, E_i) + \sum_{i=1}^{4} c_i \cdot call(S_T, E_i)$$

donde $E_i = S_i$ para toda $i = 1, ..., 4$. Por otra parte, p_i y c_i son el número de unidades de puts y calls en el portafolio respectivamente para $i = 1, ..., 4$. Cabe señalar que

$$call(S_T, E_i) = \text{máx}\{S_T - E_i, 0\}$$

y

$$put(S_T, E_i) = \text{máx}\{E_i - S_T, 0\}$$

no son más que las funciones de pago de un call y un put largos respectivamente, definidas en (2.2) y (2.4) con anterioridad.[7]

Una condición necesaria para que la función de pago del portafolio π sea igual a la función de pago dada es la siguiente

$$P_\pi(S_T) = P(S_T) \text{ para todo } S_T > 0$$

Sin embargo, sabemos que dos funciones lineales continuas son iguales si tienen dos puntos en común. Si utilizamos este hecho con funciones continuas lineales por pedazos sólo debemos comprobar que

$$P_\pi(S_j) = P(S_j) \text{ para } j = 0, ..., 5.$$

De este modo, debemos encontrar el número de unidades de p_i's y c_i's que satisfagan el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\sum_{i=1}^{4} p_i \cdot put(S_j, E_i) + \sum_{i=1}^{4} c_i \cdot call(S_j, E_i) = P(S_j) \quad \text{para} \quad j = 0, ..., 5. \tag{2.16}$$

Esta ecuación puede ser simplificada de la siguiente manera:

Como $S_0 = 0$ entonces $call(0, E_i) = 0$ para toda i. Por otra parte, $S_5 = 100$ por lo que $put(100, E_i) = 0$ para toda i. Es importante señalar que cuando $j > i$ entonces $S_j > E_i$ de tal forma que $put(S_j, E_i) = 0$ y cuando $j < i$, $S_j < E_i$ por lo que $call(S_j, E_i) = 0$. Utilizando estos hechos tenemos que la ecuación (2.16) se puede ver de la siguiente manera:

$$\sum_{i=1}^{4} p_i \cdot put(0, E_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{j} c_i \cdot call(S_j, E_i) + \sum_{i=j}^{4} p_i \cdot put(S_j, E_i) = P(S_j) \qquad \text{para } j = 1, ..., 4$$

$$\sum_{i=1}^{4} c_i \cdot call(100, E_i) = 0$$

[7] Valores negativos de c_i o p_i significa una posición corta en la opción.

Numéricamente, el sistema es:

$$\begin{aligned}
30p_1{+}60p_2{+}70p_3{+}85p_4 \quad &= 0\\
30p_2{+}40p_3{+}55p_4 \quad &= 0\\
10p_3{+}25p_4{+}30c_1 \quad &=60\\
15p_4{+}40c_1{+}10c_2 \quad &=30\\
55c_1{+}25c_2{+}15c_3 \quad &= 0\\
70c_1{+}40c_2{+}30c_3{+}15c_4 &= 0
\end{aligned}$$

Una de las soluciones a este sistema de ecuaciones es la siguiente:

$$p_1 = 25/11 \quad p2 = -5 \quad p_3 = 0 \quad p_4 = 30/11$$

$$c_1 = -3/11 \quad c_2 = 0 \quad c_3 = 1 \quad c_4 = -8/11$$

es decir

Comprar 25/11, put con precio de ejercicio 30

Vender 5, put con precio de ejercicio 60

Comprar 30/11, put con precio de ejercicio 85

Vender 3/11, call con precio de ejercicio 30

Comprar 1, call con precio de ejercicio 70

Vender 8/11, call con precio de ejercicio 85

Ahora analizaremos el problema general, en esta parte seguiremos un proceso muy similar al del ejemplo (2.4) aunque un poco más formal.

Supongamos que tenemos una función continua lineal por pedazos, denotada por $P(S_T)$, la cual representará la función de pago que deseamos generar mediante un portafolio de opciones. Cabe señalar que una función continua lineal por pedazos queda completamente determinada por un número finito de puntos. Sean $(S_0, f_0), (S_1, f_1), ..., (S_n, f_n), (S_{n+1}, f_{n+1})$ los puntos que definen a la función lineal $P(S_T)$. A estos $n+2$ puntos los llamaremos nodos. Debemos suponer, sin pérdida de generalidad que $S_i < S_{i+1}$ para toda $i = 0, ..., n$. Si recordamos el ejemplo (2.4), es fácil ver que los puntos intermedios son los puntos en donde la función lineal no es derivable, es decir, donde la pendiente de la función lineal cambia. El primer nodo siempre será el punto $(S_0, f_0) = (0, f_0)$ donde $f_0 = P(0)$.[8]

El problema consiste en encontrar un portafolio de calls y puts con precios de ejercicios iguales a las abcisas de los n nodos intermedios. Así, la función de pago del portafolio, denotado por π, que consiste de estos puts y calls es

$$P_\pi(S_T) = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot put(S_T, E_i) + \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot call(S_T, E_i) \tag{2.17}$$

donde

E_i : Abcisa del i-ésimo nodo, es decir, $E_i = S_i$ para toda $i = 1, ..., n$

p_i : Número de puts con precio de ejercicio E_i, para toda $i = 1, ..., n$

c_i : Número de calls con precio de ejercicio E_i, para toda $i = 1, ..., n$

Es importante recordar que

$$put(S_T, E_i) = \text{máx}\{E_i - S_T, 0\}$$

y

$$call(S_T, E_i) = \text{máx}\{S_T - E_i, 0\}$$

Siguiendo el mismo razonamiento que en el ejemplo (2.4) debemos encontrar el número de puts y calls que debe tener el portafolio π de tal forma que

$$P_\pi(S_T) = P(S_T) \quad \text{para todo} \quad S_T > 0$$

Sin embargo, sólo debemos comprobar que

$$P_\pi(S_j) = P(S_j) = f_j \quad \text{para toda} \quad j = 0, ..., n+1$$

De este modo debemos encontrar el número de unidades de p_i's y c_i's que satisfagan el siguientes sistema de ecuaciones:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot put(S_j, E_i) + \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot call(S_j, E_i) = P(S_j) \quad \text{para} \quad j = 0, ..., n+1 \tag{2.18}$$

Por las propiedades de las funciones de pago de los puts y calls que vimos en el

[8] Se puede utilizar cualquier coordenada $S_0 < S_1$, sin embargo, utilizaremos $S_0 = 0$ para facilitar los cálculos posteriores.

ejemplo anterior, este sistema de ecuaciones se puede ver de la siguiente manera:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot put(S_0, E_i) = f_0$$

$$\sum_{i=1}^{j} c_i \cdot call(S_j, E_i) + \sum_{i=j}^{n} p_i \cdot put(S_j, E_i) = f_j \qquad j = 1, ..., n$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot call(S_{n+1}, E_i) = f_{n+1}$$

Hemos pues, encontrado una manera sencilla de resolver el problema propuesto al inicio de esta sección, simplemente resolviendo un sistema de ecuaciones. Cabe señalar que dicho sistema de ecuaciones puede tener muchas soluciones por lo que para una función de pago dada pueden existir diferentes resultados. Por otra parte, debemos considerar, como en el ejemplo (2.4), que la solución no necesariamente es entera por lo que podemos enfrentarnos con el problema de vender o comprar 1/2 call o 3/8 de put, que es imposible en la realidad debido a que no se puede fraccionar una opción. Sin embargo, este problema resulta ser un problema teórico muy interesante.

CAPÍTULO 3

VALUACIÓN DE OPCIONES

La parte más importante de una opción es calcular el precio de ésta. La gran pregunta en opciones es cuál debe ser el precio de la opción de tal modo que sea justo tanto para la posición larga como para la posición corta. En este capítulo presentaremos dos métodos muy comunes para valuar opciones. Estos no son los únicos métodos que existen, sin embargo, el objetivo del presente capítulo es dar una introducción al extenso tema de valuar una opción. Los dos métodos que estudiaremos son el método binomial y el método de Black-Scholes.

Antes de comenzar con la valuación de una opción es necesario presentar nuevos términos para comprender mejor este capítulo.

La volatilidad, denotada por σ, es una medida de que tan inciertos pueden ser los movimientos en el precio de una acción. En términos matemáticos, la definimos de tal modo que $\sigma\sqrt{dt}$ sea la desviación estándar del rendimiento de una acción[1] para cualquier intervalo de tiempo dt. Definimos también un *mundo neutral al riesgo*. Como su nombre lo indica, en este mundo todos los inversionistas son indiferentes o neutrales al riesgo. En este mundo existen dos supuestos fundamentales, a saber:

i) El rendimiento esperado de todos los instrumentos es la tasa de interés libre de riesgo.

ii) Los flujos de efectivo futuros pueden ser valuados descontando sus valores esperados a la tasa libre de riesgo.

El supuesto de un mundo neutral al riesgo será muy importante cuando se utilice el método binomial.

3.1. MÉTODO BINOMIAL

Uno de los métodos más sencillos, y no por esto menos eficiente, para valuar opciones es el método binomial. Este método implica la construcción de lo que

[1] Podemos definir el rendimiento de una acción como sigue: $\mu = \ln\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right)$ donde S_t es el precio de la acción al tiempo t y S_{t+1} el precio de la acción al tiempo $t+1$ para cualquier t.

llamaremos *árboles binomiales* que nos servirán para ver como varía el precio de la acción durante la vida de la opción. Primero veremos como valuar la opción mediante técnicas de arbitraje para después valuar la opción suponiendo un mundo neutral al riesgo.

Consideremos una acción que no provee dividendos con precio de \$16. Primero supondremos que sólo existen dos tiempos, al tiempo actual lo llamaremos tiempo t y al siguiente tiempo, el tiempo $t+1$ (supondremos que es 6 meses después). Supongamos además que sabemos, que al tiempo $t+1$, el precio de la acción será de \$21 o de \$11. Este es el gran supuesto del método binomial: restringe a sólo dos valores el precio de la acción en el siguiente tiempo, situación que en la realidad no sucede, pues el precio de la acción puede tomar cualquier valor real positivo y no necesariamente los dos valores anteriores. Sin embargo, a pesar de que este supuesto parece bastante restrictivo, el valor de la opción obtenido mediante este método resulta ser bastante bueno.

Supongamos que deseamos valuar una opción call europea sobre la acción, con precio de ejercicio \$16 y fecha de vencimiento en 6 meses. Como hemos restringido el valor de la acción a sólo dos valores, también hemos restringido el pago de la opción en la fecha de vencimiento, esto es, si el precio de la acción a los 6 meses es de \$21 entonces el pago de la opción será \$5 y si la acción vale \$11 entonces la opción dará un pago \$0, pues ésta expira sin ejercerse.

Consideremos ahora el siguiente portafolio:

Portafolio π: Posición larga de Δ acciones más una posición corta en la opción call europea

Así pues se tiene que el valor del portafolio π al tiempo t es[2]

$$V_t(\pi) = 16 \cdot \Delta - c_t$$

donde c_t es el valor de la opción, que es el número que deseamos encontrar.

Si al tiempo $t+1$, el valor de la acción es de \$21 entonces se tiene que

$$V_{t+1}(\pi) = 21 \cdot \Delta - 5 \tag{3.1}$$

Por otro lado, si el precio de la acción es de \$11, entonces se tiene que

$$V_{t+1}(\pi) = 11 \cdot \Delta - 0 \tag{3.2}$$

Si igualamos estos dos valores del portafolio al tiempo $t+1$ y despejamos la variable Δ, encontraremos un portafolio que independientemente del precio de la acción siempre tendrá el mismo valor, es decir, un portafolio sin riesgo.

[2] Recordemos que $V_t(\pi)$ es el valor del portafolio π al tiempo t.

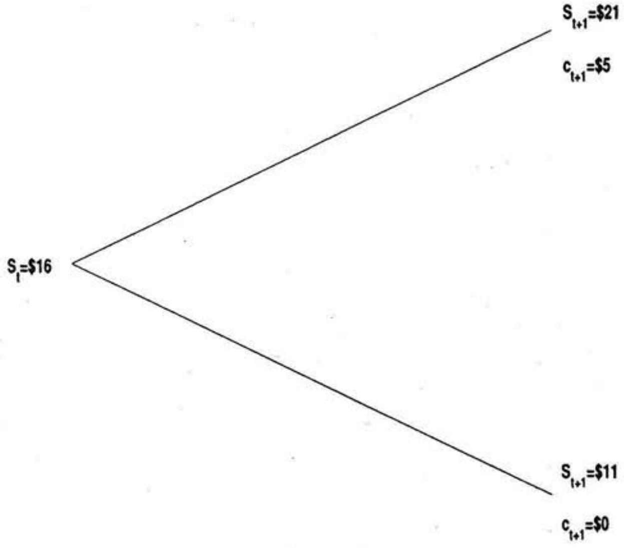

Figura 3.1: Árbol binomial de un solo paso en el cual se presentan los posibles valores de la acción y el valor de la opción para cada uno de los casos

Al igualar (3.1) y (3.2) se tiene que $\Delta = 0.5$. Con este valor de Δ, si la acción vale \$11 se tiene que

$$V_{t+1}(\pi) = 11 \times 0.5 - 0 = 5.5$$

si la acción vale \$21 se tiene que

$$V_{t+1}(\pi) = 21 \times 0.5 - 5 = 5.5$$

De este modo, independientemente del valor de la acción al tiempo $t+1$, el portafolio vale 5.5. Suponiendo que no existen oportunidades de arbitraje, el rendimiento de este portafolio debe ser la tasa de interés libre de riesgo. Supongamos que la tasa libre de riesgo, $r = 10\,\%$, entonces el valor del portafolio π al tiempo t debe ser el siguiente

$$V_t(\pi) = V_{t+1}(\pi) \cdot e^{-0.1 \times 0.5} = 5.5 \cdot e^{-0.1 \times 0.5} = 5.23$$

Así pues se tiene que

$$V_t(\pi) = 11 \times 0.5 - c_t = 5.23$$

es decir

$$c_t = 11 \times 0.5 - 5.23 = 0.27.$$

De este modo, el valor de la opción para este problema, según el método binomial es de \$0.27.

Ahora calcularemos el precio de una opción mediante un árbol binomial de un sólo paso de manera más general. Esta parte es muy importante pues de aquí se derivará la valuación de la opción mediante el modelo binomial cuando el árbol binomial consta de más de un paso.

Supongamos que tenemos una acción que no provee dividendos cuyo precio al tiempo t es S_t y una opción europea, con fecha de vencimiento T sobre la acción con precio f_t[3]. Nuestro supuesto principal es que al tiempo T la acción puede tomar sólo dos valores. Supongamos que los dos valores que puede tomar la acción son $S_T = S_t u$ o $S_T = S_t d$, con $u > 1$ y $d < 1$. Si el precio de la acción se mueve a $S_t u$ el valor de la opción supondremos que será f_u y si el precio de la acción es $S_t d$ el valor de la opción será f_d. Si la opción es un call se tiene que

$$f_u = \text{máx}\{\, S_t u - E, 0\,\} \quad \text{y} \quad f_d = \text{máx}\{\, S_t d - E, 0\,\}$$

si la opción es un put se tiene que

$$f_u = \text{máx}\{\, E - S_t u, 0\,\} \quad \text{y} \quad f_d = \text{máx}\{\, E - S_t d, 0\,\}$$

Consideremos un portafolio, que denotaremos por π, que consiste de Δ acciones largas y una opción corta. El valor del portafolio π al tiempo t es

$$V_t(\pi) = S_t\Delta - f_t$$

Si el precio de la acción al vencimiento de la opción es $S_t u$ entonces el valor del portafolio es

$$V_T(\pi) = S_t u\Delta - f_u \tag{3.3}$$

a su vez, si el precio de la acción es de $S_t d$ entonces el valor del portafolio es

$$V_T(\pi) = S_t d\Delta - f_d \tag{3.4}$$

Al igual que en el ejemplo numérico calcularemos el valor de Δ que haga que el portafolio al tiempo T sea un portafolio sin riesgo, es decir, que independientemente del precio de la acción al final del periodo el valor del portafolio sea siempre el mismo. Si igualamos las ecuaciones (3.3) y (3.4) se tiene que

$$\Delta = \frac{f_u - f_d}{S_t u - S_t d} \tag{3.5}$$

Con este valor de Δ el valor del portafolio es el mismo sin importar el valor de

[3] No hacemos hincapié en si la opción es un call o un put pues realmente no hay diferencia en la valuación de éstas excepto por las funciones de pago de cada una de ellas.

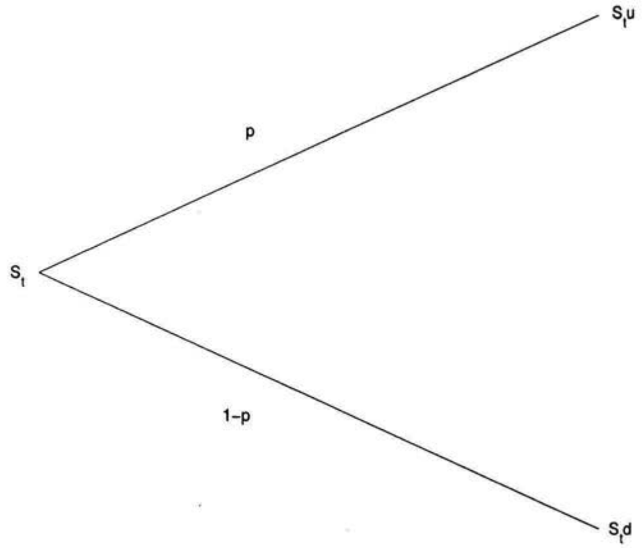

Figura 3.2: Árbol binomial de un paso en el cual se presentan los dos posibles valores de la acción con sus probabilidades asociadas

la acción. De este modo el portafolio es un portafolio sin riesgo y su rendimiento debe ser la tasa de interés libre de riesgo. Así pues, el valor del portafolio al tiempo t es

$$V_t(\pi) = V_T(\pi) \cdot e^{-r(T-t)}$$

es decir

$$S_t\Delta - f_t = (S_t u\Delta - f_u) \cdot e^{-r(T-t)}$$

de tal modo que

$$f_t = S_t\Delta - (S_t u\Delta - f_u) \cdot e^{-r(T-t)}$$

Sustituyendo el valor de Δ en la ecuación anterior y haciendo un poco de álgebra se obtiene la siguiente ecuación

$$f_t = e^{-r(T-t)} \left[p\, f_u + (1-p) f_d \right] \tag{3.6}$$

donde

$$p = \frac{e^{r(T-t)} - d}{u - d} \tag{3.7}$$

Hemos encontrado el valor de una opción que no provee dividendos con un árbol binomial de un solo paso. No es difícil probar que el valor de la opción dado por la ecuación (3.6) cumple con las cotas inferior y superior dadas para las opciones en el capítulo (2). Esto resulta sorprendente considerando que jamás tomamos en cuenta el valor de las cotas para las opciones, aunque supusimos que no existían oportunidades de arbitraje con lo que implícitamente aparecen las cotas de la opción. Ahora valuaremos la opción suponiendo que nos encontramos en un mundo neutral al riesgo. Es importante recordar los dos supuestos que se hacen en un mundo neutral al riesgo. Según el supuesto 2, el precio de la opción deberá ser el valor esperado de la opción descontado a la tasa de interés libre de riesgo. En un mundo neutral al riesgo, el precio de la opción al tiempo t deberá ser

$$f_t = e^{-r(T-t)}\left[pf_u + (1-p)f_d\right]$$

donde p es la probabilidad de que la acción tome el valor $S_t u$ al tiempo T, de tal manera que $(1-p)$ será la probabilidad de que la acción valga $S_t d$. Utilizando solamente que nos encontramos en un mundo neutral al riesgo llegaremos a que p cumplirá también la ecuación (3.7). La esperanza del precio de la acción al tiempo T, $\mathbb{E}[S_T]$, según el árbol binomial de la figura (3.1), es

$$\mathbb{E}[S_T] = p\,S_t u + (1-p)S_t d \tag{3.8}$$

Por otro lado, haciendo el supuesto de que nos encontramos en un mundo neutral al riesgo, sabemos que

$$\mathbb{E}[S_T] = S_t e^{r(T-t)} \tag{3.9}$$

pues el rendimiento de todos los instrumentos, en un mundo neutral al riesgo, es la tasa de interés libre de riesgo.

Si igualamos las ecuaciones (3.8) y (3.9) y despejamos p tenemos que

$$p = \frac{e^{r(T-t)} - d}{u-d} \tag{3.10}$$

que es exactamente el mismo valor de p que habíamos encontrado con anterioridad. Esto resulta interesante, pues haciendo supuestos distintos llegamos al mismo resultado, con lo que se puede inferir que podemos utilizar cualquiera de los dos supuestos. Así pues desde ahora, valuaremos una opción mediante el método binomial suponiendo un mundo neutral al riesgo.

Ahora valuaremos una opción cuando la acción provee dividendos a una tasa continua q. El único valor que necesitamos aquí es el valor esperado de la acción al tiempo T. Este valor es el siguiente

$$\mathbb{E}[S_T] = S_t \cdot e^{(r-q)(T-t)}$$

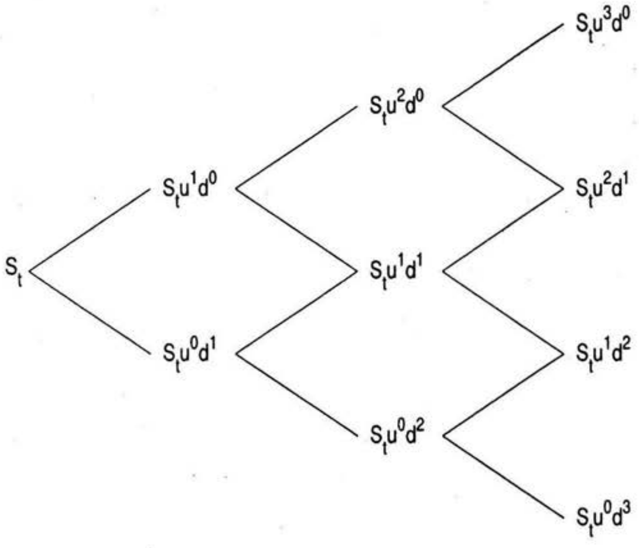

Figura 3.3: Árbol binomial de tres pasos en el cual se presentan los posibles valores de la acción.

pues debemos descontar los dividendos que provee la acción durante el intervalo de tiempo $T - t$. Por otro lado, según nuestro árbol binomial, tenemos que

$$\mathbb{E}[S_T] = p\,S_t u + (1-p)\,S_t d$$

Si igualamos ambas ecuaciones y despejamos p tenemos que

$$p = \frac{e^{(r-q)(T-t)} - d}{u - d} \tag{3.11}$$

Como el valor de la opción es su valor esperado descontado a valor presente se tiene que

$$f_t = e^{-r(T-t)}\,[pf_u + (1-p)f_d] \tag{3.12}$$

donde p está dado por la ecuación (3.11).

Cabe señalar que este precio de la opción también cumple con las cotas inferior y superior de una opción sobre una acción que provee dividendos continuos dadas en el capítulo (2).

Es momento de pasar a la valuación de la opción cuando el árbol binomial tiene más de un paso. Aquí es importante hacer una restricción sobre u y d que son los factores por los que se multiplica el valor de la acción para obtener los nuevos precios dentro del árbol binomial. La restricción es que $u = 1/d$.

Supongamos que tenemos una acción ya sea que provea o no dividendos continuos. Sea una opción sobre esta acción con fecha de inicio t y fecha de vencimiento T. Además supongamos que el cambio en el precio de la acción se da cada dt unidades de tiempo, por lo que, del inicio al vencimiento de la opción tenemos n intervalos de tiempo dt, es decir,

$$T - t = n \times dt$$

de tal modo que el árbol binomial consta de n pasos.

Nuestro supuesto sobre el cambio en el precio de la acción es que los factores u y d están relacionados de la siguiente forma

$$u = 1/d$$

Como se puede apreciar en la figura (3.3), si el precio de la acción aumenta en el primer paso del árbol y luego disminuye en el siguiente intervalo de tiempo resulta ser lo mismo que si primero disminuye y luego aumenta. Si el árbol binomial comienza al tiempo t, entonces al tiempo $t + dt$ la acción puede tomar dos valores, estos son $S_t u$ o $S_t d$, al tiempo $t + 2dt$ la acción puede tomar tres valores, los cuales son $S_t u^2$, $S_t ud$ o $S_t d^2$, pero $S_t ud$=S_t. Así en el último paso del árbol binomial la acción puede tomar $n + 1$ posibles valores. En general al tiempo $t + idt$ con i=0,...,n, se tiene que los posibles valores de la acción son

$$S_t u^j d^{i-j} \qquad \text{para} \quad j = 0, ..., i$$

De aquí podemos inferir que los precios de la acción en el n-ésimo paso del árbol binomial, es decir, en el vencimiento de la opción están dados por

$$S_t u^j d^{n-j} \qquad \text{para} \quad j = 0, ..., n$$

La forma en que se valuará la opción será encontrando el valor de ésta en cada uno de los nodos del árbol binomial, donde definimos el j-ésimo nodo del árbol binomial al tiempo $t + idt$ (con $i = 0, ..., n$ y $j = 0, ..., i$) al nodo (i, j) del árbol binomial. Además definimos el valor de la opción en el nodo (i, j) como $f_{i,j}$. Así, es fácil encontrar el valor de la opción en cada uno de los (n, j) nodos, con $j = 0, ..., n$. Cabe señalar que estos nodos son los últimos en el árbol binomial. El valor de la opción en estos nodos es

$$f_{n,j} = \text{máx}\left\{ S_t u^j d^{n-j} - E, 0 \right\} \qquad \text{para} \quad j = 0, ..., n$$

si la opción es un call y

$$f_{n,j} = \text{máx}\left\{ E - S_t u^j d^{n-j}, 0 \right\} \qquad \text{para} \quad j = 0, ..., n$$

si la opción es un put. Una vez que hemos encontrado el valor de la opción en estos (n, j) nodos, el siguiente paso es encontrar la regla general para calcular el valor de la opción en el nodo (i, j). Utilizaremos lo que ya se había visto con anterioridad, es decir, usaremos el resultado obtenido en la ecuación (3.6).

Cuando nos encontramos en el nodo (i, j), sólo existen dos posibles nodos a los que puede llegar el precio de la acción en el tiempo $t+(i+1)dt$, estos son los nodos $(i+1, j+1)$ o $(i+1, j)$. Al primero se llega con probabilidad p y al segundo con probabilidad $1-p$. Valuando la opción en un mundo neutral al riesgo se tiene que

$$f_{i,j} = e^{-rdt}\left[pf_{i+1,j+1} + (1-p)f_{i+1,j}\right]$$

si la opción es americana tenemos que tomar en cuenta que el valor de la opción, para evitar oportunidades de arbitraje, debe ser mayor a

$$S_t u^j d^{i-j} - E$$

si la opción es un call, o

$$E - S_t u^j d^{i-j}$$

si es un put. De este modo, el valor de la opción en el nodo (i, j), en el caso en que la opción sea americana, es

$$f_{i,j} = \max\left\{ S_t u^j d^{i-j} - E, e^{-rdt}\left[pf_{i+1,j+1} + (1-p)f_{i+1,j}\right]\right\}$$

si la opción es un call, o

$$f_{i,j} = \max\left\{ E - S_t u^j d^{i-j}, e^{-rdt}\left[pf_{i+1,j+1} + (1-p)f_{i+1,j}\right]\right\}$$

cuando la opción es un put. Cabe señalar que el valor de p está dado por cualquiera de las ecuaciones (3.10) y (3.11) dependiendo de si la acción provee o no dividendos. De esta manera, resolviendo hacia atrás podemos encontrar el valor de la opción en el nodo $(0, 0)$ que es el valor de la opción al tiempo t. Cabe señalar que, conforme el intervalo de tiempo dt sea más pequeño el valor de la opción encontrado será más exacto. En el mundo real, se utilizan valores específicos para u y d para tratar de ajustarse a la volatilidad de la acción. Los valores propuestos por los creadores del método binomial Ross-Cox-Rubinstein son

$$u = e^{\sigma\sqrt{dt}} \tag{3.13}$$

y

$$d = e^{-\sigma\sqrt{dt}} \tag{3.14}$$

Ejemplo 3.1. (Método Binomial)

Consideremos una opción de compra europea, con tiempo de vencimiento de un

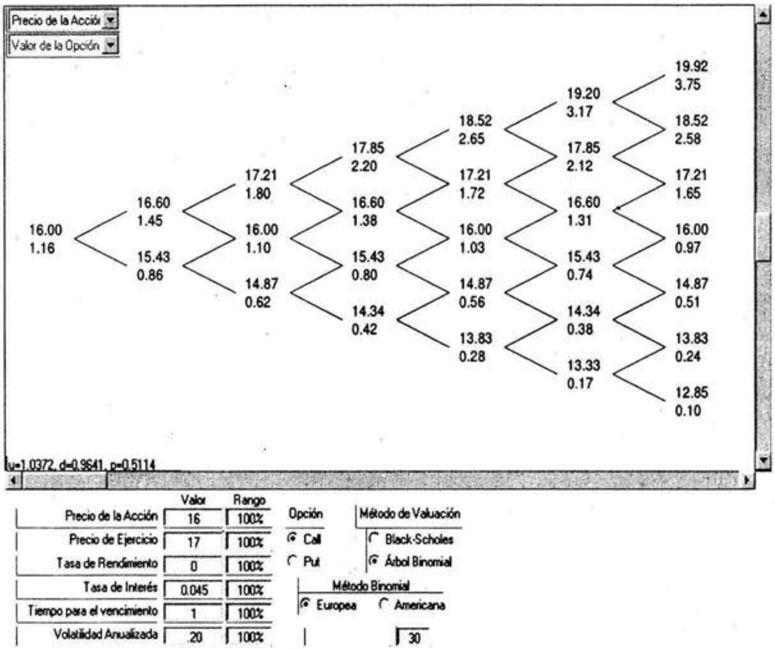

Figura 3.4: Resultado del ejemplo (3.1) con 30 pasos del árbol binomial

año, sobre una acción que no provee dividendos cuyo precio actual es de \$16. Supongamos que el precio de ejercicio de la opción es de \$17, la tasa de interés libre de riesgo es 4.5 % capitalizable de manera continua y la volatilidad de la opción es 20 % anual. Si metemos estos datos en el software programado en Matlab obtenemos que el precio de dicho call europeo es de \$1.16.

El método binomial es un método bastante sencillo que no requiere de grandes conocimientos matemáticos y que además resulta ser muy preciso. A continuación estudiaremos el método Black-Scholes que también sirve para valuar opciones aunque sólo europeas.

3.2. BLACK-SCHOLES

A continuación presentaremos el modelo de Black-Merton-Scholes. Este modelo también sirve para valuar opciones aunque sólo funciona con opciones europeas. Este modelo utiliza herramientas matemáticas muy avanzadas como son los procesos estocásticos, ecuaciones diferenciales parciales y estocásticas, así como cálculo estocástico por lo que es difícil tratarlo a profundidad de manera sencilla, sin embargo, trataremos de presentar los fundamentos hacia la fórmula explícita para valuar opciones que se obtiene mediante este modelo. El modelo de Black-Scholes se basa en un simple modelo para el movimiento en el precio de una acción. Este modelo supone que el precio de la acción sigue un proceso de Markov en la cual el precio futuro de la acción solamente es afectado por el valor actual de la acción, es decir, el pasado en el precio de la acción no tiene ningún efecto sobre el valor futuro de la misma.

Nos interesa modelar el cambio relativo mas no absoluto en el precio de la acción, pues el primero resulta dar más información que el segundo. Supongamos que al tiempo t (hoy) el precio de la acción es S. Consideremos ahora que transcurre un intervalo de tiempo dt en el cual S cambia a $S + dS$, donde dS es el cambio que sufre el precio de la acción en el transcurso del intervalo de tiempo dt. Como mencionamos anteriormente, nos interesa modelar la variable dS/S, que es el cambio relatio del precio de la acción. El modelo separa en dos partes esta variable. La primera es totalmente determinística y es igual a

$$\mu\, dt$$

donde μ es una medida de la tasa promedio de crecimiento del precio de la acción.[4] La segunda parte en que la variable dS/S se descompone tiene que ver con la parte aleatoria de ésta, la parte que responde a efectos o noticias externas que afectan el precio de la acción. Esta cantidad es la siguiente

$$\sigma\, dX$$

donde σ es la volatilidad de la acción y el término dX es una variable aleatoria normal. De este modo, si juntamos las dos partes que conforman a la variable dS/S se tiene la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$\frac{dS}{S} = \sigma\, dX + \mu\, dt \tag{3.15}$$

que es la representación matemática del cambio en el precio de la acción.

A continuación explicaremos las propiedades de la variable dX. Esta variable se conoce como un proceso de Wiener, en particular dX es una variable aleatoria normal con

$$\mathbb{E}[dX] = 0$$

y

$$\mathrm{Var}(dX) = dt$$

La varianza de dX es escogida de este modo para que la desviación estándar de la variable dS/S sea $\sigma\sqrt{dt}$, valor que con anterioridad habíamos ya definido.

[4] Si supusiéramos un mundo neutral al riesgo, μ sería igual a la tasa de interés libre de riesgo.

De este modo ya tenemos un modelo para el cambio relativo del precio de la acción. Es claro que la ecuación (3.15) es equivalente a

$$dS = \mu S\,dt + \sigma S\,dX \tag{3.16}$$

De la ecuación (3.16) podemos observar que el nuevo precio $S+dS$ de la acción sólo depende del precio actual de la acción, la cual es una característica de la propiedad más importante de un proceso de Markov. También podemos inferir, gracias a las propiedades de la distribución normal, que dS es una variable aleatoria normal con las siguientes media y varianza

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[dS] &= \mathbb{E}[\,\mu S\,dt + \sigma S\,dX] \\ &= \mathbb{E}[\,\mu S\,dt] + \mathbb{E}[\sigma S\,dX] \\ &= \mu S\,dt \end{aligned}$$

pues $\mathbb{E}[\,dX] = 0$ por hipótesis. Este resultado nos indica que en promedio el siguiente valor de S será $\mu S\,dt$ más grande que el actual precio de la acción. La varianza de dS está dada por

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(dS) &= \mathrm{Var}(\mu S\,dt + \sigma S\,dX) \\ &= \mathrm{Var}(\sigma S\,dX) \\ &= \sigma^2 S^2\,\mathrm{Var}(dX) \\ &= \sigma^2 S^2\,dt \end{aligned}$$

Una vez que hemos podido modelar el cambio en el precio de una acción, es importante recordar cuál es nuestro objetivo hasta el momento, éste es encontrar el valor de una opción europea sobre una acción que no provee dividendos durante la vida de la opción. Es claro que el precio de una opción es una función del precio de la acción y del tiempo. Esta última aclaración es importante pues utilizaremos un lema fundamental para funciones de variables aleatorias. Con el modelo, es claro que el precio de una acción es una variable aleatoria. El lema que a continuación presentaremos se conoce como el lema de Itô.

Lema 3.1. *Lema de Itô*

Dada S una variable aleatoria descrita por una ecuación diferencial de la forma

$$dS = A(S,t)dX + B(S,t)dt$$

si f es una función de S y t entonces

$$df = A\frac{\partial f}{\partial S}dX + \left(B\,\frac{\partial f}{dS} + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}A^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \right) dt \tag{3.17}$$

No es absurdo preguntarse como es que de este último lema podemos llegar al precio de la opción, sin embargo, antes de contestar esta pregunta, necesitamos listar los supuestos del modelo de Black-Scholes. Algunos de estos supuestos ya han sido considerados en secciones anteriores. Los supuestos son los siguientes:

- No existen costos de transacción.

- No existen oportunidades de arbitraje.

- Se puede negociar con la acción en tiempo continuo.

- Se permiten las ventas en corto.

- La acción es divisible. Este supuesto toma mucha importancia en lo que resta del capítulo.

Supongamos que tenemos una acción, que no provee dividendos, que sigue el modelo de la ecuación (3.15). Este es el momento en donde entra en juego la opción. Supongamos que tenemos una opción sobre la acción, no importa si ésta es put o call cuyo precio es f. Es evidente que el precio de la opción es una función del precio de la acción, S y del tiempo t. Como S sigue el modelo que define la ecuación (3.15), entonces por el lema de Itô se tiene que

$$df = \sigma S \frac{\partial f}{\partial S} dX + \left(\mu S \frac{\partial f}{dS} + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \right) dt \tag{3.18}$$

A continuación, escogeremos un portafolio que contenga la opción y la acción de tal modo que hagamos desaparecer el término aleatorio dX. Consideremos un portafolio que contiene una opción larga y $-\Delta$ acciones, donde Δ es un número fijo cualquiera. El valor de este portafolio, que denotaremos por Π, al tiempo t es

$$\Pi = f - \Delta S \tag{3.19}$$

El cambio en el valor del portafolio en un intervalo de tiempo dt es

$$d\Pi = df - \Delta dS \tag{3.20}$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.15) y (3.18) en la ecuación (3.20) se tiene

$$\begin{aligned} d\Pi &= df - \Delta dS \\ &= \sigma S \frac{\partial f}{\partial S} dX + \left(\mu S \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + \frac{\partial f}{\partial t} \right) dt \\ &\quad - \Delta \left(\sigma S dX + \mu S dt \right) \\ &= \sigma S \left(\frac{\partial f}{\partial S} - \Delta \right) dX \\ &\quad + \left(\mu S \left(\frac{\partial f}{\partial S} - \Delta \right) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + \frac{\partial f}{\partial t} \right) dt \end{aligned}$$

si observamos bien la ecuación anterior podemos eliminar el componente aleatorio dX si hacemos

$$\Delta = \frac{\partial f}{\partial S}$$

de tal forma que la ecuación anterior se reduce a la siguiente

$$d\Pi = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \right) dt \tag{3.21}$$

Como esta ecuación no tiene el elemento dX, el portafolio Π debe ser un portafolio sin riesgo durante el intervalo de tiempo dt. Cualquier portafolio sin riesgo debe ganar la tasa de interés libre de riesgo de tal modo que

$$d\Pi = r\Pi dt$$

es decir

$$r\Pi dt = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \right) dt \tag{3.22}$$

Al sustituir el valor de Π en la ecuación anterior y dividendo por dt en ambos lados de la misma se tiene que

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + r S \frac{\partial f}{\partial S} - rf = 0 \tag{3.23}$$

Esta es la ecuación de Black-Scholes. La solución a esta ecuación es el valor de la opción. Como es sabido lo único que necesitamos para resolver esta ecuación diferencial parcial son las condiciones finales. Aquí es donde distinguiremos entre un call y un put. La condición final para una opción call europea no es más que la función de pago al vencimiento de la opción, es decir,

$$f = \text{máx}\{S_T - E, 0\}$$

cuando la opción es un put europeo entonces la condición final es

$$f = \text{máx}\{E - S_T, 0\}$$

donde S_T es el precio de la acción en la fecha de vencimiento de la opción.

La solución a la ecuación (3.23) es el precio de la opción, que es una función del precio de la acción y del tiempo. Las soluciones a la ecuación (3.23), es decir, los precios de una opción call y put Europea al tiempo t sobre una acción que no provee dividendos son

$$c_t = S_t N(d_1) - E \cdot \mathrm{e}^{-r(T-t)} N(d_2) \tag{3.24}$$

y

$$p_t = E \cdot \mathrm{e}^{-r(T-t)} N(-d_2) - S_t N(-d_1) \tag{3.25}$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln(S_t/E) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_t/E) + (r - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

además

- $N(x)$: Función de distribución acumulada de una variable aleatoria normal estándar.
- S_t: Precio de la acción al tiempo t.
- E: Precio de ejercicio de la opción.
- r: Tasa de interés libre de riesgo convertible de forma continua.
- $T - t$: Tiempo para el vencimiento de la opción.

Debemos recordar que estas fórmulas explícitas del valor de una opción son sólo válidas con opciones europeas.

Sólo falta mostrar cómo serían las fórmulas de Black-Scholes cuando la acción provee dividendos a una tasa continua de rendimiento, q. Aquí lo único que cambia es el modelo que sigue la acción. El modelo es el siguiente

$$dS = (\mu - q)\, Sdt + \sigma\, SdX \tag{3.26}$$

Siguiendo un proceso completamente análogo al del modelo en el que la acción no provee dividendos se obtienen las mismas fórmulas obtenidas anteriormente

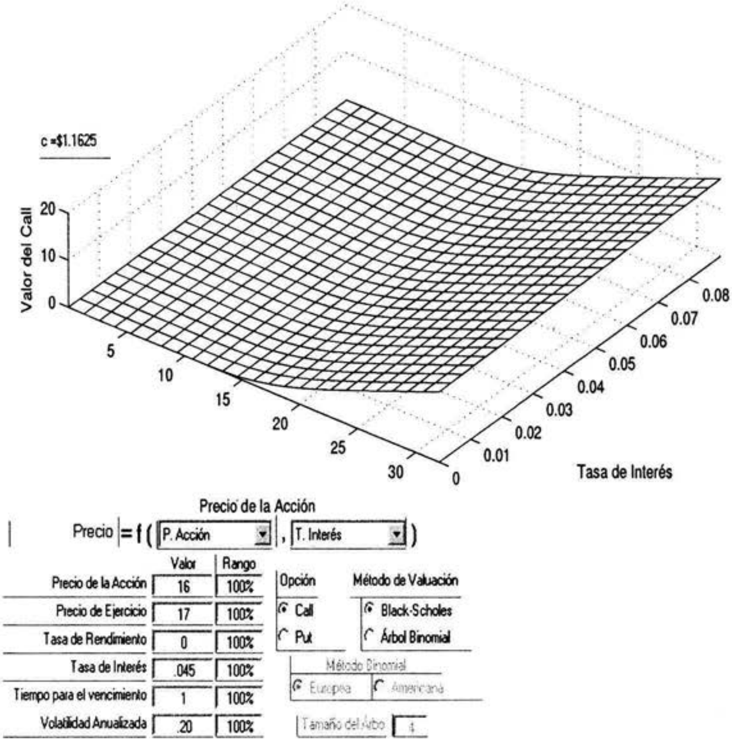

Figura 3.5: Resultado del ejemplo (3.2)

europeo sobre una acción que provee dividendos a una tasa de dividendos continua son

$$c_t = S_t \cdot e^{-q(T-t)} N(d_1) - E \cdot e^{-r(T-t)} N(d_2) \tag{3.27}$$

y

$$p_t = E \cdot e^{-r(T-t)} N(-d_2) - S_t \cdot e^{-q(T-t)} N(-d_1) \tag{3.28}$$

como

$$\ln\left(\frac{S_t \cdot e^{-q(T-t)}}{E}\right) = \ln\frac{S_t}{E} - q(T-t) \tag{3.29}$$

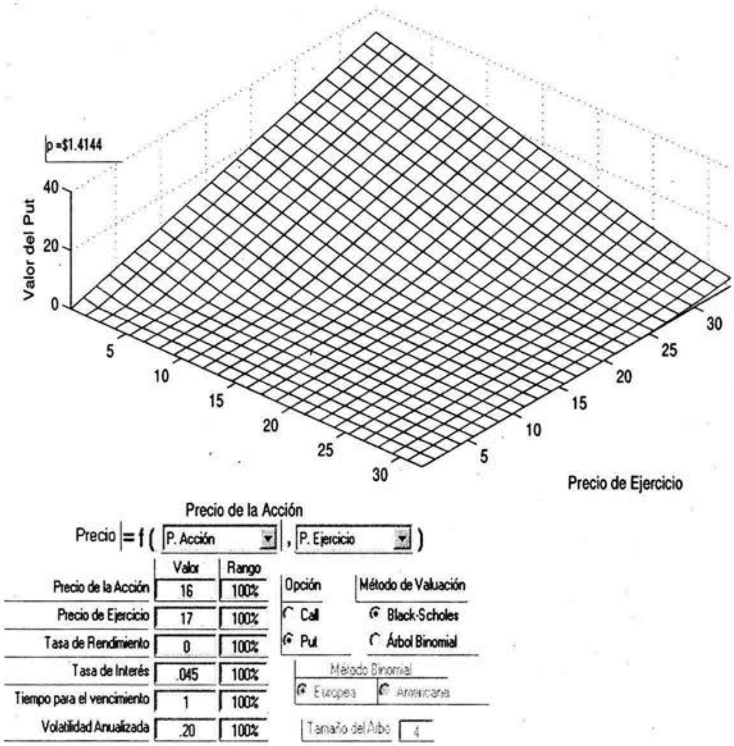

Figura 3.6: Resultado del ejemplo (3.3)

entonces d_1 y d_2 quedan como sigue

$$d_1 = \frac{\ln(S_t/E) + (r - q + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_t/E) + (r - q - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

Ejemplo 3.2. (Black-Scholes)

Consideremos una opción europea con los mismos datos del ejemplo (3.1). Si corremos el programa con dichos datos obtenemos que el precio de la opción es de \$1.1625.

Si observamos bien, el precio de la opción que arrojan tanto el método binomial como el método Black-Scholes prácticamente iguales cuando el tamaño del árbol binomial es de por lo menos 30 pasos. Esto sucede debido al supuesto de que los factores u y d cumplen las ecuaciones (3.13) y (3.14) pues con esto estamos obligando a que el precio de la acción se comporte de la misma forma que cuando éste sigue la ecuación (3.16).

Ejemplo 3.3.

Consideremos ahora un put europeo con los mismos datos del ejemplo (3.2). Si corremos el programa con estos mismos datos obtenemos que el precio del put europeo es de $1.4144.

El programa hecho en Matlab puede ser utilizado para analizar cómo afectan al precio de una opción las diferentes variables tales como el precio de la acción, el precio de ejercicio, la tasa de interés, la volatilidad y el tiempo para el vencimiento. Es muy sencillo calcular el precio de una opción con este programa, simplemente es necesario cambiar el valor de cualquiera de estas variables para ver cual es el nuevo precio de la opción.

Apéndice A

Bienes de Inversión

Un bien de inversión es un bien que es utilizado para inversión como el caso de las acciones, bonos, divisas. No obstante existen bienes como el oro, la plata y otros metales que aunque se utilizan como bien de consumo, también se utilizan como bienes de inversión, de tal modo que un bien de inversión debe cumplir que dicho bien deba ser utilizado por un número grande de inversionistas solamente como inversión.

Ventas en Corto

Una venta en corto se da cuando un inversionista pide prestada una acción para venderla en el mercado. Después, el inversionista debe recomprar la acción para devolverla a quien se la prestó anteriormente. A esta acción se le llama cerrar la posición corta. El inversionista que desea realizar una venta en corto cree que el precio de la acción disminuirá. Si el precio de la acción disminuye cuando el inversionista debe regresar la acción prestada, el inversionista obtiene ganacias ya que éste compra la acción a un precio menor del que vendió la acción. Si el precio aumenta respecto al precio al que vendió la acción, el inversionista obtiene pérdidas. Las reglas en los mercados accionarios sólo permiten realizar ventas en corto sobre una acción cuando el último cambio en el precio de ésta fue positivo.

Definición de Arbitraje

Una oportunidad de arbitraje se da cuando un inversionista logra construir un portafolio de inversión sin costo que provea una ganancia segura en el futuro. Construir un portafolio sin costo implica poder vender en corto al menos un activo del portafolio y usar las ganancias para comprar otros instrumentos. Un ejemplo de arbitraje se da cuando algún bien o instrumento financiero tiene dos precios distintos en dos mercados diferentes. Se puede hacer arbitraje vendiendo en corto el bien al precio mayor e inmediatamente comprarlo al precio menor. La ganancia estaría dada por la diferencia en los precios del bien, además, en esta transacción no existe riesgo alguno pues las operaciones de compra y venta se contrarrestan.

DEMOSTRACIÓN DE LA PROPOSICIÓN (2.1)

La proposición (2.1) dice lo siguiente:

Dados un portafolio α y un portafolio β tales que $V_T(\alpha) \geq V_T(\beta)$, entonces se tiene que $V_t(\alpha) \geq V_t(\beta)$ con $t < T$.

Supongamos que esta proposición no se cumple, es decir, que $V_t(\alpha) < V_t(\beta)$. Un inversionista, para hacer arbitraje puede optar por la siguiente estrategia:

i) Vender en corto el portafolio β al tiempo t.

ii) Con el dinero recibido por la venta en corto, comprar el portafolio α, pues estamos suponiendo que su valor es menor al del portafolio β.

Al tiempo T se sabe por hipótesis que $V_T(\alpha) \geq V_T(\beta)$. El inversionista vende el portafolio α y recompra el portafolio β para cerrar la posición corta que había adquirido al tiempo t. De este modo el inversionista hace arbitraje. Así pues, se ha demostrado que la proposición (2.1) es cierta.

USO DEL SOFTWARE

El software consta de 23 archivos de Matlab. Dichos archivos deben ser copiados en el subdirectorio *work* del directorio en el cual se encuentre instalado Matlab. Una vez hecho esto el software está listo para usarse. Como habíamos mencionado antes, el software está hecho para analizar forwards y opciones. Para entrar al programa de forwards el usuario debe escribir la palabra *cfor* en la línea de comandos de Matlab y la palabra *opcion* para entrar al programa de opciones. El software está programado de tal forma que sea muy sencillo de utilizar ya que contiene ventanas con títulos explícitos que van guiando al usuario dentro de éste. Asimismo, prácticamente todas las ventanas contienen un botón y una ventana de información para ayudar al usuario a entender mejor que puede hacer en esa parte del programa.

Bibliografía

[1] Díaz Tinoco y Hernández Trillo. *Futuros y Opciones Financieras.* Limusa, 3ra. Edición, 2002.

[2] Doob, J. L. *Stochastic Processes.* John Wiley & Sons, Inc., 1953.

[3] Friedman, Auner. *Stochastic Differential Equations and Applications.* Academic Press, 1975.

[4] Hull, John C. *Options, Futures & Other Derivatives.* 4ta. Edición, Prentice Hall, 1999.

[5] Kwok Yue-Kwen, *Mathematical Models of Financial Derivatives.* Springer Verlag, 1998.

[6] Neftci, Salih N. *An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives.* 2a. Edición, Academic Press, 2000.

[7] Prisman, Eliezer Z. *Pricing Derivative Securities.* Academic Press, 2000.

[8] Ross, Stephen A., Randolph, W. Westerfield, Jafee, Jeffrey. *Corporate Finance.* 4ta. Edición, Irwin McGraw-Hill, 1996.

[9] Shaw, William T. *Modelling Finacial Derivatives with Mathematica.* Cambridge University Press, 1998.

[10] Wilmott, Paul, Howison, Sam y Dewinne, Jeff. *The Mathematics of Financial Derivatives.* Cambridge University Press, 1995.