UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

TEORÍAS GENERALIZADAS DE COHOMOLOGÍA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE
MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

P R E S E N T A

LUIS HERNÁNDEZ HERNÁNDEZ

DIRECTOR DE TESIS: Dr. JOSÉ LUIS CISNEROS MOLINA

MÉXICO, D.F. AGOSTO, 2004

Índice general

Agradecimientos

Deseo expresar mi agradecimiento al Dr. José Luis Cisneros Molina por dirigirme en la realización del presente trabajo y su atención y paciencia para conmigo.

Al Dr. Egidio Barrera Yañez por su tiempo que me dio para el esclarecimiento de varios conceptos matemáticos.

Al Dr. Marcelo Aguilar Gonzales, Dr. Jacob Mostovoy y al Dr. Jesús González por sus comentarios y sugerencias hechas para la culminación de mi Tesis.

Además tambien quiero expresar mi agradecimiento a la DGAPA por el apoyo economico recibido via el *PROYECTO PAPIIT ES110702 "Métodos Analíticos en Topología Algebraica"* para la realización de la presentes Tesis de Maestría.

Resumen

Samuel Eilenberg y Norman Steenrod formularon siete axiomas con los cuales caracterizaron a la (co)-homología simplicial, desde entonces cualquier otro funtor que satisface tales axiomas es llamado teoría de (co)-homología ordinaria. Más tarde Atiyah, Hizebruch y G. W. Whitehead consideraron todo funtor que satisfaciera específicamente seis de los siete axiomas propuestos por Eilenberg y Steenrod, tales funtores son conocidos como teorías de (co)-homología generalizadas. En el presente trabajo se estudia la relación entre las teorías de cohomología generalizadas, espectros y leyes formales de grupo, con ello se estudia el Teorema de Daniel Quillen que dice que la ley formal de grupo asociada al cobordismo complejo es universal. Finamente se analiza cuando una ley formal de grupo define una teoría de cohomología generalizada con orientación compleja y es enunciado el Teorema del funtor exacto de Landweber.

Introducción

El estudio de invariantes topológicos es una parte fundamental en la topología algebraica. Una manera de asignar invariantes es mediante el uso de funtores los cuales reciben el nombre del propio invariante al que están asociados. Como ejemplo tenemos los funtores de (co)-homología a los cuales nos referimos como *teorías de (co)-homología* y entre los que tenemos a la (co)-homología singular, cohomología de De Rham los cuales asignan a cada espacio un grupo abeliano en el caso de la homología y un anillo graduado en el caso de la cohomología. Justamente estos invariantes han jugado un papel fundamental en la topología algebraica y en otras áreas de las matemáticas de tal manera que la cohomología se ha llegado a convertir en una especie de carta de presentación para los espacios topológicos y dependiendo de la cohomología que usemos será la información que tengamos a cerca del espacio en cuestión.

La importancia de esto motivó a Samuel Eilenberg y a Norman Steenrod a formular siete axiomas con los cuales caracterizaron, en principio, a la (co)-homología simplicial. Más tarde Atiyah, Hirzebruch y G. W. Whitehead se dieron cuenta de la "gran injusticia" de la que estaban siendo objeto otros funtores por no satisfacer uno de los axiomas de Eilenberg-Steenrod, para ser específicos el axioma conocido como *axioma de dimensión*, ya que el que no satisfagan tal axioma no los hace menos útiles que los otros puesto que estos proporcionan información que de otra manera seria imposible obtener. Por estas razones a tales funtores se les llamo *teorías generalizadas de (co)-homología*, como ejemplo se tiene a la teoría K topológica, homotopía estable, teorías de cobordismo entre otras. El asunto podría terminar ahí pero los resultados de G. W. Whitehead [29] y H. Brown, Jr.[4] muestran que a cada teoría de (co)-homología, generalizada o no, se le puede asociar una sucesión de espacios topologícos' y funciones sujetos a ciertas condiciones, los cuales se denominan *espectros* y además que el proceso se podía invertir, es decir dado un espectro, obtener una teoría de (co)-homología de tal suerte que el espectro asociado a esta última sea equivalente con el que comenzamos. Así que en vez de estudiar las teorías de (co)-homología, podríamos estudiar a los espectros. Por otro lado la estructura a nivel de espectro, nos permite generalizar el concepto de orientación en un haz vectorial y por ende conceptos como *clase de Thom* y *clase de Euler* en el anillo de la teoría generalizada de cohomología orientada.

Resulta que la clase de Euler en teorías con orientación compleja y la H-multiplicación del espacio clasificante $\mathbb{C}P^{\infty}$ de los haces complejos de líneas nos revela un nuevo elemento, las *leyes formales de grupo*, es decir, asociado a cada espectro con orientación compleja, y por lo anterior, a cada teoría generalizada de cohomología con orientación compleja, se tiene una ley formal de grupo. A grandes rasgos, una ley formal de grupo es una serie formal con coeficientes en un determinado anillo y que satisface condiciones semejantes a los axiomas de grupo. Sus aplicaciones van de la teoría de números pasando por la geometría algebraica a la topología algebraica. La pregunta natural que surge acerca de la asociación de una ley formal de grupo a una teoría generalizada de cohomología compleja es ¿Hay un proceso inverso?, es decir: ¿Dada una ley formal de grupo podemos obtener una teoría generalizada de cohomología de tal suerte que su ley formal de grupo asociada sea la misma con la que iniciamos? La respuesta a esta pregunta comenzó con el resultado de Daniel Quillen [18], quien mostró que la ley formal asociada al cobordismo complejo es *universal* es decir su relación con cualquier otra ley formal de grupo con coeficientes en cualquier anillo esta dada por un único homomorfismo del anillo de coeficientes del cobordismo al anillo de los coeficientes de la otra ley formal. Ahora bien, justamente los homomorfismos del anillo de cobordismo complejo a cualquier otro anillo son conocidos como *géneros complejos*. Cada género define un funtor de la categoría de los espacios topológicos a la categoría de los anillos. P.S. Landweber [14] muestra que si el género satisface ciertas condiciones entonces el funtor define una teoría generalizada de cohomología y tal que su ley formal de grupo corresponde con el género con el cual se definió "su" teoría de cohomología. Así, dentro de este pequeño conjunto de leyes formales de grupo que satisfacen las condiciones de Landweber se tiene una correspondencia 1 a 1 entre leyes formales y teorías generalizadas de cohomología con orientación compleja. Las condiciones de Landweber son conocidas como el *Teorema del Funtor Exacto de Landweber*. Como ejemplo tenemos a la *cohomología elíptica* la cual surge al estudiar el *género elíptico* asociado a la ley formal relativa a la teoría de curvas elípticas.

En resumen lo anterior lo podemos situar en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\text{Teorías de Cohomología Generalizadas con Orientación Compleja} \arrow[rr, "\text{Clase de Euler}"] & & \text{Leyes Formales de Grupo} \arrow[dl, leftrightarrow, "\text{Teorema de Quillen}"] \\
& \text{Géneros Complejos} \arrow[ul, dashed, "\text{Funtor Exacto de Landweber}"] & \\
& \text{Teoría Cuántica de Campos} \arrow[u, "\text{Teoría del Índice}"'] &
\end{tikzcd}$$

En la última parte del diagrama se han puesto elementos de los cuales no se hace mención aquí pero se ha querido hacer notar su relación con los temas aquí tratados ya que forman parte de las principales ideas concernientes a la física y matemáticas en los últimos 25 años. Como ejemplo de esta relación se tiene al género $\hat{A}$ que surge en el Teorema del Índice de Atiyah-Singer. Otro ejemplo interesante es justamente el género elíptico el cual G. Segal [23] propone ser definido como el índice de un operador de Dirac en dimensión infinita.

La tesis se divide en tres capítulos. En el capítulo 1 se estudian los principales resultados sobre las teorías generalizadas de cohomología. El capítulo 2 concierne a la representabilidad de los funtores de cohomología y su relación con los espectros. Finalmente en el capítulo 3 se estudia brevemente el espectro de Thom, se generaliza el concepto de orientación y con ello se define las teorías generalizadas de cohomología complejas. Se revisan los conceptos básicos de la teoría de las leyes formales de grupos y con ello dar paso al el Teorema de Quillen y su relación con el Teorema del Funtor Exacto de Landweber.

Capítulo 1

Teorías de Cohomología Generalizadas

Comenzaremos con los conceptos elementales de teoría de categorías así como ejemplos que serán usados continuamente a lo largo de este trabajo. Aquí el punto culminante está a cargo del Lema de Yoneda.

En la segunda sección del presente capítulo, se trata de manera concisa lo referente a las teorías de cohomología generalizadas.

1.1. Funtores y Transformaciones Naturales

La idea de una categoría es caracterizar sus objetos no como los elementos de un conjunto, describiendo a sus elementos, sino por su relación con otros objetos.

Definición 1.1.1. Una categoría $\mathcal{C}$ consiste de tres ingredientes:

- Una clase de objetos de la categoría.

- Para cada par ordenado (A, B) de elementos de $\mathcal{C}$ un conjunto de morfismos de A a B denotado por $\mathcal{M}(A, B)$.

- Una regla de composición para cada tríada A, B y C de objetos en $\mathcal{C}$

$$\mathcal{M}(A,B) \times \mathcal{M}(B,C) \longrightarrow \mathcal{M}(A,C)$$
$$(f,g) \mapsto g \circ f.$$

Además estos ingredientes deberán satisfacer los siguientes axiomas:

i) Los conjuntos $\mathcal{M}(A_1, B_1)$ y $\mathcal{M}(A_2, B_2)$ son disjuntos a menos que $A_1 = A_2$ y $B_1 = B_2$.

ii) Dados $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ y $h : C \longrightarrow D$ entonces $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ (Ley de composición asociativa)

iii) Para cada objeto A existe un morfismo $I_A : A \longrightarrow A$ tal que para cada $f : A \longrightarrow B$, $g : C \longrightarrow A$ tenemos $f \circ I_A = f$ y $I_A \circ g = g$.

Algunos ejemplos de categorías que serán importantes para la futura teoría a desarrollar son:

$\mathcal{S}et$ la categoría de todos los conjuntos y funciones entre ellos.

$\mathcal{A}$ la categoría de todos lo grupos abelianos y morfismos.

$\mathcal{T}$ la categoría de los espacios topológicos y funciones continuas.

$\mathcal{PT}$ la categoría de los espacios topológicos punteados y funciones continuas que preservan el punto base.

$\mathcal{T}'$ la categoría en la cual los objetos son espacios topológicos y los morfismos son clases de homotopía de las funciones continuas.

$\mathcal{PT}'$ la categoría de los espacios topológicos punteados y cuyos morfismos son clases de homotopía de las funciones continuas que preservan el punto base.

$\mathcal{T}^2$ la categoría de todos los pares (X, A) de espacios topológicos tal que A es un subespacio de X, y cuyos morfismos son funciones de pares.

$\mathcal{T}^{2\prime}$ la categoría en la cual los objetos son los mismos que en $\mathcal{T}^2$ pero los morfismo son clases de homotopía de las funciones continuas de pares.

$\mathcal{W}^2$ es la categoría de los pares de espacios CW, (X, A), donde A es un subcomplejo de X, y los morfismo son funciones celulares.

$\mathcal{W}^{2\prime}$ es la categoría de los pares CW, (X, A) y los morfismo son clases de homotopía de las funciones continuas de pares.

Es tentador querer "relacionar" diferentes categorías entre sí, esto es posible y para ello necesitamos considerar un tipo especial de transformación entre ellas.

Definición 1.1.2. Sean $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ dos categorías. Un *funtor covariante*

$$\mathcal{F} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$$

es una regla tal que:

a) a cada objeto $A \in \mathcal{A}$ asigna un objeto $\mathcal{F}(A) \in \mathcal{B}$

b) a cada morfismo $f : A_1 \longrightarrow A_2$ en $\mathcal{A}$ asigna un morfismo $\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(A_1) \longrightarrow \mathcal{F}(A_2)$ en $\mathcal{B}$.

Además esta regla debe satisfacer los siguientes axiomas:

i) $\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g)$ para cualesquiera morfismos f, g en $\mathcal{A}$ para los cuales la composición $f \circ g$ tenga sentido.

ii) $\mathcal{F}(I_A) = I_{\mathcal{F}(A)}$ para cada objeto $A \in \mathcal{A}$.

Un *funtor contravariante* $\mathcal{F} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ es lo mismo como funtor covariante excepto que cuando se tiene un morfismo $f : A_1 \longrightarrow A_2$, $\mathcal{F}(f)$ es ahora un morfismo de $\mathcal{F}(A_2)$ a $\mathcal{F}(A_1)$ y el axioma *i)* se enuncia como *i')* $\mathcal{F}(f \circ g) = \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f)$ para todo morfismo f, g en $\mathcal{A}$ para los cuales la composición $f \circ g$ tiene sentido.

Ocasionalmente escribiremos "funtor" para referirnos a un funtor covariante.

Ejemplo 1.1.3. Consideremos la categoría $\mathcal{PT}$ y la regla que asigna a cada espacio punteado (X, x_0) en $\mathcal{PT}$ su suspensión reducida $(SX, *)$ y si (X, x_0), (Y, y_0) están en $\mathcal{PT}$ y $f \in \mathcal{M}((X, x_0), (Y, y_0))$, entonces

$$\begin{aligned} Sf : (SX, *) &\longrightarrow (SY, *) \\ x \wedge t &\mapsto f(x) \wedge t. \end{aligned}$$

así, claramente esta regla satisface la definición de funtor, por lo tanto este es un funtor de la categoría $\mathcal{PT}$ en si misma. Este funtor se puede extender a la categoría $\mathcal{PT}'$.

Ejemplo 1.1.4. En $\mathcal{T}^{2\prime}$ tenemos el funtor restricción $\mathcal{R} : \mathcal{T}^{2\prime} \longrightarrow \mathcal{T}^{2\prime}$ definido por $\mathcal{R}(X, A) = (A, \emptyset)$ y $\mathcal{R}([f]) = [f|_A]$.

Ejemplo 1.1.5. Sea $\mathcal{C}$ una categoría y sea $C_0 \in \mathcal{C}$. Definimos el funtor

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{C_0} &: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{S}et \\ C &\mapsto \mathcal{M}(C, C_0) \end{aligned}$$

Si $f \in \mathcal{M}(C, D)$, $\mathcal{M}_{C_0}(f) : \mathcal{M}(D, C_0) \longrightarrow \mathcal{M}(C, C_0)$ es composición con f por la derecha, así $\mathcal{M}_{C_0}$ es un funtor contravariante.

Ejemplo 1.1.6. Sea G la categoría de todos los grupos y homomorfismos. Entonces para cada $n \in \mathbb{Z}^{>0}$, tenemos dos funtores de $\mathcal{PT}$ a G, los cuales son el n-ésimo grupo de homotopía y el n-ésimo grupo de homología singular, respectivamente:

$$\begin{aligned} \pi_n &: \mathcal{PT} \longrightarrow G \\ H_n &: \mathcal{PT} \longrightarrow \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Note que para $n \geqslant 2$ $\pi_n(X) \in \mathcal{A}$.

Ejemplo 1.1.7. Ahora, consideremos la categoría $\mathcal{T}$ y para cada espacio X en $\mathcal{T}$, sea X^+ el espacio $X \cup \{*\}$, donde $*$ es un punto no contenido en X, y definimos a $*$ como el punto base de X^+. Así tenemos un funtor de $\mathcal{T}$ a $\mathcal{PT}$ tal que manda X a X^+.

Proposición 1.1.8. *Si $\mathcal{F} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ es un funtor y $f : A_1 \longrightarrow A_2$ es un isomorfismo en $\mathcal{A}$ entonces $\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(A_1) \longrightarrow \mathcal{F}(A_2)$ es también un isomorfismo en $\mathcal{B}$.*

Demostración. Sea $g = f^{-1}$ aplicamos $\mathcal{F}$ a $f \circ g = I_{A_2}$ y a $g \circ f = I_{A_1}$. □

Ahora, no sólo queremos "transformaciones" entre categorías, sino también queremos "transformaciones" entre funtores. Esto permite considerar cosas como la categoría de todos los funtores de una categoría $\mathcal{A}$ a una categoría $\mathcal{B}$, pero principalmente nos permitirá decir en cierto sentido si dos funtores tienen el mismo comportamiento.

Definición 1.1.9. Sean $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ dos funtores. Una *transformación natural* $\Phi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ es una colección de morfismos $\{ \phi_A : \mathcal{F}(A) \longrightarrow \mathcal{G}(A) : A \in \mathcal{A} \}$ tal que para todo morfismo $f : A_1 \longrightarrow A_2$ en $\mathcal{A}$, tenemos que $\phi_{A_2} \circ \mathcal{F}(f) = \mathcal{G}(f) \circ \phi_{A_1}$. Si los morfismos ϕ_A son todos isomorfismos, entonces Φ es llamado una *equivalencia natural*.

Esta última definición en su forma diagramática es

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(A_1) \arrow[r, "\mathcal{F}(f)"] \arrow[d, "\phi_{A_1}"'] & \mathcal{F}(A_2) \arrow[d, "\phi_{A_2}"] \\ \mathcal{G}(A_1) \arrow[r, "\mathcal{G}(f)"'] & \mathcal{G}(A_2). \end{tikzcd}$$

Ejemplo 1.1.10. Para cada $n \in \mathbb{Z}^{\geqslant 0}$, sea π_n y H_n como en el Ejemplo 1.1.6 y $X \in \mathcal{T}$ tenemos los homomorfismos de *Hurewicz* $h_X : \pi_n(X) \longrightarrow H_n(X)$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \pi_n(X) \arrow[r, "f_\sharp"] \arrow[d, "h_X"'] & \pi_n(Y) \arrow[d, "h_Y"] \\ H_n(X) \arrow[r, "f_*"'] & H_n(Y). \end{tikzcd}$$

para todo $f \in \mathcal{M}(X,Y)$ en $\mathcal{T}$. Así el homomorfismo de Hurewicz es una transformación natural entre los funtores π_n y H_n.

No es difícil ver que la composición de transformaciones naturales es otra transformación natural y que además es asociativa.

Definición 1.1.11. Un funtor contravariante $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{S}et$ se dice que es *representable* si existe un objeto C_0 en $\mathcal{C}$ y una equivalencia natural $\Phi : \mathcal{M}_{C_0} \longrightarrow \mathcal{F}$. En este caso decimos que C_0 representa a $\mathcal{F}$ y C_0 será llamado *objeto clasificante* para $\mathcal{F}$.

Lema de Yoneda. *Sea $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{S}et$ un funtor contravariante y sea C cualquier elemento en $\mathcal{C}$. El conjunto de transformaciones naturales de $\mathcal{M}_C$ a $\mathcal{F}$ es isomorfo (en el sentido categórico) al conjunto $\mathcal{F}(C)$.*

Demostración. Denotamos por T al conjunto de transformaciones naturales de $\mathcal{M}_C$ a $\mathcal{F}$. Si $\Phi \in T$ entonces tenemos un morfismo

$$\phi_D : \mathcal{M}_C(D) \longrightarrow \mathcal{F}(D)$$

para cada $D \in \mathcal{C}$. En particular, tenemos un morfismo $\phi_C : \mathcal{M}_C(C) \longrightarrow \mathcal{F}(C)$ de tal suerte que podemos definir un elemento distinguido de $\mathcal{F}(C)$ como sigue

$$\sigma(\Phi) = \phi_C(I_C) \in \mathcal{F}(C) \tag{1.1}$$

lo cual nos da una función

$$\sigma : T \longrightarrow \mathcal{F}(C).$$

Ahora, sea $x \in \mathcal{F}(C)$. Para cada objeto D en $\mathcal{C}$ y cualquier morfismo $f : D \longrightarrow C$, tenemos un morfismo $\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(C) \longrightarrow \mathcal{F}(D)$. Así podemos definir

$$\psi_D(f) = \mathcal{F}(f)(x).$$

Esta construcción nos define un morfismo

$$\psi_D : \mathcal{M}_C(D) \longrightarrow \mathcal{F}(D).$$

De esta manera, si $g : D' \longrightarrow D$ es otro morfismo, tenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(g) \circ \psi_D(f) &= \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f)(x) \\
&= \mathcal{F}(f \circ g)(x) \\
&= \psi_{D'}(f \circ g) \\
&= \psi_{D'}(\mathcal{M}_C(g)(f)) \\
&= \psi_{D'} \circ \mathcal{M}_C(g)(f)
\end{aligned}$$

Estos morfismos en conjunto nos dan una trasformación natural que depende de x la cual denotaremos por $\Psi_x : \mathcal{M}_C \longrightarrow \mathcal{F}$.

Así obtenemos una función

$$\begin{aligned}
\rho : \mathcal{F}(C) &\longrightarrow T \\
x &\mapsto \Psi_x.
\end{aligned}$$

Sólo resta mostrar que $\sigma(\rho(x)) = x$ y $\rho(\sigma(\Phi)) = \Phi$.

Para el primer caso, tenemos

$$\sigma(\rho(x)) = \psi_A(I_A) = \mathcal{F}(I_A)(x) = x.$$

Para el segundo caso: sea Φ en T entonces

$$x = \sigma(\Phi) = \phi_C(I_C)$$

y $\rho(x) = \Psi_x$ tal que si $f \in \mathcal{M}_C(D)$

$$\begin{aligned}
\psi_D(f) &= \mathcal{F}(f)(x) \\
&= \mathcal{F}(f)(\phi_C(I_C)) \\
&= \phi_D(\mathcal{M}_C(f))(I_C) \\
&= \phi_D(f)
\end{aligned}$$

así $\Psi_x = \Phi$ como era requerido. □

Proposición 1.1.12. *Sea $\mathcal{F}$ un funtor contravariante representable en una categoría $\mathcal{C}$ con objeto clasificante $C \in \mathcal{C}$ y sea $\Phi : \mathcal{M}_c \longrightarrow \mathcal{F}$ una equivalencia natural. Entonces para cualquier $D \in \mathcal{C}$ y $d \in \mathcal{F}(D)$ existe un único morfismo $\beta : D \longrightarrow C$ tal que $\mathcal{F}(\beta)(\phi_C(I_C)) = d$ donde $\phi_C(I_C)$ es justamente la imagen de Φ bajo la función ρ definida en el Lema de Yoneda por la ecuación* (1.1).

Demostración. En efecto por ser $\mathcal{F}$ representable, para $d \in \mathcal{F}(D)$ existe un único $\beta \in \mathcal{M}_C(D)$ tal que $\phi_D(\beta) = d$ pero $\phi_D(\beta) = \phi_D(\mathcal{M}_C(\beta)(I_C)) = \mathcal{F}(\beta)(\phi_C(I_C))$. □

Nota. Si en la definición 1.1.11, el Lema de Yoneda y en la última proposición utilizamos funtores covariantes en vez de contravariantes obtenemos sus respectivas versiones covariantes.

Para un funtor representable, en el sentido contravariante o covariante, el elemento $\phi_C(I_C) \in \mathcal{F}(C)$, donde ϕ_C es parte de la equivalencia natural entre $\mathcal{F}$ y $\mathcal{M}_C$, es llamado *elemento universal.*

A continuación mostremos un par de hechos sobre funtores representables.

Proposición 1.1.13. *Sean $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{S}et$ funtores contravariantes (covariantes) representados por C_1 y C_2 respectivamente y sea $\Phi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ una transformación natural. Entonces existe un único morfismo $f : C_1 \longrightarrow C_2$ tal que para cada objeto $C \in \mathcal{C}$ el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(C) \arrow[r, "\phi_C"] \arrow[d, "\Psi_1"'] & \mathcal{G}(C) \arrow[d, "\Psi_2"] \\
\mathcal{M}_{C_1}(C) \arrow[r, "f^\sharp"'] & \mathcal{M}_{C_2}(C)
\end{tikzcd}$$

donde $f^\sharp$ es composición por la izquierda con f, Ψ_1 y Ψ_2 son las correspondientes equivalencias naturales de las correspondientes representaciones y ϕ_C es el morfismo correspondiente al objeto C dado por la transformación natural Φ, Además, si Φ es una equivalencia natural, entonces f es un isomorfismo en $\mathcal{C}$.

Demostración. De las hipótesis se deduce la siguiente sucesión:

$$\mathcal{M}_{C_1}(C) \xrightarrow[\cong]{\Psi_1} \mathcal{F}(C) \xrightarrow{\phi_C} \mathcal{G}(C) \xrightarrow[\cong]{\Psi_2} \mathcal{M}_{C_2}(C)$$

de tal suerte que la composición $\Psi_2 \circ \phi_C \circ \Psi_1$ es una transformación natural de $\mathcal{M}_{C_1}$ en $\mathcal{M}_{C_2}$ pero el lema de Yoneda nos dice que para esta transformación natural existe un único morfismo $f \in \mathcal{M}_{C_2}(C_1)$ el cual es justamente $\Psi_{2C_1} \circ \phi_{C_1} \circ \Psi_{1C_1}(I_{C_1})$. De aquí se sigue la conmutatividad del diagrama y la unicidad de $f^\sharp$. Ahora si Φ es una equivalencia natural entonces también lo es $f^\sharp$. Así para cada $C \in \mathcal{C}$ se tiene un isomorfismo $f^\sharp_C : \mathcal{M}_{C_1}(C) \longrightarrow \mathcal{M}_{C_2}(C)$ cuyo inverso es inducido por algún $\varphi : C_2 \longrightarrow C_1$. Particularmente podemos considerar $f^\sharp_{C_1}$ y $f^\sharp_{C_2}$ y así tenemos

$$\begin{aligned} I_{C_1} &= {f^\sharp_{C_1}}^{-1} \circ f^\sharp_{C_1}(I_{C_1}) = \varphi \circ f \\ I_{C_2} &= f^\sharp_{C_2} \circ {f^\sharp_{C_2}}^{-1}(I_{C_2}) = f \circ \varphi. \end{aligned}$$

De aquí se sigue que f es un isomorfismo. □

Corolario 1.1.14. *Cualesquiera dos objetos que representan al mismo funtor contravariante (covariante) son isomorfos.*

Demostración. Considérese la demostración anterior con $\mathcal{F} = \mathcal{G}$ y $\phi_C = I_C$ para toda $C \in \mathcal{C}$. □

1.2. Teorías Generalizadas de Cohomología

Sabemos que Eilenberg y Steenrod probaron que la (co)-homología simplicial con coeficientes en un grupo G estaba caracterizada por siete axiomas que ahora se conocen como los axiomas de Eilenberg-Steenrod. Más tarde otros como Atiyah, Hirzebruch y G. W. Whitehead, observaron la existencia de otros funtores que satisfacen todos los axiomas de Eilenberg-Steenrod con la excepción del llamado *axioma de dimensión.*

El objetivo será estudiar aquellos funtores que como mencionamos antes, no satisfacen el axioma de dimensión. Si el tratamiento en este tema les parece familiar al adoptado por un "clásico" de la materia no es mera coincidencia, después de que todo ya esta hecho lo mejor que nos queda es seguir a los *maestros.*

Definición 1.2.1. Una *teoría de cohomología no reducida* $\mathcal{H}^*$ en la categoría $\mathcal{T}^{2\prime}$ es una sucesión de funtores contravariantes $\mathcal{H}^n : \mathcal{T}^{2\prime} \longrightarrow \mathcal{A}$ para cada $n \in \mathbb{Z}$ y transformaciones naturales $\delta^n : \mathcal{H}^n \circ \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{H}^{n+1}$ donde $\mathcal{R}$ es el funtor restricción y tal que se satisfacen los siguientes dos axiomas:

Exactitud: para cada par $(X,A) \in \mathcal{T}^{2\prime}$ sean

$$i : (A, \emptyset) \longrightarrow (X, \emptyset)$$
$$j : (X, \emptyset) \longrightarrow (X, A)$$

inclusiones, entonces las siguiente sucesión es exacta

$$\xrightarrow{\delta^{n-1}} \mathcal{H}^n(X,A) \xrightarrow{j^*} \mathcal{H}^n(X) \xrightarrow{i^*} \mathcal{H}^n(A) \xrightarrow{\delta^n} \mathcal{H}^{n+1}(X,A) \xrightarrow{j^*} \quad (1.2)$$

Excisión: para cada par $(X,A) \in \mathcal{T}^{2\prime}$ y subespacio $U \subset A$ con $\overline{U} \subset A^\circ$ la inclusión $j : (X - U, A - U) \longrightarrow (X, A)$ induce un isomorfismo

$$j^* : \mathcal{H}^n(X - U, A - U) \longrightarrow \mathcal{H}^n(X, A)$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Como podemos ver, en una teoría generalizada de cohomología no se pide que $\mathcal{H}^n(*) = 0$ para todo $n \neq 0$, es decir no satisface necesariamente el axioma de dimensión.

Ejemplo 1.2.2. Con la ayuda de la periodicidad de Bott, podemos extender el funtor K (Teoría K topológica, real o compleja) a toda una familia de funtores K^n, $n \in \mathbb{Z}$, los cuales en conjunto forman una teoría generalizada de cohomología en la categoría de pares de espacios paracompactos de tal suerte que se tiene que $K^n(*) \neq 0$ si n es par.

Nota. Si en la definición 1.2.1 consideramos funtores $\mathcal{H}_* : \mathcal{T}^{2\prime} \longrightarrow \mathcal{A}$ y transformaciones naturales $\partial_n : \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{H}_{n-1} \circ \mathcal{R}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, podemos ver que salvo cambiar la dirección de las flechas, estos funtores y transformaciones naturales satisfacen los axiomas enunciados en 1.2.1. Con estos cambios, la definición 1.2.1 se convierte en la definición de *Teoría Generalizada de Homología.*

Las teorías de cohomología y homología que satisfacen el axioma de dimensión son llamadas *ordinarias.* Ejemplos de este tipo de teorías son la cohomología y homología singular con coeficientes en un grupo G, mientras que en la categoría de las variedades diferenciables tenemos la cohomología De Rham.

Definición 1.2.3. Un *triple* (X, A, B) consiste de un espacio topológico X y dos subespacios A, B de X tal que $B \subset A \subset X$. Por otro lado una *tríada* $(X; A, B)$ consiste de un espacio topológico X y dos subespacios A, B de X tal que $A \cup B = X$. En ambos casos si X es un espacio punteado con punto base x_0 entonces $x_0 \in B$ y $x_0 \in A \cap B$ respectivamente.

Proposición 1.2.4. *Lo siguiente es equivalente:*

i) Axioma de escisión

ii) Para cada tríada $(X; A, B)$ tal que $A^\circ \cup B^\circ = X$, la inclusión $j : (A, A \cap B) \longrightarrow (X, B)$ induce un isomorfismo $j^* : \mathcal{H}^n(X, B) \longrightarrow \mathcal{H}^n(A, A \cap B)$.

Demostración. Supongamos que $\mathcal{H}^n$ es un funtor que satisface el axioma de escisión y que $(X; A, B)$ es una tríada con $A^\circ \cup B^\circ = X$. Entonces podemos aplicar el axioma de escisión al triple $X - A \subset B \subset X$, ya que $\overline{X - A} = X - A^\circ \subset B^\circ$. Por que $(X - (X - A), B - (X - A)) = (A, A \cap B)$ así, $\mathcal{H}^n$ satisface *ii*).

Inversamente,supongamos que $\mathcal{H}^n$ es un funtor que satisface *ii*) y (X, A) es un par, sea U un subconjunto de A tal que $\overline{U} \subset A^\circ$. Entonces podemos aplicar *ii*) a la tríada $(X; X - U, A)$ ya que $(X - U)^\circ \cup A^\circ = (X - \overline{U}) \cup A^\circ \supset (X - A^\circ) \cup A^\circ = X$, y $(X - U, (X - U) \cap A) = (X - U, A - U)$ así $\mathcal{H}^n$ satisface el axioma de escisión. □

Algunas deducciones elementales de los axiomas para teorías de cohomología generalizadas son:

Proposición 1.2.5. *Si $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ es una equivalencia homotópica, entonces $f^* : \mathcal{H}^n(Y, B) \longrightarrow \mathcal{H}^n(X, A)$ es un isomorfismo para todo $n \in \mathbb{Z}$.*

Proposición 1.2.6. *Si $A \subset X$ es un retracto por deformación de X, entonces $\mathcal{H}^n(X, A) = 0$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.*

Corolario 1.2.7. *$\mathcal{H}^n(X, X) = 0$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.*

Proposición 1.2.8. *Si $x \in X$ es cualquier punto y $c : X \longrightarrow x$ es la función constante a x, entonces c^* inyecta $\mathcal{H}^n(\{x\}, \emptyset)$ como sumando directo en $\mathcal{H}^n(X, \emptyset)$ y de hecho $\mathcal{H}^n(X, \emptyset) \cong \mathcal{H}^n(\{x\}, \emptyset) \oplus \mathcal{H}^n(X, \{x\})$.*

Demostración. Considérese en el axioma de exactitud la siguiente inclusión:

$$i : (\{x\}, \emptyset) \longrightarrow (X, \emptyset)$$
$$j : (X, \emptyset) \longrightarrow (X, \{x\})$$

entonces tenemos la siguiente sucesión

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r] & \mathcal{H}^n(X,\{x\}) \arrow[r, "j^*"] & \mathcal{H}^n(X,\emptyset) \arrow[r, "i^*"] & \mathcal{H}^n(\{x\},\emptyset) \arrow[l, bend left, "c^*"] \arrow[r] & {} \end{tikzcd}$$

y ya que $i^* \circ c^* = (c \circ i)^* = I^*_{\{x\}}$, la sucesión se escinde. Así tenemos que $\mathcal{H}^n(X, \emptyset) \cong \mathcal{H}^n(\{x\}, \emptyset) \oplus \mathcal{H}^n(X, \{x\})$. □

Proposición 1.2.9. *Si (X, A, B) es un triple e $I : (A, B) \longrightarrow (X, B)$, $J : (X, B) \longrightarrow (X, A)$ son inclusiones, entonces tenemos una sucesión exacta*

$$\longrightarrow \mathcal{H}^{n-1}(A,B) \xrightarrow{\phi} \mathcal{H}^n(X,A) \xrightarrow{J^*} \mathcal{H}^n(X,B) \xrightarrow{I^*} \mathcal{H}^n(A,B) \longrightarrow$$

donde ϕ es la composición $\mathcal{H}^{n-1}(A,B) \xrightarrow{j_2^*} \mathcal{H}^{n-1}(A,\emptyset) \xrightarrow{\delta} \mathcal{H}^n(X,A)$

Demostración. Es clara la conmutatividad del siguiente diagrama, el cual resulta de poner juntas las tres sucesiones exactas para los pares (X, A), (X, B) y (A, B)

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] \arrow[dr] & \mathcal{H}^{n-1}(A) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "i_2^*"] & \mathcal{H}^n(X,A) \arrow[r, "j^*"] \arrow[d, "J^*"] & \mathcal{H}^n(X) \arrow[r, "i^*"] \arrow[dr, "i_1^*"] & \mathcal{H}^n(A) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "i_2^*"] & \mathcal{H}^{n+1}(X,A) \arrow[r] \arrow[d, "J^*"] & {} \\
{} \arrow[ur] & \mathcal{H}^{n-1}(B) \arrow[r, "\delta_1"] \arrow[dr, "\delta_2"'] & \mathcal{H}^n(X,B) \arrow[ur, "j_1^*"] \arrow[d, "I^*"] & & \mathcal{H}^n(B) \arrow[r, "\delta_1"] \arrow[dr, "\delta_2"] & \mathcal{H}^{n+1}(X,B) \arrow[d, "I^*"] \arrow[ur, dash] & {} \\
& & \mathcal{H}^n(A,B) \arrow[uurr, "j_2^*"] & & & \mathcal{H}^{n+1}(A,B) \arrow[ur, dash] &
\end{tikzcd}$$

i) $\ker \phi = \mathrm{Im} I^*$. Sea $a \in \mathcal{H}^n(X, B)$. Por la conmutatividad del diagrama (C.D), $j_2^*(I^*(a)) = i^*(j_1^*(a))$, así $\delta(j_2^*(I^*(a)) = \delta(i^*(j_1^*(a))) = 0$ por lo tanto $I^*(\mathcal{H}^n(X, B)) \subset \ker \phi$. Ahora, sea $b \in \ker \phi$. Si $b \in \ker j_2^*$ entonces existe $b' \in \mathcal{H}^{n-1}(B)$ tal que $\delta_2(b') = b$, por lo tanto $I^*(\delta_1(b')) = \delta_2(b') = b$ entonces $b \in I^*(\mathcal{H}^n(X, B))$. Si $j_2^*(b) \in \ker \delta$ entonces existe $b' \in \mathcal{H}^n(X)$ tal que $i^*(b) = j_2^*(b)$ así por C.D $i_1^*(b') = i_2^*(i^*(b')) = i_2^*(j_2^*(b)) = 0$ por lo tanto existe $b'' \in \mathcal{H}^n(X, B)$ tal que $j_1^*(b'') = b'$ y nuevamente por C.D $j_2^*(I^*(b'')) = i^*(j_1^*(b''))$ entonces $I^*(b'') = b + k$ con $k \in \ker j_2^*$ y por C.D $\ker j_2^* \subset \mathrm{Im} I^*$ de tal suerte que $b \in I^*(\mathcal{H}^n(X, B)$. Entonces $\mathrm{Im} I^* = \ker \phi$.

ii) $\ker J^* = \mathrm{Im}\phi$. Sea $b \in \mathcal{H}^n(A,B)$ y considérese $\phi(b)$.

$$\begin{aligned} J^*(\phi(b)) &= J^*(\delta(j_2^*(b))) \\ &= \delta_1(i_2^*(j_2^*(b))) \\ &= \delta_1(0) = 0 \end{aligned}$$

así $\mathrm{Im}\phi \subset \ker J^*$. Ahora, sea $a \in \mathcal{H}^{n+1}(X,A)$ con $J^*(a) = 0$ por C.D. $j^*(a) = j_1^*(J^*(a)) = j_1^*(0)$ entonces existe $a' \in \mathcal{H}^n(A)$ tal que $\delta(a') = a$. Si $i_2^*(a') = 0$ entonces $a' = j_2^*(a'')$ para algún $a'' \in \mathcal{H}^n(A,B)$ así que $a = \phi(a'')$. Por otro lado, si $i_2^*(a') \neq 0$, entonces por C.D. $\delta_1(i_2^*(a')) = 0$ entonces existe un $a'' \in \mathcal{H}^n(X)$ con $i_1^*(a'') = i_2^*(a')$ así por C.D. $i_2^*(i^*(a'')) = i_2^*(a')$ entonces $a' = i^*(a'') + k$ con $k \in \ker i_2^*$ de tal suerte que $a = \delta(a') = \delta(i^*(a'')) + \delta(k) = \delta(k)$ pero $k = j_2^*(k')$ para alguna $k' \in \mathcal{H}^n(A,B)$ y $a = \phi(k')$ por lo tanto $\ker J^* \subset \mathrm{Im}\phi$. Por lo tanto $\ker J^* = \mathrm{Im}\phi$.

iii) $\ker I = \mathrm{Im} J^*$. La composición $I^* \circ J^*$ es inducida por $J \circ I : (A,B) \longrightarrow (X,A)$ pero ésta última es igual a la composición $(A,B) \longrightarrow (A,A) \longrightarrow (X,A)$ por lo tanto $I^* \circ J^* = 0$ es decir $\mathrm{Im} J^* \subset \ker I^*$. Por otro lado sea $a \in \mathcal{H}^n(X,B)$ tal que $I^*(a) = 0$, entonces por C.D. $i^*(j_1^*(a)) = 0$ así existe $a' \in \mathcal{H}^n(X,A)$ con $j^*(a') = j_1^*(a)$ así $J^*(a') = a + k$ con k en $\ker j_1^*$ pero $J^*(a) \in \ker I^*$ entonces $k \in \ker I^*$ pero $\ker I^* \cap \ker j_1^* = J^*(\delta(\mathcal{H}^{n-1}(A)))$ así existe $b \in \mathcal{H}^{n-1}(A)$ tal que $k = J^*(\delta(b))$ por lo tanto $J^*(a' - \delta(b)) = a$. Así $\ker I^* \subset \mathrm{Im} J^*$. Por lo tanto $\ker I^* = \mathrm{Im} J^*$.

□

Definición 1.2.10. Una tríada $(X; A, B)$ es llamada *escisiva* con respecto a una teoría de cohomología $\mathcal{H}^*$ si la inclusión $j : (A, A \cap B) \longrightarrow (X,B)$ induce un isomorfismo $j^* : \mathcal{H}^n(X,B) \longrightarrow \mathcal{H}^n(A, A\cap B)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Proposición 1.2.11 ([28, Prop. 7.2 y 7.5]). *Toda CW-tríada es escisiva.*

Proposición 1.2.12. *Si $A \subset X$ es una cofibración, entonces la proyección $p : (X,A) \longrightarrow (X/A, *)$ induce un isomorfismo $p_* : \mathcal{H}^n(X/A,*) \longrightarrow \mathcal{H}^n(X,A)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.*

Demostración. Sabemos que si $A \subset X$ es una cofibración, la función cociente $p : (X \cup CA, CA) \longrightarrow (X/A, *)$ es una equivalencia homotópica. Por otro lado la inclusión de (X,A) en $(X \cup CA - *, CA - *)$ es también una equivalencia homotópica. Entonces la conclusión se sigue del axioma de escisión y la Proposición 1.2.5. □

Sabemos que para todo espacio punteado (X, x_0) su cono reducido (CX, x_0') es contraible. Entonces por 1.2.6 $\mathcal{H}^n(CX, \{x_0\}) = 0$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, y además en la sucesión exacta del triple $(CX, X, \{x_0\})$ se tiene que el homomorfismo ϕ en la Proposición 1.2.9 se transforma en isomorfismo

$$\phi_n : \mathcal{H}^n(CX, X) \longrightarrow \mathcal{H}^{n-1}(X, \{x_0\})$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. Definimos

$$\widetilde{\phi}_n(X, x_0) : \mathcal{H}^n(CX/X, \{*\}) \longrightarrow \mathcal{H}^{n-1}(X, \{x_0\})$$

como la composición

$$\mathcal{H}^n(SX, \{*\}) = \mathcal{H}^n(CX/X, \{*\}) \xrightarrow{p^*} \mathcal{H}^n(CX, X) \xrightarrow{\phi} \mathcal{H}^{n-1}(X, \{x_0\})$$

Proposición 1.2.13. *Si $(X, x_0) \in \mathcal{PT}$ entonces $\widetilde{\phi}_n(X, x_0)$ es un isomorfismo para todo $n \in \mathbb{Z}$.*

Demostración. Como la inclusión de X en CX es una cofibración, el homomorfismo p^* inducido por la función cociente

$$p : (CX, X) \longrightarrow (CX/X, \{*\})$$

es un isomorfismo, la conclusión se sigue de la Proposición 1.2.12. □

Corolario 1.2.14. *Sea S^k la k-esfera. Entonces*

$$\widetilde{\phi}_n(S^k, s_0) : \mathcal{H}^n(S^k, \{s_0\}) \longrightarrow \mathcal{H}^{n-1}(S^{k-1}, \{s_0\})$$

es un isomorfismo.

Consideremos $S^0 = \{x_1, x_2\}$ y para un punto $*$ sea i la inclusión $i : * \longrightarrow S^0$ dada por $i(*) = x_1$. Por la Proposición 1.2.11 $(S^0, \{x_1\}, \{x_2\})$ es un tríada escisiva y la función i induce un isomorfismo

$$i* : \mathcal{H}^n(*, \emptyset) \longrightarrow \mathcal{H}^n(S^0, \{x_2\})$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. Ahora por el Corolario 1.2.14 $\mathcal{H}^n(S^k, \{s_0\}) \cong \mathcal{H}^{n-k}(S^0, \{s_0\}) \cong \mathcal{H}^{n-k}(*, \emptyset)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ y $k \geqslant 0$.

Definición 1.2.15. Para cada $n \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{H}^n(*, \emptyset)$ es llamado el n-esimo grupo de coeficientes de la teoría de cohomología $\mathcal{H}^*$.

Claro que en esta generalización de teoría de cohomología no podía faltar la valiosa sucesión de Mayer-Vietoris tal como para teorías ordinarias. Esta generalización esta dada por el próximo teorema.

Teorema 1.2.16 ([28, Teo. 7.19]). *Si $(X; A, B)$ es una tríada escisiva y $C \subset A \cup B$, entonces existe una sucesión exacta*

$$\longrightarrow \mathcal{H}^{n-1}(A \cap B, C) \xrightarrow{\Delta} \mathcal{H}^n(X, C) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{H}^n(A, C) \oplus \mathcal{H}^n(B, C) \xrightarrow{\beta} \mathcal{H}^n(A \cap B, C) \longrightarrow$$

donde $\alpha(x) = (i_1^*(x), i_2^*(x))$, $\beta(x, y) = i_3^*(x) - i_4^*(y)$ y Δ es la composición

$$\mathcal{H}^{n-1}(A \cap B, C) \xrightarrow{\phi} \mathcal{H}^n(A, A \cap B) \xleftarrow[\cong]{j^*} \mathcal{H}^n(X, B) \xrightarrow{J^*} \mathcal{H}^n(X, C)$$

donde ϕ es como en la Proposición 1.2.9 para el triple $(A, A \cap B, C)$ y i_1, i_2, i_3, i_4, j y J son inclusiones

$$\begin{tikzcd}
 & (A, \emptyset) \arrow[dr, "i_1"] & \\
(A \cap B, C) \arrow[ur, "i_3"] \arrow[dr, "i_4"'] & & (X, C) \\
 & (B, C) \arrow[ur, "i_2"'] &
\end{tikzcd}$$

$$(A, A \cap B) \xrightarrow{j} (X, B)$$
$$(X, C) \xrightarrow{J} (X, B).$$

Algunas veces tambien se sequiere calcular los grupos de determinada teoría generalizada de cohomología para espacios punteados. Por lo tanto en la categoría $\mathcal{PT}'$ es más conveniente trabajar con la llamada teoría de cohomología reducida. Y sólo es eso, más conveniente ya que como veremos más adelante, dada una teoría generalizada reducida (no reducida) en $\mathcal{PT}'$ (en $\mathcal{T}^{2\prime}$) podemos definir una teoría generalizada de cohomología no reducida (reducida) en Tp ($\mathcal{PT}'$).

Definición 1.2.17. Una teoría de cohomología *reducida* $\mathcal{K}^*$ en $\mathcal{PT}'$ es una colección de funtores contravariantes y equivalencias naturales para cada $n \in \mathbb{Z}$,

$$\mathcal{K}^n : \mathcal{PT}' \longrightarrow \mathcal{A}$$
$$\sigma^n : \mathcal{K}^n \circ S \longrightarrow \mathcal{K}^{n-1}$$

donde S es el funtor suspensión y las equivalencias naturales son llamadas *isomorfismo de suspensión* los cuales deben satisfacer:

Exactitud: para cada par punteado (X, A, x_0) con inclusiones

$$i : (A, x_0) \longrightarrow (X, x_0) \quad \text{and} \quad j : (X, x_0) \longrightarrow (X \cup CA, *)$$

la sucesión

$$\mathcal{K}^n(X \cup CA, *) \xrightarrow{j^*} \mathcal{K}^n(X, x_0) \xrightarrow{i^*} \mathcal{K}^n(A, x_0).$$

es exacta.

Además, a veces impondremos los dos siguientes axiomas:

Cuña: para cada colección $\{ (X_\alpha, x_\alpha) : \alpha \in A \}$ de espacios punteados, las inclusiones $i_\beta : (X_\beta, x_\beta) \longrightarrow \bigvee_{\alpha \in A} X_\alpha$ inducen un isomorfismo

$$i_\beta^* : \mathcal{K}^n(\bigvee_{\alpha \in A} X_\alpha) \longrightarrow \Pi_{\alpha \in A} \mathcal{K}^n(X_\alpha, x_\alpha) \quad n \in \mathbb{Z}$$

Equivalencia homotópica débil (EHD): Si $f : X \longrightarrow Y$ es una equivalencia homotópica débil, entonces $f^* : \mathcal{K}^n(X, x_0) \longrightarrow \mathcal{K}^n(Y, f(x_0))$ es un isomorfismo para todo $n \in \mathbb{Z}$, $x_0 \in X$.

Escribiremos $\mathcal{K}^n(X)$ en vez de $\mathcal{K}^n(X, x_0)$ no tomando en cuenta al punto base. También hay un axioma cuña para teorías no reducidas tal axioma se llama *axioma de aditividad* y es el siguiente:

Aditividad: Para cada colección $\{(X_\gamma, A_\gamma)\}_{\gamma \in \Lambda}$ de pares de espacios topológicos, las inclusiones $i_\gamma : (X_\gamma, A_\gamma) \longrightarrow \bigsqcup_{\beta \in \beta}(X_\beta, A_\beta)$ induce un isomorfismo

$$(i_\gamma)_{\gamma \in \Lambda} : \Pi_{\beta \in \Lambda} \mathcal{H}^n(X_\beta, A_\beta) \longrightarrow \mathcal{H}^n(\bigsqcup_{\beta \in \Lambda} X_\beta, \bigsqcup_{\beta \in \Lambda} A_\beta).$$

En ambos casos las teorías que satisfacen el axioma cuña o de aditividad, según el caso, se denominan *aditivas.*

El objeto de agregar el axioma cuña y el de aditividad es para facilitar el estudio de espacios CW, tales axiomas permiten probar teoremas de unicidad para las correspondientes teorías. Con el axioma cuña (aditividad) podemos hacer deducciones a cerca de espacios CW que no son finitos, mientras que con el axioma EHD[1] deducciones a cerca de espacios que no son CW.

Ciertamente de la definición de cohomología reducida, cada σ^n deben ser una equivalencia natural para cada $n \in \mathbb{Z}$, de aquí que la existencia de tales objetos no es muy clara. Para mostrar su existencia construiremos una de estas teorías.

Sea $\mathcal{H}^*$ una teoría no reducida en $\mathcal{T}^{2\prime}$ y denotamos por $\widetilde{\mathcal{H}}^*$ la colección de funtores en $\mathcal{PT}'$ definidos por

$$\widetilde{\mathcal{H}}^n(X) = \mathcal{H}^n(X, \{x_0\}). \tag{1.3}$$

Sea CX el cono reducido sobre X, y consideremos la sucesión exacta del triple $\{*\} \subset X \subset CX$ que por la Proposición 1.2.9 tenemos

$$\longrightarrow \mathcal{H}^{n-1}(X, \{*\}) \xrightarrow{\phi} \mathcal{H}^n(CX, X) \xrightarrow{J^*} \mathcal{H}^n(CX, \{x_0\}) \xrightarrow{I^*} \mathcal{H}^n(X, \{*\}) \longrightarrow$$

y como CX es contraible, $\mathcal{H}^n(CX, \{*\}) = 0$ para todo n, ϕ siempre será un isomorfismo. Por otro lado, recordemos que $SX = CX/X$, y sabemos que $X \hookrightarrow CX$ es una cofibración así por la Proposición 1.2.12

$$p^* : \mathcal{H}^n(SX, \{*\}) \longrightarrow \mathcal{H}^n(CX, X)$$

es un isomorfismo. Además, definimos para cada $n \in \mathbb{Z}$ isomorfismos

$$\widetilde{\sigma}^n : \widetilde{\mathcal{H}}^{n+1}(SX) \longrightarrow \widetilde{\mathcal{H}}^n(X) \tag{1.4}$$

como la siguiente composición

$$\widetilde{\mathcal{H}}^{n+1}(SX) = \mathcal{H}^{n+1}(SX, \{*\}) \xrightarrow{p^*} \mathcal{H}^n(CX, X) \xrightarrow{\phi^{-1}} \mathcal{H}^n(X, \{x_0\}) = \widetilde{\mathcal{H}}^n(X)$$

Así $\widetilde{\mathcal{H}}^*$ y $\widetilde{\sigma}^*$ son buenos candidatos para una teoría de cohomología reducida, sólo queda mostrar que se satisface el axioma de exactitud para teorías reducidas para $\widetilde{\mathcal{H}}^*$. Consideremos las sucesiones para los triples $(X, A, \{x_0\})$ y $(X \cup A, CA, \{x_0\})$ que respectivamente son

$$\longrightarrow \mathcal{H}^{n-1}(A, \{x_0\}) \longrightarrow \mathcal{H}^n(X, A) \longrightarrow \mathcal{H}^n(X, \{x_0\}) \longrightarrow \mathcal{H}^n(A, \{x_0\}) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \mathcal{H}^{n-1}(CA, \{*\}) \longrightarrow \mathcal{H}^n(X \cup CA, CA) \longrightarrow \mathcal{H}^n(X \cup CA, \{*\}) \longrightarrow \mathcal{H}^n(CA, \{*\}) \longrightarrow$$

[1]el correspondiente axioma EHD para teorías no reducidas ya esta incluido en su definición.

ahora, por la Proposición 1.2.6 vemos que $\mathcal{H}^n(X \cup CA, CA) \cong \mathcal{H}^n(X \cup CA, \{*\})$ y por el axioma de escisión, $\mathcal{H}^n(X \cup CA, CA) \cong \mathcal{H}^n(X, A)$ así al remplazar estos hechos en la sucesión del triple $(X, A, \{x_0\})$ obtenemos el axioma de exactitud para teorías reducidas. Por lo tanto $\widetilde{\mathcal{H}}^*$ y $\widetilde{\sigma}^*$ es una teoría reducida. Con esto hemos mostrado la existencia de teorías de cohomología reducidas y el siguiente teorema.

Teorema 1.2.18. *Si $\mathcal{H}^*$, δ^* es una teoría de cohomología no reducida en $\mathcal{T}^{2\prime}$, entonces los correspondientes funtores $\widetilde{\mathcal{H}}^*$ y transformaciones naturales $\widetilde{\sigma}^*$, definidas según* (1.3) *y* (1.4) *respectivamente, definen una teoría de cohomología reducida en $\mathcal{PT}'$.*

Como tales objetos existen, ya podemos hacer un par de deducciones.

Proposición 1.2.19. *Para cualquier punto x y* para todo $n \in \mathbb{Z}$ *tenemos* $\mathcal{K}^n(\{x\}) = 0$.

Demostración. Las inclusiones $i : (\{x\}, x) \longrightarrow (\{x\}, x)$ y $j : (\{x\}, x) \longrightarrow (\{x\} \cup C\{x\}, *)$ son ambas la identidad. Pero la sucesión

$$\mathcal{K}^n(\{x\}) \xrightarrow{i^*} \mathcal{K}^n(\{x\}) \xrightarrow{j^*} \mathcal{K}^n(\{x\})$$

será exacta si y sólo si $\mathcal{K}^n(\{x\}) = 0$. □

Proposición 1.2.20. *Para cada par (X, A, x_0) y $n \in \mathbb{Z}$ se tiene una sucesión exacta larga*

$$\longrightarrow \mathcal{K}^{n-1}(A) \xrightarrow{\widehat{\delta}^n} \mathcal{K}^n(X \cup CA) \xrightarrow{j^*} \mathcal{K}^n(X) \xrightarrow{i^*} \mathcal{K}^n(A) \longrightarrow$$

donde las $\widehat{\delta}^n$ son transformaciones naturales.

Demostración. Consideremos la proyección $p : X \cap CA \longrightarrow X \cap CA/X = SA$, un inverso homotópico de la función que define H-coinversos, en la estructura de H-cogrupo de SA, $\tau : SA \longrightarrow SA$. Entonces definimos $\widehat{\delta}^n$ como la siguiente composición

$$\mathcal{K}^n \xrightarrow{(\widetilde{\sigma}^{n+1})^{-1}} \mathcal{K}^{n+1}(SA) \xrightarrow{(\tau \circ p)^*} \mathcal{K}^{n+1}(X \cup CA)$$

por construcción $\widetilde{\delta}^n$ es natural y tenemos un diagrama conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{K}^{n-1}(X) \arrow[r, "i^*"] \arrow[d, "\sigma^{n-1}"] & \mathcal{K}^{n-1}(A) \arrow[d, "\sigma^{n-1}"] & & \\
 & \mathcal{K}^n(SX) \arrow[r, "Si^*"] \arrow[d, "q_1^*"] & \mathcal{K}^n(SA) \arrow[d, "(\tau\circ q_2)^*"] \arrow[dr, "(\tau\circ p)^*"] & & \\
 {} \arrow[r] & \mathcal{K}^n(((X\cup CA)\cup CX)\cup C(X\cup CA)) \arrow[r, "j'^*"] & \mathcal{K}^n((X\cup CA)\cup CX) \arrow[r, "i'^*"] & \mathcal{K}^n(X\cup CA) \arrow[r, "j^*"] & {}
\end{tikzcd}
$$

$$
\mathcal{K}^n(X) \xrightarrow{\ i^*\ } \mathcal{K}^n(A) \longrightarrow
$$

donde

$$
\begin{aligned}
q_1 : ((X\cup CA)\cup CX)\cup C(X\cup CA) &\longrightarrow (X\cup CA)\cup CX)/C(X\cup CA)\\
q_2 : (X\cup CA)\cup CX &\longrightarrow (X\cup CA)/CX
\end{aligned}
$$

son funciones cocientes y i'^*, j'^* son los homomorfismos de la sucesión del axioma de exactitud para el par $((X\cup CA)\cup CX, X\cup CA)$, de tal suerte que por el axioma de exactitud la línea superior es exacta, por lo tanto la sucesión también es exacta. □

Inversamente, dada una teoría generalizada de cohomología reducida $\mathcal{K}^*$ definida en $\mathcal{PT}'$, denotamos por $\widehat{\mathcal{K}}^*$ a la colección de funtores contravariantes $\widehat{\mathcal{K}}^n : \mathcal{T}^{2\prime} \longrightarrow \mathcal{A}$ definidos por

$$
\widehat{\mathcal{K}}^n(X,A) = \mathcal{K}^n(X^+\cup CA^+, *) \tag{1.5}
$$

tal que

$$
\widehat{\mathcal{K}}^n[f] = \mathcal{K}^n[\widehat{f}]
$$

donde $\widehat{f} : (X^+\cup CA^+, *) \longrightarrow (Y^+\cup CB^+, *)$ es inducida por $f : (X,A) \longrightarrow (Y,B)$ y las transformaciones naturales

$$
\widehat{\delta}^n : \widehat{\mathcal{K}}^n(A) \longrightarrow \widehat{\mathcal{K}}^{n+1}(X,A) \tag{1.6}
$$

son justamente como en la Proposición 1.2.20.

Esta es una bonita construcción, pero debemos mostrar que $\widehat{\mathcal{K}}^*$ satisface el axioma de escisión. Para tal efecto, suponemos que $\mathcal{K}^*$ satisface el axioma

EHD. Sea $(X; A, B)$ una tríada con $X = A^\circ \cup B^\circ$ y sea A', B', C', las correspondientes aproximaciones CW para A, B y $C = A \cap B$ respectivamente. Ahora, tomemos $X' = A' \cup B'$, así X' es una aproximación CW de X. Si consideramos la tríada CW $(X'; A', B')$, por la Proposición 1.2.11 es claro que aun sin el axioma EHD tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathcal{K}^n(A'/A' \cap B') \arrow[r, "j^*", "\cong"'] \arrow[d, "p_1^*"', "\cong"] & \mathcal{K}^n(X'/B') \arrow[d, "\cong"', "p_2"] \\ \mathcal{K}^n(A'^+ \cup C(A' \cap B')^+) \arrow[r, "\widehat{j}^*"'] & \mathcal{K}^n(X'^+ \cup CB'^+) \end{tikzcd}$$

donde p_1, p_2 son equivalencias homotópicas $j^* : X'/B' \longrightarrow A'/A' \cap B'$ es un homeomorfismo, de tal suerte que $\widehat{j}^*$ es un isomorfismo. Entonces por la definición de $\widehat{\mathcal{K}}^*$ y por la Proposición 1.2.4 $\widehat{\mathcal{K}}^*$ es una teoría no reducida en la categoría $\mathcal{W}^{2\prime}$.

Por otro lado tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathcal{K}^n(A'^+ \cup C(A' \cap B')^+) \arrow[r, "\widehat{j}^*", "\cong"'] \arrow[d, "\cong"'] & \mathcal{K}^n(X'^+ \cup CB'^+) \arrow[d, "\cong"] \\ \mathcal{K}^n(A^+ \cup C(A \cap B)^+) \arrow[r, "\widehat{j'}^*"'] & \mathcal{K}^n(X^+ \cup CB^+) \end{tikzcd}$$

donde las dos flechas verticales son inducidas por sus respectivas aproximaciones CW y $\widehat{j}^*$ es la misma que en el primer diagrama. Entonces $\widehat{j'}^*$ es un isomorfismo y por la definición de $\widehat{\mathcal{K}}^*$ y la Proposición 1.2.4 $\widehat{\mathcal{K}}^*$ satisface el axioma de escisión y por lo tanto es una teoría de cohomología no reducida en $\mathcal{T}^{2\prime}$. Así tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.2.21. *Si $\mathcal{K}^*$, σ^* es un teoría de cohomología reducida en $\mathcal{PT}'$, entonces los correspondientes funtores $\widehat{\mathcal{K}}^*$ y transformaciones naturales $\widetilde{\delta}^*$, definidos según* (1.5) *y* (1.6) *respectivamente, definen una teoría de cohomología no reducida en $\mathcal{T}^{2\prime}$*

Se podría pensar que estas construcciones son inversas mutuas, es decir, dada una teoría de cohomología reducida, $\mathcal{K}^*$, construimos $\widehat{\mathcal{K}}^*$ y a partir de ésta ultima construimos $\widetilde{\widehat{\mathcal{K}}}^*$ de tal suerte que obtengamos la teoría con la que comenzamos, sin embargo no es así. Lo mismo pasa con $\widehat{\widetilde{\mathcal{H}}}^*$ y $\mathcal{H}^*$. Lo mejor que se puede hacer al respecto es mostrar que $\widetilde{\widehat{\mathcal{K}}}^*$ es naturalmente equivalente a $\mathcal{K}^*$ y $\widehat{\widetilde{\mathcal{H}}}^*$ a $\mathcal{H}^*$, esta es la manera de establecer una correspondencia uno a uno (salvo equivalencia natural) entre las teorías de cohomología reducidas y las no reducidas.

Definición 1.2.22. Una transformación natural $T_* : \mathcal{H}_1^* \longrightarrow \mathcal{H}_2^*$ entre teorías de cohomología no reducidas $\mathcal{H}_1^*$ y $\mathcal{H}_2^*$ es una colección de transformaciones naturales $T_n : \mathcal{H}_1^n \longrightarrow \mathcal{H}_2^n$ tales que para cada par (X, A) el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_1^n(A,\emptyset) & \xrightarrow{\delta_1} & \mathcal{H}_1^{n+1}(X,A) \\ {\scriptstyle T_n(A,\emptyset)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T_{n+1}(X,A)} \\ \mathcal{H}_2^n(A,\emptyset) & \xrightarrow[\delta_2]{} & \mathcal{H}_2^{n+1}(X,A) \end{array}$$

También se tiene la correspondiente noción de transformaciones natural para teorías reducidas. T_* es llamado equivalencia si cada T_n es una equivalencia natural para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Para cualquier teoría de cohomología reducida $\mathcal{K}^*$ y espacio punteado (X, x_0) tenemos

$$\widetilde{\widehat{\mathcal{K}}}^n(X) = \widehat{\mathcal{K}}^n(X, \{x_0\}) = \mathcal{K}^n(X^+ \cup C\{x_0\}^+).$$

Se dice que un espacio punteado (X, x_0) tiene un *punto base no degenerado* si la inclusión de $\{x_0\}$ en X es una cofibración; en tal caso la proyección $p : (X^+ \cup C\{x_0\}^+, *) \longrightarrow (X, x_0)$, la cual colapsa $C\{x_0\}^+$, es una equivalencia homotópica. Si $\mathcal{PT}'_*$ denota la categoría homotópica de los espacios punteados con punto base no degenerado, entonces p define en $\mathcal{PT}'_*$ una equivalencia natural $T_n : \widetilde{\widehat{\mathcal{K}}}^n \longrightarrow \mathcal{K}^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Teorema 1.2.23 ([28, Lema 7.42]). *Las equivalencias T_n satisfacen $\sigma \circ T_n(SX) = T_{n-1}(X) \circ \widetilde{\widehat{\sigma}}$. Así la colección $T_* = \{T_n\}$ define una equivalencia natural de teorías de cohomología reducidas en $\mathcal{PT}'_*$ si $\mathcal{K}^*$ satisface el axioma EHD.*

Ahora para cualquier teoría no reducida $\mathcal{H}^*$ y un par $(X, A) \in \mathcal{T}^{2\prime}$ tenemos

$$\widehat{\widetilde{\mathcal{H}}}^n(X, A) = \widetilde{\mathcal{H}}^n(X^+ \cup CA^+) = \mathcal{H}^n(X^+ \cup CA^+, \{*\}).$$

y la composición

$$\mathcal{H}^n(X^+ \cup CA^+, \{*\}) \xrightarrow[\cong]{J^*} \mathcal{H}^n(X^+ \cup CA^+, CA^+) \xleftarrow[\cong]{i^*} \mathcal{H}^n(X, A)$$

define una equivalencia natural $T'_n : \widetilde{\widetilde{\mathcal{H}}}^n \longrightarrow \mathcal{H}^n$ para cada $n \in \mathbb{Z}$, donde J^* resulta de la sucesión exacta del triple $(X^+ \cup CA^+, CA^+, \{*\})$ y la Proposición 1.2.6, mientras que i^* resulta del axioma de escisión para teorías no reducidas.

Teorema 1.2.24 ([28, Lema 7.44]). *Las equivalencias T'_n satisfacen $\delta \circ T'_n(A, \emptyset) = T'_{n+1}(X, A) \circ \widetilde{\widetilde{\delta}}^n$ para todo (X, A). Así la colección $T'_* = \{T'_n\}$ define una equivalencia natural de teorías de cohomología no reducidas en $\mathcal{T}^{2\prime}$ si $\mathcal{H}^*$ satisface el axioma EHD.*

Si nos restringimos a la categoría $\mathcal{PT}'_*$ la correspondencia 1 a 1 entre teorías de cohomología reducidas y no reducidas se cumple salvo equivalencia natural. Ahora para un espacio $X \in \mathcal{PT}'$ pero no en $\mathcal{PT}'_*$ tenemos que

$$\widetilde{\widetilde{\mathcal{K}}}^n(X) = \mathcal{K}^n(X^+ \cup C\{x_0\}^+)$$

pero X tiene el mismo tipo de homotopía que $X^+ \cup C\{x_0\}^+$, en otras palabras podemos decir que X tiene un "amigo" que vive en $\mathcal{PT}'_*$, de aquí que $\widetilde{\widetilde{\mathcal{K}}}^n(X) = \mathcal{K}^n(X)$ y así se establece la correspondencia 1 a 1 (salva equivalencia natural) en toda la categoría $\mathcal{PT}'$. Moraleja: *Siempre es bueno tener un amigo que haga paros.*

Como una observación final, se tiene que todo lo anterior es aplicable a teorías de homología generalizadas, salvo ciertos ajustes como lo es invertir la dirección de todas las flechas entre los funtores de homología.

1.3. Cobordismo

Aunque ya vimos algunos ejemplos de teorías generalizadas de cohomología, a continuación veremos un ejemplo del tipo de teoría generalizada de cohomología que es de importancia fundamental para este trabajo, y es llamada *cobordismo.* Quiero señalar aquí que la definición que estudiaremos en esta sección es una de las primeras de finiciones de cobordismo, la cual fue dada por Atiyah [3] y sólo es valida en la categoría de los espacios CW

finitos, y esta la denotare por $\mathcal{CW}_F$. Además, una de las principales herramientas para llevar a cabo tal definición, como lo son las funciones S, hoy en dia forman parte de los viejos tiempos. En el siguiente capítulo se dará una definición de cobordismo más amplia utilizando el lenguaje de espectros.

Sean (X, x_0) y (Y, y_0) espacios punteados y $[X, Y]$ el conjunto de clases de homotopía de funciones continuas que preservan el punto base.

El funtor suspensión, S, en $[X, Y]$ induce la siguiente sucesión

$$[X,Y] \longrightarrow [SX, SY] \longrightarrow \cdots \longrightarrow [S^nX, S^nY] \longrightarrow \cdots \tag{1.7}$$

en la cual para $n > 2$, $[S^nX, S^nY]$ son grupos abelianos. Además se tiene que si X es un espacio CW finito y $n + 2C_Y \geqslant \dim X$, donde C_Y es la conexidad de Y, entonces el homomorfismo

$$[S^nX, S^nY] \longrightarrow [S^{n+1}X, S^{n+1}Y] \tag{1.8}$$

es un isomorfismo.

El colimite de la sucesión(1.7) es denotado por $\{X, Y\}$ y cuyos elementos son llamados *funciones* S (S-maps) y consisten de clases de equivalencia de funciones $f : S^kX \longrightarrow S^kY$ para $k \geqslant 0$ donde $f : S^kX \longrightarrow S^kY$ y $g : S^jX \longrightarrow S^jY$ son equivalentes si y sólo si existe un entero $p \geqslant 0$ tal que las funciones

$$S^{j+p}f, S^{k+p}g : S^{j+k+p}X \longrightarrow S^{j+k+p}Y$$

son homotópicas.

Ahora definamos espacios $MSO(n)$. Sea $\gamma = \{E_\gamma \longrightarrow BSO(n)\}$ el haz universal sobre el espacio clasificante $BSO(n)$ de $SO(n)$. Como γ es un haz vectorial de dimensión n podemos dotarlo de una métrica euclidiana. Sea $D \subset E_\gamma$ el conjunto de todos los vectores v en cada fibra de E_γ tal que $|v| \geqslant 1$ con la norma inducida por la métrica. El espacio cociente E_γ/D lo denotaremos por $MSO(n)$ y es llamado el espacio de Thom. Más adelante definiremos de manera general el espacio de Thom de un haz vectorial e indicaremos la existencia de transformaciones

$$S(MSO(n)) \longrightarrow MSO(n+1) \tag{1.9}$$

las cuales inducen isomorfismo entre sus respectivos grupos de homotopía π_{n+r} con $n > 2r$, de tal suerte que si X es un espacio CW punteado y finito, el homomorfismo

$$[\Sigma X, S(MSO(n))] \longrightarrow [\Sigma X, MSO(n+1)] \tag{1.10}$$

inducido por (1.9) será una biyección para n suficientemente grande.

Ahora, si X es un espacio CW de dimensión finita entonces de (1.7) y (1.9) se tiene un homomorfismo

$$[S^{n-k}X, MSO(n)] \longrightarrow [S^{n-k+1}X, MSO(n+1)] \tag{1.11}$$

y particularmente para el espacio cociente X/Y donde Y es un subespacio CW de X.

Definición 1.3.1. El k-esimo grupo de *cobordismo orientado* del par (X, Y) en la categoría de los pares de espacios CW finitos es

$$MSO^k(X, Y) = \mathrm{colim}_n \ [S^{n-k}(X/Y), MSO(n)]$$

donde el colimite es tomado con respecto al sistema de homomorfismos dados por (1.11) comenzando con n suficientemente grande.

Considerando que $MSO(n)$ es $(n-1)$-conexo y usando (1.8) y (1.10) con n suficientemente grande, se tiene que justamente el homomorfismo (1.11) es un isomorfismo. De aquí que

$$\begin{aligned} MSO^k(X, Y) &\cong \{S^{n-k}(X/Y), MSO(n)\} \\ &\cong [S^{n-k}(X/Y), MSO(n)]. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Por otro lado, podemos interpretar $X/\emptyset$ como X^+ de manera que definimos

$$MSO^k(X) := MSO^k(X, \emptyset)$$

Ahora bien, en vista de los resultados de [25] se tiene que para la pareja (X, Y) en la categoría de los espacios CW finitos, la siguiente sucesión es exacta

$$\cdots \longrightarrow MSO^k(X, Y) \longrightarrow MSO^k(X) \longrightarrow MSO^k(Y) \longrightarrow MSO^{k+1}(X, Y) \longrightarrow \cdots \tag{1.13}$$

además notemos que si $(X; A, B)$ es una tríada con A, B subespacios CW de X con $A^\circ \cup B^\circ = X$ entonces

$$A/(A \cap B) \cong X/B$$

de tal modo que se tiene el isomorfismo

$$[S^{n-k}(A/(A \cap B)), MSO(n)] \cong [S^{n-k}(X/B), MSO(n)]$$

el cual es inducido por la inclusión $(A, A \cap B) \longrightarrow (X, B)$ y así por la Proposición 1.2.4 MSO^* satisface el axioma de escisión que junto con la exactitud de la sucesión (1.13) se tiene que MSO^* es una teoría de cohomología generalizada la cual es llamada *cobordismo orientado.*

Finalmente remplazando $SO(n)$ por cualquier otro grupo tal como $O(n)$, $Spin(n)$, $Sp(n)$, $U(n)$, $SU(n)$, y haciendo las debidas consideraciones, obtenemos definiciones análogas.

Observación. Al considerar MSO^k para un punto $*$ tenemos para n suficientemente grande

$$\begin{aligned} MSO^k(\{*\}) &\cong [S^{n-k}\{*\}/\emptyset, MSO(n)] \\ &\cong \pi_{n-k}(MSO(n)) \end{aligned}$$

y que por el Teorema de Thom ($\pi_*(MSO) \cong \Omega_*$), $MSO^k(\{*\}) \cong \Omega_{-k}$, así $MSO^k(\{*\})$ es el $-k$-ésimo grupo de cobordismo en el sentido de Thom.

Capítulo 2

Representación de Brown

Recordemos que el n-ésimo grupo de cohomología singular de un espacio CW, X, con coeficientes en un grupo G es el grupo de las clases de homotopía de las funciones de X en $K(G,n)$ donde este último es un espacio de Eilenberg-Mac Lane del tipo (G,n), así $H^n(X;G) = [X, K(G,n)]$.

El objetivo en este capítulo será demostrar que toda teoría de cohomología generalizada reducida (y no reducida, por la relación entre ellas) es un funtor de Brown y que estos son funtores representables, obteniendo con esto la relación de los espectros con las teorías de cohomología generalizadas.

2.1. Funtores de Brown

Dado un funtor contravariante $\mathcal{F} : \mathcal{PT}' \longrightarrow \mathcal{S}et$, se usará la siguiente notación: Para $(X, x_0), (Y, y_0) \in \mathcal{PT}'$ sólo escribiremos X, Y además si $X \subset Y$ y $v \in \mathcal{F}(Y)$ denotaremos por $v|X$ a $\mathcal{F}(i)(v) \in \mathcal{F}(X)$ donde $i : X \longrightarrow Y$ es la inclusión.

Por otro lado, dado $X \in \mathcal{PT}'$ denotaremos al funtor $\mathcal{M}_X$ en esta misma categoría, el cual asigna a cada elemento de $\mathcal{PT}'$ el

conjunto de clases de homotopía de las funciones punteadas de Y en X, por π^X de tal suerte que para el caso particular de las esferas se tenga $\pi^X(S^n) = \pi_n(X)$.

Definición 2.1.1. Un funtor contravariante $\mathcal{F}$ de $\mathcal{PT}'$ en $\mathcal{S}et$ diremos que es un funtor de Brown si éste satisface los siguientes dos axiomas:

Cuña: Si $\{X_\alpha\}$ es una familia de espacios punteados y $i_\alpha : X_\alpha \longrightarrow \bigvee_\alpha X_\alpha$ es la inclusión entonces

$$\{\mathcal{F}(i_\alpha)\} : \mathcal{F}(\bigvee_\alpha X_\alpha) \longrightarrow \Pi_\alpha \mathcal{F}(X_\alpha)$$

es una equivalencia de conjuntos.

Mayer-Vietoris: Dada una tríada $(X; A, B)$ entonces para cualesquiera $u \in \mathcal{F}(A)$ y $v \in \mathcal{F}(B)$ tal que $u|A \cap B = v|A \cap B$ existe $w \in \mathcal{F}(X)$ tal que $w|A = u$ y $w|B = v$.

Proposición 2.1.2 ([28, Prop. 9.1]). *Para cualquier $X \in \mathcal{PT}'$, π^X es un funtor de Brown.*

Proposición 2.1.3. *Si $\mathcal{F}$ es un funtor de Brown y $*$ es el espacio que consta de un solo punto, entonces $\mathcal{F}(*)$ consta de un solo elemento.*

Demostración. Ya que $* \vee * = *$, la única inclusión de $*$ en $* \vee *$ es la cual es trivial, por otro lado el axioma Cuña nos dice que $(\mathcal{F}(i), \mathcal{F}(i))$ es una equivalencia de los conjuntos $\mathcal{F}(*)$ y $\mathcal{F}(*) \times \mathcal{F}(*)$ lo cual es cierto si y sólo si $\mathcal{F}(*)$ tiene un solo elemento. □

Definición 2.1.4. Sean $[f], [g] \in \pi^Y(X)$. Un *coecualizador* para $[f]$ y $[g]$ es un elemento $[j]$ en $\pi^W(Y)$, para cierto espacio adecuado, W, el cual llamaremos *espacio de coecualización*, tal que

i) $[j] \circ [f] = [j] \circ [g]$.

ii) Si $[j'] \in \pi^{W'}(Y)$ satisface la relación análoga en *i)* entonces existe un elemento $[h] \in \pi^{W'}(W)$ tal que $[j'] = [h] \circ [j]$ de manera que salvo homotopía conmuta el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "j'"'] & W \arrow[d, dashed, "h"] \\ & & W'. \end{tikzcd}$$

El ejemplo de un espacio "adecuado" para establecer la existencia de los coecualizadores es el siguiente: sean $f, g : X \longrightarrow Y$ funciones punteadas, tomemos $W = X \times I \bigcup_f^g Y = X \times I \sqcup Y / \sim$ donde "$\sim$" es como sigue: $(x, 0) \sim f(x)$, $(x, 1) \sim g(x)$, $(x_0, t) \sim y_0$ para $x \in X$, $t \in I$ y x_0, y_0 los puntos básicos correspondientes a X y Y. Así $j : Y \longrightarrow W$ será la inclusión natural. De esta manera al considerar la inclusión $i_{1/2} : X \longrightarrow W$ tal que $x \mapsto (x, 1/2)$ se tiene $j \circ f \sim i_{1/2} \sim j \circ g$.

Observación. Dado un coecualizador j con espacio de coecualización W para dos funciones f y g y sea X un espacio punteado cualquiera, entonces $W \vee X$ también es un espacio de coecualización para f y g.

Proposición 2.1.5 ([9, Prop. 12.2.12]). *Supongamos que $\mathcal{F}$ satisface el axioma de Mayer-Vietoris. Entonces $\mathcal{F}$ tiene la siguiente propiedad: Si $f, g : X \longrightarrow Y$ son funciones punteadas y para $\alpha \in \mathcal{F}(Y)$ se satisface $\mathcal{F}([f])(\alpha) = \mathcal{F}([g])(\alpha)$, entonces existe $\beta \in \mathcal{F}(W)$ tal que $\mathcal{F}([j])(\beta) = \alpha$ donde $[j] \in \pi^W(Y)$ es un coecualizador para $[f]$ y $[g]$.*

Queremos mostrar que los funtores de Brown son representables, es decir que si $\mathcal{F}$ es un funtor de Brown entonces existe un espacio Y y, por la demostración del lema de Yoneda, un elemento $u \in \mathcal{F}(Y)$ tal que $\Phi_u : \pi^Y \longrightarrow \mathcal{F}$ es una equivalencia natural. El espacio Y será el *espacio clasificante* de $\mathcal{F}$.

Definición 2.1.6. Dado un funtor de Brown $\mathcal{F}$ y un espacio Y, diremos que un elemento $u \in \mathcal{F}(Y)$ es un elemento *n-universal* si la función

$$\varphi_u : \pi^Y(S^q) \longrightarrow \mathcal{F}(S^q)$$
$$[f] \mapsto \mathcal{F}([f])(u)$$

es un isomorfismo para $1 \leqslant q < n$ y un epimorfismo para $q = n$. Un elemento $u \in \mathcal{F}(Y)$ es un elemento *∞-universal* si es n-universal para todo $n \geqslant 1$.

De acuerdo con la demostración del Lema de Yoneda, dado $u \in \mathcal{F}(Y)$, podemos construir una transformación natural $\Phi : \pi^Y \longrightarrow \mathcal{F}$ que con la notación usada en tal demostración denotamos por Φ_u, así la función φ_u es justamente el morfismo $\phi_{S^q} : \pi^Y(S^q) \longrightarrow \mathcal{F}(S^q)$ que forma parte de la transformación natural Φ_u.

Por otro lado el tener un elemento ∞-universal, u en $\mathcal{F}(Y)$ no nos garantiza que Φ_u sea una equivalencia natural, por lo tanto tenemos que construir un espacio adecuado en el cual tengamos un elemento ∞-universal y que Φ_u sea justamente una equivalencia natural, en otras palabras $\mathcal{F}$ sea representable.

Proposición 2.1.7. *$\mathcal{F}(S^0)$ sólo tiene un punto.*

Demostración. Consideremos el espacio singular * y para cada elemento $\alpha \in \mathcal{F}(S^1)$ tomemos una copia S^1_α de S^1 y construyamos $Y_1 = * \vee \bigvee_\alpha S^1_\alpha$. Entonces por el axioma cuña, existe una equivalencia de los conjuntos

$$\mathcal{F}(Y_1) \cong \mathcal{F}(*) \times \Pi_\alpha \mathcal{F}(S^1_\alpha). \tag{2.1}$$

Sea $u_1 \in \mathcal{F}(Y_1)$ el correspondiente elemento en $\mathcal{F}(Y_1)$ bajo la equivalencia (2.1) del elemento $(u, \{\alpha\}) \in \mathcal{F}(X) \times \Pi_\alpha \mathcal{F}(S^1_\alpha)$. donde u es el unico elemento en $\mathcal{F}(*)$. Entonces u_1 es 1-universal. En efecto, como $* \vee \bigvee_\alpha S^1_\alpha$ $\varphi_{u_1} : \pi_1(Y_1) \longrightarrow \mathcal{F}(S^1)$ es sobreyectiva pues para cada $\alpha \in \mathcal{F}(S^1)$ se tiene que $\varphi_{u_1}([i_\alpha]) = \mathcal{F}([i_\alpha])(u_1) = \alpha$, donde i_α es la inclusión de S^1 en $\bigvee_\alpha S^1_\alpha$ justamente en la copia S^1_α. Se sigue que $X \subset Y_1$ y que $u_1|X = u$. □

Observación. Sea X un espacio. Si $\mathcal{F}(X)$ tiene un elemento

Lema 2.1.8. *Dado un funtor de Brown $\mathcal{F}$, un espacio punteado X y un elemento $u \in \mathcal{F}(X)$, existe un espacio Y_1 y un elemento 1-universal $u_1 \in \mathcal{F}(Y_1)$ tal que $X \subset Y_1$ y $u_1|X = u$.*

Lema 2.1.9. *Dado un funtor de Brown $\mathcal{F}$, un espacio X y un elemento $u \in \mathcal{F}(X)$, existe un espacio Y_n obtenido de X mediante la adjunción de celdas de dimensión menor o igual que n y un elemento n-universal, $u_n \in \mathcal{F}(Y_n)$ tal que $u_n|X = u$.*

Demostración. La demostración es por inducción. Supongamos que se tiene construido un espacio Y_{n-1} que verifica el lema para el caso $n-1$. Por lo tanto $X \subset Y_{n-1}$ y se tiene un elemento $(n-1)$-universal $u_{n-1} \in \mathcal{F}(Y_{n-1})$ con $u_{n-1}|X = u$.

Construyamos Y_n como sigue. Para cada elemento $\beta \in \mathcal{F}(S^n)$ tomemos una copia S^n_β de S^n y sea $Y'_n = Y_{n-1} \vee \bigvee_\beta S^n_\beta$. Por el axioma cuña se tiene la siguiente equivalencia de conjuntos

$$\mathcal{F}(Y'_n) \cong \mathcal{F}(Y_{n-1}) \times \Pi_\beta \mathcal{F}(S^n_\beta).$$

Similarmente que en el lema anterior sea $u'_n \in \mathcal{F}(Y'_n)$ el correspondiente elemento bajo la equivalencia (2.1) del elemento $(u_{n-1}, \{\beta\})$. Así $\varphi_{u'_n} : \pi_n(Y'_n) \longrightarrow \mathcal{F}(S^n)$ es sobreyectiva.

Ahora cada elemento $\alpha \in \pi_{n-1}(Y'_n)$ tal que $\varphi_{u'_n}(\alpha) = 0 \in \mathcal{F}(S^{n-1})$ es representado por una función $f_\alpha : S^{n-1} \longrightarrow Y'_n$. Así con cada α podemos adjuntar una celda de dimensión n a Y'_n mediante f_α de tal suerte que definimos Y_n como el cono C_f de la función $f : \bigvee_\alpha S^{n-1}_\alpha \longrightarrow Y'_n$ tal que $f|_{S^{n-1}_\alpha} = f_\alpha$

Ya que Y_n es obtenido de Y'_n y por lo tanto de Y_{n-1} por adjunción de celdas de dimensión n, y como $\pi_q(Y_n)$ depende sólo del $(n-1)$-esqueleto de Y_n para $q \leqslant n-2$, se sigue que la transformación $\pi_q(Y_{n-1}) \longrightarrow \pi_q(Y_n)$ inducida por la inclusión es un isomorfismo para $q \leqslant n-2$ y un epimorfismo para $q = n-1$.

Para construir el elemento n-universal $u_n \in \mathcal{F}(Y_n)$ tal que $u_n|Y_{n-1} = u_{n-1}$ consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \bigvee_\alpha S^{n-1}_\alpha \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "t"'] & Y'_n \arrow[r, "j"] & Y_n \end{tikzcd}$$

donde t es la función constante al punto base, f es como se definió arriba y la j es la inclusión de Y'_n en Y_n. Fácilmente se nota que $[j]$ es un coecualizador para $[f]$ y $[t]$. Por otro lado consideremos los diagramas

$$\begin{tikzcd} & S^{n-1}_\gamma \arrow[dl, "i_\gamma"'] \arrow[dr, "f_\gamma"] & \\ \bigvee_\alpha S^{n-1}_\alpha \arrow[rr, "f"'] & & Y'_n \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{F}(S^{n-1}_\gamma) & \\ \mathcal{F}(\bigvee_\alpha S^{n-1}_\alpha) \arrow[ur, "\mathcal{F}({[i_\gamma]})"] & & \mathcal{F}(Y'_n) \arrow[ul, "\mathcal{F}({[f_\gamma]})"'] \arrow[ll, "\mathcal{F}({[f]})"'] \end{tikzcd}$$

de tal suerte que $\mathcal{F}([i_\gamma]) \circ \mathcal{F}([f])(u'_n) = \mathcal{F}([f_\gamma])(u'_n) = 0$ para todo γ y como $\mathcal{F}([f_\gamma])$ es proyección se tiene que $\mathcal{F}([f])(u'_n) = 0 = \mathcal{F}([t])(u'_n)$ donde este último se deduce al considerar el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \bigvee_\alpha S^{n-1}_\alpha \arrow[rr, "t"] \arrow[dr] & & Y'_n \\ & * \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

De esta manera por la Proposición 2.1.5 existe $u_n \in \mathcal{F}(Y_n)$ con $u_n|Y'_n = u'_n$ pero $u'_n|Y_{n-1} = u_{n-1}$ así $u_n|Y_{n-1} = u_{n-1}$.

Sólo falta demostrar que u_n es n-universal, para ello veamos que dada la inclusión $j' : Y_{n-1} \longrightarrow Y_n$ y para cualquier $f \in \pi_q(Y_{n-1})$

$$\begin{aligned} \varphi_{u_n}(j' \circ f) &= \mathcal{F}(j' \circ f)(u_n) \\ &= \mathcal{F}(f)(u_n|Y_{n-1}) \\ &= \mathcal{F}(f)(u_{n-1}) \\ &= \varphi_{u_{n-1}}(f) \end{aligned}$$

de aquí tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \pi_q(Y_{n-1}) \arrow[rr, "j'_*"] \arrow[dr, "\varphi_{u_{n-1}}"'] & & \pi_q(Y_n) \arrow[dl, "\varphi_{u_n}"] \\ & \mathcal{F}(S^q) & \end{tikzcd}$$

además j'_* es un isomorfismo para $q \leqslant n-2$ y un epimorfismo para para $q = n-1$, como ya habíamos visto antes. Ya que, $\varphi_{u_{n-1}}$ es un isomorfismo y epimorfismo en los mismos casos que para j'_*, de aquí que también φ_{u_n} sea un isomorfismo para $q \leqslant n-2$ y un epimorfismo para $q = n-1$. Por lo cual debemos mostrar que φ_{u_n} es también un monomorfismo en $q = n-1$, para ello tomemos $\rho \in \ker \varphi_{u_n}$ luego como j'_* es epimorfismo en $q = n-1$, existe $\rho' \in \pi_{n-1}(Y_{n-1})$ con $j'_*(\rho') = \rho$, y por conmutatividad del diagrama se tiene que $\varphi_{u_{n-1}}(\rho') = 0$ pero recordemos que habíamos adjuntado celdas a Y'_n con cada elemento del $\ker \varphi_{u_{n-1}}$, de aquí que $\rho = 0$. De esta manera φ_{u_n} es un isomorfismo para $q = n-1$.

Finalmente para $q = n$ se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \pi_n(Y'_n) \arrow[rr, "j"] \arrow[dr, "\varphi_{u'_n}"'] & & \pi_n(Y_n) \arrow[dl, "\varphi_{u_n}"] \\ & \mathcal{F}(S^n) & \end{tikzcd}$$

donde $\varphi_{u'_n}$ es epimorfismo, por lo tanto así también φ_{u_n}. En conjunto se tiene que u_n es n-universal. □

Teorema 2.1.10. *Sea $\mathcal{F}$ un funtor de Brown, Y_0 un espacio punteado y $u_0 \in \mathcal{F}(Y_0)$. Entonces existe un espacio punteado Y que se obtiene de Y_0 mediante la adjunción de celdas y además existe un elemento ∞-universal $u \in \mathcal{F}(Y)$ con $u|Y_0 = u_0$.*

Demostración. Con el lema anterior, dado un espacio Y_0, construimos una sucesión de espacios $Y_0 \subset Y_1 \subset Y_2 \subset \cdots \subset Y_n \subset \cdots$ donde Y_{i+1} es obtenido de Y_i mediante la adjunción de celdas de dimensión menor o igual que $i+1$. Además se tiene una sucesión de elementos i-universales, $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ tal que $u_i \in \mathcal{F}(Y_i)$.

Sea $Y = \operatorname{colim}_n Y_n$. Así se tiene $\operatorname{colim}_n \pi_q(Y_n) \cong \pi_q(Y)$. Por otro lado consideremos las funciones

$$f_0, f_1 : \bigvee_n Y_n \longrightarrow \bigvee_n Y_n$$

donde $f_0|_{Y_n} = i_n : Y_n \longrightarrow Y_{n+1}$ y $f_1 = \mathrm{I}_{\bigvee_n Y_n}$. Ahora si se considera $j : \bigvee_n Y_n \longrightarrow Y$ tal que $j|_{Y_n}$ es la inclusión de Y_n en Y, se tiene que $[j]$ es trivialmente un coecualizador para $[f_0]$ y $[f_1]$.

El siguiente diagrama así como su versión "funtorial" son conmutativos

$$\begin{tikzcd}
\bigvee_n Y_n & Y_{m+1} \arrow[l, "j_{m+1}"'] \\
\bigvee_n Y_n \arrow[u, "f_0"] & Y_m \arrow[l, "j_m"] \arrow[u, "i_m"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(\bigvee_n Y_n) \arrow[d, "\mathcal{F}([f_0])"'] & \mathcal{F}(Y_{m+1}) \arrow[l, "\mathcal{F}([j_{m+1}])"'] \arrow[d, "\mathcal{F}([i_m])"] \\
\mathcal{F}(\bigvee_n Y_n) & \mathcal{F}(Y_m) \arrow[l, "\mathcal{F}([j_m])"]
\end{tikzcd}$$

donde j_m incluye Y_m en su copia correspondiente en $\bigvee_n Y_n$ de tal suerte que al combinarlo con el hecho $\Pi_n \mathcal{F}(Y_n) \cong \mathcal{F}(\bigvee_n Y_n)$ obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\Pi_n \mathcal{F}(Y_n) \arrow[d, "\cong"'] \arrow[dr, "p_{m+1}"] & \\
\mathcal{F}(\bigvee_n Y_n) \arrow[r, "\mathcal{F}(j_{m+1})"'] \arrow[d, "\mathcal{F}(f_0)"'] & \mathcal{F}(Y_{m+1}) \arrow[d, "\mathcal{F}(i_m)"] \\
\mathcal{F}(\bigvee_n Y_n) \arrow[r, "\mathcal{F}(j_m)"'] & \mathcal{F}(Y_m) \\
\Pi_n \mathcal{F}(Y_n) \arrow[u, "\cong"'] \arrow[ur, "p_m"'] &
\end{tikzcd}$$

donde f significa $[f]$ y p_m es la proyección a la m-ésima componente del producto, de tal suerte que con este diagrama podemos ver que $\mathcal{F}(f_0)(u, u_1, u_2, ...) = (u, u_1, u_2, ...)$ además obviamente $\mathcal{F}(f_1)(u, u_1, u_2, ...) = (u, u_1, u_2, ...)$.

Por otro lado por la Proposición 2.1.5 existe $u \in Y$ tal que $u|Y_m = u_m$. Entonces

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{colim}_n \ \pi_q(Y_n) \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr, "\widetilde{\varphi}"'] & & \pi_q(Y) \arrow[dl, "\varphi_u"] \\
& \mathcal{F}(S^q) &
\end{tikzcd}$$

donde $\widetilde{\varphi}$ es dado por la propiedad universal del colímite del sistema $\{\varphi_{u_n} : \pi_q(Y_n) \longrightarrow \mathcal{F}(S^q)\}$ y ya que el diagrama conmuta, φ_u es un isomorfismo para todo $q \geqslant 0$. Esto significa que u es un elemento ∞-universal. □

Teorema 2.1.11. *Sea $\mathcal{F}$ un funtor de Brown. Si W y W' son espacios CW con elementos ∞-universal $u \in \mathcal{F}(W)$ y $u' \in \mathcal{F}(W')$, entonces existe una equivalencia homotópica $f : W \longrightarrow W'$ tal que $\mathcal{F}([f])(u') = u$.*

Demostración. Tomemos $W_0 = W \vee W'$. Sea $u_0 \in \mathcal{F}(W_0)$ el correspondiente elemento a $(u, u') \in \mathcal{F}(W) \times \mathcal{F}(W')$ bajo la equivalencia del axioma cuña. Entonces por el Teorema 2.1.10 existe W_1 tal que $W_0 \subset W_1$ y un elemento ∞-universal $u_1 \in \mathcal{F}(W_1)$ tal que $u_1|W_0 = u_0$. Ya que la composición j de las inclusiones $i : W \longrightarrow W_0$ e $i_1 : W_0 \longrightarrow W_1$ induce para todo $q \geqslant 0$ el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\pi_q(W) \arrow[rr, "j^*"] \arrow[dr, "\varphi_u"', "\cong"] & & \pi_q(W_1) \arrow[dl, "\varphi_u", "\cong"'] \\
& \mathcal{F}(S^q) &
\end{tikzcd}$$

de tal suerte que j^* es un isomorfismo para todo $q \geqslant 0$ por lo tanto es una equivalencia homotópica débil, pero puesto que W y W_1 son espacios CW, j es una equivalencia homotópica. Lo mismo se tiene al considerar la composición j' de las inclusiones $i' : W' \longrightarrow W_0$ e i_1. Por lo tanto si j'' es un inverso homotópico de j', entonces la composición

$$f : W \xrightarrow{j} W_1 \xrightarrow{j''} W'$$

es una equivalencia homotópica. Finalmente como el siguiente diagrama es conmutativo salvo homotopía

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[dd, "f"'] \arrow[dr, "i"] & & \\
& W_0 \arrow[r, "i_1"] & W_1 \\
W' \arrow[ur, "i'"'] & &
\end{tikzcd}$$

su versión funtorial nos mostraría que $\mathcal{F}(f)(u') = u$. □

Teorema 2.1.12. *Sea $\mathcal{F}$ un funtor de Brown, W un espacio CW, $u \in \mathcal{F}(W)$ un elemento ∞-universal y (X, A) una pareja de espacios CW. Dado una función punteada $g : A \longrightarrow W$ y un elemento $v \in \mathcal{F}(X)$ tal que $v|A = \mathcal{F}([g])(u)$, entonces existe una extensión $f : X \longrightarrow W$ de g tal que $v = \mathcal{F}([f])(u)$.*

Demostración. Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dr, "i_0"] & & \\
A \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "g"'] & & X \vee W \arrow[r, "j"] & Z \\
& W \arrow[ur, "i_1"'] & &
\end{tikzcd}$$

donde i, i_0, i_1 son inclusiones, j es tal que $[j]$ es un coecualizador para $[i_0 \circ i]$ y $[i_1 \circ g]$ en el espacio Z. Por construcción Z es un espacio CW.

Sea $v' \in \mathcal{F}(X \vee W)$ el elemento correspondiente a (v, u) bajo el axioma cuña, de aquí que por el axioma Mayer-Vietoris (via la Proposición 2.1.5) existe $z \in \mathcal{F}(Z)$ tal que $\mathcal{F}([j])(z) = v'$

Por el Teorema 2.1.10 existe un espacio W' obtenido mediante la adjunción de celdas a Z, de tal manera que W' también es un espacio CW junto con un elemento ∞-universal $u' \in \mathcal{F}(W')$ tal que $u'|Z = z$ donde esta última relación es inducida por la inclusión $j' : Z \longrightarrow W'$.

Ya que W y W' tienen elementos ∞-universales y son espacios CW, el Teorema 2.1.11 implica la existencia de una equivalencia homotópica $h : W' \longrightarrow W$ con $\mathcal{F}([h])(u) = u'$, la cual se puede mostrar fácilmente que es un inverso homotópico de la composición $j' \circ j \circ i_1$ de tal suerte que al definir

$$f' : X \xrightarrow{i_0} X \vee W \xrightarrow{j} Z \xrightarrow{j'} W' \xrightarrow{h} W$$

tenemos $g \cong f' \circ i$. Finalmente ya que $i : A \longrightarrow X$ es una cofibración, podemos extender la homotopía entre $f' \circ i$ y g comenzando con f' y terminando con $f : X \longrightarrow W$ tal que $f \circ i = g$. $\square$

Teorema de Representabilidad de Brown. *Todo funtor de Brown en la categoría de los espacios CW conexos por trayectorias es representable.*

Demostración. Sea $\mathcal{F}$ un funtor de Brown en la categoría de los espacios CW. Consideremos el espacio que consta de un solo punto $*$ y el elemento

$u_0 \in \mathcal{F}(*)$. Por el Teorema 2.1.10 existe un espacio CW, Y, y un elemento ∞-universal $u \in \mathcal{F}(Y)$ tal que $u|\{*\} = u_0$.

Sea X un espacio CW cualquiera y consideremos la función

$$\begin{aligned} \varphi_u : \pi^Y(X) &\longrightarrow \mathcal{F}(X) \\ [f] &\mapsto \mathcal{F}([f])(u). \end{aligned}$$

Por demostrar que φ_u es un isomorfismo. Sea $v \in \mathcal{F}(X)$ y $x_0 \in X$ su punto base. Aplicando el Teorema 2.1.11 al subespacio $\{x_0\}$ de X con g la inclusión de $\{x_0\}$ en Y tal que $g(x_0) = y_0$ el punto base de Y, existe una función $f : X \longrightarrow Y$ que extiende a g y tal que $\mathcal{F}([f])(u) = v$. Por lo tanto $\varphi_u([f]) = \mathcal{F}([f])(u) = v$ y así φ_u sobreyectiva.

Ahora, supongamos que $\varphi_u([g_0]) = \varphi_u([g_1])$ donde $[g_0], [g_1] \in \pi^Y(X)$, así $\mathcal{F}([g_0])(u) = \mathcal{F}([g_1])(u)$. Consideremos el espacio CW, $X' = X \times I/\{x_0\} \times I$ y tomemos $A = X \times \{0,1\}/\{x_0\} \times \{0,1\} \simeq X \vee X$. Definimos

$$g : A \longrightarrow Y$$

$$g(a) = \begin{cases} g_0(a) & \text{si} \quad \rho^{-1}(a) \in X \times \{0\} \\ g_1(a) & \text{si} \quad \rho^{-1}(a) \in X \times \{1\} \end{cases}$$

donde $\rho : X \times \{0,1\} \longrightarrow A$ es la función cociente. Por otro lado consideremos la proyección $p : X' \longrightarrow X$ y tomemos $v' = \mathcal{F}([p])\mathcal{F}([g_0])(u) \in \mathcal{F}(X')$. Entonces, si $j : A \longrightarrow X'$ es la inclusión, por el axioma cuña $\mathcal{F}([j])(v')$ corresponde al elemento $(\mathcal{F}([g_0])(u), \mathcal{F}([g_1])(u)) \in \mathcal{F}(X) \times \mathcal{F}(X) \cong \mathcal{F}(A)$. Ahora, por el Teorema 2.1.11, existe una extensión de g a $f : X' \longrightarrow X$ tal que $\mathcal{F}([f])(u) = v'$ de tal suerte que la composición

$$X \times I \xrightarrow{\rho'} X' \xrightarrow{f} X$$

donde ρ' es la función cociente, es una homotopía entre g_0 y g_1, por lo tanto $[g_0] = [g_1]$ y así φ_u es inyectiva. Luego como X era cualquier espacio CW, φ_u es un isomorfismo para todo X en la categoría de los espacios CW lo cual implica la existencia de una equivalencia natural entre π^Y y $\mathcal{F}$. Finalmente como $\mathcal{F}$ era cualquier funtor de Brown, resulta que todo funtor de Brown en la categoría de los espacios CW es representable. $\square$

2.1.1. Representabilidad en el sentido de Dold-Thom

Como motivación comencemos con un ejemplo. Sea SP $: \mathcal{PT}' \longrightarrow \mathcal{PT}'$ el funtor tal que para cada objeto X en $\mathcal{PT}'$ se asocia la potencia simétrica infinita[1] SP $(X) = \mathrm{SP}^{\infty}(X)$, de X y definimos para un morfismo $[f]$ en $\mathcal{PT}'$, SP $([f]) = [\mathrm{SP}\ f]$, así si X y Y son espacios en $\mathcal{PT}'$ con el mismo tipo de homotopía, SP (X) y SP (Y) también tienen el mismo tipo de homotopía.

Además se tiene la siguiente propiedad: Dada una cofibración (X, A), la proyección $p : X \longrightarrow X/A$ induce una casifibración $\tilde{p} :$ SP $(X) \longrightarrow$ SP (X/A) (Dold-Thom) así que $\tilde{p}^{-1}(\bar{x})$ es del mismo tipo de homotopía que SP (A).

De aquí y puesto que para cualquier pareja (X, A) en la categoría $\mathcal{W}^2$, (X, A) es una cofibración, podemos ver al funtor SP como un funtor que manda cofibraciones en casifibraciones, de tal suerte que al componer con el funtor π_q se tienen las siguientes propiedades.

Proposición 2.1.13 ([9, Corolario 5.2.19]). *Si X es un espacio Hausdorff conexo por trayectorias entonces para todo $q \geqslant 0$*

$$\pi_{q+1}(SP\ (\Sigma X)) \cong \pi_q(SP\ (X)). \tag{2.2}$$

Además se sabe que la sucesión de grupos de homotopía de una casifibración es exacta larga, por lo tanto aplicando esto a la casifibración dada por SP para una pareja (X, A) en $\mathcal{W}^2$ obtenemos la sucesión exacta larga

$$\cdots \to \pi_q(\mathrm{SP}\ (A)) \to \pi_q(\mathrm{SP}\ (X)) \to \pi_q(\mathrm{SP}\ (X/A)) \to \pi_{q-1}(\mathrm{SP}\ A) \to \cdots$$

y como $X/A \simeq X \cup CA$ obtenemos una sucesión exacta corta

$$\pi_q(\mathrm{SP}\ (A)) \to \pi_q(\mathrm{SP}\ (X)) \to \pi_q(\mathrm{SP}\ (X \cup CA))$$

y estínducida por las inclusiones $(A, x_0) \longrightarrow (X, x_0) \longrightarrow (X \cup CA, x_0)$.

Así en conjunto con (2.2), $\pi_*(\mathrm{SP}\ -)$ satisface los axiomas de una teoría de homología generalizada (los cuales son análogos a los de una teoría de cohomología generalizada reducida) De hecho $\pi_*(\mathrm{SP}\ -)$ es una teoría ordinaria. En efecto: Sea $h_*(-)$ la correspondiente teoría de homología no reducida asociada a $\pi_*(\mathrm{SP}\ -)$ y calculemos $h_*(\{*\})$. Ya que $h_*(X, A) = \pi_*(\mathrm{SP}\ (X^+ \cup CA^+), *)$ entonces

$$h_*(\{*\}, \emptyset) = \pi_*(\mathrm{SP}\ (S^0), *)$$

[1]Para mas detalles a cerca de la potencia simétrica infinita de un espacio ver [9].

pero $\pi_q(\mathrm{SP}\ (S^0),*) = \pi_{q+1}(\mathrm{SP}\ (\Sigma S^0),*) = \pi_{q+1}(\mathrm{SP}\ (S^1),*)$ y como SP S^1 es un espacio de Eilenberg-Mac Lane del tipo $(\mathbb{Z},1)$, se tiene

$$h_q(\{*\}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si} \quad q=0 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Finalmente como las teorías de homología ordinarias en la categoría $\mathcal{W}^2$ están completamente determinadas por su grupo de coeficientes, resulta que h_* es la homología singular H_* y por lo tanto $\pi_*(\mathrm{SP}\ (-))$ es $\widetilde{H}_*$.

Esto nos sugiere fijar el funtor π_q y considerar diversos funtores $\mathcal{F}$ en $\mathcal{PT}'$ que lleven cofibraciones en fibraciones o al menos en casifibraciones, de esta manera construiremos teorías de homología generalizadas. De esta manera se establecería una correspondencia entre los funtores con la propiedad antes mencionada con las teorías de homología. Así en nuestro ejemplo podríamos decir que el funtor SP representa a la homología singular.

Este tipo de idea surgió con los trabajos de G. Segal [21], [22], y A. Dold en conjunto con R. Thom [7].

La intención de presentar aquí estas ideas es sólo la de mostrar un punto diferente a la desarrollada por Brown, la cual usamos en el presente trabajo. Por tal motivo concluiremos con el enunciado de un teorema que es una generalización del Teorema de Dold-Thom.

Definición 2.1.14. Un *monoide topológico parcial abeliano* es un espacio topológico M junto con una colección de subconjuntos $D_n \subset M^n$, $n \geqslant 2$ y operaciones $D_n \longrightarrow M$, $(a_1,...,a_n) \mapsto a_1 + \cdots + a_n$ tal que se satisface la siguiente propiedad: Si $a_1,...,a_n \in M$ y $I_1,...,I_r,J_1,...,J_s$ son subconjutos de $\{1,2,...,n\}$ tal que $I_1 \sqcup ... \sqcup I_r = J_1 \sqcup ... \sqcup J_s = \{1,2,...,n\}$ entonces $\Sigma_{i\in I_1} a_i + \cdots + \Sigma_{i\in I_r} a_i = \Sigma_{i\in J_1} a_i + \cdots + \Sigma_{i\in J_s} a_i$ siempre que cada lado de la ecuación esté definido.

Teorema 2.1.15 ([24]). *Dado un monoide topológico parcial abeliano M, existe un funtor $\mathcal{F}^M$ de la categoría $\mathcal{PT}'$ en sí misma junto con transformaciones naturales*

$$\mathcal{F}^M(X) \longrightarrow \Omega\mathcal{F}^M(\Sigma X)$$

que satisface las siguientes propiedades:

i) $\mathcal{F}^M(*) = *$.

ii) Si $X \simeq Y$ *entonces* $\mathcal{F}^M(X) \simeq \mathcal{F}^M(Y)$.

iii) Para todo $X \in \mathcal{PT}'$ *la función* $\mathcal{F}^M(X) \longrightarrow \Omega\mathcal{F}^M(\Sigma X)$ *es una equivalencia homotópica.*

iv) Dada una cofibración $A \longrightarrow X \longrightarrow X/A$, $\mathcal{F}^M$ *induce una casifibración* $\mathcal{F}^M(A) \longrightarrow \mathcal{F}^M(X) \longrightarrow \mathcal{F}^M(X/A)$.

Corolario 2.1.16. $\pi_*(\mathcal{F}^M(\cdot))$ *es una teoría de homología generalizada.*

Ejemplo 2.1.17. Sea M un monoide topológico parcial abeliano. Para cada espacio X en $\mathcal{T}$ definimos la categoria topológica $\widetilde{\mathcal{Q}}^M(X)$ como sigue

i) Los objetos de $\widetilde{\mathcal{Q}}^M(X)$ son los puntod de $\bigsqcup_{p\geqslant 0} X^p \times (M^+)^p$.

ii) Un morfismo de $(x_1, ..., x_p, a_1, ..., a_p)$ a $(y_1, ..., y_q, b_1, ..., b_q)$ es inducido por una función $\theta : \{0, 1, ..., p\} \longrightarrow \{0, 1, ..., q\}$ tal que

i) $x_i \mapsto y_{\theta(i)}$ y $x_i = *$ si $\theta(i) = 0$ y

ii) $b_j 0 \Sigma_{i\in\theta^{-1}(j)} a_i$ para $1 \leqslant j \leqslant q$.

También definimos $\widetilde{Q}^M(X)$ como la realización de los espacio simplicial de $\widetilde{\mathcal{Q}}^M(X)$ cuyos n-simplejos son cadenas de flechas $x_0 \longrightarrow x_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow x_n$. Definimos:

$$F^M(X) = \widetilde{Q}^M(X)/\widetilde{Q}^M(*)$$
$$E^M(X) = \Omega F^M(\Sigma X).$$

Dado cualquier espacio M, lo podemos considerar como el subconjunto de generadores para el monoide SP (M). Así $\pi_*(E^M(X)) \cong \pi_*^S(X \wedge M)$.

2.2. Espectros

Sean $\mathcal{K}^*$, σ^* una teoría de cohomología generalizada reducida en la categoría de los espacios punteados con el tipo de homotopía de los espacios CW, la cual denotaré por $\mathcal{CW}_*$. La correspondiente sucesión de Mayer-Vietoris, dada por el Teorema 1.2.16, para teorías de cohomología reducidas resulta ser el axioma Mayer-Vietoris para funtores de Brown mientras que el axioma cuña para teorías de cohomología reducida coincide con el correspondiente para funtores de Brown, de esta manera si pedimos que $\mathcal{K}^*$ satisfaga el axioma cuña, resulta que para cada $n \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{K}^n$ es un funtor de Brown, luego restringiendo $\mathcal{K}^n$ a la subcategoria de los espacios conexos por trayectorias, resulta por el Teorema 2.1 que para cada n existe un espacio CW, L_n el cual es único salvo homotopía y una equivalencia natural

$$\Phi : [-, L_n]_* \longrightarrow \mathcal{K}^n$$

donde $[-,-]_*$ significa clases de homotopía punteadas. Entonces, asociada a $\mathcal{K}^*$ tenemos una sucesión de espacios CW, $\{L_n\}$.

La manera de extender la representación de cada funtor $\mathcal{K}^n$ a toda la categoría $\mathcal{CW}_*$ es como sigue. Dado X en $\mathcal{CW}_*$, su suspensión ΣX es coneca y así $\mathcal{K}^{n+1}(\Sigma X) \cong [\Sigma X, L_{n+1}]$, pero como $\mathcal{K}^n$ es reducida, se tiene que $\sigma^{n+1} : \mathcal{K}^{n+1}(\Sigma X) \longrightarrow \mathcal{K}^n(X)$ es un isomorfismo para cada n. De aquí que podamos escribir

$$\mathcal{K}^n(X) \cong [\Sigma X, L_{n+1}] \tag{2.3}$$

Por otro lado por [9, Prop. 2.10.5] tenemos que para cualesquiera espacios X, Y

$$[\Sigma X, Y] \cong [X, \Omega Y,] \tag{2.4}$$

particularmente temenos $[\Sigma X, Ln + 1] \cong [X, \Omega L_{n+1}]$ que junto con (2.3) resulta

$$\mathcal{K}^n(X) \cong [X, \Omega L_{n+1}]$$

para cualquier espacio X del tipo de homotopía de un CW.

A partir de la sucesión de espacios $\{L_n\}$ definimos la sucesión de espacios $\{P_n\}$ donde $P_n = \Omega L_{n+1}$, el espacio de lazos de L_{n+1}. Como L_n es único salvo homotopía, también lo es cada P_n y además Milnor probó en [16] que los espacios de lazos de un espacio CW son del tipo de homotopía de un CW, así los espacios P_n están en la categoría $\mathcal{CW}_*$. De aquí que para cada n, $\mathcal{K}^n$ es representable en la categoria $\mathcal{CW}_*$ con

$$\mathcal{K}^n(X) \cong [X, P_n]. \tag{2.5}$$

Utilizando el isomorfismo σ^{n+1}, (2.4) y (2.5) tenemos un isomorfismo

$$[X, P_n]_* \xrightarrow{\cong} [X, \Omega P_{n+1}]$$

lo cual significa que $\mathcal{K}^n$ esta representado por P_n y ΩP_{n+1} y así la Proposición 1.1.13 señala la existencia de una equivalencia homotópica $s_n : P_n \longrightarrow \Omega P_{n+1}$.

Por otro lado del isomorfismo $[\Sigma P_n, P_{n+1}]_* \cong [P_n, \Omega P_{n+1}]_*$ obtenemos para cada s_n una función adjunta, $\widetilde{s}_n : \Sigma P_n \longrightarrow P_{n+1}$, la cual es justamente la imagen de s_n bajo tal isomorfismo.

Definición 2.2.1. Un *prespectro* $\mathscr{P}$ es una colección $\{P_n, s_n\}$ de espacios punteados P_n y funciones punteadas s_n, tal que $s_n : \Sigma P_n \longrightarrow P_{n+1}$. Un Ω-*presprectro* es un prespectro $\{P_n, s_n\}$ tal que $\widetilde{s_n} : P_n \longrightarrow \Omega P_{n+1}$, la adjunta de s_n, es una equivalencia homotópica débil.

El siguiente resultado resume lo que hemos hecho.

Proposición 2.2.2. *Cada teoría aditiva de cohomología reducida $\mathcal{K}^*$ en la categoría CW_* determina un Ω-presprectro $\{P_n, s_n\}$ tal que para cada X, $\mathcal{K}^n(X) \cong [X, P_n]_*$. Este es llamado el Ω-presprectro asociado a $\mathcal{K}^*$.*

Inversamente, sea $\mathscr{P} = \{P_n, s_n\}$ un Ω-presprectro. Entonces podemos definir una teoría de cohomología generalizada reducida asociada a $\mathscr{P}$, la cual denotaremos por $\mathcal{P}^*$, tal que si X es cualquier espacio CW punteado, entonces

$$\mathcal{P}^n(X) = [X, P_n]_*. \tag{2.6}$$

Por otro lado, las equivalencias homotópicas débil s_n inducen biyecciones ([9, Prop. 5.1.33])

$$s_n^* : [X, P_n]_* \longrightarrow [X, \Omega P_{n+1}] \tag{2.7}$$

para todo espacio X que sea CW.

Ahora los isomorfismos σ^{n+1} para la teoría de cohomología $\mathcal{P}^*$ están dados por la siguiente composición

$$\mathcal{P}^{n+1}(\Sigma X) = [\Sigma X, P_{n+1}]_* \cong [X, \Omega P_{n+1}]_* \xrightarrow{(s_n^*)^{-1}} [X, P_n]_* = \mathcal{P}^n \tag{2.8}$$

donde $(s_n^*)^{-1}$ es el inverso de la biyección (2.7). En particular $\mathcal{P}^n(X) \cong [\Sigma^2 X, P_{n+2}]_*$ induce la estructura de grupo abeliano en $\mathcal{P}^n(X)$. La Proposición [9, Prop. 3.3.8] muestra que si $A \subset X$, entonces tenemos una sucesión exacta

$$\mathcal{P}^n(X \cup CA) \longrightarrow \mathcal{P}^n(X) \longrightarrow \mathcal{P}^n(A)$$

la cual es justamente el axioma de Exactitud para teorías reducidas. Usando aproximación CW, podemos extender la teoría $\mathcal{P}^*$ a la categoría $\mathcal{PT}'$. Tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.2.3. *Si* $\mathscr{P} = \{P_n, s_n\}$ *es un* Ω*-presprectro, entonces los funtores* $\mathcal{P}^n : \mathcal{PT}' \longrightarrow \mathcal{A}$, *definidos en* (2.6) *junto con los isomorfismos* $\sigma^{n+1} : \mathcal{P}^{n+1}(\Sigma X) \longrightarrow \mathcal{P}^n(X)$ *definidos en* (2.8) *para cualquier espacio punteado* X *forman una teoría aditiva de cohomología reducida.*

Ejemplo 2.2.4. Sea G un grupo abeliano. Entonces la familia $\{K(G,n)\}$ de los espacios de Eilenberg-Mac Lane constituyen un Ω-prespectro, llamado *espectro de Eilenberg-Mac Lane* el cual se denota por HG. En efecto, tenemos que

$$\widetilde{HG}^n(X) = \widetilde{H}^n(X; G)$$

por otro lado tenemos

$$\begin{aligned}
[K(G,n), K(G,n)] &= \widetilde{H}^n(K(G,n); G) \\
&\cong \widetilde{H}^{n+1}(\Sigma K(G,n); G) \\
&= [\Sigma K(G,n), K(G,n+1)] \\
&\cong [K(G,n), \Omega K(G,n+1)]
\end{aligned}$$

lo cual por la Proposición 1.1.13 se tiene que existe una equivalencia homotópica entre $K(G,n)$ y $\Omega K(G,n+1)$ y por lo tanto es una equivalencia homotópica débil, así $\{K(G,n)\}$ es un Ω-prespectro cuya teoría de cohomología asociada es la ordinaria.

Ejemplo 2.2.5. (a) Dado un prespectro E y un número entero k, definimos un prespectro $\Sigma^k E$ donde $(\Sigma^k E)_n = E_{n+k}$ y la transformación $S(\Sigma^k E)_n \longrightarrow (\Sigma^k E)_{n+1}$ es justamente s_{n+k}.

(b) Dado un espacio topologíco, X, se define el prespectro $\Sigma^\infty X$ como sigue:

$$(\Sigma^\infty X)_n = \begin{cases} * & \text{si } n < 0; \\ S^n X & \text{si } n \geqslant 0\,; \end{cases}$$

y $s_n : S(\Sigma^\infty X)_n \longrightarrow (\Sigma^\infty X)_{n+1}$ para $n \geqslant 0$ es la identidad.

(c) Como caso particular al anterior tenemos al prespectro de esferas $\Sigma^\infty S^0 = \{S^n, i_n\}$ tal que cada i_n es la identidad y el cual denotaremos por S.

e) Un prespectro *suspensión* es un prespectro de la forma $\Sigma^k\Sigma^\infty X$ donde X es un espacio punteado y $k \in \mathbb{Z}$.

Definición 2.2.6. a) Sea $E = \{E_n, s_n\}$ y $F = \{F_n, t_n\}$ dos prespectros. Una transformación f del prespectro E al prespectro F es una familia de funciones punteadas $f_n : E_n \longrightarrow F_n$ tal que $f_{n+1} \circ s_n = t_n \circ S f_n$ para toda $n \in \mathbb{Z}$.

b) Dadas dos transformaciones $f : E \longrightarrow F$ y $g : F \longrightarrow G$ definimos la composición de manera natural, es decir $g \circ f : E \longrightarrow G$ es tal que $(g \circ f)_n = g_n \circ f_n$.

c) Dado un prespectro E y un espacio CW, X, definimos los prespectros $E \wedge X = \{E_n \wedge X\}$ y $X \wedge E = \{X \wedge E_n\}$.

d) Dos transformaciones de prespectros $f_0, f_1 : E \longrightarrow F$ son homotópicas si existe una transformación $H : E \wedge I^+ \longrightarrow F$ (llamada *homotopía*) tal que H coincide con f_i en el subespectro $E_n \wedge \{i, *\}$, $i = 0, 1$ de $E \wedge I^+$. En este caso como es usual escribiremos $f_0 \simeq f_1$.

Dado un prespectro E, definimos su n-ésimo grupo de homotopía de E por

$$\pi_n(E) = \operatorname{colim}_n \pi_{n+k}(E_k).$$

Como era de esperarse dado $\varphi : E \longrightarrow F$ una transformación de prespectros, este induce un homomorfismo $\varphi_* : \pi_n(E) \longrightarrow \pi_n(F)$ para $n \in \mathbb{Z}$. Diremos que φ es una *equivalencia homotópica débil* si φ_* es un isomorfismo para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Definición 2.2.7. a) Un *CW-prespectro* es un prespectro $\{E_n, s_n\}$ tal que E_n son espacios CW, y s_n son encajes celulares.

b) Un *subprespectro* de un CW-prespectro E es un CW-prespectro $\{F_n, t_n\}$ tal que F_n es un subespacio CW de E_n y t_n es la restricción a F_n de s_n. En tal caso escribiremos $F \subset E$.

c) Dada una familia $\{E(\alpha)\}$ de subespectros de un CW-prespectro E, podemos formar el subespectro $\cup_\alpha E(\alpha)$ de E definiendo $(\cup_\alpha E(\alpha))_n := \cup_\alpha E_n(\alpha)$.

d) Si $F = \{F_n\}$ y $F' = \{F'_n\}$ son subprespectros de un CW-prespectro E, definimos el subprespectro $F \cap F' = \{F_n \cap F'_n\}$.

e) Una transformación de CW-prespectros es una transformación de espectros cuyas funciones componentes son celulares.

Para aligerar la notación, escribiremos $E = \{E_n\}$ en lugar de $E = \{E_n, s_n\}$ cuando las funciones s_n sean claras.

Definición 2.2.8. a) Una celda de un CW-prespectro E es una sucesión $\{e, Se, ..., S^k e, ...\}$ donde e es una celda de algún E_n en el CW-prespectro E tal que e no es suspensión de alguna celda en E_{n-1}. Diremos que e es una celda de dimensión $n - d$ si e es una celda en E_n de dimensión d. Definimos que los puntos base de cada E_n en el prespectro E son celdas de dimensión $-\infty$.

b) Un subespectro F de un CW-prespectro E es *cofinal* en E si para cada celda e de E_n existe m tal que $S^m e$ es una celda de F_{n+m}.

c) El n *esqueleto* de un CW-prespectro E es el subespectro $E^{(n)}$ de E que consiste de todas las celdas de dimensión $\leqslant n$.

d) Un CW-prespectro E es de dimensión finita si $E = E^{(n)}$ para algún n.

Definición 2.2.9. a) Sea E, F dos CW-prespectros. Considerar el conjunto $\mathscr{A}$ de todos los pares (f', E') donde E' es cofinal en E y $f' : E' \longrightarrow F$ es una transformación de prespectros. Considerar la relación de equivalencia $\sim$ en $\mathscr{A}$ tal que $(f', E') \sim (f'', E'')$ si sólo si existe algún subespectro cofinal B en E tal que $B \subset E' \cap E''$ y $f'|_B = f''|_B$. Cada clases de equivalencia de ésta relación es llamada *morfismo* de E a F. Denotaremos los morfismos y las transformaciones entre CW-prespectros de igual forma y sólo aclararemos cuando sea necesario.

b) Dos morfismos $\varphi_0, \varphi_1 : E \longrightarrow F$ de CW-prespectros son llamados *homotópicos* si existe un subespectro cofinal E' de E y dos transformaciones $f_0, f_1 : E' \longrightarrow F$, $f_i \in \varphi_i$. $i = 0, 1$ y tal que $f_0|_{E'} \simeq f_1|_{E'}$.

Se puede mostrar que la clases de morfismos homotópicos forman clases de equivalencia. En particular la clase de morfismos homotópicos a un morfismo φ la denotaremos por $[\varphi]$. El conjunto de clases de equivalencia de los morfismos $E \longrightarrow F$ es denotado por $[E, F]$. También se puede probar que la clase del morfismo $\varphi\psi$ depende solamente de las clases de los morfismos φ y ψ. De tal suerte que podemos definir la categoría $\mathcal{HS}$ cuyos objetos son CW-prespectros y conjunto de morfismos entre dos objetos E y F es el conjunto $[E, F]$. Los isomorfismos en $\mathcal{HS}$ son llamados *equivalencia de CW-espectros* y cuando existe una equivalencia entre dos CW-espectros E, F diremos que E es *equivalente* a F, lo denotaremos por $E \simeq F$.

Proposición 2.2.10 ([28, Teo. 8.25]). *Un morfismo de CW-prespectros es una equivalencia homotópica débil si y sólo si es una equivalencia de CW-prespectros.*

Proposición 2.2.11 ([28, Prop. 8.3]). *Dado un prespectro $\{E_n, t_n\}$ podemos construir un espectro $\{E'_n, s_n\}$ y equivalencias homotópicas $r_n : E'_n \longrightarrow E_n$ tal que el siguiente diagrama conmute*

$$\begin{tikzcd} SE'_n \arrow[r, "s_n"] \arrow[d, "Sr_n"'] & E'_{n+1} \arrow[d, "r_{n+1}"] \\ SE_n \arrow[r, "t_n"'] & E_{n+1}. \end{tikzcd}$$

La manera más directa de asociar una teoría de cohomología reducida a un CW-prespectro E dado, sin pasar por un Ω-prespectro es analizada en [28, 8.33] y es definida de la siguiente manera:

$$\widetilde{E}^n(X) := [\Sigma^\infty X, S^n \wedge E]. \tag{2.9}$$

Proposición 2.2.12 ([1, Part III; Prop. 2.8]). *Sea X un espacio CW finito y sea E cualquier espectro. Entonces*

$$[\Sigma^\infty X, E] \cong \mathrm{colim}_n \ [S^n X, E_n].$$

Con esta proposición podemos escribir (2.9) para espacios finitos X como

$$\widetilde{E}^n(X) = \mathrm{colim}_k \ [\Sigma^k X, E_{n+k}]$$

la cual es otra manera muy útil de ver a $\widetilde{E}^n(X)$ cuando X es finito.

Si X no es finito, sólo se tiene el monomorfismo

$$\mathrm{colim}_k \ [\Sigma^k X, E_{n+k}] \longrightarrow [\Sigma^\infty X, E].$$

Definición 2.2.13. Un *espectro* es un prespectro, $\{E_n, s_n\}$ tal que las funciones adjuntas $\widetilde{s}_n : E_n \longrightarrow \Omega E_{n+1}$ son homeomorfismos.

Consideremos las categorias $\mathcal{S}$, $\mathcal{P}$ cuyos objetos son los espectros y prespectros respectivamente y en cada caso, los morfismos son las transformaciones de espectros. Nótese que un espectro es un Ω-prespectro.

G. Lewis, P. May y M. Steinberger definen en [13] los funtores

$$\mathcal{F} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{P}$$
$$\mathcal{G} : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{S}$$

así que $\mathcal{F}$ es tal que no toma en cuenta la estructura de espectro mientras que $\mathcal{G}$ se define como sigue, si $\mathcal{P}$ es un prespectro tal que $\widetilde{s}_n : P_n \longrightarrow \Omega P_{n+1}$ son inclusiones entonces $\mathcal{G}(P)$ es el espectro tal que $\mathcal{G}(P)_n = \operatorname{colim}_k \Omega^k P_{n+k}$ y el colímite es tomado con respecto a las funciones $\Omega^k \widetilde{s}_{n+k} : \Omega^k P_{n+k} \longrightarrow \Omega^{k+1} P_{n+k+1}$ para $k \geqslant 0$. Si $f : P \longrightarrow P'$ es una transformación de prespectros entonces $\mathcal{G}(f) : \mathcal{G}(P) \longrightarrow \mathcal{G}(P)'$ esta dada por $\mathcal{G}(f) = \operatorname{colim}_k \Omega^k f_{n+k}$. La definición de un espectro para un prespectro arbitrario es algo complicada [13].

Se puede mostrar que los funtores $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son adjuntos mutuos, por lo tanto existe una biyección entre los conjuntos de morfismos $\mathcal{S}(\mathcal{G}(P), E)$ y $\mathcal{P}(P, \mathcal{F}(E))$ para cualquier prespectro P y cualquier espectro E.

Definición 2.2.14. Un *CW-espectro* es la imagen bajo $\mathcal{S}$ de un CW-prespectro.

Teorema 2.2.15. *En la categoria $\mathcal{S}$ tenemos los siguientes hechos:*

i) Para cualquier espectro E existe un CW-espectro W y una equivalencia homotopíca debil $f : W \longrightarrow E$.

ii) Toda equivalencia homotopica debil entre CW-espectros es una equivalencia homotopica.

2.2.1. Espectro Anillo

Lo que hace a la cohomología ordinaria con coeficientes en un anillo R una herramienta más poderosa que la homología con las mismas características es su estructura de anillo.

Queremos que nuestras teorías de cohomología generalizadas tengan más estructura algebraica y la manera de hacerlo es mediante la definición de una estructura de anillo en ellas. Esto se realiza vía definir estructura adicional al correspondiente espectro y ella requiere de la definición del producto *smash* de dos espectros. Definir tal producto es algo muy técnico y extenso para estudiarlo aquí. Los detalles de tal construcción se encuentra en los clásicos y muy socorridos del tema como son el libro azul de Adams [1] ó Switzer [28]. Para nosotros es suficiente considerar las siguientes propiedades del producto smash.

Teorema 2.2.16 ([20, Teo. 2.1]). *Dados dos espectros E, F existe un espectro $E \wedge F$, el cual es llamado producto smash de los espectros E, F, el cual tiene las siguientes propiedades:*

i) El producto smash es un funtor con respecto a cada uno de sus argumentos.

ii) Existen equivalencias naturales:

$$\begin{aligned} a &: (E \wedge F) \wedge G \longrightarrow E \wedge (F \wedge G) \\ b &: E \wedge F \longrightarrow F \wedge E \\ c &: S \wedge E \longrightarrow E \\ d &: E \wedge S \longrightarrow E \\ \Sigma &: \Sigma E \wedge F \longrightarrow \Sigma(E \wedge F). \end{aligned}$$

iii) Para cada espectro E y espacio CW, X, existe una equivalencia natural

$$e : E \wedge X \longrightarrow E \wedge \Sigma^{\infty} X.$$

En particular, $\Sigma^{\infty}(X \wedge Y) \simeq \Sigma^{\infty} X \wedge \Sigma^{\infty} Y$ para todo par de espacios CW, X y Y.

iv) Si $f : E \longrightarrow F$ es una equivalencia entonces $f \wedge I_G : E \wedge G \longrightarrow F \wedge G$ también lo es.

Definición 2.2.17. Una estructura de anillo conmutativo y asociativo en un espectro E consiste de transformaciones de espectros $\eta : S \longrightarrow E$ y $\mu : E \wedge E \longrightarrow E$ donde S es el espectro de esferas y tal que los siguientes diagramas conmuten salvo homotopía

$$\begin{tikzcd} S \wedge E \arrow[r, "\eta \wedge I_E"] \arrow[dr, "c"'] & E \wedge E \arrow[d, "\mu"] & E \wedge S \arrow[l, "I \wedge \eta"'] \arrow[dl, "d"] \\ & E. & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(E \wedge E) \wedge E \arrow[rr, "\eta\wedge I"] \arrow[d, "a"'] & & E \wedge E \arrow[d, "\eta"] \\
E \wedge (E \wedge E) \arrow[r, "I\wedge\eta"'] & E \wedge E \arrow[r, "\eta"] & E
\end{tikzcd}$$

η es conmutativo si el diagrama

$$\begin{tikzcd}
E \wedge E \arrow[rr, "b"] \arrow[dr, "\eta"'] & & E \wedge E \arrow[dl, "\eta"] \\
& E &
\end{tikzcd}$$

conmuta salvo homotopía.

Si un espectro E tiene una estructura de anillo conmutativo y asociativo, nos referiremos a él como un *espectro anillo* E. Por otra parte, tendremos que la correspondiente teoría de cohomología reducida de un espectro anillo hereda una estructura natural de anillo conmutativo y asociativo.

Dejo el ejemplo de esta construcción para el final de la siguiente sección.

2.3. Otra vez Cobordismo

A continuación definiremos la teoría de cobordismo vía espectros. En la última sección del capítulo 1 definimos los espacios $MSO(n)$, ahora generalizaremos esta construcción.

Sea $\xi = \{E_\xi \longrightarrow B_\xi\}$ un haz vectorial de dimensión n dotado de una métrica euclidiana y donde B_ξ es un espacio CW. Sea $D \subset E_\xi$ el conjunto de todos los vectores v en cada fibra de E_ξ tal que $|v| \geqslant 1$ con la norma inducida por la métrica. El espacio cociente E_ξ/D es llamado el *espacio de Thom* y lo denotaremos por $\mathrm{Th}(E_\xi)$. De esta manera consideramos a la imagen de D bajo la función cociente como el punto base de $\mathrm{Th}(\xi)$.

Otra manera de ver al espacio de Thom es como la compactificación a un punto del espacio total de haz en cuestión. Bajo esta observación, el espacio de Thom del haz trivial ε^n de dimensión n sobre un punto es claramente S^n.

Proposición 2.3.1. *Si ξ y η son dos haces vectoriales sobre espacios X y Y respectivamente, entonces existe un homeomorfismo natural*

$$\mathrm{Th}(\xi) \wedge \mathrm{Th}(\eta) \longrightarrow \mathrm{Th}(\xi \times \eta).$$

Demostración. Tenemos un homeomorfismo $D^m \times D^n \cong D^{m+n}$. La fibra de $\xi \times \eta$ sobre $(x, y) \in X \times Y$ es $\xi_x \times \eta_y$ y tenemos un homeomorfismo $D(\xi)_x \times D(\eta)_y \cong D(\xi \times \eta)_{(x,y)}$ el cual define un homeomorfismo $D(\xi) \times D(\eta) \cong D(\xi \times \eta)$ así que $D(\xi) \times S(\eta) \cup S(\xi) \times D(\eta))$ es llevado sobre $S(\xi \times \eta)$. Así obtenemos un homeomorfismo

$$\mathrm{Th}(\xi) \wedge \mathrm{Th}(\eta) = \frac{D(\xi) \times D(\eta)}{D(\xi) \times S(\eta) \cup S(\xi) \times D(\eta))} \cong \frac{D(\xi \times \eta)}{S(\xi \times \eta)} = \mathrm{Th}(\xi \times \eta).$$

□

Del hecho que para cualquier haz ξ sobre un espacio X el haz $\xi \oplus \varepsilon^n$ puede considerarse justamente como el haz $\xi \times \varepsilon^n$ sobre $X \times \{*\} \cong X$ se tiene por la proposición anterior que

$$\mathrm{Th}(\xi \oplus \varepsilon^n) = \mathrm{Th}(\xi \times \varepsilon^n) \cong \mathrm{Th}(\xi) \wedge \mathrm{Th}(\varepsilon^n) \cong \mathrm{Th}(\varepsilon^n) \wedge \mathrm{Th}(\xi) \cong S^n \,\mathrm{Th}(\xi).$$

Consideremos un sistema de espacios y funciones continuas $\{X_n, f_n, g_n\}$ donde cada f_n es una fibración tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} X_n \arrow[r, "g_n"] \arrow[d, "f_n"'] & X_{n+1} \arrow[d, "f_{n+1}"] \\ BO(n) \arrow[r, "i_n"'] & BO(n+1) \end{tikzcd}$$

donde $BO(n)$ es el espacio clasificante del $O(n)$-haz universal γ_n. Con el pullback del haz γ_n vía la función f_n obtenemos un haz γ_n^* en X_n pero además

$$g_n^*(\gamma_{n+1}^*) = g_n^* f_{n+1}^*(\gamma_{n+1}) = f_n^*(i_n^*(\gamma_{n+1})) = f_n^*(\gamma_n \oplus \varepsilon^1) = f_n^*(\gamma_n) \oplus \varepsilon^1 = \gamma_n^* \oplus \varepsilon^1$$

y así g_n induce una transformación

$$\gamma_n^* \oplus \varepsilon^1 \longrightarrow \gamma_{n+1}^*$$

también una a nivel de espacios de Thom

$$\mathrm{Th}(g_n) : S\,\mathrm{Th}(\gamma_n^*) \longrightarrow \mathrm{Th}(\gamma_{n+1}^*)$$

dando por resultado un sistema de espacios y funciones $\{\mathrm{Th}(\gamma_n^*), \mathrm{Th}(g)\}$ al cual le aplicamos la Proposición 2.2.11 para obtener el correspondiente espectro el cual es denotado por MX. Particularmente si la colección $\{\mathcal{O}_n\}$ es una de las colecciones $\{BO(n)\}$, $\{BSO(n)\}$, $\{BSpin(n)\}$ $\{BU(n)\}$ $\{BSU(n)\}$ o $\{BSp(n)\}$ y las f_n son las funciones que clasifican el correspondiente haz universal sobre $\mathcal{O}_n$ visto como haz real, el espectro $M\mathcal{O}$ es llamado el *espectro de Thom*.

De acuerdo con la conexión entre espectros y teorías de cohomología reducida, el espectro de Thom da lugar a las teorías de cohomología conocidas como *cobordismo*. Así, el n-esimo grupo de cobordismo de un espacio X está dado por

$$\widetilde{M\mathcal{O}}^n(X) = [\Sigma^\infty X, S^n(M\mathcal{O})].$$

Ejemplo 2.3.2. Consideremos el caso $\mathcal{O}_{2n} = \mathcal{O}_{2n+1} = BU(n)$, con $n \geqslant 0$ y $f_{2n} : \mathcal{O}_{2n} \longrightarrow BO(2n)$ que clasifica al haz universal γ_n sobre $BU(n)$ considerado como haz real, es decir como un $O(2n)$ haz y por otro lado $f_{2n+1} : X_{2n+1} \longrightarrow BO(2n+1)$ clasifica al haz $\gamma_n \oplus \varepsilon^1$ también como haz real. El resultado será el *cobordismo complejo* el cual denotaremos por MU^*

Las teorías de cobordismo más comunes son:

MO^*	*Cobordismo no orientado*
MSO^*	*Cobordismo orientado*
$MSpin^*$	*Cobordismo spin*
MSp^*	*Cobordismo simpletico*

Ciertamente el caso que más nos interesa es el del cobordismo complejo por las implicaciones que éste ha tenido en el desarrollo de nuevas ideas y enfoques en la topología algebraica en los últimos 40 años y cuyos principales resultados han sido investigados por D. Quillen, P.S. Landweber, P.S. Novikov, Adams, y más recientemente por Douglas C. Ravenel, N. P. Strickland, A. Baker, J. Greenlees, entre otros.

Ahora veamos que el espectro de Thom es un espectro anillo.

Ejemplo 2.3.3. Consideremos el espectro de Thom $M\mathcal{O}$ y sea

$$\mu : M\mathcal{O}_m \wedge M\mathcal{O}_n \longrightarrow M\mathcal{O}_{m+n}$$

la función inducida por la función clasificante

$$\begin{tikzcd} \gamma_m \times \gamma_n \arrow[r] \arrow[d] & \gamma_{m+n} \arrow[d] \\ B\mathcal{O}_m \times B\mathcal{O}_n \arrow[r] & B\mathcal{O}_{m+n} \end{tikzcd}$$

donde $\gamma_m \longrightarrow B\mathcal{O}_m$ es el $\mathcal{O}(m)$-haz universal sobre $\mathcal{O}_m$. Por lo tanto todas las teorías de cobordismo tiene estructura de anillo conmutativo y asociativo.

Capítulo 3

Teorema de Quillen

En este capítulo alcanzaremos nuestro principal objetivo, el cual es analizar por qué el cobordismo complejo es una de las teorías de cohomología generalizadas y orientadas más importantes.

3.1. Orientación y Clase de Euler

Necesitaremos extender la noción de la orientación de la teoría de cohomología singular a una orientación en teorías de cohomología generalizadas. Para ello primero recordemos el caso de la cohomología singular.

Definición 3.1.1. Sea $\xi = \{p : E_\xi \longrightarrow B_\xi\}$ un haz vectorial de dimensión n sobre un espacio paracompacto. Una *orientación* en ξ es una función continua $\eta : B \longrightarrow \{1, -1\}$ tal que para cada $b \in B$, $\eta(b)$ es la orientación de la fibra sobre b, F_b.

En términos de cohomología singular, la orientación se expresa en el resultado clásico que enuncia que para un haz orientable ξ, la cohomología del espacio de Thom de ξ, $H^i(\mathrm{Th}\,\xi; \mathbb{Z}) = 0$ para $i < n$ y que $H^n(\mathrm{Th}\,\xi; \mathbb{Z})$ tiene un sólo generador u el cual está caracterizado por la propiedad que su restricción a cada fibra del espacio de Thom $\mathrm{Th}\,\xi_x$ es el generador distinguido de $H^n(S^n; \mathbb{Z})$.

Definición 3.1.2. El generador u de $H^n(\mathrm{Th}\,\xi; \mathbb{Z})$ es llamado *clase de Thom*. Por otro lado si consideramos la sección cero del espacio de Thom, la imagen de la clase de Thom bajo el homomorfismo inducido por la sección cero es llamada la *clase de Euler* y es denotada por e.

La generalización de estos conceptos está dada en la siguiente definición.

Definición 3.1.3. Sea E un espectro anillo y ξ un haz vectorial real de dimensión n. Diremos que ξ tiene una *E-orientación* si existe una clase $u \in \widetilde{E}^n(\mathrm{Th}\,\xi)$ con restricción $v \in \widetilde{E}^n(S^n)$ en cada fibra, donde V es la imagen de $1 \in \widetilde{E}^0(S^0)$ bajo iteración del isomorfismo de suspensión, de tal suerte que se tenga la conmutatividad del siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\Sigma^\infty S^n \arrow[rr, "j"] \arrow[dr, "v"'] & & \Sigma^\infty(\mathrm{Th}\,\xi) \arrow[dl, dashed, "u"] \\
& S^n \wedge E &
\end{tikzcd}$$

donde j es inducida por la inclusión de S^n en $\mathrm{Th}\,\xi$. A la clase u le llamaremos *clase de Thom*, mientras que a su imagen bajo el homomorfismo inducido por la sección cero del espacio de Thom le llamaremos *clase de Euler* y la denotaremos por $e(\xi)$. Además el espectro tendrá una *orientación compleja* si existe una E-orientación para la realificación de haz canónico sobre $\mathbb{C}P^\infty$.

Observación. *i)* Si el espectro E tiene una orientación compleja entonces por el principio de descomposición de haces y naturalidad de la clase de Euler, todos los haces complejos son E orientados y esto justifica que hablemos de que el espectro en este caso tenga la orientación y no un haz vectorial en particular.

ii) Un haz vectorial puede tener mas de una E-orientación.

Definición 3.1.4. Sea E un espectro anillo con orientación compleja. La teoría de cohomología asociada a E es llamada una teoría generalizada de cohomología con orientación compleja.

Ejemplo 3.1.5. Consideremos el espectro de Thom MU. Sabemos que la sección cero, s_0, del haz universal $\gamma \longrightarrow \mathbb{C}P^\infty$ es una equivalencia homotópica. Sea $u \in \widetilde{MU}^2(\mathbb{C}P^\infty)$ correspondiente a la clase de s_0 en el limite directo

$$\mathrm{colim}_k\ [\Sigma^k \mathbb{C}P^\infty, MU_{2+k}]$$

entonces dada la inclusión canónica $i : \mathbb{C}P^1 \longrightarrow \mathbb{C}P^\infty$ tenemos que la clase de $s_0 \circ i : S^2 \longrightarrow MU(1)$ en $\mathrm{colim}_k\ [\Sigma^k S^2, MU_{2+k}]$ es justamente la restricción v de u en $\widetilde{MU}^2(S^2)$ de tal suerte que tenemos la conmutatividad del diagrama de la definición 3.1.3.

Nótece que la clase de Euler es natural, es decir, si γ es un haz sobre un espacio X y $f : X' \longrightarrow X$ es una función continua. Entonces $e(f^*(\gamma)) = f^*(e(\gamma))$.

Proposición 3.1.6. *[[28, Prop. 16.29 y Teo. 16.32]] Sea E un espectro anillo con orientación compleja. Entonces*

i) $E^*(\mathbb{C}P^n) = E^*(\{*\})[t]/ < t^{n+1} >$

ii) $E^*((\mathbb{C}P^\infty)^n) = E^*(\{*\})[[t_1, ..., t_n]]$

donde t es la clase de Euler del $U(1)$-haz universal γ y $t_i = p_i^*(t)$ donde p_i^* es inducida por la proyección $p_i : \mathbb{C}P^\infty \times \cdots \times \mathbb{C}P^\infty \longrightarrow \mathbb{C}P^\infty$ que es la i-ésima proyección.

3.2. Leyes Formales de Grupo

En todo lo que sigue R será un anillo conmutativo con 1. Denotaremos por $R[[x_1, ..., x_n]]$ al conjunto de series formales en n indeterminadas con coeficientes en R. Así los elementos de $R[[x_1, ..., x_n]]$ son de la forma $\Sigma_{i_1,...,i_n \geqslant 0} a_{i_1,...,i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$ con $a_{i_1,...,i_n} \in R$. La suma y la multiplicación en $R[[x_1, ..., x_n]]$ están dadas de la misma manera que en el caso del anillo de polinomios de n variables y coeficiente en R.

Definición 3.2.1. Una *ley formal de grupo* asociativa de dimensión 1 con coeficientes en R es una serie formal $F(x, y) = \Sigma_{i,j \geqslant 0} a_{i,j} x^i y^j \in R[[x, y]]$ tal que se cumplan los siguientes axiomas:

i) $F(x, 0) = x$

ii) $F(x, y) = F(y, x)$

iii) $F(x, F(y, z)) = F(F(x, y), z)$

Como podemos ver éstos tres axiomas asemejan a los axiomas de identidad, conmutatividad y asociatividad para grupos. Además se puede deducir la existencia de un elemento $m(x) \in R[[x]]$ tal que $F(x, m(x)) = 0$ con lo cual se tiene una serie formal que determina inversos. El conjunto de leyes formales de grupo sobre un anillo R lo denotaremos por $FGL(R)$.

De los axiomas *i)* y *ii)* tenemos que $a_{00} = 0$ y $a_{10} = a_{01} = 1$ mientras que del axioma *iii)* tenemos que $a_{ij} = a_{ji}$ para todo $i, j \geqslant 0$ así $F(x, y) = x + y + \Sigma_{i,j \geqslant 1} a_{i,j} x^i y^j$.

Ejemplo 3.2.2. *i)* El ejemplo más simple es $F(x,y) = x + y$; ésta es llamada *ley forma aditiva* y puede definirse sobre cualquier anillo.

ii) Si $r \in R$ entonces podemos tomar $F(x,y) = x + y + rxy$; tal que

$$1 + r(F(x,y)) = (1 + rx)(1 + ry).$$

en el caso $r = 1$, esta es llamada la *ley formal multiplicativa.*

La idea de las leyes formales de grupo es definir una operación de grupo en un conjunto dotado de al menos una estructura de anillo utilizando las operaciones ya existentes. Esto queda claro al considerar un álgebra A sobre un anillo R, sea $N(A)$ el conjunto de los elementos nilpotentes de A y $F(x,y)$ una ley formal con coeficientes en R. Bajo estas condiciones tenemos que para todo par $a, b \in N(A)$, $F(a,b)$ y $m(a)$ existen y están en $N(A)$, por lo tanto $F(x,y)$ dota a $N(A)$de una estructura de grupo.

Sean F y G dos leyes formales de grupo sobre un anillo R. Un homomorfismo de F a G es una serie formal $f(x) \in R[[x]]$ tal que $f(0) = 0$ y $f(F(x,y)) = G(f(x), f(y)) \in R[[x,y]]$. Diremos que f es un isomorfismo si existe un homomorfismo g de G a F tal que $f(g(x)) = x$.

Ejemplo 3.2.3. Consideremos las leyes formales aditiva y la multiplicativa sobre un mismo anillo R. Si $\mathbb{Q} \in R$ entonces la serie $f(x) = \log(1 + x) = -\Sigma_{k>0}(-x)^k/k$ da un isomorfismo entre la ley formal aditiva y la multiplicativa.

Proposición 3.2.4 ([20, Prop. 5.7]). *Sea R un álgebra sobre $\mathbb{Q}$. Toda ley formal de grupo sobre R es isomorfa a la ley formal de grupo aditiva F_a.*

Definimos el funtor covariante $\mathcal{FGL}$ de la categoría de anillos a la categoría de conjuntos, de tal manera que para el anillo R, $\mathcal{FGL}(R)$ es el conjunto de leyes formales de grupo sobre R y si $\phi : R \longrightarrow R'$ es un morfismo de anillos, definimos $\mathcal{FGL}(\phi) : \mathcal{FGL}(R) \longrightarrow \mathcal{FGL}(R')$ por $\mathcal{FGL}(\phi)(F(x,y)) = \Sigma_{i,j\geqslant 0}\phi(a_{ij})x^i y^j$. Como la notación es muy pesada, escribiremos $\phi(F(x,y))$ en vez de $\mathcal{FGL}(\phi)(F(x,y))$.

Proposición 3.2.5. *El funtor $\mathcal{FGL}$ es representable.*

Demostración. Sea $L_0 = \mathbb{Z}_{a_{ij}|i,j>0}$ un álgebra de polinomios sobre $\mathbb{Z}$ en un conjunto numerable de indeterminadas a_{ij}, una para cada par (i,j) de enteros positivos. Definimos $F_0(x,y) = x+y+\Sigma_{i,j\geqslant 1}a_{i,j}x^iy^j$ y definimos los elementos $b_{ijk} \in L_0$ por la ecuación

$$F_0(F_0(x,y),z) - F_0(x,F_0(y,z)) = \Sigma_{i,j,k}b_{ijk}x^iy^jz^k.$$

Sea I el ideal en L_0 generado por los elementos $a_{ij} - a_{ji}$ (para $i,j > 0$) y los elementos b_{ijk}, y hagamos $L = L_0/I$. Sea F la imagen de F_0 en $L[[x,y]]$. Es claro que F es una ley formal de grupo sobre L. Así tenemos una función de $\mathcal{M}_L(R)$ a $\mathcal{FGL}(R)$ tal que manda a cada α en $\mathcal{M}_L(R)$ a $\alpha(F)$. Afirmamos que esta función es un isomorfismo natural. Ciertamente, sea $F' \in \mathcal{FGL}(R)$ tal que $F'(x,y) = x+y+\Sigma_{i,j\geqslant 0}a'_{i,j}x^iy^j$. Entonces existe un único homomorfismo $\alpha_0 : L_0 \longrightarrow R$ tal que $\alpha_0(a_{ij}) = a'_{ij}$, de tal suerte que $\alpha_0(F_0) = F'$. De aquí se sigue que $\alpha_0(b_{ijk})$ es el coeficiente de $x^iy^jz^k$ en $F'(F'(x,y),z) - F'(x,F'(y,z))$, pero esta serie es cero ya que F' es una ley formal. Así $\alpha_0(b_{ijk}) = 0$, y similarmente $\alpha_0(a_{ij} - a_{ji}) = 0$, así que existe una única función inducida $\alpha : L \longrightarrow R$ con $\alpha(F) = F'$. Así tenemos que $\mathcal{FGL}$ tiene como objeto clasificante a L. □

El objeto clasificante para el funtor $\mathcal{FGL}$ construido en la demostración anterior es llamado *anillo de Lazard* y lo denotaremos por $\mathcal{L}$. Puesto que el funtor $\mathcal{FGL}$ es representable, existe un elemento universal $F^{\mathcal{L}}$ en $\mathcal{FGL}(\mathcal{L})$, el cual como todo buen elemento universal, tiene la característica de que para cualquier anillo R y cualquier ley formal $F(x,y) \in \mathcal{FGL}(R)$, existe un único morfismo de anillos $\psi : \mathcal{L} \longrightarrow R$ tal que $\psi(F^{\mathcal{L}}(x,y)) = F(x,y)$. Al elemento universal $F^{\mathcal{L}}$ lo llamaremos *ley formal universal de grupo*.

3.3. Teorema de Quillen

Volvamos al modo "topología algebraica". Recordemos que $\mathbb{C}P^\infty$ es un H-espacio y como tal tiene una H-multiplicación

$$\mu : \mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty \longrightarrow \mathbb{C}P^\infty$$

la cual dada una teoría generalizada de cohomología con orientación compleja, induce un homomorfismo

$$\mu^* : E^*(*)[[t]] \longrightarrow E^*(*)[[t_1,t_2]]$$

el cual está bien determinado por la imagen de t bajo μ^* y tal imagen la denotamos por $F_E(t_1,t_2)$.

Ahora, consideremos dos haces complejos de líneas, α_1 y α_2 sobre $\mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty$ y sean f_1, f_2 sus correspondientes funciones clasificantes en el haz universal $\gamma \longrightarrow \mathbb{C}P^\infty$. Como $\mathbb{C}P^\infty$ es un H-grupo con multiplicación μ, $[\mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty, \mathbb{C}P^\infty]$ tiene una estructura natural de grupo. Por lo tanto sea $[h] = [f_1] * [f_2]$ en la operación de grupo de $[\mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty, \mathbb{C}P^\infty]$. Así tenemos que h clasifica al haz $\alpha_1 \otimes \alpha_2$ es decir

$$h^*(\gamma) = \alpha_1 \otimes \alpha_2.$$

Por otro lado notemos que $h = \mu \circ (f_1, f_2)$ de aquí y la naturalidad de la clase de Euler se tiene que los coeficientes de la serie formal $h^*(e(\gamma)) \in E^*[[t_1, t_2]]$ no dependan de h o bien de $\alpha_1 \otimes \alpha_2$, de tal suerte que esta bien determinada y la cual denotamos por F_E, así tenemos

$$e(\alpha_1 \otimes \alpha_2) = F_E(e(\alpha_1), e(\alpha_2))$$

además ya que

$$\begin{aligned} \alpha_1 \otimes \alpha_2 &\simeq \alpha_2 \otimes \alpha_1 \\ \alpha \otimes \varepsilon^1 &\simeq \alpha \\ (\alpha_1 \otimes \alpha_2) \otimes \alpha_3 &\simeq \alpha_1 \otimes (\alpha_2 \otimes \alpha_3) \end{aligned}$$

se tiene que

$$\begin{aligned} F_E(e(\alpha_1), e(\alpha_2)) &= F_E(e(\alpha_2), e(\alpha_1)) \\ F_E(e(\alpha), 0) &= e(\alpha) \\ F_E(e(\alpha_1 \otimes \alpha_2), e(\alpha_3)) &= F_E(e(\alpha_1), e(\alpha_2 \otimes \alpha_3)) \end{aligned}$$

lo cual nos indica que F_E es una ley formal de grupo.

Nuevamente la estructura de grupo en $[X, \mathbb{C}P^\infty]$ para cualquier espacio X, nos da la oportunidad de aplicar lo anterior a haces de líneas sobre cualquier espacio X.

Ejemplo 3.3.1. *i*) En el caso $E = HG$ la clase de Euler es primitiva por razones de dimensión. Así $e(\alpha \otimes \beta) = e(\alpha) + e(\beta)$ y esta el la *ley formal aditiva* F_a:

$$F_{HG}(x, y) = F_a(x, y) = x + y.$$

ii) Los coeficientes de la Teoría K topológica son las series de Laurent $K^* = \mathbb{Z}_{v,v^{-1}}$ con $v \in K^{-2} = \pi_2(BU)$ que corresponde con la periodicidad de Boot. Una orientación compleja está dada por

$$e(\alpha) = \frac{1-[\alpha]}{v} \in K^2(X)$$

para haces de líneas α sobre X. Ya que

$$\begin{aligned} e(\alpha \otimes \beta) &= \frac{1-\alpha\beta}{v} \\ &= \frac{(1-\alpha)+(1-\beta)-(1-\alpha)(1-\beta)}{v} \\ &= e(\alpha)+e(\beta)+ve(\alpha)e(\beta) \end{aligned}$$

y ésta es la ley formal multiplicativa de grupo F_m:

$$F_K(x,y) = x+y+vxy.$$

Sabemos que hay un elemento universal $F^{\mathcal{L}}$ en $\mathcal{FGL}(\mathcal{L})$ tal que le "pega" a todas las leyes formales de grupo sobre cualquier anillo, particularmente a aquellas que vienen de alguna teoría de cohomología. ¿Sería tal nuestra suerte que $F^{\mathcal{L}}$ corresponda a una teoría de cohomología? y si así fuera, ¿cual sería esta? La respuesta la dio Daniel Quillen y es tan fuerte el resultado como veremos a continuación que mucha de la investigación que se realiza en la actualidad tiene como punto de partida el Teorema de Quillen.

Teorema de Quillen ([18, Teo. 2]). *La ley formal de grupo para el cobordismo complejo F_{MU} sobre $MU^*(*)$ es universal.*

Como F_{MU} es universal entonces $MU^*(*)$ es un objeto clasificante para el funtor $\mathcal{FGL}$, pero como $\mathcal{L}$ tambien representa a $\mathcal{FGL}$, se tiene por el Corolario 1.1.14 que $MU^*(*)$ es isomordo a $\mathcal{L}$ y lo cual lo enunciamos en el siguiete corolario.

Corolario 3.3.2. *El anillo de coeficientes del cobordismo complejo $MU^*(*)$ es isomorfo al anillo de Lazard.*

Lo que hemos hecho es: asignar a cada teoría de cohomología generalizada ~~compleja~~ una ley formal de grupo y por el Teorema de Quillen sólo necesitamos conocer la ley formal de grupo para el cobordismo complejo. ¿Hay manera de revertir el proceso? es decir dada una ley formal de grupo podremos construir una teoría de cohomología compleja tal que la ley formal de grupo para esta teoría sea justamente aquella con la que comenzamos?

Definición 3.3.3. Sea R un anillo. Un *género* complejo con valores en R es un homomorfismo de anillos de $MU^*(*)$ a R.

Note que el conjunto de géneros para un anillo R es, por el Corolario que sigue al Teorema de Quillen y la representabilidad del funtor $\mathcal{FGL}$, justamente $\mathcal{FGL}(R)$

Sea R un anillo y ψ un género con valores en R. Ya que ψ induce una estructura de $MU^*(*)$-modulo en R, definimos para cada $n \in \mathbb{Z}$ un funtor $\mathcal{K}^n$ de la categoría $\mathcal{PT}'$ a la categoría $\mathcal{A}$ de la siguiente manera:

$$\mathcal{K}^n(X) = MU^n(X) \otimes_\psi R. \tag{3.1}$$

Lema 3.3.4. *Supongamos que el conjunto de funtores $\mathcal{K}^n$ definido en* (3.1) *definen una teoría de cohomología generalizada $\mathcal{K}^*$. Entonces su ley formal de grupo es $\psi(F_{MU})$.*

Demostración. Por definición $\mathcal{K}^*$ hereda la orientación compleja de MU^* por lo tanto podemos aplicar la Proposición 3.1.6 y asi tenemos con la ayuda de la H-multiplicación μ de $\mathbb{C}P^\infty$ una ley formal de grupo $F_\mathcal{K}$ para $\mathcal{K}^*$. Entonces

$$\begin{aligned} F_\mathcal{K}(x,y) &= \Sigma_{i,j\geqslant 0} a_{i,j} \otimes 1 x^i y^j \\ &= \Sigma_{i,j\geqslant 0} 1 \otimes \psi(a_{i,j}) x^i y^j \end{aligned}$$

donde ésta última la identificamos con $\Sigma_{i,j\geqslant 0}\psi(a_{i,j})x^i y^j$ la cual es obviamente $\psi(F_{MU}(x,y))$. □

En otras palabras lo que nos dice el lema es que si el género corresponde a una teoría de cohomología con orientación compleja, $\mathcal{K}^*$, entonces $MU^* \otimes_\psi R$ es una interpretación "cobordante" de la teoría de cohomología $\mathcal{K}^*$. Pero también podemos pensarlo como una reconstrucción de la misma teoría $\mathcal{K}^*$ vía su género lo cual vendría siendo una generalización en algún sentido de lo que es para el caso de las teorías ordinarias las cuales están caracterizadas por su anillo de coeficientes.

Ahora necesitamos saber cuándo el funtor $\mathcal{K}^*$ defie una teoría generalizada de cohomología. Como podemos ver, ésto depende del funtor $\otimes_\psi R$. Ya que $\otimes_\psi R$ se porta bien con el producto

$$(\Pi_{\alpha\in A} M_\alpha) \otimes_\alpha R \cong \Pi_{\alpha \in A}(M_\alpha \otimes_\alpha R)$$

para toda colección $\{M_\alpha : \alpha \in A\}$ de $MU^*(*)$-módulos. Por lo tanto $\otimes_\psi R$ satisface sin ningún problema el axioma wedge para teorías de cohomología generalizadas reducidas. Desafortunadamente su comportamiento con sucesiones exactas cortas no es del todo satisfactorio. En efecto, si

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta de $MU^*(*)$-módulos entonces el funtor $\otimes_\psi R$ sólo nos garantiza la exactitud hacia la derecha de la correspondiente sucesión bajo $\otimes_\psi R$, esto es, la sucesión

$$M_1 \otimes_\psi R \longrightarrow M_2 \otimes_\psi R \longrightarrow M_3 \otimes_\psi R \longrightarrow 0 \tag{3.2}$$

es exacta. Pero necesitamos la exactitud por ambos lados de la sucesión 3.2 para poder establecer el axioma de exactitud para teorías de cohomología.

Definición 3.3.5. Un Λ-módulo N se llama *plano* si, el funtor $\otimes_\Lambda N$ manda sucesiones exactas en sucesiones exactas, es decir, para cualquier sucesión exacta corta de Λ-módulos

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0,$$

la sucesión inducida

$$0 \longrightarrow M_1 \otimes_\Lambda N \longrightarrow M_2 \otimes_\Lambda N \longrightarrow M_3 \otimes_\Lambda N \longrightarrow 0,$$

también es exacta corta.

Si bien siempre se preserva la exactitud hacia la derecha de una sucesión exacta corta de Λ bajo el funtor $\otimes_\Lambda N$ sin importar la estructura de Λ-módulo de N, la exactitud hacia la izquierda sí depende de tal estructura. En nuestro caso la estructura de $MU^*(*)$-módulo depende del género ψ. Así el problema de que el funtor $\mathcal{K}^*$ sea una teoría de cohomología generalizada se ha reducido a encontrar las condiciones bajo las cuales un género $\psi : MU^*(*) \longrightarrow R$ garantice que R sea un módulo plano. P. S. Landweber dio respuesta a tal cuestionamiento con su Teorema del Funtor Exacto, el cual se enuncia más adelante. Demos las últimas definiciones para entender tal teorema.

Definición 3.3.6. Sea $F(x, y)$ una ley formal de grupo sobre un anillo R. Para un entero positivo n definimos inductivamente la serie n bajo F por

$$[n]_F(x) = F(x, [n-1]_F(x))$$

donde $[1]_F(x) = x$.

Ejemplo 3.3.7. Para la ley formal aditiva F_a, $[n]_{F_a}(x) = nx$.
Para la ley formal multiplicativa F, $[n]_F(x) = (1+x)^n - 1$.

Definición 3.3.8. Una sucesión $\{a_n\}$ de elementos de un anillo R es llamada *regular* si la multiplicación por a_1 es inyectiva en R y para $n \geqslant 2$ la multiplicación por a_n en $R/ < a_1, ..., a_{n-1} >$ es inyectiva.

Dado un género ψ, sea $F = \psi(F_U)$. Consideremos para cada número primo p, la serie p, $[p]_F$ y sea u_n el coeficiente de x^{p^n} en la serie $[p]_F(x)$.

Teorema del Funtor Exacto de Landweber ([14]). *Sea ψ un género complejo y $R = \psi(\Omega_U^*(*))$. Si para cada número primo p la sucesión $p, u_1, u_2, ...$, donde los u_i son como los describimos arriba, es regular en R, entonces el funtor $X \longrightarrow \Omega_U^*(X) \otimes_\psi R$ define una teoría de cohomología generalizada.*

Ciertamente el Teorema del Funtor Exacto de Landweber y el lema 3.3.4 nos dicen cómo son todas las teorías de cohomología generalizadas con orientación compleja, incluso que el estudio de cualquiera de ellas se reduce al del cobordismo complejo, lo cual muestra que el cobordismo complejo concentra la información de cualquier teoría generalizada de cohomología con orientación compleja. Sin embargo, la dificultad de llevar a cabo tal descripción surge al tratar de verificar las condiciones del Teorema de Landweber para un género específico. Por otro lado el estudio de los grupos de cobordismo de un espacio para obtener información especifica podría resultar más complicado que el mismo problema utilizando alguna otra teoría de cohomología. Estas complicaciones no son tan malas como parecen, pues con ellas se ha forzado a la construcción de nuevas teorías de cohomología y entendido más las ya conocidas. Así mismo la aplicación de esta nueva teoría a problemas geométricos concretos ha llevado a un mejor entendimiento de la naturaleza homotópica de dichos problemas, por ejemplo, el problema de inmersión de variedades tales como espacios proyectivos y espacios lente se ha visto altamente beneficiado con estas técnicas. La metodologia concreta es: Si una variedad M^n admite una inmersión euclideana en dimensión d, entonces el haz normal estable de M^n se realiza por un haz de dimensión $d-n$. Cuando $M = \mathbb{R}P^n$, el haz normal estable se representa por un multiplo del haz canónico $(2^L - n - 1)\gamma$, donde $L >> 0$. De esta menera, el problema de inversión para $\mathbb{R}P^n$ puede ser interpretado como un problema de seccionamiento de un múltiplo de γ. Utilizando la fórmula $(m+1)\gamma = \tau \oplus 1$ sobre $\mathbb{R}P^n$, el problema anterior se puede llevar a un problema de monoseccionamiento de un multiplo del haz *gamma* $\otimes \gamma$ sobre un producto de proyctivos reales. Es aquí donde la técnica de la clase de Euler en teorías de cohomología generalizadas dan información: La clase de Euler de un haz proporciona una primera "obstrucción" al seccionamiento de dicho haz, en el sentido de que la clase de Euler se anula en la presencia de una sección global no cero. Ahora, en el problema de inmersión de $\mathbb{R}P^n$, el haz coordenado vive sobre un producto $\mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}P^n$, de modo que la obstrucción en cuestión vive en $h^*(\mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}P^n)$. Es aquí donde el conocer dicho anillo toma una importancia fundamental y por ello, la serie 2 juega un papel decisivo. L. Astey [2], D. Davis [5] y [6], I. James [12], y J. González [10].

Bibliografía

[1] J. F. Adams. *Stable Homotopy and Generalised Homology.* The University of Chicago Press, 1974.

[2] L. Astey. Geometric dimension of bundle over real proyective spaces. *Quart. J. Math. Oxford Ser.*, 31(122):139–155, 1980.

[3] M. F. Atiyah. Bordism and cobordism. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 57(Part 2):200–208, 1961.

[4] E. H. Brown Jr. Cohomology theories. *Annals of Mathematics*, 75(3):467–484, May 1962.

[5] D. M. Davis. A strong nonimmersion theorem for real proyective spaces. *Ann. of Math.*, 3(120):517–528, 1984.

[6] D. M. Davis. Immersions of projective spaces: a historical survey. in algebraic topology. *Amer. Math. Soc.*, pages 31–37, 1993.

[7] A. Dold and R. Thom. Quasifaserungen und unendliche symmetrische produkte. *Ann. Math.*, (67):239–281, 1958.

[8] S. Eilenberg and N Steenrod. *Foundations of Algebraic Topology.* Princeton University Press, 1952.

[9] Marcelo Aguilar; Samuel Gitler and Carlos Prieto. *Algebraic Topology from a Homotopical Viewpoint.* Springer-Verlag, 2002.

[10] J. González. Connective k-theoretic euler classes and non-immersions of 2^k-lens spaces. *J. London Math. Soc.*, 63(1):247–256, 2001.

[11] Matthew Greenberg. Constructing elliptic cohomology. Master's thesis, Department of Mathematics and Statistics, McGill University, Montral, Qubec Canada, July 2002.

[12] I. M. James. On the immersion problem for real projective spaces. *Bull. Amer. Math. Soc.*, (69):231–238, 1963.

[13] M. Steinberger L. G. Lewis, J. P. May. Equivariant stable homotopy theory. In *Lecture Notes in Mathematics*, number 1213. Spinger-Verlang, 1986.

[14] P. S. Landweber. Homological properties of comodules over μ and BP*(BP). *American Journal of Mathematics*, 98(3):591–610, 1976.

[15] Haynes Miller. Notes on cobordism. Depatment of Mathematics, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA.

[16] J. Milnor. On spaces having the homotopy type of a CW-complex. *Trans. Amer. Math. Soc.*, (90):272–280, 1959.

[17] J. W. Milnor and James D. Stasheff. *Characteristic Classes.* Study 76. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1974.

[18] Daniel Quillen. On formal group laws of unoriented and complex cobordism. *Bull. Amer. Math. Soc.*, (75):1293–1298, 1969.

[19] Daniel Quillen. Elementary proofs of some results of cobordism theory using steenrod operations. *Advances in Mathematics*, (7):29–56, 1971.

[20] Yuli B. Rudyak. *On Thom Spectra, Orientability and Cobordism.* Springer-Verlag, 1998.

[21] G. Segal. Configuration spaces and iterated loop-spaces. *Inventiones Math.*, pages 213–221, 1973.

[22] G. Segal. K-homology theory and algebraic k-theory. *Lecture Notes in Math.*, 575:113–127, 1977.

[23] G. Segal. Elliptic cohomology. *Astérisque*, (161-162):187–201, 1988.

[24] Kazuhisa Shimakawa. Configuration spaces with partially summable labels and homology theories. *Math.J. Okayama Univ*, 43, 2001. Department of Mathematics, Okayama University.

[25] E. H. Spanier. Duality and the suspension category. In *Symposium Internacional de Topología Algebraica*, pages 259–72. 1958.

[26] Andrew Stacey. Elliptic cohomology for beginners: Introducing the $\hat{A}$-genus, January 1999.

[27] N. P Strickland. Formal groups.

[28] Robert M. Switzer. *Algebraic Topology —Homotopy and Homology*. Number 212 in Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag, 1970.

[29] G. W. Whitehead. Generalized homology theories. *Trans. Amer. Math. Soc.*, (102):227–283, 1962.