



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA  
DE MEXICO**

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

**"ESCUCHAR LA FORMA DEL TAMBOR"**

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

**M A T E M A T I C O**

P R E S E N T A :

**RAMON ZARATE SAIZ**



FACULTAD DE CIENCIAS  
UNAM

DIRECTOR DE TESIS: DR. JORGE ANDRES IZE LAMACHE

2004



FACULTAD DE CIENCIAS  
SECCION ESCOLAR

---

---



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

ESTA TESIS NO SALE  
DE LA BIBLIOTECA



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AVENIDA 11  
MEXICO

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.

NOMBRE: Ramón Zárate Sáiz

FECHA: 12 de Agosto 2004

FIRMA: [Signature]

**ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ**  
**Jefe de la División de Estudios Profesionales de la**  
**Facultad de Ciencias**  
**Presente**

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"Escuchar la forma del tambor"

realizado por Ramón Zárate Sáiz

con número de cuenta 9621982-9 , quien cubrió los créditos de la carrera de: Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis

Propietario Dr. Jorge Andrés Ize Lamache [Signature]

Propietario Dr. Jorge Gilberto Flores Gallegos [Signature]

J. Gilberto Flores

Propietario Dr. Carlos Villegas Blas [Signature]

Suplente Dra. María de la Luz Jimena de Teresa de Oteyza [Signature]

Suplente Dra. Clara Garza Hume [Signature]

Consejo Departamental de

[Signature]



M. en C. Alejandro Bravo Mojica  
Coordinador de la carrera de Matemáticas  
CONSEJO DEPARTAMENTAL  
DE  
MATEMÁTICAS

Escuchar la forma del tambor.

Ramón Zárate Sáiz

A mi madre, quien siempre se las arregló para darme, bajo cualquier  
circunstancia, la mejor de las circunstancias.

A mi padre, de quien siempre estaré orgulloso. Mi mejor ejemplo  
de verdadera vocación y entrega.

# Contenido

Agradecimientos	v
Introducción.	vii
<b>I Lo que significa escuchar la forma del tambor. Los valores propios del operador de Laplace.</b>	<b>1</b>
1. ¿Escuchar la forma del tambor? (La ecuación de onda en $\mathbb{R}^2$ )	3
2. Valores y funciones propias del Laplaciano.	7
3. No podemos escuchar la forma del tambor.	17
<b>II Para poder escuchar.</b>	<b>27</b>
4. Ecuación de calor, núcleos de calor y principio del máximo.	29
4.1. Ecuación de calor. Problema con condición inicial y condición de frontera homogénea . . . . .	29
4.2. Núcleos de calor. . . . .	30
4.3. Principio del máximo, principio del mínimo y unicidad para dominios acotados . . . . .	30
4.4. Principio del máximo en dominios no acotados. . . . .	32
4.5. Una desigualdad básica . . . . .	34
5. La solución sobre el plano. La solución fundamental.	37
5.1. La solución al problema de condiciones iniciales sobre el plano. .	37
5.2. Propiedades del núcleo de calor. La distribución $\delta(x - y)$ . . . .	39
5.3. La solución fundamental. Regularidad de las soluciones a la ecuación de calor. . . . .	42
6. Núcleos de calor para dominios particulares.	47
6.1. Existencia. Solución por expansión en funciones propias para dominios acotados. . . . .	47

---

6.2. Soluciones sobre rectángulos. . . . .	51
6.2.1. Ecuación de calor en una dimensión. . . . .	51
6.2.2. Núcleo de calor sobre la recta real ( $\Omega = \mathbb{R}$ ): . . . . .	51
6.2.3. Núcleo de calor para el intervalo ( $\Omega = (0, a)$ ): . . . . .	51
6.2.4. Núcleos de calor en el rectángulo . . . . .	55
6.3. Solución sobre un semiplano . . . . .	58
<b>III Qué podemos escuchar.</b>	<b>61</b>
<b>7. Lo que podemos escuchar de un tambor.</b>	<b>63</b>
7.1. El área. . . . .	63
7.2. La longitud de la frontera . . . . .	66
7.3. Condiciones de frontera más generales. . . . .	77
7.4. Otros resultados. . . . .	79
<b>8. Conclusiones.</b>	<b>83</b>
<b>A. El teorema Tauberiano de Karamata. Ordenes asintóticos.</b>	<b>87</b>
<b>B. Curvatura y círculos tangentes.</b>	<b>95</b>
<b>C. Curvas vecinas a la frontera.</b>	<b>99</b>

# Agradecimientos

A Jorge, mi maestro y asesor, a quien siempre he respetado, pero además he aprendido a querer, por la forma en la que se ha dedicado a todos sus alumnos a lo largo de tantos años. Para mi ha sido un privilegio ser tu alumno todo este tiempo.

A Magali, mi maestra. Has sido una influencia muy importante en mí. Me has enseñado mucho. Gracias a ti he disfrutado mucho estudiando mis últimos semestres en la carrera.

A Roli, mi maestro. Disfruté muchísimo el tiempo que trabajé contigo, y aunque nadie me crea, gracias a ti me gustan las matemáticas que me gustan... y me gustan mucho. Ser tu ayudante es uno de los mejores recuerdos de mi carrera.

A Luis, mi maestro y apoyo. Me diste el primer empujón para cambiar mi vida y me has puesto en contacto con un aspecto distinto de las matemáticas.

A Toño, un gran apoyo y también un gran "jefe".

A toda la familia Montejano Cantoral. Les debo mucho en muchos aspectos distintos, pero sobre todo les debo gran parte de la cordura que logré conservar estos últimos días.

A mis compañeros de caja (el cubículo de estudiantes 200 I). Hemos compartido penas y glorias, y es bueno ver que todos estemos saliendo adelante.

A toda mi familia en Monterrey, y sobre todo a Aurora, quien me quiere a pesar del abandono en el que la he tenido.

A la Bolo y todas las tías. Me han consentido toda una vida.

Al tío Toño, por mantener mi rectitud (literalmente).

A Yuri, Abril y Mashenka. Los quiero mucho.

A Nidia y mis hermanitos: Pablo y Pedro.

A Víctor Nuñez, una influencia importante y de quien guardo buenos recuerdos. Espero nos volvamos a ver algún día.

Y finalmente, a todos mis amigos. Son muchos y no quiero comenzar una larga e insignificante lista de nombres, ustedes saben quienes son y saben lo importantes que han sido, cada uno en aspectos diferentes. A algunos no los he visto en años y a muchos no los veré en años también, pero son una de las mejores razones para estar contento con la vida... con mi vida.

# Introducción.

Como primera impresión la pregunta *¿podemos escuchar la forma del tambor?* parece una pregunta sin mucho sentido; en general no estamos acostumbrados a pensar en estos términos, *escuchamos* sonidos y  *vemos* formas. Sin embargo, esta misma pregunta, planteada como tal por Mark Kac puede considerarse el inicio de toda una rama de investigación en matemáticas la cual ha subsistido hasta hoy día.

Reflexionando un poco, la pregunta tiene mucho sentido. Por ejemplo, en astronomía, mucha de la información obtenida sobre la composición de las estrellas se adquiere estudiando las frecuencias de resonancia naturales de sus componentes; de igual manera, en medicina, los métodos de resonancia pueden determinar con precisión la estructura interna del cuerpo sin necesidad de operación (con ultrasonido o resonancia electromagnética de un tumor, por ejemplo). Pensando en estos ejemplos, podemos replantear la pregunta: Si tuviéramos dos tambores, ambos hechos con el mismo cuero afinados con una tensión idéntica ambos, pero con formas diferentes (uno circular y otro cuadrado, por ejemplo) ¿podríamos determinar con sólo escucharlos cuál de ellos tiene qué forma? ¿podríamos determinar la forma de algún tambor arbitrario tan solo escuchandolo? Posiblemente nos resulte intuitivo que la forma efectivamente altera el sonido que una membrana tensa reproduce, pero no queda claro qué tan estrecha puede ser esa relación.

Esta pregunta ha estado ya presente en las matemáticas por casi un siglo. Si bien adelantaremos que la respuesta concreta es un simple *no*, esto no debería ser motivo de decepción (ni tampoco de satisfacción), podemos aún preguntarnos muchas cosas más: ¿Por qué no? ¿Qué información sí podemos “escuchar”? ¿Qué tantos tambores diferentes que suenan igual pueden existir? ¿Existiría alguna restricción para nuestros tambores bajo la cuál sí sea posible distinguir uno de otro?, etc.

Lamentablemente no podremos responder a todas estas preguntas; mucho se ha entendido a lo largo de este siglo, pero aún se ignora mucho también (una característica común entre las preguntas matemáticas de interés); las técnicas que han sido puestas a prueba para el estudio de esta peculiar pregunta son muy variadas y apenas podremos cubrir unas cuantas; esperamos, sin embargo, que el trabajo presente pueda despertar un interés aún mayor en el tema al mismo tiempo que se logra un mejor entendimiento del mismo, tratando siempre de

mantener la complejidad de la herramienta matemática a un mínimo (si bien la matemática que utilizamos no es elemental, la complejidad es relativamente baja, lo cuál nos basta para obtener muchos de los resultados clásicos y desarrollar una buena intuición sobre los resultados más generales).

La pregunta tiene una historia interesante:

En el año de 1910, el célebre físico Lorentz fue invitado a la universidad de Göttingen (a las conferencias Wolfskehl). Ahi expuso cuatro conferencias bajo el título conjunto de *Problemas antiguos y nuevos de física*, donde al final de la última mencionó un problema originado en la *teoría de radiación de Jeans*, en donde se sugería, por medio de ejemplos específicos, que la distribución de las frecuencias de resonancia electromagnética cercanas a infinito de un cuerpo tridimensional no dependía de su contorno sino únicamente de su volumen; Lorentz afirmaba que no cabía duda que los resultados se cumplían en regiones más generales (incluso regiones no simplemente conexas), y que además deberían existir resultados similares para problemas análogos (como los tonos puros de una membrana). La fórmula original, se le atribuye a Rayleigh, quién calculó que la distribución asintótica para dichos “tonos” (frecuencias de resonancia) para un cubo era

$$N(\lambda) \sim \frac{4}{3\pi^2} V \lambda^{\frac{3}{2}}$$

donde  $N(\lambda)$  es la cuenta de frecuencias de resonancia más pequeños que  $\lambda$ . Esta fórmula contenía un error, el cual fue notado por Jeans: Rayleigh había contado 8 veces más tonos por accidente (al parecer contando el cubo en un octante del espacio ocho veces en su cuenta de valores propios) de ahí que la fórmula (en una forma similar)

$$N(\lambda) \sim \frac{V}{6\pi^2} \lambda^{\frac{3}{2}}$$

sea conocida como la *fórmula de Rayleigh-Jeans*.

Hilbert, se rumora, predijo que este problema permanecería sin solución mientras él viviera; pero dos años más tarde, Herman Weyl probó este resultado usando precisamente la teoría de ecuaciones integrales que su maestro Hilbert había desarrollado apenas unos años antes.

Este resultado, en el caso de una membrana vibrante en  $\mathbb{R}^2$ , conocido como la *fórmula de Weyl* es

$$\sum_{\lambda_n < \lambda} 1 \sim \frac{|\Omega|}{4\pi} \lambda$$

el cual corresponde con nuestra fórmula (7.3). Carleman probó un resultado análogo para la traza del operador de calor:

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \sim \frac{|\Omega|}{4\pi t}$$

cuando  $t \rightarrow 0^+$ , que corresponde a (7.2), en donde los valores  $\lambda_n$  corresponden a los tonos naturales de vibración de una membrana con frontera fija en  $\mathbb{R}^2$ . El mismo Weyl después conjetura una aproximación más fina que contiene también la longitud de la frontera del dominio vibrante. A partir de estos resultados, comienzan las conjeturas sobre la posibilidad de que estos tonos determinen en su totalidad la geometría del dominio que las produce.

Mark Kac, en su artículo titulado *Can one hear the shape of a drum?* (¿Podemos escuchar la forma del tambor?) atrae la atención de muchos matemáticos importantes, ofreciendo al problema un contexto sumamente peculiar: “Escuchar la forma del tambor”. Kac atribuye esta forma de plantear el problema a una conversación con L. Bers.

El artículo de Kac ofrece muchas conexiones muy interesantes entre física y matemática ofreciendo ejemplos de cómo los razonamientos puramente físicos sugieren resultados muy interesantes a los matemáticos (el artículo es una excelente referencia a este tema); en este mismo artículo Kac prueba que podemos “escuchar” al menos el área de un tambor y la longitud de su frontera bajo ciertas condiciones particulares, y conjetura que además podemos escuchar el número de hoyos en un tambor.

Si bien el tema está estrechamente relacionado con la física, muy rápidamente surgieron generalizaciones puramente matemáticas con la esperanza de poder resolver el problema a partir de estructuras más abstractas, por ejemplo: ¿Podemos escuchar la forma de una variedad? el tratar de responder a esta pregunta ha sido una importante colaboración al problema, en este contexto más general surgieron resultados que después arrojaron luz sobre el caso del tambor. Ya un par de años antes de la publicación del artículo de Kac (1967), Milnor ofrece un contraejemplo al análogo en dimensiones mayores, mostrando dos toros de dimensión 16 no isométricos (es decir *distintos* en el sentido usual) que “suenan” igual, sin embargo, la pregunta específica de Kac (para un dominio bidimensional, es decir, *un tambor*) permaneció abierta hasta 1992.

En dicho año, Gordon, Webb y Wolpert construyen un contraejemplo utilizando resultados nacidos en la teoría de números algebraica: dos tambores no isométricos los cuales suenan igual; este contraejemplo nace a partir de una prueba del francés Bérard a un teorema de Sunada, el cual ya explicaba muchos de los contraejemplos de variedades iso espectrales (que “suenan” igual) que existían hasta entonces (los cuales no fueron muy abundantes hasta los años 80). La prueba de Bérard ofreció las observaciones necesarias a Gordon *et al* para construir el contraejemplo; si bien este contraejemplo requirió muchos años para ser encontrado, su ingeniosa construcción ofrece una prueba muy accesible y clara que requiere un nivel sumamente básico en matemáticas para ser comprendida. Nos sentimos obligados a reiterar que este resultado no cierra esta interesante pregunta, dichos tambores son peculiares en sí (están armados con piezas poligonales).

En una línea distinta, De Tuck calcula los “sonidos” que algunas variedades específicas reproducen, permitiendo así que escuchemos realmente el sonido de una variedad (existe un disco que acompaña uno de los artículos de Gordon con algunas piezas tocadas con música de pianos toroidales).

En este trabajo, presentaremos los elementos necesarios para llevar a cabo las pruebas de Kac “a rigor”, generalizando un poco las ideas en sus métodos y algunos de los resultados. Resulta interesante como una pregunta aparentemente inocente como “¿podemos escuchar la forma del tambor?” puede ser el pretexto para introducirnos en muchas áreas importantes de las matemáticas, en nuestro intento por “escuchar” al tambor necesitaremos importantes nociones de análisis (real y complejo), análisis funcional, ecuaciones en derivadas parciales, geometría y análisis asintótico. Podríamos ir más lejos aún (no entraremos por ejemplo en las extensiones a geometría diferencial, las técnicas utilizadas para la creación del contraejemplo o las distintas técnicas de aproximación para conocer la información que podemos escuchar), este problema sigue siendo de interés hasta nuestros días y puede ser estudiado desde muchos y distintos puntos de vista.

En nuestro primer capítulo presentamos la pregunta *¿podemos escuchar la forma del tambor?* y definimos en concreto a qué nos referimos.

En el segundo capítulo presentamos los valores y funciones propias del operador de Laplace con condición de frontera homogénea, probamos, usando métodos variacionales clásicos, que existe un conjunto creciente de valores propios positivos los cuales se acumulan sólo en el infinito; a su vez, probamos que a cada uno de estos valores propios le corresponde una función propia las cuales forman una base ortonormal del espacio de funciones con cuadrado Lebesgue-integrable ( $L_2$ ). Argumentaremos también que estas funciones son  $C^\infty$  utilizando un resultado sobre regularidad de soluciones al operador de Laplace.

En el tercer capítulo probamos que uno no puede “escuchar” la forma del tambor; presentamos el contraejemplo dado por Gordon, Webb y Wolpert y presentaremos la transformación construida a partir de la prueba de Bérard al teorema de Sunada, probar que esta transformación efectivamente manda una “onda” de cierta frecuencia en un tambor a otra onda de la misma frecuencia en el otro tambor requiere únicamente observaciones elementales; después simplemente haremos las observaciones necesarias para “invertir” esta transformación (que en esencia es usar la misma transformación). Quizá parezca precipitado mostrar este resultado tan pronto, pero nos da una muy buena idea de lo que significa que dos tambores “suenen” igual, además, como ya dijimos, no queremos generar la idea de que este contraejemplo termina el tema.

En nuestro cuarto capítulo presentamos la definición de *núcleo de calor* para un dominio dado; probaremos una propiedad importante sobre las soluciones a la ecuación de calor (el *principio del máximo*) y la utilizaremos para proponer y probar una desigualdad por contenciones para los núcleos de calor, la cual resulta esencial en nuestro trabajo.

En nuestro quinto capítulo, mostraremos la primera solución explícita a la

ecuación de calor: la solución para el problema de condiciones iniciales y frontera libre; comentaremos sobre la noción de *solución fundamental* para operadores generales, probaremos que nuestro núcleo para frontera libre (el núcleo de calor en el plano) es una solución fundamental, cuyas propiedades de regularidad se extienden a toda solución a la ecuación de calor.

En nuestro sexto capítulo simplemente construiremos varias soluciones a la ecuación de calor en dominios particulares, los cuales nos permitirán utilizar nuestra desigualdad probada en el capítulo cuatro para hacer estimaciones sobre lo que podemos escuchar de un tambor.

En nuestro séptimo capítulo, mostraremos las pruebas de que, bajo ciertas condiciones de frontera, uno puede escuchar al menos el área y la longitud de la frontera de un tambor, estas pruebas son esencialmente las pruebas de Kac a los resultados de Weyl y Carleman; daremos condiciones más precisas que las que Kac da en su artículo para las cuales se cumplen nuestros resultados y daremos una prueba para el caso del tambor no convexo utilizando un argumento basado en la idea de nuestras desigualdades para núcleos de calor. Mostramos algunas consecuencias inmediatas interesantes y comentaremos sobre las dificultades que las estimaciones encuentran bajo las distintas propiedades de la frontera.

Finalmente en nuestro último capítulo, presentaremos algunos de los resultados que hasta hoy en día se conocen, comentaremos sobre las dificultades encontradas en nuestros métodos y comentaremos otros resultados y algunas de las ideas inconclusas en este trabajo.



## Parte I

Lo que significa escuchar la  
forma del tambor. Los  
valores propios del operador  
de Laplace.

# Capítulo 1

## ¿Escuchar la forma del tambor? (La ecuación de onda en $\mathbb{R}^2$ )

De antemano, tenemos que aclarar que en esta tesis no estamos estudiando ninguna cuestión de física, no estamos preocupados en ninguna cuestión de acústica ni mucho menos, nunca realizaremos ni utilizaremos mediciones ni pondremos jamás a vibrar una membrana, no nos interesa ninguna constante de densidad, tensión, etc.; ¿a qué nos referimos entonces con escuchar la forma del tambor?

Una función  $u(x, y, t)$  satisface la ecuación de onda en un dominio  $\Omega$  (en dos dimensiones) si:

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= u_{tt} & (x, y) \in \Omega & \quad t \geq 0 \\ u|_{\partial\Omega} &= 0 & t & \geq 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

En este caso, hemos agregado además la condición de frontera  $u = 0$ .

Una membrana fija en un contorno  $\partial\Omega$  al vibrar, satisface esta ecuación, donde la condición de frontera homogénea representa que la membrana se sujeta en la frontera (al atar el cuero al tambor, estamos fijándolo sobre el contorno del tambor).

Es importante mencionar que estamos omitiendo coeficientes en esta ecuación, los cuales están dados por el material y la tensión de la membrana, que en nuestro caso consideramos todos unitarios. Insistimos en que nuestros intereses no tienen ninguna motivación física real, pero podemos imaginar a cualquier dominio decente  $\Omega$  como el contorno de un tambor sobre el cual estamos colocando nuestra membrana “ideal”.

Busquemos las soluciones armónicas en el tiempo a esta ecuación (es decir las soluciones que se pueden expresar de la forma  $f(x, y)g(t)$  y que representan entonces ondas que no viajan dentro del dominio, sino que son vibraciones estables que “oscilan” con el tiempo y que producen sonidos “estables” por decirlo

de alguna manera, o tonos).

Denotando al laplaciano en las coordenadas espaciales  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  como  $\Delta$ , vemos que:

$$\Delta u = g(\Delta f)$$

$$u_{tt} = f(g'')$$

lo que al buscar soluciones no triviales nos convierte nuestra ecuación (1.1) en:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta f}{f}(x, y) &= \frac{g''}{g}(t) & (x, y) \in \Omega & \quad t \geq 0 \\ f|_{\partial\Omega} &= 0 \end{aligned}$$

en donde cada lado de la ecuación depende de variables distintas. Esto implica que ambos lados deben ser constantes, obteniendo entonces dos ecuaciones:

$$\Delta f = -\lambda f \quad f|_{\partial\Omega}$$

y

$$g'' = -\lambda g \quad t \geq 0.$$

Por el momento ignoraremos esta segunda ecuación, cuya forma general de las soluciones es bien conocida (dependiendo del signo de la constante) y que además, carece de las condiciones iniciales suficientes para estar explícitamente determinada. Sólo adelantaremos que se probará (en el siguiente capítulo) que esta constante es por fuerza positiva (de ahí nuestro signo negativo en la ecuación), que nos deja con soluciones de la forma  $a \cos(\sqrt{\lambda}t) + b \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}t)$ .

Nuestro interés está en la primera ecuación, la *ecuación de valores propios* para el operador de Laplace, con condición de Dirichlet homogénea. Dedicaremos el siguiente capítulo a esta ecuación, sobre todo a propiedades muy importantes de sus soluciones, las cuales tienen una interpretación central para el título de este capítulo: Las soluciones de esta forma a la ecuación de onda, como ya se mencionó, representan las vibraciones armónicas, que un tambor ideal con forma  $\Omega$  puede reproducir, donde la constante  $\lambda$  en nuestra ecuación arriba es precisamente el cuadrado de la frecuencia de oscilación (el tono, ver la forma general

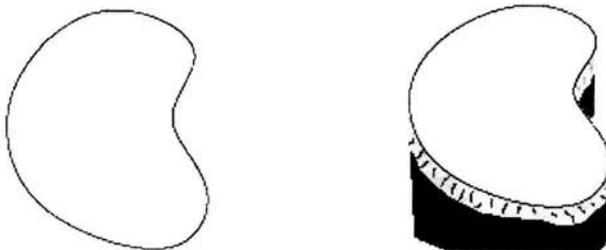


Figura 1.1: Un dominio en el plano (izquierda) y un tambor (derecha).

---

para  $g$  arriba) de la onda  $f$ , Cualquier sonido que este tambor pueda reproducir será una combinación lineal de ondas vibrando a dichas frecuencias.

Probaremos que este conjunto de “tonos” para un dominio decente acotado (¡un tambor, después de todo!) existe y es numerable (y siempre infinito).

Entonces, todo tambor puede reproducir un conjunto numerable de tonos musicales, en matemáticas, estos “tonos” son mejor conocidos como *valores propios* para el operador de Laplace con condición de Dirichlet donde la onda  $f$  asociada al tono  $\lambda$  es la *función propia*; estas funciones y valores propios, pertenecen a un concepto mucho más general que los sonidos de un tambor, y son por sí mismos de gran importancia en la teoría (a lo largo de este trabajo se podrán encontrar algunas muestras de su importancia, útiles para este caso en particular).

Es un problema clásico en matemáticas el calcular estos valores propios a partir de un dominio  $\Omega$ , pero aprovechando la familiaridad que nuestro contexto ofrece a un concepto tan abstracto plantearemos el problema inverso de una manera un tanto simple y quizá atractiva: Si se tuviera un oído tan fino (y el tiempo necesario) ¿podríamos saber la forma que tiene un tambor el cual no está a nuestra vista?, ¿podemos estar seguros que si dos tambores suenan igual entonces son idénticos?. Si conociéramos en su totalidad el conjunto de valores propios asociados a un conjunto desconocido del plano  $\Omega$ , ¿tenemos información suficiente para determinar  $\Omega$ ?, ¿si dos dominios del plano tienen en mismo conjunto de valores propios podemos decir que son geoméricamente congruentes en el sentido de isometría?

¿Podemos escuchar la forma del tambor?



## Capítulo 2

# Valores y funciones propias del Laplaciano.

“Para escucharte mejor...”

-El lobo feroz.

Sea  $\Omega$  un dominio abierto en  $\mathbb{R}^2$  apropiado.

Decimos que una función  $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  distinta de cero es una función propia para el operador de Laplace con condición de Dirichlet homogénea, si para alguna constante  $\lambda$  (el valor propio asociado a  $f$ ) se cumple que:

$$\begin{aligned} -\Delta f(x) &= \lambda f(x) & x \in \Omega \\ f(x) &= 0 & x \in \partial\Omega. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Demostraremos aquí que para un dominio  $\Omega$  acotado, existe un conjunto numerable de funciones propias  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C^{\infty}(\Omega)$  asociado al conjunto de valores propios  $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$  que además cumple  $\lambda_{i+1} \geq \lambda_i > 0$  y  $\lim (\lambda_n)_{n \rightarrow \infty} = \infty$ . Además si estas funciones se toman normalizadas en  $L_2(\Omega)$ , entonces este conjunto de funciones propias constituye una *base ortonormal* de  $L_2(\Omega)$ .

Para esto, utilizaremos algunos resultados (unos elementales y otros no tanto) de análisis funcional y de cálculo de variaciones, de los cuales (en su mayoría) debido a la longitud y complejidad técnica de sus pruebas, nos limitaremos a dar las referencias correspondientes. Por tanto también supondremos que se está familiarizado con las nociones básicas para trabajar en espacios de Hilbert (producto interior, norma, convergencia, convergencia débil<sup>1</sup>, etc.)

Antes de comenzar, daremos una introducción básica a los espacios y la notación con la que trabajaremos:

---

<sup>1</sup>  $f_n \rightarrow f$  débilmente si  $\langle f_n, h \rangle \rightarrow \langle f, h \rangle$  para todo  $h$  en nuestro espacio.

Al espacio de funciones  $L_2(\Omega)$  lo entendemos como el espacio de funciones reales cuadrado integrables en el sentido de Lebesgue en  $\Omega$  (es decir que si  $\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx < \infty$ , entonces  $f \in L_2(\Omega)$ ). Este espacio es completo bajo la norma inducida por el producto interior definido por  $\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} fg dx$ .

Al espacio de funciones  $H^1(\Omega)$  lo entendemos como la completación del espacio de funciones  $C^1$  con gradiente cuadrado integrable (es decir  $\int_{\Omega} |\nabla f|^2 dx < \infty$ ) bajo la norma inducida por el producto interior definido por  $\langle f, g \rangle_1 = \langle f, g \rangle + \langle \nabla f, \nabla g \rangle$ .<sup>2</sup>

Al espacio de funciones  $H_0^1(\Omega)$  lo definiremos como el espacio de funciones en  $C_0^1(\Omega)$  (funciones clase 1 de soporte compacto) con gradiente cuadrado integrable completado bajo la norma inducida por  $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ .

Reiteramos: denotaremos entonces, de aquí en adelante, a la norma en  $L_2(\Omega)$  para una función  $f$  por  $\|f\|$  y a la norma en  $H^1(\Omega)$  por  $\|f\|_1$ ; denotaremos el producto interior de dos funciones  $f$  y  $g$  en  $L_2(\Omega)$  por  $\langle f, g \rangle$ , análogamente  $\langle f, g \rangle_1$  denotará el producto interior de  $f$  y  $g$  en  $H^1(\Omega)$ .

Utilicemos como espacio de trabajo a  $H_0^1(\Omega)$  y consideremos el siguiente funcional:

$$F(f) = \int_{\Omega} |\nabla f|^2 dx.$$

Ya que nos interesa que este conjunto de funciones propias esté normalizado en  $L_2(\Omega)$ , usaremos la condición:

$$G(f) = \int_{\Omega} f^2 dx - 1 = 0$$

(debería ser claro que para cada valor propio existe todo un espacio lineal de soluciones). Nuestra intención será minimizar el funcional  $F$  sujeto a la condición  $G$  justificando primero que efectivamente se alcanza este mínimo en nuestro espacio de trabajo y después veremos que este mínimo es en efecto una de las soluciones buscadas (tanto  $F$  como  $G$  son continuos en  $H^1(\Omega)$ ). Busquemos

---

<sup>2</sup>Este tipo de espacios son conocidos como espacios de Sobolev, los cuales pueden ser definidos de maneras distintas; para una descripción más detallada véase [11, p. 165]

primero nuestras derivadas de Fréchet para  $F$  y  $G$ :

$$\begin{aligned} F(f+g) &= \int_{\Omega} |\nabla(f+g)|^2 dx = \\ &= \int_{\Omega} |\nabla f|^2 dx + 2 \int_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g dx + \int_{\Omega} |\nabla g|^2 dx = \\ &= F(f) + 2 \int_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g dx + o(\|g\|_1) \\ \\ G(f+g) &= \int_{\Omega} (f+g)^2 dx - 1 = \\ &= \int_{\Omega} f^2 dx + 2 \int_{\Omega} fg dx + \int_{\Omega} g^2 dx - 1 = \\ &= G(f) + 2 \int_{\Omega} fg dx + o(\|g\|_1). \end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos:

$$\begin{aligned} DF(f)g &= 2 \int_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g dx \\ DG(f)g &= 2 \int_{\Omega} fg dx. \end{aligned}$$

Verifiquemos ahora, que efectivamente  $F$  alcanza su mínimo sobre nuestro espacio de trabajo sujeto a la condición  $G$ . Tomemos:

$$\alpha = \inf \{F(u) : u \in H_0^1(\Omega) \quad G(u) = 0\} \geq 0.$$

Tomemos ahora una sucesión de elementos  $\{u_n\} \subset H_0^1(\Omega)$  tales que  $G(u_n) = 0$  y  $F(u_n) \rightarrow \alpha$ . Es claro que tenemos  $F(u_n) \leq M$  para alguna constante  $M \geq \alpha$ . Echaremos mano a la siguiente desigualdad:

**Teorema 2.1** (Desigualdad de Poincaré)

Si  $\Omega$  es un dominio acotado, existe una constante  $C = C(\Omega)$  tal que:

$$\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \leq C \int_{\Omega} |\nabla f(x)|^2 dx$$

para toda  $f$  en  $H_0^1(\Omega)$ .

La prueba de este teorema es sencilla: se encaja  $\Omega$  en un cuadro, extendiendo nuestras funciones a cero fuera de  $\Omega$  y luego se usa integración por partes para funciones  $f \in C_0^1(\Omega)$ , extendiendo por densidad a  $H_0^1(\Omega)$ . Véase [11, p. 173] para la prueba completa.

Volviendo a nuestra sucesión, usando esta desigualdad:

$$\begin{aligned} \|u_n\|_1^2 &= \|u_n\|^2 + \|\nabla u_n\|^2 \leq \\ &\leq (1+C)\|\nabla u_n\|^2 = (1+C)F(u_n) \leq \end{aligned}$$

$$\leq (1 + C)M$$

es decir que nuestra sucesión  $\{u_n\}$  es acotada en la norma  $H^1(\Omega)$ . Usaremos ahora el siguiente resultado<sup>3</sup>:

**Teorema 2.2** (Teorema de compacidad de Rellich) *Todo conjunto acotado en  $H_0^1(\Omega)$  es precompacto en  $L_2(\Omega)$ . (Es decir: contiene una sucesión de Cauchy en  $L_2(\Omega)$ ).*

Este último resultado, y el hecho de que todo espacio de Hilbert es, localmente, débilmente compacto<sup>4</sup>, implican que podemos obtener una subsucesión  $\{u_{n_j}\}$  y un elemento  $f \in H_0^1(\Omega)$  que cumplen que:

$$u_{n_j} \rightarrow f \quad \text{en } L_2(\Omega) \quad u_{n_j} \rightharpoonup f \quad \text{debilmente en } H^1(\Omega)$$

Además, ya que  $G(u_{n_j}) = 0$ , es claro que  $G(f) = 0$  (ya que  $G$  es precisamente la norma en  $L_2$ , y entonces  $\|f\| = 1$ ). También, por construcción tenemos que  $F(u_{n_j}) \rightarrow \alpha$ .

Esto nos dice que

$$\|u_{n_j}\|_1^2 = \|u_{n_j}\|^2 + \|\nabla u_{n_j}\|^2 = 1 + F(u_{n_j}) \rightarrow 1 + \alpha$$

por otro lado, tenemos la desigualdad

$$\langle \nabla u_{n_j}, \nabla f \rangle \leq \|\nabla u_{n_j}\| \|\nabla f\|$$

que al tomar límite inferior de ambos lados nos lleva a

$$\begin{aligned} \|\nabla f\|^2 &\leq \liminf \|\nabla u_{n_j}\| \|\nabla f\| = \liminf \sqrt{F(u_{n_j})} \|\nabla f\| = \sqrt{\alpha} \|\nabla f\| \\ &\Rightarrow \|\nabla f\|^2 \leq \alpha \end{aligned}$$

pero también por construcción de  $\alpha$

$$\alpha \leq F(f) = \|\nabla f\|^2$$

por lo que concluimos que necesariamente

$$\|f\|_1^2 = 1 + F(f) = 1 + \alpha = \lim \|u_{n_j}\|_1^2$$

es decir que en realidad<sup>5</sup>  $u_{n_j} \rightarrow f$  en  $H^1(\Omega)$ , y en particular

$$F(f) = \alpha = \min \{F(u) : u \in H_0^1(\Omega) \quad G(u) = 0\}.$$

<sup>3</sup>Puede consultarse [11, cap. 6] ó [7, cap. 2] para una prueba y otros resultados relacionados.

<sup>4</sup>Esto es cierto en general, pero se puede probar de manera sencilla para espacios separables (i.e. con una base numerable, como en nuestro caso) tomando los coeficientes de Fourier de cada elemento en un conjunto acotado y despues encontrando una sucesión convergente de coeficientes de Fourier usando una diagonal de Cantor.

<sup>5</sup>Pues

$$\|u_{n_j} - f\|_1^2 = \langle u_{n_j} - f, u_{n_j} - f \rangle = \|u_{n_j}\|^2 - \langle u_{n_j}, f \rangle - \langle f, u_{n_j} \rangle + \|f\|^2 \rightarrow \|f\|^2 - \|f\|^2 - \|f\|^2 + \|f\|^2 = 0$$

En general la convergencia débil junto con convergencia de la norma implica convergencia en norma.

Tenemos entonces que en  $f$  se satisfacen las condiciones de los multiplicadores de Lagrange<sup>6</sup>, es decir, existe una constante  $\mu \in \mathbb{R}$  tal que:

$$DF(f)g = \mu DG(f)g \quad \forall g \in H_0^1(\Omega)$$

(ya que para el caso  $f = g$  se tiene que  $DF(f)g \neq 0 \neq DG(f)g$ ).

Tomando  $\lambda = \mu$ , esto nos lleva a que:

$$\int_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g \, dx = \lambda \int_{\Omega} fg \, dx \quad \forall g \in H_0^1(\Omega). \quad (2.2)$$

Notemos aquí que para  $u, v \in C_0^\infty(\Omega)$  el Teorema de Green nos indica que

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} (-\Delta u)v \, dx = \int_{\Omega} u(-\Delta v) \, dx$$

es decir que la ecuación (2.2) nos dice precisamente que  $f$  es una *solución débil* en  $H_0^1(\Omega)$  a la ecuación (2.1)<sup>7</sup>.

Antes de continuar, recordemos que para un valor propio fijo, cualquier solución genera todo un espacio lineal de soluciones. Por el momento únicamente conocemos una función propia correspondiente a un valor propio para el cual podrían existir aún muchas otras soluciones linealmente independientes a la ya mostrada; por un momento nos olvidaremos de esto y pensemos antes en la posibilidad de que existan otros valores propios:

Renombremos a nuestra solución  $f$  y nuestro valor  $\lambda$  por  $f_1$  y  $\lambda_1$  respectivamente. Tomando  $g = f_1$  en nuestra ecuación (2.2) tenemos que  $F(f_1) = \lambda_1$  (es decir que  $\lambda_1 = \alpha$ ) y además tomando en cuenta que  $F(u) = 0 \Leftrightarrow \nabla u = 0$  lo que implicaría  $u$  constante y entonces la condición de frontera implica que  $u = 0$  lo que contradice  $G(u) = 0$ , tenemos entonces que necesariamente  $\lambda_1 > 0$ .

Supongamos que conocemos  $\lambda_2 \neq \lambda_1$  tal que para  $f_2 \in H_0^1(\Omega)$  se cumple (2.2) si sustituimos  $\lambda$  por  $\lambda_2$  y  $f$  por  $f_2$  respectivamente; entonces tendríamos:

$$\begin{aligned} (\lambda_1 - \lambda_2) \int_{\Omega} f_1 f_2 \, dx &= \lambda_1 \int_{\Omega} f_1 f_2 \, dx - \lambda_2 \int_{\Omega} f_1 f_2 \, dx = \\ &= \int_{\Omega} \nabla f_1 \cdot \nabla f_2 \, dx - \int_{\Omega} \nabla f_1 \cdot \nabla f_2 \, dx = 0 \end{aligned}$$

y ya que  $(\lambda_1 - \lambda_2) \neq 0$  tenemos:

$$\int_{\Omega} f_1 f_2 \, dx = \langle f_1, f_2 \rangle = 0$$

<sup>6</sup>Vale la pena hacer notar que en este caso estamos encontrando un mínimo para resolver una ecuación y no viceversa como suele hacerse en cálculo.

<sup>7</sup>Esto es  $\langle f, -\Delta v \rangle = \lambda \langle f, v \rangle$  para toda  $v \in C_0^\infty(\Omega)$ , lo cual es denso en  $H_0^1(\Omega)$ ; Pero para  $u, v$  en  $C_0^\infty(\Omega)$  se tiene que  $\langle u, -\Delta v \rangle = \langle -\Delta u, v \rangle$  (es decir que  $-\Delta$  es un operador autoadjunto en  $L_2$ ).

lo que nos dice que cualesquiera dos funciones propias que correspondan a valores propios distintos, deben ser ortogonales entre sí en  $L_2(\Omega)$ . Así que definiremos un nuevo espacio de trabajo:  $X_1 = \{u : u \in H_0^1(\Omega), u \perp_{L_2} f_1\}$ , todas las funciones en  $H_0^1(\Omega)$  que son ortogonales a nuestra primera función propia  $f_1$ .

Tomando en cuenta todo lo anterior, buscaremos nuestra segunda función propia  $f_2$  (independientemente de que  $\lambda_1 = \lambda_2$  o no) en nuestro nuevo espacio  $X_1$  (el cual también es un espacio de Hilbert) y tomamos:

$$\lambda_2 = \inf \{F(u) : u \in X_1 \quad G(u) = 0\}$$

necesariamente:

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$$

y si repetimos el argumento anterior podemos verificar que efectivamente *existe*  $f_2$  en  $X_1$  tal que

$$F(f_2) = \lambda_2.$$

Repetimos este procedimiento inductivamente tomando:

$$X_n = \{u : u \in X_{n-1}, u \perp_{L_2} f_n\}$$

y

$$\lambda_{n+1} = \inf \{F(u) : u \in X_n \quad G(u) = 0\}$$

para el cual existe alguna  $f_{n+1} \in X_n$  tal que

$$F(f_{n+1}) = \lambda_{n+1}$$

lo que nos define entonces un espacio  $X_{n+1}$ , etc. . .

Obtendremos entonces una sucesión de valores propios:

$$0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_j \leq \lambda_{j+1} \leq \dots$$

a los cuales corresponde una sucesión de funciones propias  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  la cual es *ortonormal* en  $L_2$ .

De hecho si usamos (2.2) y el hecho de que por construcción  $f_i \perp_{L_2} f_j$  si  $i \neq j$  podemos verificar que para  $i \neq j$ , entonces:

$$\begin{aligned} \langle \nabla f_i, \nabla f_j \rangle &= \lambda_i \langle f_i, f_j \rangle = \lambda_j \langle f_i, f_j \rangle = 0 \\ \langle \nabla f_j, \nabla f_j \rangle &= \lambda_j \end{aligned} \quad (2.3)$$

lo que nos dice que también son funciones ortogonales (pero ya no ortonormales) en  $H_0^1(\Omega)$ .

Pero aún más que eso: si suponemos que  $\{\lambda_n\}$  es acotada por alguna constante  $K$ , entonces (2.3) implica que

$$\|f_n\|_1^2 = 1 + \lambda_n \leq K + 1.$$

Si utilizamos el Teorema de Rellich (2.2) obtendremos una sucesión  $\{f_{n_k}\}$  de Cauchy en  $L_2$ , es decir:

$$\|f_{n_j} - f_{n_i}\| \rightarrow 0 \quad i \rightarrow \infty \quad j \rightarrow \infty$$

pero nos basta  $k \neq l$  para asegurar que:

$$\|f_k - f_l\|^2 = 2$$

y por lo tanto no es posible que  $\{\lambda_n\}$  sea acotada. Por lo tanto concluimos que  $\lambda_n \rightarrow \infty$ .

Esto nos garantiza que en nuestra lista de valores propios sólo se puede repetir un número finito de veces cada valor propio y que entonces el espacio vectorial asociado a un mismo valor propio es de dimensión finita. En cierto sentido (abusando un poco), podemos afirmar que este argumento nos basta para estar ahora seguros de que en nuestra lista aparecerán efectivamente todos los generadores de los espacios de soluciones para todos los valores propios posibles. Dejaremos este hecho totalmente en claro probando que de hecho tenemos algo más fuerte: como ya habíamos anunciado, probaremos que esta familia  $\{f_n\}$  es de hecho una base ortonormal para el espacio de funciones  $L_2(\Omega)$ .

Esto es:

$$\forall g \in L_2(\Omega) \quad \text{se tiene} \quad g = \sum_{n=1}^{\infty} \langle g, f_n \rangle f_n$$

es decir que si

$$g_k = \sum_{n=1}^k \langle g, f_n \rangle f_n$$

entonces

$$\|g_k - g\| \rightarrow 0 \quad k \rightarrow \infty$$

Tomemos primero  $g \in H_0^1(\Omega)$ , definamos  $\alpha_n = \langle g, f_n \rangle$  y  $\rho_k = g - g_k$ . Para  $n = 1, \dots, k$

$$\langle \rho_k, f_n \rangle = \langle g, f_n \rangle - \langle g_k, f_n \rangle = \alpha_n - \alpha_n = 0$$

$$\Rightarrow \rho_k \in X_k$$

(para el mismo  $X_k$  definido anteriormente).

Puesto que tomamos  $g \in H_0^1(\Omega)$  y  $g_k = \sum_{n=1}^k \alpha_n f_n$  con  $f_n \in H_0^1(\Omega)$ , sabemos

que entonces  $\rho_k \in H_0^1(\Omega)$ , por lo que podemos sustituir  $v = \rho_k$  en la ecuación (2.2) para  $n = 1, \dots, k$ :

$$\langle \nabla \rho_k, \nabla f_n \rangle = \lambda_n \langle \rho_k, f_n \rangle = 0$$

usando esto, podemos escribir

$$\|\nabla g\|^2 = \|\nabla \rho_k + \nabla \left( \sum_{n=1}^k \alpha_n f_n \right)\|^2 = \|\nabla \rho_k\|^2 + \|\nabla \left( \sum_{n=1}^k \alpha_n f_n \right)\|^2.$$

Usando (2.3) tenemos que  $\|\nabla \left( \sum_{n=1}^k \alpha_n f_n \right)\|^2 = \sum_{n=1}^k \alpha_n^2 \lambda_n$  y entonces:

$$\|\nabla g\|^2 = \|\nabla \rho_k\|^2 + \sum_{n=1}^k \alpha_n^2 \lambda_n$$

en donde  $\|\nabla g\|^2$  es fijo y  $\sum_{n=1}^k \alpha_n^2 \lambda_n$  es creciente ( $\lambda_n > 0$ ), lo que implica que  $\|\nabla \rho_k\|^2$  es decreciente.

Ya que para cualquier constante  $c \neq 0$ , tenemos que

$$\frac{\int_{\Omega} \|\nabla cu\|^2 dx}{\int_{\Omega} (cu)^2 dx} = \frac{c^2 \int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 dx}{c^2 \int_{\Omega} u^2 dx} = \frac{\int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 dx}{\int_{\Omega} u^2 dx}$$

reescribimos nuestros valores propios como:

$$\lambda_{n+1} = \inf \{ F(u) : u \in X_n \quad G(u) = 0 \} = \inf_{u \in X_n} \frac{\int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 dx}{\int_{\Omega} u^2 dx}.$$

Esto último y el hecho que  $\rho_k \in X_k$  nos lleva a

$$\lambda_{k+1} \|\rho_k\|^2 \leq \|\nabla \rho_k\|^2.$$

Como  $\lambda_{k+1} \rightarrow \infty$  y  $\|\nabla \rho_k\|^2$  es decreciente concluimos entonces que

$$\|\rho_k\|^2 \rightarrow 0.$$

Con esto queda probado el resultado para  $g \in H_0^1(\Omega)$ .

Para  $g \in L_2(\Omega)$  argumentaremos por densidad: sabemos que para  $\varepsilon > 0$  arbitraria existe  $g_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$  tal que  $\|g - g_\varepsilon\| \leq \varepsilon$ . Tomemos  $g_k$  como antes, definamos también  $\alpha_n^\varepsilon = \langle g_\varepsilon, f_n \rangle$  y observamos que:

$$\|g - g_k\|^2 \leq \|g - g_\varepsilon\|^2 + \|g_\varepsilon - \sum_{n=1}^k \alpha_n^\varepsilon f_n\|^2 + \|\sum_{n=1}^k \alpha_n^\varepsilon f_n - g_k\|^2$$

donde

$$\|\sum_{n=1}^k \alpha_n^\varepsilon f_n - g_k\|^2 = \|\sum_{n=1}^k (\alpha_n^\varepsilon - \alpha_n) f_n\|^2 = \sum_{n=1}^k (\alpha_n^\varepsilon - \alpha_n)^2$$

Notamos que  $\alpha_n^\varepsilon - \alpha_n = \langle (g - g_\varepsilon), f_n \rangle$  y por la desigualdad de Bessel obtenemos

$$\sum_{n=1}^k (\alpha_n^\varepsilon - \alpha_n)^2 \leq \|g - g_\varepsilon\|^2$$

por lo que concluimos

$$\|g - g_k\|^2 \leq 2\|g - g_\varepsilon\|^2 + \|g_\varepsilon - \sum_{n=1}^k \alpha_n^\varepsilon f_n\|^2$$

Si  $\varepsilon \rightarrow 0$ , entonces el primer término se anula.

Si  $k \rightarrow \infty$ , acabamos de probar que el segundo término se anula.

Esto es suficiente para estar seguros que entonces  $\|g - g_k\| \rightarrow 0$  lo que completa nuestra demostración de que la familia de funciones propias es una *base ortonormal* de  $L_2(\Omega)$ .

Basta entonces verificar que nuestras funciones propias efectivamente son funciones suaves, para esto tendremos que hacer referencia a un caso particular de un resultado más fuerte pero básico en la teoría de regularidad para soluciones débiles a operadores elípticos (en nuestro caso  $-\Delta$ ):

**Teorema 2.3** *Si  $u \in H^1(\Omega)$  es una solución débil a  $-\Delta u = h$  y además se tiene que  $h \in H^k(\Omega)$ , entonces  $u \in H^{k+2}(\Omega')$  para cualquier  $\Omega' \subset\subset \Omega$ .*

(Véase [11, cap. 8, p. 254] o si se desea, esto se puede sustituir de una forma similar a lo que haremos a continuación por el *teorema del ojal*, probado en [7, cap. 6])

Necesitamos primero aclarar qué es el espacio  $H^k$ , lo que haremos de inmediato sin mucho detalle: es el espacio de funciones  $h \in C^\infty$  completadas bajo la norma que considera la suma de las normas  $L_2$  de las derivadas de  $h$  hasta orden  $k$ .

Si damos este resultado por hecho, nos basta con ver que para una sucesión de compactos  $\{\Omega_n\}$  tales que  $\Omega_j \subset\subset \Omega_{j+1} \subset\subset \Omega$  y  $\Omega_n \rightarrow \Omega$  entonces tenemos por el teorema 2.3 que si  $f_j$  está en  $H^1(\Omega)$  y satisface  $-\Delta f_j = \lambda_j f_j$  (como ya hemos probado), entonces  $f_j \in H^3(\Omega_1)$  (ya que claramente  $\lambda_j f_j \in H^1(\Omega)$ ); si procedemos por inducción, tenemos que  $f_j \in H^{1+2n}(\Omega_n)$ , por lo cual necesariamente  $f_j \in C^\infty(\Omega_k)$  para cualquier número natural  $k$ , pero  $\Omega_k \rightarrow \Omega$  y entonces  $f_j \in C^\infty(\Omega)$ .

Puede que nuestra prueba no deje satisfechos a muchos, ya que estamos suponiendo un resultado que prácticamente por sí mismo prueba lo que buscamos; desgraciadamente la naturaleza de estos resultados implica pruebas largas y delicadas, las cuales prolongarían demasiado este trabajo pero sobre todo nos distraerían de las ideas principales. Las referencias [11] y [7] contienen un trato

muy razonable de estos resultados y sus pruebas.

Además, realmente nunca utilizamos de manera definitiva esta condición de regularidad para las funciones propias, pero sí el hecho de que éstas formen una base para el espacio  $L_2(\Omega)$ ; aún así, nos parece una propiedad importante sobre estas soluciones especiales que no merece dejarse de lado por completo.

## Capítulo 3

# No podemos escuchar la forma del tambor.

Tomemos dos tambores distintos como se muestran en la figura 3.1. Pensemos que tenemos una solución a la ecuación de onda  $\Phi$  para el primer tambor de frecuencia  $\lambda$ , o equivalentemente, tenemos una función propia  $\Phi$  sobre el tambor, con valor propio  $\lambda$ .

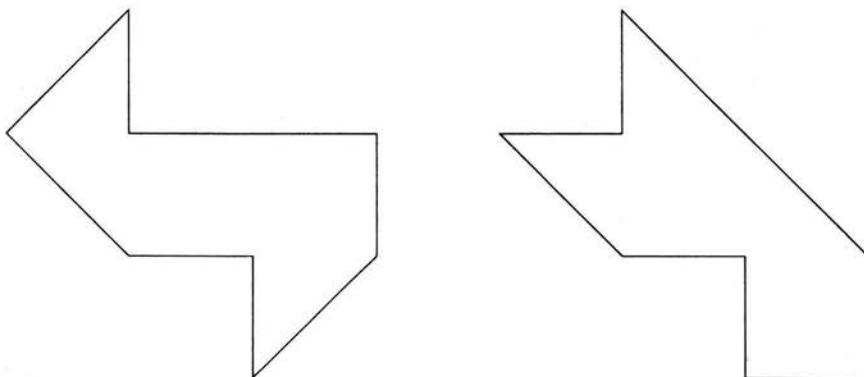


Figura 3.1: Dos tambores distintos.

Separemos ambos tambores en 7 triángulos congruentes cada uno como se muestra en la figura 3.2 y pongamos etiquetas A, B, ..., G para los triángulos del primero y 1, 2, ..., 7 para los del segundo. Identifiquemos las fronteras de los triángulos con  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  como se muestra en la figura; estas etiquetas están puestas en cada triángulo de manera que dentro del tambor, los lados adyacentes de los triángulos siempre comparten una frontera con la misma etiqueta.

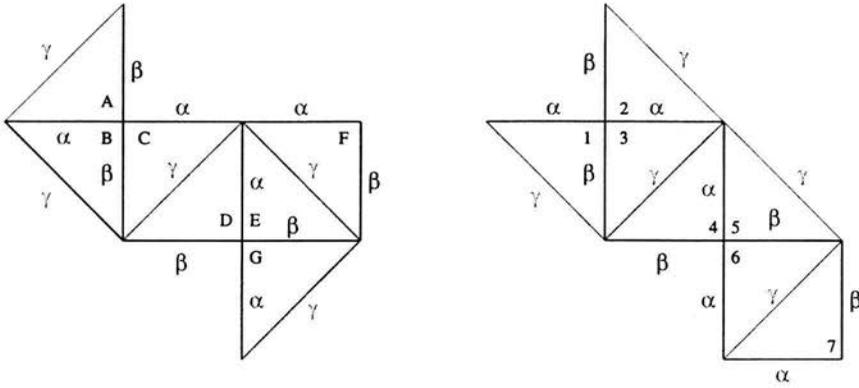


Figura 3.2: Los tambores partidos y etiquetados.

Podemos pensar que el primer tambor (del lado izquierdo de la figura) lo construimos partiendo del triángulo A, reflejándolo sobre  $\alpha$  para obtener B, posteriormente reflejamos B por  $\beta$  para obtener C, etc. (guiarse por la figura 3.2); de la misma manera construimos el otro tambor.

Tenemos entonces dos tambores formados ambos por 7 triángulos idénticos con fronteras identificadas. También tenemos una función definida sobre el primer tambor, pensemos en esta función como 7 funciones todas sobre un mismo *dominio orientado*  $T$  (nuestro triángulo de fronteras identificadas) y tomemos como  $\Phi_A$  a la función sobre el triángulo A (con la orientación del triángulo A sobre el primer tambor),  $\Phi_B$  a la función sobre el triángulo B (con su orientación como está sobre el tambor), etc. Estas 7 funciones, son las piezas de una onda de frecuencia  $\lambda$  sobre nuestro primer tambor.

Definamos ahora otras 7 funciones  $\Psi_1, \dots, \Psi_7$  usando la siguiente matriz:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_A \\ \Phi_B \\ \Phi_C \\ \Phi_D \\ \Phi_E \\ \Phi_F \\ \Phi_G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \\ \Psi_5 \\ \Psi_6 \\ \Psi_7 \end{pmatrix}$$

Es decir  $\Psi_1 = -\Phi_A + \Phi_B + \Phi_G$ ,  $\Psi_2 = \Phi_B - \Phi_C + \Phi_D$ , etc... (Notemos que para sumarlas debemos mantener la orientación del dominio, y de hecho los signos en la matriz garantizan que todos los sumandos en cada  $\Psi_i$  llevan de

forma natural la misma orientación).

Trataremos de aclarar esto: si del primer tambor recortamos el triángulo A y el triángulo B, no nos será posible el sobreponer estos triángulos uno sobre el otro de manera que las etiquetas de sus fronteras coincidan sin voltear uno de ellos, necesitamos voltear uno de ellos de manera que la etiqueta quede boca abajo para poder poner ambos en su misma orientación. Si imaginamos ahora a cada triángulo etiquetado con su pedazo de función correspondiente, al voltear este triángulo, estamos volteando la función sobre él, de manera que el signo de esta función cambia. No sería posible, por ejemplo, sumar  $\Phi_A$  con  $\Phi_B$ , pues los triángulos no coinciden, así que tendríamos que cambiar el signo de alguna de ellas de manera que los triángulos puedan ser superpuestos uno sobre el otro.

Afirmamos que si ahora sobreponemos estas  $\Psi_i$  sobre el segundo tambor guiándonos por las etiquetas y las orientaciones, estamos construyendo una función propia  $\Psi$  válida para el segundo tambor correspondiente al valor propio  $\lambda$  (una onda de frecuencia  $\lambda$  en el segundo tambor).

Debería quedarnos claro que cada una de estas funciones  $\Psi_i$  satisface la ecuación diferencial que nos interesa dentro de nuestro dominio orientado  $T$  (sin las condiciones de frontera), puesto que son combinaciones lineales de funciones que ya lo eran en el primer tambor; de lo que no podemos estar seguros hasta ahora es, primero, si efectivamente sobre nuestro segundo tambor la función que estamos armando efectivamente satisface las condiciones de frontera, segundo, no sabemos que efectivamente estas piezas “ensamblen” bien, es decir que tenemos que verificar que en las fronteras donde se pegan dos triángulos en el segundo tambor, efectivamente nuestra función es continua de regularidad suficiente (sabemos que en los interiores de los triángulos 1, 2,..., 7 se satisface

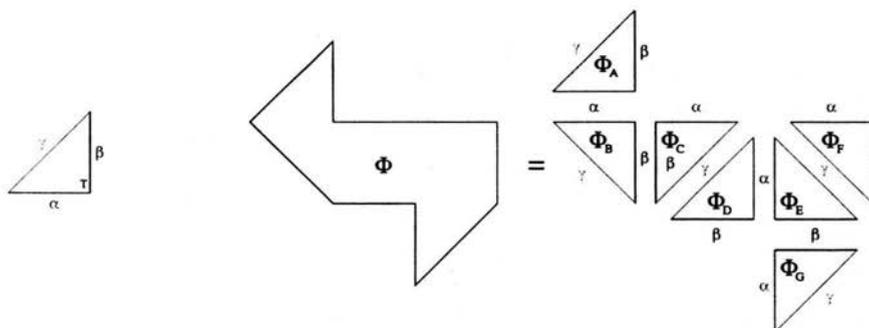


Figura 3.3: A partir del dominio fundamental  $T$ , separamos la solución sobre el primer tambor en 7 funciones sobre el dominio fundamental (en distintas orientaciones).

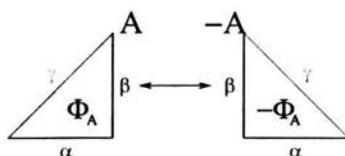


Figura 3.4: La función sobre cada triángulo esta orientada.

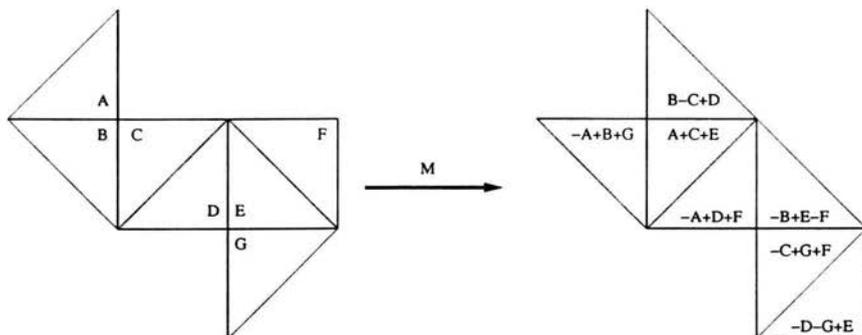


Figura 3.5: La matriz  $M$  envía una función sobre el primer tambor a una función sobre el segundo tambor.

esta ecuación, pero estos interiores dejan partes vacías en el interior de nuestro segundo tambor, y tenemos que verificar que en estos puntos no estamos perdiendo la regularidad).

Necesitaremos la siguiente proposición:

**Proposición 3.1** (Principio de reflexión).

Si tenemos algún dominio plano, abierto y conexo  $U$ , el cual tiene una simetría de reflexión, de manera que lo podemos partir en dos dominios abiertos disjuntos  $U_1$  y  $U_2$  de manera que  $U_1$  es la imagen bajo una reflexión  $\rho$  sobre una línea  $l$  de  $U_2$  (es decir que  $\rho(U_1) = U_2$ ) y  $\bar{U} = \bar{U}_1 \cup \bar{U}_2$ ; y tenemos sobre  $U_1$  una función  $f_1$  al menos en  $C^2(\bar{U}_1)$  que satisface la ecuación de valores propios (2.1), entonces si extendemos  $f_1$  de manera impar por reflexión en  $l$ , definiendo

$$f(v) = \begin{cases} f_1(v) & v \in U_1 \\ -f_1(\rho v) & v \in U_2 \\ 0 & v \in l \cap U \end{cases}$$

entonces  $f$  es una función al menos en  $C^2(U)$  que satisface la ecuación (2.1) en  $U$ .

**Prueba:** Por nuestras hipótesis y la definición de  $f$ , es inmediato que para  $v \in U_1 \cup U_2$  se satisface la ecuación, puesto que

$$\Delta f(v) = \begin{cases} \Delta f_1(v) & v \in U_1 \\ -\Delta f_1(\rho v) & v \in U_2 \end{cases}$$

y además la restricción  $f|_{U_1 \cup U_2}$  es una función  $C^2$ .

Además podemos extender  $\Delta f$  para  $v \in l \cap U$  como  $\Delta f = \lambda f = 0$ , de manera que tanto  $f$  como  $\Delta f$  son funciones continuas en  $U$ .

Nos falta verificar entonces, que esta extensión tiene efectivamente derivadas de primer orden continuas en todo  $U$ . Para simplificar pensemos que  $l = \{v|v = (0, y)\}$  de manera que  $\rho(v) = \rho((x, y)) = (-x, y)$  y tenemos que verificar entonces que  $\nabla f = (f_x, f_y)$  (el vector de derivadas parciales) esta definido y es continuo en  $l \cap U$ . Vemos primero que

$$f_x(x, y) = \begin{cases} f_{1x}(x, y) & (x, y) \in U_1 \\ f_{1x}(-x, y) & (x, y) \in U_2 \end{cases}$$

$$f_y(x, y) = \begin{cases} f_{1y}(x, y) & (x, y) \in U_1 \\ -f_{1y}(-x, y) & (x, y) \in U_2 \end{cases}$$

Por un lado, para  $(0, y_0) \in U$  tenemos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0^+, y_0)} f_x(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0^-, y_0)} f_x(x, y),$$

lo que permite extender  $f_x$  continuamente sobre todo  $U$ .

Por otro lado, para  $f_y$  no se cumple la igualdad anterior, pues tenemos signo contrario en cada mitad, pero ya que  $f \in C^2(U_1 \cup U_2)$  y  $f(v) \rightarrow 0$  si  $v \rightarrow v_0 \in l \cap U$  entonces  $f$  tiende a ser una función constante en la dirección de  $y$  y podemos concluir que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0^+, y_0)} f_y(x, y) = 0 = \lim_{(x,y) \rightarrow (0^-, y_0)} f_y(x, y),$$

lo que garantiza que  $\nabla f$  existe y es continuo sobre todo  $U$ .

Ahora sólo hace falta ver el comportamiento de las segundas derivadas; usando nuestras derivadas ya calculadas, calculamos primero:

$$f_{xy}(x, y) = \begin{cases} f_{1xy}(x, y) & (x, y) \in U_1 \\ f_{1xy}(-x, y) & (x, y) \in U_2 \end{cases}$$

y

$$f_{yx}(x, y) = \begin{cases} f_{1yx}(x, y) & (x, y) \in U_1 \\ f_{1yx}(-x, y) & (x, y) \in U_2 \end{cases}$$

Tenemos entonces que  $f_{xy} = f_{yx}$  en todo  $U$ .

Para las derivadas  $f_{xx}$  y  $f_{yy}$ , ya que en  $U$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0, y_0)} f_y(x, y) = 0$$

tenemos por tanto que en  $U$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,y_0)} f_{yy}(x,y) = 0$$

pero además  $\Delta f = \lambda f$ , y entonces necesariamente

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,y_0)} f_{xx}(x,y) = 0$$

Esto último es suficiente para garantizar  $f \in C^2(U)$ .

■

Verificaremos ahora que nuestra construcción efectivamente arroja una función propia válida sobre el segundo tambor:

Comencemos por las condiciones de frontera; para el triángulo 1 en el segundo tambor, los lados marcados con  $\alpha$  y  $\gamma$  son parte de la frontera, y sobre este triángulo estamos sumando  $\Psi_1 = -\Phi_A + \Phi_B + \Phi_G$ , sobre el primer tambor A, B y G tienen su lado  $\gamma$  en la frontera, por lo que sobre el lado  $\gamma$  del tambor 1 tenemos que  $\Phi_1$  es cero. Los triángulos A y B comparten su lado  $\alpha$  entre sí dentro del primer tambor, por lo que al restarlas, se anulan en el lado  $\alpha$  del triángulo 1, y sobre este mismo lado, la función del triángulo G vale cero pues está en la frontera del primer tambor.

Para el triángulo 2, los lados marcados con  $\beta$  y  $\gamma$  están en la frontera, aquí estamos sumando  $\Psi_2 = \Phi_B - \Phi_C + \Phi_D$ , sobre el lado  $\beta$ , B y C se anulan mutuamente pues son adyacentes por este lado en el primer tambor y D da a la frontera del mismo en su lado  $\beta$ ; en el lado  $\gamma$ , C y D se anulan por haber sido adyacentes y B originalmente tiene este lado en la frontera, por lo que queda verificado para el triángulo 2.

El triángulo 3 no da a la frontera del segundo tambor.

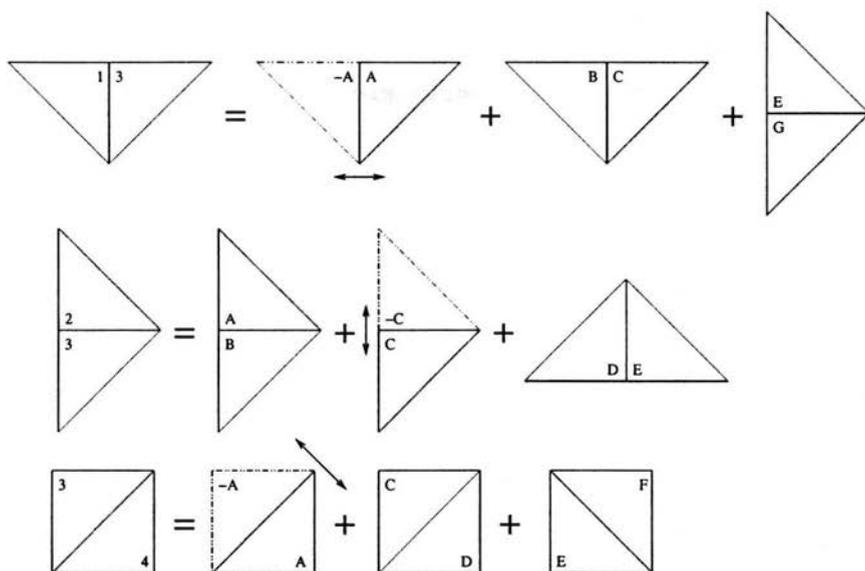
En el triángulo 4, sólo necesitamos verificar su lado  $\beta$ , la suma aquí es  $\Psi_4 = -\Phi_A + \Phi_D + \Phi_F$ , los tres triángulos A, D y F tienen su lado  $\beta$  en la frontera del primer tambor, por lo que la suma vale cero en este lado.

En el triángulo 5 hay que verificar únicamente  $\gamma$ , la suma es  $\Psi_5 = -\Phi_B + \Phi_E - \Phi_F$ , E y F se anulan mutuamente en este lado y B vale cero en el mismo.

En 6 tenemos al lado  $\alpha$ , la suma es  $\Psi_6 = -\Phi_C + \Phi_G + \Phi_F$ , en los tres triángulos,  $\alpha$  da a la frontera del primer tambor y entonces en el segundo se queda como cero.

Finalmente en 7 tenemos en la frontera a los lados  $\alpha$  y  $\beta$ , la suma es  $\Psi_7 = -\Phi_D - \Phi_G + \Phi_E$ ; para  $\alpha$ , G se anula con E y en D la función vale cero; en  $\beta$ , D y G se anulan y E se tenía un cero sobre este lado.

Hemos probado que al sobreponer nuestras funciones  $\Psi_1, \dots, \Psi_7$  sobre los triángulos 1, ..., 7 respectivamente, entonces sobre el segundo tambor la función que estamos armando satisface la condición de frontera homogénea.



Ahora debemos probar que estas piezas efectivamente encajan de manera que en las líneas de ensamble lo que se obtiene es una función lo suficientemente suave, lo único que necesitaremos es el principio de reflexión que acabamos de probar y el hecho de que sobre el primer tambor,  $\Phi$  es una función con la propiedades requeridas (i.e. es una solución).

Así que nos basta con analizar la función que estamos creando en los lados donde se unen dos triángulos:

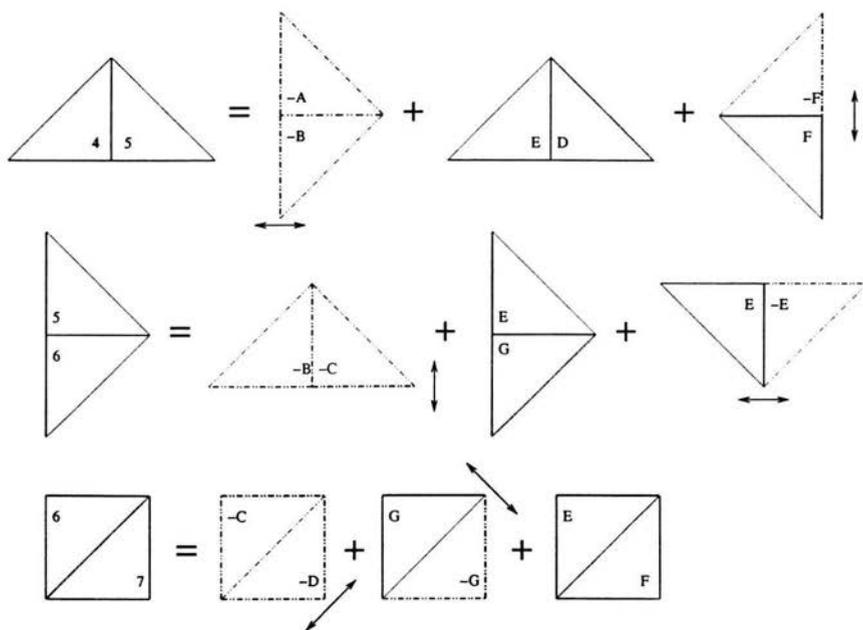
Para la unión entre 1 y 3, las sumas son  $\Psi_1 = -\Phi_A + \Phi_B + \Phi_G$  y  $\Psi_3 = \Phi_A + \Phi_C + \Phi_E$ , y el ensamble es sobre los lados marcados  $\beta$  de los triángulos; por el principio de reflexión,  $\Phi_A$  encaja correctamente con  $-\Phi_A$  porque en  $\beta$   $\Phi_A$  vale cero; B y C son adyacentes en el primer tambor por el lado  $\beta$ , lo que garantiza que  $\Phi_B$  encaja con  $\Phi_C$  ya que son las piezas de una solución en el primer tambor; de igual forma G y E son adyacentes por un lado  $\beta$  lo que asegura que en la unión de 1 y 3 nuestras funciones  $\Psi_1$  y  $\Psi_3$  forman una sola función con la regularidad requerida.

Para 2 y 3 la unión es por el lado  $\alpha$  y las sumas son  $\Psi_2 = \Phi_B - \Phi_C + \Phi_D$  y  $\Psi_3 = \Phi_A + \Phi_C + \Phi_E$ , A y B son adyacentes por  $\alpha$ , al igual que D y E; C vale cero en  $\alpha$  así que encaja bien con  $-\Phi_C$ .

Para 3 y 4 la unión es por el lado  $\gamma$  y la suma en 4 es  $\Psi_4 = -\Phi_A + \Phi_D + \Phi_F$ ; en  $\gamma$ , A es frontera del primer tambor así que el encaje de A y  $-\Phi_A$  es correcto por el principio de reflexión, C y D son adyacentes por  $\gamma$  al igual que E y F.

Para 4 y 5, la unión es por  $\alpha$  y la suma en 5 es  $\Psi_5 = -\Phi_B + \Phi_E - \Phi_F$ , A y B son adyacentes por este lado y se están sumando ambos con el mismo signo, E y D son adyacentes también por este lado, finalmente en F el lado  $\alpha$  es frontera

por lo que el ensamble con  $-F$  es correcto.



Para 5 y 6 la unión es con  $\beta$  y la suma en 6 es  $\Psi_6 = -\Phi_C + \Phi_G + \Phi_F$ ; B y C al igual que E y G son contiguos por el lado  $\beta$  y F es cero en este lado.

Finalmente, para 6 y 7 la unión es por  $\gamma$  y la suma en 7 es  $\Psi_7 = -\Phi_D - \Phi_G + \Phi_E$ ; C y D son adyacentes por este lado al igual que E y F, G vale cero sobre  $\gamma$ .

Hemos probado entonces, que si tenemos una onda  $\Phi$  de frecuencia  $\lambda$  en el primer tambor, entonces podemos obtener una onda  $\Psi$  de frecuencia  $\lambda$  en el segundo tambor; debemos hacer notar que para un valor propio que se repite, tendremos entonces para ese mismo valor propio varias funciones propias linealmente independientes, las cuales van a dar bajo esta construcción a funciones que son también linealmente independientes; en otras palabras, para cada valor propio en el espectro del primer tambor, estamos asegurando que ese mismo valor propio pertenece al espectro del segundo tambor y que éste tiene al menos la misma multiplicidad.

Hemos probado entonces, que el espectro del primer tambor está contenido en el espectro del segundo tambor.

Para probar que los espectros son los mismos, utilizaremos la misma matriz,

de la siguiente manera:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_7 \\ \Psi_6 \\ \Psi_5 \\ \Psi_4 \\ \Psi_3 \\ \Psi_2 \\ \Psi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_G \\ \Phi_F \\ \Phi_E \\ \Phi_D \\ \Phi_C \\ \Phi_B \\ \Phi_A \end{pmatrix}$$

de esta manera la misma matriz nos da una receta para obtener, dada una función propia  $\Psi$  en el segundo tambor, una función propia  $\Phi$  en el primer tambor con el mismo valor propio.

La demostración es prácticamente la misma, así que no la daremos en detalle, pero para ayudar a convencernos al respecto haremos la siguiente observación: Si seguimos la receta para construir el primer tambor reflejando los triángulos (partimos en A, reflejamos en  $\alpha$  y obtenemos B, etc...) pero intercambiamos  $\alpha$  por  $\gamma$  obtendremos de hecho el segundo tambor (partimos en 7 y reflejamos en  $\gamma$  para obtener 6, etc...) <sup>1</sup>. Así que en nuestra demostración anterior basta intercambiar A por 7, B por 6, C por 5, ..., G por 1 y finalmente  $\alpha$  por  $\gamma$  y todos los argumentos funcionarían de manera idéntica. Para estar seguros al respecto véase la figura 3.6 donde se representan los tambores como dos gráficas, donde los vértices representan el triángulo y las aristas indican mediante cuál lado se están pegando los triángulos adyacentes.

Por lo tanto, el espectro del primer tambor es idéntico al espectro del segundo tambor, incluyendo multiplicidad. Ambos tambores son dominios no congruentes bajo isometría, pero tienen el mismo espectro.

No podemos escuchar la forma del tambor.

<sup>1</sup> Véase la figura 3.6.

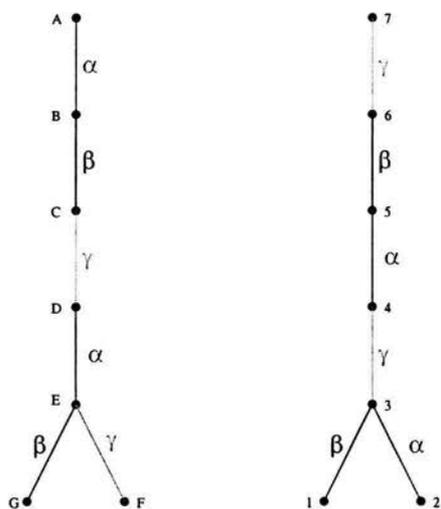


Figura 3.6: Las gráficas de armado de los dos tambores son idénticas si en alguna de ellas intercambiamos las etiquetas  $\alpha$  con las etiquetas  $\gamma$ .

## Parte II

Para poder escuchar.

## Capítulo 4

# Ecuación de calor, núcleos de calor y principio del máximo.

El objetivo principal de este capítulo, es el de presentar la ecuación de calor y probar una desigualdad básica para los núcleos de calor, la cual utilizaremos para hacer estimaciones con el espectro de nuestro tambor con soluciones específicas (y conocidas de manera explícita) sin necesidad de conocer siquiera las funciones propias asociadas al espectro que tenemos (a pesar de que también utilizaremos propiedades de ellas a lo largo del cálculo).

### 4.1. Ecuación de calor. Problema con condición inicial y condición de frontera homogénea

De particular interés para nuestro estudio será la siguiente ecuación:

$$u_t = \Delta u \tag{4.1}$$

esta ecuación es conocida como la *ecuación de calor*.

Recordemos que aquí  $\Delta$  denota el laplaciano bajo las coordenadas espaciales (no incluye la doble parcial en la variable  $t$ ).

Consideremos para un dominio apropiado  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  y una función  $g \in C_0^\infty(\Omega)$  (las funciones de soporte compacto en  $\Omega$ ) el problema:

$$\begin{aligned} u_t &= \Delta u & x \in \Omega & \quad t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x, 0) &= g(x) & x \in \Omega & \\ u(x, t) &= 0 & x \in \partial\Omega. & \end{aligned} \tag{4.2}$$

Las soluciones a este problema (soluciones de las cuales nos ocuparemos más tarde en algunos dominios particulares) nos serán de utilidad para calcular aque-

llo que podemos “escuchar” en nuestro tambor, en particular nos interesarán las soluciones en términos de un núcleo de calor a este problema. La ecuación (4.2) corresponde al problema con condición inicial y condición de frontera homogénea.

## 4.2. Núcleos de calor.

Llamaremos a una función  $K(x, y, t) : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  continua en  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$  un *Núcleo de calor* en  $\Omega$  si al definir:

$$f(x, t) = \int_{\Omega} K(x, y, t)g(y)dy$$

entonces  $f$  es una solución a (4.2) acotada en cada intervalo  $(0, T)$ , donde la condición inicial se cumple en el sentido que

$$\lim_{(y,t) \rightarrow (x,0)} f(y, t) = g(x)$$

y esta convergencia es uniforme; la condición de frontera se cumple en el sentido de

$$\lim_{(y,t) \rightarrow (x,t)} f(y, t) = 0 \quad y \in \Omega \quad x \in \partial\Omega.$$

Más adelante para  $\Omega$  acotado, probaremos la existencia de estos Núcleos siempre y cuando exista una solución al problema de valores propios. En el caso de dominios no acotados, estaremos interesados únicamente en algunos casos para los cuales seremos capaces de *exhibir explícitamente* dichos núcleos. Debemos hacer notar, que si bien pedimos que  $f$  sea continua en  $t = 0$ , no estamos pidiendo siquiera que  $K$  esté definida como función en  $t = 0$ ; de hecho un núcleo de calor puede cumplir  $K(x, y, t) \rightarrow \delta(x - y)$  cuando  $t \rightarrow 0$  (dada nuestra definición sólo pedimos que en  $t = 0$   $f(x, 0) = g(x)$ ).

## 4.3. Principio del máximo, principio del mínimo y unicidad para dominios acotados

Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  abierto y acotado. Definimos para  $T > 0$ :

$$\Gamma\Omega = (\partial\Omega \times [0, T]) \cup (\Omega \times \{0\})$$

a  $\Gamma\Omega$  se le llama “frontera parabólica”<sup>1</sup>.

**Teorema 4.1** (Principio del máximo)

Si  $u(x, t)$ , continua en  $\overline{\Omega} \times [0, T]$  y  $C^2$  en  $\Omega \times (0, T)$  satisfice:

$$u_t - \Delta_x u \leq 0 \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T)$$

<sup>1</sup>Usaremos esta misma definición para  $\Omega$  no acotado

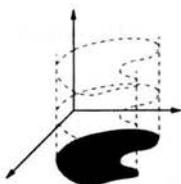


Figura 4.1: Frontera parabólica.

Entonces:

$$\max_{\bar{\Omega} \times [0, T]} u = \max_{\Gamma \Omega} u$$

**Prueba:** Supongamos primero que  $u_t - \Delta_x u < 0$  en  $\Omega \times (0, T)$

Para  $0 < \varepsilon < T$ , como  $\Omega$  es acotado,  $\bar{\Omega} \times [0, T - \varepsilon]$  es compacto y por tanto:

$$\exists (x_0, t_0) \in \bar{\Omega} \times [0, T - \varepsilon]$$

para el cual tenemos que:

$$u(x_0, t_0) = \max_{\bar{\Omega} \times [0, T - \varepsilon]} u.$$

Si suponemos que  $(x_0, t_0) \in \Omega \times (0, T - \varepsilon)$

$$\Rightarrow u_t = 0 \quad \text{y} \quad \Delta_x u \leq 0 \quad \text{en} \quad (x_0, t_0),$$

(estas son condiciones necesarias para un máximo local en un abierto), lo cual implicaría que  $u_t - \Delta_x u \geq 0$  en  $(x_0, t_0)$  que contradice nuestra hipótesis.

Si ahora suponemos que  $(x_0, t_0) \in \Omega \times \{T - \varepsilon\}$

$$\Rightarrow u_t \geq 0 \quad \text{y} \quad \Delta_x u \leq 0,$$

(debe ser creciente en el tiempo y tener un máximo en el espacio), lo cual también nos lleva a la misma contradicción.

Dado que lo anterior es válido para toda  $\varepsilon \in (0, T)$  y  $u$  es continua en  $\bar{\Omega} \times [0, T]$  concluimos que:

$$\max_{\Gamma \Omega} u = \max_{\bar{\Omega} \times [0, T]} u \quad \circledast.$$

Supongamos, por último, que  $u_t - \Delta_x u \leq 0$  en  $\Omega \times (0, T)$  y sea:

$$v(x, t) = u(x, t) - kt \quad k > 0 \text{ constante}$$

$$\Rightarrow v_t - \Delta_x v = u_t - \Delta_x u - k < 0$$

además, y usando el resultado  $\textcircled{*}$  en  $v$  tenemos:

$$\max_{\bar{\Omega} \times [0, T]} u = \max_{\bar{\Omega} \times [0, T]} (v + kt) \leq \max_{\bar{\Omega} \times [0, T]} v + kT = \max_{\Gamma\Omega} v + kT \leq \max_{\Gamma\Omega} u + kT$$

tomando  $k \rightarrow 0$  concluimos que:

$$\max_{\bar{\Omega} \times [0, T]} u = \max_{\Gamma\Omega} u$$

■

**Corolario 4.2** (Principio del mínimo)

Si  $u(x, t)$ , continua en  $\bar{\Omega} \times [0, T]$  y  $C^2$  en  $\Omega \times (0, T)$  satisface:

$$u_t - \Delta_x u \geq 0 \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T)$$

Entonces:

$$\min_{\bar{\Omega} \times [0, T]} u = \min_{\Gamma\Omega} u$$

La prueba consiste en multiplicar con un signo menos y usar directamente el teorema 4.1.

**Corolario 4.3** Si  $u(x, t)$  continua en  $\bar{\Omega} \times [0, T]$  satisface:

$$u_t - \Delta_x u = 0 \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T)$$

Entonces  $u$  alcanza sus puntos extremos en  $\Gamma\Omega$

Sólo hay que combinar los dos resultados anteriores y este resultado es inmediato.

**Corolario 4.4** (Unicidad en dominios acotados)

Si  $u_1$  y  $u_2$  son ambas soluciones a (4.2), entonces

$$u_1(x, t) = u_2(x, t) \quad \forall x \in \Omega \quad t \in [0, \infty)$$

Esto último es porque sobre  $\Gamma\Omega$  ambas funciones son idénticas, el corolario 4.3 nos lleva a que su diferencia debe de ser idénticamente cero.

#### 4.4. Principio del máximo en dominios no acotados.

Usaremos la misma definición para  $\Gamma\Omega$  que fue dada en la sección anterior.

**Teorema 4.5** (Principio del máximo en dominios no acotados)

Si  $u(x, t)$ , continua en  $\bar{\Omega} \times [0, T]$  y  $C^2$  en  $\Omega \times (0, T)$  para  $\Omega$  no acotado satisface:

$$u_t - \Delta u \leq 0 \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T)$$

y además  $u$  es acotada en  $\Omega \times (0, T)$ .

Entonces:

$$\sup_{\bar{\Omega} \times [0, T]} u = \sup_{\Gamma \Omega} u$$

**Prueba:** Sea  $m = \sup_{(x, t) \in \Gamma \Omega} u(x, t)$ . Fijemos  $x_0 \in \Omega$  y definamos una nueva función:

$$v_{x_0}(x, t) = u(x, t) - \varepsilon(4t + |x - x_0|^2)$$

calculamos entonces:

$$(v_{x_0})_t = u_t - 4\varepsilon$$

y

$$\Delta v_{x_0} = \Delta u - 4\varepsilon.$$

Nuestras hipótesis implican que entonces se satisface

$$(v_{x_0})_t - \Delta v_{x_0} \leq 0 \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T)$$

Tomamos una sucesión de vecindades  $\{V_k\}_{k=1}^{\infty}$  con  $V_k = V_{r_k}(x_0)$  donde  $0 < r_k \rightarrow \infty$  y definimos una sucesión de conjuntos acotados con  $\Omega_k = \Omega \cap V_k$ .

Sobre cada  $\Omega_k$ ,  $v_{x_0}$  satisface las condiciones del Teorema 4.1, sabemos entonces que

$$\max_{\bar{\Omega}_k \times [0, T]} v_{x_0} = \max_{\Gamma \Omega_k} v_{x_0}.$$

Partimos a  $\Gamma \Omega_k$  en dos partes:

$$A_k = \Gamma \Omega_k \cap \Gamma \Omega \quad B_k = \Gamma \Omega_k \cap (\partial V_k \times (0, T])$$

donde ambas partes son necesariamente no vacías (no nos interesa si son o no disjuntas); entonces reescribimos

$$\max_{\Gamma \Omega_k} v_{x_0} = \max \left\{ \max_{A_k} v_{x_0}, \max_{B_k} v_{x_0} \right\}.$$

Por definición de  $m$  y  $v_{x_0}$ , tenemos que

$$\max_{A_k} v_{x_0} \leq m$$

y para  $(x, t) \in B_k$  tenemos que  $\|x - x_0\| = r_k$ , que nos lleva a que

$$\max_{B_k} v_{x_0} = \max_{B_k} \left( u(x, t) - \varepsilon(4t + r_k^2) \right).$$

Debido a que pedimos que  $u$  sea acotada, conforme  $k \rightarrow \infty$  tenemos que

$$\max_{B_k} v_{x_0} \rightarrow -\infty$$

ya que  $r_k \rightarrow \infty$  y todos los demás términos son acotados. Concluimos que a partir de cierta  $K_0$  suficientemente grande

$$\max_{\bar{\Omega}_k \times [0, T]} v_{x_0} = \max_{\Gamma \Omega_k} v_{x_0} = \max_{A_k} v_{x_0} \leq m$$

si  $k > K_0$ .

Tomando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , hemos probado que

$$u(x, t) \leq m \quad (x, t) \in \bar{\Omega} \times [0, T]$$

que es lo que se quería demostrar. ■

**Corolario 4.6** Si  $u(x, t)$  continua y acotada en  $\bar{\Omega} \times [0, T]$  para  $\Omega$  no acotado satisface:

$$u_t - \Delta_x u = 0 \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T)$$

Entonces para cualquier  $(x, t) \in \Omega \times (0, T)$

$$\inf_{\Gamma \Omega} u \leq u(x, t) \leq \sup_{\Gamma \Omega} u$$

**Corolario 4.7** (Unicidad de soluciones acotadas en dominios no acotados)  
Si  $u_1$  y  $u_2$  son ambas soluciones a la ecuación (4.2) para  $\Omega$  no acotado, entonces

$$u_1(x, t) = u_2(x, t) \quad \forall x \in \Omega \quad t \in [0, \infty)$$

Debemos hacer notar que el requisito de que la función sea acotada para estos resultados puede ser debilitado y pedir únicamente que la función tenga un crecimiento a lo más exponencial, para esto se cambia la definición de la función  $v_{x_0}$  definida en nuestra prueba sumándole a  $u$  una función apropiada de crecimiento exponencial; en nuestro caso nos es suficiente con la prueba presentada, pero una prueba más general puede ser encontrada en [8].

## 4.5. Una desigualdad básica

**Proposición 4.8** (Positividad de los núcleos de calor)

Si  $K$  es un núcleo de calor para  $\Omega$ , entonces  $K(x, y, t)$  es no negativo para cualesquiera  $x, y \in \Omega$  y para  $t > 0$ .

**Prueba:** Dado que pedimos  $K$  continua, si en algún punto  $(x_0, y_0, t_0)$  tuviéramos  $K(x_0, y_0, t_0) < 0$ , podríamos tomar una vecindad  $V_\delta(y_0) \subset \Omega$  para la cual si  $y \in V_\delta(y_0)$  entonces  $K(x_0, y, t_0) < 0$ . Entonces al tomar  $g \in C_0(V_\delta(y_0))^+$  (una función positiva de soporte compacto en la vecindad) tendríamos que

$$u(x, t) = \int_{\Omega} K(x, y, t)g(y)dy \Rightarrow u(x_0, t_0) < 0.$$

Pero si  $K$  es un núcleo de calor para  $\Omega$  entonces los corolarios 4.3 y 4.6 implican que  $u \geq 0$ .

Concluimos que entonces  $K$  es una función no negativa. ■

**Proposición 4.9** (Desigualdad para núcleos de calor)

Sean  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  dos dominios tales que

$$\Omega_1 \subset \Omega_2 \quad \Omega_1 \text{ acotado.}$$

Donde además existen  $K_1$  y  $K_2$ , núcleos de calor en  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  respectivamente.

Entonces:

$$K_1(x, y, t) \leq K_2(x, y, t) \quad \forall x, y \in \Omega_1 \quad t > 0$$

**Prueba:** Para  $t > 0$  fijamos  $T$  de manera que  $T \geq t \geq 0$ .

Para  $g \in C_0(\Omega_1)$  con  $g \geq 0$  arbitraria sean:

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= \int_{\Omega_1} K_1(x, y, t)g(y)dy \\ u_2(x, t) &= \int_{\Omega_2} K_2(x, y, t)g(y)dy = \int_{\Omega_1} K_2(x, y, t)g(y)dy \end{aligned}$$

$u_i$  solución continua de (4.2) en  $\Omega_i$ .

Por lo tanto,  $u_1$  y  $u_2$  satisfacen las condiciones de nuestro corolario 4.3 en  $\Omega_1$ , y por lo tanto claramente  $(u_2 - u_1)$  también satisface estas condiciones, además:

$$(u_2 - u_1) \Big|_{\Omega_1 \times \{0\}} = 0$$

y

$$(u_2 - u_1) \Big|_{\partial\Omega_1 \times [0, T]} = u_2 \Big|_{\partial\Omega_1 \times [0, T]} \geq 0$$

Como consecuencia del corolario 4.2 tenemos entonces que:

$$(u_2 - u_1) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega_1, T > t > 0.$$

Dado que  $t$  es arbitraria:

$$u_2 \geq u_1 \quad x \in \Omega_1, t > 0$$

es decir:

$$\int_{\Omega_1} K_2(x, y, t)g(y)dy \geq \int_{\Omega_1} K_1(x, y, t)g(y)dy$$

$$x \in \Omega_1, t > 0$$

$$\textcircled{*} \quad \forall g \in C_0(\Omega_1)^+$$

Finalmente  $\textcircled{*}$  nos lleva a:

$$K_1(x, y, t) \leq K_2(x, y, t) \quad \forall x, y \in \Omega_1 \quad t > 0^2.$$

■

**Corolario 4.10** (Unicidad para núcleos de calor en dominios acotados)

Si  $K_1$  y  $K_2$  son núcleos de calor para un dominio acotado  $\Omega$  entonces  $K_1 \equiv K_2$ .

La prueba de este corolario es inmediata ya que  $\Omega \subset \Omega$ .

---

<sup>2</sup>Si no, tendríamos que en  $(x_0, y_0, t_0)$  fijo, la desigualdad no se cumpliría, dado que pedimos que las  $K_i$  sean continuas, esto nos lleva a que en toda una vecindad  $V_\delta(y_0) \subset \Omega_1$  en el espacio, si  $y \in V_\delta(y_0)$  entonces  $K_1(x_0, y, t_0) > K_2(x_0, y, t_0)$  y entonces para cualquier  $g \in C_0(V_\delta(y_0))^+$  tendríamos que  $u_1 > u_2$ , lo cual, es una contradicción.

## Capítulo 5

# La solución sobre el plano. La solución fundamental.

Presentaremos aquí una importante solución calculando primero la solución general al problema de condiciones iniciales con frontera libre. El núcleo que encontraremos tiene una propiedad muy importante: es la solución fundamental a la ecuación de calor (lo cual definiremos más adelante) y nos permitirá por un lado garantizar la regularidad de las soluciones a la ecuación de calor y por otro calcular soluciones en otros dominios tanto acotados como no acotados.

### 5.1. La solución al problema de condiciones iniciales sobre el plano.

Calcularemos a continuación el núcleo de calor para el problema de condiciones iniciales puro, es decir, cuando  $\Omega$  es todo el plano (frontera vacía). Dado que no representa mayor dificultad, este cálculo lo realizaremos en general para  $\mathbb{R}^n$ , lo cual, incluso, nos será útil en la siguiente sección. Recordemos que estamos considerando únicamente condiciones iniciales de soporte compacto infinitamente diferenciables ( $g \in C_c^\infty(\Omega)$ ), lo cual, de alguna manera, nos facilitará las cosas en algunas cuestiones técnicas, pero esta condición (así como la condición de regularidad) puede ser sustituida por otras más débiles (los detalles al respecto no son de importancia para nosotros y pueden ser trabajados sin mayor dificultad si existe el interés).

Supongamos primero, que la solución buscada  $u(x, t)$  satisface las condiciones necesarias para admitir una transformada de Fourier en las variables espaciales lo suficientemente bien portada (una vez obtenida la solución, podremos confirmar estas hipótesis); tomando entonces  $\hat{u}(\xi, t)$  y sustituyendo nuestra ecuación (4.1) original por la ecuación transformada (daremos aquí por sentadas las propiedades de la transformada de Fourier, se recomienda el libro [3] como una

referencia accesible y el libro [2] para una referencia más completa) obtenemos primero que:

$$\begin{aligned} \widehat{(u_t)}(\xi, t) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(x \cdot \xi)} u_t(x, t) dx = \frac{\partial}{\partial t} \widehat{u}(\xi, t) \\ \Delta \widehat{u}(\xi, t) &= -4\pi^2 |\xi|^2 \widehat{u}(\xi, t). \end{aligned}$$

Por lo que el problema (4.2) con  $\Omega = \mathbb{R}^n$  se convierte en:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \widehat{u}(\xi, t) &= -4\pi^2 |\xi|^2 \widehat{u}(\xi, t) \\ \widehat{u}(\xi, 0) &= \widehat{g}(\xi). \end{aligned}$$

Esto es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden en  $t$  con condición inicial  $\widehat{g}$  la cual tiene como solución

$$\widehat{u}(\xi, t) = \widehat{g}(\xi) e^{-4\pi^2 |\xi|^2 t}$$

Ahora sólo necesitamos calcular la transformada inversa<sup>1</sup> de  $\widehat{u}$  para obtener la solución  $u$  al problema (4.2) sobre el plano; esto es:

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} (\widehat{g}(\xi) e^{-4\pi^2 |\xi|^2 t}) e^{2\pi i(x \cdot \xi)} d\xi.$$

Expresando  $\widehat{g}$  en su forma de integral, agrupando y después usando Fubini para cambiar el orden de las integrales, obtenemos:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} g(y) e^{-4\pi^2 |\xi|^2 t + 2\pi i((x-y) \cdot \xi)} dy d\xi = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \left[ \int_{\mathbb{R}^n} e^{-4\pi^2 |\xi|^2 t + 2\pi i((x-y) \cdot \xi)} d\xi \right] dy. \end{aligned}$$

Sólo nos queda calcular esa última integral entre corchetes. Notemos que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-4\pi^2 |\xi|^2 t + 2\pi i((x-y) \cdot \xi)} d\xi = \prod_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{-4\pi^2 \xi_j^2 t + 2\pi i(x_j - y_j) \xi_j} d\xi_j$$

donde  $\xi_j, x_j, y_j$  son las componentes de los vectores  $\xi, x, y$ . Ajustemos un poco estos factores:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-4\pi^2 \xi_j^2 t + 2\pi i(x_j - y_j) \xi_j} d\xi_j = e^{-\frac{(x_j - y_j)^2}{4t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-4\pi^2 t [\xi_j - 2\pi i \frac{(x_j - y_j)}{t}]^2} d\xi_j \} \otimes.$$

Cada factor de esta integral equivale a una integral en el plano complejo sobre toda la recta paralela al eje real a una altura sobre el eje imaginario de  $2\pi \frac{(x_j - y_j)}{t}$  (fijémonos en el argumento entre corchetes). Esta integral, usando el Teorema de Cauchy sobre rectángulos cuyo par de lados paralelos se encuentran sobre dicha recta y el eje real respectivamente y haciendo que estos rectángulos tiendan a

<sup>1</sup> Véase [3, p. 218] ó [2, p. 15]

cubrir toda la franja comprendida entre la recta y el eje real, vemos que las integrales sobre los lados verticales tienden a cero, lo que nos dice que<sup>2</sup>:

$$\circledast = e^{-\frac{(x_j - y_j)^2}{4t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-4\pi^2 t \xi^2} d\xi.$$

Finalmente, calculamos esta última integral:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-4\pi^2 t \xi^2} d\xi = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}.$$

Sustituyendo este último cálculo en nuestra expresión más reciente para  $u$ , concluimos entonces que la solución a (4.2) cuando  $\Omega = \mathbb{R}^n$  tiene la forma:

$$u(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y) dy.$$

Es decir

$$K(x, y, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \tag{5.1}$$

es un *Núcleo de Calor de  $\mathbb{R}^n$* , lo cual verificaremos a continuación.

## 5.2. Propiedades del núcleo de calor. La distribución $\delta(x - y)$ .

Nos quedaremos de aquí en adelante en el caso  $n = 2$ .

Presentaremos una lista de propiedades importantes del núcleo dado en (5.1) que nos serán útiles y que justificarán que efectivamente la solución  $u$  al problema (4.2) sobre el plano puede ser escrita como

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi t} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y) dy$$

**Proposición 5.1** Si  $K(x, y, t) = \frac{1}{4\pi t} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}$ , entonces:

1.  $K(x, y, t) = K(y, x, t)$
2.  $K(x, y, t) \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+)$
3. Para todo  $t_0 > 0$  fijo, tenemos  $\int_{\mathbb{R}^2} K(x, y, t_0) dy = 1$
4.  $K_t = \Delta_x K$

---

<sup>2</sup>Este es un ejercicio clásico de variable compleja.

**Prueba:** Daremos por hecho que, para  $t > 0$   $K$  es una función  $C^\infty$  (finalmente es una función compuesta con polinomios y exponenciales, con posibles singularidades sólo en  $t = 0$ ). También suponemos que la primera propiedad es clara, de hecho

$$K(x, y, t) = K(|x - y|, t)$$

en realidad sólo la indicamos ya que en cierta forma tomaremos a  $K$  como una función de una sola variable en el plano y otra en el tiempo, fijando temporalmente la segunda variable espacial; nos sentimos más tranquilos si hacemos conciencia de que no es importante cuál de ellas estemos considerando.

Probemos la tercera propiedad primero fijando  $x$  y después mediante el cambio de variables  $u = \frac{y-x}{\sqrt{4\pi t}}$

$$\int_{\mathbb{R}^2} K(x, y, t_0) dy = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-|u|^2} du$$

donde esta última integral es la integral de la célebre *campana de Gauss*, la cual integra  $\pi^{n/2}$ , por lo que queda probado que

$$\int_{\mathbb{R}^2} K(x, y, t_0) dy = 1.$$

Por último, solamente tenemos que calcular:

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial t} &= -\frac{1}{4\pi t^2} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} + \frac{|x-y|^2}{16\pi t^3} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \\ \Delta_x K &= -\frac{1}{8\pi t^2} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} + \frac{(x_1 - y_1)^2}{16\pi t^3} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} - \frac{1}{8\pi t^2} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} + \frac{(x_2 - y_2)^2}{16\pi t^3} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \end{aligned}$$

por lo que al sumar y agrupar esta última expresión podemos verificar que efectivamente  $K_t = \Delta_x K$ .

■

La proposición anterior es suficiente para garantizar que al menos la función  $u(x, t) = \frac{1}{4\pi t} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y) dy$  está bien definida para  $t > 0$  para  $g$  continua y de soporte compacto (pues la integral en cada  $t_0$  esta acotada por  $\inf g$  y  $\sup g$ ), y ya que estamos finalmente integrando sobre un compacto (pues la integral sobre todo el plano es la integral sobre el soporte de  $g$ ), es inmediato que

$$u_t(x, t) = \int_{\mathbb{R}^2} K_t(x, y, t) g(y) dy = \int_{\mathbb{R}^2} \Delta K(x, y, t) g(y) dy = \Delta u(x, y)$$

pues los integrandos son todos  $C^\infty$  en las variables correspondientes.

Sólo necesitamos ahora justificar que efectivamente  $\lim_{(x,t) \rightarrow (x_0,0)} u(x, t) = g(x_0)$  uniformemente.

**Teorema 5.2** Para  $\delta > 0$ :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{V_\delta(x)} K(x, y, t) dy = 1$$

y además este límite es uniforme.

**Prueba:** Vemos primero que la integral sólo depende de la distancia al punto  $x$  para reescribir:

$$\int_{V_\delta(x)} K(x, y, t) dy = \frac{1}{4\pi t} \int_{V_\delta(0)} e^{-\frac{|y|^2}{4t}} dy.$$

Utilizamos ahora el cambio de variables  $y = \sqrt{4t}|u|$  para obtener

$$\frac{1}{4\pi t} \int_{V_\delta(0)} e^{-\frac{|y|^2}{4t}} dy = \frac{1}{\pi} \int_{V_{\frac{\delta}{\sqrt{4t}}}(0)} e^{-|u|^2} dy$$

donde

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{V_{\frac{\delta}{\sqrt{4t}}}(0)} e^{-|u|^2} dy = 1$$

y este límite sólo depende de  $t$ .

■

Usando este teorema vemos primero que para cualquier  $\delta > 0$

$$\int_{\mathbb{R}^2 \setminus V_\delta(x)} K(x, y, t) g(y) dy \rightarrow 0$$

uniformemente conforme  $t \rightarrow 0$ , ya que podemos acotar con el  $\sup g$  por el residuo de la integral.

De ahí obtenemos entonces que

$$\lim_{(x,t) \rightarrow (x_0,0)} \int_{V_\delta(x)} K(x, y, t) g(y) dy = \lim_{(x,t) \rightarrow (x_0,0)} \int_{\mathbb{R}^2} K(x, y, t) g(y) dy$$

uniformemente. Así que usando esto, tenemos que para  $\delta > 0$  arbitraria

$$\inf_{V_\delta(x_0)} g \leq \lim_{(x,t) \rightarrow (x_0,0)} \int_{\mathbb{R}^2} K(x, y, t) g(y) dy \leq \sup_{V_\delta(x_0)} g.$$

Ya que  $g$  es continua y de soporte compacto, al tomar  $\delta \rightarrow 0$  obtenemos

$$\lim_{(x,t) \rightarrow (x_0,0)} \int_{\mathbb{R}^2} K(x, y, t) g(y) dy = g(x_0)$$

uniformemente, lo que prueba que  $K(x, y, t)$  definido como en (5.1), efectivamente es el núcleo de calor para el plano.

Notemos que el límite de  $K(|x - y|, t)$  cuando  $t$  tiende a cero (el cual denotaremos por  $\delta(x - y)$ ) no puede ser una función ya que esta función tendría que, por un lado, ser idénticamente cero en todo punto, pero integrar a uno en cualquier vecindad del punto  $x$  (si integramos respecto a  $y$ ).

Este es por lo general el primer encuentro con las llamadas *distribuciones*; en este caso tenemos que conforme  $t \rightarrow 0$ ,  $K(x, y, t) \rightarrow \delta(x - y)$ . Esta *distribución*  $\delta(x - y)$  es conocida como la *Delta de Dirac* con singularidad cuando  $x = y$ ; puede interpretarse como una densidad de masa unitaria en el punto  $x$ , o en nuestro caso, como un impulso de calor instantáneo en el punto  $x$ . Precisamente, nuestro núcleo de calor satisface que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^2} K(x_0, y, t) g(y) dy = g(x_0)$$

(obtenemos la temperatura inicial en un punto del plano).

Podemos pensar que nuestro núcleo de calor en el tiempo inicial está registrando la temperatura inicial del plano, y a partir de ésta, construyendo la evolución de la temperatura sobre todo el plano.

En nuestro caso, ya hemos utilizado la noción de distribución; éstas aparecen naturalmente al definir los espacios de Sobolev (es decir los espacios  $H^k$ ) y al utilizar la noción de derivada débil (la cual puede ser una distribución).

En este mismo contexto, podemos pensar a  $K(x_0, y, t)$  como una solución especial a la ecuación de calor, la cual representa, como hemos sugerido hace un momento, un chispazo de calor en el tiempo inicial, el cual desencadena el calentamiento del plano.

Esta solución especial es de hecho muy importante ya que describe propiedades sobre otras soluciones a la ecuación de calor y permite el resolver, por ejemplo en nuestro caso, el problema de condiciones iniciales, o resolver la ecuación no homogénea; no hablaremos más al respecto, para más referencias se sugiere [11].

Esta solución tiene la propiedad de ser la *solución fundamental* a la ecuación de calor.

### 5.3. La solución fundamental. Regularidad de las soluciones a la ecuación de calor.

En general, para un operador diferencial con coeficientes constantes  $L$ , es útil encontrar una solución especial  $F$  que satisface la ecuación

$$LF = \delta$$

donde  $\delta$  es la distribución delta de Dirac. Cuando esta solución especial  $F$  (la *solución fundamental*) existe, es sólo en el sentido débil, es decir que

$$\langle F, L^* v \rangle = v(0) \quad v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

donde  $L^*$  es el operador adjunto del operador  $L$ .

En general, el conocer la solución fundamental para el operador  $L$ , permite resolver por convolución la ecuación no homogénea en el sentido de distribución (solución débil):

$$u = F * h \quad \Rightarrow \quad Lu = h.$$

En cierto sentido, se puede pensar que la solución fundamental  $F$  nos invierte el operador  $L$ .

Una solución fundamental también nos permite estudiar las soluciones generales de su operador diferencial, como veremos más adelante en nuestro caso (donde  $L$  es el operador de calor). Una idea de porqué esto sucede es precisamente la idea de "inversión": si la solución fundamental es suficientemente suave y por convolución de la ecuación nos devuelve la solución, ésta entonces tendrá que ser suficientemente suave. Esto no es por nada riguroso, pero daremos la prueba correspondiente cuando  $L$  es el operador de calor; a partir de esta prueba, es posible observar las ideas principales de la prueba para operadores diferenciales más generales (con coeficientes constantes).

Notemos que en nuestro caso, tenemos un operador diferencial de la forma  $\partial_t - \Delta_x$ , y hemos encontrado un núcleo  $K$  tal que

$$\begin{aligned} (\partial_t - \Delta_x)K(x, t) &= 0 & t > 0 \\ K(x, 0) &= \delta(x) & x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

lo cual no debe ser confundido con la definición anterior de solución fundamental, la cual requeriría que el operador aplicado a nuestro núcleo fuera la delta de Dirac en todo el espacio-tiempo. En nuestro caso el núcleo es una delta de Dirac para  $t = 0$  y permite resolver por convolución la ecuación homogénea con condiciones iniciales.

En general, para operadores de la forma  $\partial_t - L_x$  coincide que  $K$  satisfaga  $(\partial_t - L_x)K = 0$  para  $t > 0$  y  $K(x, 0) = \delta(x)$  con el hecho de  $K$  sea una solución fundamental del operador  $\partial_t - \Delta_x$ , siempre y cuando se extienda  $K$  apropiadamente para tiempos negativos; de esto daremos una prueba en el caso del operador de calor, pero la idea para el caso general debería quedar bien clara dentro de esta demostración.

Tomaremos ahora  $x_0 = 0$  y extendiendo nuestro núcleo (5.1) definiremos

$$\tilde{K}(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi t} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

**Teorema 5.3** (Solución fundamental del operador de calor.)  
 $\tilde{K}$  es una solución débil en  $\mathbb{R}^3$  a la ecuación

$$(\partial_t - \Delta_x)\tilde{K}(x, t) = \delta(x, t)$$

donde  $\delta(x, t)$  es la distribución delta de Dirac en  $\mathbb{R}^3$  con singularidad en  $x = 0$ ,  $t = 0$ .

**Prueba:** El operador adjunto al operador de calor es  $(-\partial_t - \Delta)$ , lo cual es fácil de verificar integrando por partes.

Queremos probar que para cualquier  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \tilde{K}(-\partial_t - \Delta)\phi \, dt \, dx = \int_{\mathbb{R}^3} \delta(x, t)\phi(x, t) \, dt \, dx = \phi(0, 0).$$

Fijemos  $\varepsilon > 0$  y definamos

$$\tilde{K}_\varepsilon(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi t} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & t > \varepsilon \\ 0 & t \leq \varepsilon \end{cases}$$

es claro que sobre cualquier  $Q$  compacto de  $\mathbb{R}^3$  tenemos que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_Q |\tilde{K}_\varepsilon(x, t) - \tilde{K}(x, t)| \, dt \, dx \rightarrow 0$$

ya que si denotamos  $Q_\varepsilon = Q \cap \mathbb{R}^2 \times [0, \varepsilon]$ , entonces:

$$\begin{aligned} \int_Q |\tilde{K}_\varepsilon(x, t) - \tilde{K}(x, t)| \, dt \, dx &= \int_{Q_\varepsilon} \tilde{K} \, dt \, dx \leq \int_{\mathbb{R}^2 \times [0, \varepsilon]} \tilde{K} \, dt \, dx = \\ &= \int_0^\varepsilon \left[ \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{K} \, dx \right] \, dt = \varepsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto para cualquier  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$  tenemos que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_Q \tilde{K}_\varepsilon(x, t)\phi(x, t) \, dt \, dx \rightarrow \int_Q \tilde{K}(x, t)\phi(x, t) \, dt \, dx$$

es decir que  $\tilde{K}_\varepsilon \rightarrow \tilde{K}$  en distribución; por lo que será suficiente probar que  $(\partial_t - \Delta)\tilde{K}_\varepsilon \rightarrow \delta$ .

Tomemos ahora

$$\int_{\mathbb{R}^3} \tilde{K}_\varepsilon(-\partial_t - \Delta)\phi \, dt \, dx = \int_\varepsilon^\infty \left( \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{K}_\varepsilon(-\partial_t - \Delta)\phi \, dx \right) \, dt$$

donde sobre esta última expresión podemos usar integración por partes, obteniendo

$$\begin{aligned} \int_\varepsilon^\infty \left( \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{K}_\varepsilon(-\partial_t - \Delta)\phi \, dx \right) \, dt &= \\ = \int_\varepsilon^\infty \left( \int_{\mathbb{R}^2} (\partial_t - \Delta)\tilde{K}_\varepsilon \phi \, dx \right) \, dt + \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{K}(x, \varepsilon)\phi(x, \varepsilon) \, dx \end{aligned}$$

(todos los demás términos de frontera se anulan).

Ya que  $(\partial_t - \Delta)\tilde{K}_\varepsilon = 0$ , obtenemos que entonces

$$\int_{\mathbb{R}^3} \tilde{K}_\varepsilon(-\partial_t - \Delta)\phi \, dt \, dx = \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{K}(x, \varepsilon)\phi(x, \varepsilon) \, dx$$

y ya hemos probado que precisamente

$$\int_{\mathbb{R}^2} \tilde{K}(x, \varepsilon) \phi(x, \varepsilon) dx \rightarrow \phi(0, 0)$$

uniformemente conforme  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

■

Estamos ahora listos para probar (de una manera un tanto técnica) que cualquier solución al operador de calor, es de hecho una solución de clase  $C^\infty$ .

**Teorema 5.4** Para  $\Omega$  abierto, si  $u$  es una solución débil de  $u_t = \Delta_x u$  sobre  $\Omega \times (0, T)$ , entonces  $u \in C^\infty(\Omega \times (0, T))$

**Prueba:** Tomemos algún punto  $\xi$  en  $\Omega \times (0, T)$  y una  $\varepsilon > 0$  tal que  $V_{4\varepsilon}(\xi) \subset \Omega \times (0, T)$ .

Tomemos  $\phi \in C_0^\infty(V_{4\varepsilon}(\xi))$  con  $\phi \equiv 1$  sobre  $V_{3\varepsilon}(\xi)$ .

Sean  $w = \phi u$  y  $v = \partial_t w - \Delta_x w$ , ambas distribuciones con soporte en  $V_{4\varepsilon}(\xi)$  y además  $v = 0$  sobre  $V_{3\varepsilon}(\xi)$  por construcción y la hipótesis.

Vemos ahora que la convolución

$$\tilde{K} * v(x, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{K}(x-y, t-s) v(y, s) dy ds = \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{K}(y, s) v(x-y, t-s) dy ds$$

está bien definida. Observamos también que

$$v(x-y, t-s) = (\partial_t - \Delta_x)w(x-y, t-s) = (-\partial_s - \Delta_y)w(x-y, t-s).$$

Para una función  $h \in C_0^\infty(\Omega \times (0, T))$  arbitraria calculamos usando el teorema anterior

$$\begin{aligned} \langle \tilde{K} * v(x, t), h \rangle &= \int \tilde{K}(y, s) (-\partial_s - \Delta_y)w(x-y, t-s) h(x, t) dy ds dx dt \\ &= \int (\partial_s - \Delta_y) \tilde{K}(y, s) w(x-y, t-s) h(x, t) dy ds dx dt \\ &= \int \delta(y, s) (y, s) w(x-y, t-s) h(x, t) dy ds dx dt \\ &= \int w(x, t) h(x, t) dx dt \\ &= \langle w, h \rangle. \end{aligned}$$

Lo que quiere decir que como distribuciones  $\tilde{K} * v = w$  (corresponde al argumento intuitivo de que  $K$  “invierte” el operador).

Tomemos ahora  $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$  tal que  $\psi = 0$  en  $V_\varepsilon(0)$  y  $\psi = 1$  en  $\mathbb{R}^3 \setminus V_{2\varepsilon}(0)$ . Puesto que la singularidad de  $\tilde{K}$  está dentro de  $V_\varepsilon(0)$  entonces  $\psi \tilde{K}$  es una función suave y por tanto lo es  $(\psi \tilde{K}) * v$  (es fácil verlo pues tenemos soporte compacto). Ahora si  $(x, t) \in V_\varepsilon(\xi)$  y  $(y, s)$  en el soporte de la  $v$  (que implica  $(y, s) \in V_{4\varepsilon}(\xi) \cap \mathbb{R}^3 \setminus V_{3\varepsilon}(\xi)$ ) entonces tenemos que  $|(x, t) - (y, s)| \geq 2\varepsilon$  lo que implica que  $\psi(x-y, t-s) = 1$  es decir que  $(\psi \tilde{K}) * v(x, t) = \tilde{K} * v(x, t) = w(x, t)$ . Por lo tanto,  $w$  es una función suave en  $V_\varepsilon(\xi)$ , lo que por construcción de  $w$  nos dice que entonces  $u$  es una función suave en  $V_\varepsilon(\xi)$ ; pero  $\xi$  era arbitraria en  $\Omega \times (0, T)$ , que prueba nuestro teorema.

■



## Capítulo 6

# Núcleos de calor para dominios particulares.

La intención de este capítulo es la de presentar soluciones explícitas a la ecuación de calor con condición inicial (4.2) en dominios particulares, sobre las cuales haremos estimaciones para nuestro tambor. Antes de presentar éstas, presentaremos también la solución para dominios generales sobre los cuales se conocen las funciones propias del operador de Laplace, que representará la solución de (4.2) cuando  $\Omega$  es nuestro tambor y nos ayudará también en el cálculo de soluciones sobre rectángulos, sobre los cuales es fácil el cálculo de valores y funciones propias.

La sección siguiente, no sólo nos proporciona una forma útil de expresar las soluciones, sino que también es la prueba de la existencia de las soluciones a la ecuación de calor en dominios acotados para los cuales se tienen las soluciones al problema de valores propios.

### 6.1. Existencia. Solución por expansión en funciones propias para dominios acotados.

Consideremos (4.2) para  $\Omega$  acotado y supongamos que conocemos en su totalidad todas las soluciones al problema de valores y funciones propias para el operador de Laplace con condición de Dirichlet homogénea en  $\Omega$  acotado, esto es, conocemos en su totalidad los conjuntos  $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$  con  $\lambda_i \leq \lambda_{i+1}$  y  $\{\Phi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C^{\infty}(\Omega)$  para los cuales se cumple

$$\begin{aligned} -\Delta \Phi_n(x) &= \lambda_n \Phi_n(x) & x \in \Omega \\ \Phi_n(x) &= 0 & x \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

además sabemos que el conjunto  $\{\Phi_n\}_{n=1}^{\infty}$  forma una base ortonormal de  $L_2(\Omega)$ , es decir que:

$$f \in L_2(\Omega) \quad \Rightarrow \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \Phi_n(x) \quad (6.1)$$

donde

$$f_n = \int_{\Omega} f(y) \Phi_n(y) dy.$$

Nos interesa entonces, calcular  $u(x, t)$  solución de (4.2); para cada  $t_0$  fijo esperamos que  $u(x, t_0)$  sea una función en  $L_2(\Omega)$  la cual, como en (6.1), podemos expresar en la forma:

$$u(x, t_0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t_0) \Phi_n(x).$$

Además, tenemos la condición inicial:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(0) \Phi_n(x) = g(x)$$

lo cual, haciendo referencia a (6.1) implica que

$$u_n(0) = \int_{\Omega} g(y) \Phi_n(y) dy = g_n \quad (6.2)$$

ya que la expansión en series de Fourier es única.

Supongamos entonces que:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \Phi_n(x) \quad \forall t \geq 0.$$

Supondremos también que efectivamente  $u_n(t)$  admite al menos una derivada continua y acotada en  $t$ , esta suposición será enmendada una vez que tengamos la solución, ya que tendremos existencia y para  $\Omega$  acotado tenemos además unicidad y regularidad de soluciones al problema (4.2). Sustituyendo entonces  $u(x, t)$  en nuestra ecuación obtenemos:

$$\Delta \left( \sum_{n=1}^{\infty} u_n \Phi_n \right) = \left( \sum_{n=1}^{\infty} u_n \Phi_n \right)_t$$

dado que  $\Omega$  es acotado,  $\Phi_n$  y  $u_n$  admiten derivadas continuas en sus ordenes correspondientes, entonces, nuestras series convergen uniformemente (no discutiremos aquí con detalle las condiciones necesarias), podemos meter las derivadas en las series, obteniendo

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \Delta \Phi_n = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n)_t \Phi_n$$

lo cual, al sustituir (6.1) y sumar las series nos da que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n u_n \Phi_n + (u_n)_t \Phi_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n (\lambda_n u_n + (u_n)_t) = 0$$

y puesto que  $\{\Phi_n\}_{n=1}^{\infty}$  es una base ortonormal en  $L_2$  esto nos lleva a que necesariamente:

$$(u_n)_t = -\lambda_n u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

con la condición inicial dada por (6.2).

Concluimos, entonces, que:

$$u_n(t) = g_n e^{-\lambda_n t}.$$

Retomando, hemos probado que si  $\Omega$  es acotado, entonces la solución al problema(4.2) puede expresarse como

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n e^{-\lambda_n t} \Phi_n(x)$$

con  $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$  y  $\{\Phi_n\}_{n=1}^{\infty}$  soluciones a (2.1) y  $g_n = \int_{\Omega} g(y) \Phi_n(y) dy$ .

Notemos que además, si pedimos que la función  $g$  sea  $C^{\infty}$  de soporte compacto en  $\Omega$ , entonces su serie de Fourier *converge uniformemente* (criterio de Dini), el término  $e^{-\lambda_n t}$  mejora esta convergencia y entonces la función  $u$  definida por esta serie es también una función continua. Además se está garantizando que tanto las series de derivadas en  $t$  como las de los laplacianos convergen también uniformemente. Esto justifica lo hecho hasta ahora.

Si sustituimos los coeficientes de Fourier por su forma integral y luego metemos la suma a la integral (ya que tanto la suma de la integral, como la integral de la suma convergen) y finalmente separamos la condición inicial de la suma, obtenemos:

$$u(x, t) = \int_{\Omega} \left( \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \Phi_n(x) \Phi_n(y) \right) g(y) dy$$

donde la expresión:

$$K_{\Omega}(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \Phi_n(x) \Phi_n(y) \tag{6.3}$$

depende únicamente de las funciones y valores propios del laplaciano en  $\Omega$ , es decir, *depende únicamente de  $\Omega$* .

Creemos haber encontrado entonces un núcleo integral para las soluciones al problema (4.2) en dominios acotados: si  $K_\Omega$  esta dado por (6.3), entonces la función  $u(x, t)$  definida por:

$$u(x, t) = \int_{\Omega} K_\Omega(x, y, t)g(y)dy$$

satisface el problema (4.2).

Verifiquemos esto, definamos una sucesión de funciones  $\{u_k\}$ :

$$u_k(x, t) = \int_{\Omega} \left( \sum_{n=1}^k e^{-\lambda_n t} \Phi_n(x) \Phi_n(y) \right) g(y) dy.$$

Dentro de la integral tenemos una suma finita de funciones  $C^\infty$  y  $g$  además es una función de soporte compacto, por lo que no tenemos problemas para calcular

$$\Delta u_k(x, t) = \int_{\Omega} \left( \sum_{n=1}^k -\lambda_n e^{-\lambda_n t} \Phi_n(x) \Phi_n(y) \right) g(y) dy = \frac{\partial u_k}{\partial t}(x, t)$$

pues como es una suma finita podemos meter las derivadas a la integral sin problemas.

Calculemos ahora para  $i > j$

$$\begin{aligned} (u_i - u_j)(x, t) &= \int_{\Omega} \left( \sum_{n=j}^i e^{-\lambda_n t} \Phi_n(x) \Phi_n(y) \right) g(y) dy \\ &= \sum_{n=j}^i \int_{\Omega} g(y) \Phi_n(y) dy e^{-\lambda_n t} \Phi_n(x) \\ &= \sum_{n=j}^i g_n e^{-\lambda_n t} \Phi_n(x) \end{aligned}$$

donde  $g_n$  son los coeficientes de Fourier para  $g$  con respecto a la base  $\{\Phi_n\}$ , cuya serie, como ya habíamos hecho notar, converge uniformemente. Esta diferencia, además satisface la ecuación de calor (4.1) y el principio del máximo nos implica que

$$|u_i - u_j|(x, t) \leq \max_{x \in \Omega} |u_i - u_j|(x, 0) = \max_{x \in \Omega} \left| \sum_{n=j}^i g_n \Phi_n(x) \right|$$

ya que en  $\partial\Omega$  valen cero las  $u_n$ .

Por tanto tenemos de inmediato que  $u_n \rightarrow u$  uniformemente.

Este mismo argumento funciona para las series de la parcial en  $t$  y del laplaciano, ya que ambas cumplen también la ecuación (4.1) y como  $g \in C^\infty$  entonces las series de Fourier para las derivadas también convergen uniformemente.

Por lo tanto el límite uniforme  $u$  de  $\{u_n\}$  es una función que satisface el problema de condiciones iniciales (4.2).

Con esto además hemos probado la existencia de estas soluciones al problema (4.2).

Se nos podría acusar de haber sido algo vagos en esta justificación, pero recordemos que ya hemos probado que cualquier solución débil a la ecuación de calor es una función  $C^\infty$ .

## 6.2. Soluciones sobre rectángulos.

A continuación, presentaremos la solución a (4.2) cuando  $\Omega$  es un rectángulo; daremos, en este caso, varias formas distintas de expresar la misma solución, puesto que cada expresión tendrá ventajas distintas para nuestras estimaciones más adelante, a pesar de ser la misma función (puesto que ya hemos probado unicidad de soluciones). Para facilitar un tanto las cosas, calcularemos las funciones propias al operador de Laplace en una dimensión sobre un segmento de recta; a partir de esto, sólo necesitaremos un sencillo argumento para encontrar todos los valores y funciones propias en un rectángulo arbitrario.

### 6.2.1. Ecuación de calor en una dimensión.

La ecuación de calor en una dimensión es:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R} \quad t \geq 0$$

### 6.2.2. Núcleo de calor sobre la recta real ( $\Omega = \mathbb{R}$ ):

En este caso, hemos calculado la solución general para  $\mathbb{R}^n$  en la sección anterior, por lo que simplemente necesitamos sustituir la dimensión en (5.1), para obtener el *Núcleo de calor para la recta real*:

$$K(x, y, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \quad (6.4)$$

### 6.2.3. Núcleo de calor para el intervalo ( $\Omega = (0, a)$ ):

Utilizaremos aquí dos métodos para encontrar nuestras soluciones para el intervalo: el primero será encontrar las funciones y valores propios para el operador de Laplace sobre el intervalo y usar los resultados de la sección 6.1<sup>1</sup>; el segundo será el de reflejar la solución sobre la recta, de manera que ésta se anule en los extremos del intervalo, este método volverá a aparecer más adelante.

#### Expresión por expansión en funciones propias.

Comenzemos entonces por escribir la ecuación de valores y funciones propias para el intervalo:

$$f''(x) = -\lambda f(x) \quad x \in (0, a)$$

$$f(0) = f(a) = 0$$

<sup>1</sup>Notemos que en realidad nunca utilizamos el hecho de estar en  $\mathbb{R}^2$

Sabemos que las soluciones a esta ecuación diferencial deben ser de la forma  $f(x) = \alpha \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}x) + \beta \operatorname{cos}(\sqrt{\lambda}x)$  (módulo traslaciones). Sustituyendo las condiciones de frontera, inmediatamente obtenemos:

$$f_n(x) = \alpha_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

con  $n \in \mathbb{N}$ , los valores  $\lambda$  son de la forma

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2.$$

Aquí  $\alpha_n$  es una constante arbitraria pero, dado que queremos tomar nuestras funciones propias normalizadas, tomaremos

$$\alpha_n = \left(\int_0^a \left(\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\right)^2 dx\right)^{-1/2} = \sqrt{\frac{2}{a}}$$

Entonces, haciendo referencia a (6.3) obtenemos

$$K_{(0,a)}(x, y, t) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}y\right)$$

el *Núcleo de calor para el intervalo* en su forma de expansión por funciones propias. En realidad no utilizaremos esta expresión; sin embargo sí utilizaremos precisamente las funciones propias del intervalo:

$$f_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \tag{6.5}$$

para el valor propio correspondiente

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \tag{6.6}$$

### Expresión por reflexión de una solución sobre $\mathbb{R}$ .

Para poder dar la otra expresión de esta solución, imaginemos que tenemos para una función  $g \in C_c(0, a)$  una función  $u_1(x, t)$  que satisface (4.1) sobre todo  $\mathbb{R}$  y además  $u_1(x, 0) = g(x)$  (no hay condiciones de frontera); reflejemos en el espacio a esta función tomando como punto de reflexión  $x = 0$ . Esto nos da una función  $u_2(x, t) = -u_1(-x, t)$  la cual, también, satisface (4.1), pero con la condición inicial  $u_2(x, 0) = -g(-x)$  (en este caso  $-g(-x)$  es una función de soporte compacto en  $(-a, 0)$ ).

Sumemos estas funciones, sea  $u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t) = u_1(x, t) - u_1(-x, t)$ ; es claro que esta nueva función  $u$  satisface (4.1), puesto que solamente estamos sumando dos funciones que ya satisfacen esta misma ecuación,

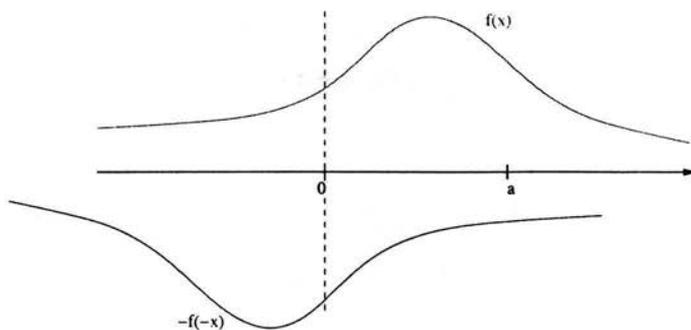


Figura 6.1: La función original y su reflejada.

pero además satisface una condición adicional:  $u(0, t) = 0$  y si nos restringimos a  $x \geq 0$  entonces  $u(x, 0) = g(x) - g(-x) = g(x)$  puesto que  $g(-x)$  se anula fuera del intervalo  $(-a, 0)$ , es decir, que hemos encontrado una solución sobre la semirecta real positiva, donde se satisfacen tanto la condición inicial  $g$  como la condición de frontera  $u(0, t) = 0$ .

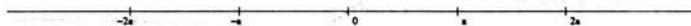


Figura 6.2:  $u = u_1 + u_2$  es una función impar.

Podríamos, de una manera un tanto ingenua, pensar que entonces nos basta con reflejar una vez más esta solución sobre el punto  $a$  y entonces tendremos una solución al problema de condiciones iniciales y condiciones de frontera sobre el intervalo.

Lamentablemente esto es falso, pero no es del todo una mala idea: Al hacer esto, siguiendo un argumento idéntico al de arriba, podemos comprobar que la condición inicial sobre el intervalo se cumple, también es fácil ver la condición de frontera  $u(a, t) = 0$ , pero al haber reflejado sobre el punto  $a$ , hemos echado encima de  $x = 0$  el valor de  $u(2a, t)$ , el cual no tiene porqué valer cero<sup>2</sup>. Lo que haremos, para corregir esto, será emular de alguna manera dos espejos paralelos colocados uno en  $x = 0$  y otro en  $x = a$  (junto con un cambio de signo en cada reflexión). El efecto de esto, es que la solución se refleja indefinidamente sobre los espejos que son imágenes de los espejos originales los cuales mantendrán nuestra función anulándose constantemente en todos los puntos de la forma  $x = ka$ , con  $k \in \mathbb{Z}$ , por lo que aseguraremos que en los puntos extremos de nuestro intervalo

<sup>2</sup>De hecho si se utiliza el primer núcleo calculado en esta sección para expresar las soluciones y se obtiene  $u$  siguiendo estas instrucciones, puede verificarse que será estrictamente positiva si se eligió  $g$  mayor o igual que cero.

la solución se mantendrá en cero (Véase la figura 6.3).

Bien, ya que tenemos este argumento como pretexto, prosigamos: nuestra intención es utilizar el núcleo (6.4) ya calculado, para evitarnos problemas con el hecho de estar sumando una infinidad de funciones sin saber si las cosas se mantendrán en orden, trataremos de “emular” el efecto de nuestros supuestos espejos en la condición inicial, la cual es una función  $g \in C_c(a, b)$  y el hecho de reflejarla sólo nos estará sumando o restando una sola vez esta función en cada intervalo  $(ka, (k+1)a)$  y después una infinidad de ceros. Entonces, tomemos como condición inicial:

$$h(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(x - 2na) - g(2na - x),$$

así que usando (6.4), escribamos nuestra solución como

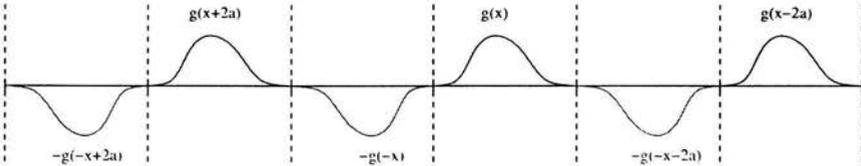


Figura 6.3: Efecto de dos espejos (con cambio de signo) paralelos sobre la condición inicial.

$$u(x, t) = \int_{\mathbf{R}} K(x, y, t) h(y) dy = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbf{R}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(y - 2na) - g(2na - y) \right) dy.$$

Debemos hacer notar que aquí  $h$  no tiene soporte compacto, pero sí es una función uniformemente acotada, así que nuestra integral mantiene todas las propiedades de convergencia necesarias, ya que en este caso sólo dependen de  $K$ . Así que siempre y cuando la suma de las integrales converja, podemos obtener:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{\mathbf{R}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} (g(y - 2na) - g(2na - y)) dy = \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \int_{\mathbf{R}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y - 2na) dy - \int_{\mathbf{R}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(2na - y) dy \right). \end{aligned}$$

Aplicando el cambio de variables  $u = y - 2na$  en cada integral, nos da:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \int_{\mathbf{R}} e^{-\frac{|x-(2na+u)|^2}{4t}} g(u) du - \int_{\mathbf{R}} e^{-\frac{|x-(2na+u)|^2}{4t}} g(-u) du \right).$$

Donde además

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|x-(2na+u)|^2}{4t}} g(-u) du = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|x-(2na-u)|^2}{4t}} g(u) du$$

(notemos que el signo de esta integral no cambia pues debemos mantener la orientación del dominio). Tomamos entonces  $g$  como factor común para tener:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \left( e^{-\frac{|x-(2na+u)|^2}{4t}} - e^{-\frac{|x-(2na-u)|^2}{4t}} \right) g(u) du.$$

Aquí, porque  $g \in C_c(a, b)$ , cada sumando esta acotado por  $a \|g\|_{\infty} e^{-|x-2na|}$  (longitud del intervalo, por el valor máximo de  $g$ , por una cota en el intervalo para el núcleo del sumando) lo que nos garantiza la convergencia de la serie para toda  $x \in \mathbb{R}$ ; así que finalmente regresamos la suma hacia adentro de la integral para concluir:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_0^a \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( e^{-\frac{|x-(2na+u)|^2}{4t}} - e^{-\frac{|x-(2na-u)|^2}{4t}} \right) g(u) du$$

y por tanto:

$$K_{(0,a)} = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( e^{-\frac{|x-(2na+u)|^2}{4t}} - e^{-\frac{|x-(2na-u)|^2}{4t}} \right). \quad (6.7)$$

Para  $t \sim 0$ , todos los términos de la serie tienden a desaparecer, excepto el término  $e^{-\frac{|x-u|^2}{4t}}$ , el cual corresponde al núcleo de la recta (podemos decir que para tiempos muy cercanos a cero, el caso de la recta y del segmento son casi indistinguibles uno del otro) y por tanto también satisface las mismas condiciones iniciales; igualmente, conforme  $n \rightarrow \infty$ , los términos de la serie se anulan muy rápidamente, la convergencia de la serie y de la integral no presenta problemas.

### 6.2.4. Núcleos de calor en el rectángulo

Sea  $\Omega = (0, a) \times (0, b)$ .

#### Expresión por expansión en funciones propias.

Tomemos entonces la ecuación de valores propios en  $\Omega$  (2.1) y supongamos por un momento que las soluciones en este caso pueden ser expresadas de la forma:

$$\Phi(x, y) = l(x)h(y) \quad \forall (x, y) \in (0, a) \times (0, b).$$

Sustituyendo entonces esta forma en la ecuación de valores propios, obtenemos la siguiente ecuación:

$$\frac{l_{xx}}{l}(x) + \frac{h_{yy}}{h}(y) = -\lambda$$

(recordemos que buscamos soluciones distintas de cero).

La constante obtenida es independiente de  $x$  y de  $y$  por lo que cada sumando debe ser constante, por lo que obtenemos las ecuaciones:

$$l''(x) = -\mu l(x)$$

$$h''(y) = -\nu h(y)$$

$$\lambda = \mu + \nu$$

con las condiciones de frontera

$$l(0) = l(a) = h(0) = h(b) = 0.$$

Es decir que las componentes  $l$  y  $h$  son respectivamente funciones propias del intervalo, las cuales ya hemos calculado (y normalizado); utilizando entonces (6.5) y (6.6), podemos decir que:

$$\Phi_{nm}(x, y) = 2\sqrt{\frac{1}{ab}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \quad (6.8)$$

es la función propia (normalizada) correspondiente al valor propio

$$\lambda_{nm} = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2. \quad (6.9)$$

Si bien no debería haber duda de que las anteriores son efectivamente funciones y valores propios, no existe ninguna razón para pensar que ya hemos encontrado toda función y valor propio, ¿cómo podemos estar seguros que no existe alguna solución no expresable como producto de funciones unidimensionales? Resulta sencillo: ya sabemos que efectivamente todo par de funciones propias son ortogonales entre sí, probaremos que la única forma de obtener una función ortogonal a  $\{\Phi_{nm}\}$  será con la función cero, es decir, que  $\{\Phi_{nm}\}$  es completa en  $L_2(\Omega)$  y por tanto densa en  $L_2(\Omega)$ .

**Proposición 6.1** Sean  $\{\Psi_n\}_{n=1}^\infty$ ,  $\{\Upsilon_m\}_{m=1}^\infty$  dos sucesiones completas en  $L_2(0, a)$  y  $L_2(0, b)$  respectivamente, sea  $\Phi_{nm}(x, y) = \Psi_n(x)\Upsilon_m(y)$ . Entonces  $\{\Phi_{nm}\}_{n,m=1}^\infty$  es completa en  $L_2(\Omega)$ .

**Prueba:** Nuestra hipótesis es que para toda  $f \in L_2(0, a)$  y toda  $g \in L_2(0, b)$  tales que  $\langle f, \Psi_i \rangle_{L_2} = 0$  y  $\langle g, \Upsilon_j \rangle_{L_2} = 0$  para cualesquiera  $i, j \in \mathbb{N}$  nos lleva a que necesariamente  $f = 0$  y  $g = 0$  en su intervalo correspondiente. Tomemos  $h \in L_2(\Omega)$  tal que  $\langle h, \Phi_{i,j} \rangle_{L_2} = 0$  para cualesquiera  $i, j \in \mathbb{N}$ , usamos el teorema de Fubini para escribir:

$$\begin{aligned} \langle h, \Phi_{i,j} \rangle &= \int_{\Omega} h(x, y) \Psi_i(x) \Upsilon_j(y) d\Omega = \int_0^a \int_0^b h(x, y) \Psi_i(x) \Upsilon_j(y) dy dx = \\ &= \int_0^a \Psi_i \left[ \int_0^b h(x, y) \Upsilon_j(y) dy \right] dx \end{aligned}$$

donde la parte entre corchetes  $f(x) = \int_0^b h(x, y) \Upsilon_j(y) dy$  es una función de  $L_2(0, a)$ . Por lo tanto, ya que  $\{\Psi_n\}_{n=1}^\infty$  es completa, tenemos que  $f = 0$  en  $L_2(0, a)$ , es decir que para casi todo  $x_0 \in (0, a)$ , si  $h(x_0, y) = g_0(y)$ :

$$\int_0^b g_0(y) \Upsilon_j(y) dy = 0$$

lo cual implica que para casi toda  $x_0 \in (0, a)$ ,  $g_0(y) = h(x_0, y) = 0$  en  $L_2(0, b)$ , ya que  $\{\Upsilon_m\}_{m=1}^\infty$  es completa en  $L_2(0, b)$ . Concluimos entonces que para casi toda  $(x, y) \in \Omega$ ,  $h(x, y) = 0$ , es decir, que  $h = 0$  en  $L_2(\Omega)$ . Por lo tanto  $\{\Phi_{nm}\}_{n,m=1}^\infty$  es completa en  $L_2(\Omega)$ . ■

Usando esta proposición, ya que hemos definido nuestras funciones  $\Phi_{nm}$  como el producto de funciones propias del intervalo, las cuales son completas y densas en su espacio correspondiente, concluimos que  $\{\Phi_{nm}\}$  es completa y por lo tanto densa en  $L_2(\Omega)$ .

Podemos referir al resultado (6.3) y denotando  $\bar{x} = (x, y)$  y  $\bar{u} = (u, v)$  concluir que

$$K_\Omega(\bar{x}, \bar{u}, t) = \frac{4}{ab} \sum_{n=1, m=1}^\infty e^{-\left(\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2\right)t} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}u\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{b}v\right) \quad (6.10)$$

es efectivamente un núcleo de calor sobre el rectángulo  $\Omega$ .

### Expresión por producto de núcleos con reflexión.

Queremos ahora usar la expresión (6.7) calculada anteriormente en la sección 6.2.3 para expresar de otra forma un núcleo de calor sobre el rectángulo. La idea a seguir debería ser bastante predecible después de la sección anterior, queremos ver que el producto

$$K_\Omega(\bar{x}, \bar{u}, t) = \frac{1}{4\pi t} \sum_{n=-\infty}^\infty \left( e^{-\frac{|x-(2na+v)|^2}{4t}} - e^{-\frac{|x-(2na-u)|^2}{4t}} \right) \sum_{n=-\infty}^\infty \left( e^{-\frac{|y-(2nb+v)|^2}{4t}} - e^{-\frac{|y-(2nb-v)|^2}{4t}} \right) \quad (6.11)$$

es efectivamente un núcleo de calor en el rectángulo.

Dejaremos de lado las preocupaciones de convergencia y regularidad ya que extender funciones de esta manera para el espacio producto  $(0, a) \times (0, b)$  mantiene todas las propiedades de las originales bajo la medida estándar.

También dejaremos de lado la prueba de que este producto satisface la ecuación diferencial, pues es la misma idea hecha en el capítulo anterior (separar variables).

Solamente queda estar seguros que efectivamente la función

$$u(\bar{x}, t) = \int_{\Omega} K_{\Omega}(\bar{x}, \bar{u}, t) g(\bar{u}) d\bar{u}$$

satisface la condición inicial  $u(\bar{x}, 0) = g(\bar{x})$  para cualquier  $g$  continua de soporte compacto; pero una vez más, para  $t \sim 0$ , todos los términos de las series tienden a cero muy rápidamente. Sobreviven únicamente los términos  $e^{-\frac{|x-u|^2}{4t}}$  y  $e^{-\frac{|y-v|^2}{4t}}$  en cada multiplicando, estos son acotados y todos los demás términos van a cero, por lo que sólo sobrevive su producto:  $e^{-\frac{|x-u|^2 + |y-v|^2}{4t}}$ , que deja precisamente el núcleo de calor sobre el plano, lo que garantiza que se cumplirán nuestras condiciones iniciales.

Esta idea es en sí fundamental para lo que haremos más adelante, todo núcleo de calor, evaluando en un mismo punto ambas variables espaciales, es muy parecido a la solución fundamental cuando  $t \sim 0$ .

Hacemos notar que gracias al corolario 4.10 podemos estar seguros que nuestros núcleos (6.10) y (6.11) son la misma función y simplemente son expresiones distintas.

### 6.3. Solución sobre un semiplano

Usaremos aquí la misma idea que en la sección 6.2.3, pero partiremos de un punto de vista ligeramente distinto.

Para resolver el problema en el intervalo, iteramos reflexiones sobre las condiciones iniciales para compensar la temperatura en los extremos del intervalo y después mediante cambios de variables transmitimos éstas al núcleo. Esta vez, trataremos de reflejar sobre el núcleo directamente ya que la misma idea intuitiva del tipo de solución que representa el núcleo sobre el plano, puede ser trasladada directamente al núcleo que estamos buscando.

Pensemos que buscamos una solución tal que sobre el semiplano en algún punto  $y_0$  tenga como condición inicial el “chispazo” de calor que representa el núcleo del plano, pero de manera que sobre la frontera (toda una recta) se cumpla la condición homogénea.

Si colocamos un “chispazo” negativo en algún punto  $y_1$  distinto de  $y_0$ , entonces, conforme el tiempo evoluciona, sobre todos los puntos que equidisten de ambos puntos  $y_0$  y  $y_1$  podemos esperar que ambos chispazos se anulen mutuamente y sobre estos puntos la temperatura sea constantemente cero (pues ya vimos que este tipo de soluciones dependen únicamente de la distancia al punto que origina el impulso inicial). Y precisamente el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de otros dos es precisamente una recta, la cual corresponde a la recta de reflexión que lleva de un punto a otro.

Es decir que el punto  $y_1$  que podemos esperar nos dará el comportamiento deseado es precisamente el reflejado de  $y_0$  sobre la frontera de nuestro semiplano.

Sea entonces  $\Omega$  un semiplano delimitado por la línea  $l$ . Para nuestros fines nos será útil expresar el núcleo para  $\Omega$  en términos únicamente de la distancia de algún punto  $y$  a la línea  $l$ , la cual denotaremos por  $d(y)$  y de su vector normal  $\bar{n}$  orientado hacia afuera de  $\Omega$ ; por tanto no nos interesa muy particularmente ni la expresión para  $l$  ni para  $\Omega$ .

El núcleo para el plano (5.1) es

$$\frac{1}{4\pi t} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}$$

el cual representa el chispazo en el punto  $y$ . La imagen de  $y$  bajo una reflexión sobre la recta  $l$  es el punto dado por:

$$y_1 = y + 2d(y)\bar{n}.$$

Por tanto nuestro chispazo negativo en este punto  $y_1$  esta representado por:

$$-\frac{1}{4\pi t} e^{-\frac{|x-2d(y)\bar{n}-y|^2}{4t}}$$

y al sumar estas expresiones obtenemos

$$K(x, y, t) = \frac{1}{4\pi t} \left( e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} - e^{-\frac{|x-2d(y)\bar{n}-y|^2}{4t}} \right). \quad (6.12)$$

Afirmamos que entonces para  $g \in C_0(\Omega)$

$$u(x, t) = \int_{\Omega} K(x, y, t)g(y)dy$$

es solución al problema 4.2.

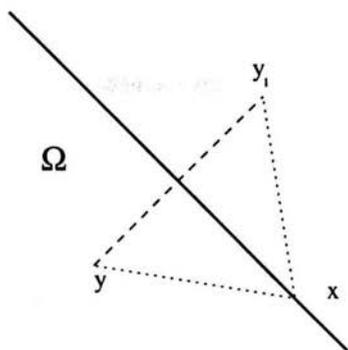
Para  $x \in \Omega$  es claro, por la misma definición de  $y_1$ , que  $|x - y_1| = |x - 2d(y)\bar{n} - y| \neq 0$ . Esto garantiza que

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi t} \int_{\Omega} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y)dy = g(x)$$

y este límite es uniforme (es lo hecho en la sección 5.1).

También es muy claro que satisface la ecuación (4.2), ya que en realidad es la suma de dos soluciones sobre el plano.

Sólo queda ver que para  $x \in l$  entonces  $|x - y| = |x - 2d(y)\bar{n} - y| = |x - y_1|$ , pero precisamente  $y$  y  $y_1$  equidistan de todos los puntos de la recta  $l$ ; sólo



para ayudar a convencernos, observemos que por un lado la terna de puntos  $x, y, y + d(y)\bar{n}$  forma un triángulo rectángulo congruente con el triángulo formado por  $x, y + d(y)\bar{n}, y_1$ , los cuales comparten el cateto sobre la recta y su otro cateto tiene longitud  $d(y)$ .

Eso implica que entonces para  $x_0 \in l$  y  $t > 0$  tenemos  $K(x_0, y, t) = 0$  para cualquier  $y \in \Omega$ . Y por tanto se cumple la condición de frontera  $u(x, t) = 0$  si  $x \in l = \partial\Omega$ .

Hemos encontrado entonces, el núcleo de calor correspondiente para un semiplano.

## Parte III

**Qué podemos escuchar.**

## Capítulo 7

# Lo que podemos escuchar de un tambor.

Finalmente, llegamos al momento en el que utilizaremos gran parte de los resultados anteriores para poder enfocarnos en nuestro objetivo original: escuchar la forma del tambor.

Supondremos que conocemos en su totalidad el conjunto  $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$  de valores propios para algún dominio (acotado)  $\Omega$ ; a continuación, a partir de suponer que únicamente tenemos esta información, obtendremos información adicional de nuestro dominio.

### 7.1. El área.

Tomemos algún punto arbitrario  $x$  dentro de  $\Omega$  (nuestro tambor); tomemos  $a > 0$  lo suficientemente pequeño como para que al tomar un cuadrado con centro en  $x$  de lado  $a$ , este cuadrado este totalmente contenido en  $\Omega$ . Tomemos el núcleo de calor para este cuadrado en su expresión por funciones propias (6.10). Tomemos también el núcleo de calor en  $\Omega$  dado como en (6.3) y el núcleo de calor en el plano (5.1); evaluemos estos núcleos en ambas variables espaciales en el punto  $x$ . Tenemos que el cuadrado está contenido en  $\Omega$  que a su vez está contenido en el plano; podemos usar entonces la desigualdad de la proposición 4.9 y escribir

$$\frac{4}{a^2} \sum_{n=1, m=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 (n^2+m^2)t} \operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi}{a} x_1\right) \operatorname{sen}^2\left(\frac{m\pi}{b} x_2\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \Phi_n^2(x) \leq \frac{1}{4\pi t}$$

esto suponiendo que el origen esté en la esquina inferior izquierda del cuadrado, en cuyo caso, al ser  $x$  su centro implica que  $x = \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$  y por tanto de la

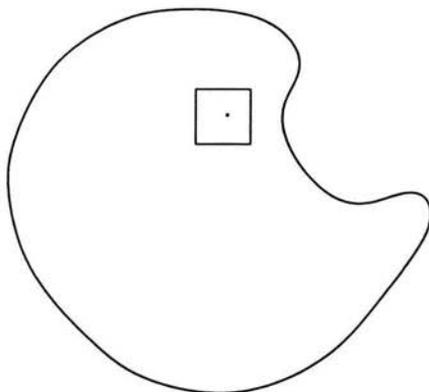


Figura 7.1: Un punto dentro de un cuadrado en  $\Omega$ .

desigualdad obtenemos:

$$\frac{4}{a^2} \sum_{\substack{n, m \\ \text{impares}}} e^{-\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 (n^2 + m^2)t} \leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \Phi_n^2(x) \leq \frac{1}{4\pi t} \quad (7.1)$$

donde esta vez la expresión es independiente de todo punto de referencia (invariante bajo traslación).

Cubrimos a  $\Omega$  con cuadrillos de lado  $a$ , quedándonos únicamente con aquellos que estén totalmente dentro de  $\Omega$ ; llamamos  $N(a)$  al número de cuadrillos totalmente dentro de  $\Omega$  y llamamos  $\Omega(a)$  a la unión de estos cuadrillos.

Al integrar primero el lado izquierdo de la desigualdad (7.1) sobre  $\Omega(a)$  obtenemos:

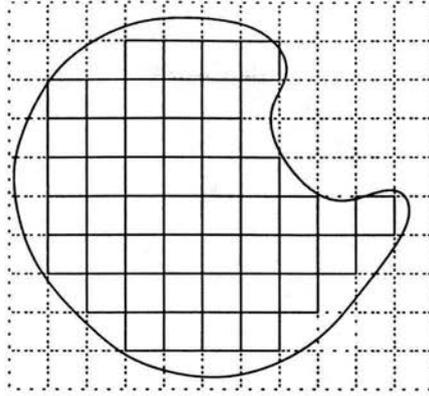
$$4N(a) \sum_{\substack{n, m \\ \text{impares}}} e^{-\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 (n^2 + m^2)t} \leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \int_{\Omega(a)} \Phi_n^2(x) dx$$

pero además, ya que estamos tomando las funciones propias normalizadas

$$\int_{\Omega(a)} \Phi_n^2(x) dx \leq \int_{\Omega} \Phi_n^2(x) dx = 1.$$

Al integrar ahora el lado derecho de la desigualdad (7.1) sobre  $\Omega$  obtenemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \leq \frac{|\Omega|}{4\pi t}.$$

Figura 7.2:  $\Omega$  y su cubierta de cuadritos  $\Omega(a)$ .

Finalmente, viendo que  $N(a) = \frac{|\Omega(a)|}{a^2}$  y combinando lo anterior, obtenemos que

$$4 \frac{|\Omega(a)|}{a^2} \sum_{\substack{n, m \\ \text{impares}}} e^{-\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 (n^2 + m^2)t} \leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \leq \frac{|\Omega|}{4\pi t}.$$

Observemos que la serie

$$4 \sum_{\substack{n, m \\ \text{impares}}} e^{-\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 (n^2 + m^2)t}$$

puede verse como la suma de Riemann de la integral

$$\frac{1}{4t} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 |x|^2} dx$$

si tomamos como partición de Riemann todos los cuadritos con vértices en coordenadas  $(\sqrt{t}a, \sqrt{t}b)$  con  $a$  y  $b$  enteros pares y evaluamos sobre los centros de los cuadritos (la serie es sobre  $\sqrt{t}n$  y  $\sqrt{t}m$  con  $n$  y  $m$  naturales impares que son precisamente los centros de los cuadritos sobre el *primer cuadrante* que tienen lado  $2\sqrt{t}$ ). La integral es sobre todo el plano, pero de ahí viene nuestro factor  $\frac{1}{4}$ ). Si evaluamos esta integral

$$\frac{1}{4t} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 |x|^2} dx = a^2 \frac{1}{4\pi t}$$

obtenemos entonces que conforme  $t \rightarrow 0$  (la partición se hace más fina)

$$4 \frac{|\Omega(a)|}{a^2} \sum_{\substack{n, m \\ \text{impares}}} e^{-\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 (n^2 + m^2)t} \sim \frac{|\Omega(a)|}{4\pi t}.$$

Tomando el límite cuando  $a \rightarrow 0$ , obtenemos que entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{|\Omega|}{4\pi t} \quad (7.2)$$

¡Podemos escuchar el área de nuestro tambor!

Aún más:

Si  $\alpha(\lambda) = \sum_{\lambda_n < \lambda} 1$ , entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} d\alpha(\lambda)$$

por lo que nuestro teorema tauberiano A.1 nos dice que:

$$\sum_{\lambda_n < \lambda} 1 \sim \frac{|\Omega|}{4\pi} \lambda. \quad (7.3)$$

Es decir:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda} \sum_{\lambda_n < \lambda} 1 = \frac{|\Omega|}{4\pi}.$$

Que nos prueba que efectivamente la distribución asintótica de los valores propios es proporcional al área del dominio.

## 7.2. La longitud de la frontera

Para este resultado, necesitaremos que la frontera de  $\Omega$  satisfaga ciertas condiciones, las cuales iremos precisando poco a poco.

Lo que haremos a continuación es prácticamente lo mismo que acabamos de hacer, pero en cierto modo haremos estimaciones mucho más precisas, lo suficiente para encontrar el comportamiento asintótico de

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t}$$

a órdenes de  $t$  más pequeños.

Simplificaremos un poco más las cosas suponiendo primero que nuestro tambor es convexo y de frontera suave; después debilitaremos algunas condiciones.

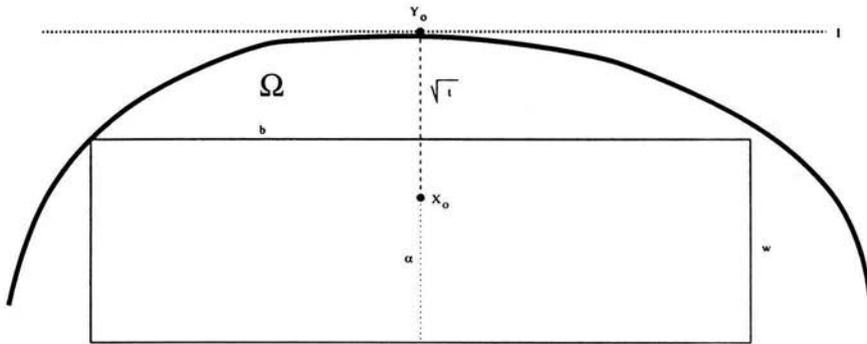
### Un tambor convexo de frontera suave.

Tomemos algún punto  $x_0$  en nuestro tambor convexo  $\Omega$  y tomemos el punto  $y_0$  sobre la frontera de  $\Omega$  que cumple la propiedad de ser el punto más cercano a  $x_0$  (este existe para cualquier  $\Omega$  acotado) y sea  $d_0 = d(x_0, y_0)$ .

Ya que supusimos que  $\Omega$  es convexo y de frontera suave, podemos estar seguros que la distancia  $d$  de un punto  $x$  en  $\Omega$  al punto  $y$  en  $\partial\Omega$  más cercano a  $x$  varía continuamente.

Sea  $l$  una línea soporte de  $\Omega$  que pasa por  $y_0$  (siempre existe, para conjuntos convexos), esta línea es única y es precisamente la tangente, ya que pedimos que nuestra frontera fuera al menos  $C^1$ , en este caso, además se cumple que el vector que va de  $x_0$  a  $y_0$  es perpendicular a la recta.

Fijamos  $x_0$  y nos restringimos a  $t \in (0, d_0^2)$ . Para cada  $t$ , fijamos una línea paralela a  $l$  de manera que corte el segmento  $\overline{x_0 y_0}$  y se encuentre a distancia  $\sqrt{t}$  de  $l$ , esta recta corta en exactamente dos puntos a  $\partial\Omega$ . Tomamos el punto de corte más cercano al segmento  $\overline{x_0 y_0}$  y denotamos por  $b(t)$  a la distancia precisamente del segmento a este punto. Tomando este punto como esquina, construimos un rectángulo  $Q_t$  con un lado de  $2b(t)$  sobre la recta paralela a  $l$  y el otro lado de longitud  $w(t) = \alpha + d_0 - \sqrt{t}$ , donde si tomamos  $t$  suficientemente pequeño, podemos construir el rectángulo de manera que contenga al punto  $x_0$  en su interior y también el interior del rectángulo esté totalmente contenido en  $\Omega$  (y además la cota para  $t$  puede ser elegida uniformemente para todo  $x_0 \in \Omega$ ); en este caso,  $\alpha$  es una constante que podemos tomar estrictamente positiva (con cota uniforme para  $x_0 \in \Omega$ ).



Pensando que este rectángulo está parametrizado por  $Q_t = (0, 2b(t)) \times (0, w(t))$  el núcleo de calor para  $Q_t$  dado en (6.11) evaluado en el tiempo  $t$  es:

$$K_{Q_t}(i, j, u, v, t) = \frac{1}{4\pi t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( e^{-\frac{|i-(4nb+u)|^2}{4t}} - e^{-\frac{|i-(4nb-u)|^2}{4t}} \right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( e^{-\frac{|j-(2nw+v)|^2}{4t}} - e^{-\frac{|j-(2nw-v)|^2}{4t}} \right).$$

Bajo este sistema de coordenadas, escribimos el punto  $x_0$  como  $(b, \alpha)$  así que evaluando el núcleo dos veces en estas coordenadas obtenemos:

$$K_{Q_t}(x_0, t) = \frac{1}{4\pi t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( e^{-\frac{|4nb|^2}{4t}} - e^{-\frac{|2b-4nb|^2}{4t}} \right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( e^{-\frac{|2n\omega|^2}{4t}} - e^{-\frac{|2(\alpha-n\omega)|^2}{4t}} \right).$$

En cada  $t \in (0, d_0^2)$  fijo,  $Q_t$  es un dominio contenido dentro de nuestro tambor  $\Omega$ , el cual a su vez es un dominio dentro del semiplano con frontera  $l$ , para los cuales se cumple entonces la desigualdad (4.9), la que indica que en cada  $t \in (0, d_0^2)$  evaluando también en  $x_0$  las variables espaciales de los núcleos (6.3) y (6.12) tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( e^{-\frac{|4nb|^2}{4t}} - e^{-\frac{|2b-4nb|^2}{4t}} \right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( e^{-\frac{|2n\omega|^2}{4t}} - e^{-\frac{|2(\alpha-n\omega)|^2}{4t}} \right) &\leq \quad (7.4) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \Phi_n^2(x_0) \leq \frac{1}{4\pi t} \left( 1 - e^{-\frac{|2d_0|^2}{4t}} \right). \end{aligned}$$

Dado que  $l$  es tangente al tambor, el cual supusimos convexo de frontera suave, vamos a probar que el límite

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{t}}{b(t)} = 0. \quad (7.5)$$

Esto se tiene porque  $b$  y  $\sqrt{t}$  son los lados de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa tiende a  $l$ , la cual es una recta perpendicular al lado con longitud  $\sqrt{t}$ , por lo que este límite es la pendiente de una recta horizontal; de ahí afirmamos que entonces:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{b^2}{t} = \infty.$$

Estudiemos ahora las sumas  $\circledast$  y  $\circledcirc$  del término hasta la izquierda de la desigualdad (7.4). Vemos primero que

$$\circledast = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( e^{-\frac{|4nb|^2}{4t}} - e^{-\frac{|2b-4nb|^2}{4t}} \right) = 1 - e^{-\frac{b^2}{t}} + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left( e^{-\frac{|4nb|^2}{4t}} - e^{-\frac{|2b-4nb|^2}{4t}} \right)$$

en donde reescribimos la última suma:

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left( e^{-\frac{|4nb|^2}{4t}} - e^{-\frac{|2b-4nb|^2}{4t}} \right) &= \sum_{n \neq 0} e^{-\frac{|4nb|^2}{4t}} - \sum_{n \neq 0} e^{-\frac{|2b-4nb|^2}{4t}} = \\ &= 2 \sum_{n \geq 1} e^{-\frac{|4nb|^2}{4t}} - 2 \sum_{n \geq 1} e^{-\frac{|2b+4nb|^2}{4t}} - \underbrace{e^{-\frac{b^2}{t}}}_{n=1}. \end{aligned}$$

De aquí obtenemos que

$$\circledast = 1 - 2e^{-\frac{b^2}{t}} + 2 \sum_{n \geq 1} \left( e^{-\frac{|4nb|^2}{4t}} - e^{-\frac{|2b+4nb|^2}{4t}} \right).$$

En la última suma todos los términos son positivos, por lo que finalmente concluimos que

$$\circledast \geq 1 - 2e^{-\frac{b^2}{t}}.$$

Ya que pedimos frontera suave (es decir  $C^\infty$ ) y por el límite (7.5), si parametrizamos a la frontera localmente como  $h(b)$  usando el punto de tangencia como el origen y la recta tangente como el eje donde corre  $b$ , tenemos que  $\sqrt{t} = h(b) = Mb^2(t) + o(b^2)$  por lo que aseguramos que al menos  $\frac{t}{b^2} \sim M\sqrt{t}$  para  $t \sim 0^+$  y alguna constante  $M$ , la cual puede ser acotada uniformemente para  $\partial\Omega$ ; esto es suficiente para garantizar que

$$\circledast \geq 1 + o(t)$$

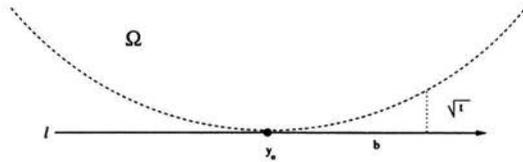


Figura 7.3: La frontera localmente vista como una función de  $b$ .

Vemos ahora que

$$\begin{aligned} \circledast &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( e^{-\frac{|2nw|^2}{4t}} - e^{-\frac{|2(\alpha-nw)|^2}{4t}} \right) \\ &= 1 - e^{-\frac{|\alpha|^2}{t}} + e^{-\frac{w^2}{t}} - e^{-\frac{|\sqrt{t}-d_0|^2}{t}} + e^{-\frac{w^2}{t}} - e^{-\frac{|w+\alpha|^2}{4t}} + \\ &+ \sum_{|n|>1} \left( e^{-\frac{|2nw|^2}{4t}} - e^{-\frac{|2(\alpha-nw)|^2}{4t}} \right) \end{aligned}$$

donde aquí la última suma la reescribimos de la siguiente manera:

$$\sum_{|n|>1} \left( e^{-\frac{|2nw|^2}{4t}} - e^{-\frac{|2(\alpha-nw)|^2}{4t}} \right) = 2 \sum_{n>1} e^{-\frac{|nw|^2}{t}} - \sum_{|n|>1} e^{-\frac{|\alpha+nw|^2}{t}}.$$

Ahora, tomemos  $n > 0$ , claramente

$$|\alpha + nw|^2 \geq |\alpha - nw|^2$$

(pues  $\alpha, w > 0$ ).

Garantizamos entonces que

$$\sum_{|n|>1} e^{-\frac{|\alpha+nw|^2}{t}} \geq 2 \sum_{n>1} e^{-\frac{|\alpha+nw|^2}{t}}$$

por lo que afirmamos que

$$\circledast \geq 1 - e^{-\frac{|\alpha|^2}{t}} + 2e^{-\frac{w^2}{t}} - e^{-\frac{|\sqrt{t}-d_0|^2}{t}} - e^{-\frac{|w+\alpha|^2}{4t}} + 2 \sum_{n>1} \left( e^{-\frac{|nw|^2}{t}} - e^{-\frac{|nw+\alpha|^2}{t}} \right)$$

donde una vez más podemos ver que esta última suma es siempre positiva al comparar los argumentos de las exponenciales de la misma manera que se acaba de hacer.

Entonces:

$$\begin{aligned} \odot &\geq 1 - e^{-\frac{|\Omega|}{t}} + 2e^{-\frac{w}{t}} - e^{-\frac{|\sqrt{t}-d_0|}{t}} - e^{-\frac{|\frac{w+\alpha}{4t}|}{t}} = \\ &= 1 - e^{-\frac{|\sqrt{t}-d_0|}{t}} + o(t) \end{aligned}$$

( $w, \alpha > 0$  garantizan que todos los demás términos van a cero más rápido que  $t$ ).

Así que finalmente reescribimos (7.4) en dos desigualdades:

$$\frac{1}{4\pi t} \left( 1 - e^{-\frac{|\sqrt{t}-d_0|}{t}} + o(t) \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \Phi_n^2(x_0) \quad (7.6)$$

y

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \Phi_n^2(x_0) \leq \frac{1}{4\pi t} \left( 1 - e^{-\frac{|\Omega|}{t}} \right) \quad (7.7)$$

donde para la desigualdad (7.6) fue necesario suponer que  $\sqrt{t} < d_0$ .

Usando la desigualdad (7.7), la cuál es válida para todo  $x_0 \in \Omega$  y ya que  $d(x)$  (la distancia del punto  $x$  a  $\partial\Omega$ ) varía continuamente, obtenemos que al integrar:

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \leq \frac{|\Omega|}{4\pi t} - \frac{1}{4\pi t} \int_{\Omega} e^{-\frac{d^2(x)}{t}} dx.$$

Tomemos  $\Gamma(d)$ , la curva de todos los puntos a distancia  $d$  de la frontera de  $\Omega$ , esta curva está bien definida para  $\Omega$  convexo y una  $d$  suficientemente pequeña. Tomemos  $d_1$  tal que si  $d < d_1$ , entonces  $d$  es "suficientemente pequeña":

$$\int_{\Omega} e^{-\frac{d^2(x)}{t}} dx = \int_0^{d_1} \ell(\Gamma(d)) e^{-\frac{d^2}{t}} dd + \int_{\langle \Gamma(d_1) \rangle} e^{-\frac{d^2(x)}{t}} dx$$

donde  $\ell(\Gamma(d))$  es la longitud de la curva  $\Gamma(d)$  y  $\langle \Gamma(d_1) \rangle$  es el casco convexo de la curva  $\Gamma(d_1)$ .

Además tenemos que

$$\int_{\langle \Gamma(d_1) \rangle} e^{-\frac{d^2(x)}{t}} dx \leq |\Omega| e^{-\frac{d_1^2}{t}} = o(\sqrt{t})$$

Usando el cambio de variables  $u = \frac{d}{\sqrt{t}}$  obtenemos:

$$\int_0^{d_1} \ell(\Gamma(d)) e^{-\frac{d^2}{t}} dd = \sqrt{t} \int_0^{\frac{d_1}{\sqrt{t}}} \ell(\Gamma(u\sqrt{t})) e^{-u^2} du$$

y entonces

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^{d_1} \ell(\Gamma(d)) e^{-\frac{d^2}{t}} dd = \ell(\partial\Omega) \int_0^\infty e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \ell(\partial\Omega).$$

Si juntamos esto, resulta que para  $t \sim 0^+$  tenemos que

$$\int_{\Omega} e^{-\frac{d^2(x)}{t}} dx \sim \frac{\sqrt{\pi t}}{2} \ell(\partial\Omega).$$

Trabajemos ahora sobre la desigualdad (7.6), tomando en cuenta que no podemos integrar sobre  $\Omega$  de la misma manera que se hizo anteriormente, ya que al hacer esto, estamos tomando  $d(x)$  arbitrariamente pequeño, pero entonces no podríamos garantizar  $t < d^2$ , lo cual es necesario si queremos que nuestra desigualdad se mantenga válida.

Para evitar problemas, tomaremos  $\Omega_t = \langle \Gamma(\sqrt{t}) \rangle$  (donde podemos suponer que  $t < d^2 < d_1^2$  para garantizar que  $\Omega_t$  está efectivamente bien definido). Para cualquier punto  $x \in \Omega_t$ , garantizamos que efectivamente  $d^2(x) > t$ .

Integrando entonces la desigualdad (7.6) para  $x \in \Omega_t$  tenemos:

$$\frac{|\Omega_t|}{4\pi t} - \frac{1}{4\pi t} \int_{\Omega_t} e^{-\frac{|\sqrt{t}-d(x)|^2}{t}} dx + \frac{o(t)}{t} \leq \int_{\Omega_t} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \Phi_n^2(x) dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t}$$

de una manera similar a lo que se hizo arriba, vemos que

$$\int_{\Omega_t} e^{-\frac{|\sqrt{t}-d(x)|^2}{t}} dx = \int_{\sqrt{t}}^{d_1} \ell(\Gamma(d)) e^{-\frac{|\sqrt{t}-d|^2}{t}} dd + \int_{\langle \Gamma(d_1) \rangle} e^{-\frac{|\sqrt{t}-d(x)|^2}{t}} dx$$

con

$$\int_{\langle \Gamma(d_1) \rangle} e^{-\frac{|\sqrt{t}-d(x)|^2}{t}} dx \leq |\Omega| e^{-\frac{|\sqrt{t}-d_1|^2}{t}} = o(t)$$

por la condición  $t < d^2 < d_1^2$ .

Usando ahora el cambio de variable  $u = \frac{d}{\sqrt{t}} - 1$  obtenemos:

$$\int_{\sqrt{t}}^{d_1} \ell(\Gamma(d)) e^{-\frac{|\sqrt{t}-d|^2}{t}} dd = \sqrt{t} \int_0^{\frac{d_1}{\sqrt{t}}-1} \ell(\Gamma(\sqrt{t}(u+1))) e^{-u^2} du$$

(notemos que  $\Gamma(\sqrt{t}(u+1))$  esta bien definida para  $t \sim 0$ ).

Si al igual que arriba dividimos entre  $\sqrt{t}$  y tomamos el límite cuando  $t \rightarrow 0^+$  vemos que para  $t \sim 0^+$ :

$$\int_{\Omega} e^{-\frac{|\sqrt{t}-d(x)|^2}{t}} dx \sim \frac{\sqrt{\pi t}}{2} \ell(\partial\Omega)$$

y ya que para  $t \sim 0^+$

$$|\Omega_t| \sim |\Omega| \quad \text{y} \quad \frac{o(t)}{t} \sim 0$$

entonces hemos probado que:

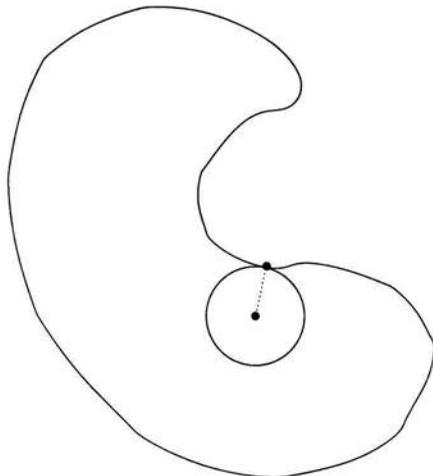
$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \sim_{t \rightarrow 0^+} \frac{|\Omega|}{4\pi t} - \frac{\ell(\partial\Omega)}{8\sqrt{\pi t}} \quad (7.8)$$

es decir que podemos escuchar también, la longitud de la frontera del tambor convexo.

### Un tambor de frontera suave.

Quitaremos ahora la condición de convexidad. Veremos que la condición de convexidad no es necesaria para probar ninguna de las estimaciones hechas aquí arriba.

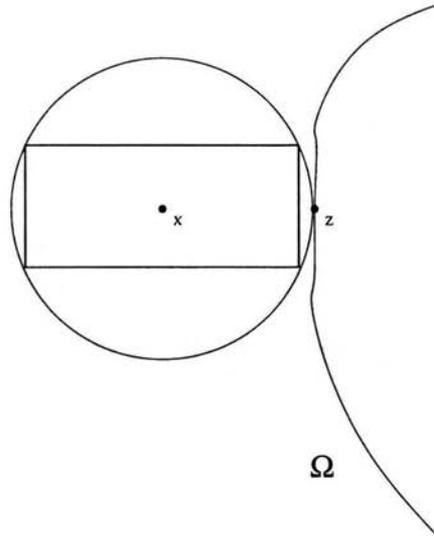
Primero, supondremos aquí que la frontera de nuestro tambor es una curva suave simple (sin intersecciones), esto permite que a cada punto de la frontera le asignemos una bolita la cual es tangente a la frontera en dicho punto y toda la bolita esté totalmente contenida (pues existe una curvatura máxima de la frontera) en nuestro tambor. Además, los radios de dichas bolitas varían continuamente, y ya que la frontera es un compacto podemos suponer que existe un radio mínimo para el cual en todo punto frontera podemos poner una bolita totalmente contenida en el conjunto tangente a dicho punto frontera. Denotaremos este radio mínimo por  $\delta$ .



Para un punto  $x_0$  de nuestro tambor  $\Omega$  a una distancia  $d_0$ , podemos entonces meterlo en un rectángulo con esquinas en la bolita con centro  $x_0$  de radio  $\max(\delta, d_0)$  tangente al punto  $y_0 \in \partial\Omega$  más cercano a  $x_0$ , de manera que

tenga un lado paralelo a la tangente por  $y_0$  y a una distancia  $\sqrt{t}$  de dicha tangente.

Es fácil ver ahora, que este rectángulito se comportará de la misma manera que el rectángulo usado anteriormente para probar la desigualdad (7.6). (Ya que necesitábamos que  $x_0$  estuviera en el interior del rectángulo, que  $\alpha > 0$  y que el límite (7.5) se comporte como para la tangente de una curva suave y por tanto poder acotar las colas de las series con  $o(t)$ ).



Tenemos entonces que para  $\Omega$  con frontera suave, no necesariamente convexo se cumple la desigualdad (7.6):

$$\frac{1}{4\pi t} \left( 1 - e^{-\frac{|\sqrt{t}-d_0|^2}{t}} + o(t) \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \Phi_n^2(x_0).$$

Si ahora  $\langle A \rangle$  denota el interior (o el “relleno”) de la curva  $A$  en lugar de su casco convexo, todos los pasos hechos arriba para trabajar sobre la desigualdad (7.6) se preservan intactos.

Para ver que se cumple también una desigualdad similar a (7.7) necesitaremos tener un poco más de cuidado. Tomemos nuevamente para  $d > 0$  a  $\Gamma(d)$ , la curva de todos los puntos en  $\Omega$  a una distancia  $d$  de  $\partial\Omega$ , a partir de alguna  $d_0$ , si  $0 < d < d_0$  entonces  $\Gamma(d) \neq \emptyset$ . Fijemos a  $d$  por un momento y tomemos algún  $x \in \Gamma(d)$ . Existe al menos un punto  $z(x, d) \in \partial\Omega$  tal que la distancia de  $x$  a  $z$  es  $d$  (para nuestras hipótesis de frontera y  $d$  suficientemente pequeño este  $z$  es único).

Tomemos la tangente a  $\partial\Omega$  por  $z$ , "alejemos" esta recta una distancia  $b$  de nuestro conjunto y llamemos a esta recta  $l(z, b)$  (es decir:  $l(z, b)$  es la recta paralela a la tangente a  $\partial\Omega$  por  $z$  de manera que la distancia de  $x$  a  $l$  sea  $b$ ).

Dicha recta  $l$  puede cortar a  $\partial\Omega$  en ningún o muchos puntos. Recordando que  $\partial\Omega$  es un compacto definimos la función:

$$h_z(b) = \begin{cases} \infty & l \cap \partial\Omega = \emptyset \\ \min_{w \in \{l \cap \partial\Omega\}} d(z, w) & l \cap \partial\Omega \neq \emptyset. \end{cases}$$

Afirmamos que para alguna  $b > 0$  fija, tenemos la cota  $h_z(b) > \alpha > 0$  para cualquier  $z \in \partial\Omega$  (porque si no esto nos denotaría una singularidad en la frontera, en seguida daremos argumentos que refuerzan esta afirmación); así que podemos definir

$$h(b) := \inf_{z \in \partial\Omega} h_z(b).$$

Para  $b$  suficientemente pequeña, es necesario que  $h(b) < \infty$  o de lo contrario  $\Omega$  es un conjunto convexo.

Pensando un momento al punto  $z$  como fijo, tomemos el punto  $z_h \in \partial\Omega$  que cumple que  $d(z, z_h) = h_z(b)$  y el punto  $z_b \in l(z, b)$  que cumple  $d(z, z_b) = b$ , estos tres puntos forman un triángulo rectángulo cuya hipotenusa (el lado  $\overline{z z_h}$ ) tiende a ser tangente a  $\partial\Omega$  en  $z$  si  $b \rightarrow 0$  es decir que bajo un sistema de coordenadas con ejes paralelos a la recta tangente y a la normal por  $z$ , la tangente de esta hipotenusa tiende a cero, es decir:

$$\lim_{b \rightarrow 0} \frac{b}{d(z_h, z_b)} = 0.$$

Pero ya que  $h_z^2(b) = b^2 + d(z_h, z_b)^2$  esto implica que

$$\lim_{b \rightarrow 0} \frac{h_z(b)}{b} = \infty$$

para cualquier  $z \in \partial\Omega$ .

Este límite, además, es uniforme, de lo contrario podríamos construir una sucesión  $\{(z_n, b_n)\}_{n=1}^{\infty}$  tal que  $b_n \rightarrow 0$  y  $z_n \rightarrow z$  con  $z \in \partial\Omega$  (compacto) para los cuales

$$\frac{h_{z_n}(b_n)}{b_n} \rightarrow M < \infty$$

esto necesariamente nos lleva a que el límite  $\frac{b_n}{d(z_{h_n}, z_{b_n})} \rightarrow 0$  no se cumple, lo que implica que tenemos un salto en la frontera<sup>1</sup>. Esto es una contradicción.

Podemos concluir que entonces:

$$\lim_{b \rightarrow 0} \frac{h(b)}{b} = \infty.$$

<sup>1</sup> Notemos que la frontera suave implica que  $\lim_{z \rightarrow z_0} \lim_{b \rightarrow 0} \frac{h_z(b)}{b} = \lim_{b \rightarrow 0} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{h_z(b)}{b}$ .

Tomemos ahora un  $x_0 \in \Omega$  fijo y  $b > 0$  pequeña, también fija por el momento.

Tomemos  $S_l$  el semiplano con frontera  $l(z(x_0), b)$  que contiene a  $x_0$ . Nuestra intención es acotar el núcleo de calor para  $\Omega$  evaluado en  $x_0$  por el núcleo de calor del semiplano  $S_l$ . La dificultad es que este dicho semiplano no contiene a  $\Omega$  para  $b$  pequeña (motivo por el cual no utilizamos el semiplano definido por la tangente en primer lugar), sin embargo este semiplano  $S_l$  contiene al semiplano por la tangente. Esto permite que nuestro núcleo de calor resultante sea ligeramente más grande, quizá lo suficiente para acotar el núcleo de  $\Omega$  por lo menos localmente y así poder llegar a la desigualdad buscada.

Hemos desarrollado a lo largo de este trabajo suficiente conocimiento sobre los núcleos de calor para poder intuir cómo usar nuevamente el principio del máximo y obtener una desigualdad más apropiada a este caso que nuestra desigualdad original (4.9) lo suficientemente fina para permitirnos llegar al resultado.

Tomemos  $\Omega_l = \Omega \cap S_l$  y una función  $g \in C_c^\infty(\Omega_l)$  positiva.

Sea:

$$u(x, t) = \int_{\Omega_l} (K_{S_l} - K_\Omega)(x, y, t) g(y) dy$$

(aquí  $K_{S_l}$  y  $K_\Omega$  representan los núcleos de calor para  $S_l$  y  $\Omega$  respectivamente).

La función  $u(x, t)$  satisface:

$$\begin{array}{lll} \Delta u = u_t & x \in \Omega_l & t > 0 \\ u(x, t) = 0 & x \in \Omega_l & t = 0 \\ u(x, t) \geq 0 & x \in \partial\Omega \cap S_l & t > 0 \\ u(x, t) \leq 0 & x \in l \cap \Omega & t > 0 \end{array}$$

Usando el Corolario 4.2 del principio del máximo, tenemos que para  $T > 0$  arbitrario

$$\inf_{(x,t) \in l \cap \Omega \times [0, T]} u(x, t) \leq u(x_0, T).$$

Pero si  $x \in l \cap \Omega$ , entonces

$$u(x, t) = - \int_{\Omega_l} K_\Omega(x, y, t) g(y) dy.$$

Ahora,  $\Omega_l \subset \mathbb{R}^2$  y entonces la desigualdad (4.9) nos permite la cota:

$$K_\Omega(x, y, t) \leq \frac{1}{4\pi t} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} = K(x, y, t) \quad y \in \Omega_l$$

y entonces

$$\inf_{(x,t) \in l \cap \Omega \times [0, T]} -\frac{1}{4\pi t} \int_{\Omega_l} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y) dy \leq u(x_0, T).$$

Pero ya que  $g \in C_c^\infty(\Omega_l)$  positiva es arbitraria, concluimos que

$$\inf_{(x,t) \in l \cap \Omega \times [0, T]} -\frac{1}{4\pi t} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \leq (K_{S_l} - K_\Omega)(x_0, y, T)$$

para cualquier  $y \in \Omega_l$ , en particular podemos tomar  $y = x_0$ .

Esto además nos da que para  $x \in l \cap \Omega$ , entonces  $\|x - x_0\| \geq h$  y por tanto

$$\inf_{t \in [0, T]} -\frac{1}{4\pi t} e^{-\frac{h^2}{4t}} \leq (K_{S_l} - K_\Omega)(x_0, x_0, T)$$

Viendo que la derivada en  $t$  de nuestro núcleo para el plano evaluada en  $|x - y| = h$  es

$$\frac{\partial K}{\partial t} = \left( \frac{1}{4\pi t} e^{-\frac{h^2}{4t}} \right)_t = -\frac{1}{4\pi t^2} e^{-\frac{h^2}{4t}} + \frac{h^2}{16\pi t^3} e^{-\frac{h^2}{4t}}.$$

entonces para  $t < \frac{h^2}{4}$  tenemos que  $K$  es creciente en  $t$ , por lo que concluimos que

$$-\frac{1}{4\pi T} e^{-\frac{h^2}{4T}} \leq (K_{S_l} - K_\Omega)(x_0, x_0, T) \quad \frac{h^2}{4} > T > 0.$$

Reescribimos esto último para obtener finalmente la desigualdad que buscamos:

$$K_\Omega(x_0, x_0, t) \leq K_{S_l}(x_0, x_0, t) + \frac{1}{4\pi t} e^{-\frac{h^2}{4t}} \quad \frac{h^2}{4} > t > 0$$

la cual al evaluar en los núcleos explícitos obtenemos para  $\frac{h^2}{4} > t > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \Phi_n^2(x_0) \leq \frac{1}{4\pi t} \left( 1 - e^{-\frac{(d+b)^2}{t}} + e^{-\frac{h^2}{4t}} \right). \quad (7.9)$$

Tomamos ahora  $b = \varepsilon\sqrt{t}$  con  $\varepsilon > 0$  fijo, nuestra condición para la desigualdad (7.9) es ahora:

$$b^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{4} h^2$$

pero ya que si  $t \rightarrow 0$  entonces  $b \rightarrow 0$  y entonces  $\frac{b}{h} \rightarrow 0$ , nos basta con tomar  $t$  suficientemente pequeño.

Integremos ahora la desigualdad (7.9) sobre  $\Omega$ , esto nos da:

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \leq \frac{1}{4\pi t} \int_{\Omega} \left( 1 - e^{-\frac{(d+\varepsilon\sqrt{t})^2}{t}} + e^{-\frac{h^2}{4t}} \right) dx$$

en donde

$$\frac{1}{4\pi t} \int_{\Omega} \left( 1 - e^{-\frac{(d+\varepsilon\sqrt{t})^2}{t}} + e^{-\frac{h^2}{4t}} \right) dx = \frac{|\Omega|}{4\pi t} - \frac{1}{4\pi t} \int_{\Omega} e^{-\frac{(d+\varepsilon\sqrt{t})^2}{t}} dx + \frac{\varepsilon^2 |\Omega|}{4\pi b^2} e^{-\frac{\varepsilon^2 h^2}{4b^2}}$$

y para el último término de esta suma tenemos:

$$\frac{\varepsilon^2 |\Omega|}{4\pi b^2} e^{-\frac{\varepsilon^2 h^2}{4b^2}} = o(t).$$

Por tanto sólo nos queda estudiar la integral en el segundo término; tomamos  $d_1$  lo suficientemente pequeña para que

$$\int_{\Omega} e^{-\frac{(d+\varepsilon\sqrt{t})^2}{t}} dx = \int_0^{d_1} \ell(\Gamma(d)) e^{-\frac{(d+b)^2}{t}} dd + \int_{\Gamma(d)} e^{-\frac{(d+\varepsilon\sqrt{t})^2}{t}} dx$$

donde

$$\int_{\Gamma(d)} e^{-\frac{(d+\varepsilon\sqrt{t})^2}{t}} dx \leq |\Omega| e^{-\frac{(d_1+\varepsilon\sqrt{t})^2}{t}} = o(t).$$

Así que usamos el cambio de variables  $u = \frac{d}{\sqrt{t}} + \varepsilon$  para escribir:

$$\int_0^{d_1} \ell(\Gamma(d)) e^{-\frac{d+\varepsilon\sqrt{t}}{t}} dd = \sqrt{t} \int_{\varepsilon}^{\frac{d_1}{\sqrt{t}}+\varepsilon} e^{-u^2} \ell(\Gamma(\sqrt{t}(u+\varepsilon))) du$$

y por lo tanto

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^{d_1} \ell(\Gamma(d)) e^{-\frac{(d+\varepsilon\sqrt{t})^2}{t}} dd = \ell(\partial\Omega) \int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-u^2} du.$$

Juntando todo lo anterior concluimos

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \sqrt{t} \left( \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} - \frac{|\Omega|}{4\pi t} \right) \leq -\frac{\ell(\partial\Omega)}{4\pi} \int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-u^2} du \rightarrow_{\varepsilon \rightarrow 0} -\frac{\ell(\partial\Omega)}{8\sqrt{\pi}}$$

Ya que la cota inferior funciona idéntico que en el caso convexo, hemos probado que para  $\Omega$  no convexo de frontera suave:

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \sim_{t \rightarrow 0^+} \frac{|\Omega|}{4\pi t} - \frac{\ell(\partial\Omega)}{8\sqrt{\pi t}}$$

Estamos seguros ahora, que al menos para un tambor de frontera suave podemos escuchar su área y la longitud de su frontera.

### El sonido único del círculo.

Sabemos que el círculo es el dominio que para un área dada, la longitud de su frontera es mínima. En otras palabras: de todos los dominios planos con un área dada, el círculo es aquel cuya frontera tiene la longitud más pequeña. Por tanto si escuchamos un tambor  $\Omega$  de manera que

$$|\Omega| = \frac{\ell(\partial\Omega)^2}{4\pi}$$

¡podemos estar seguros entonces que  $\Omega$  es un círculo!

## 7.3. Condiciones de frontera más generales.

Haremos ahora un recuento de los argumentos utilizados hasta ahora para tratar de generalizar nuestras condiciones sobre la frontera de nuestro tambor<sup>2</sup>.

<sup>2</sup>Recordemos que nuestros tambores siempre son acotados.

Notemos que el hecho de poder escuchar al menos el área se probó para dominios muy generales (esencialmente dominios Riemann-medibles), así que generalizaremos las condiciones para probar que además podemos escuchar también la longitud de la frontera.

Para acotar por abajo, el argumento necesario fue la existencia de una bolita de radio mínimo la cual siempre puede tocar a la frontera en el punto que elijamos y mantenerse totalmente contenida en nuestro dominio. Este argumento era necesario para poder inscribir un rectángulo en este círculo el cual podía tener siempre un lado acotado por alguna constante  $\alpha > 0$ . Puesto que el círculo tiene frontera suave, el rectángulo inscrito en él mantendrá el comportamiento del límite (7.5) (aquí también el radio mínimo lo necesitamos para mantener la cota uniforme para la segunda derivada de la parametrización local).

Entonces la existencia de un radio mínimo nos preserva intacta la desigualdad (7.6). Este radio mínimo existe siempre y cuando nuestro tambor tenga una frontera  $C^2$  sin autointersecciones.

Para probar la desigualdad (7.9) necesitábamos que la función  $h(b)$  definida en la página 74 cumpliera el límite

$$\lim_{b \rightarrow 0} \frac{h(b)}{b} = \infty$$

lo cual se prueba con el mismo argumento hecho en ese momento que se cumple para cualquier frontera  $C^{1,1}$ .

Sin embargo no basta únicamente con este hecho, ya que esto no garantiza que

$$\frac{\varepsilon^2 |\Omega|}{4\pi b^2} e^{-\frac{\varepsilon^2 h^2}{4b^2}} = o(t)$$

como afirmamos en la página 76, lo cuál en el contexto de frontera suave se cumple por argumentos análogos a los ya usados para la cota inferior en la página 69, ya que si la frontera es suave no solo se cumplirá tal límite sino que además obtenemos

$$\frac{b^2}{h^2} \sim Kb$$

para  $t$  pequeño y alguna constante  $K$ .

Para un tambor de frontera  $C^2$ , podremos encontrar un radio mínimo para el cual todo círculo de este radio puede ser colocado tangente a la frontera y estar totalmente fuera del dominio. Si definimos ahora  $\tilde{h}(b)$  como la distancia desde el punto de tangencia al punto donde la recta paralela a la tangente corta la circunferencia con la que estamos aproximando la tangente (véase la definición de la función  $h_z$  en la página 74), tendremos que

$$\tilde{h}(b) \leq h(b)$$

lo que nos permitirá intercambiar dichas  $h$  en nuestra prueba ( $\tilde{h}$  es aparentemente una cota más burda), pero ya que esta nueva función  $\tilde{h}$  esta uniformemente definida sobre una circunferencia de radio constante la cuál tiene frontera

suave, obtendremos cómo consecuencia que efectivamente

$$\frac{\varepsilon^2 |\Omega|}{4\pi b^2} e^{-\frac{\varepsilon^2 k^2}{4b^2}} = o(t).$$

Así que nuestros resultados son válidos también en tambores cuya frontera es una curva al menos  $C^2$  que no se autointersecta; aunque no hemos sido del todo precisos en este aspecto, estamos confiando en el supuesto de que resulta efectivamente intuitiva la existencia de un círculo de radio mínimo que puede estar siempre contenido en el tambor tocando a la frontera en cualquier punto. Esta afirmación la tratamos con más cuidado en nuestro apéndice B; de hecho, ahí mismo probamos que este círculo existe siempre y cuando la frontera sea  $C^{1,1}$  sin autointersecciones.

Entonces, si bien nuestra prueba se mantiene intacta para fronteras  $C^{1,1}$ , nuestro argumento sí depende fuertemente del hecho de que la tangente a la frontera varíe continuamente (y ya que la frontera es un compacto nuestra tangente varía uniformemente continuamente). Este hecho es fundamental para nuestro argumento, pues tanto en nuestra estimación por abajo como en nuestra estimación por arriba, los términos que estamos despreciando dependen precisamente de qué tan bruscamente cambia la tangente.

## 7.4. Otros resultados.

Lo que hicimos hasta ahora es estudiar la *traza* del operador de calor:

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t}$$

esta serie tiende a ser divergente si  $t$  tiende a cero, y lo que estamos haciendo es aproximar este comportamiento a infinito por un polinomio en términos de  $\frac{1}{t}$  y  $\frac{1}{\sqrt{t}}$  en donde los coeficientes corresponden al área y a la longitud de la frontera respectivamente y vemos que el segundo término requirió de condiciones para la frontera del tambor más específicas.

Para un dominio con frontera suave ( $C^\infty$ ) se sabe que su traza tiene una expansión asintótica para  $t \sim 0$  de la forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \sim \sum_{k=-2}^{\infty} a_k t^{\frac{k}{2}}.$$

(Este resultado fue probado inicialmente por Ake Pleijel; véase [14]).

Lo que hemos hecho, es calcular los primeros dos coeficientes para condiciones para la frontera un tanto más generales, pero dichas condiciones necesitaron ser ajustadas para obtener el segundo coeficiente.

Podemos esperar que mientras más coeficientes conocemos de esta expansión,

más información tendremos sobre nuestro tambor.

En [9] Kac, encontró también el tercer término para tambores poligonales convexos y conjeturó la forma de este coeficiente para tambores con frontera suave. Este resultado fue verificado más tarde en [10] por McKean y Singer, y el resultado es que para tambores con frontera suave tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \sim \frac{|\Omega|}{4\pi t} - \frac{\ell(\partial\Omega)}{8\sqrt{\pi t}} + \frac{(1-h)}{6}$$

donde  $h$  es el número de hoyos en el tambor. También en este mismo artículo reescriben el resultado de Kac para tambores poligonales en una forma más clara:

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \sim \frac{|\Omega|}{4\pi t} - \frac{\ell(\partial\Omega)}{8\sqrt{\pi t}} + \sum_{\alpha_i} \frac{\pi^2 - \alpha_i^2}{24\pi\alpha_i}$$

en donde los  $\alpha_i$  son cada uno de los ángulos de los vértices del polígono.

Kac obtuvo estas estimaciones utilizando un método análogo aproximando en las esquinas del tambor poligonal por núcleos de calor para cuñas infinitas con el mismo ángulo, mediante estas, se puede probar la validez de las estimaciones hasta segundo orden para dominios con esquinas.

La expresión original de Kac para el término constante era:

$$-\frac{1}{8\pi} \sum_{\alpha_i} \sin \frac{\pi^2}{\alpha_i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{(1 + \cosh y)(\cosh \frac{\pi}{\alpha_i} y - \cos \frac{\pi^2}{\alpha_i^2})}$$

observamos que para  $\alpha_i \sim \pi$ , lo cuál ocurre si suponemos que estamos aproximando un tambor de frontera suave por un polígono con un número arbitrario de lados, observamos que

$$\sin \frac{\pi^2}{\alpha_i} \sim -\sin \alpha_i \sim -\pi + \alpha_i$$

lo cual corresponde al ángulo exterior del polígono, por lo que vemos que este término al hacer tender el número de esquinas a infinito tiende a

$$\frac{2\pi}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{(1 + \cosh y)^2} = \frac{1}{6}$$

de donde Kac conjeturó el resultado para tambores de frontera suave<sup>3</sup>.

Notemos que el término de orden constante para el tambor con frontera suave corresponde a la conocida fórmula de Gauss-Bonnet:

$$\frac{(1-h)}{6} = \frac{1}{12\pi} \int_{\partial\Omega} k(s) ds$$

<sup>3</sup>Desgraciadamente, es falso que podamos hacer este tipo de estimaciones sobre los dominios, lo cual se hace claro a partir del comportamiento de este término constante para fronteras de distintos tipos.

si  $k(s)$  denota la curvatura de la frontera. En realidad, se sabe que para tambores con frontera suave por tramos sin "picos" uno obtiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \sim \frac{|\Omega|}{4\pi t} - \frac{\ell(\partial\Omega)}{8\sqrt{\pi t}} + \frac{1}{12\pi} \int_{\partial\Omega} k(s) ds + \sum_{\alpha_i} \frac{\pi^2 - \alpha_i^2}{24\pi\alpha_i}.$$

El artículo de Stewartson y Waechter [19] es una excelente referencia sobre el comportamiento de este término constante en donde se realizan entre otras cosas las aproximaciones para fronteras con picos de tipo específico. Las técnicas utilizadas en este artículo son parecidas a las que hemos utilizado aquí aunque más sofisticadas. En particular para los casos de frontera suave por tramos con esquinas se basan fuertemente en los resultados de Kac, McKean y Singer, obteniéndose aquí una estimación exacta para el núcleo de calor para el círculo a partir de estimaciones hechas en su transformada de Laplace. Para el estudio de fronteras con pico, calculan núcleos de calor aproximados para los picos utilizando el método de reflexión (hacen estimaciones para picos tipo el que se forma en la función  $k\sqrt{|x|}$ , por ejemplo).

McKean y Singer, hacen sus estimaciones con métodos aplicables sobre variedades generales, utilizando argumentos sobre formas diferenciales. Si bien ellos mismos afirman utilizar un argumento análogo a la idea original de Kac (aproximar la singularidad del núcleo de calor correspondiente al dominio), sus métodos de aproximación son más complejos.

¿Qué otros términos se han calculado? Para fronteras suaves, se tiene la siguiente lista de los primeros 7 coeficientes de la expansión (ver [18]):

$$a_{-2} = \frac{|\Omega|}{4\pi}$$

$$a_{-1} = -\frac{\ell(\partial\Omega)}{8\sqrt{\pi}}$$

$$a_0 = \frac{1}{12\pi} \int_{\partial\Omega} k(s) ds$$

$$a_1 = \frac{1}{256\sqrt{\pi}} \int_{\partial\Omega} k^2(s) ds$$

$$a_2 = \frac{1}{315\pi} \int_{\partial\Omega} k^3(s) ds$$

$$a_3 = \frac{37}{215\sqrt{\pi}} \int_{\partial\Omega} k^4(s) ds - \frac{1}{212\sqrt{\pi}} \int_{\partial\Omega} (k'(s))^2 ds$$

$$a_4 = \frac{68}{(5)(9)(101)\pi} \int_{\partial\Omega} k(s) ds - \frac{4}{(3)(7)(11)(15)\pi} \int_{\partial\Omega} k(s)(k'(s))^2 ds$$

donde  $k'$  denota la derivada de la curvatura con respecto a la longitud de arco.



## Capítulo 8

# Conclusiones.

*Las series divergentes son un invento del diablo,  
y resulta vergonzoso fundamentar en ellas  
cualquier demostración.*

-Abel

Si bien no calculamos el tercer término de la expansión, hemos mencionado un poco de su comportamiento: este término depende fuertemente de las características de la frontera lo que sugiere las limitaciones del método que hemos utilizado para encontrar los dos primeros términos. Una posible idea para encontrar las aproximaciones para dominios más complicados (frontera  $C^1$  por tramos, por ejemplo) es la de aproximar por dominios contenidos y dominios que contienen a nuestro dominio en cuestión, aprovechando el comportamiento de la desigualdad que encontramos para núcleos de calor. Si bien esto puede funcionar muy bien para encontrar el término del área, deja de ser claro su éxito para los siguientes términos. Nuestras propias estimaciones dependen fuertemente de las características de la frontera, y precisamente algunas de estas características pueden cambiar radicalmente el término constante en la expansión.

Otra posible idea que surgió a lo largo del trabajo, fue que en realidad no importaba demasiado qué núcleo utilizáramos para aproximar siempre y cuando este núcleo fuera aproximado con cuidado. Si bien esto es obviamente falso desde el primer intento ya que el núcleo de calor para el plano únicamente se expande en el término de área, no es claro que esto sea necesariamente falso para los núcleos de dominios acotados. Sin embargo, los intentos realizados y los resultados conocidos sugieren que existe efectivamente una estrecha relación entre las propiedades del dominio y las propiedades asintóticas de su núcleo de calor; quizá un estudio más cuidadoso en este aspecto valdría la pena.

De existir dicha relación estrecha, (que es de hecho lo más posible) la desventaja del método que estamos siguiendo es evidente, ya que necesitaríamos escoger escrupulosamente el núcleo de calor apropiado para realizar la estimación

deseada, y basta con observar la diferencia entre el estudio hecho para mostrar que uno puede escuchar el área y el estudio para encontrar la longitud de la frontera para darse una idea de cómo puede aumentar la complejidad conforme buscamos estimaciones más precisas, teniendo además que tomar en cuenta de manera importante las características de la frontera del dominio.

Los métodos que se han utilizado para encontrar los demás coeficientes de la expansión son de un tipo distinto a las ideas básicas que hemos planteado aquí; sin embargo, este método presenta la ventaja de ser francamente accesible además de que puede sugerir ideas útiles cuando se requieran aproximaciones de cierto tipo.

También se podría tener la noción de que es posible aproximar la expansión para el núcleo de calor de un dominio específico mediante las expansiones de otros dominios que lo aproximan, utilizando nuestra desigualdad para núcleos de calor. Esto funciona bien para el primer término pero no es claro como funciona para los siguientes términos; de hecho el tercer término de la expansión sugiere fuertemente que esto no puede hacerse en general.

Como ejemplos de métodos que han sido aplicados a obtener la expansión podemos mencionar: aproximaciones a soluciones a operadores elípticos, análisis microlocal y billares; Kac incluso obtiene el resultado de Carleman (7.2) al comparar resultados obtenidos mediante métodos de mecánica cuántica estadística con resultados obtenidos a partir de la mecánica clásica sobre el comportamiento de gases.

Los resultados que hemos probado en el capítulo 7 fueron probados para características muy generales en los años 80: se probó utilizando análisis microlocal que el resultado (7.3) se cumple para cualquier dominio acotado y después, por separado, Melrose e Ivrii justificaron el resultado 7.8 para dominios con frontera no atrayente utilizando billares (billiard trajectories).

Si bien el estudio asintótico de la traza del operador de calor arroja ya información precisa sobre la frontera, no nos permite observar la dependencia de los valores propios individuales con el dominio, estamos considerando únicamente la contribución del espectro en su totalidad; por ejemplo, el estudio de los conjuntos nodales de las funciones propias podría arrojar información sobre la dependencia de los valores propios individuales, su multiplicidad y la forma del dominio.

Podríamos preguntarnos también qué requisitos debe cumplir una sucesión de números reales para que, efectivamente, corresponda a la sucesión de valores propios de algún dominio.

Existen resultados interesantes para las cotas de los valores propios, el primero que mencionaremos se debe a Polya e impone ya algunas restricciones sobre la

sucesión de números correspondiente a los valores propios:

$$\frac{1}{\lambda_{k-1} - \lambda_k} \sum_{i=1}^k \lambda_i \geq \frac{k}{2}.$$

Se tiene también una cota interesante para el primer valor propio, encontrada primero por Hersch para dominios convexos en 1960 y mejorada por Ossermann en 1977 para dominios generales:

$$\lambda \geq \frac{1}{4\rho^2}$$

en donde  $\rho$  es el radio del círculo más grande que puede estar contenido en el dominio, esto quiere decir, que no importa que tan grande sea el área de nuestro tambor, si este tambor es “delgado” en el sentido de que no podemos introducir en el un disco de radio muy grande, entonces su tono más grave (su tono fundamental) será agudo!

Polya encontró una cota más precisa para los valores propios individuales para dominios fundamentales de mosaicos (teselaciones):

$$\lambda_k \geq 4\pi^2 \left( \frac{k}{B_n V} \right)^{\frac{2}{n}}$$

donde  $n$  es la dimensión,  $V$  es el volumen del dominio y  $B_n$  es el elemento de volumen de la esfera de dimensión  $n$ .

Los matemáticos Li y Yau encontraron una desigualdad ligeramente más débil, pero para dominios generales:

$$\lambda_k \geq \frac{4n}{n+2} \pi^2 \left( \frac{k}{B_n V} \right)^{\frac{2}{n}}.$$

El contraejemplo dado en el capítulo 3 permite el construir, utilizando la misma regla, toda una familia de tambores que suenan igual, pero en realidad es de esperarse que este tipo de comportamiento no sea “común”. Todos los contraejemplos conocidos en dos dimensiones son simples variaciones en el dominio fundamental a partir del cual se construyeron los tambores, según comentan Gordon y Webb ([5]), el mismo Wolpert (quién contribuyó al contraejemplo) probó que en cierto sentido “casi toda” superficie geométrica tiene un espectro único. En el año 2000, Zelditch probó que en la familia de conjuntos acotados con frontera suave y dos ejes de simetría ortogonales no puede haber dos miembros distintos que “suenen” igual ([21]).

Si bien se podría considerar la pregunta original de Kac como contestada, aún quedan por precisar muchas cuestiones interesantes.

Los resultados no se restringen a 2 dimensiones, como ya habíamos mencionado, los primeros contraejemplos de objetos “isoespectrales” (que “suenan” igual) fueron toros de 16 dimensiones encontrados por Milnor; existían ya recetas precisas para encontrar variedades isoespectrales antes de que se conociera

siquiera la existencia de un ejemplo en dos dimensiones. Existen muchos resultados análogos para variedades generales tanto para condiciones de frontera tipo Dirichlet (como en nuestro caso), condiciones de frontera tipo Neumann así como para variedades sin frontera. No detallaremos aquí los resultados para otras condiciones de frontera, pero para la mayoría de los resultados mencionados aquí existen análogos para condiciones de frontera tipo Neumann.

El contraejemplo mostrado en 3 (que también funciona para el caso con condiciones de frontera tipo Neumann) viene de un contraejemplo previo de una variedad bidimensional representable en tres dimensiones (desgraciadamente, los detalles están fuera de nuestro alcance). Se conocían ya entonces, contraejemplos para toda dimensión mayor o igual que 4 (aunque de hecho se sabe que podemos escuchar la dimensión de una variedad). Se sabe también, que no podemos escuchar el grupo fundamental de una variedad.

Existe hoy día, toda una rama de problemas isoespectrales, así como podemos generalizar la pregunta a variedades, podemos generalizarla, por ejemplo, a operadores diferenciales más generales; en particular existen muchos resultados para el operador biarmónico ( $\Delta^2$ ).

Actualmente hay muchos matemáticos investigando este tipo de problemas.

Otro ejemplo son los resultados análogos para dominios no acotados, en donde surgen resultados para teoría de dispersión, considerando el obstáculo como un dominio exterior (es decir, la parte de afuera del dominio sobre el cual actúa nuestro operador); en este contexto existen resultados análogos para el comportamiento asintótico de la fase de dispersión.

Aunque hemos dado una prueba concreta de por qué los ejemplos del capítulo 3 suenan igual, nunca comentamos nada sobre la impresionante cantidad de resultados e ideas que hay detrás de esta prueba francamente simple; el profundizar un poco en este aspecto distinto del problema hubiera prolongado y complicado este trabajo considerablemente. Sin embargo, vale la pena hacer notar que la construcción de estos tambores fue un proceso largo de investigación durante el cual surgieron muchas otras ideas y resultados importantes.

Intentar escuchar al tambor, puede ser un gran punto de partida que abarca muchas ramas importantes de la investigación matemática actual, este trabajo difícilmente es más que una pequeña introducción a este tema de peculiar belleza.

## Apéndice A

# El teorema Tauberiano de Karamata. Ordenes asintóticos.

En esta sección presentaremos un teorema tauberiano que utilizamos para obtener la Fórmula de Weyl (7.3) a partir del resultado de Carleman (7.2).

Los teoremas conocidos como “tauberianos”<sup>1</sup> pertenecen a una clase muy general de resultados con aplicaciones muy diversas en varias áreas de la matemática; en un apéndice en [17], Michael Levitin sugiere caracterizar estos teoremas como resultados que permiten obtener información de objetos con cierta “irregularidad” partiendo del comportamiento más regular de cierta transformación del objeto; en nuestro caso, obtenemos el comportamiento asintótico de la función que cuenta los valores propios

$$N(\lambda) = \sum_{\lambda_n < \lambda} 1$$

a partir del comportamiento asintótico de la traza del operador de calor definida como la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t}.$$

**Teorema A.1** (Karamata) *Sea  $\alpha(t)$  no decreciente tal que*

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} d\alpha(t)$$

---

<sup>1</sup> Conocidos así porque el primer resultado de este tipo se debe al matemático A. Tauber.

converge para toda  $s > 0$ .

Si para alguna  $\gamma \geq 0$  tenemos que

$$f(s) \sim \frac{A}{s^\gamma} \quad \text{si} \quad s \rightarrow 0^+$$

entonces

$$\alpha(t) \sim \frac{At^\gamma}{\Gamma(\gamma+1)} \quad \text{si} \quad t \rightarrow \infty$$

La prueba que presentaremos es una prueba simple e ingeniosa dada por Karamata; existe también una prueba distinta por Hardy y Littlewood por lo que el teorema es también conocido como el teorema de Hardy-Littlewood-Karamata.

Antes de comenzar con la prueba trataremos de precisar lo que entendemos por la relación  $\sim$ :

### Ordenes asintóticos.

Al escribir

$$f(s) \sim \frac{A}{s^\gamma} \quad \text{si} \quad s \rightarrow 0^+$$

queremos decir  $f$  es asintóticamente como  $\frac{A}{s^\gamma}$  cuando  $s$  tiende a cero positivamente. Una forma simple de expresar esto (y a veces útil para calcular casos sencillos) sería simplemente

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} s^\gamma f(s) = A$$

o en términos más generales:

$$F(s) \sim As^b \quad s \rightarrow S \iff \lim_{s \rightarrow S} s^{-b} F(s) = A$$

donde  $S$  puede ser o cero o infinito según si  $b$  es negativo o positivo respectivamente.

Esta noción funcionará correctamente, simplemente notaremos que en caso de tener una suma de varios órdenes de  $s$  en nuestro lado derecho, la noción no funcionará de la misma manera. Para no dedicar demasiado espacio a esto daremos como suficiente el aclarar un ejemplo en específico más:

$$F(s) \sim_{s \rightarrow 0^+} \frac{A}{s^{b+c}} + \frac{B}{s^b} \iff \lim_{s \rightarrow 0^+} \left( s^b F(s) - \frac{A}{s^c} \right) = B.$$

Para terminar observamos que el símbolo  $\sim$  tiene la ventaja de no estar expresando una igualdad o una expansión en serie exacta, simplemente nos denota que hasta cierto orden de nuestra variable cualquier término faltante es de orden más débil que los órdenes especificados<sup>2</sup>.

<sup>2</sup>Por ejemplo para  $f \in C^2(\mathbb{R})$  tenemos que  $f(x) \sim_{x \rightarrow 0} f(0)$ ,  $f(x) \sim_{x \rightarrow 0} f(0) + xf'(0)$  y  $f(x) \sim_{x \rightarrow 0} f(0) + xf'(0) + x^2 f''(0)$ ; es decir que  $f(x) = f(0) + o(f(0))$ ,  $f(x) = f(0) + xf'(0) + o(x)$  y  $f(x) = f(0) + xf'(0) + x^2 f''(0) + o(x^2)$ .

### Prueba del teorema

Necesitaremos el siguiente resultado, el cual no probaremos pero daremos las ideas de la prueba (a partir de las cuales esperamos resulte clara la prueba completa para alguien con un conocimiento básico de análisis e integral de Lebesgue-Stieltjes).

**Proposición A.2** Si  $g$  es una función continua c.d.s. (casi donde sea) y acotada en  $[0, 1]$  y  $\gamma > 0$ .

Entonces:  $\forall \varepsilon > 0$  existen  $p_1(x)$  y  $p_2(x)$  polinomios tales que:

$$p_1(x) \leq g(x) \leq p_2(x)$$

c.d.s. en  $[0, 1]$  y

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{\gamma-1} (p_2(e^{-t}) - p_1(e^{-t})) dt < \varepsilon$$

Las ideas de la prueba son<sup>3</sup>:

1. Se prueba para la función  $\chi_{(a,b)}$  (la función indicadora del intervalo  $(a, b) \subset [0, 1]$ ) de la siguiente manera:
  - a Existe una función continua  $h$  igual a  $\chi_{(a,b)}$  excepto en vecindades de  $a$  y  $b$  donde además la integral de su diferencia en la medida de  $e^t$  es pequeña.
  - b Por el teorema de Weierstrass hay un polinomio que aproxima a esta  $h$ , al cual le sumamos o restamos la constante necesaria para obtener  $p_1$  y  $p_2$ .
2. Se prueba para funciones escalonadas, es decir para combinaciones lineales finitas de funciones indicadoras.
3. Se aproxima  $g$  continua c.d.s. por una sucesión de funciones escalonadas.

Necesitaremos ahora el siguiente teorema, esta vez sí daremos una prueba:

**Teorema A.3** Sea  $\alpha(t)$  no decreciente tal que

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st} d\alpha(t)$$

converge para toda  $s > 0$ .

Entonces para alguna  $\gamma > 0$  tenemos que

$$f(s) \sim \frac{1}{s^\gamma} \quad \text{si} \quad s \rightarrow 0^+$$

<sup>3</sup>Véase [20, sec. 5.4].

Si  $g(x)$  es una función de variación acotada en  $(0, 1)$  entonces:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} g(e^{-st}) d\alpha(t) \sim \frac{1}{s^\gamma \Gamma(\gamma)} \int_0^{\infty} e^{-t} g(e^{-t}) t^{\gamma-1} dt$$

para  $s \rightarrow 0^+$  sobre el conjunto de puntos para los cuales la integral izquierda existe.

**Prueba:** Definimos los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} A &= \{ t \mid \alpha(x) \text{ no es continua en } x = t \} \\ B &= \{ t \mid g(e^{-x}) \text{ no es continua en } x = t \} \\ E &= \left\{ \frac{b}{a} \mid a \in A \quad b \in B \right\} \end{aligned}$$

Si  $s \in E^c$  entonces las hipótesis garantizan que la integral existe en  $s$ , pues  $\alpha(t)$  y  $g(e^{-st})$  no tienen discontinuidades en común.

Además  $E$  es a lo más numerable (pues  $A$  y  $B$  lo son) y por tanto  $E^c$  es denso en  $(0, \infty)$  por lo que efectivamente tiene sentido hacer tender a  $s$  a cero sobre el conjunto de puntos donde la integral existe.

Usando la proposición anterior, tomemos  $\varepsilon > 0$  y tomemos  $p_1(x)$  y  $p_2(x)$  polinomios tales que

$$p_1(x) \leq g(x) \leq p_2(x)$$

y

$$\frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\gamma-1} (p_2(e^{-t}) - p_1(e^{-t})) dt < \varepsilon \quad (\text{A.1})$$

$\alpha(t)$  no decreciente implica que

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-st} p_1(e^{-st}) d\alpha(t) &\leq \\ \int_0^{\infty} e^{-st} g(e^{-st}) d\alpha(t) &\leq \\ \int_0^{\infty} e^{-st} p_2(e^{-st}) d\alpha(t) &\leq \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

y

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^{\infty} e^{-t} p_1(e^{-t}) t^{\gamma-1} d\alpha(t) &\leq \\ \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^{\infty} e^{-t} g(e^{-t}) t^{\gamma-1} d\alpha(t) &\leq \\ \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^{\infty} e^{-t} p_2(e^{-t}) t^{\gamma-1} d\alpha(t) &\leq \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Cambiamos en las hipótesis  $s$  por  $(n+1)s$ , esto nos da

$$\int_0^{\infty} e^{-(n+1)st} d\alpha(t) = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{-nst} d\alpha(t) \sim \frac{1}{(n+1)^\gamma s^\gamma}.$$

Usando el cambio de variables  $t = \frac{u}{n+1}$  calculamos:

$$\int_0^{\infty} e^{-t} e^{-nt} t^{\gamma-1} dt = \frac{1}{(n+1)^\gamma} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{\gamma-1} du = \frac{\Gamma(\gamma)}{(n+1)^\gamma}.$$

Esto último nos permite escribir por las hipótesis para  $(n+1)s$ :

$$\int_0^\infty e^{-st} e^{-nst} d\alpha(t) \sim \frac{1}{\Gamma(\gamma)s^\gamma} \int_0^\infty e^{-t} e^{-nt} t^{\gamma-1} dt \quad (\text{A.4})$$

Ahora si  $p_i(x) = \sum_{n=0}^{k_i} a_{(i,n)} x^n$  y, tomamos por un lado

$$\sum_{n=0}^{k_i} a_{(i,n)} \int_0^\infty e^{-st} e^{-nst} d\alpha(t) = \int_0^\infty e^{-st} p_i(e^{-st}) d\alpha(t),$$

y por otro

$$\sum_{n=0}^{k_i} \frac{a_{(i,n)}}{\Gamma(\gamma)s^\gamma} \int_0^\infty e^{-t} e^{-nt} t^{\gamma-1} dt = \frac{1}{\Gamma(\gamma)s^\gamma} \int_0^\infty e^{-t} p_i(e^{-t}) t^{\gamma-1} dt$$

entonces finalmente (A.4) nos dice que

$$\int_0^\infty e^{-st} p_i(e^{-st}) d\alpha(t) \sim \frac{1}{\Gamma(\gamma)s^\gamma} \int_0^\infty e^{-t} p_i(e^{-t}) t^{\gamma-1} dt$$

con  $i = 1, 2$ .

Multiplicando esto último por  $s^\gamma$ , tomando límites superiores e inferiores y usando (A.2) obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^\infty e^{-t} p_1(e^{-t}) t^{\gamma-1} dt &\leq \liminf_{s \rightarrow 0^+} s^\gamma \int_0^\infty e^{-st} g(e^{-st}) d\alpha(t) \leq \\ &\leq \limsup_{s \rightarrow 0^+} s^\gamma \int_0^\infty e^{-st} g(e^{-st}) d\alpha(t) \leq \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^\infty e^{-t} p_2(e^{-t}) t^{\gamma-1} dt. \end{aligned}$$

Finalmente, como consecuencia de (A.1) y (A.3), ya que  $\varepsilon$  es arbitrario, esto último dice que

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} s^\gamma \int_0^\infty e^{-st} g(e^{-st}) d\alpha(t) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^\infty e^{-t} g(e^{-t}) t^{\gamma-1} dt$$

es decir

$$\int_0^\infty e^{-st} g(e^{-st}) d\alpha(t) \sim \frac{1}{s^\gamma \Gamma(\gamma)} \int_0^\infty e^{-t} g(e^{-t}) t^{\gamma-1} dt.$$

■

Podemos ahora probar el teorema de Karamata A.1.

Tomemos primero, sin pérdida de generalidad  $\alpha(0) = 0$  (tomamos  $\alpha$  normalizada).

Supongamos que  $\gamma = 0$ , entonces

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} f(s) = A$$

podemos escribir además “integrando por partes” (ya que la integral converge)

$$f(s) = s \int_0^{\infty} e^{-st} \alpha(t) dt$$

tomando  $T > 0$

$$f(s) = s \int_0^T e^{-st} \alpha(t) dt + s \int_T^{\infty} e^{-st} \alpha(t) dt$$

y recordando que  $s \int_0^{\infty} e^{-st} dt = 1$ , tenemos

$$f(s) \leq s \int_0^T e^{-st} \alpha(t) dt + \sup_{[T, \infty)} \alpha(t)$$

tomando límite superior cuando  $s \rightarrow 0^+$ , ya que  $\alpha$  es no decreciente

$$\limsup_{s \rightarrow 0^+} f(s) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \alpha(t)$$

por otro lado:

$$f(s) \geq s \int_0^T e^{-st} \alpha(t) dt + e^{-sT} \inf_{[T, \infty)} \alpha(t) \rightarrow_{s \rightarrow 0^+} \alpha(T).$$

Al hacer que  $T \rightarrow \infty$  podemos concluir que

$$\liminf_{s \rightarrow 0^+} f(s) \geq \liminf_{t \rightarrow \infty} \alpha(t)$$

así que tenemos el siguiente sandwich:

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) \leq \liminf_{s \rightarrow 0^+} f(s) \leq \limsup_{s \rightarrow 0^+} f(s) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \alpha(t)$$

pero si  $\alpha$  es no decreciente, entonces existe  $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t)$  y concluimos:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) = \lim_{s \rightarrow 0^+} f(s) = A$$

por lo que queda probado el caso  $\gamma = 0$ .

Para el caso  $\gamma > 0$ , simplemente tomemos  $g(e^{-st}) = \chi_{(0, \frac{1}{s})} e^{st}$ . Podemos usar esta  $g$  en el teorema A.3 (con  $\frac{\alpha}{A}$  como la medida de integración en el teorema) para escribir:

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} s^\gamma \int_0^{\frac{1}{s}} d\alpha(t) = \frac{A}{\Gamma(\gamma)} \int_0^1 t^{\gamma-1} dt$$

evaluamos ambos lados de lo anterior:

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} s^\gamma \alpha\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{A}{\Gamma(\gamma)\gamma} = \frac{A}{\Gamma(\gamma+1)}$$

de ahí

$$\alpha\left(\frac{1}{s}\right) \sim_{s \rightarrow 0^+} \frac{A}{\Gamma(\gamma+1)s^\gamma}$$

y al cambiar  $s = \frac{1}{t}$ , obtenemos el resultado:

$$\alpha(t) \sim \frac{At^\gamma}{\Gamma(\gamma+1)} \quad \text{si} \quad t \rightarrow \infty$$

lo que concluye nuestra prueba del teorema de Karamata.



## Apéndice B

# Curvatura y círculos tangentes.

Si  $\partial\Omega$  es la frontera de un dominio acotado  $\Omega$ , diremos que  $\partial\Omega$  es  $C^2$  si tiene la propiedad que en cada punto  $\bar{x}_0 \in \partial\Omega$  podemos encontrar una parametrización  $(x, f_{x_0}(x))$  de manera que  $\bar{x}_0 = (0, f_{x_0}(0))$  y para alguna  $\varepsilon > 0$  si  $|x| < \varepsilon$  entonces  $(x, f_{x_0}(x)) \in \partial\Omega$  y además  $f_{x_0} \in C^2(-\varepsilon, \varepsilon)$ .

De igual manera, decimos que  $\partial\Omega$  es  $C^{1,1}$  si existe una parametrización como arriba, pero con  $f_{x_0} \in C^1(-\varepsilon, \varepsilon)$  y existe además una constante  $M$  para la cuál  $|f'_{x_0}(x) - f'_{x_0}(y)| < M|x - y|$  si  $|x|, |y| < \varepsilon$  para cualquier punto  $\bar{x}_0 \in \partial\Omega$ .

Bajo estas condiciones, cualquier frontera  $C^2$  o  $C^{1,1}$  tiene una parametrización  $(X(s), Y(s))$  donde  $s$  representa longitud de arco. El vector

$$\frac{d^2}{ds^2}(X(s), Y(s))$$

es un vector perpendicular a la tangente conocido como *vector de curvatura* y a su norma

$$\left| \frac{d^2}{ds^2}(X(s), Y(s)) \right| = k$$

se le llama *curvatura*, a su recíproco  $\rho = \frac{1}{k}$  se le conoce como *radio de curvatura*.

Referiremos a [1, Vol. 1 y 2] para más detalles, nos limitaremos a enunciar alguna propiedades de la curvatura y el radio de curvatura sin prueba alguna.

En cada punto, la curvatura mide la razón de cambio del ángulo de la tangente con respecto a la longitud de arco con la orientación de la parametrización dada por el signo, de esta idea nace la fórmula de Gauss-Bonnet para fronteras  $C^2$ :

$$\int_{\partial\Omega} k(s) ds = 2(n - m)\pi$$

donde  $n$  denota el número de componentes conexas y  $m$  denota el número de hoyos en el dominio.

La circunferencia con centro en la dirección del vector de curvatura de radio  $\rho$  tangente a la curva en el punto que estamos evaluando es conocida como la *circunferencia de curvatura* y es la mejor aproximación a segundo orden de nuestra curva, lo que aclararemos en seguida.

Supondremos de aquí en adelante, por simplicidad, que la parametrización de nuestra frontera  $\partial\Omega$  puede ser encontrada de manera que  $f_{x_0}(0) = 0 = f'_{x_0}(0)$  (esto es que podemos parametrizar tomando la tangente a la frontera como eje coordenado).

Si nuestra frontera es  $C^2$ , en cada punto de la frontera  $\bar{x}_0$  podemos expandir a segundo orden:

$$f_{x_0}(x) = f''_{x_0}(0)x^2 + o(x^2)$$

precisamente la curvatura en el punto  $\bar{x}_0$  cumple la identidad

$$f''_{x_0}(0) = k.$$

Si tomamos  $g_{x_0}$ , la parametrización de una circunferencia de radio  $\rho$  tangente a la curva en  $\bar{x}_0$ , esta es de la forma:

$$g_{x_0}(x) = \pm(\rho - \sqrt{\rho^2 - x^2})$$

si expandemos esta parametrización a segundo orden obtendremos

$$g_{x_0}(x) = \pm \frac{1}{|\rho|} x^2 + o(x^2)$$

donde  $|k| = \frac{1}{|\rho|}$ , es decir que con la elección apropiada de signo (dada por la parametrización), la curva y la circunferencia (precisamente, la circunferencia de curvatura) son indistinguibles a segundo orden.

Si tomáramos cualquier otra circunferencia de radio  $\rho_1$  más pequeño ( $\rho_1 < \rho$ ), entonces tendríamos que

$$-\frac{1}{|\rho_1|} x^2 \leq kx^2 \leq \frac{1}{|\rho_1|}$$

lo que quiere decir que cualquier círculo tangente de radio más pequeño que el radio de curvatura, está totalmente de algún lado de la curva (localmente), en donde además podemos elegir de qué lado de la curva está (según la elección del círculo).

Bajo la parametrización  $f_{x_0}$ , la curvatura en cualquier punto  $f_{x_0}(x)$  se ve como

$$k = \frac{f''_{x_0}(x)}{(1 + (f'_{x_0})^2(x))^{\frac{3}{2}}}.$$

Para una frontera  $C^2$ , ya que estamos considerando dominios acotados y por tanto fronteras compactas, esto nos implica que la curvatura es una función acotada en la frontera, lo que quiere decir que existe alguna constante  $M$  tal que

$$|k| \leq M.$$

Las observaciones hechas hasta ahora permiten estar seguros ahora que para una frontera  $C^2$  sin autointersecciones debe existir una bolita de radio mínimo la cual podemos hacer tangente a la frontera en todo punto y estar totalmente contenida en el conjunto; este mismo radio nos funciona para una bolita tangente totalmente fuera del conjunto.

Ahora verificaremos que lo mismo se puede decir para un dominio con frontera  $C^{1,1}$ , en este caso hemos considerado en nuestra definición que existe una constante  $M$  uniforme para cualquier parametrización tal que

$$|f'_{x_0}(x) - f'_{x_0}(y)| < M|x - y|$$

lo cual podíamos no haber pedido pero tendríamos por compacidad de la frontera. Ahora simplemente observamos que si tomamos la parametrización alrededor de cualquier punto  $\bar{x}_0 \in \partial\Omega$  (una vez más, suponiendo que estamos tomando la tangente como eje horizontal) el teorema del valor medio nos dice que para alguna  $\theta \in (0, x)$

$$|f_{x_0}(x)| \leq |f'_{x_0}(\theta)||x| < Mx^2$$

al tomar  $g_{x_0}$  la parametrización de una circunferencia tangente a  $\partial\Omega$  en  $\bar{x}_0$  con radio  $|\rho_1| < \frac{1}{M}$  si evaluamos la diferencia:

$$\left(-M \pm \frac{1}{|\rho_1|}\right)x^2 + o(x^2) < f_{x_0}(x) \pm |g_{x_0}|(x) < \left(M \pm \frac{1}{|\rho_1|}\right)x^2 + o(x^2)$$

entonces para  $x$  suficientemente pequeña tendremos:

$$f_{x_0}(x) - |g_{x_0}|(x) < 0$$

y

$$0 < f_{x_0}(x) + |g_{x_0}|(x)$$

lo que quiere decir que podemos dejar el círculo totalmente de algún lado de la curva (localmente); podemos por tanto concluir que también para dominios con frontera  $C^{1,1}$  sin autointersecciones podemos encontrar un radio mínimo para el cual un círculo con dicho radio puede ser colocado totalmente contenido en el dominio y colocado totalmente fuera del dominio de manera que el círculo es tangente a la frontera.



## Apéndice C

# Curvas vecinas a la frontera.

Tomemos nuevamente  $\Omega$  acotado con frontera  $C^2$ ; probaremos que para  $\delta > 0$  suficientemente pequeña la curva

$$\Gamma(\delta) = \{ x \in \Omega \mid d(x, \partial\Omega) = \delta \}$$

está bien definida y es al menos  $C^2$ .

Tomemos algún punto  $\bar{x}_0 \in \Omega$  suficientemente cerca de  $\partial\Omega$ , la cual está localmente parametrizada por  $(x, f(x))$ , la distancia entre  $\bar{x}_0 = (x_1, x_2)$  y otro punto en la frontera  $\bar{y} = (x, f(x))$  está dada por la función

$$d(\bar{x}_0, \bar{y}) = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (x_2 - f(x))^2}$$

si fijamos el punto  $\bar{x}_0$  y pensamos a  $\bar{y}$  parametrizado por  $\bar{y}(x) = (x, f(x))$  podemos entonces derivar la función de distancia, si igualamos  $d'$  a cero, obtenemos la ecuación

$$x - x_1 + f'(x)(f(x) - x_2) = 0.$$

Tomemos ahora la función  $g(x, y, z) = x - y + f'(x)(f(x) - z)$ , esta función evaluada en  $(x_1, x_1, f(x_1))$  cumple

$$g(x_1, x_1, f(x_1)) = 0$$

y

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_1, x_1, f(x_1)) = 1 + (f')^2(x_1).$$

Por tanto, el Teorema de la Función Implícita es válido, y entonces en una vecindad  $V$  del punto  $(x_1, f(x_1))$  para cada  $\bar{x} \in V$  tenemos que existe un *único*  $x$  tal que la distancia desde  $\bar{x}$  hasta  $(x, f(x))$  es mínima si fijamos  $\bar{x}$  y variamos  $x$ .

Ya que la frontera es un compacto, entonces hemos probado que para  $\bar{x}$  suficientemente cerca (dependiendo del diámetro de la vecindad  $V$ , el cual, por compacidad puede ser tomado uniformemente) existe un único punto  $\bar{y}$  en la frontera que cumple

$$d(\bar{x}, \bar{y}) = d(\bar{x}, \partial\Omega)$$

Notemos ahora que tenemos una superficie  $x(\bar{x})$  de clase  $C^2$  tal que  $d(\bar{x}, (x, f(x))) = d(\bar{x}, \partial\Omega)$ , si ahora consideramos para una  $\delta > 0$  suficientemente pequeña la función

$$g(\bar{x}, x) = d(\bar{x}, (x, f(x))) - \delta = g(\bar{x})$$

es de clase  $C^2$  y nos define localmente una curva  $C^2$  de forma implícita, dada por  $g(\bar{x}) = 0$ , la cual corresponde a  $\Gamma(\delta)$  por lo que hemos probado lo que pretendíamos.

Para una frontera  $C^{1,1}$ , sabemos que podemos parametrizarla localmente como una curva  $C^2$  excepto en un conjunto de medida cero, los mismos argumentos nos permitirán garantizar que  $\Gamma(\delta)$  es una curva de clase  $C^2$  por tramos.

# Bibliografía

- [1] Richard Courant & Fritz John, *Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático*, Volúmenes 1 y 2, Limusa, 1999.
- [2] Javier Duoandikoetxea, *Fourier Analysis*, AMS, Rhode Island, 1995.
- [3] Gerald B. Folland, *Fourier Analysis and its Applications*, Wadsworth & Brooks, California, 1992.
- [4] Carolyn Gordon, *When you can't hear the shape of a manifold*, The Mathematical Intelligencer, 11(1989), 39-47.
- [5] Carolyn Gordon & David L. Webb, *You can't hear the shape of a drum*, American Scientist, 84(1996), 46-55.
- [6] Carolyn Gordon, David L. Webb & Scott Wolpert, *One cannot hear the shape of a drum*, AMS, 27(1992), 134-138.
- [7] Jorge Ize, *Teoría de existencia para ecuaciones en derivadas parciales*, IIMAS-FENOMECC, UNAM, Notas, 2002.
- [8] Fritz John, *Partial Differential Equations*, 4a edición, Springer.
- [9] Mark Kac, *Can one hear the shape of a drum?*, Amer. Math. Monthly, 73(1996), 1-23.
- [10] H.P. McKean & I.M. Singer, *Curvature and the eigen values of the Laplacian*, J Differential Geometry, 1(1967), 43-69.
- [11] Robert C. McOwen, *Partial Differential Equations: Methods and Applications*, 2a edición, Prentice Hall, Upper Saddle River, 2003.
- [12] Richard Melrose, *Isospectral sets of drumheads are compact in  $C^\infty$*  (preprint).
- [13] Federico Menendez, *Fórmulas de tipo Weyl para dominios exteriores*, Aportaciones Matemáticas, 32(2003), 125-138.
- [14] Ake Pleijel, *A study of certain Green's functions with applications in the theory of vibrating membranes*, Arkiv För Matematik, 22(1952), 553-569.

- 
- [15] M.H. Protter, *Can one hear the shape of a drum? Revisited*, Society of Industrial and Applied Mathematics Review, 29(1987), 185-197.
  - [16] Karel Rektorys, *Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering*, SNTL, Praga, 1977.
  - [17] Yu. Safarov & D. Vassiliev, *The Asymptotic Distribution of Eigenvalues of Partial Differential Operators*, AMS, Rhode Island, 1997.
  - [18] Lance Smith, *The asymptotics of the Heat Equation for a Boundary Value Problem*, Invent. math., 63(1981), 467-493.
  - [19] K. Stewartson & R. T. Waechter, *On hearing the shape of a drum: further results*, Cambridge Phil. Soc., 69(1971), 353-363
  - [20] David V. Widder, *The Laplace Transform*, Princeton University Press, Princeton, 1941.
  - [21] S. Zelditch, *Spectral Determination of Analytic Bi-Axisymmetric plane domains*, Geometric and Functional Analysis, 10(2000), 628-677.