

01170

Identificación paramétrica de un edificio sujeto a excitación  
sísmica bidimensional.

por

Juan Mauricio Angeles Cervantes

Tesis presentada para obtener el grado de

Maestro en Ingeniería Eléctrica

Campo de Conocimiento: Control

en el

Programa Maestría y Doctorado en Ingeniería

de la

Universidad Nacional Autónoma de México

Dr. Luis Agustín Alvarez Icaza Longoria, Director de tesis

2004



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*A mi familia.*

# Índice general

Índice de figuras	iv
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Objetivo . . . . .	2
1.2. Antecedentes . . . . .	2
1.3. Características de los sismos . . . . .	3
1.4. Control en estructuras . . . . .	5
1.5. Aportaciones del trabajo . . . . .	7
1.6. Organización del trabajo . . . . .	8
<b>2. Modelado matemático</b>	<b>9</b>
2.1. Introducción . . . . .	9
2.2. Modelo de un grado de libertad . . . . .	10
2.3. Modelo en tres dimensiones . . . . .	12
2.3.1. Hipótesis de diafragma de piso rígido . . . . .	12
2.3.2. Modelo de marco plano . . . . .	13
2.3.3. Matriz de rigidez en 3D . . . . .	15
2.3.4. Matriz de amortiguamiento en 3D . . . . .	20
2.3.5. Matriz de masa en 3D . . . . .	20
<b>3. Identificación paramétrica</b>	<b>22</b>
3.1. Introducción . . . . .	22
3.2. Objetivo de la identificación paramétrica . . . . .	23
3.3. Parametrización del modelo matemático . . . . .	24
3.3.1. Mínimos cuadrados . . . . .	24
3.3.2. Parametrización del modelo del edificio en 3D . . . . .	30
3.4. Parámetros desconocidos . . . . .	31
<b>4. Simulación numérica y resultados</b>	<b>35</b>
4.1. Sistema real . . . . .	35
4.1.1. Condiciones iniciales . . . . .	35
4.2. Simulación . . . . .	37

5. Conclusiones	46
Bibliografía	48
A. Matrices de rigidez, amortiguamiento e inercia usadas en la simulación	50

# Índice de figuras

1.1. Esquemas de control. . . . .	6
2.1. Sistema de un grado de libertad: (a) fuerza aplicada $p(t)$ ; (b) movimiento del suelo debido a un sismo. . . . .	10
2.2. Representación de un sistema de un GDL: (a) esquema de la estructura; (b) diagrama de cuerpo libre. . . . .	11
2.3. GDL de diafragma de piso rígido. . . . .	12
2.4. Representación de un sistema de varios niveles. . . . .	14
2.5. Marco sujeto a desplazamientos unitarios. . . . .	16
2.6. Desplazamiento del marco debido a $u_\theta$ . . . . .	16
2.7. Fuerza aplicada en la dirección del marco. . . . .	18
3.1. Vista en isométrico de un edificio rectangular. . . . .	33
4.1. Edificio propuesto para efectos de simulación. . . . .	36
4.2. Acelerograma del sismo en la dirección N00E. . . . .	38
4.3. Acelerograma del sismo en la dirección N90E. . . . .	39
4.4. Aplicación de la fuerza sísmica a un edificio. . . . .	40
4.5. Norma del error de estimación: $ \varepsilon _2$ . . . . .	41
4.6. Comportamiento de aceleración real - estimada en el primer piso. . . . .	41
4.7. Detalle del comportamiento de aceleración rotacional real - estimada en el primer piso. . . . .	42
4.8. Convergencia del parámetro $(M^{-1}K)_{11}$ . . . . .	42
4.9. Convergencia del parámetro $(M^{-1}C)_{11}$ . . . . .	43
4.10. Convergencia del parámetro $(M^{-1}K)_{44}$ . . . . .	43
4.11. Convergencia del parámetro $(M^{-1}C)_{44}$ . . . . .	44
4.12. Convergencia del parámetro $(M^{-1}K)_{77}$ . . . . .	44
4.13. Convergencia del parámetro $(M^{-1}C)_{77}$ . . . . .	45

## Agradecimientos

A Luis Álvarez Icaza por su apoyo y paciencia.

A los cuates de la generación de maestría por las aventuras y desventuras vividas.

A CONACYT por el apoyo otorgado.

# Capítulo 1

## Introducción

Debido a que la altura de los edificios es cada día mayor, las oscilaciones que sufren cuando están sujetos a fuerzas externas: sismos o cargas debidas al viento, aumentan. Esto ocasiona que los desplazamientos que sufre la estructura puedan producir daños en la misma con probables consecuencias trágicas, como las registradas en la Ciudad de México en septiembre de 1985. Por lo anterior, es importante tener algún dispositivo con el cual se logren disminuir los desplazamientos mencionados. Entre los dispositivos existentes están los amortiguadores magneto-reológicos [2], en los que es posible controlar la resistencia que presentan al movimiento y que son instalados, por ejemplo, entre el suelo y el primer piso del edificio. Para tener un buen desempeño de los esquemas de control implementados con estos dispositivos, es necesario tener un modelo analítico del sistema que reproduzca lo más cercano a la realidad el comportamiento del edificio.

El ingeniero civil diseña un edificio capaz de soportar una determinada carga, y para ello calcula los parámetros de masa, amortiguamiento y rigidez necesarios para tal propósito. Sin embargo, al construir el edificio los parámetros reales son normalmente mayores que los calculados en el diseño por diversas causas: incertidumbres en material de construcción, masa del mobiliario, muros de división no contemplados en el diseño original, etc. Esto no representa un problema para el diseñador, pues el edificio soportará una carga mayor que la de diseño y en este sentido se puede estar tranquilo de que el edificio no se dañará si la carga máxima aplicada es la de diseño. Sin embargo, para el ingeniero en control los parámetros

calculados no son útiles, puesto que si se trabaja con ellos en realidad se tiene el modelo matemático de un edificio diferente y el esquema de control que se implemente no tendría un buen desempeño. Entonces, el problema se traduce en cómo medir los parámetros reales del edificio sin tener que recurrir a pruebas destructivas. Es aquí donde los métodos de identificación paramétrica son de gran utilidad, que no requieren que se realice prueba destructiva alguna; sólo es necesario excitar al sistema estructural y medir su comportamiento. Si la excitación es un sismo, entonces la identificación paramétrica se puede realizar en tiempo real.

La identificación paramétrica en línea, es decir, en tiempo real permite conocer los parámetros reales del edificio con cierta exactitud, tal que un algoritmo de control para un dispositivo magneto-reológico, por ejemplo, que utilice estos parámetros tenga un desempeño satisfactorio.

Este trabajo plantea la identificación en tiempo real de los parámetros del modelo matemático de un edificio en tres dimensiones cuando está sujeto a aceleraciones del terreno en dos componentes horizontales ortogonales. La intención es usar este *modelo identificado* en el diseño de una ley de control que se aplicaría a través de amortiguadores magneto-reológicos.

En este capítulo se hace una breve reseña del estado del arte respecto a la aplicación de esquemas de control a edificios que están sometidos a fuerzas provocadas por sismos.

## 1.1. Objetivo

Realizar la estimación de parámetros estructurales para el modelo en tres dimensiones (3D) de un edificio sujeto a excitación sísmica en dos direcciones ortogonales y horizontal.

## 1.2. Antecedentes

Los trabajos realizados en la identificación paramétrica de estructuras civiles son numerosos [4],[5], [6]. Sin embargo, en ellos se estudia el modelo de marco plano de un edificio. Este modelo sólo considera el comportamiento de un marco y no puede cuantificar las relaciones que existen entre los marcos que conforman al edificio, cuando estos tienen diferente

orientación. Por ello, no se puede conocer la rotación que sufre el edificio. Esto implica que este grado de libertad no es controlable y que eventualmente puede ser crítico que se tenga control sobre él para evitar daños en la estructura. Un modelo en tres dimensiones representa en forma más realista el comportamiento de un edificio, por lo que es importante que se trabaje en la identificación de parámetros para este tipo de modelos. En [9] se plantea la identificación de las relaciones de rigidez-masa para un edificio cuyo modelo está basado en uno de cortante, que se puede considerar en tres dimensiones. Éste no toma en cuenta el coeficiente de amortiguamiento, está enfocado a la detección de fallas en la estructura civil y, además, se realiza fuera de línea. El algoritmo de identificación paramétrica planteado en este trabajo se puede implementar para la identificación en línea, además de que toma en cuenta los parámetros de amortiguamiento del modelo matemático de un edificio.

### 1.3. Características de los sismos

Para entender cómo es el comportamiento de los sismos, es necesario conocer algunas de sus características en forma general.

Primeramente, se tiene que saber qué es un sismo; una definición es: *un sismo es la liberación de la energía elástica acumulada en la capas externas de la corteza terrestre cuando se produce una fractura de las mismas.*

Algunas de las características más importantes de un sismo son:

1. Foco y Epicentro.
2. Magnitud.
3. Intensidad.
4. Duración.
5. Acelerogramas.

Las características de ubicación de un sismo son el *foco*, que, es la región del campo de esfuerzos donde se inicia la liberación de energía y el *epicentro*, que es la proyección del foco

sobre la superficie terrestre, es decir, el punto a partir del cual se desplazan los movimientos de la superficie. El *foco* algunas veces es llamado *hipocentro* o *epifoco*.

El concepto de *magnitud* lo introdujo C. F. Richter en 1935 con la finalidad de comparar la energía liberada entre diferentes sismos. La magnitud, de acuerdo con Richter, está expresada como:

$$M = \log(A/T) + f(\Delta, h) + C_s + C_r, \quad (1.1)$$

donde:

$M$  = magnitud.

$A$  = amplitud de la deformación donde se encuentra el sismógrafo, en  $\mu m$ .

$T$  = periodo de oscilación.

$\Delta$  = distancia epicentral, en grados.

$h$  = profundidad del foco, en  $km$ .

$C_s$  = factor de corrección de la estación sismológica.

$C_r$  = factor de corrección regional.

La evaluación de la función de la distancia y la profundidad se hace con base en estudios analíticos y empíricos.

Se entiende como *intensidad* al efecto local que produce un sismo, es decir, el nivel de pánico que causa en la población así como la destrucción que provoca. Esta característica es subjetiva porque depende de quién sea la persona que la registra.

No se debe confundir *magnitud* con *intensidad*. La primera es la energía liberada mientras que la segunda es el efecto.

El concepto de *duración* es aún incierto, pues algunos autores proponen como definición el lapso de tiempo entre la primera y última señal de aceleración que sobrepasan un nivel determinado. Otras definiciones toman en cuenta más la forma del acelerograma que los niveles de aceleración. En general, los estudios realizados por varios autores encuentran relación entre la duración significativa de un sismo y su magnitud.

Los registros de las aceleraciones causadas en el terreno donde ocurre un movimiento del mismo, generalmente un sismo, se denominan *acelerogramas*.

## 1.4. Control en estructuras

La aplicación de esquemas de control a estructuras civiles consiste, básicamente, en la modificación de las propiedades mecánicas de las mismas, tal que éstas presenten una respuesta deseable ante la acción de fuerzas externas. La modificación de las propiedades mecánicas de una estructura incluye la modificación de su rigidez y amortiguamiento, de tal forma que se puedan reducir los niveles de excitación que se transmiten a ella.

Los métodos de diseño para proteger una estructura contra las fuerzas provocadas por los sismos están divididos, básicamente, en tres categorías:

1. Métodos de diseño basados en ductilidad.
2. Métodos de diseño basados en base aislada.
3. Métodos de control basados en la respuesta dinámica de la estructura.
  - Control pasivo.
  - Control activo.
  - Control híbrido.
  - Control semiactivo.

A continuación se describen, brevemente, los métodos basados en la respuesta dinámica de la estructura.

En los sistemas de control pasivos, ya sea aquellos que absorben las vibraciones o sistemas de aislamiento del suelo, consisten en dispositivos fijos instalados entre el edificio y el suelo que poseen la capacidad para disipar energía. La energía necesaria para que el mecanismo de disipación de energía funcione, proviene del movimiento causado en la estructura por fuerzas externas. El movimiento relativo del mecanismo define la amplitud y dirección de las fuerzas. Una ventaja de los sistemas pasivos es su fácil mantenimiento, puesto que no utilizan sensores, *actuadores*, o controladores. Los dispositivos pasivos usados en estructuras son: amortiguador por masa sintonizada (tuned mass damper, **TMD**<sup>1</sup>), amortiguadores con fluido viscoso, amortiguadores viscoelásticos, amortiguadores de fricción seca, entre otros.

---

<sup>1</sup>Dispositivo de control pasivo que usa el ajuste de la masa, el resorte y el amortiguador, tal que la combinación del *TMD* y la estructura maximizan la absorción de energía [17].

Los sistemas de control activo son aquellos que controlan las fuerzas externas con la fuerza proporcionada por dispositivos situados en la estructura. La ventaja de los métodos de control activo, es que son efectivos en un intervalo de frecuencia grande y en el manejo de estados transitorios. Sin embargo, estos métodos requieren de una gran cantidad de energía para funcionar y su mantenimiento es costoso. A pesar de esto último, su efectividad es buena, especialmente si los algoritmos de control son no lineales, puesto que con los lineales se presenta saturación del control para excitaciones muy grandes. Los dispositivos activos usados en estructuras son: amortiguador por masa activa (active mass damper, AMD<sup>2</sup>), dispositivos de tendones activos o de abrazadera activa.

Los métodos de control híbrido son una combinación de los controles descritos en las líneas anteriores, por lo que tienen las ventajas y desventajas de ambos. Los resultados obtenidos con estos métodos son más confiables que los de un sistema activo, no obstante que este último pueda ser más complicado. Un ejemplo de un sistema híbrido es un TMD con actuadores activos colocados entre la masa TMD y su soporte (lo que incrementa la efectividad del TMD).

En la Fig. 1.1 se muestran esquemas de un TMD pasivo, un AMD, y un sistema híbrido: amortiguador por masa activa sintonizada (active tuned mass damper, ATMD).

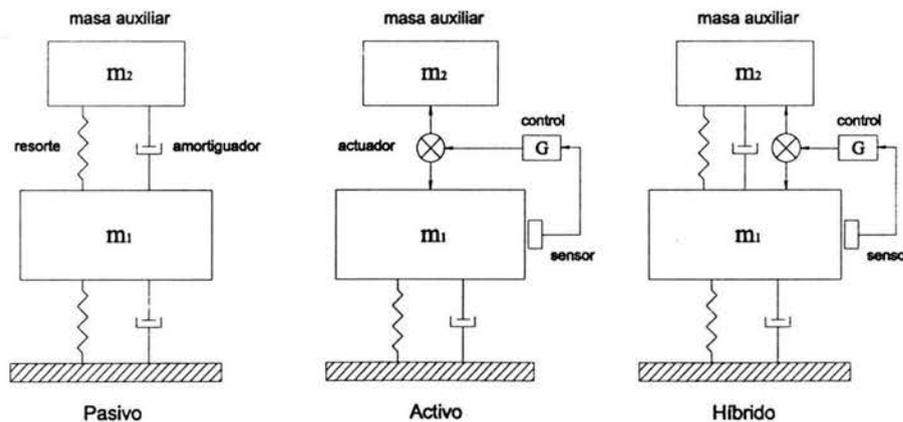


Figura 1.1: Esquemas de control.

<sup>2</sup>Dispositivo de control activo que usa un actuador másico (reemplaza el resorte y el amortiguador en un TMD), sensores y controladores, tal que la combinación del AMD y la estructura minimizan la respuesta a la vibración [17].

El control semiactivo combina las mejores características del control pasivo y del activo, con lo cual se obtiene la confianza de los dispositivos pasivos, la versatilidad y adaptabilidad de los sistemas activos. Los dispositivos de control semiactivo tienen propiedades que pueden ser cambiadas en tiempo real, pero no pueden aportar energía a la estructura a ser controlada. Estos dispositivos requieren de muy poca energía para funcionar, característica muy importante puesto que en el caso de un sismo la fuente de energía externa puede fallar. Los dispositivos de control semiactivo se han diseñado para utilizar las fuerzas generadas por superficies en fricción o están compuestos de algún fluido viscoso que disipa la energía de vibración del sistema estructural.

Una de las desventajas de los dispositivos de control semiactivo se refiere a la velocidad con que pueden disipar la energía introducida por la excitación en la estructura. Sin embargo, se han desarrollado dispositivos como los llamados de *rigidez variable activa* o el *amortiguador variable activo*, para cubrir esta desventaja. En estos dispositivos el amortiguamiento que presentan puede ser cambiado drásticamente mediante el ajuste de las válvulas de aceite, para lo que se requiere poca energía. Un ejemplo de dispositivo de control semiactivo es el *amortiguador magneto-reológico*, en el cual es posible controlar la variación de la rigidez que presenta al movimiento.

## 1.5. Aportaciones del trabajo

Este trabajo contribuye al conocimiento del área de control de estructuras civiles por las siguientes razones:

1. Se valida el modelo matemático de una estructura civil en tres dimensiones, bajo la hipótesis de diafragma de piso rígido.
2. Se propone un algoritmo de identificación paramétrica basado en el método de mínimos cuadrados que permite reducir de manera significativa el orden de las matrices involucradas, en especial el orden de la matriz de covariancia. Con ello la identificación en línea es más factible, lo cual permite implementar algoritmos de control en una estructura civil que esté sujeta a excitación sísmica.

3. Mediante el algoritmo de identificación propuesto se conoce el valor de los parámetros del sistema real, con mayor precisión que el valor obtenido mediante cálculos matemáticos.

## 1.6. Organización del trabajo

En este primer capítulo se planteó el problema a resolver, así como los objetivos que se espera cumplir en este trabajo. Además, se dio una breve explicación de los métodos de control para estructuras civiles y de las características de los sismos. En el siguiente capítulo se presenta el modelo matemático del sistema y las suposiciones que se hacen para obtenerlo. En el tercer capítulo se hace un análisis del modelo matemático para obtener el número mínimo de parámetros a identificar y con ello evitar una sobreparametrización. Además se plantean las ecuaciones que resuelven la estimación de parámetros para el sistema en estudio. En el cuarto capítulo se presentan y discuten los resultados obtenidos en simulación numérica, en MATLAB, de la identificación de parámetros para un edificio de 3 pisos. Finalmente, las conclusiones se presentan en el último capítulo.

## Capítulo 2

# Modelado matemático

En este capítulo se desarrolla el modelo matemático en tres dimensiones (3D) de un edificio de varios niveles a partir de un modelo simple de marco plano que considera viga inflexible. Además, se explica las condiciones para las cuales el modelo usado es válido.

### 2.1. Introducción

Para trabajar con un sistema físico es necesario tener un modelo matemático del mismo, el cual debe tener la característica de que la respuesta del sistema ante ciertas excitaciones debe ser lo más parecida posible a la respuesta pronosticada por el modelo. Si esto no es así, entonces el modelo no es representativo del sistema físico. Además, el modelo debe de ser lo más sencillo posible desde el punto de vista matemático, pues esto ayuda a su manipulación matemática para otros fines, como por ejemplo: la solución en el dominio del tiempo, aplicaciones de control, análisis de propiedades matemáticas, etc.

En teoría de control, es de suma importancia que el modelo refleje el comportamiento real del sistema físico, pues de ello depende que los esquemas de control implementados en él sean eficientes. No obstante, cuando se desarrolla un modelo matemático, siempre se desprecian ciertos efectos que se consideran poco importantes comparados con otros que sí se contemplan. Hay también efectos muy complicados que al incluirse hacen que el modelo sea muy complejo. Las inexactitudes inducidas al ignorar estos efectos se pueden contemplar en modelo como perturbaciones, que pueden ser acotadas o no acotadas.

Para el caso de un edificio que está formado por varios marcos, el modelo matemático en 3D se puede desarrollar a partir de un modelo de marco plano. Posteriormente, se obtienen las relaciones que existen entre ellos, así como los acoplamientos que existen entre los niveles del edificio. Con esto se obtiene un modelo matemático capaz de pronosticar el comportamiento del edificio sujeto a fuerzas externas. Este modelo se desarrolla bajo ciertas hipótesis, por lo que no es aplicable a todos los edificios, sólo a aquellos que cumplan las condiciones bajo las cuales se desarrolló el modelo matemático.

## 2.2. Modelo de un grado de libertad

A continuación se obtiene el modelo matemático del sistema con el cual se va a trabajar en este estudio. En la Fig. 2.1 se observa un marco con masa concentrada sujeto a una fuerza  $p(t)$  debida al movimiento de un sismo. El hecho de que se considere la masa concentrada ocasiona que se tenga sólo un Grado de Libertad (GDL).

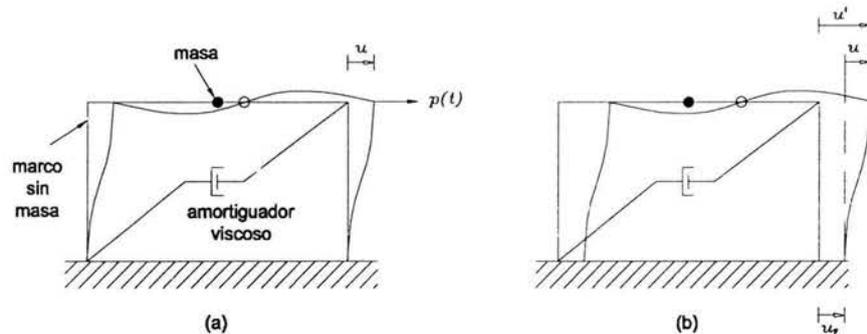


Figura 2.1: Sistema de un grado de libertad: (a) fuerza aplicada  $p(t)$ ; (b) movimiento del suelo debido a un sismo.

Este sistema de un GDL se puede representar como un sistema masa-resorte-amortiguador, cuyo esquema y diagrama de cuerpo libre se muestran en la Fig. 2.2.

El desplazamiento del suelo está denotado por  $u_g$ , el desplazamiento total de la masa es  $u^t$ , y el desplazamiento relativo entre la masa y el suelo está dado por  $u$ . Para cada instante de tiempo estos desplazamientos están relacionados por:

$$u^t = u_g + u. \quad (2.1)$$

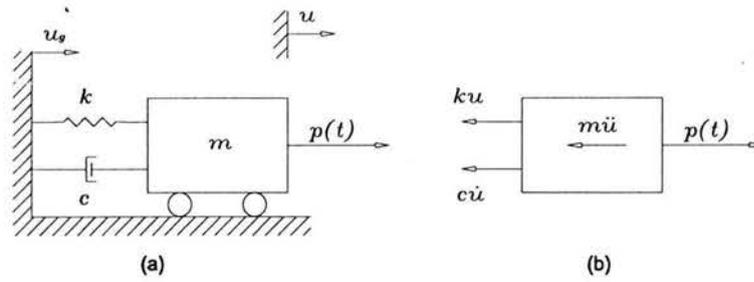


Figura 2.2: Representación de un sistema de un GDL: (a) esquema de la estructura; (b) diagrama de cuerpo libre.

Sea la fuerza de inercia  $F_i$ , la fuerza de amortiguamiento  $F_d$ , y la fuerza de rigidez  $F_s$

$$F_i = m\ddot{u}^t, \quad F_d = c\dot{u}, \quad F_s = ku. \quad (2.2)$$

Para que la estructura se encuentre en equilibrio, se debe de cumplir con:

$$F_i + F_d + F_s = 0. \quad (2.3)$$

Al substituir las Ecs. (2.1) y (2.2) en la Ec. (2.3), se obtiene:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -m\ddot{u}_g. \quad (2.4)$$

De donde se deduce que la fuerza externa por el movimiento del suelo aplicada a la estructura es:

$$p(t) = -m\ddot{u}_g.$$

La Ec. (2.4) es la ecuación de movimiento de una estructura de un GDL sometida a la aceleración del suelo causada por un sismo. Para varios GDL, la ecuación de movimiento es la misma que (2.4), sólo que ahora se aplica a los GDL que se vayan a considerar. Los GDL de una estructura, en 3D, de masa concentrada son 6: tres de desplazamiento lineal y tres de rotación; de tal suerte que la Ec. (2.4), la cual es escalar, se convierte en una ecuación matricial

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = -M\ddot{U}_g. \quad (2.5)$$

A la matriz  $M$  se le conoce como la matriz de masa, a  $C$  como matriz de amortiguamiento y a  $K$  como matriz de rigidez.

## 2.3. Modelo en tres dimensiones

### 2.3.1. Hipótesis de diafragma de piso rígido

Para formar la matriz de rigidez en un sistema estructural en 3D, se considera como hipótesis fundamental la de *diafragma de piso rígido*. Ésta considera al piso como un cuerpo indeformable en su plano donde la distancia relativa entre sus partículas permanece constante bajo efectos de fuerzas externas, lo que implica que las vigas del diafragma tienen una rigidez a la flexión infinita.

Las observaciones en estructuras civiles reales han demostrado que esta suposición es correcta. Por otro lado, desde el punto de vista numérico la ventaja de trabajar con diafragmas de piso rígido es que el orden de la matriz de rigidez  $K$  se reduce. En la Fig. 2.3 (a) se observa una estructura con 8 nodos y cada uno de ellos con 6 GDL lo que implica que la matriz de rigidez del sistema  $K \in \mathcal{R}^{48 \times 48}$ . Sin embargo, en la Fig 2.3 (b) se considera a la estructura con diafragma de piso rígido. En ella todos los nodos están sujetos al movimiento del diafragma, y para éste sólo se consideran 3 GDL por lo que la matriz de rigidez  $K \in \mathcal{R}^{3 \times 3}$ . Cualquier nodo que se encuentre en el diafragma se puede estudiar solamente con los tres GDL indicados.

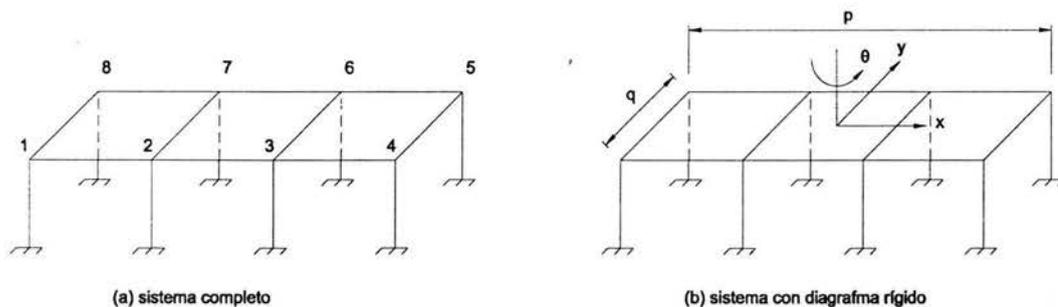


Figura 2.3: GDL de diafragma de piso rígido.

De lo anterior se concluye que los GDL con los cuales se va a trabajar para cada nivel del edificio son los mostrados en la Fig. 2.3 (b): dos desplazamientos lineales y una rotación. Por lo que un edificio de  $n$  niveles tendrá  $3n$  GDL.

Aunque en realidad sí existen desplazamientos en el diafragma, estas se consideran des-

preciables comparadas con los que se producen en las columnas. Para que una estructura se pueda modelar bajo la hipótesis de diafragma de piso rígido, tiene que cumplir las siguientes condiciones:

1. Rigidez adecuada.
2. Resistencia a la deformación.
3. Geometría.
  - Regularidad en planta y elevación.
  - Altura  $< 30 m$ .
  - Relación entre largo ( $b$ ) y ancho ( $a$ )  $b \leq 2,5 a$ .

El material con el cual está construido el edificio debe tener un equilibrio entre resistencia y rigidez. Por ejemplo, un diafragma de vidrio tendría una rigidez extraordinaria, sin embargo, casi nula resistencia a la deformación. Por el contrario, un diafragma de algún plástico suave tendría excelente resistencia a la deformación pero, un valor de rigidez muy bajo. Un material en el cual se puede buscar un equilibrio adecuado entre estas dos propiedades es el concreto reforzado por lo que se puede considerar que un diafragma construido con este material cumple con ellas.

### 2.3.2. Modelo de marco plano

Ahora, para el caso en que la estructura esté formada por varios niveles, al realizar el análisis de las fuerzas aplicadas a cada nivel se induce acoplamiento con los niveles adyacentes. En la Fig. 2.4 se muestra la representación de un sistema de varios pisos basado en el modelo de marcos planos, así como su diagrama de cuerpo libre.

De acuerdo a la Fig. 2.4, la matriz de rigidez de un marco plano con vigas inflexibles tiene la estructura de la matriz de la Ec. (2.6).

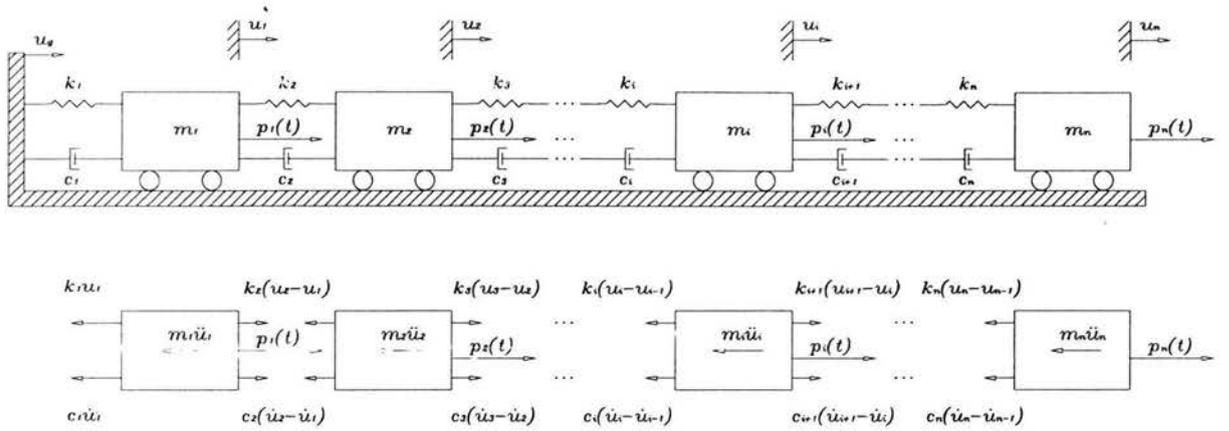


Figura 2.4. Representación de un sistema de varios niveles.

$$K_d = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & -k_4 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 + k_5 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & k_{n-2} + k_{n-1} & -k_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -k_{n-1} & k_{n-1} + k_n & -k_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -k_n & k_n \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

donde  $n$  es el número de pisos del edificio.

A la estructura de la matriz  $K_d$  se le conoce como *tridiagonal*. Se observa que  $K_d \in \mathcal{R}^{n \times n}$  y tiene  $2n - 1$  parámetros diferentes entre sí.

La matriz de amortiguamiento  $C_d$  de marco plano con viga inflexible en la Fig. 2.4 tiene la misma estructura que la matriz  $K_d$ , esto es:

$$C_d = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_3 & c_3 + c_4 & -c_4 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_4 & c_4 + c_5 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{n-2} + c_{n-1} & -c_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -c_{n-1} & c_{n-1} + c_n & -c_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -c_n & c_n \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

### 2.3.3. Matriz de rigidez en 3D

Con base en las condiciones de diafragma de piso rígido, la formación de la matriz de rigidez en 3D se obtiene con las matrices de rigidez de marco plano correspondiente a cada uno de los marcos que forman al edificio. Sin embargo, al modelar el sistema en 3D se tiene acoplamiento entre los marcos, lo que ocasiona que el desplazamiento provocado en un marco modifique la condición de reposo de los marcos adyacentes a él. Lo anterior fuerza a que sea necesario conocer de una forma cuantitativa las relaciones de acoplamiento entre los marcos del sistema.

En un marco plano elástico los desplazamientos horizontales  $D_i$  son directamente proporcionales a la fuerza,  $F_d$ , aplicada al mismo. Esta relación de proporcionalidad está determinada por las condiciones de rigidez del marco,  $K_d$ .

$$F_d = K_d D_i \quad (2.8)$$

En la Fig. 2.5 se observa un marco con una orientación determinada en planta y con un ángulo  $\beta$  respecto a la abcisa del sistema de referencia, al cual se le han aplicado desplazamientos unitarios  $u_x$ ,  $u_y$  y  $u_\theta$ . El desplazamiento provocado en la dirección del marco está dado por:

$$D_i = u_{xi} \cos(\beta) + u_{yi} \sen(\beta) + T, \quad (2.9)$$

donde  $i$  es el número de nivel. El término  $T$  es el desplazamiento angular que sufre el marco debido a una rotación en planta del mismo y se obtiene del arreglo geométrico de la Fig.

2.6. En ésta se observa el desplazamiento del marco debido a la rotación de un ángulo  $u_\theta$ . Si se supone que éste es pequeño, el arco formado entre los puntos  $A$  y  $B$  puede ser descrito por el segmento de recta  $\overline{AB} = \rho$ .

$$\rho = d u_\theta, \quad (2.10)$$

$$x = d \cos(\beta), \quad y = d \operatorname{sen}(\beta). \quad (2.11)$$

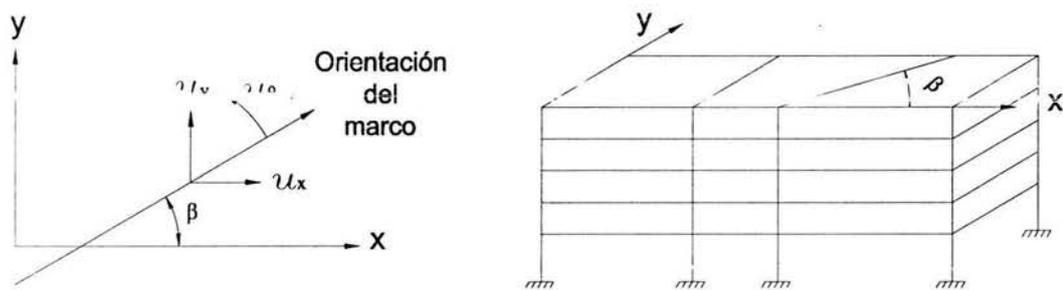


Figura 2.5: Marco sujeto a desplazamientos unitarios.

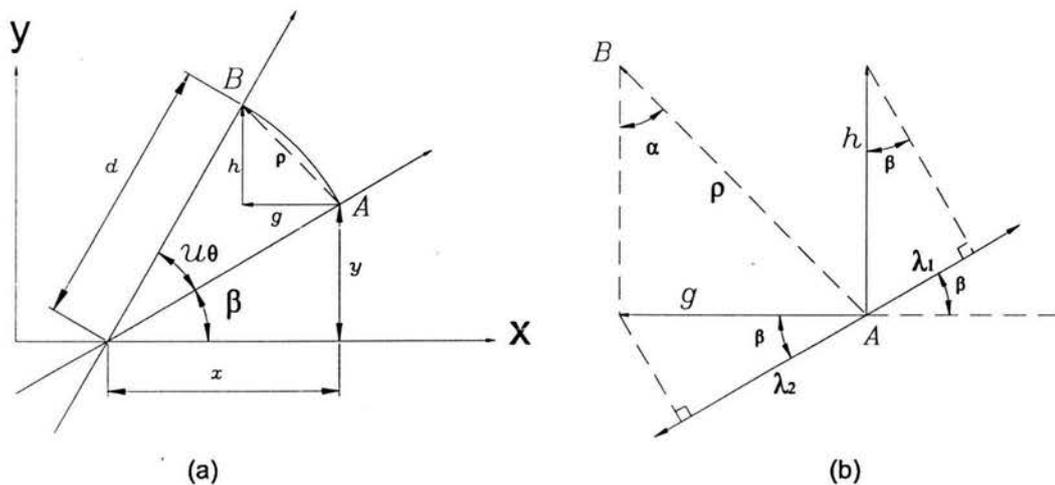


Figura 2.6: Desplazamiento del marco debido a  $u_\theta$ .

De la Fig. 2.6(b) se tiene que  $\alpha = \beta + \frac{u_\theta}{2}$ . De la misma Fig 2.6(b) y al utilizar las Ecs.

(2.10) y (2.11), se obtiene:

$$g = \rho \operatorname{sen}(\alpha) = \rho \operatorname{sen}\left(\beta + \frac{u_\theta}{2}\right) = d u_\theta \operatorname{sen}(\beta) \cos\left(\frac{u_\theta}{2}\right) + d u_\theta \cos(\beta) \operatorname{sen}\left(\frac{u_\theta}{2}\right),$$

$$g = y u_\theta \cos\left(\frac{u_\theta}{2}\right) + x u_\theta \operatorname{sen}\left(\frac{u_\theta}{2}\right), \quad (2.12)$$

$$h = \rho \cos(\alpha) = \rho \cos\left(\beta + \frac{u_\theta}{2}\right) = d u_\theta \cos(\beta) \cos\left(\frac{u_\theta}{2}\right) - d u_\theta \operatorname{sen}(\beta) \operatorname{sen}\left(\frac{u_\theta}{2}\right),$$

$$h = x u_\theta \cos\left(\frac{u_\theta}{2}\right) - y u_\theta \operatorname{sen}\left(\frac{u_\theta}{2}\right). \quad (2.13)$$

Debido a que  $u_\theta$  es suficientemente pequeño, implica que  $\operatorname{sen}\left(\frac{u_\theta}{2}\right) \approx 0$  y  $\cos\left(\frac{u_\theta}{2}\right) \approx 1$ , por lo tanto las Ecs. (2.12) y (2.13) se simplifican y finalmente se tiene:

$$g = y u_\theta, \quad h = x u_\theta. \quad (2.14)$$

De la Fig. 2.6 (b) se tiene que:

$$\lambda_1 = h \operatorname{sen}(\beta), \quad \lambda_2 = g \cos(\beta).$$

Finalmente, el desplazamiento angular  $T$  debido a la rotación  $u_\theta$  está determinado por:

$$T = \lambda_1 - \lambda_2 = x u_\theta \operatorname{sen}(\beta) - y u_\theta \cos(\beta). \quad (2.15)$$

Si se define

$$r = x \operatorname{sen}(\beta) - y \cos(\beta),$$

entonces se tiene

$$T = u_\theta r. \quad (2.16)$$

Donde  $r$  es la distancia perpendicular del marco al origen del sistema de referencia. El signo indica la dirección del momento.  $x$ ,  $y$  son las coordenadas de cualquier punto del marco.

Otra forma de obtener el término  $r$  es mediante el producto cruz del vector unitario que define la dirección del marco, Fig. 2.6,  $\vec{u} = \cos(\beta)\vec{i} + \operatorname{sen}(\beta)\vec{j}$ , y un vector que parte del origen a cualquier punto del marco,  $\vec{s} = (x-0)\vec{i} + (y-0)\vec{j}$ .

$$\vec{s} \times \vec{u} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & 0 \\ \cos(\beta) & \operatorname{sen}(\beta) & 0 \end{bmatrix} = (x \operatorname{sen}(\beta) - y \cos(\beta))\vec{k} = r.$$

Se observa que el resultado es un vector perpendicular al plano formado por el marco.

Por lo tanto, al substituir la Ec. (2.16) en la (2.9) el desplazamiento que sufre el marco, en el nivel  $i$ , en su misma dirección está determinado por:

$$D_i = u_{xi} \cos(\beta) + u_{yi} \sen(\beta) + u_{\theta i} r. \quad (2.17)$$

Al substituir la Ec. (2.17) en la (2.8), la fuerza aplicada en la dirección del marco, en el nivel  $i$ , provoca un desplazamiento en la misma dirección del marco como función de los desplazamientos en las direcciones  $x$ ,  $y$ , y de la rotación  $\theta$ , así como de las condiciones de rigidez del sistema

$$F_d = K_d D_i = K_d u_{xi} \cos(\beta) + K_d u_{yi} \sen(\beta) + \bar{K}_d u_{\theta i} r.$$

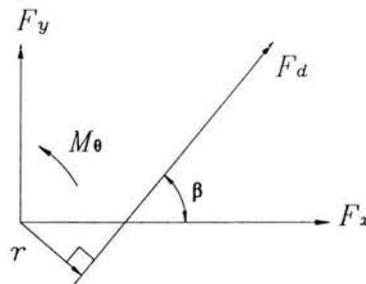


Figura 2.7: Fuerza aplicada en la dirección del marco.

En la Fig. 2.7 se observa la representación de la fuerza  $F_d$ , así como su dirección, si se proyecta hacia cada una de las direcciones de los GDL considerados, se obtiene:

$$F_{xi} = F_d \cos(\beta) = K_d u_{xi} \cos^2(\beta) + K_d u_{yi} \sen(\beta) \cos(\beta) + K_d u_{\theta i} r \cos(\beta),$$

$$F_{yi} = F_d \sen(\beta) = K_d u_{xi} \cos(\beta) \sen(\beta) + K_d u_{yi} \sen^2(\beta) + K_d u_{\theta i} r \cos(\beta) \sen(\beta),$$

$$M_{\theta i} = F_d r = K_d u_{xi} \cos(\beta) r + K_d u_{yi} \sen(\beta) r + K_d u_{\theta i} r^2.$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ M_{\theta i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_d \cos^2(\beta) & K_d \sen(\beta) \cos(\beta) & K_d r \cos(\beta) \\ K_d \cos(\beta) \sen(\beta) & K_d \sen^2(\beta) & K_d r \sen(\beta) \\ K_d r \cos(\beta) & K_d r \sen(\beta) & K_d r^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{xi} \\ u_{yi} \\ u_{\theta i} \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

Al aplicar la Ec. (2.18) a todos los marcos de la estructura, se obtiene la matriz de rigidez que registra el acoplamiento inducido entre los niveles adyacentes, así como las relaciones que existen entre los desplazamientos en las direcciones  $x$ ,  $y$ , y la rotación  $\theta$

$$K = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^f K_{d_j} \cos^2 \beta_j & \sum_{j=1}^f K_{d_j} \cos \beta_j \operatorname{sen} \beta_j & \sum_{j=1}^f K_{d_j} r_j \cos \beta_j \\ \sum_{j=1}^f K_{d_j} \cos \beta_j \operatorname{sen} \beta_j & \sum_{j=1}^f K_{d_j} \operatorname{sen}^2 \beta_j & \sum_{j=1}^f K_{d_j} r_j \operatorname{sen} \beta_j \\ \sum_{j=1}^f K_{d_j} r_j \cos \beta_j & \sum_{j=1}^f K_{d_j} r_j \operatorname{sen} \beta_j & \sum_{j=1}^f K_{d_j} r_j^2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ M_\theta \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} u_{xi} \\ u_{yi} \\ u_{\theta i} \end{bmatrix}.$$

donde  $f$  es el número de marcos que conforman al edificio.

Por lo tanto, la matriz de rigidez en 3D está definida como:

$$K = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{x\theta} \\ k_{xy} & k_{yy} & k_{y\theta} \\ k_{x\theta} & k_{y\theta} & k_{\theta\theta} \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{3n \times 3n}, \quad K = K^T > 0, \quad (2.19)$$

donde:

$$k_{xx} = \sum_{j=1}^f K_{d_j} \cos^2 \beta_j \in \mathcal{R}^{n \times n}, \quad k_{xx} = k_{xx}^T > 0,$$

$$k_{xy} = k_{yx} = \sum_{j=1}^f K_{d_j} \cos \beta_j \operatorname{sen} \beta_j \in \mathcal{R}^{n \times n}, \quad k_{xy} = k_{xy}^T > 0,$$

$$k_{x\theta} = k_{\theta x} = \sum_{j=1}^f K_{d_j} r_j \cos \beta_j \in \mathcal{R}^{n \times n}, \quad k_{x\theta} = k_{x\theta}^T > 0,$$

$$k_{yy} = \sum_{j=1}^f K_{d_j} \operatorname{sen}^2 \beta_j \in \mathcal{R}^{n \times n}, \quad k_{yy} = k_{yy}^T > 0,$$

$$k_{y\theta} = k_{\theta y} = \sum_{j=1}^f K_{d_j} r_j \operatorname{sen} \beta_j \in \mathcal{R}^{n \times n}, \quad k_{y\theta} = k_{y\theta}^T > 0,$$

$$k_{\theta\theta} = \sum_{j=1}^f K_{d_j} r_j^2 \in \mathcal{R}^{n \times n}, \quad k_{\theta\theta} = k_{\theta\theta}^T > 0.$$

Cada uno de los elementos de la matriz  $K$  es simétrico y tridiagonal, porque las matrices  $K_d$  son simétricas y tridiagonal, al multiplicarlas por un escalar y sumarlas, el resultado es una matriz simétrica y tridiagonal.

Con base en la afirmación anterior se puede asegurar que cada elemento matricial, de la matriz  $K$  tiene, al igual que la matriz  $K_d$ , Ec. (2.6),  $2n - 1$  parámetros diferentes entre sí.

#### 2.3.4. Matriz de amortiguamiento en 3D

Debido a que se requiere conocer con precisión el valor de amortiguamiento de una estructura civil, en este modelo se considera que la matriz de amortiguamiento  $C$  en 3D tiene la misma estructura que la matriz de rigidez  $K$ , Ec. (2.19), por lo que aquella determinada por:

$$C = \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xy} & c_{x\theta} \\ c_{yx} & c_{yy} & c_{y\theta} \\ c_{x\theta} & c_{y\theta} & c_{\theta\theta} \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{3n \times 3n}, \quad C = C^T \geq 0. \quad (2.20)$$

De la misma forma que la Ec. (2.19), los elementos matriciales de la Ec. (2.20) están en  $\mathcal{R}^{n \times n}$  y son simétricos y tridiagonales.

#### 2.3.5. Matriz de masa en 3D

La matriz de masa tiene un modelo en 3D involucra la masa concentrada de todos los pisos, así como la masa rotacional de cada uno de los niveles del edificio, pues es por ella que es posible conocer la rotación que sufre el diafragma cuando está sujeto a fuerzas externas.

La estructura de la matriz de masa en 3D está dada por:

$$M = \begin{bmatrix} m_t & 0 & 0 \\ 0 & m_t & 0 \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{3n \times 3n}, \quad M = M^T > 0. \quad (2.21)$$

donde:

$$m_t = \sum_{j=i}^f m_j,$$

$$I_m = \left(\frac{m_t}{12}\right)(p^2 + q^2) \quad (\text{ver Fig 2.3}).$$

Tanto  $m_t$  como  $I_m$  son matrices diagonales y  $\in \mathcal{R}^{n \times n}$ , por lo tanto la matriz  $M$  es diagonal.

Para un edificio en el cual su modelo considere tres GDL por piso: desplazamiento en  $x$ , desplazamiento en  $y$  y rotación en  $\theta$ , y además sea de  $n$  pisos, la Ec. (2.4) se convierte en una ecuación matricial.

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = -M\ddot{U}_g, \quad (2.22)$$

donde las matrices  $K$ ,  $C$  y  $M$  están dadas por las Ecs. (2.19), (2.20) y (2.21), respectivamente, y además:

$$U = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_\theta \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{3n \times 1},$$

$$\dot{U} = \begin{bmatrix} \dot{u}_x \\ \dot{u}_y \\ \dot{u}_\theta \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{3n \times 1},$$

$$\ddot{U} = \begin{bmatrix} \ddot{u}_x \\ \ddot{u}_y \\ \ddot{u}_\theta \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{3n \times 1},$$

$$u_x, u_y, u_\theta, \dot{u}_x, \dot{u}_y, \dot{u}_\theta, \ddot{u}_x, \ddot{u}_y, \ddot{u}_\theta \in \mathcal{R}^{n \times 1},$$

con  $u_i$  un vector formado por los desplazamientos de todos los niveles en la dirección  $i$ ,  $\dot{u}_i$  un vector formado por las velocidades de desplazamiento de cada uno de los pisos en la dirección  $i$ , y  $\ddot{u}_i$  el vector de aceleración de cada uno de los pisos en la dirección  $i$ .

## Capítulo 3

# Identificación paramétrica

En este capítulo se describe cómo se realiza la identificación paramétrica, así como la forma de parametrizar el sistema para obtener un algoritmo adecuado de identificación paramétrica. Además se conocerá cuál es el número de parámetros desconocidos del modelo del sistema basado en la hipótesis de diafragma de piso rígido.

### 3.1. Introducción

Dada la estructura de un modelo, la respuesta de éste se puede determinar por los valores de ciertas constantes llamadas: *parámetros del modelo*. En algunas aplicaciones, estos parámetros pueden ser medidos o calculados usando leyes de la física, propiedades de materiales, etc. En otras aplicaciones, esto no es posible, por lo que los parámetros tienen que ser deducidos por observación de la respuesta del sistema a ciertas entradas. Si los parámetros son invariantes con el tiempo, el conocimiento de éstos es fácil y se realiza con técnicas de estimación que procesan la información medida del sistema. Este paso se puede hacer fuera de línea, es decir, cuando el procesamiento se realiza después de que se tomaron las mediciones. A estas técnicas se les conoce como: *estimación paramétrica fuera de línea*. Sin embargo, para sistemas donde los parámetros son variantes con el tiempo<sup>1</sup>, las técnicas apropiadas son aquellas que estiman los parámetros del modelo mediante el procesamiento de las señales de entrada/salida del sistema en el momento que éstas están siendo medidas.

---

<sup>1</sup>Aunque lentamente.

A estas técnicas se les conoce como: *estimación paramétrica en línea*.

### 3.2. Objetivo de la identificación paramétrica

La idea esencial de la estimación paramétrica en línea es la comparación de la respuesta del sistema  $Z(t)$ , con la salida de un modelo parametrizado  $\hat{Z}(\Phi(t), t)$ , cuya estructura es la misma que la del modelo del sistema. El vector de parámetros  $\Phi(t)$  se modifica constantemente hasta que el valor de  $\hat{Z}(\Phi(t), t)$  se aproxima al valor de  $Z(t)$  conforme el tiempo transcurre. Si esto sucede, implica que los valores del vector de parámetros  $\Phi(t)$  tienden hacia los valores del vector de parámetros  $\Phi_0$  del modelo del sistema.

Para realizar una identificación de parámetros, es necesario conocer los pasos que se tienen que realizar para lograr obtener resultados satisfactorios. El primer paso es elegir una apropiada parametrización del modelo del sistema. Esto es algo muy importante, pues de ello depende la eficiencia del algoritmo de estimación. En segundo lugar, elegir la ley de adaptación para generar el vector  $\Phi(t)$ . Esta ley es diseñada, usando consideraciones de estabilidad u optimización para minimizar la diferencia entre  $Z(t)$  y  $\hat{Z}(\Phi(t), t)$  con respecto a  $\Phi$  en cada instante de tiempo. Finalmente, se diseña la salida del sistema tal que las propiedades de la ley de adaptación impliquen que los valores de  $\Phi(t)$  se aproximen a los valores del vector de parámetros desconocidos del sistema,  $\Phi_0$ , cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Para conocer los parámetros del modelo, existen varios algoritmos de estimación en línea. Entre ellos se encuentra el *Diseño de Lyapunov estrictamente real positivo* [12], el cual desarrolla una ecuación diferencial que relaciona el error de estimación el error paramétrico mediante una función de transferencia estrictamente real positiva.

Otro esquema de adaptación es el *método del gradiente* [12]. Este método involucra una ecuación algebraica del error de estimación que origina la elección de una función de costo apropiada  $J(\Phi(t))$  que es convexa sobre el espacio de  $\Phi(t)$  en cada instante de tiempo  $t$ .

Un método antiguo, que data del siglo XVIII, usado para determinar la órbita de los planetas es el de *mínimos cuadrados*. Lo que propone este método es adaptar un modelo matemático a una secuencia de datos medidos para minimizar la suma de los cuadrados de la diferencia entre los datos medidos y los calculados.

### 3.3. Parametrización del modelo matemático

En este trabajo se hace uso del método de mínimos cuadrados aplicado al sistema (2.22), que representa el modelo en 3D de un edificio de  $n$  pisos. Este método es muy eficiente para conocer los parámetros del modelo, en especial los referentes al amortiguamiento del edificio.

Sea el sistema (3.1), y sean  $M, C, K \in \mathcal{R}^{q \times q}$  matrices constantes, donde los elementos de éstas son desconocidos. Estos elementos son los parámetros del modelo, los cuales se considera que son desconocidos

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = -M\ddot{U}_g. \quad (3.1)$$

Una forma de parametrizar el modelo es que los vectores  $\ddot{U}$  y  $\ddot{U}_g$  sean las señales medidas del sistema y suponiendo que con ellas se pueda conocer  $\dot{U}$  y  $U$ , bajo esta consideración, se obtiene:

$$\ddot{U} + \ddot{U}_g = -M^{-1}KU - M^{-1}C\dot{U}, \quad (3.2)$$

donde ahora los parámetros del modelo son los elementos de las matrices  $M^{-1}K$  y  $M^{-1}C$ .

#### 3.3.1. Mínimos cuadrados

La forma convencional de parametrizar el modelo para aplicar el algoritmo de mínimos cuadrados consiste en obtener un *modelo lineal paramétrico* de la forma

$$Z = \Upsilon \Phi, \quad (3.3)$$

donde  $Z = \ddot{U} + \ddot{U}_g$ .

En esta parametrización se separa al modelo en un *vector de parámetros*  $\Phi$  formado por los elementos de  $M^{-1}K$  y  $M^{-1}C$ , y en un *regresor*  $\Upsilon$ , que es una matriz formada por  $\dot{U}$  y  $U$ . El orden de cada uno de estos elementos está determinado por el número de parámetros desconocidos. Si se desea conocer todos los parámetros del sistema, Ec. (3.2), se tiene que  $M^{-1}K, M^{-1}C \in \mathcal{R}^{q \times q}$ , entonces, en el peor caso, el número total de parámetros desconocidos es  $2q^2$ .

El algoritmo de mínimos cuadrados que permite conocer los parámetros desconocidos del sistema (3.1), basado en la parametrización (3.3), está dado por las Ecs. (3.4) y (3.5)

$$\dot{P} = \delta P - P \frac{\Upsilon^T \Upsilon}{h^2} P, \quad (3.4)$$

$$\dot{\hat{\Phi}} = P \Upsilon^T \varepsilon, \quad (3.5)$$

donde:  $h^2 = 1 + \Upsilon \Upsilon^T \in \mathcal{R}$  es una norma y satisface  $\Upsilon/h \in \mathcal{L}_\infty$ ,  $P = P^T > 0$ ,  $P(0) > 0$ ,  $\varepsilon = \frac{Z - \hat{Z}}{h^2}$  es el error de estimación y  $\delta > 0 \in \mathcal{R}$  es el factor de olvido.

El orden de los elementos de las Ecs. (3.3), (3.4) y (3.5) cuando se desconocen todos los parámetros del sistema es:

$$Z \in \mathcal{R}^{q \times 1}, \quad \Upsilon \in \mathcal{R}^{q \times 2q^2}, \quad \Phi \in \mathcal{R}^{2q^2 \times 1}, \quad \varepsilon \in \mathcal{R}^{q \times 1},$$

$$P \in \mathcal{R}^{2q^2 \times 2q^2}. \quad (3.6)$$

Se puede observar el orden de la matriz  $P$ , Ec. (3.6), está relacionado en forma cuadrática con los GDL del sistema. Para el caso del modelo de un edificio en 3D el número de grados de libertad es de tres por piso, por lo que para un edificio de varios pisos el orden de  $P$  pued llegar a ser extremadamente grande.

El orden de la matriz  $P$  representa un problema para el tiempo de cálculo. Si el objetivo es realizar la identificación en línea, y si la dinámica del sistema es lo suficientemente rápida como para que el tiempo de procesamiento sobrepase el tiempo de captura de datos, entonces se presenta un problema de incompatibilidad en tiempos. Así, el algoritmo de estimación no sería capaz de obtener los parámetros desconocidos del sistema. Es por esto que se desea que el orden de la matriz  $P$  se el menor posible tal que se logre que el tiempo de procesamiento sea menor al tiempo de captura de datos.

Debido a lo anterior, se propone una parametrización del sistema donde, estrictamente, no se aplica el esquema de mínimos cuadrados estándar. Sin embargo, las Ecs. (3.4) y (3.5) se siguen usando, con algunas modificaciones. En esta nueva parametrización se tiene una *matriz de parámetros desconocidos*  $\Phi$ , y un *vector regresor*  $\Upsilon$ , es decir, la estructura de la parametrización es contraria a la convencional.

**Teorema 3.1** Sea el sistema (3.1), con  $K, C, M \in \mathcal{R}^{q \times q}$  y  $M$  una matriz no singular. Entonces sea la parametrización del sistema:

$$\begin{aligned} Z &= \ddot{U} + \ddot{U}_g \in \mathcal{R}^{q \times 1}, \\ \Phi &= \begin{bmatrix} M^{-1}K & M^{-1}C \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{q \times 2q}, \\ \Upsilon &= \begin{bmatrix} -U & -\dot{U} \end{bmatrix}^T \in \mathcal{R}^{2q \times 1}, \end{aligned}$$

donde  $\Phi$  es la matriz de parámetros reales, tal que

$$Z = \Phi \Upsilon. \quad (3.7)$$

Sea  $\hat{\Phi}$  la matriz de parámetros estimados del sistema (3.1) tal que se obtiene:

$$\hat{Z} = \hat{\Phi} \Upsilon. \quad (3.8)$$

Entonces el algoritmo de estimación formado por las Ecs. (3.9) y (3.10)

$$\dot{P} = \delta P - P \frac{\Upsilon \Upsilon^T}{h^2} P, \quad (3.9)$$

$$\dot{\hat{\Phi}}^T = P \Upsilon \varepsilon^T, \quad (3.10)$$

con  $P = P^T > 0 \in \mathcal{R}^{2q \times 2q}$ ,  $P(0) > 0$ ,  $\delta \geq 0 \in \mathcal{R}$ ,  $h^2 = 1 + \Upsilon \Upsilon^T \in \mathcal{R}$  satisfacen  $\Upsilon/h \in \mathcal{L}_\infty$ , garantizan que el error de estimación

$$\varepsilon = \frac{Z - \hat{Z}}{h^2} \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

*Demostración.* Sea  $\tilde{\Phi} \in \mathcal{R}^{q \times 2q}$  el error paramétrico y sea  $\tilde{\Phi}_r \in \mathcal{R}^{1 \times 2q}$  el vector de error paramétrico correspondiente al renglón  $r$  de la matriz  $\tilde{\Phi}$ , es decir,

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi} = \Phi - \hat{\Phi} &= \begin{bmatrix} \tilde{\phi}_{11} & \tilde{\phi}_{12} & \cdots & \tilde{\phi}_{12q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\phi}_{q1} & \tilde{\phi}_{q2} & \cdots & \tilde{\phi}_{q2q} \end{bmatrix}, \\ \tilde{\Phi}_r = \Phi_r - \hat{\Phi}_r &= \begin{bmatrix} \tilde{\phi}_{r1} & \tilde{\phi}_{r2} & \cdots & \tilde{\phi}_{r2q} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Sea  $\varepsilon \in \mathcal{R}^{q \times 1}$  el vector de error de estimación y sea  $\varepsilon_r \in \mathcal{R}$  el elemento  $r$  de  $\varepsilon$  correspondiente al renglón  $r$  de los sistemas (3.7) y (3.8), esto es

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{Z - \hat{Z}}{h^2} = \frac{\Phi \Upsilon - \hat{\Phi} \Upsilon}{h^2} = \frac{\tilde{\Phi} \Upsilon}{h^2}, \\ \varepsilon_r &= \frac{Z_r - \hat{Z}_r}{h^2} = \frac{\Phi_r \Upsilon - \hat{\Phi}_r \Upsilon}{h^2} = \frac{\tilde{\Phi}_r \Upsilon}{h^2}.\end{aligned}\quad (3.12)$$

Sea  $V$  la función candidata de Lyapunov

$$V = \frac{1}{h^2} \sum_{r=1}^q \tilde{\Phi}_r P^{-1} \tilde{\Phi}_r^T. \quad (3.13)$$

La derivada temporal de  $V$  es

$$\dot{V} = \frac{1}{h^2} \sum_{r=1}^q \dot{\tilde{\Phi}}_r P^{-1} \tilde{\Phi}_r^T + \frac{1}{h^2} \sum_{r=1}^q \tilde{\Phi}_r P^{-1} \dot{\tilde{\Phi}}_r^T - \frac{1}{h^2} \sum_{r=1}^q \tilde{\Phi}_r \dot{P}^{-1} \tilde{\Phi}_r^T. \quad (3.14)$$

Si en la Ec. (3.10) sólo se toma  $\dot{\tilde{\Phi}}_r$ , el renglón  $r$ , y se usan las Ecs. (3.11) y (3.12) se tiene

$$\dot{\tilde{\Phi}}_r^T = \dot{\tilde{\Phi}}_r^T - \dot{\tilde{\Phi}}_r^T = 0 - P \Upsilon \varepsilon_r^T = -\frac{1}{h^2} (P \Upsilon \Upsilon^T \tilde{\Phi}_r^T). \quad (3.15)$$

Se usa ahora la identidad

$$P P^{-1} = I \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} P P^{-1} = \dot{P} P^{-1} - P \dot{P}^{-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{P}^{-1} = P^{-1} \dot{P} P^{-1}.$$

Con la Ec. (3.9)

$$\begin{aligned}\dot{P}^{-1} &= P^{-1} \left( \delta P - P \frac{\Upsilon \Upsilon^T}{h^2} P \right) P^{-1}, \\ \dot{P}^{-1} &= \delta P^{-1} - \frac{\Upsilon \Upsilon^T}{h^2}.\end{aligned}\quad (3.16)$$

Sustituyendo las Ecs. (3.15) y (3.16) en la Ec. (3.14)

$$\begin{aligned}\dot{V} &= -\frac{1}{h^2} \sum_{r=1}^q \frac{1}{h^2} \tilde{\Phi}_r \Upsilon \Upsilon^T P P^{-1} \tilde{\Phi}_r^T - \frac{1}{h^2} \sum_{r=1}^q \frac{1}{h^2} \tilde{\Phi}_r P^{-1} P \Upsilon \Upsilon^T \tilde{\Phi}_r^T \\ &\quad - \frac{1}{h^2} \sum_{r=1}^q \tilde{\Phi}_r \left( \delta P^{-1} - \frac{\Upsilon \Upsilon^T}{h^2} \right) \tilde{\Phi}_r^T \\ &= -\frac{1}{h^4} \sum_{r=1}^q \tilde{\Phi}_r \Upsilon \Upsilon^T \tilde{\Phi}_r^T - \frac{1}{h^4} \sum_{r=1}^q \tilde{\Phi}_r \Upsilon \Upsilon^T \tilde{\Phi}_r^T - \frac{\delta}{h^2} \sum_{r=1}^q \tilde{\Phi}_r P^{-1} \tilde{\Phi}_r^T + \frac{1}{h^4} \sum_{r=1}^q \tilde{\Phi}_r \Upsilon \Upsilon^T \tilde{\Phi}_r^T \\ &= -\frac{1}{h^4} \sum_{r=1}^q \tilde{\Phi}_r \Upsilon \Upsilon^T \tilde{\Phi}_r^T - \frac{\delta}{h^2} \sum_{r=1}^q \tilde{\Phi}_r P^{-1} \tilde{\Phi}_r^T,\end{aligned}\quad (3.17)$$

nuevamente con las Ecs. (3.12) y (3.13)

$$\dot{V} = - \sum_{r=1}^q \varepsilon_r \varepsilon_r^T - \delta V, \quad (3.18)$$

$$\dot{V} = - \varepsilon^T \varepsilon - \delta V. \quad (3.19)$$

Para  $\delta > 0$ , se tiene que  $\dot{V} < 0$  lo que implica estabilidad asintótica. por lo que  $V \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , y si esto sucede, entonces  $\Phi_r \rightarrow 0$  y por lo tanto  $\varepsilon_r \rightarrow 0$  lo que implica que  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Cuando  $\delta = 0$ , se hace uso del siguiente Lema.

**Lema 3.1 (Lema de Barbalat para análisis de estabilidad)** [16, pag. 125]. *Si una función escalar  $V(t, x)$  satisface las siguientes condiciones:*

1.  $V(t, x)$  es acotada por debajo,
2.  $\dot{V}(t, x)$  es negativa semi-definida,
3.  $\dot{V}(t, x)$  es uniformemente continua en el tiempo,

entonces  $\dot{V}(t, x) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

De la Ec. (3.13) se tiene que  $V$  es acotada por debajo puesto que el mínimo valor que puede tomar es cero. De la Ec. (3.19),  $\dot{V}$  es negativa semi-definida si  $\delta = 0$ , y por último para demostrar que  $\dot{V}$  es uniformemente continua, se tiene que mostrar que  $\ddot{V}$  es acotada. Para ello, se obtiene la derivada temporal de la Ec. (3.18)

$$\ddot{V} = - \sum_{r=1}^q \dot{\varepsilon}_r \varepsilon_r^T - \sum_{r=1}^q \varepsilon_r \dot{\varepsilon}_r^T - \delta \dot{V}.$$

Si se hace uso de las Ecs. (3.12), (3.15) y (3.18), se tiene:

$$\begin{aligned}
\ddot{V} &= -\frac{1}{h^2} \sum_{r=1}^q \dot{\tilde{\Phi}}_r \Upsilon \varepsilon_r^T - \frac{1}{h^2} \sum_{r=1}^q \tilde{\Phi}_r \dot{\Upsilon} \varepsilon_r^T - \frac{1}{h^2} \sum_{r=1}^q \varepsilon_r^T \dot{\Upsilon}^T \tilde{\Phi}_r^T - \frac{1}{h^2} \sum_{r=1}^q \varepsilon_r^T \Upsilon^T \dot{\tilde{\Phi}}_r^T - \delta \dot{V} \\
&= \frac{1}{h^4} \sum_{r=1}^q \tilde{\Phi}_r \Upsilon \Upsilon^T P \Upsilon \varepsilon_r^T - \frac{1}{h^2} \sum_{r=1}^q \tilde{\Phi}_r \dot{\Upsilon} \varepsilon_r^T - \frac{1}{h^2} \sum_{r=1}^q \varepsilon_r^T \dot{\Upsilon}^T \tilde{\Phi}_r^T + \frac{1}{h^4} \sum_{r=1}^q \varepsilon_r^T \Upsilon^T P \Upsilon \Upsilon^T \tilde{\Phi}_r^T - \delta \dot{V} \\
&= \frac{1}{h^6} \sum_{r=1}^q \tilde{\Phi}_r \Upsilon \Upsilon^T P \Upsilon \Upsilon^T \tilde{\Phi}_r^T - \frac{1}{h^4} \sum_{r=1}^q \tilde{\Phi}_r \dot{\Upsilon} \Upsilon^T \tilde{\Phi}_r^T - \frac{1}{h^4} \sum_{r=1}^q \tilde{\Phi}_r \Upsilon \dot{\Upsilon}^T \tilde{\Phi}_r^T \\
&\quad + \frac{1}{h^6} \sum_{r=1}^q \tilde{\Phi}_r \Upsilon \Upsilon^T P \Upsilon \Upsilon^T \tilde{\Phi}_r^T - \delta \dot{V} \\
&= \frac{2}{h^6} \sum_{r=1}^q \tilde{\Phi}_r \Upsilon \Upsilon^T P \Upsilon \Upsilon^T \tilde{\Phi}_r^T - \frac{1}{h^4} \sum_{r=1}^q \tilde{\Phi}_r \dot{\Upsilon} \Upsilon^T \tilde{\Phi}_r^T - \frac{1}{h^4} \sum_{r=1}^q \tilde{\Phi}_r \Upsilon \dot{\Upsilon}^T \tilde{\Phi}_r^T - \delta \left( -\sum_{r=1}^q \varepsilon_r \varepsilon_r^T - \delta V \right) \\
&= \frac{2}{h^6} \sum_{r=1}^q \tilde{\Phi}_r \Upsilon \Upsilon^T P \Upsilon \Upsilon^T \tilde{\Phi}_r^T - \frac{1}{h^4} \sum_{r=1}^q \tilde{\Phi}_r \dot{\Upsilon} \Upsilon^T \tilde{\Phi}_r^T - \frac{1}{h^4} \sum_{r=1}^q \tilde{\Phi}_r \Upsilon \dot{\Upsilon}^T \tilde{\Phi}_r^T + \delta \sum_{r=1}^q \varepsilon_r \varepsilon_r^T + \delta^2 V \\
&= \frac{2}{h^6} \sum_{r=1}^q \tilde{\Phi}_r \Upsilon \Upsilon^T P \Upsilon \Upsilon^T \tilde{\Phi}_r^T - \frac{1}{h^4} \sum_{r=1}^q \tilde{\Phi}_r \dot{\Upsilon} \Upsilon^T \tilde{\Phi}_r^T - \frac{1}{h^4} \sum_{r=1}^q \tilde{\Phi}_r \Upsilon \dot{\Upsilon}^T \tilde{\Phi}_r^T \\
&\quad + \frac{\delta}{h^4} \sum_{r=1}^q \tilde{\Phi}_r \Upsilon \Upsilon^T \tilde{\Phi}_r^T + \delta^2 V. \tag{3.20}
\end{aligned}$$

El término  $\dot{\Upsilon}$  es la derivada temporal de  $\Upsilon$ , y está dado por:

$$\dot{\Upsilon} = \begin{bmatrix} -\dot{U} & -\ddot{U} \end{bmatrix}^T \in \mathcal{R}^{2q \times 1},$$

donde las señales  $\dot{U}$  y  $\ddot{U}$  son señales acotadas, y por lo tanto  $\dot{\Upsilon}$  es acotada.

La Ec. (3.20) está formada por señales acotadas:  $\tilde{\Phi}_r$ ,  $\Upsilon$  y  $P$ , por tanto, la función de Lyapunov  $V$  también es acotada.

Por lo tanto  $V$  cumple las condiciones del lema 3.1, lo que implica que:

$$\dot{V} = -\varepsilon^T \varepsilon \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad t \rightarrow \infty.$$

De acuerdo con lo anterior, la única posibilidad de que  $\dot{V} \rightarrow 0$  es que  $\varepsilon \rightarrow 0$ , con lo cual se garantiza que las señales de salida de la planta estimada  $\hat{Z}$ , son iguales a las señales de salida de la planta real  $Z$ .

□

### 3.3.2. Parametrización del modelo del edificio en 3D

Para el sistema en la Ec. (2.22), que representa el modelo en 3D de un edificio de  $n$  pisos, la parametrización de acuerdo a la forma convencional de mínimos cuadrados, origina que el orden de la matriz  $P$  sea demasiado grande.

A continuación, se muestra el orden de los elementos de las Ecs. (3.3), (3.4) y (3.5) para el modelo en 3D, Ec.(3.1), de un edificio de  $n$  pisos donde  $M^{-1}K, M^{-1}C \in \mathcal{R}^{3n \times 3n}$ ,

$$Z \in \mathcal{R}^{3n \times 1}, \quad \Upsilon \in \mathcal{R}^{3n \times 18n^2}, \quad \Phi \in \mathcal{R}^{18n^2 \times 1}, \quad \varepsilon \in \mathcal{R}^{3n \times 1},$$

$$P \in \mathcal{R}^{18n^2 \times 18n^2}. \quad (3.21)$$

Ahora se muestra el orden de los elementos que se forman con la parametrización de la Ec. (3.7) del mismo sistema (3.1), así como el orden de los elementos del algoritmo de estimación (3.9) - (3.10)

$$Z \in \mathcal{R}^{3n \times 1}, \quad \Upsilon \in \mathcal{R}^{6n \times 1}, \quad \Phi \in \mathcal{R}^{3n \times 6n}, \quad \varepsilon \in \mathcal{R}^{3n \times 1},$$

$$P \in \mathcal{R}^{6n \times 6n}. \quad (3.22)$$

Nótese que ahora el orden de la matriz  $P$  en la Ec. (3.22) es menor que el orden de la misma en la Ec. (3.21), que fue generada con la parametrización convencional de mínimos cuadrados. Esta reducción sustancial del orden de la matriz  $P$  es muy conveniente, pues el tiempo de procesamiento igualmente se reduce. En ambos casos, se garantiza que se van estimar todos y cada uno de los parámetros del sistema.

Para el modelo del edificio,  $\Phi$  está formada por las matrices de parámetros y el *regresor*  $\Upsilon$  está formado por las señales de velocidad y desplazamiento. Éstas se obtienen a partir de las mediciones de los acelerómetros,  $Z = \ddot{U} + \ddot{U}_g$ , que se encuentran en el suelo donde se localiza el edificio y en las diferentes partes del mismo.

La matriz  $P = P^T \geq 0$  se conoce como *matriz de covariancia* y es un indicador de la evolución de los parámetros misma que depende en forma importante de las condiciones iniciales de  $P$ .

Con el algoritmo de estimación (3.9) - (3.10) se conocen todos los elementos de  $M^{-1}K$  y  $M^{-1}C$ . No obstante, estas matrices para el caso de un modelo de un edificio en 3D, aún mantienen la estructura de las Ecs. (2.19) y (2.20), respectivamente. Como se puede observar estas matrices están formadas por nueve elementos matriciales tridiagonales, es decir, sólo tienen elementos en la diagonal principal y en las diagonales adyacentes a ella, y los elementos restantes son iguales a cero. Debido a esto el número real de parámetros a identificar en el sistema (3.1), bajo la hipótesis de diafragma de piso rígido, es menor que  $2q^2$ .

### 3.4. Parámetros desconocidos

El objetivo de conocer con precisión el número de parámetros desconocidos del sistema, es evitar la sobreparametrización del modelo, pues esta implica que el orden de la matriz  $P$  de la Ec. (3.9) sea más grande de lo necesario. Esto ocasiona que el algoritmo de estimación no sea eficiente en términos de tiempo de procesamiento. Como se mencionó al inicio de este Capítulo, en este sistema es importante que el tiempo de procesamiento sea menor que el de captura de datos.

De la Ec. (2.22) se tiene que  $K = K^T > 0$  y  $C = C^T \geq 0$ . Para evitar que el sistema esté sobreparametrizado es, necesario conocer el número exacto de parámetros diferentes de cero y que además sean diferentes entre sí. Con ello se evita identificar parámetros duplicados. Conocido dicho número de parámetros, entonces se puede definir el orden mínimo de la matriz  $P$ , Ec. (3.9).

De la Ec. (3.2) se toma para efectos de análisis la matriz de parámetros  $M^{-1}K$ .

$$M^{-1}K = \begin{bmatrix} m_t & 0 & 0 \\ 0 & m_t & 0 \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{x\theta} \\ k_{xy} & k_{yy} & k_{y\theta} \\ k_{x\theta} & k_{y\theta} & k_{\theta\theta} \end{bmatrix},$$

$$M^{-1}K = \begin{bmatrix} m_t^{-1}k_{xx} & m_t^{-1}k_{xy} & m_t^{-1}k_{x\theta} \\ m_t^{-1}k_{xy} & m_t^{-1}k_{yy} & m_t^{-1}k_{y\theta} \\ I_m^{-1}k_{x\theta} & I_m^{-1}k_{y\theta} & I_m^{-1}k_{\theta\theta} \end{bmatrix}. \quad (3.23)$$

Ahora, si se toma sólo el elemento  $m_t^{-1} k_{xx}$  de la Ec (3.23) y un edificio de 4 niveles se tiene que este elemento tiene la siguiente estructura:

$$m_t^{-1} k_{xx} = \begin{bmatrix} \frac{k_{xx11}}{m_1} & \frac{k_{xx12}}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{k_{xx12}}{m_2} & \frac{k_{xx22}}{m_2} & \frac{k_{xx23}}{m_2} & 0 \\ 0 & \frac{k_{xx23}}{m_3} & \frac{k_{xx33}}{m_3} & \frac{k_{xx34}}{m_3} \\ 0 & 0 & \frac{k_{xx34}}{m_4} & \frac{k_{xx44}}{m_4} \end{bmatrix}.$$

En esta última ecuación se puede observar que el número de parámetros diferentes entre sí es igual a  $3(4) - 2$ , en general es igual a  $3n - 2$ . Si se toma como referencia a la Ec. (2.6) se observa que:

$$k_{xx22} = -(k_{xx12} + k_{xx23}), \quad k_{xx33} = -(k_{xx23} + k_{xx34}), \quad k_{xx44} = -k_{xx34}.$$

Por lo que se tiene

$$m_t^{-1} k_{xx} = \begin{bmatrix} \frac{k_{xx11}}{m_1} & \frac{k_{xx12}}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{k_{xx12}}{m_2} & \frac{k_{xx22}}{m_2} & \frac{k_{xx22} + k_{xx12}}{m_2} & 0 \\ 0 & \frac{k_{xx23}}{m_3} & \frac{k_{xx33}}{m_3} & \frac{k_{xx33} + k_{xx23}}{m_3} \\ 0 & 0 & \frac{-k_{xx44}}{m_4} & \frac{k_{xx44}}{m_4} \end{bmatrix}.$$

El número de parámetros linealmente independientes (LI) del elemento  $m_t^{-1} k_{xx}$  de la Ec. (3.23) es igual a  $2n - 1$ , el mismo número que tiene la matriz  $K_d$  en la Ec. (2.6). Así, se concluye que el número de parámetros LI para cada uno de los elementos matriciales de la matriz (3.23) es  $2n - 1$ .

Ahora, para un edificio cuya planta es rectangular, Fig 3.1, y de la Ec. (2.21) se tiene que el momento polar de inercia  $I_m$  es:

$$I_m = \left(\frac{m_t}{12}\right)(p^2 + q^2) = \left(\frac{p^2 + q^2}{12}\right)(m_t) = \lambda m_t,$$

donde:

$$\lambda = \left(\frac{p^2 + q^2}{12}\right) \quad \text{es una cantidad conocida.}$$

Por lo tanto la Ec. (3.23) queda de la siguiente forma:

$$M^{-1} K = \begin{bmatrix} m_t^{-1} k_{xx} & m_t^{-1} k_{xy} & m_t^{-1} k_{x\theta} \\ m_t^{-1} k_{xy} & m_t^{-1} k_{yy} & m_t^{-1} k_{y\theta} \\ \frac{m_t^{-1}}{\lambda} k_{x\theta} & \frac{m_t^{-1}}{\lambda} k_{y\theta} & \frac{m_t^{-1}}{\lambda} k_{\theta\theta} \end{bmatrix},$$

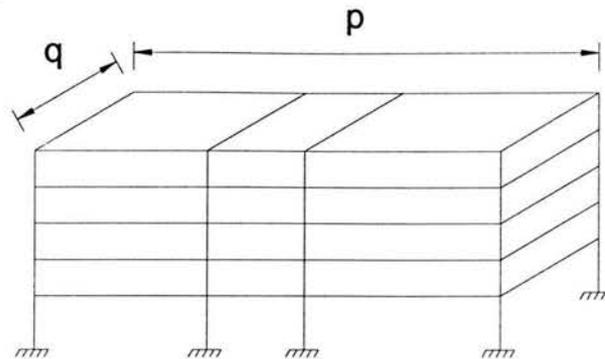


Figura 3.1: Vista en isométrico de un edificio rectangular.

$$M^{-1}K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_t^{-1}k_{xx} & m_t^{-1}k_{xy} & m_t^{-1}k_{x\theta} \\ m_t^{-1}k_{xy} & m_t^{-1}k_{yy} & m_t^{-1}k_{y\theta} \\ m_t^{-1}k_{x\theta} & m_t^{-1}k_{y\theta} & m_t^{-1}k_{\theta\theta} \end{bmatrix}. \quad (3.24)$$

La Ec. (3.24) está formada por una matriz diagonal conocida y una matriz simétrica, por lo que el número de elementos matriciales LI es de ésta última es de 6, y si cada uno de dichos elementos tiene a su vez  $2n - 1$  elementos LI, entonces el número total de elementos LI de la matriz  $M^{-1}K$ , Ec. (3.24), es  $12n - 6$ .

De la Ec. (3.2) se observa que las matrices de parámetros desconocidos son dos:  $M^{-1}K$  y  $M^{-1}C$ , y que las dos matrices tienen la misma estructura. Por ello, el número total de parámetros desconocidos ( $p_d$ ) para el modelo en 3D de un edificio considerando la hipótesis de diagrama de piso rígido es:

$$p_d = 24n - 12, \quad (3.25)$$

donde  $n$  es el número de pisos del edificio.

Con este número de parámetros desconocidos, el orden de la matriz  $P$  de la Ec. (3.9) se puede reducir.

Hay que notar que se se hubiera modelado un marco plano con la hipótesis de *viga flexible*, la matriz de rigidez  $K_d$  y la matriz de amortiguamiento  $C_d$  ya no serían matrices tridiagonales y ahora tendrían elementos diferentes de cero fuera de las tres diagonales

principales de tal forma que ya no sería posible definir una estructura para estas matrices. Es por esto que para el modelo de un edificio que fuera desarrollado bajo la hipótesis de viga flexible, es conveniente tener un algoritmo de estimación de parámetros con el cual se pueda conocer todos y cada uno de los parámetros del modelo. En este sentido, el algoritmo de estimación (3.9) - (3.10) es adecuado para la estimación de parámetros para un modelo en 3D desarrollado, ya sea con la hipótesis de diafragma de piso rígido o con la hipótesis de viga flexible.

## Capítulo 4

# Simulación numérica y resultados

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos mediante simulación numérica de la identificación de parámetros realizada para un edificio de tres pisos. La simulación numérica se realiza en SIMULINK bajo la plataforma de MATLAB.

### 4.1. Sistema real

Para efectos de simulación, se propone el modelo de un edificio de tres pisos formado por 4 marcos, Fig. 4.1. Los valores de masa, amortiguamiento y rigidez concentrados son similares a los usados para simulación de estimación de parámetros de un modelo de marco plano de tres pisos [3, pag. 35]. Estos valores pertenecen a un modelo a escala, no obstante funcionan para realizar simulaciones y con ello validar el algoritmo de estimación planteado. Los valores de los parámetros reales del sistema se muestran en la tabla 4.1. En el apéndice A se muestran las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez en 3D.

#### 4.1.1. Condiciones iniciales

Para el algoritmo de estimación (3.9) - (3.10) es necesario tener condiciones iniciales. Para la matriz  $P$  se tiene que  $P_0 > 0$ , entonces se buscan las condiciones iniciales con las cuales el algoritmo funcione satisfactoriamente. Respecto a la matriz de parámetros  $\hat{\Phi}$ , se considera que no se conoce absolutamente nada de ellos, por lo que  $\hat{\Phi}(0) = 0$ .

Cuadro 4.1: Valores de parámetros reales del sistema.

parámetros	piso	marco			
		1	2	3	4
m [kg]	1	98,3	94,5	95,3	97,8
	2	97,5	95,8	94,6	98,4
	3	92,5	94,0	96,3	94,9
c $\left[\frac{Ns}{m}\right]$	1	120	119	117	122
	2	124	123	125	127
	3	125	123	123	124
k $\left[\frac{N}{m}\right] (10^5)$	1	5,16	4,84	6,01	6,04
	2	4,48	4,99	5,87	5,23
	3	5,89	5,78	5,46	5,12

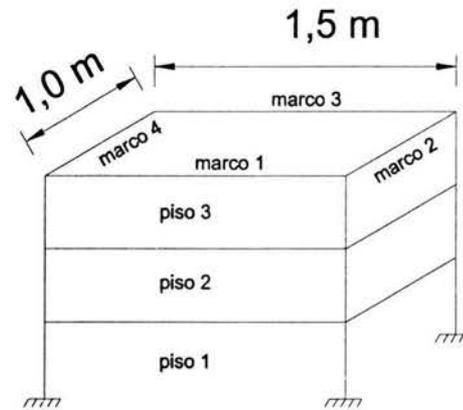


Figura 4.1: Edificio propuesto para efectos de simulación.

La matriz de condiciones iniciales de la matriz de covariancia  $P$  está formada, básicamente, por dos valores que corresponden los parámetros de rigidez, y amortiguamiento. Estos valores iniciales son obtenidos por experimentación numérica, el objetivo era lograr convergencia paramétrica en el menor tiempo posible. El hecho de que se considere el mismo valor inicial para todos los parámetros relacionados con la rigidez, es porque dichos parámetros tienen el mismo orden de magnitud. Lo mismo ocurre con los parámetros relacionados con el amortiguamiento. Si el orden de magnitud de los parámetros fuera distinto para cada uno de ellos, entonces  $P(0)$  tendría un valor diferente correspondiente a cada parámetro.

La Ec. (4.1) muestra cómo está formada la matriz de parámetros  $\Phi$ . Implica que si se

considera sólo al *vector de parámetros*  $\Phi_r$ , para un edificio de tres pisos, los primeros 9 elementos son los correspondientes a  $M^{-1}K$  y los últimos 9 corresponden a  $M^{-1}C$ , debido a que  $M^{-1}K, M^{-1}C \in \mathcal{R}^{9 \times 9}$ . Entonces, la matriz de condiciones iniciales de  $P$  está dada por la Ec. (4.2).

$$\Phi = \begin{bmatrix} M^{-1}K & M^{-1}C \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{9 \times 18}, \quad (4.1)$$

$$\Phi_r = \begin{bmatrix} \frac{k_{r1}}{m_r} & \frac{k_{r2}}{m_r} & \dots & \frac{k_{r9}}{m_r} & \frac{c_{r1}}{m_r} & \frac{c_{r2}}{m_r} & \dots & \frac{c_{r9}}{m_r} \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{1 \times 18},$$

$$P(0) = \begin{bmatrix} 10^{19} I_9 & 0_9 \\ 0_9 & 10^{14} I_9 \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{18 \times 18}, \quad (4.2)$$

donde  $I_9$  es la matriz identidad que  $\in \mathcal{R}^{9 \times 9}$ , y  $0_9$  es una matriz de ceros que  $\in \mathcal{R}^{9 \times 9}$ . Es importante hacer notar que la matriz  $P(0)$  se tomó siempre *diagonal*.

El factor de olvido  $\delta$  es  $> 0$  ayuda a que se tenga estabilidad asintótica en la convergencia paramétrica, Ec. (3.19). Sin embargo, este valor introduce un término inestable en la Ec. (3.9), por lo que el valor de  $\delta$  debe de ser lo suficientemente pequeño para no inducir inestabilidad en el algoritmo de estimación (3.9) - (3.10). Debido a lo anterior es importante tener un factor de olvido muy pequeño, o en su defecto que éste sea cero.

Para el modelo propuesto se usa un  $\delta = 0,01$ ; con el cual se tiene una estabilidad asintótica muy lenta, pero no provoca inestabilidad en el algoritmo (3.9) - (3.10).

## 4.2. Simulación

Para que el algoritmo de estimación sea capaz de identificar todos los parámetros, es necesario que se aplique una excitación al sistema estructural y con ello medir la respuesta del mismo. En este caso, el sistema fue excitado con el sismo ocurrido en la Ciudad de México el día 19 de septiembre de 1985. Los acelerogramas de dicho sismo se muestran en las Figs. 4.2, 4.3 para dos direcciones ortogonales entre sí. Sin embargo, de acuerdo a los resultados obtenidos, se tiene convergencia para algunos parámetros en menos de un segundo, por lo que sólo se muestran los resultados de simulación para los primeros 4 segundos.

La fuerza sísmica se aplica en dos direcciones ortogonales, horizontales al nivel del suelo, además, se aplica en el centro de masa del diafragma del primer del edificio y esto es por

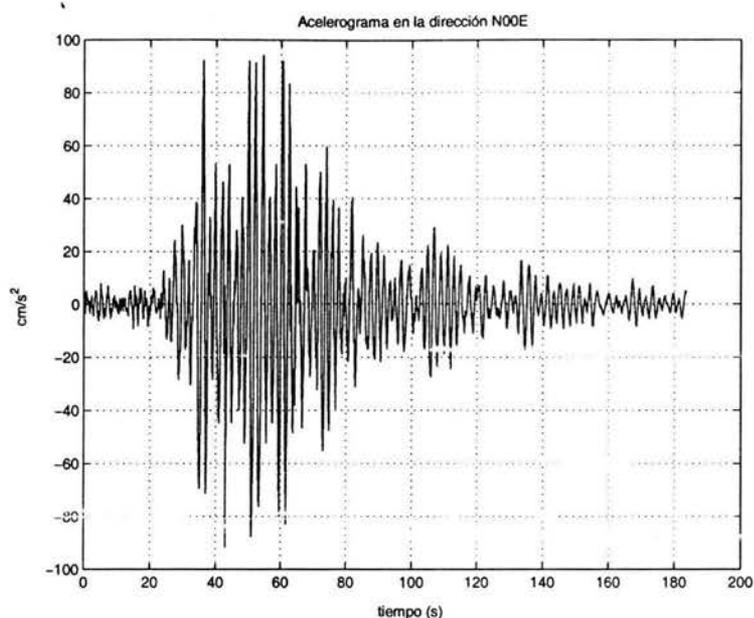


Figura 4.2: Acelerograma del sismo en la dirección N00E.

la hipótesis de *diafragma de piso rígido* que se adoptó para generar el modelo del sistema estructural. En la Fig. 4.4 se muestra la dirección de aplicación de las fuerzas sísmicas al edificio propuesto.

La forma de comprobar que, efectivamente, el algoritmo de estimación (3.9) - (3.10) funciona satisfactoriamente, es observar el comportamiento de la norma dos del error de estimación  $\epsilon$ :  $\|\epsilon\|_2$ . En la Fig. 4.5 se aprecia cómo  $\epsilon$  disminuye conforme transcurre el tiempo, lo cual indica que se tiene estabilidad en la estimación paramétrica. En realidad se tiene estabilidad asintótica porque  $\delta$  es diferente de cero. Sin embargo, ésta es muy lenta debido al pequeño valor de  $\delta$ . Con un valor de  $\delta$  igual a cero, prácticamente no se observa cambio alguno en el comportamiento de  $\|\epsilon\|_2$ .

En la Fig. 4.6 se observa el comportamiento de la aceleración real y la estimada del primer piso. Debido a que se tiene una buena convergencia paramétrica antes de 1 segundo, la señal de aceleración estimada es prácticamente igual a la aceleración real y es por ello que no se aprecia la diferencia entre ambas en la gráfica. En la Fig. 4.7 se muestra el inicio de la simulación para la aceleración rotacional. En ella se observa que cuando el sismo

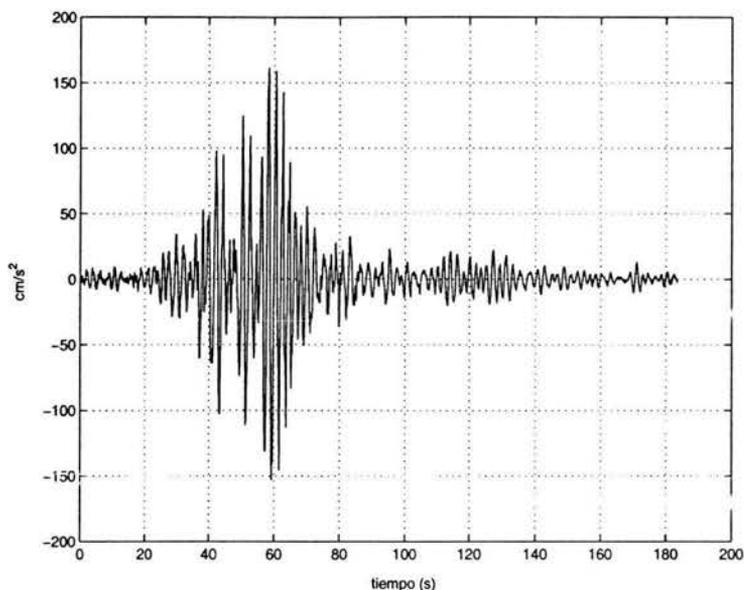


Figura 4.3: Acelerograma del sismo en la dirección N90E.

excita al edificio y el algoritmo de estimación comienza a trabajar, entre la aceleración real y la estimada existe una diferencia, ésta se da porque la condición inicial de la matriz de parámetros  $\Phi$  es igual a cero. Sin embargo, transcurridos algunas decimas de segundo éstas son prácticamente iguales, debido a que  $\|\varepsilon\|_2$  tiende a cero.

Para mostrar cómo es la convergencia paramétrica, en las Fig. 4.8 y 4.9, se observa el comportamiento de los elementos (1,1) de las matrices  $M^{-1}K, M^{-1}C$ , respectivamente. Estos parámetros corresponden a la rigidez del piso uno en la dirección  $x$  debida a los desplazamientos en  $x$ , y al amortiguamiento en la misma dirección  $x$  debido a la velocidad en  $x$ . Nótese que en ellas se tiene convergencia en menos de un segundo, algo muy deseable cuando se está realizando identificación paramétrica en línea, y más para un sistema como el estudiado en el presente trabajo, pues su dinámica es rápida.

En las Figs. 4.10 y 4.11 se muestra el comportamiento de los parámetros correspondientes a la ubicación (4,4) de las matrices  $M^{-1}K, M^{-1}C$ . Estos parámetros corresponden a la rigidez del piso uno en la dirección  $y$  debida a los desplazamientos en  $y$ , y al amortiguamiento en la misma dirección  $y$  debido a la velocidad en  $y$ .

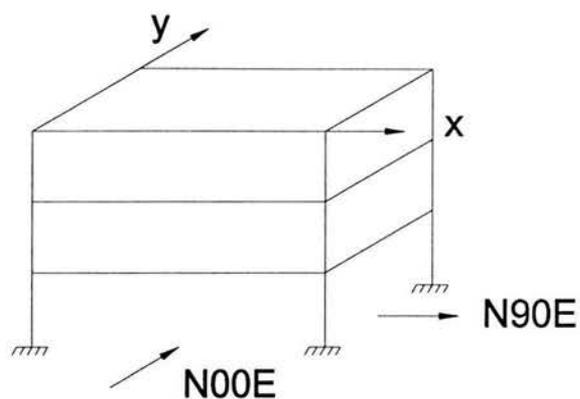


Figura 4.4: Aplicación de la fuerza sísmica a un edificio.

Finalmente, en las Figs. 4.12 y 4.13 se observa cómo es la convergencia de los parámetros que corresponden a la ubicación (7,7) de las matrices  $M^{-1}K$ ,  $M^{-1}C$ . Estos parámetros representan la rigidez del primer piso en la dirección  $\theta$  debida a la rotación del diafragma, y el amortiguamiento en la dirección  $\theta$  debida a la velocidad de rotación del diafragma.

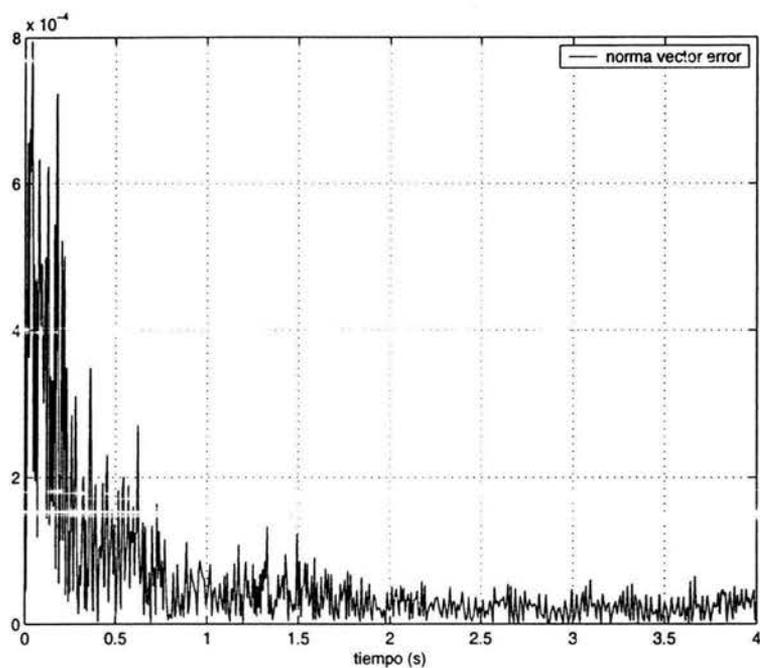


Figura 4.5: Norma del error de estimación:  $|\varepsilon|_2$ .

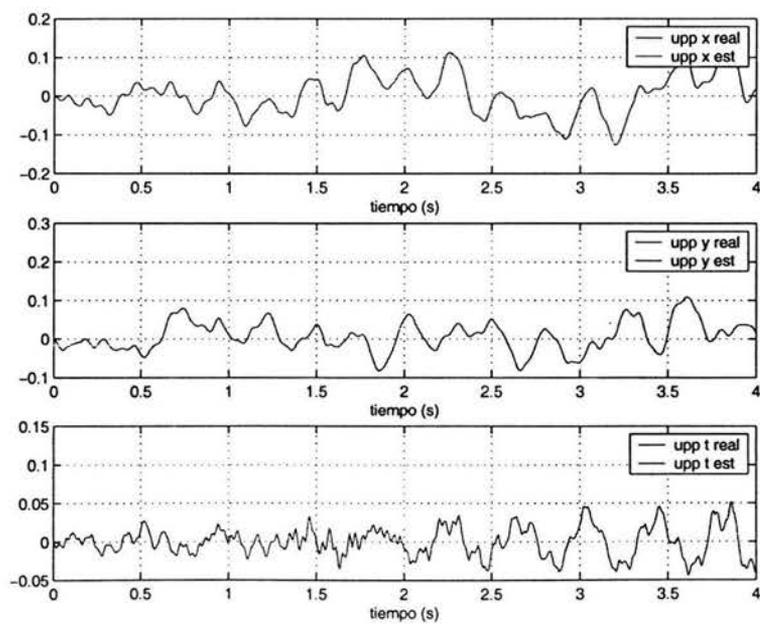


Figura 4.6: Comportamiento de aceleración real - estimada en el primer piso.

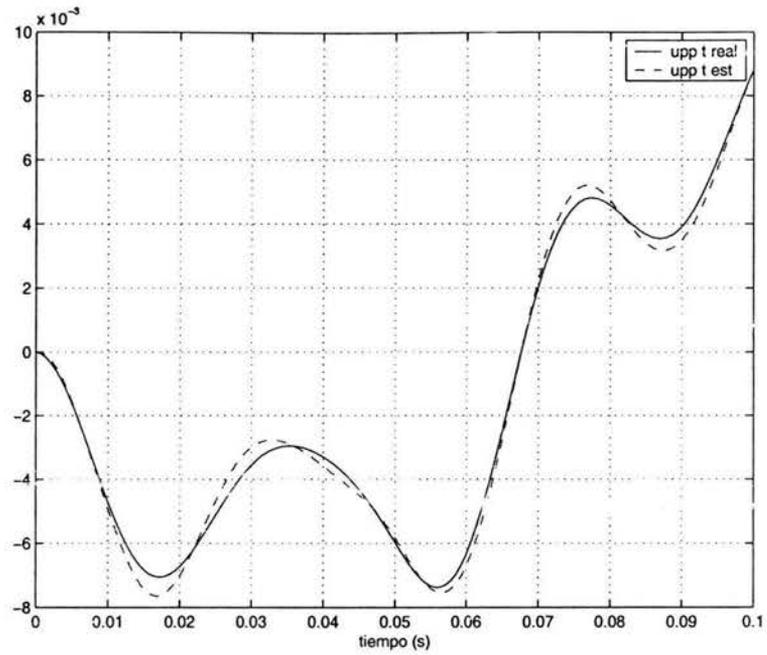


Figura 4.7: Detalle del comportamiento de aceleración rotacional real - estimada en el primer piso.

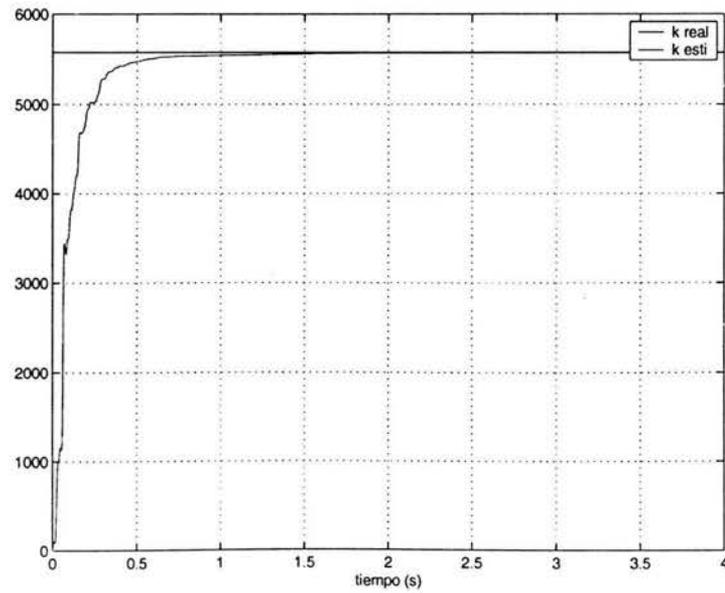


Figura 4.8: Convergencia del parámetro  $(M^{-1}K)_{11}$ .

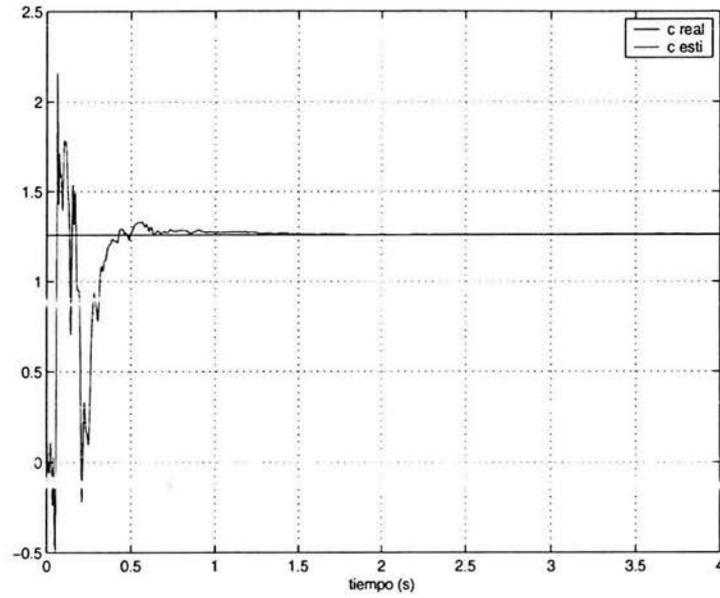


Figura 4.9: Convergencia del parámetro  $(M^{-1}C)_{11}$ .

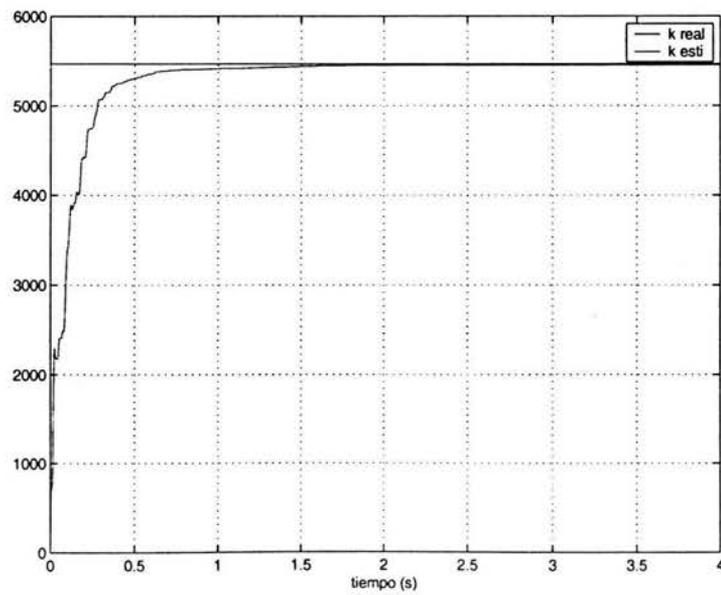


Figura 4.10: Convergencia del parámetro  $(M^{-1}K)_{44}$ .

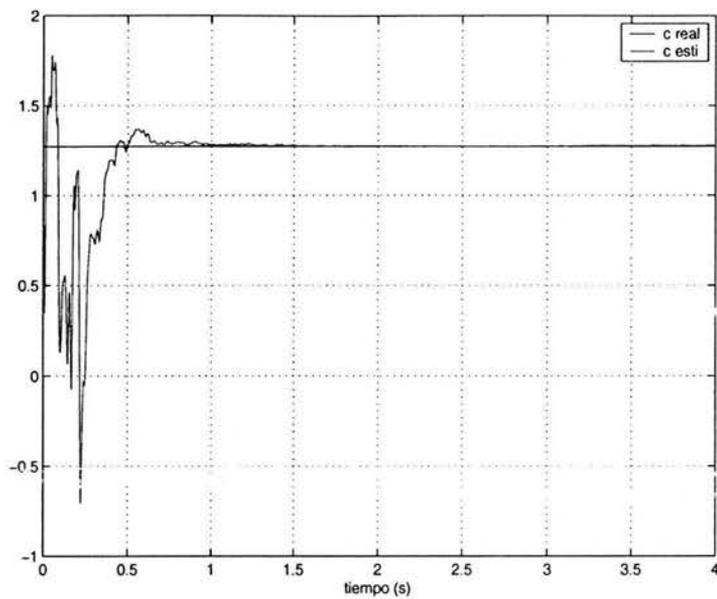


Figura 4.11: Convergencia del parámetro  $(M^{-1}C)_{44}$ .

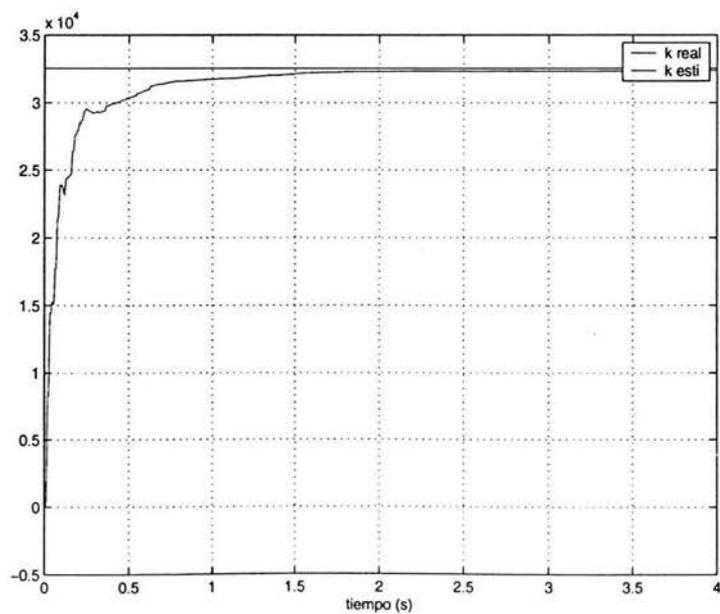


Figura 4.12: Convergencia del parámetro  $(M^{-1}K)_{77}$ .

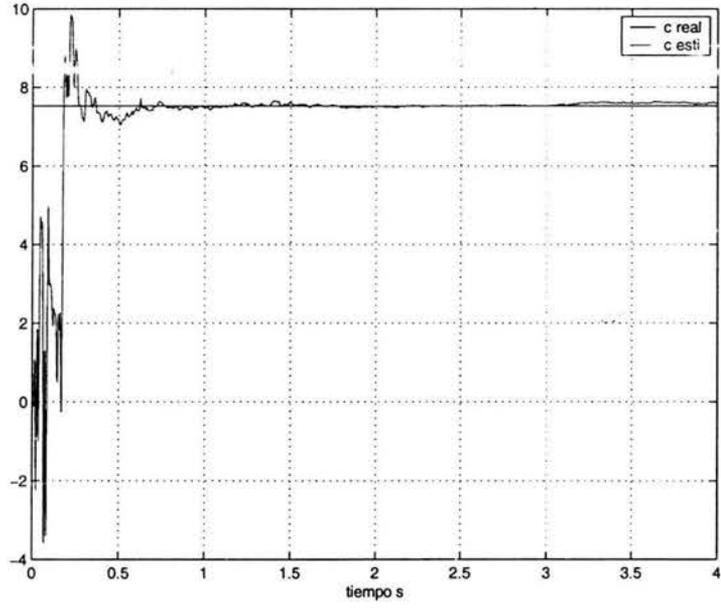


Figura 4.13: Convergencia del parámetro  $(M^{-1}C)_{77}$ .

## Capítulo 5

# Conclusiones

Los resultados obtenidos con el algoritmo de identificación paramétrica (3.9) - (3.10) son satisfactorios. De acuerdo a la  $\|\varepsilon\|_2$  se observa que la convergencia paramétrica es muy buena, por lo que la señal  $\hat{Z} \rightarrow Z$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Se demostró que la nueva parametrización del sistema, Ec. (3.7), donde se genera una *matriz de parámetros* es una muy buena opción para sistemas cuyos modelos tienen la estructura del modelo (3.1). Con esta parametrización se logra que en el algoritmo de identificación de mínimos cuadrados, modificado, se obtiene una matriz  $P$  de menor orden que la generada por la parametrización convencional, Ec. (3.3), donde el orden de la matriz  $P$  está relacionado en forma cuadrática con el número de parámetros a estimar, es decir, el número de elementos de las matrices  $M^{-1}K$  y  $M^{-1}C$ .

La parametrización (3.7) se puede hacer porque se explota la cualidad de que en la parametrización convencional la matriz del regresor tiene una estructura diagonal y los elementos matriciales de esta matriz son iguales. Lo que se plantea es eliminar todos los ceros de ese regresor debidos a la estructura diagonal, y formar el regresor como un vector y no como una matriz. El regresor sirve para todos los parámetros a identificar. Con esto se logra que el orden de la matriz  $P$ , ahora esté relacionado con el número de mediciones que forman al regresor  $\Upsilon$  y no con el número de parámetros. Esto representa una gran ventaja, porque generalmente las mediciones que se tienen en un sistema son menores que el número de parámetros.

Como se mencionó en el capítulo 3, el tiempo de procesamiento es muy importante cuando se quiere hacer identificación paramétrica en tiempo real. Con el algoritmo (3.9) - (3.10), se pueden tener elementos matriciales de menor orden, y para ello no sea necesario tener una computadora muy potente para resolver las ecuaciones. Esto es muy importante porque así es posible usar una computadora comercial para la identificación de parámetros de un edificio de varios pisos y no tener que emplear una computadora especializada, con el consecuente aumento del costo de implementación del sistema de control. Además, el algoritmo presentado es capaz de identificar todos y cada uno de los parámetros del modelo. Esto resulta muy conveniente cuando se tiene un modelo que considera vigas flexibles, el cual es más exacto, pero tiene matrices de rigidez y amortiguamiento que ya no son tridiagonales, es decir, tienen elementos diferentes de cero fuera de las tres diagonales principales, y es necesario identificarlos todos.

# Bibliografía

- [1] J. J. Connor and B.S.A. Klink. *Introduction to motion based design*. Southampton, United Kingdom: Computational Mechanics, 1996.
- [2] Guangquiang Yang, *Large-sacle magnetorheological fluid damper for mitigation: modeling, testing and control*. Tesis de doctorado, Departament of Civil Engineering and Geological Sciences Notre Dame, Indiana, Diciembre 2001, 259 pp.
- [3] René E. Jiménez Fabián, *Control semiactivo de estructuras civiles usando amortiguadores magneto-reológicos*. Tesis de maestría, Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería, UNAM. Mayo 2002, 77 pp.
- [4] L. Alvarez-Icaza y R. Jiménez. *Observador adaptable para el control de estructuras civiles*. Memorias del Congreso Nacional de Control Automático 2003. ISBN: 970-32-1173-9. pp. 360-365. 2003.
- [5] L. Alvarez y R. Carrera. *Control de estructuras civiles con modulación en frecuencia*. Memorias del Congreso Nacional de Control Automático 2003. ISBN: 970-32-1173-9. pp. 372-377. 2003.
- [6] S. J. Dyke, B. F. Spencer Jr., M. K. Sain y J. D. Carlson, *Seismic response reduction using magnetorheological dampers*, In proceedings of the 1996 IFAC World Congress, San Francisco, volume L, pages 145-150, 1996.
- [7] Enrique Bazán Zurita y Roberto Meli Piralla, *Manual de diseño sísmico de edificios*, Edit. Limusa. 1985.
- [8] Roberto Meli Piralla, *Diseño estructural*, Edit. Limusa, 1985.

- [9] Ramsés Rodríguez Rocha y Luciana Barroso, *Método de cocientes de valores de rigidez entre valores de masa para la obtención del estado no dañado de una estructura y detección de daño de la estructura de referencia*, XVI Congreso Nacional de Ingeniería Sísmica, Guanajuato, México, noviembre 2003.
- [10] Anil K. Chopra, *Dynamics of structures, theory and applications to Earthquake Engineering*, Edit. Prentice Hall, New Jersey, 2a ed. 2001.
- [11] Mario Paz, *Structural Dynamics: theory and computation*, Edit. International Thomson, 4a ed., 1997.
- [12] Petros A. Ioannou y Jing Sun, *Robust adaptive control*, Edit. PTR Prentice Hall, 1996.
- [13] Karl J. Åström y Björn Wittenmark, *Adaptive control*, Edit. Addison-Wesley, Massachusetts, 2a ed., 1995.
- [14] Shankar Sastry y Marc Bodson, *Adaptive control: stability, convergence and robustness*, Edit. Prentice Hall, New Jersey, 1989.
- [15] Hassan K. Khalil, *Nonlinear control*, Edit. PTR Prentice Hall, 2a. ed., 1996.
- [16] Jean-Jacques E. Slotine y Weiping Li, *Applied nonlinear control*, Ed. Prentice Hall, New Jersey, 1991.
- [17] Wai-Fah Chen y Charles Scawthorn, *Earthquake Engineering Handbook*, Edit CRC, Florida, 2003.
- [18] Alberto Sarria Molina, *Ingeniería Sísmica*, Edit. Universidad de los Andes, Colombia, 1990.

## Apéndice A

# Matrices de rigidez, amortiguamiento e inercia usadas en la simulación

Las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez en 3D del edificio, formadas con los valores de la tabla 4.1 se muestran a continuación, respectivamente:

$$M = \begin{bmatrix} 385,9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 386,3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 377,7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 385,9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 386,3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 377,7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 104,51 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 104,62 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 102,29 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

$$C = \begin{bmatrix} 486 & -249 & 0 & 0 & 0 & 0 & -242 & 125 & 0 \\ -249 & 502 & -253 & 0 & 0 & 0 & 125 & -253 & 128 \\ 0 & -253 & 253 & 0 & 0 & 0 & 0 & 128 & -128 \\ 0 & 0 & 0 & 491 & -250 & 0 & 363 & -184,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -250 & 497 & -247 & -184,5 & 369 & -184,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -247 & 247 & 0 & -184,5 & 184,5 \\ -242 & 125 & 0 & 363 & -184,5 & 0 & 786,5 & -401,75 & 0 \\ 125 & -253 & 128 & -184,5 & 369 & -184,5 & -401,75 & 806,5 & -404,75 \\ 0 & 128 & -128 & 0 & -184,5 & 184,5 & 0 & -404,75 & 404,75 \end{bmatrix} \quad (A.2)$$

$$K = 10^5 \begin{bmatrix} 21,52 & -10,35 & 0 & 0 & 0 & 0 & -11,88 & 5,87 & 0 \\ -10,35 & 21,7 & -11,35 & 0 & 0 & 0 & 5,87 & -11,33 & 5,46 \\ 0 & -11,35 & 11,35 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5,46 & -5,46 \\ 0 & 0 & 0 & 21,1 & -10,22 & 0 & 14,745 & -7,485 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10,22 & 22,12 & -11,9 & -7,485 & 16,155 & -8,67 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -11,9 & 11,9 & 0 & -8,67 & 8,67 \\ -11,88 & 5,87 & 0 & 14,745 & -7,485 & 0 & 33,998 & -17,098 & 0 \\ 5,87 & -11,33 & 5,46 & -7,485 & 16,155 & -8,67 & -17,098 & 35,563 & -18,465 \\ 0 & 5,46 & -5,46 & 0 & -8,67 & 8,67 & 0 & -18,465 & 18,465 \end{bmatrix} \quad (A.3)$$

Nótese que si se tiene un edificio formado por marcos ortogonales, los términos  $k_{xy}$  y  $k_{yx}$  tienen un valor de cero.

En este modelo se considera que el centro de masa coincide con el centro geométrico de la planta de cada piso.