UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"TOPOLOGIAS ESTRICTAS Y M-CONVEXIDAD"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

MANUEL DE LA ROSA PENILLA

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

DIRECTOR DE TESIS: M. en C. ANGEL MANUEL CARRILLO HOYO

2004

VNIVERSIDAD NACIONAL AVTONOMA DE MEXICO

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"Topologías estrictas y m- convexidad"

realizado por Manuel de la Rosa Penilla

con número de cuenta 9850184-1, quien cubrió los créditos de la carrera de: Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	M. en C. Angel Manuel Carrillo Hoyo	
Propietario	Dr. Hugo Arizmendi Peimbert	
Propietario	Dr. Carlos Hernández Garciadiego	
Suplente	Dr. Armando García Martínez	
Suplente	M. en C. Carmen Rocío Vite González	

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. Alejandro Bravo Mojica

Agradecimientos

Escribo estas líneas para agradecer a quienes hicieron posible la realización de esta obra, todos aquellos que de alguna manera contribuyeron y aportaron cosas muy valiosas.

Una de las cosas más importantes en la vida es ser agradecido y reconocer que la ayuda de algunas personas nos hace el camino más fácil para triunfar o lograr algunas metas, por ello les doy las infinitas gracias a aquellos que con su ejemplo diario me motivan para seguir y dar lo máximo de mi, a esas personas que darían su vida por mi y la han dado de mil y un formas diferentes, para ellos muy en especial dedico este trabajo: mis padres.

Gracias padre por ser el hombre recto y trabajador en quien siempre puedo confiar, por ser el amigo que aunque este cansado por una larga jordana laboral tiene el tiempo para escuchar y dar algún consejo, gracias por esas horas en las que nos enfrascamos discutiendo temas de lógica y al final parecía que no se llegaba a ninguna conclusión, ¿pero sabes? siempre aprendí algo: no importaba que ese tipo de temas no te interesaran tanto, tú tenias el tiempo para estar conmigo y tratar de entenderme. Te doy las infinitas gracias porque siempre te has esmerado por darme lo mejor. Gracias

Gracias madre por ser la mujer que eres, gracias por tus cuidados y tus atenciones, gracias porque aun cuando ya no soy pequeño siempre seré tu chiquito y las desveladas y las desmañanadas que toda tu vida has pasado por no dejar que valla al colegio sin un pan en el estomago y darme tu bendición son cosas que ni con todo el oro del mundo las podría jamás pagar.

Agradezco a todos aquellos profesores que me enseñaron lo maravilloso que son las matemáticas, pero muy en especial doy las gracias al profesor Ángel Carrillo Hoyo, un maestro realmente extraordinario, un ejemplo a seguir. La formalidad y la elegancia tanto en su persona como en su manera de demostrar lo caracterizan, un matemático que no teme experimentar y tratar, siempre está buscando soluciones o dando contraejemplos, una persona que no deja nada a la deriva, cuidadoso y pulcro en todo lo que hace.

Gracias prof. por la paciencia que día a día me tuvo, ya que a pesar de que algunas veces el avance en este trabajo era lento, usted nunca se desesperó, ni hubo un mal gesto o alguna señal de enfado de su parte. Gracias por esos miércoles de reunión, los cuales siempre fueron muy enriquecedores. Usted fue parte fundamental en mi formación como matemático, le agradezco todos esos consejos sobre como empezar un problema, las estrategias que maneja para ello y las cuales me trasmitió de manera directa o indirecta, ya que con su ejemplo se aprenden muchas cosas. Estoy muy agradecido por todo el tiempo que dedico a la realización de este trabajo, puesto que siempre estuvo cuando lo necesite y, a pesar de ser una persona tan ocupada, encontró la forma de atender mis dudas.

Quiero agradecer a una personita que siempre estuvo muy atenta y siguió muy de cerca el avance de este trabajo, marcando los errores tipográficos, y dando sugerencias de como mejorar la realización del mismo. Por sus comentarios, sugerencias y críticas, aparte del gran apoyo motivacional, doy las gracias a Ingrith Rivera Cabrera.

Reconozco a todas aquellas personas que estuvieron a mi lado brindando un apoyo moral con su compañía y su personalidad que los caracteriza, a todos mis amigos doy las gracias por ser como son y estar a mi lado. Me gustaría empezar mencionando a mis amigos de toda la vida: mis hermanos Adrián, Erick y Eduardo, espero no defraudarlos y seguir con la responsabilidad que tengo para ustedes por ser el mayor.

Otro gran amigo John Walter Hart, quien, con los maratones de análisis funcional, me enseñó a trabajar en equipo y darme cuenta que juntos somos mayoría. Su pasión y alegría por las matemáticas irradia a todo aquel que está cerca de él. Gracias John.

Por último a mi camarada Rene Galavis Hernández, él cual ha estado a mi lado durante toda la carrera. Le agradezco por su invaluable amistad y gran cariño.

Hace tiempo que los hombres no se hacen sólo, se deben a alguien o a algo, el alguien lo he mencionado, el algo es momento de citarlo: es la gran Universidad Nacional Autónoma de México, mi casa de estudios, pero muy en especial a la Facultad de Ciencias, a la cual le pertenece parte de este triunfo, ya que sin sus aulas llenas conocimiento y sabiduría no hubiera sido posible, conocer este mundo extraordinario repleto de proposiciones y resultados maravillosos los cuales dejan al mundo perplejo: las Matemáticas.

No puedo cerrar estos agradecimientos, sin reconocer que pertenezco a una nación, México, la cual me ha dado la oportunidad de formarme como profesionista. Gracias México por el placer de vivir aquí, por tu gente, tus paisajes, tu comida y todo lo que te rodea.

Contenido

Prólogo

Los objetivos de esta tesis son presentar y estudiar sistemáticamente en el espacio de funciones reales, continuas y acotadas $BC[X]$ algunas topologías estrictas: $\beta_0, \beta_B, \beta_G, \beta_S$, comenzando por β_B que fue definida por C.R. Buck [4] y la cual dio origen a las restantes, así como comparar las condiciones necesarias y suficientes, dadas por S. S. Khurana [19], para la m-convexidad del álgebra $(BC[X], \beta_0)$, con las establecidas para $(BC[X], \beta_G)$ por H. Arizmendi Peimbert y A. Carrillo Hoyo [2]. En esos artículos se siguen caminos diferentes; en el primero, la condición obtenida se refiere a una característica que debe tener X: $(BC[X], \beta_0)$ es m-convexa si y sólo si X es aparentemente compacto (sham compact); en el segundo, el enfoque es sobre el espacio de funciones que determinan las seminormas que definen a β_G: $(BC[X], \beta_G)$ es m-convexa si y sólo si $B_0[X] = B_{00}[X]$ (es decir, coinciden las funciones que se anulan al infinito con las que tienen soporte compacto). En ambos, se concluye que cada una de las condiciones mencionadas es equivalente, respectivamente, a que las topologías estrictas β_0 y β_G coincidan con la compacto abierta κ. A partir de lo visto en esta tesis se obtiene que $\beta_0 = \beta_G = \kappa$ si y sólo si X es aparentemente compacto y que esto equivale a decir que $B_0[X] = B_{00}[X]$. Las topologías β_0 y β_G parecerían ser distintas, salvo cuando X es aparentemente compacto, sin embargo, como se hacer notar en este trabajo, ambas topologías son la misma para cualquier espacio X completamente regular Así, tanto Khurana, como Arizmendi-Carrillo usaron la misma topología aunque presentada en formas distintas.

Dentro de las álgebras topológicas, las m-convexas son desde un punto de vista las más parecidas a las álgebras normadas, que a su vez son las más ricas en estructura. Por tanto, las álgebras m-convexas tienen algunas de las propiedades que poseen las normadas; por ejemplo, en un álgebra de Banach, compleja, conmutativa y con unidad es válida la propiedad de Wiener y lo mismo sucede con un álgebra m-convexa, compleja, completa, conmutativa y con unidad. De ahí el interés por determinar cuándo un álgebra es m-convexa.

En el capítulo 2, se define la topología estricta de Buck β_0 en el anillo $BC[X, E]$ de funciones continuas y acotadas de un espacio X localmente compacto y de Hausdorff (LCH) en un espacio localmente convexo y completo E; con ella $BC[X, E]$ es un espacio localmente convexo. En el Capítulo1 se dan las definiciones y propiedades básicas relativas a los espacios localmente compactos y localmente convexos que serán usadas frecuentemente en los capítulos siguientes; de entre ellas destacan, por su empleo constante, el Lema de Urysohn para espacios LCH y sus corolarios. El capítulo concluye con una sección sobre la topología límite inductivo para espacios localmente convexos. La topología β_S es un caso particular de topología límite inductivo. Cabe aclarar que cuando se usa sólo una de las topologías estrictas y no hay lugar a confusión, entonces es denotada simplemente por β; en caso contrario se usan los subíndices para diferenciarlas. Así, en el capítulo 2, β denota la topología estricta de Buck y en el 3, la de Giles.

En el Capítulo 2 se define la topología estricta β_B, que como ya se dijo, en ese momento simplemente es denotada por β, y también se recuerdan las definiciones de otras topologías más extensamente conocidas como son las topologías uniforme y compacto abierta. De las tres se dan algunas de sus propiedades y se determinan algunas de las relaciones existentes entre ellas, por ejemplo: cuál es más débil, cuándo coinciden, qué propiedades debe tener el espacio X para que las topologías sean normadas, metrizables, completas, etc. Se prueba que la topología estricta coincide con la compacto abierta en los conjuntos uniformemente acotados; a este respecto resulta oportuno señalar que en el siguiente capítulo se prueba que la topología estricta β_B es la máxima topología localmente convexa que coincide con ella misma en los conjuntos uniformemente acotados y que lo mismo sucede con las topologías β_0 y β_G. Se presenta, a nivel informativo, la noción de topología mixta, enunciándose algunos resultados que aparecen en el artículo [9] de Cooper; en este mismo artículo se concluye que la topología estricta es un caso particular de topología mixta; sin embargo, la demostración de la coincidencia de la topología mixta con la topología estricta generada por las topologías compacto abierta y la uniforme "se vuelve un resultado sorprendentemente difícil" afirma Cooper, por lo cual no resultó adecuado tomar este posible enfoque general para la escritura de este trabajo y se prefirió hacer las pruebas de manera directa a partir de la definición particular de la topología de Buck. En la sección final se da el teorema de Stone-Weierstrass para $(BC[x], \beta)$.

En el Capítulo III, se presentan generalizaciones de la topología de Buck, como son la topología estricta de Giles (β_G) y la de Sentilles (β_S), las cuales son usadas por Arizmendi-Carrillo y Khurana, respectivamente. Aquí se prueba que si X es localmente compacto, entonces $\beta_0 = \beta_B = \beta_G = \beta_S$, con lo que se justifica considerar a β_0, β_G y β_S como generalizaciones de β_B. Para la topología estricta de Giles se muestra que son válidos resultados que fueron probados en el capítulo anterior para la topología de Buck. Por ejemplo, se da también el teorema de Stone-Weierstrass para la topología estricta de Giles; este teorema se usa, en su versión compleja, en [2] para obtener una condición suficiente para que $(BC[X:\mathbb{C}], \beta_G)$ no satisfaga la condición de Wiener y por tanto, no sea m-convexa; este resultado y su prueba aparecen en el capítulo 4.

Las condiciones necesarias y suficientes para que el álgebra $BC(X)$ sea m-convexa con las topologías β_G, β_0, y β_S se dan en ese mismo capítulo. El resultado relativo a β_S, que aparece en [19], no se prueba ya que el hacerlo implicaría el uso de herramienta distinta a la empleada en el resto de la tesis y significaría prolongar, más allá de lo conveniente, el espacio y el tiempo de realización de este trabajo.

La tesis es autocontenida ya que incluye un conjunto de apéndices en los que se presentan definiciones elementales y resultados auxiliares para la prueba de los que aparecen en los cuatro capítulos.

Capítulo 1

Resultados preliminares

En este capítulo mostramos los principales resultados técnicos que serán la base de muchas de las demostraciones dadas en este trabajo.

1.1 Espacios localmente compactos

Los espacios localmente compactos serán nuestro ámbito de trabajo en el capítulo siguiente donde se introducen para espacios localmente compactos y de Hausdorff las topologías: uniforme, compacto abierta y la que nos atañe, la topología estricta. Aquí damos algunas de las propiedades de dichos espacios.

Definición 1.1.1 *Un espacio X es localmente compacto si cada punto tiene una vecindad compacta. Nosotros estamos interesados en estos tipos de espacios, pero además con la propiedad que sean Hausdorff o T_2. A este tipo de espacios le llamamos localmente compacto Hausdorff y de manera abreviada escribimos LCH.*

Proposición 1.1.2 *Si X es un espacio LCH, $U \subset X$ es abierto y $x \in U$, entonces existe una vecindad compacta N de x tal que $N \subset U$.*

Demostración.

Podemos suponer que $\overline{U}$ es compacto, ya que de no ser así reemplazamos U por $U \cap W^{\circ}$ donde W es una vecindad compacta de x. Sea FrU la frontera de U. Por ser U abierto, tenemos $x \notin FrU$.

FrU es un conjunto cerrado contenido en $\overline{U}$, que es compacto, por consiguiente FrU es un compacto.

El subespacio $\overline{U}$ es de Hausdorff. Recordemos que en los espacios T_2 los compactos se comportan como puntos, en el sentido que pueden ser separados por abiertos ajenos; por lo cual existen abiertos V y W en $\overline{U}$ tales que:

$$x \in V,\ FrU \subset W \text{ y } V \cap W = \varnothing. \tag{1.1}$$

En particular, $FrU \cap V = \emptyset$ y como $V \subset \overline{U} = U \cup FrU$, entonces $V \subset U$.

Existe V_0 abierto en X tal que $V = V_0 \cap \overline{U}$. Al intersectar ambos miembros de esta igualdad con U obtenemos:

$$V = V_0 \cap U$$

o sea V es abierto en X. Además, $\overline{V} \subset \overline{U}$ y por tanto $\overline{V}$ es compacto.

Existe W_0 abierto en X tal que $W = W_0 \cap \overline{U}$. Por (1.1) tenemos

$$\varnothing = V \cap W_0 \cap \overline{U} = W_0 \cap V$$

es decir,

$$V \subset \overline{U} \setminus W_0.$$

Finalmente, como $\overline{U} \setminus W_0$ es un cerrado de X tenemos:

$$\overline{V} \subset \overline{U} \setminus W_0 \subset \overline{U} \setminus W \subset \overline{U} \setminus FrU = U$$

Al hacer $N = \overline{V}$ queda probado el resultado. □

Proposición 1.1.3 *Sea X espacio topológico de Hausdorff y A un subespacio de X.*

(1) Si X es LCH, y A es abierto en X, entonces A es localmente compacto.

(2) Si A es denso en X, entonces cada vecindad compacta en A de un punto a en A es vecindad de a en X.

(3) Si A es localmente compacto y denso en X, entonces A es abierto en X.

Demostración.

(1) Sea $x \in A$, entonces por la proposición anterior existe en X una vecindad compacta N de x tal que $N \subset A$. N es también vecindad compacta de x en A.

(2) Sea V una vecindad compacta de a en A, entonces V es compacto y por tanto cerrado en X. Sea U un vecindad de a en X tal que $V = U \cap A$. Como A es denso, se tiene la contención $\overline{U^\circ} \subset \overline{V}$; en efecto, sea $x \in \overline{U^\circ}$ y W una vecindad abierta en X de x, entonces $U^\circ \cap W$ es un abierto en X no vacío, y por ser denso A se tiene que $A \cap U^\circ \cap W \neq \emptyset$, por tanto $V \cap W \neq \emptyset$ y por consiguiente $x \in \overline{V}$.

Entonces

$$a \in U^\circ \subset \overline{U^\circ} \subset \overline{V} = V$$

Por tanto, V es vecindad de a en X.

(3) Sea $x \in A$, por ser A localmente compacto existe U vecindad compacta de x en A, entonces por (2) U es vecindad de x en X, por tanto A es abierto en X.□

Proposición 1.1.4 *Si X es un espacio LCH y $K \subset U \subset X$ donde K es compacto y U es abierto, entonces existe un abierto V relativamente compacto [i.e su cerradura es compacta] tal que $K \subset V \subset \overline{V} \subset U$.*

Demostración.

Por la Proposición 1.1.2, para cada $x \in K$ podemos escoger una vecindad compacta N_x de x tal que $N_x \subset U$. Así $\{N_x^\circ\}_{x \in K}$ es una cubierta abierta de K, lo cual implica que existe una subcubierta abierta finita $\{N_{x_i}^\circ\}_{i=1}^n$.

Sea $V = \bigcup_{i=1}^n N_{x_i}^\circ$ entonces $K \subset V$,

$$\overline{V} = \overline{\bigcup_{i=1}^n N_{x_i}^\circ} = \bigcup_{i=1}^n \overline{N_{x_i}^\circ} \subset \bigcup_{i=1}^n \overline{N_{x_i}} = \bigcup_{i=1}^n N_{x_i} \subset U$$

y por tanto,

$$K \subset V \subset \overline{V} \subset U.$$

□

Definición 1.1.5 *Sea X un espacio topológico. Se dice que una función $f : X \to \mathbb{R}$ es de soporte compacto si $\overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}$ es compacto. En general,*

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}$$

es llamado el soporte de la función f. Así, $f(x) = 0$ si $x \in X \setminus \operatorname{supp} f$. Cuando f es continua y de soporte compacto escribimos $f \in C_{00}[X]$.

Definición 1.1.6 *Sea X un espacio topológico. Se dice que una función $f : X \to \mathbb{R}$ se anula al infinito si para cada $\epsilon > 0$ existe un compacto K tal que*

$$|f(x)| < \epsilon \text{ si } x \in X \setminus K.$$

Si f es además continua, entonces escribimos $f \in C_0[X]$.

Es claro que $C_{00}[X] \subset C_0[X]$ para todo espacio X.

Si X es LCH y no vacío, entonces $C_{00}[X]$, y por consiguiente $C_0[X]$, contiene otra función además de la idénticamente 0 (Teorema 1.1.10). Si X es completamente regular es posible que $C_0[X]$ sólo conste de la función idénticamente 0 como lo muestra la Proposición 1.1.9, la cual será usada en el capítulo 3.

Observación 1.1.7 *$\mathbb{Q}$, con la topología usual, es un espacio completamente regular por ser lo $\mathbb{R}$; sin embargo, no es localmente compacto, ya que $\mathbb{Q}$ no es abierto en $\mathbb{R}$ (ver Proposición 1.1.3).*

Lema 1.1.8 *Si $K \subset \mathbb{Q}$ es compacto, entonces $\mathbb{Q} \setminus K$ es denso en $\mathbb{Q}$.*

Demostración.

Sea $K \subset \mathbb{Q}$ compacto y supóngase que $\mathbb{Q} \setminus K$ no es denso en $\mathbb{Q}$. Entonces existe un básico no vacío $(a, b) \cap \mathbb{Q}$, tal que

$$(a, b) \cap \mathbb{Q} \subset K$$

Sea $z \in (a, b) \cap \mathbb{I}$. Existe una sucesión $\{r_n\}$ en $(a, b) \cap \mathbb{Q}$ que converge a z y como K es compacto hay una subsucesión de $\{r_n\}$ convergente a un punto de K lo cual no es posible ya que la subsucesión converge a irracional z. □

Proposición 1.1.9 $C_0(\mathbb{Q}) = \{0\}$

Demostración.

Procedamos por reducción al absurdo, es decir supongamos que existe $\phi \in C_0(\mathbb{Q})$ tal que $\phi(y) \neq 0$ para algún $y \in \mathbb{Q}$. Sea $\epsilon = \dfrac{|\phi(y)|}{2}$, entonces existe $K \subset \mathbb{Q}$ compacto tal que

$$|\phi(x)| < \epsilon \text{ para todo } x \in \mathbb{Q} \setminus K$$

Por la proposición anterior existe $\{y_n\}$ sucesión en $Q \setminus K$ que converge a y teniéndose que

$$|\phi(y_n)| < \epsilon \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

Por consiguiente,

$$|\phi(y)| \leq \epsilon = \frac{|\phi(y)|}{2}$$

lo cual es una contradicción. □

Teorema 1.1.10 (Lema de Urysohn para espacios LCH) *Sean X un espacio LCH y $K \subset U \subset X$, con K compacto y U abierto. Entonces existen un abierto V relativamente compacto y una función $f : X \to [0,1]$ continua tales que: $K \subset V \subset \overline{V} \subset U$ y $f = 1$ en K y $f = 0$ fuera del compacto $\overline{V}$. En particular, $f \in C_{00}[X]$.*

Demostración.
Por la Proposición 1.1.4 existe V abierto relativamente compacto tal que

$$K \subset V \subset \overline{V} \subset U.$$

Entonces $K \cap FrV = \emptyset$.

Debido a que todo espacio compacto en un Hausdorff es normal, se sigue que $\overline{V}$ es normal. Aplicamos a $\overline{V}$ el Lema de Urysohn para espacios normales y encontramos una función continua $f : \overline{V} \to [0,1]$ tal que $f = 1$ en K y $f = 0$ en FrV.

Se extiende f a X definiendo $f(x) = 0$ para todo $x \in X \setminus \overline{V}$. Llamamos también f a esta extensión y afirmamos que satisface lo señalado en el teorema.

Falta sólo demostrar que es una función continua en X. Sea $E \subset [0,1]$ cerrado, entonces

$$f^{-1}(E) = \left(f \mid \overline{V}\right)^{-1}(E)$$

siempre que $0 \notin E$.

Si $0 \in E$, entonces

$$f^{-1}(E) = \left(f \mid \overline{V}\right)^{-1}(E) \cup X \setminus \overline{V} = \left(f \mid \overline{V}\right)^{-1}(E) \cup X \setminus V$$

ya que $FrV \subset \left(f \mid \overline{V}\right)^{-1}(E)$.

En ambos casos $f^{-1}(E)$ es cerrado en X. □

Por lo anterior todo espacio LCH es completamente regular.

Corolario 1.1.11 *Sean X un espacio LCH y K un compacto. Entonces existen un abierto V relativamente compacto y una función $f : X \to [0,1]$ continua tales que: $K \subset V \subset \overline{V}$ y $f = 1$ en K y $f = 0$ fuera del compacto $\overline{V}$.*

Corolario 1.1.12 *Sean X un espacio LCH y $x \in X$. Si N es una vecindad compacta de x, entonces existe una función $f : X \to [0,1]$ continua tal que: $f(x) = 1$ y $f = 0$ fuera de N.*

Demostración.

Tenemos $x \in N^{\circ}$. Por el teorema anterior existen un abierto V relativamente compacto y una función $f : X \to [0,1]$ continua tales que: $x \in V \subset \overline{V} \subset N^{\circ} \subset N$ y $f(x) = 1$ y $f = 0$ fuera del compacto $\overline{V}$, en particular fuera de N.

Definición 1.1.13 *Sea X un espacio topológico. La sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en X es una sucesión discreta si para cada $m \geq 1$ existe una vecindad de x_m que intersecta al conjunto $\{x_n\}_n$ sólo en el punto x_m. Se dice que la sucesión es discreta por compactos si dicha vecindad puede ser tomada compacta.*

Observación 1.1.14 *Si X es LCH entonces $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es discreta si y sólo si es discreta por compactos.*

En efecto si la sucesión es discreta, entonces se sigue de la Proposición 1.1.2 que es también discreta por compactos. Al contrario, es obvio el resultado.

Proposición 1.1.15 *Sea X LCH. Si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es discreta entonces existe una sucesión $(N_n)_{n=1}^{\infty}$ de compactos ajenos tales que N_n es vecindad de x_n y $x_m \notin N_n$ si $m \neq n$.*

Demostración.

Por la observación anterior para cada $n \geq 1$ existe una vecindad compacta V_n de x_n tal que $x_m \notin V_n$ si $m \neq n$.

Definimos $N_1 = V$. Así, N_1 es una vecindad compacta de x_1 tal que $x_m \notin N_1$ si $m \neq 1$.

Sea W_2 una vecindad compacta de x_2 ajena con V_1. Definimos

$$N_2 = V_2 \cap W_2.$$

Entonces N_2 es una vecindad compacta de x_2 ajena con N_1 y tal que $x_m \notin N_2$ si $m \neq 2$. En general, construido $N_1, N_2, \ldots, N_n$ vecindades compactas de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, respectivamente tales que

$$N_i \cap N_j = \emptyset \text{ y } x_m \notin N_i \text{ si } m \neq i$$

para $1 \leq i \leq n$, definimos $N_{n+1} = V_{n+1} \cap W_{n+1}$ donde W_{n+1} es una vecindad compacta de x_{n+1} ajena con el compacto $N_1 \cup N_2 \cup \cdots \cup N_n$. De esta manera queda definida inductivamente la sucesión buscada. □

Definición 1.1.16 *Sea X un espacio topológico. La sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en X converge a infinito, y escribimos $x_n \to \infty$, si para cada compacto $K \subset X$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \notin K$ si $n \geq N$.*

Lema 1.1.17 *Sea X un espacio LCH. Si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en X que converge a infinito entonces tiene una subsucesión discreta (discreta por compactos).*

Demostración.

Por ser X un espacio LCH existe una vecindad compacta V_1 de x_1. La convergencia de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ a infinito implica que existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $x_k \notin V_1$ siempre que $k \geq N_1$. Tómese $k_2 > N_1$, entonces $x_{k_2} \in X \diagdown V_1$. Por la Proposición 1.1.2 existe una vecindad compacta V_2de x_{k_2} contenida en $X \diagdown V_1$.

Sea $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $x_k \notin V_2$ siempre que $k \geq N_2$. Sea $k_3 \in \max\{N_1, N_2\}$, entonces $x_{k_3} \notin V_1$ y $x_{k_3} \notin V_2$. Por tanto, $x_{k_3} \in X \setminus (V_1 \cup V_2)$ y existe una vecindad compacta V_3 de x_{k_3} contenida en $X \setminus (V_1 \cup V_2)$. Siguiendo este proceso inductivamente tenemos que $(x_1, x_{k_2}, x_{k_3}, \ldots)$ es una subsucesión discreta por compactos de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. $\square$

Lema 1.1.18 *Sea X un espacio LCH. Si $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ es una sucesión discreta y $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de números reales positivos que converge a cero, entonces existe una función $f \in C_0[X]$ tal que $f(x_n) = c_n$.*

Demostración.
Por la Proposición 1.1.15 existe una sucesión $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ de compactos ajenos entre si tales que K_n es vecindad de x_n y $x_m \notin K_n$ si $m \neq n$. Por el Corolario 1.1.12 para cada $n \geq 1$, existe $f_n \in C_{00}[X]$ tal que $0 \leq f_n \leq 1$ y $f_n(x_n) = 1$ y $f_n(x) = 0$ para todo $x \notin K_n$.

Afirmamos que $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x)$ es la función deseada.

La función f es continua por ser la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x)$ uniformemente de Cauchy, como ahora probamos:

sea $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $c_n < \epsilon$ siempre que $n \geq N$. Entonces,

$$\left| \sum_{n=1}^{i} c_n f_n(x) - \sum_{n=1}^{j} c_n f_n(x) \right|_a = \left| \sum_{n=i}^{j} c_n f_n(x) \right| = \sum_{n=i}^{j} c_n f_n(x) < \epsilon$$

siempre $i, j > N$ ya que: si $x \notin K_n$ para toda $i \leq n \leq j$ entonces $\sum_{n=i}^{j} c_n f_n(x) = 0$; en tanto que si $x \in K_n$ para algún (único) $i \leq n \leq j$, entonces

$$\sum_{n=i}^{j} c_n f_n(x) = c_n f_n(x) \leq c_n < \epsilon.$$

Por otra parte, $f \in C_0[X]$. Dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $c_n < \epsilon$ siempre que $n \geq N$. El conjunto $K_\epsilon = \bigcup_{i=1}^{N} K_i$ es compacto. Supongamos que $x \notin K_\epsilon$. Si además, $x \notin K_n$ para todo $n > N$, entonces $f(x) = 0 < \epsilon$. Finalmente, si $x \in K_n$ para alguna $n > N$, entonces $f(x) = c_n < \epsilon$. $\square$

Lema 1.1.19 *Sea X LCH y $\sigma-$compacto, entonces existe $\phi \in C_0[X]$ tal que $\phi(x) \neq 0$ para todo $x \in X$.*

Demostración.
Como X es un espacio LCH y $\sigma-$compacto entonces es regularmente $\sigma-$compacto (Teorema A.1.6), es decir $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ donde K_n es un subconjunto compacto en X y $K_n \subset K^{\circ}{}_{n+1}$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por el Lema de Urysohn 1.1.10 dado $n \in \mathbb{N}$ existen V_n vecindad compacta y $f_n : X \to [0,1]$ función continua tal que $f_n(K_n) = \{1\}$ y $f_n(X \setminus V_n) = \{0\}$; por tanto, $f_n(X \setminus K_{n+i}) = \{0\}$ para todo $i \geq 1$, puesto que $X \setminus V_n \supset X \setminus K_{n+1} \supset X \setminus K_{n+2} \supset \ldots$.

Definamos $\phi_n(x) = \frac{1}{2^n} f_n(x)$. Observe que $\phi_n : X \to [0,1]$ es una función continua y $0 \leq \phi_n(x) \leq \frac{1}{2^n}$ para todo $x \in X$. Ahora sea

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x).$$

ϕ está bien definida ya que $\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$ para todo $x \in X$, además es continua puesto que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ converge y así, $\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n$ converge uniformemente.

Sólo resta demostrar que $\phi \in C_0[X]$. Sea $\epsilon > 0$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=J}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \epsilon$ siempre que $J > N$. Sea $x \notin K_N$ entonces $x \in K_J$ para alguna $J > N$ por tanto

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \sum_{n=1}^{J-1} \phi_n(x) + \sum_{n=J}^{\infty} \phi_n(x) \\ &\leq 0 + \sum_{n=J}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \epsilon.\end{aligned}$$

□

1.2 Espacios vectoriales topológicos

En lo que sigue $\mathbb{F}$ denota al campo de los números reales o los complejos.

Definición 1.2.1 *Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$. Para $A, B \subset X$ y $F \subset \mathbb{F}$ definimos*

$$\begin{aligned}A + B &= \{a + b : a \in A, b \in B\}; \\ FA &= \{ra : r \in F, a \in A\}.\end{aligned}$$

Si A consta de sólo un punto x, entonces escribimos $x + B$, en lugar de $A + B$; es decir

$$x + B = \{x + b : b \in B\}.$$

Todo conjunto de la forma $x + B$ es llamado un trasladado de B.

Si F consta de sólo un punto r, entonces escribimos rA, en lugar de FA; es decir

$$rA = \{ra : a \in A\}.$$

Definición 1.2.2 *Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$. Supongamos que $A \subset X$.*

- *A es convexo si $\alpha x + \beta y \in X$ siempre que $x, y \in A$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, con $\alpha, \beta \geq 0$ y $\alpha + \beta = 1$.*
- *A es balanceado si $\alpha x \in A$ siempre que $x \in A$ y $|\alpha| \leq 1$.*
- *A es absorbente si para cada $x \in X$ existe $\epsilon > 0$ tal que $\alpha x \in A$ si $|\alpha| < \epsilon$.*

Proposición 1.2.3 *En cualquier espacio vectorial X se tiene:*

- *La intersección de conjuntos convexos es un conjunto convexo.*

- *Si A es convexo, entonces cualquier trasladado de A, es decir cualquier conjunto de la forma $x + A$, con $x \in X$, es también convexo*
- *La intersección de conjuntos balanceados es un conjunto balanceado.*
- *La intersección de conjuntos absorbentes es un conjunto absorbente.*
- *Todo conjunto que contiene a un absorbente es absorbente.*

Es muy útil considerar topologías sobre espacios vectoriales distintas a aquellas que son generadas por normas. No estamos interesados en cualquier topología nos interesan aquellas que se comporten bien con respecto a las operaciones. La siguiente definición precisa lo que queremos decir con el "buen comportamiento" entre la topología y las operaciones.

Definición 1.2.4 *Sea X un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{F}$. $(X, \mathcal{T})$ es un espacio vectorial topológico si $\mathcal{T}$ es una topología en X tal que las operaciones: suma*

$$\begin{array}{ccc} X \times X & \longrightarrow & X \\ (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array}$$

y producto por un escalar

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F} \times X & \longrightarrow & X \\ (\lambda,x) & \longmapsto & \lambda y \end{array}$$

son continuas.

En este caso $\mathcal{T}$ es llamada una topología vectorial para X.

Definición 1.2.5 *Un subconjunto A de un espacio vectorial topológico es acotado si, para cada vecindad U del cero existe un número positivo s tal que*

$$A \subset tU \text{ siempre que } t > s$$

En este trabajo se tratarán esencialmente espacios vectoriales topológicos localmente convexos, dichos espacios están íntimamente ligados con el concepto de seminorma, que ahora definimos.

Definición 1.2.6 *Una seminorma en un espacio vectorial X sobre $\mathbb{F}$ es un función $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ que tiene las siguientes propiedades:*

- *(positividad)* $\|x\| \geq 0$ *para todo* $x \in X$;
- *(homogeneidad)* $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ *si* $x \in X$ *y* $\lambda \in \mathbb{F}$;
- *(desigualdad del triángulo)* $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *si* $x, y \in X$

Como consecuencia de la homogeneidad se tiene que

- $\|0\| = 0$.

  Cuando $\|x\| = 0$ implica $x = 0$, la función $\|\cdot\|$ es llamada norma.

Como consecuencia de la homogeneidad y la desigualdad del triángulo se tiene:

- $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x \pm y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *si* $x, y \in X$.

Proposición 1.2.7 *Sean* X *un espacio vectorial,* $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ *una familia de seminormas en* X *y* $\epsilon_\alpha > 0$ *para cada* $\alpha \in \mathcal{A}$. *El conjunto*

$$V_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n;\epsilon_{\alpha_1},\ldots,\epsilon_{\alpha_n}} = \left\{x \in X : \|x\|_{\alpha_i} < \epsilon_{\alpha_i} \text{ para cada } 1 \leq i \leq n\right\}$$

es convexo, balanceado y absorbente.

Demostración

La prueba se sigue de la Proposición 1.2.3 una vez que se prueba que el conjunto $V_{\alpha;\epsilon} = \{x \in X : \|x\|_\alpha < \epsilon\}$.

es convexo, balanceado y absorbente para cada $\epsilon_\alpha > 0$ y cada $\alpha \in \mathcal{A}$. □

Proposición 1.2.8 *Sean* X *un espacio vectorial y* $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ *una familia de seminormas en* X.

(i) Definimos

$$\mathcal{B}_0 = \{V_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n;\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n} : n \in \mathbb{N}; \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathcal{A}; \epsilon_1 > 0, \ldots, \epsilon_n > 0\}.$$

Cada miembro de $\mathcal{B}_0$ *es convexo, balanceado, absorbente y contiene a* 0.

(ii) La familia $\mathcal{B}$ *de todos los trasladados de los miembros de* $\mathcal{B}_0$, *es decir la familia*

$$\mathcal{B} = \{x + V_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n;\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n} : x \in X; n \in \mathbb{N}; \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathcal{A}; \epsilon_1 > 0, \ldots, \epsilon_n > 0\}$$

es una base de una topología vectorial $\mathcal{T}$ *para* X. *Dicha topología es llamada la generada por la familia de seminormas dadas. Cada elemento de esta base es un conjunto convexo.* $\mathcal{B}_0$ *es llamada una base local del* 0 *de la topología* $\mathcal{T}$. *Conviene observar que*

$$x + V_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n;\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n} = \left\{y \in X : \|y - x\|_{\alpha_1} < \epsilon_1, \cdots, \|y - x\|_{\alpha_n} < \epsilon_n\right\} \quad (1.2)$$

(iii) Sea $x \in X$. *Una base local para* x *en la topología* $\mathcal{T}$ *está dada por*

$$x + \mathcal{B}_0$$

(iv) La colección de todos los conjuntos de la forma

$$x + V_{\alpha;\epsilon} = \{y \in X : \|y - x\|_\alpha < \epsilon\},$$

con $x \in X$, $\alpha \in \mathcal{A}$ *y* $\epsilon > 0$ *es una subbase de la topología* $\mathcal{T}$.

(v) Cada seminorma $\|\cdot\|_\alpha$, *con* $\alpha \in \mathcal{A}$, *es continua en la topología* $\mathcal{T}$.

Demostración.

(i) De la proposición anterior se sigue que cada miembro de $\mathcal{B}_0$ es convexo, balanceado y absorbente. Como $\|0\| = 0$ para cualquier seminorma se sigue que 0 pertenece a todo miembro de $\mathcal{B}_0$.

(ii) Es consecuencia inmediata de (i) y de la Proposición 1.2.3 que cada elemento de $\mathcal{B}$ es un conjunto convexo.

Para el resto de la demostración es útil tener presente la igualdad (1.2).

La familia $\mathcal{B}$ es una base de una topología $\mathcal{T}$ ya que:

$$X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$$

y dados $B, B' \in \mathcal{B}$ y $y \in B \cap B'$ existe $B'' \in \mathcal{B}$ tal que

$$y \in B'' \subset B \cap B'$$

Lo primero es debido a que $0 \in B$ para todo $B \in \mathcal{B}_0$. Lo segundo se cumple si tomamos

$$B'' = y + V_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\alpha'_1,\ldots,\alpha'_m;\delta_1,\ldots,\delta_n,\delta'_1,\ldots,\delta'_m}$$

siempre que $B = x + V_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n;\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n}$ y $B' = x' + V_{\alpha'_1,\ldots,\alpha'_m;\epsilon'_1,\ldots,\epsilon'_m}$, donde

$$\begin{aligned} \delta_i &= \epsilon_i - \|y - x\|_{\alpha_i} \\ \delta'_j &= \epsilon'_j - \|y - x'\|_{\alpha'_j} \end{aligned}$$

para $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq m$.

Para probar que la topología $\mathcal{T}$ es vectorial observamos primero que una subbase de $\mathcal{T}$ está dada por la familia

$$\{x + V_{\alpha;\epsilon} : x \in X, \alpha \in \mathcal{A}; \epsilon > 0\}$$

ya que

$$x + V_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n;\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n} = \bigcap_{i=1}^{n} x + V_{\alpha_i;\epsilon_i}$$

Así, la continuidad, según $\mathcal{T}$, de las operaciones vectoriales se sigue de:

$$\begin{aligned} \left(x + V_{\alpha;\frac{\epsilon}{2}}\right) + \left(y + V_{\alpha;\frac{\epsilon}{2}}\right) &\subset (x+y) + V_{\alpha,\epsilon} \\ B_r(\lambda)\,(x + U_{\alpha;\delta}) &\subset \lambda x + U_{\alpha;\epsilon} \end{aligned}$$

donde $r = \dfrac{\epsilon}{2\left(\|x\|_\alpha + 1\right)}$ y $\delta = \dfrac{\epsilon}{2\left(|\lambda| + r\right)}$.

(iii) Sea U un abierto que contiene a x. Por ser $\mathcal{B}$ una base de $\mathcal{T}$, existe $B = y + V_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n;\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n}$ en $\mathcal{B}$ tal que

$$x \in B \subset U$$

Así, $\|x - y\|_{\alpha_i} < \epsilon_i$ para $1 \leq i \leq n$. Definimos $\delta_i = \epsilon_i - \|x - y\|_{\alpha_i}$ para $1 \leq i \leq n$. Tenemos:

$$x \in x + V_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n;\delta_1,\ldots,\delta_n}$$

y

$$x + V_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n;\delta_1,\ldots,\delta_n} \subset y + V_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n;\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n} \subset U$$

puesto que si $z \in x + V_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n;\delta_1,\ldots,\delta_n}$, entonces $\|z - x\|_{\alpha_i} < \delta_i$ para $1 \le i \le n$ y por tanto,

$$\|z - y\|_{\alpha_i} \le \|z - x\|_{\alpha_i} + \|y - x\|_{\alpha_i}$$

o sea,

$$\|z - y\|_{\alpha_i} < \delta_i + \|y - x\|_{\alpha_i} = \epsilon_i.$$

(iv) Por (ii) basta probar:

$$x + V_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n;\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n} = \bigcap_{i=1}^{n} (x + V_{\alpha_i;\epsilon_i})$$

para $n \in N$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathcal{A}$ y $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n > 0$. De acuerdo a (1.2) tenemos

$$y \in x + V_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n;\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n} \Leftrightarrow \|y - x\|_{\alpha_i} < \epsilon_i$$

$$\text{para todo} 1 \le i \le n; \Leftrightarrow y \in \bigcap_{i=1}^{n} (x + V_{\alpha_i;\epsilon_i}).$$

(v) Sean $\alpha \in \mathcal{A}$, $x \in X$ y $\epsilon > 0$. Se cumple

$$|\|y\|_\alpha - \|x\|_\alpha| < \epsilon \text{ siempre que } \|x - y\|_\alpha < \delta;$$

es decir,

$$|\|y\|_\alpha - \|x\|_\alpha| < \epsilon \text{ si } y \in x + V_{\|\cdot\|_\alpha;\delta}.$$

Por tanto, $\|\cdot\|_\alpha$ es continua en X según la topología $\mathcal{T}$. □

En un espacio vectorial topológico X la noción de sucesión de Cauchy o red de Cauchy tienen sentido. De hecho, si $(I, \preccurlyeq)$ es un conjunto dirigido el conjunto $I \times I$ es un conjunto dirigido de manera natural, de acuerdo a la relación definida como

$$(i, j) \le (i', j') \Leftrightarrow i \preccurlyeq i' \text{ y } j \preccurlyeq j'.$$

Definición 1.2.9 *Una red $(x_i)_{i\in I}$ en un espacio vectorial topológico X es de Cauchy si la red $(x_i - x_l)_{(i,l)\in I\times I}$ converge a cero. Decimos que un espacio vectorial topológico X es completo si cualquier red de Cauchy en X converge en X.*

Definición 1.2.10 *Sea X un espacio vectorial topológico, decimos que Y es la compleción de X si Y es un espacio vectorial topológico completo que contiene un subconjunto denso isomorfo a X, vectorial y topológicamente.*

1.2.1 Espacios localmente convexos

Definición 1.2.11 *Sea X un espacio vectorial y $\mathcal{T}$ una topología generada por una familia de seminormas en X, entonces $(X, \mathcal{T})$ es llamado un espacio localmente convexo (e.l.c.). En particular, $\mathcal{T}$ tiene una base formada por conjuntos convexos, balanceados y absorbentes. Si la familia de seminormas consta de un sólo elemento y además éste es una norma, entonces se dice que el espacio es normado.*

Proposición 1.2.12 *Sea $(X,\mathcal{T})$ un e.l.c. donde $\mathcal{T}$ es la topología generada por la familia de seminormas $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$. $A\subset X$ es acotado si y sólo si para cada $\alpha\in\mathcal{A}$ existe $t>0$ tal que*

$$\|x\|_\alpha < t \text{ para todo } x\in A \tag{1.3}$$

Demostración.

Sea $A\subset X$ acotado y sea $\alpha\in\mathcal{A}$. Para la vecindad del cero $U=\{x\in X:\|x\|_\alpha<1\}$ existe $s>0$ tal que

$$A\subset tU=\{x\in X:\|x\|_\alpha<t\} \text{ siempre que } t>s.$$

Es decir, se cumple (1.3) con $t=s+1$.

Inversamente, supóngase que cada $\alpha\in\mathcal{A}$ existe $t>0$ tal que se cumple (1.3). Sea U una vecindad del cero. Existe una vecindad básica de 0,

$$B=\left\{x\in X:\|x\|_{\alpha_i}<\epsilon \text{ para } i=1,\ldots,n\right\}$$

tal que $B\subset U$. Por hipótesis para α_i existe $t_i>0$ para el que se tiene:

$$\|x\|_{\alpha_i}<t_i \text{ para todo } x\in A$$

Sea $s=\max\left\{\dfrac{t_i}{\epsilon_i}:i=1,\ldots,n\right\}$. Si $t>s$, entonces

$$t>\frac{t_i}{\epsilon_i} \text{ si } i=1,\ldots,n$$

y por tanto,

$$\|x\|_{\alpha_i}<\epsilon_i t \text{ para todo } x\in A,$$

o sea,

$$A\subset tB\subset tU.$$

□

Definición 1.2.13 $(X,\mathcal{T})$ e.l.c. *es localmente acotado, si existe una vecindad acotada del cero.*

Proposición 1.2.14 *Sea $(X,\mathcal{T})$ un espacio localmente convexo donde $\mathcal{T}$ es la topología generada por la familia de seminormas $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$. Si $(x_i)_{i\in I}$ es una red en X, $x_i\to x$ en X si y sólo si $\|x_i-x\|_\alpha\to 0$ para toda $\alpha\in\mathcal{A}$.*

Demostración.

Para $\alpha\in\mathcal{A}$ y $\epsilon>0$ sea

$$V_{x,\alpha,\epsilon}=\{y\in X:\|x-y\|_\alpha<\epsilon\}$$

Supongamos que la red $(x_i)_{i\in I}$ converge a x. Sean $\alpha\in\mathcal{A}$ y $\varepsilon>0$, existe $i_0\in I$ tal que $x_i\in V_{\alpha,\epsilon}$ siempre que $i\succcurlyeq i_0$; es decir,

$$\|x_i-x\|_\alpha<\varepsilon \text{ siempre que } i\succcurlyeq i_0,$$

lo que significa que

$$\|x_i - x\|_\alpha \to 0.$$

Supongamos ahora que $\|x_i - x\|_\alpha \to 0$ para toda $\alpha \in \mathcal{A}$. Sea $V_{x,\alpha,\varepsilon}$ un subbásico cualquiera de la topología $\mathcal{T}$. Por la hipótesis, existe $i_0 \in I$ tal que $\|x_i - x\|_\alpha < \varepsilon$ siempre que $i \succcurlyeq i_0$, lo cual implica que $x_i \in V_{x,\alpha,\varepsilon}$ siempre que $i \succcurlyeq i_0$. Por tanto, $x_i \to x$ en X. □

Teorema 1.2.15 *Supongamos que X e Y son espacios localmente convexos con topologías generadas, por las familias de seminormas $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ y $\left\{\|\cdot\|_\beta\right\}_{\beta\in B}$, respectivamente. Sea $T : X \to Y$ una transformación lineal, entonces T es continua si y sólo si para cada $\beta \in B$ existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathcal{A}$ y $M_\beta > 0$ tales que*

$$\|T(x)\|_\beta \le M_\beta \sum_{i=1}^{n} \|x\|_{\alpha_i}$$

Demostración.

Primero probamos que T es continua si se cumple la condición dada en el teorema. Sean $x \in X$, $(x_i)_{i\in I}$ una red en X que converge a x y $\beta \in B$. Por la Proposición 1.2.14 tenemos que $\|x_i - x\|_\alpha \to 0$ para toda α, entonces $\|Tx_i - Tx\|_\beta \to 0$, ya existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathcal{A}$ y $M_\beta > 0$ tales que

$$\|T(x)\|_\beta \le M_\beta \sum_{i=1}^{n} \|x\|_{\alpha_j}. \tag{1.4}$$

y $\|x_i - x\|_{\alpha_i} \to 0$ para $1 \le i \le n$. Nuevamente por 1.2.14 tenemos que $Tx_i \to Tx$. y por tanto, T es continua en x.

Inversamente, supongamos que T es continua y sea $\beta \in B$. Existe una vecindad $V_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\delta_1,\ldots,\delta_n}$ del 0 en X tal que

$$\|T(y)\|_\beta < 1 \text{ si } y \in V_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\delta_1,\ldots,\delta_n}$$

Sea $\delta = \min\{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$ entonces $\|T(y)\|_\beta < 1$ siempre que $\|y\|_{\alpha_i} < \delta$ para toda $i = 1, \ldots, n$.

Dado $x \in X$ tenemos dos casos:

$\|x\|_{\alpha_i} = 0$ para toda i, lo que implica $\|rx\|_{\alpha_i} = 0$ para todo $r > 0$ y así lo cual implica que $r\|T(x)\|_\beta = \|T(rx)\|_\beta < 1$ para todo $r > 0$. Por tanto, $\|T(x)\|_\beta = 0$ y la condición (1.4) se satisface para cualquier elección de M_β.

El segundo caso es cuando $\|x\|_{\alpha_i} > 0$ para alguna $i \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces definimos

$$y = \frac{\frac{\delta}{2}x}{\sum_{i=1}^{n} \|x\|_{\alpha_i}}$$

entonces $\|y\|_{\alpha_N} \le \frac{\delta}{2} < \delta$ para todo $i = 1, \ldots, n$. De donde, $\|T(y)\|_\beta < 1$. Así

$$\|T(x)\|_\beta < \frac{2}{\delta} \sum_{i=1}^{n} \|x\|_{\alpha_i}$$

y se cumple (1.4). □

Corolario 1.2.16 *Sean $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ dos topologías en un espacio vectorial X generadas por las familias de seminormas $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ y $\left\{\|\cdot\|_\beta\right\}_{\beta\in B}$, respectivamente. Entonces $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$ si y sólo si para cada $\beta \in B$ existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathcal{A}$ y $M_\beta > 0$ tal que*

$$\|x\|_\beta \leq M_\beta \sum_{i=1}^{n} \|x\|_{\alpha_i} \text{ para todo } x \in X.$$

Demostración.

$\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$ si y sólo si $i : \underset{x}{(X, \mathcal{T}_1)} \to \underset{x}{(X, \mathcal{T}_2)}$ es continua, lo cual pasa, si y sólo si para cada $\beta \in B$ existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathcal{A}$ y $M_\beta > 0$ tales que

$$\|x\|_\beta \leq M_\beta \sum_{i=1}^{n} \|x\|_{\alpha_i} \text{ para todo } x \in X.$$

□

Corolario 1.2.17 *Sea X es un e.l.c. cuya topología está definida por la familia de seminormas $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$. Entonces una funcional lineal f es continua si y sólo si existe $M>0$ y $\alpha_1, \ldots \alpha_n \in \mathcal{A}$ tal que $|f(x)| \leq M \sum_{i=1}^{n} \|x\|_{\alpha_i}$ para todo $x \in X$.*

Proposición 1.2.18 *Sea $(X, \mathcal{T})$ es un e.l.c. cuya topología está generada por la familia de seminormas $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$. Entonces:*

(1) X es de Hausdorff si y sólo si para cada $x \neq 0$ existe $\alpha \in \mathcal{A}$ tal que $\|x\|_\alpha \neq 0$

(2) Si X es de Hausdorff y $\mathcal{A}$ es numerable, entonces X es metrizable.

(3) Si X es metrizable, entonces existe una subcolección numerable $\left\{\|\cdot\|_{\alpha_i}\right\}_{i=1}^{\infty}$ de $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ que genera a la topología $\mathcal{T}$.

(4) $(X, \mathcal{T})$ es normable si y sólo si es de Hausdorff y localmente acotado.

Demostración.

(1) Supongamos que X es de Hausdorff. La condición existe $z \neq 0$ tal que $\|z\|_\alpha = 0$ para todo $\alpha \in \mathcal{A}$ implica que z está en cualquier elemento

$$V_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n;\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n} = \left\{x \in X : \|x\|_{\alpha_1} < \epsilon_1, \cdots, \|x\|_{\alpha_n} < \epsilon_n\right\}$$

de la base local del 0, lo cual contradice que X sea de Hausdorff. Por tanto, $\|z\|_\alpha \neq 0$ para algún $\alpha \in \mathcal{A}$.

Inversamente, sean $x \neq y$ dos elementos en X. Por hipótesis, existe $\alpha \in \mathcal{A}$ tal que $\|x-y\|_\alpha \neq 0$. Entonces las vecindades básicas $x + V_{\alpha,\epsilon}$ y $y + V_{\alpha,\epsilon}$ con $\epsilon = \frac{\|x-y\|_\alpha}{2}$ son ajenas.

(2) Sea X un espacio de Hausdorff y $\mathcal{F} = \{\|\cdot\|_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de seminormas que generan la topología $\mathcal{T}_\mathcal{F}$.

Como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\min\{1, \|x_1 - x_2\|_n\}}{2^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

para todo $x, y \in X$ se sigue que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\min\{1, \|x_1 - x_2\|_n\}}{2^n}$ converge y es menor o igual que 1 para todo $x, y \in X$.

La función $d : X \times X \to \mathbb{R}$ definida como

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\min\{1, \|x-y\|_n\}}{2^n}$$

es una métrica

(i) Es claro que $d(x,y) \geq 0$ para todo $x, y \in X$ y $d(x,x) = 0$ para todo $x \in X$. Supongamos que $d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\min\{1, \|x-y\|_n\}}{2^n} = 0$. Entonces

$$\frac{\min\{1, \|x-y\|_n\}}{2^n} = 0$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. O sea, $\|x-y\|_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y como X es de Hausdorff entonces por la proposición anterior tenemos $x = y$.

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$, ya que $\|x-y\|_n = \|y-x\|_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$

(iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$. Para demostrar ésto, basta probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene: $\min\{1, \|x-y\|_n\} \leq \min\{1, \|x-z\|_n\} + \min\{1, \|z-y\|_n\}$

Si alguno de los mínimos de la derecha es igual a uno hemos terminado. Supongamos que los mínimos de la derecha no son uno entonces por la desigualdad del triángulo para seminormas tenemos el resultado deseado.

Finalmente, para probar que la topología dada por la familia de seminormas coincide con la de esta métrica usamos las Proposición y 1.2.14.

Sea $(x_i)_{i \in I}$ es una red en X.

Supongamos que $x_i \xrightarrow{d} x$ y sean $m \in \mathbb{N}$ y $0 < \epsilon < 2^m$. Entonces existe $i_0 \in I$ tal que $d(x_i, x) < \frac{\epsilon}{2^m}$ siempre que $i \succcurlyeq i_0$. Por consiguiente,

$$\frac{\min\{1, \|x_i - x\|_m\}}{2^m} \leq \frac{\epsilon}{2^m}$$

siempre que $i \succcurlyeq i_0$ de donde $\|x_i - x\|_m < \epsilon$ si $i \succcurlyeq i_0$. Por tanto, $\|x_i - x\|_m \to 0$ y esto para toda $m \in \mathbb{N}$. De Proposición 1.2.16 se sigue que la topología dada por la distancia es más fina que la dada por la familia de seminormas.

Inversamente, supongamos que $\|x_i - x\|_n \to 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y sea $\epsilon > 0$.

Existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{\min\{1, \|x_i - x\|_n\}}{2^n} < \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\epsilon}{2}$$

para todo $i \in I$.

Como $\|x_i - x\|_n \to 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ sabemos que para cada $n \geq 1$ existe $i_n \in I$ tal que

$$\|x_i - x\|_n < \frac{2^{n-1}\epsilon}{m}$$

siempre que $i \succcurlyeq i_n$. Sea $i_o > i_k$ para $1 \leq k \leq m$. A partir de

$$d(x_i, x) = \sum_{n=1}^{m} \frac{\min\{1, \|x_i - x\|_n\}}{2^n} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{\min\{1, \|x_i - x\|_n\}}{2^n}$$

concluimos $d(x_i, x) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ siempre que $i \succcurlyeq i_0$ y así $x_i \xrightarrow{d} x$. Por tanto la topología dada por la distancia es más gruesa que la dada por la familia de seminormas.

(3) Si X es un espacio metrizable, entonces existe d una métrica en X que genera a $\mathcal{T}$. Ahora la colección de $B_{\frac{1}{n}}(0) = \left\{x \in X : d(x, 0) < \frac{1}{n}\right\}$, con $n \in \mathbb{N}$, es una base local del cero; pero como d genera a $\mathcal{T}$ entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existen $\alpha_{n,1}, \ldots \alpha_{n,m_n} \in \mathcal{A}$ y $\epsilon_{n,1}, \ldots, \epsilon_{n,m_n} > 0$ tales que

$$U_{\alpha_{n,1}, \cdots \alpha_{n,m_n}; \epsilon_{n,1}, \cdots \epsilon_{n,m_n}} \subset B_{\frac{1}{n}}(0)$$

Afirmamos que la topología generada por $\left\{\|\cdot\|_{\alpha_{n,m_n}} : n \in \mathbb{N}\right\}$ es $\mathcal{T}$:

Llamemos $\mathcal{T}'$ a la topología generada por $\left\{\|\cdot\|_{\alpha_{n,m_n}} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

Como $\left\{\|\cdot\|_{\alpha_{n,m_n}} : n \in \mathbb{N}\right\} \subset \left(\|\cdot\|_\alpha\right)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ entonces $\mathcal{T}'$ es más gruesa que $\mathcal{T}$, por tanto, sólo resta demostrar que $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$. Sea U un $\mathcal{T}$-abierto y $x \in U$. Como $\mathcal{T}$ está generada por d existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x + B_{\frac{1}{n}}(0) \subset U$, entonces existen $\alpha_{n,1}, \ldots \alpha_{n,m_n} \in \mathcal{A}$ y $\epsilon_{n,1}, \ldots, \epsilon_{n,m_n} > 0$ tales que

$$x + U_{\alpha_{n,1}, \cdots \alpha_{n,m_n}; \epsilon_{n,1}, \cdots \epsilon_{n,m_n}} \subset x + B_{\frac{1}{n}}(0) \subset U.$$

Así, U es un $\mathcal{T}'$-abierto.

(4) La topología inducida por una norma sobre un espacio vectorial es una topología localmente convexa de Hausdorff, para la cual la bola unitaria es una vecindad del cero acotada.

Inversamente, supongamos que X es un espacio vectorial topológico localmente convexo, Hausdorff y localmente acotado, cuya topología $\mathcal{T}$ está generada por la familia de seminormas $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$. Existe una vecindad V del cero acotada, por tanto existe B, vecindad básica del 0, tal que

$$B = \left\{x \in X : \|x\|_{\alpha_i} < \epsilon \text{ para } i = 1, \ldots, n\right\} \subset V$$

por la Proposición 1.2.8 inciso (i) tenemos: B es convexo, balanceado, absorbente y como está contenido en V, B es también acotado.

Sea

$$\begin{aligned}\|x\| &= \inf\{t > 0 : x \in tB\} \\ &= \inf\left\{t > 0 : \|x\|_{\alpha_i} < t\epsilon_i \text{ para } i = 1, \ldots, n\right\},\end{aligned}$$

entonces $\|\cdot\|$ es una seminorma en X. Veremos que en realidad es una norma.

Sea $x \in X$ distinto del cero, el hecho de que X es de Hausdorff implica que $X \setminus \{x\}$ es una vecindad del cero.

Existe $s > 0$ tal que

$$tB \subset X \setminus \{x\} \text{ siempre que } 0 < t < s,$$

ya que B es acotado. Sea $0 < t_0 < s$, entonces

$$\|x\|_{\alpha_i} \geq t_0\epsilon \text{ para algún } 1 \leq i \leq n$$

Así, t_0 es una cota inferior para

$$\left\{t > 0 : \|x\|_{\alpha_i} < t\epsilon \text{ para } i = 1, \ldots, n\right\}.$$

Por tanto $0 < t_0 < \|x\|$, es decir $\|\cdot\|$ es una norma.

Observamos que

$$\{x \in X : \|x\| < 1\} \subset B \subset \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$$

Sea $x \in B$, por la continuidad de la multiplicación tenemos que existe $\delta > 0$ y una vecindad U de 0 tales que

$$B_\delta(1) \cdot U \subset B$$

En particular, existe $r \in B_\delta(1)$ tal que $r > 1$ y $rx \in B$, lo cual implica que

$$\|x\| < r\|x\| = \|rx\| \leq 1$$

por consiguiente,

$$B = \{x \in X : \|x\| < 1\}$$

Así, la familia

$$\left\{\frac{1}{n}B\right\}_n$$

es una base local del cero para la topología generada por la norma $\|\cdot\|$.

Sin embargo, como B es una $\mathcal{T}$-vecindad del cero acotada se tiene que para cualquier $\mathcal{T}$-vecindad del cero U existe $s > 0$ tal que

$$B \subset tU \text{ siempre que } t > s$$

y por consiguiente,

$$\frac{1}{n}B \subset U$$

para algún n. Y entonces

$$\left\{\frac{1}{n}B\right\}_n$$

es también una base local del cero para la topología $\mathcal{T}$ y esta topología coincide entonces con la generada por la norma $\|\cdot\|$. □

1.2.2 Topología límite inductivo

Supóngase que $\{X_k : k \in \mathcal{K}\}$ es una familia de espacios localmente convexos, todos subespacios vectoriales de un espacio vectorial X. Es natural preguntarse si sus topologías pueden ser unidas de alguna forma para inducir una topología convexa en X. Más específicamente, ¿podemos dar a X una topología convexa de tal manera que una transformación lineal definida en X sea continua si y sólo si es continua sobre cada X_k? Probamos la existencia de tal topología y algunas propiedades; pero en lugar de pedir que X_k sea subespacio de X es suficiente con dar transformaciones lineales $g_k : X_k \to X$ a través de las cuales la topología en X_k puede ser transferida a $g_k(X_k) \subset X$.

Teorema 1.2.19 *Sean X un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$ y para cada $k \in \mathcal{K}$ sean $(X_k, \mathcal{T}_k)$ un espacio localmente convexo y $g_k : X_k \to X$ una transformación lineal. Consideremos la topología $\mathcal{T}$ en X definida por la familia de seminormas*

$$\left\{ \begin{array}{c} p : X \to \mathbb{R} \mid \text{para cada } k \in \mathcal{K} \text{ existen } M > 0 \text{ y } \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n \in \mathcal{A}_k \\ \text{tales que } p(g_k(z)) \leq M \sum_{m=1}^{n} \|z\|_{\alpha_m}^{k} \text{ para todo } z \in X_k, \end{array} \right\}$$

donde $\left(\|z\|_{\alpha}^{(k)}\right)_{\alpha \in \mathcal{A}_k}$ es una familia de seminormas que define la topología $\mathcal{T}_k$ para cada $k \in \mathcal{K}$. Entonces $\mathcal{T}$ es la topología localmente convexa, más grande en X, que hace continua a cada función g_k y es llamada la topología límite inductivo en X.

Demostración.

La familia de seminormas arriba mencionada es no vacía, ya que contiene a la seminorma cero. Como $\mathcal{T}$ está generada por una familia de seminormas, entonces es una topología localmente convexa. Gracias al Teorema 1.2.15 la función g_k es $\mathcal{T}_k - \mathcal{T}$ continua para cada $k \in \mathcal{K}$.

Resta demostrar que es la más grande con esa propiedad, pero esto es cierto ya que si $\mathcal{T}'$ es una topología localmente convexa generada por una familia de seminormas $\left\{ \|\cdot\|_\beta : \beta \in B \right\}$ y tal que g_k es continua para cada $k \in \mathcal{K}$, entonces por el Corolario 1.2.16 esta familia está contenida en la familia que genera a $\mathcal{T}$ teniéndose así $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$. □

Proposición 1.2.20 *Sea $(X, \mathcal{T})$ el límite inductivo de los espacio localmente convexos $(X_k, \mathcal{T}_k)_{k \in \mathcal{K}}$ vía las transformaciones $g_k : X_k \to X$. Si $f : X \to Y$ es una transformación lineal de X a un espacio localmente convexo Y, entonces f es continua si y sólo si $f \circ g_k$ es continua para cada $k \in \mathcal{K}$.*

Demostración.

La necesidad se obtiene gracias a que la composición de funciones continuas es una función continua.

La topología de Y está generada por una familia de seminormas, digamos $\left\{ \|\cdot\|_\beta : \beta \in \mathcal{A} \right\}$. Dadas $k \in \mathcal{K}$ y $\beta \in \mathcal{A}$ existen $M > 0$ y $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n \in \mathcal{A}_k$ tales que

$$\|f(g_k(z))\|_\beta \leq M \sum_{m=1}^{n} \|z\|_{\alpha_m}^{k} \text{ para todo } z \in X_k$$

Por consiguiente, la seminorma $p_\beta = \|f(\cdot)\|_\beta : X \to \mathbb{R}$ pertenece a la familia de seminormas que generan la topología límite inductivo, para cada $k \in I$, teniéndose así que f es continua. □

Capítulo 2

Topologías en $BC[X:E]$

Como vimos en el capítulo anterior dada una familia de seminormas en un espacio vectorial, ésta genera una topología localmente convexa. En este capítulo X es un espacio localmente compacto y de Hausdorff y E es un espacio real localmente convexo, de Hausdorff y completo, distinto del espacio nulo y cuya topología está generada por una familia de seminormas$\{|\cdot|_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$. $C[X:E]$ es el conjunto de todas las funciones continuas de X en E. Observe que este conjunto es un espacio vectorial sobre los reales. $BC[X:E]$ es el subespacio de $C[X:E]$ formado por las funciones continuas y acotadas de X en E.

Cuando $E=\mathbb{R}$ con la topología usual, escribimos simplemente $C[X]$ y $BC[X]$ en lugar de $BC[X:\mathbb{R}]$ y $BC[X:\mathbb{R}]$, respectivamente.

En este capítulo estudiaremos tres topologías en $BC[X:E]$, con especial énfasis cuando $E=\mathbb{R}$. Estas topologías son: la uniforme, la compacto abierta y, la que más nos atañe: la topología estricta.

2.1 Topología uniforme

A través de la familia de seminormas $\{|\cdot|_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ que define la topología de E se definen seminormas en $BC[X:E]$ de la siguiente manera:

$$\|f\|_\alpha = \sup\{|f(x)|_\alpha : x\in X\}$$

para $f\in BC[X:E]$ y $\alpha\in\mathcal{A}$.

Verificamos que $\|f\|_\alpha$ es en efecto una seminorma en $BC[X:E]$.

(1) Claramente $\|f\|_\alpha \geq 0$

(2) Sea $a\in\mathbb{R}$

$$\|af\|_\alpha = \sup\{|af(x)|_\alpha : x\in X\} = |a|\sup\{|f(x)|_\alpha : x\in X\}.$$

Teniéndose así: $\|af\|_\alpha = |a|\,\|f\|_\alpha$

(3) Para cada $x\in X$ se satisface:

$$|(f+g)(x)|_\alpha \leq |f(x)|_\alpha + |g(x)|_\alpha \leq \|f\|_\alpha + \|g\|_\alpha.$$

Por tanto, $\|f+g\|_\alpha \leq \|f\|_\alpha + \|g\|_\alpha$.

Además, $\|f\|_\alpha \neq 0$ para alguna $\alpha \in \mathcal{A}$ si $f \neq 0$, puesto que si $f(x) \neq 0$ para alguna $x \in X$, entonces, debido a que E es de Hausdorff, $|f(x)|_\alpha \neq 0$ para alguna $\alpha \in \mathcal{A}$.

Definición 2.1.1 *A la topología Hausdorff generada por la familia de seminormas $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ donde*

$$\|f\|_\alpha = \sup\{|f(x)|_\alpha : x \in X\}$$

para cada $f \in BC[X:E]$ y $\alpha \in \mathcal{A}$, la llamamos la topología uniforme en $BC[X:E]$ y la denotamos por σ. Cuando $E = \mathbb{R}$ con la topología usual, entonces la topología uniforme es normada mediante la siguiente norma

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$$

donde $|\cdot|$ es el valor absoluto en $\mathbb{R}$.

De acuerdo a lo visto en el capítulo anterior $(BC[X:E], \sigma)$ es un espacio localmente convexo, de Hausdorff y su topología tiene una subbase formada por los conjuntos convexos:

$$U_{f,\alpha,\epsilon} = \{g \in BC[X:E] : \|f-g\|_\alpha < \epsilon\}$$

donde $f \in BC[X:E], \alpha \in \mathcal{A}$ y $\epsilon > 0$.

El nombre de uniforme proviene de la *convergencia uniforme* definida en cursos básicos de análisis, ya que una red $(f_i) \subset BC[X:E]$ converge a f en la topología σ si y sólo si f_i converge uniformemente a f. Esta afirmación se sigue de la definición de σ.

Las siguientes definiciones generalizan las dadas en el capítulo anterior para las funciones reales.

Definición 2.1.2 *Se dice que una función $f : X \to E$ se anula al infinito si para cada vecindad V del cero en E existe un subconjunto compacto $K \subset X$ tal que $f(x) \in V$ siempre que $x \in X \setminus K$, esto equivale a que para cada $\alpha \in \mathcal{A}$ y $\varepsilon > 0$ existe $K \subset X$ compacto tal que*

$$|f(x)|_\alpha < \varepsilon \text{ si } x \notin K$$

$C_0[X:E]$ es el subespacio de $BC[X:E]$ formado por todas las funciones que se anulan al infinito. $C_{00}[X:E]$ es el subespacio de $C_0[X:E]$ que consta de todas aquellas funciones $f \in C[X:E]$ que son cero en E, fuera de algún subconjunto compacto de X. Para $f \in C[X:E]$ definimos el soporte de f como

$$\operatorname{supp}(f) = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}.$$

Proposición 2.1.3

$$C_{00}[X:E] = \{f \in C[X:E] : \operatorname{supp}(f) \text{ es compacto}\}$$

Definimos $M_{\alpha,\epsilon}(f) = \{x \in X : |f(x)|_\alpha \geq \epsilon\}$.

$C_0[X:E] = \{f \in C[X:E] :\ M_{\alpha,\epsilon}(f)$ *es compacto para cada* $\epsilon > 0$ *y* $\alpha \in \mathcal{A},\ \}$

Demostración.

Sea $f \in C_{00}[X : E]$ entonces existe K compacto tal que $f = 0$ en $X \setminus K$. Esto implica que

$$\{x \in X : f(x) \neq 0\} \subset K$$

y como K es compacto se tiene que $\operatorname{supp}(f)$ es un conjunto compacto.

Inversamente sea $f \in C[X : E]$ con soporte compacto, digamos K, entonces $f(x) = 0$ si $x \notin K$.

Para probar la segunda igualdad tomamos $f \in C_0[X : E]$, $\epsilon > 0, \alpha \in \mathcal{A}$. El conjunto $\{y \in E : |y|_\alpha < \epsilon\}$ es un abierto de E que contiene al cero. Como f pertenece a $C_0[X : E]$ existe $K \subset X$ compacto tal que

$$|f(x)|_\alpha < \epsilon \text{ siempre que } x \notin K,$$

lo cual implica que

$$\{x \in X : |f(x)|_\alpha \geq \epsilon\} \subset K.$$

Por la Proposición 1.2.8 $|\cdot|_\alpha$ es continua y entonces $|f(\cdot)|_\alpha$ también lo es, por lo que el conjunto $M_{\alpha,\epsilon}(f) = \{x \in X : |f(x)|_\alpha \geq \epsilon\}$ es cerrado teniéndose así que es compacto.

Finalmente, sea $f \in C[X : E]$ tal que para cada $\epsilon > 0$ y $\alpha \in \mathcal{A}$ el conjunto

$$M_{\alpha,\epsilon}(f) = \{x \in X : |f(x)|_\alpha \geq \epsilon\}$$

es compacto.

Sea U un abierto en E que contiene al cero, entonces por la Proposición 1.2.8 existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathcal{A}$ y $\epsilon_1 > 0, \ldots, \epsilon_n > 0$ tales que

$$V_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n;\epsilon_{\alpha_1},\ldots,\epsilon_{\alpha_n}} \subset U$$

donde

$$V_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n;\epsilon_{\alpha_1},\ldots,\epsilon_{\alpha_n}} = \left\{y \in E : |y|_{\alpha_1} < \epsilon_1, \cdots, |y|_{\alpha_n}(x) < \epsilon_n\right\}.$$

Hagamos $K = M_{\alpha_1,\epsilon_1}(f) \bigcap \cdots \bigcap M_{\alpha_n,\epsilon_n}(f)$. Entonces, K es compacto y $f(x) \in U$ siempre que $x \notin K$. □

Proposición 2.1.4 *$(BC[X : E], \sigma)$ es completo.*

Demostración.

Sea $(f_i)_{i \in I}$ una red de Cauchy en $BC[X : E]$. Sean $\alpha \in \mathcal{A}$ y $\epsilon > 0$ existe $i_0 \in I$ tal que

$$\|f_i - f_j\|_\alpha < \frac{\epsilon}{2} \text{ si } i, j \succcurlyeq i_0$$

Entonces,

$$|f_i(x) - f_j(x)|_\alpha < \frac{\epsilon}{2} \text{ si } i, j \succcurlyeq i_0 \text{ y todo } x \in X, \tag{2.1}$$

por lo cual $(f_i(x))_{i \in I}$ es una red de Cauchy en E para cada $x \in X$ y como E es completo y de Hausdorff, para cada x existe un único $a_x \in E$ tal que

$$f_i(x) \to a_x.$$

Definimos $f : X \to E$, vía la regla $x \mapsto a_x$. Demostremos que $f_\alpha \xrightarrow{\sigma} f$.
Sabemos que se cumple (2.1):

$$|f_i(x) - f_j(x)|_\alpha < \frac{\epsilon}{2} \text{ si } i, j \succcurlyeq i_0 \text{ y todo } x \in X.$$

Por la continuidad de las seminormas tenemos:

$$\left|\lim_i f_i(x) - f_j(x)\right|_\alpha = \lim_i |f_i(x) - f_j(x)|_\alpha \text{ para todo } j \in I \text{ y } x \in X.$$

De donde

$$|f(x) - f_j(x)|_\alpha < \epsilon \text{ si } j \succcurlyeq i_0 \text{ y para todo } x \in X.$$

Por tanto, $\|f - f_j\|_\alpha < \epsilon$ si $j \succcurlyeq i_0$. Hemos probado, $f_\alpha \xrightarrow{\sigma} f$.

Como f es el límite uniforme de funciones continuas y acotadas entonces f es continua y acotada. Con esto queda demostrada la completitud del espacio $(BC[X : E], \sigma)$. □

Proposición 2.1.5 $\overline{C_{00}[X:E]}^{\sigma} = C_0[X : E]$

Demostración.

Sea $(f_i)_{i\in I}$ una red en $C_{00}[X : E]$ que converge a $f \in C[X : E]$. Sean $\alpha \in \mathcal{A}$ y $\epsilon > 0$, existe $i_0 \in I$ tal que

$$\|f_i - f\|_\alpha < \epsilon \text{ si } i \succcurlyeq i_0.$$

En particular, $|f(x)|_\alpha < \epsilon$ para todo $x \notin \operatorname{supp}(f_{i_0})$, es decir:

$$\{x \in X : |f(x)|_\alpha \geq \epsilon\} \subset \operatorname{supp}(f_{i_0}).$$

$\operatorname{supp}(f_{i_0})$ es compacto ya que $f_{i_0} \in C_{00}[X : E]$. Como f y las seminormas $|\cdot|_\alpha$ son funciones continuas entonces $\{x \in X : |f(x)|_\alpha \geq \epsilon\}$ es un conjunto cerrado lo cual, por la contención anterior, implica que es compacto. De la Proposición 2.1.3 se sigue que $f \in C_0[X : E]$. Así $\overline{C_{00}[X:E]}^{\sigma} \subset C_0[X : E]$.

Inversamente, sea $f \in C_0[X : E]$ entonces por la misma Proposición 2.1.3 tenemos:

$$K_{n,\alpha} = \left\{x \in X : |f(x)|_\alpha \geq \frac{1}{n}\right\}$$

es compacto para $n \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in \mathcal{A}$.

Sea $K_n = \bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} K_{n,\alpha}$ entonces por el Lema de Urysohn para espacios localmente compactos (Teorema 1.1.10) existe $g_n \in C_{00}[X]$ tal que

$$0 \leq g_n \leq 1 \text{ y } g_n(K_n) = \{1\}.$$

Definimos $f_n = g_n \cdot f$, entonces $f_n \in C_{00}[X : E]$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ya que $g_n \in C_{00}[X]$.

Sea $\alpha \in \mathcal{A}$

$$\|f_n - f\|_\alpha = \sup\{|f_n(x) - f(x)|_\alpha : x \notin K_n\},$$

ya que

$$|f_n(x) - f(x)|_\alpha = |(g_n(x) - 1) f(x)|_\alpha$$

y $g_n(x) = 1$ siempre que $x \in K_n$. Además,

$$|(g_n(x) - 1) f(x)|_\alpha = |(g_n(x) - 1)| |f(x)|_\alpha \leq |f(x)|_\alpha < \frac{1}{n}$$

para todo $x \notin K_n$ teniéndose así que $\|f_n - f\|_\alpha \leq \frac{1}{n}$. Por tanto, $f_n \xrightarrow{\sigma} f$ y $C_0[X:E] \subset \overline{C_{00}[X:E]}^\sigma$. □

Corolario 2.1.6 *El subespacio $C_0[X:E]$ es σ-cerrado en $BC[X:E]$.*

Proposición 2.1.7 *$(BC[X:E], \sigma)$ es metrizable si y sólo si (E,τ) lo es.*

Demostración.

Si la topología σ es metrizable entonces por la Proposición 1.2.18 existe una subfamilia numerable $(\|\cdot\|_{\alpha_i})_{i=1}^\infty$ de $(\|\cdot\|_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ que genera a σ.

Por el Corolario 1.2.16 se tiene que para cada $\alpha \in \mathcal{A}$ existen $M > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que

$$\|f\|_\alpha \leq M \sum_{j=1}^n \|f\|_{\alpha_j} \text{ para todo } f \in BC[X:E].$$

En particular si $a \in E$ y f es la función constante $f(x) = a$ para todo $x \in X$, tenemos

$$|a|_\alpha \leq M \sum_{j=1}^n |a|_{\alpha_j} \text{ para todo } a \in E,$$

lo que implica según el mismo corolario que la topología τ es más débil que la generada en E por $(|\cdot|_{\alpha_i})_{i=1}^\infty$ y como ésta es claramente mas débil que τ, se sigue que las dos coinciden y τ es entonces metrizable.

Inversamente, supongamos que E es metrizable, entonces Proposición 1.2.18 existe una subfamilia numerable $(|\cdot|_{\alpha_i})_{i=1}^\infty$ de $(|\cdot|_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ que genera a τ. Afirmamos que $\{\|\cdot\|_{\alpha_n}\}$ generan a σ:

Sea $\alpha \in \mathcal{A}$ entonces existen $M > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$|a|_\alpha \leq M \sum_{i=1}^n |a|_{\alpha_i} \text{ para todo } a \in E.$$

Entonces

$$\|f\|_\alpha = \sup\{|f(x)|_\alpha : x \in X\} \leq M \sum_{i=1}^n \sup\{|f(x)|_{\alpha_i} : x \in X\}$$

para todo $f \in BC[X:E]$. Por tanto,

$$\|f\|_\alpha \leq M \sum_{i=1}^n \|f\|_{\alpha_i} \text{ para todo } f \in BC[X:E].$$

Así, σ es más débil que la topología generada por $(|\cdot|_{\alpha_i})_{i=1}^\infty$ que a su vez es más débil que σ; por tanto, las dos topologías coinciden y σ es metrizable. □

2.2 Topología compacto abierta

La familia de seminormas $\{|\cdot|_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ en E y la colección $\mathfrak{K}$ de todos los compactos de X inducen una familia de seminormas en $C[X:E]$ de la siguiente manera: sea $\alpha \in \mathcal{A}$ y $K \in \mathfrak{K}$ un compacto, definimos:

$$\|f\|_{\alpha,K} = \sup\{|f(x)|_\alpha : x \in K\}$$

para todo $f \in C[X:E]$.

Comprobamos que $\|\cdot\|_{\alpha,K}$ es en efecto es una seminorma en $C[X:E]$.

(1) Claramente $\|f\|_{\alpha,K} \geq 0$ para todo $f \in C[X:E]$.

(2) Sea $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\|\lambda f\|_{\alpha,K} = \sup\{|\lambda f(x)|_\alpha : x \in K\} = |\lambda| \sup\{|f(x)|_\alpha : x \in K\}$$

Teniéndose así: $\|\lambda f\|_{\alpha,K} = |\lambda|\,\|f\|_{\alpha,K}$

(3) Sean $f, g \in C[X:E]$ y $x \in X$.

$$|(f+g)(x)|_\alpha \leq |f(x)|_\alpha + |g(x)|_\alpha \leq \|f\|_{\alpha,K} + \|g\|_{\alpha,K}$$

Por tanto,

$$\|f+g\|_{\alpha,K} \leq \|f\|_{\alpha,K} + \|g\|_{\alpha,K}$$

Además para $f \neq 0$, existe $\alpha \in \mathcal{A}$ y $K \in \mathfrak{K}$ tal que

$$\|f\|_{\alpha,K} \neq 0$$

ya que si $f(x) \neq 0$, entonces

$$|f(x)|_\alpha$$

para algún α y por o cual

$$\|f\|_{\alpha,\{x\}} \neq 0$$

□

Definición 2.2.1 *A la topología generada por la familia de seminormas*

$$\left\{\|\cdot\|_{\alpha,K}\right\}_{\alpha,K\in(\mathcal{A},\mathfrak{K})}$$

la llamamos la topología compacto abierta en $C[X:E]$ y la denotamos por κ.

Por lo visto en el capítulo anterior $(C[X:E],\kappa)$ es un espacio localmente convexo, cuya topología tiene por subbase a la familia de convexos $\{V_{f,\alpha,K,\epsilon}\}$ donde $f \in C[X:E]$, $\alpha \in \mathcal{A}$, $K \subset X$ es compacto, $\epsilon > 0$ y

$$V_{f,\alpha,K,\epsilon} = \left\{g \in C[X:E] : \|f-g\|_{\alpha,K} < \epsilon\right\}.$$

Además, es de Hausdorff por serlo E.

La idea de dar una topología al conjunto de las funciones continuas entre dos espacios topológicos X y Y arbitrarios proviene de la topología general y es ahí donde por vez primera se define la topología *compacto abierta* del modo siguiente: sea

$$(A, B) = \{f \in C[X : Y] : f(A) \subset B\}$$

para cada par de conjuntos $A \subset X$ y $B \subset Y$. La topología compacto abierta es la generada por la familia de conjuntos (A, V) donde $A \subset X$ es compacto y $V \subset Y$ es abierto. Esta definición general se reduce a la recién dada en el caso que nos ocupa.

Proposición 2.2.2 *$(C[X : E], \kappa)$ es completo*

Demostración.

Sea $(f_i)_{i \in I}$ una red de Cauchy en $(C[X : E], \kappa)$. Sean $x \in X$, $\alpha \in \mathcal{A}$ y $\epsilon > 0$. Existe $i_0 \in I$ tal que

$$\|f_i - f_j\|_{\alpha,\{x\}} < \epsilon \text{ si } i, j \succcurlyeq i_0.$$

De donde $(f_i(x))_{i \in I}$ es una red de Cauchy en E para cada $x \in X$. Por la completez de E se tiene que para cada x existe $a_x \in E$ tal que $f_i(x) \to a_x$. Definamos $f : X \to E$ vía la regla $x \mapsto a_x$.

Sean $\alpha \in \mathcal{A}$, $K \subset X$ compacto y $\epsilon > 0$. Existe $i_0 \in I$ tal que

$$\|f_i - f_j\|_{\alpha,K} < \frac{\epsilon}{2} \text{ si } i, j \succcurlyeq i_0.$$

De donde,

$$|f_i(x) - f_j(x)| < \frac{\epsilon}{2} \text{ si } i, j \succcurlyeq i_0 \text{ y para todo } x \in K.$$

En esta expresión fijamos $j \succcurlyeq i_0$ y tomamos el límite sobre i, con lo que concluimos

$$|f(x) - f_j(x)| < \epsilon \text{ si } j \succcurlyeq i_0 \text{ y para todo } x \in K;$$

o sea,

$$\|f - f_j\|_{\alpha,K} < \epsilon \text{ si } j \succcurlyeq i_0.$$

Lo que significa que $f_i \to f$ en la topología κ, una vez que probemos que f es una función continua. Para esto último tomamos $x_0 \in X$, $\alpha \in \mathcal{A}$, $\epsilon > 0$ y una vecindad compacta N de x_0. Por lo anterior existe $i_0 \in I$ tal que

$$\|f - f_j\|_{\alpha,N} < \epsilon. \text{ si } j \succcurlyeq i_0,$$

es decir $(f_i)_{i \in I}$ converge uniformemente a f en N y por consiguiente $f : N \to E$ es continua en x_0, pero como N es vecindad en X de x_0, se tiene que $f : X \to E$ es continua en x_0. □

Proposición 2.2.3 *$C_{00}[X : E]$ es denso en $(C[X : E], \kappa)$*

Demostración.

Sea U una vecindad de $f \in U$. Por la Proposición 1.2.8 existen $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \ldots \alpha_n \in \mathcal{A}$, $K_1, \ldots, K_n \subset X$ compactos y $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n > 0$, tales que el básico $V = \bigcap_{i=1}^{k} U_{f,\alpha_i,K_i,\epsilon_i}$ satisface $f \in V \subset U$.

Sea $K = \bigcup_{i=1}^{k} K_i$ entonces por el lema de Urysohn (Teorema 1.1.10) existe $g \in C_{00}[X]$ tal que $0 \leq g \leq 1$ y $g(K) = \{1\}$.

Sea $h = g \cdot f$. Entonces $h \in C_{00}[X : E]$ y además

$$\|f - h\|_{\alpha_i, K_i} = \|f - gf\|_{\alpha_i, K_i} = 0.$$

Por tanto, $h \in V \subset U$ y $f \in \overline{C_{00}[X : E]}^{\kappa}$. □

Note que la topología κ, a diferencia de la topología σ, está definida en $C[X : E]$ en lugar de en $BC[X : E]$. Cuando nos refiramos a la topología κ en $BC[X : E]$ ésta será la topología inducida y también la denotaremos por κ.

Corolario 2.2.4 *$C_{00}[X : E]$ es denso en $(BC[X : E], \kappa)$.*

Al igual que con la topología uniforme σ nos gustaría saber si el espacio $(BC[X : E], \kappa)$ es completo. Esto no es cierto en general, pero podemos preguntarnos por su compleción dando así lugar al siguiente resultado que es un corolario de la proposición anterior.

Corolario 2.2.5 *La compleción de $(BC[X : E], \kappa)$ es el espacio $(C[X : E], \kappa)$.*

Demostración.

$C[X : E] = \overline{C_{00}[X : E]}^{\kappa} \subset \overline{BC[X : E]}^{\kappa} \subset C[X : E]$. □

Proposición 2.2.6 *Si X no es compacto, entonces $(BC[X : E], \kappa)$ no es normable.*

Demostración.

Por (4) de la Proposición 1.2.18 basta probar que $BC[X : E]$ no es localmente acotado. Supongamos lo contrario, es decir que existe una vecindad del cero acotada y por consiguiente un básico del 0 acotado. Es decir, supongamos que existen $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \ldots \alpha_n \in \mathcal{A}$, $K_1, \ldots, K_n \subset X$ compactos y $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n > 0$ tales que el básico $V_0 = \bigcap_{i=1}^{k} U_{0,\alpha_i,K_i,\epsilon_i}$ es acotado.

Sea $K_0 = \bigcup_{n=1}^{k} K_n$. Como X no es compacto existe un punto x_0 en el abierto $X \setminus K_0$. Por el Lema de Urysohn (Teorema 1.1.10) existe $\phi \in C_{00}[X]$ y un compacto $K \subset X \setminus K_0$ tales que $0 \leq \phi(x) \leq 1$, $\phi(x_0) = 1$ y $\phi(X \setminus K) = \{0\}$. Entonces $\phi(K_n) = \{0\}$ para $i = 1, \ldots n$ ya que $K_i \subset K_0 \subset X \setminus K$ para $i = 1, \ldots n$.

Sea $a \in E$ distinto del vector cero, entonces existe $\alpha \in \mathcal{A}$ tal que $|a|_\alpha \neq 0$. Sean $b = \dfrac{a}{|a|_\alpha}$ y $\epsilon > 0$; por nuestra suposición existe $s > 0$ tal que si $t > s$, entonces $V_0 \subset tV_{0,\alpha,\{x_0\},\epsilon}$, es decir, dada $f \in BC[X : E]$ y $t > s$, se tiene que si $\|f\|_{\alpha_n, K_n} < \epsilon_n$ para cada $n = 1, \ldots k$, entonces $\|f\|_{\alpha,\{x_0\}} < t\epsilon$.

Sean $t > s$ y $f(x) = \phi(x)(t\epsilon + 1)b$. Observemos que $f \in BC[X : E]$ ya que $\phi \in C_{00}[X]$, además $\|f\|_{\alpha_n, K_n} = 0$, debido a que $\phi(K_n) = 0$.

$$\|f\|_{\alpha,\{x_0\}} = |\phi(x_0)(t\epsilon + 1) \cdot b|_\alpha = |\phi(x_0)(t\epsilon + 1)| |b|_\alpha = t\epsilon + 1 > t\epsilon,$$

lo cual contradice lo dicho en el párrafo anterior. Por tanto, no existe vecindad del cero en la topología κ que sea acotada, teniéndose así que $(BC[X : E], \kappa)$ no es normable. □

Corolario 2.2.7 *$(BC[X : E], \kappa)$ no es normable si y sólo si X es compacto.*

Proposición 2.2.8 *$(BC[X : E], \kappa)$ es metrizable sólo si X es $\sigma-$compacto.*

Demostración.
Supongamos que $(BC[X : E], \kappa)$ metrizable. Por el inciso (3) de la Proposición 1.2.18 existe una subfamilia numerable $\left\{\|\cdot\|_{\alpha_i, K_i}\right\}_i$ de la familia de seminormas $\left\{\|\cdot\|_{\alpha, K}\right\}$ que genera a la topología κ. Afirmamos que $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$, y para probarlo supongamos lo contrario, por lo cual existe $y \in X \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$. Sea $\alpha \in \mathcal{A}$, por el Corolario 1.2.16, existen $n \in \mathbb{N}$, $M_\alpha > 0$ y $K_1, \ldots K_n \subset X$ compactos tales que

$$\|f\|_{\alpha,\{x\}} \leq M_\alpha \sum_{i=1}^{n} \|f\|_{\alpha_i, K_i} \text{ para todo } f \in BC[X : E] \tag{2.2}$$

Por el Lema de Urysohn (Teorema 1.1.10) existe $\phi \in C_{00}[X]$ tal que $\phi(y) = 1$ y ϕ es identicamente cero fuera de algún subconjunto compacto de $X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} K_i$, en particular $\phi(K_i) = \{0\}$ para $i = 1, \ldots n$. Sea $a \neq 0$ en E, entonces existe $\alpha \in \mathcal{A}$ tal que $|a|_\alpha \neq 0$. Definimos $f(x) = \phi(x) \cdot y$, entonces $f \in BC[X : E]$, $\|f\|_{\alpha_i, K_i} = 0$ para todo $1 \leq i \leq n$ y $|f|_{\alpha,\{y\}} > 0$; lo cual contradice (2.2). □

Proposición 2.2.9 *$(BC[X : E], \kappa)$ es metrizable sólo si (E, τ) es metrizable.*

Demostración.
Supongamos que $(BC[X : E], \kappa)$ metrizable. Por (3) de la Proposición 1.2.18 existe una subfamilia numerable $\left\{\|\cdot\|_{\alpha_i, K_i}\right\}_i$ de la familia de seminormas $\left\{\|\cdot\|_{\alpha, K}\right\}$ que genera a la topología κ. Sean $\alpha \in \mathcal{A}$ y $x \in X$; existen $n \in \mathbb{N}$ y $M > 0$ tales que $\|f\|_{\alpha,\{x_0\}} \leq M \sum_{j=1}^{n} \|f\|_{\alpha_j, K_j}$ para todo $f \in BC[X : E]$. En particular, si $a \in E$ y $f(x) = a$ para todo $x \in X$, entonces $|a|_\alpha \leq M \sum_{j=1}^{n} |a|_{\alpha_j}$ para todo $a \in E$. Así, la topología τ es más débil que la topología generada por $(|\cdot|_{\alpha_i})_{i=1}^{\infty}$ que a su vez es más débil que τ; por tanto, dichas topologías coinciden y por (2) de la misma Proposición 1.2.18, E es metrizable. □

2.3 Topología estricta

De manera similar a los casos anteriores definimos una familia de seminormas en $BC[X:E]$ que definen a su vez una topología Hausdorff localmente convexa en ese espacio.

Sea
$$\|f\|_{\alpha,\phi} = \sup\{|\phi(x)\, f(x)|_\alpha : x \in X\}$$
donde $f \in BC[X:E]$, $\alpha \in \mathcal{A}$ y $\phi \in C_0[X]$.

Definición 2.3.1 *A la topología en $BC[X:E]$ generada por la familia de seminormas $\left\{\|\cdot\|_{\alpha,\phi}\right\}_{(\alpha,\phi)\in\mathcal{A}\times C_0[X]}$ la llamamos la topología estricta en $BC[X:E]$ y la denotamos por β.*

Por lo visto en el capítulo anterior $(C[X:E],\beta)$ es un espacio localmente convexo, cuya topología tiene por subbase a la familia de convexos $\{V_{f,\alpha,\phi,\epsilon}\}$ donde $f \in C[X:E]$, $\alpha \in \mathcal{A}$, $\phi \in C_0[X]$, $\epsilon > 0$ y
$$V_{f,\alpha,\phi,\epsilon} = \left\{g \in C[X:E] : \|f-g\|_{\alpha,\phi} < \epsilon\right\}.$$

Además, es de Hausdorff por serlo E.

Esta topología fue definida y estudiada por primera vez por Buck [4] en el año de 1958, él demuestra y menciona alguna de las proposiciones y teoremas que a continuación se desarrollan. A partir de ese año muchos matemáticos se interesan en el estudio de la topología estricta de Buck entre ellos J.R. Dorroh [10], F.D. Sentilles y D.C. Taylor [23] los cuales dan nuevas demostraciones de las proposiciones y establecen nuevas propiedades.

Cuando tenemos definidas topologías sobre el mismo espacio, siempre surge la pregunta natural si existe alguna conexión entre ellas, es decir si se da alguna contención, si son iguales o que condiciones se necesitan para que se dé alguna de estas propiedades; las siguientes proposiciones responden este tipo de preguntas.

Proposición 2.3.2 $\kappa \subset \beta \subset \sigma$.

Demostración.
Usaremos el Corolario 1.2.16

(i) $\kappa \subset \beta$: Sean $\alpha \in \mathcal{A}$ y $K \subset X$ compacto. Por el Lema de Urysohn para espacios LCH (Teorema 1.1.10) existe $\phi \in C_{00}[X]$ tal que $0 \leq \phi \leq 1$ y $\phi(K) = \{1\}$. Entonces
$$\|f\|_{\alpha,K} \leq \|f\|_{\alpha,\phi} \text{ para todo } f \in BC[X:E].$$

(ii) $\beta \subset \sigma$: Sean $\alpha \in \mathcal{A}$ y $\phi \in C_0[X]$, entonces existe $M_\alpha > 0$ tal que $|\phi(x)|_\alpha \leq M_\alpha$ para todo $x \in X$, ya que $C_0[X] \subset BC[X]$. Entonces
$$\|f\|_{\alpha,\phi} \leq M_\alpha \|f\|_\alpha \text{ para toda } f \in BC[X:E].$$

□

Proposición 2.3.3 *$\kappa = \beta = \sigma$ si y sólo si X es compacto.*

Demostración.

Si X es un espacio compacto, entonces dada $\alpha \in \mathcal{A}$, tenemos que

$$\|f\|_\alpha = \|f\|_{\alpha,X}$$

demostrando así que $\sigma \subset \kappa$, y por la proposición anterior obtenemos que

$$\kappa = \beta = \sigma.$$

Inversamente, supongamos que $\kappa = \sigma$ y X no es un espacio compacto.

Sea $y \in E$ tal que $y \neq 0$ por (1) de la Proposición 1.2.18 existe $\alpha \in \mathcal{A}$ tal que $|y|_\alpha \neq 0$.

Por la Proposición 1.2.16 para cada $\alpha \in \mathcal{A}$ existen, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathcal{A}$, $K_1, \ldots, K_n \subset X$ compactos y $M > 0$ tales que

$$\|f\|_\alpha \leq M \sum_{i=1}^{n} \|f\|_{\alpha_i, K_i} \text{ para toda } f \in BC[X : E]. \tag{2.3}$$

Como X no es compacto, existe $x_0 \in X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} K$ y , nuevamente por el Lema de Urysohn para espacios LCH (Teorema 1.1.10), existen $\phi \in C_{00}[X]$ y $N \subset X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} K_i$ vecindad compacta de x_0 tales que $\phi(x_0) = 1$ y $\phi(X \setminus N) = \{0\}$; en particular $\phi\left(\bigcup_{i=1}^{n} K_i\right) = \{0\}$.

Sea $f(x) = \phi(x) \cdot y$, entonces $\|f\|_\alpha \neq 0$ y $\sum_{i=1}^{n} \|f\|_{\alpha_i, K_i} = 0$, lo que contradice la desigualdad (4.2). $\square$

Proposición 2.3.4 *Si $\beta = \sigma$ entonces X es compacto.*

Demostración.

Supóngase que $\beta = \sigma$ y X no es compacto.

Sea $y \in E$ tal que $y \neq 0$, entonces existe $\alpha \in \mathcal{A}$ tal que $|y|_\alpha \neq 0$, por hipótesis $\sigma \subset \beta$, entonces existen $M > 0$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathcal{A}$, $\phi_1, \ldots, \phi_n \in C_0[X]$ tales que

$$\|f\|_\alpha \leq M \sum_{i=1}^{n} \|f\|_{\alpha_i, \phi_i} \text{ para todo } f \in BC[X : E]$$

Para cada $1 \leq i \leq n$, existen $K_i \subset X$ compacto tal que $|\phi_i(x)| < \frac{1}{nM}$ para todo $x \notin K_i$. Como X no es compacto, existen $x_0 \in X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} K_i$ y $\phi \in C_{00}[X]$ tales que $0 \leq \phi \leq 1$, $\phi(x_0) = 1$ y $g\left(\bigcup_{i=1}^{n} K_i\right) = \{0\}$.

Sea $f(x) = g(x) \cdot y$, entonces

$$|y|_\alpha = |g(x_0) \cdot y|_\alpha \leq \|f\|_\alpha \leq M \sum_{i=1}^{n} \|f\|_{\alpha_i, \phi_i} < |y|_\alpha$$

ya que

$$\|f\|_{n,\phi_i} = \sup\left\{ |\phi_i(x)\, g(x) \cdot y|_\alpha : x \notin \bigcup_{i=1}^{n} K_i \right\} < \frac{1}{nM} |y|_\alpha .$$

□

Corolario 2.3.5 *Si $\beta = \sigma$ entonces $\beta = \kappa$.*

Hasta aquí se puede observar que la topología estricta de Buck está atrapada entre las topologías compacto abierta y la uniforme. Cuando la topología coincide con la topología más grande, la uniforme, entonces el espacio X es compacto y las tres topologías coinciden, sin embargo queda la pregunta: ¿qué pasa si la topología estricta coincide con la compacto abierta? ¿de que manera debe ser X? Esta pregunta se responderá hasta el Capítulo 3 (Corolario 3.1.14) donde se dan condiciones necesarias y suficientes para que las topologías β y κ coincidan, lo cual estará íntimamente relacionado con la m-convexidad.

Lema 2.3.6 *Sea $f \in C[X:E]$ y supongamos que $\phi f \in C_0[X:E]$ para cada $\phi \in C_0[X]$, entonces $f \in BC[X:E]$.*

Demostración.

Supongamos que $f \in C[X:E]$ no es acotada, entonces existen $\alpha \in \mathcal{A}$ y $x_1 \in X$ tales que $|f(x_1)|_\alpha \geq 1$ y para cada $n \geq 2$ existe $x_n \in X$ que satisface

$$|f(x_n)|_\alpha \geq n + 1 + |f(x_{n-1})|_\alpha > |f(x_{n-1})|_\alpha + 1.$$

Para cada $n \geq 1$ sea $m_n \in \mathbb{N}$ tal que $m_n - 1 \leq |f(x_n)|_\alpha < m_n$, por lo anterior $m_{n+1} - 1 \geq m_n$ ya que en caso contrario

$$|f(x_{n+1})|_\alpha - 1 < m_{n+1} - 1 \leq m_{n-1} \leq |f(x_n)|_\alpha$$

lo cual contradice la construcción de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$

Como f es continua en X, entonces la sucesión $(x_n)_n$ es discreta ya que

$$\{x \in X : |f(x_n)|_\alpha < m_n\} \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\}$$

es un abierto que sólo contiene al elemento x_n de la sucesión.

Como $|f(x_n)|_\alpha \geq n$ para todo $n \geq 1$, tenemos $\dfrac{1}{|f(x_n)|_\alpha} \to 0$. Por Lema 1.1.18 existe $\phi \in C_0[X]$ tal que $\phi(x_n) = \dfrac{1}{|f(x_n)|_\alpha}$. Así,

$$|\phi(x_n)\, f(x_n)|_\alpha = 1 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

Afirmamos que $\phi \cdot f$ no pertenece a $C_0[X:E]$, ya que de lo contrario, existe $K \subset X$ compacto tal que

$$|\phi(x)\, f(x)|_\alpha < \frac{1}{2} \text{ para todo } x \notin K$$

esto implica que $\{x_n\} \subset K$ y entonces existe una subred $\{x_\lambda\}$ de $\{x_n\}$ tal que $x_\lambda \to x$ para alguna $x \in K$. Así, $f(x_\lambda) \to f(x)$, pero esto no es posible puesto que $|f(x_\lambda)|_\alpha \to \infty$. □

Proposición 2.3.7 *$(BC[X:E],\beta)$ es un espacio completo.*

Demostración.

Sea $(f_i)_{i\in I}$ una red β-de Cauchy. Como $\kappa\subset\beta$, la red $(f_i)_{i\in I}$ es una red $\kappa-$ de Cauchy; por tanto,dicha red converge en la topología κ, digamos a $f\in C[X,E]$.

Afirmamos que $\phi f_i \xrightarrow{\kappa} \phi f$ para todo $\phi\in C_0[X]$. Sean $\alpha\in\mathcal{A}, K\subset X$ compacto, $\epsilon>0$ y $\phi\in C_0[X]$, entonces existe $M>0$ tal que

$$|\phi(x)|\leq M \text{ para todo } x\in X.$$

$f_i\xrightarrow{\kappa} f$ implica que existe $i_0\in I$ tal que

$$\|f_i-f\|_{\alpha,K}<\frac{\epsilon}{M} \text{ siempre que } i\succcurlyeq i_0$$

Así,

$$\|\phi f_i-\phi f\|_{\alpha,K}<M\,\|f_i-f\|_{\alpha,K}<\epsilon \text{ siempre que } i\succcurlyeq i_0$$

y por tanto, $\phi f_i\xrightarrow{\kappa}\phi f$.

La hipótesis de que la red $(f_i)_{i\in I}$ es $\beta-$ de Cauchy, implica que (ϕf_i) es $\sigma-$converge para todo $\phi\in C_0[X]$. Supongamos $\phi f_i\xrightarrow{\sigma} h_\phi$, con $h_\phi\in BC[X:E]$. Como $\kappa\subset\sigma$ y por lo visto en el párrafo anterior $h_\phi=\phi f$.

Observamos que $\phi f_i\in C_0[X:E]$ para todo $\phi\in C_0[X]$ y $i\in I$, ya que $f_i\in BC[X:E]$ y $\phi\in C_0[X]$; así, por el Corolario 2.1.6, $\phi f\in C_0[X:E]$ para cada $\phi\in C_0[X]$ y esto implica por el Lema 3.1 que $f\in BC[X:E]$. Como $\phi f_i\xrightarrow{\sigma}\phi f$ para toda $\phi\in C_0[X]$, entonces $f_i\xrightarrow{\beta} f$. □

Proposición 2.3.8 *Las topologías β y σ determinan los mismos conjuntos acotados.*

Demostración.

Si X es un espacio compacto la afirmación se cumple debido a que las topologías coinciden. Supongamos que X no es compacto. Sabemos que $\beta\subset\sigma$, entonces todo $\sigma-$acotado es $\beta-$acotado.

Sea $S\subset BC[X:E]$ un conjunto $\beta-$acotado y supongamos que no es $\sigma-$acotado, entonces existe $\alpha\in\mathcal{A}$ tal que para todo $n\in\mathbb{N}$ existe $f_n\in S$ tal que $\|f_n\|_\alpha>n$, y como

$$\|f_n\|_\alpha=\sup\{|f_n(x)|_\alpha : x\in X\},$$

entonces existe $x_n\in X$ tal que

$$|f_n(x_n)|_\alpha\geq n \text{ para cada } n\in\mathbb{N}$$

Afirmamos que $x_n\to\infty$. Para probarlo supongamos lo contrario, entonces existe $K\subset X$ compacto tal que para todo $n\in\mathbb{N}$ existe $k_n>n$ tal que $x_{k_n}\in K$, por lo cual tenemos que (x_{k_n}) es una sucesión contenida en K. Existe $\phi\in C_{00}[X]$ tal que $0\leq\phi\leq 1$ y $\phi(K)=\{1\}$, entonces

$$\begin{aligned}\|f_{k_n}\|_{\alpha,\phi} &= \sup\{|\phi(x)|\,|f_{k_n}(x)|_\alpha : x\in X\}\\ &\geq \sup\{|f_{k_n}(x)|_\alpha : x\in K\}\geq |f_{k_n}(x_{k_n})|_\alpha\\ &\geq k_n>n\end{aligned}$$

contradiciéndose así el hecho que S es β−acotado.

Podemos suponer que $(x_n)_n$ es discreta, puesto que si no lo fuera por el Lema 1.1.17 existe una subsucesión de $(x_n)_n$ que si lo es.

Definimos

$$\lambda_n = \|f_n(x_n)\|_\alpha$$

por lo que $\left(\lambda_n^{-\frac{1}{2}}\right)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión real que converge a cero. Por el Lema 1.1.18 existe $\phi \in C_0[X]$ tal que $\phi(x_n) = \lambda_n^{-\frac{1}{2}}$. Entonces

$$\begin{aligned} \|f_n\|_{\alpha,\phi} &= \sup\{|\phi(x)|\,|f_n(x)|_\alpha : x \in X\} \\ &\geq |\phi(x_n)|\,|f_n(x_n)|_\alpha = \lambda_n^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Lo que contradice que S es β−acotado. □

Proposición 2.3.9 *Sea $S \subset BC[X:E]$ un conjunto β−acotado, entonces $\beta|_S = \kappa|_S$.*

Demostración.

Sea $S \subset BC[X:E]$ un conjunto β−acotado. Por la proposición anterior S es σ−acotado, por tanto, para todo $\alpha \in \mathcal{A}$ existe $M_\alpha > 0$ tal que $\|f\|_\alpha < M_\alpha$ para todo $f \in S$.

Como $\kappa \subset \beta$ entonces $\kappa|_S \subset \beta|_S$ por lo cual sólo resta demostrar la otra contención, para esto es suficiente probar que $i : (S,\kappa) \to (S,\beta)$ es continua. Sean $(f_i)_{i\in I}$ una red en S que κ−converge a $f_0 \in S$. Sean $\alpha \in \mathcal{A}$, $\phi \in C_0[X]$ y $\epsilon > 0$, entonces existe $K \subset X$ compacto tal que

$$|\phi(x)|_\alpha < \frac{\epsilon}{4M_\alpha} \text{ para todo } x \notin K.$$

Además existe $i_0 \in I$ tal que

$$\|f_i - f_0\|_{\alpha,K} < \frac{\epsilon}{2M_\phi} \text{ siempre que } i \succcurlyeq i_0$$

donde M_ϕ es una cota para ϕ.

$$\begin{aligned} &\|f_i - f_0\|_{\alpha,\phi} \\ &= \sup\left[\{|\phi(x)|\,|f_i(x) - f_0(x)|_\alpha : x \in K\} \bigcup \{|\phi(x)|\,|f_i(x) - f_0(x)|_\alpha : x \notin K\}\right] \\ &\leq M_\phi \|f_i - f_0\|_{\alpha,K} + \frac{\epsilon}{4M_\alpha}\|f_i - f_0\|_\alpha \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{4M_\alpha}(\|f_i\|_\alpha + \|f_0\|_\alpha) \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{4M_\alpha}(2M_\alpha) = \epsilon, \text{ siempre que } i \succcurlyeq i_0 \end{aligned}$$

o sea, $f_i \xrightarrow{\beta} f$ □

Corolario 2.3.10 *En los conjuntos σ−acotados las topologías estricta y compacto abierta coinciden.*

Proposición 2.3.11 *Sea $(f_i)_{i \in I}$ una red $\sigma-$acotada en $BC[X:E]$. La red $(f_i)_{i \in I}$ es $\beta-$convergente si y sólo si es $\kappa-$convergente.*

Demostración.

Como $\{f_i\}_{i \in I}$ es $\sigma-$acotado, entonces $S = \{f_i, f\}_{i \in I}$ también lo es. Ahora por el corolario anterior (f_i) es $\beta-$convergente en S si y sólo si es $\kappa-$convergente en S. Y estas convergencias también se dan en X. □

Proposición 2.3.12 *Una sucesión $(f_n)_n$ en $BC[X:E]$ es $\beta-$convergente si y sólo si $\{f_n\}_n$ es $\sigma-$acotada y $(f_n)_n$ es $\kappa-$convergente.*

Demostración.

Si $(f_n)_n$ en $BC[X:E]$ es $\beta-$convergente, entonces es $\kappa-$convergente, ya que $\kappa \subset \beta$. Además, $(f_n)_n$ es $\beta-$acotada y por la Proposición 2.3.8 $\{f_n\}$ es $\sigma-$acotada.

El recíproco se sigue de la proposición anterior. □

Proposición 2.3.13 *El subespacio $C_{00}[X:E]$ es $\beta-$denso en $BC[X:E]$*

Demostración.

Hagamos $I = \{K \subset X : K \text{ es compacto}\}$, entonces $(I, \preccurlyeq)$ es un conjunto dirigido donde $K_1 \preccurlyeq K_2$ si y sólo si $K_1 \subset K_2$ para todo $K_1, K_2 \in I$.

Sea $f \in BC[X:E]$. Para cada $K \in I$ existe $\phi_K \in C_{00}[X]$ tal que $0 \leq \phi_K \leq 1$ y $\phi_K(K) = \{1\}$. Entonces $f_K = \phi_K f \in C_{00}[X:E]$ ya que cada $\phi_K \in C_{00}[X]$.

Afirmamos que $f_K \xrightarrow{\kappa} f$. Sea $\alpha \in \mathcal{A}$, $K_0 \subset X$ compacto y $\epsilon > 0$, entonces $\|f_K - f\|_{\alpha, K_0} = 0 < \epsilon$ siempre que $K \succcurlyeq K_0$.

Pero $\{f_K\}_{K \in I}$ es $\sigma-$acotado ya que dado $\alpha \in \mathcal{A}$ se tiene que

$$\|f_K\|_\alpha = \sup\{|\phi_K(x)| \, |f(x)|_\alpha : x \in X\} \leq \|f\|_\alpha .$$

Por la Proposición 2.3.11 (f_K) es $\beta-$convergente. □

Proposición 2.3.14 *$(BC[X:E], \beta)$ es metrizable sólo si E lo es.*

Demostración.

Si $(BC[X:E], \beta)$ es metrizable, entonces existe una familia numerable de seminormas $\left\{\|\cdot\|_{\alpha_i, \phi_i}\right\}_{i=1}^{\infty}$ que generan a β.

Sean $\alpha \in \mathcal{A}$ y $x_0 \in X$. Existen $\phi \in C_{00}[X]$, $M > 0$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathcal{A}$ y $\phi_1, \ldots, \phi_n \in C_0[X]$ tales que $0 \leq \phi \leq 1$, $\phi(x_0) = 1$, y $\|f\|_{\alpha, \phi} \leq M \sum_{i=1}^{n} \|f\|_{\alpha_i, \phi_i}$ para toda $f \in BC[X:E]$, en particular si f es la constante y, donde $y \in E$, se tiene:

$$\begin{aligned}
|y|_\alpha &= |y\phi(x_0)|_\alpha \leq \|f\|_{\alpha, \phi_0} \leq M \sum_{i=1}^{n} \|f\|_{\alpha_i, \phi_i} \\
&= M \sum_{i=1}^{n} \sup\{|y\phi(x)|_{\alpha_i} : x \in X\} \\
&\leq M \sum_{i=1}^{n} |y|_{\alpha_i} \text{ para toda } y \in E.
\end{aligned}$$

Es decir $(|\cdot|_{\alpha_i})_{i=1}^{\infty}$, genera la topología de E y ésta es por consiguiente metrizable.□

Proposición 2.3.15 *Si la topología β es metrizable, entonces X es compacto.*

Demostración.

β metrizable implica, por la proposición anterior, que E es metrizable; entonces por la Proposición 2.1.7 σ lo es, por lo cual β y σ son dos topologías metrizables que hacen completo al espacio vectorial $BC[X:E]$.

$i:(BC[X:E],\sigma)\rightarrow(BC[X:E],\beta)$ es claramente sobre y continua ya que $\beta\subset\sigma$, además por el Teorema de la función abierta i es abierta, teniéndose así que $\beta=\sigma$. La Proposición 2.3.4 afirma que entonces X es compacto. □

2.4 Topologías mixtas

Como lo hemos mencionado, a mediados del siglo XX R.C. Buck [4] introdujo una nueva topología, la topología estricta, sobre el espacio de las funciones continuas y acotadas en un espacio localmente compacto. Desde ese momento, un número considerable de trabajos han sido hechos a cerca de esta y otras topologías similares.

El propósito de esta sección es señalar que la topología estricta para el espacio de funciones es un caso particular de las topologías mixtas, aunque no se dan las demostraciones de las afirmaciones que se hacen. El lector interesado puede consultar [9], en donde se prueba cada uno de las proposiciones aquí citadas así como la demostración de que la topología estricta es en realidad la topología mixta generada por la topología compacto abierta y la topología uniforme.

Definición 2.4.1 *Un espacio localmente convexo E posee una sucesión fundamental de conjuntos acotados si existe una sucesión*

$$B_1\subset B_2\subset\cdots$$

de conjuntos acotados en E tal que cada conjunto acotado B está contenido en algún B_n.

Definición 2.4.2 *Un espacio localmente convexo E es llamado DF si posee una sucesión fundamental de conjuntos acotados y satisface que si (U_n) es una sucesión de vecindades del cero balanceadas, convexas y cerradas tal que*

$$U=\bigcap_{n=1}^{\infty}U_n$$

absorbe los conjuntos acotados de E, entonces U es también una vecindad del cero.

Definición 2.4.3 *En un espacio vectorial E considérense dos topologías τ_1 y τ_2, cada una de las cuales lo hacen un espacio localmente convexo y cumplen las siguientes tres propiedades:*

(1) τ_2 es más fina que τ_1

(2) (E, τ_2) es un espacio DF con una base local del 0 formada por conjuntos convexos, balanceados y acotados $(V_n)_n$ tales que

$$V_n + V_n \subset V_{n+1} \text{ para cada } n$$

(3) cada V_n es τ_1 cerrado.

Entonces, la topología mixta $\tau = \tau[\tau_1, \tau_2]$ en E es la topología localmente convexa que tiene por base local del cero a los conjuntos de la forma:

$$U^{\tau} = \tau(U) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (U_1 \cap V_1 + \cdots + U_n \cap V_n)$$

Donde (U_n) es cualquier sucesión de τ_2-vecindades del cero convexas y balanceadas.

2.4.1 Propiedades de la topología mixta.

En el siguiente teorema se enuncian las propiedades más importantes de $\tau[\tau_1, \tau_2]$

Teorema 2.4.4 *Sea $\tau = \tau[\tau_1, \tau_2]$ la topología localmente convexa en E definida anteriormente*

(1) τ es independiente de la base (V_n)

(2) $\tau_1 \subset \tau \subset \tau_2$

(3) $\tau_1 = \tau$ en los conjuntos τ_2-acotados

(4) una colección H de transformaciones lineales de E en un espacio localmente convexo F es $\tau-$equicontinua si y sólo si $H \mid_{V_n}$ es τ_1-equicontinua para cada n

(5) una sucesión en E es $\tau-$convergente a cero si y sólo si es τ_2 acotada y τ_1-convergente a cero

(6) τ_2 y τ tienen los mismos conjuntos acotados

(7) $K \subset E$ es $\tau-$compacto si y sólo si es τ_2-acotado y τ_1-compacto

(8) τ es la topología localmente convexa más grande que coincide con τ_1 sobre los τ_2-acotados

(9) (E, τ) es completo si y sólo si cada V_n es τ_1-completo.

Si consideramos a la topología compacto-abierta (κ) como τ_1 y la topología uniforme (σ) como τ_2 en el espacio $BC[X]$, con X localmente compacto, entonces se puede probar que κ y σ son topologías adecuadas para generar una topología mixta $\tau[\kappa, \beta]$. Además se prueba que esta topología mixta en $BC[X]$ es precisamente la topología estricta de Buck. Varios de los resultados probados en este capítulo son casos particulares del teorema anterior.

La demostración de la coincidencia de la topología estricta con la topología mixta generada por las topologías compacto abierta y la uniforme "se vuelve un resultado sorprendentemente difícil" afirma Cooper [9], por lo cual no resultó adecuado tomar este posible enfoque general para la escritura de este trabajo y se prefirió hacer las pruebas de manera directa a partir de la definición dada por Buck.

2.5 Teorema de Stone-Weierstrass para $(BC[X], \beta)$

Un Teorema de Stone-Weierstrass para $BC[X]$ con la topología estricta fue establecido por Creighton Buck [4] imponiendo la condición de que la subálgebra $\mathfrak{A}$ (ver Teorema 2.5.3) contenga una función que no se anulara en ningún punto. Esta condición fue sustituida por que $\mathfrak{A}$ contuviera una función positiva en todo punto, haciendo la demostración del teorema más fácil, pero sin perder generalidad, como se demuestra en el Teorema 2.5.4. Este cambio en las hipótesis se debe a Christopher Todd [30].

Lema 2.5.1 *Sea X un espacio LCH y $\mathfrak{A}$ una subálgebra $\beta-$cerrada de $BC[X]$. Si $f \in \mathfrak{A}$, entonces $|f| \in \mathfrak{A}$, y por tanto, $\mathfrak{A}$ es una retícula.*

Demostración.

Sea $f \in \mathfrak{A}$, con f no nula, sea $h = \frac{f}{\|f\|}$. Por el Lema B.3.4 existe un polinomio P con coeficientes en $\mathbb{R}$ tal que $\||h| - P \circ h\| < \epsilon$ y $P(0) = 0$, entonces

$$P \circ h = a_1 h + a_2 h^2 + \cdots + a_n h^n \in \mathfrak{A}$$

ya que $\mathfrak{A}$ es una álgebra.

Como $\mathfrak{A}$ es $\beta-$cerrada es también $\sigma-$cerrada y por tanto, $|h| \in \mathfrak{A}$. Entonces $|f| = \|f\| \, |h| \in \mathfrak{A}$. Esto prueba el primer aserto, y la segunda afirmación se sigue de:

$$\max\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|), \quad \min\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$$

□

Lema 2.5.2 *Sea X un espacio LCH y $\mathfrak{A}$ una subálgebra $\beta-$cerrada de $BC[X]$ que contiene una función estrictamente positiva, entonces $\mathfrak{A}$ contiene a las funciones constantes.*

Demostración.

Sea g una función positiva que está contenida en $\mathfrak{A}$. Podemos suponer que $\|g\| \leq 1$, ya que si no es así la podemos sustituir por $\frac{g}{\|g\|}$.

Basta probar que $\mathfrak{A}$ contiene a la función constante 1.

Del Corolario B.2.5 se tiene: $g \in \mathfrak{A}$ implica $g^r \in \mathfrak{A}$ para todo $r > 0$. En particular, $h_n = g^{\frac{1}{n}} \in \mathfrak{A}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $0 < g(x) \leq 1$ para todo $x \in X$, y $\|h_n\| \leq 1$, tenemos que la sucesión (h_n) es uniformemente acotada en X, creciente y converge puntualmente a 1. Por el Teorema de Dini converge uniformemente en cada subconjunto compacto de X, es decir (h_n) es una sucesión $\sigma-$acotada y $\kappa-$convergente; por tanto, es $\beta-$convergente. Como $\mathfrak{A}$ es $\beta-$cerrada entonces $1 \in \mathfrak{A}$.□

(2) (E, τ_2) es un espacio DF con una base local del 0 formada por conjuntos convexos, balanceados y acotados $(V_n)_n$ tales que

$$V_n + V_n \subset V_{n+1} \text{ para cada } n$$

(3) cada V_n es τ_1 cerrado.

Entonces, la topología mixta $\tau = \tau[\tau_1, \tau_2]$ en E es la topología localmente convexa que tiene por base local del cero a los conjuntos de la forma:

$$U^\tau = \tau(U) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (U_1 \cap V_1 + \cdots + U_n \cap V_n)$$

Donde (U_n) es cualquier sucesión de τ_2-vecindades del cero convexas y balanceadas.

2.4.1 Propiedades de la topología mixta.

En el siguiente teorema se enuncian las propiedades más importantes de $\tau[\tau_1, \tau_2]$

Teorema 2.4.4 *Sea $\tau = \tau[\tau_1, \tau_2]$ la topología localmente convexa en E definida anteriormente*

(1) τ es independiente de la base (V_n)

(2) $\tau_1 \subset \tau \subset \tau_2$

(3) $\tau_1 = \tau$ en los conjuntos τ_2-acotados

(4) una colección H de transformaciones lineales de E en un espacio localmente convexo F es $\tau-$equicontinua si y sólo si $H|_{V_n}$ es τ_1-equicontinua para cada n

(5) una sucesión en E es $\tau-$convergente a cero si y sólo si es τ_2 acotada y τ_1-convergente a cero

(6) τ_2 y τ tienen los mismos conjuntos acotados

(7) $K \subset E$ es $\tau-$compacto si y sólo si es τ_2-acotado y τ_1-compacto

(8) τ es la topología localmente convexa más grande que coincide con τ_1 sobre los τ_2-acotados

(9) (E, τ) es completo si y sólo si cada V_n es τ_1-completo.

Si consideramos a la topología compacto-abierta (κ) como τ_1 y la topología uniforme (σ) como τ_2 en el espacio $BC[X]$, con X localmente compacto, entonces se puede probar que κ y σ son topologías adecuadas para generar una topología mixta $\tau[\kappa, \beta]$. Además se prueba que esta topología mixta en $BC[X]$ es precisamente la topología estricta de Buck. Varios de los resultados probados en este capítulo son casos particulares del teorema anterior.

La demostración de la coincidencia de la topología estricta con la topología mixta generada por las topologías compacto abierta y la uniforme "se vuelve un resultado sorprendentemente difícil" afirma Cooper [9], por lo cual no resultó adecuado tomar este posible enfoque general para la escritura de este trabajo y se prefirió hacer las pruebas de manera directa a partir de la definición dada por Buck.

2.5 Teorema de Stone-Weierstrass para $(BC[X], \beta)$

Un Teorema de Stone-Weierstrass para $BC[X]$ con la topología estricta fue establecido por Creighton Buck [4] imponiendo la condición de que la subálgebra $\mathfrak{A}$ (ver Teorema 2.5.3) contenga una función que no se anulara en ningún punto. Esta condición fue sustituida por que $\mathfrak{A}$ contuviera una función positiva en todo punto, haciendo la demostración del teorema más fácil, pero sin perder generalidad, como se demuestra en el Teorema 2.5.4. Este cambio en las hipótesis se debe a Christopher Todd [30].

Lema 2.5.1 *Sea X un espacio LCH y $\mathfrak{A}$ una subálgebra $\beta-$cerrada de $BC[X]$. Si $f \in \mathfrak{A}$, entonces $|f| \in \mathfrak{A}$, y por tanto, $\mathfrak{A}$ es una retícula.*

Demostración.

Sea $f \in \mathfrak{A}$, con f no nula, sea $h = \frac{f}{\|f\|}$. Por el Lema B.3.4 existe un polinomio P con coeficientes en $\mathbb{R}$ tal que $\||h| - P \circ h\| < \epsilon$ y $P(0) = 0$, entonces

$$P \circ h = a_1 h + a_2 h^2 + \cdots + a_n h^n \in \mathfrak{A}$$

ya que $\mathfrak{A}$ es una álgebra.

Como $\mathfrak{A}$ es $\beta-$cerrada es también $\sigma-$cerrada y por tanto, $|h| \in \mathfrak{A}$. Entonces $|f| = \|f\| \, |h| \in \mathfrak{A}$. Esto prueba el primer aserto, y la segunda afirmación se sigue de:

$$\max\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|), \quad \min\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$$

$\square$

Lema 2.5.2 *Sea X un espacio LCH y $\mathfrak{A}$ una subálgebra $\beta-$cerrada de $BC[X]$ que contiene una función estrictamente positiva, entonces $\mathfrak{A}$ contiene a las funciones constantes.*

Demostración.

Sea g una función positiva que está contenida en $\mathfrak{A}$. Podemos suponer que $\|g\| \leq 1$, ya que si no es así la podemos sustituir por $\frac{g}{\|g\|}$.

Basta probar que $\mathfrak{A}$ contiene a la función constante 1.

Del Corolario B.2.5 se tiene: $g \in \mathfrak{A}$ implica $g^r \in \mathfrak{A}$ para todo $r > 0$. En particular, $h_n = g^{\frac{1}{n}} \in \mathfrak{A}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $0 < g(x) \leq 1$ para todo $x \in X$, y $\|h_n\| \leq 1$, tenemos que la sucesión (h_n) es uniformemente acotada en X, creciente y converge puntualmente a 1. Por el Teorema de Dini converge uniformemente en cada subconjunto compacto de X, es decir (h_n) es una sucesión $\sigma-$acotada y $\kappa-$convergente; por tanto, es $\beta-$convergente. Como $\mathfrak{A}$ es $\beta-$cerrada entonces $1 \in \mathfrak{A}$.$\square$

Teorema 2.5.3 *Sea X un espacio LCH y $\mathfrak{A}$ una subálgebra $\beta-$cerrada de $BC[X]$. Si $\mathfrak{A}$ separa puntos de X y contiene una función positiva, entonces $\mathfrak{A} = BC[X]$.*

Demostración.

Sea $g \in BC[X]$, y sea $M = \|g\|$. Dado $\phi \in C_0[X]$ y $0 < \epsilon < M$ existe K compacto tal que $|\phi(x)| < \frac{\epsilon}{6M}$ para toda $x \notin K$. Sea $\mathfrak{A}_K$ el conjunto de las funciones en K obtenidas por la restricción de $f \in \mathfrak{A}$ al conjunto K. $\mathfrak{A}_K \subset C[K]$ es una subálgebra que separa puntos en K y por el resultado anterior contiene a las constantes, entonces debido al Teorema estándar de Stone-Weierstrass $\mathfrak{A}_K$ es $\sigma-$densa en $C[K]$ teniendo de esta manera que existe $f \in \mathfrak{A}$ tal que $|f(x) - g(X)| < \frac{\epsilon}{2}$ para todo $x \in K$. Sea $f_0 = \max\{\min\{f, 2M\}, -2M\}$, entonces $f_0 \in \mathfrak{A}$ ya que $\mathfrak{A}$ es una retícula. De aquí se sigue que $|f_0(x) - g(x)| < \frac{\epsilon}{2}$ para todo $x \in K$. Para cada $x \in X$,

$$\begin{aligned} |(f_0(x) - g(x))\phi(x)| &\leq \sup_{x\in K} |f_0(x) - g(x)||\phi(x)| + \sup_{x\notin K} |f_0(x) - g(x)||\phi(x)| \\ &< \frac{\epsilon}{2}\|\phi\| + 3M\frac{\epsilon}{6M} = \epsilon.. \end{aligned}$$

O sea, cualquier $\beta-$ vecindad de g contiene una función f_0 de $\mathfrak{A}$ y como $\mathfrak{A}$ es $\beta-$cerrada entonces $g \in \mathfrak{A}$, por tanto, $\mathfrak{A} = BC[X]$. □

Observamos que la hipótesis: "$\mathfrak{A}$ subálgebra de $BC[X]$ tal que contiene una función estrictamente positiva" puede ser reemplazada por: "$\mathfrak{A}$ subálgebra de $BC[X]$ tal que para cada $x \in X$ existe $g \in \mathfrak{A}$ tal que $g(x) \neq 0$", ya que el resultado clásico de Stone -Weierstrass también es valido con esta condición (ver Teorema B.3.8). Con esto se tiene:

Teorema 2.5.4 *Sea X un espacio LCH y $\mathfrak{A}$ una subálgebra de $BC[X]$ la cual separa puntos de X, y para cada $x \in X$, contiene una función $g \in \mathfrak{A}$ tal que $g(x) \neq 0$, entonces $\mathfrak{A}$ es $\beta-$densa en $BC[X]$.*

Lema 2.5.5 *Sea X un espacio LCH. Si $S \subset (BC[X], \beta)$ es denso, entonces separa puntos de X y para cada $x \in X$ existe $g \in S$ tal que $g(x) \neq 0$.*

Demostración.

Por ser X LCH $BC[X]$ separa puntos de X, además para cada punto $x \in X$ existe $g \in BC[X]$ tal que $g(x) \neq 0$. Gracias a la densidad de S, éste hereda esas dos propiedades:

Sean x_0 y x_1 dos puntos distintos de X, entonces existe $f \in BC[X]$ tal que $f(x_0) \neq f(x_1)$. Por ser X es localmente compacto, para $\{x_0, x_1\}$ existe una función continua de soporte compacto $\phi : X \to [0,1]$ tal que $\phi(x_0) = \phi(x_1) = 1$.

Existe $h \in S$ tal que

$$|\phi(x)(f(x) - h(x))| < \frac{|f(x_0) - f(x_1)|}{2} \text{ para todo } x \in X$$

en particular

$$\begin{aligned} |f(x_0) - h(x_0)| &< \frac{|f(x_0) - f(x_1)|}{2} \\ |f(x_1) - h(x_1)| &< \frac{|f(x_0) - f(x_1)|}{2} \end{aligned}$$

teniéndose así:

$$\begin{aligned}|f(x_0)-f(x_1)|-|h(x_0)-h(x_1)| &\leq |(f(x_0)-f(x_1))-(h(x_0)-h(x_1))| \\ &\leq |f(x_0)-h(x_0)|+|f(x_1)-h(x_1)| \\ &< |f(x_0)-f(x_1)|,\end{aligned}$$

por tanto,

$$|h(x_0)-h(x_1)|>0$$

o lo que es lo mismo $h(x_0)\neq h(x_1)$. Así, S separa puntos de X.

Ahora probamos que para cada $x\in X$ existe $g\in S$ tal que $g(x)\neq 0$. Sea $x_0\in X$, entonces existe $f\in BC[X]$ tal que $f(x_0)\neq 0$ y por ser X localmente compacto existe $\phi: X\to[0,1]$ continua de soporte compacto tal que $\phi(x_0)=1$. Existe $g\in S$ tal que

$$|\phi(x)(f(x)-g(x))|<|f(x_0)| \text{ para todo } x\in X,$$

en particular,

$$\begin{aligned}|f(x_0)|-|g(x_0)| &\leq |f(x_0)-g(x_0)| \\ &= |\phi(x_0)(f(x_0)-g(x_0))| \\ &< |f(x_0)|.\end{aligned}$$

Por tanto, $g(x)\neq 0$ □

Teorema 2.5.6 *Sea X un espacio LCH y $\sigma-$compacto, entonces $(BC[X],\beta)$ es separable si y sólo si X es metrizable.*

Demostración.

Supongamos que X es metrizable. Como X es $\sigma-$compacto, entonces X es separable y satisface el segundo axioma de numerabilidad (Proposición y Teorema A.1.12). Como X es LCH, entonces X es completamente regular y debido a la Proposición A.2.4, la familia $Z[X]$ de conjuntos cero forma una base de los cerrados de X. Por la separabilidad de X existe una familia numerable de conjuntos cero

$$\{Z(f_n)=f_n^{-1}(0)\in Z[X]: n\in\mathbb{N}\}$$

que es base de los cerrados de X.

La familia $\{f_n: n\in\mathbb{N}\}$ tiene las siguientes dos propiedades:

(i) Separa puntos de X. Sean $x\neq y\in X$ por ser el espacio X de Hausdorff $\{y\}$ es un conjunto cerrado que no contiene a x, entonces existe $n\in\mathbb{N}$ tal que $Z(f_n)$ contiene a y y no a x, es decir $f_n(x)\neq 0=f_n(y)$.

(ii) Para cada $x\in X$ existe $n\in\mathbb{N}$ tal que $f_n(x)\neq 0$. Ésto se sigue inmediatamente de la prueba de (i).

Sea $\mathfrak{A}$ el álgebra sobre los racionales generada por $\{f_n: n\in\mathbb{N}\}$. Por tanto, $\mathfrak{A}$ es un álgebra numerable y que cumple las condiciones del Teorema 2.5.4 y es por tanto $\beta-$densa en $BC[X]$. Así el espacio $(BC[X],\beta)$ es separable.

Inversamente supongamos que $(BC[X],\beta)$ es separable y sea $S\subset BC[X]$ un subconjunto numerable y $\beta-$denso de $BC[X]$.

Sea $\mathfrak{A}_S$ la álgebra sobre los racionales generada por S. Por el Lema 1.1.19 existe $\phi \in C_0[X]$ tal que $\phi(x) \neq 0$ para todo $x \in X$. Sea

$$\phi\mathfrak{A}_S = \{\phi f : f \in \mathfrak{A}_S\} \subset C_0[X],$$

ésta es una subálgebra debido a que $\mathfrak{A}_S$ lo es y por el lema anterior, tenemos $\phi\mathfrak{A}_S$ separa puntos de X y contiene un elemento que no se anula en ningún punto de S, además el Teorema clásico de Stone-Weierstrass para $C_0[X]$ tenemos que $\phi\mathfrak{A}_S$ es uniformemente densa en $C_0[X]$.

Sea $\mathfrak{A}^*$ el subconjunto de $\phi\mathfrak{A}_S$ que consiste de aquellas funciones que satisfacen $\|f\| \leq 1$. Es claro que $\mathfrak{A}^*$separa puntos de X y contiene un elemento que no se anula en ningún punto de S; más aún, $\mathfrak{A}^*$ separa puntos de cerrados como ahora probamos:

Sea $x_0 \notin F$, con F cerrado. Existe $f : X \to [0,1]$ continua de soporte compacto tal que $f(x_0) = 1$ y $f(F) = \{0\}$, teniéndose así que $f(x_0) \notin \overline{f(F)}$. Por la densidad uniforme $\phi\mathfrak{A}_S$ en $C_0[X]$ existe $g \in \phi\mathfrak{A}_S$ tal que

$$|f(x) - g(x)| < \frac{1}{3} \text{ para todo } x \in X;$$

en particular,

$$|g(x_0)| > \frac{2}{3}$$

y

$$|g(x)| < \frac{1}{3} \text{ para todo } x \in F.$$

Entonces, $h(x) = \dfrac{g(x)}{\|g\|} \in \mathfrak{A}^*$ satisface:

$$h(x_0) \notin \overline{h(F)}.$$

por lo que $\mathfrak{A}^*$ separa puntos de cerrados.

Finalmente sea

$$E : X \to \prod \left\{[0,1]_f : f \in \mathfrak{A}^*\right\};$$

definida como $x \to \{f(x)\}_f$. Debido al Teorema A.3.8 se tiene que E es un homeomorfismo sobre su imagen, teniéndose así que X es metrizable por serlo $\prod \left\{[0,1]_f : f \in \mathfrak{A}^*\right\}$. □

Capítulo 3

Generalizaciones de la topología estricta de Buck

En el capítulo anterior definimos y probamos algunos resultados sobre la topología estricta en $BC[X:E]$, donde X es un espacio localmente compacto y Hausdorff y E es un espacio vectorial sobre los reales localmente convexo y completo. En este capítulo la definición de topología estricta es generalizada en $BC[X]$ cuando X es un espacio topológico completamente regular.

La topología estricta de Buck β sobre $BC[X]$ está definida cuando X es localmente compacto, y en particular completamente regular; entonces tiene sentido preguntarse si la definición puede ser extendida al caso en que X sea completamente regular, pero no localmente compacto. La respuesta es que de seguir exactamente el modelo hasta ahora estudiado la topología resultante podría resultar muy pobre, ya que para determinarla se usa un conjunto de seminormas definidas con la ayuda de los elementos de $C_0[X]$ y como vimos en el Capítulo 1 (Proposición 1.1.9), podemos encontrar espacios completamente regulares, pero no localmente compactos en los cuales el conjunto de funciones continuas y acotadas que se anulan al infinito consta exclusivamente de la función constante cero. Por tal motivo es necesario tomar un sustituto de $C_0[X]$.

3.1 Topología estricta de Giles

Sea X un conjunto no vacío. Denotamos por $B[X]$ al conjunto de funciones reales y acotadas definidas en X.

Ponemos en contexto definiciones dadas anteriormente para funciones continuas.

Definición 3.1.1 *Sean X un espacio topológico y $f \in B[X]$.*

(1) Se dice que f pertenece a $B_0(X)$ si se anula al infinito, o sea, si para cada $\epsilon > 0$ existe un compacto $K \subset X$ tal que

$$|f(x)| < \epsilon \text{ si } x \in X \setminus K.$$

(2) Se dice que f pertenece a $B_{00}(X)$ si tiene soporte compacto; es decir

$$\overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}} \text{ es compacto}$$

Es claro que $B_{00}(X) \subset B_0(X)$.

Si X es un espacio topológico, entonces para cada función $\phi \in B[X]$ definimos la seminorma en $BC[X]$ dada por

$$\|f\|_\phi = \sup\{|\phi(x) f(x)| : x \in X\} \text{ para todo } f \in BC[X]$$

En lo que resta de la sección X denota un espacio completamente regular

Definición 3.1.2 *Definimos:*

(1) La topología compacto abierta (compacto convergente) k en $BC[X]$, es la generada por la familia de seminormas

$$\|f\|_\phi = \sup\{|\phi(x) f(x)| : x \in X\}$$

con $\phi \in B_{00}[X]$.

(2) La topología estricta β en $BC[X]$, es la generada por la familia de seminormas

$$\|f\|_\phi = \sup\{|\phi(x) f(x)| : x \in X\}$$

con $\phi \in B_0[X]$.

(3) La topología uniforme σ, es la definida por la norma

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

para $f \in BC[X]$. Esta topología es equivalente ala obtenida con la familia de seminormas

$$\left\{\|\cdot\|_\phi : \phi \in B[X]\right\}$$

Como las dos primeras topologías arriba definidas son generadas por familias de seminormas, entonces cada una hace a $BC[X]$ un espacio localmente convexo.

Esta "nueva" topología estricta ha sido estudiada por varios matemático y aunque no se sabe a ciencia cierta quien fue el primero en definirla de esta forma, en este trabajo se le dará el crédito a Robin Giles quien en 1971 publicó en [16] esta generalización de la topología estricta de Buck.

Proposición 3.1.3 *Una base para la topología β en $BC[X]$ es la familia*

$$V_{\phi,\epsilon,f} = \left\{g \in BC[X] : \|f - g\|_\phi < \epsilon\right\}$$

variando $\phi \in B_0[X]$, $\epsilon > 0$ y $f \in BC[X]$.

Demostración.

Se sigue de la Proposición 1.2.8 □

Antes de ver algunas propiedades que cumple la topología estricta de Giles hagamos un paréntesis para probar el siguiente resultado que recuerda el Lema además de tener gran utilidad más adelante.

Lemma 1 *Si f es una función real en X y ϕf es acotada para cada ϕ en $B_0[X]$, entonces $f \in B[X]$.*

Demostración.

Supongamos que f no es acotada, entonces existe una sucesión (x_n) en X, cuyos términos son distintos entre sí, tal que $|f(x_n)| \to \infty$. Sea

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} |f(x_n)|^{-\frac{1}{2}} \chi(\{x_n\})$$

entonces $\phi \in B_0[X]$, pero ϕf no es acotada. □

Teorema 3.1.4 *Las topologías en $BC[X]$ arriba definidas tienen las siguientes propiedades:*

(1) $\kappa \subset \beta \subset \sigma$. κ es de Hausdorff y por tanto, β y σ también lo son.

(2) Si X es localmente compacto entonces los conceptos de topologías estrictas del capítulo anterior y de éste coinciden.

(3) La topología compacto abierta arriba definida está generada por la familia de seminormas $\{\|f\|_K : K \subset X$ compacto no vacío$\}$ donde,

$$\|f\|_K = \sup\{|f(x)| : x \in K\}$$

para cada compacto K no vacío. Así, las nociones de topologías compacto abierta del capítulo anterior y de éste, coinciden.

(4) Sobre cualquier conjunto $\sigma-$ acotado las topologías β y κ coinciden.

Demostración.

(1) Sea $\phi \in B_{00}[X]$, entonces $\phi \in B_0[X]$ por tanto $\kappa \subset \beta$.

Ahora sea $\phi \in B_0[X]$ entonces existe $M > 0$ tal que $|\phi(x)| \leq M$ para todo $x \in X$, así

$$\|f\|_\phi = \sup\{|\phi(x) f(x)| : x \in X\} \leq M \|f\|$$

con lo cual $\beta \subset \sigma$.

Dado $f \neq 0$ en $BC[X]$, definimos $\phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq x_0 \\ 1 & \text{si } x = x_0 \end{cases}$, donde $f(x_0) \neq 0$.
Entonces, $\phi \in B_{00}[X]$ y $\|f\|_\phi \neq 0$.

(2) Sea X un espacio LCH y denotemos por β_1 la topología estricta definida en el capítulo anterior. Como $C_0[x]$ está contenido en $B_0[X]$ entonces $\beta_1 \subset \beta$.

Por otra parte, sea $\phi \in B_0[X]$, por la Proposición 1.1.4 existe una sucesión (K_n) de compactos en X tales que $K_n \subset K^\circ{}_{n+1}$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y $|\phi(x)| < \frac{1}{2^n}$ para $x \notin K_n$. Por el Lema de Urysohn, para cada $n \geq 1$ existe una función continua $g_n : X \to [0,1]$ tal que

$$g_n(K_n) = \{1\} \text{ y } g_n(X \setminus K_{n+1}) = \{0\}$$

Sea

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n(x)}{2^n}$$

entonces $g \in C_0[X]$ y

$$|\phi(x)| \leq g(x)$$

por tanto

$$\|f\|_\phi \leq \|f\|_g \text{ para toda } f \in BC[X]$$

teniéndose $\beta \subset \beta_1$.

(3) Llamemos κ_1 a la topología en $BC[X]$ generada por la familia de seminormas $\{\|f\|_K : K \subset X \text{ compacto no vacío}\}$. Sea ϕ una función real de soporte compacto y tal que $|\phi(x)| \leq M$ para todo $x \in X$ y algún $M > 0$. Entonces

$$\|f\|_\phi = \sup\{|f(x)\phi(x)| : x \in \operatorname{supp}(f)\} \leq M \|f\|_{\operatorname{supp}(f)}$$

teniéndose $\kappa \subset \kappa_1$.

Ahora, sea $K \subset X$ un compacto, definimos

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in X \setminus K \\ 1 & \text{si } x \in K \end{cases}$$

Entonces $\phi \in B_{00}[X]$ y

$$\begin{aligned} \|f\|_K &= \sup\{|f(x)\phi(x)| : x \in X\} \\ &= \|f\|_\phi \end{aligned}$$

por tanto $\kappa_1 \subset \kappa$.

(4) Sea $S \subset BC[X]$ σ−acotado, es decir existe $M > 0$ tal que $\|f\| < M$.

Como $\kappa \subset \beta$ entonces $\kappa|_S \subset \beta|_S$ por lo cual sólo resta demostrar la otra contención; para esto es suficiente probar que $i : (S, \kappa) \to (S, \beta)$ es continua. Sean $(f_i)_{i \in I}$ una red en S que κ−converge a $f_0 \in S$, $\phi \in B_0[X]$ y $\epsilon > 0$, entonces existe $K \subset X$ compacto tal que $|\phi(x)| < \frac{\epsilon}{4M}$ para toda $x \in X \setminus K$. Definimos:

$$g(x) = \begin{cases} \phi(x) \text{ si } x \in K \\ 0 \text{ si } x \notin K \end{cases}$$

entonces g es acotada de soporte compacto, además existe $i_0 \in I$ tal que

$$\|f_i - f_0\|_g < \frac{\epsilon}{2} \text{ siempre que } i \succcurlyeq i_0.$$

Así,

$$\begin{aligned} \|f_i - f_0\|_\phi &= \sup\left[\{|\phi(x)|\,|f_i(x) - f_0(x)| : x \in K\} \bigcup \{|\phi(x)|\,|f_i(x) - f_0(x)| : x \notin K\}\right] \\ &\leq \|f_i - f_0\|_g + \frac{\epsilon}{4M}\|f_i - f_0\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{4M}(2M) = \epsilon, \text{ siempre que } i \succcurlyeq i_0 \end{aligned}$$

o sea, $f_i \xrightarrow{\beta} f_0$.

3.1.1 k-espacios y espacios aparentemente compactos

Definición 3.1.5 *Un espacio de Hausdorff X es un $k-$espacio (o un espacio compactamente generado) si cumple la siguiente condición:*

$U \subset X$ es abierto (cerrado) si y sólo si $U \cap K$ es abierto (cerrado) en K para todo compacto $K \subset X$.

Nótese que si U es abierto (cerrado) en X entonces siempre se cumple que $U \cap K$ es abierto (cerrado) en K para todo $K \subset X$ compacto, por lo cual para probar que un espacio de Hausdorff es un k-espacio será suficiente probar la otra implicación.

Proposición 3.1.6 *Todo espacio LCH es un $k-$espacio.*

Demostración.

Sea X un espacio LCH y supongamos que $U \cap K$ es abierto en K para todo $K \subset X$ compacto. Sean $x \in U$ y N una vecindad compacta de x, entonces $U \cap N$ es un abierto en N, entonces

$$U \cap N^{\circ} = (U \cap N) \cap N^{\circ}$$

es un abierto en N°, y por tanto en X; o sea, U es una vecindad de x en U y U es entonces un abierto en X. □

Corolario 3.1.7 *Sean Y un espacio topológico y X un $k-$espacio. Entonces $f : X \to Y$ es continua si y sólo si $f\,|_K$ es continua para cada $K \subset X$ compacto.*

No todo $k-$espacio es completamente regular (ver Apéndice A), ni viceversa.

Nótese que la topología κ puede ser definida en $C[X]$ de la misma manera que se hizo en $BC[X]$, y en este caso también vale (3) del Teorema 3.1.4.

Lema 3.1.8 *Si X es un $k-$espacio, entonces $(C[X], \kappa)$ es completo*

Demostración.

Sea $(f_i)_{i \in I}$ una red de Cauchy en $(C[X], \kappa)$. Sean $x \in X$ y $\epsilon > 0$. Existe $i_0 \in I$ tal que

$$\|f_i - f_j\|_{\{x\}} < \epsilon \text{ si } i, j \succcurlyeq i_0.$$

De donde $(f_i(x))_{i \in I}$ es una red de Cauchy en $\mathbb{R}$ para cada $x \in X$. Por tanto, se tiene que para cada x existe $f(x) \in \mathbb{R}$ tal que $f_i(x) \to f(x)$.

Sea $K \subset X$ compacto. Existe $i_0 \in I$ tal que

$$\|f_i - f_j\|_K < \frac{\epsilon}{2} \text{ si } i, j \succcurlyeq i_0.$$

De donde,

$$|f_i(x) - f_j(x)| < \frac{\epsilon}{2} \text{ si } i, j \succcurlyeq i_0 \text{ y para todo } x \in K.$$

En esta expresión fijamos $j \succcurlyeq i_0$ y tomamos el límite sobre i, con lo que concluimos

$$|f(x) - f_j(x)| < \epsilon \text{ si } j \succcurlyeq i_0 \text{ y para todo } x \in K;$$

o sea,

$$\|f - f_j\|_K < \epsilon \text{ si } j \geqslant i_0.$$

con lo cual habremos concluido siempre y cuando f sea continua; pero esto se obtiene de la misma desigualdad ya que ella implica que $(f_i)_{i\in I}$ converge uniformemente a f en K y por consiguiente $f : K \to \mathbb{R}$ es continua y por el corolario anterior $f : X \to \mathbb{R}$ es continua. □

Teorema 3.1.9 *Si X es un $k-$espacio completamente regular, entonces $(BC[X], \beta)$ es completo.*

Demostración.

Sea $(f_i)_{i\in I}$ una red β -de Cauchy. Debido a que $\kappa \subset \beta$, la red $(f_i)_{i\in I}$ es una red $\kappa-$ de Cauchy y gracias al Lema 3.1.8 dicha red converge a $f \in C[X]$.

Afirmamos que $f_i \xrightarrow{\beta} f$ y $\phi f \in B[X]$ para todo $\phi \in B_0[X]$. Sean $K \subset X$ compacto, $\epsilon > 0$ y $\phi \in B_0[X]$, entonces existe $M > 0$ tal que

$$|\phi(x)| \leq M \text{ para todo } x \in X.$$

$f_i \xrightarrow{\kappa} f$ implica que existe $i_0 \in I$ tal que

$$\|f_i - f\|_K < \frac{\epsilon}{M} \text{ siempre que } i \geqslant i_0$$

Así,

$$\|\phi f_i - \phi f\|_K < M\|f_i - f\|_K < \epsilon \text{ siempre que } i \geqslant i_0$$

y por tanto, $\phi f_i \xrightarrow{\kappa} \phi f$.

La hipótesis de que la red $(f_i)_{i\in I}$ es $\beta-$ de Cauchy implica que (ϕf_i) es $\sigma-$de Cauchy en $B[X]$, pero como $B[X]$ es $\sigma-$completo entonces la red (ϕf_i) $\sigma-$converge para todo $\phi \in B_0[X]$. Supongamos $\phi f_i \xrightarrow{\sigma} h_\phi$, con $h_\phi \in B[X]$. Como $\kappa \subset \sigma$ y por lo visto en el párrafo anterior, $h_\phi = \phi f$. Así, $\phi f \in B[X]$ y $f_i \xrightarrow{\beta} f$. Por el Lema 1 $f \in B[X]$ y así $f \in BC[X]$. □

Obsérvese que no es redundante pedir en el Teorema anterior que el espacio X sea completamente regular y k-espacio ya que estos conceptos son independientes como puede verse a través de los siguientes ejemplos.

Ejemplo 3.1.10 *Un espacio completamente regular que no es $k-$ espacio. Sea $X = \mathbb{N}\times\mathbb{N}\cup\{(0,0)\}$ y definamos una topología en X de la siguiente manera:*

$$\tau = P(\mathbb{N}\times\mathbb{N}) \cup \{U : U \in N(\overline{0})\}$$

donde $P(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ es el conjunto potencia de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ y $N(\overline{0})$ es la familia de subconjuntos de X tales que cada uno contiene al cero y a casi todos los puntos de casi todas las columnas de X. Se verifica fácilmente que τ es una topología para X. (X,τ) es un espacio normal ya que es T_1 y por ejemplo, dados dos cerrados A, B tales que $(0,0) \in A$ y $A \cap B = \emptyset$. Existen $U = X \setminus B$ y $V = B$ abiertos ajenos que contienen respectivamente a los cerrados. Cuando el 0 no está en ninguno de los cerrados es claro que ellos mismos son abiedrtos que los separan.

X no es un $k-$ espacio ya que sus compactos son aquellos subconjuntos finitos de X y sólo esos, pues cualquier conjunto infinito K está contenido en casi todas las columnas de X o sólo en un número finito de ellas, y en ambos casos siempre es posible dar una cubierta que no tiene subcubiertas finita.

Ejemplo 3.1.11 *Un $k-$ espacio que no es completamente regular. Sea*

$$X = \{(0,0)\} \cup \left\{ \left(\frac{1}{n}, y \right) : n \geq 1, y \geq 0 \right\}$$

y definamos una topología en X a través de un sistema fundamental de vecindades. Para cualquier punto $x \in X$, distinto del origen, una base del sistema de vecindades es

$$V_x = \left\{ B_{\frac{1}{m}}(x) \cap X : m \in \mathbb{N} \right\}$$

donde $B_{\frac{1}{m}}(x) = \left\{ y \in \mathbb{R}^2 : \|x - y\| < \frac{1}{m} \right\}$. Y para el origen una base de su sistema de vecindades está dada por:

$$V_0 = \{V_m : m \geq 1\}$$

donde

$$V_m = \{(0,0)\} \bigcup \left\{ \left(\frac{1}{n}, y \right) : y > 0 \text{ y } n \geq m \right\} \text{ para } m \in \mathbb{N}.$$

Nótese que este espacio es primero numerable, por tanto, un $k-$espacio. Sin embargo, no es completamente regular. Ya que para toda vecindad del $(0,0)$ existen una infinidad de puntos de la forma $(\frac{1}{n}, 0)$ que pertenecen a la cerradura de esa vecindad. Por consiguiente, no es posible que exista una función continua que en $(0,0)$ valga 0 y en todos los puntos $(\frac{1}{n}, 0)$ valga 1.

Se observó en el Capítulo 2 que si X es compacto, entonces la topología compacto abierta y la estricta de Buck, coinciden. Sin embargo, quedó pendiente determinar si ellas coincidían sólo en ese caso. La misma situción se presenta con la topología estricta de Giles (3.3.17).

Poco mmás adelante se prueba que esas coincidencias ocurren para otro tipo de espacios llamados aparentemente compactos y sólo para ellos.

Definición 3.1.12 *Un espacio topológico de Hausdorff X es aparentemente compacto si toda unión numerable de subconjuntos compactos de X es relativamente compacto en X. Esto es equivalente a decir que para toda sucesión de subconjuntos compactos en X hay un compacto en X que contiene a todo compacto de la sucesión.*

Por consiguiente, tan pronto exhibamos un ejemplo de un espacio localmente y aparentemente compacto que no sea compacto quedará resuelto lo que había quedado pendiente. Dicho ejemplo es el espacio $[0, \Omega)$ con la topología del orden, donde Ω es el primer ordinal no numerable.

Teorema 3.1.13 *Sea X completamente regular, entonces $\beta = \kappa$ en $BC[X]$ si y sólo si X es aparentemente compacto.*

Demostración.

Sabemos que $\kappa \subset \beta$ para todo X completamente regular.

Sea X aparentemente compacto, entonces para $\phi \in B_0[X]$ y $n \in \mathbb{N}$ existe $K_n \subset X$ compacto tal que

$$|\phi(x)| < \frac{1}{n} \text{ para todo } x \notin K_n$$

Sea $K = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n}$ por tanto, K es compacto $\phi(x) = 0$ si $x \notin K$, de donde,

$$\|f\|_{\phi} = \sup\{|f(x)\phi(x)| : x \in X\} \leq M \|f\|_K$$

para toda $f \in BC[X]$, donde M es una cota para ϕ; con lo que se obtiene, $\beta \subset \kappa$.

Ahora supóngase que X no es aparentemente compacto, es decir existe una sucesión, que podemos suponer creciente, $(K_n)_{n=1}^{\infty}$ de subconjuntos compactos de X tal que para todo compacto $K \subset X$ y $N > 0$ existen $n > N$ y $x_{K,n} \in K_n$ tales que $x_{K,n} \notin K$. Por tanto, hay una sucesión estrictamente creciente (n_j) de naturales tales que $x_{K,j} \in K_{n_j}$ y $x_{K,j} \notin K$

Ahora para cada $j \geq 1$ y $K \subset X$ compacto sea $f_{K,j} \in BC[X]$ tal que

$$f_{K,j}(K) = \{0\} \text{ y } f_{K,j}(x_{K,j}) = 2^j$$

Si definimos $(K,j) \succcurlyeq \left(K',j'\right)$ si $K' \subset K$ y $j \geq j'$, entonces la red $(f_{K,j})$ $\kappa-$converge a cero; sin embargo, no converge estrictamente a cero ya que la función

$$\phi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \chi_{K_{n_j}}$$

donde $\chi_{K_{n_j}}$ es la función característica de K_{n_j}, claramente pertenece a $B_0[X]$ y para cualquier (K,j) se tiene:

$$f_{K,j}(x_{K,j})\phi(x_{K,j}) \geq \frac{2^j}{2^j} = 1$$

y por tanto,

$$\|f_{K,j}\|_{\phi} \geq 1$$

□

Corolario 3.1.14 *Sea X localmente compacto y Hausdorff. Entonces la topología estricta de Buck coincide con la compacto abierta si y sólo si X es aparentemente compacto.*

Definición 3.1.15 *Sean $g \in B[X]$ y $C \subset B(X)$. Se dice que la función g domina a C si para cada $f \in C$ existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M|g(x)|$ para todo $x \in X$. Se dice que g domina a f si domina a $\{f\}$.*

Lema 3.1.16 *Sea X completamente regular. Si cada función $g \in B[X]$ que domina a $B_0[X]$ domina también a la función constante 1, entonces cada β-acotado es σ-acotado.*

Demostración.

Sea $A \subset BC[X]$ β-acotado, entonces para cada $\phi \in B_0(X)$ existe $M_\phi > 0$ tal que $\|\phi\| < M_\phi$ y

$$\|f\|_{\phi} < M_\phi \text{ para todo } f \in A$$

Sea $g = \sup\left\{\frac{|\phi|}{U_\phi} : \phi \in B_0(X)\right\}$, obsérvese que g domina a $B_0(X)$ por tanto domina al 1, es decir existe $M > 0$ tal que

$$M\,|g(x)| \geq 1 \text{ para toda } x \in X$$

Defínase

$$U_g = \{f \in B[X] : \|fg\| \leq 1\}$$

U_g es $\sigma-$acotado ya que

$$\|f\| \leq M\,\|fg\| \leq 1 \text{ para toda } f \in U_g$$

además $A \subset U_g$, por tanto A es $\sigma-$acotada. $\square$

Lema 3.1.17 *Sea X completamente regular. Si g domina a $B_0[X]$, entonces g no se anula en ningún punto.*

Demostración.

Supóngase que existe $x_0 \in X$ tal que $g(x_0) = 0$. Definimos:

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x = x_0 \\ 0 \text{ si } x \neq x_0 \end{cases}$$

la cual pertenece a $B_0(X)$. Para todo $M > 0$ se cumple:

$$|\phi(x_0)| > M\,|g(x_0)|$$

por tanto, g no domina a $B_0(X)$. $\square$

Teorema 3.1.18 *β y σ tienen los mismos conjuntos acotados.*

Demostración.

Como $\beta \subset \sigma$ entonces sólo resta demostrar que todo $\beta-$acotado es $\sigma-$ acotado, y por el penúltimo lema para esto es suficiente probar que si g que domina a $B_0(X)$, entonces domina a la constante 1.

Supóngase que g no domina al 1, entonces existe $\{x_n\}_n$, sucesión en X, tal que $|g(x_n)| \to 0$.

Sea

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \{x_n : n \geq 1\} \\ |g(x_n)|^{\frac{1}{2}} & \text{si } x \in \{x_n : n \geq 1\} \end{cases}.$$

Para cada $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|g(x_n)| < \epsilon^2 \text{ para todo } n \geq N.$$

Entonces para el compacto $K = \{x_1, \ldots, x_{N-1}\}$ se tiene que

$$|\phi(x)| < \epsilon \text{ para todo } x \notin K,$$

es decir, $\phi \in B_0(X)$; sin embargo, g no domina a ϕ , ya que dado $M > 0$ existen $M_1 > 0$ y $n_1 \geq 1$ tales que $M_1^{\frac{1}{2}} > M$ y

$$M_1\,|g(x_{n_1})| < 1,$$

y por tanto,

$$|g(x_{n_1})|^{\frac{1}{2}} > M_1^{\frac{1}{2}} |g(x_{n_1})|$$

De donde,

$$|\phi(x_{n_1})| = |g(x_{n_1})|^{\frac{1}{2}} > M |g(x_{n_1})|$$

□

3.2 Teorema de Stone-Weierstrass para $(BC[X], \beta)$

En el capítulo anterior se probó el Teorema de Stone Weierstrass para $BC[X]$ con la topología estricta de Buck, cuando X es localmente compacto. Ahora se demuestra eses teorema, cuando X es completamente regular y $BC[X]$ tiene la topología estricta de Giles.

En lo que resta de la sección se supone que β es la topología estricta de Giles en $BC[X]$, con X completamente regular.

Lema 3.2.1 *Sea X un espacio completamente regular y $\mathfrak{A}$ una subálgebra β-cerrada de $BC[X]$ la cual separa puntos. Si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua y acotada tal que $g(0) = 0$, entonces $g \circ f \in \mathfrak{A}$ para todo $f \in \mathfrak{A}$*

Demostración.
Como $\mathfrak{A}$ es β-cerrada y $\beta \subset \sigma$, entonces es uniformemente cerrada.

Sea $\mathfrak{U}^\beta = \left\{f^\beta : f \in \mathfrak{A}\right\}$ donde f^β es la extensión de f a la compactación de Stone Čhech $\beta(X)$ de X.

Esta es una subálgebra uniformemente cerrada de $C[\beta(X)]$ ya que $\mathfrak{U}$ lo es en $C[X]$;

En $\beta(X)$ definimos la relación de equivalencia:

$$x \sim y \text{ si } f^\beta(x) = f^\beta(y) \text{ para todo } f \in \mathfrak{A}$$

Sea $\beta(X)/\sim$ el espacio cociente, es decir su topología es la topología de identificación determinada por la función canónica o dicho de otra forma es la máxima topología que hace continua a la función cociente (Apéndice A):

$$p : \underset{x}{\beta(X)} \underset{\to}{\to} \underset{[x]}{\beta(X)/\sim}$$

$\beta(X)/\sim$ es Hausdorff ya que $\left\{[x] : f^\beta(x) < a\right\}$ y $\left\{[x] : f^\beta(x) > a\right\}$ son abiertos en el cociente para $a \in \mathbb{R}$ y $f \in \mathfrak{A}$.

p es además de suprayectiva, cerrada, ya que $\beta(X)$ es compacto.

Para cada $f \in \mathfrak{A}$ definimos F_f como la función que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \beta(X) & \xrightarrow{p} & \beta(X)/\sim \\ f^\beta \searrow & & \swarrow F_f \\ & \mathbb{R} & \end{array}$$

O sea, $F_f([x]) = f^{\beta}(x)$ para todo $x \in \beta(X)$. Está bien definida, debido a como se estableció la relación de equivalencia.

La función F_f es continua ya que para todo cerrado $A \subset \mathbb{R}$ se tiene

$$F_f^{-1}(A) = \left\{[x] : f^{\beta}(x) \in A\right\} = p\left(\left(f^{\beta}\right)^{-1}(A)\right)$$

y $p\left(\left(f^{\beta}\right)^{-1}(A)\right)$ es cerrado. Así, $F_f \in C(\beta(X)/\sim)$ para todo $f \in \mathfrak{A}$.

Afirmamos que $\{F_f : f \in \mathfrak{U}\}$ es una álgebra de $C[\beta(X)/\sim]$ que separa puntos de $\beta(X)/\sim$ y es uniformemente cerrada. La primera afirmación se sigue de las relaciones:

$$\begin{aligned} aF_f + F_g &= F_{af+g} \\ F_f F_g &= F_{fg} \end{aligned}$$

Si $[x], [y] \in \beta(X)/\sim$ son distintos, es decir $x \nsim y$, entonces existe $f \in \mathfrak{A}$ tal que

$$f^{\beta}(x) \neq f^{\beta}(y)$$

por tanto F_f cumple

$$F_f([x]) \neq F_f([y])$$

Falta probar que es uniformemente cerrada, para ello probemos que es un subespacio uniformemente completo de $C[\beta(X)/\sim]$:

Sea $(F_{f_n})_n$ una sucesión de Cauchy en $\{F_f : f \in \mathfrak{U}\}$, entonces $(f_n)_n$ es una sucesión uniformemente de Cauchy, pero $\mathfrak{U}$ es uniformemente cerrada en $BC[X]$, por tanto, completa, entonces, existe $f \in \mathfrak{U}$ tal que (f_n) converge uniformemente a f en X. Por ser X denso en $\beta(X)$ se sigue que $\left(f_n^{\beta}\right)$ converge uniformemente a f^{β} en $\beta(X)$. Es decir, $(F_{f_n})_n$ converge uniformemente a F_f en $\beta(X)/\sim$.

Por el teorema estándar de Stone Weierstrass se tiene que

$$\{F_f : f \in \mathfrak{U}\} = C(\beta(X)/\sim) \tag{3.1}$$

o bien , existe $[x_0] \in \beta(X)/\sim$ tal que

$$\{F_f : f \in \mathfrak{U}\} = \{F \in C(\beta(X)/\sim) : F([x_0]) = 0\} \tag{3.2}$$

Sean $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y acotada tal que $g(0) = 0$ y $f_0 \in \mathfrak{A}$.

Ya sea que se cumpla (3.1) o (3.2) tenemos:

$$g \circ F_{f_0} \in \{F_f : f \in \mathfrak{U}\}$$

Así, existe $f \in \mathfrak{U}$ tal que $g \circ f_0(x) = f(x)$ para todo $x \in X$ y por tanto $g \circ f_0 \in \mathfrak{U}$. □

Teorema 3.2.2 (Stone Weierstrass) *Sea X un espacio topológico y $\mathfrak{A}$ una subálgebra β-cerrada de $BC[X]$ la cual separa puntos y contiene, para cada $x \in X$, una función que no se anula en x, entonces $\mathfrak{A} = BC[X]$*

Demostración.

Es suficiente probar que $\mathfrak{A}$ es β−densa en $BC[X]$.

Sean $f \in BC[X]$, $\phi \in B_0[X]$ y $\epsilon > 0$, demostremos que existe $h \in \mathfrak{A}$ tal que $\|f - h\|_\phi < \epsilon$.

Sea $M > 0$ tal que $\|f\| < M$ y $\|\phi\| < M$. Tomemos $0 < \epsilon_0 < \min\left(\frac{\epsilon}{3M}, M\right)$. Existe $K \subset X$ compacto tal que $|\phi(x)| < \epsilon_0$ para todo $x \notin K$. Como $\mathfrak{A}$ separa puntos de X y contiene, para cada $x \in X$, una función que no se anula en x, entonces, en particular, $\mathfrak{A}$ separa puntos de K y para cada $x \in K$ existe una función en $\mathfrak{A}$ que no se anula en x. Entonces por la versión estándar del teorema de Stone-Weierstrass existe $h' \in \mathfrak{A}$ tal que

$$\|(f - h')\|_K < \epsilon_0.$$

Definimos:

$$g(\lambda) = \begin{cases} \lambda \text{ si } |\lambda| \leq 2M \\ 2M \text{ si } \lambda > 2M \\ -2M \text{ si } \lambda < -2M \end{cases}$$

y $h(x) = (g \circ h')(x)$, entonces $\|h\| \leq 2M$ y por el lema anterior $h \in \mathfrak{A}$.

Como $0 < \epsilon_0 < M$, tenemos que

$$|(f(x) - h(x))\phi(x)| < \epsilon_0 M \text{ si } x \in K$$

y como $\|f\| \leq M$ y $\|h\| \leq 2M$, entonces

$$|(f(x) - h(x))\phi(x)| < 3M\epsilon_0 \text{ para } x \notin K.$$

Por tanto, $\|f - h\|_\phi < \epsilon$. □

3.3 Topología estricta de Sentilles

Todo espacio compacto es un espacio completamente regular, pero como se vio en los capítulos anteriores si el espacio es compacto las topologías compacto abierta y la uniforme coinciden con la topología estricta haciendo trivial el análisis, por lo cual se considera en esta sección a un espacio X completamente regular y no compacto. Denotamos, como es usual, a la compactación de Stone Čhech de X como $\beta(X)$.

Definición 3.3.1 *Para cada conjunto $A \subset \beta(X) \setminus X$ sea*

$$C_A = C_A[X] = \left\{ f \in BC[X] : f^\beta|_A = 0 \right\}$$

donde f^β es la extensión de f a $\beta(X)$.

Notamos que C_A es un álgebra real de Banach con la norma uniforme para cada $A \subset \beta(X) \setminus X$

En el Apéndice C definimos de manera general la identidad aproximada en un álgebra de Banach, en particular tenemos:

Definición 3.3.2 *Una red* $\{f_i\}_{i\in I}$ *en* C_A *es una identidad aproximada para* C_A *si*

$$\lim_i \|f_i f - f\| = 0 \text{ para toda } f \in C_A$$

Además, se dice que la identidad aproximada es acotada si existe $M > 0$ *tal que*

$$\|f_i\| \leq M \text{ para toda } i \in I$$

Por la desigualdad del triángulo siempre se tiene que $M \geq 1$. *Cuando la constante es 1 entonces se dice que la identidad aproximada es de norma uno.*

Proposición 3.3.3 *Sea* $K \subset \beta(X) \setminus X$ *compacto no vacío, entonces* C_K *es un álgebra de Banach con identidad aproximada de norma uno.*

Demostración.
Sean $K \subset \beta(X) \setminus X$ compacto y $\mathcal{F} = \{U \subset \beta X : U$ es vecindad abierta de $K\}$.

Para cada $U \in \mathcal{F}$, existe una función continua $f_U : \beta(X) \to [0,1]$ tal que $f_U(K) = 0$ y $f_U(\beta(X) \setminus U) = 1$. Observamos que $f_U \in C_K$.

Al dirigirse la familia $\mathcal{F}$ con el orden inverso a la contención, se tiene una red $\{f_U|X\}_{U\in\mathcal{F}}$ en C_K la cual es una identidad aproximada en C_K, ya que dado $f \in C_K$ y $\epsilon > 0$ definimos

$$U_f = \left\{x \in \beta(X) : \left|f^\beta(x)\right| < \frac{\epsilon}{2}\right\}$$

Si $U \succcurlyeq U_f$, entonces

$$\|f_U f - f\| = \sup\{|f_U(x) f(x) - f(x)| : x \in X \cap U\} < \epsilon$$

ya que $\|f_U|_X\| \leq 1$ y $f_U(\beta(X) \setminus X) = 1$, para toda $U \in \mathcal{F}$, por esa misma razón $\{f_U|X\}_{U\in\mathcal{F}}$ es una identidad aproximada de norma uno. □

Definición 3.3.4 *Sea* $K \subset \beta(X) \setminus X$ *compacto, definimos la topología* β_K *en* $BC[X]$ *como la topología generada por la familia de seminormas*

$$\|f\|_\phi = \sup\{|\phi(x) f(x)| : x \in X\} \text{ para cada } \phi \in C_K$$

Es claro que $\beta_K \subset \sigma$, para todo $K \subset \beta(X) \setminus X$, donde σ es la topología uniforme en $BC[X]$

Como β_K está generada por una familia de seminormas, entonces es una topología localmente convexa para cada $K \subset \beta(X) \setminus X$ compacto. Por tanto, tenemos una familia $(BC[X], \beta_K)$ de espacios localmente convexos con la cual se puede definir otra topología en $BC[X]$ de la siguiente manera:

Definición 3.3.5 *La topología estricta* β *en* $BC[X]$ *es la topología límite inductiva de las topologías* β_K *tomadas sobre la familia* $\mathcal{K}$ *de todos los subconjuntos compactos* K *de* $\beta(X) \setminus X$.

Segun la definición de topología límite inductiva (ver Capítulo 1), β es la topología localmente convexa más grande que hace continuas a la familia de transformaciones lineales

$$i_K : (BC[X], \beta_K) \to (BC[X], \beta),$$

donde en este caso i_K es la función inclusión para cada $K \in \mathcal{K}$, por lo cual

$$\text{si } U \in \beta, \text{ entonces } U \text{ es } \beta_K\text{-abierto}$$

para cada $K \in \mathcal{K}$; por tanto $\beta \subset \sigma$. Además, gracias al Teorema 1.2.19 sabemos que β está generada por la familia de seminormas

$$\mathcal{P} = \left\{ \begin{array}{c} p : BC[X] \to \mathbb{R} \mid \text{para cada } K \in \mathcal{K} \text{ existen } M > 0 \text{ y } \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \in C_K \\ \text{tales que } p(f) \leq M \sum\limits_{k=1}^{n} \|f\|_{\phi_k} \text{ para todo } f \in BC[X] \end{array} \right\}$$

Esta topología estricta fue definida en 1972 por F. Dennis Sentilles [27] y aunque da la impresión de que el estudio de las topologías estrictas es un tema del siglo pasado, algunos autores como Hugo Arizmendi, Ángel Carrillo [2] y Surjit Singh Khurana [19] recientemente han trabajado en estas topologías dando condiciones necesarias y suficientes para que $BC[X]$ con algunas topologías sea un álgebra localmente m-convexa, tema que nos ocupará en el siguiente capítulo.

Definición 3.3.6 *La topología β_1 es la topología límite inductivo de las topologías β_Z tomadas sobre la familia $\mathcal{Z}$ de todos los conjuntos cero $Z \subset \beta(X) \setminus X$.*

Es decir, β_1 es la topología localmente convexa más grande que hace continuas a la familia de transformaciones lineales

$$i_Z : (BC[X], \beta_Z) \to (BC[X], \beta_1),$$

donde cada i_K es la función inclusión para cada $Z \in \mathcal{Z}$, por lo cual un conjunto $U \subset BC[X]$ es β_1−abierto sólo si es β_Z-abierto para cada $Z \in \mathcal{Z}$. La topología β_1 está generada por la familia de seminormas

$$\mathcal{P}_1 = \left\{ \begin{array}{c} p : X \to \mathbb{R} \mid \text{para cada } Z \in \mathcal{Z} \text{ existen } M > 0 \text{ y } \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \in C_Z \\ \text{tales que } p(f) \leq M \sum\limits_{k=1}^{n} \|f\|_{\phi_k} \text{ para todo } f \in BC[X] \end{array} \right\}$$

Es claro que $\mathcal{Z} \subset \mathcal{K}$ y por tanto, $\beta \subset \beta_1$.

Definición 3.3.7 *La topología compacto abierta acotada β_0 es la topología localmente convexa más grande que coincide con la compacto abierta en cada bola σ-cerrada con centro en $0 : B_r = \{f \in BC[X] : \|f\| \leq r\}$.*

Sea $r > 0$, en lo que sigue hacemos $B_r = \{f \in BC[X] : \|f\| \leq r\}$

Proposición 3.3.8 *La topología compacto abierta acotada está generada por la familia de seminormas*

$$\mathcal{P}_0 = \left\{ \begin{array}{c} p_0 : BC[X] \to \mathbb{R} \mid \textit{para cada } r > 0 \textit{ existen } M > 0 \textit{ y} \\ K_1, \ldots, K_m \subset X \textit{ compactos tales que} \\ p_0(f) \leq M \sum_{i=1}^{m} \|f\|_{K_i} \textit{ para todo } f \in B_r \end{array} \right\}$$

Demostración.

Llamemos $\widetilde{\beta_0}$ a la topología generada por la familia de seminormas arriba definidas. Entonces $\widetilde{\beta_0}$ es una topología localmente convexa, además por la propiedad que cumplen las seminormas tenemos que $\widetilde{\beta_0}\mid_{B_r} \subset \kappa \mid_{B_r}$ para cada $r > 0$, donde k es la topología compacto abierta.

Para la otra contención observamos que cada seminorma de la familia $\{\|\cdot\|_K\}$ que define a κ pertenece $\mathcal{P}_0$.

Resta demostrar que $\widetilde{\beta_0}$ es la más grande de las topologías localmente convexas con dicha propiedad. Sea $\mathcal{T}$ una topología generada por una familia de seminormas $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha \in A}$ con la propiedad de coincidir con la compacto abierta en los conjuntos B_r, en particular $\mathcal{T}\mid_{B_r} \subset \kappa \mid_{B_r}$ con lo cual para toda seminorma $\|\cdot\|_\alpha$ en $\mathcal{T}$ existen $M > 0$ y $K_1, \ldots, K_m \subset BC[X]$ compactos tales que

$$\|f\|_\alpha \leq M \sum_{i=1}^{m} \|f\|_{K_i} \text{ para toda } f \in B_r$$

por lo cual cada $\|\cdot\|_\alpha$ está en $\mathcal{P}_0$, teniéndose así $\mathcal{T} \subset \widetilde{\beta_0}$. Por consiguiente, $\widetilde{\beta_0}$ es la topología compacto abierta acotada β_0. □

Definición 3.3.9 *Sea $K \subset \beta(X) \setminus X$ compacto, definimos la topología β'_K en $BC[X]$ como la topología localmente convexa más grande que coincide con β_K en los conjuntos B_r.*

De manera similar a como se hizo para la topología compacto abierta acotada se prueba que la topología β'_K está generada por la familia de seminormas:

$$\mathcal{P}'_K = \left\{ \begin{array}{c} p' : BC[X] \to \mathbb{R} \mid \text{para cada } r > 0 \text{ existen } M > 0 \text{ y} \\ \phi_1, \ldots, \phi_m \in C_K \text{ tales que} \\ p'(f) \leq M \sum_{i=1}^{m} \|f\|_{\phi_i} \text{ para todo } f \in B_r \end{array} \right\}$$

Teorema 3.3.10 *Una base local del cero para $\beta, \beta_0, \beta_1, \beta_K$ y β'_K es la familia de los conjuntos*

$$U_{p,\epsilon} = \{f \in BC[X] : p(f) < \epsilon\}$$

variando p en la familia de seminormas generadora de la topología $\beta, \beta_0, \beta_1, \beta_k$ o β'_k respectivamente.

Observación 3.3.11 *Sea τ una topología en $BC[X]$, denotamos al conjunto de las funcionales lineales τ-continuas en $BC[X]$ como $(BC[X],\tau)'$. Cuando la topología τ es la uniforme, entonces simplemente se escribe $BC[X]'$ y en este espacio está definida la norma:*

$$\|F\| = \sup\{|F(f)| : \|f\| \leq 1\}.$$

En particular, si τ es una topología más débil que la uniforme en $BC[X]$ entonces podemos hablar de $\|F\|$ para todo $F \in (BC[X],\tau)'$, por ejemplo τ puede ser β_K.

El siguiente lema fue demostrado por Sentilles en [27], no damos su demostración porque nos obligaría a ampliar más aún este trabajo. Sólo mencionamos que al ser C_K un álgebra de Banach con la norma del supremo, $BC[X]'$ puede verse como un C_K -módulo, definiendo

$$(\phi F)(f) = F(\phi f)$$

para $\phi \in C_K$ y $F \in BC[X]'$. Esto también será usado más adelante

Lema 3.3.12 *Sean $K \subset \beta(X) \diagdown X$ y H un subconjunto de $(BC[X],\beta_K)'$, entonces H es β_K-equicontinua si y sólo si H es acotada en la norma de $BC[X]'$ y $\|(f_i F - F)\| \to 0$, uniformemente en H, donde $\{f_i\}_{i\in I}$ es una identidad aproximada acotada de C_K para toda $F \in (BC[X],\beta_K)'$.*

Proposición 3.3.13 *Sea $K \subset \beta(X) \diagdown X$ compacto. Si W es una β'_K-vecindad del cero convexa balanceada y β_K-cerrada, entonces es una β_K-vecindad.*

Demostración.

Sea W una β'_K-vecindad del cero convexa, balanceada y β_K-cerrada, entonces existe p' seminorma en $\mathcal{P}'_K$ y $\epsilon > 0$ tales que

$$U = \{f \in BC[X] : p'(f) < \epsilon\} \subset W.$$

Por tanto, para cada $n \in \mathbb{N}$ existen $M_n > 0$ y $\phi_{n,1}, \ldots, \phi_{n,r(n)} \in C_K$ tales que

$$p'(f) \leq M_n \sum_{i=1}^{r(n)} \|f\|_{\phi_{n,i}} \text{ para todo } f \in B_n,$$

donde $B_n = \{f \in BC[X] : \|f\| \leq n\}$.

Si

$$V_n = \left\{f \in BC[X] : \|f\|_{\phi_n} < \epsilon_n\right\}$$

donde $\phi_n(x) = \max\left\{\phi_{n,1}(x), \ldots, \phi_{n,r(n)}(x)\right\}$ y $\epsilon_n = \frac{\epsilon}{M_n \cdot r(n)}$, entonces $\phi_n \in C_K$ y

$$V_n \cap B_n \subset U \cap B_n \subset W.$$

Se sigue,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (V_n \cap B_n) \subset W$$

y

$$W^{\circ} \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} (B_n \cap V_n)^{\circ} \tag{3.3}$$

W es β_K-cerrado, convexo y balanceado, entonces por el Teorema de la bipolar (ver [23]) tenemos:

$$W = W^{\circ\circ}$$

por lo cual al probar que $W^{\circ\circ}$ es β_K-vecindad del cero habremos concluido la demostración. Para ello es suficiente probar que W° es una familia equicontinua en $(BC[X], \beta_K)'$. Por el Lema 3.3.12 basta demostrar que W° es norma-acotado y que $(f_i F - F)$ converja uniformemente a cero en W°, donde $\{f_i\}_{i\in I}$ es una identidad aproximada de norma 1 de C_K.

Como W es también vecindad de 0 en la topología uniforme de $BC[X]$, entonces W° es norma-acotada en $(BC[X], \beta_K)'$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $i_0(n) \in I$ tal que

$$\|\phi_n f_i - \phi_n\| < \frac{\epsilon_n}{n} \text{ para todo } i \geqslant i_0(n)$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ e $i \geqslant i_0(n)$ sea $g_{i,n} = n(f_i - 1)$, entonces

$$\frac{1}{2} g_{i,n} f \in B_n \cap V_n \subset W \text{ si } i \geqslant i_0(n) \text{ y } \|f\| \leq 1$$

ya que

$$\left\| \frac{1}{2} g_{i,n} f \right\| \leq \frac{n}{2} (\|f_i\| \cdot \|f\| + \|f\|) \leq n$$

y

$$\left\| \frac{1}{2} g_{i,n} f \right\|_{\phi_n} = \frac{n}{2} \|f_i f \phi_n - f\phi_n\| \leq \frac{n}{2} \|f\| \cdot \|f_i \phi_n - \phi_n\| < \epsilon_n \text{ si } i \geqslant i_0(n) \text{ y } \|f\| \leq 1.$$

Si $F \in W^{\circ}$, entonces por (3.3), se tiene $\left|F\left(\frac{1}{2} g_{i,n} f\right)\right| \leq 1$ si $n \in \mathbb{N}$, $i \geqslant i_0(n)$ y $\|f\| \leq 1$, por lo cual

$$|(f_i F)(f) - F(f)| = |F(f_i f - f)| \leq \frac{2}{n} \text{ si } i \geqslant i_0(n) \text{ y } \|f\| \leq 1$$

por tanto $\|f_i F - F\| \to 0$ converge uniformemente en $F \in W^{\circ}$. □

Lema 3.3.14 *La familia $\mathcal{F} \subset BC[X]'$ de funcionales lineales norma-continuas F tales que*

$$\lim_i \|f_i F - F\| = 0$$

donde $\{f_i\}_{i\in I}$ es una identidad aproximada de norma 1 de C_K y la funcional $f_i F(g) = F(f_i g - g)$, está contenida en $(BC[X], \beta_K)'$

Demostración.

Sabemos que $BC[X]'$ se puede ver como un C_K -módulo, donde

$$(\phi F)(f) = F(\phi f)$$

con $\phi \in C_K$, $F \in BC[X]'$ por lo que tiene sentido hablar de la parte esencial de $BC[X]'$ (ver Apéndice C).

Sea $\{f_i\}_{i\in I}$ una identidad aproximada de norma uno en C_K.

$\mathcal{F}$ es un subespacio cerrado de $BC[X]'$ ya que si (F_n) es una sucesión en $\mathcal{F}$ que converge a $F \in BC[X]'$, entonces

$$\|f_iF - F\| \leq \|F_n - F\| \|f_i\| + \|f_iF_n - F_n\| + \|F_n - F\|$$

y por tanto,

$$\lim_i \|f_iF - F\| = 0$$

Así, $\mathcal{F}$ es un C_K -submódulo de Banach de $BC[X]'$.

Dado un elemento ϕF, con $\phi \in C_K$ y $F \in BC[X]'$, se tiene

$$|\phi F(g)| = |F(\phi g)| \leq \|F\| \|\phi g\| = M \|g\|_\phi$$

es decir, $\phi F \in (BC[X], \beta_K)'$ y por tanto, $\langle C_K \cdot BC[X]' \rangle \subset (BC[X], \beta_K)'$, donde $\langle C_K \cdot BC[X]' \rangle$ es el subespacio generado por $C_K \cdot BC[X]'$. Debido a que β_K es más gruesa que la topología uniforme σ tenemos que $(BC[X], \beta_K)' \subset BC[X]'$ y además $(BC[X], \beta_K)'$ es un subespacio cerrado de $BC[X]'$. De donde, la parte esencial de $BC[X]'$ está contenida en $(BC[X], \beta_K)'$.

Probaremos que la familia $\mathcal{F}$ coincide con la parte esencial de $BC[X]'$.

Sea ϕF un elemento de $C_K \cdot BC[X]'$, entonces

$$|\phi F(f_ig - g)| = |F(\phi f_ig - \phi g)| \leq \|F\| \|(\phi f_i - \phi) \cdot g\|,$$

con lo cual para $\|g\| \leq 1$ tenemos:

$$\|f_i\phi F - \phi F\| \leq \|F\| \|\phi f_i - \phi\|$$

por tanto,

$$\lim_i \|f_i\phi F - \phi F\| = 0$$

y $\phi F \in \mathcal{F}$. Entonces, la parte esencial de $BC[X]'$ está contenida en $\mathcal{F}$

Además, $\mathcal{F}$ es un submódulo C_K -esencial ya que

$$f_iF \xrightarrow{\|\cdot\|} F \text{ para todo } F \in \mathcal{F}$$

y por la Proposición C.4.4 tenemos que la parte esencial del dual coincide con la familia $\mathcal{F}$ teniéndose:

$$\mathcal{F} \subset (BC[X], \beta_K)'$$

□

Proposición 3.3.15 *Sea $K \subset \beta(X) \setminus X$ compacto, entonces $\beta_K = \beta'_K$.*

Demostración.

Como β'_K es la topología localmente convexa más grande que coincide con β_K en los B_r, entonces $\beta_K \subset \beta'_K$. Resta demostrar que $\beta'_K \subset \beta_K$ y por la Proposición 3.3.13 es suficiente probar que β'_K es una topología compatible con β_K, ya que en las topologías compatibles todos los subconjuntos convexos y cerrados coinciden.

Sabemos que $(BC[X],\beta_K)' \subset (BC[X],\beta'_K)'$; sólo falta ver que

$$(BC[X],\beta'_K)' \subset (BC[X],\beta_K)'$$

Sea $F \in \left(BC[X],\beta'_K\right)'$, y supóngase que no es β_K−continua, entonces por el Lema 3.3.14 $f \notin \mathcal{F}$, lo cual significa que existe $\epsilon > 0$ tal que para todo i existe $j \geq i$ y $g_j \in BC[X]$ con $\|g_j\| \leq 1$ tales que

$$|F(f_j g_j - g_j)| \geq \epsilon$$

Sea

$$J = \{j \in I : \text{ existe } g \in BC[X], \|g\| \leq 1, \text{ tal que } |F(f_j g - g)| \geq \epsilon\}$$

entonces J es un conjunto cofinal de I. Por consiguiente, si tomamos

$$g_j \in \{g \in BC[X] : \|g\| \leq 1 \mid \text{y } F(f_j g - g)| \geq \epsilon\}$$

para cada $j \in J$, entonces $(h_j = f_j g_j - g_j)_{j\in J}$ es una subred de $(f_i g_i - g_i)_{i\in I}$ que satisface

$$\|f_j g_j - g_j\| \leq 2 \text{ para todo } j \in J$$

Si $\delta > 0$ y $\phi \in C_K$, entonces existe $i_0 \in I$ tal que para todo $i \succcurlyeq i_0$ se tiene

$$\|f_i\phi - \phi\| < \delta$$

por tanto, si $j_0 \succcurlyeq i_0$, entonces

$$\|\phi \cdot (f_j g_j - g_j)\| < \delta \text{ para todo } j \succcurlyeq j_0$$

por lo cual $h_j \xrightarrow{\beta_K} 0$, y al pertenecer la red $(h_j)_{j\in J}$ a la bola B_2 tenemos que $h_j \xrightarrow{\beta'_K} 0$, pero esto contradice que

$$|F(h_j)| \geq \epsilon \text{ para todo } j \in J.$$

Por $F \in (BC[X],\beta_K)'$. □

Teorema 3.3.16 *Sea X un espacio completamente regular, entonces se cumplen las siguientes contenciones*

$$\kappa \subset \beta_G \subset \beta_0 \subset \beta \subset \beta_1 \subset \sigma$$

donde β_G denota la topología estricta de Giles. En [19] las topologías β_0, β y β_1 son llamadas también topologías estrictas.

Demostración.

Del inciso (1) del Teorema 3.1.4 se obtiene la validez de las primeras 2 contenciones.

$\beta \subset \beta_1$, pues como ya se había observado $\mathcal{Z} \subset \mathcal{K}$ y, por tanto, $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}_1$.

Para mostrar que $\beta_1 \subset \sigma$, consideremos $p \in \mathcal{P}_1$ y $Z \in \mathcal{Z}$, entonces, existen

$$M > 0 \text{ y } \phi_1, \ldots, \phi_n \in C_z$$

tales que

$$p(f) \leq M \sum_{i=1}^{n} \|f\|_{\phi_i} = M \sum_{i=1}^{n} \|f\phi_i\| = M \sum_{i=1}^{n} M_i \|f\|$$

donde M_i es cota superior para ϕ_i, entonces

$$p(f) \leq \left(M \sum_{i=1}^{n} M_i \right) \|f\| \text{ para todo } f \in BC[X].$$

Falta demostrar que $\beta_0 \subset \beta$ para lo cual probaremos que $\beta_0 \subset \beta_K$ para todo $K \in \mathcal{K}$, ya que β es la topología localmente convexa más grande que está contenida en cada β_K (es decir, $i_K : (BC[X], \beta_K) \to (BC[X], \beta)$ es continua para todo $K \in \mathcal{K}$). Por la Proposición 3.3.15 es suficiente probar que β_0 es una topología que coincide con β_K en los conjuntos B_r.

Sea $p_0 \in \mathcal{P}_0$ y $K \in \mathcal{K}$, entonces para cada $r > 0$ existen

$$M > 0 \text{ y } K_{r,1}, \ldots K_{r,n(r)} \subset X$$

compactos tales que

$$p_0(f) \leq M \sum_{i=1}^{n(r)} \|f\|_{K_{r,j}} \text{ para todo } f \in B_r.$$

Para cada $K_{r,j}$ existe $\phi_{r,j} : \beta(X) \to [0,1]$ continua tal que

$$\phi_{r,j}(K_{r,j}) = \{1\} \text{ y } \phi_{r_i}(K) = \{0\}$$

con lo cual

$$\|f\|_{K_{r,j}} \leq \|f\|_{\phi_{r,j}} \text{ para toda } j = 1, \ldots, n(r).$$

De donde,

$$\begin{aligned} p_0(f) &\leq M \sum_{i=1}^{n(r)} \|f\|_{K_{r,j}} \\ &\leq M \sum_{i=1}^{n(r)} \|f\|_{\phi_{r,j}} \text{ para todo } f \in B_r \end{aligned}$$

Con lo que se obtiene:

$$\beta_0 |_{B_r} \subset \beta_K |_{B_r}$$

Se puede decir que la demostración queda concluida en este punto, porque β'_K no sólo es la topología localmente convexa más grande que coincide con ella misma en las bolas B_r, sino la topología localmente convexa más grande que está contenida en ella misma en las bolas B_r, pero $\beta_K = \beta'_K$ entonces se tiene

$$\beta_0 \subset \beta_K$$

□

Observación 3.3.17 *Sabemos que si X es compacto entonces $\kappa = \sigma$ y por tanto, en tal caso todas las topologías estrictas coinciden entre sí.*

Corolario 3.3.18 *Las topologías β_0, β, y β_1 son localmente convexas de Hausdorff.*

Demostración.

Son localmente convexas por estar generadas por familias de seminormas, y de Hausdorff ya que todas contiene a la topología compacto abierta la cual es de Hausdorff. □

Lema 3.3.19 *Sea X LCH, entonces $C_0(X) = C_{\beta(X)\diagdown X}$, es decir $f \in C_0(X)$ si y sólo si $f^\beta(y) = 0$ para todo $y \in \beta(X)\diagdown X$ donde f^β es, como de costumbre, la extensión de f a $\beta(X)$.*

Demostración.

Sea f una función que se anula al infinito y supóngase que $f \notin C_{\beta(X)\diagdown X}$ es decir, existe $y \in \beta(X)\diagdown X$ tal que $f(y) \neq 0$. Como X es denso en $\beta(X)$ entonces existe una red $(x_i)_{i\in I}$ en X que converge a y, y por la continuidad de f existe $i_0 \in I$ tal que

$$|f(x_i)| \geq \epsilon \text{ para toda } i \succcurlyeq i_0$$

donde $\epsilon = \dfrac{|f(y)|}{2}$.

Existen $K \subset X$ compacto e $i_K \in I$ tales que:

$$|f(x)| < \epsilon \text{ para todo } x \in X - K \tag{3.4}$$

$$x_i \in \beta(X)\diagdown K \text{ para todo } i \succcurlyeq i_K$$

Si $i \succcurlyeq i_0$ y $i \succcurlyeq i_K$, entonces $x_i \in (\beta(X)\diagdown K) \cap X$ y

$$|f(x_i)| \geq \epsilon$$

lo que contradice (3.4); por tanto f, pertenece a $C_{\beta(X)\diagdown X}$.

Ahora, sea $f \in C_{\beta(X)\diagdown X}$ y supóngase que f no se anula en el infinito, es decir, existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $K \subset X$ compacto existe $x_K \in X\diagdown K$ tal que

$$|f(x_K)| \geq \epsilon \tag{3.5}$$

El conjunto de todos los subconjuntos compactos de X es un conjunto dirigido por la contención. La red (x_K) tiene una subred $(x_{K_i})_{i\in I}$ convergente a un punto $y \in \beta(X)$.

Afirmamos que $y \in \beta(X)\diagdown X$, pues en caso contrario, dada una vecindad compacta $V \subset X$ de y existe $i_V \in I$ tal que

$$x_{K_i} \in V \text{ para todo } i \succcurlyeq i_V$$

Sea $j \in I$ tal que $V \subset K_j$ y para $i \succcurlyeq i_V$, $i \succcurlyeq j$ se tiene

$$x_{K_i} \in V \subset K_i$$

lo que contradice la elección del elemento x_{K_i} que se tomó fuera del compacto K_i. Así, $y \in \beta(X)\diagdown X$ como habíamos afirmado.

Como $x_{K_i} \to y$ y f^β es continua tenemos

$$\left|f^\beta(y)\right| \geq \epsilon \text{ para todo } i \succcurlyeq i_0$$

lo que contradice que $f^\beta \in C[\beta(X)\diagdown X]$. □

Teorema 3.3.20 *Sea X un espacio localmente compacto de Hausdorff, entonces los conceptos de topología estricta de Buck (β_B), Giles (β_G) y Sentilles (β_S), coinciden.*

Demostración.

Ya sabemos que coinciden las topologías de Buck y Giles.

Como X es denso en $\beta(X)$ y localmente compacto, entonces por la Proposición 1.1.3 X es abierto en $\beta(X)$, por tanto, $\beta(X)\setminus X \in \mathcal{K}$. Recordemos que β_S es la topología localmente convexa más grande que hace continuas a las funciones

$$i_K : (BC[X], \beta_K) \to (BC[X], \beta_S)$$

con $K \in \mathcal{K}$. Por tanto,

$$\beta_S \subset \beta_K \text{ para todo } K \in \mathcal{K}$$

como $C_0(X) = C_{\beta(X)\setminus X}$ y $\beta(X)\setminus X \in \mathcal{K}$, entonces

$$\beta_S \subset \beta_B$$

Para demostrar la otra contención, sea $\phi \in C_0(X)$. Por el lema anterior $\phi \in C_K$ para todo $K \in \mathcal{K}$, por tanto, la seminorma $\|\cdot\|_\phi$ pertenece a $\mathcal{P}$, por lo cual

$$\beta_B \subset \beta_S$$

teniéndose así la igualdad de estas dos topologías. □

Corolario 3.3.21 *Sea X un espacio localmente compacto de Hausdorff, entonces $\beta_B = \beta_G = \beta_S = \beta_0$.*

Demostración.

Sea X LCH, sabemos que $\beta_G \subset \beta_0 \subset \beta_S = \beta_B = \beta_G$, por lo que todas estas topologías son iguales. □

Teorema 3.3.22 *La topología estricta de Buck es la topología localmente convexa más grande que coincide con ella misma en las bolas B_r.*

Demostración.

Al hablar de la topología estricta de Buck, el espacio X es LCH y así por el Lema 3.3.19 $C_0[X] = C_{\beta(X)\setminus X}$. Esto implica que

$$\beta_B = \beta_K$$

donde $K = \beta(X)\setminus X$. La afirmación se sigue de la Proposición 3.3.15 ya que β_K tiene la propiedad de ser la topología localmente convexa más grande que coincide con ella misma en los B_r. □

Corolario 3.3.23 *La topología estricta de Buck es la topología localmente convexa más grande que coincide con ella misma en los conjuntos uniformemente acotados de $BC[X]$.*

Sea A un álgebra de Banach con identidad aproximada y M un espacio de Banach el cual es un $A-$ módulo, entonces podemos dar una topología localmente convexa γ a M la cual está generada por las seminormas

$$\|x\|_a = \|ax\| \text{ para toda } x \in M$$

con $a \in A$

A esta topología γ se le denomina en [27] la topología estricta de M. Casos particulares de esta situación se dan cuando $M = BC[X]$ y γ es alguna de las siguientes topologías: β_B, β_G y β_K.

Observación 3.3.24 *En este capítulo se probó que las topologías β_B y β_K son las topologías localmente convexas más grandes que coinciden con ellas mismas en las bolas B_r y en general, en los conjuntos uniformemente acotados de $BC[X]$. Para demostrar este aserto para β_K se utilizó la teoría de álgebras de Banach con identidades aproximadas, que es expuesta en el Apéndice C. Se puede probar de manera similar que la topología γ en un $A-$ módulo M, es la topología localmente convexa más grande que coincide con ella misma en los conjuntos acotados de M; teniéndose en particular que β_G también tiene esta propiedad.*

Teorema 3.3.25 *Si X es aparentemente compacto, entonces $\kappa = \beta_G = \beta_0$*

Demostración.

Si X es aparentemente compacto, entonces $\beta_G = \kappa$. Así κ es la topología localmente convexa más grande que coincide con ella misma en los B_r con lo cual $\beta_0 = \kappa = \beta_G$. □

Capítulo 4

Álgebras localmente m-convexas

Se ha trabajado con varias topologías estrictas en el álgebra de las funciones reales, continuas y acotadas definidas en un espacio X. Sabemos ya que algunas de estas topologías coinciden si el espacio X es localmente compacto.

Ahora estudiaremos estas topologías con relación a la noción de la m-convexidad definida para toda álgebra topológica. En este capítulo se dan condiciones necesarias y suficientes para que el álgebra $BC[X]$ con algunas de las topologías estrictas sea $m-$convexa.

Para el caso de la topología de Buck y Giles estas condiciones fueron dadas por Arizmendi y Carrillo [2]; para el resto las dio Khurana [19].

En esta sección X es un espacio completamente regular. A las topologías estrictas de Buck, Giles y Sentilles en $BC[X]$ las denotaremos, como hicimos al final del último capítulo, por β_B, β_G y β_S, respectivamente. Si X es localmente compacto de Hausdorff, entonces sabemos que las tres coinciden y en tal caso las denotaremos por β.

Proposición 4.0.26 *Son álgebras topológicas conmutativas con identidad:*

$$(BC[X], \sigma),\ (BC[X], \kappa),\ (BC[X], \beta_G),\ (BC[X], \beta_S)\ \text{y}\ (BC[X], \kappa_0);$$

es decir son álgebras con respecto a las operaciones usuales de suma, producto por un escalar y producto, éste es conmutativo y tiene idéntico, y esas tres operaciones son continuas. En particular, si X es localmente compacto, entonces $(BC[X], \beta)$ es un álgebra topológica.

Demostración.

Sólo falta probar la continuidad del producto

$$\underset{(f,g)}{BC[X] \times BC[X]} \underset{\rightarrow}{\rightarrow} \underset{fg}{BC[X]}$$

con respecto a las distintas topologías.

En vista de que $BC[X]$ es un espacio vectorial topológico con respecto a las tres topologías, sólo es necesario probar la continuidad del producto en $(0,0)$.

Para las topologías σ, κ y β_G la afirmación se sigue de las desigualdades:

$$\|fg\| \leq \|f\| \cdot \|g\|$$

$$\|fg\|_K \leq \|f\|_K \cdot \|g\|_K \tag{4.1}$$

$$\|fg\|_\phi \leq \|f\|_{\sqrt{|\phi|}} \cdot \|g\|_{\sqrt{|\phi|}}$$

si $f, g \in BC[X]$, $K \subset X$ es compacto y $\phi \in B_0(X)$.

Recordamos que la topología β está generada por la familia de seminormas

$$\mathcal{P} = \left\{ \begin{array}{c} p : BC[X] \to \mathbb{R} \mid \text{para cada } K \in \mathcal{K} \text{ existen } M > 0 \text{ y } \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \in C_K \\ \text{tales que } p(f) \leq M \sum\limits_{k=1}^{n} \|f\|_{\phi_k} \text{ para todo } f \in BC[X] \end{array} \right\}$$

Sea $K \in \mathcal{K}$. La función

$$\underset{(f,g)}{(BC[X], \beta_K) \times (BC[X], \beta_K)} \underset{\to}{\to} \underset{fg}{(BC[X], \beta)}$$

es continua en $(0,0)$, ya que dado $p \in \mathcal{P}$ existen $M > 0$ y $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \in C_K$ tales que

$$p(fg) \leq M \sum_{k=1}^{n} \|fg\|_{\phi_k}$$

y por consiguiente, $\sqrt{|\phi_1|}, \sqrt{|\phi_2|}, \ldots, \sqrt{|\phi_n|} \in C_K$ y

$$p(fg) \leq M \sum_{k=1}^{n} \|f\|_{\sqrt{|\phi_k|}} \|g\|_{\sqrt{|\phi_k|}} = M \sum_{k=1}^{n} q_i(f) q_i(g)$$

donde $q_i(\cdot) = \|\cdot\|_{\sqrt{\phi_i}}$ es una seminorma que pertenece a $\mathcal{P}$ para $1 \leq i \leq n$.

Para la topología β_0 procedemos de manera similar, recordando la desigualdad 4.1 y que β_0 está definida por la familia de seminormas:

$$\mathcal{P}_0 = \left\{ \begin{array}{c} p_0 : BC[X] \to \mathbb{R} \mid \text{para cada } r > 0 \text{ existen } M > 0 \text{ y} \\ K_1, \ldots, K_m \subset X \text{ compactos tales que} \\ p_0(f) \leq M \sum\limits_{i=1}^{m} \|f\|_{K_i} \text{ para todo } f \in B_r \end{array} \right\}$$

□

Definición 4.0.27 *Sea A un álgebra localmente convexa. A es llamada localmente m-convexa (o simplemente m-convexa) si su topología se puede generar por una familia de seminormas*

$$\{\|\cdot\|_\alpha : \alpha \in \Delta\}$$

submultiplicativas, es decir para cada $\alpha \in \Delta$ se cumple.

$$\|xy\|_\alpha \leq \|x\|_\alpha \|y\|_\alpha \quad \textit{para toda } \alpha \in \Delta, \textit{ y todo } x, y \in A$$

Por $\sigma(A)$ denotamos el espacio de todas las funcionales lineales complejas multiplicativas continuas en A, no nulas, si A es un álgebra topológica sobre $\mathbb{C}$.

Proposición 4.0.28 *Si X es completamente regular entonces*

$$\sigma(BC[X:\mathbb{C}],\beta_G)=X$$

es decir:

$$T\in\sigma(BC[X:\mathbb{C}],\beta_G) \text{ si y sólo si } T(f)=\widehat{x}(f)$$

para algún $x\in X$ y todo $f\in BC[X:\mathbb{C}]$, donde $\widehat{x}(f)=f(x)$.

Demostración.

Sea $x_0\in X$, entonces $\widehat{x_0}:BC[X:\mathbb{C}]\to\mathbb{C}$ es una funcional lineal multiplicativa no nula, por lo cual basta probar que es β_G continua para que $\widehat{x_0}$ pertenesca a $\sigma(BC[X:\mathbb{C}],\beta_G)$. Sea

$$\phi(x)=\begin{cases}1 \text{ si } x=x_0\\ 0 \text{ si } x\neq x_0\end{cases}$$

entonces

$$|\widehat{x}_0(f)|=|f(x_0)\phi(x_0)|\leq\|f\phi\|=\|f\|_\phi$$

para todo $f\in BC[X:\mathbb{C}]$.

Inversamente, sea $T\in\sigma(BC[X:\mathbb{C}],\beta_G)$, entonces definimos

$$\widetilde{T}:(C[\beta(X):\mathbb{C}],\|\cdot\|)\to\mathbb{C}$$

como $\widetilde{T}(f^\beta)=T(f)$ donde f^β es la extensión de f a $\beta(X)$.

Como las extensiones en la compactación de Stone Čech son únicas, entonces $\widetilde{T}$ está bien definida; además, es una funcional lineal multiplicativa no nula y por el Teorema C.2.22 existe $y\in\beta(X)$ tal que

$$T(f)=\widetilde{T}\left(f^\beta\right)=\widehat{y}\left(f^\beta\right)$$

para todo $f\in BC[X:\mathbb{C}]$. Afirmamos que $y\in X$. Supóngase lo contrario, entonces por la β_G- continuidad de T, existen $M>0$ y $\phi\in B_0[X:\mathbb{C}]$ tales que

$$|T(f)|\leq M\|f\|_\phi$$

para todo $f\in BC[X:\mathbb{C}]$. Sean $n\in\mathbb{N}$, con $n>M$, y $K\subset X$ compacto tales que

$$|\phi(x)|<\frac{1}{n} \text{ para todo } x\in X\setminus K$$

Como $\beta(X)$ es un espacio de Hausdorff y compacto, entonces $\beta(X)$ es normal, por lo cual existe $h:\beta(X)\to[0,1]$ tal que $h(y)=1$ y $h(x)=0$ para todo $x\in K$, así,

$$1=h(y)=|\widehat{y}(h)|=|T(h|_X)|\leq M\|(h|_X)\|_\phi,$$

pero esto es incompatible con

$$M\|(h|_X)\|_\phi\leq\frac{M}{n}<1$$

lo cual es una contradicción. Así, $y\in X$ con lo cual

$$T(f)=\widehat{y}(f)$$

para todo $f\in BC[X:\mathbb{C}]$. □

4.1 Condición de Wiener

Todo lo visto en los capítulos anteriores para el álgebra $BC[X]$ es valido para $BC[X:\mathbb{C}]$, el álgebra de funciones continuas y acotadas de X en $\mathbb{C}$. En este capítulo los resultados se trabajan sobre $BC[X:\mathbb{C}]$.

Proposición 4.1.1 *Sea A una álgebra de Hausdorff, compleja, completa, conmutativa, $m-$convexa y con unidad e. Entonces existe un isomorfismo de álgebras topológicas de A en el límite proyectivo de un familia de álgebras de Banach, complejas, conmutativas y con unidad.*

Demostración.

Sea $\{|\cdot|_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una familia de seminormas submultiplicativas en A que generan su topología y que satisfacen que $\max\limits_{\alpha\in J}(|\cdot|_\alpha)$ pertenece a la familia $\{|\cdot|_\alpha\}_{\alpha\in I}$ para todo subconjunto finito J de I.

Para cada seminorma $|\cdot|_\alpha$ tomamos su núcleo $\ker|\cdot|_\alpha$ y consideramos el espacio cociente

$$A/\ker|\cdot|_\alpha,$$

el cual resulta ser un álgebra normada, con la norma

$$\|[a]_\alpha\|_\alpha = \inf\{|a+y| : y\in\ker|\cdot|_\alpha\}$$

donde $[a]_\alpha$ representa la clase de a en el cociente $A/\ker|\cdot|_\alpha$. Sea A_α la compleción de $A/\ker|\cdot|_\alpha$. Entonces $\{A_\alpha, \|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es una familia de álgebras de Banach, complejas, conmutativas y con unidad $[e]_\alpha$.

Dotemos al conjunto de índices I con el siguiente orden

$$\alpha\preccurlyeq\beta \text{ si y sólo si } \|[a]_\alpha\|_\alpha \le \left\|[a]_\beta\right\|_\beta \text{ para cada } a\in A$$

el cual hace a I un conjunto dirigido.

Para $\alpha\preccurlyeq\beta$ definamos

$$i_\alpha^\beta : A/\ker|\cdot|_\beta \to A/\ker|\cdot|_\alpha$$

vía la regla

$$[a]_\beta \mapsto [a]_\alpha.$$

Estos homomorfismos continuos pueden extenderse a las compleciones, dichas extensiones también las denotamos como

$$i_\alpha^\beta : A_\beta \to A_\alpha$$

Tomemos el límite proyectivo $B=\varprojlim A_\alpha$ del sistema $\left(A_\alpha, i_\alpha^\beta\right)$; es decir, B es el subespacio del producto cartesiano $\prod\limits_{\alpha\in I} A_\alpha$ compuesto por los elementos $(x_\alpha)_\alpha$ que satisfacen la condición:

$$i_\alpha^\beta(x_\beta) = x_\alpha$$

para cada $\alpha\preccurlyeq\beta$. La topología en B es la inducida por la topología producto, la cual coincide con la generada por la familia de seminormas $(\|\cdot\|_\alpha)$ definidas de la siguiente forma

$$\|(x)_\alpha\|_{\alpha_0} = \|x_{\alpha_0}\|_{\alpha_0}$$

Sea

$$T : A \to \prod_{\alpha \in I} A_\alpha$$

el homomorfismo de álgebras definido como

$$a \mapsto \{[a]_\alpha\}_\alpha$$

Es claro que la imagen de T está contenida en B debido a la propia definición de los homomorfismos i_α^β. T es inyectiva porque se supuso que A es de Hausdorff y es continua porque la composición con cada proyección del producto es el homomorfismo canónico de A en uno de los cocientes $A/\ker|\cdot|_\alpha$. Probaremos:

(i) $T^{-1} : T(A) \to A$ es continua. Es decir T es un isomorfismo de álgebras topológicas de A en su imagen.

(ii) $T(A)$ es un conjunto cerrado y denso en B y por tanto $T(A) = B$.

Sea $|\cdot|_{\alpha_0}$ una seminorma en A.

$$\left|T^{-1}\left(([a]_\alpha)_\alpha\right)\right|_{\alpha_0} = |a|_{\alpha_0} \leq 2\left\|([a]_\alpha)_\alpha\right\|_{\alpha_0},$$

ya que si $\left\|([a]_\alpha)_\alpha\right\|_{\alpha_0} \neq 0$, entonces existe $b \in Ker|\cdot|_{\alpha_0}$ tal que

$$|a+b|_{\alpha_0} < 2\left\|([a]_\alpha)_\alpha\right\|_{\alpha_0}$$

y por tanto,

$$|a|_{\alpha_0} \leq 2\left\|([a]_\alpha)_\alpha\right\|_{\alpha_0}.$$

Así, tenemos la continuidad de T^{-1}.

$T(A)$ es cerrado en B ya que, de acuerdo al inciso anterior, T es un homeomorfismo lineal de A en su imagen y A es completo.

Resta demostrar que $T(A)$ es denso en B, para ello tomemos un básico de B que contenga a $(x_\alpha)_\alpha \in B$, digamos

$$V = \left\{(y_\alpha)_\alpha \in B : \|(y_\alpha)_\alpha - (x_\alpha)_\alpha\|_{\alpha_i} < \epsilon \text{ para } i = 1, \ldots, n\right\}.$$

Demostraremos que $V \cap T(A) \neq \emptyset$.

Como $A/\ker|\cdot|_{\alpha_i}$ es denso es su compleción, entonces existe $a_i \in A$ tal que

$$\left\|[a_i]_{\alpha_i} - x_{\alpha_i}\right\|_{\alpha_i} < \epsilon$$

para $i = 1, \ldots, n$.

Sea β tal que $\beta \succcurlyeq \alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Por ser

$$i_{\alpha_i}^\beta : A_\beta \to A_{\alpha_i}$$

continua para $i = 1, \ldots, n$, entonces existe $\delta > 0$ tal que

$$\left\|[a]_{\alpha_i} - x_{\alpha_i}\right\|_{\alpha_i} < \epsilon$$

para $i = 1, \ldots, n$ siempre que

$$\left\|[a]_\beta - x_\beta\right\|_{\alpha_i} < \delta$$

$A/\ker|\cdot|_\beta$ es denso es su compleción A_β, entonces existe $a \in A$ tal que

$$\left\| |a|_\beta - x_\beta \right\|_\beta < \delta$$

Y por tanto,

$$\left\| |a|_{\alpha_i} - x_{\alpha_i} \right\|_{\alpha_i} < \epsilon$$

para $i = 1, \ldots, n$. O sea,

$$\| T(a) - (x_\alpha) \|_{\alpha_i} < \epsilon$$

para $i = 1, \ldots, n$ y entonces $V \cap T(A) \neq \emptyset$. □

Teorema 4.1.2 *Toda álgebra A compleja, completa, conmutativa, $m-$convexa y con unidad e satisface la siguiente condición: $x \in A$ es invertible si y sólo si $\widehat{x}(f) \neq 0$ para cada $f \in \sigma(A)$, esta propiedad se conoce como la condición de Wiener.*

Demostración.

Sea $f \in \sigma(A)$. Existe $y \in A$ tal que $f(y) \neq 0$ además

$$f(y) = f(ye) = f(y) f(e)$$

por lo que $f(e) = 1$.

Ahora si x es invertible, entonces existe x^{-1} tal que $xx^{-1} = e$ y

$$1 = f(e) = f(x) f(x^{-1})$$

en particular, $f(x) \neq 0$.

Sean $T : A \to B$ el isomorfismo dado en la proposición anterior.

Tomemos $a \in A$ tal que $\widehat{a}(f) \neq 0$ para cada $f \in \sigma(A)$. Consideremos la composición

$$A \xrightarrow{T} B \xrightarrow{\pi_\beta} A_\beta \xrightarrow{g} \mathbb{C}$$

donde π_β es la $\beta-$proyección y $g \in \sigma(A_\beta)$. Entonces, para $f = (g \circ \pi_\beta \circ T)$ tenemos que $f \in \sigma(A)$ con lo cual $(g \circ \pi_\beta \circ T)(a) \neq 0$. Además

$$\begin{aligned}(g \circ \pi_\beta \circ T)(a) &= g(\pi_\beta(T(a))) \\ &= g\left(\pi_\beta\left(\{|a|_\alpha\}_\alpha\right)\right) \\ &= g\left(|a|_\beta\right)\end{aligned}$$

Teniéndose así:

$$g\left(|a|_\beta\right) \neq 0 \text{ para todo } g \in \sigma(A_\beta)$$

Al aplicar el Corolario C.2.19 al álgebra de Banach A_β , obtenemos que $|a|_\beta$ es invertible en A_β, y esto sucede para toda $\beta \in I$, por lo cual $\{|a|_\alpha\}_\alpha$ es invertible en $\prod_{\alpha \in I} A_\alpha$; sea $(x_\alpha)_\alpha$ su inverso. Ya que cada i_α^β es un homomorfismo de álgebras y

$$i_\alpha^\beta\left(|a|_\beta\right) = |a|_\alpha$$

para cada $\beta \succcurlyeq \alpha$, entonces

$$i_{\alpha}^{\beta}(x_{\beta}) = x_{\alpha}$$

para cada $\beta \succcurlyeq \alpha$. Es decir $(x_{\alpha})_{\alpha} \in B = T(A)$ y como T es un isomorfismo de álgebras, entonces a es invertible. □

Teorema 4.1.3 *Sea A una álgebra autoadjunta, $\beta-$ cerrada de $BC[X:\mathbb{C}]$ que separa puntos de X y que para cada $x \in X$, contiene una función que no se anula en x. Entonces, $A = BC[X:\mathbb{C}]$*

La prueba es directa a partir del Teorema 3.2.2

Corolario 4.1.4 *Si $f \in BC[X:\mathbb{C}]$ es tal que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in X$, entonces el ideal generado por f es denso en $(BC[X:\mathbb{C}], \beta_G)$*

Demostración.

Debido a que X es un espacio completamente regular y Hausdorff, $BC[X:\mathbb{C}]$ separa puntos de X y lo mismo hace el ideal $fBC[X:\mathbb{C}]$ generado por f. Además, $\frac{f}{f}\overline{g} \in BC[X:\mathbb{C}]$ para cada $g \in BC[X:\mathbb{C}]$; es decir, $fBC[X:\mathbb{C}]$ es autoadjunto. □

Cuando la función f expuesta arriba no es invertible en $BC[X:\mathbb{C}]$ se obtiene el siguiente

Teorema 4.1.5 *Si $f \in BC[X:\mathbb{C}]$ es tal que $f(x) \neq 0$ para cada $x \in X$ e $\inf\{|f(x)| : x \in X\} = 0$, entonces el ideal generado por f es de codimensión infinita.*

Para cada $n \geq 1$ defínase la función

$$h_n(x) = |f(x)|^{\frac{1}{2^n}}$$

para $x \in X$. Entonces se obtiene una sucesión $(h_n BC[X:\mathbb{C}])$ de ideales de $BC[X:\mathbb{C}]$ tal que

$$h_1 BC[X:\mathbb{C}] \subsetneq h_2 BC[X:\mathbb{C}] \subsetneq \cdots \tag{4.2}$$

Además $\{h_n : n \geq 1\}$ es un conjunto linealmente independiente, para probarlo procedamos por inducción sobre el número de sumandos en la combinación lineal.

Para $n = 1$ tenemos que si $\alpha h_j = 0$, entonces $\alpha = 0$ ya que $h_n \neq 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$

Supóngase cierta la independencia para toda combinación lineal con a lo más n sumandos, y sea

$$\alpha_1 h_{j_1} + \alpha_2 h_{j_2} + \cdots + \alpha_{n+1} h_{j_{n+1}} = 0, \tag{4.3}$$

De donde

$$-\alpha_{n+1} h_{j_{n+1}} = \alpha_1 h_{j_1} + \alpha_2 h_{j_2} + \cdots + \alpha_n h_{j_n}$$

Si $\alpha_{n+1} \neq 0$, entonces

$$h_{j_{n+1}} = \beta_1 h_{j_1} + \cdots + \beta_n h_{j_n}$$

con lo que, por (4.2)

$$h_{j_{n+1}} \in h_{j_n} BC[X : \mathbb{C}]$$

Esto contradice las contenciones propias de (4.2), así α_{n+1} debe ser cero y (4.3) se transforma en una combinación lineal igual a cero con a lo más n sumandos, por lo que

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{n+1} = 0.$$

Como la función $\frac{g}{f}$ no es acotada siempre que g no sea el elemento nulo en el espacio generado por las funciones h_n, $\langle\{h_n\}_n\rangle$, se sigue que

$$\langle\{h_n\}_n\rangle \cap fBC[X : \mathbb{C}] = \{0\}$$

Así, las clases de las funciones h_n en $BC[X : \mathbb{C}] / fBC[X : \mathbb{C}]$ forman un conjunto linealmente independiente, por lo cual el ideal $fBC[X : \mathbb{C}]$ es de codimensión infinita. $\square$

Corolario 4.1.6 *Sea X completamente regular y $k-$espacio. Si existe $f \in BC[X : \mathbb{C}]$ tal que $f(x) \neq 0$ para cada $x \in X$ e $\inf\{|f(x)| : x \in X\} = 0$, entonces $(BC[X : \mathbb{C}], \beta_G)$ no es un álgebra $m-$convexa.*

Demostración.

Sabemos que $\sigma(BC[X : \mathbb{C}], \beta_G) = X$ y por hipótesis $\widehat{x}(f) = f(x) \neq 0$ para toda $x \in X$. Entonces $(BC[X : \mathbb{C}], \beta)$ es un álgebra compleja conmutativa completa, con identidad que no satisface la condición de Wiener. Por tanto $(BC[X : \mathbb{C}], \beta)$ no es un álgebra $m-$convexa. $\square$

4.2 Condiciones Arizmendi-Carrillo

Teorema 4.2.1 *$(BC[X : \mathbb{C}], \beta_G)$ es un álgebra $m-$convexa si y sólo si*

$$B_0[X : \mathbb{C}] = B_{00}[X : \mathbb{C}].$$

Demostración.

Supóngase $(BC[X : \mathbb{C}], \beta)$ es una álgebra m-convexa. Entonces existe una familia

$$\mathcal{M} = \{\|\cdot\|_\alpha : \alpha \in \Delta\}$$

de seminormas submultiplicativas en $BC[X : \mathbb{C}]$ que generan la topología β_G.

Es claro que $B_{00}[X : \mathbb{C}] \subset B_0[X : \mathbb{C}]$.

Supongamos que existe $\phi \in B_0[X : \mathbb{C}] \diagdown B_{00}[X : \mathbb{C}]$. Entonces, existen $\alpha \in \Delta$, $\tilde{\phi} \in B_0[X : \mathbb{C}]$ y $a, b > 0$ tales que

$$a\|f\|_\phi \leq \|f\|_\alpha \leq b\|f\|_{\tilde{\phi}}$$

para todo $f \in BC[X : \mathbb{C}]$.

Observamos que:

(i) $\|f\|_\alpha \leq 1$ siempre que $b\|f\|_{\tilde{\phi}} \leq 1$;

(ii) $\|f\|_\alpha \le 1$ implica, por la submultiplicatividad de $\|\cdot\|_\alpha$, $\|f^n\|_\alpha \le 1$. Así,

$$b\|f\|_{\tilde{\phi}} \le 1 \Rightarrow a\|f^n\|_\phi \le 1$$

Como $\tilde{\phi} \in B_0[X:\mathbb{C}]$ existe $K \subset X$ compacto tal que

$$\left|\tilde{\phi}(x)\right| < \frac{1}{2b} \text{ si } x \notin K$$

y como ϕ no es de soporte compacto, entonces existe $x_0 \notin K$ tal que

$$|\phi(x_0)| \neq 0$$

Por ser X completamente regular, existe $f : X \to [0,2]$ continua tal que $f(K) = \{0\}$ y $f(x_0) = 2$. Entonces,

$$b\|f\|_{\tilde{\phi}} = b\sup\left\{\left|f(x)\tilde{\phi}(x)\right| : x \in X \diagdown K\right\} < 1$$

por tanto,

$$a\|f^n\|_\phi \le 1 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Por otra parte,

$$a\|f^n\|_\phi \ge 2^n a|\phi(x_0)| \text{ para toda } n \in \mathbb{N}$$

lo cual contradice la desigualdad anterior.

Supóngase ahora que $B_0[X:\mathbb{C}] = B_{00}[X:\mathbb{C}]$ entonces la topología β_G coincide con κ, por lo cual $(BC[X:\mathbb{C}], \beta_G)$ es localmente m-convexo. □

Corolario 4.2.2 *$(BC[X:\mathbb{C}], \beta_G)$ es un álgebra $m-$convexa si y sólo si $\beta_G = \kappa$.*

De lo anterior y el Teorema 3.1.13 se sigue:

Corolario 4.2.3 *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) $(BC[X:\mathbb{C}], \beta_G)$ *es un álgebra $m-$convexa*

(b) $B_0[X:\mathbb{C}] = B_{00}[X:\mathbb{C}]$

(c) $\beta_G = \kappa$.

(d) X *es aparentemente compacto.*

Corolario 4.2.4 *Sea X un espacio localmente compacto de Hausdorff. $(BC[X:\mathbb{C}], \beta)$ es un álgebra $m-$convexa si y sólo si $C_0[X:\mathbb{C}] = C_{00}[X:\mathbb{C}]$; es decir, si, y sólo si $\beta = \kappa$.*

Demostración.

Si $(BC[X:\mathbb{C}], \beta)$ es $m-$convexa, entonces $B_0[X:\mathbb{C}] = B_{00}[X:\mathbb{C}]$ por tanto, si $f \in C_0[X:\mathbb{C}]$ entonces $f \in B_{00}[X:\mathbb{C}]$, con lo cual $f \in C_{00}[X:\mathbb{C}]$.

Inversamente, si $C_0[X:\mathbb{C}] = C_{00}[X:\mathbb{C}]$, entonces $\beta = \kappa$, ya que por ser X un espacio localmente compacto de Hausdorff, la topología estricta está dada por la familia de seminormas

$$\left\{ \|\cdot\|_\phi : \phi \in C_0[X:\mathbb{C}] \right\}$$

y es claro que en este caso la topología compacto abierta está generada por la familia de seminormas

$$\left\{ \|\cdot\|_\phi : \phi \in C_{00}[X:\mathbb{C}] \right\}.$$

□

Corolario 4.2.5 *Sea X un espacio localmente compacto de Hausdorff. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) $(BC[X:\mathbb{C}], \beta)$ *es un álgebra $m-$convexa*

(b) $C_0[X:\mathbb{C}] = C_{00}[X:\mathbb{C}]$

(c) $\beta = \kappa$.

(d) X *es aparentemente compacto.*

4.3 Condiciones Khurana

S. S. Khurana demuestra en [19] condiciones necesarias y suficientes para la m-convexidad de $BC[X:\mathbb{C}]$ con las topologías estrictas β_0, β_S y β_1.

Teorema 4.3.1 *Sea X completamente regular. $(BC[X:\mathbb{C}], \beta_0)$ es un álgebra $m-$convexa si y sólo si X es aparentemente compacto. En cualquier caso $\beta_0 = \kappa$.*

Demostración.

Si X es aparentemente compacto, entonces, por el Teoremas 3.3.25 $\kappa = \beta_0$ y por tanto $(BC[X:\mathbb{C}], \beta_0)$ es un álgebra $m-$convexa.

Inversamente supongamos que $(BC[X:\mathbb{C}], \beta_0)$ es $m-$convexa, es decir existe una familia

$$\mathcal{M} = \{\|\cdot\|_\alpha : \alpha \in \Delta\}$$

de seminormas en $BC[X:\mathbb{C}]$ submultiplicativas que generan β_0; y supóngase que X no es aparentemente compacto, esto implica que la topología estricta de Giles no coincide con la topología compacto abierta, por lo cual existe $\phi \in B_0[X:\mathbb{C}] \setminus B_{00}[X:\mathbb{C}]$. La topología estricta de Giles β_G está contenida en β_0, por lo cual existen $\|\cdot\|_\alpha \in \mathcal{M}$ y $a > 0$ tales que

$$a\|f\|_\phi \leq \|f\|_\alpha$$

para todo $f \in BC[X:\mathbb{C}]$.

Para $\|\cdot\|_\alpha$ existen $M > 0$ y una seminorma $p_0 \in \mathcal{P}_0$ tales que

$$\|f\|_\alpha \leq M' p_0(f)$$

para todo $f \in BC[X:\mathbb{C}]$. A su vez, para esta seminorma p_0 existen $M' > 0$ y $K \subset X$ compacto tales que

$$p_0(f) \leq M' \|f\|_K$$

para todo $f \in B_2$, donde B_2 es la bola cerrada con centro en 0 y radio 2 en $BC[X:\mathbb{C}]$. Por tanto,

$$\|f\|_\alpha \leq b\|f\|_K$$

para alguna $b > 0$ y todo $f \in B_2$

Como ϕ no es de soporte compacto, entonces existe $x_0 \notin K$ tal que

$$|\phi(x_0)| \neq 0$$

Por ser X completamente regular existe $f : X \to [0,2]$ continua tal que $f(K) = \{0\}$ y $f(x_0) = 2$. Entonces $f \in B_2$ y

$$\|f\|_\alpha \leq b\|f\|_K = 0.$$

De la submultiplicatividad de$\|f\|_\alpha$ se sigue

$$a\|f^n\|_\phi \leq a\|f^n\|_\alpha = 0$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por otra parte,

$$a\|f^n\|_\phi \geq 2^n a|\phi(x_0)| \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

lo cual contradice la desigualdad anterior. □

Corolario 4.3.2 *Sea X un espacio completamente regular. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) $(BC[X:\mathbb{C}], \beta_0)$ es un álgebra m−convexa

(b) $\beta_0 = \kappa = \beta_G$

(c) $B_0[X:\mathbb{C}] = B_{00}[X:\mathbb{C}]$

(d) X es aparentemente compacto.

El lector habrá ya sacado sus propias conclusiones acerca de la relación tan estrecha entre las topologías utilizadas por Khurana y Arizmendi-Carrillo. También habrá notado la similitud con la que se prueban ambas condiciones. Cabe señalar que la demostración que aparece en este trabajo para la condición de Khurana está lejos de la dada por el autor en [19], puesto que en aquel trabajo se ocupan los conceptos de vecindades balanceadas y convexas en lugar de seminormas generadoras de la topología. Sin embargo, al aplicar los conceptos de seminormas se observa que las demostraciones son prácticamente la misma y por tanto, caben las preguntas: ¿Habrá alguna relación más estrecha entre β_0 y β_G además de la coincidencia de ambas si el espacio es aparentemente compacto? ¿Será necesario que el espacio sea de esta forma para que éstas coincidan? La respuesta es NO como lo muestra el siguiente

Teorema 4.3.3 *La topología compacto abierta acotada β_0 y la topología estricta de Giles β_G coinciden.*

Demostración.

Por la Observación 3.3.24 sabemos que β_G es la topología localmente convexa más grande que coincide con ella misma en las bolas B_r, sin embargo, por el inciso (4) de la Proposición 3.1.4 en esas bolas β_G coincide con la compacto abierta, teniéndose de esta manera que β_G es la topología localmente convexa más grande que coincide con la compacto abierta en las bolas B_r que es precisamente la definición de β_0. □

Khurana también prueba condiciones necesarias y suficientes para que el álgebra $BC[X:\mathbb{C}]$ con la topología β_S, sea localmente m-convexa, sin embargo la demostración dada ocupa la teoría de la medida, la cual la hemos mantenido al margen con el propósito de no ampliar en exceso este trabajo, ya que el carácter autocontenido que hemos tratado de darle nos obligaría a incluir un nuevo apéndice. Por esto sólo se mencionan algunas definiciones y el teorema central el cual se encuentra demostrado en [19].

Definición 4.3.4 *Sean μ una medida de Borel en un espacio Y LCH y E un boreliano de Y. μ es llamada una medida exteriormente regular en E si*

$$\mu(E) = \inf\{\mu(E) : E \subset U,\, U \text{ abierto}\}$$

y es llamada interiormente regular en E si

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E,\, K \text{ compacto}\}.$$

Si μ tiene estas dos propiedades en todos los borelianos de Y, entonces se dice que μ es una medida de Borel regular en Y

Definición 4.3.5 *X es absolutamente Borel medible en $\beta(X)$ si para cualquier medida μ de Borel regular en $\beta(X)$, existen borelianos $A, B \subset \beta(X)$ tales que*

$$A \subset X \subset B \text{ y } \mu(B \diagdown A) = 0$$

Teorema 4.3.6 *$(BC[X:\mathbb{C}], \beta_S)$ es un álgebra $m-$convexa si y sólo si X es aparentemente compacto y absolutamente Borel medible. En este caso $\beta_S = \kappa$.*

Con esto quedan comparadas las condiciones Khurana con las Arizmendi-Carrillo para las generalizaciones de la Topología de Buck que ellos manejaron. De las topologías estrictas tratadas por Khurana, β_0 y β_S son las únicas que coinciden con la topología estricta de Buck cuando X es localmente compacto (Corolario 3.3.21)

La topología β_1 es una topología estricta trabajada por Khurana que no coincide con la de Buck cuando X es LCH. Para finalizar veremos que esto se puede probar usando resultados de Khurana y Arizmendi-Carrillo.

En [19] se prueba

Teorema 4.3.7 *$(BC[X:\mathbb{C}], \beta_1)$ es un álgebra $m-$convexa si y sólo si X es pseudocompacto y en este caso $\beta_1 = \sigma$.*

Donde un espacio es pseudocompacto si es un espacio de Hausdorff con la propiedad que $C[X:\mathbb{C}] = BC[X:\mathbb{C}]$.

En [2] se da el siguiente ejemplo:

Si Ω es el primer ordinal no numerable y ω el primer ordinal numerable, entonces el espacio

$$Y = ([0,\Omega] \times [0,\omega]) \setminus \{(\Omega,\omega)\}$$

es LCH y pseudocompacto. La función definida como

$$f(\alpha,\beta) = \begin{cases} 1 \text{ si } \beta = 0 \\ 0 \text{ si } \beta = \omega \\ \frac{1}{n} \text{ si } \beta = n \end{cases} \quad \text{para toda } \alpha \in [\Omega,\omega] \ \text{ y } n \in \mathbb{N}$$

satisface $f \in C_0[Y:\mathbb{C}] \setminus C_{00}[Y:\mathbb{C}]$ por lo cual $(BC[Y:\mathbb{C}], \beta_B)$ no es m-convexa.

Juntando estos resultados tenemos que $\beta_B \neq \beta_1$ en $BC[Y:\mathbb{C}]$. Además vemos que las condiciones LCH y pseudocompacto no implican que un espacio sea aparentemente compacto. La implicación contraria sí es cierta como vemos a continuación.

Proposición 4.3.8 *Todo espacio aparentemente compacto es pseudocompacto.*

Demostración.

Supongamos que X es aparentemente compacto, pero no pseudocompacto. Entonces existe una función $f: X \to \mathbb{R}$ continua y una sucesión (x_n) en X de elementos distintos entre sí tales que $f(x_n) > n$.

Sea

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \{x_n : n \geq 1\} \\ \frac{1}{f(x)} & \text{si } x \in \{x_n : n \geq 1\} \end{cases}$$

entonces $\phi \in B_0[X:\mathbb{C}]$, y como $B_0[X:\mathbb{C}] = B_{00}[X:\mathbb{C}]$, entonces existe $K \subset X$ compacto tal que

$$\phi(x) = 0 \text{ para todo } x \notin K$$

lo cual implica que $\{x_n\}_n \subset K$. Sin embargo, esto no es posible ya que al ser f continua, ella está acotada en K. $\square$

Apéndice A

Conceptos básicos de Topología

A.1 Espacios $\sigma-$ compactos

Definición A.1.1 *Un espacio X es localmente compacto si para cada punto de X existe una vecindad compacta. Además, si el espacio es de Hausdorff se dice que el espacio es localmente compacto de Hausdorff y ésto se abrevia así: LCH.*

Proposición A.1.2 *Si X es LCH entonces dado un compacto $K \subset X$, entonces existe un compacto V tal que $K \subset V^{\circ}$. Todo conjunto V con esta propiedad es llamado una vecindad compacta de K.*
(Proposición 1.1.4).

Proposición A.1.3 *Si X es LCH entonces para cada $x \in X$ las vecindades compactas de x forman una base local en ese punto. (Proposición 1.1.2).*

Proposición A.1.4 *Si X es LCH entonces dados un compacto $K \subset X$ y $x \notin K$, existe una vecindad compacta V de K y $x \notin V$.*

Definición A.1.5 *Un espacio topológico X es $\sigma-$compacto si $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ donde $K_n \subset X$ compacto para cada $n \in \mathbb{N}$. Además, si estos conjuntos K_n pueden ser escogidos de tal forma que $K_n \subset {K^{\circ}}_{n+1}$, entonces se dice que X es regularmente $\sigma-$compacto.*

Teorema A.1.6 *Todo espacio LCH y $\sigma-$compacto es regularmente $\sigma-$compacto.*

Demostración.
Sea $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, donde $K_n \subset X$ compacto. Por la Proposición A.1.2 existe una vecindad compacta V_1 de K_1; asimismo, existe una vecindad compacta V_2 de $V_1 \cup K_2$; al continuar inductivamente este proceso obtenemos una sucesión de vecindades compactas $\{V_n\}_n$ tales que

$$V_n \subset {V^{\circ}}_{n+1} \text{ y } X = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$$

Es decir, X es regularmente $\sigma-$compacto. $\square$

Definición A.1.7 *Se dice que un espacio topológico es segundo numerable o satisface el segundo axioma de numerabilidad, si su topología tiene una base numerable.*

Teorema A.1.8 *Si X es segundo numerable, entonces cada cubierta abierta $\{U_\alpha\}$ de X contiene una subcubierta abierta numerable.*

Demostración.
Sea $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ una base para la topología de X. Como cada U_α es unión de una colección de conjuntos V_n, existe una cubierta $\{V_{n_j} : j \in \mathbb{N}\}$ de X tal que cada V_{n_j} está en algún conjunto U_α. Para cada V_{n_j} escogemos $U_{\alpha_j} \in \{U_\alpha\}$ que lo contenga. La familia $\{U_{\alpha_j}\}$ es una subcubierta numerable de X. □

Definición A.1.9 *Un espacio X es de Lindelöf si cada cubierta abierta de X contiene una subcubierta numerable.*

Proposición A.1.10 *Todo espacio $\sigma-$compacto es de Lindelöf..*

Demostración.
Sea X un espacio $\sigma-$compacto. Entonces, $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ donde K_n es compacto para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $\{U_\alpha\}$ una cubierta abierta para X, entonces $\{U_\alpha\}$ es una cubierta abierta para cada K_n, por lo que existe una subcubierta finita que cubre a K_n, por tanto, la unión numerable de estas subcubiertas finitas es una subcubierta numerable para X. □

Definición A.1.11 *Un espacio de Hausdorff X es separable si contiene un subconjunto denso y numerable.*

Teorema A.1.12 *Sea X un espacio métrico, los siguientes conceptos son equivalentes*

(1) X es segundo numerable.

(2) X es separable.

(3) X es de Lindelöf.

Demostración.
(2) $\Rightarrow$ (1): Sea $\{x_n\}_n$ un subconjunto denso numerable en X, entonces afirmamos que la familia

$$\{B(x_n, r) : r \in \mathbb{Q},\ n \in \mathbb{N}\}$$

es una base numerable para X.
Sea U un abierto en X y $x \in U$; existe $B(x,r) \subset U$, con r racional y como $\{x_n\}_n$ es denso podemos encontrar algún $x_n \in B\left(x, \frac{r}{3}\right)$; entonces

$$x \in B\left(x_n, \frac{2r}{3}\right) \subset B(x,r) \subset U$$

(1) $\Rightarrow$ (3): Debido al Teorema A.1.8, esto siempre es cierto.

(3) $\Rightarrow$ (2): Decimos que $A \subset X$ es $\epsilon-$denso si cada punto de X dista de A menos que ϵ. Para cada $\epsilon > 0$, existe un $\epsilon-$denso numerable $A(\epsilon)$: Sea $\epsilon > 0$. De la cubierta abierta $\{B(x,\epsilon) : x \in X\}$ podemos extraer una subcubierta numerable $\{B(x_n,\epsilon) : n \in \mathbb{N}\}$. Definimos $A(\epsilon) = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} A\left(\frac{1}{n}\right)$. Es claro que D es denso y numerable. $\square$

A.2 Espacios completamente regulares

Definición A.2.1 *X es completamente regular o $T_{3\frac{1}{2}}$ si X es T_1 y para cada punto x y cada cerrado F no vacío, con $x \notin F$ existe una función continua*

$$f : X \to [0,1]$$

tal que $f(x) = 1$ y $f(F) = \{0\}$.

A la familia de todas las funciones continua de X en $\mathbb{R}$ la denotamos por $C[X]$

Definición A.2.2 *Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua. Definimos el conjunto cero de f denotado por $Z(f)$ como*

$$Z(f) = \{x : f(x) = 0\}$$

es decir $Z(f)$ es la imagen inversa de cero bajo f.

Sea $C' \subset C[X]$ escribimos $Z[C']$ para designar la familia de conjuntos cero

$$\{Z(f) : f \in C'\}$$

por otro lado cuando $C' = C[X]$ escribimos $Z[X]$.

Definición A.2.3 *Sea X un espacio topológico. Una familia $\mathcal{B}$ de cerrados es una base para los conjuntos cerrados si cada cerrado en X es la intersección de miembros de $\mathcal{B}$. Equivalentemente, $\mathcal{B}$ es una base para los conjuntos cerrados si para cualquier cerrado F y $x \notin F$, existe un elemento de $\mathcal{B}$ que contiene a F, pero no a x.*

Proposición A.2.4 *Sea X un espacio T_1. X es completamente regular si y sólo si la familia $Z[X]$ es una base para los conjuntos cerrados.*

Demostración.

Supongamos que X es un espacio completamente regular. Sea $F \subset X$ cerrado no vacío y $x \in X \setminus F$, entonces existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(x) = 1$ y $f[F] = \{0\}$. Entonces $F \subset Z(f)$, y $x \notin Z(f)$, por tanto $Z[X]$ es una base.

Supóngase ahora que $Z[X]$ es una base para los conjuntos cerrados. Sea $F \subset X$ cerrado y $x_0 \notin F$, entonces existe un conjunto cero $Z(g)$ tal que $F \subset Z(g)$ y $x_0 \notin Z(g)$. Sea $r = \frac{|g(x_0)|}{|g(x_0)|+1}$. La función

$$f : X \to [0,1] \text{ definida vía } x \mapsto \begin{cases} \frac{|g(x)|}{r(|g(x)|+1)} & \text{si } \frac{|g(x)|}{|g(x)|+1} < r \\ 1 & \text{si } \frac{|g(x)|}{|g(x)|+1} \geq r \end{cases}$$

es continua y satisface que $f(x_0) = 1$ y $f(F) = \{0\}$. $\square$

Los espacios completamente regulares tienen un papel fundamental en el desarrollo de esta tesis a partir del Capítulo 2.

A.3 Funciones abiertas, cerradas y homeomorfismo

En esta sección X e Y son espacios topológicos

Definición A.3.1 *Una función $f : X \to Y$ es abierta (cerrada) si la imagen de cada conjunto abierto (cerrado) en X es abierto (cerrado) en Y.*

Los conceptos de función continua, función abierta y función cerrada son independientes; sin embargo cuando la función es biyectiva los dos últimos coinciden:

Sea $f : X \to Y$ una función biyectiva. Si f es cerrada y $A \subset X$ abierto, entonces $f(X/A)$ es cerrado en Y y como en este caso

$$f(X/A) = Y/f(A),$$

entonces $f(A)$ es abierto en Y. Análogamente, se prueba que si f es abierta, entonces f es cerrada.

Proposición A.3.2 *Una función $f : X \to Y$ es cerrada si y sólo si $\overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$ para cada $A \subset X$.*

Demostración.

Si f es cerrada entonces $f(\overline{A})$ es cerrado; como $f(A) \subset f(\overline{A})$, obtenemos que

$$\overline{f(A)} \subset \overline{f(\overline{A})} = f(\overline{A}).$$

Al contrario, si la condición se cumple y A es cerrado, entonces

$$f(A) \subset \overline{f(A)} \subset f(\overline{A}) = f(A)$$

$\overline{f(A)} = f(A)$, entonces $f(A)$ es cerrado. □

Definición A.3.3 *Una función continua biyectiva $f : X \to Y$ es un homeomorfismo entre X e Y si $f^{-1} : Y \to X$ es continua.*

Definición A.3.4 *Dos espacios topológicos X e Y son homeomorfos si existe un homeomorfismo entre ellos y esto se denota por $X \cong Y$.*

Teorema A.3.5 *Sea $f : X \to Y$ una función biyectiva. Las siguientes propiedades son equivalentes:*

(1) f es un homeomorfismo.

(2) f es continua y abierta.

(3) f es continua y cerrada.

(4) $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ para cada $A \subset X$.

Demostración.

(1) $\Rightarrow$ (2). Si f es un homeomorfismo entonces f y f^{-1}son continuas, y como $f = \left(f^{-1}\right)^{-1}$se tiene que f es abierta.

(2) $\Rightarrow$ (3) Como f es biyectiva entonces los conceptos de función abierta y función cerrada coinciden.

(3) $\Rightarrow$ (4) f continua implica que $f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)}$ para cada $A \subset X$. Y f cerrada implica que $\overline{f(A)} \subset f\left(\overline{A}\right)$ para cada $A \subset X$. Por tanto se cumple (4).

(4) $\Rightarrow$ (1) $f\left(\overline{A}\right) = \overline{f(A)}$ para cada $A \subset X$, implica que f es continua y cerrada; y como $f = \left(f^{-1}\right)^{-1}$ se tiene que f^{-1} es continua, por tanto, f es un homeomorfismo. □

Definición A.3.6 *Sea $\{Y_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una familia de espacios topológicos y una familia de funciones $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ donde $f_\alpha : X \to Y_\alpha$. Decimos que la familia de funciones separa puntos si para cada $x_0 \neq x_1 \in X$ existe $\alpha \in I$ tal que*

$$f_\alpha(x_0) \neq f_\alpha(x_1)$$

Si para cada $x \in X$ y $F \subset X$ cerrado no vacío tal que $x \notin F$, existe $\alpha \in I$ tal que

$$f_\alpha(x) \notin \overline{f_\alpha(F)}$$

entonces se dice que la familia separa puntos de cerrados. Si esta familia consta de un sólo elemento f, entonces decimos f separa puntos de cerrados.

Teorema A.3.7 *Si la función continua $f : X \to Y$ es inyectiva y separa puntos de cerrados, entonces f es un homeomorfismo sobre su imagen.*

Demostración.

Es suficiente probar que $f : X \to f(X)$ es cerrada, es decir que para cada $F \subset X$ cerrado

$$f(F) = f(X) \cap \overline{f(F)}$$

Es claro que:

$$f(F) \subset f(X) \cap \overline{f(F)}$$

Supongamos que no se cumple la otra contención, entonces existe $z \in f(X) \cap \overline{f(F)}$ con $z \notin f(F)$. O sea, existe $x \in X$ tal que $f(x) \in \overline{f(F)}$ y $f(x) \notin f(F)$; esto implica que $x \notin F$ y como la función separa puntos de cerrados se tiene que $f(x) \notin \overline{f(F)}$ teniéndose de esta manera una contradicción. □

Teorema A.3.8 *Sea $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una familia de funciones continuas, donde para cada $\alpha \in A$, f_α es una función de X en Y_α que separa puntos. Entonces*

$$E : X \to \prod \{Y_\alpha : \alpha \in A\} \text{ definida por } x \mapsto \{f_\alpha(x)\}_\alpha$$

es inyectiva. Si, además la familia separa puntos de cerrados, entonces E es un homeomorfismo sobre su imagen.

Demostración.

Si la familia separa puntos, entonces para cada par de puntos distintos $x_0, x_1 \in X$ existe $\alpha \in \mathcal{A}$ tal que $f_\alpha(x_0) \neq f_\alpha(x_1)$, lo cual implica que $E(x_0) \neq E(x_1)$.

Si la familia $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ separa puntos de cerrados entonces la función E también lo hace, ya que si

$$E(x) \in \overline{E(F)} \text{ para algún cerrado } F \subset X,$$

entonces

$$f_\alpha(x) = \pi_\alpha(E(x)) \in \pi_\alpha\left(\overline{E(F)}\right) \subset \overline{\pi_\alpha(E(F))} \subset \overline{f_\alpha(F)} \text{ para cada } \alpha \in \mathcal{A}.$$

Por tanto, $x \in F$ □

A.4 Redes

Como es conocido en los espacios métricos muchas propiedades topológicas son caracterizadas a través de sucesiones, pero estas caracterizaciones no puede ser aplicadas en espacios topológicos en general. Necesitamos primero generalizar el concepto de sucesión y así tener resultados análogos a los que tenemos para espacios métricos.

Definición A.4.1 *Un conjunto dirigido es un conjunto I con una relación $\preccurlyeq$ sobre I tal que*

(1) $i \preccurlyeq i$ para todo $i \in I$.

(2) $i \preccurlyeq j$ y $j \preccurlyeq \gamma \Rightarrow i \preccurlyeq \gamma$.

(3) Para todo $i, j \in I$ existe $\gamma \in I$ tal que $i \preccurlyeq \gamma$ y $j \preccurlyeq \gamma$.

Una relación que satisface las primeras dos propiedades es llamado preorden por algunos autores.

Definición A.4.2 *Una red en X es una función $i \longmapsto x_i$ de un conjunto dirigido I en X. Denotamos a esta función como $(x_i)_{i\in I}$.*

Algunos ejemplos de conjuntos dirigidos son:

Ejemplos A.4.3 *(1) El conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$, con el orden natural.*

(2) El conjunto $\mathcal{N}$ de todas las vecindades de un punto x en un espacio topológico X, con el preorden

$$U \preccurlyeq V \Leftrightarrow U \supset V.$$

Decimos que $\mathcal{N}$ es un conjunto dirigido por la inclusión inversa.

(3) Si A y B son conjuntos dirigidos, existe una manera natural de dirigir a $A \times B$:

$$(i, j) \preccurlyeq (i', j') \Leftrightarrow i \preccurlyeq i' \text{ y } j \preccurlyeq j'.$$

Por el ejemplo (1) tenemos que cualquier red indexada por $\mathbb{N}$, con su orden natural, es simplemente una sucesión; así, toda sucesión es una red.

Definición A.4.4 *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $E \subset X$. Una red $(x_i)_{i \in I}$ termina en E si existe $i_0 \in I$ tal que $x_i \in E$ para todo $i \succcurlyeq i_0$, y (x_i) frecuenta a E si para cada $i \in I$ existe $j \succcurlyeq i$ tal que $x_j \subset E$. Un punto $x \in X$ es un límite de (x_i) si para cada vecindad U de x la red (x_i) termina en U. Si x es un punto límite de (x_i) entonces decimos que la red $\mathcal{T}-$converge a x o simplemente converge a x si se sobre entiende la topología en cuestión..*

Proposición A.4.5 *Un espacio topológico X es Hausdorff si y sólo si cada red convergente en X tiene un único límite.*

Proposición A.4.6 *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, $B \subset X$ y $x \in X$. Entonces $x \in \overline{B}$ si y sólo si alguna red en B converge a x.*

Demostración.

Si una red en B converge a x, entonces cada vecindad de x intersecta a B ya que la red termina en cada vecindad de x, por lo cual $x \in \overline{B}$. Al contrario supongamos que $x \in \overline{B}$, entonces si el conjunto $\mathcal{N}$ de las vecindades de x lo ordenamos por la inclusión inversa y tomamos x_U un elemento de $U \cap B$, entonces $(x_U)_{U \in \mathcal{N}}$ es una red en B que converge al punto x. $\square$

Corolario A.4.7 *Un subconjunto B de un espacio topológico es cerrado si y sólo si contiene cada límite de toda red con términos en B.*

Proposición A.4.8 *Sean X e Y espacios topológicos. La función $f : X \to Y$ es continua en x_0 si y sólo si $f(x_i) \to f(x_0)$ siempre que (x_i) sea una red en X convergente a x_0.*

Demostración.

Si f es continua en x_0 y (x_i) es una red convergente a x_0, entonces se sigue inmediatamente de la definición de convergencia y la continuidad en un punto que $f(x_i) \to f(x_0)$. Ahora, supóngase que f no es continua en x_0, entonces existe V vecindad para $f(x_0)$ tal que para cualquier vecindad U de x_0 $f(U) \nsubseteq V$. Sea $\mathcal{N}$ el conjunto de las vecindades de x ordenado por la inclusión inversa. Para cada $U \in \mathcal{N}$, sea x_U un elemento de U tal que $f(x_U) \notin V$. Entonces la red (x_U) converge a x_0; pero $f(x_U)$ no converge a $f(x_0)$. $\square$

Corolario A.4.9 *Sean X un conjunto, $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ dos topologías en X, entonces $\mathcal{T}_1$ es igual a $\mathcal{T}_2$ si y sólo si toda red (x_a) en X es $\mathcal{T}_1-$convergente si y sólo si es $\mathcal{T}_2$-convergente.*

Demostración.

Si las topologías son iguales entonces se obtiene el resultado deseado. Inversamente si suponemos que toda red en X es $\mathcal{T}_1-$convergente si y sólo si es $\mathcal{T}_2-$convergente, tenemos por la proposición anterior que la función identidad es un homomorfismo.. $\square$

Definición A.4.10 *Un conjunto J de un conjunto dirigido I es cofinal en I si para cada $i \in I$ existe $j \in J$ tal que $i \preccurlyeq j$.*

Definición A.4.11 *Sean X un conjunto no vacío, I un conjunto dirigido y*

$$f : I \to X$$

una red, además supongamos que J es un conjunto dirigido y $g : J \to I$ una función que

(1) $g(j_1) \preccurlyeq g(j_2)$ en I siempre que $j_1 \preccurlyeq j_2$ en J

(2) $g(J)$ es cofinal en I

entonces la red $f \circ g$ es llamada una subred en J

Proposición A.4.12 *Sea (x_i) una red en el conjunto X*

(1) La red (x_i) es una subred de ella misma.

(2) Cada subred de (x_i) es una red en X.

(3) Cada subred de una subred de (x_i) es una subred de (x_i).

(4) Si X es un espacio topológico y (x_i) converge a un elemento $x \in X$, entonces cada subred de (x_i) converge a x.

(5) Si X es un espacio topológico y existe $x \in X$ tal que cada subred de (x_i) tiene una subred que converge a x, entonces $x_i \to x$.

Demostración.

La demostración de los incisos (1), (2), (3) y (4) se siguen inmediatamente de las definiciones.

(5) Sea $x \in X$ tal que cada subred de (x_i) tiene una subred que converge a x y supongamos que x no es límite de $(x_i)_{i\in I}$, por tanto existe U, vecindad de x, tal que para cada $i \in I$ existe $j \in I$ tal que $i \preccurlyeq j$ y

$$x_j \notin U$$

Sea $J = \{j \in I : x_j \notin U\}$, J es un subconjunto cofinal de I. Entonces (x_j) es una subred de (x_i) que no tiene subred alguna que converja a x, lo cual es una contradicción. □

Observación A.4.13 *La siguiente construcción es útil para indexar subredes de dos redes con el mismo conjunto de índices.*

Supongamos que $(x_i)_{i\in I}$ y $(y_j)_{j\in J}$ son redes. Sea $K = I \times J$, dirigido de manera natural, es decir

$$(i, j) \preccurlyeq (i', j') \Leftrightarrow i \preccurlyeq i' \text{ y } j \preccurlyeq j'.$$

y sean $g : K \to I$ y $h : K \to J$ las proyecciones en I y J respectivamente. Entonces

$$\left(x_{g(i,j)}\right) \text{ y } \left(y_{h(i,j)}\right)$$

son subredes de (x_i) y (y_j), respectivamente, que tienen el mismo conjunto de índices. Notamos que si (x_i) está en un espacio topológico, entonces (x_i) converge algún x si y sólo si $\left(x_{g(i,j)}\right)$ converge a x.

Definición A.4.14 *Sea x un elemento de un espacio topológico X y $(x_i)_{\in I}$ una red. Entonces (x_i) se acumula (aglomera) en x si para cada U vecindad de x y cada $i \in I$ existe $j \in I$ tal que*

$$i \preccurlyeq j \text{ y } x_j \in U$$

El punto x es llamado punto de acu ulación o de aglomeración de $(x_i)_{i \in I}$

Dos de las propiedades fundamentales acerca de la acumulación de redes están contenidas en la siguiente proposición, cuya demostración es consecuencia directa de las definiciones de redes y subredes.

Proposición A.4.15 *Supongamos que (x_i) es una red en un espacio topológico X y sea $x \in X$*

(1) Si (x_i) converge a x, entonces (x_i) se acumula en x.

(2) Si (x_i) tiene una subred que se acumula en x, entonces (x_i) se acumula en x.

Mientras la convergencia es una propiedad que heredan las subredes de la red, la propiedad de la acumulación pasa de las subredes a la red.

En los espacios métricos, una sucesión se acumula en un punto si y sólo si la sucesión tiene una subsucesión convergente al punto, por lo cual un conjunto en un espacio métrico es cerrado si y sólo si contiene a los puntos de aglomeración de cada sucesión en él. Como mencionamos al principio las redes son una generalización de las sucesiones. Los hechos anteriores se muestran a continuación para redes.

Proposición A.4.16 *Una red en un espacio topológico se acumula en un punto si y sólo si la red tiene una subred que converge al punto.*

Demostración.

Sea $(x_i)_{i \in I}$ una red en un espacio topológico. Es claro que si (x_i) tiene una subred que converge a x entonces ésta se acumula en x. De manera inversa, supóngase que (x_i) se acumula en x. Sea J el conjunto de parejas ordenadas (i, U) tal que $i \in I$ y U es una vecindad de x que contiene a x_i. Decimos que

$$(i_1, U_1) \preccurlyeq (i_2, U_2) \text{ si y sólo si } i_1 \preccurlyeq i_2 \text{ y } U_1 \supseteq U_2$$

Si (i_1, U_1), $(i_2, U_2) \in J$, entonces el hecho de que (x_i) se acumule en x implica que existe $i_3 \in I$ tal que $i_1 \preccurlyeq i_3$, $i_2 \preccurlyeq i_3$ y $x_{i_3} \in U_1 \cap U_2$, lo cual implica que

$$(i_1, U_1) \preccurlyeq (i_3, U_1 \cap U_2) \text{ y } (i_2, U_2) \preccurlyeq (i_3, U_1 \cap U_2)$$

por tanto J es un conjunto dirigido.

Sea $g(i, U) = i$ siempre que $(i, U) \in J$. Entonces, $(x_{g(i,U)})$ es una subred de (x_i) y converge a x. □

Corolario A.4.17 *Un subconjunto B de un espacio topológico es cerrado si y sólo si B contiene todos los puntos de acumulación de cada red en B.*

Demostración.
Se sigue de la Proposición A.4.7 □

Teorema A.4.18 *Un subconjunto K de un espacio topológico es compacto si y sólo si cada red en K tiene una subred convergente en K.*

Demostración.
Sea (x_i) una red en K sin subred convergente a un punto de K, entonces (x_i) no se acumula en ningún punto de K, por consiguiente para cada $x \in K$ existen U_x vecindad de x e i_x tales que

$$x_j \notin U_x \text{ siempre que } j \geqslant i_x$$

Sea $\mathcal{G} = \{U_x : x \in K\}$, esta colección es una cubierta abierta para K; como para cada subfamilia finita de $\mathcal{G}$ existe $i_0 \in I$ tal que x_{i_0} no está en ningún elemento de esa subfamilia, entonces K no es compacto.

Inversamente, supongamos que K no es compacto, entonces existe una cubierta abierta de K, tal que cada subfamilia finita no cubre a K. Sea J la familia de todas las uniones de subfamilias finitas. J es una cubierta de K la cual no tiene subcubiertas finitas para K, además es un conjunto dirigido con la contención.

Para cada $U \in J$ sea x_U un elemento de $K \diagdown U$. Entonces (x_U) es una red en K con la propiedad que $x_U \notin U_0$ siempre que $U \supseteq U_0$, de lo que se sigue que (x_U) no tiene puntos de acumulación en K, es decir (x_U) no tiene subredes convergentes. □

A.5 Identificaciones

Definición A.5.1 *Sean Y un conjunto, X un espacio topológico y $p : X \to Y$ una función suprayectiva. La topología de identificación en Y determinada por p es: $\mathcal{T}(p) = \left\{U \subset Y : p^{-1}(U) \text{ es abierto en } X\right\}$.*

$\mathcal{T}(p)$ es una topología debido a que p^{-1} conmuta con las operaciones conjuntistas. Asimismo, como p^{-1} conmuta con los complementos, se tiene: $A \subset Y$ es cerrado si y sólo si $p^{-1}(A)$ es cerrado en X.

Definición A.5.2 *Sean X e Y dos espacios topológicos. Una función continua suprayectiva $p : X \to Y$ se llama identificación cuando la topología de Y es exactamente $\mathcal{T}(p)$.*

En lo que sigue X e Y son espacios topológicos.

Proposición A.5.3 *Si $p : X \to Y$ es una función suprayectiva, continua y abierta, entonces p es una identificación.*

Proposición A.5.4 *Sea $p : X \to Y$ continua. Si existe una función continua $s : Y \to X$ tal que $p \circ s = i_Y$, entonces p es una identificación.*

Definición A.5.5 *Sea $p : X \to Y$ una identificación. Un conjunto $A \subset X$ se llama $p-$saturado siempre y cuando sea la imagen inversa de algún conjunto en Y. Se define la $p-$carga de cualquier conjunto $A \subset X$ como $p^{-1}p(A)$.*

Proposición A.5.6 *Sea $p : X \to Y$ una identificación. Entonces p es abierta si y sólo si la $p-$carga de cada conjunto abierto en X es también un conjunto abierto.*

Teorema A.5.7 *Sea $p : X \to Y$ una función suprayectiva continua. p es una identificación si y sólo si para cada espacio Z y cada función $g : Y \to Z$, la continuidad de $g \circ p$ implica la de g.*

Teorema A.5.8 *(Transgresión) Sean $p : X \to Y$ una identificación y $h : X \to Z$ continua. Supongamos que h es constante en cada fibra $p^{-1}(y)$. Entonces*

1. *$h \circ p^{-1} : Y \to Z$ es continua y además, el diagrama conmuta.*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{p} & Y \\ h\downarrow & \swarrow h \circ p^{-1} & \\ Z & & \end{array}$$

2. *$h \circ p^{-1} : Y \to Z$ es una función abierta si $h(U)$ es abierta siempre que U sea un abierto p-saturado*

Teorema A.5.9 *(transitividad) Sea $p : X \to Y$ una identificación, Z un conjunto y $g : Y \to Z$ una función suprayectiva. Entonces $\mathcal{T}(g) = \mathcal{T}(g \circ p)$; en particular, $g \circ p$ es una identificación si y sólo si g lo es.*

Definición A.5.10 *Un espacio de Hausdorff X es un $k-$espacio (o un espacio compactamente generado) si cumple la siguiente condición:*

$U \subset X$ es abierto (cerrado) si y sólo si $U \cap K$ es abierto (cerrado) en K para todo compacto $K \subset X$.

Obviamente todo compacto es un $k-$ espacio

Nótese que si U es abierto (cerrado) en X entonces siempre se cumple que $U \cap K$ es abierto (cerrado) en K para todo $K \subset X$ compacto, por lo cual para probar que un espacio de Hausdorff es un k-espacio será suficiente probar la otra implicación.

Teorema A.5.11 *Un espacio de Hausdorff X es un k-espacio si y sólo si hay una identificación*

$$p : Z \to X$$

donde Z es un espacio LCH.

Demostración.

Supongamos que existe tal identificación y sea F un subconjunto de X no cerrado. Entonces $p^{-1}(F)$ no es cerrado en Z y existe $z \in \overline{p^{-1}(F)} - p^{-1}(F)$. Sea V una vecindad compacta de z. Así, $p(V)$ es compacto y

$$p(z) \in \overline{p(V) \cap F} - (p(V) \cap F)$$

De donde, $p(V) \cap F$ no es cerrado en X. Es decir, X no es un k-espacio.

Inversamente, supongamos que X es un k-espacio. Sea $\{K_\alpha\}_{\alpha\in A}$ la colección de subconjuntos compactos de X. En A tomemos la topología discreta y en $K_\alpha \times \{\alpha\}$ la topología producto. El espacio $K_\alpha \times \{\alpha\}$ es compacto para cada $\alpha \in A$. En el espacio

$$Z = \bigcup_{\alpha\in A} K_\alpha \times \{\alpha\}$$

tomamos la topología de la suma, es decir $D \subset Z$ es abierto si y sólo si

$$D \cap (K_\alpha \times \{\alpha\})$$

es abierto en $K_\alpha \times \{\alpha\}$ para cada $\alpha \in A$. Como $K_\alpha \times \{\alpha\}$ es compacto y abierto en Z para todo $\alpha \in A$ tenemos que Z es LCH. Definimos

$$p : Z \to X$$

como $p(x, \alpha) = x$. Esta función es sobre y es una identificación ya que: F es cerrado en X si y sólo si $K_\alpha \cap F$ es cerrado para cada $\alpha \in A$, y

$$p^{-1}(F) = \bigcup_{\alpha\in A} (K_\alpha \cap F) \times \{\alpha\}$$

es cerrado en Z si y sólo si $K_\alpha \cap F$ es cerrado para cada $\alpha \in A$. □

Corolario A.5.12 *Un subespacio abierto Y de un k-espacio de Hausdorff X es un k-espacio.*

Demostración.

Sea $p : Z \to X$ una identificación, con Z un espacio LCH. $p^{-1}(Y)$ es un subespacio abierto de Z y por tanto, es un espacio LCH. La función $p|p^{-1}(Y) : p^{-1}(Y) \to Y$ es sobre y $U \subset Y$ es abierto en Y (por tanto, en X) si y sólo si $p^{-1}(U)$ es abierto en Z (por tanto, en $p^{-1}(Y)$); o sea, $p|p^{-1}(Y)$ es una identificación y por consiguiente Y es un k-espacio.

Proposición A.5.13 *Todo espacio de Hausdorff primero numerable, es decir: cada punto consta de una base local numerable, es un $k-$ espacio.*

Demostración.

Sean X un espacio de Hausdorff primero numerable y $B \subset X$ tal que

$$B \cap K$$

es cerrado en K para cada compacto $K \subset X$. Como X es primero numerable los cerrados en X quedan caracterizados por la convergencia de sucesiones. Sea $(x_n)_n \subset B$ una sucesión convergente a $x \in X$, entonces

$$\{x, x_1, x_2, \ldots\} \cap B$$

es cerrado en el compacto $\{x, x_1, x_2, \ldots\}$, por lo cual x pertenece a la intersección, teniéndose así que $x \in B$. □

Damos un ejemplo de un k-espacio que además no es normal.

Ejemplo A.5.14 *Sean X un conjunto de cardinalidad infinita y $x_0 \in X$. Definamos en X la topología*

$$\tau(X) = \{U \subset X : x_0 \notin U \text{ o bien } X \setminus U \text{ es finito}\}.$$

Es claro que $(X, \tau(X))$ es un espacio topológico de Hausdorff y compacto.

Sean $X = (\mathbb{N}, \tau(\mathbb{N}))$ y $Y = (\mathbb{R}, \tau(\mathbb{R}))$, entonces $X \times Y$ es un espacio de Hausdorff compacto y por tanto, es un $k-$ espacio. El subespacio

$$Z = X \times Y \setminus \{(x_0, y_0)\}$$

es abierto en $X \times Y$ y por tanto, es un $k-$espacio; sin embargo, no es normal ya que los conjuntos

$$\begin{aligned} A &= (X \setminus \{x_0\}) \times \{y_0\} \\ B &= \{x_0\} \times (Y \setminus \{y_0\}) \end{aligned}$$

son cerrados en Z y ajenos entre sí y como veremos no existen abiertos ajenos que los contengan.

Supongamos que U y V son abiertos de Z que contienen a A y B respectivamente.

Sea $x \in X \setminus \{x_0\}$, entonces $(x, y_0) \in U$ y así, existe $F_x \subset Y \setminus \{y_0\}$ finito tal que $\{x\} \times (Y \setminus F_x) \subset U$. El conjunto

$$M = \bigcup \{F_x : x \in X \setminus \{x_0\}\}$$

es numerable por lo cual existe $y \in Y \setminus (M \cup \{y_0\})$ y por consiguiente

$$(X \setminus \{x_0\}) \times \{y\} \subset U$$

y el punto (x_0, y) pertenece a B y a la cerradura de $(X \setminus \{x_0\}) \times \{y\}$ con lo cual

$$U \cap V \neq \emptyset.$$

A.6 Espacios con relaciones de equivalencias

Sean X un espacio topológico, R una relación de equivalencia en X y X/R el conjunto cociente. La función canónica $p : X \to X/R$ es aquella definida por $x \mapsto [x]$, donde $[x]$ es la clase de x.

Definición A.6.1 *El conjunto X/R con la topología de identificación determinada por la función canónica $p : X \to X/R$ se llama el espacio cociente de X entre R.*

Definición A.6.2 *Sean X y Y dos espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función continua. Definimos la relación $K(f)$ en X como $x \sim y$ si $f(x) = f(y)$. Esta es una relación de equivalencia en X, por lo cual $X/K(f)$ es un espacio cociente también llamado el espacio de descomposición de f. Además, $f \circ p^{-1} : X/K(f) \to Y$ es una función continua e inyectiva.*

Teorema A.6.3 *Sean X y Y dos espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función suprayectiva y continua. Entonces $f \circ p^{-1} : X/K(f) \to Y$ es un homeomorfismo si y sólo si f es una identificación.*

Demostración.

Supongamos que f es una identificación. Necesitamos mostrar solamente que $f \circ p^{-1}$ es una función abierta. Por (2) del Teorema A.5.8, si U es un abierto de $X/K(f)$, entonces $f(p^{-1}(U))$ es abierto pues $p^{-1}(U)$ es un abierto p-saturado.

Inversamente, supongamos que $f \circ p^{-1}$ es un homeomorfismo, y por tanto una identificación. Por el teorema A.5.9 $f \circ p^{-1} \circ p = f$. □

A.7 Compactación de Stone-Čech

Para cada espacio topológico X, sea $C[X : I]$ el conjunto de todas las funciones continuas $f : X \to I$ donde I es el intervalo unitario $[0,1]$.

Para cada $f \in C[X : I]$ sea $I_f = I$ y hagamos $P^X = \prod_{f \in C[X:I]} I_f$. Por el teorema de Tychonoff P^X es compacto.

Los puntos de P^X son denotados por $\{t_f\}_f$.

Teorema A.7.1 *Si X es un espacio completamente regular, entonces puede ser encajado en P^X; es decir, existe un homeomorfismo de X sobre su imagen en P^X.*

Demostración.

Sea $\rho : X \to P^X$, definida como $\rho(x) = \{f(x)\}_f$. ρ es llamada la evaluación en X.

Afirmamos que ρ es un homeomorfismo sobre su imagen.

- ρ es inyectiva: Si $x \neq y$, entonces existe $g \in C[X : I]$ tal que $g(x) = 0$, $g(y) = 1$, ya que el espacio X es $T_{3\frac{1}{2}}$; por tanto, $\{f(x)\}_f \neq \{f(y)\}_f$.
- ρ es continua ya que $(\pi_f \circ \rho)(x) = f(x)$ para todo $f \in C[X : I]$, donde π_f es la f–proyección.
- $\rho : X \to \rho(X)$ es abierta:

  Sean U un abierto de X y $x \in U$. Como el espacio X es $T_{3\frac{1}{2}}$, existe f_0 que pertenece a $C[X : I]$ tal que $f_0(x) = 1$ y $f_0(X \setminus U) = 0$. Por tanto, $f_0(x) \notin \overline{f_0(X \setminus U)}$. El subconjunto

$$\left([0,1] - \overline{f_0(X \setminus U)}\right) \times \prod_{f \in C[X:I],\ f \neq f_0} [0,1]$$
$$= (0,1] \times \prod_{f \in C[X:I],\ f \neq f_0} [0,1]$$

  es abierto en P^X y

$$\rho(x) \in \left((0,1] \times \prod_{f \in C[X:I],\ f \neq f_0} [0,1] \right) \cap \rho(X) \subset \rho(U)$$

Por tanto, $\rho(U)$ es un abierto en $\rho(X)$. Así, $\rho : X \to \rho(X)$ es abierta. □

Definición A.7.2 *Si X es completamente regular entonces la compactación de Stone Čhech es el espacio compacto $(\beta(X), \rho)$ donde $\beta(X)$ es la cerradura de $\rho(X)$ en P^X.*

Corolario A.7.3 *Sean X y Y dos espacios completamente regulares y $h : X \to Y$ una función continua. Existe una función continua $H : P^X \to P^Y$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo.*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h} & Y \\ \rho \downarrow & & \downarrow \rho_1 \\ P^X & \underset{H}{\longrightarrow} & P^Y \end{array}$$

donde ρ y ρ_1 son las evaluaciones en X y Y, respectivamente. En particular,

$$H|\beta(X) : \beta(X) \to \beta(Y) \;,$$

Demostración.

Para cada $g \in C(Y, I)$ tenemos que $g \circ h \in C[X : I]$. Hagamos h_g igual a la $g \circ h$ proyección en P^X, es decir:

$$h_g : \begin{array}{c} P^X \to I_{g \circ h} \\ (t_f)_f \to t_{g \circ h} \end{array}.$$

Definamos la función

$$H : P^X \to \prod_{g \in C(Y,I)} I_g = P^Y$$

como:

$$(t_f)_f \mapsto (t_{g \circ h})_g = \left\{ h_g \left((t_f)_f \right) \right\}_g$$

es continua pues compuesta con cada proyección $p_g(t_g) = t_g$ es la $g \circ h$-proyección de P^X en I, y ésta es continua.

H hace conmutativo el diagrama ya que:

$(H \circ \rho)(x) = H\left(\{f(x)\}_f \right) = \left\{ h_g \left(\{f(x)\}_f \right) \right\}_g = \{(g \circ h)(x)\}_g$

$(\rho_1 \circ h)(x) = \rho_1(h(x)) = \{g(h(x))\}_g = \{(g \circ h)(x)\}_g$

La conmutatividad del diagrama implica que $H(\rho(X)) \subset \rho_1(h(X)) \subset \rho_1(Y)$; y la continuidad de H implica que $H\left(\overline{\rho(X)}\right) \subset \overline{H(\rho(X))} \subset \overline{\rho_1(Y)}$. □

Sea X un espacio completamente regular, la compactación de Stone Čhech $(\beta(X), \rho)$ de X tiene las siguientes propiedades:

Teorema A.7.4 *(M. Stone; E Čhech). Sea X un espacio completamente regular.*

(1) Para cada espacio compacto Y y cada función continua $f : X \to Y$ existe una única función continua $f^{\beta} : \beta(X) \to Y$ que hace conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \rho\downarrow & f^{\beta}\nearrow & \\ \beta(X) & & \end{array}$$

Es decir, $f = f^{\beta} \circ \rho$.

(2) (Unicidad) Cualquier compactación $\left(\hat{X}, h\right)$de X que tenga la propiedad anterior es homeomorfa a $\beta(X)$. De hecho el homeomorfismo transforma $\rho(x)$ en $h(X)$.

(3) $\beta(X)$ es la *más* grande compactación de X en el sentido de que si $\hat{X}$ es una compactación de X, entonces $\hat{X}$ es un espacio cociente de $\beta(X)$.

Demostración.

(1) Por el Corolario A.7.3 tenemos que existe una función continua

$$H : P^X \to P^Y$$

tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \rho\downarrow & & \downarrow\rho_1 \\ \beta(X) & \xrightarrow[H]{} & \beta(Y) \end{array}$$

es decir: $H \circ \rho = \rho_1 \circ f$.

En este caso ρ_1 es un homeomorfismo de Y en $\beta(Y)$ <u>ya que</u>: $\rho_1(Y)$ es compacto por serlo Y y por tanto, $\rho_1(Y)$ es cerrado en $\beta(Y) = \overline{\rho_1(Y)}$; así, $Y \cong \beta(Y)$.

Sea $f^{\beta} = \beta(X) \to Y$ la función definida como $f^{\beta} = \rho_1^{-1} \circ H$.

Entonces, f^{β} es claramente continua y satisface $f = f^{\beta} \circ \rho$.

Si $G : \beta(X) \to Y$ es una función continua tal que $f = G \circ \rho$, entonces $f^{\beta}|_{\rho(X)} = G|_{\rho(X)}$. Como $\beta(X)$ es de Hausdorff , $\rho(X)$ es denso en $\beta(X)$ y f^{β},G son continuas en $\beta(X)$ se sigue que $f^{\beta} = G$.

(2) Sea $\left(\widehat{X}, h\right)$ una compactación de X, o sea,

$$h : X \to \widehat{X}$$

es un homeomorfismo de X sobre su imagen y $h(X)$ es denso en el compacto $\widehat{X}$.

Supongamos que $\left(\widehat{X}, h\right)$ tiene la propiedad (1). Entonces existe

$$G : \widehat{X} \to \beta(X)$$

continua tal que $p = G \circ h$.

También por (1) existe $f^{\beta} : \beta(X) \to \widehat{X}$ continua tal que $h = f^{\beta} \circ p$.

Por lo anterior

$$\begin{aligned} G(h(x)) &= p(x); \\ h(x) &= f^{\beta}(p(x)). \end{aligned}$$

para todo $x \in X$.

De donde

$$\begin{aligned} G\left(f^{\beta}(p(x))\right) &= p(x); \\ f^{\beta}(G(h(x))) &= h(x). \end{aligned}$$

para todo $x \in X$

Es decir, $(G \circ f^{\beta})|_{p(X)} = i_{p(X)}$ y $(f^{\beta} \circ G)|_{h(X)} = i_{h(X)}$.

De la densidad de $p(X)$ y $h(X)$ en $\beta(X)$ y $\widehat{X}$, respectivamente y la continuidad de f^{β} y G se sigue que f^{β} es la función inversa de G; por tanto, $\beta(X) \cong \widehat{X}$.

(3) Sea $\left(\widehat{X}, h\right)$ una compactación de X. Por (1) existe una función continua $f^{\beta} : \beta(X) \to \widehat{X}$ tal que $h = f^{\beta} \circ p$. Como $\beta(X)$ es compacto, $f^{\beta}(\beta(X))$ es un cerrado que contiene al subconjunto denso $h(X)$ de $\widehat{X}$; por lo tanto, f^{β} es suprayectiva. Además, f^{β} es una función cerrada debido a que $\beta(X)$ es compacto y $\widehat{X}$ es Hausdorff. Entonces f^{β} es una identificación por lo cual, al aplicar el Teorema A.6.3 obtenemos

$$\widehat{X} \approx \beta(X) \,/\, K\left(f^{\beta}\right).$$

□

El siguiente resultado es frecuentemente usado a partir del Capítulo 3.

Corolario A.7.5 *Para cada función continua y acotada $f : X \to \mathbb{R}$ existe una única función continua $f^{\beta} : \beta(X) \to \mathbb{R}$ que hace conmutativo el siguiente diagrama*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ p\downarrow & f^{\beta} \nearrow & \\ \beta(X) & & \end{array}$$

Demostración.

Por ser f acotada $f(X) \subset [a,b]$ para algún intervalo cerrado y acotado $[a,b]$. Por (1) del teorema anterior existe una única función continua $f^{\beta} : \beta(X) \to [a,b]$ que hace conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & [a,b] \\ p\downarrow & f^{\beta} \nearrow & \\ \beta(X) & & \end{array}$$

□

Apéndice B

Versiones clásicas de Stone-Weierstrass

B.1 Criterios para la convergencia absoluta

En esta sección recordaremos algunos resultados sobre la manipulación de series, especialmente de series absolutamente convergentes. Las demostraciones de estos resultados son sencillas, el lector interesado puede consultar la bibliografía dada.

Teorema B.1.1 *Sea $(x_n)_n$ sucesión en un espacio de Banach X , tal que alguno de los siguientes límites existe (finito o infinito):*

(1)

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n\|^{\frac{1}{n}} = \alpha$$

(2)

$$\lim_{n\to\infty} \left[n \left(1 - \frac{\|x_{n+1}\|}{\|x_n\|} \right) \right] = l$$

En el primer caso la serie es absolutamente convergente si $\alpha < 1$ y diverge si $\alpha > 1$, estos hechos se conocen como el criterio de la raíz .

En el segundo caso la serie es absolutamente convergente si $l > 1$ y no converge absolutamente si $l < 1$; este es llamado el Criterio de Rabbe.

Si existe el límite (finito o infinito)

(3)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|x_{n+1}\|}{\|x_n\|} = \beta$$

entonces coincide con $\lim_{n\to\infty} \|x_n\|^{\frac{1}{n}}$: por tanto tenemos un tercer criterio, llamado de la razón : la serie es absolutamente convergente si $\beta < 1$ y diverge si $\beta > 1$

B.2 Aproximaciones polinomiales de $|\cdot|$ y x^r.

Teorema B.2.1 (M-prueba de Wierstrass) *Sea (f_n) una sucesión de funciones de un conjunto D a un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$. Supongamos que $(M_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de reales tales que $\|f_n(x)\| \leq M_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $x \in D$. Si $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge absoluta y uniformemente en D.*

Demostración.

Para cada x la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n(x)\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$. En consecuencia $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge absolutamente y por tanto, converge en X para todo $x \in D$.

Para cada $x \in D$, sea $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Dado $\epsilon > 0$ se tiene:

$$\left\| f(x) - \sum_{k=1}^{n-1} f_k(x) \right\| = \left\| \sum_{k=n}^{\infty} f_k(x) \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|f_k(x)\| \leq \sum_{k=n}^{\infty} M_k < \epsilon$$

para n suficientemente grande y todo $x \in D$, ya que $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ es convergente. Es decir, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente en D. □

Proposición B.2.2 *Si $|x| \leq 1$, entonces para todo número real positivo r*

$$1 + rx + \frac{r(r-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!}x^n + \cdots$$

converge absoluta y uniformemente.

Demostración.

Sea

$$M_n = \frac{r(r-1)\cdots(r-(n-1))}{n!}$$

$1+ \sum_{n=1}^{\infty} M_n x^n$ converge si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} M_n x^n$ converge, pero por la M- prueba de Weierstrass ésta converge (de hecho absoluta y uniformemente) si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} |M_n|$ converge. Para aplicar el Criterio de Rabbe observemos que:

$$\lim_{n\to\infty} n \left[1 - \left| \frac{M_{n+1}}{M_n} \right| \right] = r + 1$$

Por tanto $\sum_{n=1}^{\infty} |M_n|$ converge. □

Proposición B.2.3 *Si $|x| \leq 1$, entonces*

$$(1+x)^r = 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!}x^n + \cdots$$

Demostración.
Sean

$$M_n = \frac{r(r-1)\cdots(r-(n-1))}{n!} \text{ y } f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} M_n x^n$$

Entonces

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n M_n x^{n-1} \text{ y} \\ x f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n M_n x^n \end{aligned}$$

Notamos que

$$(n+1) M_{n+1} + n M_n = r M_n$$

por tanto

$$\begin{aligned} f'(x) + x f'(x) &= \left[\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) M_{n+1} x^n\right] + \left[\sum_{n=1}^{\infty} n M_n x^n\right] \\ &= \left[M_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) M_{n+1} x^n\right] + \left[\sum_{n=1}^{\infty} n M_n x^n\right] \\ &= M_1 + \sum_{n=1}^{\infty} x^n ((n+1) M_{n+1} + n M_n) \\ &= r + \sum_{n=1}^{\infty} x^n (r M_n) \\ &= r + r \sum_{n=1}^{\infty} M_n x^n = r\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} M_n x^n\right) \\ &= r f(x) \end{aligned}$$

resolviendo la ecuación diferencial

$$(1+x) f'(x) = r f(x)$$

sujeta a $f(0) = 1$, tenemos que

$$f(x) = (1+x)^r$$

□

Corolario B.2.4 $(1+x)^r$ *para* $r > 0$ *y* $x \in [-1,1]$ *es el límite uniforme de polinomios con coeficientes en* $\mathbb{R}$. □

Corolario B.2.5 *Para toda* $0 \leq x \leq 2$ *y* $r > 0$, x^r *es el límite uniforme de polinomios con coeficientes en* $\mathbb{R}$, *sin término constante.*

Demostración.
Haciendo $z = x - 1$ tenemos que $(1+z)^r = x^r$ es el límite uniforme de polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$, para todo $x \in [0,2]$. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un polinomio $P_n(x)$ tal que $|x^r - P_n(x)| < \frac{1}{2n}$ para todo $x \in [0,2]$, en particular $P_n(0) < \frac{1}{2n}$. Sea

$$Q_n(x) = P_n(x) - P_n(0)$$

entonces $|x^r - Q_n(x)| \leq \frac{1}{n}$ para todo $x \in [0,2]$ □

Corolario B.2.6 *En* $[-1,1]$, $|x|$ *es el límite uniforme de polinomios con coeficientes en* $\mathbb{R}$ *sin término constante.*

B.3 Teorema de Stone Weierstrass

En esta sección probamos el teorema de Stone-Weierstrass, en su versión estándar.

A lo largo de la sección, X es un espacio topológico compacto y de Hausdorff.

La *norma uniforme* en el espacio $C[X]$, de funciones reales y continuas, se define como:

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$$

Definición B.3.1 *Una familia $\mathcal{F} \subset C[X]$ se dice que separa puntos si para cada $x \neq y$ existe $f \in \mathcal{F}$ tal que $f(x) \neq f(y)$.*

Definición B.3.2 *$\mathfrak{A} \subset C[X]$ es una subálgebra si es un subespacio vectorial real de $C[X]$ y $f \cdot g \in \mathfrak{A}$ siempre que $f \in \mathfrak{A}$ y $g \in \mathfrak{A}$. En tanto que $\mathfrak{A}$ es llamada una retícula si el $\min\{f,g\}$ y el $\max\{f,g\}$ pertenecen a $\mathfrak{A}$ para toda $f,g \in \mathfrak{A}$. Gracias a que las operaciones tanto del álgebra como de una retícula son continuas entonces tenemos que si $\mathfrak{A}$ es una álgebra (retícula) entonces la cerradura $\overline{\mathfrak{A}}$ de $\mathfrak{A}$ es una álgebra (retícula) en $C[X]$.*

Lema B.3.3 *$\mathbb{R}^2$ es un álgebra bajo la suma y multiplicación coordenada a coordenada. Las únicas subálgebras de $\mathbb{R}^2$ son $\mathbb{R}^2, \{(0,0)\}$ y los subespacios generados por $\{(1,0)\}$, $\{(1,0)\}$ y $\{(1,1)\}$.*

Demostración.

Se prueba directamente de la definición que los subespacios de $\mathbb{R}^2$ listados en la parte de arriba son subálgebras.

Por otra parte, sea $\mathfrak{A} \subset \mathbb{R}^2$ una subálgebra distinta de cero y $(a,b) \in \mathfrak{A}$, con $(a,b) \neq (0,0)$, entonces $(a^2,b^2) \in \mathfrak{A}$. Si $a \neq 0$, $b \neq 0$ y $a \neq b$, entonces (a,b) y (a^2,b^2) son linealmente independientes, por tanto $\mathfrak{A} = \mathbb{R}^2$. Las otras posibilidades: $a \neq 0, b = 0$; $a = 0, b \neq 0$ y $a = b \neq 0$, dan las otras tres subálgebras. $\square$

Lo siguiente es una reformulación del Corolario B.2.6 sin término constante

Lema B.3.4 *Para cada $\epsilon > 0$ existe un polinomio P con coeficientes en $\mathbb{R}$ tal que $P(0) = 0$ y $||x| - P(x)| < \epsilon$ para $x \in [-1,1]$.*

Lema B.3.5 *Sea $\mathfrak{A}$ una subálgebra cerrada de $C[X]$. Si $f \in \mathfrak{A}$ entonces $|f| \in \mathfrak{A}$, y por tanto $\mathfrak{A}$ es una retícula.*

Demostración.

Para $f \in \mathfrak{A}$, con $f \neq 0$, sea $h = \frac{f}{\|f\|}$. Si P es como en el lema anterior tenemos que

$$\||h| - P \circ h\| < \epsilon..$$

Como $P(0) = 0$, entonces es de la forma $P(x) = a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$. De donde

$$P \circ h = a_1h + a_2h^2 + \cdots + a_nh^n \in \mathfrak{A}$$

ya que $\mathfrak{A}$ es una álgebra. Como $\mathfrak{A}$ es cerrada y ϵ es arbitraria, tenemos $|h| \in \mathfrak{A}$ y por consiguiente$|f| = \|f\| \, |h| \in \mathfrak{A}$. Esto prueba el primer aserto, y el segundo se sigue de:

$$\max\{f,g\} = \frac{1}{2}(f+g+|f-g|), \quad \min\{f,g\} = \frac{1}{2}(f+g-|f-g|)$$

□

Lema B.3.6 *Sea $\mathfrak{A}$ una retícula en $C[X]$ y $f \in C[X]$. Si dados $x, y \in K$, con $x \neq y$, existe $g \in \mathfrak{A}$ tal que $g(x) = f(x)$ y $g(y) = f(y)$, entonces f es el límite uniforme de funciones en $\mathfrak{A}$. Si en particular $\mathfrak{A}$ es cerrada, entonces $f \in \mathfrak{A}$.*

Demostración.

Para cada $x, y \in X$, existe $g_{xy} \in \mathfrak{A}$ tal que $f(x) = g_{xy}(x)$ y $f(y) = g_{xy}(y)$. Como f y g_{xy} son continuas y tienen los mismos valores en x e y, entonces dado $\epsilon > 0$ se tiene que los conjuntos

$$U_{x,y} = \{z \in X : f(z) < g_{xy}(z) + \epsilon\} \text{ y } V_{x,y} = \{z \in X : f(z) > g_{xy}(z) - \epsilon\}$$

son abiertos que contienen tanto a x como a y.

Fijemos y, entonces $\{U_{x,y}\}_{x \in X}$ cubre X, y por tanto existe una subcubierta finita $\{U_{x_i,y}\}_{i=1}^{n}$. Sea $g_y = \max\{g_{x_1,y}, \cdots g_{x_n,y}\}$, entonces

$$f < g_y + \epsilon \text{ en } X \text{ y } f > g_y - \epsilon \text{ en } V_y = \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i,y}$$

V_y es un abierto que contiene a y. Entonces $\{V_y\}_{y \in X}$ es otra cubierta abierta de X, por tanto, existe una subcubierta finita $\{V_{y_j}\}_{j=1}^{m}$. Sea $g = \min\{g_{y_1}, \cdots g_{y_m}\}$. Como $\mathfrak{A}$ es una retícula, $g \in \mathfrak{A}$. Además:

$$f < g + \epsilon \text{ y } f > g - \epsilon \text{ en } X.$$

Es decir,

$$|f(x) - g(x)| < \epsilon \quad \text{para todo } x \in X$$

Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $g_n \in \mathfrak{A}$ tal que

$$|f(x) - g_n(x)| < \frac{1}{n} \quad \text{para todo } x \in X,$$

por lo que se tiene que $g_n \to f$ uniformemente, o dicho de otra forma $f \in \overline{\mathfrak{A}}$.

□

Como corolario obtenemos la siguiente versión retícula del teorema de Stone-Weierstrass:

Teorema B.3.7 *Sea $\mathfrak{A}$ una retícula en $C[X]$ tal que dados $a, b \in \mathbb{R}$ y $x \neq y \in K$, existe $g \in \mathfrak{A}$ tal que $g(x) = a$ y $g(y) = b$. Entonces cualquier función en $C[X]$ es el límite uniforme de funciones en $\mathfrak{A}$. Si en particular $\mathfrak{A}$ es cerrada, entonces $\mathfrak{A} = C[X]$.*

Teorema B.3.8 (Stone-Weierstrass) *Sea X un espacio compacto y de Hausdorff. Si $\mathfrak{A}$ es una subálgebra cerrada de $C[X]$ que separa puntos, entonces*

$$\mathfrak{A} = C[X] \;\; o \; \mathfrak{A} = \{f \in C[X] : f(x_0) = 0\} \;\; \textit{para alguna } x_0 \in X$$

La primera situación se da si y sólo si $\mathfrak{A}$ satisface además alguna de las siguientes tres condiciones:

(i) $\mathfrak{A}$ *contiene a las funciones constantes.*

(ii) Para cada $x \in X$, *existe* $g \in \mathfrak{A}$ *tal que* $g(x) \neq 0$.

(iii) Existe $g \in \mathfrak{A}$ *estrictamente positiva.*

Demostración.

Dados $x \neq y$ sea $\mathfrak{A}_{xy} = \{(f(x), f(y)) : f \in \mathfrak{A}\}$ observe que ésta es una subálgebra de $\mathbb{R}^2$ ya que

$$\begin{array}{ccc} C(X) & \to & \mathbb{R}^2 \\ f & \to & (f(x), f(y)) \end{array}$$

es un homomorfismo de álgebras.

Notamos que $\mathfrak{A}_{xy}$ no puede ser $\{(0,0)\}$ ni el generado por $(1,1)$ ya que $\mathfrak{A}_{xy}$ separa puntos. Analizamos los casos restantes:

Si $\mathfrak{A}_{xy} = \mathbb{R}^2$ para todo $x, y \in X$, entonces $\mathfrak{A} = C[X]$, ya que dados $x, y \in X$ y $f \in C[X]$ existe $g \in \mathfrak{A}$ tal que $f(x) = g(x)$ y $f(y) = g(y)$ y por lo visto en el Lema B.3.6 se obtiene que $f \in \overline{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}$.

Ahora, supongamos que para alguna pareja $x, y \in X$ la subálgebra $\mathfrak{A}_{xy}$ es la generada por $(0,1)$ o bien la generada por $(1,0)$. En el primer caso $f(x) = 0$ para todo $f \in \mathfrak{A}$ y en el segundo $f(y) = 0$ para todo $f \in \mathfrak{A}$. Llamemos x_0 a x o y, según sea el caso. Ese punto es único porque $\mathfrak{A}$ separa puntos de X. Afirmamos que:

$$\mathfrak{A} = \{f \in C[X] : f(x_0) = 0\}$$

Supongamos que $f(x_0) = 0$ y sean $z, w \in X$ con $z \neq w$. Existe $g \in \mathfrak{A}$ tal que $g(z) \neq g(w)$. Si alguno de los puntos z y w coincide con x_0, digamos z, tenemos $0 = g(z)$. Por tanto, $\frac{f(w)g}{g(w)}(z) = f(z)$ y $\frac{f(w)g}{g(w)}(w) = f(w)$ y $\frac{f(w)g}{g(w)} \in \mathfrak{A}$. Si z ni w coinciden con x_0, entonces $\mathfrak{A}_{zw} = \mathbb{R}^2$ y por tanto existe $g \in \mathfrak{A}$ tal que $g(z) = f(z)$ y $g(w) = f(w)$. .en cualquiera de los dos casos se sigue del Lema B.3.6 que $f \in \mathfrak{A}$.

Si $\mathfrak{A}$ cumple alguna de las tres incisos arriba mencionados, entonces

$$\mathfrak{A} = \{f \in C[X] : f(x_0) = 0\}$$

no puede darse, y por tanto $\mathfrak{A} = C[X]$. Y si esto último se cumple es claro que (i), (ii) y (iii) se satisfacen.. $\square$

Apéndice C

Álgebras de Banach

C.1 Definiciones básicas

El principal propósito de este apéndice es obtener algunos resultados a cerca del espectro de un álgebra de Banach y demostrar el Teorema de Representación de Gelfand.

Definición C.1.1 *Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ o $\mathbf{C}$, junto con una operación binaria $\bullet$ en X, tal que:*

(1) $x \bullet (y \bullet z) = (x \bullet y) \bullet z$

(2) $x \bullet (y + z) = (x \bullet y) + (x \bullet z)$ *y* $(x + y) \bullet z = (x \bullet z) + (y \bullet z)$

(3) $\alpha (x \bullet z) = (\alpha x) \bullet z = x \bullet (\alpha z)$, *donde* $\alpha \in \mathbb{F}$.

Entonces se dice que $(X, \bullet)$ es un álgebra. Decimos que X es un álgebra real o compleja según que $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ o $\mathbf{C}$.
El álgebra X es con identidad si existe un elemento $e \neq 0$ de X tal que

(4) $e \bullet x = x \bullet e = x$ *para todo* $x \in X$, *en tal caso e es llamado la identidad (multiplicativa) de X y es fácil probar que dicho elemento es único.*

Si $\|\cdot\|$ es una norma en el espacio vectorial X y satisface

(5) $\|x \bullet y\| \leq \|x\| \, \|y\|$ *para todo* $x, y \in X$

entonces $(X, \bullet, \|\cdot\|)$ es un álgebra normada, y es un álgebra de Banach si el espacio es completo con respecto a la norma.

Por comodidad la notación arriba expuesta $x \bullet y$ usualmente es reemplazada por xy. Además, simplemente se dice, en su caso, que X es un álgera, un álgebra normada o un álgebra de Banach en lugar de las notaciones formales $(X, \bullet)$ y $(X, \bullet, \|\cdot\|)$.

Ejemplo C.1.2 *Si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio lineal normado, entonces el espacio $B(X)$ de todas las transformaciones lineales continua de X en X es un álgebra normada con respecto a las operaciones lineales usuales y la composición de funciones como producto. La norma es también la usual. Es claro que la transformación idéntica I es el idéntico de esta álgebra y que su norma es 1.*

Definición C.1.3 *Sea X un álgebra con identidad e. Un elemento x de X es invertible si existe $y \in X$ tal que $xy = yx = e$, en tal caso y es llamado el inverso (multiplicativo) de x, es denotado por x^{-1} y es el único elemento con tal propiedad. Denotamos por $G(X)$ al conjunto de todos los elementos invertibles de X.*

Definición C.1.4 *Sea X un álgebra. Entonces x^n se define inductivamente para cada $n \in \mathbb{N}$ como*

(i) $x^1 = x$

(ii) $x^n = x^{n-1}x$ *para toda* $n \geq 2$

Ahora supóngase que X tiene identidad e, entonces x^0 se define como e. Si x es invertible y $n \in \mathbb{N}$, entonces x^{-n} se define como $(x^{-1})^n$.

En la siguiente proposición, cuya prueba es sencilla, se enuncian algunas propiedades básicas de las álgebras.

Proposición C.1.5 *Supongamos que X es un álgebra:*

(a) *Si $x \in X$, entonces $0x = 0x = 0$.*

Ahora supongamos que X es un álgebra con identidad e.

(b) *El elemento 0 de X no es invertible.*

(c) *Si $x, y, z \in X$ satisfacen que $yx = xz = e$, entonces $y = z$ y x es invertible con inverso y.*

(d) *Si x y y son elementos invertibles de X y α es un escalar no cero, entonces xy, αx y x^{-1} son invertibles y sus inversos son $y^{-1}x^{-1}$, $\alpha^{-1}x^{-1}$ y x respectivamente.*

(e) *Si x es un elemento invertible de X y $n \in \mathbb{N}$, entonces x^n es invertible, y $(x^n)^{-1} = (x^{-1})^n = x^{-n}$.*

Supongamos ahora que X es un álgebra normada.

(f) *Si $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces $\|x^n\| \leq \|x\|^n$.*

Finalmente supongamos que X es un álgebra normada con identidad e.

(g) $\|e\| \geq 1$.

(h) Si x es un elemento invertible de X, entonces $\|x^{-1}\| \geq \|x\|^{-1}$.

Proposición C.1.6 *La multiplicación de elementos de un álgebra normada X es una operación continua de $X \times X$ en X.*

Demostración.
Supongamos que $\{x_n\}_n$ y $\{y_n\}_n$ son sucesiones en X que convergen $x, y \in X$, respectivamente. Como la sucesión $\{x_n\}$ es acotada tenemos:

$$\begin{aligned} \|x_n y_n - xy\| &\leq \|x_n y_n - x_n y\| + \|x_n y - xy\| \\ &\leq \|x_n\| \|y_n - y\| + \|y\| \|x_n - x\| \to 0 \end{aligned}$$

cuando $n \to \infty$, por tanto $x_n y_n \to xy$. □

De ahora en adelante supondremos que toda álgebra normada con identidad e (en particular cualquier álgebra de Banach) cumple la propiedad adicional

(6) $\|e\| = 1$

Con esto no se pierde generalidad ya que dada un álgebra normada $(X, \|\cdot\|)$ con identidad e, siempre es posible definir una norma $\|\cdot\|_0$ equivalente a $\|\cdot\|$ que satisface (5) de la Definición C.1.1 y con $\|e\|_0 = 1$. En efecto, la transformación

$$\begin{matrix} X \to B(X) \\ x \to T_x \end{matrix}$$

donde $T_x(y) = xy$ para todo $y \in X$, es un homomorfismo de álgebras (ver la definición siguiente) por lo que es fácil ver que

$$\|x\|_0 = \|T_x\|$$

es una norma que hace a X un ágebra normada, que además es equivalente a la norma original y

$$\|e\|_0 = \|T_e\| = \|I\| = 1.$$

C.2 Homomorfismos

Definición C.2.1 *Sean X y Y dos álgebras sobre el mismo campo $\mathbb{F}$, $\phi : X \to Y$ es un homomorfismo (entre álgebras) si ϕ es una transformación lineal tal que*

$$\phi(xy) = \phi(x)\,\phi(y) \text{ para toda } x, y \in X$$

Cualquier función que cumpla la igualdad anterior se dice que es una función multiplicativa. Algunas veces diremos que ϕ es una transformación lineal multiplicativa, en lugar de llamarla homomorfismo.Cuando $Y = \mathbb{F}$ también se le llama carácter o funcional lineal multiplicativa en X.

Definición C.2.2 *Sea X un álgebra, el espectro $\sigma(X)$ de X se define como*

$$\sigma(X) = \{\phi : \text{es una funcional lineal multiplicativa en } X, \text{ no nula}\}$$

Proposición C.2.3 *Sean X un álgebra con identidad e y x un elemento invertible de X . Si $\phi \in \sigma(X)$, entonces $\phi(e) = 1$, $\phi(x) \neq 0$ y $\phi(x^{-1}) = \phi(x)^{-1}$.*

Demostración.
Sea $\phi \in \sigma(X)$, entonces $\phi \neq 0$ por lo cual existe $z \in X$ tal que $\phi(z) \neq 0$.

$$\phi(z) = \phi(ez) = \phi(e)\phi(z)$$

por tanto $\phi(e) = 1$. De aquí obtenemos

$$1 = \phi(e) = \phi(xx^{-1}) = \phi(x)\phi(x^{-1})$$

por lo cual $\phi(x) \neq 0$ y $\phi(x^{-1}) = \phi(x)^{-1}$. □

Corolario C.2.4 *Sean X un álgebra con identidad e, $x \in X$ y $\phi \in \sigma(X)$. Entonces el elemento $z = x - \phi(x)e$ no es invertible.*

Demostración.
Sean $x \in X$ y $\phi \in \sigma(X)$, entonces

$$\phi(z) = \phi(x - \phi(x)e) = \phi(x) - \phi(x) = 0$$

con lo cual queda demostrado que $x - \phi(x)e$ no es invertible. □

Lema C.2.5 *Sean X un álgebra de Banach, $a_1, a_2, \ldots$ una sucesión de escalares complejos y $r > 0$ tales que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| r^n < \infty$$

Entonces, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ converge absolutamente y define una función continua en el abierto $B_r(0) = \{x : \|x\| < r\}$.

Demostración.
Supongamos que $\|x\| < r$. Para cada $n \geq 1$, sea $M_n = |a_n| r^n$. Tenemos $\|a_n x^n\| \leq M_n$ para todo $n \geq 1$ y $x \in B_r(0)$.

Por la M−Prueba de Weierstrass (Apéndice B) se tiene que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ converge absoluta y uniformemente en $B_r(0)$.

Sea $f : B_r(0) \to X$ la función $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ y definamos $f_n(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i$. Como X es un álgebra normada sabemos que la suma, el producto por un escalar y el producto entre elementos del álgebra son operaciones continuas, entonces f_n es continua para cada $n \in \mathbb{N}$. Debido a que $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a f en $B_r(0)$, entonces f es continua en $B_r(0)$.

Proposición C.2.6 *Sea X es un álgebra de Banach con identidad e. Entonces:*

(a) La bola $B_1(e)$ está contenida en $G(X)$

(b) *Si $y \in B_1(e)$, entonces* $y^{-1} = \sum_{n=0}^{k} (e-y)^n$

(c) *El conjunto $G(X)$ es abierto*

Demostración.

Supongamos que $\|y-e\| < 1$. Sea $x = e - y$; existe $r_x \in \mathbb{Q}$ tal que $\|x\| < r_x < 1$. Por el lema anterior se sigue que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \text{ está definida en la bola } B_1(0).$$

Si

$$f_k(x) = \sum_{n=0}^{k} x^n, \text{ para } \|x\| < 1,$$

entonces

$$f_k(x)(e-x) = (e-x) f_k(x) = e - x^{k+1}$$

como $f_k(x) \to f(x)$ y $x^{k+1} \to 0$, entonces

$$f(x)(e-x) = (e-x) f(x) = e \tag{C.1}$$

Por tanto, $y = e - x$ es invertible teniéndose así (a).

De C.1 se tiene que $f(x)$ es el inverso de y por lo cual

$$y^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (e-y)^n$$

demostrándose (b).

Para probar el inciso (c) sea $x \in G(X)$, afirmamos que $B_{\|x\|^{-1}}(x)$ está contenida en $G(X)$. Notamos que

$$e - x^{-1}y = x^{-1}(x-y)$$

para todo $y \in X$.

Si $y \in B_{\|x\|^{-1}}(x)$, entonces

$$\|e - x^{-1}y\| \leq \|x^{-1}\| \, \|x-y\| < 1$$

por tanto, $x^{-1}y$ es invertible y como y es producto de invertibles: $y = x(x^{-1}y)$, entonces $y \in G(X)$. □

Proposición C.2.7 *Sea X un álgebra de Banach con identidad e. Entonces*

(a) $\pm(e \pm x)$ *es invertible, siempre que* $\|x\| < 1$

(b) *Si ϕ es una funcional lineal multiplicativa, entonces ϕ es continua y $\|\phi\| \leq 1$. Por consiguiente ,*

$$\sigma(X) \subset B_1[0]$$

donde $B_1[0]$ es la bola unitaria cerrada en X^*.

Más aún, $\|\phi\| = 1$ si $\phi \in \sigma(X)$.

Demostración.

(a) Supongamos que $\|x\| < 1$ entonces $e \pm x \in B_1(e)$ la cual está contenida en $G(X)$. De donde, $\lambda(e \pm x)$ es invertible siempre que $\lambda \neq 0$; en particular, $-(e \pm x)$ es invertible.

(b) Sea $\phi \in \sigma(X)$ y $x \in X$ si $\phi(x) = 0$, entonces $\|\phi(x)\| \leq \|x\|$.

Supongamos que $\phi(x) \neq 0$, entonces

$$\frac{x}{\phi(x)} - e$$

no es invertible, ya que de serlo el producto de cualquier escalar distinto de cero por este elemento también lo sería teniéndose así que $x - \phi(x)e$ es invertible, lo cual contradice al Corolario C.2.4. Por tanto, del inciso (a) tenemos

$$\left\|\frac{x}{\phi(x)}\right\| \geq 1$$

por lo cual $\|\phi(x)\| \leq \|x\|$ y $\|\phi\| \leq 1$.

Si $\phi \in \sigma(X)$, entonces $1 = \|\phi(e)\| \leq \|\phi\| \|e\| = \|\phi\|$ y entonces $\|\phi\| = 1$. □

Proposición C.2.8 *Sea X un álgebra de Banach con identidad e, entonces la función $x \mapsto x^{-1}$ es continua.*

Demostración.

Sean $x \in G(X)$ y $\epsilon > 0$. Se probará que existe $\delta > 0$ tal que $x + y \in G(X)$ y

$$\left\|(x+y)^{-1} - x^{-1}\right\| < \epsilon \text{ si } \|y\| < \delta.$$

Se sigue de la continuidad del producto en X que existe $\delta > 0$ tal que

$$\|x^{-1}y\| < \frac{\epsilon}{\|x^{-1}\| + \epsilon},$$

siempre que $y \in X$ y $\|y\| < \delta$.

Supongamos que $\|y\| < \delta$. Como $\|x^{-1}y\| < 1$ entonces $e + x^{-1}y$ es invertible y su inverso es $\sum_{n=0}^{\infty} (-x^{-1}y)^n$. Ahora, como $x + y = x(e + x^{-1}y)$ entonces $x + y$ es invertible. Además,

$$\begin{aligned}
\left\|(x+y)^{-1} - x^{-1}\right\| &= \left\|\left(e + x^{-1}y\right)^{-1} x^{-1} - x^{-1}\right\| \\
&\leq \|x^{-1}\| \left\|\left(e + x^{-1}y\right)^{-1} - e\right\| \\
&= \|x^{-1}\| \left\|\sum_{n=1}^{\infty} (-x^{-1}y)^n\right\| \\
&\leq \|x^{-1}\| \sum_{n=1}^{\infty} \|x^{-1}y\|^n \\
&< \|x^{-1}\| \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\epsilon}{\|x^{-1}\| + \epsilon}\right)^n \\
&= \epsilon
\end{aligned}$$

□

Proposición C.2.9 *Cualquier ideal máximo en un álgebra de Banach X con identidad es cerrado.*

Demostración.

Sea I un ideal máximo del álgebra de Banach X, entonces I es cerrado o bien es denso, pero no puede ser denso ya que al ser ideal propio no intersecta al abierto $G(X)$. □

Proposición C.2.10 *Sea X un álgebra de Banach con identidad e. El espectro $\sigma(X)$ es un subconjunto compacto de X^* en la topología w^*.*

Demostración.

Por el teorema de Alaouglu sabemos que la bola unitaria cerrada $B_1[0]$ es compacta en la topología w^*. Además por (b) de la Proposición C.2.7 $\sigma(X) \subset B_1[0]$. Es suficiente probar que $\sigma(X)$ es w^*- cerrado.

Sea $\{\phi_\alpha\}_\alpha$ una red en $\sigma(X)$ que w^*-converge a $\phi \in X^*$. Como la w^*-convergencia de $(\phi_\alpha)_\alpha$ a ϕ equivale a que $\phi(x) = \lim\limits_\alpha \phi_\alpha(x)$ para todo $x \in X$, entonces se tiene que ϕ es una transformación lineal y multiplicativa y $\phi(e) = 1$. Por tanto, $\phi \in \sigma(X)$. □

Definición C.2.11 *Supongamos que x es un elemento de un álgebra de Banach con identidad e. Entonces el espectro de x es un subconjunto del campo $\mathbb{F}$ definido como:*

$$\sigma(x) = \{\alpha \in \mathbb{F} : x - \alpha e\}.$$

Observación C.2.12 *Para la prueba del primer inciso de la siguiente proposición es útil observar que si x y y son invertibles en un álgebra, entonces*

$$x^{-1} - y^{-1} = x^{-1}\left(yy^{-1}\right) - \left(x^{-1}x\right)y^{-1} = x^{-1}(y-x)y^{-1}$$

Proposición C.2.13 *Si x es un elemento de un álgebra de Banach compleja con identidad e, entonces:*

(a) $\sigma(x)$ es no vacío

(b) $\sigma(x)$ es un subconjunto compacto de la bola cerrada con centro en 0 y radio $\|x\|$.

Demostración.

(a) Supongamos que $\sigma(x)$ es vacío. Entonces $x - ze$ es invertible para todo $z \in \mathbb{C}$, en particular, x es invertible y por tanto, $x \neq 0$.

Sea $g : \mathbb{C} \to X$ la función $g(z) = (x - ze)^{-1}$.

Por la Observación anterior se tiene que para toda z y $w \in \mathbb{C}$ se cumple:

$$\begin{aligned} & g(z+w) - g(z) = \\ = \; & (x - (z+w)e)^{-1} - (x - ze)^{-1} \\ = \; & (x - (z+w)e)^{-1}\left[(x - ze) - (x - (z+w)e)\right](x - ze)^{-1} \\ = \; & w\left[x - (z+w)e\right]^{-1}(x - ze)^{-1} \end{aligned}$$

Fijas $x \in X$ y $z \in \mathbb{C}$, la función $w \to [x-(z+w)e]^{-1}$ es continua en $\mathbb{C}$, por ser la composición de funciones continuas. A partir de lo anterior g es derivable y:

$$g'(z) = \lim_{w \to 0} \frac{g(z+w)-g(z)}{w} = (x-ze)^{-2}$$

para $x \in X$ y $z \in \mathbb{C}$.

Si f es cualquier funcional lineal continua en X se sigue que $f \circ g$ es una función entera ya que para todo $z \in \mathbb{C}$ tenemos:

$$\begin{aligned}(f \circ g)'(z) &= \lim_{\lambda \to 0} \frac{(f \circ g)(z+w)-(f \circ g)(x)}{w} \\ &= \lim_{\lambda \to 0} f\left(\frac{g(z+w)-g(z)}{w}\right) \\ &= f\left(\lim_{\lambda \to 0} \frac{g(z+w)-g(z)}{w}\right) = f(g'(z))\end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}\|f(g(z))\| &\leq \|f\|\,\|g(z)\| \text{ para toda } z \in \mathbb{C} \\ &= \|f\|\left\|(x-ze)^{-1}\right\| \text{ para toda } z \in \mathbb{C}.\end{aligned}$$

Debido a que:

$$\left\|\left(\frac{x}{z}-e\right)^{-1}\right\| \to 1 \text{ cuando } z \to \infty$$

y

$$|z|^{-1}\left\|\left(\frac{x}{z}-e\right)^{-1}\right\| \to 0 \text{ cuando } z \to \infty,$$

tenemos que:

$$f(g(z)) \to 0 \text{ cuando } z \to \infty$$

Por tanto, $f \circ g$ es acotada. Por el Teorema de Liouville $f \circ g$ es constante y como se anula al infinito, entonces es idénticamente cero, teniéndose que $f(x^{-1}) = f(g(0)) = 0$. Por el teorema de Hahn-Banach, x^{-1} es cero, lo cual es imposible. Así, $\sigma(x) \neq \varnothing$. □

(b) Sea $\lambda \in \sigma(x)$, entonces $x - \lambda e$ no es invertible. Si $\lambda = 0$, entonces $\|\lambda\| \leq \|x\|$. Supongamos que $\lambda \neq 0$ entonces $e - \frac{x}{\lambda}$ no es invertible, por lo cual $\left\|e - \left(e - \frac{x}{\lambda}\right)\right\| \geq 1$ teniéndose así que $\|\lambda\| \leq \|x\|$. O sea,

$$\sigma(x) \subset B_{\|x\|}(0).$$

Para probar que $\sigma(x)$ es compacto basta ver que es cerrado. Sea $(\lambda_n)_n$ una sucesión en $\sigma(x)$ que converge a $\lambda \in \mathbb{C}$ y supongamos que $\lambda \notin \sigma(x)$, entonces $x - \lambda e$ es invertible, pero $G(X)$ es un abierto que contiene a dicho elemento, entonces existe $N > 0$ tal que $x - \lambda_n e \in G(X)$ para $n > N$, lo cual es una contradicción ya que $x - \lambda_n e$ no es invertible para ningún $n \in \mathbb{N}$. □

Proposición C.2.14 *Un álgebra de Banach compleja X en la cual cada elemento distinto del cero es invertible es isométricamente isomorfa al campo de los números complejos.*

Demostración.

Sean e la identidad en X y $x \in X$ un elemento distinto del cero. Por la proposición anterior existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $x - \lambda e$ no es invertible. De nuestras suposiciones se sigue que $\lambda \neq 0$ y $x - \lambda e = 0$. Entonces para cada $x \in X$ existe una única $\lambda_x \in \mathbb{C}$ tal que $x = \lambda_x e$ y la función $x \overset{T}{\longmapsto} \lambda_x$ es el isomorfismo entre álgebras que deseamos mostrar, ya que si $x, y \in X$ y $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces:

$$\begin{aligned} x + y &= (\lambda_x + \lambda_y)\, e \\ \alpha x &= (\alpha \lambda_x)\, e \\ xy &= (\lambda_x \lambda_y)\, e \end{aligned}$$

y T es una transformación lineal y multiplicativa.

Además, si suponemos que $T(x) = 0$, entonces $x = 0e = 0$, teniéndose así que T es inyectiva, y como para cada $\lambda \in \mathbb{C}$ se cumple $T(\lambda e) = \lambda$, resulta que T es suprayectiva.

Finalmente,

$$\|T(x)\| = |\lambda_x| = \|\lambda_x e\| = \|x\| \text{ para todo } x \in X$$

y T es un isomorfismo isométrico entre álgebras. □

Proposición C.2.15 *Sea I un ideal bilateral cerrado en el álgebra de Banach X. El cociente X/I es un álgebra de Banach con la norma cociente*

$$\|x + I\| = \inf \{\|x + y\| : y \in I\}$$

Demostración.

Es claro que X/I es un álgebra.

Como I es en particular un subespacio vectorial cerrado del espacio normado X sabemos que $\|x + I\|$ es una norma en el cociente. Además como I es un ideal tenemos:

$$\begin{aligned} \inf_{y \in I} \|x_1 x_2 + y\| &\leq \|(x_1 + y_1)(x_2 + y_2)\| \\ &\leq (\|x_1 + y_1\| \, \|x_2 + y_2\|) \end{aligned}$$

si $y_1, y_2 \in I$. De donde, $\|x_1 x_2 + I\| \leq \|x_1 + I\| \, \|x_2 + I\|$.

Por tanto X/I es un álgebra normada. Si X tiene identidad e entonces $e + I$ es la identidad en X/I.

Falta únicamente probar la completez del espacio, para ello supongamos que $(x_n + I)_n$ es una sucesión de Cauchy. Existe una sucesión estrictamente creciente $(n_k)_k$ de números naturales tal que

$$\|(x_{n_k} - x_{n_{k+1}}) + I\| < \frac{1}{2^k}$$

Por tanto, existe una sucesión $(z_k)_k$ en I tal que:

$$\left\|x_{n_k} - x_{n_{k+1}} + z_k\right\| < \frac{1}{2^{n_k}}$$

para todo $k \geq 1$.
A partir de la sucesión $(z_k)_k$ definimos una nueva sucesión como sigue:

$$\begin{aligned} y_1 &= 0 \\ y_n &= -\sum_{k=1}^{n-1} z_k \text{ para } n \geq 2 \end{aligned}$$

Teniéndose así:

$$\left\|(x_{n_i} + y_i) - (x_{n_{i+1}} + y_{i+1})\right\| < \frac{1}{2^i} \text{ para toda } i \in \mathbb{N}$$

La sucesión $(x_{n_i} + y_i)_i$ es de Cauchy puesto que si $w_i = x_{n_i} + y_i$, entonces

$$\begin{aligned} \|w_n - w_m\| &\leq \|(w_n - w_{n+1}) + (w_{n+1} - w_{n+2}) + \cdots + (w_{m-1} - w_m)\| \\ &< \sum_{k=n}^{m} \frac{1}{2^k} \end{aligned}$$

por tanto, la sucesión $(x_{n_i} + y_i)_i$ converge a x.
Afirmamos que $(x_{n_i} + I) \to (x + I)$, lo que se sigue de

$$\begin{aligned} \|(x_{n_i} + I) - (x + I)\| &= \inf_{y \in I} \{\|x_{n_i} - x + y\|\} \\ &\leq \|x_{n_i} - x + y_i\| \end{aligned}$$

La sucesión $(x_{n_i} + I)_i$ es una subsucesión convergente de la sucesión de Cauchy $(x_n + I)_n$, teniéndose de esta manera que la sucesión $(x_n + I)_n$ converge. □

Proposición C.2.16 *Si M es un ideal máximo de un álgebra X compleja de Banach conmutativa con identidad e, entonces existe un único elemento ϕ en el espectro $\sigma(X)$ de X cuyo kernel es M.*

Demostración.
Por la Proposición (C.2.9) M es cerrado, y por la anterior X/M es un álgebra de Banach conmutativa con la norma cociente. Como M es máximo y X es un álgebra conmutativa con identidad, entonces X/M es un campo, y por tanto, todo elemento distinto del cero es invertible; así, X/M es isomorfo isométricamente a $\mathbf{C}$ gracias a la Proposición (C.2.14). Más aún, tenemos que para cada $x \in X$, existe un único complejo λ_x tal que

$$x + M = \lambda_x e + M$$

Si $\phi \in \sigma(X)$ tiene kernel M, entonces $\phi(x) = \lambda_x$ para toda $x \in X$; por tanto, a lo más existe una de tales ϕ. Tal ϕ existe y es la que está definida como $x \mapsto \lambda_x$.
□

Proposición C.2.17 *Sean X un álgebra compleja de Banach conmutativa con identidad e, $x \in X$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces existe $\phi \in \sigma(X)$ tal que*

$$\phi(x) = \lambda$$

si y sólo si $\lambda \in \sigma(x)$.

Demostración.

Supongamos que existe $\phi \in \sigma(X)$ tal que $\phi(x) = \lambda$, entonces $\phi(x - \lambda e) = 0$ y por consiguiente $x - \phi(x)e$ no es invertible (Corolario C.2.4), teniéndose así que $\lambda \in \sigma(x)$.

Inversamente, sea $\lambda \in \sigma(x)$ entonces $x - \lambda e$ no es invertible. Sea I el ideal generado por $x - \lambda e$, entonces $I \neq X$ ya que de lo contrario existiría $y \in X$ tal que $y(x - \lambda e) = e$, lo que no es posible.

Al ser I ideal propio de X, existe M ideal máximo que lo contiene. Por la proposición anterior existe $\phi \in \sigma(X)$ con kernel igual a M; por tanto $\phi(x - \lambda e) = \phi(x) - \lambda = 0$. □

Corolario C.2.18 *Toda álgebra compleja de Banach conmutativa con identidad tiene espectro no vacío.*

Demostración.

Como $0 = 0 - 0e$ no es invertible, existe $\phi \in \sigma(X)$ tal que $\phi(0) = 0$. □

Corolario C.2.19 (Principio de Wiener) *Un elemento de un álgebra compleja de Banach conmutativa con identidad es invertible si, y sólo si, ningún elemento del espectro se anula en él; es decir*

$$x \textit{ es invertible } \Leftrightarrow \phi(x) \neq 0 \textit{ para todo } \phi \in \sigma(X).$$

Demostración.

La necesidad se probó en la Proposición C.2.3. Para la suficiencia tomemos un elemento x no invertible, o sea $0 \in \sigma(x)$, entonces existe $\phi \in \sigma(X)$ tal que $\phi(x) = 0$. □

Haremos un estudio espectral del álgebra de Banach $BC[X : \mathbb{C}]$ con $\|\cdot\|$ la norma del supremo.

Teorema C.2.20 *Sean X un espacio de Hausdorff compacto y $M \subset C[X : \mathbb{C}]$. M es ideal máximo si y sólo si*

$$M = \{f \in C[X : \mathbb{C}] : f(x_0) = 0\}$$

para alguna $x_0 \in X$.

Demostración.

Es claro que $M_{x_0} = \{f \in C[X : \mathbb{C}] : f(x_0) = 0\}$ es un ideal de $C[X : \mathbb{C}]$. Además, es un ideal máximo: sea $N \subset C[X : \mathbb{C}]$ un ideal que contiene propiamente a M_{x_0}, entonces existe $g \in N \setminus M$ tal que

$$g(x_0) \neq 0,$$

Afirmamos $N = C[X : \mathbb{C}]$. Basta probar que $1 \in N$:

$$1 = \left(1 - \frac{g(x)}{g(x_0)}\right) + \frac{1}{g(x_0)} g(x) \text{ para toda } x \in X,$$

$f(x) = 1 - \frac{g(x)}{g(x_0)}$ pertenece a M_{x_0} y $h = \frac{1}{g(x_0)} g(x)$ está en N; de donde $1 \in N$

Ahora supóngase que M es un ideal máximo de $C[X : \mathbb{C}]$ y para cada $x \in X$ existe $f_x \in M$ tal que

$$f_x(x) \neq 0$$

por ser f es continua entonces existe V_x vecindad abierta de x tal que

$$f_x(y) \neq 0 \text{ para todo } y \in V_x$$

Existen un número finito de esas vecindades, $V_{x_1}, \ldots, V_{x_n}$, que forman una cubierta de X.

Como M es un ideal, entonces $|f|^2$ pertenece a M siempre que f esté en M, ya que $|f|^2 = f \cdot \overline{f}$. Así,

$$h = |f_{x_1}|^2 + \cdots + |f_{x_n}|^2 \in M$$

Sin embargo, h es un elemento invertible del álgebra $C[X : \mathbb{C}]$ ya que

$$\frac{1}{h} \in C[X : \mathbb{C}]$$

con lo cual tenemos $M = C[X : \mathbb{C}]$, contradiciendo que M es máximo. □

Lema C.2.21 *Sean A un álgebra, sobre un campo $\mathbb{F}$ y ϕ_1 y ϕ_2 funcionales lineales, con ϕ_2 no nula, tales que*

$$\ker \phi_1 \subset \ker \phi_2,$$

entonces $\phi_2 = \alpha\phi_1$ para alguna $\alpha \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$. Además, si A tiene identidad e y las funcionales son multiplicativas, entonces éstas coinciden.

Demostración.

Como ϕ_2 es no nula existe, $x_0 \in A \setminus \ker \phi_2 \subset A \setminus \ker \phi_1$. Así

$$A = \ker \phi_1 \oplus \mathbb{F} x_0,$$

ya que

$$a = \left(a - \frac{\phi_1(a)}{\phi_1(x_0)} x_0\right) + \frac{\phi_1(a)}{\phi_1(x_0)} x_0,$$

con lo que se tiene

$$\begin{aligned} \phi_2(a) &= \phi_2\left(a - \frac{\phi_1(a)}{\phi_1(x_0)} x_0\right) + \phi_2\left(\frac{\phi_1(a)}{\phi_1(x_0)} x_0\right) \\ &= \frac{\phi_2(x_0)}{\phi_1(x_0)} \phi_1(a). \end{aligned}$$

Si $\alpha = \frac{\phi_2(x_0)}{\phi_1(x_0)}$, entonces

$$\phi_2 = \alpha\phi_1$$

Ahora si las funcionales son multiplicativas y A tiene identidad e, entonces

$$1 = \phi_2(e) = \alpha\phi_1(e) = \alpha$$

□

Teorema C.2.22 *Sea X un espacio de Hausdorff compacto, entonces*

$$\sigma(C[X:\mathbb{C}], \|\cdot\|) = X,$$

es decir,

$$\phi \in \sigma(C[X:\mathbb{C}], \|\cdot\|) \text{ si y sólo si } \phi(f) = \widehat{x}(f)$$

para alguna $x \in X$ y toda $f \in C[X:\mathbb{C}]$, donde $\widehat{x}(f) = f(x)$.

Demostración.
Sea $x \in X$ entonces

$$\widehat{x} : C[X:\mathbb{C}] \to \mathbb{C}$$

es una funcional lineal, multiplicativa y no nula; así, $\widehat{x} \in \sigma(C[X:\mathbb{C}], \|\cdot\|)$.

Sea ϕ en el espectro de $C[X:\mathbb{C}]$; como el $\ker\phi$ es un ideal máximo, aplicando el Teorema C.2.20 tenemos que existe $x \in X$ tal que

$$\begin{aligned} \ker\phi &= \{f \in C[X:\mathbb{C}] : f(x) = 0\} \\ &= \{f \in C[X:\mathbb{C}] : \widehat{x}(f) = 0\} \\ &= \ker\widehat{x} \end{aligned}$$

Entonces, por el lema anterior, $\phi = \widehat{x}$, concluyéndose así la demostración. □

Definición C.2.23 *Supongamos que x es un elemento de una álgebra compleja de Banach X con identidad, sea*

$$r_\sigma(x) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}$$

entonces $r_\sigma(x)$ es llamado el radio espectral de x.

Corolario C.2.24 *En un álgebra compleja de Banach conmutativa con identidad se tiene*

$$r_\sigma(x) = \max\{|\phi(x)| : \phi \in \sigma(X)\}$$

En particular, $r_\sigma(0) = 0$.

Teorema C.2.25 *Sea x un elemento de una álgebra compleja de Banach X con identidad e. El conjunto*

$$D = \{\mu \in \mathbb{C} : e - \mu x \text{ es invertible}\}$$

es un conjunto abierto en $\mathbb{C}$.

Demostración.

Sea $\{\mu_n\}_n$ una sucesión en $\mathbb{C}\diagdown D$ que converge a μ_0, entonces la sucesión $(e-\mu_n x)_n$ de elementos no invertibles converge a $e-\mu_0 x$, debido a la continuidad de la suma y el producto por un escalar. El elemento $e-\mu_0 x$ no es invertible ya que $X\diagdown G(X)$ (conjunto de los elementos no invertibles de X) es cerrado. Así, $\mathbb{C}\diagdown D$ es cerrado y D es entonces abierto. □

Teorema C.2.26 *Para cualquier elemento x de un álgebra compleja de Banach conmutativa X con identidad e, se tiene:*

$$r_\sigma(x) = \lim_n \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$$

Demostración.

Sea $x \in X$. Si $x = 0$, entonces es clara la afirmación. Supongamos $x \neq 0$.

Si $\phi \in \sigma(X)$, entonces

$$|\phi(x)|^n = |\phi(x^n)| \leq \|x^n\|$$

ya que como se vio el la Proposición (C.2.7) $\|\phi\| \leq 1$.

Sea $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$|\phi(x)| \leq \|x^n\|^{\frac{1}{n}},$$

por tanto,

$$|\phi(x)| \leq \liminf_n \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \text{ para todo } \phi \in \sigma(X)$$

y

$$\sup\{|\phi(x) : \phi \in \sigma(X)|\} \leq \liminf_n \|x^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

O sea,

$$r_\sigma(x) \leq \liminf_n \|x^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Sea

$$D = \{\mu \in \mathbb{C} : e - \mu x \text{ es invertible}\}$$

y $\mu \in \mathbb{C}$ tal que $|\mu| < \|x\|^{-1}$, entonces

$$|\mu|\,\|x\| = \|\mu x\| < 1$$

y por tanto, $e - \mu x$ es invertible, es decir, $B_{\|x\|^{-1}}(0) \subset D$ y además

$$(e-\mu x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n x^n.$$

Por otro lado, sea $r = r_\sigma(x)$, entonces

$$\begin{aligned} |\phi(x)| &\leq \|x\| \text{ para todo } \phi \in \sigma(X) \\ r &\leq \|x\| \end{aligned}$$

Si $r = \|x\|$, entonces $r^n = \|x\|^n \geq \|x^n\|$ por tanto

$$r \geq \limsup_n \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$$

y obtenemos el resultado deseado.

Supongamos que $r < \|x\|$ se probará que para cada $r < t \leq \|x\|$ y $0 < s < t^{-1}$ existe $M_s > 0$ tal que

$$\limsup \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{s}$$

y por tanto

$$\limsup \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq t$$

así

$$\limsup \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq r$$

Sea $r < t \leq \|x\|$, entonces

$$\|x\|^{-1} \leq t^{-1}$$

Afirmamos que $B_{t^{-1}}(0) \subset D$: sea $0 < |\mu| < t^{-1}$ y supongamos que $e - \mu x$ no es invertible, entonces $\|\mu x\| \geq 1$ y

$$t^{-1} > |\mu| \geq \|x\|^{-1},$$

lo que contradice lo anterior.

Definamos

$$g(\mu) = (e - \mu x)^{-1}$$

para cada μ en el abierto D. Entonces por un argumento similar a la Proposición (C.2.13) se tiene

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(\mu + h) - g(\mu)}{h} = x(e - \mu x)^{-2}$$

Se sigue que si f es cualquier funcional lineal continua en X, entonces $f \circ g$ es analítica en D, aún más

$$f \circ g(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n f(x^n)$$

para $\mu \in B_{\|x\|^{-1}}(0)$.

Como $f \circ g$ es analítica en $B_{t^{-1}}(0)$, esta serie debe converger y representar a $f \circ g$ en esta bola de radio mayor.

La m-ésima derivada con respecto a μ de $f \circ g$ evaluada en cero es entonces:

$$(f \circ g)^{(n)}(0) = (n!)\, f(x^n)$$

y recordando la formula integral de Cauchy para las derivadas de una función analítica, tenemos:

$$(f \circ g)^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f \circ g(\mu)}{(\mu - 0)^{n+1}} d\mu$$

donde C es el círculo de radio s centrada en 0, donde $0 < s < r^{-1}$. Por consiguiente,

$$f(x^n) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f \circ g(\mu)}{\mu^{n+1}} d\mu$$

Así,

$$\begin{aligned}|f(x^n)| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{|f\circ g(se^{i\theta})|}{s^n}d\theta \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\|f\|\cdot\|g(se^{i\theta})\|}{s^n}d\theta \\ &\leq \frac{\|f\|}{s^n}\cdot\sup_{\mu\in C}\|g(\mu)\|.\end{aligned}$$

Al hacer $M_S = \sup\limits_{\mu\in C}\|g(\mu)\|$, obtenemos

$$\frac{|f(x^n)|}{\|f\|} \leq \frac{M_S}{s^n}$$

si $f \in X' - \{0\}$.

Como $\|y\| = \sup\left\{\frac{|f(y)|}{\|f\|} : f \in X' - \{0\}\right\}$ para cada $y \in X$, entonces

$$\|x^n\| \leq \frac{M_S}{s^n}.$$

□

C.3 C* álgebras

Definición C.3.1 *Una involución para un álgebra compleja X es una operación $^* : X \to X$ tal que para todo $x, y \in X$ y $\alpha \in \mathbb{F}$, se tiene:*

(1) $(x+y)^* = x^* + y^*$

(2) $(\alpha x)^* = \overline{\alpha} x^*$

(3) $(xy)^* = y^* x^*$

(4) $(x^*)^* = x$

El elemento x^* es llamado el adjunto de x. Una subálgebra de X que contenga el adjunto de cada uno de sus elementos se llama autoadjunta.

Si $x = x^*$ se dice que x es autoadjunto o hermitiano. Por (2) y (3), 0, xx^* y x^*x son autoadjuntos, para todo $x \in X$.

Si X tiene identidad, e, ésta es un elemento autoadjunto además si x es invertible, entonces

(5) $(x^{-1})^* = (x^*)^{-1}$.

Supongamos que X, Y son dos álgebras con involución. Un homomorfismo de álgebras $f : X \to Y$ es llamado un *-homomorfismo si $f(x^*) = f(x)^*$ para todo $x \in X$

Definición C.3.2 *Un álgebra normada X con una involución es llamada una B^*-álgebra o una C^*-álgebra si $\|x^*x\| = \|x\|^2$ para todo $x \in X$.*

Proposición C.3.3 *Si X es una C^*-álgebra, entonces*

$$\|x\| = \|x^*\|$$

para toda $x \in X$.

Demostración.
Sea $x \in X$

$$\|x\|^2 = \|x^*x\| \leq \|x^*\| \|x\|$$

O sea, $\|x\| \leq \|x^*\|$ para todo $x \in X$. Así, $\|x^*\| \leq \|x^{**}\| = \|x\|$, y por tanto, $\|x\| = \|x^*\|$. □

Corolario C.3.4 *En una C^*-álgebra X la involución es un homeomorfismo isométrico de X en sí misma.*

Lema C.3.5 *Sean X una C^*-álgebra con identidad e y $\phi \in \sigma(X)$. Si x es auto-adjunto, entonces $\phi(x)$ es un número real.*

Demostración.
Sean $x \in X$ y $\phi \in \sigma(X)$ tales que $x = x^*$ y $\phi(x) = a + ib$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Si t es un número real y definimos $z = x + ite$, entonces

$$\phi(z) = \phi(x) + it = (a + ib) + it = a + i(b + t),$$

de aquí obtenemos

$$|\phi(z)|^2 = a^2 + b^2 + 2bt + t^2$$

Por otra parte $|\phi(z)|^2 \leq \|z\|^2 = \|z^*z\|$, y como $z^* = x - ite$, se sigue

$$\|z^*z\| = \|x^2 + t^2e\| \leq \|x^2\| + t^2.$$

Entonces $a^2 + b^2 + 2bt \leq \|x\|^2$ para todo real t, lo cual implica $b = 0$. □

Observación C.3.6 *Sea X un álgebra compleja de Banach, conmutativa y con identidad. En el conjunto $C[\sigma(X) : \mathbb{C}]$ de las funciones continuas del espectro de X en $\mathbb{C}$, definimos la norma infinito*

$$\|F\|_\infty = \max\{|F(\phi)| : \phi \in \sigma(X)\}$$

$C[\sigma(X) : \mathbb{C}]$ es un álgebra de Banach, y si definimos

$$F^* = \overline{F}$$

donde $\overline{F}(\phi) = \overline{F(\phi)}$ para toda $\phi \in \sigma(X)$, entonces es una C^*-álgebra de Banach.

Teorema C.3.7 (de Gelfand -Neumark) *Toda C^*-álgebra de Banach X, compleja, conmutativa y con identidad es isométricamente *-isomorfa a $C[\sigma(X) : \mathbb{C}]$.*

Demostración.

Sea $x \in X$ entonces definimos $\widehat{x} : \sigma(X) \to \mathbb{C}$ como $\widehat{x}(\phi) = \phi(x)$.

La transformación

$$\widehat{\ }: \underset{x \to}{X \to} C[\underset{\widehat{x}}{\sigma(X)} : \mathbb{C}]$$

es claramente un homomorfismo de álgebras. Probaremos que conserva la involución para ver que es un *-homomorfismo.

Sea $x \in X$ entonces

$$x = u + iv$$

donde $u = \dfrac{x + x^*}{2}$ y $v = \dfrac{x - x^*}{2i}$; notamos que u y v son auto-adjuntos. Como

$$\phi(x) = \phi(u) + i\phi(v) \text{ y } \phi(x^*) = \phi(u) - i\phi(v)$$

entonces

$$\phi(x^*) = \overline{\phi(x)}$$

ya que $\phi(u)$ y $\phi(v)$ son reales debido al lema anterior. Es decir,

$$\widehat{x^*} = \overline{\widehat{x}}.$$

El *-homomorfismo $\widehat{\ }$: $X \to C[\sigma(X) : \mathbb{C}]$ es isométrico: Esto es una consecuencia del Teorema C.2.26 ya que para $x \in X$, se tiene que $\|x\|^2 = \|x^*x\|$, y como xx^* es autoadjunto, entonces

$$\left\|(xx^*)^2\right\| = \|(xx^*)(xx^*)^*\| = \|(xx^*)\|^2$$

Si suponemos cierta la igualdad

$$\|(xx^*)\|^{2^n} = \left\|(xx^*)^{2^n}\right\|$$

para todo $x \in X$, entonces

$$\left\|(xx^*)^{2^{n+1}}\right\| = \left\|\left((xx^*)^2\right)^{2^n}\right\| = \left\|(xx^*)^2\right\|^{2^n} = \left(\|(xx^*)\|^2\right)^{2^n} = \|(xx^*)\|^{2^{n+1}}.$$

Por tanto,

$$\|xx^*\| = \left\|(xx^*)^{2^n}\right\|^{\frac{1}{2^n}} \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ y } x \in X.$$

Del Teorema C.2.26 se sigue,

$$\|x\|^2 = \sup_{\phi \in \sigma(X)} |\phi(xx^*)| = \sup_{\phi \in \sigma(X)} |\phi(x)|^2$$

y entonces

$$\|x\| = \sup_{\phi \in \sigma(X)} |\phi(x)| = \|\widehat{x}\|_\infty$$

De esta manera vemos que la transformación es un *-monomorfismo isométrico.

El *-monomorfismo $\widehat{\ }$: $X \to C[\sigma(X) : \mathbb{C}]$ es suprayectivo y por tanto isomorfismo ya que de la primera parte $\widehat{X}$ es cerrada bajo conjugación, además separa puntos de $\sigma(X)$ ya que dados $\phi_1, \phi_2 \in \sigma(X)$ diferentes, existe $x \in X$ tal que $\widehat{x}(\phi_1) \neq \widehat{x}(\phi_2)$, y como $\widehat{e}(\phi) = 1$ para todo $\phi \in \sigma(X)$, se sigue del teorema de Stone Weierstrass, en su versión compleja, que $\widehat{X}$ es una subálgebra densa de $C[\sigma(X) : \mathbb{C}]$. El espacio X es de Banach y es isométricamente *-isomorfo sobre su imagen. Entonces $\widehat{X}$ es de Banach y por tanto cerrado en $C[\sigma(X) : \mathbb{C}]$. De donde, $\widehat{X} = C[\sigma(X) : \mathbb{C}]$. □

C.4 Identidad aproximada

En esta sección estudiamos V módulos de Banach sobre un álgebra de Banach X.

Definición C.4.1 *V es un $X-$módulo normado si V es un espacio normada él cual es un módulo sobre X y tiene la propiedad adicional $\|xv\| \leq \|x\| \, \|v\|$ si $x \in X$ y $v \in V$.*

Excepto cuando se diga lo contrario, se supondrá de aquí en adelante que V es un $X-$módulo normado, escribiéndose solamente X-módulo.

Definición C.4.2 *Sea X un álgebra de Banach. Una identidad aproximada para X es una red $\{e_i\}_{i \in I}$ en X tal que*

$$e_i x \to x \text{ y } x e_i \to x$$

para todo $x \in X$. La identidad aproximada se dice que es acotada si existe una constante $M > 0$ tal que $\|e_i\| \leq M$ para todo $i \in I$. M es llamada una cota de la identidad aproximada. La identidad aproximada es de norma uno si $\|e_i\| \leq 1$ para todo $i \in I$.

Nótese que si M es una cota de la identidad aproximada $\{e_i\}_{i \in I}$, entonces $M \geq 1$, ya que dada $x \neq 0$

$$\|e_i x\| \leq \|e_i\| \cdot \|x\| \leq M \|x\|$$

Así,

$$\|x\| = \lim_i \|e_i x\| \leq M \|x\|$$

y entonces $M \geq 1$.

Definición C.4.3 *Sea X un álgebra de Banach y V un $X-$módulo, entonces V es un $X-$módulo esencial si el subespacio lineal $\langle XV \rangle$ generado por XV es denso en V.*

Proposición C.4.4 *Si X es un álgebra de Banach con identidad aproximada acotada, entonces V es un $X-$módulo esencial si y sólo si $e_i v \to v$ para toda $v \in V$.*

Demostración.

La suficiencia es cierta debido a que $e_i v \in XV \subset \langle XV \rangle$ para todo $i \in I$ y $v \in V$. Como $e_i v \to v$ para todo $v \in V$, entonces $V \subset \overline{\langle XV \rangle}$.

Para probar la necesidad, tomemos $\epsilon > 0$ y sea M una cota de la identidad aproximada, Recordamos que $M \geq 1$. Sea $v \in V$, por la densidad de $\langle XV \rangle$, existen $x_1, \ldots, x_n \in X$ y $v_1, \ldots, v_n \in V$ tales que

$$\left\| v - \sum_{k=1}^{n} x_k v_k \right\| < \frac{\epsilon}{3M}$$

Escójase $i_0 \in I$ tal que si $i \succcurlyeq i_0$ entonces

$$\|x_k - e_i x_k\| < \frac{\epsilon}{3nM\left(\|v_k\| + 1\right)} \text{ para } k = 1, \ldots, n$$

De donde, $i \succcurlyeq i_0$ implica

$$\begin{aligned} \|v - e_i v\| \;\le\; & \left\| v - \sum_{k=1}^{n} x_k v_k \right\| + \left\| \sum_{k=1}^{n} x_k v_k - e_i \sum_{k=1}^{n} x_k v_k \right\| \\ & + \left\| e_i \sum_{k=1}^{n} x_k v_k - e_i v \right\|, \end{aligned}$$

por tanto, $\|v - e_i v\| < \epsilon$ para toda $i \succcurlyeq i_0$. □

Definición C.4.5 *Sean X un álgebra de Banach V un X-módulo, definimos la parte esencial de V como $\overline{\langle XV \rangle}$ y lo denotamos por V_e.*

Proposición C.4.6 *Si X es un álgebra de Banach con identidad aproximada acotada y V un X-módulo, entonces V_e es un submódulo de V que contiene a todos los submódulos esenciales de V y además V_e es esencial en V.*

Bibliografía

[1] F.W. Anderson, Rings and Categories of modules, Spring Verlag 1992.

[2] H. Arizmendi and A. Carrillo, On the m-convexity of $C_b(X)$, Publ. Math. Debrecen 63/3 (2003), 379-388.

[3] R.G. Bartle, The elements or real analysis, John Wiley and sons 1976.

[4] R.C. Buck, Continuous functions on a locally compact space, Michigan Math. J. 5(1958), 95-104.

[5] R.C. Buck, Operator algebras and dual spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 3(1952), 681-687.

[6] R.V. Churchill and J.W Brown, Variable compleja y aplicaciones, Mc-Grawhill 1992.

[7] H.S. Collins and J.R. Dorroh, Remarks on certain function spaces, Math. Ann. 176(1968), 157-168.

[8] H.S. Collins and R.Fontenot, Approximate identities and strict topology, Pacific J. Math. 43(1972), 63-79.

[9] J.B. Cooper, The strict topology and spaces with mixed topology, Proc. Amer. Math. Soc. 30(1971), 583-592.

[10] J.R. Dorroh, The localization of the strict topology, Trans. Amer. Math. Soc. 20(1969), 413-414.

[11] J. Dugundji, Topology, Allyn and Bacon, Boston 1965.

[12] R Engelking, General Topology, Heldermann Verlag Berlin 1989.

[13] G.B. Folland, Real Analysis, John Wiley and sons 1984.

[14] J.B. Fraleigh, Álgebra abstrata, Addison-wesley iberoamericana 1987.

[15] A.García Máynez, Topología General, Editorial Porrúa 1988.

[16] R. Giles, A generalization of the strict topology, Trans. Amer. Math. Soc. 161(1971), 467-474.

[17] L. Gillman and M. Jerinson, Rings of continuous functions, University series in higher math. 1960.

[18] D. Gulick, The σ−compact open topology and its relatives, Math. Scand. 30(1972), 159-176.

[19] S.S Khurana, Strict topologies as topological algebras, Czech. Math. J. 51(2001), 433-437.

[20] R.E. Megginson, An introduction to Banach space theory, Spring 1998.

[21] G.K. Pedersen, Analysis now, Springer-Verlag 1989.

[22] M. Rieffel, Induce Banach representation of Banach algebras and locally compact groups, J.Funtional Analysis 1(1967) 443-491.

[23] A.P. Robertson and W. Robertson, Topological vector spaces Cambridge Univ. Press, New York 1964.

[24] I.E. Segal and R.A. Kunze, Integrals and Operators, Springer 1978.

[25] F.D. Sentilles and D.C. Taylor, Factorizations in Banach algebras and the general strict topology, Trans. Amer. Math. Soc. 142(1969), 141-152.

[26] F.D. Sentilles, The strict topology on bounded sets, Pacific J. Math. 34(1970), 529-540.

[27] F.D. Sentilles, Bounded continuous functions on a completely regular space, Trans. Amer. Math. Soc. 168(1972), 311-336.

[28] M. Spivak, Calculus Reverté, S.A. 1996.

[29] A.H Stone, Paracompactness and product Bull. Amer. Math. Soc., 54(1948) 977-982.

[30] C. Todd, Stone-Weierstrass theorems for the strict topology, Proc. Amer. Math. Soc. 16(1965), 654-659.

[31] S. Willard, General Topology, Addison-wesley 1970.

Indice