00365

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

CATEGORIAS Y VARIEDADES ALGEBRAICAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

M A E S T R O E N C I E N C I A S

P R E S E N T A

ELHOIM LLORENTE I SUMANO Y RAMÍREZ

DIRECTOR DE TESIS: Dr. MARCELO AGUILAR GONZÁLEZ

MÉXICO, D.F. JUNIO, 2004

Para Olen

Por su forma de

venirme a la memoria

CATEGORIAS Y VARIEDADES ALGEBRAICAS

Elboim Sumano

Introducción

El presente trabajo está dividido en dos partes. En la primera, que consiste de los primeros dos capítulos, se presentan preliminares de la teoría de categorías hasta llegar al concepto de Extensión de Kan. Particularmente, se estudia el caso de extensión de Kan a lo largo del encaje de Yoneda:

> Dada una categoría pequeña $\mathcal{C}$ y un funtor $\mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{D}$ con $\mathcal{D}$ una categoría cocompleta, se construye una pareja adjunta de funtores $\mathcal{F}_\wedge \dashv \mathcal{F}^\wedge$, donde $\mathcal{F}_\wedge$ extiende a $\mathcal{F}$ a lo largo del encaje de Yoneda:

(Kan)

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{D} \arrow[d, bend left, "\mathcal{F}^\wedge"] \\
\mathcal{C} \arrow[ur, bend left, "\mathcal{F}"] \arrow[r, hook, "h^\wedge"'] \arrow[ur, phantom, "\cong"] & \mathsf{Con}^{\mathcal{C}^{op}} \arrow[u, "\mathcal{F}_\wedge"] \arrow[u, phantom, shift left=2, "\dashv"]
\end{tikzcd}$$

Aplicaciones de este problema son tratadas en la segunda parte.

En el *Capítulo 3*, definimos el funtor espacio clasificante $\mathsf{cat} \xrightarrow{\mathrm{B}} \mathsf{Top}$ y describimos una estructura celular en $\mathrm{B}\mathcal{C}$, la cual tiene como 0-celdas a lo objetos de $\mathcal{C}$ y como 1-celdas a sus morfismos distintos de las identidades.

También, mostramos que el grupo fundamental del espacio $\mathrm{B}\mathcal{C}$ respecto de un objeto a de $\mathcal{C}$, es el grupo de automorfismos de a en la categoría de fracciones que se obtiene de $\mathcal{C}$, al formalmente invertir todos sus morfismos. En particular, el grupo fundamental del espacio clasificante de un grupoide $\mathcal{G}$ en un objeto a, es isomorfo al grupo de automorfismos de a en $\mathcal{G}$.

En el *Capítulo 4*, después de definir la categoría de gavillas en un sitio, consideramos el ejemplo del sitio asociado a un grupoide etale. Utilizando (Kan) mostramos entonces que la categoría de gavillas en un grupoide etale $\mathcal{G}$, es equivalente a la categoría de homeomorfismos locales sobre $\mathcal{G}_0$ con una acción de $\mathcal{G}$.

Por último, en el *Capítulo 5* se observa que para todo anillo $\mathfrak{K}$, la imagen escencial del funtor $\mathfrak{K}\text{-Alg} \overset{h^\wedge}{\hookrightarrow} \mathsf{Con}^{\mathfrak{K}\text{-Alg}^{op}}$ consiste de los funtores de ceros de sistemas de ecuaciones polinomiales sobre $\mathfrak{K}$, y se obtiene de (Kan) un diagrama:

$$\begin{tikzcd} & & \mathsf{Scm} \arrow[d, bend left, "\mathcal{F}^\wedge"] \\ \mathsf{Anillo} \arrow[urr, hook, "\mathcal{F}=\mathrm{Spec}"] \arrow[rr, hook, "h^\wedge"'] \arrow[urr, phantom, shift right=4ex, "\cong"] & & \mathsf{Con}^{\mathsf{Anillo}^{op}} \arrow[u, "\mathcal{F}_\wedge"] \arrow[u, phantom, shift left=2ex, "\dashv"] \end{tikzcd}$$

que determina una equivalencia entre la categoría de esquemas Scm y la categoría de espacios algebraicos de Zariski. Con esto, se ve a la categoría de esquemas como una extensión de la categoría de funtores de ceros de sistemas de ecuaciones polinomiales.

Resta decir que por razones que se escaparon de las manos de su realizador, este trabajo no lleva el nombre más correcto:

Extensiones de Kan en topología y geometría

Contenido

Introducción vii

Capítulo 1. Categorías 1
1. Universos y Categorías 1
§1.1 Universos 1
§1.2 Categorías 2
2. Subobjetos y Cocientes 4
§2.1 Conjuntos Parcialmente Ordenados 4
§2.2 Categoría Dirigida 5
§2.3 Subobjetos y Cocientes 6
3. (Co)Pregavillas Representables 7
§3.1 Encaje de Yoneda 7
§3.2 (Co)Pregavillas Representables 10
§3.3 Encaje de Yoneda en Categorías Preaditivas 12
§3.4 (Co)Pregavillas Representables en Categorías Preaditivas 13

Capítulo 2. Límites y Colímites 15
1. Límites y Colímites 15
§1.1 I-límites e I-colímites 17
§1.2 Categorías Conexas 18
§1.3 Funtores Finales e Iniciales 18
2. Productos y Sumas 20
§2.1 Ejemplos 22
§2.2 Objetos Terminales e Iniciales 23
§2.3 Productos y Sumas Finitas 24
§2.4 Categorías Aditivas 25
3. Igualadores y Coigualadores 27
§3.1 Ejemplos 30

§3.2 Categorías Abelianas 31
4. Productos Fibrados y Sumas Amalgamadas 37
§4.1 Funtor de cambio y cocambio de base 39
5. Funtores que Conmutan con Límites y Colímites 41
§5.1 Ejemplos 43
6. Extensiones de Kan 46
§6.1 Categorías de Gráficas 46
§6.2 Extensiones de Kan 50

Capítulo 3. Conjuntos Simpliciales 59
1. Conjuntos simpliciales 59
§1.1 La categoría simplicial 59
§1.2 Objetos simpliciales 60
§1.3 El esqueleto de un conjunto simplicial 65
2. La realización geométrica de un conjunto simplicial 72
§2.1 El funtor realización geométrica 72
§2.2 Ejemplos 75
3. El espacio clasificante de una categoría pequeña 77
§3.1 El funtor espacio clasificante 77
§3.2 El grupo fundamental de $B\mathcal{C}$ 79
§3.3 Cubrientes de Galois sobre BG 85

Capítulo 4. Gavillas 89
1. Cribas 89
§1.1 Funtores de cribas 90
2. Gavillas 92
§2.1 Categorías con cribas cubrientes 92
§2.2 Topologías de Grothendieck 94
§2.3 Bases para topologías de Grothendieck 98
§2.4 Gavillas con valores en una categoría 102
3. Morfismos de Sitios 105
§3.1 Morfismos de Sitios 105
§3.2 Morfismos asociados a funciones continuas 106
4. Gavillas en un grupoide etale 108
§4.1 Grupoides etale 108
§4.2 El sitio de abiertos de un grupoide etale 109
§4.3 Espacios etale sobre $\mathcal{G}$ 110
§4.4 Gavillas v.s. Espacios etale 111

Capítulo 5. Variedades Algebraicas 115
1. Conjuntos algebraicos 115
§1.1 $\mathfrak{K}$-Álgebras 115

§1.2 Conjuntos algebraicos 120
§1.3 La $\mathfrak{K}$-álgebra de coordenadas 123
§1.4 Espacios prealgebraicos 126
2. Espacios algebraicos de Zariski 129
§2.1 Espacios localmente anillados 129
§2.2 El funtor espectro primo 136
§2.3 Espacios algebraicos de Zariski 139

Bibliografía 149

CAPÍTULO

1

Categorías

1. Universos y Categorías

§1.1. Universos. Para evitar algunos problemas que se presentan usualmente en la teoría de conjuntos cuando manipulamos con poco cuidado a las categorías, adoptaremos la convención de trabajar con el concepto de universo (ver Capítulo 1 de [**Bor94**] y Apéndice de Exposición I de [**AGV70**]).

Para ello supondremos la teoría de conjuntos según los axiomas de Zermelo-Frenkel y definimos un *universo* como un conjunto $\mathcal{U}$ con las siguientes propiedades:

(i) Si $x \in y$ y $y \in \mathcal{U}$ entonces $x \in \mathcal{U}$.

(ii) Si $\{x_i\}_{i \in I}$ es una familia de elementos de $\mathcal{U}$ con conjunto de índices $I \in \mathcal{U}$, entonces la unión $\bigcup\{x_i\}_{i\in I}$ también está en $\mathcal{U}$.

(iii) Si $x \in \mathcal{U}$ entonces $\mathcal{P}(x)$, el conjunto potencia de x, también es un elemento de $\mathcal{U}$.

(iv) El conjunto $\mathbb{N} := \{0 := \emptyset, 1 := 0 \cup \{0\}, 2 := 1 \cup \{1\}, \dots\}$, de los números naturales, es un elemento de $\mathcal{U}$[1].

Entre las propiedades de los universos, se tienen las siguientes:

(i) Si $x \subseteq y$ y $y \in \mathcal{U}$ entonces $x \in \mathcal{U}$.

(ii) Si $x, y \in \mathcal{U}$ entonces la pareja ordenada $(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\}$, también es un elemento de $\mathcal{U}$.

(iii) Si $\{x_i\}_{i\in I}$ es una familia de elementos de $\mathcal{U}$ con conjunto de índices $I \in \mathcal{U}$ entonces la *unión ajena* $\coprod_{i\in I} x_i$ también está en $\mathcal{U}$.

(iv) Si $\{x_i\}_{i\in I}$ es una familia de elementos de $\mathcal{U}$ con conjunto de índices $I \in \mathcal{U}$ entonces el *producto cartesiano* $\prod_{i\in I} x_i$ también pertenece a $\mathcal{U}$.

(v) Si $x, y \in \mathcal{U}$ entonces cualquier subconjunto del conjunto de funciones de x en y es un elemento de $\mathcal{U}$.

---

[1] Este enunciado es equivalente a: $\mathcal{U}$ tiene un elemento de cardinalidad infinita

Resulta que en una teoría de conjuntos y universos el siguiente enunciado no se sigue de los axiomas, por lo que lo supondremos como un postulado más.

EXISTENCIA DE UNIVERSOS: **Todo conjunto es un elemento de algún universo.**

Notemos entonces que dado un universo $\mathcal{U}$ existe un único universo $\mathcal{U}^+$ llamado *universo sucesor de* $\mathcal{U}$ (ver [**DHK**]), con las propiedades:

(i) $\mathcal{U} \in \mathcal{U}^+$
(ii) Si $\mathcal{U}'$ es otro universo tal que $\mathcal{U} \in \mathcal{U}'$ entonces $\mathcal{U}^+ \subseteq \mathcal{U}'$

En efecto, la unicidad es inmediata de (ii). Para mostrar la existencia considera un universo $\mathcal{V}$ tal que $\mathcal{U} \in \mathcal{V}$ y define $\mathcal{U}^+ = \bigcap\{\mathcal{W} \text{ universo} \mid \mathcal{U} \in \mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}\}$. Entonces $\mathcal{U}^+$ es un universo tal que $\mathcal{U} \in \mathcal{U}^+$ y si $\mathcal{U}'$ es otro universo tal que $\mathcal{U} \in \mathcal{U}'$, por el axioma sobre la existencia de universos, existe un universo $\mathcal{V}'$ tal que $\mathcal{U}', \mathcal{V} \subseteq \mathcal{V}'$, por lo tanto $\mathcal{U}^+ = \bigcap\{\mathcal{W} \text{ universo} \mid \mathcal{U} \in \mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}\} = \bigcap\{\mathcal{W} \text{ universo} \mid \mathcal{U} \in \mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}'\} \subseteq \mathcal{U}'$.

Por último, si $\mathcal{U}$ es un universo, llamamos *conjuntos* $\mathcal{U}$*-pequeños* a los elementos de $\mathcal{U}$.

§1.2. Categorías. En este trabajo por una *categoría* entendemos una categoría cuya colección de objetos forma un conjunto. Si $\mathcal{U}$ es un universo, una $\mathcal{U}$*-categoría pequeña* es una categoría cuyo conjunto de objetos y conjunto de morfismos entre cualesquiera dos objetos de ella son $\mathcal{U}$-pequeños. Una $\mathcal{U}$*-categoría* es una $\mathcal{U}^+$-categoría pequeña cuyo conjunto de morfismos entre cualesquiera dos objetos de ella es $\mathcal{U}$-pequeño.

Ejemplos:

Sea $\mathcal{U}$ un universo.

§1.2.1. Los conjuntos $\mathcal{U}$-pequeños y las funciones entre ellos forman una $\mathcal{U}$-categoría a la que denotamos $\mathsf{Con}_{\mathcal{U}}$.

§1.2.2. Un *espacio topológico* $\mathcal{U}$*-pequeño* es un conjunto $\mathcal{U}$-pequeño con una estructura de espacio topológico. Los espacios topológicos $\mathcal{U}$-pequeños y las funciones continuas entre ellos forman una $\mathcal{U}$-categoría a la que denotamos $\mathsf{Top}_{\mathcal{U}}$.

§1.2.3. Las $\mathcal{U}$-categorías (resp. $\mathcal{U}$-categorías pequeñas) y los funtores entre ellas forman una $\mathcal{U}^+$-categoría (resp. $\mathcal{U}$-categoría) a la que denotamos $\mathsf{Cat}_{\mathcal{U}}$ (resp. $\mathsf{cat}_{\mathcal{U}}$).

§1.2.4. Un *grupoide* $\mathcal{U}$*-pequeño* es una $\mathcal{U}$-categoría pequeña con la propiedad que cualquiera de sus morfismos es un isomorfismo. Los grupoides $\mathcal{U}$-pequeños y los funtores entre ellos forman una $\mathcal{U}$-categoría a la que denotamos $\mathsf{Grpd}_{\mathcal{U}}$.

§1.2.5. Un *monoide* $\mathcal{U}$*-pequeño* es una $\mathcal{U}$-categoría pequeña con la propiedad que su conjunto de objetos consiste de un único elemento. Los monoides $\mathcal{U}$-pequeños y los funtores entre ellos forman una $\mathcal{U}$-categoría a la que denotamos $\mathsf{Mond}_{\mathcal{U}}$.

§1.2.6. Un *grupo* $\mathcal{U}$*-pequeño* es una monoide $\mathcal{U}$-pequeño que también es un grupoide $\mathcal{U}$-pequeño. Los grupos $\mathcal{U}$-pequeños y los funtores entre ellos forman una $\mathcal{U}$-categoría a la que denotamos $\mathsf{Grp}_{\mathcal{U}}$.

§1.2.7. En todo el trabajo cuando hablemos de un anillo entenderemos que el anillo es un anillo con uno y que los morfismos de anillos mandan el uno en el uno.

Un *anillo $\mathcal{U}$-pequeño* es un conjunto $\mathcal{U}$-pequeño con la estructura de un anillo. Los anillos $\mathcal{U}$-pequeños y los morfismos de anillos forman una $\mathcal{U}$-categoría a la que denotamos $\mathsf{Anillo}_{\mathcal{U}}$.

Del mismo modo, los anillos $\mathcal{U}$-pequeños abelianos y los morfismos de anillos entre ellos forman una $\mathcal{U}$-categoría a la que denotamos como $\mathsf{Anillo}_{\mathcal{U}}^{\mathrm{ab}}$.

§1.2.8. Si R es una anillo $\mathcal{U}$-pequeño, un R-*módulo izquierdo $\mathcal{U}$-pequeño* es un conjunto $\mathcal{U}$-pequeño con la estructura de un R-módulo izquierdo. Los R-módulos izquierdos $\mathcal{U}$-pequeños y las funciones entre ellos que respetan la estructura de R-módulo izquierdo forman una $\mathcal{U}$-categoría a la que denotamos $\mathrm{R}\text{-}\mathsf{Mod}_{\mathcal{U}}$.

§1.2.9. *Categoría Opuesta.* Si $\mathcal{C}$ es una categoría, denotamos por $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ a la *categoría opuesta*, es decir, a la categoría que tiene los mismos objetos que $\mathcal{C}$ pero tal que $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}(a,b) = \mathcal{C}(b,a)$. Observemos que si $\mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{D}$ es un funtor, se tiene canónicamente un funtor $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathcal{F}^{\mathrm{op}}} \mathcal{D}^{\mathrm{op}}$.

Es inmediato que si $\mathcal{C}$ es una $\mathcal{U}$-categoría (resp. $\mathcal{U}$-categoría pequeña) entonces $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ también. De este modo se tienen funtores $\mathsf{Cat}_{\mathcal{U}} \xrightarrow{\mathrm{op}} \mathsf{Cat}_{\mathcal{U}}$ y $\mathsf{cat}_{\mathcal{U}} \xrightarrow{\mathrm{op}} \mathsf{cat}_{\mathcal{U}}$ los cuales son isomorfismos.

§1.2.10. *Categoría de Funtores.* Si $\mathcal{C}$ y $\mathcal{A}$ son dos categorías denotamos como $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}$ a la categoría cuyos objetos son los funtores de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{A}$ y cuyos morfismos las transformaciones naturales entre ellos.

Podemos ver que:

(i) Si $\mathcal{C}$ y $\mathcal{A}$ son $\mathcal{U}$-categorías pequeñas entonces $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}$ también.
(ii) Si $\mathcal{C}$ es una $\mathcal{U}$-categoría pequeña y $\mathcal{A}$ es una $\mathcal{U}$-categoría entonces $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}$ es una $\mathcal{U}$-categoría.
(iii) Si $\mathcal{C}$ y $\mathcal{A}$ son $\mathcal{U}$-categorías entonces $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}$ es una $\mathcal{U}^{+}$-categoría pequeña.

Recordemos ahora que un funtor $\mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{C}'$ determina un funtor $\mathcal{A}^{\mathcal{C}'} \xrightarrow{\mathcal{A}^{\mathcal{F}}} \mathcal{A}^{\mathcal{C}}$ donde $\mathcal{A}^{\mathcal{F}}(\mathcal{G}) = \mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ y $\mathcal{A}^{\mathcal{F}}(\eta) = \eta * \mathcal{F}$. Del mismo modo, un funtor $\mathcal{A} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{A}'$ determina un funtor $\mathcal{A}^{\mathcal{C}} \xrightarrow{\mathcal{F}^{\mathcal{C}}} \mathcal{A}'^{\mathcal{C}}$ donde $\mathcal{F}^{\mathcal{C}}(\mathcal{G}) = \mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ y $\mathcal{F}^{\mathcal{C}}(\eta) = \mathcal{F} * \eta$. Se sigue que si $\mathcal{A}$ es una $\mathcal{U}$-categoría hay un funtor $\mathsf{cat}_{\mathcal{U}} \xrightarrow{\mathcal{A}^{-}} \mathsf{Cat}_{\mathcal{U}}^{\mathrm{op}}$ y que si $\mathcal{C}$ es una $\mathcal{U}$-categoría pequeña, hay funtores $\mathsf{cat}_{\mathcal{U}} \xrightarrow{-^{\mathcal{C}}} \mathsf{cat}_{\mathcal{U}}$ y $\mathsf{Cat}_{\mathcal{U}} \xrightarrow{-^{\mathcal{C}}} \mathsf{Cat}_{\mathcal{U}}$.

§1.2.11. *Categorías Preaditivas.* Si $\mathcal{A}$ es una categoría, decimos que $\mathcal{A}$ es una *categoría preaditiva* si para cualesquiera dos objetos x y y de $\mathcal{A}$ el conjunto de morfismos $\mathcal{A}(x,y)$ tiene dada una estructura de grupo abeliano al que denotamos $\mathcal{A}_{\mathbb{Z}}(x,y)$ y tal que para cualesquiera tres objetos x, y y z en $\mathcal{A}$ la composición $\mathcal{A}_{\mathbb{Z}}(x,y) \times \mathcal{A}_{\mathbb{Z}}(y,z) \xrightarrow{-\circ-} \mathcal{A}_{\mathbb{Z}}(x,z)$ es una morfismo de grupos en cada variable. Si $\mathcal{A}$ es una $\mathcal{U}$-categoría (resp. $\mathcal{U}$-categoría pequeña) y una categoría preaditiva, decimos que $\mathcal{A}$ es una $\mathcal{U}$-categoría preaditiva (resp. $\mathcal{U}$-categoría preaditiva pequeña). Por ejemplo, la $\mathcal{U}$-categoría R-$\mathsf{Mod}_{\mathcal{U}}$ es una $\mathcal{U}$-categoría preaditiva donde la suma de dos morfismos con el mismo dominio y codominio se define puntualmente.

Si ahora $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son dos categorías preaditivas y $\mathcal{A} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{B}$ es un funtor, decimos que $\mathcal{F}$ es *funtor aditivo* si para cualesquiera dos objetos x y y en $\mathcal{A}$ la función inducida $\mathcal{A}_{\mathbb{Z}}(x, y) \to \mathcal{B}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{F}(x), \mathcal{F}(y))$ es un morfismo de grupos.

Las $\mathcal{U}$-categorías preaditivas (resp. $\mathcal{U}$-categorías preaditivas pequeñas) y los funtores aditivos entre ellas forman una $\mathcal{U}^{+}$-categoría (resp. $\mathcal{U}$-categoría) a la que denotamos $\mathbb{Z}$-$\mathsf{Cat}_{\mathcal{U}}$ (resp. $\mathbb{Z}$-$\mathsf{cat}_{\mathcal{U}}$).

Observemos que si $\mathcal{A}$ es una categoría preaditiva, para cualquier objeto x en $\mathcal{A}$ el grupo abeliano de endomorfismos $\mathcal{A}_{\mathbb{Z}}(x, x)$ tiene una estructura de anillo, donde la multiplicación está dada por la composición de morfismos. Del mismo modo, para cualesquiera dos objetos x y y de $\mathcal{A}$ el grupo abeliano de morfismos $\mathcal{A}_{\mathbb{Z}}(x, y)$ tiene una estructura de $\mathcal{A}_{\mathbb{Z}}(x, x)$-módulo izquierdo y de $\mathcal{A}_{\mathbb{Z}}(y, y)$-módulo derecho.

Si R es un anillo $\mathcal{U}$-pequeño podemos asociarle a R una $\mathcal{U}$-categoría preaditiva pequeña, la cual tiene un único objeto cuyo conjunto de endomorfismos es igual a R. Esta asignación se extiende canónicamente en un funtor fiel y pleno $\mathsf{Anillo}_{\mathcal{U}} \hookrightarrow \mathsf{cat}_{\mathcal{U}}$ análogo a los funtores $\mathsf{Mond}_{\mathcal{U}} \hookrightarrow \mathsf{cat}_{\mathcal{U}}$ y $\mathsf{Grp}_{\mathcal{U}} \hookrightarrow \mathsf{Grpd}_{\mathcal{U}}$.

Por último, observemos que si $\mathcal{C}$ es una categoría preaditiva la categoría opuesta $\mathcal{C}^{op}$ tiene naturalmente una estructura de categoría preaditiva. También, si $\mathcal{C}$ es una categoría y $\mathcal{A}$ es una categoría preaditiva, $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}$ es una categoría preaditiva donde $\eta + \eta'$ se define como $\{(\eta + \eta')_x = \eta_x + \eta'_x\}_x$.

2. Subobjetos y Cocientes

§2.1. Conjuntos Parcialmente Ordenados. Una categoría $\mathcal{C}$ con la propiedad que el conjunto de morfismos entre cualesquiera dos objetos de ella contenga a los más un elemento es llamada un *conjunto parcialmente ordenado.* Si $\mathcal{C}$ es un conjunto parcialmente ordenado llamamos al conjunto de objetos de $\mathcal{C}$ el *conjunto subyacente del conjunto parcialmente ordenado* y si x y y son elementos de este conjunto escribimos $x \leq y$ siempre que exista un morfismo en $\mathcal{C}$ de x en y.

Los conjuntos parcialmente ordenados $\mathcal{U}$-pequeños y los funtores entre ellos forman una $\mathcal{U}$-categoría a la que denotamos $\mathsf{ConPO}_{\mathcal{U}}$. El funtor fiel y pleno $\mathsf{ConPO}_{\mathcal{U}} \hookrightarrow \mathsf{cat}_{\mathcal{U}}$ tiene un adjunto izquierdo:

$$\begin{tikzcd} \mathsf{ConPO}_{\mathcal{U}} \arrow[r, hook] \arrow[r, phantom, bend left=40, "\perp"] & \mathsf{cat}_{\mathcal{U}} \arrow[l, bend right] \end{tikzcd}$$

que a cada $\mathcal{U}$-categoría pequeña $\mathcal{C}$ asocia el conjunto parcialmente ordendo $\mathcal{U}$-pequeño que tiene como conjunto subyacente al conjunto de objetos de $\mathcal{C}$, y donde $x \leq y$ siempre que exista al menos un morfismo en $\mathcal{C}$ de x en y.

Un conjunto parcialmente ordenado con la propiedad que dos sus elementos son isomorfos si y sólo si ellos son iguales es llamado un *conjunto ordenado.* Los conjuntos ordenados $\mathcal{U}$-pequeños y los funtores entre ellos forman una $\mathcal{U}$-categoría a la que denotamos $\mathsf{ConO}_{\mathcal{U}}$. En este caso el funtor fiel y pleno $\mathsf{ConO}_{\mathcal{U}} \hookrightarrow \mathsf{ConPO}_{\mathcal{U}}$ también tiene un adjunto izquierdo:

$$\begin{tikzcd} \mathsf{ConO}_{\mathcal{U}} \arrow[r, hook] \arrow[r, phantom, shift left=2, "\perp"] & \mathsf{ConPO}_{\mathcal{U}} \arrow[l, bend right, "\pi"'] \end{tikzcd}$$

que a cada conjunto parcialmente ordenado $\mathcal{U}$-pequeño $\mathcal{C}$ asocia el conjunto ordenado cuyo conjunto subyacente es el conjunto de clases de isomorfismo de objetos de $\mathcal{C}$, y donde $[x] \leq [y]$ siempre que exista un morfismo en $\mathcal{C}$ de x en y.

§2.2. Categoría Dirigida. Si $\mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{D}$ es un funtor entre categorías y d es un objeto en $\mathcal{D}$, denotamos como $\mathcal{F} \downarrow d$ a la *categoría coma en* d *a través de* $\mathcal{F}$, es decir, a la categoría cuyos objetos son las parejas ordenadas (a, u) donde a es un objeto en $\mathcal{C}$ y $u \in \mathcal{D}(\mathcal{F}(a), d)$ es un morfismo en $\mathcal{D}$, y donde el conjunto de morfismos $\mathcal{F} \downarrow d\big((a,u),(a',v)\big)$ entre cualesquiera dos objetos (a, u) y (a', v) consiste de los morfismos $f \in \mathcal{C}(a, a')$ en $\mathcal{C}$ tales que $v \circ \mathcal{F}(f) = u$.

Observemos que esta categoría viene acompañada de un funtor canónico $\mathcal{F} \downarrow d \xrightarrow{\pi \downarrow d} \mathcal{C}$ al que llamamos la *proyección en* $\mathcal{C}$ y que está definido como $\pi \downarrow d(a, u) := a$.

Del mismo modo, denotamos como $d \downarrow \mathcal{F}$ a la *categoría cocoma en* d *a través de* $\mathcal{F}$, es decir, $d \downarrow \mathcal{F}$ es la categoría opuesta de la categoría coma en d a través del funtor $\mathcal{C}^{op} \xrightarrow{\mathcal{F}^{op}} \mathcal{D}^{op}$. En este caso denotamos a la proyección en $\mathcal{C}$ como $d \downarrow \mathcal{F}$.

Si las categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son iguales denotamos a la categoría coma (resp. cocoma) en un objeto d a través del funtor identidad como $\mathcal{C} \downarrow d$ (resp. $d \downarrow \mathcal{C}$).

Notemos que:

(i) Si $\mathcal{C}$ es una $\mathcal{U}$-categoría pequeña y $\mathcal{D}$ una $\mathcal{U}$-categoría, $\mathcal{F} \downarrow d$ y $d \downarrow \mathcal{F}$ son $\mathcal{U}$-categorías pequeñas.

(ii) Si $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son $\mathcal{U}$-categorías, $\mathcal{F} \downarrow d$ y $d \downarrow \mathcal{F}$ también son $\mathcal{U}$-categorías.

Concluimos que si $\mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{D}$ es un funtor de una $\mathcal{U}$-categoría pequeña $\mathcal{C}$ en una $\mathcal{U}$-categoría $\mathcal{D}$, la asignación que a cada objeto d en $\mathcal{D}$ asocia la pareja $(\mathcal{F} \downarrow d, \pi \downarrow d)$ $\big($resp. $(d \downarrow \mathcal{F}, d \downarrow \pi)\big)$ se pude completar en un funtor:

(1)
$$\begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[r, "\mathcal{F}\downarrow -"] & \mathsf{cat}_{\mathcal{U}} \downarrow \mathcal{C} \\ d \arrow[d, "\varphi"'] & (\mathcal{F} \downarrow d, \pi \downarrow d) \arrow[d, "\mathcal{F}\downarrow\varphi"] \\ d' & (\mathcal{F} \downarrow d', \pi \downarrow d') \end{tikzcd} \quad \left(\text{resp.} \quad \begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[r, "-\downarrow\mathcal{F}"] & (\mathsf{cat}_{\mathcal{U}} \downarrow \mathcal{C})^{op} \\ d \arrow[d, "\varphi"'] & (d \downarrow \mathcal{F}, d \downarrow \pi) \\ d' & (d' \downarrow \mathcal{C}, d' \downarrow \pi) \arrow[u, "\varphi\downarrow\mathcal{F}"'] \end{tikzcd} \right)$$

donde $\mathcal{F} \downarrow \varphi$ (resp. $\varphi \downarrow \mathcal{F}$) esta definido como sigue:

(2)
$$
\begin{tikzcd}[row sep=small]
\mathcal{F} \downarrow d \arrow[r, "\mathcal{F}\downarrow\varphi"] & \mathcal{F} \downarrow d' \\
(a,u) \arrow[d, "f"'] \arrow[r, mapsto, shorten=2em, start anchor=south, end anchor=south, yshift=-4ex] & (a,\varphi\circ u) \arrow[d, "f"] \\
(a',u') & (a',\varphi\circ u')
\end{tikzcd}
\quad
\left(
\text{resp.}\quad
\begin{tikzcd}[row sep=small]
d' \downarrow \mathcal{F} \arrow[r, "\varphi\downarrow\mathcal{F}"] & d \downarrow \mathcal{F} \\
(a,u) \arrow[d, "f"'] \arrow[r, mapsto, shorten=2em, start anchor=south, end anchor=south, yshift=-4ex] & (a,u\circ\varphi) \arrow[d, "f"] \\
(a',u') & (a',u'\circ\varphi)
\end{tikzcd}
\right)
$$

§2.3. Subobjetos y Cocientes. Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Si $a \xrightarrow{f} b$ es un morfismo en $\mathcal{C}$ decimos que f es un *monomorfismo* (resp. *epimorfismo*) si f se cancela por la izquierda (resp. derecha), es decir, si la igualdad $f \circ \varphi = f \circ \psi$ (resp. $\varphi \circ f = \psi \circ f$) implica la igualdad $\varphi = \psi$.

Es inmediato que los morfismos identidad de $\mathcal{C}$ son monomorfismos (resp. epimorfismos) y que la composición de monomorfismos (resp. epimorfismos) es un monomorfismo (resp. epimorfismo), por lo que los objetos de $\mathcal{C}$ y los monomorfismos (resp. epimorfismos) entre ellos forman una categoría a la que denotamos $\mathcal{C}_{\text{mono}}$ (resp. $\mathcal{C}_{\text{epi}}$).

Si x es un objeto de $\mathcal{C}$, la categoría $\mathcal{C}_{\text{mono}} \downarrow x$ (resp. $x \downarrow \mathcal{C}_{\text{epi}}$) es denotada $\mathsf{Sub}_{\mathcal{C}}(x)$ (resp. $\mathsf{Coc}_{\mathcal{C}}(x)$) y llamada la categoría de *subobjetos (resp. cociente) formales de* x *en* $\mathcal{C}$. Así, un subobjeto (resp. cociente) formal de x en $\mathcal{C}$ es una pareja (a, u) donde $a \xrightarrow{u} x$ es un monomorfismo (resp. epimorfismo) en $\mathcal{C}$.

Ahora, si $\mathcal{C}$ es una $\mathcal{U}$-categoría pequeña, $\mathsf{Sub}_{\mathcal{C}}(x)$ (resp. $\mathsf{Coc}_{\mathcal{C}}(x)$) también es una $\mathcal{U}$-categoría pequeña. Más aún, por la propiedad que cumplen los monomorfismos (resp. epimorfismos) se sigue que $\mathsf{Sub}_{\mathcal{C}}(x)$ (resp. $\mathsf{Coc}_{\mathcal{C}}(x)$) es un conjunto parcialmente ordenado $\mathcal{U}$-pequeño. Al conjunto ordenado $\mathcal{U}$-pequeño $\pi\left(\mathsf{Sub}_{\mathcal{C}}(x)\right)$ $\left(\text{resp. } \pi\left(\mathsf{Coc}_{\mathcal{C}}(x)\right)\right)$ de clases de isomorfismo de objetos de $\mathsf{Sub}_{\mathcal{C}}(x)$ (resp. $\mathsf{Coc}_{\mathcal{C}}(x)$) lo denotamos como $\mathsf{sub}_{\mathcal{C}}(x)$ (resp. $\mathsf{coc}_{\mathcal{C}}(x)$) y lo llamamos el conjunto $\mathcal{U}$-pequeño de *subobjetos* (resp. *cocientes*) *de* x *en* $\mathcal{C}$. Así, un subobjeto (resp. cociente) de x en $\mathcal{C}$ es una clase de subobjetos (resp. cocientes) formales de x en $\mathcal{C}$ módulo la relación que identifica a dos parejas (a, u) y (b, ν) si existe un isomorfismo $a \xrightarrow{\varphi} b$ tal que $\nu \circ \varphi = u$.

Ejemplos:

§2.3.1. *Conjuntos.* En la $\mathcal{U}$-categoría de conjuntos $\mathcal{U}$-pequeños los monomorfismos (resp. epimorfismos) son las función inyectivas (resp. suprayectivas). Si X es un conjunto $\mathcal{U}$-pequeño, el conjunto ordenado $\mathcal{U}$-pequeño $\mathsf{sub}_{\mathsf{Con}}(X)$ (resp. $\mathsf{coc}_{\mathsf{Con}}(X)$) es isomorfo al conjunto $\mathcal{U}$-pequeño de subconjuntos de X (resp. de relaciones de equivalencia en X) ordenado por contención.

§2.3.2. *Epacios Topológicos.* En la $\mathcal{U}$-categoría de espacios topológicos $\mathcal{U}$-pequeños los monomorfismos y los epimorfismos son las funciones continuas inyectivas y suprayectivas, respectivamente.

Si X es un espacio topológico $\mathcal{U}$-pequeño, el conjunto ordenado $\mathcal{U}$-pequeño de subobjetos de X en Top es isomorfo al conjunto $\mathcal{U}$-pequeño de las parejas (A,τ) donde A es un subconjunto de X y τ es una topología en A tal que la inclusión $A \rightarrow X$ es continua y donde $(A,\tau) \leq (B,\tau')$ si A está contenido en B y la función inducida $A \rightarrow B$ es continua.

Por otro lado, el conjunto ordenado $\mathcal{U}$-pequeño de cocientes de X en Top es isomorfo al conjunto $\mathcal{U}$-pequeño de las parejas (R,τ) donde R es una relación de equivalencia en X y τ es una topología en el cociente X/R tal que la función inducida $X \rightarrow X/R$ es continua y donde $(R,\tau) \leq (S,\tau')$ si R está contenida en S y la función inducida $X/R \rightarrow X/S$ es continua.

§2.3.3. *Categorías de Funtores.* Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías y $\mathcal{F} \overset{\eta}{\Rightarrow} \mathcal{G}$ un morfismo en $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$. Si para todo objeto a en $\mathcal{C}$ el morfismo $\mathcal{F}(a) \xrightarrow{\eta_a} \mathcal{G}(a)$ es un monomorfismo (resp. epimorfismo) en $\mathcal{D}$, es inmediato que η es un monomorfismo (resp. epimorfismo) en $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$.

Si ahora $\mathcal{D} = \mathsf{Con}$ puede verse recíprocamente que si $\mathcal{F} \overset{\eta}{\Rightarrow} \mathcal{G}$ es un monomorfismo (resp. epimorfismo) en $\mathsf{Con}^{\mathcal{C}}$ entonces $\mathcal{F}(a) \xrightarrow{\eta_a} \mathcal{G}(a)$ es un monomorfismo (resp. epimorfismo) en Con para todo objeto a en $\mathcal{C}$. En particular, si $\mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathsf{Con}$ es un funtor, el conjunto ordenado $\mathcal{U}$-pequeño de subobjetos (resp. cocientes) de $\mathcal{F}$ en $\mathsf{Con}^{\mathcal{C}}$ esta en correspondencia biyectiva con el conjunto $\mathcal{U}$-pequeño de familias $X = \{X(a)\}_{a\in\mathcal{C}_0}$ $\left(\text{resp. } R = \{R(a)\}_{a\in\mathcal{C}_0}\right)$ indexadas por los objetos de $\mathcal{C}$, tales que $X(a) \subseteq \mathcal{F}(a)$ (resp. $R(a)$ es una relación de equivalencia en $\mathcal{F}(a)$) y con la propiedad que para todo morfismo $a \xrightarrow{f} b$ en $\mathcal{C}$ la función $\mathcal{F}(a) \xrightarrow{\mathcal{F}(f)} \mathcal{F}(b)$ se restrinje en una función $X(a) \rightarrow X(b)$ (resp. se factorice en una función $\mathcal{F}(a)/R(a) \rightarrow \mathcal{F}(b)/R(b)$). Aquí, $X \leq Y$ (resp. $R \leq S$) si y sólo si $X(a) \subseteq Y(a)$ (resp. $R(a) \subseteq S(a)$) para todo objeto a en $\mathcal{C}$.

3. (Co)Pregavillas Representables

Si $\mathcal{C}$ y $\mathcal{A}$ son dos categorías a la categoría $\mathcal{A}^{\mathcal{C}^{op}}$ (resp. $(\mathcal{A}^{\mathcal{C}})^{op}$) la denotamos como $\mathsf{Pre}(\mathcal{C})_{\mathcal{A}}$ (resp. $\mathsf{coPre}(\mathcal{C})_{\mathcal{A}}$) y llamamos a sus elementos *pregavillas en* $\mathcal{C}$ *con valores en* $\mathcal{A}$ o $\mathcal{A}$*-pregavillas en* $\mathcal{C}$ (resp. *copregavillas en* $\mathcal{C}$ *con valores en* $\mathcal{A}$ o $\mathcal{A}$*-copregavillas en* $\mathcal{C}$). Entonces $(\mathsf{Pre}(\mathcal{C})_{\mathcal{A}})^{op} = \mathsf{coPre}(\mathcal{C}^{op})_{\mathcal{A}}$.

§3.1. Encaje de Yoneda. Sea $\mathcal{C}$ una $\mathcal{U}$-categoría.

A la $\mathcal{U}^+$-categoría pequeña de $\mathsf{Con}_{\mathcal{U}}$-pregavillas (resp. $\mathsf{Con}_{\mathcal{U}}$-copregavillas) en $\mathcal{C}$ la denotamos como $\mathsf{Pre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}}$ (resp. $\mathsf{coPre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}}$) y llamamos a su elementos $\mathcal{U}$-pregavillas (resp. copregavillas) en $\mathcal{C}$.

Observemos que todo objeto x en $\mathcal{C}$ determina canónicamente una $\mathcal{U}$-pregavilla y una $\mathcal{U}$-copregavilla en $\mathcal{C}$ definidas como en los diagramas:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^{op} & \xrightarrow{x^\wedge} & \mathsf{Con}_{\mathcal{U}} \\ a & & \mathcal{C}(a,x) \\ f \uparrow & \longmapsto & \downarrow -\circ f \\ b & & \mathcal{C}(b,x) \end{array} \qquad \text{y} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{x^\vee} & \mathsf{Con}_{\mathcal{U}} \\ a & & \mathcal{C}(x,a) \\ f \downarrow & \longmapsto & \downarrow f\circ - \\ b & & \mathcal{C}(x,b) \end{array}$$

respectivamente, de modo que estas asignaciones se extienden en funtores:

(3)
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{h^\wedge} & \mathsf{Pre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}} \\ x & & x^\wedge \\ \varphi \downarrow & \longmapsto & \downarrow \varphi\circ - \\ y & & y^\wedge \end{array} \qquad \text{y} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{h^\vee} & \mathsf{coPre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}} \\ x & & x^\vee \\ \varphi \downarrow & \longmapsto & \uparrow -\circ \varphi \\ y & & y^\vee \end{array}$$

LEMA DE YONEDA 3.1. *La transformación natural:*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^{op} \times \mathsf{Pre}(\mathcal{C}) \arrow[d, bend right=50, "\mathsf{Pre}(\mathcal{C})(-^\wedge,-)"'] \arrow[d, bend left=50, "\mathrm{eval}"] \arrow[d, phantom, "\Longrightarrow"] \\ \mathsf{Con}_{\mathcal{U}} \end{tikzcd} \qquad \left(\textit{resp.} \quad \begin{tikzcd} \mathsf{coPre}(\mathcal{C})^{op} \times \mathcal{C} \arrow[d, bend right=50, "\mathsf{coPre}(\mathcal{C})(-,-^\vee)"'] \arrow[d, bend left=50, "\mathrm{eval}"] \arrow[d, phantom, "\Longrightarrow"] \\ \mathsf{Con}_{\mathcal{U}} \end{tikzcd} \right)$$

definida para un objeto x *en* $\mathcal{C}$ *y una* $\mathcal{U}$*-pregavilla (resp.* $\mathcal{U}$*-copregavilla)* F *como la asignación:*

(4)
$$\begin{array}{rcl} \mathsf{Pre}(\mathcal{C})(x^\wedge, F) & \longrightarrow & F(x) \\ \eta & \longmapsto & \eta_x(\mathrm{id}_x) \end{array} \qquad \left(\textit{resp.} \quad \begin{array}{rcl} \mathsf{coPre}(\mathcal{C})(F, x^\vee) & \longrightarrow & F(x) \\ \eta & \longmapsto & \eta_x(\mathrm{id}_x) \end{array} \right)$$

es un isomorfismo.

En particular $h^\wedge$ *y* $h^\vee$ *son fieles y plenos.*

DEMOSTRACIÓN. Si $x^\wedge \overset{\eta}{\Longrightarrow} F$ $\big($resp. $x^\vee \overset{\eta}{\Longrightarrow} F\big)$ es una transformación natural, para todo objeto a en $\mathcal{C}$ y todo morfismo $\varphi \in \mathcal{C}(a,x)$ $\big($resp. $\varphi \in \mathcal{C}(x,a)\big)$ el siguiente cuadrado es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}(x,x) \arrow[r, "\eta_x"] \arrow[d, "-\circ\varphi"'] & F(x) \arrow[d, "F(\varphi)"] \\ \mathcal{C}(a,x) \arrow[r, "\eta_a"'] & F(a) \end{tikzcd} \qquad \left(\text{resp.} \quad \begin{tikzcd} \mathcal{C}(x,x) \arrow[r, "\eta_x"] \arrow[d, "\varphi\circ-"'] & F(x) \arrow[d, "F(\varphi)"] \\ \mathcal{C}(x,a) \arrow[r, "\eta_a"'] & F(a) \end{tikzcd} \right)$$

por lo que se tiene la igualdad $\eta_a(\varphi) = F(\varphi)\big(\eta_x(\mathrm{id}_x)\big)$. Esto prueba que (4) es una biyección.

Para probar que esto implica que el funtor $h^\wedge$ (resp. $h^\vee$) es fiel y pleno, observemos que si x y y son dos objetos objetos de $\mathcal{C}$, la función (4) con $\mathcal{F} = y^\wedge$ (resp. $\mathcal{F} = y^\vee$) es inversa de la función $\mathcal{C}(x,y) \to \mathbf{Pre}(\mathcal{C})(x^\wedge, y^\wedge)$ (resp. $\mathcal{C}(y,x) \to \mathbf{coPre}(\mathcal{C})(y^\vee, x^\vee)$) definida por $h^\wedge$ (resp. $h^\vee$). ✠

Más generalmente, si $\mathcal{D}$ es una $\mathcal{U}$-categoría y $\mathcal{F}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es un funtor, cada objeto d en $\mathcal{D}$ determina canónicamente una $\mathcal{U}$-pregavilla y una $\mathcal{U}$-copregavilla en $\mathcal{C}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^{op} \xrightarrow{\mathcal{F}^\wedge(d)} \mathbf{Con}_\mathcal{U} & & \mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{F}^\vee(d)} \mathbf{Con}_\mathcal{U} \\ \begin{tikzcd} a & \mathcal{D}(\mathcal{F}(a),d) \arrow[d, "-\circ\mathcal{F}(f)"] \\ b \arrow[u, "f"] \arrow[r, mapsto, shorten=1em] & \mathcal{D}(\mathcal{F}(b),d) \end{tikzcd} & \text{y} & \begin{tikzcd} a \arrow[d, "f"'] \arrow[r, mapsto, shorten=1em] & \mathcal{D}(d,\mathcal{F}(a)) \arrow[d, "\mathcal{F}(f)\circ-"] \\ b & \mathcal{D}(d,\mathcal{F}(b)) \end{tikzcd} \end{array}$$

respectivamente, de modo que también estas asignaciones se extienden en funtores:

(5)
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D} \xrightarrow{\mathcal{F}^\wedge} \mathbf{Pre}(\mathcal{C})_\mathcal{U} & & \mathcal{D} \xrightarrow{\mathcal{F}^\vee} \mathbf{coPre}(\mathcal{C})_\mathcal{U} \\ \begin{tikzcd} d \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[r, mapsto, shorten=1em] & \mathcal{F}^\wedge(d) \arrow[d, "\varphi\circ-"] \\ d' & \mathcal{F}^\wedge(d') \end{tikzcd} & \text{y} & \begin{tikzcd} d \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[r, mapsto, shorten=1em] & \mathcal{F}^\vee(d) \\ d' & \mathcal{F}^\vee(d') \arrow[u, "-\circ\varphi"'] \end{tikzcd} \end{array}$$

Los funtores (3) y (5) están relacionados en los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{D} \arrow[d, dashed, "\mathcal{F}^\wedge"] \\ \mathcal{C} \arrow[ur, bend left, "\mathcal{F}"] \arrow[r, hook, "h^\wedge"'] & \mathbf{Pre}(\mathcal{C})_\mathcal{U} \arrow[u, phantom, "\Uparrow \theta^\wedge"' near start] \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} & \mathcal{D} \arrow[d, dashed, "\mathcal{F}^\vee"] \\ \mathcal{C} \arrow[ur, bend left, "\mathcal{F}"] \arrow[r, hook, "h^\vee"'] & \mathbf{coPre}(\mathcal{C})_\mathcal{U} \arrow[u, phantom, "\Downarrow \theta^\vee"' near start] \end{tikzcd},$$

donde las transformaciones naturales $\theta^\wedge$ y $\theta^\vee$ se definen para x y a objetos en $\mathcal{C}$ como las funciones inducidas por $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{C}(a,x) \xrightarrow{(\theta^\wedge_x)_a} \mathcal{D}(\mathcal{F}(a),\mathcal{F}(x)) \qquad \text{y} \qquad \mathcal{C}(x,a) \xrightarrow{(\theta^\vee_x)_a} \mathcal{D}(\mathcal{F}(x),\mathcal{F}(a)) \ ,$$

respectivamente. En particular, si $\mathcal{F}$ es fiel y pleno $\mathcal{F}^\wedge \circ \mathcal{F} \cong h^\wedge$ y $\mathcal{F}^\vee \circ \mathcal{F} \cong h^\vee$.

Recíprocamente:

TEOREMA 3.2. *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos $\mathcal{U}$-categorías. Si $\mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{D}$ es un funtor, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *$\mathcal{F}$ es fiel y pleno.*
(ii) *Existe un isomorfismo $\mathcal{F}^\wedge \circ \mathcal{F} \cong h^\wedge$.*
(iii) *Existe un isomorfismo $\mathcal{F}^\vee \circ \mathcal{F} \cong h^\vee$.*

DEMOSTRACIÓN. Falta probar que (ii) (resp. (iii)) implica (i). Para ello observemos primero que si a y b son dos objetos de $\mathcal{C}$, la función inducida por $\mathcal{F}^\wedge$ (resp. $\mathcal{F}^\vee$):

$$\mathcal{D}(\mathcal{F}(a),\mathcal{F}(b)) \to \mathbf{Pre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}}\left(\mathcal{F}^\wedge(\mathcal{F}(a)),\mathcal{F}^\wedge(\mathcal{F}(b))\right)$$

$$\left(\text{resp.}\quad \mathcal{D}(\mathcal{F}(a),\mathcal{F}(b)) \to \mathbf{coPre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}}\left(\mathcal{F}^\vee(\mathcal{F}(a)),\mathcal{F}^\vee(\mathcal{F}(b))\right)\right)$$

es inyectiva. En efecto, la asignación $\eta \mapsto \eta_a(\mathrm{id}_{\mathcal{F}(a)})$ $\left(\text{resp. } \eta \mapsto \eta_b(\mathrm{id}_{\mathcal{F}(b)})\right)$ es una inversa izquierda.

Si suponemos entonces que existe un isomorfismo $\mathcal{F}^\wedge \circ \mathcal{F} \cong h^\wedge$ (resp. $\mathcal{F}^\vee \circ \mathcal{F} \cong h^\vee$), por el Lema de Yoneda el funtor $\mathcal{F}^\wedge \circ \mathcal{F}$ (resp. $\mathcal{F}^\vee \circ \mathcal{F}$) es fiel y pleno. Se sigue de la observación anterior que $\mathcal{F}$ también. ✠

§3.2. (Co)Pregavillas Representables. Sea $\mathcal{C}$ una $\mathcal{U}$-categoría. Si F es una $\mathcal{U}$-pregavilla (resp. $\mathcal{U}$-copregavilla) en $\mathcal{C}$, decimos que F *es representable* si F está en la imagen esencial de $\mathcal{C} \xhookrightarrow{h^\wedge} \mathbf{Pre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}}$ (resp. $\mathcal{C} \xhookrightarrow{h^\vee} \mathbf{coPre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}}$), es decir, si existe un objeto x en $\mathcal{C}$ y un isomorfismo $x^\wedge \cong_\eta F$ (resp. $x^\vee \cong_\eta F$). En este caso decimos que la pareja (x,η), o simplemente que x, *representa a* F. Por el Lema de Yoneda dos objetos que representan a la misma $\mathcal{U}$-pregavilla (resp. $\mathcal{U}$-copregavilla) son isomorfos.

Más generalmente, si $\mathcal{D}$ es una $\mathcal{U}$-categoría y $\mathcal{H}\colon \mathcal{D} \to \mathbf{Pre}(\mathcal{C})$ (resp. $\mathcal{H}\colon \mathcal{D} \to \mathbf{coPre}(\mathcal{C})$) es un funtor decimos que $\mathcal{H}$ *es representable*, si existe un funtor $\mathcal{G}\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ y un isomorfismo $h^\wedge \circ \mathcal{G} \cong_\eta \mathcal{H}$ (resp. $h^\vee \circ \mathcal{G} \cong_\eta \mathcal{H}$). En este caso decimos que la pareja $(\mathcal{G},\eta)$, o simplemente que $\mathcal{G}$, *representa a* $\mathcal{H}$. Por el Lema de Yoneda dos funtores que representan al mismo funtor son isomorfos.

PROPOSICIÓN 3.3. *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos $\mathcal{U}$-categorías y $\mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{D}$ un funtor entre ellas. Si $\mathcal{D} \xrightarrow{\mathcal{G}} \mathcal{C}$ es un funtor, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *$\mathcal{G}$ es adjunto derecho (resp. izquierdo) de $\mathcal{F}$.*
(ii) *$\mathcal{G}$ representa a $\mathcal{F}^\wedge$ (resp. $\mathcal{F}^\vee$).*

DEMOSTRACIÓN. Esto se sigue de que la existencia de un isomorfismo $h^\wedge \circ \mathcal{G} \cong \mathcal{F}^\wedge$ (resp. $h^\vee \circ \mathcal{G} \cong \mathcal{F}^\vee$) es equivalente a la existencia de una familia de isomorfismos binaturales:

$$\Big\{\mathcal{C}(a, \mathcal{G}(d)) = \mathcal{G}(d)^\wedge(a) \to \mathcal{F}^\wedge(d)(a) = \mathcal{D}(\mathcal{F}(a), d)\Big\}$$

$$\left(\text{resp. } \Big\{\mathcal{C}(\mathcal{G}(d), a) = \mathcal{G}(d)^\vee(a) \to \mathcal{F}^\vee(d)(a) = \mathcal{D}(d, \mathcal{F}(a))\Big\}\right).$$

✠

Notemos ahora que en general, si $\mathcal{C} \xrightarrow{h} \mathcal{C}'$ es un funtor fiel y pleno, para que un funtor $\mathcal{D} \xrightarrow{\mathcal{G}} \mathcal{C}'$ se factorice por h, es decir, para que exista un funtor $\mathcal{D} \xrightarrow{\mathcal{H}} \mathcal{C}$ y un isomorfismo $h \circ \mathcal{H} \cong \mathcal{G}$, es necesario y suficiente que la imagen esencial de $\mathcal{G}$ esté contenida en la imagen esencial de h.

En efecto, una implicación es inmediata. Supongamos por otro lado que $\mathcal{D} \xrightarrow{\mathcal{G}} \mathcal{C}$ es un funtor tal que $\mathcal{G}(d)$ es isomorfo a $\mathcal{F}(x)$ para algún objeto x en $\mathcal{C}$, define entonces $\mathcal{H}$ y η como sigue: Si d es un objeto de $\mathcal{D}$, $\mathcal{H}(d)$ es igual a la elección de un objeto en $\mathcal{C}$ tal que $\mathcal{F}(\mathcal{H}(d))$ es isomorfo a $\mathcal{G}(d)$ y η_d es un isomorfismo explícito $\mathcal{F}(\mathcal{H}(d)) \cong \mathcal{G}(d)$. Si $d \xrightarrow{\varphi} d'$ es un morfismo en $\mathcal{D}$ define $\mathcal{H}(d) \xrightarrow{\mathcal{H}(\varphi)} \mathcal{H}(d')$ como el único morfismo en $\mathcal{C}$ tal que el siguiente cuadrado es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(\mathcal{H}d) \arrow[r, "\eta_d", "\cong"'] \arrow[d, dashed, "\mathcal{F}(\mathcal{H}\varphi)"'] & \mathcal{G}(d) \arrow[d, "\mathcal{G}(\varphi)"] \\
\mathcal{F}(\mathcal{H}d') \arrow[r, "\cong", "\eta_{d'}"'] & \mathcal{G}(d')
\end{tikzcd}$$

Concluimos lo siguiente:

TEOREMA 3.4. *Sea $\mathcal{C}$ una $\mathcal{U}$-categoría. Si $\mathcal{D}$ es una $\mathcal{U}$-categoría, un funtor $\mathcal{H}\colon \mathcal{D} \to \mathbf{Pre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}}$ (resp. $\mathcal{H}\colon \mathcal{D} \to \mathbf{coPre}(\mathcal{C})$) es representable si y sólo si la $\mathcal{U}$-pregavilla (resp. $\mathcal{U}$-copregavilla) $\mathcal{H}(d)$ es representable para todo objeto d en $\mathcal{D}$.*

Más precisamente, si $\mathcal{H}\colon \mathcal{D} \to \mathbf{Pre}(\mathcal{C})$ (resp. $\mathcal{H}\colon \mathcal{D} \to \mathbf{coPre}(\mathcal{C})$) es tal que $\mathcal{H}(d)$ es representable por $\mathcal{G}(d)$ para todo objeto d en $\mathcal{D}$, existe un único funtor $\mathcal{D} \to \mathcal{C}$ que representa a $\mathcal{H}$ y que asocia a cada objeto d en $\mathcal{D}$ la $\mathcal{U}$-pregavilla (resp. $\mathcal{U}$-copregavilla) $\mathcal{G}(d)$.

Por el Teorema 3.2 se tiene en particular:

COROLARIO 3.5. *Si $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son $\mathcal{U}$-categorías y $\mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{D}$ es un funtor entre ellas, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *$\mathcal{F}$ es fiel y pleno.*
(ii) *Para todo objeto x en $\mathcal{C}$ la $\mathcal{U}$-pregavilla $\mathcal{F}^\wedge(\mathcal{F}(x))$ es representable por x.*
(iii) *Para todo objeto x en $\mathcal{C}$ la $\mathcal{U}$-copregavilla $\mathcal{F}^\vee(\mathcal{F}(x))$ es representable por x.*

§3.3. Encaje de Yoneda en Categorías Preaditivas. Si $\mathcal{A}$ es una $\mathcal{U}$-categoría, denotamos a la $\mathcal{U}^+$-categoría pequeña preaditiva de $\mathbb{Z}$-$\mathsf{Mod}_{\mathcal{U}}$-pregavillas (resp. $\mathbb{Z}$-$\mathsf{Mod}_{\mathcal{U}}$-copregavillas) en $\mathcal{A}$ como $\mathsf{Pre}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{A})_{\mathcal{U}}$ (resp. $\mathsf{coPre}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{A})_{\mathcal{U}}$) y llamamos a sus elementos *$\mathcal{U}$-pregavillas* (resp. *$\mathcal{U}$-copregavillas*) *de grupos abelianos en* $\mathcal{A}$.

Observemos que si $\mathbb{Z}\text{-}\mathsf{Mod}_{\mathcal{U}} \overset{\mathrm{olv}}{\to} \mathsf{Con}_{\mathcal{U}}$ denota al funtor que olvida la estructura de grupo abeliano y

$$\mathsf{Pre}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{A})_{\mathcal{U}} \xrightarrow{\mathrm{olv}^{\mathcal{A}^{\mathrm{op}}}} \mathsf{Pre}(\mathcal{A})_{\mathcal{U}} \qquad\qquad \mathsf{coPre}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{A})_{\mathcal{U}} \xrightarrow{\left(\mathrm{olv}^{\mathcal{A}}\right)^{\mathrm{op}}} \mathsf{coPre}(\mathcal{A})_{\mathcal{U}}\ ,$$

a los funtores inducidos, dar una estructura de categoría preaditiva en la $\mathcal{U}$-categoría $\mathcal{A}$ es lo mismo que dar funtores $\mathcal{A} \xrightarrow{h^{\wedge}_{\mathbb{Z}}} \mathsf{Pre}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{A})_{\mathcal{U}}$ y $\mathcal{A} \xrightarrow{h^{\vee}_{\mathbb{Z}}} \mathsf{coPre}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{A})_{\mathcal{U}}$ tales que $h^{\wedge}_{\mathbb{Z}}(y)(x) = h^{\vee}_{\mathbb{Z}}(x)(y)$ para cualesquiera dos objetos x y y de $\mathcal{A}$ y haciendo los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd} & \mathsf{Pre}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{A})_{\mathcal{U}} \arrow[d, "\mathrm{olv}^{\mathcal{A}^{\mathrm{op}}}"] \\ \mathcal{A} \arrow[ur, bend left, "h^{\wedge}_{\mathbb{Z}}"] \arrow[r, hook, "h^{\wedge}"'] & \mathsf{Pre}(\mathcal{A})_{\mathcal{U}} \end{tikzcd} \qquad \text{y} \qquad \begin{tikzcd} & \mathsf{coPre}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{A})_{\mathcal{U}} \arrow[d, "(\mathrm{olv}^{\mathcal{A}})^{\mathrm{op}}"] \\ \mathcal{A} \arrow[ur, bend left, "h^{\vee}_{\mathbb{Z}}"] \arrow[r, hook, "h^{\vee}"'] & \mathsf{coPre}(\mathcal{A})_{\mathcal{U}} \end{tikzcd}$$

En este caso $h^{\wedge}_{\mathbb{Z}}(y)(x) = \mathcal{A}_{\mathbb{Z}}(x,y) = h^{\vee}_{\mathbb{Z}}(x)(y)$.

LEMA DE YONEDA PREADITIVO 3.6. *Si $\mathcal{A}$ es una $\mathcal{U}$-categoría preaditiva, la transformación natural:*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \times \mathsf{Pre}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{A}) \arrow[d, bend right=60, "\mathsf{Pre}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{A})(-^{\wedge},-)"'] \arrow[d, bend left=60, "\mathrm{eval}"] \arrow[d, phantom, "\Longrightarrow"] \\ \mathsf{Grp}_{\mathcal{U}} \end{tikzcd} \qquad \left(\begin{tikzcd} \mathsf{coPre}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{A})^{\mathrm{op}} \times \mathcal{A} \arrow[d, bend right=60, "\mathsf{coPre}(\mathcal{A})(-,-^{\vee})"'] \arrow[d, bend left=60, "\mathrm{eval}"] \arrow[d, phantom, "\Longrightarrow"] \\ \textit{resp.} \qquad \mathsf{Grp}_{\mathcal{U}} \end{tikzcd} \right)$$

definida para un objeto x en $\mathcal{A}$ y una $\mathcal{U}$-pregavilla (resp. $\mathcal{U}$-copregavilla) F de grupos abelianos en $\mathcal{A}$, como la asignación:

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{Pre}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{A})_{\mathcal{U}}(x^{\wedge},F) & \longrightarrow & F(x) \\ \eta & \longmapsto & \eta_x(\mathrm{id}_x) \end{array} \qquad \left(\textit{resp.} \quad \begin{array}{rcl} \mathsf{coPre}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{A})_{\mathcal{U}}(F,x^{\vee}) & \longrightarrow & F(x) \\ \eta & \longmapsto & \eta_x(\mathrm{id}_x) \end{array} \right)$$

es un isomorfismo.

En particular, los funtores $h^{\wedge}_{\mathbb{Z}}$ y $h^{\vee}_{\mathbb{Z}}$ son fieles y plenos.

DEMOSTRACIÓN. La prueba es análoga a la de la Proposición 3.1. ✠

Por último, si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son dos $\mathcal{U}$-categorías preaditivas y $\mathcal{A} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{B}$ es un funtor aditivo, observemos que podemos definir funtores y transformaciones naturales análogos a los de la Sección 3 anterior:

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{B} \arrow[d, dashed, "\mathcal{F}^{\wedge}_{Z}"] \\ \mathcal{A} \arrow[ur, bend left, "\mathcal{F}"] \arrow[r, hook, "h^{\wedge}_{Z}"'] \arrow[ur, phantom, "\Nearrow\,\theta^{\wedge}_{Z}"] & \mathsf{Pre}_{Z}(\mathcal{A})_{\mathcal{U}} \end{tikzcd} \qquad \text{y} \qquad \begin{tikzcd} & \mathcal{B} \arrow[d, dashed, "\mathcal{F}^{\vee}_{Z}"] \\ \mathcal{A} \arrow[ur, bend left, "\mathcal{F}"] \arrow[r, hook, "h^{\vee}_{Z}"'] \arrow[ur, phantom, "\Swarrow\,\theta^{\vee}_{Z}"] & \mathsf{coPre}_{Z}(\mathcal{A})_{\mathcal{U}} \end{tikzcd},$$

donde ahora $\mathcal{F}^{\wedge}_{Z}(b)(a) = \mathcal{B}_Z(\mathcal{F}(a), b)$ y $\mathcal{F}^{\vee}_{Z}(b)(a) = \mathcal{B}_Z(b, \mathcal{F}(a))$.

§3.4. (Co)Pregavillas Representables en Categorías Preaditivas. Una $\mathcal{U}$-pregavilla (resp. $\mathcal{U}$-copregavilla) de grupos abelianos F en una $\mathcal{U}$-categoría preaditiva $\mathcal{A}$ se dice que es *representable* si ésta está en la imagen esencial del funtor $h^{\wedge}_{Z}$ (resp. $h^{\vee}_{Z}$), es decir, si existe un objeto x en $\mathcal{A}$ y un isomorfismo $x^{\wedge}_{Z} \cong_{\eta} \mathsf{F}$ (resp. $x^{\vee}_{Z} \cong_{\eta} \mathsf{F}$). En este caso, decimos que la pareja (x, η), o simplemente que x, *representa a* F. Observemos que por el Lema de Yoneda Preaditivo si dos objetos de $\mathcal{A}$ representan a la misma $\mathcal{U}$-pregavilla (resp. $\mathcal{U}$-copregavilla) F, estos son isomorfos.

TEOREMA 3.7. *Una $\mathcal{U}$-pregavilla (resp. $\mathcal{U}$-copregavilla)* F *de grupos abelianos en una $\mathcal{U}$-categoría preaditiva $\mathcal{A}$ es representable si y sólo si la $\mathcal{U}$-pregavilla* $\mathrm{olv}^{\mathcal{A}^{op}}(\mathsf{F})$ *(resp.* $(\mathrm{olv}^{\mathcal{A}})^{op}$*) es representable.*

DEMOSTRACIÓN. Por un lado, si F es una $\mathcal{U}$-pregavilla (resp. $\mathcal{U}$-copregavilla) de grupos abelianos y x es un objeto de $\mathcal{A}$ tal que existe un isomorfismo de $\mathcal{U}$-pregavillas (resp. $\mathcal{U}$-copregavillas) de grupos abelianos $x^{\wedge}_{Z} \cong_{\eta} \mathsf{F}$ (resp. $x^{\vee}_{Z} \cong_{\eta} \mathsf{F}$), al aplicar el funtor $\mathrm{olv}^{\mathcal{A}^{op}}$ (resp. $(\mathrm{olv}^{\mathcal{A}})^{op}$) obtenemos un isomorfismo de $\mathcal{U}$-pregavillas (resp. $\mathcal{U}$-copregavillas) de conjuntos $\mathcal{U}$-pequeños:

$$x^{\wedge} = \mathrm{olv}^{\mathcal{A}^{op}}(x^{\wedge}_{Z}) \cong \mathrm{olv}^{\mathcal{A}^{op}}(\mathsf{F}) \qquad \Big(\text{resp.} \quad x^{\vee} = (\mathrm{olv}^{\mathcal{A}})^{op}(x^{\vee}_{Z}) \cong (\mathrm{olv}^{\mathcal{A}})^{op}(\mathsf{F})\Big).$$

Recíprocamente, supongamos que F es una $\mathcal{U}$-pregavilla (resp. $\mathcal{U}$-copregavillas) de grupos abelianos en $\mathcal{A}$ y x un objeto de $\mathcal{A}$ tal que existe un isomorfismo de $\mathcal{U}$-pregavillas (resp. $\mathcal{U}$-copregavillas) $x^{\wedge} \cong \mathrm{olv}^{\mathcal{A}^{op}}(\mathsf{F})$ $\big($resp. $x^{\vee} \cong (\mathrm{olv}^{\mathcal{A}})^{op}(\mathsf{F})\big)$. Por la naturalidad concluimos que existe un elemento de $\mathrm{olv}(\mathsf{F}(x))$ al que denotamos como s con la propiedad que para cualquier objeto a en $\mathcal{A}$ la función:

$$\mathcal{A}(a, x) \xrightarrow{\eta_a} \mathrm{olv}(\mathsf{F}(a)) \qquad \left(\text{resp.} \quad \mathcal{A}(x, a) \xrightarrow{\eta_a} \mathrm{olv}(\mathsf{F}(a))\right)$$

definida por la fórmula $\eta_a(\varphi) = \mathrm{olv}\,(\mathsf{F}(\varphi))\,(s)$ es una biyección de conjuntos $\mathcal{U}$-pequeños.

La misma fórmula define una función de grupos abelianos $\mathcal{U}$-pequeños natural en a:

$$\mathsf{x}_{\mathbb{Z}}^{\wedge}(\mathsf{a}) = \mathcal{A}_{\mathbb{Z}}(\mathsf{a},\mathsf{x}) \xrightarrow{\eta_{\mathsf{a}}} \mathsf{F}(\mathsf{a}) \qquad \left(\text{resp. } \mathsf{x}_{\mathbb{Z}}^{\vee}(\mathsf{a}) = \mathcal{A}_{\mathbb{Z}}(\mathsf{x},\mathsf{a}) \xrightarrow{\eta_{\mathsf{a}}} \mathsf{F}(\mathsf{a})\right)$$

la cual es una biyección y por lo tanto un isomorfismo de grupos abelianos. ✠

Más generalmente, si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son $\mathcal{U}$-categorías preaditivas, un funtor aditivo $\mathcal{H}\colon \mathcal{B} \to \mathsf{Pre}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{A})_{\mathcal{U}}$ (resp. $\mathcal{H}\colon \mathcal{B} \to \mathsf{coPre}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{A})_{\mathcal{U}}$) se dice que es *representable*, si existe un funtor aditivo $\mathcal{G}\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ y un isomorfismo $\mathsf{h}_{\mathbb{Z}}^{\wedge} \circ \mathcal{G} \cong_{\eta} \mathcal{H}$ (resp. $\mathsf{h}_{\mathbb{Z}}^{\vee} \circ \mathcal{G} \cong_{\eta} \mathcal{H}$). En este caso, decimos que la pareja $(\mathcal{G},\eta)$, o simplemente que $\mathcal{G}$, *representa a* $\mathcal{H}$. Por el Lema de Yoneda Preaditivo, si dos funtores representan a $\mathcal{H}$ estos son isomorfos.

TEOREMA 3.8. *Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son $\mathcal{U}$-categorías preaditivas, un funtor aditivo $\mathcal{H}\colon \mathcal{B} \to \mathsf{Pre}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{A})_{\mathcal{U}}$ (resp. $\mathcal{H}\colon \mathcal{B} \to \mathsf{coPre}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{A})_{\mathcal{U}}$) es representable si y sólo si la $\mathcal{U}$-pregavilla (resp. $\mathcal{U}$-copregavilla) de grupos abelianos $\mathcal{H}(\mathsf{b})$ es representable para todo objeto b en $\mathcal{B}$.*

DEMOSTRACIÓN. Una implicación es inmediata. Recíprocamente, sea $\mathcal{H}\colon \mathcal{B} \to \mathsf{Pre}(\mathcal{A})_{\mathbb{Z}}$ (resp. $\mathcal{H}\colon \mathcal{B} \to \mathsf{coPre}(\mathcal{A})_{\mathbb{Z}}$) un funtor aditivo tal que para todo objeto b en $\mathcal{B}$ la $\mathcal{U}$-pregavilla (resp. $\mathcal{U}$-copregavilla) de grupos abelianos $\mathcal{H}(\mathsf{b})$ es representable. Como $\mathsf{h}_{\mathbb{Z}}^{\wedge}$ (resp. $\mathsf{h}_{\mathbb{Z}}^{\vee}$) es fiel y pleno, el mismo argumento que utilizamos para probar la Proposición 3.4 determina un funtor $\mathcal{G}\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ y un isomorfismo $\mathsf{h}_{\mathbb{Z}}^{\wedge} \circ \mathcal{G} \cong_{\eta} \mathcal{H}$ (resp. $\mathsf{h}_{\mathbb{Z}}^{\vee} \circ \mathcal{G} \cong_{\eta} \mathcal{H}$). Más aún, el funtor $\mathcal{G}$ resulta ser un funtor aditivo porque $\mathsf{h}_{\mathbb{Z}}^{\wedge}$ (resp. $\mathsf{h}_{\mathbb{Z}}^{\vee}$) y $\mathcal{H}$ lo son. ✠

COROLARIO 3.9. *Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son $\mathcal{U}$-categorías preaditivas, un funtor aditivo $\mathcal{H}\colon \mathcal{B} \to \mathsf{Pre}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{A})_{\mathcal{U}}$ (resp. $\mathcal{H}\colon \mathcal{B} \to \mathsf{coPre}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{A})_{\mathcal{U}}$) es representable si y sólo si el funtor $\mathrm{olv}^{\mathcal{A}^{\mathrm{op}}} \circ \mathcal{H}\colon \mathcal{B} \to \mathsf{Pre}(\mathcal{A})_{\mathcal{U}}$ (resp. $(\mathrm{olv}^{\mathcal{A}})^{\mathrm{op}} \circ \mathcal{H}\colon \mathcal{B} \to \mathsf{coPre}(\mathcal{A})_{\mathcal{U}}$) es representable.*

DEMOSTRACIÓN. Este resultado se sigue de los Teoremas 3.4, 3.7 y 3.8. ✠

CAPÍTULO

2

Límites y Colímites

1. Límites y Colímites

Sea $\mathcal{C}$ una $\mathcal{U}$-categoría.

Si I es una $\mathcal{U}$-categoría pequeña llamamos I-*gráficas en* $\mathcal{C}$ a los objetos de la categoría $\mathcal{C}^{\mathrm{I}}$, es decir, a los funtores de I en $\mathcal{C}$.

Notemos que si $\mathbf{1}$ denota a la $\mathcal{U}$-categoría pequeña cuyo conjunto de objetos es igual a $1 = \{0\}$, y sin ningún otro morfismo que la identidad de 0, la $\mathcal{U}$-categoría $\mathcal{C}^{\mathbf{1}}$ de $\mathbf{1}$-gráficas en $\mathcal{C}$ es isomorfa a $\mathcal{C}$. De este modo, para toda $\mathcal{U}$-categoría pequeña I el único funtor $\mathrm{I} \to \mathbf{1}$ determina un funtor $\mathrm{k}_{\mathrm{I}} \colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\mathrm{I}}$, que a cada objeto x en $\mathcal{C}$ asocia la I-*gráfica constante* $\mathrm{k}_{\mathrm{I}}(\mathrm{x})$.

Del párrafo §3.1 página 7 concluimos que se tienen los siguientes diagramas de categorías:

(6)
$$\begin{tikzcd} & \mathcal{C}^{\mathrm{I}} \arrow[d, dashed, "\mathrm{k}_{\mathrm{I}}^{\wedge}"] \\ \mathcal{C} \arrow[ur, bend left, "\mathrm{k}_{\mathrm{I}}"] \arrow[r, "\mathrm{h}^{\wedge}"'] \arrow[ur, phantom, "\theta^{\wedge}"'] & \mathsf{Pre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}} \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} & \mathcal{C}^{\mathrm{I}} \arrow[d, dashed, "\mathrm{k}_{\mathrm{I}}^{\vee}"] \\ \mathcal{C} \arrow[ur, bend left, "\mathrm{k}_{\mathrm{I}}"] \arrow[r, "\mathrm{h}^{\vee}"'] \arrow[ur, phantom, "\theta^{\vee}"'] & \mathsf{coPre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}} \end{tikzcd} .$$

Denotamos al funtor $\mathrm{k}_{\mathrm{I}}^{\wedge}$ $\left(\text{resp. } \mathrm{k}_{\mathrm{I}}^{\vee}\right)$ como $\mathsf{lím}_{\mathrm{I}}^{\wedge}$ $\left(\text{resp. } \mathsf{colím}_{\mathrm{I}}^{\vee}\right)$ y si γ es una I-gráfica en $\mathcal{C}$, llamamos a la $\mathcal{U}$-pregavilla $\mathsf{lím}_{\mathrm{I}}^{\wedge}(\gamma)$ (resp. $\mathcal{U}$-copregavilla $\mathsf{colím}_{\mathrm{I}}^{\vee}(\gamma)$) *la* $\mathcal{U}$*-pregavilla límite,* $\mathcal{U}$*-pregavilla límite proyectivo* o $\mathcal{U}$*-pregavilla límite inverso* de γ (resp. *la* $\mathcal{U}$*-copregavilla colímite,* $\mathcal{U}$*-copregavilla límite inductivo* o $\mathcal{U}$*-copregavilla límite directo* de γ).

Por definición, la $\mathcal{U}$-pregavilla límite (resp. $\mathcal{U}$-copregavilla colímite) de una I-gráfica γ en $\mathcal{C}$ es representable, si y sólo si existe un objeto $\mathsf{lím}_{\mathrm{I}}(\gamma)$ $\left(\text{resp. } \mathsf{colím}_{\mathrm{I}}(\gamma)\right)$

en $\mathcal{C}$ y un morfismo de I-gráficas

$$(7) \qquad k_I(\mathsf{lím}_I(\gamma)) \xrightarrow{\varepsilon^{\wedge}_{\gamma}} \gamma \qquad \left(\text{resp. } \gamma \xrightarrow{\eta^{\vee}_{\gamma}} k_I(\mathsf{colím}_I(\gamma))\right)$$

tal que para todo objeto a en $\mathcal{C}$ la siguiente función es biyectiva:

(8)

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(a, \mathsf{lím}_I(\gamma)) & \longrightarrow & \mathcal{C}^I(k_I(a), \gamma) \\ \varphi & \longmapsto & \varepsilon^{\wedge}_{\gamma} \circ k_I(\varphi) \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc} \text{resp. } \mathcal{C}(\mathsf{colím}_I(\gamma), a) & \longrightarrow & \mathcal{C}^I(\gamma, k_I(a)) \\ \psi & \longmapsto & k_I(\psi) \circ \eta^{\vee}_{\gamma} \end{array}\right)$$

es decir, se cumple la siguiente propiedad universal:

> Para cualquier objeto a en $\mathcal{C}$ y cualquier familia de morfismos $\{a \xrightarrow{\varphi_i} \gamma(i)\}_{i \in I_0}$ $\left(\text{resp. } \{a \xleftarrow{\psi_i} \gamma(i)\}_{i \in I_0}\right)$, tal que $\gamma(f) \circ \varphi_i = \varphi_j$ $\left(\text{resp. } \psi_j \circ \gamma(f) = \gamma(i)\right)$ para todo morfismo $i \xrightarrow{f} j$ en I:
>
> $$\begin{tikzcd} & \gamma(i) \arrow[dd, "\gamma(f)"] \\ a \arrow[ur, "\varphi_i"] \arrow[dr, "\varphi_j"'] & \\ & \gamma(j) \end{tikzcd} \qquad \left(\begin{tikzcd} & \gamma(i) \arrow[dl, "\psi_i"'] \arrow[dd, "\gamma(f)"] \\ a & \\ \text{resp.} & \gamma(j) \arrow[ul, "\psi_j"] \end{tikzcd} \right)$$
>
> existe un único morfismo $a \xrightarrow{\varphi} \mathsf{lím}_I(\gamma)$ $\left(\text{resp. } a \xleftarrow{\psi} \mathsf{colím}_I(\gamma)\right)$ tal que $(\varepsilon^{\wedge}_{\gamma})_i \circ \varphi = \varphi_i$ $\left(\text{resp. } \psi \circ (\eta^{\vee}_{\gamma})_i = \psi_i\right)$ para todo objeto i en I:
>
> $$\begin{tikzcd} a \arrow[d, dashed, "\varphi"'] \arrow[dr, bend left, "\varphi_i"] & \\ \mathsf{lím}_I(\gamma) \arrow[r, "(\varepsilon^{\wedge}_{\gamma})_i"'] & \gamma(i) \end{tikzcd} \qquad \left(\begin{tikzcd} & a & \\ \text{resp.} & \mathsf{colím}_I(\gamma) \arrow[u, dashed, "\psi"] & \gamma(i) \arrow[l, "(\eta^{\vee}_{\gamma})_i"] \arrow[ul, bend right, "\psi_i"'] \end{tikzcd} \right)$$

En este caso se dice que la pareja $\left(\mathsf{lím}_I(\gamma), \varepsilon^{\wedge}_{\gamma}\right)$ $\left(\text{resp. } \left(\mathsf{colím}_I(\gamma), \eta^{\vee}_{\gamma}\right)\right)$, o simplemente que le objeto $\mathsf{lím}_I(\gamma)$ (resp. $\mathsf{colím}_I(\gamma)$), *representa al límite (resp. colímite) de* γ *en* $\mathcal{C}$. Se sigue que dos objetos que representan al límite (resp. colímite) de la misma I-gráfica, son isomorfos.

§1.1. I-límites e I-colímites. Sea $\mathcal{C}$ una $\mathcal{U}$-categoría.

Si I es una $\mathcal{U}$-categoría pequeña, decimos que $\mathcal{C}$ es una $\mathcal{U}$-categoría con I-*límites* (resp. I-*colímites*) si el funtor $\mathsf{lím}_{\mathrm{I}}^{\wedge}$ (resp. $\mathsf{colím}_{\mathrm{I}}^{\vee}$) del diagrama (6) de la página 15 es representable. Por el Teorema 3.4 de la página 11, $\mathcal{C}$ es una $\mathcal{U}$-categoría con I-límites si y sólo si la $\mathcal{U}$-pregavilla límite (resp. $\mathcal{U}$-copregavilla colímite) de toda I-gráfica γ en $\mathcal{C}$ es representable.

Si $\mathcal{C}$ es una $\mathcal{U}$-categoría con I-límites (resp. I-colímites) decimos que $\mathcal{C}$ es una $\mathcal{U}$-categoría con I-*límites canónicos* (resp. I-colímites canónicos) si se ha elegido un funtor $\mathsf{lím}_{\mathrm{I}}\colon \mathcal{C}^{\mathrm{I}} \to \mathcal{C}$ (resp. $\mathsf{colím}_{\mathrm{I}}\colon \mathcal{C}^{\mathrm{I}} \to \mathcal{C}$) y un isomorfismo natural:

(9)

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{C}^{\mathrm{I}} \arrow[dl, dashed, "\mathsf{lím}_{\mathrm{I}}"'] \arrow[d, "\mathsf{lím}_{\mathrm{I}}^{\wedge}"] \\ \mathcal{C} \arrow[r, "h^{\wedge}"'] \arrow[ur, phantom, "\cong"] & \mathsf{Pre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}} \end{tikzcd} \quad \left(\text{resp.} \quad \begin{tikzcd} & \mathcal{C}^{\mathrm{I}} \arrow[dl, dashed, "\mathsf{colím}_{\mathrm{I}}"'] \arrow[d, "\mathsf{colím}_{\mathrm{I}}^{\vee}"] \\ \mathcal{C} \arrow[r, "h^{\vee}"'] \arrow[ur, phantom, "\cong"] & \mathsf{coPre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}} \end{tikzcd} \right)$$

o equivalentemente, si para toda I-gráfica γ en $\mathcal{C}$ se ha elegido una pareja $\big(\mathsf{lím}_{\mathrm{I}}(\gamma), \varepsilon_{\gamma}^{\wedge}\big)$ $\Big($resp. $\big(\mathsf{colím}_{\mathrm{I}}(\gamma), \eta_{\gamma}^{\vee}\big)\Big)$ que representa su límite (resp. colímite). En este caso llamamos al funtor $\mathsf{lím}_{\mathrm{I}}\colon \mathcal{C}^{\mathrm{I}} \to \mathcal{C}$ (resp. $\mathsf{colím}_{\mathrm{I}}\colon \mathcal{C}^{\mathrm{I}} \to \mathcal{C}$) *el funtor* I-*límite* (resp. I-*colímite*) *de* $\mathcal{C}$ y al objeto $\mathsf{lím}_{\mathrm{I}}(\gamma)$ (resp. $\mathsf{colím}_{\mathrm{I}}(\gamma)$) *el límite* (resp. *colímite*) *de* γ *en* $\mathcal{C}$.

Notemos que si $\mathcal{C}$ es una $\mathcal{U}$-categoría con I-límites canónicos (resp. I-colímites canónicos), por la Proposición 3.3 de la página 10, el funtor I-límite(resp. funtor I-colímite) de $\mathcal{C}$ es adjunto derecho (resp. izquierdo) del funtor gráfica constante $\mathcal{C} \xrightarrow{k_{\mathrm{I}}} \mathcal{C}^{\mathrm{I}}$. Más precisamente, el isomorfismo (9) de arriba determina transformaciones naturales $\varepsilon^{\wedge}\colon k_{\mathrm{I}} \circ \mathsf{lím}_{\mathrm{I}} \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{C}^{\mathrm{I}}}$ (resp. $\eta^{\vee}\colon \mathrm{id}_{\mathcal{C}^{\mathrm{I}}} \Rightarrow k_{\mathrm{I}} \circ \mathsf{colím}_{\mathrm{I}}$) y $\eta^{\wedge}\colon \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow \mathsf{lím}_{\mathrm{I}} \circ k_{\mathrm{I}}$ (resp. $\varepsilon^{\vee}\colon \mathsf{colím}_{\mathrm{I}} \circ k_{\mathrm{I}} \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$) tales que para todo objeto a en $\mathcal{C}$ y toda I-gráfica γ en $\mathcal{C}$, las funciones (8) y

(10)

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(a, \mathsf{lím}_{\mathrm{I}}(\gamma)) & \longleftarrow & \mathcal{C}^{\mathrm{I}}(k_{\mathrm{I}}(a), \gamma) \\ \mathsf{lím}_{\mathrm{I}}(\varepsilon) \circ \eta_{a}^{\wedge} & \longleftarrow\!\shortmid & \varepsilon \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc} \text{resp.}\ \mathcal{C}(\mathsf{colím}_{\mathrm{I}}(\gamma), a) & \longleftarrow & \mathcal{C}^{\mathrm{I}}(\gamma, k_{\mathrm{I}}(a)) \\ \varepsilon_{a}^{\vee} \circ \mathsf{colím}_{\mathrm{I}}(\varepsilon') & \longleftarrow\!\shortmid & \varepsilon' \end{array} \right)$$

son inversas una de la otra.

En este caso, si a es un objeto de $\mathcal{C}$ llamamos al morfismo η_a (resp. ε_a) *el morfismo diagonal de* a (resp. *el morfismo codiagonal de* a) y lo denotamos:

$$a \xrightarrow{\Delta_a} \mathsf{lím}_{\mathrm{I}}(k_{\mathrm{I}}(a)) \qquad \Big(\text{resp. } \mathsf{colím}_{\mathrm{I}}(k_{\mathrm{I}}(a)) \xrightarrow{\nabla_a} a\Big)$$

Se sigue que el morfismo diagonal (resp. codiagonal) de todo objeto en $\mathcal{C}$ es un isomorfismo, si y sólo si el funtor gráfica constante $\mathcal{C} \xrightarrow{k_{\mathrm{I}}} \mathcal{C}^{\mathrm{I}}$ es fiel y pleno.

§1.2. Categorías Conexas. Una categoría I se dice que es *conexa*, si ésta tiene al menos un objeto y para cualesquiera dos objetos de ella, existe una cadena finita de morfismos en I que los conecta.

TEOREMA 1.1. *Si* I *es una* $\mathcal{U}$*-categoría pequeña, son equivalentes:*

(i) I *es conexa.*

(ii) *Para cualquier* $\mathcal{U}$*-categoría* $\mathcal{C}$ *el funtor gráfica constante* $\mathcal{C} \xrightarrow{k_I} \mathcal{C}^I$ *es fiel y pleno.*

(iii) *Para toda* $\mathcal{U}$*-categoría* $\mathcal{C}$ *y todo objeto* a *en* $\mathcal{C}$, a *representa al límite de la* I*-gráfica constante* $k_I(a)$.

(iv) *Para toda* $\mathcal{U}$*-categoría* $\mathcal{C}$ *y todo objeto* a *en* $\mathcal{C}$, a *representa al colímite de la* I*-gráfica constante* $k_I(a)$.

DEMOSTRACIÓN.

(i)$\Rightarrow$(ii) Sea $\mathcal{C}$ una $\mathcal{U}$-categoría. Si a y b son dos objetos de $\mathcal{C}$, la función definida por el funtor gráfica constante:

$$\mathcal{C}(a,b) \longrightarrow \mathcal{C}^I(k_I(a),k_I(b)) \tag{11}$$

es inyectiva y su imagen consiste de aquellas transformaciones naturales $k_I(a) \overset{\eta}{\Rrightarrow} k_I(b)$ tales que $\eta_i = \eta_j$, para cualesquiera dos objetos i y j de I.

En general, una transformación natural $k_I(a) \overset{\eta}{\Rrightarrow} k_I(b)$ consiste de una familia de morfismos $\{a \xrightarrow{\eta_i} b\}_i$ en $\mathcal{C}$ indexada por los objetos de I, con la propiedad que $\eta_i = \eta_j$ si existe un morfismo en I de i en j. Se sigue que si I es conexa todos los objetos de esta familia son iguales, por lo que la función (11) es suprayectiva.

(ii) $\Rightarrow$ (i)

Si suponemos que existen dos objetos de I que no están conectados por una cadena de morfismos, y consideremos una $\mathcal{U}$-categoría $\mathcal{C}$ con al menos dos objetos a y b, y dos morfismos distintos de a en b, por las observaciones anteriores se puede contruir fácilmente una transformación natural $\eta \in \mathcal{C}^I(k_I(a),k_I(b))$ que no está en la imagen de (11). Esto contradice las hipótesis y por lo tanto I es conexa.

(ii) $\iff$ (iii) y (ii) $\iff$ (iv)

Estas equivalencias se siguen del Corolario 3.5 de la página 11. ✠

§1.3. Funtores Finales e Iniciales. Si $I \xrightarrow{\mathcal{F}} J$ es un funtor entre $\mathcal{U}$-categorías pequeñas y $\mathcal{C}$ es una $\mathcal{U}$-categoría, se tiene un diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^J \arrow[rr, "\mathcal{C}^{\mathcal{F}}"] \arrow[dr, "\text{lím}^{\wedge}_J"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\tau}{\Rrightarrow}"] & \mathcal{C}^I \arrow[dl, "\text{lím}^{\wedge}_I"] \\ & \mathrm{Pre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}} & \end{tikzcd} \qquad \left(\text{resp. } \begin{tikzcd} \mathcal{C}^J \arrow[rr, "\mathcal{C}^{\mathcal{F}}"] \arrow[dr, "\text{colím}^{\vee}_J"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\tau}{\Rrightarrow}"] & \mathcal{C}^I \arrow[dl, "\text{colím}^{\vee}_I"] \\ & \mathrm{coPre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}} & \end{tikzcd} \right) \tag{12}$$

donde τ esta definida para toda J-gráfica γ en $\mathcal{C}$ y todo objeto a en $\mathcal{C}$ como sigue:
(13)

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{lím}_J^{\wedge}(\gamma)(a) & \xrightarrow{\tau_\gamma(a)} & \mathrm{lím}_I^{\wedge}(\gamma\circ\mathcal{F})(a) \\ \eta & \longmapsto & \eta * \mathcal{F} \end{array} \qquad \left(\text{resp.}\quad \begin{array}{rcl} \mathrm{colím}_J^{\vee}(\gamma)(a) & \xrightarrow{\tau_\gamma(a)} & \mathrm{colím}_I^{\vee}(\gamma\circ\mathcal{F})(a) \\ \eta & \longmapsto & \eta * \mathcal{F} \end{array}\right)$$

Decimos que el funtor $I \xrightarrow{\mathcal{F}} J$ es un *funtor inicial* (resp. *final*) si se cumple que para cualquier objeto j en J la categoría coma $\mathcal{F} \downarrow j$ (resp. cocoma $j \downarrow \mathcal{F}$) es conexa. Por ejemplo, si J es un conjunto $\mathcal{U}$-pequeño totalmente ordenado e I un subconjunto de J con el orden inducido, la inclusión $I \hookrightarrow J$ es un funtor inicial (resp. final) si y sólo si, para todo objeto j en J existe un objeto $i \in I$ tal que $i \leq j$ (resp. $i \geq j$).

TEOREMA 1.2. *Si $I \xrightarrow{\mathcal{F}} J$ es un funtor inicial (resp. final) y $\mathcal{C}$ una $\mathcal{U}$-categoría arbitraria, la transformación natural τ del diagrama* (12) *de arriba es un isomorfismo, por lo que para toda J-gráfica γ en $\mathcal{C}$ la $\mathcal{U}$-pregavilla límite (resp. $\mathcal{U}$-copregavilla colímite) de γ es isomorfa a la $\mathcal{U}$-pregavilla límite (resp. $\mathcal{U}$-copregavilla colímite) de la I-gráfica $\gamma\circ\mathcal{F}$.*

DEMOSTRACIÓN.

Sea $\mathcal{C}$ una $\mathcal{U}$-categoría, γ una J-gráfica en $\mathcal{C}$ y a un objeto de $\mathcal{C}$. Probaremos que la función (13) es una biyección.

Inyectividad: Sean $\eta,\eta' \in \mathrm{lím}_J^{\wedge}(\gamma)(a)$ $\left(\text{resp. } \eta,\eta' \in \mathrm{colím}_J^{\vee}(\gamma)(a)\right)$ dos transformaciones naturales y supongamos que $\eta * \mathcal{F} = \eta' * \mathcal{F}$, es decir, para todo objeto i en I los morfismos $\eta_{\mathcal{F}(i)}$ y $\eta'_{\mathcal{F}(i)}$ son iguales. Debemos probar que $\eta_j = \eta'_j$ para todo objeto j en J. Para ver esto, recordemos que por hipótesis, para todo objeto j en J, la categoría coma $\mathcal{F} \downarrow j$ (resp. cocoma $j \downarrow \mathcal{F}$) es conexa y entonces no vacía, por lo que para todo j en J existe un objeto i en I y un morfismo $\mathcal{F}(i) \xrightarrow{u} j$ (resp. $j \xrightarrow{u} \mathcal{F}(i)$). Se sigue de la naturalidad de η y η' y de la igualdad $\eta_{\mathcal{F}(i)} = \eta'_{\mathcal{F}(i)}$ que

$$\eta_j = \gamma(u)\circ\eta_{\mathcal{F}(i)} = \gamma(u)\circ\eta'_{\mathcal{F}(i)} = \eta'_j$$

$$\left(\eta_j = \eta_{\mathcal{F}(i)}\circ\gamma(u) = \eta'_{\mathcal{F}(i)}\circ\gamma(u) = \eta'_j\right)$$

Suprayectividad: Sea $\varepsilon \in \mathrm{lím}_I^{\wedge}(\gamma\circ\mathcal{F})(a)$ $\left(\text{resp. } \varepsilon \in \mathrm{colím}_I^{\vee}(\gamma\circ\mathcal{F})(a)\right)$. Definimos $\eta \in \mathrm{lím}_J^{\wedge}(\gamma)(a)$ $\left(\text{resp. } \eta \in \mathrm{colím}_J^{\vee}(\gamma)(a)\right)$ como sigue: Para todo objeto j en J escribimos $\eta_j := \gamma(u)\circ\varepsilon_i$ donde $(i, \mathcal{F}(i) \xrightarrow{u} j)$ es cualquier objeto en $\mathcal{F} \downarrow j$. Para mostrar que η_j está bien definida, recordemos que la categoría $\mathcal{F} \downarrow j$ es conexa y observemos que si $(i, \mathcal{F}(i) \xrightarrow{u} j)$ y $(i', \mathcal{F}(i') \xrightarrow{u'} j)$ son dos objetos en $\mathcal{F} \downarrow j$ y $(i,u) \xrightarrow{\varphi} (i',u')$ un morfismo, entonces:

$$\gamma(u)\circ\varepsilon_i = \gamma(u')\circ\gamma(\varphi)\circ\varepsilon_i = \gamma(u')\circ\varepsilon_{i'}.$$

Para ver ahora que la familia $\{\eta_j\}_j$ determina una transformación natural, consideremos un morfismo $j \xrightarrow{f} j'$, entonces si $\eta_j = \gamma(u) \circ \varepsilon_i$ para $(i, u) \in \mathcal{F} \downarrow j$ y $\eta_{j'} = \gamma(u') \circ \varepsilon_{i'}$ para $(i', u') \in \mathcal{F} \downarrow j'$, como $(i, f \circ u) \in \mathcal{F} \downarrow j'$, entonces:

$$\eta_{j'} = \gamma(f \circ u) \circ \varepsilon_i = \gamma(f) \circ \gamma(u) \circ \varepsilon_i = \gamma(f) \circ \eta_j.$$

✠

2. Productos y Sumas

Sea Ω un conjunto $\mathcal{U}$-pequeño.

Denotamos como $\mathbf{\Omega}$ a la $\mathcal{U}$-categoría pequeña cuyo conjunto de objetos es igual Ω, y cuyos únicos morfismos son las identidades.

Si $\mathcal{C}$ es una $\mathcal{U}$-categoría, una $\mathbf{\Omega}$-gráfica γ en $\mathcal{C}$ consiste de una familia $\{x_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ de objetos en $\mathcal{C}$ indexados por el conjunto Ω. La $\mathcal{U}$-pregavilla límite (resp. $\mathcal{U}$-copregavilla colímite) de γ es llamada *la $\mathcal{U}$-pregavilla producto* (resp. *$\mathcal{U}$-copregavilla suma*) de la familia $\{x_\omega\}_{\omega\in\Omega}$.

Por definición, la $\mathcal{U}$-pregavilla producto (resp. $\mathcal{U}$-copregavilla suma) de una familia $\{x_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ de objetos en $\mathcal{C}$ es representable, si y sólo si, existe un objeto en $\mathcal{C}$:

$$\prod_{\omega\in\Omega} x_\omega \qquad \Big(\text{resp. } \coprod_{\omega\in\Omega} x_\omega\Big)^1,$$

y una familia de morfismos:

$$\left\{\prod_{\omega\in\Omega} x_\omega \xrightarrow{\pi_\omega} x_\omega\right\}_{\omega\in\Omega} \qquad \left(\text{resp. } \left\{\coprod_{\omega\in\Omega} x_\omega \xleftarrow{i_\omega} x_\omega\right\}_{\omega\in\Omega}\right)$$

con la siguiente propiedad universal:

> Para cualquier objeto a en $\mathcal{C}$ y cualquier familia de morfismos, $\{a \xrightarrow{f_\omega} x_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ (resp. $\{a \xleftarrow{g_\omega} x_\omega\}_{\omega\in\Omega}$), existe un único morfismo $\prod\limits_\omega f_\omega \colon a \to \prod\limits_{\omega\in\Omega} x_\omega$ (resp. $\coprod\limits_\omega f_\omega \colon a \leftarrow \coprod\limits_{\omega\in\Omega} x_\omega$) tal que $\pi_\omega \circ \prod\limits_\omega f_\omega = f_\omega$ (resp. $g_\omega = \coprod\limits_\omega f_\omega \circ i_\omega$):

[1] En caso de que el conjunto Ω sea finito, $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, denotamos al objeto $\prod\limits_{\omega\in\Omega} x_\omega$ $\Big($resp. $\coprod\limits_{\omega\in\Omega} x_\omega\Big)$ como $x_{\omega_1} \times \cdots \times x_{\omega_n}$ (resp. $x_{\omega_1} + \cdots + x_{\omega_n}$)

$$\begin{tikzcd} a \arrow[dr, dashed, "\prod_\omega f_\omega"'] \arrow[drr, bend left, "f_\omega"] & & \\ & \prod\limits_{\omega\in\Omega} x_\omega \arrow[r, "\pi_\omega"'] & x_\omega \end{tikzcd} \qquad \left(\text{resp. } \begin{tikzcd} a & & \\ & \coprod\limits_{\omega\in\Omega} x_\omega \arrow[ul, dashed, "\coprod_\omega f_\omega"] & x_\omega \arrow[l, "i_\omega"] \arrow[ull, bend right, "f_\omega"'] \end{tikzcd}\right)$$

En este caso decimos que la pareja

$$\left(\prod_{\omega\in\Omega} x_\omega, \{\pi_\omega\}_{\omega\in\Omega}\right) \quad \left(\text{resp. } \left(\coprod_{\omega\in\Omega} x_\omega, \{i_\omega\}_{\omega\in\Omega}\right)\right),$$

o simplemente que el objeto $\prod\limits_{\omega\in\Omega} x_\omega$ $\left(\text{resp. } \coprod\limits_{\omega\in\Omega} x_\omega\right)$, *representa al producto (resp. la suma) de la familia* $\{x_\omega\}_{\omega\in\Omega}$.

Por una $\mathcal{U}$-categoría con *Ω-productos* (resp. *Ω-sumas*) entendemos una $\mathcal{U}$-categoría con $\mathbf{\Omega}$-límites (resp. $\mathbf{\Omega}$-colímites), es decir, una $\mathcal{U}$-categoría en la que la $\mathcal{U}$-pregavilla producto (resp. $\mathcal{U}$-copregavilla suma) de toda familia de objetos en $\mathcal{C}$ indexada por Ω, es representable.

Del mismo modo, por una $\mathcal{U}$-categoría con *Ω-productos canónicos* (resp. *Ω-sumas canónicas*) entendemos una $\mathcal{U}$-categoría con $\mathbf{\Omega}$-límites canónicos (resp. $\mathbf{\Omega}$-colímites canónicos), es decir, una $\mathcal{U}$-categoría en la que para toda familia $\{x_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ de objetos en $\mathcal{C}$ indexada por Ω, se ha elegido una pareja

$$\left(\prod_{\omega\in\Omega} x_\omega, \{\pi_\omega\}_{\omega\in\Omega}\right) \quad \left(\text{resp. } \left(\coprod_{\omega\in\Omega} x_\omega, \{i_\omega\}_{\omega\in\Omega}\right)\right),$$

que representa su producto (resp. suma). En este caso llamamos al objeto $\prod\limits_{\omega\in\Omega} x_\omega$ $\left(\text{resp. } \coprod\limits_{\omega\in\Omega} x_\omega\right)$ *el producto (resp. suma) de la familia* $\{x_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ y a los morfismos $\{\pi_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ $\left(\text{resp. } \{i_\omega\}_{\omega\in\Omega}\right)$ *las proyecciones del producto en sus factores* (resp. *las inclusiones de los sumandos en la suma*).

Por último, decimos que $\mathcal{C}$ *es una $\mathcal{U}$-categoría con productos* (resp. *sumas*), si $\mathcal{C}$ tiene Ω-productos (resp. Ω-sumas) para todo conjunto $\mathcal{U}$-pequeño Ω y decimos que $\mathcal{C}$ *es una $\mathcal{U}$-categoría con productos canónicos* (resp. *sumas canónicas*), si $\mathcal{C}$ tiene Ω-productos canónicos (resp. Ω-sumas canónicas) para todo conjunto $\mathcal{U}$-pequeño Ω.

§2.1. Ejemplos. En este párrafo, definiremos objetos que representan a las pregavillas producto y a las copregavillas suma en distintas categorías. Con estas construcciones, estas categorías serán consideradas desde ahora como categorías con productos y sumas canónicas.

§2.1.1. *Conjuntos y Espacios Topológicos.*

La $\mathcal{U}$-pregavilla producto (resp. $\mathcal{U}$-copregavilla suma) de una familia de objetos en la $\mathcal{U}$-categoría de conjuntos $\mathcal{U}$-pequeños $\mathsf{Con}_{\mathcal{U}}$, es representable por el producto cartesiano (resp. la unión ajena) de los elementos de la familia. Del mismo modo, la $\mathcal{U}$-pregavilla producto (resp. la $\mathcal{U}$-copregavilla suma) de una familia de objetos en la $\mathcal{U}$-categoría de espacios topológicos $\mathcal{U}$-pequeños $\mathsf{Top}_{\mathcal{U}}$, es representable por el producto cartesiano (resp. la unión ajena), con la topología producto (resp. la topología suma), de los elementos de la familia.

§2.1.2. *Categoría de Subconjuntos.*

Si X es un conjunto $\mathcal{U}$-pequeño, la $\mathcal{U}$-pregavilla producto (resp. $\mathcal{U}$-copregavilla suma) de una familia de objetos en el conjunto parcialmente ordenado $\mathcal{U}$-pequeño $\mathsf{sub}_{\mathsf{X}}(\mathsf{Con})$, es representable por la intersección (resp. la unión) de los objetos de la familia. Si X es un espacio topológico $\mathcal{U}$-pequeño, lo mismo es cierto en el conjunto parcialmente oredenado $\mathcal{U}$-pequeño $\mathsf{sub}_{\mathsf{X}}(\mathsf{Top})$.

§2.1.3. *Categorías y Grupoides.*

Si $\{\mathcal{C}_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ es una familia de objetos en $\mathsf{cat}_{\mathcal{U}}$ indexada por un conjunto $\mathcal{U}$-pequeño Ω,

- La $\mathcal{U}$-pregavilla producto de la familia $\{\mathcal{C}_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ es representable por la $\mathcal{U}$-categoría pequeña $\prod\limits_{\omega\in\Omega} \mathcal{C}_\omega$ definida como sigue:

  Su conjunto de objetos es el producto cartesiano de los conjuntos de objetos de las categorías de la familia $\{\mathcal{C}_\omega\}_{\omega\in\Omega}$.

  Si $(a_\omega)_{\omega\in\Omega}$ y $(b_\omega)_{\omega\in\Omega}$ son dos objetos, el conjunto de morfismos de $(a_\omega)_{\omega\in\Omega}$ en $(b_\omega)_{\omega\in\Omega}$ es igual al producto cartesiano de la familia $\{\mathcal{C}_\omega(a_\omega, b_\omega)\}_{\omega\in\Omega}$. La composición se define coordenada a coordenada.
- La $\mathcal{U}$-copregavilla suma de la familia $\{\mathcal{C}_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ es representables por la $\mathcal{U}$-categoría pequeña $\coprod\limits_{\omega\in\Omega} \mathcal{C}_\omega$ definida como sigue:

  Su conjunto de objetos es la unión ajena de los conjuntos de objetos de las categorías de la familia $\{\mathcal{C}_\omega\}_{\omega\in\Omega}$.

  Si a y b son dos objetos, el conjunto de morfismos de a en b es igual a $\mathcal{C}_\omega(a, b)$, si a y b son objetos de la misma categoría $\mathcal{C}_\omega$, y es igual al vacío en caso contrario. La composición es la misma que en las categorías originales.

Si los elementos de la familia $\{\mathcal{C}_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ son grupoides $\mathcal{U}$-pequeños, las $\mathcal{U}$-categorías pequeñas $\prod\limits_{\omega\in\Omega} \mathcal{C}_\omega$ y $\coprod\limits_{\omega\in\Omega} \mathcal{C}_\omega$ también son grupoides. Estas representan a la $\mathcal{U}$-pregavilla producto y a la $\mathcal{U}$-copregavilla suma de la familia $\{\mathcal{C}_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ en $\mathsf{Grpd}_{\mathcal{U}}$.

§2.1.4. *Anillos.*

Si $\{A_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ es una familia de anillos $\mathcal{U}$-pequeños indexados por un conjunto $\mathcal{U}$-pequeño Ω,

- El producto cartesiano de los elementos de la familia $\{A_\omega\}_{\omega\in\Omega}$, con las operaciones definidas coordenada a coordenada, representa a la $\mathcal{U}$-pregavilla producto de la familia $\{A_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ en Anillo.
- El producto tensorial de anillos $\bigotimes_{\omega\in\Omega} A_\omega$ representa a la $\mathcal{U}$-copregavilla suma de la familia $\{A_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ en Anillo.

§2.1.5. R-*módulos.*

Si R es un anillo $\mathcal{U}$-pequeño y $\{M_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ es una familia de R-módulos izquierdos $\mathcal{U}$-pequeños,

- El producto cartesiano de los elementos de la familia $\{M_\omega\}_{\omega\in\Omega}$, con las operaciones definidas coordenada a coordenada, representa a la $\mathcal{U}$-pregavilla producto de la familia $\{M_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ en R-Mod.
- El submódulo del producto de la familia $\{M_\omega\}_{\omega\in\Omega}$, cuyos elementos tienen todas salvo un número finito de coordenadas igual a cero, representa a la $\mathcal{U}$-copregavilla suma de la familia $\{M_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ en R-Mod.

§2.1.6. *Categorías de Funtores.*

Sea $\mathcal{D}$ una $\mathcal{U}$-categoría con Ω-productos canónicos (resp. Ω-sumas canónicas). Si $\mathcal{C}$ es una $\mathcal{U}$-categoría, usando la propiedad universal de los productos (resp. sumas), se puede construir para cada familia $\{\mathcal{C} \xrightarrow{F_\omega} \mathcal{D}\}_{\omega\in\Omega}$ un funtor $\mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{D}$ y transformaciones naturales $\mathcal{F} \xRightarrow{\pi_\omega} \mathcal{F}_\omega$ (resp. $\mathcal{F}_\omega \xRightarrow{i_\omega} \mathcal{F}$), tales que $\mathcal{F}(a)$ es el producto (resp. la suma) en $\mathcal{D}$ de la familia $\{F_\omega(a)\}_{\omega\in\Omega}$ con $\{(\pi_\omega)_a\}_\omega$ $\left(\text{resp. } \{(i_\omega)_a\}_\omega\right)$ las proyecciones en cada factor (resp. incluciones de cada sumando). Se sigue de esto que la pareja $(\mathcal{F},\{\pi_\omega\}_\omega)$ $\left(\text{ resp. } (\mathcal{F},\{i_\omega\}_\omega)\right)$ represena a la $\mathcal{U}$-pregavilla producto (resp. $\mathcal{U}$-copregavilla suma) de la familia $\{\mathcal{F}_\omega\}$ en $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$.

§2.1.7. *Categoría Opuesta.*

Si $\mathcal{C}$ es una $\mathcal{U}$-categoría, la $\mathcal{U}$-pregavilla producto de cualquier familia de objetos en $\mathcal{C}$, es isomorfa a la $\mathcal{U}$-copregavilla suma de la misma familia, pero vista ahora como familia de objetos en $\mathcal{C}^{op}$. Se sigue que si Ω es un conjunto $\mathcal{U}$-pequeño, $\mathcal{C}$ es una $\mathcal{U}$-categoría con Ω-productos si y sólo si $\mathcal{C}^{op}$ es una $\mathcal{U}$-categoría con Ω-sumas.

§2.2. Objetos Terminales e Iniciales. Sea $\mathcal{C}$ una $\mathcal{U}$-categoría. Si Ω es el conjunto vacío 0, la $\mathcal{U}$-categoría $\mathcal{C}^{\mathbf{0}}$ de $\mathbf{0}$-gráficas en $\mathcal{C}$ es isomorfa a la $\mathcal{U}$-categoría $\mathbf{1}$. La $\mathcal{U}$-pregavilla límite (resp. $\mathcal{U}$-copregavilla colímite) de la única $\mathbf{0}$-gráfica en $\mathcal{C}$, es decir, la $\mathcal{U}$-pregavilla producto (resp. $\mathcal{U}$-copregavilla suma) de la familia vacía de objetos en $\mathcal{C}$, es llamada *la $\mathcal{U}$-pregavilla terminal* (resp. *$\mathcal{U}$-copregavilla inicial*) de $\mathcal{C}$.

Por definición, un objeto x en $\mathcal{C}$ representa a la $\mathcal{U}$-pregavilla terminal (resp. $\mathcal{U}$-copregavilla inicial) de $\mathcal{C}$, si y sólo si, para cualquier otro objeto a en $\mathcal{C}$ existe un único morfismo $a \to x$ (resp. $a \leftarrow x$). Si este es el caso decimos que x *es un objeto terminal* (resp. *inicial*) de $\mathcal{C}$.

Un objeto en una $\mathcal{U}$-categoría $\mathcal{C}$ que al mismo tiempo es terminal e inicial es llamado *un objeto cero*. Observemos que si $\mathcal{A}$ es una $\mathcal{U}$-categoría preaditiva con un objeto cero $0_{\mathcal{A}}$, para cualesquiera dos objetos a y b de $\mathcal{A}$, la composición de los únicos morfismos $a \to 0_{\mathcal{A}} \to b$ es el elemento cero del grupo $\mathcal{A}_{\mathbb{Z}}(a, b)$.

Ejemplos:

§2.2.1.

El conjunto $0 = \emptyset$ (resp. $1 = \{0\}$) es un objeto inicial (resp. terminal) en la $\mathcal{U}$-categoría $\mathsf{Con}_{\mathcal{U}}$. Con la única posible topología, éste también es un objeto inicial (resp. terminal) en $\mathsf{Top}_{\mathcal{U}}$.

El conjunto $1 = \{0\}$ con las estructuras triviales, es un objeto cero en las $\mathcal{U}$-categorías $\mathsf{Mond}_{\mathcal{U}}$, $\mathsf{Grp}_{\mathcal{U}}$ y R-Mod. Este también es un objeto terminal de Anillo.

El anillo de los números enteros $\mathbb{Z}$ es un objeto inicial de la $\mathcal{U}$-categoría Anillo.

§2.2.2.

La categoría $\mathbf{0}$ (resp. $\mathbf{1}$) es un objeto inicial (resp. terminal) en $\mathsf{cat}_{\mathcal{U}}$.

§2.2.3.

Si X es un conjunto $\mathcal{U}$-pequeño, el único objeto terminal (resp. inicial) del conjunto $\mathcal{U}$-pequeño parcialmente ordenado $\mathsf{sub}_X(\mathsf{Con})$, es el conjunto X (resp. al conjunto vacío).

Si X es un espacio topológico $\mathcal{U}$-pequeño, lo mismo es cierto en el conjunto $\mathcal{U}$-pequeño parcialmente ordenado $\mathsf{sub}_X(\mathsf{Top})$.

§2.2.4.

Si $\mathcal{C}$ es una $\mathcal{U}$-categoría y x un objeto en $\mathcal{C}$, (x, id) es un objeto terminal (resp. inicial) de la $\mathcal{U}$-categoría $\mathcal{C} \downarrow x$ (resp. $x \downarrow \mathcal{C}$). Más aún, si x_i (resp. x_t) es un objeto inicial (resp. terimnal) en $\mathcal{C}$, (x_i, id) $\big($resp. $(x_t, \mathrm{id})\big)$ es un objeto cero de $\mathcal{C} \downarrow x_i$ (resp. $x_t \downarrow \mathcal{C}$).

Como casos particulares, las $\mathcal{U}$-categorías $\mathsf{Con}_* := 1 \downarrow \mathsf{Con}$ y $\mathsf{Top}_* := 1 \downarrow \mathsf{Top}$ de *conjuntos punteados $\mathcal{U}$-pequeños* y de *espacios topológicos punteados $\mathcal{U}$-pequeños*, respectivamente, tienen un objeto cero.

§2.3. Productos y Sumas Finitas. Una $\mathcal{U}$-categoría con *productos finitos* (resp. *sumas finitas*) es una $\mathcal{U}$-categoría con Ω-productos (resp. Ω-sumas), para todo conjunto finito $\mathcal{U}$-pequeño Ω.

Si Ω es un conjunto finito $\mathcal{U}$-pequeño de cardinalidad n, existe un isomorfismo de la $\mathcal{U}$-categoría $\mathcal{C}^{\Omega}$ en la $\mathcal{U}$-categoría $\mathcal{C}^n$ que conmuta con los funtores $\mathsf{lím}^{\wedge}_{\Omega}$ y $\mathsf{lím}^{\wedge}_{n}$ (resp. $\mathsf{colím}^{\vee}_{\Omega}$ y $\mathsf{colím}^{\vee}_{n}$). Se sigue que $\mathcal{C}$ es una $\mathcal{U}$-categoría con productos finitos (resp. sumas finitas) si y sólo si $\mathcal{C}$ es una $\mathcal{U}$-categoría con n-productos (resp. n-sumas), para todo $n \in \mathbb{N}$.

Más aún:

TEOREMA 2.1. *Si $\mathcal{C}$ es una $\mathcal{U}$-categoría, son equivalentes:*

(i) $\mathcal{C}$ *es una* $\mathcal{U}$*-categoría con un objeto terminal y 2-productos (resp. un objeto inicial y 2-sumas).*
(ii) $\mathcal{C}$ *es una* $\mathcal{U}$*-categoría con productos finitos (resp. sumas finitas).*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{C}$ una $\mathcal{U}$-categoría con un objeto terminal (resp. inicial) y con 2-productos (resp. 2-sumas). Mostraremos que $\mathcal{C}$ es una $\mathcal{U}$-categoría con n-productos (resp. n-sumas) para toda $n \in \mathbb{N}$. Para ello notemos primero que toda $\mathcal{U}$-categoría tiene 1-productos (resp. 1-sumas) pues el funtor gráfica constante $\mathcal{C} \xrightarrow{k_1} \mathcal{C}^1$ es un isomorfismo, es decir, la $\mathcal{U}$-pregavilla límite (resp. $\mathcal{U}$-copregavilla colímite) de una **1**-gráfica γ es representable por $\gamma(0)$.

Para probar que $\mathcal{C}$ es una $\mathcal{U}$-categoría con n-productos (resp. n-sumas) si $n > 2$ supongamos que $\mathcal{C}$ es una $\mathcal{U}$-categoría con $(n-1)$-productos (resp. $(n-1)$-sumas) y consideremos una familia $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ de objetos en $\mathcal{C}$. Es fácil ver que si $x_1 \times \cdots \times x_n$ (resp. $x_1 + \cdots + x_n$) representa a la $\mathcal{U}$-pregavilla producto (resp. a la $\mathcal{U}$-copregavilla suma) de la familia $\{x_i\}_{i=1}^{n}$, entonces $x_0 \times (x_1 \times \cdots \times x_n)$ (resp. $x_0 + (x_1 + \cdots + x_n)$) representa a la $\mathcal{U}$-pregavilla producto (resp. a la $\mathcal{U}$-copregavilla suma) de la familia $\{x_i\}_{i=0}^{n}$. Se concluye así que $\mathcal{C}$ es una $\mathcal{U}$-categoría con n-productos (resp. n-sumas) y el resultado deseado se sigue por inducción. ✠

Por último, una $\mathcal{U}$-categoría con *productos finitos canónicos* (resp. *sumas finitas canónicas*) es una $\mathcal{U}$-categoría con Ω-productos canónicos (resp. Ω-sumas canónicas), para todo conjunto finito $\mathcal{U}$-pequeño Ω.

§2.4. Categorías Aditivas. Sea $\mathcal{A}$ una $\mathcal{U}$-categoría preaditiva.

Si a_t es un objeto terminal de $\mathcal{A}$, el grupo abeliano $\mathcal{A}(a_t, a_t)$ tiene un único elemento. En particular, el morfismo identidad $a_t \xrightarrow{\mathrm{id}_{a_t}} a_t$ y el elemento cero de este grupo son iguales. Se sigue que para todo objeto x en $\mathcal{A}$ el morfismo de grupos:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(a_t, x) &\longrightarrow \mathcal{A}(a_t, x) \\ f &\longmapsto f \circ \mathrm{id}_{a_t} = f \end{aligned}$$

es igual al morfismo cero, por lo que el conjunto $\mathcal{A}(a_t, x)$ tiene un único elemento, es decir, a_t también es un objeto inicial. Recíprocamente, si a_i es un objeto inical de $\mathcal{A}$ un argumento similar prueba que a_i también es un objeto terminal de $\mathcal{A}$. Tenemos así:

TEOREMA 2.2. *Si* $\mathcal{A}$ *es una* $\mathcal{U}$*-categoría preaditiva y* a *es un objeto de* $\mathcal{A}$*, los siguientes enunciados son equivalentes:*

(i) a *es un objeto terminal de* $\mathcal{A}$.
(ii) a *es un objeto inicial de* $\mathcal{A}$.
(iii) a *es un objeto cero de* $\mathcal{A}$.

Esta misma simetría se tiene con los productos y sumas finitas.

TEOREMA 2.3. *Si $\mathcal{A}$ es una $\mathcal{U}$-categoría preaditiva y $\{a, b\}$ es una familia de objetos en $\mathcal{A}$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *x representa a la $\mathcal{U}$-pregavilla producto de $\{a, b\}$.*
(ii) *x representa a la $\mathcal{U}$-copregavilla suma de $\{a, b\}$.*
(iii) *Existen morfismos*

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[dr, "i_a"] & & a \\
& x \arrow[ur, "\pi_a"] \arrow[dr, "\pi_b"'] & \\
b \arrow[ur, "i_b"'] & & b
\end{tikzcd}$$

tales que

(14) $$\pi_a \circ i_a = \mathrm{id}_a \qquad \pi_b \circ i_a = 0_a^b$$

(15) $$\pi_a \circ i_b = 0_b^a \qquad \pi_b \circ i_b = \mathrm{id}_b$$

(16) $$i_a \circ \pi_a + i_b \circ \pi_b = \mathrm{id}_x$$

DEMOSTRACIÓN.

(i)$\Rightarrow$(iii)

Como x representa a la $\mathcal{U}$-pregavilla producto de $\{a, b\}$, existen morfirmos $x \xrightarrow{\pi_a} a$ y $x \xrightarrow{\pi_b} b$ tales que la siguiente propiedad se cumple:

Si $z \xrightarrow{f} a$ y $z \xrightarrow{g} b$ son morfismos en $\mathcal{A}$ existe un único morifsmo $z \xrightarrow{\varphi} x$ tal que $\pi_a \circ \varphi = f$ y $\pi_b \circ \psi = g$.

De esta propiedad se pueden concluir las siguientes observaciones:

(1) Si $z = a$, $f = \mathrm{id}_a$ y $g = 0_a^b$, existe un morfismo $a \xrightarrow{i_a} x$ tal que (14).
(2) Si $z = b$, $f = 0_b^a$ y $g = \mathrm{id}_b$, existe un morfismo $b \xrightarrow{i_b} x$ tal que (15).
(3) Si $x \xrightarrow{\varphi} x$ es un morfismo tal que $\pi_a \circ \varphi = \pi_a$ y $\pi_b \circ \varphi = \pi_b$, entonces $\varphi = \mathrm{id}_x$. En particular, como

$$\pi_a(i_a \circ \pi_a + i_b \circ \pi_b) = \mathrm{id}_a \circ \pi_a + 0_b^a \circ \pi_b = \pi_a$$

y

$$\pi_b(i_a \circ \pi_a + i_b \circ \pi_b) = 0_a^b \circ \pi_a + \mathrm{id}_b \circ \pi_b = \pi_b$$

se tiene la igualdad (16).

(iii)$\Rightarrow$(i)

Si $z \xrightarrow{f} a$ y $z \xrightarrow{g} b$ son dos morfismos en $\mathcal{A}$, por las propiedades (14) y (15), el morfismo $z \xrightarrow{\varphi} x$ definido como $\varphi = i_a \circ f + i_b \circ g$ cumple que $\pi_a \circ \varphi = f$ y $\pi_b \circ \varphi = g$. Por la propiedad (16), si $z \xrightarrow{\varphi'} x$ es otro morfismo tal que $\pi_a \circ \varphi' = f$ y $\pi_b \circ \varphi' = g$, entonces $\varphi' = \varphi$.

Se sigue que la pareja $\big(x, \{\pi_a, \pi_b\}\big)$ representa a la $\mathcal{U}$-pregavilla producto de la familia $\{a, b\}$.

La equivalencia (ii)$\Leftrightarrow$(iii) se prueba de manera análoga. ✠

Por la prueba del Teorema 2.1 de la página 24 concluimos:

COROLARIO 2.4. *Si $\mathcal{A}$ es una $\mathcal{U}$-categoría preaditiva y $\{a_1, \ldots, a_n\}$ es una familia de objetos en $\mathcal{A}$ indexada por un número natural n, los siguientes enunciados son equivalentes:*

(i) x *representa a la $\mathcal{U}$-pregavilla producto de* $\{a_1, \ldots, a_n\}$.
(ii) x *representa a la $\mathcal{U}$-copregavilla suma de* $\{a_1, \ldots, a_n\}$.

Una *$\mathcal{U}$-categoría aditiva* $\mathcal{A}$ es una $\mathcal{U}$-categoría preaditiva con productos finitos canónicos. Por el Corolario anterior, en una $\mathcal{U}$-categoría preaditiva, el producto de cualquier familia finita de objetos también representa a su $\mathcal{U}$-copregavilla suma. Se sigue que una $\mathcal{U}$-categoría aditiva, tiene naturalmente una estructura de $\mathcal{U}$-categoría con sumas finitas canónicas.

Por último, notemos que el objeto terminal canónico en una $\mathcal{U}$-categoría aditiva $\mathcal{A}$ es un objeto cero, al que denotamos $0_{\mathcal{A}}$ y llamamos *el objeto cero de $\mathcal{A}$*.

Ejemplos:

§2.4.1. R-*módulos.*

Si R es un anillo $\mathcal{U}$-pequeño, con la estructura preaditiva señalada en el Párrafo §1.2.11 de la página 3, y con los productos definidos en §2.1.5 de la página 23, la $\mathcal{U}$-categoría de R-módulos izquierdos $\mathcal{U}$-pequeños es una $\mathcal{U}$-categoría aditiva.

§2.4.2. *Categoría Opuesta.*

Si $\mathcal{A}$ es una $\mathcal{U}$-categoría aditiva, la categoría opuesta tiene naturalmente una estructura de $\mathcal{U}$-categoría aditiva.

§2.4.3. *Categorías de Funtores.*

Sea $\mathcal{A}$ es una $\mathcal{U}$-categoría aditiva. Si $\mathcal{C}$ es una $\mathcal{U}$-categoría pequeña, con la estructura de $\mathcal{U}$-categoría preaditiva señalada en el Párrafo §1.2.11 de la página 3, y con los productos definidos en el Ejemplo §2.1.6 de la página 23, la $\mathcal{U}$-categoría $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}$ es una $\mathcal{U}$-categoría aditiva.

En particular, si $\mathcal{A}$ es una $\mathcal{U}$-categoría aditiva, para toda $\mathcal{U}$-categoría pequeña $\mathcal{C}$, las $\mathcal{U}$-categorías $\mathbf{Pre}(\mathcal{C})_{\mathcal{A}}$ y $\mathbf{coPre}(\mathcal{C})_{\mathcal{A}}$ tienen naturalmente estructuras de $\mathcal{U}$-categorías aditivas.

3. Igualadores y Coigualadores

Denotamos como $\mathrm{I_g}$ a la $\mathcal{U}$-categoría pequeña que tiene por objetos al conjunto $2 = \{0, 1\}$ y con solamente dos morfismos distintos $0 \rightrightarrows 1$, además de las identidades.

Si $\mathcal{C}$ es una $\mathcal{U}$-categoría, una $\mathrm{I_g}$-gráfica (resp. $\mathrm{I_g^{op}}$-gráfica) γ en $\mathcal{C}$ consiste de dos morfismos paralelos $x_0 \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} x_1$ (resp. $x_0 \underset{g}{\overset{f}{\leftleftarrows}} x_1$). La $\mathcal{U}$-pregavilla límite (resp. $\mathcal{U}$-copregavilla colímite) de γ es llamada *la $\mathcal{U}$-pregavila igualador* (resp. *$\mathcal{U}$-copregavilla coigualador*) de los morfismos $x_0 \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} x_1$ (resp. $x_0 \underset{g}{\overset{f}{\leftleftarrows}} x_1$).

Por definición, la $\mathcal{U}$-pregavilla igualador (resp. $\mathcal{U}$-copregavilla coigualador) de los morfismos $x_0 \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} x_1$ (resp. $x_0 \overset{f}{\underset{g}{\leftleftarrows}} x_1$) es representable, si y sólo si existe un objeto $\ker_{f,g}$ (resp. $\operatorname{coker}_{f,g}$) en $\mathcal{C}$ y un morfismo $\ker_{f,g} \xrightarrow{k_*} x_0$ (resp. $\operatorname{coker}_{f,g} \xleftarrow{k^*} x_0$) con la siguiente propiedad universal:

> $f \circ k_* = g \circ k_*$ (resp. $k^* \circ f = k^* \circ g$) y si $a \xrightarrow{\varphi} x_0$ (resp. $a \xleftarrow{\varphi} x_0$) es un morfismo en $\mathcal{C}$ tal que $f \circ \varphi = g \circ \varphi$ (resp. $\varphi \circ f = \varphi \circ g$), entonces existe un único morfismo $a \xrightarrow{\tilde{\varphi}} \ker_{f,g}$ (resp. $a \xleftarrow{\tilde{\varphi}} \operatorname{coker}_{f,g}$) tal que $k_* \circ \tilde{\varphi} = \varphi$ (resp. $\tilde{\varphi} \circ k^* = \varphi$):

$$\begin{tikzcd} & \ker_{f,g} \arrow[d, "k_*"] & \\ a \arrow[ur, dashed, "\tilde{\varphi}"] \arrow[r, "\varphi"'] & x_0 \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & x_1 \end{tikzcd} \qquad \left(\text{resp. } \begin{tikzcd} & \operatorname{coker}_{f,g} \arrow[dl, dashed, "\tilde{\varphi}"'] & \\ a & x_0 \arrow[l, "\varphi"] \arrow[u, "k^*"'] & x_1 \arrow[l, shift right, "f"'] \arrow[l, shift left, "g"] \end{tikzcd} \right)$$

En este caso decimos que la pareja $(\ker_{f,g}, k_*)$ (resp. $(\operatorname{coker}_{f,g}, k^*)$), o simplemente que el objeto $\ker_{f,g}$ (resp. $\operatorname{coker}_{f,g}$), *representa al igualador* (resp. *coigualador*) *de los morfismos* $x_0 \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} x_1$ (resp. $x_0 \overset{f}{\underset{g}{\leftleftarrows}} x_1$). También, decimos que *el diagrama*:

$$\ker_{f,g} \xrightarrow{k_*} x_0 \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} x_1 \qquad \left(\text{resp. } \operatorname{coker}_{f,g} \xleftarrow{k^*} x_0 \overset{f}{\underset{g}{\leftleftarrows}} x_1\right)$$

es exacto.

Si $\mathcal{C}$ es una $\mathcal{U}$-categoría, decimos que $\mathcal{C}$ *es una $\mathcal{U}$-categoría con igualadores* (resp. *coigualadores*) si $\mathcal{C}$ es una $\mathcal{U}$-categoría con I_g-límites (resp. I_g^{op}-colímites), es decir, si la $\mathcal{U}$-pregavilla igualador (resp. $\mathcal{U}$-copregavilla coigualador) de cualesquiera morfismos $x_0 \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} x_1$ $\left(\text{resp. } x_0 \overset{f}{\underset{g}{\leftleftarrows}} x_1\right)$, es representable.

TEOREMA 3.1. *Si $\mathcal{C}$ es una $\mathcal{U}$-categoría los siguientes enunciados son equivalentes:*

(i) *$\mathcal{C}$ es una $\mathcal{U}$-categoría con productos e igualadores (resp. sumas y coigualadores).*
(ii) *$\mathcal{C}$ es una $\mathcal{U}$-categoría con* I*-límites (resp.* I*-colímites) para toda $\mathcal{U}$-categoría pequeña* I.

*Más aún, si por una $\mathcal{U}$-*categoría finita *entendemos una $\mathcal{U}$-categoría pequeña cuyo conjunto de objetos y de morfismos es finito, también las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) $\mathcal{C}$ *es una $\mathcal{U}$-categoría con productos finitos e igualadores (resp. sumas y coigualadores).*

(2) $\mathcal{C}$ *es una $\mathcal{U}$-categoría con* I*-límites (resp.* I*-colímites) para toda $\mathcal{U}$-categoría finita* I.

DEMOSTRACIÓN.

(i)$\Rightarrow$(ii)

Probaremos que si $\mathcal{C}$ es una $\mathcal{U}$-categoría con productos e igualadores entonces $\mathcal{C}$ tiene I-límites para toda $\mathcal{U}$-categoría pequeña I. El resultado para sumas y coigualadores se hace de manera análoga.

Sea I una $\mathcal{U}$-categoría pequeña y γ una I-gráfica en $\mathcal{C}$. Si denotamos como I_0 al conjunto de objetos de I y como I_1 al conjunto de todos los morfismos de I, sabemos que existen objetos en $\mathcal{C}$:

$$\prod_{i\in I_0}\gamma(i) \qquad \text{y} \qquad \prod_{i\xrightarrow{\varphi}j\in I_1}\gamma(j),$$

que representan a las $\mathcal{U}$-pregavillas producto de las familias $\{\gamma(i)\}_{i\in I_0}$ y $\{\gamma(j)\}_{i\xrightarrow{\varphi}j\in I_1}$, respectivamente.

También, como $\mathcal{C}$ es una $\mathcal{U}$-categoría con igualadores, si consideramos los morfismos:

$$\prod_{i\in I_0}\gamma(i) \underset{\prod\limits_{i\xrightarrow{\varphi}j\in I_1}\gamma(\varphi)\circ\pi_i}{\overset{\prod\limits_{i\xrightarrow{\varphi}j\in I_1}\pi_j}{\rightrightarrows}} \prod_{i\xrightarrow{\varphi}j\in I_1}\gamma(j)$$

donde $\prod\limits_{i\in I_0}\gamma(i) \xrightarrow{\pi_k} \gamma(k)$ es la proyección en el k-ésimo factor, existe un objeto L en $\mathcal{C}$ y un morfismos $L \xrightarrow{\ell} \prod\limits_{i\in I_0}\gamma(i)$ tal que el siguiente diagrama es exacto:

$$L \xrightarrow{\ell} \prod_{i\in I_0}\gamma(i) \underset{\prod\limits_{i\xrightarrow{\varphi}j\in I_1}\gamma(\varphi)\circ\pi_i}{\overset{\prod\limits_{i\xrightarrow{\varphi}j\in I_1}\pi_j}{\rightrightarrows}} \prod_{i\xrightarrow{\varphi}j\in I_1}\gamma(j)$$

Se concluye que la pareja (L,η) representa al límite de γ en $\mathcal{C}$, donde $k_I(L) \overset{\eta}{\Rightarrow} \gamma$ está definido para todo objeto i en I como $\eta_i = \pi_i \circ \ell$. En efecto, si a es un objeto en $\mathcal{C}$, la función:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^I(k_I(a),\gamma) &\longrightarrow \mathcal{C}(a,L)\\ \varepsilon &\longmapsto \varphi(\varepsilon)\end{aligned}$$

donde $\varphi(\varepsilon)$ es el único morfismo de a en L tal que

$$\ell \circ \varphi(\varepsilon) = \prod_{i \in I_0} \varepsilon_i$$

es inversa de la función:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(a, L) &\longrightarrow \mathcal{C}^I\big(k_I(a), \gamma\big) . \\ \varphi &\longmapsto \eta \circ k_I(\varphi) \end{aligned}$$

(ii)$\Rightarrow$(i)
Es inmediato.
(1) $\Longleftrightarrow$ (2)
Se prueba de manera análoga. ✠

Por una $\mathcal{U}$-categoría con *igualadores canónicos* (resp. *coigualadores canónicos*) entendemos una $\mathcal{U}$-categoría con I_g-límites canónicos (resp. I_g^{op}-colímites canónicos), es decir, una $\mathcal{U}$-categoría en la que para cualesquiera morfismos $x_0 \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} x_1$ (resp. $x_0 \overset{f}{\underset{g}{\leftleftarrows}} x_1$) se ha elegido una pareja $(\ker_{f,g}, k_*)$ (resp. $(\operatorname{coker}_{f,g}, k^*)$) que representa a su $\mathcal{U}$-pregavilla igualador (resp. $\mathcal{U}$-copregavilla coigualador). En este caso, llamamos al objeto $\ker_{f,g}$ (resp. $\operatorname{coker}_{f,g}$) *el igualador* (resp. *coigualador*) *en* $\mathcal{C}$ de los morfismos $x_0 \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} x_1$ (resp. $x_0 \overset{f}{\underset{g}{\leftleftarrows}} x_1$) y a $\ker_{f,g} \overset{k_*}{\to} x_0$ (resp. $\operatorname{coker}_{f,g} \overset{k^*}{\leftarrow} x_0$) *su inclusión* (resp. *su proyección*).

Observemos por último que si $\mathcal{C}$ es una $\mathcal{U}$-categoría con igualadores canónicos (resp. coigualdores canónicos), como la categoría I_g es conexa, el morfismo diagonal (resp. codiagonal) de cualquier objeto a en $\mathcal{C}$:

$$a \xrightarrow{\Delta_a} \ker_{id_a, id_a} \qquad \Big(\text{resp. } \operatorname{coker}_{id_a, id_a} \xrightarrow{\nabla_a} a\Big)$$

es un isomorfismo.

§3.1. Ejemplos. En este párrafo, definiremos objetos que representan a las pregavillas igualadores y a las copregavillas coigualadores en distintas categorías. Con estas construcciones, estas categorías serán consideradas desde ahora como categorías con igualadores y coigualadores canónicos.

§3.1.1. *Conjuntos y Espacios Topológicos.*

Si $X_0 \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} X_1$ son morfismos en la $\mathcal{U}$-categoría de conjuntos $\mathcal{U}$-pequeños, la $\mathcal{U}$-pregavilla igualador de f y g es representable por el conjunto $\{x \in X_0 \mid f(x) = g(x)\}$.

Por otro lado, la $\mathcal{U}$-copregavilla coigualados de dos morfismos $X_0 \underset{g}{\overset{f}{\leftleftarrows}} X_1$ en $\mathsf{Con}_{\mathcal{U}}$, es representable por el conjunto X_0 módulo la relación de equivalencia generada por $x \sim y$ si existe $z \in X_1$ tal que $f(z) = x$ y $g(z) = y$.

Si los morfismos $X_0 \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} X_1$ $\Big($resp. $X_0 \underset{g}{\overset{f}{\leftleftarrows}} X_1\Big)$ están en la $\mathcal{U}$-categoría de espacios topológicos $\mathcal{U}$-pequeños, el mismo conjunto con la topología de subespacio (resp. con la topología cociente) representa a la $\mathcal{U}$-pregavilla igualador (resp. $\mathcal{U}$-copregavilla coigualador) en $\mathsf{Top}_{\mathcal{U}}$.

§3.1.2. *Grupos, Anillos y* R*-módulos.*

Si $M_0 \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} M_1$ son morfismos en alguna de las $\mathcal{U}$-categorías $\mathsf{Grp}_{\mathcal{U}}$, $\mathsf{Anillo}_{\mathcal{U}}$ ó $\mathsf{R\text{-}Mod}$, la estructura de M_0 se restringe a una estructura en el conjunto $\{x \in M_0 \mid f(x) = g(x)\}$. Este conjunto con la estructura correspondiente, representa a la $\mathcal{U}$-pregavilla igualador en la $\mathcal{U}$-categoría $\mathsf{Grp}_{\mathcal{U}}$, $\mathsf{Anillo}_{\mathcal{U}}$ ó $\mathsf{R\text{-}Mod}$, según sea el caso.

Por otro lado, si $M_0 \underset{g}{\overset{f}{\leftleftarrows}} M_1$ son morfismos en $\mathsf{Grp}_{\mathcal{U}}$, $\mathsf{Anillo}_{\mathcal{U}}$ ó $\mathsf{R\text{-}Mod}$, y denotamos como $N_{f,g}$ al subgrupo normal, al ideal ó al submódulo, según sea el caso, generado por el conjunto $\{f(x) - g(x) \mid x \in M_0\}$, el cociente $M_0/N_{f,g}$ representa a la $\mathcal{U}$-pregavilla coigualador de los morfismos $M_0 \underset{g}{\overset{f}{\leftleftarrows}} M_1$ en la categoría correspondiente.

§3.1.3. *Categorías de Funtores.*

Sea $\mathcal{D}$ una $\mathcal{U}$-categoría con igualadores canónicos (resp. coigualadores canónicos). Si $\mathcal{C}$ es una $\mathcal{U}$-categoría, análogamente a como se vió para productos (resp. sumas) en §2.1.6 de la página 23, la estructura en $\mathcal{D}$ determina una estructura de $\mathcal{U}$-categoría con igualadores canónicos (resp. coigualadores canónicos) en $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$.

§3.2. Categorías Abelianas. Sea $\mathcal{A}$ una $\mathcal{U}$-categoría preaditiva.

Si I es una $\mathcal{U}$-categoría pequeña, como el funtor gráfica constante $\mathcal{A} \xrightarrow{k_I} \mathcal{A}^I$ es aditivo, de la discusión del Párrafo §3.3 de la página 12 se sigue que para toda I-gráfica γ en $\mathcal{A}$, la $\mathcal{U}$-pregavilla límite (resp. $\mathcal{U}$-copregavilla colímite) de γ tiene una estructura de $\mathcal{U}$-pregavilla (resp. $\mathcal{U}$-copregavilla) de grupos abelianos.

Si $x \xrightarrow{f} y$ es un morfismo en $\mathcal{A}$ la $\mathcal{U}$-pregavilla igualador (resp. $\mathcal{U}$-copregavilla coigualador) de los morfismos f y 0_x^y con la estructura de $\mathcal{U}$-pregavilla (resp. $\mathcal{U}$-copregavilla) de grupos abelianos señalada arriba, es llamada *la* $\mathcal{U}$*-pregavilla núcleo de* f (resp. $\mathcal{U}$*-copregavilla conúcleo de* f) y denotada $\ker_{\mathbb{Z}}^{\wedge}(f)$ (resp. $\operatorname{coker}_{\mathbb{Z}}^{\vee}(f)$).

Por definición y por la Proposición 3.7 de la página 13, la $\mathcal{U}$-pregavilla núcleo (resp. $\mathcal{U}$-copregavilla conúcleo) de un morfismo $x \xrightarrow{f} y$ es representable si y sólo si existe un objeto $\ker(f)$ $\big($resp. $\operatorname{coker}(f)\big)$ en $\mathcal{A}$ y un morfismo $\ker(f) \xrightarrow{k_f} x$ $\big($resp. $\operatorname{coker}(f) \xleftarrow{k^f} y\big)$ con la siguiente propiedad universal:

$f\circ k_f = 0^{y}_{\ker(f)}$ (resp. $k^f\circ f = 0_x^{\operatorname{coker}(f)}$) y si $z \xrightarrow{\varphi} x$ (resp. $z \xleftarrow{\psi} y$) es otro morfismo tal que $f\circ\varphi = 0^{y}_{\ker(f)}$ (resp. $\psi\circ f = 0_x^{\operatorname{coker}(f)}$), existe un único morfismo $z \xrightarrow{\widetilde{\varphi}} \ker(f)$ $\big($resp. $\operatorname{coker}(f) \xrightarrow{\widetilde{\psi}} z$ $\big)$ tal que $k_f\circ\widetilde{\varphi}=\varphi$ (resp. $\widetilde{\psi}\circ k^f=\psi$):

$$\begin{tikzcd}
\ker(f) \arrow[r, "k_f"] & x \arrow[r, "f"] & y \\
& z \arrow[ul, dashed, "\widetilde{\varphi}"] \arrow[u, "\varphi"']
\end{tikzcd}
\qquad
\left(\text{resp.}\quad
\begin{tikzcd}
\operatorname{coker}(f) \arrow[dr, dashed, "\widetilde{\psi}"'] & y \arrow[l, "k^f"'] \arrow[d, "\psi"] & x \arrow[l, "f"'] \\
& z
\end{tikzcd}\right)$$

En este caso decimos que la pareja $(\ker(f),k_f)$ $\big($resp. $(\operatorname{coker}(f),k^f)\big)$, o simplemente que el objeto $\ker(f)$ (resp. $\operatorname{coker}(f)$), *representa al núcleo (resp. conúcleo) de* $x\xrightarrow{f} y$ *en* $\mathcal{A}$.

Observemos ahora que si 0 denota el objeto cero de la $\mathcal{U}^+$-categoría pequeña $\mathbb{Z}\text{-}\mathsf{Mod}_{\mathcal{U}}^{\mathcal{A}^{op}}$ $\left(\text{resp. } \left(\mathbb{Z}\text{-}\mathsf{Mod}_{\mathcal{U}}^{\mathcal{A}}\right)^{op}\right)$ y $\ker_{\mathbb{Z}}^{\wedge}(f) \xrightarrow{j(f)} x_{\mathbb{Z}}^{\wedge}$ $\left(\text{resp. } \operatorname{coker}_{\mathbb{Z}}^{\vee}(f) \xleftarrow{j(f)} y_{\mathbb{Z}}^{\vee}\right)$ está definido como $j(f)_a(\eta)=\eta_0$, se tiene una sucesión de morfismos de $\mathcal{U}$-pregavillas (resp. $\mathcal{U}$-copregavillas) de grupos abelianos en $\mathcal{A}$:

$$0 \longrightarrow \ker_{\mathbb{Z}}^{\wedge}(f) \xrightarrow{j(f)} x_{\mathbb{Z}}^{\wedge} \xrightarrow{f_{\mathbb{Z}}^{\wedge}} y_{\mathbb{Z}}^{\wedge}$$

$$\left(\text{resp.}\quad 0 \longleftarrow \operatorname{coker}_{\mathbb{Z}}^{\vee}(f) \xleftarrow{j(f)} y_{\mathbb{Z}}^{\vee} \xleftarrow{f_{\mathbb{Z}}^{\vee}} x_{\mathbb{Z}}^{\vee}\right)$$

la cual *es exacta término a término*, es decir, para todo objeto a de $\mathcal{A}$ la siguiente sucesión de grupos abelianos es exacta:

$$0 \longrightarrow \ker_{\mathbb{Z}}^{\wedge}(f)(a) \xrightarrow{j(f)_a} x_{\mathbb{Z}}^{\wedge}(a) \xrightarrow{f\circ -} y_{\mathbb{Z}}^{\wedge}(a)$$

$$\left(\text{resp.}\quad 0 \longrightarrow \operatorname{coker}_{\mathbb{Z}}^{\vee}(f)(a) \xrightarrow{j(f)_a} x_{\mathbb{Z}}^{\vee}(a) \xrightarrow{-\circ f} y_{\mathbb{Z}}^{\vee}(a)\right)$$

Se sigue que la pareja $(\ker(f),k_f)$ $\big($resp. $(\operatorname{coker}(f),k^f)\big)$ representa al núcleo de $x\xrightarrow{f} y$ si y sólo si, la siguiente sucesión de $\mathcal{U}$-pregavillas (resp. $\mathcal{U}$-copregavillas) de grupos abelianos en $\mathcal{A}$, es exacta término a término:

$$0 \longrightarrow \ker(f)_{\mathbb{Z}}^{\wedge} \xrightarrow{(k_f)_{\mathbb{Z}}^{\wedge}} x_{\mathbb{Z}}^{\wedge} \xrightarrow{f_{\mathbb{Z}}^{\wedge}} y_{\mathbb{Z}}^{\wedge}$$

$$\left(\text{resp.}\quad 0 \longleftarrow \operatorname{coker}(f)_{\mathbb{Z}}^{\vee} \xleftarrow{(k^f)_{\mathbb{Z}}^{\vee}} y_{\mathbb{Z}}^{\vee} \xleftarrow{f_{\mathbb{Z}}^{\vee}} x_{\mathbb{Z}}^{\vee}\right).$$

En particular,

PROPOSICIÓN 3.2. *Si $\mathcal{A}$ es una $\mathcal{U}$-categoría preaditiva con un objeto cero $0_{\mathcal{A}}$ y $a \xrightarrow{f} b$ es un morfismo en $\mathcal{A}$, entonces f es un monomorfismo (resp. epimorfismo) si y sólo si $0_{\mathcal{A}} \to a$ representa al núcleo de f (resp. $b \to 0_{\mathcal{A}}$ representa al conúcleo de f).*

Si $\mathcal{A}$ es una $\mathcal{U}$-categoría preaditiva, decimos que $\mathcal{A}$ *es una $\mathcal{U}$-categoría con núcleos* (resp. *conúcleos*) si la $\mathcal{U}$-pregavilla núcleo (resp. $\mathcal{U}$-copregavilla conúcleo) de cualquier morfismo $a \xrightarrow{f} b$ en $\mathcal{A}$ es representable.

PROPOSICIÓN 3.3. *Si $\mathcal{A}$ es una $\mathcal{U}$-categoría preaditiva, los siguientes enunciados son equivalentes:*

(i) *$\mathcal{A}$ es una $\mathcal{U}$-categoría con núcleos (resp. conúcleos).*
(ii) *$\mathcal{A}$ es una $\mathcal{U}$-categoría con igualadores (resp. coigualadores).*

DEMOSTRACIÓN. Si $\mathcal{A}$ es una $\mathcal{U}$-categoría con igualadores (resp. coigualadores), por la definición de la pregavilla núcleo (resp. copregavilla conúcleo) y de la Proposición 3.7 de la página 13, se sigue que $\mathcal{A}$ es una $\mathcal{U}$-categoría con núcleos (resp. conúcleos).

Por otro lado, si $\mathcal{A}$ es una $\mathcal{U}$-categoría con núcleos (resp. conúcleos) y

$$a_0 \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} a_1 \qquad \left(\text{resp. } a_0 \underset{g}{\overset{f}{\leftleftarrows}} a_1\right)$$

son morfismos en $\mathcal{A}$, es fácil ver que si x representa al núcleo (resp. conúcleo) del morfismo diferencia $f - g$ entonces x representa al igualador (resp. coigualador) de los morfismos $a_0 \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} a_1$ $\left(\text{resp. } a_0 \underset{g}{\overset{f}{\leftleftarrows}} a_1\right)$. ✠

Si $\mathcal{A}$ es una $\mathcal{U}$-categoría preaditiva, decimos que $\mathcal{A}$ *es una $\mathcal{U}$-categoría con núcleos (resp. conúcleos) canónicos* si para cualquier morfismo $x \xrightarrow{f} y$ en $\mathcal{A}$ se ha elegido una pareja $(\ker(f), k_f)$ $\left(\text{resp. } (\operatorname{coker}(f), k^f)\right)$ que representa al núcleo (resp. conúcleo) de $x \xrightarrow{f} y$. En este caso decimos que $\ker(f) \xrightarrow{k_f} x$ (resp. $\operatorname{coker}(f) \xleftarrow{k^f} y$) es *el morfismo núcleo (resp. conúcleo) de* f y $\ker(f)$ (resp. $\operatorname{coker}(f)$) *el objeto núcleo (resp. conúcleo) de* f.

Si $x \xrightarrow{f} y$ es un morfismos en una $\mathcal{U}$-categoría preaditiva con núcleos y conúcleos canónicos, definimos el *morfismo imagen (resp. coimagen) de* f como el morfismo núcleo del morfismo conúcleo de f (resp. el morfismos conúcleo del morfismo núcleo de f) y lo denotamos $\operatorname{im}(f) \xrightarrow{l_f} y$ $\left(\text{resp. } \operatorname{coim}(f) \xleftarrow{l^f} x\right)$. Al objeto $\operatorname{im}(f)$ $\left(\text{resp. } \operatorname{coim}(f)\right)$ lo llamamos el *objeto imagen* (resp. *obejto coimagen*) de f. En este caso, por las propiedades universales de núcleo y conúcleo, si $a \xrightarrow{f} b$ es cualquier morfismo en $\mathcal{A}$

existe un único morfismo $\mathrm{coim}(f) \xrightarrow{\alpha_f} \mathrm{im}(f)$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

(17)
$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\iota_f"'] & b \\ \mathrm{coim}(f) \arrow[r, dashed, "\alpha_f"'] & \mathrm{im}(f) \arrow[u, "\iota^f"'] \end{tikzcd}$$

Si $\mathcal{A}$ es una $\mathcal{U}$-categoría preaditiva con núcleos y conúcleos canónicos, decimos que $\mathcal{A}$ *satisface el axioma de isomorfismo*, si para todo morfismo $a \xrightarrow{f} b$ el morfismo (17) de arriba es un isomorfismo.

TEOREMA 3.4. *Sea $\mathcal{A}$ una $\mathcal{U}$-categoría preaditiva con un objeto cero $0_{\mathcal{A}}$ y con núcleos y conúcleos canónicos. Si $\mathcal{A}$ satisface el axioma de isomorfismo, entonces:*

(i) *Un morfismo $a \xrightarrow{f} b$ es un monomorfismo (resp. epimorfismo), si y sólo si, la pareja (a, f) representa al núcleo (resp. conúcleo) de algún morfismo.*
(ii) *$\mathcal{A}_{\text{mono}} \cap \mathcal{A}_{\text{epi}} = \mathcal{A}_{\text{iso}}$, es decir, un morfismo en $\mathcal{A}$ es un isomorfismo si y sólo si es monomorfismo y epimorfismo.*

DEMOSTRACIÓN.
Pueba de (i):
Es claro de la propiedad universal de los núcleos (resp. conúcleos), que si (a, f) representa al núcleo (resp. conúcleo) de algún morfismo entonces f es un monomorfismo. Por otro lado, si suponemos que $a \xrightarrow{f} b$ es un monomorfismo (resp. epimorfismo), por la Proposición 3.2 de la página 33, $a \xrightarrow{\mathrm{id}} a$ representa al conúcleo del morfismo núcleo de f (resp. $b \xrightarrow{\mathrm{id}} b$ representa al núcleo del morfismo conúcleo de f). Como $\mathcal{A}$ satisface el axioma de isomorfismo, se concluye que (a, f) representa al núcleo del morfismo conúcleo de f (resp. al conúcleo del núcleo de f).
Pueba de (ii):
Es inmediato que un isomorfismo es un monomorfismo y un epimorfismo.
Por otro lado, si $a \xrightarrow{f} b$ es un morfismo en $\mathcal{A}$ que es tanto monomorfismo como epimorfismo, de la Proposición 3.2 de la página 33, se sigue que $a \xrightarrow{\mathrm{id}} a$ representa al conúcleo del morfismo núcleo de f y $b \xrightarrow{\mathrm{id}} b$ al núcleo del morfismo conúcleo de f. Como $\mathcal{A}$ satisface el axioma de isomorfismo, concluimos que $a \xrightarrow{f} b$ es un isomorfismo. ✠

Llamamos a una $\mathcal{U}$-categoría aditiva con núcleos y conúcleos canónicos que satisface el axioma de isomorfismo, una *$\mathcal{U}$-categoría abeliana*.
Ejemplos:
§3.2.1. R-*módulos.*
Si R es un anillo $\mathcal{U}$-pequeño, con la estructura aditiva señalada en el Ejemplo §2.4.1 de la página 27, y con los núcleos y conúcleos definidos por los igualadores y

coigualadores, respectivamente, la $\mathcal{U}$-categoría de R-módulos izquierdos $\mathcal{U}$-pequeños $\mathsf{R}\text{-}\mathsf{Mod}_{\mathcal{U}}$ es una $\mathcal{U}$-categoría abeliana.

§3.2.2. R-*módulos finitamente generados.*

Si R es un anillo neteriano $\mathcal{U}$-pequeño, la subcategoría plena $\mathsf{R}\text{-}\mathsf{Mod}_{\mathcal{U}}^{\mathrm{fg}}$ de $\mathsf{R}\text{-}\mathsf{Mod}_{\mathcal{U}}$ cuyos objetos son los R-módulos finitamente generados, es una categoría abeliana con la estructura inducida.

§3.2.3. *Categorías de Funtores.*

Si $\mathcal{A}$ es una $\mathcal{U}$-categoría abeliana, para toda $\mathcal{U}$-categoría pequeña $\mathcal{C}$, con la estructura aditiva señalada en el Ejemplo §2.4.3 de la página 27, la $\mathcal{U}$-categoría $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}$ tiene una estructura de $\mathcal{U}$-categoría abeliana, donde los núcleos y conúcleos son definidos por los igualadores y coigualadores, respectivamente.

En particular, si $\mathcal{A}$ es una $\mathcal{U}$-categoría abeliana, para cualquier $\mathcal{U}$-categoría pequeña $\mathcal{C}$ las $\mathcal{U}$-categorías $\mathsf{Pre}(\mathcal{C})_{\mathcal{A}}$ y $\mathsf{coPre}(\mathcal{C})_{\mathcal{A}}$, tienen naturalmente estructuras de $\mathcal{U}$-categorías abelianas.

§3.2.4. *Complejos de Cadena.*

Sea $\mathcal{A}$ una $\mathcal{U}$-categoría abeliana. Por un *complejo truncado* en $\mathcal{A}$ entendemos una pareja de morfismos consecutivos $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$ tales que su composición $g \circ f$ es igual al morfismo cero 0_a^b. Más generalmente, decimos que una sucesión de morfismos en $\mathcal{A}$:

$$S_x : \cdots \longleftarrow x_{-2} \xleftarrow{d_{-2}} x_{-1} \xleftarrow{d_{-1}} x_0 \xleftarrow{d_1} x_1 \xleftarrow{d_2} x_2 \longleftarrow \cdots$$

es un *complejo en* $\mathcal{A}$ si culquier pareja de morfismos consecutivos de S_x forma un complejo truncado.

Si S_x y S_y son dos complejos en $\mathcal{A}$, un *morfismo de complejos* $S_x \xrightarrow{f} S_y$ es una familia de morfismos en $\mathcal{A}$, $\{x_n \xrightarrow{f_n} y_n\}$, tal que $d_n \circ f_n = f_{n-1} \circ d_n$ para toda n

$$\begin{tikzcd}
S_x : \cdots & x_{-2} \arrow[l] \arrow[d, "f_{-2}"] & x_{-1} \arrow[l, "d_{-2}"'] \arrow[d, "f_{-1}"] & x_0 \arrow[l, "d_{-1}"'] \arrow[d, "f_0"] & x_1 \arrow[l, "d_1"'] \arrow[d, "f_1"] & x_2 \arrow[l, "d_2"'] \arrow[d, "f_2"] & \cdots \arrow[l] \\
S_y : \cdots & y_{-2} \arrow[l] & y_{-1} \arrow[l, "d_{-2}"] & y_0 \arrow[l, "d_{-1}"] & y_1 \arrow[l, "d_1"] & y_2 \arrow[l, "d_2"] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Definimos la ***$\mathcal{U}$-categoría de complejos de** $\mathcal{A}$*, denotada como $\mathbf{Kom}(\mathcal{A})$, a aquella que tiene por objetos a los complejos en $\mathcal{A}$ y por morfismos a los morfismos de complejos.

Observese que la estructura de $\mathcal{U}$-categoría abeliana de $\mathcal{A}$, determina canónicamente una estructura de $\mathcal{U}$-categoría abeliana en $\mathbf{Kom}(\mathcal{A})$ definida término a término.

Más aún, esta categoría tiene naturalmente las siguientes dos subcategorías plenas con estructuras de $\mathcal{U}$-categorías abelianas inducidas.

1. La $\mathcal{U}$-categorías de *complejos positivos* $\mathbf{Kom}^+(\mathcal{A})$ que tiene por objetos a los complejos en $\mathcal{A}$ tales que x_n es igual al objeto cero de $\mathcal{A}$ si $n < 0$. Estos

complejos son denotados:

$$S_x : 0 \xleftarrow{d_0} x_0 \xleftarrow{d_1} x_1 \xleftarrow{d_2} x_2 \longleftarrow \cdots$$

2. La $\mathcal{U}$-categoría de *complejos negativos* $\mathbf{Kom}^-(\mathcal{A})$ que tiene por objetos a los complejos en $\mathcal{A}$ tales que x_n es igual al objeto cero de $\mathcal{A}$ si $n > 0$. Estos complejos son denotados:

$$S_x : 0 \xrightarrow{d^0} x^0 \xrightarrow{d^1} x^1 \xrightarrow{d^2} x^2 \longrightarrow \cdots$$

Notemos ahora que si $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$ es un complejo truncado en $\mathcal{A}$, por las propiedades del núcleo y conúcleo en $\mathcal{A}$, existe un único morfismo $\mathrm{im}(f) \xrightarrow{\varphi_{f,g}} \ker(g)$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} a \arrow[rr, "f"] & & b \arrow[rr, "g"] & & c \\ & \mathrm{im}(f) \arrow[ur, "l^f"] \arrow[rr, dashed, "\varphi_{f,g}"'] & & \ker(g) \arrow[ul, "k_g"'] & \end{tikzcd}$$

Más aún, este morfismo $\mathrm{im}(f) \xrightarrow{\varphi_{f,g}} \ker(g)$ es un monomorfismo pues se tiene la igualdad $k_g \circ \varphi_{f,g} = l^f$ y l^f es un monomorfismo. Se sigue que el objeto conúcleo de $\varphi_{f,g}$ es isomorfo al objeto cero de $\mathcal{A}$, si y sólo si, $\mathrm{im}(f) \xrightarrow{\varphi_{f,g}} \ker(g)$ es un isomorfismo. En este caso decimo que el *complejo truncado* $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$ *es exacto.*

En general, si S_x es un complejo positivo (resp. negativo) en $\mathcal{A}$,

$$S_x : 0 \xleftarrow{d_0} x_0 \xleftarrow{d_1} x_1 \xleftarrow{d_2} x_2 \longleftarrow \cdots$$

$$\left(\text{resp. } S_x : 0 \xrightarrow{d^0} x^0 \xrightarrow{d^1} x^1 \xrightarrow{d^2} x^2 \longrightarrow \cdots\right),$$

definimos para todo número natural n el n-*objeto de homología* (resp. *cohomología*) de S_x, denotado $H_n(S_x, \mathcal{A}) \in \mathcal{A}$ (resp. $H^n(S_x, \mathcal{A}) \in \mathcal{A}$), como el objeto conúcleo del morfismo φ_{d_{n+1}, d_n} (resp. $\varphi_{d^n, d^{n+1}}$).

Decimos que un complejo positivo (resp. negativo) S_x es *exacto* si cada pareja de morfismos consecutivos de S_x forma un complejo truncado exacto, es decir, si sus n-objetos de homología (resp. cohomología) son isomorfos al objeto cero de $\mathcal{A}$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Por último, observemos que si $\partial\mathcal{A}$ denota la categoría de $\mathcal{A}$-*objetos graduados* definida como aquella que tiene por objetos a las familias $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de objetos en $\mathcal{A}$ indexados por $\mathbb{N}$ y donde un morfismo de $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ en $\{b_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es igual a una familia de morfismos en $\mathcal{A}$, $\{a_i \to b_i\}_{i\in\mathbb{N}}$; entonces la asignación que a cada complejo positivo (resp. negativo) en $\mathcal{A}$, S_x, asocia la familia $\{H_n(S_x, \mathcal{A})\}_{n\in\mathbb{N}}$ (resp. $\{H^n(S_x, \mathcal{A})\}_{n\in\mathbb{N}}$), se exiende en un funtor:

$$\mathbf{Kom}^{+}(\mathcal{A}) \xrightarrow{\mathsf{H}_{*}(-,\mathcal{A})} \partial\mathcal{A} \qquad \left(\text{resp. } \mathbf{Kom}^{-}(\mathcal{A}) \xrightarrow{\mathsf{H}^{*}(-,\mathcal{A})} \partial\mathcal{A}\right).$$

Si S_{x} es un complejo positivo (resp. negativo) en $\mathcal{A}$, el $\mathcal{A}$-objeto graduado $\mathsf{H}_{*}(\mathsf{S}_{\mathsf{x}},\mathcal{A})$ (resp. $\mathsf{H}^{*}(\mathsf{S}_{\mathsf{x}},\mathcal{A})$) es llamado *la homología (resp. cohomología) de* S_{x}.

4. Productos Fibrados y Sumas Amalgamadas

Denotamos como I_{f} a la $\mathcal{U}$-categoría pequeña que tiene por objetos al conjunto $3=\{0,1,2\}$ y con solamente dos morfismos, $1 \xrightarrow{f} 0 \xleftarrow{g} 2$, además de las identidades.

Si $\mathcal{C}$ es una $\mathcal{U}$-categoría, una I_{f}-gráfica (resp. $\mathrm{I}_{\mathrm{f}}^{\mathrm{op}}$-gráfica) γ en $\mathcal{C}$ consiste de dos morfismos, $x_1 \xrightarrow{f} x_0 \xleftarrow{g} x_2$ (resp. $x_1 \xleftarrow{f} x_0 \xrightarrow{g} x_2$). La $\mathcal{U}$-pregavilla límite (resp. $\mathcal{U}$-copregavilla colímite) de γ es llamada *la $\mathcal{U}$-pregavilla producto fibrado* (resp. *la $\mathcal{U}$-copregavilla suma amalgamada*) de los morfismos $x_1 \xrightarrow{f} x_0 \xleftarrow{g} x_2$ (resp. $x_1 \xleftarrow{f} x_0 \xrightarrow{g} x_2$).

Por definición, la $\mathcal{U}$-pregavilla producto fibrado (resp. $\mathcal{U}$-copregavilla suma amalgamada) de dos morfismos $x_1 \xrightarrow{f} x_0 \xleftarrow{g} x_2$ (resp. $x_1 \xleftarrow{f} x_0 \xrightarrow{g} x_2$) es representable si y sólo si, existe un objeto en $\mathcal{C}$:

$$x_1 \underset{x_0}{\times} x_2 \qquad (\text{resp. } x_1 \underset{x_0}{+} x_2)$$

y morfismos:

$$x_1 \xleftarrow{p_1} x_1 \underset{x_0}{\times} x_2 \xrightarrow{p_2} x_2 \qquad (\text{resp. } x_1 \xrightarrow{i_1} x_1 \underset{x_0}{+} x_2 \xleftarrow{i_2} x_2),$$

con la siguiente propiedad universal:

> $g \circ p_2 = f \circ p_1$ (resp. $i_2 \circ g = i_1 \circ f$) y si $x_1 \xleftarrow{\varphi_1} a \xrightarrow{\varphi_2} x_2$ (resp. $x_1 \xrightarrow{\psi_1} a \xleftarrow{\psi_2} x_2$) son morfismos tales que $g \circ \varphi_2 = f \circ \varphi_1$ (resp. $\psi_2 \circ g = \psi_1 \circ f$), existe un único morfismo $a \xrightarrow{\varphi} x_1 \underset{x_0}{\times} x_2$ (resp. $a \xleftarrow{\psi} x_1 \underset{x_0}{+} x_2$) tal que $p_1 \circ \varphi = \varphi_1$ y $p_2 \circ \varphi = \varphi_2$ (resp. $\psi \circ i_1 = \psi_1$ y $\psi \circ i_2 = \psi_2$):

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[dr, dashed, "\varphi"] \arrow[drr, bend left, "\varphi_2"] \arrow[ddr, bend right, "\varphi_1"'] & & \\
& x_2 \underset{x_0}{\times} x_1 \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & x_2 \arrow[d, "g"] \\
& x_1 \arrow[r, "f"'] & x_0
\end{tikzcd}
\qquad
\left(\text{resp.}\;
\begin{tikzcd}
a & & \\
& x_2 \underset{x_0}{+} x_1 \arrow[ul, dashed, "\psi"'] & x_2 \arrow[l, "i_2"'] \arrow[ull, bend right, "\psi_2"'] \\
& x_1 \arrow[u, "i_1"] \arrow[uul, bend left, "\psi_1"] & x_0 \arrow[l, "f"] \arrow[u, "g"']
\end{tikzcd}\right)$$

En este caso decimos que la pareja $(x_1 \underset{x_0}{\times} x_2, \{p_1, p_2\})$ $\Big($resp. $(x_1 \underset{x_0}{+} x_2, \{i_1, i_2\})\Big)$, o simplemente que el objeto $x_1 \underset{x_0}{\times} x_2$ (resp. $x_1 \underset{x_0}{+} x_2$), *representa al producto fibrado* (resp. *suma amalgamada*) de los morfismos $x_1 \xrightarrow{f} x_0 \xleftarrow{g} x_2$ (resp. $x_1 \xleftarrow{f} x_0 \xrightarrow{g} x_2$). También, decimos que *el cuadrado*:

$$\begin{tikzcd} x_2 \underset{x_0}{\times} x_1 \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & x_2 \arrow[d, "g"] \\ x_1 \arrow[r, "f"'] & x_0 \end{tikzcd} \qquad \left(\text{resp.} \quad \begin{tikzcd} x_2 \underset{x_0}{+} x_1 & x_2 \arrow[l, "i_2"'] \\ x_1 \arrow[u, "i_1"] & x_0 \arrow[l, "f"] \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd} \right)$$

es cartesiano (resp. *cocartesiano*).

Una $\mathcal{U}$-categoría con *productos fibrados* (resp. *sumas amalgamadas*) es una $\mathcal{U}$-categoría con I_f-límites (resp. I_f^{op}-colímites), es decir, una $\mathcal{U}$-categoría en la que la $\mathcal{U}$-pregavilla producto fibrado (resp. $\mathcal{U}$-copregavilla suma amalgamada) de cualesquiera dos morfismos $x_1 \xrightarrow{f} x_0 \xleftarrow{g} x_2$ (resp. $x_1 \xleftarrow{f} x_0 \xrightarrow{g} x_2$), es representable.

TEOREMA 4.1. *Si $\mathcal{C}$ es una $\mathcal{U}$-categoría con 2-productos, los siguientes enunciados son equivalentes:*

(i) *$\mathcal{C}$ es una $\mathcal{U}$-categoría con productos fibrados (resp. sumas amalgamadas).*
(ii) *$\mathcal{C}$ es una $\mathcal{U}$-categoría con igualadores (resp. coigualadores).*

En particular, por el Teorema 3.1 de la página 28, para que una $\mathcal{U}$-categoría tenga I*-límites (resp.* I*-colímites) para toda $\mathcal{U}$-categoría pequeña* I *es necesario y suficiente que tenga productos y productos fibrados (resp. sumas y sumas amalgamadas).*

DEMOSTRACIÓN.
(i)$\Rightarrow$(ii)
Sean $x_0 \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} x_1$ (resp. $x_0 \underset{g}{\overset{f}{\leftleftarrows}} x_1$) dos morfismos en $\mathcal{C}$.
(ii)$\Rightarrow$(i)
Como $\mathcal{C}$ es una $\mathcal{U}$-categoría con 2-productos, por la prueba del Teorema 2.1 de la página 24, $\mathcal{C}$ también es una $\mathcal{U}$-categoría con n-productos (resp. n-sumas) para todo número natural n no cero y como $\mathcal{C}$ es una $\mathcal{U}$-categoría con igualadores (resp. coigualadores), por la prueba del Teorema 3.1 de la página 28, $\mathcal{C}$ es una $\mathcal{U}$-categoría con I-límites (resp. I-colímites) si I es una $\mathcal{U}$-categoría finita no vacía. En particular, $\mathcal{C}$ es una $\mathcal{U}$-categoría con productos fibrados (resp. sumas amalgamadas). ✠

Por una $\mathcal{U}$-categoría con *productos fibrados canónicos* (resp. *sumas amalgamadas canónicas*) entendemos una $\mathcal{U}$-categoría con I_f-límites canónicos (resp. I_f-colímites canónicos), es decir, una $\mathcal{U}$-categoría en la que para cualesquiera dos morfismos

$$x_1 \xrightarrow{f} x_0 \xleftarrow{g} x_2 \qquad (\text{resp. } x_1 \xleftarrow{f} x_0 \xrightarrow{g} x_2)$$

se ha elegido una pareja

$$\left(x_1 \underset{x_0}{\times} x_2, \{p_1, p_2\}\right) \qquad \left(\text{resp. } \left(x_1 \underset{x_0}{+} x_2, \{i_1, i_2\}\right)\right)$$

que representa a su producto fibrado (resp. suma amalgamada). En este caso, llamamos al objeto $x_1 \underset{x_0}{\times} x_2$ (resp. $x_1 \underset{x_0}{+} x_2$) *el producto fibrado* (resp. *la suma amalgamada*) *en* $\mathcal{C}$ de los morfismos $x_1 \xrightarrow{f} x_0 \xleftarrow{g} x_2$ (resp. $x_1 \xleftarrow{f} x_0 \xrightarrow{g} x_2$).

Por último, observemos que si $\mathcal{C}$ es una $\mathcal{U}$-categoría con productos fibrados canónicos (resp. sumas amalgamadas canónicas), como la $\mathcal{U}$-categoría I_f es conexa, el morfismo diagonal (resp. codiagonal) de cualquier objeto a en $\mathcal{C}$:

$$a \xrightarrow{\Delta_a} a \underset{a}{\times} a \qquad \left(\text{resp. } a \underset{a}{+} a \xrightarrow{\nabla_a} a\right)$$

es un isomorfismo.

§4.1. Funtor de cambio y cocambio de base. Si $\mathcal{C}$ es una $\mathcal{U}$-categoría con productos fibrados canónicos (resp. sumas amalgamadas canónicas), para todo morfismo $x \xrightarrow{f} y$ en $\mathcal{C}$ definimos un funtor:

$$\mathcal{C} \downarrow y \xrightarrow{f^*} \mathcal{C} \downarrow x \qquad \left(\text{resp. } x \downarrow \mathcal{C} \xrightarrow{f_*} y \downarrow \mathcal{C}\right),$$

al que llamamos el *funtor de cambio* (resp. *cocambio*) *de base en* $\mathcal{C}$ *a lo largo de* f, de la siguiente manera:

Si (a, u) es un objeto en $\mathcal{C} \downarrow y$ (resp. $x \downarrow \mathcal{C}$) y $x \underset{y}{\times} a$ (resp. $y \underset{x}{+} b$) es el producto fibrado (resp. suma amalgamada) en $\mathcal{C}$ de los morfismo $x \xrightarrow{f} y \xleftarrow{u} a$ (resp. $y \xleftarrow{f} x \xrightarrow{u} a$) con p_1 su proyección en x (resp. i_1 la inclusión de y), definimos $f^*(a,u) := (f^*a, f^*u)$ $\left(\text{resp. } f_*(a,u) := (f_*a, f_*u)\right)$ donde $f^*a = x \underset{y}{\times} a$ y $f^*u = p_1$ $\left(\text{resp. } f_*a = y \underset{x}{+} b \text{ y } f_*u = i_1\right)$:

$$\begin{tikzcd} f^*a = x \underset{y}{\times} a \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "f^*u=p_1"'] & a \arrow[d, "u"] \\ x \arrow[r, "f"'] & y \end{tikzcd} \qquad \left(\text{resp.} \quad \begin{tikzcd} f_*a = y \underset{x}{+} a & a \arrow[l, "i_2"'] \\ y \arrow[u, "f_*u=i_1"] & x \arrow[l, "f"] \arrow[u, "u"'] \end{tikzcd}\right)$$

Si $(a,u) \xrightarrow{\varphi} (b,v)$ es un morfismo en $\mathcal{C} \downarrow y$ (resp. $x \downarrow \mathcal{C}$), se define

$$(f^*a, f^*u) \xrightarrow{f^*\varphi} (f^*b, f^*v) \qquad \left(\text{resp. } (f_*a, f_*u) \xrightarrow{f_*\varphi} (f_*b, f_*v)\right)$$

como el único morfismo que satisface $f^*\nu \circ f^*\varphi = f^*u$ y $p_2 \circ f^*\varphi = \varphi \circ p_2$ (resp. $f_*\varphi \circ f_*u = f_*\nu$ y $f_*\varphi \circ i_2 = i_2 \circ \varphi$):

$$\begin{tikzcd}
x \underset{y}{\times} a \arrow[dr, dashed, "f^*\varphi"] \arrow[drr, bend left, "\varphi\circ p_2"] \arrow[ddr, bend right, "f^*u"'] & & \\
& x \underset{y}{\times} b \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "f^*\nu"'] & b \arrow[d, "\nu"] \\
& x \arrow[r, "f"'] & y
\end{tikzcd}
\quad \left(\text{resp.} \quad
\begin{tikzcd}
y \underset{x}{+} b & & \\
& y \underset{x}{+} a \arrow[ul, dashed, "f_*\varphi"'] & a \arrow[l, "i_2"'] \arrow[ull, bend right, "i_2\circ\varphi"'] \\
& y \arrow[u, "f_*u"] \arrow[uul, bend left, "f_*\nu"] & x \arrow[l, "f"] \arrow[u, "u"']
\end{tikzcd} \right)$$

Observemos ahora que si $\mathcal{C}$ es una $\mathcal{U}$-categoría arbitraria y $x \xrightarrow{f} y \xleftarrow{u} a$ (resp. $y \xleftarrow{f} x \xrightarrow{u} a$) son morfismos en $\mathcal{C}$ donde u es un monomorfismo (resp. epimorfismo), para cualquier cuadrado cartesiano (resp. cocartesiano):

$$\begin{tikzcd}
x \underset{y}{\times} a \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & a \arrow[d, "u"] \\
x \arrow[r, "f"'] & y
\end{tikzcd}
\quad \left(\text{resp.} \quad
\begin{tikzcd}
y \underset{x}{+} a & a \arrow[l, "i_2"'] \\
y \arrow[u, "i_1"] & x \arrow[l, "f"] \arrow[u, "u"']
\end{tikzcd} \right)$$

se tiene que $x \underset{y}{\times} a \xrightarrow{p_1} x$ $\left(\text{resp. } y \xrightarrow{i_1} y \underset{x}{+} a\right)$ también es un monomorfismo (resp. epimorfismo). En efecto, esto se sigue de la propiedad universal del producto fibrado (resp. suma amalgamada) y del hecho de que si suponemos que existen dos morfismos $z \overset{\varphi}{\underset{\psi}{\rightrightarrows}} x \underset{y}{\times} a$ $\left(\text{resp. } y \underset{x}{+} a \overset{\varphi}{\underset{\psi}{\rightrightarrows}} z\right)$ tales que $p_1 \circ \varphi = p_1 \circ \psi$ (resp. $\varphi \circ i_1 = \psi \circ i_1$), entonces también $p_2 \circ \varphi = p_2 \circ \psi$ (resp. $\varphi \circ i_2 = \psi \circ i_2$) pues $u \circ p_2 = f \circ p_1$ (resp. $i_2 \circ u = i_1 \circ f$) y u es un monomorfismo.

Concluimos así que si $\mathcal{C}$ es una $\mathcal{U}$-categoría con productos fibrados canónicos (resp. sumas amalgamadas canónicas), el funtor de cambio (resp. cocambio) de base a lo largo de cualquier morfismo $x \xrightarrow{f} y$ se restringe a un morfismo de conjuntos parcialmente ordenados:

$$\mathsf{Sub}_y(\mathcal{C}) \xrightarrow{f^*} \mathsf{Sub}_x(\mathcal{C}) \qquad \left(\text{resp. } \mathsf{Coc}_x(\mathcal{C}) \xrightarrow{f_*} \mathsf{Coc}_y(\mathcal{C})\right)$$

y por lo tanto determina un morfismo de conjuntos ordenados:

$$\mathsf{sub}_y(\mathcal{C}) \xrightarrow{f^*} \mathsf{sub}_x(\mathcal{C}) \qquad \left(\text{resp. } \mathsf{coc}_x(\mathcal{C}) \xrightarrow{f_*} \mathsf{coc}_y(\mathcal{C})\right). \tag{18}$$

Si $\mathcal{C}$ es una $\mathcal{U}$-categoría con productos fibrados canónicos (resp. sumas amalgamadas canónicas), obtenemos así un funtor:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^{op} & \xrightarrow{\mathsf{sub}_-(\mathcal{C})} & \mathsf{Con}_{\mathcal{U}} \\ x & & \mathsf{sub}_x(\mathcal{C}) \\ f \uparrow & \longmapsto & \downarrow f^* \\ y & & \mathsf{sub}_y(\mathcal{C}) \end{array} \qquad \left(\text{resp.} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{\mathsf{coc}_-(\mathcal{C})} & \mathsf{Con}_{\mathcal{U}} \\ x & & \mathsf{coc}_x(\mathcal{C}) \\ f \downarrow & \longmapsto & \downarrow f_* \\ y & & \mathsf{coc}_y(\mathcal{C}) \end{array} \right)$$

al que llamamos el *funtor de subobjetos* (resp. *funtor de cocientes*) *de* $\mathcal{C}$.

Ejemplos:

§4.1.1.

Si $\mathcal{C}$ es la $\mathcal{U}$-categoría de conjuntos $\mathcal{U}$-pequeños, la función (18) de arriba correspondiente a una función $X \xrightarrow{f} Y$, asocia a cada subconjunto A de Y (resp. relación de equivalencia R de X) su imagen inversa por f (resp. la relación de equivalencia en Y imagen directa de R por f).

§4.1.2.

Si $\mathcal{C}$ es la $\mathcal{U}$-categoría de espacios topológicos $\mathcal{U}$-pequeños, la función (18) de arriba correspondiente a una función continua $X \xrightarrow{f} Y$, asocia a cada subobjeto (A, τ) de Y en $\mathcal{C}$ (resp. supraobjeto (R, τ) de X en $\mathcal{C}$) el subobjeto $\left(f^{-1}(A), \tau_f\right)$ de X en $\mathcal{C}$ $\Big($resp. supraobjeto $\left(f(R), \tau_f\right)$ de Y en $\mathcal{C}\Big)$, donde τ_f es la topología más pequeña en $f^{-1}(A)$ (resp. $Y/f(R)$) tal que las funciones $f^{-1}(A) \xrightarrow{f|} A$ y $f^{-1}(A) \hookrightarrow X$ (resp. $X/R \to Y/f(R)$ y $Y \to Y/f(R)$) son continuas.

5. Funtores que Conmutan con Límites y Colímites

Sea $\mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{D}$ un funtor, I una $\mathcal{U}$-categoría pequeña y γ una I-gráfica en $\mathcal{C}$. Supongamos que $\left(\mathsf{lím}_I(\gamma), \varepsilon\right)$ y $\left(\mathsf{lím}_I(\mathcal{F} \circ \gamma), \varepsilon'\right)$ $\Big($resp. $\left(\mathsf{colím}_I(\gamma), \eta\right)$ y $\left(\mathsf{colím}_I(\mathcal{F} \circ \gamma), \eta'\right)\Big)$ representan a los límites (resp. colímites) de γ y $\mathcal{F} \circ \gamma$ respectivamente, es decir, supongamos que se tienen isomorfismos naturales en x y y:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}\Big(x, \mathsf{lím}(\gamma)\Big) \cong \mathcal{C}^I\big(k_I(x), \gamma\big) & \text{y} & \mathcal{D}\Big(y, \mathsf{lím}(\mathcal{F} \circ \gamma)\Big) \cong \mathcal{D}^I\big(k_I(y), \mathcal{F} \circ \gamma\big) \\ \varphi \longmapsto \varepsilon \circ k_I(\varphi) & & \psi \longmapsto \varepsilon' \circ k_I(\psi) \end{array}$$

$$\left(\text{resp.} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{C}\Big(\mathsf{colím}(\gamma), x\Big) \cong \mathcal{C}^I\big(\gamma, k_I(x)\big) & \text{y} & \mathcal{D}\Big(\mathsf{colím}(\mathcal{F} \circ \gamma), y\Big) \cong \mathcal{D}^I\big(\mathcal{F} \circ \gamma, k_I(y)\big) \\ \varphi \longmapsto k_I(\varphi) \circ \eta & & \psi \longmapsto k_I(\psi) \circ \eta' \end{array} \right)$$

La función de conjuntos inducida por $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{C}^{\mathrm{I}}\big(k_{\mathrm{I}}(x),\gamma\big) \to \mathcal{D}^{\mathrm{I}}\Big(\mathcal{F}\circ k_{\mathrm{I}}(x) = k_{\mathrm{I}}(\mathcal{F}(x)), \mathcal{F}\circ\gamma\Big)$$

$$\left(\text{resp. } \mathcal{C}^{\mathrm{I}}\big(\gamma, k_{\mathrm{I}}(x)\big) \to \mathcal{D}^{\mathrm{I}}\Big(\mathcal{F}\circ\gamma, \mathcal{F}\circ k_{\mathrm{I}}(x) = k_{\mathrm{I}}\big(\mathcal{F}(x)\big)\Big)\right),$$

determina entonces una función natural en x:

$$\mathcal{C}\Big(x, \mathsf{lím}(\gamma)\Big) \xrightarrow{\alpha_x} \mathcal{D}\Big(\mathcal{F}(x), \mathsf{lím}(\mathcal{F}\circ\gamma)\Big)$$

(19)
$$\left(\text{resp. } \mathcal{C}\Big(\mathsf{colím}(\gamma), x\Big) \xrightarrow{\beta_x} \mathcal{D}\Big(\mathsf{colím}(\mathcal{F}\circ\gamma), \mathcal{F}(x)\Big)\right).$$

Bajo estas condiciones, decimos que el funtor $\mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{D}$ *conmuta con el límite (resp. colímite) de* γ si

$$\alpha_{\mathsf{lím}(\gamma)}(\mathrm{id}) : \mathcal{F}\big(\mathsf{lím}(\gamma)\big) \to \mathsf{lím}(\mathcal{F}\circ\gamma)$$

(20)
$$\Big(\text{resp. } \beta_{\mathsf{colím}(\gamma)}(\mathrm{id}) : \mathsf{colím}(\mathcal{F}\circ\gamma) \to \mathcal{F}\big(\mathsf{colím}(\gamma)\big)\Big)$$

es un isomorfismo.

Observemos que (20) es el único morfismo tal que el siguiente triángulo conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(\mathsf{lím}_{\mathrm{I}}\gamma) \arrow[dr, dashed, "\alpha_{\mathsf{lím}\gamma}(\mathrm{id})"'] \arrow[drr, bend left, "\mathcal{F}(\varepsilon_i)"] & & \\
& \mathsf{lím}_{\mathrm{I}}(\mathcal{F}\circ\gamma) \arrow[r, "\varepsilon'_i"'] & \mathcal{F}\circ\gamma(i)
\end{tikzcd}$$

$$\left(\text{resp. }\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(\mathsf{colím}_{\mathrm{I}}\gamma) & & \\
& \mathsf{colím}_{\mathrm{I}}(\mathcal{F}\circ\gamma) \arrow[ul, dashed, "\beta_{\mathsf{colím}\gamma}(\mathrm{id})"] & \mathcal{F}\circ\gamma(i) \arrow[l, "\eta'_i"] \arrow[ull, bend right, "\mathcal{F}(\eta_i)"']
\end{tikzcd}\right)$$

para todo objeto i en I. En particular, nuestra definición no depende de las parejas $\big(\mathsf{lím}_{\mathrm{I}}(\gamma), \varepsilon\big)$ y $\big(\mathsf{lím}_{\mathrm{I}}(\mathcal{F}\circ\gamma), \varepsilon'\big)$ $\Big(\text{resp. } \big(\mathsf{colím}_{\mathrm{I}}(\gamma), \eta\big) \text{ y } \big(\mathsf{colím}_{\mathrm{I}}(\mathcal{F}\circ\gamma), \eta'\big)\Big)$ que representan a los límites (resp. colímites) de γ y $\mathcal{F}\circ\gamma$, respectivamente. Además:

PROPOSICIÓN 5.1. *Sea* $\mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{D}$ *un funtor y supongamos que* $\big(\mathsf{lím}_{\mathrm{I}}(\gamma), \varepsilon\big)$ $\Big($*resp.* $\big(\mathsf{colím}_{\mathrm{I}}(\gamma), \eta\big)\Big)$ *representa al límite (resp. colímite) de una* I*-gráfica* γ. *Si* $\big(\mathcal{F}(\mathsf{lím}\gamma), \mathcal{F}* \varepsilon\big)$ $\Big($*resp.* $\big(\mathcal{G}(\mathsf{colím}\gamma), \mathcal{G}*\eta\big)\Big)$ *representa al límite (resp. colímite) de* $\mathcal{F}\circ\gamma$ *entonces* $\mathcal{F}$ *conmuta con el límite (resp. colímite) de* γ.

DEMOSTRACIÓN. En este caso el morfismo (20) es la identidad. ✠

Si $\mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{D}$ es un funtor, decimos que $\mathcal{F}$ *conmuta con límites (resp. colímites)* si para toda $\mathcal{U}$-categoría pequeña I, $\mathcal{F}$ conmuta con el límite (resp. colímite) de γ para toda I-gráfica γ tal que $\mathsf{lím}_{\mathrm{I}}^{\wedge}(\gamma)$ y $\mathsf{lím}_{\mathrm{I}}^{\wedge}(\mathcal{F}\circ\gamma)$ (resp. $\mathsf{colím}_{\mathrm{I}}^{\vee}(\gamma)$ y $\mathsf{colím}_{\mathrm{I}}^{\vee}(\mathcal{F}\circ\gamma)$) son representables en $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$, respectivamente.

El siguiente resultado se sigue facilmente de la caracterización del morfismo (20):

TEOREMA 5.2. *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos $\mathcal{U}$-categorías con* I*-límites canónicos (resp.* I*-colímites canónicos). Si $\mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{D}$ y $\mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{G}} \mathcal{D}$ son funtores que conmutan con* I*-límites (resp.* I*-colímites) y $\mathcal{F} \overset{\eta}{\Rightarrow} \mathcal{G}$ una transformación natural, para toda* I*-gráfica γ en $\mathcal{C}$, se tiene un cuadrado conmutativo:*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}\Big(\mathsf{lím}_{\mathrm{I}}(\gamma)\Big) \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[d, "\eta_{(\mathsf{lím}_{\mathrm{I}}(\gamma))}"'] & \mathsf{lím}_{\mathrm{I}}\Big(\mathcal{F}\circ\gamma\Big) \arrow[d, "\mathsf{lím}_{\mathrm{I}}(\eta*\gamma)"] \\
\mathcal{G}\Big(\mathsf{lím}_{\mathrm{I}}(\gamma)\Big) \arrow[r, phantom, "\cong"] & \mathsf{lím}_{\mathrm{I}}\Big(\mathcal{G}\circ\gamma\Big)
\end{tikzcd}
\quad
\left(\begin{tikzcd}
\mathsf{colím}_{\mathrm{I}}\Big(\mathcal{F}\circ\gamma\Big) \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[d, "\mathsf{colím}_{\mathrm{I}}(\eta*\gamma)"'] & \mathcal{F}\Big(\mathsf{colím}_{\mathrm{I}}(\gamma)\Big) \arrow[d, "\eta_{(\mathsf{colím}_{\mathrm{I}}(\gamma))}"] \\
\textit{resp.}\quad \mathsf{colím}_{\mathrm{I}}\Big(\mathcal{G}\circ\gamma\Big) \arrow[r, phantom, "\cong"] & \mathcal{G}\Big(\mathsf{colím}_{\mathrm{I}}(\gamma)\Big)
\end{tikzcd}\right)$$

donde los isomorfismos son los de (20) *de arriba.*

§5.1. Ejemplos.

§5.1.1. *Funtor que Olvida.*

Si $\mathcal{C}$ denota cualquiera de las $\mathcal{U}$-categorías $\mathsf{Mond}_{\mathcal{U}}$, $\mathsf{Grp}_{\mathcal{U}}$, Anillo o $\mathsf{R\text{-}Mod}$, el funtor que olvida la estructura algebraica $\mathcal{C} \xrightarrow{\mathrm{olv}} \mathsf{Con}_{\mathcal{U}}$ conmuta con límites, pues este conmuta con productos e igualadores.

El funtor $\mathcal{C} \xrightarrow{\mathrm{olv}} \mathsf{Con}_{\mathcal{U}}$ no conmuta con colímites de todo tipo. Por ejemplo, no conmuta con sumas. En el Ejemplo §5.1.4 de abajo se dará una clase de colímites con los cuales el funtor olv si conmuta.

§5.1.2. *Funtores Adjuntos.*

Si $\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, shift left, "\mathcal{F}"] & \mathcal{D} \arrow[l, shift left, "\mathcal{G}"] \end{tikzcd}$ son funtores con $\mathcal{F}$ adjunto izquierdo de $\mathcal{G}$, entonces $\mathcal{F}$ conmuta con colímites y $\mathcal{G}$ conmuta con límites.

En efecto, como $\mathcal{F}$ es adjunto izquierdo de $\mathcal{G}$, existen transformaciones naturales $\mathrm{id}_{\mathcal{C}} \overset{\alpha}{\Longrightarrow} \mathcal{G}\circ\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}\circ\mathcal{G} \overset{\beta}{\Longrightarrow} \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ que determinan biyecciones:

$$\begin{array}{ccc}
f \longmapsto \mathcal{G}(f)\circ\alpha_x & & \{f_i\} \longmapsto \{\mathcal{G}(f_i)\circ\alpha_{\gamma(i)}\} \\
\mathcal{D}(\mathcal{F}(x), y) \cong \mathcal{C}(x, \mathcal{G}(y)) & \text{y} & \mathcal{D}^{\mathrm{I}}(\mathcal{F}\circ\gamma, \delta) \cong \mathcal{C}^{\mathrm{I}}(\gamma, \mathcal{G}\circ\delta) \\
\beta_y\circ\mathcal{F}(g) \longleftarrow g & & \{\beta_{\delta(i)}\circ\mathcal{F}(g_i)\} \longleftarrow \{g_i\}
\end{array}$$

Si suponemos entonces que $(\mathsf{colím}(\gamma),\eta)$ $\Big($resp. $(\mathsf{lím}(\gamma),\varepsilon)\Big)$ representa al colímite (resp. límite) de una I-gráfica γ en $\mathcal{C}$ (resp. en $\mathcal{D}$), es decir, si suponemos que se tiene una biyección:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}\Big(\mathsf{colím}(\gamma),\mathcal{G}(y)\Big) & \cong & \mathcal{C}^{I}\Big(\gamma,k_I\big(\mathcal{G}(y)\big)\Big) \\ \varphi & \longmapsto & k_I(\varphi)\circ\eta \end{array} \quad \left(\text{resp.}\quad \begin{array}{ccc} \mathcal{D}\Big(\mathcal{F}(x),\mathsf{lím}(\gamma)\Big) & \cong & \mathcal{D}^{I}\Big(k_I\big(\mathcal{F}(x)\big),\gamma\Big) \\ \psi & \longmapsto & \varepsilon\circ k_I(\psi) \end{array}\right)$$

se sigue de un cálculo directo que la composición:

$$\mathcal{D}(\mathcal{F}(\mathsf{colím}\gamma),y)\cong\mathcal{C}(\mathsf{colím}\gamma,\mathcal{G}(y))\cong\mathcal{C}^{I}\Big(\gamma,k_I\big(\mathcal{G}(y)\big)\Big)\cong\mathcal{D}^{I}(\mathcal{F}\circ\gamma,K_I(y))$$

$$\left(\text{resp.}\qquad \mathcal{C}(x,\mathcal{G}(\mathsf{lím}\gamma))\cong\mathcal{D}(\mathcal{F}(x),\mathsf{lím}\gamma)\cong\mathcal{D}^{I}\Big(k_I\big(\mathcal{F}(x)\big),\gamma\Big)\cong\mathcal{C}^{I}(k_I(x),\mathcal{G}\circ\gamma)\right)$$

es igual a la asignación $\varphi\mapsto k_I(\varphi)\circ(\mathcal{F}*\eta)$ (resp. $\psi\mapsto\varepsilon\circ k_I(\psi)$).

Concluimos que la pareja $(\mathcal{F}(\mathsf{colím}\gamma),\mathcal{F}*\eta)$ $\Big($resp. $(\mathcal{G}(\mathsf{lím}\gamma),\mathcal{G}*\varepsilon)\Big)$ representa al colímite (resp. límite) de $\mathcal{F}\circ\gamma$ (resp. $\mathcal{G}\circ\gamma$), por lo que de la Proposición 5.1 de la página 42, $\mathcal{F}$ conmuta con colímites (resp. $\mathcal{G}$ conmuta con límites).

§5.1.3. *Los funtores* $\mathcal{C}(a,-)$ *y* $\mathcal{C}(-,a)$.

Si $\mathcal{C}$ es una $\mathcal{U}$-categoría pequeña y a es un objeto de $\mathcal{C}$, los funtores:

$$\mathcal{C}\xrightarrow{\mathcal{C}(a,-)}\mathsf{Con}_{\mathcal{U}}\qquad\text{y}\qquad\mathcal{C}^{op}\xrightarrow{\mathcal{C}(-,a)}\mathsf{Con}_{\mathcal{U}}$$

conmutan con límites.

En efecto, como $\mathcal{C}(-,a)=\mathcal{C}^{op}(a,-)$ basta probar el resultado para el funtor $\mathcal{C}(a,-)$.

Para mostrar que el funtor $\mathcal{C}(a,-)$ conmuta con límites, supongamos que $(\mathsf{lím}(\gamma),\varepsilon)$ representa al límite de una I-gráfica γ en $\mathcal{C}$. Notemos entonces que si Ω es un conjunto $\mathcal{U}$-pequeño, de la biyección entre $\mathsf{Con}^{I}_{\mathcal{U}}(k_I(\Omega),\mathcal{C}(a,-)\circ\gamma)$ y $\mathsf{Con}_{\mathcal{U}}\Big(\Omega,\mathcal{C}^{I}(k_I(a),\gamma)\Big)$, se sigue que dado un morfismo $f\in\mathsf{Con}^{I}_{\mathcal{U}}(k_I(\Omega),\mathcal{C}(a,-)\circ\gamma)$ existe para cada $x\in\Omega$ una única familia de morfismos $a\xrightarrow{\tilde{f}(x)}\mathsf{lím}(\gamma)$ tal que $\varepsilon_i\circ\tilde{f}(x)=f_i(x)$ para todo objeto $i\in I$. Esto define un único morfismo $\Omega\xrightarrow{\tilde{f}}\mathcal{C}(a,\mathsf{lím}\gamma)$ tal que $\mathcal{C}(a,\varepsilon_i)\circ\tilde{f}=f_i$ para toda i en I.

En otras palabras, la pareja $(\mathcal{C}(a,\mathsf{lím}\gamma),\mathcal{C}(a,-)*\varepsilon)$ representa al límite de $\mathcal{C}(a,-)\circ\gamma$. El resultado se sigue entonces de la Proposición 5.1 de la página 42.

§5.1.4. *Colímites Filtrantes.*

Si I es una categoría pequeña, decimos que I es una *categoría filtrante* siempre que I tenga al menos un objeto y se cumplan las siguientes dos condiciones:

(i) Para cualesquiera dos objetos i y j en I, existe un objeto k y morfismos $i \longrightarrow k \longleftarrow j$.

(ii) Para cualesquiera dos morfismos paralelos $i \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} j$ en I, existe un morfismo $j \xrightarrow{h} k$ tal que $h \circ f = h \circ g$.

En particular, una categoría filtrante es conexa.

TEOREMA 5.3. *Sea* I *una* $\mathcal{U}$*-categoría filtrante pequeña y* γ *una* I*-gráfica en* **Con**. *Si* $X := \coprod_{i \in I_0} \gamma(i)$ *y definimos la relación* $\sim$ *en* X *como*

$\gamma(i) \ni x_i \sim x_j \in \gamma(j)$ *si existe* $i \xrightarrow{s} k$ *y* $j \xrightarrow{t} k$ *tal que* $\gamma(s)(x_i) = \gamma(t)(x_j)$.

entonces:

(i) $\sim$ *es una relación de equivalencia en* X.

(ii) $X/\sim$ *representa al colímite de* γ.

DEMOSTRACIÓN.

Prueba de (i): Es inmediato que $\sim$ es reflexiva y simétrica.

Par probar la transitividad, supongamos que $x_j \in \gamma(i_j)$ para $j \in \{1,2,3\}$ y que $x_1 \sim x_2$ y $x_2 \sim x_3$. Se sigue entonces de esto y de que I es filtrante, que existen morfismos en I:

$$\begin{tikzcd}
i_1 \arrow[dr, "s_1"] & & & \\
& k_1 \arrow[dr, "s"] & & \\
i_2 \arrow[ur, "t_1"] \arrow[dr, "s_2"'] & & k \arrow[r, "h"] & l \\
& k_2 \arrow[ur, "t"'] & & \\
i_3 \arrow[ur, "t_2"'] & & &
\end{tikzcd}$$

tales que $h \circ s \circ t_1 = h \circ t \circ s_2$, $\gamma(s_1)(x_1) = \gamma(t_1)(x_2)$ y $\gamma(s_2)(x_2) = \gamma(t_2)(x_3)$.

Si definimos $u = h \circ s \circ s_1$, $v = h \circ s \circ t_1 = h \circ t \circ s_2$ y $w = h \circ t \circ t_2$ tenemos que $\gamma(u)(x_1) = \gamma(v)(x_2) = \gamma(w)(x_3)$, es decir, $x_1 \sim x_3$.

Prueba de (ii):

Notemos que por definición, el siguiente diagrama es exacto:

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\coprod\limits_{i \xrightarrow{\varphi} j \in I_1} \gamma(i) \arrow[r, shift left, "\coprod\limits_{i \xrightarrow{\varphi} j \in I_1} \nu_i"] \arrow[r, shift right, "\coprod\limits_{i \xrightarrow{\varphi} j \in I_1} \nu_j \circ \gamma(\varphi)"'] & \coprod\limits_{i \in I_0} \gamma(i) \arrow[r, "\pi"] & X/\sim
\end{tikzcd}$$

donde π es la proyección canónica y $\gamma(k) \xrightarrow{\nu_k} \prod_{i \in I_0} \gamma(i)$ es la inclusión en el k-ésimo sumando.

El resultado se sigue entonces de la prueba del Teorema 3.1 de la página 28. ✠

Si $\mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{D}$ es un funtor, decimos que $\mathcal{F}$ *conmuta con colímites filtrantes* si para toda $\mathcal{U}$-categoría pequeña filtrante I, $\mathcal{F}$ conmuta con el límite de toda I-gráfica γ tal que $\mathsf{colím}_{\mathrm{I}}^{\vee}(\gamma)$ y $\mathsf{colím}_{\mathrm{I}}^{\vee}(\mathcal{F} \circ \gamma)$ son representables.

COROLARIO 5.4. *El funtor $\mathcal{C} \xrightarrow{\mathsf{oly}} \mathsf{Con}_{\mathcal{U}}$ del ejemplo §5.1.1 de arriba conmuta con colímites filtrantes.*

COROLARIO 5.5. *Si $\mathcal{C}$ es una $\mathcal{U}$-categoría con I-límites canónicos, el funtor I-límite $\mathcal{C}^{\mathrm{I}} \xrightarrow{\mathsf{lím}_{\mathrm{I}}} \mathcal{C}$ conmuta con colímites filtrantes.*

6. Extensiones de Kan

§6.1. Categorías de Gráficas. Si $\mathcal{C}$ es una $\mathcal{U}$-categoría, la categoría coma $c \downarrow \mathcal{C}$ a través del funtor canónico $\mathsf{cat}_{\mathcal{U}} \xrightarrow{c} \mathsf{Cat}_{\mathcal{U}}$ es una $\mathcal{U}$-categoría que tiene por objetos a las parejas (I, γ) con I una $\mathcal{U}$-categoría pequeña y γ una I-gráfica en $\mathcal{C}$. Los morfismos en $c \downarrow \mathcal{C}$ entre dos de estas parejas (I, γ) y (J, δ) son los funtores $\mathrm{I} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathrm{J}$ tales que $\gamma = \delta \circ \mathcal{F}$.

Considerando la estructura de 2-categoría que tiene Cat, podemos pensar a la igualdad $\gamma = \delta \circ \mathcal{F}$ como el 2-morfismo identidad y definir entonces las siguientes $\mathcal{U}$-categorías:

$$
\mathsf{Graf}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}} := \left[\begin{array}{c|c}
\textbf{Objetos} & \textbf{Morfismos} \\
(\mathrm{I}, \gamma) & (\mathrm{I}, \gamma) \xrightarrow{(\mathcal{F}, \eta)} (\mathrm{J}, \delta) \\
\text{I es una } \mathcal{U}\text{-categoría} & \begin{tikzcd} \mathrm{I} \arrow[rr, "\mathcal{F}"] \arrow[dr, "\gamma"'] & \arrow[d, phantom, "\swarrow\eta"] & \mathrm{J} \arrow[dl, "\delta"] \\ & \mathcal{C} & \end{tikzcd} \\
\text{pequeña y } \mathrm{I} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{C} & \\
\text{es un funtor} &
\end{array}\right]
$$

y

$$
\mathsf{Graf}^{\mathsf{co}}(\mathcal{C}) := \left[\begin{array}{c|c}
\textbf{Objetos} & \textbf{Morfismos} \\
(\mathrm{I}, \gamma) & (\mathrm{I}, \gamma) \xrightarrow{(\mathcal{F}, \eta)} (\mathrm{J}, \delta) \\
\text{I es una } \mathcal{U}\text{-categoría} & \begin{tikzcd} \mathrm{I} \arrow[rr, "\mathcal{F}"] \arrow[dr, "\gamma"'] & \arrow[d, phantom, "\nearrow\eta"] & \mathrm{J} \arrow[dl, "\delta"] \\ & \mathcal{C} & \end{tikzcd} \\
\text{pequeña y } \mathrm{I} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{C} & \\
\text{es un funtor} &
\end{array}\right]
$$

donde la composición de morfismos esta dada por las igualdades $(\mathcal{G},\varepsilon)\circ(\mathcal{F},\eta):=\big(\mathcal{G}\circ\mathcal{F},(\varepsilon*\mathcal{F})\circ\eta\big)$ y $(\mathcal{G},\varepsilon)\circ(\mathcal{F},\eta):=\big(\mathcal{G}\circ\mathcal{F},\eta\circ(\varepsilon*\mathcal{F})\big)$, respectivamente.

Más aún, un morfismo $\mathcal{C}\xrightarrow{\mathcal{F}}\mathcal{D}$ en $\mathsf{Cat}_{\mathcal{U}}$ determina morfismos:

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{Graf}(\mathcal{C}) \arrow[r, "\mathsf{Graf}(\mathcal{G})"] & \mathsf{Graf}(\mathcal{D}) \\
(I,\gamma) \arrow[d, "(\mathcal{F},\eta)"'] \arrow[dr, phantom, "\longmapsto"] & (I,\mathcal{G}\circ\gamma) \arrow[d, "(\mathcal{F},\mathcal{G}*\eta)"] \\
(J,\delta) & (J,\mathcal{G}\circ\delta)
\end{tikzcd}
\quad \text{y} \quad
\begin{tikzcd}
\mathsf{Graf}^{co}(\mathcal{C}) \arrow[r, "\mathsf{Graf}^{co}(\mathcal{G})"] & \mathsf{Graf}^{co}(\mathcal{D}) \\
(I,\gamma) \arrow[d, "(\mathcal{F},\eta)"'] \arrow[dr, phantom, "\longmapsto"] & (I,\mathcal{G}\circ\gamma) \arrow[d, "(\mathcal{F},\mathcal{G}*\eta)"] \\
(J,\delta) & (J,\mathcal{G}\circ\delta)
\end{tikzcd}
$$

por lo que tenemos funtores:

$$
\mathsf{Cat}_{\mathcal{U}} \xrightarrow{\ \mathsf{Graf}(-)\ } \mathsf{Cat}_{\mathcal{U}} \qquad \text{y} \qquad \mathsf{Cat}_{\mathcal{U}} \xrightarrow{\ \mathsf{Graf}^{co}(-)\ } \mathsf{Cat}_{\mathcal{U}}
$$

Con esta notación, si $\mathcal{C}$ es una $\mathcal{U}$-categoría pequeña y $\mathcal{C}\xrightarrow{h}\mathcal{C}'$ un funtor de $\mathcal{C}$ en una $\mathcal{U}$-categoría $\mathcal{C}'$, los funtores (1) de la página 5 pueden verse como sigue:

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}' \arrow[r, "h\downarrow -"] & \mathsf{Graf}^{co}(\mathcal{C}) \\
a' \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, phantom, "\longmapsto"] & (h\downarrow a',\pi\downarrow a') \arrow[d, "(h\downarrow\varphi,id)"] \\
b' & (h\downarrow b',\pi\downarrow b')
\end{tikzcd}
\quad \text{y} \quad
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}' \arrow[r, "-\downarrow h"] & \mathsf{Graf}(\mathcal{C})^{op} \\
a' \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, phantom, "\longmapsto"] & (a'\downarrow h,a'\downarrow\pi) \\
b' & (b'\downarrow \mathcal{C},b'\downarrow\pi) \arrow[u, "(\varphi\downarrow h,id)"']
\end{tikzcd}
$$

§6.1.1. *Categorías Completas y Cocompletas.*

Si consideramos ahora los funtores fieles y plenos de $\mathcal{U}$-categorías:

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "k"] & \mathsf{Graf}(\mathcal{C})^{op} \\
a \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\longmapsto"] & (\mathbf{1},k_1(a)) \\
b & (\mathbf{1},k_1(b)) \arrow[u, "(id,f)"']
\end{tikzcd}
\quad \text{y} \quad
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "k"] & \mathsf{Graf}^{co}(\mathcal{C}) \\
a \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\longmapsto"] & (\mathbf{1},k_1(a)) \arrow[d, "(id,f)"] \\
b & (\mathbf{1},k_1(b))
\end{tikzcd}
$$

obtenemos por el Párrafo §3.1 de la página 7 los siguientes diagramas:

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathsf{Graf}(\mathcal{C})^{op} \arrow[d, dashed, "k^{\wedge}"] \\
\mathcal{C} \arrow[ur, bend left, "k"] \arrow[r, "h^{\wedge}"'] \arrow[ur, phantom, "\cong"'] & \mathsf{Pre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}}
\end{tikzcd}
\quad \text{y} \quad
\begin{tikzcd}
 & \mathsf{Graf}^{co}(\mathcal{C}) \arrow[d, dashed, "k^{\vee}"] \\
\mathcal{C} \arrow[ur, bend left, "k"] \arrow[r, "h^{\vee}"'] \arrow[ur, phantom, "\cong"'] & \mathsf{coPre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}}
\end{tikzcd}
.
$$

donde $k^{\wedge}(I,\gamma)=\mathsf{lím}^{\wedge}_{I}(\gamma)$ y $k^{\vee}(I,\gamma)=\mathsf{colím}^{\vee}_{I}(\gamma)$.

Denotamos entonces al funtor $k^{\wedge}$ (resp. $k^{\vee}$) como $\mathsf{lím}^{\wedge}$ (resp. $\mathsf{colím}^{\vee}$) y decimos que $\mathcal{C}$ *es una $\mathcal{U}$-categoría completa* (resp. *cocompleta*) si $\mathsf{lím}^{\wedge}$ (resp. $\mathsf{colím}^{\vee}$) es representable. Por la Proposición 3.4 de la página 11, $\mathcal{C}$ es una $\mathcal{U}$-categoría completa (resp. cocompleta) si y sólo si $\mathcal{C}$ es una $\mathcal{U}$-categoría con I-límites (resp. I-colímites) para toda $\mathcal{U}$-categoría pequeña I.

Si $\mathcal{C}$ es una $\mathcal{U}$-categoría completa (resp. cocompleta) decimos que $\mathcal{C}$ *es una $\mathcal{U}$-categoría canónicamente completa* (resp. *canónicamente cocompleta*), si se ha elegido un funtor:

$$\mathsf{Graf}(\mathcal{C})^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathsf{lím}} \mathcal{C} \qquad \left(\text{resp.} \quad \mathsf{Graf}^{\mathrm{co}}(\mathcal{C}) \xrightarrow{\mathsf{colím}} \mathcal{C}\right)$$

y un isomorfismo natural:

$$\begin{tikzcd} & \mathsf{Graf}(\mathcal{C})^{\mathrm{op}} \arrow[dl, dashed, "\mathsf{lím}"'] \arrow[d, "\mathsf{lím}^{\wedge}"] \\ \mathcal{C} \arrow[r, "h^{\wedge}"'] \arrow[ur, phantom, "\cong"] & \mathsf{Pre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}} \end{tikzcd} \qquad \left(\text{resp.} \quad \begin{tikzcd} & \mathsf{Graf}^{\mathrm{co}}(\mathcal{C}) \arrow[dl, dashed, "\mathsf{colím}"'] \arrow[d, "\mathsf{colím}^{\vee}"] \\ \mathcal{C} \arrow[r, "h^{\vee}"'] \arrow[ur, phantom, "\cong"] & \mathsf{coPre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}} \end{tikzcd}\right)$$

En este caso llamamos al funtor $\mathsf{lím}$ (resp. $\mathsf{colím}$) *el funtor límite* (resp. *colímite*) *de* $\mathcal{C}$.

Observemos que si $\mathcal{C}$ es una $\mathcal{U}$-categoría canónicamente completa (resp. cocompleta), para toda $\mathcal{U}$-categoría pequeña I el funtor:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^{\mathrm{I}} \arrow[r, "\nu_{\mathrm{I}}"] & \mathsf{Graf}(\mathcal{C})^{\mathrm{op}} \\[-2em] \gamma \arrow[d, "\eta"'] & (\mathrm{I},\gamma) \\ \delta \arrow[r, phantom, ""] & (\mathrm{I},\delta) \arrow[u, "(\mathrm{id}_{\mathrm{I}},\eta)"'] \end{tikzcd} \qquad \left(\text{resp.} \quad \begin{tikzcd} \mathcal{C}^{\mathrm{I}} \arrow[r, "\nu_{\mathrm{I}}"] & \mathsf{Graf}^{\mathrm{co}}(\mathcal{C}) \\[-2em] \gamma \arrow[d, "\eta"'] & (\mathrm{I},\gamma) \arrow[d, "(\mathrm{id}_{\mathrm{I}},\eta)"] \\ \delta & (\mathrm{I},\delta) \end{tikzcd}\right)$$

determina funtores:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^{\mathrm{I}} \arrow[r, "\nu_{\mathrm{I}}"] \arrow[rr, dashed, bend right, "\mathsf{lím}_{\mathrm{I}}"'] & \mathsf{Graf}(\mathcal{C})^{\mathrm{op}} \arrow[r, "\mathsf{lím}"] & \mathcal{C} \end{tikzcd} \qquad \left(\text{resp.} \quad \begin{tikzcd} \mathcal{C}^{\mathrm{I}} \arrow[r, "\nu_{\mathrm{I}}"] \arrow[rr, dashed, bend right, "\mathsf{colím}_{\mathrm{I}}"'] & \mathsf{Graf}^{\mathrm{co}}(\mathcal{C}) \arrow[r, "\mathsf{colím}"] & \mathcal{C} \end{tikzcd}\right)$$

e isomorfismos $h^{\wedge} \circ \mathsf{lím}_{\mathrm{I}} \cong \mathsf{lím}_{\mathrm{I}}^{\wedge}$ (resp. $h^{\vee} \circ \mathsf{colím}_{\mathrm{I}} \cong \mathsf{colím}_{\mathrm{I}}^{\vee}$), por lo que $\mathcal{C}$ tiene naturalmente una estructura de $\mathcal{U}$-categoría con I-límites canónicos (resp. I-colímites canónicos).

Por los Teoremas 3.1 de la página 28 y 4.1 de la página 38, tenemos:

TEOREMA 6.1. *Si $\mathcal{C}$ es una $\mathcal{U}$-categoría pequeña, los siguientes enunciados son equivalentes:*

(i) $\mathcal{C}$ *tiene productos e igualadores (resp. sumas y coiguakadores).*

(ii) $\mathcal{C}$ *tiene productos y productos fibrados (resp. sumas y sumas amalgamadas).*

(iii) $\mathcal{C}$ *es completa (resp. cocompleta).*

§6.1.2. *Funtores Densos y Codensos.*

Sea $\mathcal{C}$ una $\mathcal{U}$-categoría pequeña y $\mathcal{D}$ una $\mathcal{U}$-categoría.

Observemos que si $\mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{D}$ es un funtor, se tiene una transformación natural:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[r, bend left, "\Phi"] \arrow[r, bend right, "k"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\wr"] & \mathsf{Graf}(\mathcal{D})^{op} \end{tikzcd} \qquad \left(\text{resp.} \quad \begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[r, bend left, "\Phi"] \arrow[r, bend right, "k"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\wr"] & \mathsf{Graf}^{co}(\mathcal{D}) \end{tikzcd}\right)$$

donde $\Phi = \mathsf{Graf}(\mathcal{F})^{op} \circ (- \downarrow \mathcal{F})$ $\left(\text{resp. } \Phi = \mathsf{Graf}^{co}(\mathcal{F}) \circ (\mathcal{F} \downarrow -)\right)$.

Esta transformación natural se define para cada objeto d en $\mathcal{D}$ como la pareja $\zeta_d = (\mathcal{G}, \eta)$:

$$\begin{tikzcd} d \downarrow \mathcal{F} \arrow[rr, "\mathcal{G}"] \arrow[dr, "\mathcal{F}\circ(d\downarrow\pi)"'] & \arrow[d, phantom, "\Swarrow\eta"] & \mathbf{1} \arrow[dl, "k(d)"] \\ & \mathcal{D} & \end{tikzcd} \qquad \left(\text{resp.} \quad \begin{tikzcd} \mathcal{F} \downarrow d \arrow[rr, "\mathcal{G}"] \arrow[dr, "\mathcal{F}\circ(\pi\downarrow d)"'] & \arrow[d, phantom, "\Nearrow\eta"] & \mathbf{1} \arrow[dl, "k(d)"] \\ & \mathcal{D} & \end{tikzcd}\right)$$

donde $\mathcal{G}$ es el único funtor a $\mathbf{1}$ y $\eta_{(a,u)} = u$.

Con esta notación, decimos que $\mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{D}$ es un *funtor denso* (resp. *codenso*) si la transformación natural $\mathsf{lím}^{\wedge} * \zeta$ (resp. $\mathsf{colím}^{\vee} * \zeta$) es un isomorfismo, es decir, si todo objeto de $\mathcal{D}$ es el límite (resp. colímite) canónico de objetos en la imagen de $\mathcal{F}$.

Se sigue de la definición de límite (resp. colímite) que $\mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{D}$ es un funtor denso (resp. codenso) si y sólo si, para cualesquiera dos objetos d y d′ de $\mathcal{D}$, la función:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(d', d) &\xrightarrow{\quad \alpha \quad} \mathcal{D}^{d\downarrow\mathcal{F}}(k_{d\downarrow\mathcal{F}}(d'), \mathcal{F} \circ (d \downarrow \pi)) \\ \varphi &\longmapsto \left\{d' \xrightarrow{u\circ\varphi} \mathcal{F}(a)\right\}_{(a,u)} \end{aligned}$$

$$\left(\text{resp.} \quad \begin{aligned} \mathcal{D}(d, d') &\xrightarrow{\quad \alpha \quad} \mathcal{D}^{\mathcal{F}\downarrow d}(\mathcal{F} \circ (\pi \downarrow d), k_{\mathcal{F}\downarrow d}(d')) \\ \varphi &\longmapsto \left\{\mathcal{F}(a) \xrightarrow{\varphi\circ u} d'\right\}_{(a,u)} \end{aligned}\right)$$

es una biyección.

TEOREMA 6.2. *Sea $\mathcal{C}$ una $\mathcal{U}$-categoría pequeña y $\mathcal{D}$ una $\mathcal{U}$-categoría. Si $\mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{D}$ es un funtor, $\mathcal{F}$ es denso (resp. codenso) si y sólo si el funtor $\mathcal{F}_\vee$ (resp. $\mathcal{F}_\wedge$), definido en el Párrafo §3.1 de la página 7, es fiel y pleno.*

DEMOSTRACIÓN. Este resultado se sigue de que si d y d' son dos objetos de $\mathcal{D}$, se tiene un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{D}(d,d') \arrow[dl, "\mathcal{F}_\vee"'] \arrow[dr, "\alpha"] & \\
\mathsf{coPre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}}\left(\mathcal{F}_\vee(d'),\mathcal{F}_\vee(d)\right) & & \mathcal{D}^{d\downarrow\mathcal{F}}\left(k_{d\downarrow\mathcal{F}}(d'),\mathcal{F}\circ(d\downarrow\pi)\right) \arrow[ll, "\beta"]
\end{tikzcd}$$

$$\left(\text{resp.}\quad \begin{tikzcd}
& \mathcal{D}(d,d') \arrow[dl, "\mathcal{F}_\wedge"'] \arrow[dr, "\alpha"] & \\
\mathsf{Pre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}}\left(\mathcal{F}_\wedge(d),\mathcal{F}_\wedge(d')\right) & & \mathcal{D}^{\mathcal{F}\downarrow d}\left(\mathcal{F}\circ(\pi\downarrow d),k_{\mathcal{F}\downarrow d}(d')\right) \arrow[ll, "\beta"]
\end{tikzcd}\right)$$

donde β, definido como $\beta(\nu)_a(u) := \nu_{(a,u)}$, es una biyección. ✠

§6.2. Extensiones de Kan. Sean $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ y $\mathcal{D}$ tres $\mathcal{U}$-categorías y $\mathcal{C} \xrightarrow{h} \mathcal{C}'$ un funtor. Si consideramos el funtor $\mathcal{D}^{\mathcal{C}'} \xrightarrow{\mathcal{D}^h} \mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ de $\mathcal{U}^+$-categorías pequeñas, por el Párrafo §3.1 de la página 7 tenemos diagramas:

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{D}^{\mathcal{C}} \arrow[d, dashed, "(\mathcal{D}^h)^\wedge"] \\
\mathcal{D}^{\mathcal{C}'} \arrow[ur, bend left, "\mathcal{D}^h"] \arrow[r, "h^\wedge"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow"] & \mathsf{Pre}\left(\mathcal{D}^{\mathcal{C}'}\right)_{\mathcal{U}^+}
\end{tikzcd}
\quad \text{y} \quad
\begin{tikzcd}
& \mathcal{D}^{\mathcal{C}} \arrow[d, dashed, "(\mathcal{D}^h)^\vee"] \\
\mathcal{D}^{\mathcal{C}'} \arrow[ur, bend left, "\mathcal{D}^h"] \arrow[r, "h^\vee"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow"] & \mathsf{coPre}\left(\mathcal{D}^{\mathcal{C}'}\right)_{\mathcal{U}^+}
\end{tikzcd},$$

Si $\mathcal{F} \in \mathcal{D}^{\mathcal{C}}$, llamamos a una pareja $\left(K(\mathcal{F}),\theta(\mathcal{F})\right)$ que representa a la $\mathcal{U}^+$-pregavilla (resp. $\mathcal{U}^+$-copregavilla) $(\mathcal{D}^h)^\wedge(\mathcal{F})$ $\left(\text{resp. } (\mathcal{D}^h)^\vee(\mathcal{F})\right)$, o simplemente a $K(\mathcal{F})$, una *extensión de Kan derecha* (resp. *izquierda*) *de* $\mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{D}$ *a lo largo de* $\mathcal{C} \xrightarrow{h} \mathcal{C}'$, es decir, una extensión de Kan derecha (resp. izquierda) de $\mathcal{F}$ a lo largo de h es una pareja $\left(K(\mathcal{F}),\theta(\mathcal{F})\right)$ como en el diagrama:

(21)

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{D} \\
\mathcal{C} \arrow[ur, bend left, "\mathcal{F}"] \arrow[r, "h"'] & \mathcal{C}' \arrow[u, dashed, "K(\mathcal{F})"'] \arrow[u, phantom, shift right=4ex, "\Leftarrow\theta(\mathcal{F})"]
\end{tikzcd}
\qquad
\left(\text{resp.}\quad \begin{tikzcd}
& \mathcal{D} \\
\mathcal{C} \arrow[ur, bend left, "\mathcal{F}"] \arrow[r, "h"'] & \mathcal{C}' \arrow[u, dashed, "K(\mathcal{F})"'] \arrow[u, phantom, shift right=4ex, "\Rightarrow\theta(\mathcal{F})"]
\end{tikzcd}\right)$$

con la propiedad que para todo funtor $\mathcal{C}' \xrightarrow{\mathcal{G}} \mathcal{D}$ la siguiente función es biyectiva:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{D}^{\mathcal{C}'}(\mathcal{G}, \mathrm{K}(\mathcal{F})) & \longrightarrow & \mathcal{D}^{\mathcal{C}}(\mathcal{G} \circ \mathsf{h}, \mathcal{F}) \\ \nu & \longmapsto & \theta(\mathcal{F}) \circ (\nu * \mathsf{h}) \end{array} \quad \left(\text{resp. } \begin{array}{rcl} \mathcal{D}^{\mathcal{C}'}(\mathrm{K}(\mathcal{F}), \mathcal{G}) & \longrightarrow & \mathcal{D}^{\mathcal{C}}(\mathcal{F}, \mathcal{G} \circ \mathsf{h}) \\ \nu & \longmapsto & (\nu * \mathsf{h}) \circ \theta(\mathcal{F}) \end{array} \right)$$

Se sigue entonces de la Proposición 3.3 de la página 10 y de la Proposición 3.4 de la página 11 que $\mathcal{D}^{\mathsf{h}}$ tiene un adjunto derecho (resp. izquierdo) si y sólo si todo funtor $\mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{D}$ tiene una extensión de Kan derecha (resp. izquierda) a lo largo de $\mathcal{C} \xrightarrow{\mathsf{h}} \mathcal{C}'$.

Más precisamente:

PROPOSICIÓN 6.3. *Si* $\mathcal{D}^{\mathcal{C}} \xrightarrow{\mathrm{Kan}^{\mathrm{d}}} \mathcal{D}^{\mathcal{C}'}$ $\left(\textit{resp. } \mathcal{D}^{\mathcal{C}} \xrightarrow{\mathrm{Kan}^{\mathrm{i}}} \mathcal{D}^{\mathcal{C}'}\right)$ *es un adjunto derecho (resp. izquierdo) del funtor* $\mathcal{D}^{\mathcal{C}'} \xrightarrow{\mathcal{D}^{\mathsf{h}}} \mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ *con counidad* $\mathcal{D}^{\mathsf{h}} \circ \mathrm{Kan}^{\mathrm{d}} \xrightarrow{\varepsilon} \mathrm{id}_{\mathcal{D}^{\mathcal{C}}}$ $\left(\textit{resp. unidad } \mathrm{id}_{\mathcal{D}^{\mathcal{C}}} \xrightarrow{\eta} \mathcal{D}^{\mathsf{h}} \circ \mathrm{Kan}^{\mathrm{i}}\right)$ *para cualquier funtor* $\mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{D}$*, la pareja* $\left(\mathrm{Kan}^{\mathrm{d}}(\mathcal{F}), \varepsilon_{\mathcal{F}}\right)$ $\left(\textit{resp. } (\mathrm{Kan}^{\mathrm{i}}(\mathcal{F}), \eta_{\mathcal{F}})\right)$ *es una extensión de Kan derecha (resp. izquierda) de* $\mathcal{F}$ *a lo largo de* h.

Recíprocamente, si para todo funtor $\mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{D}$ *se ha elegido una extensión de Kan derecha (resp. izquierda) de él a lo largo de* $\mathcal{C} \xrightarrow{\mathsf{h}} \mathcal{C}'$, $\left(\mathrm{K}(\mathcal{F}), \theta(\mathcal{F})\right)$*, existe un único funtor* $\mathcal{D}^{\mathcal{C}} \xrightarrow{\mathrm{Kan}^{\mathrm{d}}} \mathcal{D}^{\mathcal{C}'}$ $\left(\textit{resp. } \mathcal{D}^{\mathcal{C}} \xrightarrow{\mathrm{Kan}^{\mathrm{i}}} \mathcal{D}^{\mathcal{C}'}\right)$ *con la propiedad* $\mathrm{Kan}^{\mathrm{d}}(\mathcal{F}) = \mathrm{K}(\mathcal{F})$ $\left(\textit{resp. } \mathrm{Kan}^{\mathrm{i}}(\mathcal{F}) = \mathrm{K}(\mathcal{F})\right)$ *el cual es adjunto derecho (resp. izquierdo) de* $\mathcal{D}^{\mathsf{h}}$ *y tal que* $\varepsilon_{\mathcal{F}} = \theta(\mathcal{F})$ $\left(\textit{resp. } \eta_{\mathcal{F}} = \theta(\mathcal{F})\right)$ *define una transformación natural* $\mathcal{D}^{\mathsf{h}} \circ \mathrm{Kan}^{\mathrm{d}} \xrightarrow{\varepsilon} \mathrm{id}_{\mathcal{D}^{\mathcal{C}}}$ $\left(\textit{resp. } \mathrm{id}_{\mathcal{D}^{\mathcal{C}}} \xrightarrow{\eta} \mathcal{D}^{\mathsf{h}} \circ \mathrm{Kan}^{\mathrm{i}}\right)$ *la cual es counidad (resp. unidad) de la adjunción* $\mathrm{Kan}^{\mathrm{d}} \vdash \mathcal{D}^{\mathsf{h}}$ $\left(\textit{resp. } \mathrm{Kan}^{\mathrm{i}} \dashv \mathcal{D}^{\mathsf{h}}\right)$.

En particular, si alguna de estas condiciones se cumple, el funtor $\mathrm{Kan}^{\mathrm{d}}$ $\left(\textit{resp. } \mathrm{Kan}^{\mathrm{i}}\right)$ *es fiel y pleno si y sólo si para todo funtor* $\mathcal{F}$ *la transformación natural* $\theta(\mathcal{F})$ *es un isomorfismo.*

El siguiente Teorema da condiciones para la existencia de Extensiones de Kan.

TEOREMA 6.4. *Sea* $\mathcal{D}$ *una* $\mathcal{U}$*-categoría y* $\mathcal{C} \xrightarrow{\mathsf{h}} \mathcal{C}'$ *un funtor de una* $\mathcal{U}$*-categoría pequeña* $\mathcal{C}$ *en una* $\mathcal{U}$*-categoría* $\mathcal{C}'$*. Si* $\mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{D}$ *es un funtor y* $\mathcal{C}' \xrightarrow{\mathrm{K}(\mathcal{F})} \mathcal{D}$ *representa al funtor:*

$$\mathcal{C}' \xrightarrow{-\downarrow \mathsf{h}} \mathsf{Graf}(\mathcal{C})^{\mathsf{op}} \xrightarrow{\mathsf{Graf}(\mathcal{F})^{\mathsf{op}}} \mathsf{Graf}(\mathcal{D})^{\mathsf{op}} \xrightarrow{\mathsf{lím}^{\wedge}} \mathsf{Pre}(\mathcal{D})_{\mathcal{U}}$$

$$\left(\textit{resp. } \mathcal{C}' \xrightarrow{\mathsf{h}\downarrow -} \mathsf{Graf}^{\mathsf{co}}(\mathcal{C}) \xrightarrow{\mathsf{Graf}^{\mathsf{co}}(\mathcal{F})} \mathsf{Graf}^{\mathsf{co}}(\mathcal{D}) \xrightarrow{\mathsf{colím}^{\vee}} \mathsf{coPre}(\mathcal{D})_{\mathcal{U}}\right)$$

existe una transformación natural $K(\mathcal{F}) \circ h \overset{\theta(\mathcal{F})}{\Longrightarrow} \mathcal{F}$ $\left(\textit{resp. } \mathcal{F} \overset{\theta(\mathcal{F})}{\Longrightarrow} K(\mathcal{F}) \circ h\right)$ *tal que* $\big(K(\mathcal{F}), \theta(\mathcal{F})\big)$ *es una extensión de Kan derecha (resp. izquierda) de* $\mathcal{F}$ *a lo largo de* h.

DEMOSTRACIÓN.

Definición de $\theta(\mathcal{F})$*:*

Por definición de $K(\mathcal{F})$ existe una biyección binatural para todo objeto d en $\mathcal{D}$ y a' en $\mathcal{C}'$:

$$\mathcal{D}\big(d, K(\mathcal{F})(a')\big) \xrightarrow{\varepsilon_{d,a'}} \mathcal{D}^{a'\downarrow h}\big(k_{a'\downarrow h}(d), \mathcal{F} \circ (a' \downarrow \pi)\big) \tag{22}$$

$$\left(\text{resp.} \quad \mathcal{D}\big(K(\mathcal{F})(a'), d\big) \xrightarrow{\eta_{a',d}} \mathcal{D}^{h\downarrow a'}\big(\mathcal{F} \circ (\pi \downarrow a'), k_{h\downarrow a'}(d)\big)\right)$$

de modo que si para cada objeto a en $\mathcal{C}$ tomamos a d como $K(\mathcal{F})\big(h(a)\big)$ y a a' como $h(a)$, la familia

$$\left\{ K(\mathcal{F})\big(h(a)\big) \xrightarrow{\varepsilon_{d,a'}(id_d)_{(a,id)}} \mathcal{F}(a) \right\}_a$$

$$\left(\text{resp.} \quad \mathcal{F}(a) \xrightarrow{\eta_{a',d}(id_d)_{(a,id)}} K(\mathcal{F})\big(h(a)\big) \right\}_a \Bigg)$$

es una transformación natural de $K(\mathcal{F}) \circ h$ en $\mathcal{F}$ (resp. de $\mathcal{F}$ en $K(\mathcal{F}) \circ h$). Denotamos a ésta como $\theta(\mathcal{F})$.

La pareja $\big(K(\mathcal{F}), \theta(\mathcal{F})\big)$ *es una extensión de Kan derecha (resp. izquierda) de* $\mathcal{F}$ *a lo largo de* h*:*

Mostraremos lo que corresponde a la parte derecha. La parte izquierda se hace análogamente.

Si $\mathcal{C}' \xrightarrow{\mathcal{G}} \mathcal{D}$ es un funtor, debemos probar que la función:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{\mathcal{C}'}\big(\mathcal{G}, K(\mathcal{F})\big) &\longrightarrow \mathcal{D}^{\mathcal{C}}\big(\mathcal{G} \circ h, \mathcal{F}\big) \\ \nu &\longmapsto \theta(\mathcal{F}) \circ (\nu * h) \end{aligned}$$

es una biyección, para lo que es suficiente probar las siguientes afirmaciones:

(i) Los morfismos $\big(\theta(\mathcal{F}) \circ (\nu * h)\big)_a$ y $\varepsilon_{\mathcal{G}(h(a)),h(a)}\big(\nu_{h(a)}\big)_{(a,id)}$ son iguales, para todo objeto a en $\mathcal{C}$.

(ii) La asignación:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{\mathcal{C}'}\big(\mathcal{G}, K(\mathcal{F})\big) &\longrightarrow \big(\mathsf{Graf}(\mathcal{D})^{op}\big)^{\mathcal{C}'}\Big(k \circ \mathcal{G}, \mathsf{Graf}(\mathcal{F})^{op} \circ (- \downarrow h)\Big) \\ \nu &\longmapsto \Big\{\varepsilon_{\mathcal{G}(a'),a'}(\nu_{a'})\Big\}_{a'} \end{aligned}$$

es una biyección.

(iii) La asignación:

$$\begin{array}{ccc}(\mathsf{Graf}(\mathcal{D})^{op})^{\mathcal{C}'}\Big(k\circ \mathcal{G}, \mathsf{Graf}(\mathcal{F})^{op}\circ(-\downarrow h)\Big) & \longrightarrow & \mathcal{D}^{\mathcal{C}}(\mathcal{G}\circ h,\mathcal{F}) \\ \eta & \longmapsto & \rho_\eta = \Big\{\big(\eta_{h(a)}\big)_{(a,\mathrm{id})}\Big\}_a\end{array}$$

es una biyección.

La primera de estas afirmaciones se sigue de la definición de $\theta(\mathcal{F})$, y de la naturalidad de $\varepsilon_{d,a'}$ respecto de la variable d. Mientras que la segunda se deduce de la biyección (22) de arriba.

Para probar la última afirmación, notemos que la asignación $\eta \mapsto \rho_\eta$ tiene como inversa a $\rho \mapsto \eta_\rho$, donde $(\eta_\rho)_{a'}$ se define como la transformación natural $\{\rho_a \circ \mathcal{G}(u)\}_{(a,u)\in a'\downarrow h}$, para todo objeto a' en $\mathcal{C}'$. ✠

En particular,

COROLARIO 6.5. *Si $\mathcal{D}$ es una $\mathcal{U}$-categoría canónicamente completa (resp. canónicamente cocompleta) y $\mathcal{C} \xrightarrow{h} \mathcal{C}'$ es un funtor de una $\mathcal{U}$-categoría pequeña $\mathcal{C}$ en una $\mathcal{U}$-categoría $\mathcal{C}'$, el funtor $\mathcal{D}^{\mathcal{C}} \xrightarrow{\mathrm{Kan}^d} \mathcal{D}^{(\mathcal{C}')}$ (resp. $\mathcal{D}^{\mathcal{C}} \xrightarrow{\mathrm{Kan}^i} \mathcal{D}^{(\mathcal{C}')}$) definido por:*

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{C}' & \xrightarrow{\mathrm{Kan}^d(\mathcal{F})} & \mathcal{D} \\ a' & & \mathsf{lím}(a'\downarrow h, \mathcal{F}\circ(a'\downarrow\pi)) \\ f\Big\downarrow & \longmapsto & \Big\downarrow \mathsf{lím}(f\downarrow h,\mathrm{id}) \\ b' & & \mathsf{lím}(b'\downarrow h, \mathcal{F}\circ(b'\downarrow\pi))\end{array} \quad \left(\textit{resp.}\ \begin{array}{ccc}\mathcal{C}' & \xrightarrow{\mathrm{Kan}^i(\mathcal{F})} & \mathcal{D} \\ a' & & \mathsf{colím}(h\downarrow a', \mathcal{F}\circ(\pi\downarrow a')) \\ f\Big\downarrow & \longmapsto & \Big\downarrow \mathsf{colím}(f\downarrow h,\mathrm{id}) \\ b' & & \mathsf{colím}(h\downarrow b', \mathcal{F}\circ(\pi\downarrow b'))\end{array}\right)$$

$$\mathrm{Kan}^d(\eta)_- := \mathsf{lím}\Big(\mathrm{id}_{-\downarrow h}, \eta*(-\downarrow\pi)\Big) \quad \left(\textit{resp.}\quad \mathrm{Kan}^i(\eta)_- := \mathsf{colím}\Big(\mathrm{id}_{h\downarrow -}, \eta*(\pi\downarrow -)\Big)\right)$$

es adjunto derecho (resp. izquierdo) del funtor $\mathcal{D}^{(\mathcal{C}')} \xrightarrow{\mathcal{D}^h} \mathcal{D}^{\mathcal{C}}$.

Más aún, si h es fiel y pleno entonces Kan^d (resp. Kan^i) también.

DEMOSTRACIÓN. Solamente falta probar que si h es fiel y pleno entonces Kan^d (resp. Kan^i) también. Esto lo probaremos para Kan^d, lo correspondiente para Kan^i se hace de manera análoga.

Dado un funtor $\mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{D}$, como h es fiel y pleno la biyección (22) de la página 52 implica que para todo objeto d en $\mathcal{D}$ y a en $\mathcal{C}$, se tiene una biyección binatural:

$$\mathcal{D}\Big(d, K(\mathcal{F})(h(a))\Big) \xrightarrow{\tilde{\varepsilon}_{d,a}} \mathcal{D}^{a\downarrow\mathcal{C}}\Big(k_{a\downarrow\mathcal{C}}(d), \mathcal{F}\circ(a\downarrow\pi)\Big)$$

donde $\theta(\mathcal{F}) = \tilde{\varepsilon}_{K(\mathcal{F})(h(a)),a}\big(\mathrm{id}_{K(\mathcal{F})(h(a))}\big)_{(a,\mathrm{id}_a)}$.

Si definimos $\tau(\mathcal{F})$ como el morfismo:

$$\widetilde{\varepsilon}^{-1}_{\mathcal{F}(a),a}\left(\left\{\mathcal{F}(a) \xrightarrow{\mathcal{F}(u)} \mathcal{F}(b)\right\}_{(b,u)}\right),$$

la conmutatividad de los diagramas:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}\Big(K(\mathcal{F})(h(a)),K(\mathcal{F})(h(a))\Big) \arrow[r, "\widetilde{\varepsilon}_{K(\mathcal{F})(h(a)),a}"] \arrow[d, "-\circ\tau(\mathcal{F})"'] & \mathcal{D}^{a\downarrow\mathcal{C}}\Big(k_{a\downarrow\mathcal{C}}(K(\mathcal{F})(h(a))),\mathcal{F}\circ(a\downarrow\pi)\Big) \arrow[d, "-\circ k_{a\downarrow\mathcal{C}}(\tau(\mathcal{F}))"] \\
\mathcal{D}\Big(\mathcal{F}(a),K(\mathcal{F})(h(a))\Big) \arrow[r, "\widetilde{\varepsilon}_{\mathcal{F}(a),a}"'] & \mathcal{D}^{a\downarrow\mathcal{C}}\Big(k_{a\downarrow\mathcal{C}}(\mathcal{F}(a)),\mathcal{F}\circ(a\downarrow\pi)\Big)
\end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}\Big(K(\mathcal{F})(h(a)),K(\mathcal{F})(h(a))\Big) \arrow[r, "\widetilde{\varepsilon}_{K(\mathcal{F})(h(a)),a}"] & \mathcal{D}^{a\downarrow\mathcal{C}}\Big(k_{a\downarrow\mathcal{C}}(K(\mathcal{F})(h(a))),\mathcal{F}\circ(a\downarrow\pi)\Big) \\
\mathcal{D}\Big(\mathcal{F}(a),K(\mathcal{F})(h(a))\Big) \arrow[r, "\widetilde{\varepsilon}_{\mathcal{F}(a),a}"'] \arrow[u, "-\circ\theta(\mathcal{F})"] & \mathcal{D}^{a\downarrow\mathcal{C}}\Big(k_{a\downarrow\mathcal{C}}(\mathcal{F}(a)),\mathcal{F}\circ(a\downarrow\pi)\Big) \arrow[u, "-\circ k_{a\downarrow\mathcal{C}}(\theta(\mathcal{F}))"']
\end{tikzcd}$$

implica que $\tau(\mathcal{F})$ es inverso de $\theta(\mathcal{F})$.

Concluimos que $\theta(\mathcal{F})$ es un isomorfismo para todo funtor $\mathcal{F}$, es decir, la counidad de la adjunción $\mathcal{D}^{h} \dashv \mathrm{Kan}^{d}$ es un isomorfismo. Por lo tanto Kan^{d} es fiel y pleno. ✠

§6.2.1. *Extensiones de Kan a lo largo de* $h^{\wedge}$ *y* $h^{\vee}$.

Sea $\mathcal{C}$ una $\mathcal{U}$-categoría pequeña y $\mathcal{D}$ una $\mathcal{U}$-categoría canónicamente cocompleta (resp. completa).

Si en el Corolario 6.5 del Párrafo anterior tomamos a h como el funtor canónico $\mathcal{C} \overset{h^{\wedge}}{\hookrightarrow} \mathbf{Pre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}}$ $\left(\text{resp. } \mathcal{C} \xrightarrow{h^{\vee}} \mathbf{coPre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}}\right)$, tenemos una adjunción:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}^{\mathcal{C}} \arrow[r, bend left, "\mathrm{Kan}^{i}"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{D}^{\mathbf{Pre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}}} \arrow[l, bend left, "\mathcal{D}^{(h^{\wedge})}"]
\end{tikzcd}
\qquad
\left(\text{resp. }
\begin{tikzcd}
\mathcal{D}^{\mathcal{C}} \arrow[r, bend right, "\mathrm{Kan}^{d}"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{D}^{\mathbf{coPre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}}} \arrow[l, bend right, "\mathcal{D}^{(h^{\vee})}"']
\end{tikzcd}\right)$$

Además, como $h^{\wedge}$ (resp. $h^{\vee}$) es fiel y pleno, el funtor Kan^{i} $\left(\text{resp. } \mathrm{Kan}^{d}\right)$ también es fiel y pleno y entonces por la Proposición 6.3 para todo $\mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{D}$, si $\mathcal{F}_{\wedge} = \mathrm{Kan}^{i}(\mathcal{F})$ $\left(\text{resp. } \mathcal{F}_{\vee} = \mathrm{Kan}^{d}(\mathcal{F})\right)$, el siguiente diagrama es conmutativo salvo isomorfismo:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{D} \\
\mathcal{C} \arrow[ur, "\mathcal{F}"] \arrow[r, hook, "h^{\wedge}"'] \arrow[ur, phantom, shift right=3, "\cong"] & \mathbf{Pre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}} \arrow[u, "\mathcal{F}_{\wedge}"']
\end{tikzcd}
\qquad
\left(\text{resp. }
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{D} \\
\mathcal{C} \arrow[ur, "\mathcal{F}"] \arrow[r, hook, "h^{\vee}"'] \arrow[ur, phantom, shift right=3, "\cong"] & \mathbf{coPre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}} \arrow[u, "\mathcal{F}_{\vee}"']
\end{tikzcd}\right)$$

TEOREMA 6.6. *Sea $\mathcal{C}$ una $\mathcal{U}$-categoría pequeña y $\mathcal{D}$ una $\mathcal{U}$-categoría canónicamente cocompleta (resp. completa). Si $\mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{D}$ es un funtor, el funtor $\mathcal{F}_\wedge = \mathrm{Kan}^{\mathrm{i}}(\mathcal{F})$ (resp. $\mathcal{F}_\vee = \mathrm{Kan}^{\mathrm{d}}(\mathcal{F})$) descrito en el Corolario 6.5 del párrafo anterior es adjunto izquierdo (resp. derecho) del funtor $\mathcal{F}^\wedge$ (resp. $\mathcal{F}^\vee$) descrito en el Párrafo §3.1 de la página 7:*

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{D} \arrow[d, bend left, "\mathcal{F}^\wedge"] \\
\mathcal{C} \arrow[ur, "\mathcal{F}"] \arrow[r, hook, "h^\wedge"'] \arrow[r, phantom, shift left=3ex, "\cong"] & \mathbf{Pre}(\mathcal{C}) \arrow[u, "\mathcal{F}_\wedge"] \arrow[u, phantom, shift right=2ex, "\dashv"]
\end{tikzcd}
\quad
\left(
\text{resp.}\quad
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{D} \arrow[d, bend left, "\mathcal{F}^\vee"] \\
\mathcal{C} \arrow[ur, "\mathcal{F}"] \arrow[r, hook, "h^\vee"'] \arrow[r, phantom, shift left=3ex, "\cong"] & \mathbf{coPre}(\mathcal{C}) \arrow[u, "\mathcal{F}_\vee"] \arrow[u, phantom, shift right=2ex, "\vdash"]
\end{tikzcd}
\right)
$$

En particular, si $(\mathrm{K}(\mathcal{F}), \theta(\mathcal{F}))$ es una extensión de Kan izquierda (resp. derecha) de $\mathcal{F}$ a lo largo de $h^\wedge$ (resp. $h^\vee$) entonces $\mathrm{K}(\mathcal{F}) \dashv \mathcal{F}^\wedge$ (resp. $\mathrm{K}(\mathcal{F}) \vdash \mathcal{F}^\vee$).

DEMOSTRACIÓN. Probaremos que $\mathcal{F}_\wedge$ es adjunto izquierdo de $\mathcal{F}^\wedge$. La otra parte se hace de manera análoga.

Para ello recordemos primero que en este caso (22) de la página 52, es una biyección binatural:

$$\mathcal{D}(\mathcal{F}_\wedge(F), d) \xrightarrow{\ \eta_{F,d}\ } \mathcal{D}^{h^\wedge \downarrow F}(\mathcal{F} \circ (\pi \downarrow F), k_{h^\wedge \downarrow F}(d))$$

para todo objeto F en $\mathbf{Pre}(\mathcal{C})$ y d en $\mathcal{D}$. Se sigue que para lo deseado basta dar una biyección binatural:

$$
\begin{array}{ccc}
\mathbf{Pre}(\mathcal{C})(F, \mathcal{F}^\wedge(d)) & \longleftrightarrow & \mathcal{D}^{h^\wedge \downarrow F}(\mathcal{F} \circ (\pi \downarrow F), k_{h^\wedge \downarrow F}(d)) \\
\nu & \longleftrightarrow & \tau
\end{array}
$$

Ésta se obtiene de la formula $\nu_a(u) = \tau_{(a,u)}$, para todo objeto a en $\mathcal{C}$ y u elemento de $F(a)$. ✠

Si $\mathcal{C}$ es una $\mathcal{U}$-categoría pequeña, por el Lema de Yoneda el funtor $\mathcal{F}^\wedge$ (resp. $\mathcal{F}^\vee$) descrito en el Párrafo §3.1 de la página 7 asociado al funtor $\mathcal{F} = h^\wedge$ (resp. $\mathcal{F} = h^\vee$) es isomorfo al funtor identidad de la categoría de $\mathcal{U}$-pregavillas (resp. $\mathcal{U}$-copreagvillas). Si consideramos entonces a $\mathbf{Pre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}}$ (resp. $\mathbf{coPre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}}$) como una $\mathcal{U}$-categoría canónicamente cocompleta (resp. completa), el Corolario 6.5 del Párrafo anterior define una extensión de Kan izquierda (resp. derecha) de $h^\wedge$ (resp. $h^\vee$) a lo largo de $h^\wedge$ (resp. $h^\vee$), $(\mathrm{K}(\mathcal{F}), \theta(\mathcal{F}))$, y por el Teorema anterior $\mathrm{K}(\mathcal{F}) \dashv \mathrm{id}$ (resp. $\mathrm{K}(\mathcal{F}) \vdash \mathrm{id}$), es decir, $\mathrm{K}(\mathcal{F}) \cong \mathrm{id}$. Tenemos entonces:

COROLARIO 6.7. *Si $\mathcal{C}$ es una $\mathcal{U}$-categoría pequeña, $\mathrm{id}_{\mathbf{Pre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}}}$ $\left(\text{resp. } \mathrm{id}_{\mathbf{coPre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}}}\right)$ es una extensión de Kan izquierda (resp. derecha) de $h^\wedge$ (resp. $h^\vee$) a lo largo de $h^\wedge$ (resp. $h^\vee$). En particular, para toda $\mathcal{U}$-pregavilla (resp. $\mathcal{U}$-copregavilla) F en $\mathcal{C}$ hay* *un isomorfismo:*

$$\mathsf{F} \cong \mathsf{colím}(\mathsf{h}^{\wedge} \downarrow \mathsf{F}, \mathsf{h}^{\wedge} \circ (\pi \downarrow \mathsf{F})) \qquad \left(\textit{resp.} \quad \mathsf{F} \cong \mathsf{lím}(\mathsf{F} \downarrow \mathsf{h}^{\vee}, \mathsf{h}^{\vee} \circ (\mathsf{F} \downarrow \pi)) \right),$$

es decir, toda $\mathcal{U}$-pregavilla (resp. $\mathcal{U}$-copregavilla) es colímite (resp. límite) de $\mathcal{U}$-pregavillas (resp. $\mathcal{U}$-copregavillas) representables.

Como una aplicación de este Corolario, tenemos:

COROLARIO 6.8. *Sea $\mathcal{C}$ una $\mathcal{U}$-categoría pequeña. Si* F *y* G *son dos $\mathcal{U}$-pregavillas (resp. $\mathcal{U}$-copregavillas) en $\mathcal{C}$ hay un isomorfismo:*

$$\mathbf{Pre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}}(\mathsf{F}, \mathsf{G}) \cong \mathsf{lím}((\mathsf{h}^{\wedge} \downarrow \mathsf{F})^{\mathrm{op}}, \mathsf{G} \circ (\pi \downarrow \mathsf{F})^{\mathrm{op}})$$

$$\left(\textit{resp.} \quad \mathbf{coPre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}}(\mathsf{F}, \mathsf{G}) \cong \mathsf{lím}(\mathsf{G} \downarrow \mathsf{h}^{\vee}, \mathsf{F} \circ (\mathsf{G} \downarrow \pi)) \right)$$

DEMOSTRACIÓN. Por el Corolario 6.7 tenemos un isomorfismo:

$$\mathbf{Pre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}}(\mathsf{F}, \mathsf{G}) \cong \mathbf{Pre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}}\left(\mathsf{colím}(\mathsf{h}^{\wedge} \downarrow \mathsf{F}, \mathsf{h}^{\wedge} \circ (\pi \downarrow \mathsf{F})), \mathsf{G}\right)$$

$$\left(\text{resp.} \quad \mathbf{coPre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}}(\mathsf{F}, \mathsf{G}) \cong \mathbf{coPre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}}\left(\mathsf{F}, \mathsf{lím}(\mathsf{G} \downarrow \mathsf{h}^{\vee}, \mathsf{h}^{\vee} \circ (\mathsf{G} \downarrow \pi))\right) \right)$$

Ahora, por el Ejemplo §5.1.3 de la página 44, se tiene un isomorfismo entre el conjunto:

$$\mathbf{Pre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}}\left(\mathsf{colím}(\mathsf{h}^{\wedge} \downarrow \mathsf{F}, \mathsf{h}^{\wedge} \circ (\pi \downarrow \mathsf{F})), \mathsf{G}\right)$$

$$\left(\text{resp.} \quad \mathbf{coPre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}}\left(\mathsf{F}, \mathsf{lím}(\mathsf{G} \downarrow \mathsf{h}^{\vee}, \mathsf{h}^{\vee} \circ (\mathsf{G} \downarrow \pi))\right) \right)$$

y el conjunto:

$$\mathsf{lím}\left((\mathsf{h}^{\wedge} \downarrow \mathsf{F})^{\mathrm{op}}, \mathbf{Pre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}}(-, \mathsf{G}) \circ (\mathsf{h}^{\wedge})^{\mathrm{op}} \circ (\mathsf{h}^{\wedge} \downarrow \mathsf{F})^{\mathrm{op}}\right)$$

$$\left(\text{resp.} \quad \mathsf{lím}\left(\mathsf{G} \downarrow \mathsf{h}^{\vee}, \mathbf{coPre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}}(\mathsf{F}, -) \circ \mathsf{h}^{\vee} \circ (\mathsf{G} \downarrow \pi)\right) \right)$$

El resultado se sigue entonces del isomorfismo determinado por el Lema de Yoneda:

$$\mathbf{Pre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}}(-, \mathsf{G}) \circ (\mathsf{h}^{\wedge})^{\mathrm{op}} \cong \mathsf{G} \qquad \left(\text{resp.} \quad \mathbf{coPre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}}(\mathsf{F}, -) \circ \mathsf{h}^{\vee} \cong \mathsf{F} \right)$$

✠

Como otra aplicación del Corolario 6.7 de arriba, identificaremos ahora a la imagen escencial del funtor $\mathcal{D}^{\mathcal{C}} \xrightarrow{\mathrm{Kan}^{\mathrm{i}}} \mathcal{D}^{\mathbf{Pre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}}}$ $\left(\text{resp. } \mathcal{D}^{\mathcal{C}} \xrightarrow{\mathrm{Kan}^{\mathrm{d}}} \mathcal{D}^{\mathbf{coPre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}}} \right)$.

COROLARIO 6.9. *Sea $\mathcal{C}$ una $\mathcal{U}$-categoría pequeña y $\mathcal{D}$ una $\mathcal{U}$-categoría canónicamente cocompleta (resp. completa). Si $\mathbf{Pre}(\mathcal{C})_{\mathcal{A}} \xrightarrow{\mathcal{G}} \mathcal{D}$ (resp. $\mathbf{coPre}(\mathcal{C})_{\mathcal{A}} \xrightarrow{\mathcal{G}} \mathcal{D}$) es un funtor, los siguientes enunciados son equivalentes:*

(i) $\mathrm{Kan}^{\mathrm{i}}(\mathcal{G} \circ \mathsf{h}^{\wedge}) \cong \mathcal{G}$ (*resp.* $\mathrm{Kan}^{\mathrm{d}}(\mathcal{G} \circ \mathsf{h}^{\vee} \cong \mathcal{G})$.

(ii) *Existe* $\mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{D}$ *tal que* $\mathrm{Kan^i}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}_\wedge \cong \mathcal{G}$ *(resp.* $\mathrm{Kan^d}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}_\vee \cong \mathcal{G}$*).*

(iii) $\mathcal{G}$ *tiene un adjunto derecho (resp. izquierdo).*

(iv) $\mathcal{G}$ *conmuta con colímites (resp. límites).*

En particular, los funtores:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D}^{\mathcal{C}} \arrow[r, bend left, "\mathrm{Kan^i}"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{D}^{\mathsf{Pre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}}} \arrow[l, bend left, "\mathcal{D}^{(h^\wedge)}"] \end{tikzcd} \qquad \left(\textit{resp.} \quad \begin{tikzcd} \mathcal{D}^{\mathcal{C}} \arrow[r, bend right, "\mathrm{Kan^d}"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{D}^{\mathsf{coPre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}}} \arrow[l, bend right, "\mathcal{D}^{(h^\vee)}"'] \end{tikzcd} \right)$$

inducen una equivalencia entre la $\mathcal{U}^+$*-categoría pequeña* $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ *y la subcategoría plena de* $\mathcal{D}^{\mathsf{Pre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}}}$ $\big($*resp.* $\mathcal{D}^{\mathsf{coPre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}}}\big)$ *cuyos objetos son los funtores que conmutan con colímites (resp. límites).*

DEMOSTRACIÓN.

(i)⇒(ii) es inmediato.

(ii)⇒(iii) se sigue del Teorema 6.4 de arriba.

(iii)⇒(iv) se muestra en el Ejemplo §5.1.2 de la página 43.

(iv)⇒(i) Si F es una $\mathcal{U}$-pregavila en $\mathcal{C}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\mathsf{F}) &\cong \mathcal{G}\Big(\mathsf{colím}\Big(h^\wedge \downarrow \mathsf{F}, h^\wedge \circ (\pi \downarrow \mathsf{F})\Big)\Big) && \text{(Corolario 6.7)} \\ &\cong \mathsf{colím}\Big(h^\wedge \downarrow \mathsf{F}, \mathcal{G} \circ h^\wedge \circ (\pi \downarrow \mathsf{F})\Big) && \text{(Hipótesis)} \\ &\cong \mathrm{Kan^i}(\mathcal{G} \circ h^\wedge)(\mathsf{F}) && \text{(Definición)} \end{aligned}$$

(Análogamente si F es una $\mathcal{U}$-copregavilla). ✠

CAPÍTULO

3

Conjuntos Simpliciales

1. Conjuntos simpliciales

§1.1. La categoría simplicial. Todo número natural no cero $n = \{0, \dots, n-1\}$ puede verse como un conjunto no vacío totalmente ordenado, con el orden inducido por la contención de sus elementos. Denotamos a este conjunto ordenado como

$$[n-1] := \{0 < 1 < \cdots < n-1\}$$

y definimos la *categoría simplicial* $\boldsymbol{\Delta}$, como la subcategoría plena de ConO que tiene por objetos a los conjuntos totalmente ordenados $[n]$, para toda $n \in \mathbb{N}$.

Se sigue que $\boldsymbol{\Delta}$ es una $\mathcal{U}$-categoría pequeña y que la imagen esencial del funtor fiel y pleno inducido $\boldsymbol{\Delta} \hookrightarrow \mathsf{ConO}$, consiste de los conjuntos finitos no vacíos totalmente ordenados.

De entre los morfismos de la categoría simplicial se tienen algunos de mayor importancia:

El morfismo i*-cara* $[n-1] \xrightarrow{\delta_n^i} [n]$ definido para $0 \le i \le n$, es la función inyectiva que preserva el orden y que no tiene a i en su imagen, es decir,

$$\delta_n^i(j) = \begin{cases} j & \text{si } j < i \\ j+1 & \text{si } j \geq i \end{cases}$$

El morfismo j*-degenerado* $[n+1] \xrightarrow{\sigma_n^j} [n]$ definido para $0 \le j \le n$, es la función suprayectiva que preserva el orden y que asocia a j y $j+1$ el mismo elemento j, es decir,

$$\sigma_n^j(i) = \begin{cases} i & \text{si } i \leq j \\ i-1 & \text{si } i > j \end{cases}$$

La importancia de estos morfismos se puede apreciar en el siguiente enunciado:

PROPOSICIÓN 1.1. *Si* $[n] \xrightarrow{f} [m]$ *es un morfismo de la categoría simplicial, existe una única descomposición de la forma*

$$f = \delta_m^{i_1} \circ \delta_{m-1}^{i_2} \circ \cdots \circ \delta_{m-s+1}^{i_s} \circ \sigma_{n-t}^{j_1} \circ \sigma_{n-t+1}^{j_2} \circ \cdots \circ \sigma_{n-1}^{j_t}$$

donde $m \geq i_1 > \cdots > i_s \geq 0$, $n \geq j_t > \cdots > j_1 \geq 0$ *y* $m = n - t + s$.

En particular, f *es inyectiva (resp. suprayectiva) si y sólo si* f *es composición de morfismos cara (resp. degenerados).*

DEMOSTRACIÓN. El resultado se sigue fácilmente si $n \geq j_t > \cdots > j_1 \geq 0$ son tales que $f(j_k) = f(j_k + 1)$ y $m \geq i_1 > \cdots > i_s \geq 0$ tales que $i_k \notin f([n])$. ✠

Con algunos cálculos adicionales se puede concluir el siguiente:

TEOREMA 1.2. *Si* $\mathcal{A}$ *es una categoría arbitraria, dar un funtor* $\Delta \xrightarrow{\mathcal{X}} \mathcal{A}$ *es equivalente a elegir para cada número natural* n *un objeto* $\mathcal{X}^n$ *en* $\mathcal{A}$ *y a tener dos familias de morfismos:*

$$\left\{ \mathcal{X}^{n-1} \xrightarrow{\delta_n^i} \mathcal{X}^n \;\middle|\; 0 \leq i \leq n \right\}_{n \in \mathbb{N}} \quad y \quad \left\{ \mathcal{X}^{n+1} \xrightarrow{\sigma_n^j} \mathcal{X}^n \;\middle|\; 0 \leq j \leq n \right\}_{n \in \mathbb{N}} \tag{23}$$

tales que las siguientes relaciones se cumplen:

$$\begin{aligned} \delta_{n+1}^j \circ \delta_n^i &= \delta_{n+1}^i \circ \delta_n^{j-1} && si\ i < j \\ \sigma_n^j \circ \sigma_{n+1}^i &= \sigma_n^i \circ \sigma_{n+1}^{j+1} && si\ i \leq j \\ \sigma_n^j \circ \delta_{n+1}^i &= \begin{cases} \delta_n^i \circ \sigma_{n-1}^{j-1} & si\ 0 \leq i < j \\ \mathrm{id}_{[n]} & si\ j \leq i \leq j+1 \\ \delta_n^{i-1} \circ \sigma_{n-1}^j & si\ j+1 < i \end{cases} \end{aligned} \tag{24}$$

§1.2. Objetos simpliciales. Si $\mathcal{A}$ es una categoría, a las pregavillas (resp. copregavillas) en la categoría simplicial con valores en $\mathcal{A}$ las llamamos *objetos simpliciales en* $\mathcal{A}$ (resp. *objetos cosimpliciales en* $\mathcal{A}$) y denotamos como $s\mathcal{A}$ (resp. $c\mathcal{A}$) a la categoría $\mathbf{Pre}(\Delta)_{\mathcal{A}} = \mathcal{A}^{\Delta^{op}}$ $\left(\text{resp. } \mathbf{coPre}(\Delta)_{\mathcal{A}} = (\mathcal{A}^{\Delta})^{op}\right)$.

Por el Teorema 1.2 de arriba un objeto simplicial (resp. cosimplicial) $\mathcal{X}$ en $\mathcal{A}$ consiste de la siguiente información:

(i) Para cada número natural $n \in \mathbb{N}$ un objeto $\mathcal{X}_n$ (resp. $\mathcal{X}^n$) de $\mathcal{A}$ al que llamamos *objeto de* n*-simplejos* (resp. n*-cosimplejos*).

(ii) Para cada número natural $n \in \mathbb{N}$ una familia de morfismos

$$\left\{ \mathcal{X}_n \xrightarrow{d_i^n} \mathcal{X}_{n-1} \;\middle|\; 0 \leq i \leq n \right\} \quad \left(\text{resp. } \left\{ \mathcal{X}^{n-1} \xrightarrow{\delta_n^i} \mathcal{X}^n \;\middle|\; 0 \leq i \leq n \right\}\right)$$

a los que llamados *morfismos* i*-cara*, y una familia de morfismos

$$\left\{ \mathcal{X}_n \xrightarrow{s_j^n} \mathcal{X}_{n+1} \;\middle|\; 0 \leq j \leq n \right\} \quad \left(\text{resp. } \left\{ \mathcal{X}^{n+1} \xrightarrow{\sigma_n^j} \mathcal{X}^n \;\middle|\; 0 \leq j \leq n \right\}\right)$$

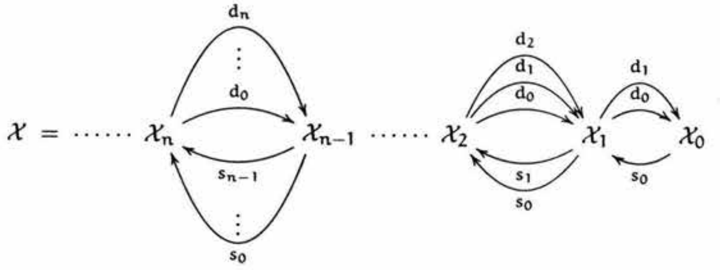
a los que llamados *morfismos* j-*degenerados*, tales que las siguientes relaciones se cumplen:

$$
(25)\qquad
\begin{aligned}
d_i^n \circ d_j^{n+1} &= d_{j-1}^n \circ d_i^{n+1} && \text{si } i < j\\
s_i^{n+1} \circ s_j^n &= s_{j+1}^{n+1} \circ s_i^n && \text{si } i \le j\\
d_i^{n+1} \circ s_j^n &= \begin{cases} s_{j-1}^{n-1} \circ d_i^n & \text{si } 0 \le i < j\\ \mathrm{id}_{[n]} & \text{si } j \le i \le j+1\\ s_j^{n-1} \circ d_{i-1}^n & \text{si } j+1 < i \end{cases}
\end{aligned}
$$

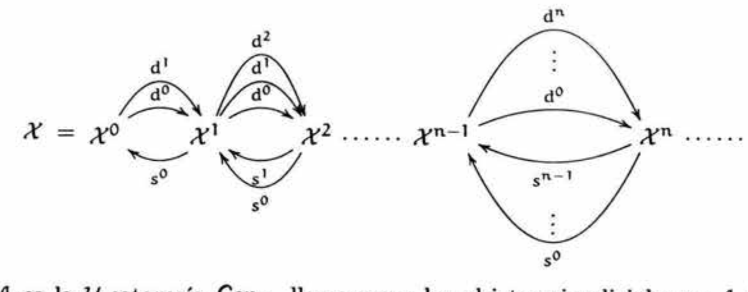
(resp. (24)).

Del mismo modo, un morfismo de objetos simpliciales (resp. cosimpliciales) $\mathcal{X} \xrightarrow{f} \mathcal{Y}$ consiste de una familia de morfismos $\{\mathcal{X}_n \xrightarrow{f_n} \mathcal{Y}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (resp. $\{\mathcal{Y}^n \xrightarrow{f^n} \mathcal{X}^n\}_{n\in\mathbb{N}}$) tales que $d_i^n \circ f_n = f_{n-1} \circ d_i^n$ y $s_j^n \circ f_n = f_{n+1} \circ s_j^n$ (resp. $f^n \circ \delta_n^i = \delta_n^i \circ f^{n-1}$ y $f^n \circ \sigma_n^j = \sigma_n^j \circ f^{n+1}$).

Un objeto simplicial $\mathcal{X}$ puede visualizarse como en el diagrama:

(26) 

y un objeto cosimplicial como en el diagrama:

(27) 

Si $\mathcal{A}$ es la $\mathcal{U}$-categoría $\mathsf{Con}_{\mathcal{U}}$, llamamos a los objetos simpliciales en $\mathcal{A}$ (resp. cosimpliciales) *conjuntos simpliciales* $\mathcal{U}$*-pequeños* (resp. *conjuntos cosimpliciales* $\mathcal{U}$*-pequeños*). Del mismo modo se habla de grupos simpliciales (resp. cosimpliciales) $\mathcal{U}$-pequeños o espacios topológicos simpliciales (resp. cosimpliciales) $\mathcal{U}$-pequeños.

Ejemplos:

§1.2.1. *El conjunto simplicial canónico de dimensión* n.

Si n es un número natural, el conjunto simplicial $\mathcal{U}$-pequeño representable por $[n]$ es denotado como Δ^n y llamado *el conjunto simplicial canónico de dimensión* n:

$$\begin{tikzcd} \Delta \arrow[r, hook] & \mathsf{sCon}_{\mathcal{U}} \\ {[n]} \arrow[d, "f"'] \arrow[r, mapsto, shorten <=1em, shorten >=1em] & \Delta^n \arrow[d, "f"] \\ {[m]} & \Delta^m \end{tikzcd}$$

Se sigue del Lema de Yoneda que si $\mathcal{X}$ es un conjunto simplicial $\mathcal{U}$-pequeño, hay una biyección canónica entre el conjunto de n-simplejos de $\mathcal{X}$ y el conjunto de morfismos $\mathsf{sCon}(\Delta^n, \mathcal{X})$.

§1.2.2. *Objeto simplicial constante.*

Si $\mathcal{A}$ es una categoría, todo objeto a de $\mathcal{A}$ tiene asociado un *objeto simplicial* (resp. *cosimplicial*) *constante*, al que denotamos con la misma letra a y que está definido como sigue:

(i) Para cada número natural n, el objeto de n-simplejos (resp. n-cosimplejos) es igual a a.

(ii) Para cada número natural n, los morfismos i-cara y los morfismos j-degenrado son los morfismos identidad de a.

§1.2.3. *El nervio de una cubierta.* Si X es un espacio topologico $\mathcal{U}$-pequeño, una cubierta $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de X tiene asociado un conjunto simplicial $\mathcal{U}$-pequeño $\mathcal{N}(\mathfrak{U})$, llamado *el nervio de la cubierta* $\mathfrak{U}$ y definido como sigue:

(i) Para cada número natural n, el conjunto de n-simplejos $\mathcal{N}(\mathfrak{U})_n$ es igual al subconjunto del producto cartesiano $\underbrace{A \times \cdots \times A}_{n+1}$ que consiste de las $(n+1)$-eadas $(\alpha_0, \cdots, \alpha_n)$ tales que la intersección $U_{\alpha_0} \cap \cdots \cap U_{\alpha_n}$ es no vacía.

(ii) Para cada número natural n, el morfismo i-cara $\mathcal{N}(\mathfrak{U})_n \xrightarrow{d_i^n} \mathcal{N}(\mathfrak{U})_{n-1}$ está definido por la asignación

$$(\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \mapsto (\alpha_0, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$$

y el morfismo j-degenerado $\mathcal{N}(\mathfrak{U})_n \xrightarrow{s_j^n} \mathcal{N}(\mathfrak{U})_{n+1}$ por la asignación

$$(\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \mapsto (\alpha_0, \ldots, \alpha_i, \alpha_i, \ldots, \alpha_n)$$

§1.2.4. *El complejo de Čech de una cubierta.*

Si X es un espacio topológico $\mathcal{U}$-pequeño, una cubierta $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de X tiene asociado un espacio topológico simplicial $\mathcal{U}$-pequeño $\check{C}(\mathfrak{U})$, llamado *el complejo de Čech de la cubierta* $\mathfrak{U}$ y definido como sigue:

(i) Para cada número natural n, el espacio topológico de n-simplejos $\check{C}(\mathfrak{U})_n$ es igual a la unión ajena de las intersecciones ordenadas de $n+1$ elementos de la cubierta:

$$\begin{aligned}
\check{C}(\mathfrak{U})_0 &= \coprod_{\alpha\in A} U_\alpha \\
\check{C}(\mathfrak{U})_1 &= \coprod_{(\alpha,\beta)\in A^2} (U_\alpha \cap U_\beta) \\
&\vdots \\
\check{C}(\mathfrak{U})_n &= \coprod_{(\alpha_0,\dots,\alpha_n)\in A^{n+1}} (U_{\alpha_0} \cap \cdots \cap U_{\alpha_n}) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

(ii) Para cada número natural n, el morfismo i-cara $\check{C}(\mathfrak{U})_n \xrightarrow{d_i^n} \check{C}(\mathfrak{U})_{n-1}$ es el único morfismo que restringido a la intesección ordenada $U_{\alpha_0} \cap \cdots \cap U_{\alpha_n}$, es igual a la inclusión:

$$(U_{\alpha_0} \cap \cdots \cap U_{\alpha_n}) \hookrightarrow (U_{\alpha_0} \cap \cdots \cap U_{\alpha_{i-1}} \cap U_{\alpha_{i+1}} \cap \cdots \cap U_{\alpha_n}) \hookrightarrow \check{C}(\mathfrak{U})_{n-1}$$

y el morfismo j-degenerado $\check{C}(\mathfrak{U})_n \xrightarrow{s_j^n} \check{C}(\mathfrak{U})_{n+1}$ es el único morfismo que restringido a la intesección ordenada $U_{\alpha_0} \cap \cdots \cap U_{\alpha_n}$, es igual a la inclusión:

$$(U_{\alpha_0} \cap \cdots \cap U_{\alpha_n}) \xrightarrow{\mathrm{id}} (U_{\alpha_0} \cap \cdots \cap U_{\alpha_i} \cap U_{\alpha_i} \cap \cdots \cap U_{\alpha_n}) \hookrightarrow \check{C}(\mathfrak{U})_{n+1}$$

Observese que las inclusiones de cada abierto de la cubierta $\mathfrak{U}$ en X, definen un morfismo de espacios simpliciales $\check{C}(\mathfrak{U}) \xrightarrow{\varphi_{\mathfrak{U}}} X$, del complejo de Čech de la cubierta $\mathfrak{U}$ en el espacio topológico simplicial constante asociado a X.

§1.2.5. *El nervio de un grupo topológico.*

Si G es un grupo topológico $\mathcal{U}$-pequeño, definimos *el nervio de* G como el espacio topológico simplicial $\mathcal{U}$-pequeño $\mathcal{N}(G)$, descrito como sigue:

(i) Para cada número natural n, el espacio de n-simplejos $\mathcal{N}(G)_n$ es igual al producto cartesiano de n copias de G, con la topología producto:

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}(G)_0 &= 1\\
\mathcal{N}(G)_1 &= G\\
\mathcal{N}(G)_2 &= G \times G\\
&\vdots\\
\mathcal{N}(G)_n &= \underbrace{G \times \cdots \times G}_{n}\\
&\vdots
\end{aligned}$$

(ii) Para cada número natural n, el morfismo i-cara $\mathcal{N}(G)_n \xrightarrow{d_i^n} \mathcal{N}(G)_{n-1}$ está definido por la asignación:

$$(a_1, \dots, a_n) \mapsto \begin{cases} (a_1, \dots, a_{i-2}, a_{i-1}a_i, a_{i+1} \dots, a_n) & \text{si } 0 < i < n\\ (a_2, \dots, a_n) & \text{si } i = 0\\ (a_1, \dots, a_{n-1}) & \text{si } i = n \end{cases}$$

y el morfismo j-degenerado $\mathcal{N}(G)_n \xrightarrow{s_j^n} \mathcal{N}(G)_{n+1}$ por la asignación:

$$(a_1, \dots, a_n) \mapsto (a_1, \dots, a_{i-1}, e, a_i, \dots, a_n)$$

También, G tiene asociado un G-espacio topológico simplicial $\mathcal{U}$-pequeño $\mathcal{N}'(G)$, al que llamamos *el nervio equivariante de* G y que está definido como sigue:

(i) Para cada número natural n, el G-espacio topológico de n-simplejos $\mathcal{N}'(G)_n$ es igual al producto cartesiano de $n+1$ copias de G, con la topología producto y la acción dada por multiplicación en cada variable:

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}'(G)_0 &= G\\
\mathcal{N}'(G)_1 &= G \times G\\
&\vdots\\
\mathcal{N}'(G)_n &= \underbrace{G \times \cdots \times G}_{n+1}\\
&\vdots
\end{aligned}$$

(ii) Para cada número natural n, el morfismo i-cara $\mathcal{N}'(G)_n \xrightarrow{d_i^n} \mathcal{N}'(G)_{n-1}$ está definido por la asignación:

$$(a_1, \ldots, a_{n+1}) \mapsto (a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_{n+1})$$

y el morfismo j-degenerado $\mathcal{N}'(G)_n \xrightarrow{s_j^n} \mathcal{N}'(G)_{n+1}$ por la asignación:

$$(a_1, \ldots, a_{n+1}) \mapsto (a_1, \ldots, a_j, a_j, \ldots, a_{n+1})$$

Observese que si consideramos al nervio de G como un G-espacio topológico simplicial $\mathcal{U}$-pequeño con acción trivial ($a \cdot g = a$ para toda g), el morfismo de G-espacio topológicos simpliciales U-pequeños $\mathcal{N}'(G) \xrightarrow{\varphi} \mathcal{N}(G)$, definido para cada n por la asignación:

$$(a_1, \ldots, a_{n+1}) \mapsto (a_1 a_2^{-1}, \ldots, a_i a_{i+1}^{-1}, \ldots, a_n a_{n+1}^{-1}),$$

es tal que su imagen bajo el funtor:

$$(28) \qquad (\mathsf{G\text{-}Top}_{\mathcal{U}})^{\Delta^{op}} = s(\mathsf{G\text{-}Top}_{\mathcal{U}}) \xrightarrow{\pi^{\Delta^{op}}} s\mathsf{Top}_{\mathcal{U}} = (\mathsf{Top}_{\mathcal{U}})^{\Delta^{op}}$$

es un isomorfismo de espacios topológicos simpliciales, donde $\mathsf{G\text{-}Top}_{\mathcal{U}} \xrightarrow{\pi} \mathsf{Top}_{\mathcal{U}}$ denota al funtor que a cada G-espacio topológico $\mathcal{U}$-pequeño asocia su espacio de órbitas.

§1.3. El esqueleto de un conjunto simplicial. Si n es un número natural, denotamos como $\Delta_{\leq n}$ a la subcategoría plena de Δ que tiene por objetos a los conjuntos ordenados $[m]$ para $m \leq n$. La categoría de pregavillas en $\Delta_{\leq n}$ con valores en una $\mathcal{U}$-categoría $\mathcal{A}$, es denotada como $s_n\mathcal{A}$ y llamada *la categoría de objetos simpliciales* n*-truncados en* $\mathcal{A}$.

El funtor canónico $\Delta_{\leq n} \overset{h_n}{\hookrightarrow} \Delta$ determina entonces un funtor $s\mathcal{A} \xrightarrow{\nu_n} s_n\mathcal{A}$, que a cada objeto simplicial $\mathcal{X}$ en $\mathcal{A}$ asocia su n-*truncación*. Más aún, si la $\mathcal{U}$-categoría $\mathcal{A}$ tiene colímites finitos canónicos (resp. límites finitos canónicos), el Corolario 6.5 de la página 53 determina un funtor fiel y pleno Kan_n^i (resp. Kan_n^d), el cual es adjunto izquierdo (resp. derecho) de ν_n:

(29)

$$\begin{tikzcd} s_n\mathcal{A} \arrow[r, hook, bend left, "\mathrm{Kan}_n^i"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & s\mathcal{A} \arrow[l, bend left, "\nu_n"] \end{tikzcd} \qquad \left(\text{resp.} \quad \begin{tikzcd} s_n\mathcal{A} \arrow[r, hook, bend right, "\mathrm{Kan}_n^d"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & s\mathcal{A} \arrow[l, bend right, "\nu_n"'] \end{tikzcd}\right)$$

Denotamos a la composición $\mathrm{Kan}_n^i \circ \nu_n$ (resp. $\mathrm{Kan}_n^d \circ \nu_n$) como Sk_n (resp. coSk_n) y si $\mathcal{X}$ es un objeto simplicial en $\mathcal{A}$, llamamos a $\mathsf{Sk}_n(\mathcal{X})$ (resp. $\mathsf{coSk}_n(\mathcal{X})$) el n-*esqueleto de* $\mathcal{X}$ (resp. n-*coesqueleto de* $\mathcal{X}$).

Se sigue de la adjunción (29) que se tiene un morfismo de objetos simpliciales:

$$\mathsf{Sk}_n(\mathcal{X}) \xrightarrow{\varepsilon_{\mathcal{X}}^n} \mathcal{X} \qquad \left(\text{resp.} \quad \mathcal{X} \xrightarrow{\eta_{\mathcal{X}}^n} \mathsf{coSk}_n(\mathcal{X})\right)$$

con la propiedad que al aplicarle el funtor ν_n, se obtiene un isomorfismo de objetos simpliciales n-truncados. En particular, este morfismo induce un isomorfismo entre los objetos de m-simplejos para $m \leq n$:

$$\mathrm{Sk}_n(\mathcal{X})_m \xrightarrow{(\varepsilon^n_{\mathcal{X}})_m} \mathcal{X}_m \qquad \text{(resp. } \mathcal{X}_m \xrightarrow{(\eta^n_{\mathcal{X}})_m} \mathrm{coSk}_n(\mathcal{X})_m \text{)}$$

El siguiente Teorema describe el objeto de m-simplejos de $\mathrm{Sk}_n(\mathcal{X})$ para $m > n$, en el caso en que $\mathcal{A}$ es la $\mathcal{U}$-categoría de conjuntos $\mathcal{U}$-pequeños:

TEOREMA 1.3. *Para todo conjunto simplicial $\mathcal{U}$-pequeño $\mathcal{X}$, $\mathrm{Sk}_n(\mathcal{X}) \xrightarrow{\varepsilon^n_{\mathcal{X}}} \mathcal{X}$ es un monomorfismo y el conjunto simplicial imagen, al que también llamamos el n-esqueleto de $\mathcal{X}$ y denotamos como $\mathrm{sk}_n(\mathcal{X})$, tiene como conjunto de m-simplejos a:*

$$\left\{ x \in \mathcal{X}_m \;\middle|\; \textit{existe } [m] \xrightarrow{s} [k] \textit{ suprayectiva con } k \leq n \textit{ y } y \in \mathcal{X}_k \textit{ tal que } x = \mathcal{X}_s(y) \right\}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{X}$ un conjunto simplicial $\mathcal{U}$-pequeño.
Descripción del esqueleto:
Si n y m son números naturales, por definición:

$$\mathrm{Sk}_n(\mathcal{X})_m = \mathrm{colím}\big(h_n^{op} \downarrow [m], \mathcal{X} \circ (\pi \downarrow [m])\big),$$

es decir, $\mathrm{Sk}_n(\mathcal{X})_m$ es igual al conjunto de las parejas (x, u), donde $[m] \xrightarrow{u} [k]$ es un morfismo con $k \leq n$ y $x \in \mathcal{X}_k$, módulo la relación de equivalencia más pequeña que identifica a (x, u) con (x', u'), si existe un morfismo $[k] \xrightarrow{f} [k']$ tal que $f \circ u = u'$ y $\mathcal{X}_f(x') = x$.

Más aún, por la Proposición 1.1 de la página 60, todo elemento de $\mathrm{Sk}_n(\mathcal{X})_m$ tiene un representante (x, u) donde $[m] \xrightarrow{u} [k]$ es una función suprayectiva. En efecto, si u no es suprayectiva, por la Proposición señalada se tiene una factorización $u = t \circ s$ donde $[m] \xrightarrow{s} [k']$ es suprayectiva y $[k'] \xrightarrow{t} [k]$ es inyectiva. Entonces, (x, u) y $(\mathcal{X}_t(x), s)$ represenatan al mismo elemento en $\mathrm{Sk}_n(\mathcal{X})_m$.
Identificación de la imagen de $(\varepsilon^n_{\mathcal{X}})_m$:
Observemos que con la descripción del conjunto $\mathrm{Sk}_n(\mathcal{X})_m$ dada arriba, se tiene que el morfismo $\mathrm{Sk}_n(\mathcal{X})_m \xrightarrow{(\varepsilon^n_{\mathcal{X}})_m} \mathcal{X}_m$ es el inducido por la asignación $(x, u) \mapsto \mathcal{X}_u(x)$, de modo que $\mathrm{sk}_n(\mathcal{X})_m$ es igual al conjunto deseado.
La función $(\varepsilon^n_{\mathcal{X}})_m$ es inyectiva:
Para esta parte probaremos primero el siguiente:

LEMA 1.4. *Si $\mathcal{X}$ es un conjunto simplicial y $x \in \mathcal{X}_k$, entonces existe una única pareja (a, f) donde $[k] \xrightarrow{f} [r]$ es una función suprayectiva y a es un elemento en $\mathcal{X}_r$, con las siguientes propiedades:*

(i) $\mathcal{X}_f(a) = x$
(ii) a *no es de la forma* $\mathcal{X}_g(b)$ *para* g *una función suprayectiva.*

DEMOSTRACIÓN.

Existencia: Una pareja (a, f) puede constrirse inductivamente considerando los morfismos degenerados.

Unicidad: Sean (a, f) y (a', f') dos parejas con las condiciones requeridas. Si $[r] \xrightarrow{g} [k]$ y $[r'] \xrightarrow{g'} [k]$ son dos funciones tales que $f \circ g = \mathrm{id}_{[r]}$ y $f \circ g' = \mathrm{id}_{[r']}$, usando que $\mathcal{X}_f(a) = x = \mathcal{X}_{f'}(a')$, tenemos que:

$$a = \mathcal{X}_{f' \circ g}(a') \text{ y } a' = \mathcal{X}_{f \circ g'}(a). \tag{30}$$

Se sigue de la propiedad (ii) y de la descomposición de la Proposición 1.1 de la página 60, que $f' \circ g$ y $f \circ g'$ son funciones inyectivas. En particular, $r \leq r'$ y $r' \leq r$, es decir, $r = r'$. Concluimos que $f' \circ g = \mathrm{id}_{[r]} = f \circ g'$, ya que solamente hay una función biyectiva de $[r]$ que preserva el orden. Se sigue de (30) que $a = a'$ y que el conjunto de inversos derechos de f y f' coinciden. Pero esto último implica que $f = f'$. ✠

Para mostrar ahora que la función $\mathsf{Sk}_n(\mathcal{X})_m \xrightarrow{(\varepsilon^n_{\mathcal{X}})_m} \mathcal{X}_m$ es inyectiva, debemos ver que si (x, u) y (x', u') son dos parejas donde $[m] \xrightarrow{u} [k]$ y $[m] \xrightarrow{u'} [k']$ son funciones suprayectivos con $k, k' \leq n$ y $\mathcal{X}_u(x) = \mathcal{X}_{u'}(x')$, entonces (x, u) y (x', u') representan al mismo elemento en $\mathsf{Sk}_n(\mathcal{X})_m$.

Si aplicamos entonces el Lema a x (resp. x'), obtenemos una función suprayectiva $[k] \xrightarrow{f'} [r]$ (resp. $[k'] \xrightarrow{f'} [r']$) y un elemento $a \in \mathcal{X}_r$ (resp. $a' \in \mathcal{X}'_r$), los cuales tienen las propiedades (i) y (ii) del Lema. En particular, (x, u) y $(a, u \circ f)$ (resp. (x', u') y $(a', u' \circ f')$) representan al mismo elemento $\mathsf{Sk}_n(\mathcal{X})_m$.

El resultado se sigue entonces de que como las parejas $(a, f \circ u)$ y $(a', f' \circ u')$ tienen ambas las propiedades (i) y (ii) del Lema para el elemento $\mathcal{X}_u(x) = \mathcal{X}_{u'}(x') \in \mathcal{X}_m$, entonces $(a, f \circ u) = (a', f' \circ u')$ ✠

Se sigue del Teorema anterior que si $\mathcal{X}$ es un conjunto simplicial $\mathcal{U}$-pequeño, hay una filtración:

$$\emptyset \subseteq \mathsf{sk}_0(\mathcal{X}) \subseteq \cdots \subseteq \mathsf{sk}_n(\mathcal{X}) \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{X}$$

tal que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathsf{sk}_n(\mathcal{X}) = \mathcal{X}$. En otras palabras, $\mathcal{X}$ es canónicamente isomorfo al colímite de la $\boldsymbol{\Delta}$-*gráfica esqueleto de* $\mathcal{X}$, definida como:

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{\Delta} \arrow[rr, "\mathsf{sk}(\mathcal{X})"] & & \mathsf{sCon}_{\mathcal{U}} \\ {[n]} \arrow[dd, hook] & & \mathsf{sk}_n(\mathcal{X}) \arrow[dd, hook] \\ & \arrow[r, mapsto] & \\ {[m]} & & \mathsf{sk}_m(\mathcal{X}) \end{tikzcd} \tag{31}$$

Decimos que $\mathcal{X}$ *es de dimensión finita* si existe un número natural n tal que $\mathsf{sk}_n(\mathcal{X}) = \mathcal{X}$. En otro caso decimos que $\mathcal{X}$ *es de dimensión infinita*. Si $\mathcal{X}$ es un conjunto simplicial de dimensión finita, llamamos al número natural más pequeño tal que $\mathsf{sk}_n(\mathcal{X}) = \mathcal{X}$, la *dimensión de* $\mathcal{X}$.

Se concluye así que la adjunción:

$$\begin{tikzcd} s_n\mathsf{Con}_{\mathcal{U}} \arrow[r, bend left, hook, "\mathrm{Kan}^i_n"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & s\mathsf{Con}_{\mathcal{U}} \arrow[l, bend left, "\nu_n"] \end{tikzcd}$$

determina una equivalencia de categorías entre $s_n\mathsf{Con}_{\mathcal{U}}$ y la subcategoría plena de $s\mathsf{Con}_{\mathcal{U}}$, que tiene como objetos a los conjuntos simpliciales de dimensión menor o igual a n.

Ejemplos:

§1.3.1. *El 0-esqueleto de un objeto simplicial.*

Sea $\mathcal{A}$ una $\mathcal{U}$-categoría con límites y colímites finitos canónicos.

Notemos en primer lugar que el funtor $s\mathcal{A} \xrightarrow{\nu_0} \mathcal{A}$ asocia a cada objeto simplicial en $\mathcal{A}$ su objeto de 0-simplejos. Por otro lado, como $h_0^{op} \downarrow [n]$ es isomorfa a la categoría $\mathbf{1}$, si a es un objeto de $\mathcal{A}$, $\mathrm{Kan}^i_0(a)$ es isomorfo al objeto simplicial constante asociado a a.

Se sigue que si $\mathcal{X}$ es un objeto simplicial en $\mathcal{A}$, $\mathsf{Sk}_0(\mathcal{X})$ es isomorfo al objeto simplicial constante asociado al objeto de 0-simplejos de $\mathcal{X}$.

En particular, si $\mathcal{A}$ es la categoría de conjuntos $\mathcal{U}$-pequeños, el funtor conjunto simplicial constante identifica a $\mathsf{Con}_{\mathcal{U}}$ con la subcategoría plena de $s\mathsf{Con}_{\mathcal{U}}$ cuyos objetos son los conjuntos simpliciales de dimensión 0.

§1.3.2. *El 0-coesqueleto de un objeto simplicial.*

Notemos que como la categoría $[n] \downarrow h_0^{op}$ es isomorfa a la categoría discreta $\mathbf{n+1}$, si a es un objeto de $\mathcal{A}$, el objeto de m-simplejos de $\mathrm{Kan}^d_0(a)$ es isomofo al producto a^{n+1}. Se sigue en particular que si $\mathcal{X}$ es un objeto simplicial en $\mathcal{A}$, el objeto de n-simplejos de $\mathsf{coSk}_0(\mathcal{X})$ es isomorfo a $\mathcal{X}_0^{n+1}$, donde $\mathcal{X}_0$ es el objeto de 0-simplejos de $\mathcal{X}$.

§1.3.3. *El conjunto simplicial canónico de dimensión* n *y su frontera.*

Si n es un número natural, $\boldsymbol{\Delta}^n$ es un conjunto simplicial de dimensión n. En efecto, usando el Teorema 1.3 de la página 66 y la Proposición 1.1 de la página 60, se sigue fácilmente que $\mathsf{sk}_n(\boldsymbol{\Delta}^n) = \boldsymbol{\Delta}^n$ y que $\mathsf{sk}_{n-1}(\boldsymbol{\Delta}^n)$ tiene como conjunto de m-simplejos, al conjunto de funciones no suprayectivas de $[m]$ en $[n]$.

Al conjunto simplicial $\mathsf{sk}_{n-1}(\boldsymbol{\Delta}^n)$ lo denotamos como $\partial\boldsymbol{\Delta}^n$ y lo llamamos *la frontera del conjunto simplicial canónico de dimensión* n. Notemos que los morfismos $\boldsymbol{\Delta}^{n-1} \xrightarrow{\delta_n^i} \boldsymbol{\Delta}^n$ asociados a las funciones caras $[n-1] \xrightarrow{\delta_n^i} [n]$, tienen su imagen en $\partial\boldsymbol{\Delta}^n$, pues las funciones caras no son suprayectivas. Se sigue que se tienen morfismos $\Delta^{n-1} \xrightarrow{\partial\delta_n^i} \partial\Delta^n$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \Delta^{n-1} \arrow[r, "\delta_n^i"] \arrow[dr, "\partial\delta_n^i"'] & \Delta^n \\ & \partial\Delta^n \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

El siguiente Teorema da una representación de la frontera del conjunto simplicial canónico:

TEOREMA 1.5. *Si* n *es un número natural, se tiene un diagrama exacto:*

$$(32) \qquad \coprod_{0\leq i<j\leq n} \Delta^{n-2} \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} \coprod_{0\leq k\leq n} \Delta^{n-1} \xrightarrow{\gamma} \partial\Delta^n$$

donde α *es inducido por los morfismos:*

$$\Delta^{n-2} \xrightarrow{\delta_{n-2}^{j-1}} \Delta^{n-1} \xhookrightarrow{\nu_i} \coprod_{0\leq k\leq n} \Delta^{n-1}$$

para cada $0 \leq i < j \leq n$*,* β *es inducido por los morfismo:*

$$\Delta^{n-2} \xrightarrow{\delta_{n-2}^{i}} \Delta^{n-1} \xhookrightarrow{\nu_j} \coprod_{0\leq k\leq n} \Delta^{n-1}$$

para cada $0 \leq i < j \leq n$ *y* γ *es inducido por los morfismo:*

$$\Delta^{n-1} \xrightarrow{\partial\delta_{n-1}^{k}} \partial\Delta^n$$

para cada $0 \leq k \leq n$.

DEMOSTRACIÓN. Sea m un número natural. Si $\sim$ denota la relación de equivalencia más pequeña en el conjunto

$$A_m := \coprod_{0\leq k\leq n} \Delta([m],[n-1]),$$

que identifica a dos funciones $[m] \xrightarrow{f} [n-1]$ y $[m] \xrightarrow{g} [n-1]$ si existe una función $[m] \xrightarrow{h} [n-2]$ tal que $\alpha_m(h) = \beta_m(h)$, debemos probar que existe un triangulo conmutativo:

$$(33) \qquad \begin{tikzcd} A_m \arrow[r, "\gamma_m"] \arrow[d, "\pi"'] & \left\{[m] \xrightarrow{f} [n] \;\middle|\; f \text{ no es suprayectiva}\right\} \\ A_m/\sim \arrow[ur, "\widetilde{\gamma}_m"'] & \end{tikzcd}$$

donde $\widetilde{\gamma}_m$ es una biyección.

Existencia de $\widetilde{\gamma}_m$*:*

Como $\delta^i_{n-1} \circ \delta^{j-1}_{n-2} = \delta^j_{n-1} \circ \delta^i_{n-2}$ si $i < j$, de las definiciones de α, β y γ, se sigue que $\gamma_m \circ \alpha_m(h) = \gamma_m \circ \beta_m(h)$ para toda función $[m] \xrightarrow{h} [n-2]$, es decir, existe $\widetilde{\gamma}_m$ como en el triangulo (33) de arriba.

$\widetilde{\gamma}_m$ *es suprayectiva:*

Si $[m] \xrightarrow{f} [n]$ es una función no suprayectiva, por la Proposición 1.1 de la página 60, $f = \delta^k_{n-1} \circ f'$ para alguna k, es decir, γ_m es suprayectiva y por lo tanto $\widetilde{\gamma}_m$ también.

$\widetilde{\gamma}_m$ *es inyectiva:*

Sean $[m] \xrightarrow{f} [n-1]$ y $[m] \xrightarrow{g} [n-1]$ elementos de A_m contenidos en los sumandos con índices k y k', respectivamente. Debemos probar que si $\delta^k_{n-1} \circ f = \gamma_m(f) = \gamma_m(g) = \delta^{k'}_{n-1} \circ g$, entonces $f \sim g$.

Se sigue de la Proposición 1.1 de la página 60 y de las igualdades (24) de la página 60, que si $k = k'$ entonces $f = g$, mientras que si $k > k'$, existen números naturales $m \geq i_1 > \cdots > i_r = k > \cdots > i_s = k' > \cdots > i_t \geq 0$ y una función inyectiva $[m] \xrightarrow{\sigma} [n-s-2]$, de modo que:

$$f = \delta^{i_1} \circ \cdots \circ \delta^{i_{r-1}} \circ \widehat{\delta^{i_r}} \circ \delta^{i_{r+1}} \circ \cdots \circ \delta^{i_{s-1}} \circ \delta^{i_s} \circ \delta^{i_{s+1}} \circ \cdots \circ \delta^{i_t} \circ \sigma$$

y

$$g = \delta^{i_1} \circ \cdots \circ \delta^{i_{r-1}} \circ \delta^{i_r - 1} \circ \delta^{i_{r+1}-1} \circ \cdots \circ \delta^{i_{s-1}-1} \circ \widehat{\delta^{i_s}} \circ \delta^{i_{s+1}} \circ \cdots \circ \delta^{i_t} \circ \sigma$$

donde $\widehat{-}$ significa omitir.

En este último caso se tiene entonces que $f \sim g$, pues si

$$h := \delta^{i_1 - 1} \circ \cdots \circ \delta^{i_{r-1}-1} \circ \widehat{\delta^{i_r}} \circ \delta^{i_{r+1}-1} \circ \cdots \circ \delta^{i_{s-1}-1} \circ \widehat{\delta^{i_s}} \circ \delta^{i_{s+1}} \circ \cdots \circ \delta^{i_t} \circ \sigma$$

es visto como un elemento del sumando correspondiente al índice $i_s < i_r$ en la suma:

$$\coprod_{0 \leq i < j \leq n} \Delta([m], [n-2]),$$

entonces $\alpha_m(h) = \delta^{i_r - 1} \circ h = g$ y $\beta_m(h) = \delta^{i_s} \circ h = f$ en los sumandos $i_s = k'$ e $i_r = k$, respectivamente. ✠

§1.3.4. *El* n*-esqueleto a partir del* $(n-1)$*-esqueleto.*

Sea $\mathcal{X}$ un conjunto simplicial $\mathcal{U}$-pequeño y sean n y k dos números naturales cualesqueiera. Motivados por el Lema de Yoneda, podemos definir la función:

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_n &\longrightarrow \mathrm{s}_k\mathrm{Con}_{\mathcal{U}}(\nu_k\Delta^n, \nu_k\mathcal{X}) \\ x &\longmapsto \{f \mapsto \mathcal{X}_f(x)\}_{m \leq k} \end{aligned}$$

que al componer con el adjunto izquierdo de ν_k, induce una función:

$$\mathcal{X}_n \longrightarrow \mathrm{sCon}_{\mathcal{U}}(\mathrm{sk}_k(\Delta^n), \mathrm{sk}_k(\mathcal{X}))\ .$$

Se sigue de la naturalidad de la definición de estas funciones, que si las reescribimos como:

$$\coprod_{x\in\mathcal{X}_n} \mathsf{sk}_k(\Delta^n) \longrightarrow \mathsf{sk}_k(\mathcal{X}) ,$$

obtenemos cuadrados conmutativos:

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{x\in\mathcal{X}_n} \mathsf{sk}_{k-1}(\Delta^n) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathsf{sk}_{k-1}\mathcal{X} \arrow[d, hook] \\
\coprod_{x\in\mathcal{X}_n} \mathsf{sk}_k\Delta^n \arrow[r] & \mathsf{sk}_k\mathcal{X}
\end{tikzcd}$$

En el caso en que $n = k$, tenemos el siguiente

TEOREMA 1.6. *Si $\mathcal{X}$ es un conjunto simplicial $\mathcal{U}$-pequeño, n un número natural y* $N\mathcal{X}_n := \mathcal{X}_n\backslash \mathsf{sk}_{n-1}\mathcal{X}_n$ *es el conjunto de* n-simplejos no degenerados de $\mathcal{X}$, *el siguiente diagrama es cocartesiano:*

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{x\in N\mathcal{X}_n} \partial\Delta^n \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathsf{sk}_{n-1}\mathcal{X} \arrow[d, hook] \\
\coprod_{x\in N\mathcal{X}_n} \Delta^n \arrow[r] & \mathsf{sk}_n\mathcal{X}
\end{tikzcd} \tag{34}$$

En otras palabras, $\mathsf{sk}_n\mathcal{X}$ se obtiene de adjuntar a $\mathsf{sk}_{n-1}\mathcal{X}$ por cada n-simplejo no degenerado de $\mathcal{X}$, un conjunto simplicial canónico de dimensión n a lo largo de su frontera.

DEMOSTRACIÓN. Como los objetos de (34) tienen dimensión $\leq n$, basta probar que el diagrama que se obtiene de aplicarle a éste el funtor sk_n es cocatesiano. Por otro lado, como el Kan^i_n conmuta con colímites, de hecho basta probar que el diagrama que se obtiene de (34) al aplicarle el funtor v_n es cocartesiano.

Más aún, ya que por el Teorema 1.3 de la página 66, las flechas verticales del diagrama (34) son la identidad en k-simplejos para $k < n$, solamente debemos ver que el siguiente diagrama es cocartesiano:

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{x\in N\mathcal{X}_n} (\partial\Delta^n)_n \arrow[r, "\phi|"] \arrow[d] & \mathsf{sk}_{n-1}(\mathcal{X})_n \arrow[d, hook, "v"] \\
\coprod_{x\in N\mathcal{X}_n} \Delta([n],[n]) \arrow[r, "\phi"'] & \mathcal{X}_n
\end{tikzcd}$$

Pero esto se sigue de la siguiente propiedad:

Si A es un conjunto $\mathcal{U}$-pequeño y tenemos dos funciones

$$\mathsf{sk}_{n-1}(\mathcal{X})_n \xrightarrow{\alpha} A \quad \text{y} \quad \coprod_{x \in N\mathcal{X}_n} \Delta([n],[n]) \xrightarrow{\beta} A\,,$$

entonces, la función $\mathcal{X}_n \xrightarrow{\psi} A$ definida como

$$\psi(x) = \begin{cases} \alpha(x) & \text{si } x \in \mathsf{sk}_{n-1}\mathcal{X}_n \\ \beta(\mathrm{id}_{[n]}, x) & \text{si } x \in N\mathcal{X}_n \end{cases}$$

es la única función tal que $\psi \circ \phi = \beta$ y $\psi \circ \nu = \alpha$.

✠

§1.3.5. *El esqueleto del nerivo y del complejo de Čech de una cubierta.* Sea X un espacio topológico $\mathcal{U}$-pequeño y $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una cubierta de X.

Por el Teorema 1.3 se sigue fácilmente que el conjunto de m-simplejos del n-esqueleto del nervio de $\mathfrak{U}$, esta dado por la formula:

$$\mathsf{sk}_n(\mathcal{N}(\mathfrak{U}))_m = \begin{cases} \mathcal{N}(\mathfrak{U})_m & \text{si } m \leq n \\ \Big\{(\alpha_0, \ldots, \alpha_m) \in \mathcal{N}(\mathfrak{U})_m \;\Big| & \\ \alpha_i = \alpha_{i+1} = \cdots = \alpha_{i+m-n} & \\ \text{para alguna } i\Big\} & \text{si } m > n \end{cases}$$

Del mismo modo, observando que el Teorema 1.3 también es válido para espacios simpliciales, se tiene que el conjunto de m-simplejos del n-esqueleto del Complejo de Čech de $\mathfrak{U}$ esta dado por la formula:

$$\mathsf{sk}_n(\check{C}(\mathfrak{U}))_m = \coprod_{(\alpha_0,\ldots,\alpha_m) \in \mathsf{sk}_n(\mathcal{N}(\mathfrak{U}))_m} (U_{\alpha_0} \cap \cdots \cap U_{\alpha_n})$$

Concluimos así que la dimensión de $\mathcal{N}(\mathfrak{U})$, es igual al mínimo número natural n, con la propiedad de que la intersección de cualesqueiera $n+1$ abiertos distintos de $\mathfrak{U}$, es vacía.

2. La realización geométrica de un conjunto simplicial

§2.1. El funtor realización geométrica. Cada objeto $[n]$ de la categoría simplicial $\mathbf{\Delta}$ tiene asociado un objeto geométrico $\mathbf{\Delta}^n_{\mathrm{top}}$, llamado el *$n$-simplejo canónico.* Éste se define como el subconjunto convexo más pequeño del espacio lineal $\mathbb{R}^{n+1}$, que contiene a la base canónica $\{e_0, \ldots, e_n\}$:

$$\mathbf{\Delta}^n_{\mathrm{top}} = \left\{ (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; x_i \geq 0 \text{ y } \sum_{i=0}^{n} x_i = 1 \right\}$$

Por el Teorema 6.6 de la página 55 el funtor realización geométrica es adjunto izquierdo del funtor singular:

(35)
$$\begin{tikzcd} & \mathsf{Top}_{\mathcal{U}} \arrow[d, bend left, "s(\cdot)"] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\ \Delta \arrow[ur, bend left, "\Delta_{\mathsf{top}}"] \arrow[r, hook, "h^{\wedge}"'] \arrow[ur, phantom, "\cong"] & \mathsf{sCon}_{\mathcal{U}} \arrow[u, "|\cdot|_{\mathsf{top}}"] \end{tikzcd}$$

El siguiente Teorema da una expresión más conocida de la realización geométrica de un conjunto simplicial.

TEOREMA 2.1. *Si $\mathcal{X}$ es un conjunto simplicial $\mathcal{U}$-pequeño y pensamos a los conjuntos de n-simplejos $\mathcal{X}_n$ como espacios topológicos con la topología discreta, la realización geométrica $|\mathcal{X}|_{\mathsf{top}}$ es homeomorfa al espacio topológico $|\mathcal{X}|$, definido como el cociente de la unión ajena*

$$\coprod_{n\in\mathbb{N}} \Delta^n_{\mathsf{top}} \times \mathcal{X}_n,$$

módulo la relación de equivalencia más pequeña que identifica a la pareja $(a, \mathcal{X}(f)(x))$ con la pareja $(\Delta^f_{\mathsf{top}}(a), x)$, para cada función $[n] \xrightarrow{f} [m]$ en Δ $\Big($Si $(a, x) \in \Delta^n_{\mathsf{top}} \times \mathcal{X}_n$, denotaremos como $[a, x]$ a su correspondiente clase en $|\mathcal{X}|\Big)$.

DEMOSTRACIÓN. Mostraremos que para todo espacio topológico $\mathcal{U}$-pequeño A, la función:

$$\begin{aligned} \mathsf{Top}_{\mathcal{U}}(|\mathcal{X}|, A) &\longrightarrow \mathsf{Top}_{\mathcal{U}}^{h^{\wedge}\downarrow\mathcal{X}}(\Delta_{\mathsf{top}} \circ (\pi \downarrow \mathcal{X}), k_A) \\ f &\longmapsto k_f \circ \eta \end{aligned}$$

es una biyección, donde

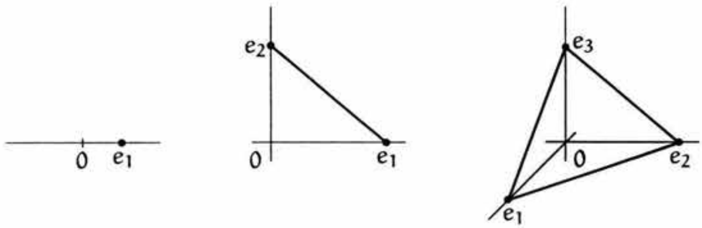
$$\begin{tikzcd} h^{\wedge}\downarrow\mathcal{X} \arrow[r, bend left, "\Delta_{\mathsf{top}}\circ(\pi\downarrow\mathcal{X})"] \arrow[r, bend right, "k_{|\mathcal{X}|}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\eta"] & \mathsf{Top}_{\mathcal{U}} \end{tikzcd}$$

está definida como $\eta_{([n],\varphi)}(a) = \big[a, \varphi_{[n]}(\mathrm{id}_{[n]})\big]$ para $([n], \varphi) \in h^{\wedge}\downarrow\mathcal{X}$ y $a \in \Delta^n_{\mathsf{top}}$.
Inyectividad:

Por el Lema de Yoneda la función:

(36)
$$\begin{aligned} \mathsf{sCon}_{\mathcal{U}}([n]^{\wedge}, \mathcal{X}) &\longrightarrow \mathcal{X}_n \\ \varphi &\longmapsto \varphi_{[n]}(\mathrm{id}_{[n]}) \end{aligned}$$

es una biyección. Por lo que para todo $[a, x] \in |\mathcal{X}|$, donde $x \in \mathcal{X}_n$ y $a \in \Delta^n_{\mathsf{top}}$, existe un morfismo $[n]^{\wedge} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{X}$ tal que $\eta_{([n],\varphi)}(a) = [a, x]$. Se concluye que si $k_f \circ \eta = k_g \circ \eta$ entonces $f = g$.



Δ^0_{top} 0-simplejo canónico | Δ^1_{top} 1-simplejo canónico | Δ^2_{top} 2-simplejo canónico

Una función de conjuntos $[n] \xrightarrow{f} [m]$ determina una función continua $\Delta^n_{top} \xrightarrow{\Delta^f_{top}} \Delta^m_{top}$, definida como la restricción de la única función lineal de $\mathbb{R}^{n+1}$ en $\mathbb{R}^{m+1}$ con la propiedad $e_i \mapsto e_{f(i)}$. Por ejemplo, el encaje natural de Δ^{n-1}_{top} en la i-ésima cara de Δ^n_{top} corresponde al morfismo i-cara $[n-1] \xrightarrow{\delta^i_n} [n]$ y la identificación natural de Δ^{n+1}_{top} sobre su j-ésima cara Δ^n_{top} corresponde al morfismo j-degenerado $[n+1] \xrightarrow{\sigma^j_n} [n]$. Denotamos por comodidad a estos morfismos, $\Delta^{\delta^i_n}_{top}$ y $\Delta^{\sigma^j_n}_{top}$, simplemente como δ^i_n y σ^j_n, respectivamente.

Se sigue fácilmente que estas asignaciones determinan un funtor $\Delta \xrightarrow{\Delta_{top}} \mathsf{Top}_{\mathcal{U}}$, de la categoría simplicial en la categoría de espacios topológicos $\mathcal{U}$-pequeños. En este caso, el funtor (5) de la página 9 es llamado el *funtor singular* y denotado $\mathsf{Top}_{\mathcal{U}} \xrightarrow{s(\cdot)} \mathsf{sCon}_{\mathcal{U}}$. Si X es un espacio topológico $\mathcal{U}$-pequeño, $s(X)$ esté determinado por la siguiente información:

(i) Para cada número natural n, el conjunto de n-simplejos es igual al conjunto $s(X)_n := \mathsf{Top}(\Delta^n_{top}, X)$.

(ii) Para cada número natural n, el morfismo i-cara $s(X)_n \xrightarrow{d^n_i} s(X)_{n-1}$ está dado por la composición con $\Delta^{n-1}_{top} \xrightarrow{\delta^i_n} \Delta^n_{top}$ y el morfismo j-degenerado $s(X)_n \xrightarrow{s^n_j} s(X)_{n+1}$ por la composición con $\Delta^{n+1}_{top} \xrightarrow{\sigma^j_n} \Delta^n_{top}$.

Como $\mathsf{Top}_{\mathcal{U}}$ es una $\mathcal{U}$-categoría canónicamente cocompleta, el Teorema 6.4 de la página 51 define una extensión de Kan izquierda de $\Delta \xrightarrow{\Delta_{top}} \mathsf{Top}_{\mathcal{U}}$ a lo largo de $\Delta \hookrightarrow \mathsf{sCon}_{\mathcal{U}}$, a la que denotamos como $\mathsf{sCon}_{\mathcal{U}} \xrightarrow{|\cdot|_{top}} \mathsf{Top}_{\mathcal{U}}$ y llamamos *el funtor realización geométrica*. Entonces, *la realización geométrica de un conjunto simplicial $\mathcal{U}$-pequeño $\mathcal{X}$*, está definida como:

$$|\mathcal{X}|_{top} := \operatorname{colím}\left(\Delta \downarrow \mathcal{X}, \Delta_{top} \circ \pi \downarrow \mathcal{X}\right).$$

Suprayectividad:

Sea $\varepsilon = \{\ \Delta^n_{\mathrm{top}} \xrightarrow{\varepsilon_{([n],\varphi)}} A\ \}_{([n],\varphi)}$ una transformación natural de $\Delta_{\mathrm{top}} \circ (\pi \downarrow \mathcal{X})$ en k_A. Si definimos la función:

$$\begin{array}{ccc} \coprod\limits_{n\in\mathbb{N}} \Delta^n_{\mathrm{top}} \times \mathcal{X}_n & \xrightarrow{\quad \bar{f}_\varepsilon \quad} & A \\ (x,a) & \longmapsto & \varepsilon_{([n],\varphi)}(a) \end{array}$$

donde $(a,x) \in \Delta^n_{\mathrm{top}} \times \mathcal{X}_n$ y $[n]^\wedge \xrightarrow{\varphi} \mathcal{X}$ es el único morfismo tal que $\varphi_{[n]}(\mathrm{id}_{[n]}) = x$ (biyección (36)); por la naturalidad de ε, $\bar{f}_\varepsilon$ se factoriza en un único morfismo $|\mathcal{X}| \xrightarrow{f_\varepsilon} A$ dado por $f_\varepsilon([a,x]) = \varepsilon_{([n],\varphi)}(a)$. Se concluye de la definición de η que $\varepsilon = k_{f_\varepsilon} \circ \eta$. ✠

§2.2. Ejemplos.

§2.2.1. *Conjuntos simpliciales canónicos.*

Como el funtor $\Delta \hookrightarrow \mathsf{sCon}_{\mathcal{U}}$ es fiel y pleno, de las propiedades de extensiones de Kan se sigue que para todo número natural n, la realización geométrica del conjunto simplicial canónico de dimensión n, es canónicamente homeomorfa al n-simplejo canónico. (Ver diagrama 35 de la página 74.)

§2.2.2. *La frontera del conjunto simplicial canónico.*

Observemos que si n es un número natural, como el funtor realización gemétrica conmuta con colímites, el diagrama:

$$\coprod_{0\leq i<j\leq n} |\Delta^{n-2}| \overset{|\alpha|}{\underset{|\beta|}{\rightrightarrows}} \coprod_{0\leq k\leq n} |\Delta^{n-1}| \xrightarrow{\quad |\gamma| \quad} |\partial\Delta^n|\,,$$

que se obtiene de aplicarle $|\cdot|$ al diagrama (32) de la página 69, es exacto.

Por otro lado, análogamente a como se definen los morfismos del diagrama (32) de la página 69, podemos definir otro diagrama exacto:

$$\coprod_{0\leq i<j\leq n} \Delta^{n-2}_{\mathrm{top}} \overset{\alpha'}{\underset{\beta'}{\rightrightarrows}} \coprod_{0\leq k\leq n} \Delta^{n-1}_{\mathrm{top}} \xrightarrow{\quad \gamma' \quad} \partial\Delta^n_{\mathrm{top}}$$

donde $\partial\Delta^n_{\mathrm{top}}$ denota a la frontera topológica de Δ^n_{top}.

De estas observaciones y del ejemplo §2.2.1, podemos concluir la siguiente:

PROPOSICIÓN 2.2. *Sea n un número natural. Módulo isomofismos canónicos, el morfismo $|\partial\Delta^n| \longrightarrow |\Delta^n|$ inducido por la inclusión $\partial\Delta^n \hookrightarrow \Delta^n$, corresponde a la inclusión $\partial\Delta^n_{\mathrm{top}} \hookrightarrow \Delta^n_{\mathrm{top}}$.*

§2.2.3. *Estructura celular de la realización geométrica.*

Si $\mathcal{X}$ es un conjunto simplicial $\mathcal{U}$-pequeño, sabemos que $\mathcal{X}$ es canónicamente isomorfo al colímite de la gráfica esqueleto $\mathsf{sk}(\mathcal{X})$ ((31) de la página 67). Como el funtor $|\cdot|$ conmuta con colímites, se sigue entonces que la realización geométrica de $\mathcal{X}$, es canónicamente isomorfo al colímite de la gráfica:

$$\begin{array}{ccc} \Delta & \xrightarrow{\mathsf{sk}(|\mathcal{X}|)} & \mathsf{Top}_{\mathcal{U}} \\ [n] & & |\mathsf{sk}_n(\mathcal{X})| \\ \big\downarrow & \longmapsto & \big\downarrow \\ [m] & & |\mathsf{sk}_m(\mathcal{X})| \end{array}$$

Más aún, por el Teorema 1.6 de la página 71 y por el Ejemplo §2.2.2 de la página 75, tenemos un diagrama cocartesiano:

(37)
$$\begin{tikzcd} \coprod_{x\in N\mathcal{X}_n} \partial\Delta^n_{\mathsf{top}} \arrow[r] \arrow[d, hook] & |\mathsf{sk}_{n-1}(\mathcal{X})| \arrow[d] \\ \coprod_{x\in N\mathcal{X}_n} \Delta^n_{\mathsf{top}} \arrow[r] & |\mathsf{sk}_n(\mathcal{X})| \end{tikzcd}$$

De esto podemos conluir, que si $\mathsf{sk}_n(|\mathcal{X}|)$ denota a la imagen de $|\mathsf{sk}_n(\mathcal{X})|$ en $|\mathcal{X}|$ por el morfismo canónico, se tiene una cadena:

$$\emptyset \subseteq \mathsf{sk}_0(|\mathcal{X}|) \subseteq \cdots \subseteq \mathsf{sk}_n(|\mathcal{X}|) \subseteq \cdots \subseteq |\mathcal{X}|$$

con las siguientes dos propiedades.

(i) $\mathsf{sk}_0(|\mathcal{X}|)$ es el espacio topológico discreto asociado al conjunto de 0-simplejos de $\mathcal{X}$, y $\mathsf{sk}_n(|\mathcal{X}|)$ se obtiene de adjuntar a $\mathsf{sk}_{n-1}(|\mathcal{X}|)$ por cada n-simplejo no degenerado de $\mathcal{X}$, un n-simplejo topológico a lo largo de su frontera.

(ii) Si $\mathcal{X} \xrightarrow{f} \mathcal{Y}$ es un morfismo de conjuntos simpliciales, entonces $|f|(\mathsf{sk}_n(|\mathcal{X}|)) \subseteq \mathsf{sk}_n(|\mathcal{Y}|)$ para toda n.

En otras palabras, el funtor $|\cdot|$ se puede ver como un funtor $\mathsf{sCon}_{\mathrm{U}} \xrightarrow{|\cdot|} \mathsf{CW}_{\mathcal{U}}$, donde $\mathsf{CW}_{\mathcal{U}}$ denota a la categoría que tiene por objetos a los complejos CW $\mathcal{U}$-pequeños, y cuyos morfismos son los morfismos celulares entre ellos.

§2.2.4. *Producto de conjuntos simpliciales.*

El siguiente resultado que no probaremos, es un Corolario del Teorema 2.1 de la página 74. Su prueba puede ser encontrada en **[Mil57]**.

COROLARIO 2.3. *Si $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$ son dos conjuntos simpliciales $\mathcal{U}$-pequeños, con $\mathcal{Y}$ finito*[1]*, la función asociada a las proyecciones:*

$$|\mathcal{X} \times \mathcal{Y}| \xrightarrow{\varphi} |\mathcal{X}| \times |\mathcal{Y}|,$$

es un isomorfismo de espacio topológicos.

[1] $\mathcal{Y}_n$ es un conjunto finito, para todo número natural n

En particular, si $\mathcal{X}$ es un conjuntos simplicial $\mathcal{U}$-pequeño, el espacio $|\mathcal{X} \times \Delta^1|$ es homeomorfo a $|\mathcal{X}| \times [0,1]$.

§2.2.5. *La realización geométrica del complejo de Čech de una cubierta.*
Motivados por el Teorema 2.1 de la página 74, si $\mathcal{X}$ es un espacio topológico simplicial $\mathcal{U}$-pequeño definimos su *realización geométrica*, a la que denotamos como $|\mathcal{X}|$, como el espacio topológico cociente de la únion ajena

$$\coprod_{n\in\mathbb{N}} \Delta^n_{\mathsf{top}} \times \mathcal{X}_n,$$

módulo la relación de equivalencia más pequeña que identifica a $\big(a, \mathcal{X}(f)(x)\big)$ con $\big(\Delta^f_{\mathsf{top}}(a), x\big)$, para cada función $[n] \xrightarrow{f} [m]$ en Δ.

Se sigue que si $\mathcal{X} \xrightarrow{f} \mathcal{Y}$ es un morfismo de espacios topológicos simpliciales, $\Delta^n_{\mathsf{top}} \times \mathcal{X}_n \xrightarrow{id \times f_n} \Delta^n_{\mathsf{top}} \times \mathcal{Y}_n$ determina una función $|\mathcal{X}| \xrightarrow{|f|} |\mathcal{Y}|$, de modo que se tiene un funtor $s\mathsf{Top}_{\mathfrak{U}} \xrightarrow{|\cdot|} \mathsf{Top}_{\mathcal{U}}$.

TEOREMA 2.4. *Sea X un espacio topológico y $\mathfrak{U}$ una cubierta de X. Si X tiene una partición de la unidad subordinada a la cubierta $\mathfrak{U}$, la función $|\check{C}(\mathfrak{U})| \longrightarrow |X|$ inducida por el morfismo canónico $\check{C}(\mathfrak{U}) \xrightarrow{\varphi} X$, es una equivalencia homotópica.*

DEMOSTRACIÓN. Ver [**DI**]. ✠

3. El espacio clasificante de una categoría pequeña

§3.1. El funtor espacio clasificante. Recuerdese que la categoría simplicial es una subcategoría plena de ConO. Si restringimos entonces el funtor $\mathsf{ConO} \longrightarrow \mathsf{cat}$ a la categoría simplicial Δ, obtenemos un funtor fiel y pleno al que denotamos $\Delta \xhookrightarrow{[-]} \mathsf{cat}$. En este caso, el funtor (5) de la página 9 es llamado *el nervio* y denotado $\mathsf{cat} \xrightarrow{\mathcal{N}(-)} s\mathsf{Con}$. Si $\mathcal{C}$ es una $\mathcal{U}$-categoría pequeña, *el nervio de* $\mathcal{C}$ es el conjunto simplicial $\mathcal{N}(\mathcal{C})$ descrito como sigue:

(i) Para cada número natural n, el conjunto de n-simplejos $\mathcal{N}(\mathcal{C})_n$ es igual al conjunto de sucesiones $a_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_n} a_{n+1}$ de n morfismos y $n+1$ objetos en $\mathcal{C}$:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{N}(\mathcal{C})_0 &=: \mathcal{C}_0 = \text{Conjunto de objetos de } \mathcal{C} \\
\mathcal{N}(\mathcal{C})_1 &=: \mathcal{C}_1 = \text{Conjunto de morfismos de } \mathcal{C} \\
\mathcal{N}(\mathcal{C})_2 &=: \mathcal{C}_2 = \{a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c\} \\
&\ \ \vdots \\
\mathcal{N}(\mathcal{C})_n &=: \mathcal{C}_n = \{a_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_n} a_{n+1}\} \\
&\ \ \vdots
\end{aligned}
$$

(ii) Para cada número natural n, el morfismo i-cara $\mathcal{C}_n \xrightarrow{d_i^n} \mathcal{C}_{n-1}$ está definido por la asignación:

$$
(a_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_n} a_{n+1}) \mapsto \begin{cases} a_1 \xrightarrow{f_1} \ldots a_{i-1} \xrightarrow{f_i \circ f_{i-1}} a_{i+1} \cdots \xrightarrow{f_n} a_{n+1} & \text{si } 0 < i < n \\ a_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_n} a_{n+1} & \text{si } i = 0 \\ a_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} a_n & \text{si } i = n \end{cases}
$$

y el morfismo j-degenerado $\mathcal{C}_n \xrightarrow{s_j^n} \mathcal{C}_{n+1}$ por la asignación:

$$
(a_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_n} a_{n+1}) \mapsto (a_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_{i-1}} a_j \xrightarrow{id} a_j \xrightarrow{f_i} \cdots \xrightarrow{f_n} a_{n+1})
$$

Del mismo modo, como cat es una $\mathcal{U}$-categoría canónicamente cocompleta, por la Propiedad 6.4 existe un funtor $\mathsf{sCon} \xrightarrow{|\cdot|_{\mathsf{cat}}} \mathsf{cat}$ al que llamamos *realización categórica*:

$$
|\mathcal{X}|_{\mathsf{cat}} := \mathsf{colím}(\Delta \downarrow \mathcal{X}, [-] \circ \pi \downarrow \mathcal{X})
$$

el cual por el Teorema 6.6 es adjunto izquierdo del funtor nervio $\mathsf{cat}_{\mathcal{U}} \xrightarrow{\mathcal{N}} \mathsf{sCon}_{\mathcal{U}}$:

(38)
$$
\begin{tikzcd}
& \mathsf{cat} \arrow[d, bend left, "\mathcal{N}(\cdot)"] \\
\Delta \arrow[ur, bend left, "{[-]}"] \arrow[r, hook, "h^\wedge"'] \arrow[ur, phantom, "\cong"] & \mathsf{sCon} \arrow[u, "|\cdot|_{\mathsf{cat}}"] \arrow[u, phantom, shift left=3, "\dashv"]
\end{tikzcd}
$$

Denotamos a la composición $|\mathcal{N}(\cdot)|$ como $\mathsf{cat}_{\mathcal{U}} \xrightarrow{B} \mathsf{Top}_{\mathcal{U}}$ y si $\mathcal{C}$ es una $\mathcal{U}$-categoría pequeña, llamamos a $B\mathcal{C}$ *el espacio clasificante de* $\mathcal{C}$.

Del Ejemplo §2.2.3 de la página 75, se sigue que el espacio clasificante de una $\mathcal{U}$-categoría pequeña $\mathcal{C}$ tiene una estructura de espacio CW, donde:

(i) Los objetos de $\mathcal{C}$ son las 0-celdas, por lo que determinan un punto en $B\mathcal{C}$ al que denotamos con la misma letra.

(ii) Los morfismos $a \xrightarrow{f} b$ en $\mathcal{C}$ distintos de la identidad son las 1-celdas, por lo que determina una trayectoría f no contante en $B\mathcal{C}$ que comienza en a y termina en b.

§3.1.1. *Transformaciones naturales y homotopías.*

Observemos que si $\mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{D}$ y $\mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{G}} \mathcal{D}$ son funtores, una transformación natural $\mathcal{F} \overset{\eta}{\Rightarrow} \mathcal{G}$ puede verse como un funtor $\mathcal{C} \times [1] \xrightarrow{\mathcal{H}} D$ donde

(i) $\mathcal{H}(a, 0) = \mathcal{F}(a)$ y $\mathcal{H}(a, 1) = \mathcal{G}(a)$ si a es un objeto de $\mathcal{C}$.

(ii) $\mathcal{H}(f, \mathrm{id}_{[0]}) = \mathcal{F}(f)$ y $\mathcal{H}(f, \mathrm{id}_{[1]}) = \mathcal{G}(f)$ si f es un morfismo de $\mathcal{C}$.

(iii) $\mathcal{H}(f, 0 < 1) = \mathcal{G}(f) \circ \eta_a = \eta_b \circ \mathcal{F}(f)$ si $a \xrightarrow{f} b$ es un morfismo en $\mathcal{C}$.

Como el funtor $\mathcal{N}(\cdot)$ conmuta con límites, se sigue del Corolario 2.3 de la página 76 la siguiente:

Proposición 3.1. *Si* $\mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{D}$ *y* $\mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{G}} \mathcal{D}$ *son funtores, una transformación natural* $\mathcal{F} \overset{\eta}{\Rightarrow} \mathcal{G}$ *determina una homotopía entre* $B(\mathcal{C}) \xrightarrow{B(\mathcal{F})} B(\mathcal{D})$ *y* $B(\mathcal{C}) \xrightarrow{B(\mathcal{G})} B(\mathcal{D})$.

En particular, si $\mathcal{C}$ *es una* $\mathcal{U}$*-categoría pequeña con un objeto final o un objeto inicial, el espacio* $B\mathcal{C}$ *es contraible.*

§3.1.2. *Cubrientes sobre* $B\mathcal{C}$.

Si $\mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{D}$ es un funtor, decimos que $\mathcal{F}$ *es un cubriente de categorías* si se cumple que para todo diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
{[0]} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\delta"'] & \mathcal{C} \arrow[d, "\mathcal{F}"] \\
{[n]} \arrow[r, "\varphi"'] & \mathcal{D}
\end{tikzcd}$$

existe un único morfismo $[n] \xrightarrow{\widetilde{\varphi}} \mathcal{C}$ tal que $\widetilde{\varphi} \circ \delta = \psi$ y $\mathcal{F} \circ \widetilde{\varphi} = \varphi$.

La relación entre los cubrientes de categorías y los cubrientes de espacio topológicos, es la siguiente:

Teorema 3.2. *Si* $\mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{D}$ *es un cubriente de categorías, entonces* $B(\mathcal{C}) \xrightarrow{B(\mathcal{F})} B(\mathcal{D})$ *es un cubriente de espacios.*

Demostración. Ver Apendice I seccion 2.2 de [**GZ67**]. ✠

§3.2. El grupo fundamental de $B\mathcal{C}$. Si $\mathcal{C}$ es una categoría $\mathcal{U}$-pequeña, siguiendo [**Qui75**], en esta sección describiremos el grupo fundamental de $B\mathcal{C}$. Para ello consideremos primero el funtor,

$$\mathcal{C} \xrightarrow{B(-\downarrow \mathcal{C})} (\mathrm{Top}_{\mathcal{U}} \downarrow B\mathcal{C})^{\mathrm{op}},$$

y notemos que como $\left(\mathsf{Top}_{\mathcal{U}} \downarrow \mathsf{B}\mathcal{C}\right)^{op}$ es una $\mathcal{U}$-categoría canónicamente completa, se tiene un diagrama:

(39)
$$\begin{tikzcd}
 & \left(\mathsf{Top}_{\mathcal{U}} \downarrow \mathsf{B}\mathcal{C}\right)^{op} \arrow[d, bend left, "\mathcal{F}^{\vee}"] \arrow[d, phantom, "\vdash"] \\
\mathcal{C} \arrow[ur, "\mathcal{F}=\mathsf{B}(-\downarrow\mathcal{C})"] \arrow[r, hook, "h^{\vee}"'] \arrow[r, phantom, bend left, "\cong"] & \mathsf{coPre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}} \arrow[u, bend left, "\mathcal{F}_{\vee}"]
\end{tikzcd}$$

Para calcular lo deseado daremos una interpretación más adecuada de los funtores $\mathcal{F}^{\vee}$ y $\mathcal{F}_{\vee}$.

§3.2.1. *Descripción del funtor* $\mathcal{F}_{\vee}$.

PROPOSICIÓN 3.3. *Si* $\mathcal{C}$ *es una categoría pequeña, el funtor* $\mathsf{F}_{\vee}$ *del diagrama* (39) *es isomorfo al funtor* $\mathsf{B}\left(- \downarrow h^{\vee}\right)$.

DEMOSTRACIÓN. Se sigue del Corolario 6.9 de la página 56 y de que el funtor realización gemétrica conmuta con colímites, que para para probar lo deseado basta ver que el funtor

$$\begin{aligned} (\mathsf{Con}_{\mathrm{U}})^{\mathcal{C}} &\longrightarrow \mathsf{sCon}_{\mathrm{U}} \\ \mathsf{F} &\longmapsto \mathcal{N}\left(\mathsf{F} \downarrow h^{\vee}\right) \end{aligned}$$

conmuta con colímites.

Para esto, notemos primero que si $\mathrm{I} \xrightarrow{\gamma} (\mathsf{Con}_{\mathrm{U}})^{\mathcal{C}}$ es un gráfica, entonces los conjuntos:

$$\mathcal{N}\left(\mathsf{colím}(\gamma) \downarrow h^{\vee}\right)_n$$
$$\text{y}$$
$$\mathcal{N}\left(\gamma(i) \downarrow h^{\vee}\right)_n$$

se puede identificar con los conjuntos:

$$\left\{\left(a_0 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_n} a_n; [u]\right) \,\middle|\, a_0 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_n} a_n \in \mathcal{N}(\mathcal{C})_n \text{ y } [u] \in \mathsf{colím}(\gamma)(a_0)\right\}$$
$$\text{y}$$
$$\left\{\left(a_0 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_n} a_n; u\right) \,\middle|\, a_0 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_n} a_n \in \mathcal{N}(\mathcal{C})_n \text{ y } u \in \gamma(i)(a_0)\right\},$$

respectivamente.

Se sigue de esta descripción, que la transformación natural:

$$\mathrm{eval}_a \circ \gamma \Rightarrow k_{\mathrm{I}}\left(\mathsf{colím}(\mathrm{eval}_a \circ \gamma)\right) = \left\{\gamma(i)(a) \longrightarrow \mathsf{colím}(\gamma)(a)\right\}_{i \in \mathrm{I}_0}$$

que se tiene por la propiedad universal de $\mathsf{colím}(\gamma)$ y por como son los colímites en $(\mathsf{Con}_{\mathrm{U}})^{\mathcal{C}}$, determina una transformación natural:

$$\mathcal{N}\left(\gamma \downarrow h^{\vee}\right) \xRightarrow{\eta} k_{\mathrm{I}}\left(\mathcal{N}\left(\mathsf{colím}(\gamma) \downarrow h^{\vee}\right)\right)$$

tal que para todo conjunto simplicial $\mathcal{U}$-pequeño $\mathcal{X}$, la siguiente función es una biyección:

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{sCon}_{\mathcal{U}}\Big(\mathcal{N}\left(\mathsf{colím}(\gamma)\downarrow h^{\vee}\right), \mathcal{X}\Big) & \longrightarrow & (\mathsf{sCon}_{\mathcal{U}})^{I}\Big(\mathcal{N}\left(\gamma \downarrow h^{\vee}\right), k_I(\mathcal{X})\Big) \\ \varphi & \longmapsto & k_I(\varphi)\circ\eta \end{array}$$

✠

Observemos que con la descripción del funtor $\mathcal{F}_{\vee}$ dada en la Proposición anterior, se puede ver que si $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathsf{Con}_{\mathcal{U}}$ es un funtor tal que para todo morfismo f en $\mathcal{C}$ la función $F(f)$ es una biyección, entonces $\mathcal{F}_{\vee}(F)$ es un cubriente. En efecto, el resultado se sigue de Teorema 3.2 de la página 79, pues si tenemos un diagrama:

$$\begin{tikzcd} {[0]} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\delta"'] & F \downarrow h^{\vee} \arrow[d, "F\downarrow\pi"] \\ {[n]} \arrow[r, "\varphi"'] & \mathcal{C} \end{tikzcd}$$

donde $\delta(0) = i_0$, $\varphi(i) = a_i$, $\varphi(i < i+1) = a_i \xrightarrow{f_{i+1}} a_{i+1}$ y $\psi(0) = (a_{i_0}, u)$ con $u \in F(a_{i_0})$, entonces la función $[n] \xrightarrow{\widetilde{\varphi}} F \downarrow h^{\vee}$, definida como

$$\widetilde{\varphi}(i) = \begin{cases} \big(a_i, F(f_{i+1})^{-1} \circ \cdots \circ F(f_{i_0})^{-1}(u)\big) & \text{si } i < i_0 \\ (a_{i_0}, u) & \text{si } i = i_0 \\ \big(a_i, F(f_i) \circ \cdots \circ F(f_{i_0+1})(u)\big) & \text{si } i > i_0 \end{cases}$$

y

$$\widetilde{\varphi}(i-1 < i) = f_i$$

es la única función que cumple que $\widetilde{\varphi} \circ \delta = \psi$ y $F \downarrow \pi \circ \widetilde{\varphi} = \varphi$.

Concluimos entonces que $(\mathcal{F}_{\vee})^{op}|$ es isomorfo al funtor:

$$\left\{ \mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathsf{Con}_{\mathcal{U}} \,\middle|\, F(f) \text{ es iso } \forall\, f \right\} \xrightarrow{\quad B(-\downarrow h^{\vee}) \quad} \mathsf{Cub}_{B\mathcal{C}}$$

donde $\mathsf{Cub}_{B\mathcal{C}}$ denota la categoría de cubrientes $\mathcal{U}$-pequeños sobre $B\mathcal{C}$.

§3.2.2. *Descripción del funtor $\mathcal{F}^{\vee}$.*

Si $\mathcal{C}$ es una categoría $\mathcal{U}$-pequeña, definimos el *funtor levantamiento de trayectorias*:

$$\mathsf{Cub}_{B\mathcal{C}} \xrightarrow{\quad \mathsf{lev} \quad} (\mathsf{Con}_{\mathcal{U}})^{\mathcal{C}}$$

como sigue:

- Objetos:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[d, "p"'] \\ B\mathcal{C} \end{tikzcd} \longmapsto \mathsf{lev}(p) := \left[\begin{tikzcd} x \arrow[d, "f"'] & p^{-1}(x) \arrow[d, "\ell_f"] \\ y & p^{-1}(y) \end{tikzcd}\right]$$

donde $\ell_f(a) = \widetilde{f}_a(1)$, si $[0,1] \xrightarrow{\widetilde{f}_a} X$ es la única trayectoria con las propiedades $p \circ \widetilde{f}_a = f$ y $\widetilde{f}_a(0) = a$.
- Morfismos:
  Para todo morfismo $E \xrightarrow{h} E'$ entre el cubriente $E \xrightarrow{p} B\mathcal{C}$ y $E' \xrightarrow{p'} B\mathcal{C}$, definimos $\mathsf{lev}(h)$ como $\{ h|_{p^{-1}(x)} \}_{x \in \mathcal{C}_0}$.

PROPOSICIÓN 3.4. *El funtor* $(\mathcal{F}^\vee)^{\mathrm{op}}$ *restringido a la categoría* $\mathsf{Cub}_{B\mathcal{C}}$*, es isomorfo al funtor levantamiento de trayectorias* lev.

DEMOSTRACIÓN. Si $E \xrightarrow{p} B\mathcal{C}$ es un cubriente y x es un objeto de $\mathcal{C}$, definiremos primero una biyección $\mathcal{F}^\vee(p)(x) \xrightarrow{\phi_{p,x}} \mathrm{lev}(p)(x)$. Para ello recordemos que $\mathcal{F}^\vee(p)(x)$ es igual al conjunto de las funciones continuas $B(x \downarrow \mathcal{C}) \xrightarrow{\varphi} E$, tales que $B(x \downarrow \pi) = p \circ \varphi$.

Por otro lado, por la Proposición 3.1 de la página 79, la transformación natural

$$\begin{tikzcd} x \downarrow \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "k_x"] \arrow[r, bend right, "x \downarrow \mathcal{C}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \chi"] & \mathcal{C} \end{tikzcd}$$

definida como $\chi_{(a,u)} = u$, determina una homotopía de $B(x \downarrow \mathcal{C}) \xrightarrow{B(x \downarrow \pi)} B\mathcal{C}$ en la función constante. Se sigue de la teoría de espacios cubrientes, que existe al menos una función $B(x \downarrow \mathcal{C}) \xrightarrow{\varphi} E$ tal que $B(x \downarrow \pi) = p \circ \varphi$ y que cualquiere función como ésta, está completamente determinada por su valor en un punto. En otras palabras, tomando a $(x, \mathrm{id}_x) \in B(x \downarrow \mathcal{C})$, se tiene que la función $\mathcal{F}^\vee(p)(x) \xrightarrow{\phi_{p,x}} p^{-1}(x)$ definida por la asignación $\varphi \mapsto \varphi(x, \mathrm{id}_x)$ es una biyección.

De esta manera tenemos una familia de biecciónes:

$$\left\{ \mathcal{F}^\vee(p)(x) \xrightarrow{\phi_{p,x}} \mathsf{lev}(p)(x) \right\}_{x \in \mathcal{C}_0}.$$

Lo que haremos ahora será ver que esta familia es de hecho un isomorfismo natural $\mathcal{F}^\vee(p) \xRightarrow{\phi_p} \mathsf{lev}(p)$.

Para ello debemos considerar un morfismo $x \xrightarrow{f} y$ y ver que el siguiente cuadrado conmuta:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}^{\vee}(p)(x) \arrow[r, "\psi_x"] \arrow[d, "\mathcal{F}^{\vee}(p)(f)"'] & p^{-1}(x) \arrow[d, "\ell_f"] \\ \mathcal{F}^{\vee}(p)(y) \arrow[r, "\psi_y"'] & p^{-1}(y) \end{tikzcd}$$

es decir, debemos probar que para toda función $B(x \downarrow \mathcal{C}) \xrightarrow{\varphi} E$ tal que $B(x \downarrow \pi) = p \circ \varphi$, se tiene que $\ell_f\big(\varphi(x, id_x)\big) = \varphi(y, f)$. Pero esto es imediato ya que $(x, id_x) \xrightarrow{f} (y, f)$ determina una trayectoria en $B\big(x \downarrow \mathcal{C}\big)$ que se proyecta en $x \xrightarrow{f} y$ por $B(x \downarrow \pi)$, de modo que la igualdad $B(x \downarrow \pi) = p \circ \varphi$ implica que $\varphi(x, id_x) \xrightarrow{\varphi(f)} \varphi(y, f)$ es la trayectoria en E que se proyecta sobre $x \xrightarrow{f} y$ al aplicarle p.

Por último, debemos ver que la familia $\big\{\mathcal{F}^{\vee}(p) \xRightarrow{\phi_p} \mathsf{lev}(p)\big\}_p$ es un isomorfismo natural $(\mathcal{F}^{\vee})^{op}| \xRightarrow{\phi} \mathsf{lev}$, lo cual se sigue de que si $E \xrightarrow{p} B\mathcal{C}$ y $E' \xrightarrow{p'} B\mathcal{C}$ son cubrientes y $E \xrightarrow{\varphi} E'$ un morfismo entre ellos, para todo objeto x en $\mathcal{C}$ el siguiente cuadrado conmuta trivialmente:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}^{\vee}(p)(x) \arrow[r, "\phi_{p,x}"] \arrow[d, "h\circ -"'] & p^{-1}(x) \arrow[d, "h|_{p^{-1}(x)}"] \\ \mathcal{F}^{\vee}(p')(x) \arrow[r, "\phi_{p',x}"'] & (p')^{-1}(x) \end{tikzcd}$$

✠

§3.2.3. *El grupo fundamental de* $B\mathcal{C}$.

De las últimas dos proposiciones, podemos concluir que la adjunción $\mathcal{F}_{\vee} \vdash \mathcal{F}^{\vee}$ del diagrama (39) de la página 80 determina una adjunción:

(40)
$$\begin{tikzcd} \mathsf{Cub}_{B\mathcal{C}} \arrow[r, bend right, "\mathsf{lev}(-)"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \left\{\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathsf{Con}_{\mathrm{U}} \,\middle|\, F(f) \text{ es iso } \forall\, f\right\} \arrow[l, bend right, "B(-\downarrow h^{\vee})"'] \end{tikzcd}$$

TEOREMA 3.5. *La adjunción* (40) *de arriba es una equivalencia de categorías.*

DEMOSTRACIÓN.

El funtor $B(- \downarrow h^{\vee})$ *es fiel y pleno:*

Notemos que la unidad de la adjunción $id \xRightarrow{\eta} \mathsf{lev} \circ B(- \downarrow h^{\vee})$ está dada por la familia de funciones:

$$\{\ F(a) \xrightarrow{\eta_{F,a}} B(F \downarrow \pi)^{-1}(a)\ \}_{F,a}$$

definidas como $\eta_{F,a}(u) = \big[*, (a, u)\big] \in B(F \downarrow h^{\vee})$ para $u \in F(a)$, donde $\Delta^0_{top} = \{*\}$.

Para mostrar lo deseado basta ver entonces que $\eta_{F,a}$ es una biyección, para todo funtor $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathsf{Con}_{\mathcal{U}}$ que manda morfismos en isomorfismos y todo objeto a en $\mathcal{C}$. Pero ésto se sigue fácilmente de la propiedad que cumple F y de que $(F \downarrow h^{\vee})_n$ puede verse como el conjunto de las parejas $(a_0 \to \cdots \to a_n, u)$ donde $a_0 \to \cdots \to a_n \in \mathcal{C}_n$ y $u \in F(a_0)$.

El funtor $\mathsf{lev}(-)$ *es fiel y pleno:*

Sean $E \xrightarrow{p} B\mathcal{C}$ y $E' \xrightarrow{p'} B\mathcal{C}$ dos espacios cubriente.

Para provar que la asignación:

$$\begin{aligned} \mathsf{Cub}_{B\mathcal{C}}(E, E') &\longrightarrow \mathsf{Con}_{\mathrm{U}}^{\mathcal{C}}(\mathsf{lev}(p), \mathsf{lev}(p')) \\ \varphi &\longmapsto \eta_\varphi = \{(\eta_\varphi)_a := \varphi|_{p^{-1}(x)}\}_{a \in \mathcal{C}_0} \end{aligned}$$

es una biyección, notemos primero que ésta es inyectiva ya que dos morfismos de cubrientes son iguales si ellos coinciden en un punto.

Por otro lado, si η es una transformación natural de $\mathsf{lev}(p)$ en $\mathsf{lev}(p')$, se define un morfismo de cubrientes φ tal que $\eta_\varphi = \eta$, de la siguiente manera:

Sea $x \in E$. Si n es el número natural más pequeño tal que

$$p(x) \in \mathsf{sk}_n(B\mathcal{C}) \backslash \mathsf{sk}_{n-1}(B\mathcal{C}) \quad \text{y} \quad [0,1] \xrightarrow{\sigma} \mathsf{sk}_n(B\mathcal{C}) \backslash \mathsf{sk}_{n-1}(B\mathcal{C})$$

es una trayectoría tal que $\sigma(0) = p(x)$ y $\sigma(1) = a \in \mathsf{sk}_0(B\mathcal{C})$, entonces:

$$\varphi(x) := \widetilde{\sigma^{-1}}_{\eta_a(\tilde{\sigma}_x(1))}(1)$$

donde $[0,1] \xrightarrow{\tilde{\sigma}_x} E$ es el levantamiento de σ sobre $E \xrightarrow{p} B\mathcal{C}$ que comienza en x, y $[0,1] \xrightarrow{\widetilde{\sigma^{-1}}_y} E$ es el levantamiento de σ^{-1} sobre $E' \xrightarrow{p'} B\mathcal{C}$ que comienza en y.

Se sigue que si φ está bien definida, ésta es continua y $\eta_\varphi = \eta$. Para ver que φ está bien definida, considera otra trayectoria $[0,1] \xrightarrow{\delta} \mathsf{sk}_n(B\mathcal{C}) \backslash \mathsf{sk}_{n-1}(B\mathcal{C})$ tal que $\delta(0) = p(x)$ y $\delta(1) = b \in \mathsf{sk}_0(B\mathcal{C})$. Entonces, si $a \xrightarrow{f} b$ es un morfismo de $\mathcal{C}$ o su trayectoria asociada en $B\mathcal{C}$, como $\mathsf{sk}_n(B\mathcal{C}) \backslash \mathsf{sk}_{n-1}(B\mathcal{C})$ es homotópicamente equivalente a un espacio discreto, se tiene que

$$\begin{aligned} \widetilde{\delta^{-1}}_{\eta_b(\tilde{\delta}_x(1))}(1) &= \widetilde{\sigma^{-1} * f^{-1}}_{\left(\eta_b\left(\widetilde{f * \sigma_x}(1)\right)\right)}(1) \\ &= \widetilde{\sigma^{-1}}_{\ell_{f^{-1}} \circ \eta_b \circ \ell_f(\tilde{\sigma}_x(1))}(1) \\ &= \widetilde{\sigma^{-1}}_{\eta_a(\tilde{\sigma}_x(1))}(1) \end{aligned}$$

✠

Por último, notemos que si $\mathcal{G}$ es un grupoide $\mathcal{U}$-pequeño conexo y x es un objeto de $\mathcal{G}$, el funtor natural $\mathcal{G}(x) \hookrightarrow \mathcal{G}$ del grupo de automorfismos de x en $\mathcal{G}$, es una equivalencia de categorías. En efecto, éste es fiel y pleno y como $\mathcal{G}$ es un grupoide conexo, todo objeto de $\mathcal{G}$ es isomorfo a x.

Por otro lado, como puede uno observar fácilmente, la categoría de funtores $\mathsf{Con}_{\mathcal{U}}^{\mathcal{G}(x)}$ es equivalente a la categoría de $\mathcal{G}(x)$-conjuntos $\mathcal{U}$-pequeños $\mathcal{G}(x)$-$\mathsf{Con}_{\mathcal{U}}$.

De estas observaciones y del Teorema anterior, conlcuimos que si $\mathcal{C}$ es una categoría $\mathcal{U}$-pequeña conexa, para todo objeto x en $\mathcal{C}$ el funtor:

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{Cub}_{B\mathcal{C}} & \longrightarrow & \mathcal{C}^{iso}(x)\text{-}\mathsf{Con}_{\mathcal{U}} \\ p & \longmapsto & p^{-1}(x) \end{array}$$

es una equivalencia de categorías, donde $\mathcal{C}^{iso}$ denota al grupoide que se obtiene de $\mathcal{C}$ al formalmente invertir todos sus morfismos.

De la teoría de espacios cubrientes:

COROLARIO 3.6. *Si $\mathcal{C}$ es una categoría $\mathcal{U}$-pequeña y x un objeto en ella, el grupo fundamental de $B\mathcal{C}$ con punto base x es isomorfo al grupo de automorfismos de x en $\mathcal{C}^{iso}$.*

En particular, si $\mathcal{G}$ es un grupoide $\mathcal{U}$-pequeño, $\pi_1(\mathcal{G}, x)$ es ismorfo al grupo de automorfismos de x en $\mathcal{G}$.

§3.3. Cubrientes de Galois. Si X es un espacio topológico, un G-*cubriente de Galois sobre* X, es un G-espacio libre E acompañado de una aplicación cubriente $E \xrightarrow{p} X$ que determina un homeomorfismo $X \cong E/G$. Denotamos como Cub_X^G, a la categoría que tiene por objetos a los G-cubrientes de Galois $\mathcal{U}$-pequeños sobre X, y cuyos morfismos son los morfismos de espacios cubrientes G-equivariantes.

Si $K_G(X)$ es el conjunto $\mathcal{U}$-pequeño de clases de isomorfismos de la categoría Cub_X^G, y denotamos como $[E]$ al correspondiente elemento en $K_G(X)$ de un cubriente de Galois E, se tiene una $\mathcal{U}$-pregavilla en $\mathsf{Top}_{\mathcal{U}}$:

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Top}_{\mathcal{U}}^{op} \arrow[rr, "K_G"] & & \mathsf{Con}_{\mathcal{U}} \\ X \arrow[d, "f"'] & & K_G(X) \\ Y \arrow[r, phantom, "\longmapsto"] & & K_G(Y) \arrow[u, "f^*"'] \end{tikzcd}$$

donde $f^*([E])$ es definido como $[f^*E]$, si f^*E es el cubriente sobre X que se obtiene del producto fibrado canónico en $\mathsf{Top}_{\mathcal{U}}$:

$$\begin{tikzcd} f^*E \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "f^*p"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

Más aún, como es bien sabido, este funtor se factoriza en un funtor $\mathsf{hTop}_{\mathcal{U}}^{op} \xrightarrow{K_G} \mathsf{Con}_{\mathcal{U}}$, donde $\mathsf{hTop}_{\mathcal{U}}$ denota a la categoría de espacio topológicos $\mathcal{U}$-pequeños, cuyos morfismo son las clases de homotopía de funciones continuas entre ellos.

TEOREMA 3.7. *Si* $\mathsf{hpTop}_{\mathcal{U}}$ *denota la subcategoría plena de* $\mathsf{hTop}_{\mathcal{U}}$ *cuyos objetos son los espacios paracompactos, para todo grupo* $\mathcal{U}$*-pequeño* G *la pregavilla* $\mathsf{hpTop}_{\mathcal{U}}^{op} \xrightarrow{K_G} \mathsf{Con}_{\mathcal{U}}$ *es representable por* BG.

En particular, para todo espacio topológico $\mathcal{U}$*-pequeño paracompacto* X*, el conjunto* $K_G(X)$ *de clases de isomorfismo de* G*-cubrientes de Galois sobre* X*, está en correspondencia biyectiva con el conjunto* $[X, BG]$ *de clases de homotopía de morfismos de* X *en* BG.

DEMOSTRACIÓN. Solamente daremos algunas observaciones de una posible prueba.

En primer lugar, para probar lo deseado es bien sabido que basta ver lo siguiente:

(i) Existe un G-cubriente de Galois $EG \xrightarrow{p_G} BG$ donde EG es contraible.

(ii) Si $E \xrightarrow{p} X$ es un G-cubriente de Galois sobre X, existe un cuadrado conmutativo:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "p"'] & EG \arrow[d, "p_G"] \\ X \arrow[r, "f"'] & BG \end{tikzcd}$$

donde $\tilde{f}$ es G-equivariante.

Esbozo de (i):

Sea $\widetilde{G}$ la categoría que tiene por objetos al conjunto G y por morfismos a $G \times G$, donde (g, h) denota al único morfismo de g en h, y la composicón se define por la asignación $(g, h) \cdot (h, k) \mapsto (g, k)$.

Como la imagen bajo el funtor $\mathcal{N}(-)$ del morfismo $\widetilde{G} \xrightarrow{\pi_G} G$ definido por la multiplicación en G, corresponde al morfismo φ del Ejemplo §1.2.5 de la página 63, se sigue que si $EG \xrightarrow{p_G} BG$ denota a su realización geométrica, la acción

$$\begin{aligned} G^{n+1} \times G &\longrightarrow G^{n+1} \\ ((g_0, \cdots, g_n), g) &\longmapsto (g_0 g, \cdots, g_n g) \end{aligned}$$

determina una acción libre de G en EG tal que p_G se proyecta en un homeomorfismo $EG/G \cong BG$. Además, como cualquier objeto de $\widetilde{G}$ es un objeto cero, por la Proposición 3.1 de la página 79, el espacio EG es contraible.

Por último, para ver que $EG \xrightarrow{p_G} BG$ es un cubriente, por el Teorema 3.2 de la página 79, basta ver que el funtor $\widetilde{G} \xrightarrow{\pi_G} G$ es un cubriente de categorías. Esto se sigue de que si

$$
\begin{tikzcd}
{[0]} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\delta"'] & \widetilde{G} \arrow[d, "\pi_G"] \\
{[n]} \arrow[r, "\varphi"'] & G
\end{tikzcd}
$$

es un diagrama conmutativo, donde $\delta(0) = i_0$, $\psi(0) = h$ y $\varphi(i < i+1) = g_i$, el morfismo $[n] \xrightarrow{\widetilde{\varphi}} \widetilde{G}$ definida como:

$$
\widetilde{\varphi}(i) = \begin{cases} g_i \widetilde{\varphi}(i+1)^{-1} & 0 \leq i < i_0 \\ h & i = i_0 \\ \widetilde{\varphi}(i-1)^{-1} g_{i-1} & i_0 < i \leq n \end{cases}
$$

es el único morfismo tal que $\widetilde{\varphi} \circ \delta = \psi$ y $\pi_G \circ \widetilde{\varphi} = \varphi$.

Esbozo de (ii):

Si $E \xrightarrow{p} X$ es un G-cubriente de Galois sobre X, como E es un haz G-principal sobre X, se sigue que existe una cubierta abierta $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de X y una familia de homeomorfismos:

$$
\left\{ \begin{array}{ccc} p^{-1}U_\alpha & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & U_\alpha \times G \\ x & \longmapsto & \big(p(x), \psi_\alpha(x)\big) \end{array} \right\}_{\alpha \in A}
$$

con ψ_α equivariantes. Puede verse entonces, que

1) Las llamadas funciones de transición:

$$
\{U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta \xrightarrow{g_{\alpha\beta}} G\}_{\alpha,\beta \in A}
$$

que pueden verse como una función:

$$
\check{C}(\mathfrak{U})_2 = \coprod_{(\alpha,\beta) \in A^2} U_{\alpha\beta} \xrightarrow{\coprod g_{\alpha\beta}} G
$$

determinan un morfismo $\check{C}(\mathfrak{U}) \xrightarrow{g} \mathcal{N}(G)$, del complejo de Čech de la cubierta $\mathfrak{U}$ en el nervio de G.

2) Si $\mathfrak{V}$ denota a la cubierta $\{V_\alpha = p^{-1}U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de E, la función:

$$
\check{C}(\mathfrak{V})_2 = \coprod_{(\alpha,\beta) \in A^2} V_{\alpha\beta} \xrightarrow{\coprod (\psi_\alpha, \psi_\beta)} G \times G
$$

determina un morfismo $\check{C}(\mathfrak{V}) \xrightarrow{\bar{g}} \mathcal{N}'(G)$, del complejo de Čech de la cubierta $\mathfrak{V}$ en el nervio equivariante de G.

Más aún, estos morfismos de espacios simpliciales determinan un cuadrado conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\check{C}(\mathfrak{V}) \arrow[r, "\tilde{g}"] \arrow[d, "\check{C}(p)"'] & \mathcal{N}'(G) \arrow[d, "\varphi"] \\
\check{C}(\mathfrak{V}) \arrow[r, "g"'] & \mathcal{N}(G)
\end{tikzcd}$$

de tal manera que el cuadrado imagen por el funtor realización geométrica:

$$\begin{tikzcd}
|\check{C}(\mathfrak{V})| \arrow[r, "|\tilde{g}|"] \arrow[d, "\check{C}(p)"'] & E(G) \arrow[d, "\pi"] \\
|\check{C}(\mathfrak{V})| \arrow[r, "|g|"'] & B(G)
\end{tikzcd}$$

es un morfismo entre haces G-principales.

El resultado se sigue entonces del diagrama de morfismos de haces G-principales:

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[d, "p"'] & |\check{C}(\mathfrak{V})| \arrow[l] \arrow[r, "|\tilde{g}|"] \arrow[d, "\check{C}(p)"] & E(G) \arrow[d, "\pi"] \\
X & |\check{C}(\mathfrak{V})| \arrow[l] \arrow[r, "|g|"'] & B(G)
\end{tikzcd}$$

y del Teorema Teorema 2.4 de la página 77. ✠

CAPÍTULO

4

Gavillas

1. Cribas

Sea $\mathcal{C}$ una $\mathcal{U}$-categoría pequeña.

Si x es un objeto de $\mathcal{C}$, una *criba de* x *en* $\mathcal{C}$ es una familia $R = \{R_a \subseteq \mathcal{C}(a, x)\}_{a \in \mathcal{C}_0}$ con la propiedad que para todo morfismo $a \xrightarrow{f} b$ en $\mathcal{C}$, si $b \xrightarrow{\varphi} x \in R_b$ entonces $a \xrightarrow{\varphi\circ f} x \in R_a$. Denotamos al conjunto de cribas de x en $\mathcal{C}$ como $\mathsf{crib}_{\mathcal{C}}(x)$.

Una criba R de x en $\mathcal{C}$ puede verse como un funtor $\mathcal{C}^{op} \xrightarrow{R} \mathsf{Con}_{\mathcal{U}}$ que a cada objeto a asocia el conjunto $R_a \subseteq x^{\wedge}(a)$ y a cada morfismo $a \xrightarrow{f} b$ la función $R_b \ni \varphi \overset{R_\varphi}{\mapsto} \varphi \circ f \in R_a$. Esto determina una biyección entre el conjunto $\mathsf{crib}_{\mathcal{C}}(x)$ y el conjunto subyacente del conjunto ordenado de subfuntores (subobjetos) de $x^{\wedge}$ en $\mathsf{Pre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}}$. Observemos que el orden inducido en el conjunto de cribas de x en $\mathcal{C}$ por esta biyección es el orden natural, donde $R \leq S$ si y sólo si $R_a \subseteq S_a$ para todo objeto a en $\mathcal{C}$.

Si para cada familia $\mathcal{A} = \{a_\alpha \to x\}$ de morfismos en $\mathcal{C}$ con codominio x, denotamos como $R(\mathcal{A})$ a la criba definida para cada objeto a en $\mathcal{C}$ como

$$R(\mathcal{A})_a : \ \{a \xrightarrow{\varphi} x \mid \varphi = \psi \circ f \text{ donde } \psi \in \mathcal{A} \text{ y } f \text{ es un morfismo en } \mathcal{C}\}.$$

resulta que $R(\mathcal{A})$ es el objeto más pequeño del conjunto ordenado $\mathsf{crib}_{\mathcal{C}}(x)$ con la propiedad $\mathcal{A} \subseteq \bigcup (R(\mathcal{A}))$, por lo que es llamada *la criba de* x *en* $\mathcal{C}$ *generada por la familia* $\mathcal{A}$.

Por ejemplo, $R(\emptyset) = \{\emptyset \subseteq \mathcal{C}(a, x)\}_{a\in\mathcal{C}_0}$ es el objeto inicial de $\mathsf{crib}_{\mathcal{C}}(x)$ y $R(x) : = R(\{id_x\}) = \{\mathcal{C}(a,x)\}_{a\in\mathcal{C}_0}$ es el objeto terminal. Más generalmente, si Ω es un conjunto $\mathcal{U}$-pequeño y $\{R_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ una familia de cribas de x en $\mathcal{C}$, las cribas

$$\bigcap_{\omega\in\Omega} R_\omega := \left\{\bigcap_{\omega\in\Omega} (R_\omega)_a\right\}_{a\in\mathcal{C}_0} \qquad \bigcup_{\omega\in\Omega} R_\omega := \left\{\bigcup_{\omega\in\Omega} (R_\omega)_a\right\}_{a\in\mathcal{C}_0}$$

son el producto y la suma de la familia $\{R_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ en $\mathsf{crib}_{\mathcal{C}}(x)$, respectivamente.

§1.1. Funtores de cribas. Observemos que un morfismo $x \xrightarrow{f} y$ en $\mathcal{C}$ es un monomorfismo si y sólo si para todo objeto a en $\mathcal{C}$ la función $\mathcal{C}(a,x) \xrightarrow{f\circ -} \mathcal{C}(a,y)$ es inyectiva, es decir, si y sólo si el morfismo $x^\wedge \xrightarrow{f^\wedge} y^\wedge$ es un monomorfismo en $\mathsf{Pre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}}$. Se concluye así que el funtor fiel y pleno $\mathcal{C} \xrightarrow{h^\wedge} \mathsf{Pre}(\mathcal{C})$ induce para todo objeto x en $\mathcal{C}$ un funtor fiel y pleno

$$\mathsf{Sub}_{\mathcal{C}}(x) \longrightarrow \mathsf{Sub}_{\mathsf{Pre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}}}(x^\wedge)\ ,$$

y por lo tanto un monomorfismo de conjuntos ordenados:

$$\mathsf{sub}_{\mathcal{C}}(x) \hookrightarrow \mathsf{crib}_{\mathcal{C}}(x)\ .$$

Explícitamente, la imagen por esta función del subobjeto asociado a un monomorfismo $z \xrightarrow{u} x$ es igual a la criba $u_*(R(z))$ definida para cada objeto a en $\mathcal{C}$ como:

$$(u_*R(z))_a := \left\{a \xrightarrow{\varphi} x \mid \varphi = u \circ \psi \text{ para algún morfismo } \psi \text{ en } \mathcal{C}(a,z)\right\}$$

En general, todo morfismo $x \xrightarrow{f} y$ determina un funtor $\mathsf{crib}_{\mathcal{C}}(x) \xrightarrow{f_*} \mathsf{crib}_{\mathcal{C}}(y)$, donde

$$(f_*R)_a := \{a \xrightarrow{\varphi} y \mid \varphi = f\circ\psi \text{ para algún } a \xrightarrow{\psi} x \text{ en } R_a\}$$

para toda criba R de x en $\mathcal{C}$ y todo objeto a en $\mathcal{C}$.

El funtor así definido es llamado el *funtor covariante de cribas de* $\mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "\mathsf{crib}_{\mathcal{C}*}"] & \mathsf{ConO}_{\mathcal{U}} \\ x \arrow[d, "f"'] \arrow[r, mapsto] & \mathsf{crib}_{\mathcal{C}}(x) \arrow[d, "f_*"] \\ y & \mathsf{crib}_{\mathcal{C}}(y) \end{tikzcd}$$

Por otro lado, de la interpretación de las cribas en $\mathcal{C}$ como subobjetos en $\mathsf{Pre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}}$, un morfismo $x \xrightarrow{f} y$ determina una función por cambio de base $\mathsf{crib}_{\mathcal{C}}(y) \xrightarrow{f^*} \mathsf{crib}_{\mathcal{C}}(x)$ (ver §4.1 página 39), es decir, si R es una criba de y en $\mathcal{C}$ se tiene un cuadrado conmutativo:

(41)
$$\begin{tikzcd} f^*R \arrow[r, "f^\wedge|"] \arrow[d, hook] & R \arrow[d, hook] \\ x^\wedge \arrow[r, "f^\wedge"'] & y^\wedge \end{tikzcd}$$

con la propiedad universal: f^*R es el subfuntor de $x^\wedge$ más grande tal que $f^\wedge$ se restringe a un morfismo $f^*R \xrightarrow{f^\wedge|} R$.

Explicitamente, si a es un objeto de $\mathcal{C}$:

$$(f^*R)_a := \{a \xrightarrow{\varphi} x \mid f \circ \varphi \in R_a\}$$

Al funtor así definido:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^{op} \arrow[r, "\mathrm{crib}^*_{\mathcal{C}}"] & \mathrm{ConO}_{\mathcal{U}} \\ x \arrow[d, "f"'] & \mathrm{crib}_{\mathcal{C}}(x) \\ y \arrow[r, phantom, "\longmapsto"] & \mathrm{crib}_{\mathcal{C}}(y) \arrow[u, "f^*"'] \end{tikzcd}$$

lo llamamos *el funtor contravariante de cribas de* $\mathcal{C}$.

TEOREMA 1.1. *Si* $\mathcal{C}$ *es una* $\mathcal{U}$*-categoría pequeña y* $x \xrightarrow{f} y$ *es un morfismo en* $\mathcal{C}$*, se tiene una adjunción:*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{crib}_{\mathcal{C}}(x) \arrow[r, bend left, "f_*"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathrm{crib}_{\mathcal{C}}(y) \arrow[l, bend left, "f^*"] \end{tikzcd}$$

Además, estos funtores tienen las siguientes propiedades:

$$f \textit{ es un monomorfismo} \Longrightarrow f_* \textit{ es fiel y pleno}$$

$$f \textit{ tiene un inverso derecho} \Longleftrightarrow f^* \textit{ es fiel y pleno}$$

DEMOSTRACIÓN.

f_* *es adjunto izquierdo de* f^**:*

Si R es una criba de x en $\mathcal{C}$, para todo objeto a en $\mathcal{C}$ se tiene lo siguietne:

$$R_a \subseteq \left\{a \xrightarrow{\varphi} x \;\middle|\; f \circ \varphi = f \circ \psi \text{ para algún } a \xrightarrow{\psi} x \in R_a\right\} = \left(f^*(f_*(R))\right)_a$$

y si S es una criba de y en $\mathcal{C}$, para todo objeto a en $\mathcal{C}$ tenemos:

$$\left(f_*(f^*(S))\right)_a = \left\{a \xrightarrow{\varphi} y \;\middle|\; \varphi \in S_a \text{ y } \varphi = f \circ \psi \text{ para algún } a \xrightarrow{\psi} x \text{ en } \mathcal{C}\right\} \subseteq S_a,$$

Esto define transformaciones naturales $\mathrm{id} \overset{\eta}{\Rightarrow} f^* \circ f_*$ y $f_* \circ f^* \overset{\varepsilon}{\Rightarrow} \mathrm{id}$, pues en las categorías $\mathrm{crib}_{\mathcal{C}}(x)$ y $\mathrm{crib}_{\mathcal{C}}(y)$ hay a los más un morfismo entre dos objetos. Por la misma razón se sigue que f_* es adjunto izquierdo de f^* con unidad η y counidad ε.

f *monomorfismo* $\Rightarrow$ f_* *fiel y pleno:*

Debemos probar que si R es una criba de x en $\mathcal{C}$, entonces $(f^* \circ f_*(R))_a = R_a$ para todo objeto a en $\mathcal{C}$. Para ver esto observemos que siempre $R_a \subseteq (f^* \circ f_*(R))_a$. Por otro lado, si $\varphi \in (f^* \circ f_*(R))_a$ existe $\psi \in R_a$ tal que $f \circ \varphi = f \circ \psi$. Pero como f es un monomorfismo esto implca que $\varphi = \psi$, es decir, $\varphi \in R_a$.

f *tiene un inverso derecho* $\Rightarrow$ f^* *fiel y pleno:*

Nuevamente debemos ver que si S es una criba de x en $\mathcal{C}$, entonces $(f_* \circ f^*(S))_a = S_a$ para todo objeto a en $\mathcal{C}$. Para ello notemos primero que siempre se tiene la contensión $(f_* \circ f^*(S))_a \subseteq S_a$. Por otro lado, si $a \xrightarrow{\varphi} y \in S_a$ y $y \xrightarrow{g} x$ es un morfismo en $\mathcal{C}$ tal que $f \circ g = \mathrm{id}_y$, se tiene que $\varphi = f \circ (g \circ \varphi)$ por lo que $\varphi \in (f_* \circ f^*(S))_a$.

f^* *fiel y pleno* $\Rightarrow$ f *tiene un inverso derecho*

Sea $S = R(y) = \{\mathcal{C}(a, y)\}_{a \in \mathcal{C}_0}$ la criba terminal de y en $\mathcal{C}$. Se sigue entonces que $\mathrm{id}_y \in S_y = (f_* \circ f^*(S))_y$, por lo que existe $y \xrightarrow{g} x$ tal que $\mathrm{id}_y = f \circ g$. ✠

2. Gavillas

§2.1. Categorías con cribas cubrientes. Sea $\mathcal{C}$ una $\mathcal{U}$-categoría pequeña. Si τ es una asignación que a cada objeto x en $\mathcal{C}$ asocia un subconjunto $\tau(x)$ de $\mathrm{crib}_{\mathcal{C}}(x)$, llamamos a la pareja $(\mathcal{C}, \tau)$ una *$\mathcal{U}$-categoría con cribas cubrientes* y a los elementos de $\tau(x)$, *cribas τ-cubrientes de* x.

Si $(\mathcal{C}, \tau)$ es una $\mathcal{U}$-categoría con cribas cubrientes, llamamos a una $\mathcal{U}$-pregavilla F en $\mathcal{C}$ una *$\mathcal{U}$-gavilla* (resp. *$\mathcal{U}$-pregavilla separada*) *en* $(\mathcal{C}, \tau)$, si se cumple la siguiente propiedad:

> Para todo objeto x en $\mathcal{C}$ y toda criba τ-cubriente R de x, la función
>
> $$\begin{array}{ccc} \mathbf{Pre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}}(x^\wedge, F) & \xrightarrow{\mathbf{Pre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}}(\nu_R, F)} & \mathbf{Pre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}}(R, F) \\ \eta & \longmapsto & \eta \circ \nu_R \end{array} \tag{42}$$
>
> es una biyección (resp. es inyectiva), donde $R \overset{\nu_R}{\hookrightarrow} x^\wedge$ denota al morfismo canónico.

Para expresar esta condición de una manera más manejable, recordemos que por el Corolario 6.8 de la página 56 el conjunto $\mathbf{Pre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}}(R, F)$ es isomorfo a un límite en la $\mathcal{U}$-categoría de conjuntos $\mathcal{U}$-pequeños, mientras que por el Lema de Yoneda se tiene un isomorfismo entre el conjunto de morfismos $\mathbf{Pre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}}(x^\wedge, F)$ y $F(x)$. Reescribiendo la función (42) en términos de estos isomorfismo, concluimos que una $\mathcal{U}$-pegavilla F en $\mathcal{C}$ es una $\mathcal{U}$-gavilla (resp. $\mathcal{U}$-pregavilla separada) en $(\mathcal{C}, \tau)$ si y sólo si se cumple la siguiente propiedad:

> Para todo objeto x en $\mathcal{C}$ y toda criba τ-cubriente R de x, la función:
>
> $$F(x) \cong \lim_{(h^\wedge \downarrow R)^{\mathrm{op}}} \big(k(F(x))\big) \xrightarrow{\lim_{(h^\wedge \downarrow R)}(\eta_R)} \lim_{(h^\wedge \downarrow R)^{\mathrm{op}}} \big(F \circ (\pi \downarrow R)^{\mathrm{op}}\big) \tag{43}$$
>
> es una biyección (resp. es inyectiva), donde la transformación natural $k(F(x)) \overset{\eta_R}{\Rightarrow} F \circ (\pi \downarrow R)$ está definida para cada objeto (a, u) de $(h^\wedge \downarrow R)^{\mathrm{op}}$ coma la función $F(x) \xrightarrow{F(\varphi)} F(a)$ con $a \xrightarrow{\varphi} x$ el único morfismo en $\mathcal{C}$ tal que $\varphi^\wedge = \nu_R \circ u$.

Usando nuevamente el Lema de Yoneda y por como definimos el límite de una gráfica de conjuntos $\mathcal{U}$-pequeños, concluimos:

TEOREMA 2.1. *Si* $(\mathcal{C},\tau)$ *es una* $\mathcal{U}$*-categoría con cribas cubrientes, una* $\mathcal{U}$*-pregavilla* F *en* $\mathcal{C}$ *es una* $\mathcal{U}$*-gavilla (resp.* $\mathcal{U}$*-pregavila separada) en* $(\mathcal{C},\tau)$ *si y sólo si se cumple la siguiente propiedad:*

> *Para todo objeto* x *en* $\mathcal{C}$ *y toda criba* τ*-cubriente* R *de* x*, el diagrama:*
>
> $$\mathsf{F}(\mathsf{x}) \xrightarrow{\prod\limits_{\mathsf{f}\in\cup\mathsf{R}} \mathsf{F}(\mathsf{f})} \prod_{\mathsf{a}\xrightarrow{\mathsf{f}}\mathsf{x}\in\cup\mathsf{R}} \mathsf{F}(\mathsf{a}) \underset{\prod\limits_{(\mathsf{f},\varphi)} \pi_{\varphi\circ\mathsf{f}}}{\overset{\prod\limits_{(\mathsf{f},\varphi)} (\mathsf{F}(\varphi)\circ\pi_{\mathsf{f}})}{\rightrightarrows}} \prod_{(\mathsf{f},\varphi)\in\cup\mathsf{R}\underset{\mathcal{C}_0}{\times}\mathcal{C}_1} \mathsf{F}(\mathsf{d}_0(\varphi))$$
>
> *es exacto (resp. la función* $\prod\limits_{\mathsf{f}\in\cup\mathsf{R}} \mathsf{F}(\mathsf{f})$ *es inyectiva), donde* $\cup\mathsf{R}\underset{\mathcal{C}_0}{\times}\mathcal{C}_1$ *denota al producto fibrado de las flechas:*
>
> $$\cup\mathsf{R} \xrightarrow{\mathsf{d}_0|} \mathcal{C}_0 \xleftarrow{\mathsf{d}_1} \mathcal{C}_1$$
>
> .

Si $(\mathcal{C},\tau)$ es una $\mathcal{U}$-categoría con cribas cubrientes, denotamos como $\mathsf{Sh}(\mathcal{C},\tau)_{\mathcal{U}}$ (resp. $\mathbf{Pre}(\mathcal{C},\tau)_{\mathcal{U}}$) a la subcategoría plena de la $\mathcal{U}$-categoría $\mathbf{Pre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}}$ que tiene por objetos a las $\mathcal{U}$-gavillas (resp. $\mathcal{U}$-pregavillas separadas) en $(\mathcal{C},\tau)$. Estas $\mathcal{U}$-categorías tienen la siguiente propiedad:

TEOREMA 2.2. *Si* $(\mathcal{C},\tau)$ *es una* $\mathcal{U}$*-categoría con cribas cubrientes,* $\mathsf{Sh}(\mathcal{C},\tau)_{\mathcal{U}}$ *y* $\mathbf{Pre}(\mathcal{C},\tau)_{\mathcal{U}}$ *tiene naturalmente una estructura de* $\mathcal{U}$*-categorías canónicamente completas y los funtores*

$$\mathsf{Sh}(\mathcal{C},\tau)_{\mathcal{U}} \xhookrightarrow{\alpha} \mathbf{Pre}(\mathcal{C},\tau)_{\mathcal{U}} \xhookrightarrow{\beta} \mathbf{Pre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}}$$

conmutan con límites.

DEMOSTRACIÓN. Por la Proposición 5.1, basta probar que si I es una $\mathcal{U}$-categoría pequeña y $\mathrm{I} \xrightarrow{\gamma} \mathbf{Pre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}}$ es una I-gráfica, el límite de γ en $\mathbf{Pre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}}$ es una $\mathcal{U}$-gavilla (resp. $\mathcal{U}$-pregavilla separada) en $(\mathcal{C},\tau)$ si para toda i, $\gamma(\mathsf{i})$ es una $\mathcal{U}$-gavilla (resp. $\mathcal{U}$-pregavilla separada) en $(\mathcal{C},\tau)$. Para ver esto recordemos primero que para toda $\mathcal{U}$-pregavilla G en $\mathcal{C}$ el funtor

$$\mathbf{Pre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}} \xrightarrow{\mathbf{Pre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}}(\mathrm{G},-)} \mathbf{Con}_{\mathcal{U}}$$

conmuta con límites (§5.1.3 página 44), por lo que del Teorema 5.2 de la página 43, si x es un objeto en $\mathcal{C}$ y R una criba τ-cubriente de x, se tiene un cuadrado conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Pre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}}\left(x^\wedge, \mathsf{lím}_I(\gamma)\right) \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[d, "\mathsf{Pre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}}\left(\nu_R, \mathsf{lím}_I(\gamma)\right)"'] & \mathsf{lím}_I\left(\mathsf{Pre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}}(x^\wedge, -)\circ\gamma\right) \arrow[d, "\mathsf{lím}_I\left(\mathsf{Pre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}}(\nu_R, -)*\gamma\right)"] \\
\mathsf{Pre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}}\left(R, \mathsf{lím}_I(\gamma)\right) \arrow[r, phantom, "\cong"] & \mathsf{lím}_I\left(\mathsf{Pre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}}(R, -)\circ\gamma\right)
\end{tikzcd}$$

El resultado se sigue entonces de que la transformación natural:

$$\mathsf{Pre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}}(\nu_R, -) * \gamma$$

es un isomorfismo (resp. es un monomorfismo y el funtor $\mathsf{lím}_I$ manda monos en monos), pues para todo objeto i en I el morfismo:

$$\mathsf{Pre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}}(x^\wedge, \gamma(i)) \xrightarrow{\mathsf{Pre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}}(\nu_R, \gamma(i))} \mathsf{Pre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}}(R, \gamma(i))$$

es un isomorfismo (resp. monomorfismo). ✠

§2.2. Topologías de Grothendieck. Si $\mathcal{C}$ es una $\mathcal{U}$-categoría pequeña, un subfuntor $\mathcal{C}^{op} \xrightarrow{\tau} \mathsf{ConO}_{\mathcal{U}}$ del funtor contravariante de cribas en $\mathcal{C}$ es llamado una *topología de Grothendieck en* $\mathcal{C}$, si para todo objeto x en $\mathcal{C}$ el conjunto $\tau(x)$ es diferente del vacío y se cumple la siguiente propiedad local:

L: Si $S \in \tau(x)$ y $R \in \mathsf{crib}_{\mathcal{C}}(x)$, entonces $R \in \tau(x)$ si para todo objeto a en $\mathcal{C}$ y todo morfismo $a \xrightarrow{f} x$ en S_a se tiene que $f^*(R) \in \tau(a)$.

A una $\mathcal{U}$-categoría con cribas cubrientes $(\mathcal{C}, \tau)$ donde τ es una topología de Grothendieck en $\mathcal{C}$ la llamamos un *$\mathcal{U}$-sitio.*

LEMA 2.3. *Las cribas τ-cubrientes de un $\mathcal{U}$-sitio $(\mathcal{C}, \tau)$ tienen las siguientes propiedades:*

(i) *Si $S \subseteq R$ son cribas de x en $\mathcal{C}$ y S es una criba τ-cubriente, entonces R también es una criba τ-cubriente. En particular, para todo objeto x en $\mathcal{C}$ el objeto terminal $R(x)$ de $\mathsf{crib}_{\mathcal{C}}(x)$ es una criba τ-cubriente.*

(ii) *Si R y S son cribas τ-cubrientes de x, entonces $R \cap S$, el producto de R y S en $\mathsf{crib}_{\mathcal{C}}(x)$, también es una criba τ-cubriente. En particular, para todo objeto x en $\mathcal{C}$, el conjunto ordenado $\tau(x)$ es un conjunto cofiltrante.*

DEMOSTRACIÓN.

Prueba de (i):

Sean $S \subseteq R$ cribas de x en $\mathcal{C}$ y supongamos que $S \in \tau(x)$. Observemos que si a es un objeto de $\mathcal{C}$ y $a \xrightarrow{f} x$ es un morfismo en S_a entonces $f^*(R) = f^*(S) \in \tau(a)$. En efecto, como $S \subseteq R$ entonces $f^*(S) \subseteq f^*(R)$. Por otro lado, como $f \in S_a$ entonces

$f\circ\varphi \in S_b$ para todo morfismo $b \xrightarrow{\varphi} x$; en particular, si $\varphi \in f^*(R)_b$ entonces $f\circ\varphi \in S_b$, es decir, $f^*(R)_b \subseteq f^*(S)_b$ para todo objeto b en $\mathcal{C}$.

El resultado se sigue entonces de **L**.

Prueba de (ii):

Sean S y R cribas τ-cubrientes de x. Observemos que si a es un objeto de $\mathcal{C}$ y $a \xrightarrow{f} x$ es un morfismo en S_a entonces $f^*(R\cap S) = f^*(R) \in \tau(a)$. En efecto, como $R\cap S \subseteq R$ entonces $f^*(R\cap S) \subseteq f^*(R)$. Por otro lado, si $\varphi \in f^*(R)_b$ entonces $f\circ\varphi \in R_b$ y como $f \in S_a$ también $f\circ\varphi \in S_b$, es decir, $f\circ\varphi \in (R\cap S)_b$ por lo que $\varphi \in f^*(R\cap S)_b$. Por lo tanto $f^*R \subseteq f^*(R\cap S)$.

El resultado se sigue nuevamente de **L**. ✠

Más aún,

TEOREMA 2.4. *Si* $(\mathcal{C},\tau)$ *es un* $\mathcal{U}$*-sitio, los funtores*

$$\mathsf{Sh}(\mathcal{C},\tau)_{\mathcal{U}} \overset{\alpha}{\hookrightarrow} \mathsf{Pre}(\mathcal{C},\tau)_{\mathcal{U}} \overset{\beta}{\hookrightarrow} \mathsf{Pre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}}$$

tienen adjuntos izquierdos los cuales conmutan con límites finitos.

DEMOSTRACIÓN. Para mostrar esta afirmación consideremos primero al funtor $\mathsf{Pre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}} \xrightarrow{L} \mathsf{Pre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}}$, definido como sigue:

Si F es una $\mathcal{U}$-pregavilla en $\mathcal{C}$,

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{C}^{op} & \xrightarrow{\quad L(F) \quad} & \mathsf{Con}_{\mathcal{U}} \\
a & & \mathrm{colím}\Big(\tau(a), \mathsf{Pre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}}(-,F)\Big) \\
f\Big\downarrow & \longmapsto & \Big\uparrow \mathrm{colím}\big(\tau(f),\eta(f)\big) \\
b & & \mathrm{colím}\Big(\tau(b), \mathsf{Pre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}}(-,F)\Big)
\end{array}$$

donde si $R \in \tau(b)$ entonces $\eta(f)_R := -\circ\left(f^{\wedge}\big|_{f^*R}\right)$.

Si $F \xrightarrow{\varphi} G$ es un morfismo de $\mathcal{U}$-pregavillas en $\mathcal{C}$, para todo objeto a en $\mathcal{C}$,

$$\begin{array}{ccc}
L(F)(a) & = & \mathrm{colím}\Big(\tau(a), \mathsf{Pre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}}(-,F)\Big) \\
{\scriptstyle L(\varphi)_a}\Big\downarrow & = & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{colím}\left(\mathrm{id}_{\tau(a)}, \mathsf{Pre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}}(-,\eta)\right)} \\
L(G)(a) & = & \mathrm{colím}\Big(\tau(a), \mathsf{Pre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}}(-,G)\Big)
\end{array}$$

Observemos que si a es un objeto de $\mathcal{C}$, por la propiedad (ii) del Lema 2.3 de arriba $\tau(a)$ es un conjunto filtrante. Se sigue del Teorema del Ejemplo §5.1.4 de la página 44 que el el conjunto $L(F)(a)$ se puede identificar con la unión ajena:

$$\coprod_{R\in\tau(a)} \mathsf{Pre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}}(R,F)$$

módulo la relación de equivalencia que identifica a dos morfismos $R \xrightarrow{\eta} F$ y $R' \xrightarrow{\eta'} F$, si existe una criba τ-cubriente S de a contenida en R y R' tal que el siguente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} & R \arrow[dr, "\eta"] & \\ S \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & F \\ & R' \arrow[ur, "\eta'"'] & \end{tikzcd}$$

Si R es una criba τ-cubriente de a y $R \xrightarrow{\eta} F$ es un morfismo, denotamos como $[\eta]$ a su clase lateral en $L(F)(a)$.

Notemos que el funtor $\mathbf{Pre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}} \xrightarrow{L} \mathbf{Pre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}}$ tiene las siguiente propiedades:

1) Si F es una $\mathcal{U}$-pregavilla en $\mathcal{C}$, $L(F)$ es una $\mathcal{U}$-pregavilla separable en $(\mathcal{C}, \tau)$.
2) Si F es una $\mathcal{U}$-pregavilla separable en $(\mathcal{C}, \tau)$, entonces $L(F)$ es una $\mathcal{U}$-gavilla en $(\mathcal{C}, \tau)$.

Solamente daremos la prueba de 1), la prueba de la segunda afirmación puede ser encontrada en [**MLM94**].

Prueba de 1):

Sea F una $\mathcal{U}$-pregavilla en $\mathcal{C}$.

Probaremos que $L(F)$ es una $\mathcal{U}$-pregavilla separable usando el Teorema 2.1 de la página 93. Para ello consideremos un objeto x en $\mathcal{C}$ y una criba τ-cubriente R de x.

Supongamos ahora que $[\eta_1]$ y $[\eta_2]$ son elementos en $L(F)(x)$ tales que para todo morfismo $f \in \bigcup R$

$$L(F)(f)\big([\eta_1]\big) = L(F)(f)\big([\eta_2]\big).$$

Tenemos entonces dos morfismos $S_1 \xrightarrow{\eta_1} F$ y $S_2 \xrightarrow{\eta_2} F$ de $\mathcal{U}$-pregavillas, tales que para todo $a \xrightarrow{f} x \in \bigcup R$ existe $S_f \in \tau(a)$ con $S_f \subseteq f^*S_1, f^*S_2$ y tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

(44)
$$\begin{tikzcd} & f^*S_1 \arrow[r, "f^\wedge|"] & S_1 \arrow[dr, "\eta_1"] & \\ S_f \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & & F \\ & f^*S_2 \arrow[r, "f^\wedge|"'] & S_2 \arrow[ur, "\eta_2"'] & \end{tikzcd}$$

Debemos probar que $[\eta_1] = [\eta_2]$, es decir, que existe $S \in \tau(x)$ con $S \subseteq S_1, S_2$ y tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & S_1 \arrow[dr, "\eta_1"] & \\ S \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & F \\ & S_2 \arrow[ur, "\eta_2"'] & \end{tikzcd}$$

Sea $S = \bigcup\limits_{f \in \bigcup R} f_* S_f$. Entonces:

a) Notemos que $S_f \subseteq f^*f_*(S_f) \subseteq f^*(S)$ para todo morfismo f en $\bigcup R$. Se sigue de (ii) del Lema 2.3 de la página 94 que $f^*(S) \in \tau(a)$ pues $S_f \in \tau(a)$. Como $R \in \tau(x)$, concluimos de la Propiedad **L** que $S \in \tau(x)$.
b) Como $S_f \subseteq f^*S_1, f^*S_2$, tenemos que $f_*S_f \subseteq f_*f^*S_i \subseteq S_i$ para $i = 1,2$. Por lo tanto,
$$S = \bigcup_{f \in \cup R} f_*S_f \subseteq S_1, S_2.$$
c) Notemos que por definición de f_*, el morfismo $a^\wedge \overset{f^\wedge}{\to} x^\wedge$ se restringe a un epimorfismo $S_f \overset{f^\wedge|}{\to} f_*S_f$ (En efecto, $(f_*S_f)_b$ es igual a la imagen por $f^\wedge(b)$ de $(S_f)_b$ para todo objeto b en $\mathcal{C}$). De ésto, de la conmutatividad de (44) de arriba y de la conmutatividad de los diagramas:
$$\begin{tikzcd} f^*S_i \arrow[r, "f^\wedge|"] & S_i \\ S_f \arrow[u, hook] \arrow[r, "f^\wedge|"'] & f_*S_f \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$
para $i = 1, 2$, concluimos que el siguiente diagrama es conmutativo:
$$\begin{tikzcd} & S_1 \arrow[dr, "\eta_1"] & \\ f_*S_f \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & F \\ & S_2 \arrow[ur, "\eta_2"'] & \end{tikzcd}$$
Como $S = \bigcup_{f \in \cup R} f_*S_f$, tenemos que el siguiente diagrama es conmutativo:
$$\begin{tikzcd} & S_1 \arrow[dr, "\eta_1"] & \\ S \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & F \\ & S_2 \arrow[ur, "\eta_2"'] & \end{tikzcd}$$

Por lo que hemos visto, tenemos funtores:
$$\mathsf{Pre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}} \xrightarrow{L} \mathsf{Pre}(\mathcal{C},\tau)_{\mathcal{U}} \xrightarrow{L|} \mathsf{Sh}(\mathcal{C},\tau)_{\mathcal{U}}$$
los cuales conmutan conlímites finitos, por ser $\tau(a)$ filtrante para todo objeto a.

No es dificil probar que estos funtores son adjuntos izquierdos de los funtores:
$$\mathsf{Sh}(\mathcal{C},\tau)_{\mathcal{U}} \overset{\alpha}{\hookrightarrow} \mathsf{Pre}(\mathcal{C},\tau)_{\mathcal{U}} \overset{\beta}{\hookrightarrow} \mathsf{Pre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}}$$

✠

COROLARIO 2.5. *Si $(\mathcal{C},\tau)$ es un $\mathcal{U}$-sitio las $\mathcal{U}$-categorías $\mathsf{Sh}(\mathcal{C},\tau)_{\mathcal{U}}$ y $\mathsf{Pre}(\mathcal{C},\tau)_{\mathcal{U}}$ tienen naturalmente una estructura de $\mathcal{U}$-categorías canónicamente cocompletas.*

DEMOSTRACIÓN. Probaremos la afirmación para $\mathsf{Pre}(\mathcal{C},\tau)_{\mathcal{U}}$. El caso de la categoría $\mathsf{Sh}(\mathcal{C},\tau)_{\mathcal{U}}$ se sigue análogamente.

En efecto, si I es una $\mathcal{U}$-categoría pequeña y γ es una I-gráfica en $\mathsf{Pre}(\mathcal{C},\tau)_{\mathcal{U}}$, como L es adjunto izquierdo de β, por el ejemplo §5.1.2 de la página 43, $\mathsf{L}(\mathsf{colím}_{\mathrm{I}}(\beta\circ\gamma))$ representa al colímite de $\mathsf{L}\circ\beta\circ\gamma$ en $\mathsf{Pre}(\mathcal{C},\tau)_{\mathcal{U}}$. Pero como β es fiel y pleno, la counidad de la adjunción $\mathsf{L}\dashv\beta$ determina un isomorfismo $\mathsf{L}\circ\beta\cong \mathrm{id}_{\mathsf{Pre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}}}$ por lo que $\mathsf{L}(\mathsf{colím}_{\mathrm{I}}(\beta\circ\gamma))$ representa al colímite de γ en $\mathsf{Pre}(\mathcal{C},\tau)_{\mathcal{U}}$. ✠

Si $(\mathcal{C},\tau)$ es un $\mathcal{U}$-sitio llamamos al funtor $\mathsf{Pre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}}\xrightarrow{\mathsf{L}\circ\mathsf{L}}\mathsf{Sh}(\mathcal{C},\tau)_{\mathcal{U}}$ definido en la prueba del Teorema anterior el *funtor engavillación de* $(\mathcal{C},\tau)$ y si F es una $\mathcal{U}$-pregavilla en $\mathcal{C}$, llamamos a la $\mathcal{U}$-gavilla $\mathsf{L}\circ\mathsf{L}(\mathsf{F})$ la τ-*engavillación de* F.

Observemos que de la prueba del Corolario anterior, se sigue que si I es una $\mathcal{U}$-categoría pequeña y γ es una I-gráfica en $\mathsf{Sh}(\mathcal{C},\tau)_{\mathcal{U}}$, la τ-engavillación de la $\mathcal{U}$-pregavilla $\mathsf{colím}_{\mathrm{I}}(\beta\circ\alpha\circ\gamma)$ es el colímite de γ en $\mathsf{Sh}(\mathcal{C},\tau)_{\mathcal{U}}$.

§2.3. Bases para topologías de Grothendieck. Sea $\mathcal{C}$ una $\mathcal{U}$-categoría pequeña con productos fibrados canónicos. Una *base para una topoogía de Grothendieck en* $\mathcal{C}$, es una asignación J que a cada objeto x en $\mathcal{C}$ asocia un conjunto no vacío $\mathrm{J}(x)$, cuyos elementos son familias $\mathcal{A}=\{a_\alpha\xrightarrow{f_\alpha}x\}_\alpha$ de morfismos en $\mathcal{C}$ con codominio x, tal que

(i) *Estabilidad por Cambio de Base*: Si $\mathcal{A}=\left\{a_\alpha\xrightarrow{f_\alpha}x\right\}_\alpha\in\mathrm{J}(x)$ y $y\xrightarrow{f}x$ es un morfismo en $\mathcal{C}$, la familia $f^{+}\mathcal{A}:=\{y\underset{x}{\times}a_\alpha\xrightarrow{\pi_y}y\}_\alpha$ es un elemento de $\mathrm{J}(y)$.

(ii) *Estabilidad por Composición*: Si $\mathcal{A}=\left\{a_\alpha\xrightarrow{f_\alpha}x\right\}_\alpha$ es un elemento de $\mathrm{J}(x)$ y para cada morfismo f_α en $\mathcal{A}$ se tiene una familia $\left\{a_{\alpha\beta}\xrightarrow{f_{\alpha\beta}}a_\alpha\right\}_\alpha$ en $\mathrm{J}(a_\alpha)$, entonces $\left\{a_{\alpha\beta}\xrightarrow{f_\alpha\circ f_{\alpha\beta}}x\right\}_{\alpha\beta}$ es un elemento de $\mathrm{J}(x)$.

A una pareja $(\mathcal{C},\mathrm{J})$, donde $\mathcal{C}$ es una $\mathcal{U}$-categoría pequeña con productos fibrados y J es una base para una topología de Grothendieck en $\mathcal{C}$, la llamamos un $\mathcal{U}$-*presitio.* En este caso, llamamos J-*cubiertas de* $(\mathcal{C},\tau)$ a los elementos de $\mathrm{J}(x)$.

Notemos que un $\mathcal{U}$-presitio $(\mathcal{C},\mathrm{J})$, determina una $\mathcal{U}$-categoría con cribas cubrientes $(\mathcal{C},\tau_{\mathrm{J}})$, donde τ_{J} está definido para cada objeto x en $\mathcal{C}$, como:

$$\tau_{\mathrm{J}}(x):=\left\{R\in\mathsf{crib}_{\mathcal{C}}(x)\;\middle|\;\text{Existe }\mathcal{A}\in\mathrm{J}(x)\text{ tal que }\mathcal{A}\subseteq\cup R\right\}$$

Llamamos a una $\mathcal{U}$-gavilla en $(\mathcal{C},\tau_{\mathrm{J}})$ simplemente una $\mathcal{U}$-*gavilla en* $(\mathcal{C},\mathrm{J})$, y denotamos a $\mathsf{Sh}(\mathcal{C},\tau_{\mathrm{J}})_{\mathcal{U}}$ como $\mathsf{Sh}(\mathcal{C},\mathrm{J})_{\mathcal{U}}$.

PROPOSICIÓN 2.6. *Si* $(\mathcal{C},\mathrm{J})$ *es un* $\mathcal{U}$-*presitio entonces* $(\mathcal{C},\tau_{\mathrm{J}})$ *es un* $\mathcal{U}$-*sitio.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $(\mathcal{C},\mathrm{J})$ un $\mathcal{U}$-presitio.

Notemos que para ver que la asignación $x \mapsto \tau_J(x)$ es un subfuntor $\mathcal{C}^{op} \xrightarrow{\tau_J} \mathbf{ConO}_{\mathcal{U}}$ del funtor contravariante de cribas en $\mathcal{C}$, basta probar que si A es una J-cubierta de y y $x \xrightarrow{f} y$ es un morfismo en $\mathcal{C}$, entonces $R(f^+\mathcal{A})_a = f^*(R(\mathcal{A}))_a$ para todo objeto a en $\mathcal{C}$.

Prueba de $R(f^+\mathcal{A})_a \subseteq f^*(R(\mathcal{A}))_a$.

Por definición, si $\varphi \in R(f^+\mathcal{A})_a$ existe $a_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} y$ en $\mathcal{A}$ y $a \xrightarrow{\psi} x \underset{y}{\times} a_\alpha$ en $\mathcal{C}$ tales que $\varphi = \pi_x \circ \psi$. Se sigue que tenemos un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[dr, "\psi"] \arrow[drr, bend left, "\pi_{a_\alpha}\circ\psi"] \arrow[ddr, bend right, "\varphi"'] & & \\
& x \underset{y}{\times} a_\alpha \arrow[r, "\pi_{a_\alpha}"] \arrow[d, "\pi_x"'] & a_\alpha \arrow[d, "f_\alpha"] \\
& x \arrow[r, "f"'] & y
\end{tikzcd}$$

por lo que $\varphi \circ f = f_\alpha \circ (\pi_{a_\alpha} \circ \psi)$, es decir, $\varphi \in f^*(R(\mathcal{A}))_a$.

Prueba de $f^*(R(\mathcal{A}))_a \subseteq R(f^+\mathcal{A})_a$.

Por definición, si $\varphi \in f^*(R(\mathcal{A}))_a$ existe $a_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} y$ en $\mathcal{A}$ y $a \xrightarrow{\psi} a_\alpha$ en $\mathcal{C}$ tal que $\varphi \circ f = f_\alpha \circ \psi$. Se sigue de la propiedad universal del producto fibrado que exise un morfismo $a \xrightarrow{g} x \underset{y}{\times} a_\alpha$ tal que el siguiente digrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[dr, "g"] \arrow[drr, bend left, "\psi"] \arrow[ddr, bend right, "\varphi"'] & & \\
& x \underset{y}{\times} a_\alpha \arrow[r, "\pi_{a_\alpha}"] \arrow[d, "\pi_x"'] & a_\alpha \arrow[d, "f_\alpha"] \\
& x \arrow[r, "f"'] & y
\end{tikzcd}$$

por lo que $\varphi = \pi_x \circ g$, es decir, $\varphi \in R(f^+\mathcal{A})_a$.

Por último, resta probar que τ_J tiene la propiedad **L**. Para ello consideremos $S \in \tau_J(x)$ y sea R una criba arbitraria de x en $\mathcal{C}$, con la propiedad que para todo morfismo $a \xrightarrow{f} x$ en $\cup S$ la criba $f^*(R)$ está en $\tau_J(a)$. Se sigue en particular que existe $\mathcal{A} = \{a_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} x\}_\alpha \in J(x)$ tal que $\mathcal{A} \subseteq \cup S$ y que para todo $a_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} x \in \mathcal{A}$, existe una familia $\mathcal{B}_\alpha = \{a_{\alpha\beta} \xrightarrow{f_{\alpha\beta}} a_\alpha\}_\beta$ en $J(a_\alpha)$ tal que $\mathcal{B}_\alpha \subseteq f^*_\alpha(R)$. Concluimos de la definición de $f^*_\alpha(R)$, que $\left\{a_{\alpha\beta} \xrightarrow{f_\alpha \circ f_{\alpha\beta}} x\right\}_{\alpha\beta}$ esta contenida en R. Por lo tanto $R \in \tau_J(x)$. ✠

Más aún,

TEOREMA 2.7. *Si* $(\mathcal{C}, J)$ *es un* $\mathcal{U}$*-presitio, una* $\mathcal{U}$*-pregavilla* F *en* $\mathcal{C}$ *es una* $\mathcal{U}$*-gavilla en* $(\mathcal{C}, J)$ *si y sólo si para todo objeto* x *en* $\mathcal{C}$ *y toda* J*-cubierta* $\mathcal{A}$ *de* x*, el* *siguiente diagrama es exacto:*

$$F(x) \xrightarrow{\prod_{f_\alpha} F(f_\alpha)} \prod_{f_\alpha \in \mathcal{A}} F(a_\alpha) \overset{\prod_{(f_\alpha,f_\beta)} F(\pi_{a_\alpha})\circ\pi_{f_\alpha}}{\underset{\prod_{(f_\alpha,f_\beta)} F(\pi_{a_\beta})\circ\pi_{f_\beta}}{\rightrightarrows}} \prod_{(f_\alpha,f_\beta)\in\mathcal{A}^2} F(a_\alpha \times_x a_\beta)$$

DEMOSTRACIÓN.

$\Rightarrow$).

Sea x un objeto de $\mathcal{C}$ y $\mathcal{A}$ una J-cubierta de x.

Denotemos como L al siguiente conjunto:

$$\left\{ (s_f)_f \in \prod_{a \xrightarrow{f} x \in \cup R(\mathcal{A})} F(a) \;\middle|\; F(\varphi)(s_f) = s_{f\circ\varphi} \text{ si } a \xrightarrow{f} x \in \bigcup R(\mathcal{A}) \text{ y } b \xrightarrow{\varphi} a \text{ en } \mathcal{C} \right\}$$

y como K al igualador canónico en $\mathbf{Con}_{\mathcal{U}}$ de las flechas:

$$\prod_{f_\alpha \in \mathcal{A}} F(a_\alpha) \overset{\prod_{(f_\alpha,f_\beta)} F(\pi_{a_\alpha})\circ\pi_{f_\alpha}}{\underset{\prod_{(f_\alpha,f_\beta)} F(\pi_{a_\beta})\circ\pi_{f_\beta}}{\rightrightarrows}} \prod_{(f_\alpha,f_\beta)\in\mathcal{A}^2} F(a_\alpha \times_x a_\beta)\,,$$

es decir, K es igual al conjunto:

$$\left\{ (s_{f_\alpha})_{f_\alpha} \in \prod_{a_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} x \in \mathcal{A}} F(a_\alpha) \;\middle|\; F(\pi_{a_\alpha})(s_{f_\alpha}) = F(\pi_{a_\beta})(s_{f_\beta}) \text{ si } a_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} x \right.$$

$$\left. \text{y } a_\beta \xrightarrow{f_\beta} x \text{ son elementos de } \mathcal{A} \right\}.$$

Ya que $\mathcal{A} \subseteq \cup R(\mathcal{A})$, por el Teorema 2.1 de la página 93, para mostrar lo deseado basta dar una biyección $K \xrightarrow{\ell} L$ tal que el siguiente triangulo conmute:

(45)
$$\begin{tikzcd}
\prod_{a_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} x\in\mathcal{A}} F(a_\alpha) \supseteq K \arrow[rr, "\ell"] & & L \subseteq \prod_{a \xrightarrow{f} x \in \cup R(\mathcal{A})} F(a) \\
& F(x) \arrow[ul, "\prod_{f_\alpha\in\mathcal{A}} F(f_\alpha)"] \arrow[ur, "\prod_{f\in\cup R(\mathcal{A})} F(f)"'] &
\end{tikzcd}$$

(Observese que las funciones $\prod_{f\in\cup R(\mathcal{A})} F(f)$ y $\prod_{f_\alpha\in\mathcal{A}} F(f_\alpha)$ siempre tienen su imagen en K y L, respectivamente).

Definición de $K \xrightarrow{\ell} L$*:*

Recordemos que por definición, $\bigcup R(\mathcal{A})$ es igual al conjunto de morfismos $a \xrightarrow{f} x$ en $\mathcal{C}$ de la forma $f = f_\alpha \circ \varphi$ donde $a_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} x$ es un elemento de $\mathcal{A}$ y $a \xrightarrow{\varphi} a_\alpha$ es un morfismo arbitrario en $\mathcal{C}$.

Si $(s_{f_\alpha})_{f_\alpha}$ es un elemento de K, definimos entonces:

$$\ell\big((s_{f_\alpha})_{f_\alpha}\big) := \big(F(\varphi)(s_{f_\alpha})\big)_{f \in \bigcup R(\mathcal{A})},$$

donde $f = f_\alpha \circ \varphi$ como arriba. Observemos que si ℓ está bien definida, ℓ tiene su imagen en L por la funtorialidad de F y el triángulo (45) resulta conmutativo trivialmente.

Para ver que ℓ está bien definida, notemos que si $f_\beta \circ \varphi = f = f_\alpha \circ \varphi$ entonces existe un morfismo $a \xrightarrow{h} a_\alpha \underset{x}{\times} a_\beta$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[dr, "h"] \arrow[drr, bend left, "\psi"] \arrow[ddr, bend right, "\varphi"'] & & \\
& a_\alpha \underset{x}{\times} a_\beta \arrow[r, "\pi_{a_\beta}"] \arrow[d, "\pi_{a_\alpha}"'] & a_\alpha \arrow[d, "f_\beta"] \\
& x \arrow[r, "f_\alpha"'] & y
\end{tikzcd}$$

por lo que

$$\begin{aligned}
F(\varphi)(s_{f_\alpha}) &= F(h)\big(F(\pi_{a_\alpha})(s_{f_\alpha})\big) && \text{(Funtorialidad de F)}\\
&= F(h)\big(F(\pi_{a_\beta})(s_{f_\beta})\big) && \text{(Definición de K)}\\
&= F(\psi)(s_{f_\beta}) && \text{(Funtorialidad de F)}
\end{aligned}$$

$K \xrightarrow{\ell} L$ *es una biyección:*

La inyectividad es inmediata porque $\mathcal{A} \subseteq \bigcup R(\mathcal{A})$.

Para probar que ℓ es suprayectiva, observemos que si $(s_f)_f$ es un elemento de L, entonces $(s_{f_\alpha})_{f_\alpha}$ es un elemento de $\prod\limits_{f_\alpha \in \mathcal{A}} F(a_\alpha)$ y si $a_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} x$ y $a_\beta \xrightarrow{f_\beta} x$ son elementos de $\mathcal{A}$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
F(\pi_{a_\alpha})(s_{f_\alpha}) &= s_{f_\alpha \circ \pi_{a_\alpha}} && \text{(Definición de L)}\\
&= s_{f_\beta \circ \pi_{a_\beta}} && \text{(Propiedad del producto fibrado)}\\
&= F(\pi_{a_\beta})(s_{f_\beta}) && \text{(Definición de L)}
\end{aligned}$$

es decir, $(s_{f_\alpha})_{f_\alpha}$ está en K.

Se sigue que $\ell(s_{f_\alpha})_{f_\alpha} = (s_f)_{f \in \bigcup R(\mathcal{A})}$, pues si $f \in \bigcup R(\mathcal{A})$ con $f = f_\alpha \circ \varphi$, por definición de los elementos de L se tiene que $F(\varphi)(s_{f_\alpha}) = s_f$.

$\Leftarrow$).

Dado $S \in \tau(x)$, queremos probar que la función:

$$F(x) \cong \mathbf{Pre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}}(x^\wedge, F) \xrightarrow{\quad -\circ\nu_S \quad} \mathbf{Pre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}}(S, F)$$

es biyectiva.

En primer lugar, como $S \in \tau(x)$, existe $\mathcal{A} = \{a_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} x\}_\alpha$ en $J(x)$ tal que $\mathcal{A} \subseteq \cup S$. Por otro lado, por la propiedad que cumple F respecto de $\mathcal{A}$, si $S \xrightarrow{\eta} F$ es un morfismo, existe un único elemento $\sigma \in F(x)$, tal que $\eta_{a_\alpha}(f_\alpha) = F(f_\alpha)(\sigma) \in F(a_\alpha)$, para todo $a_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} x \in \mathcal{A}$. Se sigue que para probar lo deseado, basta ver que $\eta_a(f) = F(f)(\sigma)$ para todo $a \xrightarrow{f} x \in \cup S$.

Para ello cosideremos $a \xrightarrow{f} x \in \cup S$ y los cuadrados cartesianos:

$$\begin{tikzcd} a \underset{x}{\times} a_\alpha \arrow[r, "\pi_f"] \arrow[d, "\pi_{f_\alpha}"'] & a_\alpha \arrow[d, "f_\alpha"] \\ a \arrow[r, "f"'] & x \end{tikzcd}$$

Se sigue entonces que $\left\{a \underset{x}{\times} a_\alpha \xrightarrow{\pi_{f_\alpha}} a\right\}_\alpha$ es un elemento de $J(a)$ y además que

$$\left\{F(\pi_{f_\alpha})\big(F(f)(\sigma)\big)\right\}_\alpha \in \prod_\alpha F\big(a \underset{x}{\times} a_\alpha\big)$$

está en la imagen del morfismo $\prod\limits_\alpha F(\pi_{f_\alpha})$. Se concluye de la propiedad que cumple F respecto de $\left\{a \underset{x}{\times} a_\alpha \xrightarrow{\pi_{f_\alpha}} a\right\}_\alpha$, que como $F(\pi_{f_\alpha})\big(F(f)(\sigma)\big) = F(\pi_{f_\alpha})\big(\eta_a(f)\big)$ para todo α, entonces $F(f)(\sigma) = \eta_a(f)$. ✠

§2.4. Gavillas con valores en una categoría. En esta sección extenderemos el concepto de gavilla a funtores $\mathcal{C}^{op} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ donde $\mathcal{D}$ es una $\mathcal{U}$-categoría arbitraria. Para ello probaremos primero el siguiente:

TEOREMA 2.8. *Si $(\mathcal{C}, \tau)$ es una $\mathcal{U}$-categoría con cribas cubrientes, una $\mathcal{U}$-pregavilla F en $\mathcal{C}$ es una $\mathcal{U}$-gavilla en $(\mathcal{C}, \tau)$ si y sólo si para todo conjunto $\mathcal{U}$-pequeño A, la $\mathcal{U}$-pregavilla:*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^{op} \arrow[r, "\mathrm{Con}_\mathcal{U}(A, F(-))"] & \mathrm{Con}_\mathcal{U} \\ x \arrow[d, "f"'] & \mathrm{Con}_\mathcal{U}(A, F(x)) \\ y & \mathrm{Con}_\mathcal{U}(A, F(y)) \arrow[u, "F(f)\circ -"'] \end{tikzcd}$$

$$f \longmapsto F(f)\circ -$$

es una $\mathcal{U}$-gavilla en $(\mathcal{C}, \tau)$.

DEMOSTRACIÓN. Es fácil ver que si $B \xrightarrow{\varphi} B'$ es una función de conjuntos $\mathcal{U}$-pequeños, entonces φ es una biyección si y sólo si para todo conjunto $\mathcal{U}$-pequeño A, la función:

$$\mathrm{Con}_\mathcal{U}(A, B) \xrightarrow{\mathrm{Con}_\mathcal{U}(A, \varphi)} \mathrm{Con}_\mathcal{U}(A, B')$$

es una biyección.

Si F es una $\mathcal{U}$-pregavilla en $\mathcal{C}$, se sigue entonces que F es una $\mathcal{U}$-gavilla en $(\mathcal{C},\tau)$ si y sólo si, para todo conjunto $\mathcal{U}$-pequeño A se cumple la siguiente propiedad:

> Para todo objeto x en $\mathcal{C}$ y toda criba τ-cubriente R de x, la función:
>
> $$\mathsf{Con}_{\mathcal{U}}\Big(\mathsf{A}, \mathsf{Pre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}}(x^{\wedge}, \mathsf{F})\Big) \xrightarrow{\mathsf{Con}_{\mathcal{U}}\left(\mathsf{A},\mathsf{Pre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}}(\nu_{\mathsf{R}},\mathsf{F})\right)} \mathsf{Con}_{\mathcal{U}}\Big(\mathsf{A}, \mathsf{Pre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}}(\mathsf{R}, \mathsf{F})\Big)$$
>
> es una biyección.

El resultado se sigue entonces de que hay un isomorfismo natural en G:

$$\mathsf{Con}_{\mathcal{U}}\Big(\mathsf{A}, \mathsf{Pre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}}(\mathsf{G}, \mathsf{F})\Big) \cong \mathsf{Pre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}}\Big(\mathsf{G}, \mathsf{Con}_{\mathcal{U}}(\mathsf{A}, \mathsf{F}(-))\Big)$$

para todo conjunto $\mathcal{U}$-pequeño A y toda $\mathcal{U}$-pregavilla F. ✠

Si $(\mathcal{C},\tau)$ es una $\mathcal{U}$-categoría con cribas cubrientes y $\mathcal{D}$ es una $\mathcal{U}$-categoría arbitraria, decimos entonces que una $\mathcal{D}$-pregavilla $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{D}$ en $\mathcal{C}$ es una *$\mathcal{D}$-gavilla en* $(\mathcal{C},\tau)$, si para todo objeto d en $\mathcal{D}$ la $\mathcal{U}$-pregavilla en $\mathcal{C}$:

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{C}^{\mathrm{op}} & \xrightarrow{\mathcal{D}(d,\mathsf{F}(-))} & \mathsf{Con}_{\mathcal{U}} \\
x & & \mathcal{D}(d,\mathsf{F}(x)) \\
{\scriptstyle f}\big\downarrow & \longmapsto & \big\uparrow{\scriptstyle \mathsf{F}(f)\circ -} \\
y & & \mathcal{D}(d,\mathsf{F}(y))
\end{array}$$

es una $\mathcal{U}$-gavilla en $(\mathcal{C},\tau)$. Si $\mathcal{D}$ es alguna de las $\mathcal{U}$-categorías $\mathsf{Grp}_{\mathcal{U}}$, $\mathsf{Anillo}_{\mathcal{U}}$ o R-$\mathsf{Mod}_{\mathcal{U}}$, también decimos que F *es una $\mathcal{U}$-gavilla de grupos, de anillos o de* R*-módulos en* $(\mathcal{C},\tau)$, respectivamente.

Denotamos a la subcategoría plena de $\mathsf{Pre}(\mathcal{C})_{\mathcal{D}}$ que tiene por objetos a las $\mathcal{D}$-gavillas en $(\mathcal{C},\tau)$ como $\mathsf{Sh}(\mathcal{C},\tau)_{\mathcal{D}}$. Por el Teorema anterior, si $\mathcal{D}$ es la categoría de conjuntos $\mathcal{U}$-pequeños, este concepto coincide con el de las secciones anteriores, es decir, $\mathsf{Sh}(\mathcal{C},\tau)_{\mathcal{U}} = \mathsf{Sh}(\mathcal{C},\tau)_{\mathsf{Con}_{\mathcal{U}}}$.

Los siguientes son resultados análogos al Teorema 2.2 de la página 93 y al Teorema 2.7 de la página 99:

TEOREMA 2.9. *Sea* I *una $\mathcal{U}$-categoría pequeña. Si* $(\mathcal{C},\tau)$ *es una $\mathcal{U}$-categoría con cribas cubrientes y $\mathcal{D}$ es una $\mathcal{U}$-categoría con* I*-límites canónicos,* $\mathsf{Sh}(\mathcal{C},\tau)_{\mathcal{D}}$ *tiene naturalmente una estructura de $\mathcal{U}$-categoría con* I*-límites canónicos y el funtor* $\mathsf{Sh}(\mathcal{C},\tau)_{\mathcal{D}} \overset{\alpha}{\hookrightarrow} \mathsf{Pre}(\mathcal{C})_{\mathcal{D}}$ *conmuta con ellos.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $I \xrightarrow{\gamma} \mathsf{Sh}(\mathcal{C},\tau)_{\mathcal{D}}$ una I-gráfica en $\mathsf{Sh}(\mathcal{C},\tau)_{\mathcal{D}}$. Observemos que para probar lo deseado basta ver que la $\mathcal{D}$-pregavilla:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^{op} & \longrightarrow & \mathcal{D} \\ x & & \mathrm{lím}_I(\gamma(-)(x)) \\ f\big\downarrow & \longmapsto & \big\uparrow \mathrm{lím}_I(\gamma(-)(f)) \\ y & & \mathrm{lím}_I(\gamma(-)(y)) \end{array}$$

es una $\mathcal{D}$-gavilla en $(\mathcal{C},\tau)$, es decir, basta probar que para todo objeto d en $\mathcal{D}$ la $\mathcal{U}$-pregavilla:

(46)
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^{op} & \longrightarrow & \mathsf{Con}_{\mathcal{U}} \\ x & & \mathcal{D}\Big(d, \mathrm{lím}_I(\gamma(-)(x))\Big) \\ f\big\downarrow & \longmapsto & \big\uparrow \mathcal{D}\Big(d, \mathrm{lím}_I(\gamma(-)(f))\Big) \\ y & & \mathcal{D}\Big(d, \mathrm{lím}_I(\gamma(-)(y))\Big) \end{array}$$

es una $\mathcal{U}$-gavilla en $(\mathcal{C},\tau)$.

Para ver esto notemos que como el funtor $\mathcal{D}(d,-)$ conmuta con límites (§5.1.3 página 44), la $\mathcal{U}$-pregavilla (46) representa al límites de la I-gráfica que a cada objeto i en I asocia la $\mathcal{U}$-pregavilla:

(47)
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^{op} & \xrightarrow{\mathcal{D}\left(d,\gamma(i)(-)\right)} & \mathsf{Con}_{\mathcal{U}} \\ x & & \mathcal{D}(d, \gamma(i)(x)) \\ f\big\downarrow & \longmapsto & \big\uparrow \gamma(i)(f)\circ - \\ y & & \mathcal{D}(d, \gamma(i)(y)) \end{array}$$

y entonces (46) es una $\mathcal{U}$-gavilla en $(\mathcal{C},\tau)$ por el Teorema 2.2 de la página 93. ✠

TEOREMA 2.10. *Si $(\mathcal{C}, J)$ es un $\mathcal{U}$-categoría con cubiertas y $\mathcal{D}$ es una $\mathcal{U}$-categoría con productos canónicos, una $\mathcal{D}$-pregavilla F en $\mathcal{C}$ es una $\mathcal{D}$-gavilla en $(\mathcal{C}, J)$ si y sólo si para todo objeto x en $\mathcal{C}$ y toda J-cubierta $\mathcal{A}$ de x, el siguiente diagrama es exacto:*

$$F(x) \xrightarrow{\prod_{f_\alpha} F(f_\alpha)} \prod_{f_\alpha \in \mathcal{A}} F(a_\alpha) \underset{\prod_{(f_\alpha,f_\beta)} F(\pi_{a_\beta})\circ\pi_{f_\beta}}{\overset{\prod_{(f_\alpha,f_\beta)} F(\pi_{a_\alpha})\circ\pi_{f_\alpha}}{\rightrightarrows}} \prod_{(f_\alpha,f_\beta)\in\mathcal{A}^2} F(a_\alpha \underset{x}{\times} a_\beta)$$

DEMOSTRACIÓN. Como el funtor $\mathcal{D}(\mathrm{d},-)$ conmuta con igualadores (§5.1.3 página 44), un diagrama de morfismos en $\mathcal{D}$:

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "h"] & b \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & c \end{tikzcd},$$

es exacto si y sólo si para todo objeto d en $\mathcal{D}$,

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D}(d,a) \arrow[r, "h\circ-"] & \mathcal{D}(d,b) \arrow[r, shift left, "f\circ-"] \arrow[r, shift right, "g\circ-"'] & \mathcal{D}(d,c) \end{tikzcd}$$

es un diagrama exacto.

El resultado se sigue entonces del Teorema 2.7 de la página 99 y de que el funtor $\mathcal{D}(\mathrm{d},-)$ conmuta con productos para todo objeto d en $\mathcal{D}$ (§5.1.3 página 44). ✠

3. Morfismos de Sitios

§3.1. Morfismos de Sitios. Sean $(\mathcal{C},\tau)$ y $(\mathcal{C}',\tau')$ dos $\mathcal{U}$-sitios.

Un morfismo de $\mathcal{U}$-sitios $(\mathcal{C},\tau) \xrightarrow{\mathcal{F}} (\mathcal{C}',\tau')$ es un funtor $\mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{C}'$ con la propiedad que si F es una $\mathcal{U}$-gavilla en $(\mathcal{C}',\tau')$ entonces $\mathsf{F}\circ\mathcal{F}^{\mathrm{op}}$ es una $\mathcal{U}$-gavilla en $(\mathcal{C},\tau)$, es decir, existe un cuadrado conmutativo:

(48)
$$\begin{tikzcd} \mathsf{Pre}(\mathcal{C}')_{\mathcal{U}} \arrow[r, "(\mathsf{Con}_{\mathcal{U}})^{\mathcal{F}^{\mathrm{op}}}"] & \mathsf{Pre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}} \\ \mathsf{Sh}(\mathcal{C}',\tau')_{\mathcal{U}} \arrow[u, "\beta'\circ\alpha'"] \arrow[r, dashed, "\mathcal{F}^s"'] & \mathsf{Sh}(\mathcal{C},\tau)_{\mathcal{U}} \arrow[u, "\beta\circ\alpha"'] \end{tikzcd}$$

Al funtor $\mathcal{F}^s$ unicamente definido por esta condición, lo llamamos *el funtor imagen inversa asociado a $\mathcal{F}$* y si F es una $\mathcal{U}$-gavilla en $(\mathcal{C}',\tau')$ llamamos a $\mathcal{F}^s(\mathsf{F})$ *la $\mathcal{U}$-gavilla en $(\mathcal{C},\tau)$ imegen inversa de* F *por $\mathcal{F}$.*

TEOREMA 3.1. *Si $(\mathcal{C},\tau) \xrightarrow{\mathcal{F}} (\mathcal{C}',\tau')$ es un morfismo de $\mathcal{U}$-sitios, el funtor $\mathcal{F}^s$ tiene un adjunto izquierdo $\mathcal{F}_s$.*

DEMOSTRACIÓN. El Corolario 6.5 de la página 53, define un funtor:

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Pre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}} \arrow[r, bend left, "\mathrm{Kan}^{i}(\mathcal{F})"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathsf{Pre}(\mathcal{C}')_{\mathcal{U}} \arrow[l, bend left, "(\mathsf{Con}_{\mathcal{U}})^{\mathcal{F}^{\mathrm{op}}}"] \end{tikzcd}$$

Probaremos que si $\mathcal{F}_s := (\mathsf{L}\circ\mathsf{L})\circ\mathrm{Kan}^{i}(\mathcal{F})\circ(\beta\circ\alpha)$ entonces $\mathcal{F}_s$ es adjunto izquierdo de $\mathcal{F}^s$. En efecto, si F es una $\mathcal{U}$-gavilla en $(\mathcal{C}',\tau')$ y G es una $\mathcal{U}$-gavilla en $(\mathcal{C},\tau)$, se tienen isomorfismos:

$$\begin{aligned}
\mathsf{Sh}(\mathcal{C},\tau)_{\mathcal{U}}\big(G,\mathcal{F}^s(F)\big) &\cong \mathsf{Pre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}}\,(\beta\circ\alpha(G),\beta\circ\alpha\circ\mathcal{F}^s(F)) && (\alpha \text{ y } \beta \text{ son fieles y plenos})\\
&\cong \mathsf{Pre}(\mathcal{C})_{\mathcal{U}}\,(\beta\circ\alpha(G),\mathsf{Con}_{\mathcal{U}}^{\mathcal{F}^{op}}\circ\beta'\circ\alpha'(F)) && (\text{Conmutatividad de } (48))\\
&\cong \mathsf{Pre}(\mathcal{C}')_{\mathcal{U}}\,(\mathrm{Kan}^{i}(\mathcal{F})\circ\beta\circ\alpha(G),\beta'\circ\alpha'(F)) && (\mathrm{Kan}^{i}(\mathcal{F})\dashv(\mathsf{Con}_{\mathcal{U}})^{\mathcal{F}^{op}})\\
&\cong \mathsf{Sh}(\mathcal{C}',\tau')_{\mathcal{U}}\big(L\circ L\circ\mathrm{Kan}^{i}(\mathcal{F})\circ\beta\circ\alpha(G),F\big) && (L\circ L\dashv\beta'\circ\alpha')\\
&= \mathsf{Sh}(\mathcal{C}',\tau')_{\mathcal{U}}\big(\mathcal{F}_s(G),F\big)
\end{aligned}$$

✠

Al funtor $\mathcal{F}_s$ definido en la prueba del Teorema anterior lo llammos *el funtor imagen directa asociado a* $\mathcal{F}$ y si G es una $\mathcal{U}$-gavilla en $(\mathcal{C},\tau)$ llamamos a $\mathcal{F}_s(G)$ *la* $\mathcal{U}$*-gavilla en* $(\mathcal{C}',\tau')$ *imegen directa de* F *por* $\mathcal{F}$.

Por propiedades de adjunción, el funtor imagen inversa $\mathcal{F}^s$ asociado a un morfismo de $\mathcal{U}$-sitios $(\mathcal{C},\tau) \xrightarrow{\mathcal{F}} (\mathcal{C}',\tau')$ conmuta con límites, y el funtor imagen directa $\mathcal{F}_s$ conmuta con colímites. Más aún,

Proposición 3.2. *Si* $(\mathcal{C},\tau) \xrightarrow{\mathcal{F}} (\mathcal{C}',\tau')$ *es un morfismo de* $\mathcal{U}$*-sitios el funtor imagen directa* $\mathcal{F}_s$ *asociado a* $\mathcal{F}$ *conmuta con límites finitos si el funtor* $\mathrm{Kan}^i(\mathcal{F})$ *definido en el Corolario 6.5 de la página 53 conmuta con límites finitos.*

Demostración. El resultado se sigue del Teorema 2.2 de la página 93 y del Teorema 2.4 de la página 95. ✠

§3.2. Morfismos asociados a funciones continuas. En esta parte utilizaremos el $\mathcal{U}$-presitio $(\mathsf{Ab}(X),J_X)$ asociado a un espacio topológico en la sección §4.2.

Si X y Y son espacio topológicos $\mathcal{U}$-pequeños, notemos que una función continua $X \xrightarrow{f} Y$ determina un funtor $\mathsf{Ab}(Y) \xrightarrow{\mathsf{Ab}(f)} \mathsf{Ab}(X)$ definido para cada abierto V de Y como $f^{-1}(V)$, el cual es realmente un morfismo de $\mathcal{U}$-presitios:

$$(\mathsf{Ab}(Y),J_Y) \xrightarrow{\mathsf{Ab}(f)} (\mathsf{Ab}(X),J_X)$$

Denotamos al funtor imgen directa $(\mathsf{Ab}(f))_s$ asociado a $\mathsf{Ab}(f)$ como f^* y lo llamamos *el funtor imagen inversa asociado a* f. Del mismo modo, denotamos al funtor imgen inversa $(\mathsf{Ab}(f))^s$ asociado a $\mathsf{Ab}(f)$ como f_* y lo llamamos *el funtor imagen directa asociado a* f.

Se sigue que una función continua $X \xrightarrow{f} Y$ entre espacios topológicos $\mathcal{U}$-pequeños determina una adjunción:

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Sh}(X)_{\mathcal{U}} \arrow[r, bend right, "f_*"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathsf{Sh}(Y)_{\mathcal{U}} \arrow[l, bend right, "f^*"']
\end{tikzcd}$$

por lo que f_* conmuta con límites y f^* conmuta con colímites. Más aún, se sigue de la Proposición 3.2 que f^* conmuta con límites finitos.

Ejemplos:

§3.2.1. *Rstricción a abiertos.* Si X es un espacio topológico $\mathcal{U}$-pequeño y U es un abierto de X, la inclusión natural $U \overset{v}{\hookrightarrow} X$ determina una adjunción:

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Sh}(U)_{\mathcal{U}} \arrow[r, bend right, "v_*"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathsf{Sh}(X)_{\mathcal{U}} \arrow[l, bend right, "v^*"'] \end{tikzcd}$$

Si F es una $\mathcal{U}$-gavilla en X, denotamos a la gavilla $v^*(F)$ como $F|_U$ y la llamamos *la restricción de* F *en* U. Entonces, $F|_U(V) = F(V)$ para todo abierto $V \subseteq U$.

§3.2.2. *Secciones Globales.* Sea X un espacio topológico $\mathcal{U}$-pequeño. Si $*$ denota al objeto terminal de $\mathsf{Top}_{\mathcal{U}}$, dentamos a la única función continua de X en $*$ como $X \xrightarrow{k} *$.

Observemos que la $\mathcal{U}$-categoría $\mathsf{Sh}(*)_{\mathcal{U}}$ es isomorfa a la $\mathcal{U}$-categoría de conjuntos $\mathcal{U}$-pequeños, por lo que el funtor imagen directa asociado a k, determina un funtor $\mathsf{Sh}(X)_{\mathcal{U}} \xrightarrow{k_*} \mathsf{Con}_{\mathcal{U}}$ al que denotamos como Γ. Si F es una $\mathcal{U}$-gavilla en X, $\Gamma(F)$ es igual al conjunto de secciones de F en X, por lo que llamamos a Γ *el funtor secciones globales de* X.

Por otro lado, el funtor imagen inversa asociado a k determina un funtor $\mathsf{Con}_{\mathcal{U}} \xrightarrow{k^*} \mathsf{Sh}(X)_{\mathcal{U}}$ al que denotamos como $\underline{\ \cdot\ }_X$ y llamado *el funtor gavilla constante en* X. Por definición, si A es un conjunto $\mathcal{U}$-pequeño, $\underline{A}_X$ es la engavillación de la $\mathcal{U}$-pregavilla en X que a cada abierto asocia el conjunto A.

Más aún, tenemos una adjunción:

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Sh}(X)_{\mathcal{U}} \arrow[r, bend right, "\Gamma(-)"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathsf{Con}_{\mathcal{U}} \arrow[l, bend right, "\underline{\ \cdot\ }_X"'] \end{tikzcd}$$

donde $\underline{\ \cdot\ }_X$ conmuta con límites fínitos.

§3.2.3. *El Tallo de un Punto.* Sea X un espacio topológico $\mathcal{U}$-pequeño. Si x es un punto de X se tiene una función continua $* \xrightarrow{i_x} X$ que asocia al unico elemento de $*$ el elemento x de X.

El funtor imagen directa $\mathsf{Con}_{\mathcal{U}} \xrightarrow{(i_x)_*} \mathsf{Sh}(X)_{\mathcal{U}}$ asocia a un conjunto A la $\mathcal{U}$-gavilla en X definida por:

$$(i_x)_*(A)(U) = \begin{cases} A & \text{si } x \in U \\ \emptyset & \text{si } x \notin U \end{cases}$$

Por otro lado, el funtor imagen inversa $\mathsf{Sh}(X)_{\mathcal{U}} \xrightarrow{(i_x)^*} \mathsf{Con}_{\mathcal{U}}$ es denotado como $(\,\cdot\,)_x$ y si F es una $\mathcal{U}$-pregavilla en X el conjunto F_x es llamado *el tallo de* F *en* x.

No es difícil ver que el tallo en x de una $\mathcal{U}$-gavilla F en X se puede identificar con el conjunto de las parejas (U, s), donde $U \subseteq X$ es un abierto que tiene a x y $s \in F(U)$, módulo la relación de equivalencia que identifica a (U, s) con (V, r), si existe una vecindad de x contenida en $U \cap V$ tal que $s|_W = r|_W$. Denotamos a la clase de (U, s) como $[U, s]_x$ y la llamamos *el germen de* (U, s) *en* x.

El funtor $Sh(X)_{\mathcal{U}} \xrightarrow{(-)_x} Con_{\mathcal{U}}$ conmuta con colímites y con límites finitos. Además:

$$\begin{tikzcd} Con_{U} \arrow[r, bend right, "(i_x)_*"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & Sh(X)_{\mathcal{U}} \arrow[l, bend right, "(-)_x"'] \end{tikzcd}$$

4. Gavillas en un grupoide etale

§4.1. Grupoides etale. Un *grupoide topológico $\mathcal{U}$-pequeño* $\mathcal{G}$ es un grupoide $\mathcal{U}$-pequeño, cuyo conjunto de objetos $\mathcal{G}_0$ y de morfismos $\mathcal{G}_1$ tienen estructuras de espacios topológicos, tales que las funciones:

$$\begin{array}{ccc} x \xrightarrow{f} y \longmapsto x & & \\ \mathcal{G}_1 \overset{d_0}{\underset{d_1}{\rightrightarrows}} \mathcal{G}_0 & \qquad & \mathcal{G}_2 \xrightarrow{m} \mathcal{G}_1 \\ x \xrightarrow{f} y \longmapsto y & & (f, g) \longmapsto f \circ g \\ & & \\ \mathcal{G}_0 \xrightarrow{s_0} \mathcal{G}_1 & & \mathcal{G}_1 \xrightarrow{\nu} \mathcal{G}_1 \\ x \longmapsto id_x & & f \longmapsto f^{-1} \end{array}$$

son continuas $\left(\text{Aquí } \mathcal{G}_2 \text{ es el producto fibrado de los morfismos } \mathcal{G}_0 \overset{d_0}{\underset{d_1}{\rightrightarrows}} \mathcal{G}_1\right)$.

Un morfismo de grupoides topológicos $\mathcal{U}$-pequeños es un morfismo de grupoides $\mathcal{G} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{H}$, tal que la función de objetos $\mathcal{G}_0 \xrightarrow{\mathcal{F}_0} \mathcal{H}_0$ y de morfismos $\mathcal{G}_1 \xrightarrow{\mathcal{F}_1} \mathcal{H}_1$ son continuas.

Si $\mathcal{G}$ es un grupoide topológico $\mathcal{U}$-pequeño, decimos que $\mathcal{G}$ es *grupoide etale $\mathcal{U}$-pequeño* si el morfismo d_0 es un homeomorfismo local (En este caso, d_1 y m también son homeomorfismos locales).

Denotamos como $GrpdE_{\mathcal{U}}$ a la $\mathcal{U}$-categoría que tiene por objetos a los grupoides etale $\mathcal{U}$-pequeños y cuyos morfismos son los morfismos de grupoides topológicos.

Ejemplos:

§4.1.1. *Espacios topológicos.*

Un espacio topológico $\mathcal{U}$-pequeño X tiene asociado canónicamente un grupoide etale, cuyo espacio de objetos y de morfismos son igual a X y donde $m = \pi_X|_{\triangle_X}$ y $d_0 = d_1 = s_0 = \nu = id_X$. A este grupoide, por abuso de notación, lo denotamos con la misma letra X.

Más aún, un morfismo de espacios topológicos $X \xrightarrow{f} Y$ determina un morfismo entre los grpoides topológicos correspondientes, el cual está definido en los objetos y morfismos por la misma f. Se tiene así un funtor fiel y pleno $Top_{\mathcal{U}} \hookrightarrow GrpdE_{\mathcal{U}}$.

§4.1.2. G-*Conjuntos.*

Si G es un grupo $\mathcal{U}$-pequeño, un G-espacio izquierdo $\mathcal{U}$-pequeño X tiene asociado un grupoide etale $\mathcal{U}$-pequeño $G \ltimes X$, cuyo espacio de objetos es igual a X y de morfismos a $G \times X$ (G con la topología discreta), y donde

$$\begin{array}{ccc} (g,x) & \longmapsto & x \\ G \times X & \overset{d_0}{\underset{d_1}{\rightrightarrows}} & X \\ (g,x) & \longmapsto & g \cdot x \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} G \times G \times X & \xrightarrow{m} & G \times X \\ (g,h,x) & \longmapsto & (gh, x) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{s_0} & G \times X \\ x & \longmapsto & (e,x) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} G \times X & \xrightarrow{\nu} & G \times X \\ (g,x) & \longmapsto & (g^{-1}, x) \end{array}$$

§4.2. La categoría de abiertos de un grupoide etale. Si $\mathcal{G}$ es un grupoide etale $\mathcal{U}$-pequeño, denotamos como $\mathsf{Ab}(\mathcal{G})$ a la $\mathcal{U}$-categoría pequeña que tiene como conjunto de objetos a los abiertos de $\mathcal{G}_0$, y donde un morfismo de U en V es una función de la forma $U \xrightarrow{d_1 \circ (d_0|_{U'})^{-1}} V$, para algún abierto U' de $\mathcal{G}_1$ tal que $U' \xrightarrow{d_0|_{U'}} U$ es un homeomorfismo y $U' \xrightarrow{d_1|_{U'}} V$ es inyectiva.

La composición de dos morfismos $U \xrightarrow{d_1 \circ (d_0|_{U'})^{-1}} V$ y $V \xrightarrow{d_1 \circ (d_0|_{V'})^{-1}} W$ se define como $U \xrightarrow{d_1 \circ (d_0|_{U' \circ V'})^{-1}} W$, donde

$$U' \circ V' := \left\{ g \circ f \,\middle|\, f \in U' \text{ y } g = \left(d_0|_{V'} \right)^{-1} \circ d_1(f) \right\}.$$

No es difícil ver que la $\mathcal{U}$-categoría $\mathsf{Ab}(\mathcal{G})$ tiene naturalmente una estructura de $\mathcal{U}$-categoría con productos fibrados canónicos. Más aún, si $J_{\mathcal{G}}$ está definido en un abierto U de $\mathcal{G}_0$ como el conjunto de familias $\{U_\alpha \overset{f_\alpha}{\to} U\}$ de morfismos de $\mathsf{Ab}(\mathcal{G})$, tales que $\bigcup_\alpha f_\alpha(U_\alpha) = U$, entonces $(\mathsf{Ab}(\mathcal{G}), J_{\mathcal{G}})$ es un $\mathcal{U}$-presitio.

Si $\mathcal{G}$ es un grupoide etale $\mathcal{U}$-pequeño y $\mathcal{D}$ una $\mathcal{U}$-categoría, denotamos a la $\mathcal{U}$-categoría de $\mathcal{D}$-pregavillas en $\mathsf{Ab}(\mathcal{G})$ (resp. $\mathcal{D}$-gavillas en $(\mathsf{Ab}(\mathcal{G}), J_{\mathcal{G}})$) simplemente como $\mathsf{Pre}(\mathcal{G})_{\mathcal{D}}$ (resp. $\mathsf{Sh}(\mathcal{G})_{\mathcal{D}}$) y llamamos a sus objetos *$\mathcal{D}$-pregavillas en $\mathcal{G}$* (resp. *$\mathcal{D}$-gavillas en $\mathcal{G}$*).

Ejemplos:

§4.2.1. *Espacios topológicos.*

Si X es un espacio topológico $\mathcal{U}$-pequeño, $\mathsf{Ab}(X)$ tiene por objetos a los abiertos de X y por morfismos a las inclusiones entre ellos. Si U es un abierto de X, la familia $J_X(U)$ consiste de las cubiertas abiertas habituales de U.

En general, si $\mathcal{G}$ es un grupoide etale $\mathcal{U}$-pequeño, el funtor $\mathsf{Ab}(\mathcal{G}_0) \longrightarrow \mathsf{Ab}(\mathcal{G})$ definido como la identidad en objetos es fiel.

§4.2.2. G-*conjuntos.*

Si X es un G-espacio izquierdo $\mathcal{U}$-pequeño, la $\mathcal{U}$-categoría pequeña $\mathsf{Ab}(G \ltimes X)$ tiene por objetos a los abiertos de X. Un morfismo en $\mathsf{Ab}(G \ltimes X)$ de U en V es una función de la forma $x \mapsto g \cdot x$ donde g es algún elemento de G. Se sigue que $\mathsf{Ab}(G \ltimes X)(U, V) \neq \emptyset$ si y sólo si existe $g \in G$ tal que $g \cdot U \subseteq V$.

Si U es un abierto de X, un elemento de $J_{G \ltimes X}(U)$ consiste de una familia de abiertos $\{U_\alpha\}$ de X, tales que para cada U_α existe $g_\alpha \in G$ con $\bigcup_\alpha (g_\alpha \cdot U_\alpha) = U$.

§4.3. Espacios etale sobre $\mathcal{G}$. Si $\mathcal{G}$ es un grupoide etale $\mathcal{U}$-pequeño, un *espacio etale $\mathcal{U}$-pequeño* $E = (E, p, \cdot)$ *sobre* $\mathcal{G}$ es un espacio topológico $\mathcal{U}$-pequeño E, un homeomorfismo local $E \xrightarrow{p} \mathcal{G}_0$ y una acción de $\mathcal{G}$ en p, es decir, un morfismo:

$$\left\{(\alpha, x) \in \mathcal{G}_1 \times E \;\middle|\; p(x) = d_0(\alpha)\right\} = \mathcal{G}_1 \underset{\mathcal{G}_0}{\times} E \longrightarrow E$$
$$(\alpha, x) \longmapsto \alpha \cdot x$$

con las propiedades $d_1(\alpha \cdot x) = d_1(\alpha)$, $\mathrm{id}_x \cdot x = x$ y $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \circ \beta) \cdot x$.

Si E y E' son dos espacios etales $\mathcal{U}$-pequeños sobre $\mathcal{G}$, *un morfismo de* E *en* E' *sobre* $\mathcal{G}$ es un morfismo de espacios $E \xrightarrow{\varphi} E'$ tal que $p' \circ \varphi = p$ y $\varphi(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot \varphi(x)$.

Denotamos como $\mathfrak{Etale}_{\mathcal{G}}$ a la $\mathcal{U}$-categoría que tiene por objetos a los espacios etale $\mathcal{U}$-pequeños sobre $\mathcal{G}$ y por morfismos a los morfismos sobre $\mathcal{G}$.

Si E es un espacio etale $\mathcal{U}$-pequeño sobre $\mathcal{G}$ y U es un abierto de $\mathcal{G}_0$, una *$\mathcal{G}$-sección de* E *sobre* U es una función $U \xrightarrow{s} E$ tal que $p \circ s = \mathrm{id}_U$ y $f \cdot s(x) = s(y)$, para todo morfismo $x \xrightarrow{f} y$ en $\mathcal{G}$.

Se sigue que si $\Gamma_{\mathcal{G}}(U, E)$ denota al conjunto de $\mathcal{G}$-secciones de E sobre U, tenemos una $\mathcal{U}$-pregavilla en $\mathcal{G}$:

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Ab}(\mathcal{G})^{op} \arrow[r, "\Gamma_{\mathcal{G}}(-,E)"] & \mathsf{Con}_{\mathcal{U}} \\ U \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\longmapsto"] & \Gamma_{\mathcal{G}}(U, E) \\ V & \Gamma_{\mathcal{G}}(V, E) \arrow[u, "\cdot|_U"'] \end{tikzcd}$$

PROPOSICIÓN 4.1. *El funtor* $\Gamma_{\mathcal{G}}(-, E)$ *es una gavilla en* $\mathcal{G}$ *a la que llamamos la* gavilla de $\mathcal{G}$-secciones de E.

Observemos ahora que si $E \xrightarrow{\varphi} E'$ es un morfismo de espacios etale sobre $\mathcal{G}$, la asignación $s \mapsto \varphi \circ s$, determina una transformación natural $\Gamma_{\mathcal{G}}(-, E) \Rightarrow \Gamma_{\mathcal{G}}(-, E')$, de modo que se tiene un funtor:

$$\mathfrak{Etale}_{\mathcal{G}} \xrightarrow{\Gamma_{\mathcal{G}}} \mathsf{Sh}(\mathcal{G})_{\mathcal{U}}$$

al que llamamos *el funtor de $\mathcal{G}$-secciones.*

PROPOSICIÓN 4.2. *Si $\mathcal{G}$ es un grupoide etale $\mathcal{U}$-pequeño, el funtor de secciónes sobre $\mathcal{G}$ es fiel y pleno:*

$$\mathfrak{Etale}_{\mathcal{G}} \xhookrightarrow{\Gamma_{\mathcal{G}}} \mathsf{Sh}(\mathcal{G})_{\mathcal{U}}$$

DEMOSTRACIÓN. Sean $E \xrightarrow{p} \mathcal{G}_0$ y $E' \xrightarrow{p'} \mathcal{G}_0$ dos espacios etale $\mathcal{U}$-pequeños sobre $\mathcal{G}$. Debemos probar que la asignación:

$$\begin{aligned} \mathfrak{Etale}_{\mathcal{G}}(E, E') &\longrightarrow \mathbf{Pre}(\mathcal{G})\left(\Gamma_{\mathcal{G}}(E), \Gamma_{\mathcal{G}}(E')\right) \\ \varphi &\longmapsto \eta_{\varphi} \end{aligned}$$

donde $(\eta_{\varphi})_U(s) = \varphi \circ s$ para todo abierto $U \subseteq \mathcal{G}_0$, es una biyección. Para ello daremos una asignación inversa $\eta \mapsto \varphi_{\eta}$.

Dada η, define $\varphi_{\eta}(x)$ como $\eta_U(s)\big(p(x)\big)$ donde U es un abierto que contiene a $p(x)$, y $s \in \Gamma_{\mathcal{G}}(U, E)$ es tal que $s\big(p(x)\big) = x$.

Por la naturalidad de η y por ser $E \to \mathcal{G}_0$ un homeomorfismo local, se puede verificar que φ_{η} está bien definida.

Observemos ahora que

$$\left(\eta_{\varphi_{\eta}}\right)(s)(a) = \varphi_{\eta}\big(s(a)\big) = \eta_U(s)(a),$$

por lo que $\eta_{\varphi_{\eta}} = \eta$. Mientras que

$$\varphi_{\eta_{\varphi}}(x) = \left(\eta_{\varphi}\right)_U(s)\big(p(x)\big) = \varphi\Big(s\big(p(x)\big)\Big) = \varphi(x),$$

de lo que se sigue que $\varphi_{\eta_{\varphi}} = \varphi$. ✠

Ejemplos:

§4.3.1. *Espacios topológicos.*

Si X es un espacio topológico $\mathcal{U}$-pequeño, un espacio etale sobre el grupoide canónico asociado a X es llamado simplemente un *espacio etale sobre* X, es decir, un espacio etale sobre X es un homeomorfismo local $E \xrightarrow{p} X$.

§4.3.2. G-*conjuntos.*

Si X es un G-espacio, un espacio etale sobre el grupoide $G \ltimes X$ es llamado un G-*espacio etale sobre* X, es decir, un G-espacio etale sobre X es un G-espacio izquierdo E acompañado de un homeomorfismo local G-equivariante $E \xrightarrow{p} X$.

En este caso, denotamos a la $\mathcal{U}$-categoría $\mathfrak{Etale}_{G \ltimes X}$ como G-$\mathfrak{Etale}_X$.

§4.4. Gavillas v.s. Espacios etale. Sea $\mathcal{G}$ un grupoide etale $\mathcal{U}$-pequeño.

Si U es un abierto en $\mathcal{G}_0$, denotamos como $U_{\mathcal{G}}$ al conjunto de los elementos x en $\mathcal{G}_0$ tales que existe $y \in U$ y $x \xrightarrow{f} y$. Se sigue que si $U \xhookrightarrow{h} V$ es un morfismo en $\mathcal{G}$, entonces $U_{\mathcal{G}} \subseteq V_{\mathcal{G}}$. Esto nos permite definir un funtor:

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Ab}(\mathcal{G}) \arrow[r, "\mathcal{F}"] & \mathfrak{Etale}_{\mathcal{G}} & \\
U \arrow[d, hook, "h"'] \arrow[r, mapsto, shorten <=2em, shorten >=2em] & U_{\mathcal{G}} \arrow[d, hook] \arrow[dr, hook] & \\
V & V_{\mathcal{G}} \arrow[r, hook] & \mathcal{G}_0
\end{tikzcd}$$

donde $\mathcal{U}_G \hookrightarrow \mathcal{G}_0$ es visto como un espacio etale sobre $\mathcal{G}$ con la acción trivial.

Usando el Teorema 6.6 de la página 55, tenemos un diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{Etale}_{\mathcal{G}} \arrow[d, bend left, "\mathcal{F}^{\wedge}"] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\
\mathsf{Ab}(\mathcal{G}) \arrow[ur, bend left, "\mathcal{F}"] \arrow[r, hook, "h^{\wedge}"'] \arrow[ur, phantom, "\cong"'] & \mathsf{Pre}(\mathcal{G})_{\mathcal{U}} \arrow[u, "\mathcal{F}_{\wedge}"]
\end{tikzcd}$$

PROPOSICIÓN 4.3. *El funtor $\mathcal{F}^{\wedge}$ del diagrama anterior es isomorfo al funtor de $\mathcal{G}$-secciones $\Gamma_{\mathcal{G}}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $E \xrightarrow{p} \mathcal{G}_0$ un $\mathcal{G}$-espacio etale y $U \subseteq \mathcal{G}_0$ un abierto. Como $\mathcal{F}^{\wedge}(E)(U) = \Gamma_{\mathcal{G}}(U_{\mathcal{G}}, E)$, para probar lo deseado basta ver que la función:

$$\Gamma_{\mathcal{G}}(E, U_{\mathcal{G}}) \xrightarrow{\quad -|_U \quad} \Gamma_{\mathcal{G}}(E, U)$$

es una biyección. Para esto, definiremos una asignación inversa $\sigma \mapsto s_\sigma$.

Definicion de $\sigma \mapsto s_\sigma$:

Dado $\sigma \in \Gamma_{\mathcal{G}}(E, U)$, para $x \in U_{\mathcal{G}}$, tal que $x \xrightarrow{f} y$ es un morfismo con $y \in U$, define $s_\sigma(x)$ como $(f^{-1}) \cdot \sigma(y)$. Entonces, si $x \xrightarrow{f'} y'$ es otro morfismo con $y' \in U$, como la aplicación $y \xrightarrow{f^{-1}} x \xrightarrow{f'} y'$ tiene dominio y codominio en U, se tiene que $(f' \circ f^{-1}) \cdot \sigma(y) = \sigma(y')$, es decir, $f^{-1} \cdot \sigma(y) = (f')^{-1} \cdot \sigma(y')$.

Por lo tanto s_σ está bien definida.

Las funciones son inversas una de la otra:

Notemos que si $\sigma \in \Gamma_{\mathcal{G}}(U, E)$, para todo $x \in U$

$$s_\sigma(x) = (\mathrm{id}_x)^{-1} \cdot \sigma(x) = \sigma(x),$$

es decir, $s_\sigma|_U = \sigma$.

Por otro lado, si $s \in \Gamma_{\mathcal{G}}(U_{\mathcal{G}}, E)$, para todo x en $U_{\mathcal{G}}$ se tiene que $(s|_U)(x) = (f^{-1}) \cdot s(y)$, donde $x \xrightarrow{f} y$ es un morfismo en $\mathcal{G}$ con $y \in U$. Como $U \subseteq U_{\mathcal{G}}$ y s es una $\mathcal{G}$-sección sobre $U_{\mathcal{G}}$, se sigue que $f \cdot s(x) = s(y)$, es decir $(s|_U)_\sigma = s$. ✠

Podemos concluir de esta Proposición y de la Proposición 4.2 de la página 111, que se tiene un diagrama:

$$\text{(49)} \qquad \begin{tikzcd} \mathfrak{Etale}_{\mathcal{G}} \arrow[r, bend right, hook, "\mathcal{F}^{\wedge}"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathsf{Sh}(\mathcal{G})_{\mathcal{U}} \arrow[l, bend right, "\mathcal{F}_{\wedge}|"'] \end{tikzcd}$$

TEOREMA 4.4. *La adjunción* (49) *de arriba es una equivalencia de catgorías.*

DEMOSTRACIÓN. Probaremos que si F es una $\mathcal{U}$-gavilla sobre $\mathcal{G}$, el morfismo asociado a la unidad de la adjunción (49):

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\ \eta_{\mathsf{F}}\ } \mathcal{F}^{\wedge}(\mathcal{F}_{\wedge}(\mathsf{F}))$$

es un isomorfismo. Para ello recordemos primero que si $\mathsf{U} \subseteq \mathcal{G}_0$ es un abierto, la restricción $\mathsf{F}(\mathsf{U}_{\mathcal{G}}) \longrightarrow \mathsf{F}(\mathsf{U})$ es una biyección.

Concluimos que basta probar que si $\mathsf{U} \subseteq \mathcal{G}_0$ es un abierto, la función:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathsf{U}_{\mathcal{G}}) &\xrightarrow{\ \eta_{\mathsf{F}}(\mathsf{U}_{\mathcal{G}})\ } \mathfrak{Etale}_{\mathcal{G}}\Big(\mathsf{U}_{\mathcal{G}}, \mathsf{colím}\big(\mathsf{h}^{\wedge} \downarrow \mathsf{F}, \mathcal{F} \circ (\pi \downarrow \mathsf{F})\big)\Big) \\ \mathsf{s} &\longmapsto \mathsf{colím}\big(\mathsf{k}_{(\mathsf{u},\mathsf{s})}, \mathrm{id}\big) \end{aligned}$$

es una biyección.

Descripción de $\mathcal{F}_{\wedge}(\mathsf{F})$*:*

Similarmente a como se probó el Teorema 2.1 de la página 74, pude verse que el colímite de la gráfica:

$$\begin{aligned} \mathsf{h}^{\wedge} \downarrow \mathsf{F} &\longrightarrow \mathsf{Top}_{\mathcal{U}} \\ (\mathsf{V}, \mathsf{s}) &\longmapsto \mathsf{V}_{\mathcal{G}} \end{aligned}$$

es homeomorfo al espacio $\widetilde{\mathsf{F}}$ definido como sigue:

Como conjunto, $\widetilde{\mathsf{F}}$ es igual a la unión ajena sobre $\mathsf{x} \in \mathcal{G}_0$ de los conjuntos:

$$\widetilde{\mathsf{F}}_{\mathsf{x}} := \Big\{(\mathsf{V}_{\mathcal{G}}, \mathsf{s}) \,\Big|\, \mathsf{x} \in \mathsf{U}_{\mathcal{G}} \text{ y } \mathsf{s} \in \mathsf{F}(\mathsf{U}_{\mathcal{G}})\Big\} / \sim$$

donde $\sim$ es la relación de equivalencia que identifica a dos parejas $(\mathsf{V}_{\mathcal{G}}, \mathsf{s})$ y $(\mathsf{U}'_{\mathcal{G}}, \mathsf{s}')$, si existe $W \subseteq \mathcal{G}_0$ abierto tal que $\mathsf{x} \in W_{\mathcal{G}} \subseteq \mathsf{V}_{\mathcal{G}} \cap \mathsf{V}'_{\mathcal{G}}$ y $\mathsf{s}|_{W_{\mathcal{G}}} = \mathsf{s}'|_{W_{\mathcal{G}}}$. (Denotamos a la clase de una pareja $(\mathsf{V}_{\mathcal{G}}, \mathsf{s})$ como $[\mathsf{V}_{\mathcal{G}}, \mathsf{s}]_{\mathsf{x}}$).

Una base para la topología en $\widetilde{\mathsf{F}}$ consiste de los abiertos de la forma $\{[\mathsf{V}_{\mathsf{G}}, \mathsf{s}]_{\mathsf{x}}\}_{\mathsf{x} \in \mathsf{V}_{\mathcal{G}}}$, donde $\mathsf{V} \subseteq \mathcal{G}_0$ es un abierto y $\mathsf{s} \in \mathsf{F}(\mathsf{V}_{\mathsf{G}})$.

Prueba de que $\eta_{\mathsf{F}}(\mathsf{U}_{\mathcal{G}})$ *es una biyección:*

Notemos que con la descripción anterior de $\mathcal{F}_{\wedge}(\mathsf{F})$, la función $\eta_{\mathsf{F}}(\mathsf{U}_{\mathcal{G}})$ se ve de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(\mathsf{U}_{\mathcal{G}}) & \xrightarrow{\eta_{\mathsf{F}}(\mathsf{U}_{\mathcal{G}})} & \mathfrak{Etale}_{\mathcal{G}}\Big(\mathsf{U}_{\mathcal{G}}, \mathcal{F}_{\wedge}(\mathsf{F})\Big) \\ s & \longmapsto & \{x \mapsto [\mathsf{U}_{\mathcal{G}}, s]_x\} \end{array}$$

Para probar que está es una biyección, consideremos σ en $\mathfrak{Etale}_{\mathcal{G}}\Big(\mathsf{U}_{\mathcal{G}}, \mathcal{F}_{\wedge}(\mathsf{F})\Big)$. Se sigue de la continuidad de σ que para cada $x \in \mathsf{U}_{\mathcal{G}}$, existe un abierto $V_{\mathcal{G}}^{x} \subseteq \mathsf{U}_{\mathcal{G}}$ que contiene a x y una sección $s_x \in \mathsf{F}(V_{\mathcal{G}}^{x})$, tal que $\sigma(y) = [V_{\mathcal{G}}^{x}, s_x]_y$ para toda $y \in V_{\mathcal{G}}^{x}$. En particular, para $x, y \in \mathsf{U}_{\mathcal{G}}$ se tiene que $s_x|_{V_{\mathcal{G}}^{x} \cap V_{\mathcal{G}}^{y}} = s_y|_{V_{\mathcal{G}}^{x} \cap V_{\mathcal{G}}^{y}}$. Concluimos de que F es una gavilla, que existe una única $s \in \mathsf{F}(\mathsf{U}_{G})$ tal que $s|_{V_{\mathcal{G}}^{x}} = s_x$ para toda $x \in \mathsf{U}_{\mathcal{G}}$, es decir $\eta_{\mathsf{F}}(\mathsf{U}_{\mathcal{G}})(s) = \sigma$ ✠

CAPÍTULO

5

Variedades Algebraicas

En este capítulo supondremos que $\mathcal{U}$ es un universo fijo y llamamos conjuntos pequeños y conjuntos grandes a los elementos de $\mathcal{U}$ y de $\mathcal{U}^+$, respectivamente. También, denotamos a la $\mathcal{U}$-categoría $\mathsf{Con}_{\mathcal{U}}$ simplemente como Con.

Todos los conjuntos con alguna estructura, como los grupos o los espacios topológicos, se supondrá que son conjuntos pequeños a menos que explícitamente se diga lo contrario. Entonces, por ejemplo, un grupo es un conjunto pequeño con estructura de grupo y denotamos a $\mathsf{Grp}_{\mathcal{U}}$ simplemente como Grp.

También, llamamos a las $\mathcal{U}$-categorías pequeñas, a las $\mathcal{U}$-categorías, a las $\mathcal{U}^+$-categorías pequeñas y a las $\mathcal{U}^+$-categorías simplemente *categorías pequeñas*, *categorías*, *+-categorías pequeñas* y *+-categorías*, respectivamente.

Por último, por un anillo entenderemos un anillo conmutativo y denotaremos como Anillo a la categoría Anillo^{ab}.

1. Conjuntos algebraicos

§1.1. $\mathfrak{K}$-Álgebras. Si $\mathfrak{K}$ es un anillo, denotamos como $\mathfrak{K}$-Alg a la categoría codirigida $\mathfrak{K} \downarrow \mathsf{Anillo}$ y la llamamos la *categoría de $\mathfrak{K}$-álgebras*. Así, una $\mathfrak{K}$-álgebra es una pareja (A, u) donde A es un anillo y $\mathfrak{K} \xrightarrow{\mathrm{u}} \mathrm{A}$ es un morfismo de anillos[1].

PROPOSICIÓN 1.1. *Si $\mathfrak{K}$ es el anillo de los números enteros $\mathbb{Z}$, el funtor proyección $\mathbb{Z}$-$\mathsf{Alg} \xrightarrow{\mathbb{Z}\downarrow\pi} \mathsf{Anillo}$ que a cada $\mathbb{Z}$-álgebra (A, u) asocia el anillo A es un isomorfismo de categorías.*

DEMOSTRACIÓN. Este resultado se sigue del hecho que para todo objeto A en Anillo existe un único morfismo de anillos de $\mathbb{Z}$ en A. ✠

[1]Si el morfismo de anillos $\mathfrak{K} \xrightarrow{\mathrm{u}} \mathrm{A}$ se sobreentiende en el contexto, decimos que A es una $\mathfrak{K}$-álgebra

Como hemos dado a la categoría de anillos una estructura de categoría canónicamente completa y cocompleta, para todo anillo $\mathfrak{K}$ la categoría de $\mathfrak{K}$-álgebras tiene naturalmente una estructura de categoría canónicamente completa y cocompleta. Por ejemplo:

Productos: El producto de una familia $\{(A_\omega, u_\omega)\}_{\omega\in\Omega}$ de $\mathfrak{K}$-álgebras es representable por la $\mathfrak{K}$-álgebra $\left(\prod_{\omega\in\Omega} A_\omega, \prod_{\omega\in\Omega} u_\omega\right)$ donde $\prod_{\omega\in\Omega} A_\omega$ es el producto en la categoría de anillos de la familia $\{A_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ y $\prod_{\omega\in\Omega} u_\omega$ es el único morfismo con la propiedad $\pi_\omega \circ \left(\prod_{\omega\in\Omega} u_\omega\right) = u_\omega$ para todo $\omega \in \Omega$.

Igualadores: El igualador de una pareja de morfismos $(A, u) \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} (B, v)$ en la categoría de $\mathfrak{K}$-álgebras es representable por la $\mathfrak{K}$-álgebra $(\ker_{f,g}, w)$ donde $\ker_{f,g} \xrightarrow{k_*} A$ es el igualador en la categoría de anillos de los morfismo $A \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} B$ y $\mathfrak{K} \xrightarrow{w} \ker_{f,g}$ es el único morfismo tal que $k_* \circ w = u$.

Sumas Finitas: La suma de una familia $\{(A, u), (B, v)\}$ de $\mathfrak{K}$-álgebras es representable por la $\mathfrak{K}$-álgebra $\left(A \underset{k}{\otimes} B, u \underset{k}{\otimes} v\right)$ donde si $A \otimes B$ es la suma en la categoría de anillos de la familia $\{A, B\}$, entonces $A \otimes B \xrightarrow{k^*} A \underset{k}{\otimes} B$ es el coigualador en la categoría de anillos de los morfismos

$$\mathfrak{K} \overset{u(-)\otimes 1}{\underset{1\otimes v(-)}{\rightrightarrows}} A \otimes B$$

y $u \underset{k}{\otimes} v = k^* \circ \big(u(-) \otimes 1\big) = k^* \circ \big(1 \otimes v(-)\big)$.

Coigualadores: El coigualador de una pareja de morfismos $(A, u) \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} (B, v)$ en la categoría de $\mathfrak{K}$-álgebras es representable por la $\mathfrak{K}$-álgebra $(\mathrm{coker}_{f,g}, k^* \circ v)$ donde $B \xrightarrow{k^*} \mathrm{coker}_{f,g}$ es el coigualador en la categoría de anillos de los morfismos $A \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} B$.

§1.1.1. *La $\mathfrak{K}$-Álgebra de Polinomios.*

Sea $\mathfrak{K}$ un anillo.

Si M es un monoide, el conjunto de expresiones formales $\sum_{g\in M} \alpha_g g$ donde $\alpha_g \in \mathfrak{K}$ es diferente de cero para solamente un número finito de g's, tiene una estructura de anillo con la siguiente suma y producto:

$$\sum_{g\in M}\alpha_g g+\sum_{g\in M}\beta_g g=\sum_{g\in M}(\alpha_g+\beta_g)g$$

$$\left(\sum_{g\in M}\alpha_g g\right)\left(\sum_{g\in M}\beta_g g\right)=\sum_{g\in M}\left(\sum_{hk=g}\alpha_h\beta_k\right)g$$

y también una estructura de $\mathfrak{K}$-álgebra con el morfismo $\mathfrak{K}\xrightarrow{u_M}\mathfrak{K}[M]$ definido como $u_M(\alpha)=\alpha e$ donde e denota al elemento neutro de M.

Más aún, si para un morfismo de monoides $M\xrightarrow{f}N$ definimos $\mathfrak{K}[M]\xrightarrow{\mathfrak{K}[f]}\mathfrak{K}[N]$ como

$$\mathfrak{K}[f]\left(\sum_{g\in M}\alpha_g g\right)=\sum_{h\in N}\left(\sum_{g\in f^{-1}(h)}\alpha_g\right)h$$

se tiene un funtor:

$$\mathsf{Mond}\xrightarrow{\left(\mathfrak{K}[-],u_-\right)}\mathfrak{K}\text{-}\mathsf{Alg}$$

$$\begin{array}{ccc} M & & (\mathfrak{K}[M],u_M) \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \longmapsto & \downarrow{\scriptstyle \mathfrak{K}[f]} \\ N & & (\mathfrak{K}[N],u_N) \end{array}$$

TEOREMA 1.2. *El funtor* $\mathsf{Mond}\xrightarrow{\left(\mathfrak{K}[-],u_-\right)}\mathfrak{K}\text{-}\mathsf{Alg}$ *es adjunto izquierdo del funtor que a cada* $\mathfrak{K}$*-álgebra* (A,u) *asocia el monoide multiplicativo de* A.

DEMOSTRACIÓN. Si denotamos al monoide multiplicativo de un anillo A como $\mathcal{F}(A)$, la transformación natural $\mathrm{id}_{\mathsf{Mond}}\overset{\eta}{\Longrightarrow}\mathcal{F}\big(\mathfrak{K}[-]\big)$ definida como $\eta_M(g)=g$, determina para todo monoide M y toda $\mathfrak{K}$-álgebra (A,u) una biyección:

$$\begin{array}{ccc}\mathfrak{K}\text{-}\mathsf{Alg}\Big(\big(\mathfrak{K}[M],u_M\big),(A,u)\Big) & \longrightarrow & \mathsf{Mond}(M,\mathcal{F}(A)) \\ f & \longmapsto & f\circ\eta_M\end{array}$$

En efecto, ésta tiene como inversa a la función que a un morfismo de monoides $M\xrightarrow{\varphi}\mathcal{F}(A)$ asocia el morfismo $\sum_{g\in M}\alpha_g g\mapsto\sum_{g\in M}u(\alpha_g)\varphi(g)$.

Se concluye que el funtor $M\mapsto\big(\mathfrak{K}[M],u_M\big)$ es adjunto izquierdo del funtor $(A,u)\mapsto\mathcal{F}(M)$ con unidad η. ✠

Por este Teorema y del hecho que el funtor natural $\mathsf{Grp}\hookrightarrow\mathsf{Mond}$ es adjunto izquierdo del funtor que a cada monoide M asocia el grupo de unidades de M, se tiene el siguiente:

Corolario 1.3. *El funtor* $\mathsf{Grp} \xrightarrow{(\mathfrak{K}[-],u_-)} \mathfrak{K}\text{-}\mathsf{Alg}$ *es adjunto izquierdo del funtor que a cada* $\mathfrak{K}$*-álgebra* (A, u) *asocia* $A^\times$ *el grupo de unidades de* A.

En particular, por la Proposición 1.1 de la página 115 se tiene una adjunción:

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Grp} \arrow[r, bend left, "\mathbb{Z}[-]"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathsf{Anillo} \arrow[l, bend left, "-^\times"] \end{tikzcd}$$

Si G es un grupo, al anillo $\mathbb{Z}[G]$ se le conoce como *el anillo del grupo* G.

Ejemplos:

1) Si $\mathbb{N}$ es el monoide de los números naturales, el anillo $\mathfrak{K}[\mathbb{N}] = \mathfrak{K}[t]$ es el *anillo de polinomios con coeficientes en* $\mathfrak{K}$ *en una variable.* Un elemento en este anillo $\mathfrak{K}[t]$ es denotado como $p(t) = \sum \alpha_i t^i$ en lugar de $\sum_{i \in \mathbb{N}} \alpha_i i$ donde $\alpha_i \in \mathfrak{K}$ es diferente de cero para solamente un número finito de i's. Con esta notación el morfismo $u_\mathbb{N}$ asocia a un elemento α en $\mathfrak{K}$ el polinomio $\alpha t^0 = \alpha$.
2) En general, si M es el monoide libre generado por un conjunto pequeño I, es decir, M es la suma en la categoría de monoides de la familia $\{M_i\}_{i \in I}$ donde $M_i = \mathbb{N}$ para toda i, el anillo $\mathfrak{K}[M] = \mathfrak{K}[t_i \mid i \in I]$ es el *anillo de polinomios con coeficientes en* $\mathfrak{K}$ *en* I *indeterminadas* y u_M es el morfismo que a cada elemento de $\mathfrak{K}$ asocia el polinomio constante correspondiente.

   Si consideramos al monoide M como el conjunto de funciones $I \xrightarrow{\sigma} \mathbb{N}$ tales que $\{i \in I \mid \sigma(i) \neq 0\}$ es finito, un polinomio con coeficientes en $\mathfrak{K}$ en I indeterminadas es una expresión de la forma $p(t) = \sum \alpha_\sigma t^\sigma$ donde la suma corre sobre toda $\sigma \in M$, $\alpha_\sigma \in \mathfrak{K}$ es diferente de cero para solamente un número finito de σ's y $t^\sigma = \prod_{i \in I} t_i^{\sigma(i)}$.

   Por la propiedad universal de la suma y por el Teorema 1.2 de arriba, si I es un conjunto pequeño la $\mathfrak{K}$-álgebra $(\mathfrak{K}[t_i \mid i \in I], u_I)$ tiene la propiedad que para toda $\mathfrak{K}$-álgebra (A, u) hay un isomorfismo natural:

$$\mathfrak{K}\text{-}\mathsf{Alg}\Big((\mathfrak{K}[t_i \mid i \in I], u_I), (A, u)\Big) \cong \mathsf{Con}(I, A) = A^I \tag{50}$$

3) Si $\mathbb{Z}$ es el grupo de los números enteros denotamos como $\mathfrak{K}[t, t^{-1}]$ al anillo $\mathfrak{K}[\mathbb{Z}]$. Este anillo puede verse como el anillo de polinomios con coeficientes en $\mathfrak{K}$ en una indeterminada localizado en el conjunto multiplicativo $\{1, t, t^2, \dots\}$, o bien, como el anillo cociente $\mathfrak{K}[x, y]/\langle xy - 1\rangle$.
4) Si $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ es el grupo de los números enteros módulo n, $\mathfrak{K}[\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}]$ es el anillo de polinomios con coeficientes en $\mathfrak{K}$ en una indeterminada módulo el ideal generado por el polinomio $t^n - 1$, es decir, $k[t]/\langle t^n - 1\rangle$.

§1.1.2. *Funciones regulares.*

Sea $\mathfrak{K}$ un anillo.

Un polinomio con coeficientes en $\mathfrak{K}$ en I indeterminadas $p(t) = \sum \alpha_\sigma t^\sigma$ determina una función de $\mathfrak{K}^I$ en $\mathfrak{K}$ a la que por abuso denotamos con el mismo símbolo y que está definida como:

$$\begin{aligned} \mathfrak{K}^I &\xrightarrow{p(t)} \mathfrak{K} \\ a &\longmapsto p(a) = \sum \alpha_\sigma a^\sigma, \end{aligned}$$

donde $a^\sigma = \prod\limits_{i \in I} a_i^{\sigma(i)}$ si $a = (a_i)_{i \in I}$.

Más aún, con la estructura de $\mathfrak{K}$-álgebra en el conjunto de funciones de $\mathfrak{K}^I$ en $\mathfrak{K}$ definida como:

$$\begin{aligned} (f+g)(a) &= f(a) + g(a) & &\text{si } f,g \in \mathsf{Con}(\mathfrak{K}^I, \mathfrak{K}) \text{ y } a \in \mathfrak{K}^I \\ (fg)(a) &= f(a)g(a) & &\text{si } f,g \in \mathsf{Con}(\mathfrak{K}^I, \mathfrak{K}) \text{ y } a \in \mathfrak{K}^I \end{aligned}$$

y donde $\mathfrak{K} \xrightarrow{u} \mathsf{Con}(\mathfrak{K}^I, \mathfrak{K})$ esta definido como $u(\alpha)(a) = \alpha$ para toda $a \in \mathfrak{K}^I$, la asignación:

$$(51) \qquad \begin{aligned} \mathfrak{K}[t_i \mid i \in I] &\longrightarrow \mathsf{Con}(\mathfrak{K}^I, \mathfrak{K}) \\ p(t) &\longmapsto \big(a \mapsto p(a)\big) \end{aligned}$$

es un morfismo de $\mathfrak{K}$-álgebras.

Una función $\mathfrak{K}^I \xrightarrow{f} \mathfrak{K}$ en la imagen de este morfismo es llamada una *función regular en* I *variables.* Se sigue que el conjunto de funciones regulares en I variables tiene una estructura de $\mathfrak{K}$-álgebra.

TEOREMA 1.4. *Si $\mathfrak{K}$ es un dominio entero de cardinalidad infinita la función* (51) *es inyectiva y entonces la $\mathfrak{K}$-álgebra de funciones regulares en* I *variables es isomorfa a la $\mathfrak{K}$-algebra de polinomios en* I *indeterminadas.*

DEMOSTRACIÓN. Observemos primero que el resultado es cierto en el caso finito. En efecto, si $\mathfrak{K}$ es un anillo arbitrario y $p(t_1, \ldots, t_n)$ es un polinomio con coeficientes en $\mathfrak{K}$ en n indeterminadas, para todo $a = (a_1, \ldots, a_n) \in k^n$ existen polinomios $q_i(t_1, \ldots, t_n)$ con $0 \leq i \leq n$ tales que:

$$p(t_1, \ldots, t_n) = \prod_{i=1}^{n} (t_i - a_i) q_i(t_1, \ldots, t_n) + p(a_1, \ldots, a_n).$$

Se sigue que si $\mathfrak{K}$ es un dominio entero, un polinomio $p(t_1, \ldots, t_n)$ puede tener a lo más un número finito de raices, por lo que si $\mathfrak{K}$ es además de cardinalidad infinita, la función (51) es inyectiva.

Supongamos ahora que I es un conjunto pequeño arbitrario y que $p(t), q(t) \in \mathfrak{K}[t_i \mid i \in I]$ son polinomios que definen la misma función regular en $\mathfrak{K}^I$. Se sigue de la definición del anillo de polinomios que existe un conjunto finito $\{i_1, \ldots, i_n\} \subseteq I$ tal que $p(t) = p(t_1, \ldots, t_n)$ y $q(t) = q(t_1, \ldots, t_n)$, y tenemos que $p(a_1, \ldots, a_n) =$

$q(a_1, \dots, a_n)$ para toda $(a_1, \dots, a_n) \in \mathfrak{K}^n$ por lo que el caso finito implica que $p(t) = q(t)$. ✠

§1.2. Conjuntos algebraicos. A un subconjunto S del anillo de polinomios $\mathfrak{K}[t_i \mid i \in I]$, para algún conjunto pequeño I, lo llamamos un *sistema de ecuaciones polinomiales sobre* $\mathfrak{K}$. Si S es un sistema de ecuaciones polimiales sobre $\mathfrak{K}$, definimos el *conjunto de ceros de* S como el conjunto de ceros comunes de las funciones regulares correspondientes a los elementos de S:

$$Z(S) := \left\{ a \in \mathfrak{K}^I \;\middle|\; p(a) = 0 \text{ para todo } p(t) \in S \right\}$$

Notemos que si $S \subseteq S'$ entonces $Z(S') \subseteq Z(S)$.

A un subconjunto X de $\mathfrak{K}^I$ que es igual al conjunto de ceros de algún sistema de ecuaciones polinomiales sobre $\mathfrak{K}$, lo llamamos un *conjunto algebraico sobre* $\mathfrak{K}$. A un conjunto algebraico sobre $\mathfrak{K}$ contenido en $\mathfrak{K}^n$ para algún número natural n, lo llamamos un *conjunto algebraico sobre* $\mathfrak{K}$ *de tipo finito.*

Si X es un conjunto algebraico sobre $\mathfrak{K}$, donde $X = Z(S)$ para $S \subseteq \mathfrak{K}[t_i \mid i \in I]$ un sistema de ecuaciones polinomiales sobre $\mathfrak{K}$, entonces $X = Z(\langle S\rangle)$, donde $\langle S\rangle \subseteq \mathfrak{K}[t_i \mid i \in I]$ denota al ideal generado por S. En efecto, como $S \subseteq \langle S\rangle$ entonces $Z(\langle S\rangle) \subseteq Z(S) = X$. Por otro lado, como todo elemento de $\langle S\rangle$ es de la forma $\sum_{i=1}^n p_i(t)q_i(t)$ donde $q_i(t) \in S$, se tiene que $X = Z(S) \subseteq Z(\langle S\rangle)$

Concluímos así que si $S, S' \subseteq \mathfrak{K}[t_i \mid i \in I]$ son dos sistemas de ecuaciones polinomiales que generan al mismo ideal, entonces $Z(S) = Z(S')$. En particular, si $\mathfrak{K}$ es un anillo neteriano, los conjuntos algebraicos sobre $\mathfrak{K}$ de tipo finito son los conjuntos de ceros de un número finito de polinomios.

Ejemplos:

1) El conjunto vacío y $\mathfrak{K}^I$ son conjuntos algebraicos pues

$$Z(\mathfrak{K}[t_i \mid i \in I]) = \emptyset \subseteq \mathfrak{K}^I \quad \text{y} \quad Z(\{0\}) = \mathfrak{K}^I$$

2) La intersección de una familia arbitraria de subconjuntos algebraicos de un conjunto algebraico, es nuevamente un conjunto algebraico. En efecto,

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} Z(S_\lambda) = Z\Big(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} S\Big).$$

Por otro lado, si $\mathfrak{K}$ es un dominio entero, la unión de una familia finita de subconjuntos algebraicos de un conjunto algebraico, es también un conjunto algebraico, pues

$$Z(S) \cup Z(S) = Z(SS')$$

donde $SS' = \{f(t)g(t) \mid f(t) \in S \text{ y } g(t) \in S'\}$.

En particular, si X es un conjunto algebraico sobre un dominio entero, la colección de subconjuntos algebraicos de X son los cerrados de una topología en X, a la que llamamos la *topología de Zariski de* X.

3) Si $a = (a_i)_{i\in I} \in \mathfrak{K}^I$ entonces $\{a\}$ es un conjunto algebraico sobre $\mathfrak{K}$, pues $\{a\} = Z(S)$ donde $S = \{a_i - t_i\}_{i\in I} \subseteq \mathfrak{K}[t_i \mid i \in I]$. En particular, los puntos de un conjunto algebraico X sobre un dominio entero, son cerrados con la topología de Zariski de X.

4) Si $X \subseteq \mathfrak{K}^I$ y $Y \subseteq \mathfrak{K}^J$ son conjuntos algebraicos sobre un anillo arbirtrario $\mathfrak{K}$, el producto cartesiano $X\times Y$ visto como subconjunto de $\mathfrak{K}^{I+J}$ ($I+J$ es la suma en la categoría de conjuntos pequeños de I y J) es un conjunto algebraico sobre $\mathfrak{K}$. En efecto, si $X = Z(S)$ y $Y = Z(S')$ entonces $X \times Y = Z(S \cup S')$ donde la unión $S \cup S'$ se toma en el anillo $\mathfrak{K}[t_k \mid k \in I + J]$ a través de las contenciones:

$$S \subseteq \mathfrak{K}[t_i \mid i \in I] \hookrightarrow \mathfrak{K}[t_k \mid k \in I + J]$$

$$S' \subseteq \mathfrak{K}[t_j \mid j \in J] \hookrightarrow \mathfrak{K}[t_k \mid k \in I + J]$$

inducidas por las inclusiones $I \hookrightarrow I + J$ y $J \hookrightarrow I + J$

§1.2.1. *Morfismos regulares.*

Si $X \subseteq \mathfrak{K}^I$ y $Y \subseteq \mathfrak{K}^J$ son dos conjuntos algebraicos sobre $\mathfrak{K}$, una función de conjuntos $X \xrightarrow{\varphi} Y$ es llamada un *morfismo regular de* X *en* Y si existen polinomios $p_j(t) \in \mathfrak{K}[t_i \mid i \in I]$ tal que:

$$\varphi(a) = \big(p_j(a)\big)_{j\in J}$$

para toda $a \in X$. Un morfismo regular $X \xrightarrow{f} \mathfrak{K}$ es llamado una *función regular en* X.

TEOREMA 1.5. *Si $X \xrightarrow{\varphi} Y$ es una función entre conjuntos algebraicos sobre $\mathfrak{K}$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $X \xrightarrow{\varphi} Y$ *es un morfismo regular.*

(ii) *Para toda $Y \xrightarrow{f} \mathfrak{K}$ función regular en Y, $X \xrightarrow{f\circ\varphi} \mathfrak{K}$ es una función regular en X.*

DEMOSTRACIÓN.

(i)$\Rightarrow$(ii)

Como $X \xrightarrow{\varphi} Y$ es un morfismo regular, existen polinomios $p_j(t) \in \mathfrak{K}[t_i \mid i \in I]$ tales que:

$$\varphi(a) = \big(p_j(a)\big)_{j\in J}, \qquad \text{para todo } a \in X$$

Del mismo modo, si $Y \xrightarrow{f} \mathfrak{K}$ es una función regular en Y, existe un polinomio $q(t) \in \mathfrak{K}[t_j \mid j \in J]$ tal que

$$f(b) = q(b), \qquad \text{para todo } b \in Y$$

Si $q(t) = \sum \alpha_\sigma t^\sigma$ y definimos el polinomio $r(t) \in \mathfrak{K}[t_i \mid i \in I]$ como $r(t) = \sum \alpha_\sigma p(t)^\sigma$ donde $p(t)^\sigma = \prod\limits_{j\in J} p_j(t)^{\sigma(j)}$, se concluye que $f \circ \varphi(a) = r(a)$ para todo a en X, por lo que $X \xrightarrow{f\circ\varphi} \mathfrak{K}$ es una función regular en X.

(ii)$\Rightarrow$(i)

Observemos que si $Y \subseteq \mathfrak{K}^J$ y $\mathfrak{K}^J \xrightarrow{\pi_j} \mathfrak{K}$ denota a la proyección $\pi_j(a) = a_j$, entonces para que $X \xrightarrow{\varphi} Y$ sea un morfismo regular es suficiente que $\pi_j \circ \varphi$ sea un morfismo regular. En efecto, si $\pi_j \circ \varphi(a) = p_j(a)$ entonces $\varphi(a) = \big(p_j(a)\big)_{j\in J}$.

El resultado se sigue entonces de que las funciones $\mathfrak{K}^J \xrightarrow{\pi_j} \mathfrak{K}$ son funciones regulares pues $\pi_j(a) = p_j(a)$ donde $p_j(t) = t_j \in \mathfrak{K}[t_j \mid j \in J]$. ✠

Ejemplos:

1) Si X es un conjunto algebraico sobre $\mathfrak{K}$, la función identidad $X \xrightarrow{\mathrm{id}_X} X$ es un morfismo regular. En efecto, si $X \subseteq \mathfrak{K}^I$ entonces $\mathrm{id}_X(a) = \big(p_i(a)\big)_{i\in I}$ donde $p_i(t) = t_i$ para toda $i \in I$.
2) Si $X \xrightarrow{f} Y$ y $Y \xrightarrow{g} Z$ son morfismos regulares, la composición $X \xrightarrow{g\circ f} Z$ es un morfismo regular. En efecto, supongamos que $X \subseteq \mathfrak{K}^I$, $Y \subseteq \mathfrak{K}^J$ y $Z \subseteq \mathfrak{K}^K$, y sean $\{p_j(t)\}_{j\in J} \subseteq \mathfrak{K}[t_i \mid i \in I]$ y $\{q_k(t)\}_{k\in K} \subseteq \mathfrak{K}[t_j \mid j \in J]$ polinomios tales que
$$f(a) = \big(p_j(a)\big)_{j\in J} \quad \text{para toda } a \in X$$
$$\text{y}$$
$$g(b) = \big(q_k(b)\big)_{k\in K} \quad \text{para toda } b \in Y.$$
Si $q_k(t) = \sum \alpha_{k,\sigma} t^\sigma$ y definimos el polinomio $r_k(t) = \sum \alpha_{k,\sigma}\big(p(t)\big)^\sigma$ donde $p(t)^\sigma = \prod\limits_{j\in J} p_j(t)^{\sigma(j)}$, entonces $g\circ f(a) = \big(r_k(t)\big)_{k\in K}$ para toda $a \in X$.
3) Si X y Y son conjuntos algebraicos sobre $\mathfrak{K}$, las proyecciones $X \times Y \xrightarrow{\pi_X} X$ y $X \times Y \xrightarrow{\pi_Y} Y$ son morfismos regulares. En efecto, $\pi_X(a) = \big(p_i(a)\big)_{i\in I}$ y $\pi_Y(a) = \big(p_j(a)\big)_{j\in J}$ donde $p_k(t) = t_k \in \mathfrak{K}[t_k \mid k \in I + J]$ si $k \in I + J$
4) Si $\mathfrak{K}$ es un dominio entero, un morfismo regular $X \xrightarrow{\varphi} Y$ entre conjuntos algebraicos sobre $\mathfrak{K}$, es una función continua con respecto a la topología de Zariski en X y Y. En efecto, supongamos que $X = Z(S) \subseteq \mathfrak{K}^I$ y $\varphi(a) = \big(p_j(a)\big)_{j\in J}$ para toda $a \in X$, entonces, si $V = Z(S') \subseteq Y$ es un cerrado de Zariski de Y, se tiene que:
$$\varphi^{-1}(V) = Z\Big(S \bigcup \Big\{ \sum \alpha_\sigma (p(t))^\sigma \;\Big|\; \sum \alpha_\sigma t^\sigma \in S' \Big\}\Big)$$
$$\text{donde} \qquad (p(t))^\sigma = \prod_{j\in J} (p_j(t))^{\sigma(j)}$$
Más aún,

PROPOSICIÓN 1.6. *Si X es un conjunto algebraico sobre un dominio entero $\mathfrak{K}$, la topología de Zariski en X es la topología más débil con las siguientes propiedades:*

(i) *Los puntos de X son cerrados.*

(ii) *Las funciones regulares $X \xrightarrow{f} \mathfrak{K}$ son continuas ($\mathfrak{K}$ con su topología de Zariski).*

DEMOSTRACIÓN. Solamente falta probar que si τ es la colección de cerrados de una topología en X con las propiedades (a) y (b) entonces todo subconjunto algebraico de X es un elemento de τ. Para ello notemos primero que si S es cualquier sitema de ecuaciones polinomiales sobre $\mathfrak{K}$,

$$Z(S) = \bigcap_{p(t)\in S} Z(p(t)),$$

por lo que basta probar que los conjuntos algebraicos de la forma $Z(p(t))$ están en τ.

Pero $Z(p(t)) = \{a \in X \mid p(a) = 0\}$ es un elemento de τ porque $\{0\}$ es cerrado en $\mathfrak{K}$ y τ cumple (b). ✠

Por los Ejemplos 1 y 2 de arriba, los conjuntos algebraicos sobre $\mathfrak{K}$ y los morfismos regulares entre ellos forman una categoría a la que denotamos como $\mathsf{ConAlg}_{\mathfrak{K}}$. También, denotamos como $\mathsf{ConAlg}_{\mathfrak{K}}^{\mathrm{tf}}$ a su subcategoría plena que tiene por objetos a los conjuntos algebraicos de tipo finito.

También, usando el Ejemplo 4 de la página 121 y el Ejemplo 3 de arriba puede verse fácilmente que $\mathsf{ConAlg}_{\mathfrak{K}}$ (resp. $\mathsf{ConAlg}_{\mathfrak{K}}^{\mathrm{tf}}$) es una categoría con n-productos para $n > 0$ y que el funtor que olvida $\mathsf{ConAlg}_{\mathfrak{K}} \longrightarrow \mathsf{Con}$ (resp. $\mathsf{ConAlg}_{\mathfrak{K}}^{\mathrm{tf}} \longrightarrow \mathsf{Con}$) conmuta con ellos.

§1.3. La $\mathfrak{K}$-álgebra de coordenadas. Si X es un conjunto algebraico, el conjunto de funciones regulares en X con las operaciones puntuales, tiene naturalmente una estructura de $\mathfrak{K}$-álgebra a la que denotamos como $\mathfrak{K}[X]$ y llamamos *la $\mathfrak{K}$-álgebra de coordenadas de* X.

Con esta estructura de $\mathfrak{K}$-álgebra, la función suprayectiva:

$$\begin{aligned} \mathfrak{K}[t_i \mid i \in I] &\longrightarrow \mathfrak{K}[X] \\ p(t) &\longmapsto [a \mapsto p(a)] \end{aligned} \tag{52}$$

es un morfismo de $\mathfrak{K}$-álgebras, de modo que si

$$I(X) := \{p(t) \in \mathfrak{K}[t_i \mid i \in I] \mid p(a) = 0 \text{ para todo } a \in X\},$$

la función (52) determina un isomorfismo de $\mathfrak{K}$-álgebras $\mathfrak{K}[X] \cong \mathfrak{K}[t_i \mid i \in I]/I(X)$.

El ideal $I(X)$, es llamado el *ideal de definición de* X. Este ideal tiene las siguientes propiedades:

TEOREMA 1.7. *Si X es un conjunto algebraico sobre $\mathfrak{K}$, entonces:*

(i) *Siempre que $X = Z(S)$ se tiene que $S \subseteq I(X)$.*
(ii) $X = Z(I(X))$.

En otras palabras, el ideal de definición de X es el sistema de ecuaciones polinomiales sobre $\mathfrak{K}$ más grande que define a X.

DEMOSTRACIÓN. Notemos primero que si S es un sistema de ecuaciones polinomiales sobre $\mathfrak{K}$, es inmediato que $S \subseteq I(Z(S))$, por lo que si suponemos que $X = Z(S)$ tenemos que $S \subseteq I(Z(S)) = I(X)$. Esto prueba (i).

Por otro lado, si X es un conjunto algebraico sobre $\mathfrak{K}$, digamos $X = Z(S)$, por lo que ya probamos se tiene que $S \subseteq I(X)$ y entonces $Z(I(X)) \subseteq Z(S) = X$. Como la contención $X \subseteq Z(I(X))$ es inmediata se tiene que $X = Z(I(X))$. ✠

Ejemplos:

1) Sea $\mathfrak{K}$ un anillo arbitrario. El ideal de definición del conjunto algebraico $\mathfrak{K}^I$, es igual al núcleo del morfismo (51) de la página 119. En particular, si $\mathfrak{K}$ es un dominio entero de cardinalidad infinita, $I(\mathfrak{K}^I) = \{0\}$ y entonces el anillo de coordenadas de $\mathfrak{K}^I$ es isomorfo al anillo de polinomios $\mathfrak{K}[t_i \mid i \in I]$.
2) Si $\mathfrak{K}$ es un anillo arbitrario e I un conjunto pequeño, el ideal de definición del conjunto algebraico $a = (a_i)_{i\in I} \in \mathfrak{K}^I$,

$$I(a) = \{p(t) \in \mathfrak{K}[t_i \mid i \in I] \mid p(a) = 0\},$$

es igual al ideal generado por el sistema de ecuaciones polinomiales $\{t_i - a_i\}_{i\in I}$. En efecto, si $p(t)$ es un elemento arbitrario de $\mathfrak{K}[t_i \mid i \in I]$ existe un número finito de polinomios $\{q_j(t)\}_{j=1}^{n}$ tales que:

$$p(t) = \prod_{j=1}^{n}(t_{i_j} - a_{i_j})q_j(t) + p(a) \tag{53}$$

por lo que $p(a) = 0$ si y sólo si $p(t)$ está en el ideal generado por $\{t_i - a_i\}_{i\in I}$.

Más aún, $I(a)$ es el núcleo del morfismo evaluación:

$$\begin{aligned} \mathfrak{K}[t_i \mid i \in I] &\xrightarrow{ev_a} \mathfrak{K} \\ p(t) &\longmapsto p(a) \end{aligned}$$

el cual es una función suprayectiva, por lo que $\mathfrak{K}[a] \cong \mathfrak{K}[t_i \mid i \in I]/I(a) \cong \mathfrak{K}$. Se concluye entonces el siguiente:

TEOREMA 1.8. *Si $\mathfrak{K}$ es una anillo, las siguientes condiciones son equivalentes:*
(i) *$\mathfrak{K}$ es un campo.*
(ii) *$I(a)$ es un ideal máximo para algúna $a \in \mathfrak{K}^I$.*
(iii) *$I(a)$ es un ideal máximo para todo $a \in \mathfrak{K}^I$.*

3) Sea $\mathfrak{K}$ un campo infinito. Si $X \subseteq \mathfrak{K}^2$ es el conjunto de ceros del sistema de ecuaciones polinomiales $\{xy - 1\} \subseteq \mathfrak{K}[x, y]$, el ideal de definición de X es igual a $I(X) = \langle xy - 1\rangle$. En particular, el anillo de coordenas de X es isomorfo a $\mathfrak{K}[x, x^{-1}]$, el anillo del grupo $\mathbb{Z}$.
4) Sea $\mathfrak{K}$ un campo. Si $X \subseteq \mathfrak{K}^I$ y $Y \subseteq \mathfrak{K}^J$ son conjuntos algebraicos sobre $\mathfrak{K}$, la $\mathfrak{K}$-álgebra de coordenadas del conjunto algebraico $X \times Y \subseteq \mathfrak{K}^{I+J}$ es isomorfa

a la suma en la categoría de $\mathfrak{K}$-álgebras de las $\mathfrak{K}$-álgebras de coordenadas de X y Y, es decir, $\mathfrak{K}[\mathsf{X}\times\mathsf{Y}]\cong\mathfrak{K}[\mathsf{X}]\otimes_{k}\mathfrak{K}[\mathsf{Y}]$.

§1.3.1. *El funtor* $\mathsf{X}\mapsto\mathfrak{K}[\mathsf{X}]$.

Si X y Y son conjuntos algebraicos sobre $\mathfrak{K}$, por el Teorema 1.5 de la página 121, un morfismo regular $\mathsf{X}\xrightarrow{\varphi}\mathsf{Y}$ induce una función:

$$\begin{aligned}\mathfrak{K}[\mathsf{Y}] &\xrightarrow{\varphi^*} \mathfrak{K}[\mathsf{X}]\\ f &\longmapsto f\circ\varphi\end{aligned}$$

la cual es claramente un morfismo de k-álgebras.

TEOREMA 1.9. *El funtor*

$$\begin{tikzcd} \mathsf{ConAlg}_{\mathfrak{K}} \arrow[r, "{\mathfrak{K}[-]}"] & \mathfrak{K}\text{-}\mathsf{Alg}^{op} \\ \mathsf{X} \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[r, phantom, ""] & \mathfrak{K}[\mathsf{X}] \\ \mathsf{Y} & \mathfrak{K}[\mathsf{Y}] \arrow[u, "\varphi^*"'] \end{tikzcd} \qquad (54)$$

$$\varphi \longmapsto \varphi^*$$

que a cada conjunto algebraico sobre $\mathfrak{K}$ asocia su $\mathfrak{K}$-álgebra de coordenadas es fiel y pleno.

DEMOSTRACIÓN.

El funtor (54) *es fiel:*

Supongamos que φ y ψ son dos morfismos regulares de X en Y definidos como:

$$\varphi(a)=\big(p_j(a)\big)_{j\in J}\quad\text{y}\quad\psi(a)=\big(q_j(a)\big)_{j\in J},$$

tales que $\varphi^*=\psi^*$. En particular, si $\mathsf{Y}\xrightarrow{\pi_j|_{\mathsf{Y}}}\mathfrak{K}$ denota a la función regular $(b_j)_{j\in J}\mapsto b_j$, tenemos que

$$p_j(a)=\left(\pi_j|_{\mathsf{Y}}\circ\varphi\right)(a)=\varphi^*\left(\pi_j|_{\mathsf{Y}}\right)(a)=\psi^*\left(\pi_j|_{\mathsf{Y}}\right)(a)=\left(\pi_j|_{\mathsf{Y}}\circ\psi\right)(a)=q_j(a)$$

Por lo tanto $\varphi=\psi$.

El funtor (54) *es pleno:*

Supongamos que $\mathsf{X}\subseteq\mathfrak{K}^{I}$ y $\mathsf{Y}=Z(S)\subseteq\mathfrak{K}^{J}$, y sea $\mathfrak{K}[\mathsf{Y}]\xrightarrow{F}\mathfrak{K}[\mathsf{X}]$ un morfismo de $\mathfrak{K}$-álgebras.

Si definimos $\mathsf{X}\xrightarrow{\varphi}\mathfrak{K}^{I}$ como:

$$\varphi(a)=\Big(F(\pi_j|_{\mathsf{Y}})(a)\Big)_{j\in J},$$

entonces $\varphi(\mathsf{X})\subseteq\mathsf{Y}$ pues para todo polinomio $p\in S$ se tiene que:

$$p(\varphi(a))=p\left(\Big(F(\pi_j|_{\mathsf{Y}})(a)\Big)_{j\in J}\right)=F\Big(p\big((\pi_j|_{\mathsf{Y}})_{j\in J}\big)\Big)(a)=0$$

Es fácil ver que por su definición, $\varphi^*=F$. ✠

Si $\mathfrak{K}$ es un anillo, denotamos como $\mathsf{Afín}_{\mathfrak{K}}$ a la categoría opuesta de la categoría de $\mathfrak{K}$-álgebras y llamamos a sus objetos *variedades algebraicas afines sobre* $\mathfrak{K}$. Por el Teorema anterior tenemos un funtor fiel y pleno:

$$\mathsf{ConAlg}_{\mathfrak{K}} \xhookrightarrow{\mathfrak{K}[-]} \mathsf{Afín}_{\mathfrak{K}}$$

que identifica a la categoría de conjuntos algebraicos sobre $\mathfrak{K}$ con una subcategoría plena de la categoría de variedades algebraicas afínes sobre $\mathfrak{K}$.

§1.4. Espacios prealgebraicos. Si $\mathfrak{K}$ es un anillo, denotamos como $\mathsf{EspPAlg}_{\mathfrak{K}}$ a la +-categoría $\mathsf{Pre}\left(\mathsf{Afín}_{\mathfrak{K}}\right)_{\mathcal{U}^+} = \left(\mathsf{Con}_{\mathcal{U}^+}\right)^{\left(\mathsf{Afín}_{\mathfrak{K}}\right)^{\mathrm{op}}}$ y llamamos a sus objetos *espacios prealgebraicos sobre* $\mathfrak{K}$. Dada una $\mathfrak{K}$-álgebra K, si $\mathfrak{X}$ es un espacio prealgebraico sobre $\mathfrak{K}$, los elementos del conjunto $\mathfrak{X}(\mathsf{K})$ son llamados *puntos* K*-racionales de* $\mathfrak{X}$.

Observemos que como en la página 8, tenemos un funtor:

$$\mathsf{Afín}_{\mathfrak{K}} \xhookrightarrow{\mathfrak{X}_-} \mathsf{EspPAlg}_{\mathfrak{K}} \tag{55}$$

que a cada variedad algebraica afín A sobre $\mathfrak{K}$, asocia el espacio prealgebraico $\mathfrak{X}_{\mathsf{A}}$ cuyo conjunto de puntos K-racionales es igual a $\mathfrak{K}\text{-}\mathsf{Alg}(\mathsf{A},\mathsf{K})$. Más aún, por el Lema de Yoneda hay una correspondencia biyectiva, entre el conjunto de puntos K-racionales de un espacio prealgebraico $\mathfrak{X}$, y el conjunto de morfismos de $\mathfrak{X}_{\mathsf{K}}$ en $\mathfrak{X}$.

Un espacio prealgebraico representable, es decir, en la imagen escencial del funtor $\mathfrak{X}_-$, es llamado un *espacio algebraico afín sobre* $\mathfrak{K}$. Al espacio algebraico afín sobre $\mathfrak{K}$ representable por la $\mathfrak{K}$-álgebra de polinomios $\mathfrak{K}[t_i \mid i \in I]$, lo denotamos como $\mathbb{A}^{I}_{\mathfrak{K}}$ y lo llamamos el *espacio algebraico afín canónico sobre* $\mathfrak{K}$ *de tipo* I. Notemos que por el Teorema 1.2 de la página 117, $\mathbb{A}^{I}_{\mathfrak{K}}$ es isomorfo al espacio prealgebraico:

$$\begin{array}{ccc}
\mathfrak{K}\text{-}\mathsf{Alg} & \longrightarrow & \mathsf{Con} & \\
\mathsf{K} & & \mathsf{K}^{I} & (a_i)_{i\in I} \\
{\scriptstyle f}\big\downarrow & \longmapsto & \big\downarrow{\scriptstyle f^{I}} & \big\downarrow \\
\mathsf{K}' & & (\mathsf{K}')^{I} & \left(f(a_i)\right)_{i\in I}
\end{array}$$

Explícitamente,

$$\begin{aligned}
\mathbb{A}^{I}_{\mathfrak{K}}(\mathsf{K}) &\longrightarrow \mathsf{K}^{I} \\
\varphi &\longmapsto \left(\varphi(t_i)\right)_{i\in I}
\end{aligned} \tag{56}$$

es una biyección.

De esta manera, a un sistema de ecuaciones polinomiales $S \subseteq \mathfrak{K}[t_i \mid i \in i]$ le podemos asociar un subespacio prealgebraico (subobjeto) de $\mathbb{A}^I_{\mathfrak{K}}$:

$$
\begin{array}{ccc}
\mathsf{Afín}^{op}_{\mathfrak{K}} & \xrightarrow{\qquad \mathcal{Z}(S) \qquad} & \mathsf{Con}_{\mathcal{U}} \\
K & \longmapsto & \{a \in K^I \mid p(a) = 0 \quad \forall p(t) \in S\}
\end{array}
$$

al que llamamos *el espacio algebraico de ceros de* S.

TEOREMA 1.10. *Si $\mathcal{X}$ es un espacio prealgebraico sobre $\mathfrak{K}$, entonces $\mathcal{X}$ es un espacio algebraico afín si y sólo si $\mathcal{X}$ es isomorfo al espacio algebraico de ceros de algún sistema de ecuaciones polinomiales sobre $\mathfrak{K}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea A una $\mathfrak{K}$-álgebra. Si S es un sistema de ecuaciones polinomiales tal que $\mathfrak{K}[t_i \mid i \in I]/S \cong A$, para cada $\mathfrak{K}$-álgebra K, la función (56) de arriba detemina una biyección entre $\mathcal{X}_A(K)$ y $\mathcal{Z}(S)(K)$.

Recíprocamente, si $S \subseteq \mathfrak{K}[t_i \mid i \in I]$ es un sistema de ecuaciones polinomiales se tiene un isomorfismo $\mathcal{Z}(S) \cong \mathcal{X}_A$ donde $A = \mathfrak{K}[t_i \mid i \in I]/\langle S\rangle$. ✠

Se sigue de este último Teorema que el funtor

$$\mathsf{Afín}_{\mathfrak{K}} \xhookrightarrow{\mathcal{X}_-} \mathfrak{E}\mathsf{spPAlg}_{\mathfrak{K}}$$

determina una equivalencia, entre la categoría de variedades algebraicas afínes sobre $\mathfrak{K}$ y la subcategoría de $\mathfrak{E}\mathsf{spPAlg}_{\mathfrak{K}}$, cuyos objetos son los espacios algebraicos de ceros de sistemas de ecuaciones polinomiales.

Ejemplos:

1) *El funtor que olvida.*
   El espacio algebraico afín $\mathbb{A}_{\mathfrak{K}} = \mathbb{A}^1_{\mathfrak{K}}$ es isomorfo al espacio prealgebraico que asocia a cada $\mathfrak{K}$-álgebra su conjunto subyacente.
2) *El Grupo de Unidades.*
   El espacio prealgebraico $\mathbb{G}_{\mathfrak{K}}$, cuyo conjunto de puntos K-racionales es igual al conjunto $K^\times$ de unidades de K, es un espacio algebraico afín. En efecto, $\mathbb{G}_{\mathfrak{K}}$ es representable por $\mathfrak{K}[t, t^{-1}]$, la $\mathfrak{K}$-álgebra de $\mathbb{Z}$.
3) *El Último Teorema de Fermat.*
   Si S denota al sistema de ecuaciones polinomiales $\{x^n + y^n - 1\} \subseteq \mathbb{Z}[x, y]$ donde $n > 2$, el conjunto de puntos $\mathbb{Q}$-racionales del espacio algebraico $\mathcal{Z}(S)$ es igual a $\{(1,0), (0,1), ((-1)^n, 0), (0, (-1)^n)\}$.
4) *Enteros como diferencia de un cubo y un cuadrado.*
   Si a es un entero no cero y S denota al sistema de ecuaciones polinomiales $\{y^2 - x^3 - a\} \in \mathbb{Z}[x, y]$, el conjunto de puntos $\mathbb{Z}$-racionales del espacio algebraico $\mathcal{Z}(S)$ es finito mientras que su conjunto de puntos $\mathbb{Q}$-racionales es vacío o infinito.
5) *Teorema de Bézout.*
   Sea $\mathfrak{K}$ un campo algebraicamente cerrado. Si $f(t), g(t) \in \mathfrak{K}[t_1, \dots t_n]$ son

dos polinomios irreducibles distintos con coeficientes en k y S el sistema de ecuaciones polinomiales $\{f(t), g(t)\}$ la cardinalidad del conjunto de puntos k-racionales del espacio algebraico $\mathcal{Z}(S)$ esta acotada por el producto de los grados de $f(t)$ y $g(t)$.

6) *El Espacio Algebraico Proyectivo*
Si $\mathfrak{K} = \mathbb{Z}$ es el anillo de los números enteros, denotamos como $\mathbb{P}^n$ al espacio prealgebraico cuyo conjunto de puntos K-racionales es igual al conjunto de K-submódulos M de K^{n+1} tales que K^{n+1}/M es proyectivo de rango n. Si $K \xrightarrow{f} K'$ es un morfismo de anillos, definimos $\mathbb{P}^n(K) \xrightarrow{\mathbb{P}^n(f)} \mathbb{P}^n(K')$ por la asignación $M \mapsto K' \otimes_K M$.

Llamamos al espacio algebraico $\mathbb{P}^n$ el *el espacio algebraico proyectivo de tipo* n.

§1.4.1. *La* k*-álgebra de coordenadas de un espacio prealgebraico.*

Si $\mathcal{X}$ es un espacio prealgebraico sobre $\mathfrak{K}$, denotamos como $\mathcal{O}_\mathcal{X}$ al conjunto de morfismos de espacios prealgebraicos de $\mathcal{X}$ en $\mathbb{A}_\mathfrak{K}$. Un elemento en este conjunto es una familia de funciones indexada por el conjunto de K-álgebras:

$$f = \{\ \mathcal{X}(K) \xrightarrow{f_K} K\ \}_K$$

con la propiedad que si $K \xrightarrow{\varphi} K'$ es un morfismo de $\mathfrak{K}$-álgebras entonces $f_K \circ \mathcal{X}(\varphi) = f_{K'}$.

Notemos que $\mathcal{O}_\mathcal{X}$ tiene naturalmente una estructura de anillo definida como:

$$(f+g)_K(x) = f_K(x) + g_K(x)$$
$$(fg)_K(x) = f_K(x) g_K(x)$$

donde $f, g \in \mathcal{O}_\mathcal{X}$, K es una $\mathfrak{K}$-álgebra y x es un punto K-racional de $\mathcal{X}$.

Más aún, $\mathcal{O}_\mathcal{X}$ tiene naturalmente una estructura de $\mathfrak{K}$-álgebra si definimos a $\mathfrak{K} \xrightarrow{u_\mathcal{X}} \mathcal{O}_\mathcal{X}$ para cada $\mathfrak{K}$-álgebra K como la función constante $u_\mathcal{X}(\alpha)_K(a) = u(\alpha)$, donde $\mathfrak{K} \xrightarrow{u} K$ es el morfismo en la estructura de K. Llamamos a $\mathcal{O}_X$ con esta estructura, *la* $\mathfrak{K}$*-álgebra de coordenadas de* $\mathcal{X}$.

Tenemos entonces un funtor:

$$\begin{array}{ccc}
\mathsf{EspPAlg}_\mathfrak{K} & \xrightarrow{\ \mathcal{O}_-\ } & \mathsf{Afín}_\mathfrak{K} \\
\mathcal{X} & & (\mathcal{O}_\mathcal{X}, u_\mathcal{X}) \\
\eta \Big\downarrow & \longmapsto & \Big\uparrow -\circ\eta \\
\mathcal{Y} & & (\mathcal{O}_\mathcal{Y}, u_\mathcal{Y})
\end{array}$$

TEOREMA 1.11. *El funtor $\mathcal{O}_-$ es adjunto izquierdo del funtor $\mathcal{X}_-$:*

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Afín}_{\mathfrak{K}} \arrow[r, hook, "\mathcal{X}_-"'] \arrow[r, phantom, "\perp", shift left=2ex] & \mathsf{EspPAlg}_{\mathfrak{K}} \arrow[l, bend right, "\mathcal{O}_-"'] \end{tikzcd}$$

En particular, para toda $\mathfrak{K}$-álgebra A la $\mathfrak{K}$-álgebra de coordenadas del espacio algebraico afín $\mathcal{X}_A$ es isomorfa a A.

DEMOSTRACIÓN. Componiendo los isomorfismos naturales (4) y (56) de las páginas 8 y 126, respectivamente, obtenemos un isomorfismo natural $\mathcal{O}_- \circ \mathcal{X}_- \overset{\varepsilon}{\Longrightarrow} \mathrm{id}_{\mathsf{Afín}_{\mathfrak{K}}}$.

Para probar que $\mathcal{O}_-$ es adjunto izquierdo de $\mathcal{X}_-$ con counidad ε, basta ver que si A es una $\mathfrak{K}$-álgebra y $\mathcal{X}$ un espacio prealgebraico, la función:

$$\begin{aligned} \mathsf{EspPAlg}_{\mathfrak{K}}\Big(\mathcal{X}, \mathcal{X}_A\Big) &\longrightarrow \mathsf{Afín}_{k}\Big(\mathcal{O}_{\mathcal{X}}, A\Big) \\ \eta &\longmapsto \varepsilon_A \circ \mathcal{O}_\eta \end{aligned} \tag{57}$$

es una biyección.

Para ello observemos que (57) asocia a cada transforamción natural

$$\eta = \Big\{ \mathcal{X}(K) \xrightarrow{\eta_K} \mathcal{X}_A(K) = \mathfrak{K}\text{-}\mathsf{Alg}(A, K) \Big\}_K$$

el morfismo $f \in \mathfrak{K}\text{-}\mathsf{Alg}(A, \mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ definido en $a \in A$ como la transformación natural:

$$f(a) = \{ X(K) \xrightarrow{f(a)_K} K \}_K$$

donde $f(a)_K(x) = \eta_K(x)(a)$.

Un inverso de (57) puede entonces ser construido con la igualdad $f(a)_K(x) = \eta_K(x)(a)$. ✠

2. Espacios algebraicos de Zariski

§2.1. Espacios localmente anillados. En esta sección, asociaremos a un conjunto algebraico sobre un dominio entero k, un espacio localmente anillado.

§2.1.1. *Ideales del anillo de coordenadas.*

Sea $X \subseteq \mathfrak{K}^I$ un conjunto algebraico sobre $\mathfrak{K}$.

Si V es un subconjunto de X, el conjunto de funciones regulares en X que se anulan en V:

$$I(V) = \Big\{ f \in \mathfrak{K}[X] \;\Big|\; f(x) = 0 \text{ para todo } x \in V \Big\},$$

es un ideal del anillo $\mathfrak{K}[X]$, pues

$$\begin{aligned}
(f+g)(x) &= f(x)+g(x) = 0 && \text{si } f,g \in I(V) \text{ y } x \in V\\
(-f)(x) &= -\big(f(x)\big) = 0 && \text{si } f \in I(V) \text{ y } x \in V\\
(fg)(x) &= f(x)g(x) = 0 && \text{si } f \in I(V),\ g \in \mathfrak{K}[X] \text{ y } x \in V
\end{aligned}$$

Por otro lado, si $A \subseteq \mathfrak{K}[X]$ es un subconjunto del anillo de coordenadas de X, el conjunto de ceros comunes de los elementos de A:

$$Z(A) = \Big\{x \in X \;\Big|\; f(x) = 0 \text{ para todo } f \in A\Big\},$$

es un subconjunto algebraico de X. En efecto, si $S \subseteq \mathfrak{K}[t_i \mid i \in I]$ es la imagen inversa de A bajo el morfismo (52) de la página 123 tenemos que

$$Z(A) = \{a \in \mathfrak{K}^I \mid p(a) = 0 \text{ para todo } p(t) \in S\}$$

TEOREMA 2.1. *Sea $\mathfrak{K}$ un anillo arbitrario. Si X es un conjunto algebraico sobre $\mathfrak{K}$, las asignaciones $V \mapsto I(V)$ y $\mathfrak{a} \mapsto Z(\mathfrak{a})$ determinan funtores adjuntos de conjuntos ordenados tales que $Z\big(I(-)\big) = \mathrm{id}_{\mathsf{Ab}(X)}$:*

$$\begin{tikzcd}
\begin{pmatrix}\textit{Subconjuntos}\\ \textit{algebricos de } X\end{pmatrix}^{\mathrm{op}} \arrow[r, hook, "I(-)"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \begin{pmatrix}\textit{Ideales del}\\ \textit{anillo } \mathfrak{K}[X]\end{pmatrix} \arrow[l, bend right, "Z(-)"'] & := \mathbf{Ideales}(\mathfrak{K}[X])
\end{tikzcd}$$

DEMOSTRACIÓN. Si $V \subseteq V'$ son subconjuntos de X y $f \in \mathfrak{K}[X]$ es una función regular tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in V'$, se tiene en particular que $f(x) = 0$ para todo $x \in V$, es decir, $I(V') \subseteq I(V)$. Del mismo modo, si $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}'$ son subconjuntos de $\mathfrak{K}[X]$ y $x \in X$ es tal que $f(x) = 0$ para toda $f \in \mathfrak{a}'$, se tiene en particular que $f(x) = 0$ para toda $f \in \mathfrak{a}$, es decir, $Z(\mathfrak{a}') \subseteq Z(\mathfrak{a})$.

Conluímos así que $V \mapsto I(V)$ y $\mathfrak{a} \mapsto Z(\mathfrak{a})$ son funtores de conjuntos ordenados.

Por otro lado, notemos que si $V \subseteq X$ es un subconjunto de X y $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{K}[X]$ es un subconjunto de $\mathfrak{K}[X]$, entonces:

$$V \subseteq Z\big(I(V)\big) \qquad \text{y} \qquad \mathfrak{a} \subseteq I\big(Z(\mathfrak{a})\big),$$

por lo que $Z(-)$ es adjunto izquierdo de $I(-)$.

La prueba de que $Z\big(I(-)\big) = \mathrm{id}_{\mathsf{Ab}(X)}$ es similar a la prueba del Teorema 1.7 de la página 123. ✠

Por el Teorema pasado, si X es un conjunto algebraico sobre un dominio entero $\mathfrak{K}$, se tiene una adjunción entre el conjunto ordenado de abiertos de Zariski de X y el conjunto ordenado de ideales del anillo $\mathfrak{K}[X]$:

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Ab}(X) \cong \begin{pmatrix}\text{Cerrados de}\\ \text{Zariski de } X\end{pmatrix}^{\mathrm{op}} \arrow[r, hook, "I(-)"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \begin{pmatrix}\text{Ideales del}\\ \text{anillo } \mathfrak{K}[X]\end{pmatrix} \arrow[l, bend right, "Z(-)"'] & \subseteq \mathbf{Ideales}(\mathfrak{K}[X])
\end{tikzcd}$$

Observemos que si V es un *cerrado irreducible* de X, es decir, V es no vacío y no se puede escribir como unión de dos subconjuntos cerrados propios, el ideal $\mathrm{I}(\mathsf{V})$ es primo. En efecto, si $f, g \in \mathfrak{K}[\mathsf{X}]$ son funciones regulares en X tales $fg \in \mathrm{I}(\mathsf{V})$, se tiene que:

$$\mathsf{V} = \mathrm{Z}(\mathrm{I}(\mathsf{V})) \subseteq \mathrm{Z}(fg) = \mathrm{Z}(f) \cup \mathrm{Z}(g),$$

por lo que $\mathsf{V} = (\mathrm{Z}(f) \cap \mathsf{V}) \cup (\mathrm{Z}(g) \cap \mathsf{V})$. Como V es irreducible se sigue que $\mathsf{V} = \mathrm{Z}(f) \cap \mathsf{V}$ ó $\mathsf{V} = \mathrm{Z}(g) \cap \mathsf{V}$, lo cual implica que $\mathsf{V} \subseteq \mathrm{Z}(f)$ ó $\mathsf{V} \subseteq \mathrm{Z}(g)$, es decir, $f \in \mathrm{I}(\mathsf{V})$ ó $g \in \mathrm{I}(\mathsf{V})$.

En particular, como un punto $\mathfrak{a}$ de X es un cerrado irreducible, el ideal $\mathrm{I}(\mathfrak{a})$ es primo. Más aún, si $\mathfrak{K}$ es un campo, por el Teorema 1.8 de la página 124 el ideal $\mathrm{I}(\mathfrak{a})$ es máximo.

TEOREMA 2.2. *Sea $\mathfrak{K}$ un campo algebraicamente cerrado y X un conjunto algebraico sobre $\mathfrak{K}$ de tipo finito. Si $\mathfrak{a}$ es un ideal del anillo de coordenadas de X, el ideal $\mathrm{I}(\mathrm{Z}(\mathfrak{a}))$ es igual al radical*[2] *de $\mathfrak{a}$.*

En particular, los funtores $\mathrm{I}(-)$ y $\mathrm{Z}(-)$ determinan isomorfismos de conjuntos ordenados:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathsf{Ab}(\mathsf{X}) \cong \begin{pmatrix} \textit{Cerrados de} \\ \textit{Zariski de } \mathsf{X} \end{pmatrix}^{\mathrm{op}} & \cong & \begin{pmatrix} \textit{Ideales} \\ \textit{radicales} \end{pmatrix} \subseteq \mathsf{Ideales}(\mathfrak{K}[\mathsf{X}]) \\
\uparrow & & \uparrow \\
\begin{pmatrix} \textit{Cerrados} \\ \textit{irreducibles} \end{pmatrix}^{\mathrm{op}} & \cong & \begin{pmatrix} \textit{Ideales} \\ \textit{primos} \end{pmatrix} \\
\uparrow & & \uparrow \\
\begin{pmatrix} \textit{Puntos} \\ \textit{de } \mathsf{X} \end{pmatrix} & \cong & \begin{pmatrix} \textit{Ideales} \\ \textit{máximos} \end{pmatrix}
\end{array}$$

DEMOSTRACIÓN.
La igualdad $\mathrm{I}(\mathrm{Z}(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}}$ es conocida como el Nullstelensatz de Hilbert y su prueba puede ser encontrada en [**Eis95**]. ✠

§2.1.2. *La gavilla de funciones regulares.*
Sea X un conjunto algebraico sobre un dominio entero $\mathfrak{K}$ y K el campo de fracciones de $\mathfrak{K}$. Si U es un abierto de X, una *función localmente racional en* U es una función $\mathsf{U} \xrightarrow{f} \mathsf{K}$ con la propiedad:

> Para todo $\mathfrak{a}$ en U, existe una vecindad $\mathsf{V}_\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{a}$ contenida en U y funciones regulares $p_\mathfrak{a}, q_\mathfrak{a} \in \mathfrak{K}[\mathsf{X}]$, tal que para todo $\mathfrak{b} \in \mathsf{V}_\mathfrak{a}$, $q_\mathfrak{a}(\mathfrak{b}) \neq 0$ y $f(\mathfrak{b}) = p_\mathfrak{a}(\mathfrak{b})/q_\mathfrak{a}(\mathfrak{b}) \in \mathsf{K}$.

[2]Recuerda que si A es un anillo y $\mathfrak{a}$ un ideal de A, *el radical de* $\mathfrak{a}$ es el ideal definido como $\sqrt{\mathfrak{a}} = \{x \in \mathfrak{K}[\mathsf{X}] \mid x^r \in \mathfrak{a} \text{ para alguna } r \in \mathbb{N}\}$. También, decimos que *un ideal $\mathfrak{a}$ es radical* si $\sqrt{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}$.

Si $\mathcal{O}_X(U)$ denota al conjunto de las funciones localmente racionales en U, de la estructura de $\mathfrak{K}$-álgebra de K se puede obtener una estructura de $\mathfrak{K}$-álgebra en $\mathcal{O}_X(U)$. Más aún, se sigue de la naturaleza local de la definición, que se tiene una gavilla de $\mathfrak{K}$-álgebras:

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Ab}(X)^{op} \arrow[rr, "\mathcal{O}_X(\cdot)"] & & \mathfrak{K}\text{-}\mathsf{Alg} \\ U \arrow[d, hook'] \arrow[rr, mapsto] & & \mathcal{O}_X(U) \\ V & & \mathcal{O}_X(V) \arrow[u, "\cdot|_U"'] \end{tikzcd}$$

a la que llamamos la *gavilla de funciones localmente racionales de* X.

Observemos que por el Ejemplo §3.2.3 de la página 107, el tallo $\mathcal{O}_{X,a}$ de la gavilla de funciones localmente racionales de X en a, *al que llamamos la* $\mathfrak{K}$*-álgebra local de* X *en* a, se puede identificar con el conjunto de las parejas (U, f) donde U es un abierto que contiene a a y f es una función localmente racional en U, módulo la relación de equivalencia que identifica a dos parejas (U, f) y (V, g), si existe un vecindad W de a contenida en la intersección de U y V tal que $f|_W = g|_W$. Denotamos a la clase de una pareja (U, f) en $\mathcal{O}_{X,a}$ como $[U, f]_a$.

Notemos que si $\mathfrak{K}[X]_{I(a)}$ denota la $\mathfrak{K}$-álgebra que se obtiene del anillo de coordenadas de X, al invertir los elementos que no están en el ideal primo $I(a)$, se tiene un morfismo de $\mathfrak{K}$-álgebras:

$$\begin{aligned} \mathfrak{K}[X]_{I(a)} &\longrightarrow \mathcal{O}_{X,a} \\ f/g &\longmapsto [X \setminus Z(g), f/g]_a \end{aligned} \tag{58}$$

TEOREMA 2.3. *Si* X *es un conjunto algebraico sobre un dominio entero, el morfismo* (58) *de arriba es un isomorfismo, es decir, la* $\mathfrak{K}$*-álgebra local de* X *en* a *es isomorfa a* $\mathfrak{K}[X]_{I(a)}$.

En particular, la $\mathfrak{K}$*-álgebra de funciones localmente racionales de* X *en* U*, se puede identificar con el conjunto de las funciones:*

$$U \xrightarrow{s} \coprod_{a \in U} \mathfrak{K}[X]_{I(a)}$$

con la propiedad:

> *Para todo* a *en* U *existe una vecindad* V_a *de* a *contenida en* U *y funciones regulares* $f_a, g_a \in \mathfrak{K}[X]$ *tal que para todo* $b \in V_b$ *se tiene que* $g_a \notin I(b)$ *y* $s(b) = f_a/g_a \in \mathfrak{K}[X]_{I(b)}$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $[U, f]_a \in \mathcal{O}_{X,a}$. De la definición sabemos que existe un abierto V que contiene a a y funciones regulares $p, q \in \mathfrak{K}[X]$, tales que para todo $b \in V$, $q(b) \neq 0$ y $f(b) = p(b)/q(b)$. Se sigue que $[U, f]_a = [X \setminus Z(q), p/q]_a$, es decir, (58) es suprayectiva.

Por otro lado, sean p/q y p'/q' elementos de $\mathfrak{K}[X]_{I(a)}$ tales que como funciones en $X\backslash(Z(q)\cap Z(q'))$, coinciden en una vecindad de a. Como los abiertos de la forma $X\backslash Z(h)$ donde $h\in\mathfrak{K}[X]$ forman una base para la topología en X, se sigue que existe $h\in\mathfrak{K}[X]$ tal que $h(a)\neq 0$ y $p(b)q'(b)-p'(b)q(b)=0$ para toda $b\in Z(h)$, es decir, $p/q=p'/q'\in\mathfrak{K}[X]_{I(a)}$. Esto muestrar que (58) es inyectiva.

Por último, la interpretación de la $\mathfrak{K}$-álgebra $\mathcal{O}_X(U)$ se sigue de lo que ya probamos y del Teorema 4.4 de la página 113. ✠

De la descripción de las funciones localmente racionales de X del Teorema anterior, podemos conluir el siguiente:

COROLARIO 2.4. *Si X es un conjunto algebraico irreducible y de tipo finito sobre un campo $\mathfrak{K}$ algebraicamente cerrado, el morfismo de $\mathfrak{K}$-álgebras:*

$$\begin{aligned}\mathfrak{K}[X] &\longrightarrow \mathcal{O}_X(X)\\ f &\longmapsto \big(a\mapsto f\in\mathfrak{K}[X]_{I(a)}\big)\end{aligned}$$

es un isomorfismo, es decir, una función localmente racional en X no es más que una función regular en X.

DEMOSTRACIÓN.

Inyectividad:

Sean $f,f'\in\mathfrak{K}[X]$ tales que $f=f'\in\mathfrak{K}[X]_{I(a)}$ para todo $a\in X$. Se sigue que para cada $a\in X$, existe $h_a\in\mathfrak{K}[X]\backslash I(a)$ tal que $h_a(f-f')=0\in\mathfrak{K}[X]$.

Como la unión de los conjuntos $X\backslash Z(h_a)$ para toda $a\in X$ es igual a X, podemos concluir del Teorema 2.2 de la página 131, que el ideal generado por el conjunto $\{h_a\}_{a\in X}$ es igual a $\mathfrak{K}[X]$. En particular, existen $a_1,\dots,a_n\in X$ y $r_1\dots,r_n\in\mathfrak{K}[X]$ tal que $\sum_{i=1}^n h_{a_i}r_i=1\in\mathfrak{K}[X]$. Por lo tanto,

$$f-f'=\sum_{i=1}^n(f-f')h_{a_i}r_i=\sum_{i=1}^n 0r_i=0\in\mathfrak{K}[X]$$

Suprayectividad:

Sea $s\in\mathcal{O}_X(X)$. Se sigue de la definición que para cada $a\in X$, existe una vecindad U_a de a y funciones regulares f_a,g_a tal que para todo $b\in U_a$, $g_a\notin I(b)$ y $s(b)=f_a/g_a\in\mathfrak{K}[X]_{I(b)}$.

Notemos primero que como X es irreducible, para todo a y b en X existe $c\in U_a\cap U_b$ y entonces $f_a/g_a=f_b/g_b\in\mathfrak{K}[X]_{I(c)}$. Se concluye que si $\mathfrak{K}(X)$ denota al campo de fracciones del dominio entero $\mathfrak{K}[X]$, para cualesquiera a y b en X se tiene que $f_a/g_a=f_b/g_b\in\mathfrak{K}(X)$. Concluimos que $s\in\mathcal{O}_X(X)$ tiene asociado de manera natural un elemento $\tilde{s}$ en $\mathfrak{K}(X)$, y que para probar lo deseado basta ver que $\tilde{s}\in\mathfrak{K}[X]$. Para ello notemos que como en la prueba de la inyectividad, se tiene que existen $a_1,\dots,a_n\in X$ y $r_1\dots,r_n\in\mathfrak{K}[X]$ tal que $\sum_{i=1}^n g_{a_i}r_i=1\in\mathfrak{K}[X]$, por lo que $\tilde{s}=\sum_{i=1}^n\tilde{s}g_{a_i}r_i\in\mathfrak{K}(X)$. Sustituyendo a $\tilde{s}$ por f_{a_i}/g_{a_i} en el i-esimo sumando, tenemos que $\tilde{s}=\sum_{i=1}^n f_{a_i}r_i\in\mathfrak{K}[X]$. ✠

§2.1.3. *Espacios localmente anillados.*

Un *espacio $\mathfrak{K}$-anillado* es una pareja $X = (X, \mathcal{O}_X)$, donde X es un espacio topológico y $\mathcal{O}_X$ es una gavilla de $\mathfrak{K}$-álgebras en X. Un espacio $\mathfrak{K}$-anillado $(X, \mathcal{O}_X)$ se dice que es un *espacio localmente $\mathfrak{K}$-anillado*, si el tallo $\mathcal{O}_{X,a}$ de $\mathcal{O}_X$ en todo $a \in X$ es un anillo local[3] con ideal máximo $\mathfrak{m}_a$.

Si $X = (X, \mathcal{O}_X)$ es un espacio localmente $\mathfrak{K}$-anillado, denotamos como $\mathfrak{K}(a)$ al campo $\mathcal{O}_{X,a}/\mathfrak{m}_A$ y lo llamamos *el campo de residuos de* $(X, \mathcal{O}_X)$ *en* a. $\mathfrak{K}(a)$ tiene una estructura de $\mathfrak{K}$-álgebra.

Si $(X, \mathcal{O}_X)$ es un espacio localmente anillado y $U \subseteq X$ es un abierto, el espacio anillado $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ también es un espacio localmente anillado.

Un morfismo entre dos espacios $\mathfrak{K}$-anillados $(X, \mathcal{O}_X)$ y $(Y, \mathcal{O}_Y)$, es una pareja (f^e, f^g) donde $X \xrightarrow{f^e} Y$ es una función continua y $\mathcal{O}_Y \xrightarrow{f^g} f^e_*\mathcal{O}_X$ es un morfismo de gavillas sobre Y. Si $(X, \mathcal{O}_X)$ y $(Y, \mathcal{O}_Y)$ son dos espacios localmente $\mathfrak{K}$-anillados, un morfismo de espacios $\mathfrak{K}$-anillados $(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{(f^e, f^g)} (Y, \mathcal{O}_Y)$ se dice que es un *morfismo local*, si para todo $a \in X$ el morfismo de anillos asociado:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{Y,f(a)} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{X,a} \\ [U, s]_{f(a)} & \longmapsto & [f^{-1}(U), f^g_U(s)]_a \end{array}$$

es un morfismo local[4].

Se sigue entonces que un morfismo $(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{(f^e, f^g)} (Y, \mathcal{O}_Y)$ de espacio $\mathfrak{K}$-anillados es un isomorfismo, si y sólo si f^e es un homeomorfismo de espacios topológicos y f^g es un isomorfismo de gavillas en Y. Decimos que un morfismo $(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{(f^e, f^g)} (Y, \mathcal{O}_Y)$ de espacios $\mathfrak{K}$-anillados es una *inmersión abierta*, si existe un abierto $U \subseteq Y$ tal que (f^e, f^g) induce un isomorfismo de $(X, \mathcal{O}_X)$ en $(U, \mathcal{O}_Y|_U)$:

$$\begin{tikzcd} (X, \mathcal{O}_X) \arrow[r, "{(f^e, f^g)}"] \arrow[d, dashed, "\cong"'] & (Y, \mathcal{O}_Y) \\ (U, \mathcal{O}_Y|_U) \arrow[ur, "{(\nu^e, \nu^g)}"'] & \end{tikzcd}$$

donde (ν^e, ν^g) es el morfismo inducido por la adjunción del Ejemplo §3.2.1 de la página 107. Explícitamente, (f^e, f^g) es una inmersión abierta si y sólo si, f^e es un

[3]Un *anillo local* es un anillo A con un único ideal máximo $\mathfrak{m}_A$.

[4]Un morfismo de anillos locales $A \xrightarrow{f} B$ con ideales máximos $\mathfrak{m}_A$ y $\mathfrak{m}_B$, respectivamente, se dice que es un *morfismo local* si $f(\mathfrak{m}_A) \subseteq \mathfrak{m}_B$

encaje abierto con imagen $U \subseteq Y$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f^e"] \arrow[dr, dashed, "\cong \widetilde{f^e}"'] & Y \\ & U \arrow[u, hook, "\nu^e"'] \end{tikzcd}$$

y el morfismo de gavillas:

$$\mathcal{O}_Y|_U = (\nu^e)^*\mathcal{O}_Y \xrightarrow{(\nu^e)^* f^g} (\nu^e)^* \circ (\nu^e)_*(\widetilde{f^e}_*\mathcal{O}_X) \longrightarrow \widetilde{f^e}_*\mathcal{O}_X$$

es un isomorfismo.

Por último, si $\mathcal{A} = \{(X_i, \mathcal{O}_{X_i}) \xrightarrow{f_i} (X, \mathcal{O}_X)\}_i$ es una familia de inmersiones abiertas, decimos que $\mathcal{A}$ es una *cubierta abierta de* $(X, \mathcal{O}_X)$ si el morfismo inducido

$$\coprod_i (X_i, \mathcal{O}_{X_i}) \xrightarrow{\coprod_i f_i} (X, \mathcal{O}_X)$$

es un epimorfismo, es decir, si $(\coprod_i f_i)^e$ es una función sobre.

Denotamos como $\mathsf{EspAnill}_{\mathfrak{K}}^{\mathrm{loc}}$ a la categoría cuyos objetos son los espacios localmente $\mathfrak{K}$-anillados y cuyos morfismos, los morfismos locales entre ellos.

Si X es un conjunto algebraico sobre un dominio entero $\mathfrak{K}$, la pareja $(X, \mathcal{O}_X)$, donde X es el conjunto algebraico con su topología de Zariski y $\mathcal{O}_X$ es la gavilla de funciones localmente racionales en X, es un espacio localmente $\mathfrak{K}$-anillado por el Teorema 2.3 de la página 132.

Por otro lado, si $X \xrightarrow{f} Y$ es un morfismo regular de conjuntos algebraicos sobre $\mathfrak{K}$, se tiene un morfismo local $(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{(f^e, f^g)} (Y, \mathcal{O}_Y)$ entre los espacios localmente $\mathfrak{K}$-anillados correspondientes, donde $f^e = f$ y el morfismo de gavillas $\mathcal{O}_Y \xrightarrow{f^g} f^e_*(\mathcal{O}_X)$ está definido para un abierto V de Y como:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_Y(V) &\xrightarrow{f^g_U} f_*\mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}_X(f^{-1}(U)) \\ s &\longmapsto s \circ f|_{f^{-1}(U)} \end{aligned}$$

Para ver que este morfismo es local, notemos que si $a \in X$, módulo el isomorfismo del Teorema 2.3 de la página 132, f^g_a se ve de la forma:

$$\begin{aligned} \mathfrak{K}[Y]_{I(f^e(a))} &\longrightarrow \mathfrak{K}[X]_{I(a)} \\ p/q &\longmapsto (p \circ f^e)/(p \circ f^e) \end{aligned}$$

El resultado deseado se sigue entonces, de que el ideal máximo del anillo $\mathfrak{K}[X]_{I(a)}$ es igual al conjunto de las fracciones r/s donde $r \in I(a)$.

El funtor así definido

$$\mathsf{ConAlg}_{\mathfrak{K}}^{\mathrm{irr}} \xrightarrow{(-,\mathcal{O}_{-})} \mathsf{EspAnill}_{\mathfrak{K}}^{\mathrm{loc}} \tag{59}$$

es obviamente fiel.

PROPOSICIÓN 2.5. *Si $\mathfrak{K}$ es un campo algebraicamente cerrado, el funtor* (59) *se restringe a un funtor fiel y pleno:*

$$\mathsf{ConAlg}_{\mathfrak{K}}^{\mathrm{irr,tf}} \xhookrightarrow{(-,\mathcal{O}_{-})} \mathsf{EspAnill}_{\mathfrak{K}}^{\mathrm{loc}}$$

de la categoría de conjuntos algebraicos irreducibles y de tipo finito sobre $\mathfrak{K}$, en la categoría de espacios localmente $\mathfrak{K}$-anillados.

DEMOSTRACIÓN.
Este resultado se sigue del Corolario 2.4 de la página 133 y el Teorema 1.5 de la página 121. ✠

§2.2. El funtor espectro primo.
§2.2.1. *Esquemas afines.*
Motivados por la sección anterior, definiremos ahora el *funtor espectro primo*:

$$\begin{aligned} \mathsf{Afín} &\xhookrightarrow{\mathrm{Spec}(\cdot)} \mathsf{EspAnill}^{\mathrm{loc}} \\ A &\longmapsto (\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O}_A) \end{aligned}$$

El espacio topológico Spec (A)*:*
Si A es un anillo, el espacio topológico Spec (A) tiene como conjunto subyacente al conjunto de ideales primos de A:

$$\mathrm{Spec}(A) := \{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \text{ ideal primo de } A\}.$$

Decimos que un subconjunto U de Spec (A) es un *abierto de Zariski*, si existe un ideal $\mathfrak{a}$ de A tal que

$$U = U(\mathfrak{a}) := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid \mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{p}\}$$

Al complemento en X del conjunto $U(\mathfrak{a})$ lo denotamos como $V(\mathfrak{a})$.

PROPOSICIÓN 2.6. *La familia de abiertos de Zariski son los abiertos de una topología en* Spec (A) *llamada la* topología de Zariski. *Más precisamente,*

1) $U(\mathfrak{a}) \cap U(\mathfrak{b}) = U(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$.
2) $\bigcup_{i \in I} U(\mathfrak{a}_i) = U\left(\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i\right)$.

DEMOSTRACIÓN. Ver [**Har77**]. ✠

La gavilla de anillos $\mathcal{O}_{\mathsf{A}}$:

Si U es un abierto del espacio $\operatorname{Spec}(\mathsf{A})$, el conjunto de secciones de $\mathcal{O}_{\mathsf{A}}$ en U se define como el conjunto de las funciones

$$\mathsf{U} \xrightarrow{\ s\ } \coprod_{\mathfrak{p}\in \mathsf{U}} \mathsf{A}_{\mathfrak{p}}$$

con la propiedad:

> Para todo $\mathfrak{p}$ en U existe una vecindad V de $\mathfrak{p}$ contenida en U y elementos $\mathsf{f}, \mathsf{g} \in \mathsf{A}$ tal que para todo $\mathfrak{q} \in \mathsf{V}$ se tiene que $\mathsf{g} \notin \mathfrak{q}$ y $\mathsf{s}(\mathfrak{q}) = \mathsf{f}/\mathsf{g} \in \mathsf{A}_{\mathfrak{q}}$.

Notemos que la estructura algebraica de los anillos $\mathsf{A}_{\mathfrak{p}}$, determina una estructura de anillo en $\mathcal{O}_{\mathsf{A}}(\mathsf{U})$. Más aún, se sigue de la naturaleza local de la definición, que la restricción de funciones determina una gavilla:

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Ab}(\operatorname{Spec}(\mathsf{A}))^{\mathrm{op}} \arrow[r, "\mathcal{O}_{\mathsf{A}}"] & \mathsf{Anillo} \\
\mathsf{U} & \mathcal{O}_{\mathsf{X}}(\mathsf{U}) \\
\mathsf{V} \arrow[u, hook] \arrow[r, mapsto] & \mathcal{O}_{\mathsf{X}}(\mathsf{V}) \arrow[u, "\cdot|_{\mathsf{U}}"']
\end{tikzcd}$$

El espectro primo de un morfismo de anillos:

Si $\mathsf{A} \xrightarrow{\mathsf{f}} \mathsf{B}$ es un morfismo de anillos, el espectro primo de f es el morfismo de espacios localmente anillados $\mathsf{Spec}(\mathsf{B}) \xrightarrow{(\mathsf{f}^{e},\mathsf{f}^{g})} \mathsf{Spec}(\mathsf{A})$ definido como sigue:

La función continua $\operatorname{Spec}(\mathsf{B}) \xrightarrow{\mathsf{f}^{e}} \operatorname{Spec}(\mathsf{A})$ ésta dada por la asignación $\mathfrak{p} \mapsto \mathsf{f}^{-1}(\mathfrak{p})$. Ésta es continua ya que si $\mathfrak{a}$ es un ideal de B, $\widetilde{\mathsf{f}}^{-1}(\mathsf{V}(\mathfrak{a}))$ es igual a $\mathsf{V}(\mathsf{f}^{-1}(\mathfrak{a}))$.

Por otro lado, si $\mathfrak{q}$ es un ideal primo de B, el morfismo local $\mathsf{A}_{\widetilde{\mathsf{f}}(\mathfrak{p})} \xrightarrow{\mathsf{f}_{\mathfrak{p}}} \mathsf{B}_{\mathfrak{p}}$ determina un morismo de gavillas $\mathcal{O}_{\mathsf{A}} \xrightarrow{\mathsf{f}^{g}} \mathsf{f}^{e}_{*}\mathcal{O}_{\mathsf{B}}$ definido para cada abierto U de $\operatorname{Spec}(\mathsf{A})$ por la formula:

$$\mathsf{f}^{g}_{\mathsf{U}}(\mathsf{s})(\mathfrak{q}) = \mathsf{f}_{\mathfrak{q}}\Big(\mathsf{s}\big(\mathsf{f}^{e}(\mathfrak{q})\big)\Big)$$

donde $\mathfrak{q} \in (\mathsf{f}^{e})^{-1}(\mathsf{U})$ y $\mathsf{s} \in \mathcal{O}_{\mathsf{A}}(\mathsf{U})$.

PROPOSICIÓN 2.7. *El funtor espectro primo es fiel y pleno. Más aún, el funtor*

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{EspAnill}^{\mathrm{loc}} \arrow[r, "\mathcal{O}"] & \mathsf{Afín} \\
(\mathsf{X}, \mathcal{O}_{\mathsf{X}}) \arrow[d, "(\mathsf{f}^{e},\mathsf{f}^{g})"'] \arrow[r, mapsto] & \mathcal{O}_{\mathsf{X}}(\mathsf{X}) \arrow[d, "\mathsf{f}^{g}_{\mathsf{Y}}"] \\
(\mathsf{Y}, \mathcal{O}_{\mathsf{Y}}) & \mathcal{O}_{\mathsf{Y}}(\mathsf{Y})
\end{tikzcd}$$

es su adjunto izquierdo:

$$(60) \qquad \begin{tikzcd} \mathsf{Afín} \arrow[rr, "\mathsf{Spec}(\cdot)"'] \arrow[rr, phantom, "\perp"] & & \mathsf{EspAnill}^{\mathrm{loc}} \arrow[ll, bend right, "\mathcal{O}(\cdot)"'] \end{tikzcd}$$

DEMOSTRACIÓN. Ver [**Har77**]. ✠

Decimos que un espacio localmente anillado $(X, \mathcal{O}_X)$ es un *esquema afín*, si la counidad de la adjunción $\mathcal{O} \dashv \mathsf{Spec}$ en $(X, \mathcal{O}_X)$:

$$(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{\varepsilon_{(X,\mathcal{O}_X)}} \mathsf{Spec}(\mathcal{O}_X(X))$$

es un isomorfismo.

Se sigue que la adjunción (60) de la Proposición de arriba, determina una equivalencia entre la categoría de variedades algebraicas afínes, y la subcategoría plena de $\mathsf{EspAnill}^{\mathrm{loc}}$ cuyos objetos son los esquemas afines. En particular, un espacio localmente anillado $(X, \mathcal{O}_X)$ es un esquema afín, si y sólo si $(X, \mathcal{O}_X)$ es isomorfo al espectro primo de algún anillo.

§2.2.2. *Esquemas.*

Si A es un anillo y $f \in A$, el morfismo canónico $A \xrightarrow{\nu_f} A_f$, donde A_f denota al anillo que se obtiene de A al invertir los multiplos de f, induce una inmersión abierta de espacios localmente anillados $\mathsf{Spec}(A_f) \longrightarrow \mathsf{Spec}(A)$. En efecto, $\mathrm{Spec}(A_f) \xrightarrow{\nu_f^e}$ $\mathrm{Spec}(A)$ es un encaje abierto con imagen el conjunto $U(f) = \{\mathfrak{p} \mid f \notin \mathfrak{p}\}$ y ν_f induce un isomorfismo $A_{\nu_f^{-1}(\mathfrak{p})} \longrightarrow (A_f)_{\mathfrak{p}}$, si $\mathfrak{p} \in U(f)$.

Más aún, la intersección de dos de estas inmersiones abiertas es nuevamente del mismo tipo. Más precisamente, si $f, g \in A$, el siguiente cuadrado cocartesiano:

$$\begin{tikzcd} A_{fg} & A_f \arrow[l] \\ A_g \arrow[u] & A \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

donde $A_f \to A_{fg}$ se define como $a/f^n \mapsto (ag^n)/(fg)^n$, induce un cuadrado cartesiano:

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Spec}(A_{fg}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathsf{Spec}(A_g) \arrow[d] \\ \mathsf{Spec}(A_f) \arrow[r] & \mathsf{Spec}(A) \end{tikzcd}$$

Se sigue que si $\langle f_i \rangle_i = A$, entonces $\{\mathsf{Spec}(A_{f_i}) \longrightarrow \mathsf{Spec}(A)\}_i$ es una cubierta abierta por esquemas afines del espacios localmente anillados $\mathsf{Spec}(A)$, cuyas intersecciones también son afines.

En general, llamamos a una cubierta abierta de espacios localmente anillados $\{(X_i, \mathcal{O}_{X_i}) \xrightarrow{f_i} (X, \mathcal{O}_X)\}_i$ una *cubierta afín*, si $(X_i, \mathcal{O}_{X_i})$ es un esquema afín para todo

i. Si un espacio localmente anillado $(X, \mathcal{O}_X)$ tiene una cubierta afín, decimos que $(X, \mathcal{O}_X)$ es un *esquema*.

PROPOSICIÓN 2.8. *Si* Scm *denota a la subcategoría plena de* $\mathsf{EspAnill}^{\mathrm{loc}}$ *cuyos objetos son los esquemas, el funtor* $\mathsf{Afín} \xhookrightarrow{\mathsf{Spec}(\cdot)} \mathsf{Scm}$ *es codenso.*

DEMOSTRACIÓN. Debemos probar que para todo esquema $(X, \mathcal{O}_X)$ el morfismo

$$\mathrm{colím}\Big(\mathsf{Spec} \downarrow (X, \mathcal{O}_X), \mathsf{Spec} \circ \pi \downarrow (X, \mathcal{O}_X)\Big) \longrightarrow (X, \mathcal{O}_X)$$

inducido por la transformación natural $\big\{\mathsf{Spec}(A) \xrightarrow{u} (X, \mathcal{O}_X)\big\}_{(A,u)}$, es un isomorfismo.

Por la naturaleza local de los espacios localmente anillados, es suficiente ver que para todo $a \in X$, existe una vecindad abierta $U \subseteq X$ de a tal que:

$$\mathrm{colím}\Big(\mathsf{Spec} \downarrow (U, \mathcal{O}_X|_U), \mathsf{Spec} \circ \pi \downarrow (U, \mathcal{O}_X|_U)\Big) \longrightarrow (U, \mathcal{O}_X|_U)$$

es un isomorfismo.

Esto se sigue de que si $U \subseteq X$ es un abierto y $\mathsf{Spec}(A) \xrightarrow{u} (U, \mathcal{O}_X|_U)$ un isomorfismo, entonces la pareja (A, u) es un objeto final de la categoría $\mathsf{Spec} \downarrow (U, \mathcal{O}_X|_U)$. ✠

§2.3. Espacios algebraicos de Zariski. Ya que la categoría $\mathsf{EspAnill}^{\mathrm{loc}}$ tiene naturalmente una estructura de categoría canónicamente cocompleta, por el Teorema 6.6 de la página 55, se tiene un diagrama:

(61)
$$\begin{tikzcd} & \mathsf{EspAnill}^{\mathrm{loc}} \arrow[d, shift left=2, "s^{\wedge}"] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\ \mathsf{Afín} \arrow[ur, hook, "\mathsf{Spec}(\cdot)"] \arrow[r, hook, "\mathfrak{X}_-"'] \arrow[ur, phantom, shift right=3, "\cong"] & \mathsf{EspPAlg} \arrow[u, shift left=2, "s_{\wedge}"] \end{tikzcd}$$

Si $(X, \mathcal{O}_X)$ es un espacio localmente anillado, llamamos al espacio prealgebraico $s^{\wedge}(X, \mathcal{O}_X)$ *el funtor de puntos de* $(X, \mathcal{O}_X)$. El conjunto de puntos K-racionales del funtor de puntos de $(X, \mathcal{O}_X)$ para un campo K, se identifica entonces con el conjunto:

$$X_K := \coprod_{a \in X} \mathsf{Anillo}(\mathfrak{K}(a), K),$$

es decir, con el conjunto de las parejas (a, φ) donde $a \in X$ y $\mathfrak{K}(a) \xrightarrow{\varphi} K$ es una extensión de K sobre el campo local de x en a. Se sigue de esta observación:

PROPOSICIÓN 2.9. *Si* $(X, \mathcal{O}_X)$ *es un espacio localmente anillado, las funciones* $X_K \to X$ *definidas por la asignación* $(a, \varphi) \mapsto a$, *determinan una biyección del* *colímite:*

$$\operatorname{colím}\left(\begin{array}{ccc} \mathsf{Campo} & \longrightarrow & \mathsf{Con} \\ \mathrm{K} & \longmapsto & X_{\mathrm{K}} \end{array}\right)$$

en el conjunto subyacente del espacio X, *donde* Campo *denota a la subcategoría plena de la categoría* Anillo *cuyos objetos son los campos.*

§2.3.1. *Gavillas de Zariski.*

Si A es un anillo, una familia de morfismos de anillos $\{A_i \xleftarrow{f_i} A\}_i$ es llamada una *cubierta de Zariski de* A, si la familia inducida de espacio localmente anillados $\{\operatorname{Spec}(A_i) \hookrightarrow \operatorname{Spec}(A)\}_i$ es una cubierta abierta de Spec (A).

Si denotamos como $J_{Zar}(A)$ a la familia de todas las cubiertas de Zariski de un anillo A, con los productos fibrados en la categoría Afín inducidos por el producto tensorial en Anillo, la pareja $(\mathsf{Afín}, J_{Zar})$ es un presitio. En efecto, en primer lugar $\{A \xleftarrow{id_A} A\}$ es siempre una cubierta de Zariski de A, por lo que $J_{Zar}(A)$ es diferente del vacío para todo anillo A. Por otro lado, si $\{A_i \xleftarrow{f_i} A\}_i$ es una cubierta de Zariski de A y $B \xleftarrow{\varphi} A$ es un morfismo de anillos, el cuadarado cocartesiano:

$$\begin{array}{ccc} B \underset{A}{\otimes} A_i & \longleftarrow & A_i \\ \uparrow & & \uparrow f_i \\ B & \underset{\varphi}{\longleftarrow} & A \end{array}$$

induce un cuadrado cartesiano:

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Spec}\left(B \underset{A}{\otimes} A_i\right) & \longrightarrow & \operatorname{Spec}(A_i) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \operatorname{Spec}(B) & \longrightarrow & \operatorname{Spec}(A) \end{array}$$

por lo que $\left\{B \underset{A}{\otimes} A_i \longleftarrow B\right\}$ es una cubierta de Zariski de A. Por último, la propiedad de estabilidad por composición es inmediata.

Un espacio prealgebraico $\mathfrak{X}$ el cual es una gavilla en el presitio $(\mathsf{Afín}, J_{Zar})$, es llamado una *gavilla de Zariski.* Denotamos como Sh_{Zar} a la subcategoría plena de EspPAlg cuyos objetos son las gavillas de Zariski.

Puede probarse fácilmente la siguiente:

PROPOSICIÓN 2.10. *El funtor de puntos de un espacio localmente anillado* $(X, \mathcal{O}_X)$ *es una gavila de Zariski. En particular, se tiene un diagrama:*

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{EspAnill}^{\mathrm{loc}} \arrow[d, "s^\wedge"] \\ \mathrm{Afín} \arrow[ur, hook, "\mathrm{Spec}(\cdot)"] \arrow[r, hook, "\mathcal{X}_-"'] \arrow[ur, phantom, "\cong", shift right=3ex] & \mathrm{Sh}_{\mathrm{Zar}} \end{tikzcd}$$

§2.3.2. *Espacios algebraicos de Zariski.*

Si A es un anillo y $\mathfrak{a}$ es un ideal A, la inmersión abierta

$$(U(\mathfrak{a}), \mathcal{O}_A|_{U(\mathfrak{a})}) \hookrightarrow (\mathrm{Spec}\,(A), \mathcal{O}_A)$$

de espacios localmente anillados, induce un monomorfismo de funtores

$$\mathcal{X}_\mathfrak{a} := s^\wedge(U(\mathfrak{a}), \mathcal{O}_A|_{U(\mathfrak{a})}) \xhookrightarrow{\nu_\mathfrak{a}} s^\wedge(\mathrm{Spec}\,(A)) =: \mathcal{X}_A$$

Un morfismo de espacios prealgebraicos $\mathcal{X} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{Y}$ se dice que es una *inmersión abierta*, si φ es un monomorfismo y para todo morfismo $\mathcal{X}_A \xrightarrow{u} \mathcal{Y}$ existe un ideal $\mathfrak{a}$ de A tal que $u^*(\mathcal{X})$ es isomorfo a $\mathcal{X}_\mathfrak{a}$, es decir, tal que haya un cuadrado cartesiano:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X}_\mathfrak{a} \arrow[r] \arrow[d, hook, "\nu_\mathfrak{a}"'] & \mathcal{X} \arrow[d, hook, "\varphi"] \\ \mathcal{X}_A \arrow[r, "u"'] & \mathcal{Y} \end{tikzcd}$$

Si $\mathcal{X}$ es un subespacio prealgebraico de $\mathcal{Y}$ y la inclusión $\mathcal{X} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{Y}$ es una inmersión abierta, decimos que $\mathcal{X}$ *es un subespacio abierto de* $\mathcal{Y}$. Se sigue que un morfismo $\mathcal{X} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{Y}$ es una inmersión abierta, si y sólo si φ es un monomorfismo y su imagen es un subespacio abierto de $\mathcal{Y}$.

Por una *cubierta abierta* de un espacio prealgebraico $\mathcal{X}$, entendemos una familia de inmersiones abiertas $\{\mathcal{X}_i \xrightarrow{u_i} \mathcal{X}\}_i$ tal que la función inducida de puntos K-racionales:

$$\coprod_i \mathcal{X}_i(K) \xrightarrow{\coprod_i u_i(K)} \mathcal{X}(K)$$

es un epimorfismo de conjuntos, para todo campo K. Una cubierta abierta $\{\mathcal{X}_i \xrightarrow{u_i} \mathcal{X}\}_i$ de $\mathcal{X}$ es llamada una *cubierta afín de* $\mathcal{X}$, si $\mathcal{X}_i$ es un espacio algebraico afín para toda i.

Por ejemplo, una cubierta afín $\{\mathrm{Spec}\,(A_i) \xrightarrow{u_i} (X, \mathcal{O}_X)\}_i$ de un esquema $(X, \mathcal{O}_X)$ determina una cubierta afín del funtor de puntos de $(X, \mathcal{O}_X)$. En efecto, en primer lugar como u_i es un monomorfismo, se sigue fácilmente que $s^\wedge(u_i)$ también es mono. Por otro lado, de la Proposición 2.8 de la página 139, un morfismo $\mathcal{X}_A \xrightarrow{\psi} s^\wedge(X, \mathcal{O}_X)$

es de la forma $s^\wedge(\psi^e, \psi^g)$ para algún morfismo $\mathsf{Spec}(A) \overset{(\psi^e,\psi^g)}{\longrightarrow} (X, \mathcal{O}_X)$. Entonces, si

$$(\psi^e)^{-1}\big(\mathrm{Spec}(A_i)\big) = U(a_i) \subseteq \mathrm{Spec}(A)$$

el siguiente cuadrado cartesiano:

$$\begin{tikzcd}
\big(U(a_i), \mathcal{O}_A|_{U(a_i)}\big) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \big(\mathrm{Spec}(A_i), \mathcal{O}_{A_i}\big) \arrow[d, hook] \\
\big(\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O}_A\big) \arrow[r] & (X, \mathcal{O}_X)
\end{tikzcd}$$

determina un cuadrado cartesiano:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{X}_a \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathcal{X}_{A_i} \arrow[d, hook] \\
\mathcal{X}_A \arrow[r] & s^\wedge(X, \mathcal{O}_X)
\end{tikzcd}$$

por lo que $\left\{\mathcal{X}_{A_i} \overset{s^\wedge(u_i)}{\longrightarrow} s^\wedge(X, \mathcal{O}_X)\right\}_i$ es una familia de inmersiones abiertas. Por último, no es difícil ver que todo morfismo de espacio localmente anillados $\mathsf{Spec}(K) \to (X, \mathcal{O}_X)$ donde K es un campo, se factoriza como:

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Spec}(K) \arrow[r] \arrow[dr] & (X, \mathcal{O}_X) \\
& \mathsf{Spec}(A_i) \arrow[u, hook, "u_i"']
\end{tikzcd}$$

para algún $\mathsf{Spec}(A_i) \overset{u_i}{\hookrightarrow} (X, \mathcal{O}_X)$, es decir,

$$\left\{\mathcal{X}_{A_i} \overset{s^\wedge(u_i)}{\longrightarrow} s^\wedge(X, \mathcal{O}_X)\right\}_i$$

es una cubierta afín de $s^\wedge(X, \mathcal{O}_X)$.

Concluimos que si $\mathsf{EspAlg}_{\mathrm{Zar}}$ denota a la subcategoría plena de la categoría de espacios prealgebraicos, cuyos objetos son las *espacios algebraicos de Zariski*, es decir, las gavillas de Zariski que tienen una cubierta afín, por la Proposición 2.8 de la página 139 y la Proposición 2.10 de la página 140, se tiene un diagrama:

$$\begin{tikzcd}
& \mathsf{Scm} \arrow[d, hook, "s^\wedge|"] \\
\mathsf{Afín} \arrow[ur, hook, "\mathsf{Spec}(\cdot)"] \arrow[r, hook, "\mathcal{X}_-"'] \arrow[ur, phantom, shift right=3, "\cong"] & \mathsf{EspAlg}_{\mathrm{Zar}}
\end{tikzcd}$$

§2.3.3. *Descripción del funtor* $s_\wedge$.

Ahora queremos mostrar que si $\mathcal{X}$ es un espacio prealgebraico con una cubierta afín, entonces $s_\wedge(\mathcal{X})$ es un esquema. Para ello daremos una mejor descripción del espacio localmente anillado $s_\wedge(\mathcal{X})$ al que denotamos como $(\mathcal{X}^e, \mathcal{X}^g)$.

El conjunto $\mathcal{X}^e$*:*

Por definición, el conjunto subyacente del espacio topológico $\mathcal{X}^e$ es el colímite de la gráfica:

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_- \downarrow \mathcal{X} &\longrightarrow \mathsf{Con} \\ (A, u) &\longmapsto \operatorname{Spec}(A) \end{aligned}$$

mientras que por la Proposición 2.9 de la página 139, el conjunto subyacente del espacio Spec (A) se identifica con el colímite de la gráfica:

$$\begin{aligned} \mathsf{Campo} &\longrightarrow \mathsf{Con} \\ K &\longmapsto \mathcal{X}_A(K) \end{aligned}$$

Como colímites conmutan con colímites, se concluye del isomorfismo entre $\mathcal{X}$ y $\mathsf{colím}(\mathcal{X}_- \downarrow \mathcal{X}, \mathcal{X}_- \circ (\pi \downarrow \mathcal{X}))$, que el conjunto subyacente del espacio topológico $\mathcal{X}^e$ se puede identificar con el colímite de la gráfica:

$$\begin{aligned} \mathsf{Campo} &\longrightarrow \mathsf{Con} \\ K &\longmapsto \mathcal{X}(K) \end{aligned}$$

En otras palabras, se tiene una biyección:

$$\mathcal{X}^e \cong \left(\coprod_{K \in \mathsf{Campo}} \mathcal{X}(K) \right) / \sim$$

donde $\sim$ es la relación de equivalencia más pequeña que identifica a $u \in \mathcal{X}(K)$ con $u' \in \mathcal{X}(K')$, si existe una extensión de campos $K \overset{\varphi}{\hookrightarrow} K'$ tal que $\mathcal{X}(\varphi)(u) = u'$.

Denotamos al cociente como:

$$\coprod_{K \in \mathsf{Campo}} \mathcal{X}(K) \xrightarrow{\pi_{\mathcal{X}}} \mathcal{X}^e$$

La topología de $\mathcal{X}^e$*:*

Si U es un subconjunto de $\mathcal{X}^e$, denotamos como $\mathcal{X}|_U$ al subespacio prealgebraico de $\mathcal{X}$ definido en un anillo A como:

$$\mathcal{X}|_U(A) := \left\{ a \in \mathcal{X}(A) \;\middle|\; \forall A \overset{\varphi}{\to} K \text{ con } K \text{ campo, } \pi_{\mathcal{X}}\big(\mathcal{X}(\varphi)(a)\big) \in U \right\}$$

Recíprocamente, si $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ es un subespacio prealgebraico, denotamos como $U_{\mathcal{Y}}$ al suconjunto de $\mathcal{X}^e$ definido como $\pi\left(\coprod_K \mathcal{Y}(K) \right)$.

Puede verse fácilmente que estas asignaciones $\mathrm{U} \mapsto \mathcal{X}|_{\mathrm{U}}$ y $\mathcal{Y} \mapsto \mathrm{U}_{\mathcal{Y}}$, determinan una adjunción de conjuntos ordenados, con $\mathcal{X}|_{\_}$ fiel y pleno:

$$\begin{tikzcd} \mathsf{sub}_{\mathsf{Con}}(\mathcal{X}^e) \arrow[r, hook, "\mathcal{X}|_{\_}"'] \arrow[r, phantom, shift left=2, "\perp"] & \mathsf{sub}_{\mathsf{EspAlg}_{\mathsf{Zar}}}(\mathcal{X}) \arrow[l, bend right, "\mathrm{U}_{\_}"'] \end{tikzcd} \tag{62}$$

Más aún,

Proposición 2.11. *La adjunción (62) de arriba determina una equivalencia entre el conjunto ordenado de subconjuntos abiertos de $\mathcal{X}^e$ y el conjunto ordenado de subespacios abiertos de $\mathcal{X}$.*

Demostración. Basta probar las siguientes dos condiciones:

(i) $\mathrm{U} \subseteq \mathcal{X}^e$ es un subconjunto abierto si y sólo si $\mathcal{X}|_{\mathrm{U}} \subseteq \mathcal{X}$ es un subespacio abierto.

(ii) Si $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ es un subespacio abierto, entonces $\mathcal{X}|_{\mathrm{U}_{\mathcal{Y}}} = \mathcal{Y}$.

Prueba de (i):

Sea U un subconjunto de $\mathcal{X}^e$. Por definición, el subespacio $\mathcal{X}|_{\mathrm{U}}$ es un subespacio abierto de $\mathcal{X}$ si y sólo si, para cualquier anillo A y todo morfismo $\mathcal{X}_{\mathsf{A}} \xrightarrow{u} \mathcal{X}$, existe un ideal $\mathfrak{a}$ de A y un cuadrado cartesiano:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X}_{\mathfrak{a}} \arrow[r] \arrow[d, hook, "\nu_{\mathfrak{a}}"'] & \mathcal{X}|_{\mathrm{U}} \arrow[d, hook] \\ \mathcal{X}_{\mathsf{A}} \arrow[r, "u"'] & \mathcal{X} \end{tikzcd}$$

Ya que para todo anillo B, el conjunto de puntos B-racionales del producto fibrado $u^*(\mathcal{X}|_{\mathrm{U}})$ se puede identificar con el conjunto de los morfismos $\mathsf{Spec}(\mathsf{B}) \xrightarrow{f} \mathsf{Spec}(\mathsf{A})$, que se fractorizan como en el diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}(\mathsf{B}) \arrow[r, "f^e"] \arrow[dr, dashed] & \mathrm{Spec}(\mathsf{A}) \\ & (s_{\mathsf{A}}(u)^e)^{-1}\mathrm{U} \arrow[u, phantom, "\cup" rotate=90] \end{tikzcd}$$

se sigue que $\mathcal{X}|_{\mathrm{U}}$ es un subespacio abierto de $\mathcal{X}$ si y sólo si, para cualquier anillo A y todo morfismo $\mathcal{X}_{\mathsf{A}} \xrightarrow{u} \mathcal{X}$, $(s_{\mathsf{A}}(u)^e)^{-1}\mathrm{U}$ es un subconjunto abierto de Spec(A), es decir, $(s_{\mathsf{A}}(u)^e)^{-1}\mathrm{U} = \mathrm{U}(\mathfrak{a})$ para algún ideal $\mathfrak{a}$ de A.

Concluimos de la definición de la topología de $\mathcal{X}^e$, que $\mathcal{X}|_{\mathrm{U}}$ es un subespacio abierto de $\mathcal{X}$ si y sólo si U es un abierto de $\mathcal{X}^e$.

Prueba de (ii):

Notemos primero que en general, si $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ es un subespacio, entonces $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}|_{\mathrm{U}_{\mathcal{Y}}}$. Por otro lado, del Lema de Yoneda se puede ver que para todo anillo A,

$$\mathcal{X}|_{\mathrm{U}_{\mathcal{Y}}}(\mathsf{A}) \cong \left\{ \mathcal{X}_{\mathsf{A}} \xrightarrow{u} \mathcal{X} \;\middle|\; \forall \mathsf{K} \text{ campo } u_{\mathsf{K}}^{-1}(\mathcal{Y}(\mathsf{K})) = \mathcal{X}_{\mathsf{A}}(\mathsf{K}) \right\}$$

para todo anillo A, por lo que para probar lo deseado basta ver que si $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ es un subespacio abierto entonces, para todo morfismo $\mathcal{X}_A \xrightarrow{u} \mathcal{X}$ en $\mathcal{X}|_{U_\mathcal{Y}}(A)$, se tiene que $u_B^{-1}(\mathcal{Y}(B)) = \mathcal{X}_A(B)$ para todo anillo B.

Esto se sigue fácilmente de que si $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$ es un subespacio abierto, para todo morfismo $\mathcal{X}_A \xrightarrow{u} \mathcal{X}$ existe un ideal $\mathfrak{a}_u$ de A, con la propiedad que $u_B^{-1}(\mathcal{Y}(B)) = \mathcal{X}_{\mathfrak{a}_u}(B)$ para todo anillo B. En efecto, si $\mathcal{X}_A \xrightarrow{u} \mathcal{X}$ es un morfismo en $\mathcal{X}|_{U_\mathcal{Y}}(A)$, se tiene que $u_K^{-1}(\mathcal{Y}(K)) = \mathcal{X}_A(K)$ y $u_K^{-1}(\mathcal{Y}(K)) = \mathcal{X}_{\mathfrak{a}_u}(K)$ para todo campo K, es decir, $\mathcal{X}_{\mathfrak{a}_u}(K) = \mathcal{X}_A(K)$ para todo campo K. Concluimos que $U(\mathfrak{a}_u) = A$, por lo que $u_B^{-1}(\mathcal{Y}(B)) = \mathcal{X}_A(B)$ para todo anillo B. ✠

La gavilla $\mathcal{X}^g$:

La siguiente Proposición da una descripción de la gavilla $\mathcal{X}^g$:

PROPOSICIÓN 2.12. *La gavilla $\mathcal{X}^g$ es canónicamente isomorfa a:*

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{Ab}\big(\mathcal{X}^e\big) & \longrightarrow & \mathsf{Anillo}^{op} = \mathsf{Afín} \\ U & \longmapsto & \mathcal{O}_{\mathcal{X}|_U} = \mathsf{EspAlg}_{Zar}\big(\,\mathcal{X}|_U\,,\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}\big) \end{array}$$

DEMOSTRACIÓN. Por definición $\mathcal{X}^g$ es la gavilla asociada a la pregavilla $U \mapsto \widetilde{\mathcal{X}}^g(U)$, donde $\widetilde{\mathcal{X}}^g(U)$ es igual al colímite:

$$\mathsf{colím}\left(\begin{array}{ccc} \mathcal{X}_-\downarrow\mathcal{X} & \longrightarrow & \mathsf{Anillo}^{op}=\mathsf{Afín} \\ (A,u) & \longmapsto & \mathcal{O}_A\Big(\big(s_\wedge(u)^e\big)^{-1}U\Big)=s_\wedge(u)^e_*\mathcal{O}_A(U) \end{array}\right)$$

Para mostrar lo deseado basta probar entonces los siguientes enunciados:

(i) El anillo $\widetilde{\mathcal{X}}^g(U)$ es isomorfo a $\mathsf{EspAlg}_{Zar}(\,\mathcal{X}|_U\,,\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}) = \mathcal{O}_{\mathcal{X}|_U}$ para todo abierto U de $\mathcal{X}^e$.

(ii) La pregavilla $U \mapsto \mathsf{EspAlg}_{Zar}(\,\mathcal{X}|_U\,,\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}) = \mathcal{O}_{\mathcal{X}|_U}$ es una gavilla.

Prueba de (i):

Sea U un abierto de $\mathcal{X}^e$. Para mostrar lo deseado notemos primero que como se tiene un diagrama:

$$\begin{tikzcd} & \mathsf{Scm} \arrow[dl, bend right, "\mathcal{O}(\cdot)"'] \arrow[d, "s^\wedge"] \arrow[dl, phantom, "\cong"] \\ \mathsf{Afín} & \mathsf{EspAlg}_{Zar} \arrow[l, "\mathcal{O}_-"] \end{tikzcd}$$

para todo objeto (A,u) en $\mathcal{X}_- \downarrow \mathcal{X}$, se tiene un isomorfismo:

$$\mathcal{O}_A\Big(\big(s_\wedge(u)^e\big)^{-1}U\Big) \cong \mathsf{EspAlg}_{Zar}\Big(\,\mathcal{X}_A|_{(s_\wedge(u)^e)^{-1}U}\,,\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}\Big)$$

Por lo tanto, el anillo $\widetilde{X}^g(U)$ es isomorfo al colímite:

$$\operatorname{colím}\begin{pmatrix} \mathcal{X}_{-}\downarrow\mathcal{X} \longrightarrow \mathsf{Anillo}^{op}{=}\mathsf{Afín} \\ (A,u) \longmapsto \mathsf{EspAlg}_{Zar}\Big(\mathcal{X}_A|_{(s_\wedge(u)^c)^{-1}U}, \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}\Big) \end{pmatrix}$$

Por otro lado, como el funtor $\mathcal{O}_{-} = \mathsf{EspAlg}_{Zar}(-, \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}})$ conmuta con colímites viendolo como un funtor de EspAlg_{Zar} en $\mathsf{Afín}$, y el colímite:

$$\operatorname{colím}\begin{pmatrix} \mathcal{X}_{-}\downarrow\mathcal{X} \longrightarrow \mathsf{EspAlg}_{Zar} \\ (A,u) \longmapsto \mathcal{X}_A|_{(s_\wedge(u)^c)^{-1}U} \end{pmatrix}$$

es canónicamente isomorfo a $\mathcal{X}|_U$, se concluye que $\widetilde{\mathcal{X}}^g(U)$ es isomorfo al anillo $\mathcal{O}_{\mathcal{X}|_U} = \mathsf{EspAlg}_{Zar}(\mathcal{X}|_U, \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}})$.

Prueba de (ii):

Esta afirmación puede ser reducida al siguiente:

LEMA 2.13. *Si $\mathcal{X}$ es una gavilla de Zariski, para todo anillo A, la pregavilla:*

$$\begin{aligned} \mathsf{Ab}\big(\operatorname{Spec}(A)\big)^{op} &\longrightarrow \mathsf{Con} \\ U &\longmapsto \mathsf{EspAlg}_{Zar}\big(\mathcal{X}_A|_U, \mathcal{X}\big) \end{aligned}$$

es una gavila de conjuntos.

DEMOSTRACIÓN. Debemos probar que para todo abierto $U(\mathfrak{a})$ de $\operatorname{Spec}(A)$ y toda cubierta $\{U(\mathfrak{a}_i)\}_i$ de $U(\mathfrak{a})$, la siguiente sucesión es exacta:

$$\mathsf{Sh}_{Zar}\big(\mathcal{X}_{\mathfrak{a}}, \mathcal{X}\big) \longrightarrow \prod_i \mathsf{Sh}_{Zar}\big(\mathcal{X}_{\mathfrak{a}_i}, \mathcal{X}\big) \rightrightarrows \prod_{i,j} \mathsf{Sh}_{Zar}\big(\mathcal{X}_{\mathfrak{a}_i\mathfrak{a}_j}, \mathcal{X}\big) \tag{63}$$

Como los abiertos de la forma $U(f)$ para $f \in A$ constituyen una base para la topología de $\operatorname{Spec}(A)$, basta probar que la sucesión (63) de arriba es exacta cuando $\mathfrak{a}_i = \langle f_i \rangle$, es decir, basta probar que si $\mathfrak{a}$ es un ideal de A y $\langle f_i \rangle_i = \mathfrak{a}$, entonces

$$\mathsf{Sh}_{Zar}\big(\mathcal{X}_{\mathfrak{a}}, \mathcal{X}\big) \longrightarrow \prod_i \mathsf{Sh}_{Zar}\big(\mathcal{X}_{A_{f_i}}, \mathcal{X}\big) \rightrightarrows \prod_{i,j} \mathsf{Sh}_{Zar}\big(\mathcal{X}_{A_{f_if_j}}, \mathcal{X}\big)$$

es exacta.

Para probar esto, notemos primero que el isomorfismo canónico:

$$\mathcal{X}_{\mathfrak{a}} \cong \operatorname{colím}\begin{pmatrix} \mathcal{X}_{-}\downarrow\mathcal{X} \longrightarrow \mathsf{EspPAlg} \\ (B,u) \longmapsto \mathcal{X}_B \end{pmatrix}$$

induce un isomorfismo:

$$\mathcal{X}_{A_f} \cong \operatorname{colím}\begin{pmatrix} \mathcal{X}_{-}\downarrow\mathcal{X} \longrightarrow \mathsf{EspPAlg} \\ (B,u) \longmapsto \mathcal{X}_{B_{u(f)}} \end{pmatrix}$$

para todo f en $\mathfrak{a}$.

Se sigue entonces de que $\mathsf{Sh}_{\mathrm{Zar}}(-,\mathcal{X})$ conmuta con límites como un funtor de $\mathsf{Sh}_{\mathrm{Zar}}^{\mathrm{op}}$ en Con y de que límites conmutan con límites, que basta probar que para todo objeto (B,u) en $\mathcal{X}_- \downarrow \mathcal{X}_{\mathfrak{a}}$, la sucesión:

$$\mathcal{X}(\mathsf{B}) \longrightarrow \prod_i \mathcal{X}(\mathsf{B}_{\mathsf{u}(f_i)}) \rightrightarrows \prod_i \mathcal{X}(\mathsf{B}_{\mathsf{u}(f_i f_j)})$$

es exacta.

Pero esto es cierto ya que el morfismo $\mathsf{A} \xrightarrow{\mathsf{u}} \mathsf{B}$ cumple que $\mathsf{B} = \mathsf{B}\mathsf{u}(\mathsf{A}) = \sum_i \mathsf{B}\mathsf{u}(f_i)$, es decir, $\{\mathsf{B}_{\mathsf{u}(f_i)} \leftarrow \mathsf{B}\}_i$ es una cubierta de Zariski de B y $\mathcal{X}$ es una gavilla de Zariski. ✠

✠

De la descripción del funtor $s_\wedge$ dada arriba, se sigue que una cubierta afín $\{\mathcal{X}_{\mathsf{A}_i} \to \mathcal{X}\}_i$ de un espacio prealgebraico $\mathcal{X}$, determina una cubierta afín $\{\mathsf{Spec}\,(\mathsf{A}_i) \to s_\wedge(\mathcal{X})\}_i$ del espacio localmente anillado $s_\wedge(\mathcal{X})$. En otras palabras, se tiene un diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathsf{Scm} \\
\mathsf{Afín} \arrow[ur, "\mathsf{Spec}(-)"] \arrow[r, hook, "\mathcal{X}_-"'] \arrow[ur, phantom, shift right=3, "\cong"] & \mathsf{EspAlg}_{\mathrm{Zar}} \arrow[u, "s_\wedge|"']
\end{tikzcd}$$

Más áun,

TEOREMA 2.14. *La adjunción:*

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Scm} \arrow[r, hook, "s^\wedge|"'] \arrow[r, phantom, shift left=2, "\perp"] & \mathsf{EspAlg}_{\mathrm{Zar}} \arrow[l, bend right=60, "s_\wedge|"']
\end{tikzcd}$$

es una equivalencia de categorías, entre la categoría de esquemas y la categoría de espacio algebraicos de Zariski.

DEMOSTRACIÓN. Basta ver que si $\mathcal{X}$ es un espacio prealgebraico con una cubierta afín $\{\mathcal{X}_{\mathsf{A}_i} \to \mathcal{X}\}_i$, la unidad de la adjunción $s_\wedge \dashv s^\wedge$ en $\mathcal{X}$:

$$\mathcal{X} \xrightarrow{\eta_{\mathcal{X}}} s^\wedge \circ s_\wedge(\mathcal{X})$$

es un isomorfismo de espacios prealgebraicos.

Para ello notemos que si identificamos al dominio de la inmersión abierta $\mathcal{X}_{\mathsf{A}_i} \to \mathcal{X}$ con su imagen, el morfismo de espacios prealgebraicos $\eta_{\mathcal{X}}|_{\mathcal{X}_{\mathsf{A}_i}}$ es un isomorfismo sobre $s^{\wedge} \circ s_{\wedge}(\mathcal{X}_{A_i})$, pues $\eta_{\mathcal{X}_{A_i}}$ es un isomorfismo:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{X} \arrow[r, "\eta_{\mathcal{X}}"] & s^{\wedge} \circ s_{\wedge}(\mathcal{X}) \\
\mathcal{X}_{A_i} \arrow[u, hook] \arrow[r, "\cong", "\eta_{\mathcal{X}_{A_i}}"'] & s^{\wedge} \circ s_{\wedge}(\mathcal{X}_{A_i}) \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

Un inverso de $\eta_{\mathcal{X}}$ puede ser construido entonces utilizando el Lema 2.13 de la página 146. ✠

Bibliografía

[AGV70] M. Artin, A. Grothendieck, and J. L. Verdier, *SGA4-1; Theorie des Topos, Exposés I à IV*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 269, Springer Verlag, 1970, http://modular.fas.harvard.edu/scans/anonymous_scanner/.

[Bor94] F. Borceux, *Basic category theory*, Handbook of Categorical Algebra 1, vol. 50, Cambridge University Press, 1994.

[DHK] W. Dwyer, P. Hirschhorn, and D. Kan, *Model categories and more general abstract homotopy theory: The next generation*, http://www-math.mit.edu/~psh/.

[DI] D. Dugger and C. Isaksen, *Hypercovers in topology*, http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0528/.

[Eis95] D. Eisenbud, *Commutative algebra*, Springer-Verlag, 1995.

[GZ67] P. Gabriel and M. Zisman, *Calculus of fractions and homotopy theory*, Springer-Verlag, New York, 1967.

[Har77] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Springer-Verlag, New York, 1977.

[Mil57] John Milnor, *The geometric realization of a semi-simplicial complex*, Annals of Mathematics **65** (1957), no. 2, 357–362.

[MLM94] Saunders Mac Lane and Ieke Moerdijk, *Sheaves in geometry and logic*, Springer-Verlag, New York, 1994.

[Qui75] D. Quillen, *Higher algebraic* k-*theory*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Vancouver, B. C., 1974) **1** (1975), 171–176.