UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ALGUNAS CONSECUENCIAS DE ACTUAR PROPIAMENTE. *Variedades Riemannianas de Cohomogeneidad Uno.*

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

PEDRO ANTONIO RICARDO MARTIN SOLORZANO MANCERA

DIRECTOR DE TESIS: DOCTOR OSCAR ALFREDO PALMAS VELASCO

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

2004

VNIVERSIDAD NACIONAL AVENMA DE MEXICO

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.
NOMBRE: Pedro Antonio Ricardo Martín Solórzano Mancera
FECHA: 7 de julio de 2009
FIRMA:

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

ALGUNAS CONSECUENCIAS DE ACTUAR PROPIAMENTE.

Variedades Riemannianas de Cohomogeneidad Uno.

realizado por **Pedro Antonio Ricardo Martín Solórzano Mancera**

con número de cuenta **4-0104778-3** , quien cubrió los créditos de la carrera de: **MATEMÁTICAS**

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	**Doctor Óscar Alfredo Palmas Velasco**
Propietario	**Maestro en Ciencias José Antonio Gómez Ortega**
Propietario	**Doctor Alberto León Kushner Schnur** Alberto León Kushner
Suplente	**Doctora María de la Paz Álvarez Scherer**
Suplente	**Doctor Santiago López de Medrano Sánchez**

Consejo Departamental de MATEMÁTICAS

M. en C. Alejandro Bravo Mojica

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL DE MATEMATICAS

Algunas Consecuencias de Actuar Propiamente.

Variedades Riemannianas de Cohomogeneidad Uno.

Pedro Antonio Ricardo Martín Solórzano Mancera

A mi madre.

Porque siempre le deberé a
ella todo lo que soy y seré.

A mi padre.

Porque mucho me ha enseñado de la
vida; por su gusto por ella.

A María Elena.

Por todo el amor y
por ser mi sueño de vida.

Agradecimientos

A lo largo del camino uno se encuentra siempre rodeado de gente. Toda, para bien o para mal, es determinante de lo que somos, de lo que hacemos. Eso es causa suficiente de mi eterno agradecimiento.

En primerísimo lugar están mis padres; pues ¡qué es uno sin ellos? A mi madre, porque su infinito amor hacia mí la hace tolerarme, aceptarme y, por sobre todo apoyarme en todo lo que hago. ¡Sabe que mi amor es recíproco! A mi padre por enseñarme la naturaleza, por ser mi primer maestro de matemáticas.

A los Ricardo Mancera, mi abuelo y mi tío. A mi abuelo, mi *Grandpa*, por ser como es de excepcional; por que siempre me está enseñando cómo se debe vivir; porque siempre ha estado a mi lado, ya como amigo, ya como guía. A mi tío, porque ha sido mi ángel de la guarda, mi hermano, mi amigo y mi consejero. Por siempre esta mirando por mí, genuinamente preocupado.

A mi abuelo Antonio, ese gran señor de tan grande corazón; por invitarme a soñar. Donde quiera que esté, aquí en mi corazón vivirá para siempre.
A mi *Nanny*, porque siempre ha sido su figura la que me ha dado forma; porque sus enseñanzas y su amor aún nos rodean como una luz que nunca palidecerá.
A mi abuelita Esperanza, que también de ella llevo forma y figura.
A mi familia toda. Porque es por ellos por lo que puede decir que soy.

A mis amigos de la infancia. A Diego Edwards. Porque incondicionalmente me muestra su cariño. A todos aquellos que quedaron en el pasado, pero que no por

eso no dejaron huella en mi.

A todos los profesores que, algunos tácitamente, me fomentaron el gusto por las matemáticas. Sin quienes yo no andaría hoy en esta senda de felicidad. ¡Gracias por mostrarme un poquito la belleza de la Matemática!

Al profesor Alfonso Pérez Márquez.

Al profesor José Luis Flores Rodríguez.

Ambos maravillosos entusiastas. En particular al Profesor Flores, por se mi última guía para llegar a la carrera.

A María de la Paz Álvarez Scherer, por acogerme y por iniciarme en el maravilloso rito de la docencia, sin la cual mi formación hubiera estado terriblemente incompleta. A Francisco Marmolejo, por lo mucho que siempre nos enseña, en clase y fuera de ella; por ser un buen amigo. A Óscar Palmas, porque quiso caminar conmigo en la realización de este trabajo, aguantándome, guiándome; por tener fe en mí. A León Kushner, por siempre preocuparse por sus alumnos, por nosotros. A Toño Gómez, por entusiasmarme en esto de las matemáticas (¿Cómo le habrá hecho para convencerme de llevar TRES cursos de Variable Compleja?) A Santiago López de Medrano, quien su solo nombre nos mueve a todos en esta carrera. Gracias por tener fe en mí aun cuando casi ni nos tratamos.

A todos ustedes que, como mis sinodales, me apoyaron como nunca lo soñé.

A profesores como Pilar Martínez, Antonio Lacurain, Max Neumann, etc. A todos mis profesores: ¡Gracias también por guiarme!

A quienes han sido mis alumnos: porque enseñar es toda una aventura. A la UNAM y a la Facultad de Ciencias, por permitirme realizar este sueño.

A mis amigos de ahora. Francisco Barrios, por ser ese misterioso ente que está dispuesto a acompañarte hasta el final del camino, si tan solo sabes cómo caminar con él. Pedro Valencia porque sé que siempre ha estado ahí para escucharme y ayudarme con mis dudas. Ah, claro y porque no creo que yo pueda soportar ahora la vida sin discutir con él. Omar Antolín, un gran motivador y un gran amigo, porque siempre he podido contar con él y porque es toda una experiencia conocerlo (o intentarlo); bueno, y también por aguantarme en mis obsesiones. A Juan Manuel Gómez, porque desde que nos conocimos (¡Y vaya forma de hacerlo!) se ha entregrado como un auténtico amigo, en su estilo propio. David Mireles, porque eres auténtico también. Por supuesto, Daniel Labardini, de quien también he aprendido mucho; sé que lo seguiré haciendo.

De mis amigos de la prepa: Arcelia Jiménez, por haberme ayudado a soñar; por ser una gran amiga. Mónica Minjares, Jorge Hernández, Javier García Sosa (por esas cuentas pendientes), etc.

A Juan Manuel Luelmo, por ser ese amigo incondicional que cualquiera soñaría tener; por la dicha que siempre me da saber que eres mi hermano y porque lo serás hasta el final de nuestras existencias. Porque juntos hemos crecido y porque me ha acompañado en todas mis experiencias de vida.

A todos quienes me he encontrado en este camino común en la Facultad de Ciencias. David García, Tere Campos, Alejandro Cruz Marcelo (porque sin saberlo en ocasiones me devolvió el entusiasmo), Luz Ariadna, Julio, Rocío Navarro, Miriam Núñez, Alvaro Martínez, Tere Ruiz, Mariano Zerón, María del Río, al buen Juan Antonio Yoshino, Melisa Gutiérrez. Y a todos a quienes no menciono.

A todos aquellos que me han ayudado y apoyado durnte la realización de esta tesis. Paulina Figueroa, por llevarme a rastras para iniciarme en el arte de LaTeXer. Rebeca de Buen por su eterno interés y preocupación porque las cosas me salgan. Pedro Valencia, por ayudarme con problemas y cuentas de la tesis. Omar Antolín, porque me ayudó a empezar. Paz, por acogerme en su cubículo. Daniel Labardini, porque siempre me ayudó y estuvo ahí para platicar. A quienes han aparecido como mágicamente. Antonio Hernández, por su apoyo. A todos quienes, consciente o inconscientemente, me apoyaron.

A la memoria de Ana Emilia Mendoza, mi mejor ejemplo de la bondad; ese otro ángel cuya misión en esta vida fue amar, en su más pura expresión. Amó la vida y nos enseñó a vivirla. Siempre será la vara con la que he de medir la calidad de mi vida.

Y, finalmente –mereciendo que cambie el estilo–, a ti María Elena. A ti, porque apareciste en mi vida, mágicamente; porque así, mágicamente, permaneciste en ella. Porque ahora me has dado tu vida, tu tiempo, tu comprensión y todo lo mejor de ti: tu amor. Gracias, por querer caminar junto a mí; por permitirme caminar juntos de la mano y por hacerme soñar con un mundo mejor. ¡Gracias, amor!

Gracias a todos, por hacerme ser quien soy.

Pedro.

Contenido

Prefacio

En este trabajo de tesis se realizó una exposición de la teoría de Grupos de Transformaciones. Como referencias generales de esta teoría están los libros de Bredon [Bre]; Kawakubo [Kaw]; y Palais[1] y Terng [PT2]. El objetivo de esta exposición fue entender los teoremas de caracterización de Kashani y Mirzaie [MK].

Es requisito previo temático para este trabajo un primer curso de Álgebra Lineal, Topología de Conjuntos, Teoría de Grupos, Análisis Matemático, Geometría Riemanniana y Topología Diferencial. Conocimientos previos de la teoría de Grupos de Lie también son necesarios; sin embargo en el capítulo uno se resumen los principales resultados de esta teoría. Asimismo, en ocasiones haremos observaciones y comentarios en el lenguaje de Teoría de Categorías; esto no tiene la mayor trascendencia en el objeto central de nuestro estudio.

Como es sabido, muchos de los resultados de estas disciplinas involucran, muchas veces también, tácitamente el Axioma de Elección. En este trabajo, inevitablemente, se hace uso, a discreción, de él.

Con el objeto de dar una exposición razonablemente clara, este trabajo se dividió de la siguiente manera.

En el capítulo 0, se enlistan algunas propiedades en la categoría de variedades diferenciables y se dan algunas definiciones que no son homogéneas en la literatura. También se define el *operador de forma*, herramienta que tendrá utilidad en el último capítulo. De igual modo, se expone brevemente la teoría de integración de

[1] [pa'le]

formas diferenciables sobre variedades.

Los capítulos 1 y 2, se exponen, en su mayoría sin demostración, aquellos resultados de la teoría de grupos topológicos, grupos de Lie, en el primero; y grupo fundamental y espacio cubrientes, en el segundo. Las referencias básicas para esta parte son los libros de: Pontrjagin [Pon] y Bredon [Bre] para grupos topológicos; Warner [War], Kobayashi y Nomizu [KN] para la teoría de grupos de Lie; Lima [Lim] y Forster [For] para lo referente a grupo fundamental y cubrientes.

Además de la exposición clásica, también se procura hacer mención de aquellos resultados que van encaminados a la teoría de grupos de transformaciones, así como también los que se requerirán para la exposición de los teoremas del último capítulo.

El capítulo 3 está totalmente dedicado al desarrollo de la teoría de grupos de transformaciones. Se hace un estudio razonablemente cuidadoso de los resultados generales. De igual forma se define un tipo particular de acción de grupos, las llamadas acciones *propias*, que son quienes dan título a este trabajo. Se da una caracterización muy agradable de éstas; todas aquellas acciones que sean propias y efectivas (como veremos, la hipótesis de efectividad no resta generalidad) son, en esencia, acciones mediante isometrías de la variedad sobre la que actúan, ésta última provista de una métrica riemanniana adecuada.

Para obtener la mayoría de los resultados de este capítulo, se necesitan dos grandes teoremas, el Teorema de la Rebanada y el Teorema de la Órbita Principal (POT). Estos nos muestran cómo son las acciones en términos de sus órbitas, geométrica y topológicamente.

Como parte de los requisitos para los teoremas de último capítulo, se desarrolla una noción que permite extender aquella de *homogeneidad* de un variedad diferenciable, la de *cohomogeneidad*; en términos no matemáticos, la medida de la turbidez de un espacio provisto de una acción. De hecho, los teoremas de la Rebanada y POT, no dicen que los espacios siguen siendo bastante homogéneos (en un sentido más general).

Así, desarrollamos varias propiedades particulares para el caso en que se tiene cohomogeneidad uno.

El capítulo 4 y último consta de dos partes. El la primera se desarrollan y mencionan resultados de caracterización de variedades con la condición adicional de tener curvatura cero. También se exponen algunos resultados que entrelazan esta condición y la teoría ya desarrollada de acciones de grupos. En la segunda parte se da una caracterización topológica de aquellas variedades planas que admiten una acción de cohomogeneidad uno. Estos son los teoremas de Kashani y Mirzaie, uno de los objetivos de este trabajo.

Para la clara localización de temas en este trabajo se incluyen la tabla de contenido y un índice alfabético en la parte final; este último, más bien como semblanza general.

Además, citando a Sir Isaac Newton, "Standing on the shoulders of giants", uno no hace mucho sin el trabajo de los que ya llevan el camino andado. Por eso, al final se incluye la lista de todos aquellos trabajos que, directa o indirectamente, sustentan éste.

En lo referente a la escritura de este trabajo, es pertinente hacer unos comentarios.

Como es común en el lenguaje matemático, en este trabajo aparece bastante la frase "si y solo si". Su escritura está basada en la regla establecida por la Real Academia Española:

> La palabra solo puede ser un adjetivo: *No me gusta el café solo*; *Vive él solo en esa gran mansión*; o un adverbio: *Solo nos llovió dos días*; *Contesta solo sí o no*. Se trata de una palabra llana terminada en vocal, por lo que, según las reglas generales de acentuación, no debe llevar tilde. Ahora bien, cuando esta palabra pueda interpretarse en un mismo enunciado como adverbio o como adjetivo, de modo que el sentido sea ambiguo, se utilizará obligatoriamente la tilde en el uso

adverbial: *Estaré solo un mes* (al no llevar tilde, solo se interpreta como adjetivo: 'en soledad, sin compañía'); *Estaré sólo un mes* (al llevar tilde, sólo se interpreta como adverbio: 'solamente, únicamente').

De igual modo, cuando se juzgue pertinente hacer alguna aclaración, o bien gramatical, o bien fonética, ésta aparecerá al pie de la página.

La numeración de los teoremas, definiciones, etc. en este trabajo, es continua dentro de cada capítulo; es decir que existe, por ejemplo, un único elemento con el número 3.16, donde el '3' representa el capítulo y el '16' su numeración dentro de dicho capítulo. Por esto, cuando se hace referencia a algún elemento en el texto, solo se menciona dicho número, por ejemplo "De acuerdo a 3.32, tomemos...".

Finalmente, hay que decir que este trabajo se escribió en AMS-LaTeX, a través de MiKTeX. Además, se usó el paquete XY-pic, para los diagramas conmutativos.

Personalmente el autor se disculpa por cualquier error tipográfico y/o sintáctico, puesto que la versión final del trabajo es responsabilidad completamente suya.

Pedro Antonio Ricardo Martín Solórzano Mancera
Ciudad de México, 4 de julio de 2004.

Capítulo 0

Variedades Diferenciables

A lo largo de este trabajo, nuestros objetos de estudio son las variedades diferenciables. En este capítulo recordamos algunas nociones, así como algunas situaciones, que nos serán de utilidad.

En esencia, vamos a suponer sabido un primer curso de Teoría de Variedades Diferenciables y Riemannianas, siguiendo los libros de do Carmo [dCa] y Warner [War] y el primer capítulo del libro de Kobayashi y Nomizu[KN].

0.1. Algunas Definiciones

A continuación, daremos algunas definiciones y recordaremos algunas propiedades.

0.1 Definición. A un morfismo $f : M \to N$ en la categoría de variedades diferenciable lo llamaremos como sigue:

1. *función* si $N = \mathbb{R}$;

2. *curva* si $M \subseteq \mathbb{R}$; o

3. *transformación* en cualquier otro caso.

0.2 Notación. *Sea M una variedad diferenciable. Denotaremos a ciertos conjuntos distingidos, asociados a M, como sigue:*

1. $C^\infty(M,N) = \{f : M \to N \; diferenciable\}$;

2. $C^\infty(M) = \{f : M \to \mathbb{R} \; diferenciable\}$;

3. $\mathfrak{X}(U)$ *es el conjunto de los campos vectoriales diferenciables sobre $U \subset M$ arbitrario.*

4. $T_{(r,s)}U$ *es el haz de los tensores de tipo (r,s) sobre $U \subseteq M$.*

5. $\Lambda_k^* U$ *el haz k–exterior sobre $U \subseteq M$.*

6. $\Lambda^* U = \sum \Lambda_k^* U$ *al haz del álgebra exterior sobre $U \subseteq M$.*

7. $E^k(U)$ *es el conjunto de las k–formas diferenciables sobre $U \subset M$.*

8. $E^*(U)$ *es el conjunto de las formas diferenciables sobre $U \subset M$.*

0.3 Observación. Dada $f \in C^\infty(M,N)$ se induce una transformación $\delta : E^*(N) \to E^*(M)$, que preserva el tipo.

0.4 Definición. Sean N y M variedades diferenciables. Diremos que $f : N \to M$, con $f \in C^\infty(N,M)$, es

1. una *inmersión* si $d_p f$ es inyectiva.

2. un *encaje* si f es una inmersión y un homeomorfismo sobre su imagen.

Respectivamente diremos que M es

1. una *variedad inmersa* si, tanto f, como $d_p f$, son inyectivas.

2. una *subvariedad* si f es un encaje.

0.5 Observación. Si N es una variedad inmersa, entonces la dimensión de N es necesariamente menor o igual que la de M. Toda subvariedad es variedad inmersa. Si N es una subvariedad, identificaremos a N con $f(N)$.

0.6 Definición. Si N es una subvariedad de M, definimos la *codimensión de N en M* como el número $\dim N - \dim M$. Lo denotaremos por $\operatorname{codim}_M N$.

0.7 Definición. Una *conexión afín* ∇ en una variedad diferenciable M es una transformación $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ que se indica por $(X,Y) \mapsto \nabla_X Y$, que cumple

1. $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$
2. $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
3. $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$ con $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ y $f, g \in C^\infty(M)$

Escribiendo $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}$ en términos de $\{\frac{\partial}{\partial x_k}\}$ obtenemos $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}$. A los coeficientes Γ_{ij}^k se les conoce como *símbolos de Christoffel* de la conexión.

0.8 Definición. Decimos que $Y \in \mathfrak{X}(M)$ es *paralelo* si

$$\nabla_X Y = 0$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

0.9 Definición. Una variedad diferenciable es *riemanniana* si está provista de un campo tensorial $\mathbf{g}$ de tipo $(0,2)$, simétrico y positivo definido. También se le denotará por $\mathbf{g}_p(X,Y) = \langle X, Y\rangle_p$

De acuerdo a un terema de Levi-Cività, tenemos que existe una conexión afín que cumple

1. $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$; y (simetría)
2. $X(\mathbf{g}(Y,Z)) = \mathbf{g}(\nabla_X Y, Z) + \mathbf{g}(Y, \nabla_X Z)$. (compatibilidad)

Más adelante necesitaremos el siguiente lema técnico.

0.10 Lema. *Sea $p \in M$, $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que x_t es su flujo. $x_t(p) = p \; \forall t \Leftrightarrow X(p) = 0$*

Demostración. La parte $(\Rightarrow)$ es inmediata. Para ver $(\Leftarrow)$, tomemos la curva x_p. Entonces, como $X(p) = X(x_p(0)) = x_p'(0)$. Por la unicidad del flujo, x_p coincide con la curva constante. ∎

0.2. Operadores de Forma

Sea $f : N \to M$ inmersión inyectiva, M riemanniana y sea ν un campo vector normal a $f(N)$ en una vecindad tal que f sea un encaje. Para simplificar identificaremos $f(N)$ con N.

A cualquier vector $v \in T_pM$, con $p \in N$ lo podemos descomponer en $v = v^T + v^\perp$, sus componentes tangencial y normal respecto a $T_pM = T_pN \oplus T_p^\perp N$

Sea ∇' la conexión riemanniana de M. Tenemos que para $X, Y \in \mathfrak{X}(N)$ si tomamos extensiones locales $X', Y' \in \mathfrak{X}(M)$ tenemos que

$$\nabla_X Y = (\nabla'_{X'} Y')^T$$

Denotando por $\mathfrak{X}^\perp(N)$ a los campos normales sobre N en M.

0.11 Proposición. *La transformación $B : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \to \mathfrak{X}^\perp(U)$ dada por*

$$B(X, Y) = \nabla'_{X'} Y' - \nabla_X Y$$

es bilinear y simétrica.

Demostración. Está bien definida pues si X_1 es otra extensión de X,

$$\nabla'_{X'} Y' - \nabla_X Y - \nabla'_{X_1} Y' - \nabla_X Y = \nabla'_{X' - X_1} Y' = 0$$

pues X' y X_1 coinciden en N. Similarmente para las extensiones de Y. Para verificar la bilinealidad, solo resta verificar $B(X, fY) = fB(X,Y)$:

$$\begin{aligned} B(X, fY) &= f'\nabla'_{X'}Y' - f\nabla_X Y + X'(f')Y' - X(f)Y \\ &= f'\nabla'_{X'}Y' - f\nabla_X Y = fB(X,Y) \end{aligned}$$

pues en N, $f = f'$ y $X'(f') = X(f)$ con f' una extensión local de f. Para ver que es simétrica, usemos la simetría de la conexión riemanniana:

$$B(X,Y) = \nabla'_{X'}Y' - \nabla_X Y = \nabla'_{Y'}X' - \nabla_Y X + [X', Y'] - [X,Y] = B(Y,X)$$

pues $[X,Y] = [X', Y']$ en N. ■

0.12 Definición. Tomando $\nu \in T_p^\perp N$ tenemos

$$II_\nu(X) = \mathrm{g}(B(X,X), \nu)$$

llamada *segunda forma fundamental de f en p para el vector normal ν*. Asociada a esta forma cuadrática bilinear y simétrica, tenemos un operador auto-adjunto $S_\nu : T_pN \to T_pN$ determinado por

$$\mathrm{g}(S_\nu(X), Y) = \mathrm{g}(B(X,Y), \nu)$$

al que llamaremos *operador de forma*.

0.13 Proposición. *El operador de forma está relacionado con la conexión de la siguiente manera.*

$$S_\nu(X) = -(\nabla'_X \nu')^T$$

con ν' una extensión local normal de ν.

Demostración.

$$\begin{aligned} \mathrm{g}(S_\nu(X), Y) &= \mathrm{g}(B(X,Y), \nu') = \mathrm{g}(\nabla'_{X'}Y' - \nabla_X Y, \nu') \\ &= \mathrm{g}(\nabla'_{X'}Y', \nu') = -\mathrm{g}(Y', \nabla'_{X'}\nu') = \mathrm{g}(-\nabla'_X \nu', Y) \end{aligned}$$

■

0.14 Definición. Asociada al operador auto-adjunto S_ν existe una base ortonormal de T_pN, compuesta de vectores propios, quienes son llamados *direcciones principales de f*. Los valores propios respectivos son llamados *curvaturas principales de f*.

0.3. Integración

Si $r_1, \ldots, r_n$ son las funciones coordenadas de $\mathbb{R}^n$, entonces la n–forma $dr_1 \wedge \ldots \wedge dr_n$ determina la orientación estándar de $\mathbb{R}^n$. Cualquier n–forma ω tendrá la expresión

$$f dr_1 \wedge \ldots \wedge dr_n$$

con $f \in C^\infty(M)$. Así, podemos dar la siguiente

0.15 Definición. Sea ω una n–forma sobre $A \subseteq \mathbb{R}^n$ definimos la integral de ω sobre A como

$$\int_A \omega = \int_A f$$

siempre que ésta última exista.

0.16 Observación. En este contexto, podemos expresar la fórmula de cambio de variable, dado un difeomorfismo φ, como

$$\int_{f(A)} \omega = \pm \int_A \delta\varphi(\omega)$$

donde el signo lo determina el hecho de que φ preserve o invierta la orientación.

0.17 Definición. Llamamos *p–simplejo estándar*, y lo denotamos por Δ^p, al siguiente conjunto

$$\Delta^p = \{(a_1, \ldots, a_p) \in \mathbb{R}^p | \Sigma a_i \leq 1 \text{ y cada } a_i \geq 0\}$$

Diremos que una función $\sigma : \Delta^p \to M$ es un *p–simplejo singular diferenciable* si se extiende a una función diferenciable en una vecindad abierta de $\Delta^p \subseteq \mathbb{R}^p$. □

0.18 Definición. Sea $\sigma : \Delta^p \to M$ un p-simplejo singular, con $p \neq 0$, y sea $\omega \in \Lambda^k(M)$. Definimos la integral sobre M como

$$\int_\sigma \omega = \int_{\Delta^p} \delta\sigma(\omega)$$

Cuando $p = 0$ lo definimos como

$$\int_\sigma = \omega(\sigma(0))$$

□

0.19 Definición. Sea ω una n–forma con soporte compacto, sean $U_1, \ldots, U_n$ abiertos que cubren al soporte de ω, de modo que cada U_i está en el interior de la imagen de un simplejo singular σ_i que preserva la orientación; y sea U el complemento de dicho soporte. Sea f, f_i una partición de unidad subordinada a tal cubierta de M. Definimos

$$\int_M \omega = \sum_i \int_{\sigma_i} f_i \omega$$

0.20 Proposición. *La definición no depende la cubierta ni de la partición de unidad.*

Demostración. Sean $V, V_1, \ldots, V_n$ cubierta; cada V_i en la imagen del simplejo singular τ_i; y sea g, g_i una partición de unidad subordinada a esta cubierta. Como $g \equiv 0$ en el soporte de ω, ahí $\sum_i g_i = 1$; luego

$$\sum_i \int_{\sigma_i} f_i \omega = \sum_i \int_{\sigma_i} \sum_j g_j f_i \omega = \sum_{i,j} \int_{\sigma_i} f_i g_j \omega$$

Análogamente,

$$\sum_i \int_{\tau_j} g_j \omega = \sum_{i,j} \int_{\tau_j} f_i g_j \omega$$

Ahora, como $\sigma_i^{-1} \circ \tau_j$ es un difeo que preserva orientación –cada que está definido–, tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{\sigma_i} f_i g_j \omega = \int \Delta^n \delta\sigma_i(f_i g_j \omega) &= \int_{\Delta^n} \delta(\sigma_i^{-1} \circ \tau_j)[\delta\sigma_i(f_i g_j \omega)] \\ &= \int_{\Delta^n} \delta\tau_j(f_i g_j \omega) = \int_{\tau_j} f_i g_j \omega\end{aligned}$$

■

Capítulo 1

Grupos Topológicos y de Lie

1.1. Grupos Topológicos

Para el estudio de los grupos de transformaciones, nos restringimos al estudio de acciones sobre espacios topológicos y, como consecuencia natural, en las acciones donde la multiplicación de los grupos es compatible con la topología.

Supondremos, a lo largo de este trabajo, los temas de un primer curso de Teoría de Grupos [Rot].

1.1 Definición. Decimos que un conjunto G es un *grupo topológico* si:

- es un grupo;

- es un espacio topológico; y

- la función $\varrho : G \times G \to G$ dada por $(g, h) \mapsto gh^{-1}$ es continua.

1.2 Observación. La tercera condición es equivalente a pedir que, tanto la multiplicación del grupo, como $g \mapsto g^{-1}$, sean continuas. Esto se sigue de que claramente $(g, h) \mapsto (g, h^{-1}) \mapsto gh^{-1}$, $g \mapsto (e, g) \mapsto g^{-1}$ y $(g, h) \mapsto (g, h^{-1}) \mapsto g(h^{-1})^{-1} = gh$ son continuas en los casos correspondientes.

1.3 Proposición. *Para cualquier vecindad U de g, existe una vecindad V de e tal que $VgV \subseteq U$.*

Demostración. Basta observar que la operación de multiplicación $G \times G \times G \to G$ es continua, en particular en (e, g, e). ■

1.4 Definición. 1. Dados $A, B \subseteq G$ definimos A^{-1} y AB de manera obvia y denotamos $A^n = A \cdots A$.

2. Decimos que $A \subseteq G$ es *simétrico* si $A = A^{-1}$.

3. Denotamos por inv a $g \mapsto g^{-1}$.

4. A $g \mapsto hg$ y $g \mapsto gh$ las llamaremos *translaciones izquierda y derecha* y denotadas por ℓ_g y r_h respectivamente.

1.5 Observación. Para cada A, AA^{-1} y $A \cap A^{-1}$ son simétricos; además, la intersección de conjuntos simétricos es simétrica.

1.6 Proposición. inv *y las translaciones son homeomorfismos de G.*

Demostración. Esto es inmediato de la continuidad y de que $\mathrm{inv} \circ \mathrm{inv} = id_G$ y que $\ell_g \circ \ell_{g^{-1}} = id_G$ y $r_g \circ r_{g^{-1}} = id_G$. ■

1.7 Proposición. *Si $H \leq$ (resp. $\trianglelefteq$) G entonces $\overline{H}$ también lo es.*

Demostración. Sean $h = \lim_{n\to\infty} h_n$ y $k = \lim_{n\to\infty} k_n$ con $h_n, k_n \in H$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Entonces, como H es subgrupo, $(h_n)(k_n)^{-1} \in H$ para toda n. Como ϱ es continua,

$$\varrho(h, k) = \varrho\left(\lim_{n\to\infty} h_n, \lim_{n\to\infty} k_n\right) = \lim_{n\to\infty} (h_n)(k_n)^{-1}$$

que está en $\overline{H}$. Así, $\overline{H}$ es un subgrupo. Análogamente si H es normal $\overline{H}$ también lo es. ■

1.8 Proposición. *Si H es un subgrupo cerrado de G, entonces G/H, dotado con la topología cociente, es un espacio Hausdorff, con proyección π_H continua y abierta. Si además H es normal, G/H es un grupo topológico.*

Demostración. π_H es continua por construcción y es abierta porque $\pi_H^{-1}\pi_H(U) = \bigcup_{h\in H} hU$. Sean $g_1H \neq g_2H \in G/H$, entonces $g_1g_2^{-1} \notin H$. Como H es cerrado, existe U vecindad abierta de $g_1g_2^{-1}$ que no interseca a H. Entonces existe V una vecindad simétrica de e tal que $Vg_1g_2^{-1}V \subseteq U$. Así, $g_1V \cap g_2VH = \varnothing$; por lo tanto, $g_1VH \cap g_2VH = \varnothing$ –agrupando las h's.

En el caso H normal, ya sabemos que es grupo, por lo que solo resta checar la continuidad de $\bar{\varrho}$. Pero $\bar{\varrho}^{-1}(U) = (\pi_H \times \pi_H) \circ \varrho^{-1} \circ \pi_H^{-1}(U)$ es abierto ya que π_H y ϱ son continuas y $\pi_H \times \pi_H$ es abierta. ■

1.9 Proposición. *Sea G conexo y U una vecindad simétrica de e. Entonces $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$.*

Demostración. Veamos que $V = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$ es cerrado y abierto. Sea $v \in V$, entonces $v \in vU \subseteq V$. Ahora sea $v = \lim_{n\to\infty} v_n$ con $v_n \in V$ luego $vv_n^{-1} \to e$ por lo que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$, entonces $vv_n^{-1} \in U$. ■

1.10 Corolario. *Cualquier vecindad de e genera a G conexo, en el sentido de la proposición anterior.*

1.11 Definición. Sean G y H dos grupos topológicos. $\varphi : G \to H$ es un *homomorfismo de grupos topológicos* o, cuando el contexto sea claro, simplemente *homomorfismo* si es continuo y si es un homomorfismo de grupos abstractos. Un homomorfismo de G en sí mismo será llamado *endomorfismo*.

1.12 Definición. Definimos como G_0 a la componente conexa de e de G.

Entonces, para cualquier función continua de los tipos $G_0 \times G_0 \to G$, $G_e \to G$, su imagen está contenida en G_0. De lo que se tiene la siguiente

1.13 Proposición. *G_0 es un subgrupo de G abierto, cerrado y totalmente invariante. Un subconjunto K de G es totalmente invariante si $\varphi K \subseteq K$ para cualquier endomorfismo φ.*

1.14 Proposición. *G/G_0 es un grupo totalmente inconexo*[1].

Demostración. Como π_{G_0} es abierta y G_0 es abierto, $\{G_0\} \in G/G_0$ es abierto. Luego cualquier otro punto también, a través de la translación adecuada. ■

1.15 Proposición. *Sea N un subgrupo normal totalmente inconexo de G conexo, entonces es central; es decir sus elementos conmutan con todo elemento de G.*

Demostración. Como $\psi_k : G \to N$, $\psi_k(g) = gkg^{-1}$, es continua, entonces $\psi(G)$ es conexo; si $k \in N$, consta de un solo punto: $k = \psi_k(e)$. ■

1.2. Grupos de Lie

La noción de grupo de Lie[2] es central para este trabajo. Aquí mencionaremos los resultados de la teoría básica de Lie. Una magnífica referencia es el libro de Frank W. Warner [War].

1.16 Definición. Decimos que un grupo topológico G es un *grupo de Lie*, si:

- G tiene estructura de variedad diferenciable; y
- la función $(g,h) \mapsto gh^{-1}$ es C^∞. □

La mayoría de las propiedades de la sección anterior se cumplen automáticamente para el caso en el que el grupo es además un grupo de Lie, sustituyendo *continua* por *diferenciable*. Para ver algunas otras –como las relativas a las transformaciones cociente–, desarrollaremos brevemente la teoría diferenciable de estos grupos.

[1] La costumbre es usar el anglicismo *disconexo*, mismo que no es aceptado por la RAE. Adopto *inconexo*, que sí lo es y que su significado es el mismo que el de *disconnected*.

[2] [li]

1.2.1. Álgebras de Lie Asociadas

1.17 Definición. Sea V un espacio vectorial real. Diremos que V es un *álgebra de Lie* si tiene una operación bilineal $[\ ,\ ] : V \times V \to V$ (llamada *corchete*) tal que cumple

1. $[X, Y] = -[Y, X]$. (anti-conmutatividad)
2. $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$. (identidad de Jacobi)

para todo $X, Y, Z \in V$.

1.18 Definición. Un campo vectorial X sobre G se dice que es *invariante por la izquierda* si cumple que para toda $g \in G$

$$d\ell_g(X) = X(\ell_g)$$

Al conjunto de todos los campos vectoriales invariantes por la izquierda lo denotaremos con la letra $\mathfrak{g}$.

□

1.19 Proposición ([War]). *Sea G un grupo de Lie y $\mathfrak{g}$ su conjunto de campos vectoriales invariantes por la izquierda.*

1. *$\mathfrak{g}$ es un espacio vectorial real y $X \mapsto X_e$ es un isomorfismo lineal entre $\mathfrak{g}$ y T_eG; en consecuencia, $\dim \mathfrak{g} = \dim G$.*
2. *Los campos invariantes por la izquierda son C^∞.*
3. *El corchete de Lie es cerrado en $\mathfrak{g}$.*
4. *$\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie.*

1.20 Definición. Definimos *El álgebra de Lie de un grupo de Lie* como el álgebra de Lie de sus campos vectoriales invariantes por la izquierda. De igual modo, podríamos definirlo como el espacio tangente del grupo en la identidad. Esta interpretación nos permitirá dar descripciones claras de las álgebras de Lie de los Grupos Clásicos.

1.2.2. Homomorfismos

1.21 Definición. Sea $\varphi : G \to H$ un homomorfismo de grupos (topológicos). Diremos que φ es un *homomorfismo de grupos de Lie* si es diferenciable. Diremos que es *isomorfismo* si además es un difeomorfismo. Un homomorfismo de G en sí mismo será un *endomorfismo* y le llamaremos un *automorfismo* si además es isomorfismo.

Análogamente, una transformación lineal $\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ la llamaremos *homomorfismo de álgebras de Lie* si además cumple que para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$, $\psi[X,Y] = [\psi X, \psi Y]$. De igual forma que antes, se definen las nociones *isomorfismo*, *endomorfismo* y *automorfismo*. □

1.22 Proposición. *$d_e\varphi$ es un homomorfismo de álgebras de Lie.*

1.23 Proposición. *Sea G un grupo de Lie conexo y H un grupo de Lie arbitrario. Si dos homomorfismos de grupos de Lie de G en H inducen el mismo homomorfismo de álgebras de Lie en sus respectivas álgebras de Lie, entonces estos homomorfismos coinciden.*

1.2.3. Subgrupos de Lie

1.24 Definición. Diremos que la pareja (H, φ) es un *subgrupo de Lie* de un grupo de Lie G si:

1. H es un grupo de Lie;
2. H es una variedad inmersa mediante $\varphi : H \to G$; y
3. φ es un homomorfismo de grupos.

(H, φ) será un *subgrupo cerrado* si $\varphi(H)$ es cerrado en G.

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie. A un subespacio $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ lo llamaremos *subálgebra* si el corchete se restringe a $\mathfrak{h}$.

1.25 Observación. Dado (H, φ) subgrupo de Lie de G, tenemos un isomorfismo de $\mathfrak{h}$ en $d\varphi_e(\mathfrak{h}) \subseteq \mathfrak{g}$.

1.26 Teorema. *Sea G un grupo de Lie con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Sea $\bar{\mathfrak{h}} \subseteq \mathfrak{g}$ subálgebra. Entonces existe un único subgrupo conexo (H, φ) de Lie de G tal que $d\varphi_e(h) = \bar{h}$.*

1.27 Corolario (Teorema de Correspondencia). *Hay una correspondencia $1:1$ entre los subgrupos de Lie conexos de un grupo de Lie y las subálgebras de su álgebra de Lie.*

1.28 Teorema. *Si un subgrupo abstracto H de un grupo de Lie G tiene estructura de variedad de modo que H es una variedad inmersa mediante la inclusión ι, entonces dicha estructura es única; con ella, H es un grupo de Lie y (H, ι) es un subgrupo de Lie de G.*

1.29 Teorema. *Sea (H, φ) un subgrupo de Lie de G. H es una subvariedad si y solo si es un subgrupo cerrado.*

1.2.4. La Exponencial

1.30 Definición. Un homomorfismo $\varphi : \mathbb{R} \to G$ se llama *subgrupo monoparamétrico* de G.

Dado $X \in \mathfrak{g}$, éste, como campo vectorial sobre G, tiene un flujo asociado.

1.31 Proposición. *El flujo asociado a un campo vectorial invariante por la izquierda sobre un grupo de Lie es completo. Por lo tanto, éste determina al único subgrupo monoparamétrico de G en la dirección del campo.*

1.32 Definición. Por la proposición anterior, para cada $X \in \mathfrak{g}$ denotemos su grupo monoparamétrico como

$$\exp_X(t)$$

A través de él, definamos la *transformación exponencial*

$$\exp : \mathfrak{g} \to G$$

como

$$\exp(X) = \exp_X(1)$$

1.33 Proposición. *Sea X un vector en $\mathfrak{g}$, el álgebra de Lie del grupo de Lie G. Entonces, para $t, r \in \mathbb{R}$,*

1. $\exp(tX) = \exp_X(t)$
2. $\exp((t+r)X) = (\exp(tX))(\exp(rX))$
3. $\exp(-tX) = (\exp(tX))^{-1}$
4. $\exp$ *es diferenciable y* $d\exp_0 : T_0\mathfrak{g} \to T_eG$ *es la identidad, con las identificaciones pertinentes. Luego* $\exp$ *es un difeomorfismo de una vecindad de* 0 *en una vecindad de* e.

1.34 Proposición. *Sean G, $\mathfrak{g}$, H y $\mathfrak{h}$ grupos y álgebras de Lie respectivas con transformaciones exponenciales correspondientes $\exp_G$ y $\exp_H$. Si $\varphi : H \to G$ es un homomorfismo de grupos de Lie, entonces*

$$\varphi \circ \exp_H = \exp_H \circ d\varphi_e.$$

1.35 Lema. *Sea (H, φ) un subgrupo de Lie de G, y sea $X \in \mathfrak{g}$. Si $X \in d\varphi_e(\mathfrak{h})$ entonces $\exp tX \in \varphi(H)$ para toda t. Recíprocamente, si $\exp tX \in \varphi(H)$ para t en algún intervalo entonces $X \in d\varphi(\mathfrak{h})$.*

1.36 Teorema. *Sean H un subgrupo abstracto de G y $\mathfrak{h}$ un subespacio de $\mathfrak{g}$. Sean U y V abiertos tales que $\exp : U \to V$ es un difeomorfismo. Si*

$$\exp(U \cap \mathfrak{h}) = V \cap H,$$

entonces H es un subgrupo de Lie de G con la topología inducida y $\mathfrak{h}$ es su álgebra de Lie.

1.2.5. Subgrupos Cerrados y Variedades Homogéneas

1.37 Teorema. *Sean G un grupo de Lie y H un subgrupo abstracto de G, cerrado en G. Entonces H posee una única estructura diferenciable que lo hace un subgrupo de Lie de G.*

De acuerdo a 1.29, la topología de H es necesariamente la topología relativa.

1.38 Teorema. *Sea $\psi : G \to K$ un homomorfismo de grupos de Lie. Si $H = \ker \psi$ y $\mathfrak{h} = \ker d\psi$, entonces H es un grupo de Lie con álgebra de Lie $\mathfrak{h}$.*

1.39 Teorema. *Sea H un subgrupo cerrado de un grupo de Lie G. Sea G/H el conjunto de clases laterales módulo H, con $\pi_H : G \to G/H$ la proyección canónica. Entonces G/H tiene una única estructura de variedad diferenciable tal que*

1. $\pi_H \in C^\infty(G, G/H)$
2. *Existen secciones locales de π_H.*

1.40 Corolario. *Una transformación $f \in C^\infty(G/H, N)$ si y solo si $f \circ \pi \in C^\infty(G, N)$.*

1.41 Observación. Se dice que una variedad es *homogénea* si es difeomorfa a G/H para algunos G y H. En este trabajo, veremos una forma equivalente de ver a este tipo de variedades, a través de acciones diferenciables de grupos.

1.3. Integración Invariante

Sea G un grupo de Lie. Sabemos que G es orientable, pues si tomamos una base de campos vectoriales invariantes por la izquierda, obtenemos una n-forma que no se anula sobre todo G. Fijemos una orientación.

Observemos las n-formas invariantes por la izquierda. Éstas están determinadas por su valor en un punto. Así, constituyen un espacio unidimensional. Elijamos una forma ω, consecuente con la orientación elegida para G.

Así, por 0.19, podemos integrar formas de soporte compacto sobre G.

1.42 Definición. Dada $f \in C^\infty(G)$ de soporte compacto definimos su integral, con respecto a ω, sobre G como

$$\int_G f = \int_G f\omega$$

1.43 Observación. Esta integral depende, obviamente, de nuestra elección de la n-forma invariante por la izquierda pero como dichas formas están determinas de manera única salvo por una constante positiva, lo mismo ocurre para la integral.

En el caso en el que G es compacto, siempre podemos elegir ω requiriendo que

$$\int_G \omega = 1$$

1.44 Proposición. *Esta integral es invariante por la izquierda.*

Demostración. Sea ℓ_g la translación izquierda por g. Entonces como $\delta\ell_g(\omega) = \omega$, ℓ_g preserva la orientación por lo que

$$\int_G f = \int_G f\omega = \int \delta\ell_g(f\omega) = \int (f \circ \ell_g)\omega = \int_G f \circ \omega$$

■

1.45 Proposición. *Sea r_g la translación derecha por g. Entonces, existe una función $\lambda \in C^\infty(G)$ tal que*

$$\int_G f\omega = \int_G (f \circ r_g)\lambda(g)\omega$$

Demostración. Como cualquier translación derecha conmuta con cualquier translación izquierda, se tiene que $\delta r_g\omega$ es invariante por la izquierda. Esto nos dice que existe una constante no cero $\tilde{\lambda}(g)$ tal que $\delta r_g(\omega) = \tilde{\lambda}(\omega)$. Definiendo $\lambda = |\tilde{\lambda}|$, tenemos que $\lambda \in C^\infty$ y que $\lambda(gh) = \lambda(g)\lambda(h)$. Esto pues la la forma está determinada de manera única por su valor en un punto. Finalmente,

$$\int_G f\omega = \int_G (f \circ r_g)(\pm\delta r_g\omega) = \int_G (f \circ r_g)\lambda(g)\omega$$

como se quería. ■

1.46 Definición. A λ se le denomina *función modular*. A un grupo de Lie G para el cual se tenga que $\lambda \equiv 1$, se le llamará *unimodular*.

1.47 Corolario. *La integral es invariante por la derecha si y solo si G es unimodular.*

1.48 Proposición. *Si G es un grupo de Lie compacto, entonces es unimodular.*

Demostración. Como $\int_G \omega = 1$ entoncesvtomando $f \equiv 1$, tenemos que para toda $g \in G$,

$$1 = \int_G \omega = \int_G \lambda(g)\omega = \lambda(g) \int_G \omega = \lambda(g)$$

∎

1.49 Observación. Existe una construcción más general de una integral bi-invariante para el caso de grupos topológicos compactos. Esto se hace a través de introducir una medida a G y de tomar la integral de Lebesgue respectiva. A esta medida se le conoce como *medida de Haar de G* [Bre].

1.4. Productos Semidirectos

En esta sección recordaremos una construcción de grupos a partir de una pareja, que extiende la noción de producto directo –o, simplemente, producto–: el producto semidirecto. De acuerdo a la categoría de grupos en la que nos encontremos habrá que hacer ciertas consideraciones especiales, por lo que, *mutatis mutandi*, haremos nuestra revisión en el caso de grupos abstractos [Rot].

1.50 Definición. Sea G un grupo y sea $K \leq G$. Diremos que K *tiene un complemento* en G si existe $H \leq G$ tal que todo elemento $g \in G$ se escribe de manera única como $g = kh$ con $k \in K$ y $h \in H$; o bien, en forma equivalente, si $KH = G$ y $K \cap H = \{e\}$.

1.51 Observación. Si K es normal en G entonces de tener complemento, este será isomorfo a G/K.

1.52 Definición. Un grupo G es un *producto semidirecto* de K por H si $K \lhd G$ y si existe un complemento de K en G, $H' \cong H$. También suele decirse que G se *escinde* sobre K.

1.53 Observación. Si el complemento H también es normal entonces G es el producto directo. En la siguiente sección veremos ejemplos de productos semidirectos que no son directos.

1.54 Lema. *Si K es un subgrupo normal de G, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. *G es un producto semidirecto de K por G/K.*
2. *Hay un subgrupo $H \leq G$ tal que cada elemento de G tiene una expresión única como producto de un elemento de K y uno de H.*
3. *Existe un homomorfismo sección de G/K en G.*
4. *Existe un homomorfismo retracción de G en K.*

1.55 Lema. *Si G es un producto semidirecto de K por H, entonces hay un homomorfismo $\theta : H \to Aut(K)$ dado por $\theta_h(k) = hkh^{-1}$.*

1.56 Definición. Sean K y H grupos. Sea $\theta : H \to Aut(K)$ un homomorfismo. Diremos que un producto semidirecto *realiza* a θ si, en G, se tiene que $\theta_h(k) = hkh^{-1}$.

1.57 Observación. Intuitivamente, *realizar* quiere decir la manera en la que K es normal en G.

1.58 Definición. Dados K y H grupos y $\theta : H \to Aut(K)$, definamos $G = K \rtimes_\theta H$ como $K \times H$ dotado de la siguiente operación.

$$(k_1, h_1)(k_2, h_2) = (\theta_{h_1}(k_2)k_1, h_1h_2)$$

1.59 Teorema. *Dados grupos H y K y un homomorfismo $\theta : H \to Aut(K)$. Entonces $G = K \rtimes_\theta H$ es un producto semidirecto de K por H que realiza a θ.*

1.60 Corolario. *Dado G, un producto semidirecto de K por H, existe un homomorfismo $\theta : H \to Aut(K)$ tal que $G \cong K \rtimes_\theta H$.*

Nuestros ejemplos aparecerán más adelante, a lo largo de este trabajo.

1.5. Movimientos Rígidos de $\mathbb{R}^n$. Grupos Clásicos.

En esta sección hablaremos de los grupos de matrices. Estos grupos serán nuestros ejemplos canónicos.

Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita n, dotado de un producto interior $\langle\ ,\ \rangle$. Resulta importante estudiar al grupo de transformaciones lineales de V en general, así como a las transformaciones que preservan dicho producto interior. Dada la existencia de bases, una vez fija una, se identifica al grupo de transformaciones lineales de V con un grupo de matrices.

Otra noción que resulta interesante es la de *orientación* de un espacio vectorial. Daremos la siguiente

1.61 Definición. Una *orientación* para V consiste en la elección de una clase de equivalencia para la siguiente relación sobre el conjunto de bases ordenadas de V. Para dos bases β y γ,

$$\beta \sim \gamma \Leftrightarrow \det[I]_\beta^\gamma > 0$$

donde $[I]_\beta^\gamma$ es la matriz de cambio de base.

Además, si ϕ es una función (en principio no necesariamente lineal) tal que cumple

$$\|\phi X\| = \|X\|$$

para todo $X \in V$, tenemos la siguiente

1.62 Proposición. *ϕ es lineal.*

Demostración. Como $\langle X, Y\rangle = \frac{1}{2}(\|X+Y\|^2 - \|X\|^2 - \|Y\|^2)$ entonces ϕ preserva el producto interior. Entonces la conclusión se sigue de calcular directamente, en términos del producto interior, $\|\phi(X+Y) - \phi X - \phi Y\|^2$ y $\|\phi(\lambda X) - \lambda\phi X\|^2$. ■

Por esto, estudiar los movimientos rígidos que fijan al origen de V es en realidad el estudio de las transformaciones lineales tales que preservan el producto interior. Entendemos por *movimiento rígido* a aquella función que preserva la distancia.

1.63 Definición. Sea $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ el conjunto de todas las matrices reales de $n \times n$, con la topología de identificación con $\mathbb{R}^{n^2}$. Definimos los siguientes subconjuntos de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ como sigue.

$$\begin{array}{rrrll}
GL(n) = & GL_n(\mathbb{R}) = & GL(\mathbb{R}, n) = & \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \mid \det A \neq 0\} \\
SL(n) = & SL_n(\mathbb{R}) = & SL(\mathbb{R}, n) = & \{A \in GL(n) & \mid \det A = 1\} \\
O(n) = & O_n(\mathbb{R}) = & O(\mathbb{R}, n) = & \{A \in GL(n) & \mid AA^T = I\} \\
SO(n) = & SO_n(\mathbb{R}) = & SO(\mathbb{R}, n) = & \{A \in O(n) & \mid \det A = 1\}
\end{array}$$

1.64 Proposición. *Dichos subconjuntos son grupos de Lie bajo la multiplicación de matrices.*

Demostración. GL_n es abierto en $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pues es la imagen inversa de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ bajo el determinante. Es fácil ver que dado que el determinante de un producto de matrices es el producto de sus determinantes y que, tanto para la matriz producto, como para la inversa, sus coordenadas están dados por polinomios de sus entradas y, en el caso de la inversa, divididos por el determinante (no nulo); que se cumplen los axiomas de grupo y que dichas operaciones son claramente C^∞.

Luego, el determinante es un homomorfismo entre GL_n y $\mathbb{R}$ y SL_n es el núcleo de dicho homomorfismo. Luego SL_n es un subgrupo cerrado y por lo tanto de Lie.

La transformación $A \mapsto AA^T$ es diferenciable. Luego O_n es cerrado. Usando que el determinante es homomorfismo, tenemos que si $A \in O_n$ entonces $\det A = \pm 1$. Además, si $A, B \in O_n$ tenemos que $(AB)(AB)^T = ABB^TA^T = AIA^T = AA^T = I$ y $(A^{-1}) = A^T$ por lo que O_n es un grupo de Lie.

Finalmente, $SO_n = O_n \cap SL_n$ por lo que es de Lie. ■

1.65 Observación. A dichos grupos los llamaremos *General Lineal*, *Especial Lineal*, *Ortogonal* y *Especial Ortogonal*. Como $\det(O_n) = \{\pm 1\}$ entonces O_n tiene al menos dos componentes conexas. Haciendo uso de una forma canónica adecuada se puede probar que hay exactactamente dos; una de ellas es, precisamente, SO_n. Es sabido que las transformaciones provenientes de matrices ortogonales son precisamente aquellas que preservan el producto interior. Por ello, dichas matrices están en correspondencia biyectiva con las bases ordenadas ortonormales de V.

1.66 Proposición. *Se tiene que:* $\dim GL_n = n^2$, $\dim SL_n = n^2 - 1$, $\dim O_n = \dim SO_n = \frac{1}{2}n(n-1)$.

Demostración. La primera afirmación es trivial. Para SL_n, como $d_A \det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ no puede ser cero si $\det A \neq 0$, por el teorema de la imagen inversa de valor regular, $\operatorname{codim}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} SL_n = \operatorname{codim}_{\mathbb{R}}\{1\} = 1$. En el caso de O_n y de SO_n, para determinar una base ortonormal basta determinar una ortogonal. Para esto último, se puede demostrar (Inducción) que la cantidad necesaria y suficiente de parámetros para determinarla es $\sum_{i=1}^{n} i$; que era lo que se quería. ■

1.67 Proposición. *Sea $C : I \mapsto GL_n$ una curva diferenciable tal que $C(0) =$. Entonces*

$$\frac{d}{dt}\det C(t)\Big|_{t=0} = \operatorname{tr}\frac{d}{dt}C(t)\Big|_{t=0}$$

Demostración. Ver [Kna] pág. 6. ■

1.68 Proposición. *Las álgebras de Lie asociadas a GL_n, SL_n y SO_n son:*

$$\begin{array}{llll} \mathfrak{gl}(n) = & \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) = & \mathfrak{gl}(\mathbb{R},n) = & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ \mathfrak{sl}(n) = & \mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) = & \mathfrak{sl}(\mathbb{R},n) = & \{A \in \mathfrak{gl}(n) \mid \operatorname{tr} A = 0\} \\ \mathfrak{so}(n) = & \mathfrak{so}_n(\mathbb{R}) = & \mathfrak{so}(\mathbb{R},n) = & \{A \in \mathfrak{gl}(n) \mid A + A^T = 0\} \end{array}$$

respectivamente. El álgebra asociada a O_n coincide con $\mathfrak{so}_n$ pues SO_n es la componente conexa de O_n.

Demostración. Para GL_n es inmediato ver que las dimensiones coinciden y que si $A \in GL_n$ para toda $B \in \mathfrak{gl}(n)$ existe $\varepsilon > 0$ tal que si $|t| \le \varepsilon$ entonces $A+tB \in GL_n$. De 1.67 tenemos que si $C(t) \in SL_n$, con $C(0) = I$, entonces

$$0 = \frac{d}{dt}1\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\det C(t)\Big|_{t=0} = \operatorname{tr}\frac{d}{dt}C(t)\Big|_{t=0}$$

por lo que $\mathfrak{g}(SL_n) = \mathfrak{sl}(n)$ ya que es inmediato ver que $\dim \mathfrak{sl}(n) = n^2 - 1$.

Finalmente, para el caso ortogonal tenemos que si $C(t) \in SO_n$), con $C(0) = I$,

$$0 = \frac{d}{dt}C(t)C(t)^T\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}C(t)\Big|_{t=0}C(0)^T + C(0)\frac{d}{dt}C(t)^T\Big|_{t=0} = C'(0) + C'(0)^T$$

y otra vez se concluye pues la dimensión de $\mathfrak{so}(n)$ es claramente $\frac{1}{2}(n^2 - n)$. ■

A continuación vemos algunas propiedades de estos grupos.

1.69 Proposición. *GL_n es isomorfo a un producto semidirecto de SL_n por $\mathbb{R}^*$.*

Demostración. Sea $\theta : \mathbb{R}^* \to Aut(SL_n)$ dada por $A \xmapsto{\theta_\lambda} \lambda A$. Sea $H = \{\lambda I\}$. Entonces $H \cap SL_n = \{I\}$ y si $A \in GL_n$ entonces $\det A \neq 0$ por lo que $\frac{1}{\det A}A \in Sl_n$. Se sigue de 1.60 la conclusión. ■

1.70 Proposición. *El grupo de movimientos rígidos de $\mathbb{R}^n$ es el producto semidirecto de $\mathbb{R}^n$ por O_n.*

Demostración. Sea ϕ un movimiento rígido. Si ϕ tiene un punto fijo, entonces mediante una translación, usando 1.62, debe suceder que $\phi - b = A \in O_n$. Si ϕ no tiene puntos fijos sucede lo mismo. Sobre la misteriosa b, ésta es el punto fijo, en el primer caso y $\phi\bar{0}$ en el segundo caso.

Así, $A(A'x + b') + b = (AA')x + (Ab + b)$, por lo que se sigue la proposición. ∎

Capítulo 2

Grupo Fundamental y Espacios Cubrientes

Las nociones que veremos en este capítulo representan parte de la herramienta topológica necesaria para desentrañar la forma de ciertos espacios topológicos, así como también la construcción de un espacio "bonito" naturalmente asociado a estos espacios topológicos.

Como los objetos de estudio de este trabajo son las variedades diferenciables y riemannianas, así como los grupos de Lie, mantendremos siempre en mente ese tipo de espacios topológicos. También, pronto desarrollaremos estructuras y propiedades particulares de ellos.

En el contexto de espacios topológicos usaremos, como es usual, la palabra *función* en un sentido más general que aquel al que nos habíamos restringido en lo anterior.

En esencia, las referencias para los resultados de este capítulo son los libros de Lima [Lim], Forster [For] y Warner [War].

2.1. Grupo Fundamental

A lo largo de esta sección X y Y serán espacios topológicos.

2.1.1. Homotopías

2.1 Definición. Sean $f, g : X \to Y$ funciones continuas. Decimos que f y g son *homotópicas* si existe una función de $H : X \times I \to Y$ continua, con $I = [0, 1]$, que cumpla que $H(x, 0) = f(x)$ y $H(x, 1) = g(x)$, para toda $x \in X$. A esto lo denotaremos como $f \sim g$. A H la llamaremos *homotopía*.

2.2 Observación. La defininición es claramente reflexiva y simétrica.

2.3 Proposición. *La relación $\sim$ en Y^X es de equivalencia.*

Demostración. Obsérvese la siguiente función, dado que $f \sim g$ y $g \sim h$ mediante homotopías H y K, respectivamente,

$$G(x,t) = \begin{cases} H(x, 2t) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ K(x, 2t-1) & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

quien es claramente continua. ∎

2.4 Proposición. *Un espacio es conexo por trayectorias si y solo si cualesquiera dos funciones constantes del espacio en sí mismo son homotópicas.*

Demostración. Una curva entre dos puntos determina una homotopía entre las funciones constantes correspondientes a los puntos dados. Recíprocamente la homotopía determina curvas entre los valores constantes. ∎

2.5 Definición. Un espacio X es *contráctil* si cualquier función de él en sí mismo es homotópica a una constante.

2.6 Definición. Sea $r : X \to X$ continua. Diremos que r es una *retracción* si $r \circ r = r$.

2.7 Observación. Esto es claramente equivalente a decir que existe $Y \subseteq X$ tal que $r(X) = Y$ y que $r(x) = x$ si y solo si $x \in Y$. Una clase importante de retracciones es la de aquellas que cumplen $\iota \circ r \sim id_X$ donde ι es la inclusión de $r(X)$ en X, tal que en cada tiempo deja fijo a $r(X)$. A una retracción que cumpla esto la llamaremos *retracción fuerte*. Finalmente, al conjunto $Y = r(X)$ lo llamaremos *retracto* (resp. *r. fuerte*).

2.1.2. Homotopía de Curvas

En lo sucesivo nos interesaremos particularmente por el caso en el que $X = [0,1]$. Es decir las curvas sobre un espacio. Por constumbre, denotaremos al espacio topológico contradominio por X, haciendo ninguna alución al orden de la subsección anterior.

Nos interesaremos en aquellas curvas que coincidan en los puntos inicial y final.

2.8 Definición. Sea sean $\alpha, \beta : [0,1] \to X$ continuas tales que $\alpha(i) = x_i = \beta(i)$ con $i \in \{0,1\}$. Diremos que son homotópicas ($\alpha \sim \beta$) si existe una homotopía H entre ellas tal que $H(i,t) = x_i$

2.9 Observación. A las curvas $\alpha(t) = \alpha_t$ las llamaremos *deformaciones* de $\alpha_0 = \alpha$ en $\alpha_1 = \beta$. Obviamente, también se cumple que $\sim$ es una relación de equivalencia.

2.10 Notación. *Cuando no haya peligro de confusión, a una curva $\alpha : [0,1] \to X$ cuyos puntos extremos $x = \alpha(0)$ y $y = \alpha(1)$ son conocidos con antelación la denotaremos $\alpha : x \rightsquigarrow y$. Conservaremos, de ser necesario, la otra notación, así como la de sus valores intermedios $\alpha(s)$. De igual modo, a la curva constante $\alpha : x \rightsquigarrow x$ la denotaremos también por x.*

2.11 Definición. Sean $x, y, z \in X$ y sean $\alpha : x \rightsquigarrow y$, $\beta : y \rightsquigarrow z$. Definimos

1. la curva *producto* $\alpha \cdot \beta : x \rightsquigarrow z$ como

$$\alpha \cdot \beta(s) = \begin{cases} \alpha(2s) & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ \beta(2s-1) & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

2. la curva *inversa* $\alpha^- : y \rightsquigarrow x$ como

$$\alpha^-(s) = \alpha(1-s), \text{ para todo } s \in I$$

2.12 Observación. La traza de la curva producto coincide con la concatenación de las trazas de α y β, pero es recorrida al doble de velocidad. Mientras que la de la curva inversa coincide con la de α pero es recorrida en sentido contrario. Además, es fácil ver que si $\alpha \sim \alpha'$ y $\beta \sim \beta'$ entonces $\alpha \cdot \beta \sim \alpha' \cdot \beta'$ y $\alpha^- \sim (\alpha')^-$.

2.13 Proposición. *Sean $x, y, z, w \in X$ y sean $\alpha : x \rightsquigarrow y$, $\beta : y \rightsquigarrow z$ y $\gamma : z \rightsquigarrow w$. Entonces*

1. $x \cdot \alpha \sim \alpha \sim \alpha \cdot y$;
2. $\alpha \cdot \alpha^- \sim x$, $\alpha^- \cdot \alpha \sim y$; *y*
3. $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma \sim \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$.

2.14 Definición. Diremos que una curva α es *cerrada* si es de la forma $\alpha : x \rightsquigarrow x$, y llamaremos *punto base* a x. Diremos también que una curva cerrada es *homotópica a un punto* si es homotópica a una curva constante x.

2.1.3. El Grupo Fundamental

2.15 Teorema. *Sea X un espacio topológico y sea $x \in X$ fijo. El conjunto $\pi_1(X, x)$ de las clases de homotopía de curvas cerradas con punto base x es un grupo con la operación inducida del producto de curvas. A este grupo lo llamaremos* grupo fundamental *de X con punto base x.*

2.16 Notación. *Denotaremos por $[\alpha]$ a la clase de homotopía de α.*

2.17 Teorema. *Sean $x, y \in X$ tales que existe una curva $\gamma : x \rightsquigarrow y$. Entonces $\pi_1(X, x) \cong \pi_1(X, y)$. De hecho, dicho isomorfismo está dado por*

$$[\alpha] \xmapsto{\gamma} [\gamma^- \cdot \alpha \cdot \gamma]$$

2.18 Observación. Si X es conexo por trayectorias, entonces el grupo fundamental de X es esencialmente independiente de la base. Por esto, si ese es el caso, entonces lo denotaremos simplemente como $\pi_1(X)$. Eso sí, dicho isomorfismo sí depende de la curva γ.

2.19 Definición. Diremos que un espacio topológico conexo por trayectorias es *simplemente conexo* si $\pi_1(X) = 0$.

2.20 Proposición. *Un espacio es simplemente conexo si y solo si cualesquiera dos curvas $x \rightsquigarrow y$ son homotópicas.*

2.21 Proposición. *Si un espacio es contráctil, entonces es simplemente conexo.*

2.1.4. Homomorfismos Inducidos

Cuando tenemos una función continua $f : X \to Y$, si $\alpha, \beta : x \rightsquigarrow x'$ con $x, x' \in X$ son homotópicas mediante H, entonces $H_{\#} = f \circ H$ es una homotopía para las curvas $f \circ \alpha, f \circ \beta : f(x) \rightsquigarrow f(x')$ por lo que también tenemos un homomorfismo

$$f_{\#} : \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, f(x)).$$

Así, tenemos la siguiente

2.22 Proposición. *Sea $f : X \to Y$ continua; entonces f induce un homomorfismo $f_{\#}$ entre los grupos fundamentales de X y de Y. $(\ )_{\#}$ es funtorial; es decir que para funciones $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ se tiene que*

1. $(g \circ f)_{\#} = g_{\#} \circ f_{\#}$;
2. $(id)_{\#} = id$.

2.23 Observación. Esto de verdad es un funtor entre $\underline{\mathbf{Top}_*}$ y $\underline{\mathbf{Gru}}$, donde la primera es la categoría de los espacios topológicos punteados y la segunda es la de grupos.

2.24 Proposición. *Sean $f, g : X \to Y$ homotópicas. Entonces $f_\# = \bar{\gamma} \circ g_\#$ con $\gamma : g(x) \rightsquigarrow f(x)$.*

2.25 Proposición. *Sean X y Y conexos por trayectorias. Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ tales que $f \circ g \sim id_Y$ y $g \circ f \sim id_X$. Entonces, $\pi_1(X) = \pi_1(Y)$.*

2.26 Corolario. *Si Y es un retracto fuerte de X entonces $\pi_1(X) = \pi_1(Y)$.*

Dados dos espacios X y Y, podemos construir el producto $X \times Y$ y de hecho obtenemos el siguiente resultado.

2.27 Proposición. *Sean X y Y dos espacios topológicos. Entonces $\pi_1(X \times Y, (x,y)) \cong \pi_1(X, x) \oplus \pi_1(Y, y)$.*

2.28 Corolario. *El producto de espacios simplemente conexos es un espacio simplemente conexo.*

2.1.5. Grupos Topológicos

Cuando nuestros espacios son además grupos topológicos, podemos considerar una operación adicional en el grupo fundamental. Más en general,

2.29 Definición. Sea X un espacio topológico dotado de una multiplicación $\star : X \times X \to X$ continua, con un elemento neutro $e \in X$. Entonces dadas dos curvas cerradas $\alpha, \beta : e \rightsquigarrow e$ definimos $\alpha \star \beta$ de manera obvia:

$$\alpha \star \beta(s) = \alpha(s) \star \beta(s)$$

2.30 Proposición. *Si tenemos curvas, $\alpha \sim \alpha'$, $\beta \sim \beta'$ mediante H y K respectivamente, entonces $\alpha \star \beta \sim \alpha' \star \beta'$ a través de $\tilde{H} = H \star K$.*

2.31 Lema. *Sea X un espacio dotado de una multiplicación continua $\star$, con elemento neutro e. Sean α y β dos curvas cerradas con punto inicial e. Entonces, operando primero con $\cdot$,*

$$\alpha \cdot e \star e \cdot \beta = \alpha \cdot \beta$$

$$e \cdot \alpha \star \beta \cdot e = \beta \cdot \alpha$$

Demostración. Llamemos $t \in [0, \frac{1}{2}]$ y $\tau \in [\frac{1}{2}, 1]$. Entonces

$$\begin{array}{rclrcl} \alpha \cdot e(t) & = & \alpha(2t); & e \cdot \beta(t) & = & e \\ e \cdot \alpha(t) & = & e; & \beta \cdot e(t) & = & \beta(2t) \\ \alpha \cdot e(\tau) & = & e; & e \cdot \beta(\tau) & = & \beta(2\tau - 1) \\ e \cdot \alpha(\tau) & = & \alpha(2\tau - 1); & \beta \cdot e(\tau) & = & e \end{array}$$

Luego,

$$\begin{array}{rclclcl} \alpha \cdot e \star e \cdot \beta(t) & = & \alpha(2t) \star e & = & \alpha(2t) & = & \alpha \cdot \beta(t) \\ \alpha \cdot e \star e \cdot \beta(\tau) & = & e \star \beta(2\tau - 1) & = & \beta(2\tau - 1) & = & \alpha \cdot \beta(\tau) \\ e \cdot \alpha \star \beta \cdot e(t) & = & e \star \beta(2t) & = & \beta(2t) & = & \beta \cdot \alpha(t) \\ e \cdot \alpha \star \beta \cdot e(\tau) & = & \alpha(2\tau - 1) \star e & = & \alpha(2\tau - 1) & = & \beta \cdot \alpha(\tau) \end{array}$$

■

2.32 Proposición. *Sea X un espacio dotado de una multiplicación continua $\star$, con elemento neutro e. Entonces el grupo fundamental $\pi_1(X, x)$ es abeliano y $[\alpha \star \beta] = [\alpha \cdot \beta]$.*

Demostración. Tenemos que $\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot e \star e \cdot \beta \sim \alpha \star \beta \sim e \cdot \alpha \star \beta \cdot e = \beta \cdot \alpha$. Esto por el lema y la proposición anteriores. ■

2.33 Corolario. *El grupo fundamental de un grupo topológico es abeliano.*

2.2. Espacios Cubrientes

2.34 Definición. Sean X, Y y Z espacios topológicos y $p : Y \to X$ una transformación continua. Para cada $x \in X$, al conjunto $p^{-1}(x)$ lo llamaremos *la fibra* de p sobre x. Si $p : Y \to X$ y $q : Z \to X$ son continuas, diremos que una transformación continua $f : Y \to Z$ *preserva fibras* si $p = q \circ f$. Diremos que $p : Y \to X$ es *discreta* si todas sus fibras son discretas.

2.2.1. Levantamientos

2.35 Definición. Sean X, Y y Z espacios topológicos y $p : Y \to X$ y $f : Z \to X$ transformaciones continuas. Por un *levantamiento* de f con respecto a p nos referimos a una transformación continua $g : Z \to X$ tal que $f = p \circ g$.

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "p"] \\ Z \arrow[ur, "g"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

2.36 Teorema (Unicidad del levantamiento). *Sean X y Y espacios topológicos Hausdorff, $p : Y \to X$ un homeomorfismo local y Z un espacio topológico conexo. Si $g_1, g_2 : Z \to Y$ son dos levantamientos de f con $g_1(z_0) = g_2(z_0)$ para algún $z_0 \in Z$, entonces $g_1 = g_2$.*

2.37 Teorema (Levantamiento de curvas). *Sean X y Y dos espacios Hausdorff y sea $p : Y \to X$ un homeomorfismo local. Sean $x, x' \in X$ y sea $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$. Sea $H : I \times I \to X$ continuo tal que $H(0,t) = x$, $H(1,t) = x'$ para todo $t \in I$. Sea $\alpha_t = H(\ ,t)$. Si cada curva α_t se puede levantar a una curva $\tilde{\alpha}_t$ con punto inicial igual, entonces tienen punto final igual y son homotópicas.*

$$\begin{tikzcd} & (Y, \tilde{x}), \arrow[d, "p"] \\ I \arrow[ur, "\tilde{\alpha}_t"] \arrow[r, "\alpha_t"'] & (X, x) \end{tikzcd}$$

2.38 Definición. Sean X y Y espacios topológicos. Una transformación $p : Y \to X$ es *cubriente* si es un homeomorfismo discreto.

2.39 Observación. Las dos condiciones para que $p : Y \to X$ sea cubriente son equivalentes a requierir que para cada punto $x \in X$ exista una vecindad U de x tal que

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{\lambda} V_{\lambda}$$

donde los V_{λ} son ajenos y las restricciones $p|V_{\lambda} \to U$ son homeomorfismos.

2.40 Definición. Una transformación continua $p : Y \to X$ tiene la *propiedad del levantamiento de curvas* si para cada curva $\alpha : I \to X$ y para cada y en la fibra de $\alpha(0)$ existe un levantamiento $\tilde{\alpha}$ de α tal que $\tilde{\alpha}(0) = y$.

2.41 Teorema. *Toda transformación $p : Y \to X$ cubriente de espacios topológicos X y Y posee la propiedad del levantamiento de curvas.*

2.42 Observación. Si los espacios son Hausdorff, los levantamientos son únicos.

2.43 Teorema. *Sean X y Y dos espacios Hausdorff, con X conexo por trayectorias y sea $p : Y \to X$ cubriente. Entonces las fibras de cualesquiera dos puntos en X tienen la misma cardinalidad. En particular, si Y es no vacío entonces p es supravectiva.*

2.44 Teorema. *Sean X y Y dos espacios Hausdorff, con X conexo por trayectorias y sea $p : Y \to X$ cubriente. Sea Z simplemente conexo y localmente conexo por trayectorias y $f : Z \to X$ continua. Entonces, para cada elección de $z \in Z$ y $y \in Y$ tales que $f(z) = p(y)$ existe un único levantamiento $\tilde{f}$ de f con respecto a p tal que $\tilde{f}(z) = y$.*

$$\begin{tikzcd} & (Y, y), \arrow[d, "p"] \\ (Z, z) \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & (X, x) \end{tikzcd}$$

2.2.2. Cubriente Universal y Transformaciones de Cubierta

2.45 Definición. Sean X y Y espacios topológicos y $p : Y \to X$ cubriente. Decimos que la pareja (Y, p) es un *cubriente universal* de X si satisface la siguiente propiedad universal. Para cada $q : Z \to X$ cubriente, con Z conexo, y para cada de $z \in Z$ y $y \in Y$ tales que $q(z) = p(y)$ existe una única transformación $f : Z \to Y$ que preserva fibras tal que $f(z) = y$.

2.46 Corolario. *Un espacio topológico conexo tiene, salvo isomorfismo, a lo más un cubriente universal.*

2.47 Definición. Dados X y Y espacios topológicos con $p : Y \to X$ cubriente. Una *transformación cubriente* o una *transformación de cubierta* es un homeomorfismo

$f : Y \to Y$ que preserva fibras. El conjunto de dichas transformaciones forma un grupo que denotaremos por $\Delta_p(Y/X)$, o, cuando el contexto sea claro, simplemente por Δ_p.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & Y \arrow[dl, "p"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

2.48 Definición. Sean X y Y espacios Hausdorff conexos y sea $p : Y \to X$ cubriente. Diremos que el cubriente es *Galois* si para cada par de puntos en una misma fibra existe una transformación de cubierta que lleva uno en el otro.

2.3. Cubrientes Diferenciables

2.49 Teorema. *Sea M una variedad diferenciable y sea X un espacio topológico y sea $p : X \to M$ un homeomorfismo local. Entonces existe una única estructura diferenciable para X de modo que p sea diferenciable.*

Demostración. Para cada $\tilde{p} \in X$ existe una vecindad $\tilde{U}$ de $\tilde{p}$ y otra U de p tales que $p|\tilde{U} \to U$ es homeomorfismo. Entonces podemos suponer que para U existe $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ difeomorfismo. Inducimos $\tilde{\varphi} = \varphi \circ p$ y nos da la estructura deseada.

$$\begin{tikzcd} \tilde{U} \subset X \arrow[r, "p|"] \arrow[dr, "\tilde{\varphi}"'] & U \subset M \arrow[d, "\varphi"] \\ & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

Para verificar la unicidad, basta ver que la identidad de X, ι_X, es un difeomorfismo local, entre cualesquiera dos estructuras diferenciables de X. Esto es inmediato tomando vecindades $\tilde{U}$ como en el párrafo anterior. ■

2.50 Observación. Se sigue también que p es un difeomorfismo local.

2.51 Proposición. *Sean M y N variedades conexas, si $p : N \to M$ es cubriente y N es simplemente conexa entonces (N, p) es cubriente universal.*

2.52 Teorema. *Sea M una variedad conexa. Entonces existe una variedad $\tilde{M}$ simplemente conexa y una transformación cubriente $p : \tilde{M} \to M$.*

2.53 Teorema. *Sea M una variedad y $(\tilde{M}, p)$ su cubriente universal. Entonces $(\tilde{M}, p)$ es Galois y $\Delta_p \cong \pi_1(M)$.*

2.54 Observación. Cuando nuestra variedad base es riemanniana, el cubriente recibe una estructura riemanniana mediante particiones de unidad de modo que $p : \tilde{M} \to M$ es una isometría local. Del mismo modo, usando la misma partición de la unidad obtenemos la conexión de Levi–Cività respectiva y, por lo tanto, el tensor de curvatura. De este modo, si M es plana, $\tilde{M}$ resulta plana de manera natural.

Asimismo, tenemos que las geodésicas de M se levantan en geodésicas de $\tilde{M}$.

2.4. Grupos Cubrientes

Si tomamos G un grupo de Lie conexo, éste es una variedad diferenciable, por lo que sabemos (2.51) que existe un cubriente universal $(\tilde{G}, p)$ que también es variedad diferenciable. A continuación veremos que $\tilde{G}$ puede ser provisto de una estructura de grupo y, naturalmente, resulta grupo de Lie.

Elegimos $\tilde{e}$ en la fibra de e y definimos $\phi : \tilde{G} \times \tilde{G} \to G$ como

$$\phi(\tilde{g}, \tilde{h}) = p(\tilde{g})p(\tilde{h})^{-1}$$

Como $\tilde{G}$ es simplemente conexo, $\tilde{G} \times \tilde{G}$ también lo es (cf. 2.28). Así, por 2.44 tenemos que existe un único levantamiento $\tilde{\phi}$ de ϕ,

$$\begin{tikzcd} & \tilde{G} \arrow[d, "p"] \\ \tilde{G} \times \tilde{G} \arrow[ur, dashed, "\tilde{\phi}"] \arrow[r, "\phi"'] & G \end{tikzcd}$$

tal que $\tilde{\phi}(\tilde{e},\tilde{e}) = \tilde{e}$. Así, para $\tilde{g},\tilde{h} \in \tilde{G}$ definimos

$$\tilde{g}^{-1} = \tilde{\phi}(\tilde{e},\tilde{g}), \quad \tilde{g}\tilde{h} = \tilde{\phi}(\tilde{g},\tilde{h}^{-1})$$

De la unicidad en 2.44 tenemos que las siguientes transformaciones coinciden:

$$\tilde{g} \mapsto \tilde{e}\tilde{g}, \quad \tilde{g} \mapsto \tilde{g}\tilde{e}, \quad \tilde{g} \mapsto \tilde{g}$$

pues las tres mandan $\tilde{e} \mapsto \tilde{e}$. De esto tenemos que

$$\tilde{e}\tilde{g} = \tilde{g}\tilde{e} = \tilde{g}$$

Análogamente, tenemos que también se cumple

$$\tilde{g}\tilde{g}^{-1} = \tilde{g}^{-1}\tilde{g} = \tilde{e}$$

Finalmente, por construcción p resulta un homomorfismo de grupos de Lie. Hemos demostrado el siguiente

2.55 Teorema. *Todo grupo de Lie conexo tiene un único espacio cubriente universal que es a su vez un grupo de Lie, ahora simplemente conexo, y la transformación cubriente respectiva es un homomorfismo de grupos de Lie.*

Por 2.53 tenemos que existe una transformación de cubierta que lleva a $\tilde{e}$ a cualquier otro elemento de la fibra de e. Sea $\tilde{e}'$ distinto de $\tilde{e}$ en la fibra de e. Entonces, por la construcción anterior, $(\tilde{G},\tilde{e}')$ tiene estructura de grupo de Lie. Denotemos por $\tilde{\phi}'$ a la correspondiente $\tilde{\phi}$. Entonces se cumple lo siguiente:

$$p \circ f \circ \tilde{\phi}(\tilde{g},\tilde{h}) = p \circ \tilde{\phi}(\tilde{g},\tilde{h}) = \phi(\tilde{g},\tilde{h})$$

$$p \circ \tilde{\phi}'(f(\tilde{g}), f(\tilde{h})) = \phi(f(\tilde{g}), f(\tilde{h})) = (p \circ f(\tilde{g}))(p \circ f(\tilde{h}))^{-1} = p(\tilde{g}))p(\tilde{h})^{-1} = \phi(\tilde{g},\tilde{h})$$

Luego, $f \circ \tilde{\phi}$ y $\tilde{\phi}' \circ (f,f)$ son, ambos, levantamientos de ϕ con respecto a p que mandan a $(\tilde{e},\tilde{e})$ en $\tilde{e}'$, por lo que son iguales. Es decir que

2.56 Proposición. *Todas las estructuras de grupo garantizadas por el teorema anterior son isomorfas.*

Capítulo 3

Grupos de Transformaciones

El tema de este capítulo es central para el desarrollo de este trabajo. La noción de grupo de transformaciones aparece de manera natural cuando uno estudia matemáticas. Cuando los objetos –de estudio– son conjuntos, la manera que uno tiene de relacionarlos es a través de funciones entre ellos. Se puede llegar –incluso– a afirmar que *solo se conoce cómo es un objeto* (léase conjunto) *si sabe cómo se relaciona con todos los demás.*

En particular, uno se fija en las funciones que van de un conjunto en sí mismo; más precisamente, en las funciones que cumplen con la propiedad de *tener inversa*. Esto se debe a que el conjunto de dichas funciones resulta ser un grupo con la operación de composición. Es ésta la noción más primitiva de grupo. De hecho es la única, como consecuencia del teorema de Cayley [Rot]. Es así como un grupo *actúa* sobre un objeto, por medio de transformaciones *reversibles* del mismo.

Los objetos que estudiamos en este trabajo son variedades diferenciables y los grupos son de Lie – en ocasiones nos conformaremos con grupos topológicos localmente compactos. De hecho, al final nuestros objetos serán también variedades riemannianas y grupos de isometrías.

3.1. Acciones de Grupos

Procedamos con las definiciones formales. En lo sucesivo nuestros grupos serán de Lie; si otro es el caso se especificará.

3.1 Definición. Dados M una variedad diferenciable y G un grupo, decimos que G *actúa* sobre M, si tenemos una transformación $\mu : G \times M \to M$ diferenciable tal que

1. $\mu(e, p) = p$ para toda $p \in M$ con $e \in G$ el neutro; y
2. $\mu(g, \mu(h, p)) = \mu(gh, p)$.

3.2 Observación. A la transformación μ la llamaremos *acción*. Llamaremos *grupo de transformaciones* a la terna (G, M, μ). Cuando el contexto esté claro, lo denotaremos por (G, M) o simplemente por G. De igual manera, representaremos $\mu(g, p) = gp$. Así, las propiedades de μ se rescriben como $ep = p$ y $g(hp) = (gh)p$. Diremos también que M es una G–variedad.

De dichas propiedades se desprende que $\mu_g : M \to M$ dada por $\mu_g(p) = \mu(g, p)$ es un difeomorfismo, puesto que $\mu_g \circ \mu_{g^{-1}} = \mu_e$. Llamaremos a este difeomorfismo *translación izquierda*. □

Siguiendo la misma filosofía tenemos, dado G fijo, la categoría de G–variedades. Para definir los morfismos necesitamos la siguiente

3.3 Definición. Dados dos grupos de transformaciones (G, M, μ) y (G, N, ν), se dice que una aplicación diferenciable $\varphi : M \longrightarrow N$ es *G-equivariante* si $\varphi(\mu(g, p)) = \nu(g, \varphi(p))$ o, más brevemente, si $\varphi(gp) = g\varphi(p)$.

3.4 Observación. Si φ es un difeomorfismo G-equivariante, entonces φ^{-1} también es G-equivariante, pues $\varphi^{-1}(gp) = \varphi^{-1}(g\varphi(\varphi^{-1}(p))) = \varphi^{-1}(\varphi(g\varphi^{-1}(p)) = g\varphi^{-1}(p)$. En este caso diremos que M y N son *G-equivalentes*. □

Así tenemos ya completa nuestra categoría $(G - \underline{\mathbf{Dif}})$.

3.5 Observación. De hecho, en la literatura, las acciones aquí definidas son llamadas también *acciones por la izquierda*. Se pueden definir las *acciones por la derecha* de manera totalmente análoga (v.gr. **Dif** $- G$). □

3.1.1. Propiedades de la Acción

Nos interesa estudiar la interacción especifica (y geométrica) entre G y su G-variedad; en concreto, analizando la siguiente relación en M inducida por la acción:

$$p \sim q \Leftrightarrow \exists g \in G, gp = q$$

Es inmediato verificar que $\sim$ es una relación de equivalencia.

Denotemos al espacio cociente $M^* := M/G := M/\sim$, dotado con la topología cociente y sea $\pi : M \to M/G$ la transformación cociente. En lo sucesivo π representará esta proyección.

3.6 Proposición. *π es continua y abierta. Además, el espacio cociente M^* es segundo numerable.*

Demostración. La continuidad de π se debe a la definición de topología cociente. Para ver que π es abierta, hay que checar que $\pi^{-1}(\pi(U))$ sea abierto dado que U lo es. Pero $\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{g \in G} gU = \bigcup_{g \in G} \mu_g(U)$, que es una unión de abiertos, pues μ_g es difeomorfismo. La numerabilidad se sigue de que π es suprayectiva y abierta, pues si $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una base numerable de M y V es un abierto de M^* tal que $\pi^{-1}(V) = \bigcup U_{n_j}$, como π es abierta se tiene que $V = \bigcup \pi(U_{n_j})$, de modo que $\{\pi(U_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es la base numerable buscada. ■

3.7 Definición.

1. Para cada $p \in M$ definimos la *órbita* de p como el conjunto $G(p) = \pi^{-1}(\pi(p))$.

2. Para cada $p \in M$ se define su *grupo de isotropía* o *estabilizador* como $G_p = \{g \in G \mid gp = p\}$.

3. Si $H \leq G$, $M^H = \{p \in M \mid hp = p, \forall h \in H\}$ es el *conjunto de puntos fijos* bajo H.

4. Diremos que la acción es *libre* si $G_p = \{e\}$, para cada $p \in M$.

5. La acción es *efectiva* si cada que $gp = p$ para toda $p \in M$, $g = e$.

6. Si $G(p) = M$ para alguna p, diremos que la acción es *transitiva* y que M es G-homogénea.

7. Para $A \subseteq M$ definimos la *saturación* de A como $G(A) = \mu(G, A)$. Se dice que A es G-*invariante* si $G(A) = A$.

3.8 Observación. El que la acción sea *efectiva* se puede pensar como que el homomorfismo $\psi : G \to Dif(M)$ que manda a g en μ_g sea inyectivo. Esto porque si $\mu_g = \mu_h$ se tiene que $g^{-1}hp = p$ para toda p, es decir $g = h$. El núcleo de ψ se puede escribir como

$$\ker \psi = \bigcap_{p \in M} G_p$$

De aquí se sigue que el que la acción sea *libre* es condición suficiente para que la acción sea *efectiva*.

$G(A)$ es G-invariante, pues $\mu(G, \mu(G, A)) = \mu(GG, A) = \mu(G, A)$, debido a la *asociatividad* de la acción (cf. 3.1). □

3.9 Proposición. *Si M es coneza, M^* es Hausdorff y existe $p \in M$ tal que su órbita es un abierto de M, entonces la acción es transitiva.*

Demostración. Como $\pi(p)$ es cerrado en M^*, tenemos que $G(p) = \pi^{-1}(\pi(p))$ es cerrado en M. Por hipótesis, $G(p)$ es abierto en M; luego $G(p) = M$. ■

3.10 Ejemplo. G actúa libremente sobre sí mismo a través de translaciones (izquierdas o derechas). Por otro lado, si H es un subgrupo cerrado de G, entonces H es de Lie y actúa naturalmente sobre G por translaciones por la derecha (cf. 3.5). Así G/H tiene estructura de G–variedad con la siguiente acción: $g(aH) = (ga)H$.

Claramente la acción está bien definida; de hecho, como $g'g^{-1}(gH) = g'H$, G/H es homogénea. Con estas definiciones, es claro que la proyección de G sobre G/H es equivariante. □

3.11 Ejemplo. Representaciones de Grupos
Sea V un espacio vectorial real de dimensión n. Al elegir una base de este espacio, a V se le puede dotar de la estructura de variedad diferenciable de $\mathbb{R}^n$. De hecho, si $GL(V)$ denota el grupo de automorfismos de V, este proceso también da una estructura de grupo de Lie a $GL(V)$ y un isomorfismo de grupos de Lie de este espacio con $GL_n(\mathbb{R})$. Es inmediato verificar que dicha estructura no depende de la elección de base. Esto es un ejemplo de un *grupo lineal de transformaciones*.

En general, un grupo de transformaciones (G, M, μ) se dice que es lineal, si M es un espacio vectorial y los μ_p son automorfismos lineales de M. Es decir, si tenemos un homomorfismo de Lie de G en $GL(M)$. Al morfismo $\rho : G \longrightarrow GL(M)$ se le llama una *representación* de G en M. Dentro de la teoría de representaciones, se dice que una representación es *fiel* si es efectiva de acuerdo con nuestro contexto; éste es el caso si G es un subgrupo cerrado de $GL(M)$. Además, μ está esencialmente dada por $g \cdot \bar{x} = (\mu_{ij})\bar{x}$, donde $\mu_{ij} : G \to \mathbb{R}$, las coordenadas de la matriz, son C^∞. Así $\rho(g) = (\mu_{ij}(g)) \in C^\infty(G)$.

Cuando M cuenta con un producto interior, tenemos otro concepto de suma importancia para nosotros. En este caso, $O(M)$ es el subgrupo de $GL(M)$ de aquellos automorfismos que preservan el producto interior. Si la representación ρ satisface $\rho(G) \subseteq O(M)$, decimos que es una *representación ortogonal*. □

3.12 Ejemplo. Sea (G, M, μ) un grupo de transformaciones. Entonces, para cada $p \in M$ tenemos una representación de G_p en T_pM, mediante $g \mapsto d(\mu_g)_p$, llamada la *representación de isotropía* en p, que nos será de utilidad más adelante. □

En la siguiente proposición daremos algunas construcciones importantes.

3.13 Proposición. *Sean (G, M, μ) y (H, N, ν) grupos de transformaciones, y sean $g \in G$, $h \in H$, $p \in M$ y $q \in N$. Se obtienen grupos de transformaciones a partir de las siguientes construcciones.*

1. *La acción* producto *de $G \times H$ sobre $M \times N$, dada por*

$$\mu \times \nu((g, h), (p, q)) = (\mu(g, p), \nu(h, q)).$$

2. (**El producto en $G-$ <u>Dif</u>**) *Si $H = G$, entonces la acción* diagonal *de G sobre $M \times N$ está dada por $\rho(g, (p, q)) = (\mu(g, p), \nu(g, q))$.*

3. *Sea $\backsim$ una relación de equivalencia en M, tal que $M/\backsim$ es una variedad con la topología cociente. Sea $x' \in M$. Si $x \backsim x'$ implica que $\mu(g, x) = \mu(g, x')$ para toda $g \in G$, entonces inducimos una acción cociente en $M/\backsim$ mediante $\bar{\mu}(g, [x]) = [\mu(g, x)]$. Llamaremos G-*equivariante *a una relación de equivalencia que cumpla esto.*

4. *Si H es un subgrupo cerrado de G, tenemos la acción* de restricción *de H en M, dada por la restricción $\mu|H \times M$.*

5. *Si N es una subvariedad G-invariante encajada en M entonces tenemos la acción* de restricción *de G en N, dada por la restricción de $\mu|G \times N$.*

Demostración. Esto es inmediato de las definiciones. ■

3.14 Proposición. *1. G_p es cerrado y por lo tanto de Lie;*

2. *$gG_pg^{-1} = G_{gp}$;*

3. *La transformación $\bar{\mu}_p : G/G_p \to M$, que manda cada gG_p en gp, es una inmersión inyectiva equivariante sobre $G(p)$;*

4. *Si la acción es transitiva, $\bar{\mu}_p$ es un difeomorfismo; y*

5. *Si G es compacto, entonces $G(p)$ es cerrado y $\bar{\mu}_p$ es un encaje.*

Demostración. Para *1* basta observar que $G_p \times \{p\} = \mu^{-1}(p) \cap (G \times \{p\})$, donde el lado derecho es cerrado por la continuidad de μ y por el hecho de que M es Hausdorff.

Para *2*: Es fácil mostrar la contención $\supseteq$. Recíprocamente, para verificar la contención $\subseteq$, sea $gag^{-1} \in gG_pg^{-1}$, entonces $gag^{-1}(gp) = ga(p) = gp$, lo cual muestra que $gag^{-1} \in G_{gp}$.

Para *3* sabemos que $\pi_p : G \to G/G_p$ tiene secciones locales diferenciables; luego $\bar{\mu}_p$ se escribe localmente como $gG_p \mapsto \mu(\sigma(gG_p), p)$, para alguna sección diferenciable σ, de modo que $\bar{\mu}_p$ es diferenciable. La equivarianza es inmediata de la definición. Para verificar que es en efecto una inmersión, utilizaremos el siguiente argumento [Kaw]: Sea $X \in T_{eG_p}(G/G_p)$ tal que $d(\bar{\mu}_p)_{eG_p}(X) = 0$. Como π_p es submersión, existe $Y \in T_eG$ con $d(\pi_p)_e(Y) = X$. Sea $y(t)$ el grupo monoparamétrico en G asociado a Y. Entonces

$$\frac{d}{dt}\pi_p(y(t))\bigg|_{t=0} = d(\pi_p)_e \circ \frac{d}{dt}y(t)\bigg|_{t=0} = d(\pi_p)_e(Y) = X.$$

Sea $Z \in \mathfrak{X}(M)$ el campo vectorial asociado al flujo inducido por $y(t)$ a través de μ. Este flujo es, de hecho, una acción de $\mathbb{R}$ en M. Entonces se tiene que

$$Z(p) = \frac{d}{dt}(y(t)p)\bigg|_{t=0} = d(\mu_p)_e(Y) = d(\bar{\mu}_p)_{eG_p} \circ d(\pi_p)_e(Y) = d(\bar{\mu}_p)_{eG_p}(X) = 0.$$

Así, tenemos que p queda fijo bajo Z (cf. 0.10), por lo que $\pi_p(y(t)) \equiv G_p$ y luego $X = 0$.

Por la equivarianza de $\bar{\mu}_p$ tenemos que $d(\bar{\mu}_p)_{gG_p} = d(\mu_p)_g \circ d(\pi_p)_e \circ d(\ell_{g^{-1}})_g$ con ℓ_g la translación izquierda dentro de G. Por lo tanto $\bar{\mu}_p$ es inmersión. La inyectividad es obvia.

Para *4*, sabemos por *3* que $\bar{\mu}_p$ es una inmersión y por ser suprayectiva, las dimensiones de M y de G/G_p coinciden. Por el teorema de la función inversa es un difeomorfismo local; luego es un difeomorfismo.

Finalmente, para *5*, como G es compacto, también lo es G/G_p. Así, siendo que M es Hausdorff, $\tilde{\mu}_p$ es un homeomorfismo sobre su imagen y $G(p)$ es compacto, luego cerrado. ■

Los siguientes ejemplos arrojan un poco de luz al respecto de cómo puede ser la acción. En particular, el segundo ejemplo muestra por qué hay que pedirle más condiciones a la acción para poder obtener una geometría razonable a partir de ella.

3.15 Ejemplo. Sea $M = \mathbb{R}^2$ y $G = \{\pm I\}$ con I la matriz identidad de 2×2, actuando de manera obvia. Entonces, G actúa por isometrías (la métrica usual) y por ser un conjunto finito, es cerrado en el grupo de isometrías de M.

Ahora, M^* es homeomorfo a $([0,\infty) \times \{0\}) \cup (\mathbb{R} \times (0,\infty))$— con la topología inducida de $\mathbb{R}^2$—, que no es variedad (ni siquiera topológica) pues $(0,0)$ no tiene vecindades homeomorfas a $\mathbb{R}^2$ o a $\mathbb{H}^2$, como sí el resto de los puntos. □

3.16 Ejemplo. Flujo Irracional en el Toro

Afirmación. *Sea $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Entonces $\{\alpha m + n \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ es denso en $\mathbb{R}$.*

Para una demostración de esto se puede consultar [PM], pág. 14, por ejemplo.

Ahora, sea M el 2-toro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Consideremos, además, su parametrización canónica $(t,s) \mapsto (e^{2\pi i t}, e^{2\pi i s})$. Podemos dar la siguiente acción ϑ de $\mathbb{R}$ sobre M:

$$\left(r, \left(e^{2\pi i t}, e^{2\pi i s}\right)\right) \longmapsto \left(e^{2\pi i(t+r)}, e^{2\pi i(s+\alpha r)}\right),$$

donde $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ como antes. Es inmediato verificar que en efecto es una acción.

Afirmación. $(\mathbb{R}, \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, \vartheta)$ *es libre.*

Demostración. Vemos que si $\vartheta_r(x) = \vartheta_\rho(x)$, entonces $r = \rho$. Si se cumple lo primero, entonces $r - \rho \equiv 0 \mod 2\pi i$ y $\alpha(r-\rho) \equiv 0 \mod 2\pi i$, por lo que $r = \rho$. ■

De lo anterior se sigue que $\vartheta_p : \mathbb{R} \to M$ es una inmersión inyectiva.

Afirmación. *$\vartheta_p(\mathbb{R})$ es denso en M, para toda $p \in M$.*

Demostración. Sean $\varepsilon > 0$, $(t', s'), (t, s) \in [0,1] \times [0,1]$. Por la primera afirmación, existen $m, n \in \mathbb{Z}$ tales que $|u - (\alpha m + n)| < \varepsilon$ con $u = s - s' - \alpha(t - t')$. Ahora, si $r = t - t' + m$, se tiene que

$$\|(t,s) - [(t' + r, s' + \alpha r) - (m,n)]\| = \|(0, u - (\alpha m + n))\| = |u - (\alpha m + n)| < \varepsilon$$

Si escribimos $p \in M$ como $(e^{2\pi i t'}, e^{2\pi i s'})$ y $q \in M$ como $(e^{2\pi i t}, e^{2\pi i s})$, la expresión anterior implica que dado un abierto U de q existe $r \in \mathbb{R}$ con $\vartheta_r(p) \in U$. ■

Corolario. *M^* tiene la topología indiscreta.*

Esto muestra que las órbitas no son necesariamente cerradas ni el cociente necesariamente Hausdorff, ¡ya no digamos variedad! □

Los siguientes serán nuestros ejemplos canónicos de acciones.

3.17 Ejemplo. 1. Pensemos en la acción lineal natural de $GL_n(\mathbb{R})$ en $\mathbb{R}^n$. Para cada $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ podemos encontrar una base $\{\beta_i, x\}_{i=1}^{n-1}$ de $\mathbb{R}^n$ tal que $[A] = \begin{pmatrix} B & 0 \\ v & 1 \end{pmatrix}$ con $B \in GL_{n-1}(\mathbb{R})$ y $v \in \mathbb{R}^{n-1}$. Como

$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ v & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C & 0 \\ w & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BC & 0 \\ vC + w & 1 \end{pmatrix}$$

tenemos que $GL_n(\mathbb{R})_x$ es isomorfo a $GL_{n-1}(\mathbb{R}) \ltimes_\theta \mathbb{R}^{n-1}$ con $\theta(C, v) = vC$. Entonces, como la acción es obviamente transitiva, $GL_n(\mathbb{R})/GL_n(\mathbb{R})_x$ es difeomorfo a $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Más aún, $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}/GL_n(\mathbb{R})$ consta de un solo punto, pero $\mathbb{R}^n/GL_n(\mathbb{R})$ es un espacio con la topología indiscreta que consta de dos puntos: la clase del origen y el punto anteriormente definido.

2. Del inciso anterior, podemos pensar que $GL_n(\mathbb{R}) \leq GL_{n+1}(\mathbb{R})$ a través de su inclusión en $GL_{n+1}(\mathbb{R})_{e_{n+1}}$ (que por cierto es cerrado):

$$A \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

con $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Así, tenemos una acción de $GL_n(\mathbb{R})$ en $\mathbb{R}^{n+1}$. En este caso, el subespacio generado por los n primeros vectores canónicos queda invariante pues $A\cdot(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = (A(x_1, \ldots, x_n), x_{n+1})$. De esto se sigue que, considerando $M = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, las órbitas están parametrizadas por $\mathbb{R}$ a través de $\langle e_{n+1}\rangle$ y que todas son difeomorfas; luego M^* es homeomorfo a $\mathbb{R}$. Por otro lado, los grupos de isotropía resultan naturalmente isomorfos (cf. 1) con $GL_{n-1}(\mathbb{R}) \ltimes_\theta \mathbb{R}^{n-1}$. Finalmente, por linealidad se cumple que $GL_n(\mathbb{R})_{tx} = GL_n(\mathbb{R})_x$ para toda $t \neq 0$. Considerando todo $\mathbb{R}^{n+1}$, tenemos que cada punto de la recta $\langle e_{n+1}\rangle$ es punto fijo por lo que cada singulete es una órbita. Así, el espacio de órbitas es homeomorfo a $\mathbb{R} \times \{0,1\}$ provisto con la siguiente topología. La topología de $\mathbb{R} \times \{0\}$ es la usual. Los abiertos de cada punto $(t,1)$ son de la forma $U \times \{0\} \cup \{(t,1)\}$ donde U es un abierto usual de $t \in \mathbb{R}$. En consecuencia la topología notoriamente no es Hausdorff.

3. Si consideramos ahora el subgrupo ortogonal $O(n)$ de $GL_n(\mathbb{R})$, actuando sobre $\mathbb{R}^n$ –como en (1)–, vemos que éste actúa sobre esferas concéntricas con centro en el origen, y el origen visto como esfera de radio cero. El espacio de órbitas es homeomorfo a $[0,\infty)$ (tómese cualquier rayo desde el origen).

   Si calculamos el estabilizador de cualquier punto distinto del origen tenemos que es isomorfo a $O(n-1)$. Esto porque para cada A en el grupo,
$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & 0 \\ v & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} BB^T & Bv^T \\ vB^T & vv^T+1 \end{pmatrix},$$
   de donde $BB^T = I$ y $|v|^2 = vv^T = 0$, por lo que $v = 0$. El estabilizador del origen es todo el grupo ortogonal. Así, la restricción de esta acción sobre la esfera resulta ser transitiva y $\mathbb{S}^{n-1} \cong O(n)/O(n-1)$.

4. De manera totalmente análoga, considerando ahora a $SO(n)$, obtenemos que $\mathbb{S}^{n-1} \cong SO(n)/SO(n-1)$.

5. Podemos pensar en el caso similar a (2), para el grupo ortogonal o el grupo especial ortogonal actuando sobre $\mathbb{S}^n$. Tenemos, por ejemplo, la acción de

$O(n)$ en $\mathbb{S}^n$ dada, por claridad, como

$$((a_{ij})_{i,j=1}^n, (x_j)_{j=1}^{n+1}) \mapsto \begin{pmatrix} (a_{ij})_{i,j=1}^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (x_i)_{i=1}^n \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = ((a_{ij})(x_j), x_{n+1})$$

De esto se ve que las órbitas son los cortes de nivel x_{n+1}, de los que hay dos tipos: $x_{n+1} = \pm 1$ y los demás. Los primeros son puntos fijos y los demás son esferas de dimensión $n-1$ con radio $\sqrt{1 - x_{n+1}^2}$, denotadas $\mathbb{S}^{n-1}(\sqrt{1 - x_{n+1}^2})$. Los estabilizadores de los puntos fijos son todo G y para los demás casos son difeomorfos a $SO(n-1)$, lo cual se muestra combinando (2), (3) y (4). Esto nos da que M^* es naturalmente homeomorfo a $[-1, 1]$.

6. La acción de $G = O(n)$ dada en el inciso anterior induce una acción sobre $\mathbb{R}P^n$, pues la transformación antípoda de la esfera es equivariante. Para calcular los grupos de isotropía vemos del inciso anterior, junto con la última observación de (1), que $G_{-x} = G_x$. Por esto concluimos que los estabilizadores se "conservan"; esto dice que las órbitas resultan también difeomorfas. Por lo que M^* resulta homeomorfo a $[0, 1]$.

7. La acción producto $O(n) \times O(m)$ sobre $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Por lo visto en los incisos anteriores tenemos que las órbitas son de los siguientes tipos: $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^{m-1}$, $\mathbb{S}^{n-1} \times \{0\}$, $\{0\} \times \mathbb{S}^{m-1}$. El espacio de órbitas es el producto $[0, \infty) \times [0, \infty)$.

8. Si restringimos la acción anterior a $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}^m$ tenemos que las órbitas son de dos tipos: $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^{m-1}$ ó $\mathbb{S}^{n-1}$. De hecho, M^* es naturalmente homeomorfo a cualquier rayo $\mathbb{R}_+$.

9. Siguiendo (3.10) tenemos a $G = \mathbb{R}^n$ y $H = \mathbb{Z}^n$. H es discreto, por lo que $T^n := G/H$ es una variedad de dimensión n. A esta variedad la llamaremos el toro n-dimensional.
   Como $ex : \mathbb{R}^n \to \prod_{i=1}^n \mathbb{S}^1$ dada por $ex[(x_j)_{j=1}^n] = (e^{2\pi i x_j})_{j=1}^n$ es homomorfismo de grupos y tenemos que $\ker ex = \mathbb{Z}^n$, se sigue que $T^n \cong \prod_{i=1}^n \mathbb{S}^1$. (Obsérvese que, de hecho, dicho difeomorfismo es isomorfismo de grupos.)

3.2. Tipos Orbitales

En lo sucesivo, nos interesará saber a mayor profundidad cómo actúa el grupo G sobre la variedad M. Queremos responder, fundamentalmente, a la pregunta de cómo son las órbitas; qué tan diferentes son unas de otras. Para esto, damos la siguiente

3.18 Definición. 1. Si H es un subgrupo de isotropía de G, decimos que la órbita $G(p)$ es de tipo (H) si G_p es conjugado de H.

2. Si H y K son subgrupos de isotropía de G, decimos que $(H) \preceq (K)$ (menor o igual que) si K es conjugado de un subgrupo de H.

3. $M_{(H)}$ es el subconjunto de M consistente de todos los puntos con órbitas de tipo (H). □

Denotaremos por $\mathcal{O}(G, M)$ el conjunto de tipos orbitales. De acuerdo a 3.14, cualquier órbita es la imagen de G/H para algún $H \leq G$. En esencia, la relación inducida en $\mathcal{O}(G, M)$ es la restricción de la acción inducida en el conjunto de subgrupos de G módulo automorfismos internos. Esta relación da a $\mathcal{O}(G, M)$ un orden parcial.

El resultado más importante de este capítulo, el teorema de la órbita principal (3.65), nos dará una idea más clara de cómo es $\mathcal{O}(G, M)$.

3.19 Definición. 1. Diremos que una órbita $G(p)$ es *principal* si existe una vecindad U de p en M, tal que para todo $q \in U$, $(G_q) \preceq (G_p)$. En este caso, diremos que G_q es un *subgrupo principal de isotropía*.

2. A los puntos cuya órbita sea principal los llamaremos *puntos regulares* y denotaremos por M_r al conjunto que contiene solo a estos puntos. Sea M_s su complemento en M. □

3.3. Cohomogeneidad

La siguiente es la noción fundamental para este trabajo.

3.20 Definición. Sea (G, M, μ) un grupo de transformaciones. Decimos que G actúa con *cohomogeneidad* k si tiene una órbita de codimensión k y ninguna de codimensión menor. En este caso usaremos la notación $\operatorname{cohom}_G M = k$. Cuando no haya peligro de confusión la denotaremos simplemente por $\operatorname{cohom} M$. □

La cohomogeneidad es la medida de cuán lejos está una acción de ser transitiva. En este último caso, tenemos que la codimensión de la órbita es CERO. Así, la cohomogeneidad es una manera de extender la noción de espacios homogéneos.

3.21 Ejemplo. Podemos clasificar los ejemplos de secciones anteriores de acuerdo con su cohomogeneidad:

1. $\operatorname{cohom} M = 0$: $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^n$, $\mathbb{R}P^m$, productos de ellos.

2. $\operatorname{cohom} M = 1$: $(O(n), \mathbb{R}^n)$, el flujo irracional, $(O(n-1), \mathbb{S}^n)$,
   $(O(n) \times O(m), \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}^m)$.

3. $\operatorname{cohom} M = 2$: $(O(n) \times O(m),\ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$. □

Como se observa de los ejemplos, se cumple que las órbitas principales son solo de un tipo y son las que dan el valor de cohom M. Esto es cierto para el tipo de acciones que veremos a continuación; de hecho, como ya dije ése será uno de los resultados más importantes de este capítulo (Teorema 3.65).

3.4. Acciones Propias

A continuación definimos el tipo de acciones a las que nos restringiremos en el resto de este trabajo, las llamadas acciones propias.

La noción de acción propia tiene su origen en un contexto más general. En el trabajo de Palais[1] [Pal], se consideran grupos topológicos, localmente compactos. Los espacios donde actúan los grupos son completamente regulares y se les llama, simplemente, G-espacios.

3.22 Definición. Si X es un G-espacio:

1. Para $A, B \subseteq X$ definimos $(A, B) = \{\ g \in G \mid gA \cap B \neq \varnothing\ \}$. Si $A = B$, denotamos $((A)) = (A, A)$.
2. Decimos que A es *delgado con respecto* a B si (A, B) tiene cerradura compacta. Si $A = B$, decimos simplemente que A es *delgado*.
3. Un conjunto $A \subseteq X$ es *pequeño* si cada punto de X tiene una vecindad delgada con respecto a él.
4. Un G–espacio es *propio* si cada punto de X tiene una vecindad pequeña. Decimos también que la acción es *propia*. $\square$

Es inmediato observar que la segunda definición es simétrica. De estas definiciones, se concluyen las siguientes propiedades.

3.23 Proposición. *Sea X es un G-espacio y $K, L \subseteq X$.*

1. *Si K y L son compactos, entonces (K, L) es cerrado.*
2. *Un subconjunto de un conjunto delgado (resp. pequeño) es delgado (resp. pequeño).*

[1] [pa'lc]

3. $(\bigcup_i U_i, \bigcap_i V_i) \subseteq \bigcup_i (U_i, V_i)$.

4. *Cualquier conjunto compacto es delgado con respecto a un conjunto pequeño. De hecho, un conjunto compacto tiene una vecindad delgada.*

5. *Si X es propio, cualquier compacto es pequeño y tiene una vecindad pequeña.*

6. *Si X es propio, (K, L) es compacto si K y L lo son.*

7. *Si G es compacto, entonces X es propio.*

Demostración. Para *1*, tenemos que si $\{g_n\} \subseteq (K, L)$ con $g_n \to g$ entonces existe $\{k_n\} \subseteq K$ con $g_n k_n \in L$. Entonces, pasando a una subsucesión, podemos suponer que $g_n k_n \longrightarrow \ell$ y, análogamente, que $k_n \longrightarrow k$. Así,

$$gk = \lim_{n\to\infty} g_n k = \lim_{n\to\infty} g_n k_n = \ell.$$

Para *2* basta ver que $(A, C) \subseteq (B, D)$ si $A \subseteq B$ y $C \subseteq D$. Esto es obvio.
Para *3*, sea $g \in (\bigcup_i U_i, V)$ con $V = \bigcap_i V_i$; entonces $\varnothing \neq (g \bigcup_i U_i) \cap V = \bigcup_i (gU_i \cap V)$; por lo que $gU_i \cap V \neq \varnothing$ para alguna i. Luego $g \in \bigcup_i (U_i, V_i)$.
Para *4*, si K es compacto y P pequeño, para cada $k \in K$ hay una vecindad U_k delgada respecto a P. $\{U_k\}$ es una cubierta de K, tiene una subcubierta finita $\{U_{k_i}\}$ y *2* y *3* dan el resultado.
Para *5* se sigue el mismo procedimiento anterior, dando una cubierta del compacto por vecindades pequeñas.
Para *6* damos una vecindad delgada de K con respecto a la vecindad pequeña garantizada para cada punto de L. Con estas últimas obtenemos una cubierta de L a la que le extraemos una subcubierta finita. Concluimos aplicando *1* y *2*.
7 es obvio, pues todos los cerrados son compactos. ∎

En nuestro caso, los espacios son además variedades; es decir localmente euclidianos (por tanto, localmente compactos) y segundo numerables. Por esto, tenemos la siguiente equivalencia.

3.24 Proposición. *Sea $X = M$ una variedad. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. *M es propia.*

2. *(K, L) es compacto si K y L lo son.*

3. *La aplicación $\xi : G \times M \to M \times M$, dada por $\xi(g, p) = (p, gp)$ es propia.*

Demostración.

1 $\Rightarrow$ *2* Ya fue demostrado en la proposición anterior.

2 $\Rightarrow$ *3* Para esto basta ver que $\xi^{-1}(K \times L) \subseteq (K, L) \times K$. El lado izquierdo es cerrado, por continuidad. El lado derecho es compacto. (Obsérvese que hasta aquí no se ha usado que X sea variedad.)

3 $\Rightarrow$ *2* Como G es segundo numerable, en particular es Lindelöf y, por lo tanto, ser compacto es equivalente a ser compacto por sucesiones. Sea $\{g_n\} \subseteq (K, L)$. Entonces existe $\{k_n\} \subseteq K$ tal que $g_n k_n \in L$. Pasando a una subsucesión, podemos suponer que $\{k_n\}$ converge a k. Por la continuidad y por la compacidad de L, $g_n k \in L$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Así, $\{g_n\} \times \{k\} \subseteq \xi^{-1}(\{k\}, L)$, por lo que es un cerrado contenido en un compacto; luego tiene una subsucesión convergente.

2 $\Rightarrow$ *1* Esto es inmediato de que X es localmente compacto. Se propone para cada punto una vecindad U_α de cerradura compacta. Por la proposición anterior $(U_\alpha, U_\beta) \subseteq (\overline{U}_\alpha, \overline{U}_\beta)$. Luego dichas vecindades son pequeñas. ∎

3.25 Corolario. *En variedades, lo siguiente es equivalente.*

- *(G, M) es propio.*

- *Dados $\{p_n\} \subseteq M$ y $\{g_n\} \subseteq G$, si $\{p_n\}$ y $\{g_n p_n\}$ convergen entonces $\{g_n\}$ tiene una subsucesión convergente.*

3.26 Observación. Palais y Terng [PT2] dan como definición de acción propia la caracterización dada por este corolario.

3.27 Proposición. *Si (G, M) es propio tenemos que:*

1. *G_p es compacto;*
2. *$\bar{\mu}_p : G/G_p \to G(p)$ es un encaje y $G(p)$ es cerrado; y*
3. *M/G es Hausdorff.*

Demostración.

1 Esto es obvio pues $G_p = ((\{p\}))$.

2 Sabemos que la restricción de una función $\xi : A \to B$ propia a un subconjunto de la forma $\xi^{-1}(C)$ con $C \subseteq B$ es también propia. Así, μ_p es propia por ser la restricción de μ a $G \times \{p\} = \mu^{-1}(\{p\} \times G(p))$. Finalmente, $\bar{\mu}_p$ también es propia pues $\bar{\mu}_p^{-1}(K) = \pi_p \mu_p^{-1}(K)$ es compacto si K lo es, porque π_p es continua. Así, $\bar{\mu}_p$ es propia y, como en [Pa2], se sigue que $\bar{\mu}_p$ es cerrada. Luego es un encaje pues es cerrada y biyectiva; por lo tanto, $G(p)$ es cerrado.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\pi_p"] & G(p) \\ G/G_p \arrow[ur, "\bar{\mu}_p"'] & \end{tikzcd}$$

3 Como π es abierta y sobre, el hecho de que M^* sea Hausdorff es equivalente a que $\{(p, p') \mid \pi(p) = \pi(p')\} \subseteq M \times M$ sea cerrado. Pero este último conjunto es precisamente $G(p) \times G(p)$, que es cerrado porque $G(p)$ lo es. ∎

3.5. Acciones Riemannianas y Métricas Invariantes

Sea (M, g) una variedad riemanniana conexa y completa. Por el resultado probado por S.B. Myers y N.E. Steenrod en [MS], sabemos que $\mathfrak{Iso}_{\mathrm{g}}(M)$, el grupo de las isometrías de (M, g), dotado con la topología compacto–abierta, es un grupo de Lie. También tenemos que $\mathfrak{Iso}_{\mathrm{g}}(M)$ es compacto siempre que M lo sea. La conexidad, empero, no se preserva; por ejemplo, $O(n)$ tiene dos componentes conexas.

En lo que resta de la sección, G representará un subgrupo cerrado de $\mathfrak{Iso}_{\mathrm{g}}(M)$ y consideraremos su acción en M a través de isometrías. Diremos que G es un *grupo riemanniano de transformaciones* y, mismas consideraciones, le denotaremos (G, M, g, μ) o (G, M, g).

El siguiente resultado relaciona a la exponencial asociada a g con las isometrías.

3.28 Proposición. *Sea φ una isometría de (M, g).*

1. $\varphi \circ \exp_p(tv) = \exp_{\varphi(p)}(td\varphi_p(v))$ *para toda t donde esté definida la exponencial.*

2. *Si ψ es otra isometría tal que $\psi(p) = \varphi(p)$ y $d\psi_p = d\varphi_p$ para alguna p en M, entonces son idénticas.*

3. *Las componentes conexas del conjunto de puntos fijos de φ en M son subvariedades totalmente geodésicas.*

Demostración.

1 Recordemos que una isometría φ manda geodésicas en geodésicas. Recordemos también que una geodésica queda determinada de manera única dado un punto inicial y un vector de dirección. Así, tenemos que la geodésica $\varphi(\exp_p(tv))$ y la geodésica $\exp_\varphi(td\varphi_p(v))$ tienen vector tangente $d\varphi_p(v)$ en $t = 0$, respectivamente. Esto es precisamente lo que queríamos.

2 Como M es completa y conexa, sabemos que para toda $q \in M$ existe $v \in T_pM$ tal que $q = \exp_p(v)$. Luego, si ψ cumple lo que se pide, $\varphi(q) = \exp_q(d\varphi_p(v)) = \exp_q(d\psi_p(v)) = \psi(q)$, para toda $q \in M$.

3 Sea p un punto fijo. Si $\{p\}$ es su componente conexa, pues ya es una subvariedad y como tiene dimensión 0 es totalmente geodésica, por vacuidad. Supongamos que su componente conexa tiene más de un punto. Sean $V \subseteq T_pM$ y $U \subseteq M$ tales que $\exp_p|V \to U$ es difeomorfismo. Si $q \in U$ es un punto fijo de φ tal que $q = \exp_p(v)$, obtenemos

$$\exp_p(v) = q = \varphi(q) = \varphi \circ \exp_p(v) = \exp_p(d\varphi_p(v))$$

lo que dice –por linealidad– que $d\varphi_p$ es la identidad a lo largo de $\langle v \rangle$. Recíprocamente, si tenemos una dirección en T_pM donde $d\varphi_p$ es la identidad es obvio que los puntos de U que provienen de esa dirección bajo la exponencial son puntos fijos. Así, los puntos fijos en una vecindad de p determinan el espacio propio al valor propio 1; más precisamente, una vecindad de dicho subespacio. La exponencial restringida a esta vecindad es la carta que buscábamos.

Como, por lo anterior, la componente conexa es también localmente conexa por trayectorias, toda ella es conexa por trayectorias. Así, tenemos que la dimensión del espacio propio asociado a cada punto fijo es constante a lo largo de ellas, luego es constante. Por lo tanto, ya tenemos un atlas para la componente de p. Además, por construcción, esta componente está dada localmente por geodésicas. ■

3.29 Observación. Las componentes pueden ser de diferente dimensión, como el caso de la isometría inducida en $\mathbb{R}P^n$ por la isometría en $\mathbb{S}^n$ dada por la matriz

$$\begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde I es la matriz identidad de $n \times n$. Los puntos en $\{\ [p] \mid p \in \mathbb{S}^{n-1} \times \{0\}\}$ determinan una componente difeomorfa a $\mathbb{R}P^{n-1}$, mientras que $\{[(\bar{0}, 1)]\}$ es otra.

3.30 Lema. *Sea (X, d) un espacio métrico conexo y localmente compacto y sea $\{\varphi_i\}$ una sucesión de isometrías de (X, d). Si existe un punto x tal que $\varphi(x)$*

converge, entonces existe una subsucesión $\{\varphi_{i_k}\}$ que converge a una isometría de (X,d).

La demostración de este lema se debe a van Dantzig y van der Waerden y se puede encontrar en [KN], pág. 47.

3.31 Observación. La conexidad es necesaria, pues si $X = \mathbb{R} \times \{0,1\}$ con la función distancia dada por

$$d((t,i),(s,j)) = (|t-s|-1)\delta_{ij} + 1$$

y φ_n se define como $\varphi_n(t,i) = (t+ni,i)$, se tiene que $x = (t,0)$ es punto fijo y la sucesión no tiene subsucesiones convergentes. La compacidad local también es ineludible: Consideremos $\mathbb{R}^\infty$, el espacio de sucesiones, con la norma infinito, y fijémonos en la siguiente sucesión de isometrías: φ_n es la isometría que cumple que $\varphi_n(e_i) = (-1)^{\delta_{ni}}e_i$, con los e_i definidos de manera estándar y δ_{ni} la delta de Kronecker usual. Esta sucesión de isometrías no tiene una subsucesión convergente.

3.32 Teorema. *Sea $G \subseteq \mathfrak{Iso}_{\mathrm{g}}(M)$ un subgrupo cerrado de isometrías de M. Entonces G actúa propiamente sobre M. Además, la representación de isotropía $\rho : G_p \to GL(T_pM)$ es un encaje en el grupo ortogonal $O(T_pM)$.*

Demostración. De acuerdo a 3.26 tomemos $g_np_n \to q$ y $p_n \to p$ con $p_n, p \in M$ y $g_n \in G$. Entonces

$$\mathsf{d}(g_np,q) \leq \mathsf{d}(g_np,g_np_n) + \mathsf{d}(g_np_n,q)$$

con d la función distancia inducida en M. Se sigue por continuidad de g_n que $g_np \to q$. Usando 3.30 tenemos que existe una subsucesión $\{g_{n_k}\}$ convergente. Eso concluye y la acción es propia.

Ahora, por 3.28, si $\rho(g) = \rho(h)$ con $g,h \in G_p$, como $gp = hp$, se tiene que $g = h$. Esto dice que tenemos un encaje: como la acción es propia el estabilizador es compacto, además la transformación es inyectiva por lo que entonces es un homeomorfismo. ∎

3.33 Corolario. *G actúa efectivamente.*

Veremos en la sección 3.6.2 que el recíproco de este teorema es cierto; es decir, si tenemos un grupo actuando efectiva y propiamente, existe una métrica invariante de M que hace del grupo un subgrupo cerrado del grupo de isometrías respectivo a tal métrica. Comenzaremos probando dicho recíproco para el caso en el que G es compacto.

Como vimos en la sección 1.3, existen integrales invariantes sobre G si G es compacto.

3.34 Lema. *Sea G compacto actuando sobre M. Sea $f : M \to \mathbb{R}$ diferenciable y sea $\int$ una integral normalizada sobre G. Entonces $h : M \to \mathbb{R}$ dada por $h(p) = \int_G f(gp)dg$ es C^∞ y es G–invariante.*

3.35 Lema. *Sea $\rho : G \to GL(V)$ una representación del grupo compacto G en V. Entonces existe un producto interior $\langle\ ,\ \rangle$ tal que ρ es ortogonal.*

Demostración. Sea $\{\ ,\ \}$ un producto interior de V. Entonces definimos

$$\langle X, Y\rangle = \int_G \{\rho_h(X), \rho_h(Y)\}dh.$$

Así,

$$\begin{aligned}\langle \rho_g(X), \rho_g(Y)\rangle &= \int_G \{\rho_h(\rho_g(X)), \rho_h(\rho_g(Y)\}dh \\ &= \int_G \{\rho_{hg}((X), \rho_{hg}(Y)\}dh \\ &= \int_G f \circ r_g(h)dh \overset{\text{inv}}{=} \int_G f(h)dh \\ &= \int_G \{\rho_h(X), \rho_h(Y)\}dh = \langle X, Y\rangle\end{aligned}$$

con $f(h) = \{\rho_h(X), \rho_h(Y)\}$. Que es un producto interior es inmediato. ■

3.36 Teorema. *Sea G un grupo compacto actuando sobre M. Entonces existe una métrica g G–invariante en M; es decir, tal que*

$$\mathrm{g}_p(X, Y) = \mathrm{g}_{gp}(d(\mu_g)_p(X), d(\mu_g)_p(Y)).$$

Demostración. Sean $\int$ una integral invariante normalizada de G y $\mathfrak{h}$ una métrica cualquiera sobre M. Para $p \in M$ y $X, Y \in T_pM$, definimos

$$\mathfrak{g}_p(X,Y) = \int_G \mathfrak{h}_{hp}(d(\mu_h)_p(X), d(\mu_h)_p(Y))dh.$$

Por los lemas anteriores, se tiene que $\mathfrak{g}$ es la métrica buscada. ∎

3.6. Rebanadas

Ahora volvemos a considerar el caso en que la acción no necesariamente sea riemanniana. En nuestro camino a la demostración del teorema de la órbita principal necesitaremos la siguiente noción técnica.

3.37 Definición. Sea M una G–variedad. Sea R una subvariedad encajada de M. Diremos que R es una *rebanada en* $p \in M$ si existe una vecindad G–invariante U de $G(p)$ y una retración diferenciable G–equivariante $r : U \to G(p)$ tal que $R = r^{-1}(p)$. A la pareja (U,r) la llamaremos G-*tubo* de $G(p)$.

3.38 Observación. En el caso Hausdorff, sabemos que la existencia de una retracción implica que $r(U) = G(p)$ es cerrado. Además, para cada A, B abiertos relativos de $G(p)$ (inclusive aquellos de la forma $\bar{\mu}_p(V)$ con $V \subseteq G/G_p$) tales que $A \cap B = \varnothing$, entonces $r^{-1}(A) \cap r^{-1}(B) = \varnothing$, con cada uno de ellos abierto de M. Esto pues si tuvieran intersección no trivial, sus imágenes directas también. Esto quiere decir que $\bar{\mu} : G/G_p \to G(p)$ es un encaje.

3.39 Proposición. *Sea R una rebanada para (G, M) en p, con $r : U \to G(p)$ como en la definición anterior. Denotemos $H = G_p$. Entonces*

1. *$G(R) = U$.*
2. *$((R)) = G_p$; es decir que R es una G_p-variedad.*
3. *$G_s \subseteq G_p$ y $G_s = H_s$ para toda $s \in R$, por lo que $(G_p) \preceq (G_q)$ para toda $q \in U$.*

4. *Si $G(p)$ es principal, (G_q) también es principal para toda $q \in U$.*

5. *$r : U \to G(p)$ es una sumersión y existe una vecindad $V \subset G/G_p$ de G_p tal que $r^{-1}(\bar{\mu}_p(V)) \simeq V \times R$.*

6. *$R/G_p \simeq G(R)/G$, que es una vecindad de $G(p)$ en M^*.*

Demostración. 1. Como U es invariante, tenemos que $G(R) \subseteq U$. Recíprocamente, si $q \in U$, entonces $r(q) = gp$ para alguna g, de modo que $r(g^{-1}q) = p$ y $g^{-1}q \in R$.

2. Sea $g \in G$ tal que $gR \cap R \neq \varnothing$, es decir, existen $s, s' \in R$ con $s' = gs$; luego $p = r(s') = r(gs) = gr(s) = gp$. Y si $g \in G_p$, entonces $r(gs) = gp = p$ luego $gs \in R$. Además, como $H_s = G_s \cap H$ tenemos que $H_s = G_s$.

3. Si $gs = s$ con $s \in R$, entonces $p = r(s) = r(gs) = gr(s) = gp$; es decir $G_s \subseteq G_p$. Como $H_s = H \cap G_s$, se sigue $G_s = H_s$. Luego $(G_p) \preceq (G_q)$ para toda $q \in U$, por 3.14.

4. Por el inciso anterior, $(G_p) \preceq (G_q)$ para toda $q \in U$; como $G(p)$ es principal, $(G_p) \succeq (G_q)$ para toda q en una vecindad de $G(p)$, luego se da la igualdad.

5. Sea $\sigma : V \subseteq G/G_p \to G$ una sección local de π_p con $\sigma(G_p) = e$. Entonces tenemos que $d\sigma_u$ es inyectiva para toda $u \in U$. Esto por ser sección. Definamos $\psi : V \times R \to M$ como $\psi(u, s) = \mu(\sigma(u), s)$. Sean $X \in T_u G/Gp$ y $Y \in T_s R$ y sean $x : I_\epsilon \to G/G_p$ y $y : I_\epsilon \to R$ curvas tales que $x(0) = u$, $\dot{x}(0) = X$, $y(0) = s$ y $\dot{x}(0) = Y$. Entonces

$$d\psi_{(u,s)}(X, Y) = (d\mu_s)_{\sigma(u)} \circ d\sigma_u(X) + (d\mu_{\sigma(u)})_s(Y) \qquad (3.1)$$

Además, como $G_s \subseteq G_p$, el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\mu_s"] \arrow[d, "\pi_p"'] & U \arrow[d, "r"] \\ G/G_p \arrow[r, "\bar{\mu}_p"'] & G(p) \end{tikzcd}$$

Por lo que tenemos que

$$dr_{\psi(u,s)}(d\mu_s)_{\sigma(u)} \circ d\sigma_u(X) = d_u\bar{\mu}_p(X) \tag{3.2}$$

que dice que r es una sumersión. Además, $r \circ \psi(u,s) = \bar{\mu}_p$. De esto se sigue que

$$dr_{\psi(u,s)}(d\mu_{\sigma(u)})_s(Y) = 0 \tag{3.3}$$

Juntando las tres tenemos que ψ es una inmersión, además, ψ es claramente inyectiva.

Ahora, como r es una sumersión y $R = r^{-1}(p)$ tenemos que $\operatorname{codim} R = \dim G(p)$. Esto dice que $\dim r^{-1}(\bar{\mu}_p(V)) = \dim V \times R$; por lo tanto son difeomorfos.

6. Como $H_s = G_s$, tenemos que $s_1, s_2 \in R$ tienen el mismo tipo orbital con respecto a G si y solo si lo tienen con respecto a H. Entonces tenemos una biyección $\bar{\iota}_R : R/G_p \to G(R)/G$ que es continua, pues las respectivas proyecciones $\pi_R : R \to R/G_p$ y $\pi|G(R) \to G(R)/G$ son abiertas y la inclusión $\iota_R : R \to G(R)$ es continua.

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "\iota_R"] \arrow[d, "\pi_R"'] & G(R) \arrow[d, "\pi|"] \\
R/G_p \arrow[r, "\iota_p"'] & G(R)/G
\end{tikzcd}$$

Finalmente, como ι_R es un homeomorfismo sobre su imagen, para cada abierto $U \in R/G_p$ existe un abierto $\tilde{U} \in G(R)$, G–invariante –consecuencia inmediata del inciso anterior–, tal que $\tilde{U} = R \cap \iota_R(\pi_R^{-1}(U))$. Como $\pi\tilde{U} = \bar{\iota}_R(U)$, $\bar{\iota}_R$ es abierta y, por lo tanto, es un homeomorfismo. ∎

3.40 Corolario. *M_r es abierto.*

3.41 Observación. Como la rebanada R en p es G_p–invariante y p queda fijo bajo la acción de G_p, entonces hay una representación de G_p, que llamaremos *representación de rebanada* en T_pR. De hecho, cuando $G(p)$ es principal se tiene que $G_p = G_s$ (por *3*) y luego la representación es la trivial. Veremos que, dadas ciertas condiciones, el recíproco es cierto (cf. 3.57).

3.6.1. Existencia de Rebanadas

Nuestro siguiente objetivo es demostrar que efectivamente existe una rebanada para cada punto. Esto fue demostrado por Palais [Pa1] para el caso de acciones propias en el sentido de 3.22. Nosotros seguiremos la demostración de Pedrosa [Ped].

3.42 Definición. Sean (G, M) un grupo de transformaciones y R una subvariedad de M. Decimos que R es una *casi rebanada* en p si:

1. $p \in R$;
2. R es G_p-invariante;
3. Existe una sección local $\sigma : U \subseteq G/G_p \to G$ con $G_p \in U$ tal que

$$\psi : U \times R \to M$$

dada por

$$\psi(u, s) = \sigma(u)s$$

es un difeomorfismo a una vecindad abierta de p en M. □

3.43 Observación. En esencia, una casi rebanada determina un pedazo de tubo alrededor de $G(p)$ trasladando a R mediante elementos cercanos a la identidad. De 3.39 sabemos que, en particular, una rebanada es una casi rebanada.

3.44 Lema. *Si G actúa propiamente sobre M, existe una casi rebanada R para cada punto $p \in M$.*

Demostración. Sea $p \in M$ fijo. Consideremos la acción restringida de G_p en M. Como la acción original es propia, G_p es compacto. Dotemos a M de una métrica

G_p–invariante g. Sea exp la exponencial asociada a g y $\varepsilon > 0$ tal que la bola con centro en p y radio ε sea una vecindad normal de p.

Tomemos $T_p^{\perp}G(p)$, el complemento ortogonal de $T_pG(p)$ en T_pM. Sean $B_\varepsilon = \{v \in T_p^{\perp}G(p) |\ |v| < \varepsilon\}$ y $R^* = \exp(B_\varepsilon)$. R^* es G_p–invariante, pues la representación restringida a $T_p^{\perp}G(p)$ es trivial.

Demostraremos que existe un abierto $R \subseteq R^*$ tal que R es una casi rebanada en p. Para ello, sea $\sigma : U^* \subseteq G/G_p \to G$ una sección local con $\sigma(G_p) = e$. Sea

$$\psi^* : U^* \times R \to M$$

como en la definición de casi rebanada. ψ^* es, claramente, diferenciable. Calcularemos $d\psi^*$ en (G_p, p). Observemos que $\psi^*(G_p, p) = \sigma(G_p)p = ep = p$ y que tenemos un isomorfismo $\bar{\mu}_p : T_{G_p}(G/G_p) \to T_pG(p)$. De hecho,

$$d\psi^*_{(G_p,p)} : T_{(G_p,p)}(U^* \times R) \cong T_{G_p}(G/G_p) \oplus T_pR \xrightarrow{\cong} T_pG(p) \oplus T_pR \cong T_pM$$

está dada por

$$(v, u) \longmapsto (d(\bar{\mu}_p)_{G_p}(v), u)$$

Por el teorema de la función inversa, podemos encontrar abiertos $U \subseteq U^*$ y $R' \subseteq R^*$ tales que $\psi^*|U \times R' \to M$ sea un difeomorfismo en su imagen. Repitiendo los pasos que nos llevaron a la obtención de R^*, G_p–invariante, podemos encontrar $R \subseteq R'$ también G_p–invariante.

Sea ψ la restricción $\psi^*|U \times R \to M$; esto concluye la prueba. ∎

3.45 Lema. *Sean M una G-variedad propia, $p \in M$ y $U' \subseteq G/G_p$ una vecindad abierta de G_p. Entonces existe una vecindad abierta V de p en M tal que $((V)) \subseteq U = \pi_p^{-1}(U')$.*

Demostración. Como $\mu_p(g) = gp$ es cerrado (como en la demostración de 3.27), $G \setminus U(p)$ es cerrado en $G(p)$; por lo tanto, cerrado en M. Entonces podemos encontrar un abierto W de p tal que su cerradura es compacta y $\overline{W} \cap (G \setminus U)(p) = \varnothing$ (M

es normal). Como $\overline{W}$ es compacto entonces $((\overline{W}))$ es compacto (cf. 3.23) y por lo tanto

$$K = ((\overline{W})) \cap G \setminus U$$

también lo es. K no es vacío si $U' \neq G/G_p$. Para cada $k \in K$, como $kp \in M \setminus \overline{W}$, por la continuidad de la acción μ existen abiertos $U_k \subseteq G$ y $V_k \subseteq M$, $p \in V_k$, tales que $U_k V_k \subseteq M \setminus \overline{W}$. Podemos suponer, de hecho, que $V_k \subseteq W$.

Como K es compacto, sea $\{U_{k_i}\}_{i=1}^{n}$ tal que $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{k_i}$. Definamos

$$V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{k_i}$$

para las V_k's correspondientes. Sea $g \in ((V))$, entonces $g \in ((W))$. Finalmente, g no puede estar en U_{k_i} pues en tal caso, $gV \subseteq U_{k_i} V_{k_i} \subseteq M \setminus V$ lo que es una contradicción. Por lo tanto $((V)) \subseteq U$. ■

3.46 Observación. Como G_p^* es compacto, podemos suponer que V es G_p–invariante. Eligiendo W de cerradura compacta, se tiene que $G_p W$ tiene cerradura compacta pues $\overline{G_p W} = \overline{\mu(G_p \times W)} \subseteq G_p \overline{W}$. Como U ya es G_p–invariante, necesariamente se sigue cumpliendo que $G_p W \cap G \setminus U = \varnothing$. Ahora, como los V_k's fueron tomados como subconjuntos de W, podemos construir $V = \bigcap_{i=1}^{n} G_p V_{k_i}$. V cumple con lo pedido en el lema y además es intersección de conjuntos G_p–invariantes, luego también es G_p–invariante.

3.47 Teorema de la Rebanada. *Sea (G, M) propio y sea $p \in M$. Entonces existe una rebanada R_p en p.*

Antes de demostrarlo, veamos una consecuencia importante.

3.48 Corolario. *Sea (G, M) propio con un solo tipo orbital. Entonces M^* tiene estructura de variedad y $\pi : M \to M^*$ es diferenciable.*

Demostración. Como cada órbita es principal, la acción de G_p en R_p es trivial y por lo tanto $G(R_p)/G$ es homeomorfo a R_p. Damos a M^* la estructura de variedad inducida por la estructura de R_p. π es, claramente, diferenciable. ■

Demostración del Teorema de la Rebanada 3.47. Sea R^* una casi rebanada en p. Mostraremos que un abierto $R \subseteq R^*$ es una rebanada en p. Sea $\sigma : U \to G$ la sección asociada a R^*. Supongamos que $\sigma(G_p) = e$ y sea $U' = \pi_p^{-1}(U)$.

Sea V G_p–invariante tal que $((V)) \subseteq U'$ como en 3.45. Sea $R = R^* \cap V$, también G_p–invariante. Demostraremos que R es la rebanada buscada. Sea $\psi : U \times R \to M$ la restricción del difeomorfismo de la definición de casi rebanada. Entonces, $G(R) = G(\psi(U \times R))$, que es abierto pues $\psi(U \times R)$ lo es. Si $r : G(R) \to G(p)$ está dada por $r(gs) = gp$, debemos mostrar que r está bien definida. La equivarianza resultará inmediata.

Para ello, demostremos que $((R)) = G_p$. Claramente $G_p \subseteq ((R))$. Como $((R)) \subseteq ((V)) \subseteq U'$, si $g \in (R)$, $gG_p \in U$. Para este g existen $s_1, s_2 \in R$ con $gs_1 = s_2$; sea $gh = \sigma(gG_p)$, con $h \in G_p$. Si $s_3 = h^{-1}s_1$ entonces tenemos que

$$\psi(gG_p, s_3) = ghh^{-1}s_1 = gs_1 = s_2 = \psi(G_p, s_2)$$

Como ψ es difeomorfismo, $gG_p = G_p$; es decir que $g \in G_p$.

Sean $g_1, g_2 \in G$ y $s_1, s_2 \in R$ con $g_1s_1 = g_2s_2$. Entonces $g_2^{-1}g_1 \in ((R)) = G_p$, luego $g_2^{-1}g_1p = p$ y r está bien definido. Como $R \subseteq r^{-1}(p)$, basta probar la contención inversa. Si $gs \in r^{-1}(p)$, $p = r(gs) = gr(s) = gp$. Como R es G_p–invariante, concluímos que $R = r^{-1}(p)$.

Para demostrar que r es diferenciable, basta checar esta propiedad en una vecindad de R. Pero en $U(R)$, $r = \bar{\mu}_p \circ \pi_1 \circ \psi^{-1}$ donde $\pi_1 : U \times R \to U$ es la proyección $(u, s) \mapsto u$. Esto concluye la demostración del teorema. ∎

3.49 Corolario. *Sea (G, M) propio y $p \in M$. Entonces* $\dim R_p \geq \operatorname{cohom} M$ *y la igualdad se da cuando $G(p)$ es principal.*

3.6.2. Métricas Invariantes y Rebanadas Normales

A continuación demostraremos un resultado debido también a Palais [Pa1] y que es el recíproco del teorema 3.32.

3.50 Teorema. *Sea (G, M, μ) un grupo de transformaciones efectivo y propio. Entonces existe* $\mathbf{g}$, *una métrica G–invariante en M tal que la representación $\rho : G \to \mathfrak{Iso}_{\mathbf{g}}(M)$ sea un encaje.*

Demostración. Siguiendo [War], como la acción es propia, entonces M/G es Hausdorff y segundo numerable por 3.27. Luego, si tomamos para cada punto de M^* un representante en M y luego nos fijamos en una rebanada R para cada uno, tenemos que $\{\pi(R)\}$ es una cubierta abierta de M^*. Entonces existe un refinamiento localmente finito (Paracompacidad) y de éste una subcubierta numerable (Lindelöf). Es decir que existe un conjunto $\{p_i\} \subseteq M$ tal que las proyecciones de $R_i = R_{p_i}$ en M^* constituyen una cubierta localmente finita. De hecho, como M^* es localmente compacto, podemos tomar abiertos de cerradura compacta $K_i \subsetneq R_i$ de modo que sus proyecciones sigan cubriendo a M^*. Tomando preimágenes, tenemos una cubierta de M con vecindades G–invariantes.

Sea f_i una función no negativa sobre R_i de soporte compacto y positiva en K_i. Entonces, por 3.34 podemos suponer que es G_{p_i}–invariante. Defínase $f(gs) = f(s)$ para toda $s \in R_i$ y $f(p) = 0$ para toda $p \in M \setminus G(R_i)$. Entonces f así definida es una función G–invariante sobre M.

Sea, ahora, E_i la restricción de TM a R_i. Por 3.36, como G_{p_i} es compacto, existe una métrica G_{p_i}–invariante $\mathbf{g}_i$ sobre E_i. Entonces, para vectores $X, Y \in T_{gs}M$ defínase una métrica como sigue

$$\mathbf{g}_i(gs)(X, Y) = \mathbf{g}_i(s)((d\mu_g)_s^{-1}X, (d\mu_g)_s^{-1}Y)$$

Estos $\mathbf{g}_i$ son claramente G–invariantes. Así, con los f_i definidos anteriormente, la métrica invariante para M la definimos, obviamente, como

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} f_i g_i$$

■

Veamos un recíproco del Teorema de la Rebanada (3.47).

3.51 Proposición. *Si (G, M) es tal que existe una rebanada en cada punto y los subgrupos de isotropía son compactos, entonces la acción es propia.*

Demostración. Veamos que para $p \in M$, si su rebanada es R_p, la acción restringida a $G(R_p)$, ${}_{R_p}\mu$, es propia. Como G_p es compacto, podemos dotar a $G(R_p)$ es una métrica G–invariante, como en la prueba de 3.50. Luego ${}_{R_p}\mu$ es propia.

Por 3.38 tenemos que las órbitas son subvariedades; es decir que $\tilde{\mu}_p : G/G_p \to G(p)$ es un encaje, para toda $p \in M$. Veamos que también son cerradas en M. Sea $p \in M$, y sea $\{p_n\} \subseteq G(p)$ tales que $p_n \to q$. Sea R_q una rebanada en q. Entonces, para n grande, $p_n \in G(R_q)$. Luego $G(p) \subseteq G(R_q)$. Ahora, ${}_{R_q}\mu$ es propia, luego $G(p)$ es cerrado en $G(R_q)$ y $q \in G(p)$.

Por 3.26, sean $\{p_n\} \in M$ y $\{g_n\} \in G$ tales que $p_n \to p$ y $g_n p_n \to q$. Sea $U = G(R_p)$. Si demostramos que $q \in U$ entonces, como la acción restringida a U es propia, 3.26 da la conclusión. Entonces, supongamos que $\{p_n\} \in U$ y pongamos una métrica G–invariante a U. Entonces, $\{g_n\} \in U$. Si la función distancia inducida por la métrica la denotamos por $\mathbf{d}$, tenemos que $\mathbf{d}(p_n, p) \to 0$, luego $\mathbf{d}(g_n p_n, g_n p) \to 0$; es decir que $\mathbf{d}(q, G(p)) = 0$. Como $G(p)$ es cerrado, $q \in G(p)$. ■

3.52 Observación. La hipótesis de compacidad de los estabilizadores es ineludible: Sea $H \leq G$ cerrado. Entonces G actúa transitivamente sobre G/H. En consecuencia, cada punto es su propia rebanada (cero dimensional), todo G/H es el tubo y la transformación identidad es la retracción requerida. Pero, los estabilizadores son iguales a H. Por lo que si H no es compacto, la acción no es propia.

Haciendo las modificaciones necesarias a 3.50 y siguiendo la demostración clásica obtenemos el siguiente

3.53 Teorema. *Sea $\{U_\alpha\}$ una cubierta localmente finita de una G–variedad M tal que cada U_α es G–invariante. Entonces existe una partición diferenciable de la unidad $\{f_\alpha\}$ subordinada a $\{U_\alpha\}$, con cada f_α G–invariante. Si U_α/G tiene cerradura compacta, entonces podemos tomar f_α con soporte en la preimagen de un compacto de M/G.*

En el caso riemanniano, vamos a exhibir un tipo especial de rebanada, que llamaremos *rebanada normal*.

Sean $N = G(p)$ una órbita de la acción riemanniana de G en (M, g). Denotaremos por $T^\perp N$ al *haz normal* de N dado para cada $q \in N$ como el complemento ortogonal $T^\perp N$ de T_qN en T_qM.

Dado $\varrho > 0$, sean

$$T^\perp N(\varrho) = \{v \in T^\perp N : \|v\| < \varrho\} \text{ y } T_q^\perp N(\varrho) = T^\perp N(\varrho) \cap T_q^\perp N$$

Si la exponencial restringida a $T^\perp N(\varrho)$ fuera un difeomorfismo sobre su imagen, entonces claramente $\exp(T^\perp N(\varrho))$ sería un tubo G–invariante y $\exp(T_q^\perp N(\varrho))$ una rebanada con la retracción G-equivariante requerida $r(\exp(T_q^\perp N(\varrho))) = q$ (cf. 3.28).

Por lo tanto, para demostrar que tal rebanada existe, una *rebanada normal*, resta demostrar la siguiente

3.54 Proposición. *Para cada órbita N en M, existe una $\varrho > 0$ tal que la $\exp|T^\perp N(\varrho) \to M$ es un difeomorfismo a su imagen.*

Demostración. Sea R' una rebanada en $p \in M$ y sea $U' = G(R')$. Basta escoger $\varrho > 0$ tal que $\exp(T^\perp N(\varrho)) \subseteq U'$ y que $\exp_p$ sea un difeomorfismo en $B_\varrho(0) \subseteq T_pM$. Entonces, claramente $\exp|T^\perp N(\varrho) \to M$ es un difeomorfismo y su imagen un tubo G–invariante. ∎

3.55 Observación. Salvo por elecciones diferentes de ϱ, la rebanada normal es única en el sentido que cerca de p todas coinciden. Las rebanadas normales son totalmente geodésicas.

La retracción $r(\exp(T_q^\perp N(\varrho))) = q$ es de hecho una retracción fuerte.

3.56 Ejemplo. Pensemos en la acción de SO_2 sobre $\mathbb{R}^2$. Si $p \neq 0$, entonces $R_p = \{tp \in \mathbb{R}^2 | t \in (0, \infty)\}$ es una rebanada normal en p con $U = SO_2(R_p) = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ y $r : U \to SO_2(p)$ dada por $r(x) = \frac{\|p\|}{\|x\|}x$. Si $p = 0$ entonces $\mathbb{R}^2$ es una rebanada normal en p. $\square$

Sea R_p la rebanada normal en p. Tenemos una descomposición ortogonal $T_pM = T_pR_p \oplus T_pG(p)$ tal que G_p actúa sobre cada factor linealmente. Entonces, restringiendo la acción a T_pR_p tenemos la *representación normal de rebanada*.

3.57 Proposición. *Sea $(M, \mathbf{g})$ una G–variedad riemanniana y sea $p \in M$. Entonces $G(p)$ es principal si y solo si la representación normal de rebanada es trivial.*

Demostración. Sea $s \in R_p$ y sea $\rho : G_p \to Aut(T_pR_p)$ la representación de rebanada. Entonces,

$$G(p) \text{ es principal} \Leftrightarrow G_p = G_s \Leftrightarrow R_p \subseteq M^{G_p} \Leftrightarrow \ker \rho = G_p$$

El último $\Leftarrow$ es consecuencia, nuevamente, de 3.28. $\blacksquare$

3.58 Corolario. *Si G actúa sobre M mediante isometrías, el haz normal de una órbita principal $G(p)$ es trivial. En consecuencia, un G–tubo $G(R)$ sobre una órbita principal es G–equivalente a $G(p) \times R$; con R una rebanada en p.*

Demostración. Sea $\{e_i\}$ una base ortonormal de T_pR. Definamos $E_i(gx) = (d\mu_g)^{-1}e_i$. Entonces, como G_p actúa trivialmente sobre T_pR, $\{E_i\}$ son campos vectoriales normales G–invariantes en $G(p)$. $\blacksquare$

Finalmente, veremos algunas propiedades adicionales cuando se tiene una acción con un solo tipo orbital.

3.59 Proposición. *Sea (G, M) un grupo de transformaciones tal que M^* sea conexo. Supongamos, además, que la acción tiene un solo tipo orbital. Entonces, existe una subvariedad S que interseca a cada órbita ortogonalmente y que además es difeomorfa a M^*. Más aún, tenemos una foliación de M cuyas hojas son todas G-equivalentes y además intersecan a cada órbita ortogonalmente.*

Demostración. Tomemos rebanadas normales en cada punto. Fijemos $p \in M$. Entonces, para cada $q \in M$ tal que $G(R_p) \cap G(R_q) \neq \varnothing$, tenemos que existe $g \in G$ tal que $G_{gq} = G_p$. De hecho, la rebanada normal R_{gq} está contenida en la componente conexa de p en M^{G_p}. Más aún, las dimensiones coinciden. Luego, sea S dicha componente.

Como M^* es conexo y las imágenes de G–tubos constituyen una base de M^*, tenemos que M^* es encadenable mediante este tipo de abiertos. Luego, todas las órbitas están representadas biunívocamente en S. Como localmente S es una rebanada, tenemos que S es difeomorfo a M^*. Esto concluye la demostración. ∎

3.60 Observación. En un contexto más general, a estas variedades que intersecan a cada órbita ortogonalmente se les llama *secciones*. En este trabajo nos interesaremos por el caso de cohomogeneidad uno. Las secciones –de existir–, en este caso, deben ser de dimensión uno, por lo que en realidad son la traza de geodésicas. Las llamaremos *geodésicas normales*.

3.61 Corolario. *Sea (G, M) un grupo riemanniano de transformaciones tal que existe un solo tipo orbital (G/G_p). Entonces M es G–equivalente a $M^* \times G(p)$.*

Demostración. Usando lo anterior y 3.39 tenemos que

$$\Phi : G(p) \times S \to M$$

definida como

$$\Phi(gp, s) = gs$$

es una biyección que localmente es un difeomorfismo; luego es un difeomorfismo. ∎

3.7. Una Metrización de M^*

A continuación veremos, dado (G, M) un grupo riemanniano de transformaciones, cómo inducir una función distancia a M^* de modo que para cada isometría G-equivariante de M, se induzca una isometría de M^* de manera natural.

3.62 Definición. Sea G actuando sobre M mediante isometrías y supóngase que M es completa. Sean $p, q \in M$ tales que $G(p) \neq G(q)$. Sea d la función distancia inducida por la métrica de M. Entonces, $\mathsf{d}(p, hq) = \mathsf{d}(gp, ghq)$, para todas $g, h \in G$; por lo que definimos la distancia entre $G(p)$ y $G(q)$ como

$$\mathsf{d}^*(G(p), G(q)) = \inf_{h \in G} \mathsf{d}(p, hq)$$

3.63 Proposición. *La función inducida en M^* es una distacia y, además, la topología métrica coincide con la topología cociente previamente inducida.*

Demostración. Como la acción es propia, las órbitas son cerradas, por lo que

$$\mathsf{d}^*(G(p), G(q)) = 0 \Leftrightarrow G(p) = G(q)$$

La definición es claramente simétrica pues d lo es. Finalmente, para verificar la desigualdad del triángulo, sea $k \in G$ y sean $p, q, s \in M$ con órbitas distintas. Tenemos

$$\begin{aligned} \mathsf{d}^*(G(p), G(q)) = \inf_{h \in G} \mathsf{d}(p, hq) &\leq \inf_{h \in G} (\mathsf{d}(p, ks) + \mathsf{d}(gs, hq)) \\ &= \mathsf{d}(p, ks) + \mathsf{d}^*(G(s), G(q)) \end{aligned}$$

Por lo que, tomando el ínfimo sobre k, nos da lo que queríamos.

Para ver que la topología inducida es la misma, veamos que dados $\varepsilon > 0$ y $p \in M$, la rebanada normal R_p obtenida tomando $\varrho = \varepsilon$ determina un conjunto abierto de órbitas $G(q)$ tales que

$$\mathsf{d}^*(G(p), G(q)) < \varepsilon$$

La razón de esto es porque la rebanada constituye un conjunto de representantes de las órbitas vecinas y la distancia de p a estos puntos es menor que ε, luego la distancia entre las órbitas también lo es. ∎

3.64 Proposición. *Sea φ una isometría G–equivariante sobre M. Ésta induce una función φ^* en M^*, como $\varphi^*(G(p)) = G(\varphi(p))$. Esta función es una isometría de (M^*, d^*).*

Demostración. Esto es un cálculo directo:

$$\begin{aligned}
\mathsf{d}^*(\varphi^*(G(p)), \varphi^*(G(q))) &= \mathsf{d}^*(G(\varphi(p)), G(\varphi(q))) &&= \inf_{h\in G} \mathsf{d}(\varphi(p), h\varphi(q)) \\
&= \inf_{h\in G} \mathsf{d}(\varphi(p), \varphi(hq)) &&= \inf_{h\in G} \mathsf{d}(p, hq) \\
&= \mathsf{d}^*(G(p), G(q))
\end{aligned}$$

■

3.8. Teorema de la Órbita Principal (POT)

3.65 Teorema. *Sea (G, M) un grupo de transformaciones propio y supóngase además que M/G es conexo. Entonces existe un tipo orbital máximo (H); esto es que para cualquier subgrupo de isotropía K, H es conjugado de un subgrupo de K. Estas órbitas máximas son precisamente las órbitas principales. Más aún, $M_r = M_{(H)}$ es denso y abierto en M y la imagen M_r^* de M_r en M^* es una variedad diferenciable con $\pi|M \to M_r^*$ diferenciable.*

Recordemos que M_r es el conjunto de puntos regulares (es decir, los puntos pertenecientes a las órbitas principales) y que M_s es su complemento. Haremos la demostración de este teorema mostrando las siguientes afirmaciones.

3.66 Afirmación. *Existen órbitas principales para (G, M).*

3.67 Afirmación. *M_r es abierto y denso en M.*

3.68 Afirmación. *M_s/G no constituye una inconexión (local) de M^*.*

Demostración de 3.66. Como la acción es propia, cada grupo de isotropía es compacto y, en consecuencia, tiene un número finito de componentes conexas. Elegimos un estabilizador H de dimensión mínima con el menor número de componentes (Principio del Buen Orden). Si tomamos p con $G(p) = H$ tenemos, por el teorema de la rebanada 3.47, que en una vecindad de $G(p)$ los tipos orbitales crecen. Por nuestra elección de H, (H) debe ser principal. ■

Demostración de 3.67. Por 3.40, solo nos resta probar la densidad. Para ello, sea $p \in M$ y sea U una vecindad abierta de p. Elijamos q en U tal que su estabilizador cumpla con la minimalidad pedida en la prueba de 3.66. De nuevo, por el teorema de la rebanada, tenemos que para $r \in G(G(R_p) \cap U \cap G(R_q))$ se debe cumplir que $(G_q) \preceq (G_r)$, luego son iguales. Por lo tanto, M_r es denso. ■

Demostración de 3.68. Queremos que M_r^* sea conexo. Demostraremos algo aun más fuerte, que $M_s^* = M_s/G$ no separa a M^* ni siquiera localmente. Como es un resultado local, lo demostraremos para tubos G–invariantes.

Supongamos que M posee una métrica G–invariante. Sea $p \in M$ y sea R_p una rebanada normal en p. Como por 3.39 tenemos que $R_p/G_p \simeq G(R_p)/G \subseteq M^*$ es abierto y que $G_s = (G_x)_s$ para $s \in R_p$. Luego, basta probar que R_p/G_p no es separado por las órbitas no principales de la acción de G_p en R_p. Pero dado que la exponencial es G–equivariante, basta demostrarlo para la representación de G_p en T_pR_p en una vecindad del origen –por linealidad. Como la representación es ortogonal, la prueba se reduce al siguiente

3.69 Lema. *Sea K un grupo de Lie compacto actuando ortogonalmente sobre $\mathbb{R}^m$. Entonces las órbitas no principales no separan a $\mathbb{R}^m/K$ ni siquiera localmente.*

Demostración. Procederemos por inducción sobre m.

- BI Si $m = 1$ entonces $K \in \{\{\pm 1\}, \{1\}\}$. En el primer caso, el espacio de órbitas es homeomorfo a $[0,\infty)$, con una única órbita no principal $\{0\}$, que no separa a $[0,\infty)$.

- HI Supongamos que el lema se cumple para $\mathbb{R}^m$ con $m < k$. Esto quiere decir que la afirmación 3.68 se cumple para acciones propias sobre variedades de dimensión menor a k. Supongamos que K actúa sobre $\mathbb{R}^k$. Así, como $\mathbb{S}^{k-1} \subseteq \mathbb{R}^k$ es K–invariante, tenemos que la afirmación 3.68 se cumple, por lo que las órbitas no principales no separan a su espacio de órbitas. Las órbitas no principales de $\mathbb{R}^k$ son, o bien $\{0\}$, o bien órbitas en $\mathbb{R}^k \setminus \{0\}$. Pero estas últimas las obtenemos de aplicar alguna homotecia a las órbitas no principales de $\mathbb{S}^{k-1}$. Así, como $\mathbb{R}^k \setminus \{0\}/K \simeq \mathbb{S}^{k-1}/K \times (0,\infty)$, tenemos que $(\mathbb{R}^k \setminus \{0\})_r^* \simeq \mathbb{S}^{k-1}/K \times (0,\infty)$ que es conexo.

  Además, $\mathbb{R}^k/K$ de hecho es homeomorfo a $\mathbb{S}^{k-1}/K \times (0,\infty) \cup \{\star\}$ donde $\star$ representa al origen y $\mathbb{S}^{k-1}/K \times (0,\infty)$ tiene la topología producto y los abiertos de $*$ son de la forma $\mathbb{S}^{k-1}/K \times U$ con U un abierto de $(0,\infty)$ que contenga a $(0,\varepsilon)$ para alguna $\varepsilon > 0$. De esto se sigue que las órbitas no principales no separan a $\mathbb{R}^k/K$ ni siquiera localmente. ■

Para completar la demostración del Teorema falta demostrar que solo existe un tipo orbital principal. Esto se sigue de la afirmación 3.68, pues como M_r^* es conexo, entonces es encadenable mediante vecindades G-invariantes. Encadenando a cualesquiera dos representantes de órbitas principales en M_r^*, tenemos que el tipo orbital debe permanecer constante.

Con esto y usando 3.48 y 3.49 tenemos que M_r^* es variedad diferenciable de dimensión cohom M y que $\pi|M_r$ es diferenciable. Esto concluye la demostración. ■

3.70 Observación. Es claro que la dimensión de la órbita principal es maximal, pero esto no es suficiente para caracterizar a una órbita principal: En el ejemplo 6 de 3.17 tenemos una acción inducida de $SO(2)$ en $\mathbb{R}P^2$ donde las órbitas son difeomorfas a $\mathbb{S}^1$ o a un punto. Pero, la acción es libre salvo en la órbita inducida por el ecuador, pues $SO(2)$ le "da" dos vueltas al ecuador, de modo que el estabilizador debe ser $\{\pm e\}$. Sin embargo, las órbitas sí son difeomorfas. Esto motiva la siguiente clasificación de los tipos orbitales:

1. *principales*;

2. *singulares*: para los que un estabilizador principal es conjugado de un subgrupo de índice infinito. Luego sus órbitas correspondientes tienen dimensión estrictamente menor a la de una principal; y

3. *excepcionales*: para los que un estabilizador principal es conjugado de un subgrupo de índice finito. Luego sus órbitas correspondientes tienen dimensión igual a la de una principal.

3.9. Acciones Cubrientes

A lo largo de la siguiente sección, denotaremos por $p_G : \tilde{G} \to G$ y por $p_M : \tilde{M} \to M$ a los cubrientes universales de G y M respectivamente. De esta manera, supondremos además que G actúa sobre M; consideraremos también cuando esta acción es riemanniana.

Como vimos anteriormente $\tilde{G}$ tiene una estructura de grupo esencialmente única, una vez elegido un elemento $\bar{e}$ en la fibra de e.

Ahora, tanto $\tilde{G}$, como $\tilde{M}$, son simplemente conexos, entonces sus productos también lo son. Por 2.44 tenemos que existe un único levantamiento para la transformación $\mu \circ (p_G \times p_M)$ con respecto a p_M tal que manda a $(\bar{e}, \bar{p})$ en $\bar{p}$, para algun $\bar{p}$ tomado arbitrariamente. Llamemos $\bar{\mu}$ a este levantamiento.

3.71 Proposición. *$\bar{\mu}$ es una acción diferenciable. La llamaremos acción cubriente.*

Demostración. Veamos primero que, de hecho, $\bar{\mu}(\bar{e}, \bar{q}) = \bar{q}$ para toda $\bar{q} \in \tilde{M}$. Esto es inmediato del hecho de que la transformación $\bar{\mu}_{\bar{e}}$ es una transformación de cubierta que manda a $\bar{p}$ en sí mismo; esto lo hace también la identidad. Luego son la misma.

La segunda condición para que sea acción se sigue de un argumento similar; las transformaciones $\tilde{G} \times \tilde{G} \times \tilde{M} \to \tilde{M}$, dadas por

$$(\bar{g}, \bar{h}, \bar{q}) \mapsto \bar{\mu}_{\bar{g}} \circ \bar{\mu}_{\bar{h}}(\bar{q})$$

$$(\bar{g}, \bar{h}, \bar{q}) \mapsto \bar{\mu}_{\bar{g}\bar{h}}(\bar{q})$$

cubren a la misma transformación y valen lo mismo en $(\bar{e}, \bar{e}, \bar{p})$.

La diferenciabilidad de la acción se sigue del mismo argumento usado en 2.49.

■

3.72 Observación. La acción inducida no depende de la elección de $\bar{p}$. Esto porque cualquier acción debe cumplir la primera condición.

3.73 Observación.

$$\begin{tikzcd} \tilde M \arrow[r, "\tilde\mu_{\tilde g}"] \arrow[d, "p_M"'] & \tilde M \arrow[d, "p_M"] \\ M \arrow[r, "\mu_g"'] & M \end{tikzcd}$$

Como localmente tenemos difeomorfismos, se sigue que las dimensiones de las órbitas de $(\tilde G, \tilde M)$ tienen las mismas dimensiones que sus imágenes bajo p_M; mismas que a su vez también son órbitas.

Por lo tanto, la cohomogeneidad de la acción cubriente coincide con la de la acción original.

3.74 Proposición. *La acción conmuta con las transformaciones de cubierta.*

Demostración. Sea $f \in \Delta_{p_M}$. Entonces, $f^{-1} \circ \tilde\mu(proy_1, f)$ cubre a μ y manda a $(\tilde e, \tilde p)$ en $f^{-1}(\tilde\mu(\tilde e, f(\tilde p))) = f^{-1}(f(\tilde p)) = \tilde p$, con $proy_1$ la proyección en el primer factor de $\tilde G \times \tilde M$, por lo que coincide con $\tilde\mu$. Es decir

$$f \circ \mu_{\tilde g} = \mu_{\tilde g} \circ f$$

■

3.75 Corolario. *Cada transformación de cubierta manda órbitas en órbitas.*

3.76 Observación. Para cada órbita en la base existe una órbita en el cubriente que se proyecta en ella.

3.10. Cohomogeneidad UNO

Sea (G, M) un grupo propio de transformaciones. A la luz de POT, tenemos, en el caso de que cohom $M = 1$, los siguientes resultados.

3.77 Teorema. *1. M_r^* es homeomorfo a $\mathbb{S}^1$ o a $(0,1)$.*

2. M^* es homeomorfo a $\mathbb{S}^1$, $(0,1)$, $[0,1]$ ó $[0,1)$.

3. M tiene a los más dos órbitas singulares (excepcionales o no).

Demostración. Sabemos que M_r^* es una variedad conexa de dimensión cohom M por lo que *1* se sigue del teorema de clasificación de variedades de dimensión uno [Mil]. Sabemos que M^* es Hausdorff y que M_r^* es abierto y denso en M^*, por lo que M_s^* deben ser puntos extremales en M^*. Esto da *2*. El punto *3* se sigue trivialmente de lo anterior. ■

Este resultado fue demostrado para el caso en el que G es compacto por Paul S. Mostert en 1956 ([Mos]).

Ahora, sean $\varepsilon > \delta > 0$ y $f : (0,1) \to (0,\varepsilon)$, C^∞, tales que f sea estrictamente creciente en (δ, ε) y que

$$f(t) = \begin{cases} \varepsilon & si\ t \geq \varepsilon \\ t & si\ t \leq \delta \end{cases}$$

Si M^* es $[0,1)$, $B = \pi^{-1}(0)$ y P cualquier órbita principal. Como tenemos un difeomorfismo τ de M_r en $P \times (0,1)$ (cf. 3.61) podemos definir una transformación φ de M en $\pi^{-1}([0,\varepsilon))$ como sigue:

$$\varphi(p) = \begin{cases} \tau^{-1}(x, f(t)) & si\ t \geq 0 \\ p & si\ p \in B \end{cases}$$

con $(x,t) = \tau(p)$. Esta transformación es C^∞. Además, como cualesquiera dos funciones de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ son homotópicas, el grupo fundamental de M es claramente igual al grupo fundamental de $\varphi(M) = \pi^{-1}([0,\varepsilon))$.

Luego, por 3.55, tenemos que existe una retración fuerte de una vecindad tubular de B en B. Esta vecindad debe ser de la forma $\pi^{-1}([0,\varepsilon))$ para alguna ε.

Todo esto nos da la siguiente

3.78 Proposición. *Sea (G, M) un grupo propio de transformaciones tal que M^* es $[0,1)$. Sea $B = \pi^{-1}(0)$. Entonces el grupo fundamental de M es el grupo fundamental de B.*

3.10.1. Geodésicas Normales

Como antes mencionamos (cf. 3.60), en el caso de la cohomogeneidad uno nos interesaremos por determinar la existencia de un tipo de geodésica muy particular.

3.79 Definición. Sea (G, M) un grupo de transformaciones (M completo). Diremos que $\gamma : I \to M$ es una *geodésica normal* si:

1. es geodésica; y
2. interseca a cada órbita ortogonalmente.

3.80 Proposición. *Sea (G, M) un grupo propio de transformaciones con M completo. Entonces existen geodésicas normales y sucede que éstas intersecan a cada órbita precisamente de la siguiente forma:*

- *Una sola vez si M^* es homeomorfo a $(0, 1)$;*
- *Exactamente dos veces si M^* es homeomorfo a $[0, 1)$;*
- *Una infinidad de veces si M^* es homeomorfo a $[0, 1]$ ó $\mathbb{S}^1$.*

Demostración. Para el caso en el que existe un solo tipo orbital, tenemos por 3.59 que la sección es una geodésica normal. Cuando $M^* \simeq \mathbb{S}^1$, la geodésica –como función– pasa por cada órbita una infinidad de veces. Si M^* es homeomorfo a $(0, 1)$ interseca a cada órbita una sola vez.

Para el caso $M^* \simeq [0, 1)$, hay que demostrar que si se toma una geodésica normal restringiéndonos a $\pi^{-1}((0, 1))$, la geodésica completa correspondiente pasa por las órbitas no principales ortogonalmente. Supongamos que $G(p)$ es una órbita no principal. Entonces, sea q un punto en la rebanada normal R_p. Si tomamos la geodésica θ que une a p con q, esta es ortogonal a $G(q)$ (la rebanada es totalmente geodésica y ortogonal). Luego coincide con la geodésica normal en M_r que pasa por q.

Ahora bien, en una vecindad de p, θ toma valores "en la dirección contraria a aquella que une a p con q desde p". Tomando un punto q' sobre tal dirección en θ, tenemos que, otra vez, θ coincide con alguna de las geodésicas normales en M_r. Dicha geodésica es diferente a la primera, pues si coincidieran la traza de la geodésica debería ser homeomorfa a $\mathbb{S}^1$. Esto constituiría una contradicción pues dicha traza sería un conjunto compacto de representantes y M^* no es compacto (Hay otra contradicción si se observa la disposición de las órbitas.). Resumiendo; se necesitan dos de las geodésicas normales de M_r para obtener una de M.

Para el caso restante, cuando consideramos el espacio $M \setminus B$ con B una órbita singular estamos en el caso anterior. Más aún, tenemos que la geodésica normal θ así obtenida interseca a cualquier G-tubo alrededor de B (Basta ver el comportamiento de la proyección de θ en M^*). Tomando un punto q en una intersección de ese tipo, podemos suponer –sin pérdida de la generalidad– que q está en una rebanada normal R_p de $B = G(p)$. Luego la geodésica que une a p con q debe coincidir con θ en q, pues localmente ambas son rebanadas normales en q. Repitiendo este argumento, junto con la construcción de la geodésica normal en el caso anterior, se concluye la demostración. ∎

3.81 Proposición. *Si M es una G-variedad orientable con* $\mathrm{cohom}_G M = 1$ *y sus órbitas principales son conexas, cualquier órbita excepcional no es orientable.*

Demostración. Sea $E = G(p)$ una órbita excepcional. Entonces, cualquier rebanada es localmente una geodésica normal. Como E es singular, localmente, γ, la geodésica normal en p, inteseca dos veces a cada órbita. Sea P una órbita principal en U, G-tubo alrededor de E. Entonces, γ interseca ortogonalmente a P en q y q'. Como P es conexo, existe una curva α que une a q con q'. Sea $r : U \to E$ el retracto garantizado por 3.47. Entonces, a lo largo de $r \circ \alpha$ en E podemos definir un campo vectorial diferenciable y normal a E tomando en cada punto $r \circ \alpha(t)$ el vector tangente a la geodésica que lo une a $\alpha(t)$. Esto concluye pues dicho campo debe asignar en p sentidos opuestos. ∎

Capítulo 4

Variedades planas de cohomogeneidad uno

Nuestro objetivo, en este capítulo, es exponer los teoremas 4.2.1, 4.21 y 4.23 de la última sección. Estos teoremas son debidos a R. Mirzaie y a S.M.B. Kashani [MK]. Para ello, seguimos la demostración planteada por ellos.

Para poder llevar a cabo esto, es necesario obtener algunas propiedades adicionales de las acciones propias, así como también algunas nociones y resultados de la teoría general de espacios de curvatura constante [Wlf]. A continuación hacemos una brevísima exposición de todo esto.

4.1. Órbitas. Hipersuperficies Isoparamétricas

El siguiente teorema es debido a Palais y a Terng [PT1].

4.1 Teorema. *Sea M una G–variedad riemanniana completa que admite secciones y suponga que N es una órbita principal de M. Entonces*

1. $\exp(T_p^{\perp}N)$ *es una subvariedad de M totalmente geodésica para todo $p \in N$.*
2. *Las curvaturas principales de N con respecto a cualquier campo vectorial normal paralelo son constantes.*

Demostración. 1. Como M es completa, la exponencial está definida para todo T_pM; en particular está definida en $T_p^{\perp}N$). Como, en una vecindad de p, $\exp(T_p^{\perp}N)$ coincide con la sección normal y esta última es totalmente geodésica, tenemos que $\exp(T_p^{\perp}N)$ está contenida en la sección normal; de hecho coinciden, por lo que $\exp(T_p^{\perp}N)$ es una subvariedad totalmente geodésica.

2. Lo último es inmediato del hecho que si G actúa mediante isometrías, los operadores de forma (para ν normal paralelo) A_p y A_{gp} tienen los mismos valores propios. ■

4.2 Observación. Como parte de una teoría más general, este tipo de subvariedades –aquellas cuyas curvaturas principales son constantes– pertenecen a la clase de variedades llamadas *isoparamétricas*.

En general, una familia de subvariedades de una variedad M se llama *isoparamétrica* si son las subvariedades de nivel de una función regular $f : M \to \mathbb{R}$ tal que cumple que, tanto $\|\text{grad}\, f\|^2$, como Δf, son funciones de f misma; equivalentemente si son constantes sobre las subvariedades de nivel de f. A una f tal se le llama *función isoparamétrica*.

En el caso en que M es una forma espacial, esta definición es equivalente al hecho de que dichas subvariedades de nivel tengan curvaturas principales constantes. De hecho, también se demuestra que si una hipersuperficie cumple con esta última propiedad, entonces existe una función isoparamétrica en una vecindad de ella, tal que ella es una subvariedad de nivel. □

A la luz del teorema anterior, cuando nuestras acciones tengan cohomogeneidad uno sobre $\mathbb{R}^n$ tendremos órbitas que son isoparamétricas. Veamos la siguiente propiedad que nos permitirá clasificarlas para el caso euclidiano más adelante.

4.3 Teorema. *Sea $\tilde{M}$ una variedad de curvatura constante $c \leq 0$ y sea M una hipersuperficie cuyas curvaturas principales son constantes. Entonces a lo más dos de estas curvaturas son diferentes.*

Demostración. Supongamos que las curvaturas principales de M son $\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell$ y que aparecen con multiplicidad $m_1, \ldots, m_\ell$ respectivamente. Entonces, Cartan [Ca1] demostró que para cada i, $1 \leq i \leq \ell$ se cumple que

$$\sum_{j \neq i} m_j \frac{c + \lambda_i \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} = 0$$

Consideremos dos casos, $c = 0$ y $c < 0$.

$c = 0$ Supongamos que existe λ_i, la menor de las curvaturas principales positivas. Entonces, para la suma respectiva, cada sumando es no positivo, por lo que debe ser cero. Luego existen a lo más dos curvaturas distintas; de hecho, si son dos, una debe ser cero. Análogamente, si todas fueran negativas, se toma la de valor absoluto menor y la conclusión es la misma.

$c < 0$ En este caso tomemos λ_i como la máxima entre 0 y $|c|$ o la mínima mayor o igual que $|c|$ tal que no hay otra entre λ_i y $\frac{|c|}{\lambda_i}$. Entonces cada término

$$\frac{c - \lambda_i \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j}$$

es negativo a menos que $\lambda_j = \frac{|c|}{\lambda_i}$. Luego, si hay a lo más dos distintas. El caso en el que toda λ_i fuere negativa, se elige λ_i de modo que cumpla con la propiedad simétrica. Luego todos los términos serán positivos y, por lo tanto, se sigue la misma conclusión. ∎

4.1.1. Hipersuperficies isoparamétricas en $\mathbb{R}^n$

Los siguientes resultados son la extensión del resultado clásico de Geometría Diferencial que clasifica las superficies totalmente umbílicas. El caso $n = 2$ de este teorema fue demostrado por Levi-Civitá [LC] y en su generalidad –como aquí lo citamos– por Segré [Seg].

4.4 Teorema. *Supóngase que $\tilde{M} = \mathbb{R}^n$. Supóngase también que M es una hipersuperficie tal que sus curvaturas son constantes y que a lo más dos son distintas. Entonces M es congruente a un subconjunto abierto de hiperplanos, esferas o cilindros sobre esferas.*

4.5 Corolario. *Sea M una hipersuperficie completa de $\mathbb{R}^n$ con dos curvaturas principales, las cuales son constantes. Entonces M es isométrica a uno de los siguientes espacios:*

1. $\mathbb{R}^{n-1}$; *o*
2. $\mathbb{S}^k(c) \times \mathbb{R}^{n-1-k}$, $1 \leq k \leq n-1$, $c > 0$.

4.1.2. Variedades Homogéneas Planas

La siguiente proposición es una parte de un teorema de Killing y Hopf. Éste da una caracterización para cuando la curvatura es constante, no necesariamente cero.

4.6 Proposición ([Wlf], pág. 68). *Sea M sea una variedad riemanniana con $n = \dim M \geq 2$. Entonces M es completa, coneza y de curvatura constante 0 si y solo si M es isométrica a $\mathbb{R}^n/\Gamma$; Γ un grupo de isometrías actuando libre y propiamente discontinuamente.*

4.7 Observación. De hecho, se tiene que $\mathbb{R}^n$ es su espacio cubriente universal y Γ el grupo de tranformaciones de cubierta.

La siguiente proposición es de índole general; la enunciamos solo ahora dada su pertinencia.

4.8 Proposición. *Una variedad riemanniana homogénea es completa.*

Demostración. Sea M una variedad riemanniana homogénea y sea $\gamma(t)$, $t \in [a,b]$, una geodésica maximal, con $\|\gamma'(t)\| = 1$. Sea $p \in M$ y $\varepsilon > 0$ para la cual $\exp_p(B_\varepsilon(0))$ sea una vecindad normal de p. Sea $t_0 \in [a,b]$ tal que $|b - t_0| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Ahora tomemos g una isometría tal que $g(p) = \gamma(t_0)$ y Sea $X = (dg_p)^{-1}(\gamma'(t_0))$. Entonces, $\gamma(t_0 + s) = \exp_p(sX)$ para $s \in [0, b - t_0)$. Extiéndase para $s \in [0, \varepsilon)$. Esto contradice la maximalidad. Por lo tanto $b = \infty$. Análogamente $a = -\infty$. ■

4.9 Lema. *Sea $p : M' \to M$ un cubriente riemanniano. Sea Δ_p su grupo de transformaciones de cubierta y sea A el centralizador de Δ_p en $\mathfrak{Iso}_g(M')$. Si M es homogéneo entonces A es transitivo en M'; por lo tanto M' es transitivo.*

Demostración. Sea $r : \tilde{M} \to M'$ el cubriente universal de M'. Entonces $q = p \circ r$ es el cubriente universal de M. Entonces $M' = \tilde{M}/\Delta_r$ y $M = \tilde{M}/\Delta_q$. Sean $x, y \in \tilde{M}$ y sea $z = q(y)$. Sea $a : M \to M$ isometría tal que $aq(x) = y$. Entonces tenemos $b : \tilde{M} \to \tilde{M}$ con $bx = y$ única tal que conmuta el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd} & \tilde{M} \arrow[d, "q"] \\ \tilde{M} \arrow[ur, dashed, "b"] \arrow[r, "aq"'] & M \end{tikzcd}$$

b es una isometría y preserva fibras. Como

$$q(b\varphi b^{-1}) = (qb)\varphi b^{-1} = a(q\varphi)b^{-1} = a(q \circ b^{-1}) = a(a^{-1})q = q,$$

b está en el normalizador de Δ_q y éste resulta transitivo. De hecho B, su componente en la identidad, centraliza a Δ_q (cf. 1.15) y sigue siendo transitivo; pues $\tilde{M}$ y B son conexos, luego $\{(x,y) : \exists a \in B,\ ax = y\}$ es abierto y cerrado. Como $\Delta_r \subseteq \Delta_q$, B centraliza a Δ_r. Finalmente, B induce un grupo de isometrías transitivo A' y $A' \subseteq A$. ■

4.10 Definición. Una isometría γ de una variedad riemanniana N se dice que es una *translación Clifford* si

$$\mathsf{d}(x,\gamma(x)) = \mathsf{d}(y,\gamma(y))$$

para toda $x, y \in N$.

4.11 Teorema. *Sea $p : M' \to M$ un cubriente riemanniano. Sea Δ_p su grupo de transformaciones de cubierta y supongamos que M es homogénea. Entonces Δ_p consta de translaciones Clifford de M'.*

Demostración. Sea $p, q \in M'$ y sea $a \in A$, con A el centralizador de Δ_p, tal que $ax = y$. Entonces

$$\mathsf{d}(x,\gamma(x)) = \mathsf{d}(ax, a\gamma(x)) = \mathsf{d}(ax,\gamma(ax)) = \mathsf{d}(y,\gamma(y)) \quad \blacksquare$$

4.12 Lema. *Las translaciones Clifford de $\mathbb{R}^n$ son únicamente las translaciones ordinarias.*

Demostración. Cualquier translación Clifford manda a cualquier recta en una recta paralela (las rectas son las equidistantes de rectas). Luego es una translación ordinaria. $\blacksquare$

4.13 Observación. Es indispensable la hipótesis de isometría, pues si $\gamma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ está dada por $\gamma(x,y) = (x,y) + \phi(x)$ con $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ la proyección estereográfica, tenemos que $\mathsf{d}((x,y),\gamma(x,y)) = 1 = \mathsf{d}((x',y'),\gamma(x',y'))$ y no es una isometría; mucho menos una translación ordinaria.

4.14 Teorema. *Sea M^n una variedad homogénea riemanniana plana y conexa. Entonces M^n es isométrica al producto $\mathbb{R}^m \times T^{n-m}$ de un espacio euclidiano y un toro plano.*

Demostración. A la luz de 4.8 y de 4.6 tenemos que M es isométrico a $\mathbb{R}^n/\Delta_p$, con $p : \mathbb{R}^n \to M$ cubriente universal. Ahora, Δ_p consta de translaciones Clifford. Como la acción es propiamente discontinua, Δ_p debe ser discreto en $\mathbb{R}^n$ (translaciones). Luego Δ_p es isomorfo a $\mathbb{Z}^k$ para alguna k. La conclusión ahora es evidente. $\blacksquare$

4.1.3. G–Variedades Simplemente Conexas

4.15 Lema (Teorema de punto fijo. Cartan). *Un grupo compacto de isometrías de una variedad simplemente conexa de curvatura no positiva tiene un punto fijo.*

Demostración. ([KN], pág. 111) Veamos primero la siguiente

Afirmación. *Sea μ una medida positiva sobre un espacio topológico compacto A. Y sea f una función continua de A en M, con M una variedad completa, simplemente conexa y de curvatura no positiva. Fijando*

$$J(x) = \int_A \mathrm{d}^2(x, f(a))d\mu(a) \text{ para } x \in M$$

J alcanza su mínimo en exactamente un punto.

Esbozo de la demostración de la Afirmación. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que la medida está normalizada.

En el caso que $M = \mathbb{R}^n$, escribiendo a $x = (x_i)$ y a $f = (f_i)$, tenemos que

$$J(x) = \int_A \sum_i \mathrm{d}^2(x_i, f_i(a))d\mu(a) = \sum_i ((x_i)^2 + 2b_i x_i + c_i)$$

con

$$b_i = \textstyle\int_A f_i(a)d\mu(a) \quad \text{y} \quad c_i = \int_A (f_i(a))^2 d\mu(a)$$

por lo que $b = (b_i)$ es el único tal punto.

Para el caso general, veamos la existencia. Para esto, basta con exhibir un compacto K y un número $\varrho > 0$ tal que $J(y_0) \leq \varrho^2$ para algún $y_0 \in K$ y $J(x) > \varrho^2$ para $x \in M \setminus K$.

Elegimos $y_0 \in M$ arbitrario y $\varrho > 0$ tal que $\mathrm{d}(y_0, f(a)) \leq \varrho$ para toda $a \in A$. Tal ϱ existe pues $f(A)$ es compacto. Definamos

$$K = \{x \in M | \ \mathrm{d}(x, f(A)) \leq \varrho\}$$

Como $f(A)$ es compacto, entonces K es cerrado y acotado. Como M es completa, entonces K es compacto. Estas K y y_0 cumplen con lo pedido. Esto muestra la existencia.

Para la unicidad se hace uso del Teorema de Hadamard (ver [dCa]), el cual establece que la exponencial es un difeomorfismo en este caso (curvatura no positiva, conexidad simple y completitud). Además, dice que dicho difeomorfismo aumenta distancias en el siguiente sentido:

$$\|X\| \leq \|d\exp X\|,$$

para todo $X \in TN$. Se mostrarán las siguientes relaciones, mismas que implican que si q es un punto mínimo, entonces es el único.

$$J(q) = J'(0) < J'(X) \leq J(x)$$

con $x = \exp_q(X)$ y $J'(X) = \int_A \mathsf{d}'(X, (\exp_q)^{-1} \circ f(a))d\mu(a)$, d' la distancia inducida en T_qM por la métrica.

Pero estas relaciones son inmediatas pues a lo largo de rayos saliendo del origen tenemos que

$$\mathsf{d}'(0, X) = \mathsf{d}(q, x)$$

Como T_qM es un euclidiano, tenemos que

$$J'(0) < J'(X)$$

y, finalmente, como la exponencial aumenta distancias,

$$\mathsf{d}'(X, (\exp_q)^{-1} \circ f(a)) \leq \mathsf{d}(x, f(a))$$

para todo $a \in A$. Esto implica la desigualdad

$$J'(X) \leq J(x)$$

□

Con esto, tomando una medida bi-invariante para G compacto; fijando $p_0 \in M$; y definiendo $f(g) = gp_0$, se puede ver que el punto que minimiza a J debe ser un punto fijo de G. Para esto, basta demostrar que $J(gp) = J(p)$ para toda $p \in M$ y $g \in G$:

$$\begin{aligned} J(gp) &= \int_G \mathrm{d}^2(gp, hp)d\mu(h) = \int_G \mathrm{d}^2(p, g^{-1}hp)d\mu(h) \\ &= \int_G \mathrm{d}^2(p, g^{-1}hp)d\mu(g^{-1}h) = J(p) \end{aligned}$$

■

4.16 Lema. *Sea M simplemente conexa y de curvatura no positiva, B una órbita singular y $H = G_p$ el subgrupo de isotropía de $p \in B$. Entonces H es compacto maximal en G.*

Demostración. Supongamos que H no es maximal. Entonces existe H' compacto tal que $H \leq H'$. Por el lema anterior, H' tiene un punto fijo q. Evidentemente q es un punto singular; más aún, $q \neq p$. Si γ es la geodésica que une a p con q, entonces $\gamma \subseteq M^{H'}$; esto último por la unicidad de la geodésica. Como γ no está contenida en una órbita, γ debe contener un punto regular; esto es una contradicción. ■

El siguiente es un resultado clásico de la teoría de grupos de Lie (cf. [He] pág 256).

4.17 Lema. *Cualesquiera dos grupos compactos maximales de un grupo de Lie son conjugados.*

El teorema a continuación, junto con 3.78, nos permitirán, en la siguiente sección, entender un poco más la topología de los espacios planos que admiten una acción riemanniana de cohomogeneidad uno.

4.18 Teorema. *Si M es una variedad riemanianna completa simplemente conexa de cohomogeneidad uno de curvatura no positiva, entonces hay a lo más una orbita singular.*

Demostración. Supongamos que hay dos órbitas singulares $B_1 \neq B_2$. Entonces existen $p \in B_1$ y $q \in B_2$ tales que $G_p = G_q$, compacto maximal. Por la unicidad de la geodésica que une a p con q, dicha geodésica quedaría fija por la acción de G_p; esto es una contradicción. ∎

4.2. Acciones Planas de Cohomogeneidad Uno

4.2.1. Caso Simplemente Conexo

4.19 Teorema. *Sea $M = \mathbb{R}^n$ de cohomogeneidad uno bajo la acción de un grupo de Lie conexo $G \subseteq \mathfrak{Iso}_0(\mathbb{R}^n)$. Entonces, o bien cada órbita principal es isométrica a $\mathbb{R}^{n-1}$ y no hay órbitas singulares, o bien cada órbita principal es isométrica a $\mathbb{S}^k \times \mathbb{R}^{n-1-k}$, $1 \leq k \leq n-1$, k es fijo para toda las órbitas principales y la única órbita singular es isométrica a $\mathbb{R}^{n-1-k}$.*

Demostración. Sea D una órbita principal. Usando 4.1 y 4.5 tenemos que D es isométrica a $\mathbb{R}^{n-1}$ o $\mathbb{S}^k(c) \times \mathbb{R}^{n-1-k}$, $1 \leq k \leq n-1$ (c depende de D). Ya que las órbitas principales son difeomorfas entre sí, todas son isométricas a $\mathbb{R}^{n-1}$ o $\mathbb{S}^k(c) \times \mathbb{R}^{n-1-k}$, $1 \leq k \leq n-1$. Ahora consideramos dos casos.

Caso 1. Las órbitas principales son isométricas a $\mathbb{R}^{n-1}$. Como una recta normal a un hiperplano interseca a dicho hiperplano solo una vez, tenemos que una geodésica debe intersecar a cada órbita principal una sola vez, por lo que $M/G = \mathbb{R}$ y no hay órbitas singulares.

Caso 2. Las órbitas principales son isométricas a $\mathbb{S}^k(c) \times \mathbb{R}^{n-1-k}$, para alguna k, $1 \leq k \leq n-1$. Entonces $M_r \simeq (0,\infty) \times (\mathbb{S}^k \times \mathbb{R}^{n-k-1}) \simeq (\mathbb{R}^{k+1} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^{n-k-1}$. Como M_r es abierto y denso, de hecho, debe ser isométrico a $(\mathbb{R}^{k+1} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^{n-k-1}$; luego solo puede haber una órbita principal y ésta debe ser isométrica a $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-k-1}$ ∎

4.20 Corolario. *Si $\mathbb{R}^n$ es de cohomogeneidad uno bajo la acción de un grupo de Lie conexo $G \subseteq \mathfrak{Iso}_g(\mathbb{R}^n)$, y existe una órbita singular, ésta no es excepcional.*

4.2.2. Caso General

Los siguientes tres teoremas dan una caracterización importante de la geometría y la topología de las G–variedades riemannianas planas y de sus órbitas.

4.21 Teorema. *Si M es una variedad orientable riemanniana plana de cohomogeneidad uno, entonces a lo más hay una sola órbita singular.*

Demostración. Por 4.18, resta analizar el caso en que M no es simplemente conexa. Sea G un grupo que actúa sobre M con cohomogeneidad uno y sea $\tilde{G}$ su grupo cubriente, que actúa con cohomogeneidad uno sobre $\tilde{M} = \mathbb{R}^n$ su cubriente. Por 4.19 tenemos dos casos.

Caso 1. Cada órbita de $\tilde{M}$ es isométrica a $\mathbb{R}^{n-1}$.
En este caso, cada órbita D en M sería totalmente geodésica; por lo tanto D es una variedad homogénea y plana. Por 4.14, D es isométrico a $\mathbb{R}^k \times T^{n-k-1}$; además no puede ser singular pues sería excepcional y no puede serlo pues es orientable y conexa (cf. 3.81).

Caso 2. $\tilde{M}$ tiene una única órbita singular no excepcional.
Supongamos que M admite dos órbitas singulares. Una geodésica $\tilde{\gamma}$ interseca a cada órbita en dos puntos, mientras que $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$ lo hace una infinidad de veces. Por lo tanto $p^{-1}(D)$ es inconexo. Entonces existe una transformación de cubierta φ tal que $\varphi(\tilde{D}) \neq \tilde{D}$, con $\tilde{D} \subseteq p^{-1}(D)$ órbita en $\tilde{M}$. Por cuestiones dimensionales, $\varphi(\tilde{B}) = \tilde{B}$, $\tilde{B}$ la única órbita singular en $\tilde{M}$. Esto induce una isometría φ^* de $M^* = [0, \infty)$ que fija a 0; esto dice que φ^* (y por tanto φ) es la identidad. Esto es una contradicción. ∎

4.22 Observación. De hecho hemos demostrado que la órbita singular (de existir) no es excepcional.

4.23 Teorema. *Sea M una variedad riemanniana plana, conexa pero no simplemente conexa, de cohomogeneidad uno bajo la acción de un grupo de Lie $G \subseteq \mathfrak{Iso}_g(\mathbb{R}^n)$.*

1. *Si hay una única órbita singular B, entonces B es una subvariedad totalmente geodésica de M y es isométrica a $\mathbb{R}^k \times T^m$ p.a. $k, m \in \mathbb{N}$ y $\pi_1(M) \cong \mathbb{Z}^m$.*

2. *Si todas las órbitas son principales, entonces son isométricas a $\mathbb{R}^k \times T^m$ p.a. $k, m \in \mathbb{N}$.*

3. *En el caso anterior, si además $M/G = \mathbb{R}$ entonces M es difeomorfo a $\mathbb{R}^r \times T^t$ para $r, t \in \mathbb{N}$ con $r + t = n$.*

Demostración. 1. Sea $\tilde{M} = \mathbb{R}^n$ la variedad cubriente universal de M y sea $\tilde{G}$ el correspondiente grupo cubriente universal de G, que actúa con cohomogeneidad uno sobre $\tilde{M}$. Por el teorema 4.19 tenemos dos casos:

Caso 1. $\tilde{M}$ tiene una única órbita singular $\tilde{B}$ isométrica a $\mathbb{R}^\ell$, $\ell < n - 1$.
En este caso la órbita $p(\tilde{B})$ tiene dimensión menor que $n - 1$. Por lo tanto es singular; luego $B = p(\tilde{B})$. Como $\tilde{B}$ es totalmente geodésica en $\tilde{M}$, B lo es en M y por lo tanto es plana. Por 4.14, B es isométrica a $\mathbb{R}^k \times T^m$ con $m + k = \ell$. Finalmente por 3.78, tenemos que $\pi_1(M) = \pi_1(B) \cong \mathbb{Z}^m$.

Caso 2. Cada órbita de $\tilde{M}$ es isométrica a $\mathbb{R}^{n-1}$.
Este caso no se da, pues la dimensión de cualquier órbita en M es $n - 1$, por lo que B tendría que ser excepcional.

2. y 3. En este caso $\tilde{M}$ no tiene órbitas singulares; como en el inciso anterior, de tenerla su proyección a M sería una órbita singular de M. Por lo tanto, cada órbita D de M es totalmente geodésica. Entonces es plana y homogénea. Por 4.14, D es isométrica a $\mathbb{R}^k \times T^m$ con $m + k = n - 1$. Si $M^* \simeq \mathbb{R}$, tenemos que $M \simeq \mathbb{R} \times D \simeq \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^k \times T^m) \simeq \mathbb{R}^{k+1} \times T^m$. ∎

Índice alfabético

Bibliografía

[Bre] Bredon. *Introduction to Compact Transformation Groups*, Pure and Applied Mathematics **46**, Academic Press, Inc. (1972).

[dCa] do Carmo, Manfredo P., *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides (1988).

[Ca1] Cartan, Élie, *Sur quelques familles remarquables d'hypersurfaces*, C.R. Cong. Math. Liège 1939, pág. 30–41.

[Ca2] Cartan, Élie, *Groupes simples clos et ouverts et géométrie riemannienne*, J. Math. Pures Appl. **8** 1929, pág. 1–33.

[DW] van Dantzig, David. & van der Waerden, Bartel Leendert, Über metrisch homogenen Räume, Abh. Math. Sem. Hamburg **6** (1928), 374–376.

[For] Forster, Otto, *Lectures on Riemann Surfaces*, Graduate Texts in Mathematics **81**, Springer Verlag (1981).

[He] Helgason, Sigurdur, Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Space, *Graduate Studies in Mathematics* **34**, AMS, (2000).

[Kaw] Kawakubo, Katsuo, *The Theory of Transformation Groups*, Oxford University Press (1991).

[Kna] Knapp, Anthony W., *Lie Groups Beyond An Introduction*, Progress in Mathematics **140**, Birkhäuser (2002).

[KN] Kobayashi, Shoshichi & Nomizu, Katsumi, *Foundations of Differential Geometry V. I & II*, John Wiley & Sons (1995).

[LC] Levi–Civitá, Tullio, Famiglie di superfici isoparametriche nel ordinario spazio euclideo, *Atti Accad. naz. Lincei. Rend. U. Sci. Fis. Mat. Natur* **26** (1937), pág. 355–362.

[Lim] Lima, Elon Lages, *Grupo Fundamental e espaços de recobrimento*, Projecto Euclides (1998).

[Mil] Milnor, John Willard, *Topology from the differentiable viewpoint*, Princeton Landmarks in Mathematics (1997).

[MK] Mirzaie, R. & Kashani, Seyed Muhammad Baqr, On cohomogeneity one flat Riemannian manifolds, *Glasgow Mathematical Journal* **44** (2002), 185–190.

[Mos] Mostert, Paul S., On a compact Lie group acting on a manifold, *Annals of Mathematics* **65**-3 (1957), 447–454; Erratum: *Annals of Mathematics* **66**-3 (1957), 589.

[MS] Myers, S.B. & Steenrod, N.E., The Group of Isometries of a Riemannian Manifold, *Annals of Mathematics* **40**-2 (1939), 400–416.

[Pa1] Palais, Richard S., On the existence of slices for actions of non-compact Lie Groups, *Annals of Mathematics* **73** (1961), 295–323.

[Pa2] Palais, Richard S., When proper maps are closed, *Procedings of the AMS* **24** (1969), 835–836.

[PT1] Palais, Richard S. & Terng, Chuu-lian, A general theory of canonical forms, *Transactions of the AMS* **300**-2 (1987), 771–789.

[PT2] Palais, Richard S. & Terng, Chuu-lian, *Critical point theory and submanifold theory*, Lecture Notes in Mathematics 1353, Springer Verlag (1988).

[PM] Palis, Jacob & de Melo, Welington, *Introdução aos sistemas dinâmicos*, Projeto Euclides (1977).

[Ped] Pedrosa, Renato, *Riemannian Transformation Groups*, Preliminary form (1997).

[Pon] Pontrjagin, Lev Semenovich, *Topological Groups*, Princeton University (1946).

[Rot] Rotman, Joseph J., *An Introduction to the Theory of Groups*, Graduate Texts in Mathematics **148**, Springer Verlag (1999).

[Seg] Segré, B., Famiglie di ipersuperfici isoparametriche negli spazi euclidei ad un qualunque numero di dimensioni, *Atti Accad. naz Lincie Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.* **27** (1938), pág. 203–207.

[War] Warner, Frank W., *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Graduate Texts in Mathematics **94**, Springer Verlag (1983).

[Wlf] Wolf, Joseph A., *Spaces of Constant Curvature*, Publish or Perish, Inc. (1984).