UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"LA TEORIA DEL INTERES APLICADA A BONOS GUBERNAMENTALES MEXICANOS"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

A C T U A R I O

P R E S E N T A :

ALFREDO SOUZA URIBE

DIRECTORA DE TESIS: ACT. MARINA CASTILLO GARDUÑO

2004

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:
La teoría del interés aplicada a bonos gubernamentales mexicanos

realizado por Alfredo Souza Uribe

con número de cuenta 9852313-3 , quien cubrió los créditos de la carrera de: Actuaría

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
Propietario Act. Marina Castillo Garduño

Propietario Act. María Aurora Valdés Michell

Propietario Act. Felipe Zamora Ramos

Suplente Act. Yolanda Silvia Calixto García

Suplente Act. Noemí Velázquez Sánchez

Consejo Departamental de Matemáticas

Act. Jaime Vázquez Alamilla

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMATICAS

Agradezco a Dios por permitirme concluir esta etapa en compañía de las personas que amo.

A mis padres y hermana con mucho cariño por su amor, apoyo y comprensión en cada instante.

A mi familia por su nobleza.

A mis amigos por su lealtad.

A mis maestros por la formación.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Los sistemas financieros que se han desarrollado en las últimas décadas se han estructurado de acuerdo a las necesidades que tienen los gobiernos de obtener fondos con la finalidad de impulsar sus economías.
Debido a esta razón se han creado mercados internacionales donde se manejan diferentes instrumentos financieros, como los bonos gubernamentales, que son calculados a través de fórmulas financieras.

El presente proyecto de tesis contempla en su primer capítulo los principios fundamentales de la teoría del interés, indispensables para el cálculo del interés; definiciones de funciones de cantidad, interés simple y compuesto, descuento simple y compuesto, tasas nominales y efectivas, y ecuaciones de valor entre otros conceptos.

El segundo capítulo define las anualidades ciertas, desde su forma más simple hasta anualidades variables; con el objetivo de establecer una notación que facilite el cálculo de dichas anualidades. Además se consideran métodos numéricos, como el método de ad hoc y el método de Newton-Raphson, para calcular el valor de las tasas con cierta aproximación.

El tercer capítulo describe las características generales de los bonos desde el punto de vista internacional: bonos nacionales, bonos extranjeros, bonos con tasa flotante, bonos cupón cero, redención (opciones de compra y venta), y emisores; con la finalidad de especificar las reglas que regulan los mercados internacionales de los bonos.

El cuarto capítulo considera los bonos gubernamentales emitidos por países del primer mundo, mencionando los antecedentes económicos-políticos-sociales que originaron la emisión de los bonos, cada uno con características peculiares. Este preámbulo se realiza con el fin de presentar los bonos gubernamentales mexicanos, sus características generales, describiendo su importancia y analizando la forma en que cada bono gubernamental es calculado. De aquí la prioridad de utilizar las matemáticas financieras para calcular los instrumentos emitidos por el gobierno federal.

Es importante aclarar que sólo se consideran los bonos gubernamentales desde el punto de vista del emisor o gobierno, y no desde el punto de vista del prestamista o inversionista.

El apéndice A describe la forma en que se calculan los bonos cupón cero utilizando: precio de compra, precio de venta, descuento, rendimiento, y utilidad; con el propósito de mostrar como se evalúan dichos bonos y cuál es el más conveniente para las necesidades del inversionista.

Finalmente, el apéndice B contiene una serie de tablas de interés, donde i representa la tasa de interés y dependiendo de ésta constante se presentan los valores de ciertas funciones como: tasa de interés nominal, valor presente, valor acumulado y anualidades anticipadas.

CAPÍTULO 1

LA TEORÍA DEL INTERÉS

1.1 LA FUNCIÓN DE ACUMULACIÓN Y LAS FUNCIONES DE CANTIDAD

La transacción financiera más conocida es la inversión de una cantidad de dinero para obtener interés. Por ejemplo, cuando una persona invierte en una cuenta de ahorro de un banco.
La cantidad inicial de dinero invertida es conocida como el ***capital principal*** y la cantidad total recibida después de un periodo de tiempo es conocida como el ***valor acumulado***.
La diferencia entre el valor acumulado y el capital principal es el ***interés***, generado durante el periodo de inversión.

Por el momento, se supondrá que ningún depósito o retiro de capital principal se realizará durante el periodo de inversión, es decir, que cualquier cambio en el fondo se deberá estrictamente al efecto de interés.

La unidad a través de la cual se mide el tiempo es conocida como el ***periodo*** (puede ser en días, meses, años, etc.), y es representada por t. El periodo más común es de un año, y éste se asumirá mientras no se afirme otro periodo.

Se considerará la inversión de una unidad de capital principal. Se define a la ***función de acumulación*** $a(t)$ como aquella que proporciona el valor acumulado al tiempo $t \geq 0$ de una inversión original de 1 unidad monetaria.
¿Qué propiedades posee esta función?

1. $a(0)= 1$.

2. Generalmente, $a(t)$ es una función creciente. Un decrecimiento en los valores de la función al incrementar t implicaría interés negativo. Los valores de la función que permanecen constantes implicarían un interés de cero.

3. Si el interés se acumula continuamente, la función será continua. Sin embargo, existen situaciones en las cuales el interés no se acumula continuamente entre las fechas de pago de interés, en este caso $a(t)$ será discontinua.

En general, el capital principal invertido no será de una unidad monetaria pero será una cantidad $k > 0$. Se define a la ***función de cantidad*** $A(t)$ como aquella que representa el valor acumulado al tiempo $t \geq 0$ de una inversión original de k.

Entonces se tiene que

$$A(t) = k\,\alpha(t) \tag{1.1}$$

y

$$A(0) = k$$

La segunda propiedad y la tercera propiedad de $\alpha(t)$ enlistadas anteriormente, también se cumplen para $A(t)$.

Se denotará a la cantidad de interés generada durante el n-ésimo periodo de la fecha de inversión mediante I_n. Entonces

$$I_n = A(n) - A(n-1) \text{ para todo entero } n \geq 1. \tag{1.2}$$

Se debe notar que I_n contiene el efecto de interés sobre un intervalo de tiempo, mientras que $A(n)$ es una cantidad en un punto específico del tiempo.

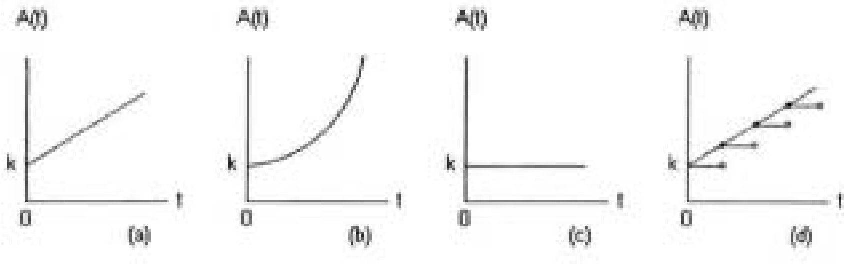


Figura 1.1 Ejemplos de funciones de cantidad

En realidad, la función de acumulación es un caso especial de una función de cantidad cuando $k = 1$.

La figura 1.1 muestra ejemplos de funciones de cantidad. La figura (a) es una función de cantidad lineal, la figura (b) es una función de cantidad no lineal, la figura (c) es una función de cantidad constante, y la figura (d) es una función de cantidad donde el interés no se está acumulando continuamente pero se está acumulando en segmentos discretos sin acumular interés entre las fechas de pago de interés.

1.2 LA TASA EFECTIVA DE INTERÉS

La primera medida de interés es conocida como la ***tasa efectiva de interés*** y se denota por la letra i.

> La tasa efectiva de interés i es la cantidad de dinero que una unidad invertida al principio de un periodo generará durante dicho periodo, donde el interés es pagado al final del periodo.

En términos de la función de acumulación, la definición es equivalente a

$$i = a(1) - a(0)$$

o

$$a(1) = 1+i \tag{1.3}$$

Es importante mencionar lo siguiente:

1. El término "efectiva" se utiliza para tasas de interés en las cuales el interés es pagado una vez por periodo.

2. La tasa efectiva de interés se expresa frecuentemente como un porcentaje, por ejemplo i = 8%.

3. La cantidad de capital principal permanece constante durante todo el periodo, es decir, no se aporta ni se retira capital principal durante el periodo.

4. La tasa efectiva de interés es una medida en la que el interés se paga al final del periodo.

La tasa efectiva de interés se puede definir en términos de la función de cantidad como:

$$i = \frac{(1+i)-1}{1} = \frac{a(1)-a(0)}{a(0)} = \frac{A(1)-A(0)}{A(0)} = \frac{I_1}{A(0)} \tag{1.4a}$$

Así, una definición alternativa es:

> La tasa efectiva de interés es la razón de la cantidad de interés generada durante el periodo entre la cantidad de capital principal invertido al principio del periodo.

Las tasas efectivas de interés se pueden calcular sobre cualquier periodo.

Si i_n es la tasa efectiva de interés durante el n-ésimo periodo desde la fecha de inversión.

Entonces se tiene que

$$i_n = \frac{A(n) - A(n-1)}{A(n-1)} = \frac{I_n}{A(n-1)} \text{ para todo entero } n \geq 1 \qquad (1.4b)$$

1.3 INTERÉS SIMPLE

Se ha supuesto que $\alpha(0) = 1$ y $\alpha(1) = 1+i$. Pero existe un número infinito de funciones de acumulación que pasan directamente estos dos puntos. En la práctica dos de estas funciones son las más importantes. La primera, el interés simple, se discutirá en esta sección; la segunda, el interés compuesto, se discutirá en la sección 1.4.

Se considera la inversión de una unidad monetaria de tal forma que la cantidad de interés generado durante cada periodo sea constante. El valor acumulado de 1 unidad monetaria al final del primer periodo es $1+i$, al final del segundo periodo es $1+2i$, etc. De esta manera se tiene una función de acumulación lineal

$$\alpha(t) = 1 + i\,t \quad \text{para todo entero } t \geq 0. \qquad (1.5)$$

La acumulación de interés de acuerdo a este modelo es conocida como **interés simple**.

La función de acumulación para interés simple se ha definido únicamente para valores enteros $t \geq 0$, aunque también se puede extender la definición para valores racionales de $t > 0$. Esto equivale a asignar el interés proporcionalmente sobre cualquier fracción de un periodo. A no ser que se afirme otra cosa, se asumirá que el interés se acumula proporcionalmente sobre periodos fraccionados bajo interés simple.

Se puede desarrollar una aproximación de $\alpha(t)$, para valores racionales de t, utilizando la siguiente propiedad, se requiere que el interés simple cumpla:

$$\alpha(t + s) = \alpha(t) + \alpha(s) - 1 \quad \text{para } t \geq 0 \text{ y } s \geq 0. \qquad (1.6)$$

La fórmula (1.6) indica que bajo interés simple la cantidad de interés generada por una inversión inicial de 1 unidad monetaria durante t + s periodos es igual a la cantidad de interés generada sobre t periodos más la cantidad de interés generada sobre s periodos. El −1 es necesario en la fórmula (1.6), ya que en otro caso existiría una inversión de dos unidades monetarias en el lado derecho de la ecuación.

Se sabe que

$$\begin{aligned}
&\alpha(t) = 1 + it \\
&\Rightarrow \alpha(t+s) = 1 + i(t+s) = 1 + it + is + 1 - 1 \\
&\qquad\qquad\quad = 1 + it + 1 + is - 1 \\
&\qquad\qquad\quad = \alpha(t) + \alpha(s) - 1
\end{aligned}$$

Asumiendo que $\alpha(t)$ es diferenciable, de la definición de la derivada se tiene

$$\begin{aligned}
\alpha'(t) &= \lim_{s\to 0} \frac{\alpha(t+s) - \alpha(t)}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{[\alpha(t) + \alpha(s) - 1] - \alpha(t)}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{\alpha(s) - 1}{s} \\
&= \lim_{s\to 0} \frac{\alpha(s) - \alpha(0)}{s} = \alpha'(0) \quad \text{una constante}
\end{aligned}$$

Reemplazando t por r e integrando ambos lados de la igualdad al tomar como límites desde 0 hasta t, se tiene

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \alpha'(r)\,dr = \int_0^t \alpha'(0)\,dr \\
&\Rightarrow \alpha(t) - \alpha(0) = t \cdot \alpha'(0) \\
&\Rightarrow \alpha(t) = 1 + t \cdot \alpha'(0)
\end{aligned}$$

Si $t = 1$ y recordando que $\alpha(1) = 1+i$, se tiene que

$$\alpha(1) = 1+i = 1+\alpha'(0)$$

de manera que $\alpha'(0) = i$.

Así, sustituyendo se tiene el siguiente resultado

$$\alpha(t) = 1+it \quad \text{para } t \geq 0. \qquad (1.5)$$

1.4 INTERÉS COMPUESTO

El interés simple supone que el interés no se reinvierte para ganar interés adicional.

El ***interés compuesto*** asume que el interés generado se reinvierte automáticamente para ganar interés adicional. Mediante el interés compuesto la inversión total de capital principal y el interés generado a cierta fecha se mantienen invertidos en cualquier instante del tiempo.

Se desea encontrar una función de acumulación para el interés compuesto. Se considera la inversión de 1 unidad monetaria que acumula $1+i$ al final del primer periodo. Este saldo de $1+i$ puede considerarse como capital principal al principio del segundo periodo y generará un interés de $i(1+i)$ durante el segundo periodo. El saldo al final del segundo periodo es $(1+i)+i(1+i) = (1+i)^2$. Del mismo modo, el saldo de $(1+i)^2$ puede considerarse como capital principal al inicio del tercer periodo y generará un interés de $i(1+i)^2$ durante el tercer periodo. El saldo al final del tercer periodo es $(1+i)^2+i(1+i)^2 = (1+i)^3$.

Continuando con este proceso indefinidamente, se tiene que

$$\alpha(t) = (1+i)^{t} \quad \text{para todo entero } t \geq 0. \tag{1.7}$$

La función de acumulación para interés compuesto se ha definido únicamente para valores enteros $t \geq 0$, aunque también se puede extender la definición para valores racionales de $t > 0$. Se puede desarrollar una aproximación de $\alpha(t)$, para valores racionales de t, aplicando una propiedad análoga a la utilizada en la sección 1.3 para interés simple.

Se desea que el interés compuesto cumpla:

$$\alpha(t + s) = \alpha(t) * \alpha(s) \quad \text{para } t \geq 0 \text{ y } s \geq 0. \tag{1.8}$$

La fórmula (1.8) indica que bajo interés compuesto la cantidad de interés generada por una inversión inicial de 1 unidad monetaria durante $t + s$ periodos es igual a la cantidad de interés generada si la inversión se termina al final de t periodos y el valor acumulado es reinvertido en ese momento durante s fracciones adicionales de periodo.

Asumiendo que $\alpha(t)$ es diferenciable, de la definición de la derivada se tiene que

$$\alpha'(t) = \lim_{s \to 0} \frac{\alpha(t+s) - \alpha(t)}{s} = \lim_{s \to 0} \frac{\alpha(t) \bullet \alpha(s) - \alpha(t)}{s}$$
$$= \alpha(t) \lim_{s \to 0} \frac{\alpha(s) - 1}{s} = \alpha(t) \bullet \alpha'(0)$$

De esta manera

$$\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} = \frac{d}{dt} \ln \alpha(t) = \alpha'(0).$$

Reemplazando t por r e integrando ambos lados de la igualdad, tomando como límites desde 0 hasta t, se tiene que

$$\int_0^t \frac{d}{dr} \ln \alpha(r)\, dr = \int_0^t \alpha'(0)\, dr$$
$$\Rightarrow \ln \alpha(t) - \ln \alpha(0) = t \bullet \alpha'(0)$$
$$\Rightarrow \ln \alpha(t) = t \bullet \alpha'(0)$$

ya que $\ln \alpha(0) = 0$. Si $t=1$ y recordando que $\alpha(1) = 1+i$, se tiene

$$\ln \alpha(1) = \ln (1+i) = \alpha'(0)$$

Así, sustituyendo se tiene el siguiente resultado

$$\ln \alpha(t) = t \ln (1+i) = \ln (1+i)^t$$

o

$$\alpha(t) = (1+i)^t \text{ para } t \geq 0. \qquad (1.7)$$

A no ser que se afirme otra cosa, se asumirá que bajo interés compuesto el interés se acumula sobre periodos fraccionados según la fórmula (1.7). De esta manera, la función de cantidad es exponencial.

Se puede ver que el interés simple y el interés compuesto producen el mismo resultado en el primer periodo. Sobre un periodo más grande, el interés compuesto produce un valor acumulado más grande que el interés simple, mientras que en un periodo más corto, el interés simple produce un valor acumulado más grande que el interés compuesto.

El interés compuesto se usa para transacciones con periodos de un año o más. El interés simple se usa para transacciones con periodos cortos y también se utiliza como una aproximación para interés compuesto con periodos fraccionados.

1.5 VALOR PRESENTE

Se ha visto que una inversión de 1 unidad monetaria acumula $1+i$ al final del primer periodo. El término $1+i$ es conocido como ***factor de acumulación***, ya que acumula el valor de una inversión desde el principio de un periodo hasta su valor al final del periodo.

A menudo se necesita determinar cuanto debe invertir una persona inicialmente de manera que el saldo sea de 1 unidad monetaria al final del primer periodo, la respuesta es $(1+i)^{-1}$, ya que esta cantidad se aproximará a 1 al final del primer periodo. Ahora se define un nuevo símbolo v tal que

$$v = \frac{1}{1+i} \tag{1.9}$$

El término v es conocido como ***factor de descuento***, ya que "descuenta" el valor de una inversión desde el final de un periodo hasta su valor al principio del periodo.

Se puede generalizar el resultado anterior a periodos de tiempo mayores a un periodo, es decir, encontrar la cantidad que una persona debe invertir para acumular una cantidad de 1 unidad monetaria al final de t periodos. La respuesta es el recíproco de la función de acumulación $a^{-1}(t)$, ya que el valor acumulado de esta cantidad al final de t periodos es $a^{-1}(t)\, a(t) = 1$. Se llamará a $a^{-1}(t)$ la ***función de descuento***.

Así, se obtienen los siguientes resultados para $t \geq 0$:

$$\text{Interés simple:} \qquad a^{-1}(t) = \frac{1}{1+it} \tag{1.10}$$

$$\text{Interés compuesto:} \qquad a^{-1}(t) = \frac{1}{(1+i)^t} = v^t \tag{1.11}$$

En cierto sentido, los ***procesos de acumulación y de descuento*** son opuestos. El término $(1+i)^t$ es el ***valor acumulado*** de 1 unidad monetaria al final de t periodos. El término v^t es el ***valor presente*** (o ***valor descontado***) de 1 unidad monetaria que debe pagarse al final de t periodos.

Como se puede observar los valores de v^t extienden la definición de la función de acumulación para valores negativos de t. De esta manera, la función de acumulación para interés compuesto se muestra en la figura 1.2.

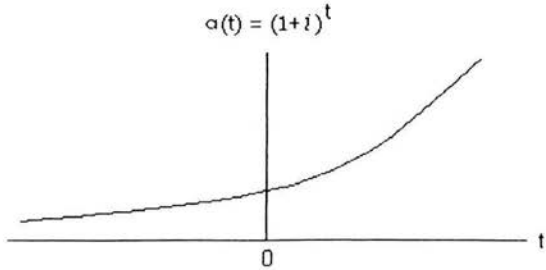


Figura 1.2 Función de acumulación para interés compuesto

1.6 TASA EFECTIVA DE DESCUENTO

Otra medida de interés que se conoce es la ***tasa efectiva de descuento***, denotada por d, como una medición de interés pagado al principio del periodo.

La tasa efectiva de descuento d es la cantidad de dinero que se descuenta, al principio del periodo, de una unidad monetaria para producir una unidad monetaria al final del periodo. El descuento es la cantidad pagada anticipadamente por utilizar el capital durante ese periodo.

Si A va al banco y pide prestado \$100 por un año a una tasa efectiva de interés del 5%, entonces el banco le dará \$100 a A. Al final del año A devolverá al banco el préstamo original de \$100, más \$5 de interés, o un total de \$105. Sin embargo, si A pide prestado \$100 por un año a una tasa efectiva de descuento del 5%, entonces el banco cobrará por adelanto un interés del 5% y dará solo \$95 a A. Al final del año A devolverá al banco \$100.

La tasa efectiva de descuento d es la razón de la cantidad de descuento (interés) generada durante el periodo entre la cantidad obtenida al final del periodo.

Es importante mencionar las siguientes observaciones sobre esta definición:

1. Las observaciones 1, 2 y 3 de la sección 1.2 con respecto a la definición de tasa efectiva de interés también se aplican a la definición de tasa efectiva de descuento.

2. Se puede utilizar la frase ***cantidad de descuento*** para situaciones que contengan tasas de descuento.

3. La definición no utiliza la palabra "capital principal", ya que la definición de capital principal se refiere a la cantidad invertida al principio del periodo y no a la cantidad obtenida al final del periodo.

4. La diferencia concreta entre la tasa efectiva de interés y la tasa efectiva de descuento es:

   a) Interés. Pagado al final del periodo sobre el saldo al principio del periodo.

   b) Descuento. Pagado al principio del periodo sobre el saldo al final del periodo.

Las tasas efectivas de descuento se pueden calcular sobre cualquier periodo. Si d_n es la tasa efectiva de descuento durante el periodo n-ésimo desde la fecha de inversión.

$$d_n = \frac{A(n) - A(n-1)}{A(n)} = \frac{I_n}{A(n)} \text{ para todo entero } n \geq 1 \tag{1.12}$$

Para desarrollar la relación entre la tasa efectiva de interés y la tasa efectiva de descuento se necesita definir el concepto de ***equivalencia*** de la siguiente manera:

> Se dice que la tasa de interés es equivalente a la tasa de descuento si una cantidad de capital principal invertido a la misma longitud de tiempo, en cada una de las tasas, produce el mismo valor acumulado.

Al asumir prestada 1 unidad monetaria a una tasa efectiva de descuento d. Entonces, el capital principal original es $1-d$ y la cantidad de interés (descuento) es d. Sin embargo, de la definición básica de i como la razón de la cantidad de interés (de descuento) entre el capital principal, se obtiene

$$i = \frac{d}{1-d} \tag{1.13}$$

Esta fórmula expresa a i como una función de d.

Despejando, es posible expresar d como una función de i

$$i = \frac{d}{1-d} \Rightarrow i - id = d \Rightarrow d\,(1+i) = i$$

$$d = \frac{i}{1+i} \tag{1.14a}$$

La fórmula (1.14a) es un replanteamiento de la definición de tasa efectiva de descuento como la razón de la cantidad de interés (descuento) que 1 unidad monetaria generará durante el periodo entre la cantidad obtenida al final del periodo.

Existen relaciones importantes entre d, una tasa de descuento, y v, un factor de descuento. Una relación idéntica a la fórmula (1.14a) es

$$d = i\,v \tag{1.14b}$$

El interés generado en una inversión de 1 unidad monetaria pagado al principio del periodo es d. El interés sobre una inversión de 1 unidad monetaria pagado al final del periodo es i. Por lo tanto, si se descuenta a i desde el final del periodo al principio del periodo con el factor de descuento v, se obtiene d.
Existe otra relación más útil entre d y v

$$\begin{aligned} d &= \frac{i}{1+i} \\ &= \frac{1+i}{1+i} - \frac{1}{1+i} \\ &= 1 - v \end{aligned} \tag{1.15}$$

Si se escribe $v = 1 - d$, se ve inmediatamente que ambos lados de la ecuación representan el valor presente de 1 pagado al final del periodo.

La tasa efectiva de descuento, o descuento compuesto, asume interés compuesto. Sin embargo, es posible definir el ***descuento simple*** en forma análoga a la definición de interés simple.

Se considera la situación donde la cantidad de descuento generado durante cada periodo es constante. Entonces, el capital principal original que producirá un valor acumulado de 1 unidad monetaria al final de t periodos es

$$a^{-1}(t) = 1 - dt \qquad \text{para } 0 \le t \le 1/d \tag{1.16}$$

La segunda parte de la desigualdad es necesaria para cumplir que $\alpha^{-1}(t)>0$. Esto difiere del descuento compuesto, en cuyo caso el valor presente es

$$\alpha^{-1}(t) = \nu^{t} = (1-d)^{t} \quad \text{para } t \geq 0 \tag{1.17}$$

Se puede notar que las fórmulas (1.13), (1.14a), (1.14b), y (1.15), asumen tasas efectivas de interés y descuento y no son válidas para tasas de interés simple y descuento simple, a no ser que el periodo de inversión sea exactamente de un periodo.

Tanto el descuento simple y el descuento compuesto producen el mismo resultado en un periodo. Sobre un periodo más grande, el descuento simple produce un valor presente más pequeño que el descuento compuesto, mientras que lo opuesto se cumple en un periodo más corto.

Se pueden observar estos resultados gráficamente en la figura 1.3.

La figura 1.3(a) compara la función de acumulación bajo interés simple e interés compuesto. La figura 1.3(b) compara la función de descuento bajo descuento simple y descuento compuesto.

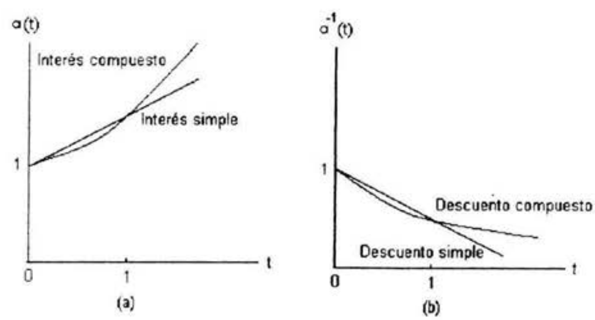


Figura 1.3 Comparaciones de: (a) interés simple y compuesto, y (b) descuento simple y compuesto

El descuento simple se usa ocasionalmente para transacciones en periodos cortos y también se usa como una aproximación para el descuento compuesto sobre periodos fraccionados.

1.7 TASAS NOMINALES DE INTERÉS Y DESCUENTO

Esta sección considera las situaciones en que el interés se paga más de una vez por periodo. En estos casos, las tasas de interés y descuento son conocidas como "nominales"

En la práctica se utilizan varios términos para describir las situaciones en que el interés se paga más de una vez por periodo. Entre estas se encuentran "pagadero", "compuesto" y "convertible", como "pagadero semestralmente", y "convertible mensualmente".

La frecuencia con que el interés es pagado y reinvertido para generar interés adicional es conocida como ***periodo de conversión de interés***.

En esta sección se definen las tasas nominales de interés y descuento y se desarrolla un método sistemático para encontrar las tasas efectiva y nominal de interés y descuento en forma equivalente.

El símbolo para representar una ***tasa nominal de interés pagadera m veces por periodo*** es $i^{(m)}$, donde m es un entero positivo. Una tasa nominal de interés $i^{(m)}$ significa que es una tasa pagadera m veces por periodo, es decir, la tasa efectiva de interés es $i^{(m)}/m$ para cada m-ésimo de un periodo y no $i^{(m)}$.

Por ejemplo, una tasa nominal del 4% convertible trimestralmente no significa una tasa de interés del 4% por trimestre, más bien significa una tasa de interés del 1% por trimestre. Se puede afirmar que una tasa nominal de interés de $i^{(m)}$ por periodo es idéntica a una tasa efectiva de interés de $i^{(m)}/m$ por m-ésimo de un periodo.

Así, de la definición de equivalencia se tiene que

$$1+i=\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{m} \tag{1.18a}$$

Ya que cada lado de la ecuación da el valor acumulado de 1 unidad monetaria invertida durante un periodo de medición. Despejando, se tiene

$$i=\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{m}-1 \tag{1.18b}$$

e

$$i^{(m)}=m\left[(1+i)^{\frac{1}{m}}-1\right] \tag{1.18c}$$

La figura 1.4 representa la acumulación de una tasa nominal de interés durante un periodo. Las flechas diagonales hacia la derecha se pueden interpretar como signos de más y las flechas descendientes como signos de igual.

Tiempo:	0	$\frac{1}{m}$	$\frac{2}{m}$	...	$\frac{m-1}{m}$	$\frac{m}{m}=1$
Interés:		$\frac{i^{(m)}}{m}\cdot 1$	$\frac{i^{(m)}}{m}\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)$	...	$\frac{i^{(m)}}{m}\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{m-2}$	$\frac{i^{(m)}}{m}\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{m-1}$
Saldo:	1	$1+\frac{i^{(m)}}{m}$	$\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{2}$	...	$\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{m-1}$	$\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{m}=1+i$

Figura 1.4 Ejemplo de tasas nominales de interés

El símbolo para representar una ***tasa nominal de descuento pagadera m veces por periodo*** es $d^{(m)}$. Una tasa nominal de descuento $d^{(m)}$ significa que es una tasa pagadera m veces por periodo, es decir, la tasa efectiva de descuento es $d^{(m)}/m$ para cada m-ésimo de un periodo.

La tasa nominal de descuento $d^{(m)}$ es una medida del interés pagado al principio de los m-ésimos de un periodo. Al basarse en un argumento similar al utilizado en el desarrollo que relaciona $i^{(m)}$ con i, es posible desarrollar una fórmula que relacione $d^{(m)}$ con d de tal forma que sean equivalentes.

Así, de la definición de equivalencia se tiene que

$$1-d=\left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^{m} \tag{1.19a}$$

Ya que cada lado de la ecuación da el valor acumulado de 1 unidad monetaria invertida durante un periodo.
Despejando, se tiene

$$d=1-\left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^{m} \tag{1.19b}$$

y

$$d^{(m)}=m\left[1-(1-d)^{\frac{1}{m}}\right]=m\left[1-v^{\frac{1}{m}}\right] \tag{1.19c}$$

La figura 1.5 representa el descuento en una tasa nominal de descuento durante un periodo. Las flechas diagonales hacia la izquierda se pueden interpretar como signos de menos y las flechas descendientes como signos de igual.

Tiempo:	0	$\frac{1}{m}$	$\cdots$	$\frac{m-2}{m}$	$\frac{m-1}{m}$	$\frac{m}{m}=1$
Descuento:	$\frac{d^{(m)}}{m}\left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^{m-1}$	$\frac{d^{(m)}}{m}\left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^{m-2}$	$\cdots$	$\frac{d^{(m)}}{m}\left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)$	$\frac{d^{(m)}}{m}\cdot 1$	
Saldo:	$1-d=\left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^{m}$	$\left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^{m-1}$	$\cdots$	$\left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^{2}$	$1-\frac{d^{(m)}}{m}$	1

Figura 1.5 Ejemplo de tasas nominales de descuento

Existe una relación entre la tasa nominal de interés y la tasa nominal de descuento.

La siguiente relación se cumple, ya que ambos lados de la ecuación son iguales a $1+i$

$$\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{m}=\left(1-\frac{d^{(p)}}{p}\right)^{-p} \tag{1.20a}$$

Si $m = p$, entonces la fórmula (1.20a) se convierte en

$$\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)=\left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^{-1} \tag{1.20b}$$

Si $m = 1$, entonces $i^{(m)} = i$, la tasa efectiva de interés, y si $p = 1$, entonces $d^{(p)} = d$, la tasa efectiva de descuento.

Así la fórmula (1.20a) se puede expresar en general para encontrar tasas equivalentes de interés o descuento, ambas efectivas o nominales, convertibles a cualquier frecuencia deseada.

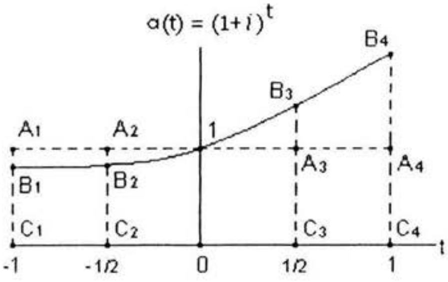


Figura 1.6 Función de acumulación relacionada con tasas nominales de interés y descuento

Es importante relacionar las tasas nominales de interés y descuento con respecto a la función de acumulación a(t).

El ejemplo mostrado en la figura 1.6 para m = 2 sostiene gráficamente las siguientes relaciones:

$$A_1B_1 = d \qquad B_1C_1 = v \qquad = \left(1 - \frac{d^{(2)}}{2}\right)^2$$

$$A_2B_2 = \frac{d^{(2)}}{2} \qquad B_2C_2 = v^{1/2} \qquad = 1 - \frac{d^{(2)}}{2}$$

$$A_3B_3 = \frac{i^{(2)}}{2} \qquad B_3C_3 = (1+i)^{1/2} \qquad = 1 + \frac{i^{(2)}}{2}$$

$$A_4B_4 = i \qquad B_4C_4 = 1 + i \qquad = \left(1 + \frac{i^{(2)}}{2}\right)^2$$

Se debe notar que las tasas nominales de interés y descuento no están relacionadas con respecto al interés simple y al descuento simple. Ya que la cantidad de interés o de descuento es directamente proporcional al tiempo involucrado, una tasa de interés de descuento pagadera m veces no es diferente a una tasa pagadera una vez por periodo.

1.8 FUERZAS DE INTERÉS Y DESCUENTO

Las medidas de interés definidas en las secciones precedentes son útiles para la medición del interés sobre intervalos específicos de tiempo. Las tasas efectivas de interés y descuento miden el interés sobre un periodo, mientras que las tasas nominales de interés y descuento miden el interés sobre m-ésimos de un periodo.

En algunos casos es importante poder medir la intensidad con la cual el interés opera en cada momento del tiempo, es decir, sobre intervalos de tiempo infinitesimalmente pequeños. Esta medida de interés en momentos individuales de tiempo es conocida como ***fuerza de interés***.

Se considera la inversión de un fondo tal que la cantidad en el fondo al tiempo t se obtiene mediante la función de cantidad $A(t)$.
La intensidad con la cual el interés está operando al tiempo t se mide a través de la tasa de cambio o la pendiente de la curva $A(t)$ al tiempo t. Por cálculo elemental, se sabe que la pendiente de la curva $A(t)$ al tiempo t se obtiene a través de la derivada en ese punto.

Sin embargo, como una mediada de interés, $A'(t)$ no es satisfactoria, ya que depende de la cantidad invertida. Por ejemplo, si se invierten \$30 y \$10 bajo condiciones idénticas, la tasa de cambio del fondo de \$30 será lo triple de la tasa de cambio del fondo de \$10. Sin embargo, el interés no está operando con el triple de intensidad sobre el fondo de \$30; en efecto, se diría que está operando con la misma intensidad en ambos fondos.

Se puede compensar esto al dividir $A'(t)$ entre la cantidad en el fondo al tiempo t, que es $A(t)$. Esto ofrece una medida de la intensidad con la cual el interés está operando al tiempo t expresado como una tasa independiente de la cantidad en el fondo.

Así, la fuerza de interés al tiempo t, denotada por δ_t, se define como

$$\delta_t = \frac{A'(t)}{A(t)} = \frac{a'(t)}{a(t)} \qquad (1.21)$$

Se deben considerar las siguientes propiedades de δ_t:

1. δ_t es una medida de la intensidad de interés al tiempo exacto t.

2. δ_t expresa esta medición como una tasa por periodo de medición.

Es posible escribir una expresión para el valor de $A(t)$ y $a(t)$ en términos de la función δ_t. Se verá de la fórmula (1.21) que una expresión alternativa para δ_t es

$$\delta_t = \frac{d}{dt} \ln A(t) = \frac{d}{dt} \ln a(t) \tag{1.22}$$

Reemplazando t por r e integrando ambos lados de la igualdad tomando como límites desde 0 hasta t, se tiene

$$\int_0^t \delta_r \, dr = \int_0^t \frac{d}{dr} \ln A(r) \, dr = \ln A(r)\Big|_0^t = \ln \frac{A(t)}{A(0)}$$

así

$$e^{\int_0^t \delta_r \, dr} = \frac{A(t)}{A(0)} = \frac{a(t)}{a(0)} = a(t) \tag{1.23}$$

La idea de la fuerza de interés se puede obtener al analizar la fórmula (1.21) en términos de la definición de la derivada. La derivada de $A(t)$ se puede expresar como

$$A'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{A(t+h) - A(t)}{h}$$

y de la fórmula (1.21), δ_t se puede escribir como

$$\delta_t = \frac{A'(t)}{A(t)} = \lim_{h \to 0} \frac{A(t+h) - A(t)}{hA(t)} \tag{1.24}$$

$[A(t+h) - A(t)]/ hA(t)$ se puede considerar como una tasa de interés basada del interés generado durante el intervalo de tiempo t al tiempo t +h.
Por ejemplo, si $h = 1$, se tiene $[A(t+1) - A(t)]/ A(t)$, que es el incremento de un periodo en el fondo dividido por la cantidad en el fondo al principio del periodo. Si $h = ½$, se tiene $2[A(t+½) - A(t)]/ A(t)$, que es el doble del incremento de medio periodo en el fondo dividido por la cantidad en el fondo al principio del periodo. A medida que h se aproxime a 0, el límite de esta expresión, la fuerza de interés se puede describir como la tasa nominal de interés basada de la intensidad del interés al tiempo t.

También se define una ***fuerza de descuento*** análoga a la fórmula (1.21). Para ello se utiliza la función de descuento $a^{-1}(t)$ en lugar de la función de acumulación $a(t)$. La definición de la fuerza de descuento al tiempo t, denotada por δ'_t es

$$\delta'_t = -\frac{\frac{d}{dt}a^{-1}(t)}{a^{-1}(t)} \tag{1.25}$$

La definición de δ'_t es completamente análoga a la definición de δ_t excepto por el signo menos. El signo menos es necesario para hacer de la fuerza de descuento una cantidad positiva.

A continuación se demostrará que $\delta'_t = \delta_t$, de manera que se puede prescindir de δ'_t y usar δ_t. La prueba es la siguiente:

$$\begin{aligned}\delta'_t &= -\frac{\frac{d}{dt}a^{-1}(t)}{a^{-1}(t)} = \frac{a^{-2}(t)\frac{d}{dt}a(t)}{a^{-1}(t)}\\ &= \frac{a^{-2}(t)\,a(t)\,\delta_t}{a^{-1}(t)} \qquad \text{de la fórmula (1.21)}\\ &= \delta_t\end{aligned}$$

En teoría, la fuerza de interés puede variar instantáneamente. Sin embargo, frecuentemente en la práctica es una constante. Si la fuerza de interés es constante sobre un intervalo de tiempo, entonces la tasa efectiva de interés también será constante sobre dicho intervalo. Esto se puede ver al usar la fórmula (1.23) sobre n periodos de medición (n un entero positivo).

$$\begin{aligned}e^{\int_0^n \delta_t\,dt} &= e^{n\delta} \quad \text{si} \quad \delta_t = \delta \ \text{ para } 0 \le t \le n\\ &= a(n)\\ &= (1+i)^n\end{aligned}$$

de manera que

$$e^{\delta} = 1 + i \tag{1.26}$$

o

$$i = e^{\delta} - 1 \tag{1.27a}$$

que expresa a i como una función de δ.

Tomando el logaritmo de la fórmula (1.26) expresa a δ como una función de *i*.

$$\delta = \ln(1+i) \tag{1.28a}$$

Las fórmulas (1.27a) y (1.28a) también se pueden escribir como expansiones de series:

$$i = e^{\delta} - 1 = \delta + \frac{\delta^2}{2!} + \frac{\delta^3}{3!} + \frac{\delta^4}{4!} + \ldots \tag{1.27b}$$

$$\delta = \ln(1+i) = i - \frac{i^2}{2} + \frac{i^3}{3} - \frac{i^4}{4} + \ldots \tag{1.28b}$$

Estas dos series normalmente tendrán una tasa de convergencia rápida, ya que en la práctica i y δ son números positivos pequeños cuyas potencias sucesivas disminuyen rápidamente.

El tener relacionadas a δ con i permite vincular a δ con otras medidas de interés descritas en este capítulo. El siguiente conjunto de igualdades resume el material contenido:

$$\left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^{m} = 1 + i = v^{-1} = (1-d)^{-1} = \left(1 - \frac{d^{(p)}}{p}\right)^{-p} = e^{\delta} \tag{1.29}$$

Es importante examinar el comportamiento de la fuerza de interés mediante interés simple y descuento simple. Del interés simple se tiene

$$\delta_t = \frac{\frac{d}{dt}\, a(t)}{a(t)} = \frac{\frac{d}{dt}\,(1 + i\,t)}{1 + i\,t} = \frac{i}{1 + i\,t} \quad \text{para} \quad 0 \le t \tag{1.30}$$

Análogamente, para el descuento simple se tiene

$$\delta_t = \delta'_t = -\frac{\frac{d}{dt}\, a^{-1}(t)}{a^{-1}(t)} = -\frac{\frac{d}{dt}\,(1 - dt)}{1 - dt}$$

$$= \frac{d}{1 - dt} \quad \text{para} \quad 0 \le t < 1/d \tag{1.31}$$

La restricción superior sobre los valores de t en la fórmula (1.31) es necesaria para tener valores de δ_t que son finitos y positivos. Como se esperaba, δ_t es una función decreciente de t para interés simple, pero es una función creciente de t para descuento simple.

Otra idea interesante de la fuerza de interés se puede obtener al analizar δ en términos de $i^{(m)}$. De la fórmula (1.29)

$$\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^m = e^{\delta}$$

$$\Rightarrow i^{(m)} = m\left[e^{\frac{\delta}{m}} - 1\right]$$

Usando una expansión de serie, se tiene que

$$i^{(m)} = m\left[\frac{\delta}{m} + \frac{1}{2!}\left[\frac{\delta}{m}\right]^2 + \frac{1}{3!}\left[\frac{\delta}{m}\right]^3 + \ldots\right] = \delta + \frac{\delta^2}{2!\,m} + \frac{\delta^3}{3!\,m^2} + \ldots.$$

y tomando el límite cuando m tiende a infinito

$$\lim_{m\to\infty} i^{(m)} = \delta \tag{1.32}$$

Como $i^{(m)}$ es una tasa nominal de interés convertible m veces por periodo, se puede interpretar a δ como una tasa nominal de interés convertible continuamente.
Al basarse en un argumento análogo, es posible demostrar que

$$\lim_{m\to\infty} d^{(m)} = \delta \tag{1.33}$$

Como $d^{(m)}$ es una tasa nominal de descuento convertible m veces por periodo, se puede interpretar a δ como una tasa nominal de descuento convertible continuamente. En esencia, esta es una demostración alternativa de que la fuerza de interés y la fuerza de descuento son equivalentes.

En teoría, la medida de interés más importante es la fuerza de interés. Sin embargo, en la práctica, las tasas efectivas y nominales de interés y descuento se usan con más frecuencia debido a que son más simples de comprender para muchas personas y debido a que las transacciones financieras contienen procesos discretos en lugar de procesos continuos. Esto no significa que la fuerza de interés carece de significado práctico. Además de ser una herramienta conceptual útil y analítica, se puede usar en la práctica como una aproximación al interés convertido muy frecuentemente, como el interés convertible diariamente. También, en la actualidad algunas instituciones financieras han empezado a usar composiciones continuas en años recientes.

1.9 FÓRMULAS BÁSICAS DE LA TEORÍA DEL INTERÉS

La tabla 1.1 resume las principales fórmulas de la teoría de interés

Tabla 1.1 Resumen de las fórmulas básicas

Tasa de interés o descuento	El valor acumulado de 1 al tiempo $t = a(t)$	El valor presente al tiempo $t = a^{-1}(t)$
Interés compuesto		
i	$(1+i)^t$	$v^t = (1+i)^{-t}$
$i^{(m)}$	$\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{mt}$	$\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{-mt}$
Descuento compuesto		
d	$(1-d)^{-t}$	$(1-d)^t$
$d^{(m)}$	$\left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^{-mt}$	$\left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^{mt}$
δ	$e^{\delta t}$	$e^{-\delta t}$
Interés simple		
i	$1+it$	$(1+it)^{-1}$
Descuento simple		
d	$(1+dt)^{-1}$	$1-dt$

1.10 RESULTADOS NUMÉRICOS

El uso de computadoras personales y calculadoras con funciones exponenciales y logarítmicas hace posible, a través de cálculos directos, la obtención de respuestas numéricas a problemas de interés. En efecto, el cálculo directo probablemente es el método más fácil y más eficiente en muchos casos. Una aproximación alternativa es usar las tablas de interés compuesto.
El uso de las tablas de interés compuesto es una aproximación conveniente si se requiere de los valores que aparecen en las tablas.

Como último recurso se deben realizar los cálculos directamente. Esto requiere del uso de expansión de series. Un ejemplo sería evaluar $(1+i)^k$ usando el teorema del binomio

$$(1+i)^k = 1 + ki + \frac{k(k-1)\,i^2}{2!} + \frac{k(k-1)(k-2)\,i^3}{3!} + \dots \qquad (1.34)$$

Un segundo ejemplo sería evaluar $e^{k\delta}$ como

$$e^{k\delta} = 1 + k\delta + \frac{(k\delta)^2}{2!} + \frac{(k\delta)^3}{3!} + \dots \qquad (1.35)$$

Estas fórmulas se pueden utilizar para valores positivos y negativos de k, aunque, la convergencia sería lenta a no ser que el valor absoluto de k sea pequeño (para periodos fraccionarios de tiempo). Se pueden desarrollar otras expansiones de series a través de las identidades básicas.

Un método que se encuentra comúnmente en la práctica es utilizar el interés compuesto para periodos enteros de tiempo, y usar el interés simple para periodos fraccionarios. Esta aproximación es equivalente a usar sólo los primeros dos términos de la expansión binomial de la fórmula (1.34), asumiendo que $0 < k < 1$.

Se puede demostrar que el uso de interés simple para una periodo fraccionario final equivale a realizar una interpolación lineal entre $(1+i)^n$ y $(1+i)^{n+1}$, donde n es un entero no negativo. Para ver esto se utiliza interpolación lineal

$$(1+i)^{n+k} \doteq (1+i)^n(1+ki) \qquad (1.36)$$

que es la fórmula cuando el interés simple se utiliza durante un periodo fraccionario final.

Es interesante notar que, de manera análoga, la interpolación lineal para v^{n+k} es equivalente a usar descuento simple sobre el periodo fraccionario final. De nuevo, se utiliza interpolación lineal

$$v^{n+k} = (1-d)^{n+k} \doteq v^{n}(1-k\,d) \tag{1.37}$$

que es la fórmula cuando el descuento simple se utiliza durante un periodo fraccionario final.

1.11 DETERMINACIÓN DE LOS PERIODOS DE TIEMPO

Dentro de los problemas prácticos que involucran interés es necesario determinar el periodo de tiempo de una inversión. Aunque parecería no existir ambigüedad alguna en el proceso, en la práctica se presentan diferentes métodos para contar los días de un periodo de inversión. A menudo se encuentran tres métodos.

El primer método consiste en usar el número exacto de días durante el periodo de inversión y utilizar 365 días en un año. El interés simple calculado mediante estas bases, en ocasiones, se le conoce como ***interés simple exacto*** comúnmente denotado como "actual /actual".

El segundo método asume que cada mes natural tiene 30 días y que el año natural completo tiene 360 días. El interés simple calculado mediante estas bases, en ocasiones, se le conoce como ***interés simple ordinario*** comúnmente denotado como "30/360".

Una fórmula para poder contar el número de días entre las dos fechas dadas es:

$$360(A_2-A_1)+30(M_2-M_1)+(D_2-D_1) \tag{1.38}$$

donde M_1 = mes de la primera fecha

D_1 = día de la primera fecha

A_1 = año de la primera fecha

M_2 = mes de la segunda fecha

D_2 = día de la segunda fecha

A_2 = año de la segunda fecha

El tercer método es un híbrido y usa el número exacto de días durante el periodo de inversión, pero considera 360 días en un año. El interés simple calculado mediante estas bases se le conoce como la ***norma bancaria*** comúnmente denotada como "actual/360". Para un prestamista siempre es más favorable utilizar la norma bancaria en lugar de usar el interés simple exacto.

En un año bisiesto surge una complicación. En muchos casos, el 29 de febrero se cuenta como día y el año se cuenta con 366 días. Sin embargo, en algunos casos, el 29 de febrero se cuenta como día, pero aún el año se cuenta con 365 días. En otros casos, el 29 de febrero no se cuenta como día, es decir, no se genera interés. Asumir que todos los años tienen 365 ¼ días no genera una aproximación uniforme para el año bisiesto y en la práctica se encuentran diferentes bases para calcularlo. Se debe notar que el año bisiesto es irrelevante bajo interés simple ordinario (30/360).

Los términos anteriores se han expresado en términos de interés simple. Sin embargo, las tres bases que se han encontrado para calcular, es decir, actual/ actual, 30/360, y actual/360, también se utilizan para hacer cálculos sobre bases de interés compuesto.

En la práctica, no todos los problemas de interés necesitan que se cuenten los días. Algunas transacciones financieras se manejan sobre bases mensuales, trimestrales, semestrales o anuales.

1.12 ELEMENTOS BÁSICOS DE UN PROBLEMA

Al descomponer en sus términos más simples, un problema de interés contiene cuatro cantidades básicas:

1. El capital principal originalmente invertido.

2. La duración del periodo de inversión.

3. La tasa de interés.

4. El valor acumulado del capital principal al final del periodo de inversión.

Si se conocen tres de cualquiera de estas cantidades, entonces se puede determinar la cuarta cantidad.

1.13 ECUACIONES DE VALOR

Un principio fundamental en la teoría de interés es que el valor de una cantidad de dinero en cualquier momento depende del tiempo transcurrido, ya que el dinero se pagó en el pasado o en el tiempo que transcurrirá en el futuro.

A menudo, este principio se describe como el ***valor del dinero a través del tiempo***. Este proceso difiere de los cálculos financieros en que no contiene el efecto de interés, es decir, dichos cálculos no reconocen el valor del dinero a través del tiempo. Se debe observar que el "reconocimiento del valor del dinero a través del tiempo" refleja el efecto del interés, pero no el efecto de la inflación el cual reduce el poder adquisitivo del dinero a través del tiempo.

Como una consecuencia del principio anterior, es evidente que dos o más cantidades de dinero pagaderas en diferentes momentos no se pueden comparar hasta que todas las cantidades sean acumuladas o descontadas a una fecha común.

La fecha común es conocida como ***fecha focal, fecha de vencimiento*** o ***fecha de comparación***, y la ecuación que acumula o descuenta cada pago a la fecha focal es conocida como la ***ecuación de valor***.

Un dispositivo que a menudo es útil en la solución de ecuaciones de valor es el ***diagrama de tiempo***. El diagrama de tiempo es un diagrama unidimensional en el cual sus unidades de tiempo se miden a lo largo de una dimensión y sus pagos son colocados sobre puntos apropiados del diagrama. Los pagos en una dirección son colocados en la parte superior del diagrama y los pagos en la otra dirección son colocados en la parte inferior del diagrama. La fecha focal se denota por una flecha.

El diagrama de tiempo no es necesario en la solución de ecuaciones de valor, es simplemente una ayuda para visualizar el problema. Una de las propiedades del interés compuesto es que la elección de la fecha focal no ocasiona ninguna diferencia en la respuesta obtenida. De esta manera, existe una ecuación de valor para cada fecha focal, pero todas ellas producen la misma respuesta.

Bajo otros modelos de interés, por ejemplo el interés simple o el descuento simple, la elección de una fecha focal afecta la respuesta obtenida. Esto explica de nuevo la inconsistencia propia al utilizar interés simple o descuento simple.

Ejemplo 1.1 En promesa de recibir un pago de $800 al final de 7 años, una persona acuerda en pagar inmediatamente $200, $300 al final de 4 años, y realizar un pago adicional al final de 9 años. Encontrar el pago al final del noveno año si la tasa nominal de interés es del 9% convertible cuatrimestralmente.

Se utiliza primero una fecha focal en este momento.

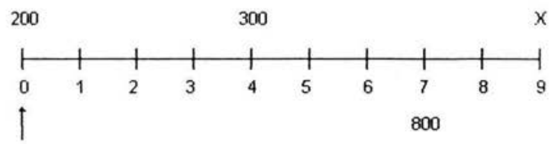


Figura 1.7 Diagrama de tiempo del ejemplo 1.1

Ya que el interés es convertible cuatrimestralmente, se cuentan los periodos de tiempo como cuatrimestrales.

Considerando una tasa efectiva de interés por periodo del 3% la ecuación de valor es

$$200 + 300\,v^{12} + Xv^{27} = 800\,v^{21}$$

$$\Rightarrow X = \frac{800\,v^{21} - 200 - 300\,v^{12}}{v^{27}}$$

$$= \frac{800\,(.537549) - 200 - 300\,(.701380)}{.450189}$$

$$= \$43.59$$

1.14 TIEMPO DESCONOCIDO

En esta sección se considera el caso en que se desconoce la duración del periodo de inversión dentro de un problema que involucra interés, pero se conoce el capital principal, la tasa de interés, y el valor acumulado.

Suponiendo que se dispone de una calculadora con funciones exponencial y logarítmica, el mejor método para encontrar el tiempo desconocido implícito en un solo pago, es mediante logaritmos.

En caso de no disponer de una calculadora, se puede usar una aproximación alternativa con menos precisión, la cual consiste en realizar interpolación lineal en las tablas de interés que se encuentran en el Apéndice B.

Una situación que se presenta a menudo, es cuando se realizan muchos pagos en varios puntos del tiempo y tienen que ser reemplazados por un solo pago numéricamente equivalente a la suma de los otros pagos. El problema es encontrar el punto en el tiempo en el cual se debe de hacer el pago único, de tal forma que sea equivalente al valor de los pagos realizados por separado.

Si las cantidades $s_1, s_2, \ldots, s_n$ son pagadas en los tiempos $t_1, t_2, \ldots, t_n$ respectivamente. El problema es encontrar el tiempo t, tal que $s_1+ s_2+ \ldots+s_n$ pagado al tiempo t sea equivalente a los pagos de $s_1, s_2, \ldots, s_n$ realizados por separado.

La ecuación fundamental de valor es

$$(s_1 + s_2 + \ldots + s_n)\, v^{t} = s_1 v^{t_1} + s_2 v^{t_2} + \ldots + s_n v^{t_n} \tag{1.39}$$

que es una sola ecuación en un solo tiempo desconocido t.

Si se cuenta con una calculadora con funciones exponencial y logarítmica, es fácil encontrar el valor de t, únicamente despejando la fórmula (1.39) y el resultado sería:

$$t = \frac{\ln\left(\sum_{k=1}^{n} s_k v^{t_k}\right) - \ln\left(\sum_{k=1}^{n} s_k\right)}{\ln(v)} \tag{1.40}$$

Por otro lado, si no se cuenta con ese tipo de calculadora, una primera aproximación, sería calcular a t como un promedio ponderado de los diversos tiempos en que se realizan los pagos, donde las ponderaciones son las diversas cantidades pagadas, es decir

$$\bar{t} = \frac{s_1 t_1 + s_2 t_2 + \ldots + s_n t_n}{s_1 + s_2 + \ldots + s_n} = \frac{\sum_{k=1}^{n} s_k t_k}{\sum_{k=1}^{n} s_k} \tag{1.41}$$

Esta aproximación se denota por $\bar{t}$ se le conoce como el ***método de tiempo equivalente***.

Ejemplo 1.2 Los pagos de \$200, \$300, y \$400 se realizan al final de los años 3, 5, y 6, respectivamente. Suponiendo una tasa efectiva de interés del 6% anual, encontrar el momento en el tiempo en el que será equivalente un pago de \$900: (1) a través del método de tiempo equivalente, y (2) a través del método exacto.

1. Se considera el método de tiempo equivalente utilizando la fórmula (1.41)

$$t = \frac{200\,(3) + 300\,(5) + 400\,(6)}{200 + 300 + 400} = 5 \text{ años}$$

2. La ecuación de valor exacta es

$$900\, v^{t} = 200\, v^{3} + 300\, v^{5} + 400\, v^{6}$$

$$v^{t} = \frac{200\,(.839619) + 300\,(.747258) + 400\,(.704961)}{900} = .748984$$

que puede resolverse para t.

$$t = -\frac{\ln(.748984)}{\ln(1.06)} = 4.960410 \text{ años}$$

Se puede observar que el verdadero valor de t es menor que el valor obtenido al usar el método de tiempo equivalente.

1.15 TASA DE INTERÉS DESCONOCIDA

En esta sección se considerará la situación en la que se desconoce la tasa de interés dentro de un problema que involucra interés, pero se conoce el capital principal, la duración del periodo de inversión, y el valor acumulado. En la práctica se encuentran problemas que consisten en la determinación de una tasa de interés desconocida, ya que a menudo se necesita calcular la tasa de rendimiento comprendida en una transacción particular.

Se consideran tres métodos para determinar una tasa de interés desconocida.

El primer método consiste en resolver la ecuación de valor para i utilizando una calculadora con funciones exponencial y logarítmica. Este método es adecuado si se considera un solo pago, también se puede adaptar a otras situaciones.

El segundo método consiste en resolver la ecuación de valor para i utilizando técnicas algebraicas. Por ejemplo, una ecuación de valor que contiene exponentes enteros sobre todos sus términos se puede escribir como un polinomio de grado n-ésimo de i. Si se pueden determinar algebraicamente las raíces de este polinomio, entonces se puede determinar inmediatamente i. Este método es práctico para valores pequeños de n.

El tercer método consiste en usar interpolación lineal en las tablas de interés, al usar una ecuación de valor se determina una función que depende de i, denotada por $f(i)$, y la interpolación se utiliza para encontrar un valor de i tal que $f(i) = 0$.

Ejemplo 1.3 ¿A qué tasa efectiva de interés convertible bimestralmente una cantidad de $600 acumulará dentro de ocho años la cantidad de $4200?

Sea $j = i^{(6)}/6$ de manera que la ecuación de valor se convierte

$$600\,(1+j)^{48} = 4200$$

o

$$j = (7)^{\frac{1}{48}} - 1$$

Esta ecuación se puede resolver directamente

$$j = .041373$$

La respuesta es

$$i^{(6)} = 6\,j = .2482, \quad \text{o } 24.82\,\%$$

Ejemplo 1.4 ¿A qué tasa efectiva de interés el valor presente de $3000 al final de dos años y $4000 al final de cuatro años serán iguales a $6000?

Una ecuación de valor es

$$6000 = 3000\,v^{2} + 4000\,v^{4}$$

que se puede rescribir como

$$4\,v^{4} + 3\,v^{2} - 6 = 0$$

Esta ecuación se puede resolver como una ecuación cuadrática de v^{2}

$$v^2 = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 4(4)(6)}}{2(4)}$$

Ya que $v^2 > 0$, tiene sentido si la raíz es positiva, y se tiene

$$v^2 = \frac{-3 + \sqrt{105}}{8}$$

$$\Rightarrow i = \left(\frac{-3 + \sqrt{105}}{8} \right)^{-1/2} - 1$$

que da

$$i = .0507, \quad \text{o} \quad 5.07\ \%$$

Ejemplo 1.5 ¿A qué tasa efectiva de interés convertible cuatrimestralmente una inversión de \$1000 inmediatamente y otra de \$3000 dentro de 5 años acumularán \$8000 dentro de 9 años?

Sea $j = i^{(3)}/3$ de manera que la ecuación de valor se convierte

$$1000\,(1 + j)^{27} + 3000\,(1 + j)^{12} = 8000$$

Este problema no se puede resolver analíticamente como los dos ejemplos anteriores, así que se utiliza interpolación lineal en las tablas de interés. Se define

$$f(j) = 1000\,(1 + j)^{27} + 3000\,(1 + j)^{12} - 8000$$

Se quiere encontrar j, tal que $f(j) = 0$. Mediante una prueba de error

$$f(.040) = 1000\,(2.883369) + 3000\,(1.601032) - 8000 = -313.535$$

$$f(.045) = 1000\,(3.282010) + 3000\,(1.695881) - 8000 = \ \ 369.653$$

y realizando una interpolación lineal

$$j = .045 - \left(\frac{.045 - .04}{369.653 + 313.535} \right)(369.653) = .042295$$

lo cual da

$$i^{(3)} = 3\,(.042295) = .1269, \quad \text{o} \quad 12.69\ \%$$

CAPÍTULO 2

ANUALIDADES

2.1 ANUALIDADES VENCIDAS

Se considera una anualidad bajo la cual se realizan pagos de 1 unidad monetaria al final de cada periodo durante n periodos. Dicha anualidad es conocida como ***anualidad vencida***. La figura 2.1 es un diagrama de tiempo de dicha anualidad. La flecha 1 aparece un periodo antes de que se realice el primer pago. Se asume que la tasa de interés por periodo es *i*. El valor presente de la anualidad a este punto del tiempo es denotado por $a_{\overline{n}|}$. La flecha 2 aparece n periodos después de la flecha 1, después de realizarse el último pago. El valor acumulado de la anualidad a este punto del tiempo es denotado por $s_{\overline{n}|}$.

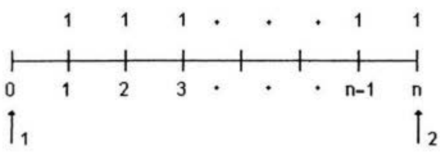


Figura 2.1 Diagrama de tiempo de una anualidad vencida

Se puede obtener una expresión para $a_{\overline{n}|}$ como una ecuación de valor al principio del primer periodo. El valor presente del pago de 1 unidad monetaria realizado al final del primer periodo es v. El valor presente del pago de una unidad monetaria al final del segundo periodo es v^2. Este proceso continúa hasta que el valor presente del pago de una unidad monetaria al final del n-ésimo periodo sea v^n. El valor presente total $a_{\overline{n}|}$ debe ser igual a la suma de los valores presentes de cada pago, es decir

$$a_{\overline{n}|} = v + v^2 + \ldots + v^{n-1} + v^n \tag{2.1}$$

Esta fórmula se puede usar para evaluar $a_{\overline{n}|}$, pero es ineficiente para un número grade n.

Es posible derivar una expresión más compacta al reconocer que la fórmula (2.1) es una progresión geométrica

$$
\begin{aligned}
a_{\overline{n}|} &= v + v^2 + \dots + v^{n-1} + v^n = v\ \frac{1-v^n}{1-v} \\
&= v\ \frac{1-v^n}{iv} \\
&= \frac{1-v^n}{i} \qquad (2.2)
\end{aligned}
$$

De manera análoga, se puede obtener una expresión para $s_{\overline{n}|}$ como una ecuación de valor al final del n-ésimo periodo. El valor acumulado del pago de 1 unidad monetaria al final del primer periodo es $(1+i)^{n-1}$. El valor acumulado del pago de 1 unidad monetaria al final del segundo periodo es $(1+i)^{n-2}$. Este proceso continúa hasta que el valor acumulado del pago de una unidad monetaria al final del n-ésimo periodo sea 1. El valor acumulado total $s_{\overline{n}|}$ debe ser igual a la suma de los valores acumulados de cada pago, es decir

$$
s_{\overline{n}|} = 1 + (1+i) + \dots + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1} \qquad (2.3)
$$

Es posible obtener de nuevo una expresión más compacta al suponer la progresión geométrica

$$
\begin{aligned}
s_{\overline{n}|} &= 1 + (1+i) + \dots + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1} \\
&= \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} \\
&= \frac{(1+i)^n - 1}{i} \qquad (2.4)
\end{aligned}
$$

Los valores de $a_{\overline{n}|}$ y $s_{\overline{n}|}$, con distintas tasas de interés y para valores de n desde 1 hasta 50, aparecen en las tablas de interés del Apéndice B .

En ocasiones, la tasa de interés se escribe en la parte inferior derecha del símbolo, por ejemplo $a_{\overline{10}|.07}$ y $s_{\overline{25}|.08}$.

Es posible dar una interpretación verbal a la fórmula (2.2) escrita como

$$
1 = i a_{\overline{n}|} + v^n
$$

Se considera la inversión de 1 unidad monetaria durante n periodos. En cada periodo la inversión de 1 devengará un interés i que se pagará al final del periodo. El valor presente de estos pagos de interés es $ia_{\overline{n}|}$. Al final de n periodos se reembolsará la inversión original de 1 unidad monetaria, cuyo valor presente es v^n.

Existe una relación entre $a_{\overline{n}|}$ y $s_{\overline{n}|}$,

$$s_{\overline{n}|} = a_{\overline{n}|}(1+i)^n \qquad (2.5)$$

Esta relación es evidente si se comparan las fórmulas (2.1) y (2.3) o las fórmulas (2.2) y (2.4). Dicha relación también es obvia en el diagrama de tiempo, ya que $s_{\overline{n}|}$ es el valor de los mismos pagos como $a_{\overline{n}|}$, sólo que el valor se toma después de n periodos.

Ejemplo 2.1 Encontrar el valor presente de una anualidad cuyos pagos de \$1000 se realizan al final de cada trimestre durante 12 años si la tasa de interés es del 20% convertible trimestralmente.

La respuesta es

$$1000\, a_{\overline{48}|.05} = 1000\,(18.077158) = 18077.16$$

Ejemplo 2.2 Si una persona invierte \$8000 a una tasa del 12% convertible semestralmente. ¿Cuánto puede retirar al final de cada semestre para utilizar todo el fondo hasta el final de 7 años?

Si R es la cantidad de cada retiro. La ecuación de valor a la fecha de inversión es

$$R a_{\overline{14}|.06} = 8000$$

De esta manera se tiene que

$$R = \frac{8000}{a_{\overline{14}|.06}} = \frac{8000}{9.294984}$$

$$= 860.68$$

2.2 ANUALIDADES ANTICIPADAS

Se considera una anualidad bajo la cual se realizan pagos de 1 unidad monetaria al principio de cada periodo durante n periodos. Dicha anualidad es conocida como ***anualidad anticipada***. La figura 2.2 es un diagrama de tiempo de dicha anualidad. La flecha 1 aparece en el tiempo en que se realiza el primer pago. Se asume que la tasa de interés por periodo es *i*. El valor presente de la anualidad a éste punto del tiempo es denotado por $\ddot{a}_{\overline{n|}}$. La flecha 2 aparece n periodos después de la flecha 1, un periodo después de realizarse el último pago. El valor acumulado de la anualidad a este punto del tiempo es denotado por $\ddot{s}_{\overline{n|}}$.

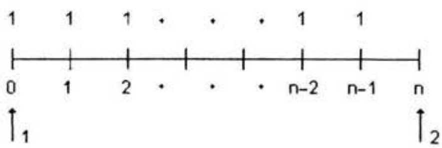


Figura 2.2 Diagrama de tiempo de una anualidad anticipada

Se puede escribir una expresión para $\ddot{a}_{\overline{n|}}$ análoga a la fórmula (2.1)

$$\ddot{a}_{\overline{n|}} = 1 + v + v^2 + \ldots + v^{n-1} \tag{2.6}$$

De nuevo se retoma la progresión geométrica

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{\overline{n|}} &= \frac{1 - v^n}{1 - v} \\ &= \frac{1 - v^n}{iv} \\ &= \frac{1 - v^n}{d} \end{aligned} \tag{2.7}$$

la cual es análoga a la fórmula (2.2).

Similarmente para $\ddot{s}_{\overline{n|}}$, se tienen las siguientes fórmulas análogas a las fórmulas (2.3) y (2.4).

$$\begin{aligned}\ddot{s}_{\overline{n|}} &= (1+i)+(1+i)^2+\ldots+(1+i)^{n-1}+(1+i)^n \\ &= (1+i)\,\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)-1} = \frac{(1+i)^n-1}{iv} \qquad (2.8)\\ &= \frac{(1+i)^n-1}{d} \qquad (2.9)\end{aligned}$$

Bajo la anualidad vencida, los pagos se realizan al final del periodo, i es una medida del interés pagado al final del periodo. Bajo la anualidad anticipada, los pagos se realizan al principio del periodo y d es una medida del interés pagado al principio del periodo.

La propiedad anterior, relaciona el tiempo en que se realizan los pagos de la anualidad con la medida del interés en el denominador.

Se puede ver que

$$\ddot{s}_{\overline{n|}} = \ddot{a}_{\overline{n|}}(1+i)^n \qquad (2.10)$$

una fórmula análoga a la fórmula (2.5).

Es posible relacionar una anualidad vencida con una anualidad anticipada. Una forma de relacionarlas es

$$\ddot{a}_{\overline{n|}} = a_{\overline{n|}}(1+i) \qquad (2.11)$$

y

$$\ddot{s}_{\overline{n|}} = s_{\overline{n|}}(1+i) \qquad (2.12)$$

La fórmula (2.11) se puede obtener inmediatamente al comparar las fórmulas (2.1) y (2.6), o las fórmulas (2.2) y (2.7). Ya que cada pago bajo $\ddot{a}_{\overline{n|}}$ se realiza un periodo antes que cada pago bajo $a_{\overline{n|}}$, el valor presente total debe ser más grande por el interés de un periodo. La fórmula (2.12) se puede obtener de forma similar.

Existe otro tipo de relación entre la anualidad vencida y la anualidad anticipada

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + a_{\overline{n-1}|} \qquad (2.13)$$

Esta fórmula se puede obtener de la figura 2.2. Los n pagos realizados bajo $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ se pueden descomponer en el primer pago y los $n-1$ pagos restantes. El valor presente del primer pago es 1, y el valor presente de los $n-1$ pagos restantes es $a_{\overline{n-1}|}$. La suma debe dar el valor presente total de $\ddot{a}_{\overline{n}|}$.

De forma similar, se tiene

$$\ddot{s}_{\overline{n}|} = s_{\overline{n+1}|} - 1 \qquad (2.14)$$

Esta fórmula se puede obtener de la figura 2.2. Temporalmente, se asume realizar un pago imaginario de 1 unidad monetaria al final del n-ésimo periodo. Entonces el valor acumulado total de los $n+1$ pagos es $s_{\overline{n+1}|}$. No obstante, se debe eliminar el valor acumulado del pago imaginario, el cual es 1. La diferencia da el valor acumulado $\ddot{s}_{\overline{n}|}$.

Muchas tablas de interés compuesto no contienen valores para anualidades anticipadas. Es por esta razón que se utilizan las fórmulas (2.11) o (2.13) y (2.12) o (2.14) para encontrar los valores numéricos de las anualidades anticipadas.

Ejemplo 2.3 Un inversionista desea acumular $3000 en un fondo al final de 20 años. Para lograr esto el inversionista planea realizar depósitos al final de cada año, el último pago se hará un año antes del final del periodo de inversión. ¿De cuánto debe ser cada depósito si el fondo tiene una tasa efectiva del 6.5%?

Ya que interesa el valor acumulado un año después del último pago, la ecuación de valor es

$$R\,\ddot{s}_{\overline{19}|} = 3000$$

Donde R es el depósito anual. Despejando R se tiene

$$R = \frac{3000}{\ddot{s}_{\overline{19}|}} = \frac{3000}{1.065\, s_{\overline{19}|}}$$

$$= \frac{3000}{(1.065)(35.516722)} = 79.31$$

2.3 VALORES DE LA ANUALIDAD EN CUALQUIER FECHA

Hasta ahora se ha considerado únicamente la valuación de las anualidades al principio del periodo, o al final del periodo. Sin embargo, a menudo es necesario evaluar las anualidades sobre otras fechas. Se estudiarán los siguientes casos (1) valores presentes más de un periodo antes de la fecha del primer pago. (2) valores acumulados más de un periodo después de la fecha del último pago, y (3) valores actuales ente la primera y la última fecha de pago. Se supondrá que la fecha de valuación es de tipo entero para cada fecha de pago.

Los tres casos anteriores se pueden explicar mejor a través de un ejemplo. Se considera una anualidad bajo la cual se realizan cinco pagos de 1 unidad monetaria desde el final del cuarto periodo hasta el final del octavo periodo. La figura 2.3 es el diagrama de tiempo de esta anualidad. Se dan directamente los valores al final del 3º, 4º, 8º y 9º periodos, cada uno a través de anualidades vencidas o anualidades anticipadas, como se marcó en el diagrama de tiempo.
El valor presente al principio del 1er periodo es un ejemplo del caso 1, el valor acumulado al final del 12º periodo es un ejemplo del caso 2, y el valor actual al final del 6º periodo es un ejemplo del caso 3. Estos tres casos se denotan por las flechas 1, 2, 3 respectivamente, en el diagrama de tiempo.

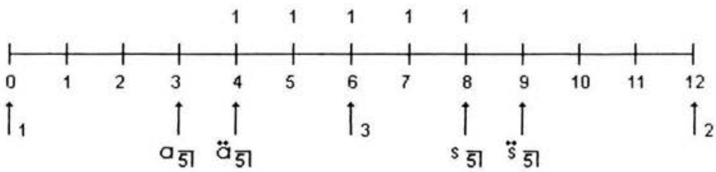


Figura 2.3 Diagrama de tiempo para explicar el valor de una anualidad en cualquier fecha

Valores presentes más de un periodo antes de la fecha del primer pago

En este caso, el valor presente de la anualidad al principio del primer periodo se ve como el valor presente al final del tercer periodo descontado por tres periodos, es decir

$$v^3 a_{\overline{5|}}$$

Es posible desarrollar una expresión alternativa para este valor presente en términos de valores de anualidad. Temporalmente, se asumirá realizar pagos imaginarios de 1 unidad monetaria al final del primer, segundo, y tercer periodo. Entonces el valor presente de los 8 pagos al tiempo $t = 0$ es $a_{\overline{8|}}$. Sin embargo, se debe quitar el valor presente de los pagos imaginarios, que es $a_{\overline{3|}}$. Así, una expresión alternativa para el valor presente es

$$a_{\overline{8|}} - a_{\overline{3|}}$$

Este tipo de anualidad es conocida como ***anualidad diferida***, ya que los pagos comienzan sólo después de un periodo diferido. En general el valor presente de una anualidad vencida diferida por m periodos con una duración de n periodos después del periodo de diferimiento es

$$v^{m} a_{\overline{n|}} = a_{\overline{m+n|}} - a_{\overline{m|}} \tag{2.15}$$

Se han usado anualidades vencidas en lugar de anualidades anticipadas, debido a que los valores se obtienen directamente de tablas de interés para anualidades vencidas. Sin embargo es posible trabajar con una anualidad anticipada diferida.

$$v^{4} \ddot{a}_{\overline{5|}} = \ddot{a}_{\overline{9|}} - \ddot{a}_{\overline{4|}}$$

Valores acumulados mas de un periodo después de la fecha del último pago

En este caso, el valor acumulado de la anualidad al final del 12º periodo se ve como el valor acumulado al final del 8º periodo, acumulado por cuatro periodos, es decir

$$s_{\overline{5|}}(1+i)^{4}$$

Aquí también es posible desarrollar una expresión alternativa en términos de valores de anualidad. Temporalmente, se asumirá realizar pagos imaginarios de 1 unidad monetaria al final del 9º, 10º, 11º, y 12º periodo. Entonces el valor acumulado de los 9 pagos es $s_{\overline{9|}}$. Sin embargo, se debe quitar el valor acumulado de los pagos imaginarios, que es $s_{\overline{4|}}$. Así, una expresión alternativa para el valor acumulado es

$$s_{\overline{9|}} - s_{\overline{4|}}$$

En general, el valor acumulado de una anualidad durante n periodos, m periodos después de la última fecha de pago, es

$$s_{\overline{n|}}(1+i)^m = s_{\overline{m+n|}} - s_{\overline{m|}} \tag{2.16}$$

Es posible trabajar con anualidades anticipadas en lugar de anualidades vencidas.

$$\ddot{s}_{\overline{5|}}(1+i)^3 = \ddot{s}_{\overline{8|}} - \ddot{s}_{\overline{3|}}$$

Valores actuales entre la primera y la última fecha de pago

En este caso, el valor actual de la anualidad al final del 6º periodo se ve como el valor presente al final del 3^er^ periodo, acumulado por tres periodos o el valor acumulado al final del 8º periodo descontado por dos periodos, es decir

$$a_{\overline{5|}}(1+i)^3 = v^2 s_{\overline{5|}}$$

Aquí también se puede desarrollar una expresión alternativa en términos de valores de anualidad. Se separan los cinco pagos en los primeros tres pagos y los últimos dos pagos. El valor acumulado de los primeros tres pagos es $s_{\overline{3|}}$ y el valor presente de los últimos dos pagos es $a_{\overline{2|}}$. Así una expresión alternativa para el valor actual es

$$s_{\overline{3|}} + a_{\overline{2|}}$$

En general, el valor actual para una anualidad vencida durante n periodos después de realizar el m-ésimo pago (m < n) es

$$a_{\overline{n|}}(1+i)^m = v^{n-m} s_{\overline{n|}} = s_{\overline{m|}} + a_{\overline{n-m|}} \tag{2.17}$$

Es posible trabajar con anualidades anticipadas en lugar de anualidades vencidas.

$$\ddot{a}_{\overline{5|}}(1+i)^2 = v^3 \ddot{s}_{\overline{5|}} = \ddot{s}_{\overline{2|}} + \ddot{a}_{\overline{3|}}$$

2.4 PERPETUIDADES

Una ***perpetuidad*** es una anualidad cuyos pagos continúan para siempre, es decir, la duración de la anualidad es infinita. Aunque parece irreal el tener una anualidad cuyos pagos continúan para siempre, existen ejemplos en la práctica como: los bonos a largo plazo del gobierno británico que son obligaciones no redimibles.

El valor presente de una perpetuidad vencida se denota por $a_{\overline{\infty|}}$, y se tiene que

$$\begin{aligned} a_{\overline{\infty|}} &= v + v^2 + v^3 + \ldots \\ &= \frac{v}{1-v} = \frac{v}{iv} \\ &= \frac{1}{i} \end{aligned} \tag{2.18}$$

vale para $v < 1$, que es el caso cuando $i > 0$.

Alternativamente, se tiene

$$a_{\overline{\infty|}} = \lim_{n\to+\infty} a_{\overline{n|}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-v^n}{i} = \frac{1}{i}$$

ya que

$$\lim_{n\to+\infty} v^n = 0$$

La fórmula (2.18) se puede interpretar verbalmente de la siguiente manera. Si se invierte un capital principal de $1/i$ a una tasa i, entonces se pagará el interés de $(i)(1/i) = 1$ al final de cada periodo para siempre, dejando intacto el capital original.

Al basarse en un argumento análogo, para una perpetuidad anticipada, se tiene

$$\ddot{a}_{\overline{\infty|}} = \frac{1}{d} \tag{2.19}$$

Se puede notar que no existen los valores acumulados para perpetuidades, ya que los pagos continúan para siempre.

Es conveniente utilizar el concepto de perpetuidades para dar una interpretación verbal a la fórmula (2.2)

$$a_{\overline{n|}} = \frac{1 - v^{n}}{i} \tag{2.2}$$

Se consideran dos perpetuidades. El primer pago de 1 unidad monetaria al final de cada periodo y tiene valor presente $1/i$. El segundo pago es diferido por n periodos y tiene valor presente v^{n}/i. La diferencia es el valor presente de los pagos de 1 unidad monetaria al final de cada periodo durante el periodo diferido, que es $a_{\overline{n|}}$.

2.5 PERIODOS Y TASAS DE INTERÉS ESPECIALES

Hasta el momento se ha supuesto que las anualidades tienen un periodo entero positivo n y una tasa de interés $i > 0$. En esta sección se considerarán los casos en que estas condiciones no se cumplen.

Hay que observar primero que el símbolo $a_{\overline{n+k|}}$ se puede describir mediante un número entero positivo n y por k tal que $0 < k < 1$. No se puede aplicar la fórmula (2.1), ya que requiere que n sea un número entero positivo. Sin embargo, es posible derivar un resultado coherente con la fórmula (2.2) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} a_{\overline{n+k|}} &= \frac{1 - v^{n+k}}{i} = \frac{1 - v^{n} + v^{n} - v^{n+k}}{i} \\ &= a_{\overline{n|}} + v^{n+k}\left[\frac{(1+i)^{k} - 1}{i}\right] \end{aligned} \tag{2.20}$$

De esta manera, una interpretación coherente del símbolo $a_{\overline{n-k|}}$ con la fórmula (2.2) es el valor presente de una anualidad vencida durante n periodos de 1 unidad monetaria por periodo, más un pago final al tiempo n+k de $\frac{(1+i)^{k} - 1}{i}$

Sin embargo, es posible obtener otras interpretaciones del símbolo $a_{\overline{n+k}|}$. Por ejemplo, ¿qué pasa si el pago final es k pero se tiene que pagar en el tiempo n+1?
Así, la fórmula (2.20) es una posible interpretación de muchas interpretaciones.

Se pueden desarrollar identidades para anualidades donde n es un número negativo. Sin embargo dichas anualidades están relacionadas matemáticamente y carecen de significado práctico.

Ahora, hay que considerar que pasaría si $i \leq 0$. En la práctica es muy importante el caso donde $i = 0$. Si $i = 0$, entonces el valor presente o el valor acumulado de una anualidad es simplemente la suma de los pagos. De esta forma, en particular, se tiene

$$a_{\overline{n}|} = s_{\overline{n}|} = n \qquad \text{si} \quad i = 0 \tag{2.21}$$

Si $i < 0$, entonces ocurren resultados muy interesantes. Los valores presentes se convierten en los valores acumulados, y viceversa.

2.6 TIEMPO DESCONOCIDO

Hasta el momento, se han asumido problemas de anualidades donde se conocen los valores de n. En esta sección se considera el caso en el que se desconoce n.

En general, los problemas que involucran tiempo desconocido no producen un resultado entero para n.
No obstante, es raro que se presente en la práctica, debido a que es inconveniente realizar un pago a una fecha que no tiene un periodo entero como los otros pagos.

¿Qué se hace en la práctica para realizar al mismo tiempo el pago adicional más pequeño y el último pago uniforme? Se realiza un pago más grande que el pago uniforme, conocido como ***pago final superior al promedio***, o se realiza un pago más pequeño un periodo después del último pago uniforme, conocido como ***pago disminuido***.

***Ejemplo 2.4** Se utiliza una inversión de $6000 para realizar pagos de $400 al final de cada año tanto como sea posible. Si el fondo tiene una tasa efectiva de interés anual del 4.5%, encontrar cuántos pagos uniformes se pueden realizar y*

encontrar la cantidad del pago más pequeño: (1) que se pagará en la fecha del último pago uniforme, (2) que se pagará un año después del último pago uniforme, y (3) que se pagará en el transcurso del siguiente año del último pago uniforme.

La ecuación de valor es

$$400\, a_{\overline{n}|} = 6000$$
$$\Rightarrow a_{\overline{n}|} = 15$$

Al examinar las tablas de interés, se tiene que 25 < n < 26. De esta manera, se pueden realizar 25 pagos uniformes más un pago final más pequeño. La figura 2.4 es el diagrama de tiempo de este ejemplo.

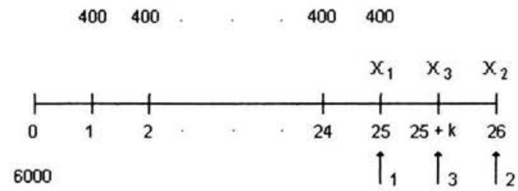


Figura 2.4 Diagrama de tiempo del ejemplo 2.4

En esta figura X_1, X_2, y X_3 son los pagos finales más pequeños de los tres casos anteriores; las flechas 1, 2, y 3 señalan las fechas focales de los tres casos anteriores; y k se obtiene de la fórmula (2.20).

1. La ecuación de valor al final del 25º año es

$$400\, s_{\overline{25}|} + X_1 = 6000\,(1.045)^{25}$$

Entonces

$$X_1 = 6000\,(1.045)^{25} - 400\, s_{\overline{25}|}$$
$$= 6000\,(3.005434) - 400\,(44.565210)$$
$$= 18032.604 - 17826.084$$
$$= 206.52$$

2. La ecuación de valor al final del 26º año es

$$400\,\ddot{s}_{\overline{25}|} + X_2 = 6000\,(1.045)^{26}$$

Entonces

$$X_2 = 6000\,(1.045)^{26} - 400\,\ddot{s}_{\overline{25}|}$$
$$= 6000\,(3.140679) - 400\,(1.045)(44.565210)$$
$$= 18844.074 - 18628.25778$$
$$= 215.82$$

3. En este caso la ecuación de valor se convierte en

$$400\,a_{\overline{25+k}|} = 6000$$

o

$$a_{\overline{25+k}|} = 15$$

donde $0 < k < 1$. Esto se puede escribir como

$$\frac{1 - v^{25+k}}{i} = 15$$

o

$$v^{25+k} = 1 - 15\,i = .325$$

Entonces

$$(1.045)^{25+k} = \frac{1}{.325}$$

lo cual da

$$25 + k = \frac{\ln\left(\frac{1}{.325}\right)}{\ln(1.045)} = 25.534067$$

o

$$k = .534067$$

De esta manera, el pago final exacto no uniforme de la fórmula (2.20) es

$$X_5 = 400\left|\frac{(1.045)^{.534067} - 1}{.045}\right|$$
$$= 211.44$$

pagado en el año 25.534067.

2.7 TASA DE INTERÉS DESCONOCIDA

En esta sección se considera la situación en la que se desconoce la tasa de interés, contexto que se presenta frecuentemente en la práctica.

Se consideran tres métodos para determinar una tasa de interés desconocida.

El primero consiste en encontrar el valor de i a través de técnicas algebraicas. Por ejemplo, de la definición fundamental de una anualidad vencida de n años

$$a_{\overline{n}|} = v + v^2 + ... + v^n \tag{2.1}$$

es un polinomio de grado n-ésimo de v. Si se pueden determinar algebraicamente las raíces de este polinomio. Este método se utiliza para pequeños valores de n.

Alternativamente, se pueden expresar a $a_{\overline{n}|}$ o $1/a_{\overline{n}|}$ en términos de i y resolver mediante técnicas algebraicas.

Como expansiones de series, se tiene

$$a_{\overline{n}|} = n - \frac{n(n+1)}{2!}i + \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}i^2 - ... \tag{2.22}$$

y

$$\frac{1}{a_{\overline{n}|}} = \frac{1}{n}\left[1 + \frac{n+1}{2}i + \frac{n^2-1}{12}i^2 + ...\right] \tag{2.23}$$

El segundo método consiste en utilizar una interpolación lineal utilizando tablas de interés. Este método es bastante similar al que se utilizó en la sección 1.15. Se debe notar que la precisión de la interpolación lineal dependerá de que tan cercanas estén ambas tasas de interés en las tablas tabuladas.

El tercer método, el mejor, es una ***aproximación sucesiva*** o ***iteración sucesiva***. Este método se puede aplicar a todos los problemas de este tipo y puede producir cualquier nivel de precisión que se requiera al efectuar suficientes iteraciones. Esto necesita el uso de una calculadora con funciones exponencial y logarítmica, mientras que los primeros dos métodos anteriores no.

Se puede aplicar fácilmente la iteración cuando existe una ecuación de la forma

$$i = f(i) \tag{2.24}$$

y converge al verdadero valor de i, que satisface exactamente la fórmula. Asumiendo un valor inicial, etiquetado como i_0, entonces se genera un valor i_1 mediante

$$i_1 = f(i_0)$$

En general, $i_1 \neq i_0$, . Entonces se genera un valor i_2 mediante

$$i_2 = f(i_1)$$

Si la iteración es convergente, entonces los valores sucesivos $i_0, i_1, i_2, \ldots$ convergerán al verdadero valor i. En la práctica, se llevan acabo las iteraciones hasta obtener $i_{n+1} = i_n$, con el grado de precisión requerido.

Se considera el problema en el que se da el valor de $a_{\overline{n|}}$ como una constante w y se desea encontrar la tasa de interés i que producirá este valor.

Con la fórmula (2.2) se puede obtener un método de iteración

$$i = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{w} \tag{2.25}$$

Desafortunadamente la tasa de convergencia de esta fórmula de iteración es bastante lenta.

Un método muy utilizado que converge bastante rápido, es el ***método de iteración de Newton-Raphson***.

Sea f una función derivable. Si i_s es una aproximación a cero, entonces la siguiente aproximación i_{s+1} esta dada por

$$i_{s+1} = i_s - \frac{f(i_s)}{f'(i_s)}$$

siempre y cuando $f'(i_s) \neq 0$.

La fórmula de iteración para resolver $a_{\overline{n}|}\, i = w$ a través de este método es

$$i_{s+1} = i_s\left[1 + \frac{1-(1+i_s)^{-n} - w i_s}{1-(1+i_s)^{-n-1}\,[1+i_s(n+1)]}\right] \qquad (2.26)$$

La fórmula (2.26) es un método adecuado ya que tiene una tasa de convergencia muy rápida.

Para poder aplicar un método de iteración se requiere del uso de un valor inicial. El número de iteraciones será muy reducido si el valor inicial que se utiliza está muy cercano de la raíz. Se pueden obtener valores iniciales adecuados al utilizar interpolación lineal en las tablas de interés, es decir, mediante el segundo método descrito anteriormente.

Sin embargo, un método más conveniente para determinar los valores iniciales, en lugar de realizar interpolación en las tablas de interés, consiste en aplicar directamente una fórmula de aproximación basada en los valores de n y w. Dicha fórmula se puede obtener de los dos primeros términos de la fórmula (2.23)

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{a_{\overline{n}|}} \doteq \frac{1}{n}\left[1 + \frac{n+1}{2}\, i\right]$$

lo cual da

$$\frac{n+1}{2n}\, i \doteq \frac{1}{w} - \frac{1}{n} = \frac{n-w}{nw}$$

o

$$i \doteq \frac{2(n-w)}{w(n+1)} \tag{2.27}$$

De las fórmulas (2.26) y (2.27) se pueden obtener resultados análogos para valores acumulados. La fórmula de iteración de Newton-Raphson para resolver $s_{\overline{n|}\,i} = w$ es

$$i_{s+1} = i_s\left[1 + \frac{(1+i_s)^n - 1 - wi_s}{(1+i_s)^{n-1}\,[1+i_s(n-1)] - 1}\right] \tag{2.28}$$

La fórmula análoga a la fórmula (2.27) es

$$i \doteq \frac{2(w-n)}{w(n-1)} \tag{2.29}$$

Ejemplo 2.5¿A qué tasa de interés, convertible semestralmente, $21000 es el valor presente de $1500 pagaderos al final de cada semestre durante nueve años?

Sea $j = i^{(2)}/2$, de manera que la ecuación de valor se convierte en

$1500\, a_{\overline{18|}\,j} = 21000$

o

$a_{\overline{18|}\,j} = 14$

Primero se utiliza interpolación mediante tablas de interés. Se define

$f(j) = a_{\overline{18|}\,j} - 14$

Se quiere encontrar j, tal que $f(j) = 0$. Al examinar las tablas de interés

$f(.020) = 14.992031 - 14 = .992031$

y

$f(.030) = 13.753513 - 14 = -.246487$

Ahora se realiza interpolación lineal

$$j = .02 + \frac{(.01)(.992031)}{.992031 + .246487} = .028010$$

lo cual da

$$i^{(2)} = 2\,(.02801) = .056 = 5.6\ \%$$

Pero $f(.028) = -.012212$, por lo que se necesita una mejor aproximación si se desea un mejor resultado.

Como valor inicial se podría utilizar el valor obtenido de la interpolación lineal que se realizó anteriormente, es decir, $j_0 = .02801$. Sin embargo, en lugar de utilizar dicho valor se aplica la fórmula (2.27) para obtener un valor inicial:

$$j_0 = .030075.$$

Primero se realiza una iteración usando la fórmula (2.25). Se obtienen los siguientes resultados:

j_0 = .030075	j_9 = .0280821	j_{18} = .0279226
j_1 = .0295268	j_{10} = .0280404	j_{19} = .0279190
j_2 = .0291233	j_{11} = .0280087	j_{20} = .0279163
j_3 = .0288238	j_{12} = .0279846	j_{21} = .0279142
j_4 = .0286000	j_{13} = .0279662	j_{22} = .0279126
j_5 = .0284319	j_{14} = .0279522	j_{23} = .0279114
j_6 = .0283052	j_{15} = .0279416	j_{24} = .0279105
j_7 = .0282095	j_{16} = .0279335	
j_8 = .0281370	j_{17} = .0279273	

Se detiene el proceso después de 24 ciclos, ya que la iteración converge muy lentamente. Se utilizó una iteración lenta, no porque sea un buen método para usarse, sino para demostrar que en la práctica se debe tener cuidado al usar métodos de iteración de tal forma que su tasa de convergencia sea adecuada.

Ahora se considerará el método de iteración de Newton-Raphson, retomando la fórmula (2.26). Se obtienen los siguientes resultados:

j_0 = .030075

j_1 = .0278782

j_2 = .0279076

j_3 = .0279076

Se ha conseguido una precisión de seis decimales, después de realizar tres iteraciones. El método de ad hoc obtenido de la fórmula (2.25) es lento, mientras que el método de Newton-Raphson es más rápido.

Así, la respuesta correcta para una precisión de seis lugares es

$$i^{(2)} = 2\,(.027907) = .0558 = 5.58\ \%$$

2.8 ANUALIDADES PAGADERAS CON UNA FRECUENCIA DIFERENTE DE LO QUE EL INTERÉS ES CONVERTIBLE.

Primero se hablará de las anualidades cuyo periodo de pago y periodo de conversión de interés difieren y sus pagos son iguales. Existen dos aproximaciones distintas para dichas anualidades.

La primera aproximación es conveniente si el único objetivo consiste en calcular el valor numérico de una anualidad y sólo se dispone de una calculadora con funciones exponencial y logarítmica. En este caso se sigue un procedimiento de dos pasos:

1. Encontrar la tasa de interés, convertible a la misma frecuencia con que se realizan los pagos, que es equivalente a la tasa de interés dada.

2. Usando esta nueva tasa de interés, encontrar el valor de la anualidad utilizando las técnicas discutidas en las primeras secciones de éste capítulo.

Esta aproximación es general y se puede usar para anualidades pagaderas con mayor o menor frecuencia de lo que el interés es convertible.

La segunda aproximación comprende un análisis algebraico de dichas anualidades. La intención es desarrollar expresiones algebraicas para dichas anualidades en términos de símbolos de anualidad, definidos anteriormente, algunas veces se requerirá de factores de ajuste.

La sección 2.9 analiza las anualidades pagaderas con menor frecuencia de lo que el interés es convertible, mientras que la sección 2.10 analiza anualidades pagaderas con mayor frecuencia de lo que el interés es convertible.

Aunque no se necesitan éstas aproximaciones algebraicas sí el único propósito es encontrar los valores numéricos de dichas anualidades, deben proporcionar ideas analíticas importantes para las anualidades en general.

Ejemplo 2.6 Encontrar el valor acumulado al final de seis años de un fondo de inversión en el que se depositan $150 al principio de cada semestre durante los primeros dos años y se depositan $300 al principio de cada semestre durante los siguientes cuatro años, si el fondo genera el 24% convertible trimestralmente.

Se considera una tasa de interés trimestral del 6%. Si j es la tasa de interés equivalente por semestre, que es el periodo de pago. Se tiene

$$j = (1.06)^2 - 1 = .1236$$

El valor de la anualidad en símbolos es

$$150\left(\ddot{s}_{\overline{12}|j} + \ddot{s}_{\overline{8}|j}\right)$$

que puede evaluarse como

$$150\,(17.882137 + 10.491316) = 4256.02$$

2.9 ANÁLISIS DE ANUALIDADES PAGADERAS CON MENOR FRECUENCIA DE LO QUE EL INTERÉS ES CONVERTIBLE

En esta sección se analizan algebraicamente las anualidades pagaderas con menor frecuencia de lo que el interés es convertible. La sección 2.9 se divide en: (1) anualidad vencida, (2) anualidad anticipada, y (3) casos adicionales.

Anualidad vencida

Si k es el número de periodos de conversión de interés en un periodo de pago, si n es el plazo de la anualidad medido en periodos de conversión de interés, y si i es la tasa de interés por periodo de conversión de interés. Se asumirá que cada periodo de pago contiene un número entero de periodos de conversión de interés; de esta manera k y n son positivos. El número de pagos de la anualidad realizados es n / k, que también es un entero positivo.

El valor presente de una anualidad que paga 1 unidad monetaria al final de cada k periodos de conversión de interés de un total de n periodos de conversión de interés es

$$v^{k} + v^{2k} + \ldots + v^{\frac{n}{k}k} = \frac{v^{k} - v^{n+k}}{1 - v^{k}} = \frac{1 - v^{n}}{(1+i)^{k} - 1} = \frac{a_{\overline{n|}}}{s_{\overline{k|}}} \tag{2.30}$$

El valor acumulado de esta anualidad vencida después del último pago es

$$\frac{a_{\overline{n|}}}{s_{\overline{k|}}}(1+i)^{n} = \frac{s_{\overline{n|}}}{s_{\overline{k|}}} \tag{2.31}$$

Anualidad anticipada

El valor presente de una anualidad que paga 1 unidad monetaria al principio de cada k periodos de conversión de interés de un total de n periodos de conversión de interés es

$$1 + v^{k} + v^{2k} + \ldots + v^{n-k} = \frac{1 - v^{n}}{1 - v^{k}} = \frac{a_{\overline{n|}}}{a_{\overline{k|}}} \tag{2.32}$$

El valor acumulado de esta anualidad k periodos de conversión de interés después del último pago es

$$\frac{a_{\overline{n|}}}{a_{\overline{k|}}}(1+i)^{n} = \frac{s_{\overline{n|}}}{a_{\overline{k|}}} \tag{2.33}$$

Casos adicionales

En ocasiones se encuentra el caso de una perpetuidad pagadera con menor frecuencia de lo que el interés es convertible. El valor presente de una perpetuidad vencida es

$$v^{k} + v^{2k} + \ldots = \frac{v^{k}}{1 - v^{k}} = \frac{1}{(1+i)^{k} - 1} = \frac{1}{i\, s_{\overline{k|}}} \tag{2.34}$$

que también es el límite de la fórmula (2.30) cuando n tiende a infinito.

Similarmente, el valor presente de la perpetuidad anticipada es

$$\frac{1}{i\, a_{\overline{k}|}} \tag{2.35}$$

Otro caso especial, que rara vez se encuentra en la práctica, es cuando cada periodo de pago no contiene un número entero de periodos de conversión de interés (es decir, $k>1$, pero k no es entero). De nuevo, la mejor aproximación sería escribir una expresión como la suma de valores presentes o valores acumulados de cada pago distinto, y entonces sumar esta expresión como una progresión geométrica.

Ejemplo 2.7 Encontrar una expresión para el valor presente de una anualidad en la que existe un total de r pagos de 1 unidad monetaria, el primero se efectuará al final de cinco años, y el resto de los pagos en intervalos de cuatro años, a una tasa efectiva anual i, expresada como (1) una anualidad vencida, y (2) una anualidad anticipada.

La figura 2.5 es un diagrama de tiempo de este ejemplo.

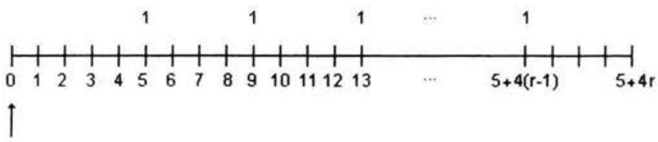


Figura 2.5 Diagrama de tiempo del ejemplo 2.7

El valor presente de esta anualidad esta dado por

$$v^5 + v^9 + v^{13} + \ldots + v^{4r+1}$$

1. Sumando la progresión geométrica, se tiene

$$\frac{v^5 - v^{4r+5}}{1 - v^4} = \frac{v - v^{4r+1}}{(1+i)^4 - 1} = \frac{(1 - v^{4r+1}) - (1 - v)}{(1+i)^4 - 1} = \frac{a_{\overline{4r+1}|} - a_{\overline{1}|}}{s_{\overline{4}|}}$$

Se debe notar que la forma de la anualidad vencida se caracteriza por tener $s_{\overline{4}|}$ en el denominador.

2. Sumando la progresión geométrica, se tiene

$$\frac{v^{5} - v^{4r+5}}{1 - v^{4}} = \frac{(1 - v^{4r+5}) - (1 - v^{5})}{1 - v^{4}} = \frac{a_{\overline{4r+5}|} - a_{\overline{5}|}}{a_{\overline{4}|}}$$

Se debe notar que la forma de la anualidad vencida se caracteriza por tener $a_{\overline{4}|}$ en el denominador.

Ejemplo 2.8 Una inversión de $2574 se utiliza para realizar pagos de $450 al final de cada año tanto como sea posible con un pago final más pequeño que se realizará en el momento del último pago uniforme. Si el interés es del 8% convertible trimestralmente, encontrar el número de pagos y la cantidad del pago final total.

La ecuación de valor es

$$450\,\frac{a_{\overline{n}|.02}}{s_{\overline{4}|.02}} = 2574$$

o

$$a_{\overline{n}|.02} = 5.72\, s_{\overline{4}|.02} = 23.575598$$

Por inspección de las tablas de interés, se tiene que 32 < n < 33. Así, se realizarán 8 pagos uniformes y un pago final más pequeño. Si el pago adicional más pequeño en el momento del pago uniforme final es denotado por R.

Entonces una ecuación de valor al final de 8 años es

$$R + 450\,\frac{s_{\overline{32}|.02}}{s_{\overline{4}|.02}} = 2574\,(1.02)^{32}$$

o

$$R = 2574\,(1.88454) - \frac{450\,(44.227030)}{4.121608} = 22.07$$

De esta manera el pago final total será $472.07

2.10 ANÁLISIS DE ANUALIDADES PAGADERAS CON MAYOR FRECUENCIA DE LO QUE EL INTERÉS ES CONVERTIBLE

En esta sección se analizan algebraicamente las anualidades pagaderas con mayor frecuencia de lo que el interés es convertible. Es más común encontrar en la práctica anualidades pagaderas con mayor frecuencia de lo que el interés es convertible que anualidades pagaderas con menor frecuencia de lo que el interés es convertible. La sección 2.10 se divide en las siguientes áreas: (1) anualidad vencida, (2) anualidad anticipada, y (3) casos adicionales.

Anualidad vencida

Si m es el número de periodos de pagos en un periodo de conversión de interés, si n es el plazo de la anualidad medido en periodos de conversión de interés, y si i es la tasa de interés por periodo de conversión de interés. Se asumirá que cada periodo de conversión de interés contiene un número entero de periodos de pagos; de esta manera m y n son positivos. El número de pagos de la anualidad realizados es mn, que también es un entero positivo.

El valor presente de una anualidad que paga 1/m unidades monetarias al final de cada m-ésimo de un periodo de conversión de interés de un total de n periodos de conversión de interés es denotado por $a_{\overline{n|}}^{(m)}$.

Así

$$a_{\overline{n|}}^{(m)} = \frac{1}{m}\left[v^{\frac{1}{m}} + v^{\frac{2}{m}} + \ldots + v^{n-\frac{1}{m}} + v^{n}\right]$$

$$= \frac{1}{m}\left[\frac{v^{\frac{1}{m}} - v^{n+\frac{1}{m}}}{1 - v^{\frac{1}{m}}}\right] = \frac{1 - v^{n}}{m\left[(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1\right]}$$

$$= \frac{1 - v^{n}}{i^{(m)}} \qquad (2.36)$$

El valor acumulado de esta anualidad vencida después del último pago realizado es denotado por $s_{\overline{n|}}^{(m)}$, y se tiene

$$s_{\overline{n|}}^{(m)} = a_{\overline{n|}}^{(m)}(1+i)^{n} = \frac{(1+i)^{n} - 1}{i^{(m)}} \qquad (2.37)$$

Las fórmulas (2.36) y (2.37) se deben comparar con las fórmulas (2.2) y (2.4), respectivamente. Son idénticas excepto por que los denominadores de (2.36) y (2.37) son $i^{(m)}$ en lugar de i. Ya que $i^{(m)}$ es una medida de interés pagada al final de los m-ésimos de un periodo de conversión de interés, los puntos en los cuales el interés es pagado bajo esta medida coinciden con los puntos en los cuales se realizan los pagos.

Es posible escribir $a^{(m)}_{\overline{n}|}$ y $s^{(m)}_{\overline{n}|}$ en términos de $a_{\overline{n}|}$ y $s_{\overline{n}|}$ con un factor de ajuste. Las siguientes fórmulas son consecuencias inmediatas de las fórmulas (2.36) y (2.37):

$$a^{(m)}_{\overline{n}|} = \frac{i}{i^{(m)}} a_{\overline{n}|} \tag{2.38}$$

y

$$s^{(m)}_{\overline{n}|} = \frac{i}{i^{(m)}} s_{\overline{n}|} \tag{2.39}$$

El término $i/i^{(m)}$ a menudo se escribe como $s^{(m)}_{\overline{1}|}$, que se obtiene de la fórmula (2.37), eligiendo n=1.

Anualidad anticipada

El valor presente de una anualidad que realiza pagos de 1/m unidades monetarias al principio de cada m-ésimo de un periodo de conversión de interés de un total de n periodos de conversión de interés es denotado por $\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|}$.

Así

$$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{d^{(m)}} \tag{2.40}$$

La obtención de la fórmula (2.40) es similar a la de la fórmula (2.36).

El valor acumulado de esta anualidad un m-ésimo de un periodo de conversión de interés después del último pago realizado es denotado por $\ddot{s}^{(m)}_{\overline{n|}}$

Así:

$$\ddot{s}^{(m)}_{\overline{n|}} = \ddot{a}^{(m)}_{\overline{n|}}\,(1+i)^n = \frac{(1+i)^n - 1}{d^{(m)}} \tag{2.41}$$

Como una consecuencia inmediata de las fórmulas (2.40) y (2.41), se tiene

$$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n|}} = \frac{i}{d^{(m)}}\, a_{\overline{n|}} \tag{2.42}$$

y

$$\ddot{s}^{(m)}_{\overline{n|}} = \frac{i}{d^{(m)}}\, s_{\overline{n|}} \tag{2.43}$$

Las fórmulas (2.42) y (2.43) se pueden utilizar para obtener resultados numéricos si se cuenta con los valores de $i/d^{(m)} = \ddot{s}^{(m)}_{\overline{1|}}$ en las tablas de interés.

Sin embargo, es posible desarrollar alternativamente las fórmulas que se pueden aplicar. Ya que cada pago de $\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n|}}$ se realiza un m-ésimo de un periodo de conversión de interés antes que $a^{(m)}_{\overline{n|}}$, entonces se tiene

$$\begin{aligned}\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n|}} &= (1+i)^{\frac{1}{m}}\, a^{(m)}_{\overline{n|}} = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)\frac{i}{i^{(m)}}\, a_{\overline{n|}} \\ &= \left(\frac{i}{i^{(m)}} + \frac{i}{m}\right) a_{\overline{n|}}\end{aligned} \tag{2.44}$$

y similarmente

$$\ddot{s}^{(m)}_{\overline{n|}} = \left(\frac{i}{i^{(m)}} + \frac{i}{m}\right) s_{\overline{n|}} \tag{2.45}$$

Las fórmulas (2.44) y (2.45) son convenientes en los cálculos numéricos al usar las tablas de interés cuando se cuenta con los valores de $i/i^{(m)}$.

Casos adicionales

En ocasiones se encuentra el caso de una perpetuidad pagadera con mayor frecuencia de lo que el interés es convertible. Las siguientes fórmulas son análogas a las fórmulas (2.18) y (2.19):

$$a^{(m)}_{\overline{\infty|}} = \frac{1}{i^{(m)}} \tag{2.46}$$

y

$$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{\infty|}} = \frac{1}{d^{(m)}} \tag{2.47}$$

Otro caso especial, que rara vez se encuentra en la práctica, es aquel en que cada periodo de conversión de interés no contiene un número entero de periodos de pago (es decir, m>1, pero m no es entero). En este caso, la mejor aproximación sería escribir una expresión como la suma de los valores presentes o valores acumulados de cada pago distinto, y entonces sumar esta expresión como una progresión geométrica.

Ejemplo 2.9 Se realizan pagos trimestrales de $800 durante un periodo de 22 años. Encontrar las expresiones para: (1) el valor presente de estos pagos tres años antes del primer pago, y (2) el valor acumulado evaluado cuatro años después del pago final. Usar los símbolos basándonos en una tasa efectiva de interés.

1. La respuesta es

$$3200\, v^{3}\, \ddot{a}^{(4)}_{\overline{22|}} = 3200\left(\ddot{a}^{(4)}_{\overline{25|}} - \ddot{a}^{(4)}_{\overline{3|}}\right)$$

2. La respuesta es

$$3200\,(1+i)^{4}\, s^{(4)}_{\overline{22|}} = 3200\left(s^{(4)}_{\overline{26|}} - s^{(4)}_{\overline{4|}}\right)$$

Ejemplo 2.10 ¿A qué tasa efectiva de interés semestral el valor presente de una serie de pagos de \$6 cada dos meses por siempre, con el primer pago realizado inmediatamente, es igual a \$30?

La ecuación de valor es

$$30 = 6\,(1 + v^{1/3} + v^{2/3} + v + \ldots) = \frac{6}{1 - v^{1/3}}$$

Así

$$v^{1/3} = .8$$

y

$$(1+i)^{1/3} = \frac{1}{.8}$$

lo cual da

$$i = \left(\frac{1}{.8}\right)^3 - 1 = .9531 \quad \text{o} \quad 95.31\,\%$$

2.11 ANUALIDADES CONTINUAS

Un caso especial de anualidades pagaderas con mayor frecuencia de lo que el interés es convertible es aquel en el que la frecuencia de pagos es infinita, es decir, los pagos se realizan continuamente. Aunque una anualidad continua es difícil de visualizar en la práctica, en la teoría tiene un significado analítico muy importante. También es útil como una aproximación para anualidades pagaderas con mayor frecuencia, como las diarias.

Hay que denotar el valor presente de una anualidad pagadera continuamente durante n periodos de conversión de interés, tal que la cantidad total pagada durante cada periodo de conversión de interés es de 1 unidad monetaria, mediante el símbolo $\bar{a}_{\overline{n}|}$.

Una expresión para $\bar{a}_{\overline{n}|}$ es

$$\bar{a}_{\overline{n}|} = \int_0^n v^t\,dt \tag{2.48}$$

ya que la expresión diferencial $v^t\,dt$ es el valor presente del pago dt realizado en el momento exacto t.

Se puede obtener una expresión simplificada al realizar la integración

$$\bar{a}_{\overline{n|}} = \int_0^n v^t\,dt = \left.\frac{v^t}{\ln(v)}\right|_0^n = \frac{1-v^n}{\delta} \tag{2.49}$$

La fórmula (2.49) es análoga a la fórmula (2.2). De nuevo, existe relación entre la forma en que se realizan los pagos y el denominador de la expresión.
También se puede obtener la fórmula (2.49) de la siguiente manera:

$$\bar{a}_{\overline{n|}} = \lim_{m\to\infty} a^{(m)}_{\overline{n|}} = \lim_{m\to\infty} \frac{1-v^n}{i^{(m)}} = \frac{1-v^n}{\delta}$$

o

$$\bar{a}_{\overline{n|}} = \lim_{m\to\infty} \ddot{a}^{(m)}_{\overline{n|}} = \lim_{m\to\infty} \frac{1-v^n}{d^{(m)}} = \frac{1-v^n}{\delta}$$

Así, la anualidad continua es el límite de una anualidad pagadera m veces.

Es posible escribir $\bar{a}_{\overline{n|}}$ en términos de $a_{\overline{n|}}$ con un factor de ajuste.

$$\bar{a}_{\overline{n|}} = \frac{i}{\delta}\, a_{\overline{n|}} = \bar{s}_{\overline{1|}}\, a_{\overline{n|}} \tag{2.50}$$

El valor acumulado de una anualidad continua al final del plazo de la anualidad es denotado por $\bar{s}_{\overline{n|}}$. Se cumplen las siguientes relaciones:

$$\bar{s}_{\overline{n|}} = \int_0^n (1+i)^t\,dt \tag{2.51}$$

$$= \left.\frac{(1+i)^t}{\ln(1+i)}\right|_0^n$$

$$= \frac{(1+i)^n - 1}{\delta} \tag{2.52}$$

$$= \frac{i}{\delta}\, s_{\overline{n|}} = \bar{s}_{\overline{1|}}\, s_{\overline{n|}} \tag{2.53}$$

$$= \lim_{m\to\infty} s^{(m)}_{\overline{n|}} = \lim_{m\to\infty} \ddot{s}^{(m)}_{\overline{n|}}$$

2.12 ANUALIDADES VARIABLES BÁSICAS

Hasta este momento todas las anualidades consideradas han tenido pagos uniformes. Ahora se quita esta restricción y se consideran anualidades con pagos variables. En esta sección se asume que el periodo de pago es igual y coincide con el periodo de conversión de interés.

Naturalmente, se puede evaluar cualquier tipo de **anualidad variable** al tomar el valor presente o el valor acumulado de cada pago por separado y sumando los resultados.

En la sección 2.12 se discutirán los siguientes tipos de anualidades variables: (1) pagos variables con progresión aritmética, y (2) pagos variables con progresión geométrica.

Pagos variables con progresión aritmética

Se considera una anualidad vencida general con un plazo de n periodos en la que los pagos empiezan en P e incrementan Q después de cada periodo. La tasa de interés por periodo es i. La figura 2.6 es un diagrama de tiempo de esta anualidad. Se debe notar que P debe ser un número positivo y Q puede ser positivo o negativo, $P+(n-1)Q>0$ para evitar pagos negativos.

Si A es el valor presente de la anualidad, entonces

$$A = Pv + (P+Q)v^2 + (P+2Q)v^3 + \dots$$
$$\dots + [P+(n-2)Q]\,v^{n-1} + [P+(n-1)Q]\,v^n$$

Esta serie es una combinación de una progresión aritmética con una progresión geométrica. Cada serie se puede resolver algebraicamente multiplicando por una razón común en la progresión geométrica que da

$$(1+i)A = P + (P+Q)v + (P+2Q)v^2 + \dots$$
$$\dots + [P+(n-2)Q]\,v^{n-2} + [P+(n-1)Q]\,v^{n-1}$$

Ahora al restar la primera ecuación de la segunda, se tiene

$$iA = P - Q(v + v^2 + v^3 + \dots + v^{n-1}) - Pv^n - (n-1)Qv^n$$
$$= P(1-v^n) + Q(v + v^2 + v^3 + \dots + v^{n-1} + v^n) - Qnv^n$$

De esta manera

$$A = P\frac{1-\nu^{n}}{i} + Q\frac{a_{\overline{n}|} - n\nu^{n}}{i}$$
$$= Pa_{\overline{n}|} + Q\frac{a_{\overline{n}|} - n\nu^{n}}{i} \qquad (2.54)$$

El valor acumulado está dado por

$$Ps_{\overline{n}|} + Q\frac{s_{\overline{n}|} - n}{i} \qquad (2.55)$$

ya que debe ser el valor presente acumulado por n periodos.

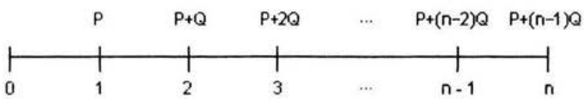


Figura 2.6 Diagrama de tiempo de las fórmulas (2.54) y (2.55)

Las fórmulas (2.54) y (2.55) se pueden usar para resolver cualquier problema en el que los pagos varían con progresión aritmética. Sin embargo, existen dos casos especiales que aparecen frecuentemente y tienen una notación especial.

El primero de estos casos es la **anualidad creciente** en la que $P = 1$ y $Q=1$. La figura 2.7 es un diagrama de tiempo de esta anualidad. El valor presente de esta anualidad, denotado por $(Ia)_{\overline{n}|}$, puede obtenerse de la fórmula (2.54)

$$(Ia)_{\overline{n}|} = a_{\overline{n}|} + \frac{a_{\overline{n}|} - n\nu^{n}}{i}$$
$$= \frac{1-\nu^{n} + a_{\overline{n}|} - n\nu^{n}}{i} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n+1}|} - (n+1)\nu^{n}}{i}$$
$$= \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|} - n\nu^{n}}{i} \qquad (2.56)$$

El valor acumulado de esta anualidad, denotado por $(I\,s)_{\overline{n|}}$, es

$$(Is)_{\overline{n|}} = (Ia)_{\overline{n|}}\,(1+i)^n = \frac{\ddot{s}_{\overline{n|}} - n}{i} = \frac{s_{\overline{n+1|}} - (n+1)}{i} \tag{2.57}$$

La fórmula (2.56) se puede obtener de una aproximación alternativa que considera una anualidad creciente como la sumatoria de una serie de anualidades diferidas uniformes.

$$(Ia)_{\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} v^t a_{\overline{n-t|}} = \sum_{t=0}^{n-1} v^t\,\frac{1-v^{n-t}}{i} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n|}} - nv^n}{i} \tag{2.56}$$

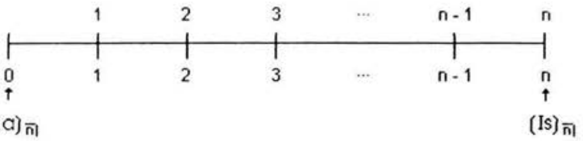


Figura 2.7 Diagrama de tiempo de una anualidad creciente

El segundo de estos casos es la **anualidad decreciente** en la que $P = n$ y $Q = -1$. La figura 2.8 es un diagrama de tiempo de esta anualidad. El valor presente de esta anualidad, denotado por $(Da)_{\overline{n|}}$, puede obtenerse de la fórmula (2.54)

$$\begin{aligned}(Da)_{\overline{n|}} &= na_{\overline{n|}} - \frac{a_{\overline{n|}} - nv^n}{i}\\ &= \frac{n - nv^n - a_{\overline{n|}} + nv^n}{i}\\ &= \frac{n - a_{\overline{n|}}}{i}\end{aligned} \tag{2.58}$$

El valor acumulado de esta anualidad, denotado por $(D\,s)_{\overline{n|}}$ es

$$(D\,s)_{\overline{n|}} = (Da)_{\overline{n|}}\,(1+i)^n = \frac{n(1+i)^n - s_{\overline{n|}}}{i} \tag{2.59}$$

La fórmula (2.58) se puede obtener de una aproximación alternativa que considera una anualidad decreciente como la sumatoria de una serie de anualidades diferidas uniformes.
Siguiendo esta aproximación, se tiene

$$(Da)_{\overline{n|}} = \sum_{t=1}^{n} a_{\overline{t|}} = \sum_{t=0}^{n} \frac{1 - v^{t}}{i} = \frac{n - a_{\overline{n|}}}{i} \tag{2.58}$$

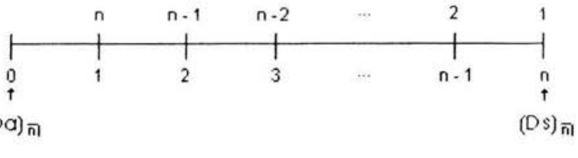


Figura 2.8 Diagrama de tiempo de una anualidad decreciente

Todas las fórmulas anteriores son para anualidades vencidas. No obstante, para encontrar las fórmulas para anualidades anticipadas se podría utilizar la relación antes mencionada entre la forma en que se realizan los pagos y el denominador de la expresión del valor de la anualidad.

También, es posible tener perpetuidades variables. Se puede encontrar la forma general de una perpetuidad al tomar el límite de la fórmula (2.54) cuando n tiende a infinito, obteniendo

$$\frac{P}{i} + \frac{Q}{i^{2}} \tag{2.60}$$

ya que

$$\lim_{n \to \infty} a_{\overline{n|}} = \frac{1}{i} \quad y \quad \lim_{n \to \infty} n v^{n} = 0$$

Se debe notar que P y Q son positivos para evitar pagos negativos.

Una aproximación alternativa para encontrar expresiones de anualidades variables se realiza utilizando las siguientes tres cantidades:

$$F_n = v^n \tag{2.61}$$

= El valor presente de un pago de 1 unidad monetaria al final de n periodos.

$$G_n = \frac{v^n}{d} \tag{2.62}$$

= El valor presente de una perpetuidad uniforme de 1 unidad monetaria por periodo, el primer pago se realiza al final de n periodos.

$$H_n = \frac{v^n}{d^2} \tag{2.63}$$

= El valor presente de una perpetuidad crec iente de 1, 2, 3. .., el primer pago se realiza al final de n periodos.

Estos símbolos son muy útiles para establecer expresiones de anualidades variables

Pagos variables con progresión geométrica

Las anualidades de pagos variables con progresión geométrica se pueden manejar fácilmente al expresar directamente el valor de la anualidad como una serie en la que cada pago es multiplicado por su valor presente o valor acumulado. Ya que los pagos y los valores presentes o acumulados son progresiones geométricas, los términos de las series para el valor de la anualidad constituyen una nueva progresión geométrica.

Por ejemplo, se considera una anualidad vencida con un plazo de n periodos en la que el primer pago es de 1 unidad monetaria y los pagos sucesivos incrementan en una progresión geométrica con una razón común $1 + k$. El valor presente de esta anualidad es

$$v + v^2(1+k) + \ldots v^n(1+k)^{n-1}$$

Sin embargo, ésta es una progresión geométrica cuya suma es

$$v\left(\frac{1-\left(\frac{1+k}{1+i}\right)^n}{1-\left(\frac{1+k}{1+i}\right)}\right) = \frac{1-\left(\frac{1+k}{1+i}\right)^n}{i-k} \tag{2.64}$$

Esta expresión puede evaluarse directamente. Si $k = i$, la fórmula (2.64) está indefinida. Sin embargo, el valor presente es justamente nv, el cual se obtiene de la serie original.

El valor presente de la perpetuidad existe si $0 < \dfrac{1+k}{1+i} < 1$, de tal forma que existe la suma de la progresión geométrica.

Si $\dfrac{1+k}{1+i} \geq 1$, entonces la progresión geométrica diverge y el valor presente de la perpetuidad no existe.

Ejemplo 2.11 Encontrar el valor presente de una perpetuidad vencida cuyos pagos sucesivos son 1, 2, 3, 4, …, a una tasa efectiva de interés del 5%.

Un símbolo apropiado es $(Ia)_{\overline{\infty|}}$. Sustituyendo dentro de la fórmula (2.60) $P=1$ y $Q=1$, se obtiene

$$\frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} = \frac{1}{.02} + \frac{1}{.0004} = 2550$$

Alternativamente, se tiene

$$(Ia)_{\overline{\infty|}} = H_1 = \frac{v}{d^2} = \frac{1+i}{i^2} = \frac{1.02}{.0004} = 2550$$

Ejemplo 2.12 Encontrar el valor presente de una anualidad vencida tal que sus pagos empiezan en 1, incrementan en cantidades anuales de 1 hasta un pago de n, y después decrecen en cantidades anuales de 1 hasta un pago final de 1.

El valor presente es

$$
\begin{aligned}
(Ia)_{\overline{n}|} + v^n (Da)_{\overline{n-1}|} &= \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|} - nv^n}{i} + v^n \frac{(n-1) - a_{\overline{n-1}|}}{i} \\
&= \frac{1}{i}\left[a_{\overline{n-1}|} + 1 - nv^n + nv^n - v^n - v^n a_{\overline{n-1}|}\right] \\
&= \frac{1}{i}\left[a_{\overline{n-1}|}(1 - v^n) + (1 - v^n)\right] \\
&= \frac{1}{i}\left[(1 - v^n) + \left(a_{\overline{n-1}|} + 1\right)\right] \\
&= a_{\overline{n}|}\, \ddot{a}_{\overline{n}|}
\end{aligned}
$$

Se puede expresar el valor presente de los pagos como

$$
\begin{aligned}
(H_1 - H_{n+1}) - (H_{n+1} - H_{2n+1}) &= H_1 - 2H_{n+1} + H_{2n+1} \\
&= \frac{v - 2v^{n+1} + v^{2n+1}}{d^2} \\
&= \frac{1 - 2v^n + v^{2n}}{id} \\
&= \frac{(1 - v^n)^2}{id} \\
&= a_{\overline{n}|}\, \ddot{a}_{\overline{n}|}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 2.13 Una anualidad proporciona 32 pagos trimestrales, el primer pago dentro de un año es de \$750. Los pagos incrementan de tal forma que cada pago es 6% más grande que el pago precedente. Encontrar el valor presente de esta anualidad a una tasa efectiva de interés trimestral del 12%.

Usando la fórmula (2.64) se tiene

$$750 \frac{1 - \left(\frac{1.06}{1.12}\right)^{32}}{.12 - .06} = 10350$$

aproximadamente.

CAPÍTULO 3

GENERALIDADES DE LOS BONOS

Existen dos clases fundamentales de capital que un compañía puede emitir: capital de deuda y capital de acciones ordinarias.
El ***capital de deuda*** representa una obligación contractual para el prestatario, debe liquidar al inversionista la cantidad de capital principal que pidió prestada, y también pagar el interés de alguna tasa definida desde el principio.
El ***capital de acciones ordinarias*** no vincula al emisor con ninguna de estas obligaciones.
La descripción anterior es importante por que el bono es un tipo de instrumento de deuda.

Los mercados internacionales de bonos son mercados donde los prestatarios pueden emitir capitales de deuda a mediano y a largo plazo a inversionistas fuera de su país. Estos mercados contemplan el mercado de eurobonos con su libertad de regulación, su amplia variedad de monedas y sus estructuras de emisión. Sin embargo, los prestatarios deseando aprovechar la demanda del inversionista emiten "bonos extranjeros", estos son bonos emitidos en el mercado nacional de otro país.

3.1 CARACTERÍSTICAS BÁSICAS

Un instrumento de deuda puede tomar muchas formas en los mercados internacionales de capitales, incluyendo el papel comercial y pagarés a medio plazo. Sin embargo, los bonos se distinguen por cinco características fundamentales:

1. Son emitidos con un vencimiento original mayor a un año.

2. Pagan interés dependiendo de su valor nominal.

3. Se emiten por grandes cantidades.

4. Son distribuidos a inversionistas mediante consorcios bancarios

5. Se negocian fácilmente en el mercado secundario.

Estas son las principales características que distinguen a los bonos de otros títulos de deuda en los mercados internacionales de capitales. La única excepción notable entre los bonos emitidos públicamente es el bono cupón cero que, como los instrumentos del mercado de dinero, paga interés de acuerdo al precio de compra descontado.
Los bonos son justificados por un certificado que declara la obligación del prestatario de liquidar al inversionista, o al prestamista, una cantidad fija en una fecha futura específica.

El valor a la par de un bono, también conocido como el valor nominal, permanece siendo el mismo durante toda su vida y nunca debe confundirse con el precio de emisión del bono o su precio del mercado, que varían durante toda su vida.

Un ***bono*** puede definirse como un instrumento de deuda negociable a mediano y largo plazo: éste da derecho al poseedor de recibir una serie de pagos de interés del emisor durante un periodo de tiempo y de obtener el pago de capital principal al vencimiento, el bono puede ser comprado o vendido durante su vida. Los bonos se emiten de dos formas: al portador o en forma nominativa. Por un lado, en los bonos al portador la posesión única por el poseedor es suficiente evidencia de pertenencia del instrumento, por otro lado, en los bonos nominativos los propietarios están enlistados en un registro que es controlado por el emisor.

3.2 EL MERCADO DE BONOS

Los bonos se pueden clasificar en tres tipos de acuerdo a las circunstancias geográficas y reguladoras de su emisión.

Bonos nacionales

Un ***bono nacional*** es un bono emitido en el país donde reside el prestatario y está denominado en la moneda de ese país. Los mercados nacionales son regulados por las autoridades nacionales para proteger a los inversionistas y para gravar impuestos. Además, las autoridades monetarias como el Banco Central (en México, el Banco de México o la Secretaría de Hacienda) gravarán un sistema para los prestatarios que deseen tener acceso al mercado, con el objetivo de mantener un mercado ordenado y proteger las disponibilidades líquidas. En los bonos al portador frecuentemente se aplican impuestos que representan una fuente de ingresos para el Banco Central, dicha fuente es conocida como "impuesto retenido".

Bonos extranjeros

Algunos mercados nacionales también están abiertos a prestatarios extranjeros que, con la intención de residir fuera del país, pueden emitir bonos en moneda nacional a la venta para inversionistas locales mientras cumplan con los mismos reglamentos (declaraciones, impuestos retenidos) así como sus complementos nacionales. Los bonos extranjeros han llegado a tener nombres interesantes indicando el mercado nacional en el que son emitidos. Algunos ejemplos son los bonos yankee (emitidos por prestatarios no norteamericanos en el mercado estadounidense), bonos bulldogs (emitidos por prestatarios no británicos en el mercado británico), bonos samuráis, bonos matador, bonos kiwis, etc.

Eurobonos

A diferencia de los bonos nacionales y los bonos extranjeros, los eurobonos caen fuera de la jurisdicción reguladora de cualquier país.

Estos bonos pueden ser:

- Emitidos en cualquier moneda importante.
- Emitidos fuera del país en cuya moneda están denominados.
- Comprados por inversionistas en casi cualquier país.
- Emitidos en cualquier momento para tomar ventaja de las condiciones del mercado.
- Estructurados en varias formas para satisfacer las necesidades específicas de los inversionistas o los emisores.

Quizá, lo más importante de los eurobonos es que:

- No están sujetos a ningún impuesto retenido.
- Son títulos no nominativos o títulos al portador, de esta manera ofrecen anonimato al inversionista.

Se debe notar que las autoridades de algunos países aún mantienen una trascendencia para las nuevas emisiones de eurobonos en sus monedas. Por ejemplo, las autoridades suizas no reconocen los eurobonos en francos suizos e imponen ciertas restricciones a las emisiones en francos suizos para prestatarios no suizos. Por esta razón, esas emisiones deben considerarse semejantes a los bonos extranjeros. Los bonos extranjeros junto con los eurobonos algunas veces son conocidos como "bonos internacionales".

3.3 CUPONES

Los pagos de cupones o de intereses de un bono pueden ser:

Fijos

El interés se expresa como un porcentaje del valor nominal del bono, y permanece constante durante la vida de la emisión.

Flotantes

Estos bonos son conocidos como "pagarés con tasa flotante (FLOATING RATES NOTES)". El interés se expresa por algún margen o "diferencial" por arriba o por debajo de un índice a corto plazo, como una tasa libor trimestral, y así se vuelve a colocar en términos absolutos en intervalos uniformes de acuerdo a los movimientos en la tasa de referencia.

Cero

Los ***bonos cupón cero*** no pagan al inversionista el interés como una renta uniforme, sino que pagan al inversionista la diferencia entre el precio descontado en que se venden y el valor nominal íntegro redimido al vencimiento. Como la ganancia del inversionista se grava como un ingreso o como una ganancia de capital, dependiendo del régimen de impuestos en su país, los bonos cupón cero pueden ofrecer ventajas en los impuestos.

3.4 VENCIMIENTOS

El alcance de los vencimientos en el que puede emitirse un bono depende de la moneda, el mercado en el que es ofrecido y también si el cupón es fijo o flotante.
Generalmente, en el mercado estadounidense los vencimientos de los bonos en

dólares oscilan entre uno y treinta años, a pesar de existir emisiones más largas.
En el mercado de libra esterlina, los bonos con un vencimiento menor a cinco años frecuentemente se expiden como pagarés a mediano plazo. Los vencimientos de 10 años no son comunes en este sector.
En el mercado de eurobonos los inversionistas no están dispuestos a comprar bonos en tasa fija con vencimientos mayores a 10 años, o comprar pagarés en tasa flotante con vencimientos mayores a 15 años.

3.5 DENOMINACIONES

Los bonos frecuentemente se emiten en varias denominaciones, por ejemplo, US$1,000, US$10,000, US$100,000 o incluso US$1,000,000.
La emisión de bonos dirigida a los inversionistas institucionales (fondos de pensiones y compañías de seguros) pueden ofrecer una denominación mínima de US$1,000 mientras que las emisiones que son populares dirigidos a inversionistas minoristas ofrecen menores denominaciones.

3.6 REDENCIÓN

Muchos bonos son redimidos íntegramente al vencimiento, estos bonos son conocidos frecuentemente como "bonos con redención al vencimiento". Sin embargo, los bonos en los mercados internacionales y mercados nacionales pueden incluir redenciones anticipadas íntegramente, éstas son conocidas como "opciones de compra y venta". En algunos mercados nacionales, sobre todo en el mercado municipal de bonos estadounidenses, es común la "redención de serie". La redención de serie se liquida a plazos durante la vida de la emisión. Otros bonos nacionales contienen la opción de elegir un "fondo de amortización" mediante el cual el emisor realiza aportaciones fijas dentro de un fondo controlado por un administrador para liquidar la deuda.
A continuación se verán las características más comunes de la redención en los mercados internacionales de bonos.

Opción de compra

Una ***opción de compra*** da al emisor el derecho, aunque no la obligación, de liquidar el capital principal y así retirar el bono mucho antes de su fecha de vencimiento establecida. Estos bonos son conocidos como "bonos redimibles". Un bono redimible puede ser retirado libremente por el emisor en cualquier momento de su vida dado un periodo de notificación usualmente de 30 a 60 días.

El emisor deseará ejercer una opción de compra en un bono con tasa fija si creé que las tasas de interés disminuirán durante la vida del bono. En este caso el emisor puede ejercer la opción, de comprar el bono y refinanciar los requisitos para después emitir un nuevo bono con tasas más bajas predominantes en ese momento. Obviamente, bajo estas circunstancias, el inversionista no tendrá la ventaja de poder disfrutar de una tasa de interés que está por "arriba del mercado" y tendrá que reinvertir sus fondos en tasas más bajas predominantes en el mercado. Por esta razón, el prestatario a menudo compensa al poseedor del bono pagando una "prima de rescate" cuando se retira prematuramente un bono. Esta prima se especificará en las condiciones originales del bono y podría redimir el bono entre 101% y 103% o más de su valor nominal, dependiendo cuántos años falten aún con respecto a su vencimiento.

Opción de venta

Una ***opción de venta*** se puede incluir en las condiciones de una emisión de bonos para hacerla más atractiva a los inversionistas. Esto da al poseedor del bono el derecho de "vender" el bono al emisor mediante redención anticipada. Una opción de venta será atractiva para el poseedor de un bono con tasa fija que creé que es probable que las tasas de interés aumenten durante la vida del bono. Entonces él puede ejercer su opción de venta e invertir las ganancias en un nuevo bono con una tasa de rendimiento más alta. Generalmente un "bono que se devuelve" al emisor será redimido a un descuento, por ejemplo el 99% de su valor nominal. Obviamente el emisor de un bono con opción de venta afronta el riesgo de que si el inversionista redime la emisión en forma anticipada, el emisor tendrá que emitir más instrumentos de deuda a una tasa de interés más alta.

3.7 EMISORES

Los bonos pueden ser emitidos por organizaciones supranacionales, como el Banco Mundial, por gobiernos nacionales, gobiernos estatales, gobiernos municipales, y toda clase de entidades corporativas. Los bonos emitidos por bancos no son expedidos frecuentemente como obligaciones corporativas.
Los bonos emitidos por los gobiernos nacionales en sus propias monedas constituyen el sector más grande de muchos mercados nacionales de bonos. Estos tipos de bonos son considerados de menor riesgo y se utilizan como puntos de referencia para poder medir en esa moneda todos los bonos.
Sin embargo, los gobiernos emiten también bonos en otras monedas, estos bonos son conocidos como "bonos soberanos" o simplemente soberanos.

3.8 DEUDA PRINCIPAL

La deuda corporativa se puede clasificar de acuerdo a la prioridad de reclamación que ofrece al inversionista en relación con otros acreedores en caso de quiebra. En los mercados nacionales, como el de Estados Unidos y el Reino Unido, las obligaciones corporativas puede ofrecer al inversionista una reclamación legal (del título) sobre algún activo especifico, frecuentemente un edificio o un equipo. En otras palabras, los poseedores de obligaciones con garantía siempre tienen prioridad sobre los poseedores de deudas quirografarias. Las obligaciones quirografarias son respaldadas sólo por la promesa del emisor de pagar el interés y el capital cuando deba.

Existen dos clases importantes de obligaciones quirografarias:

Deuda principal

Es respaldada sólo por la buena fe y el crédito del emisor pero ofrece prioridad de reclamación en relación con otros poseedores de deuda.

Deuda subordinada

Representa una reclamación sobre los activos que está subordinada para el reclamo de otro acreedor.

En el mercado de eurobonos, usualmente los bonos son respaldados sólo por "la buena fe y el crédito" del emisor. Por esta razón únicamente los prestatarios más confiables pueden entrar al mercado de eurobonos. Sin embargo, muchos eurobonos representan deudas principales.

3.9 RENDIMIENTO AL VENCIMIENTO

La tasa de rendimiento de un bono de mayor interés para los inversionistas es conocida como "rendimiento al vencimiento" y frecuentemente se simplifica como "rendimiento". Si el bono paga o no interés anualmente, semestralmente o trimestralmente, su tasa de rendimiento se expresa siempre como un rendimiento porcentual por año. Al hablar del rendimiento, el punto porcentual se divide en 100 partes y a cada parte se le conoce como "punto base". Una disminución en el rendimiento de 8.50% a 8.00% es una disminución de 50 puntos bases.

Es fácil de calcular el rendimiento al vencimiento de un bono con tasa fija adquirido en el momento de emisión a un precio igual al 100% de su valor nominal si además se conserva al vencimiento. Es simplemente la tasa cupón.
El problema es que:

- La mayoría de los bonos no se conservan al vencimiento.

- Es raro encontrar un precio de compra que de exactamente el 100% del valor nominal, conocido como 100 a la par, en la nueva emisión del mercado aún más en el mercado secundario.

El cupón sobre un bono reflejará el nivel general de las tasas de interés predominantes en el mercado en el momento en que se emitió. Sin embargo, al transcurrir el tiempo las tasas de interés del mercado cambian. Si el interés de un bono es fijo durante toda su vida; al transcurrir el tiempo su valor será más grande o más pequeño para los inversionistas dependiendo de las inversiones alternativas entonces disponibles en el mercado. Si las tasas predominantes del mercado aumentan por arriba de la tasa cupón del bono, los inversionistas no desearán pagar el valor nominal íntegro (a la par) para el bono. Sin embargo, comprarán el bono a un precio descontado (un precio menor que a la par) obteniendo un rendimiento o un rendimiento al vencimiento equivalente a los rendimientos disponibles en otros instrumentos. Asimismo, si las tasas de interés predominantes han caído en un nivel más bajo que el cupón ofrecido por el bono, los inversionistas pagarán una prima, es decir, un precio de compra más grande que a la par, para ese bono. Por esta razón, los precios de los bonos cambian continuamente como cambian las tasas de interés predominantes.

En otras palabras, el rendimiento de un bono es diferente de su cupón debido a que éste examina el rendimiento total para el inversionista. Además del cupón, la tasa toma en cuenta la diferencia (positiva o negativa) entre el precio de compra y el valor nominal íntegro que se liquidará al vencimiento. El rendimiento abarca tanto el ingreso como la ganancia o pérdida de capital.
Debido a la volatilidad de la tasa de interés han existido grandes fluctuaciones de precios en los bonos. Así, la ganancia o pérdida de capital implicada por el precio del bono tiene un factor importante al determinar el rendimiento al vencimiento.

El precio de un bono se determina por ciertos factores:

- Su cupón.

- Si se conserva o no hasta el vencimiento.

- El rendimiento requerido para atraer a los inversionistas o, en otras palabras, las tasas de interés predominantes del mercado disponibles sobre instrumentos alternativos del mismo vencimiento y riesgo del crédito.

CAPÍTULO 4

BONOS GUBERNAMENTALES

4.1 ANTECEDENTES

Casi en todos los países, el gobierno federal es a la vez el prestatario que maneja las cantidades de dinero más grandes, y el prestatario que tiene la calidad crediticia más alta (en México el prestatario es el Banco de México, representante de la SHCP).

La razón por la cual en muchos países los gobiernos solicitan varios préstamos se puede explicar por:

- La necesidad histórica de financiar repentinamente enormes gastos, (como en periodos de guerra).
- El crecimiento continuo del sector público en algunas economías nacionales.
- La diferencia que existe entre los ingresos anuales y los gastos anuales de un gobierno.
- La necesidad cíclica de operar un déficit presupuestal para mantener la actividad económica en caso de afrontar una recesión.
- La conveniencia política de pedir prestado en lugar de cobrar impuestos.

El crecimiento de la deuda pública en cierto sentido es análogo al crecimiento de la deuda que tiene una compañía privada. A diferencia de las compañías privadas, los gobiernos usualmente no reducen sus deudas, sino que prefieren refinanciarlas con nuevas deudas mientras confían en el crecimiento económico en relación con el ingreso nacional para liquidar los préstamos.

A pesar de que algunos gobiernos prestatarios toman empréstitos comerciales (por ejemplo, de bancos o instituciones de ahorro), el comportamiento a largo plazo de muchas deudas públicas y la alta calidad crediticia del gobierno hacen más fácil y más barato el pago de la deuda al incrementarse la emisión de bonos a mediano y largo plazo. Por esta razón el gobierno fundó el mercado nacional de bonos en muchos países, e históricamente en algunos países ha sido el único emisor aceptado en el mercado.

La deuda gubernamental, libre de riesgo

¿Por qué se dice que el gobierno tiene la calidad crediticia más alta en el país? Porque cuando los gobiernos piden prestado en su propia moneda, nunca dejan de pagar sus deudas bajo circunstancias normales. En primer lugar, a diferencia de las grandes corporaciones, los gobiernos siempre confían en ser capaces de refinanciar el vencimiento de un bono al emitir una nueva emisión. En segundo lugar, algunos gobiernos, que no pueden refinanciar sus deudas, pueden imprimir el dinero necesario para pagar a los poseedores de los bonos. Por lo tanto se puede decir que la deuda gubernamental está libre de riesgo.

Esto aplica únicamente cuando un gobierno pide prestado en su propia moneda. Los gobiernos se han caracterizado por ser incapaces de pagar sus deudas en monedas extranjeras y han caído en un endeudamiento mayor.

Administrando la economía

El mercado de bonos es una de las herramientas más poderosas que tiene el gobierno a su disposición para administrar su economía. Si un gobierno desea estimular su actividad económica, compra de nuevo sus propios bonos. Esto produce el incremento de los precios en los bonos y la reducción de sus rendimientos. Esto afecta los precios y los rendimientos de los bonos del sector privado y disminuye el nivel general de las tasas de interés. Al mismo tiempo, el gobierno inyecta reservas en metálico en el sistema financiero, lo que da como resultado un crecimiento de las disponibilidades líquidas. Si un gobierno desea restringir su actividad económica, puede vender bonos, de esta manera incrementan las tasas de interés y reducen las disponibilidades líquidas.

4.2 BONOS GUBERNAMENTALES ESTADOUNIDENSES

El mercado gubernamental de valores estadounidense, el mercado de renta fija más grande y más líquido en todo el mundo, es el punto de referencia del precio financiero a nivel internacional. Diariamente el volumen del dólar es el más grande en todos los mercados internacionales, incluyendo el capital en acciones y las divisas extranjeras.

El tamaño y el entorno del mercado gubernamental de valores estadounidense han cambiado dramáticamente en las últimas dos décadas, debido a dos acontecimientos importantes. El primero es el desarrollo del déficit presupuestal estadounidense en la primera mitad de la década de los 90's. El segundo es la creciente confianza de los inversionistas extranjeros para financiar estas deudas. Los extranjeros son en la actualidad los mayores poseedores de la deuda federal estadounidense. Una razón esencial para esto ha sido el déficit comercial del mercado estadounidense, en particular con Japón, que ha permitido a los extranjeros la búsqueda de inversiones en dólares. El resultado de la internacionalización del mercado estadounidense ha permitido la comercialización de valores gubernamentales estadounidenses las 24 horas del día y ha incrementado la sensibilidad para considerar divisas e indicadores económicos de todo el mundo.

Instrumentos

Bonos de la tesorería a corto plazo (TREASURY BILLS o T-BILLS)

Los bonos de la tesorería a corto plazo son instrumentos a corto plazo (con un vencimiento menor o igual a un año). Son emitidos a descuento, es decir, no pagan interés pero se venden a un precio menor que su valor nominal el cual se paga al vencimiento.
Los bonos trimestrales y semestrales se subastan semanalmente, y los bonos anuales (52 semanas) son subastados cada cuatro semanas. Periódicamente la tesorería también emite instrumentos conocidos como certificados en efectivo (CASH MANAGEMENT BILLS). Estas son herramientas financieras utilizadas para compensar la falta de flujo de caja a corto plazo relacionados a menudo con las fechas de recepción de los impuestos trimestrales. Los vencimientos pueden fluctuar desde unos días hasta seis meses.

La oferta de libre competencia para los bonos debe expresarse mediante una tasa de "descuento bancario". Aunque esta tasa usualmente es conocida como el rendimiento, la tasa de descuento bancario, que se calcula sobre el número de días actuales transcurridos en un año que consta de 360 días (o 365 sobre 360), difiere del rendimiento de un bono equivalente (BOND-EQUIVALENT), que se calcula sobre un año que consta de 365 días.

El cálculo para el descuento y el precio es el siguiente:

T =días por vencer
R =tasa de descuento expresada como un porcentaje
D =descuento por el valor al vencimiento de $100 dólares
P =precio en dólares
D = T(R)/360
P =100 –D

Los bonos de la tesorería a corto plazo son emitidos únicamente en libros contables de la tesorería (BOOK-ENTRY FORM), en denominaciones de $10,000 dólares y después en incrementos de $5,000 dólares. Los certificados en efectivo son vendidos en bloques mínimos de $1,000,000 de dólares.

Pagarés de la tesorería con interés fijo o Notas de la tesorería (TREASURY NOTE o T-NOTE)

Los pagarés de la tesorería con interés fijo son títulos al portador con interés que se emiten con vencimientos de dos a diez años. En la práctica, los pagarés de dos a cinco años se subastan mensualmente; los pagarés a diez años se subastan en forma trimestral con reembolsos en febrero, mayo, agosto y noviembre.

Estos pagarés son emitidos en libros contables de la tesorería o en forma registrada. Los pagarés de la tesorería con vencimientos menores a cuatro años son emitidos en denominaciones mínimas de $5,000 dólares, los pagarés con vencimientos mayores a cuatro años son emitidos en denominaciones mínimas de $1,000. A diferencia de los bonos T, los pagarés de la tesorería y los bonos de la tesorería a largo plazo pagan interés sobre una base semestral actual/actual. Los rendimientos se calculan mediante la fórmula matemática para el rendimiento de un bono (ver Apéndice A). El interés se paga sin deducción de impuestos para los inversionistas nacionales estadounidenses y está exento de impuestos estatales y locales.

Bonos de la tesorería a largo plazo (TREASURY BONDS, T-BONDS)

Los bonos de la tesorería a largo plazo generalmente tienen un vencimiento original mayor a 10 años. El más importante de estos es el bono a 30 años, conocido como el "bono a largo plazo", que sirve como punto de referencia para las tasas de interés estadounidenses a largo plazo. El bono a 30 años se vende junto con los pagarés de la tesorería de tres a diez años en las subastas trimestrales. Desde 1985, el bono a 30 años es no redimible. Los bonos de la tesorería pagan interés semestral y normalmente son emitidos en libros contables de la tesorería y sus denominaciones mínimas son de $1,000 dólares.

Títulos con cupón cero

En Estados Unidos, un mercado grande y líquido que ha incrementado por la necesidad de financiar un gigantesco déficit presupuestal, junto con la frecuente inventiva de los banqueros de Wall Street, ha conducido hacia algunos interesantes desarrollos en el área de títulos con cupón cero.

Un bono cupón cero es un bono que se emite mediante un descuento inicial y se paga a la par al vencimiento sin que intervengan pagos de interés. La participación en estos bonos empezó a crecer después de 1980 cuando la volatilidad de los rendimientos del mercado incrementó dramáticamente, ya que por definición los bonos cupón cero son los más sensibles a los cambios en las tasas de interés. Al principio, la práctica fue realizada por los bancos de inversión quienes compraron una gran cantidad de bonos pendientes de la tesorería y los colocaron bajo custodia, posteriormente emitieron series separadas de "recibos" para los pagos de cupones individuales y para el pago de capital principal. Esto permitió a los inversionistas comprar recibos de cupones y de capital principal por separado, para adaptarlos a sus objetivos de cartera. Los recibos de capital principal fueron, en efecto, los bonos cupón cero. El primero de estos productos fue introducido en 1982 como Certificado de Acumulación sobre los Títulos de la Tesorería (CERTIFICATE OF ACCRUAL ON TREASURY SECURITIES o CATS), que fue muy popular, ya que cerca de $50 billones de dólares se generaron durante dos años.

STRIPS

En 1984, la tesorería de Estados Unidos estimuló este producto para adaptarlo al sistema de libros contables de la reserva federal para permitir el Comercio por Separado del Interés y el Capital Principal de los Títulos (SEPARATE TRADING OF REGISTERED INTEREST AND PRINCIPAL SECURITIES O STRIPS). Esto incrementó la demanda de los bonos de la tesorería, los programas STRIPS alcanzaron cerca de $100 billones de dólares durante dos años. Los altos cupones predominantes en ese momento dieron un incentivo particular a los STRIPS; en algunos casos los STRIPS redujeron los pendientes comerciales, en particular los bonos a niveles donde la liquidez fue severamente reducida.

Los STRIPS de la tesorería fueron creados de ciertos bonos o pagarés con un vencimiento mayor o igual a diez años. Estos no tienen tasas cupón específicas y se comercializan sobre una base de rendimiento al vencimiento. Su venta se registra en libros contables de la tesorería con incrementos de $1,000 dólares con un mínimo de $1,000 dólares. El interés que se acumula anualmente debe reportarse con la finalidad de cobrar impuestos; al igual que otros valores gubernamentales, el interés está exento de impuestos estatales.

La importancia de los títulos con cupón cero es que coinciden con el desarrollo de muchas técnicas refinadas de análisis de rendimiento.

Estas técnicas utilizan tasas de descuento por separado para cada asiento de flujo de caja, dependiendo de su vencimiento.

El mercado primario

Las nuevas emisiones de valores gubernamentales se venden directamente en subastas de libre competencia administradas por la tesorería de Estados Unidos. La tesorería anuncia las subastas, generalmente de uno a diez días de anticipación, especificando la cantidad y el vencimiento, y proporcionando los indicadores de rendimiento. El comercio de ciertos valores inicia inmediatamente después de estos anuncios. Las ofertas pueden ser "competitivas" o "no competitivas". Las ofertas competitivas se expresan en términos del rendimiento y se conceden al precio actual que se ofrece. Las ofertas no competitivas se conceden íntegramente al rendimiento promedio establecido en la subasta competitiva. Cualquier persona física o moral puede proponer ofertas, pero se requieren de inversiones mínimas para la subasta competitiva de bonos y pagarés. Por ejemplo, se necesita de una oferta mínima de $1,000,000 dólares en la subasta competitiva de bonos, para las ofertas no competitivas se aceptan entre $10,000 dólares y $1,000,000 dólares. Todas las ofertas deben proponerse a la 1:00 pm tiempo de Nueva York. Todos los suscriptores como bancos, distribuidores primarios (PRIMARY DEALERS), y entidades gubernamentales deben presentar el pago total en ese momento.

Las ofertas se aceptan a través de una subasta alemana, iniciando con la presentación del rendimiento más bajo (es decir el precio más alto) hasta que se conoce el objetivo del volumen deseado por la tesorería. El total de las ofertas no competitivas se toma en consideración, así como ciertas reglas que limitan el porcentaje máximo concedido a cualquier postor.

El mercado secundario

El mercado gubernamental de valores estadounidense es principalmente institucional, y casi todo el comercio se realiza fuera de la bolsa (OVER THE COUNTER), es decir, directamente entre los participantes en lugar de efectuarse a través de cualquier bolsa de valores. En el núcleo del mercado existe un grupo llamado "distribuidores primarios", actualmente son cerca de 40. Estos comerciantes son designados por la reserva federal (FED) para comercializar valores gubernamentales en el mercado abierto de la reserva federal.

Los distribuidores negocian directamente con instituciones inversionistas como bancos, compañías de seguros, fondos de pensiones y corredores de bolsa quienes desean comprar o vender valores gubernamentales. Los inversionistas o particulares más pequeños entran al mercado a través de estos bancos, corredores de bolsa o comerciantes. Además para proporcionar dos tipos de mercados para los inversionistas, los distribuidores también toman posiciones de varios valores gubernamentales para sus propias cuentas, esperando generar una ganancia mediante los movimientos anticipados del mercado. Los distribuidores pueden establecer una posición a corto plazo en el mercado gubernamental así como una posición a largo plazo. Existe también un grupo de "interdistribuidores", corredores de bolsa de bonos gubernamentales cuya única función es facilitar la comercialización entre los comerciantes mediante redes modernas de telecomunicaciones.

El horario comercial en Estados Unidos es de las 9:00 am a las 5:00 pm tiempo de Nueva York. Sin embargo, la globalización del mercado ha tenido como resultado esencial la comercialización de los valores gubernamentales estadounidenses durante las 24 horas del día. Los otros centros del mercado primario se localizan en Londres y Tokio.

En general, los distribuidores no cobran una comisión al comprar o vender valores; en lugar de ello realizan un convenio sobre una base neta. La cotización del distribuidor incluirá un precio sobre la compra y un precio sobre la venta. La diferencia entre estos dos precios es conocida como "BID-ASKED SPREAD". En los mercados del Reino Unido esta diferencia es conocida como "BID-OFFER SPREAD". El tamaño de este diferencial sobre una emisión particular depende del vencimiento, la liquidez y el riesgo percibido al conservar la emisión. Debido a que existe un flujo constante de nuevas emisiones, los mercados secundarios ofrecen una gama de valores de vencimientos variantes. Los participantes del mercado nombran a la emisión más reciente con respecto al vencimiento como la "nueva" emisión, para otras emisiones con cierto vencimiento son conocidas como "antiguas" emisiones. En general existe menos comercialización a medida que una emisión va siendo más antigua, y la diferencia entre los precios de compra y de venta tiende a crecer.

4.3 BONOS GUBERNAMENTALES JAPONESES

El mercado de bonos gubernamentales japoneses (JGB) es el segundo más grande en el mundo, y de alguna forma el mercado más interesante y difícil de entender. Su estructura y sus características surgen de la combinación del comercio japonés y de las prácticas internacionales (principalmente en Estados Unidos), operando en un ambiente que ha existido únicamente por un periodo corto de tiempo.

El mercado de bonos gubernamentales japoneses se hizo famoso internacionalmente en la década de los 70's cuando los aumentos en el precio del petróleo produjeron un enorme déficit, particularmente en los países como Japón con una gran economía industrial y con escasas fuentes de energía. El gobierno japonés tuvo que recurrir a financiar el déficit mediante la emisión de bonos, que previamente habían sido emitidos sólo para proyectos de construcción. En ese momento, el sistema financiero japonés se encontró entre los más regulados y restringidos del mundo, con respecto a los participantes.

Instrumentos

El gobierno japonés emite una variedad de bonos: bonos a corto plazo, bonos al portador con cupones (COUPON-BEARING BONDS) a mediano plazo (a dos, tres y cinco años) bonos descontados (a cinco años) y bonos a largo plazo (de veinte años). Sin embargo, estos han sido dominados por el bono a diez años, con una nueva emisión el veinteavo día de cada mes en denominaciones de ¥100,000. Todos los pagos de cupón también se realizan el veinteavo día, el interés se paga semestralmente sobre una base actual/365. Los rendimientos no se calculan utilizando la fórmula estándar del rendimiento al vencimiento (STANDARD YIELD-TO-MATURITY), en vez de ésta se utiliza la siguiente fórmula:

$$Y = 100\left(\frac{\left(\frac{100-P}{T}\right)+C}{P}\right)$$

Donde:

Y =rendimiento
P =precio de compra
C =cupón expresado como un porcentaje
T =años al vencimiento (la porción de año representada por fracción)

Aunque en teoría estos bonos son redimibles en realidad rara vez lo son, y casi todos los bonos son emitidos en forma registrada. Las únicas variables en una nueva emisión son el cupón y la cantidad total, la emisión varía entre 300 y 1,400 billones de yenes. Las emisiones están tan estandarizadas que son identificadas mediante un número. Los bonos gubernamentales a corto plazo son emitidos para obtener ingresos. Dichos bonos se emiten a descuento y a un rendimiento que sigue el comportamiento de la tasa de descuento del Banco de Japón.

El mercado primario

Originalmente, las emisiones del bono a diez años fueron manejadas mediante un consorcio (SINDICATE), involucrando cerca de 800 instituciones cada una con asignaciones anticipadas. Sin embargo, desde 1987 la mayoría de los bonos a diez años fueron colocados en subastas. El consorcio para las emisiones de bonos gubernamentales japoneses se constituye de bancos y otras instituciones de ahorro y crédito, casas de bolsa y un pequeño número de participantes extranjeros. La tasa cupón para cada emisión es elegida por Hacienda, junto con el Banco de Japón y el consorcio emisor (UNDERWRITING SYNDICATE). Las comisiones permanecen fijas. Se utilizan diferentes procedimientos de emisión para otros bonos gubernamentales.

El mercado secundario

El patrón del comercio en el mercado de bonos gubernamentales japoneses es único. Muchos negocios se concentran en las manos de algunas casas de bolsa y bancos que compiten por las acciones del mercado y por el prestigio de estar visiblemente en control y bien informados. Los títulos son listados en la bolsa de valores, pero la mayoría de las transacciones del mercado secundario son manejadas en el mercado extrabursátil.

La mayoría de las veces el comercio tiene un número pequeño de emisiones, éstas son dominadas por la emisión designada como "punto de referencia o estándar" (BENCHMARK) en ese momento. Normalmente la emisión que se utiliza como punto de referencia representa el 40-50% de todo el movimiento, y a lo más el 90%. La emisión total puede moverse en varias ocasiones en un mismo día. Por el contrario, la emisión estándar de la tesorería estadounidense siempre es la emisión de "bonos a largo plazo" más reciente, considerando quizás el 10% del movimiento del mercado total. Naturalmente, la diferencia en liquidez entre la emisión estándar y todas las demás emisiones tiene como resultado un rendimiento importante que puede exceder puntos porcentuales.

Pueden originarse muchos problemas cuando se necesita de una nueva emisión estándar, si la principal firma de negocios (LEADING TRADING FIRMS), toma diferentes puntos de vista de que emisión debe elegirse e intenta probar su decisión al subastar la emisión de su elección. El resultado puede ser extremadamente inconsistente al manifestarse en los niveles de los precios. Por esta razón se debe de tener mucho cuidado al participar en este mercado.

4.4 BONOS GUBERNAMENTALES DEL REINO UNIDO

El mercado de bonos gubernamentales del Reino Unido es uno de los más grandes en el mundo, superado sólo por los mercados de Estados Unidos y de Japón; es el más importante en Europa. Se ha desarrollado durante 300 años, pero cambió dramáticamente en 1986. Es importante notar que el mercado ha tenido un notable crecimiento: la cantidad total de bonos de libra esterlina se duplicó entre 1992 y 1996. El área principal del crecimiento ha sido el mercado de deuda pública (GILT MARKET), debido a la recesión a principio de los 90's estimulada por la emisión.

Antes de 1986, el mercado gubernamental de valores del Reino Unido fue estructurado de la misma manera que el mercado de acciones ordinarias. La bolsa de valores regulaba todos las transacciones e impuso "el sistema de capacidad única (SINGLE CAPACITY SYSTEM)" en el cual los participantes negociaban con los "corredores de bolsa", quienes actuaban como agentes, mientras que el mercado era conducido por los "intermediarios o corredores de bolsa". Únicamente dos firmas de intermediarios manejaban el 70% del mercado de deuda gubernamental; sin embargo, todos los títulos eran emitidos por el Banco de Inglaterra el cual negociaba con los intermediarios gubernamentales y no con los corredores de bolsa. De forma similar las operaciones del mercado de dinero del Banco de Inglaterra no se negociaron con bancos sino con una docena de sociedades mediadoras (DISCOUNT HOUSES) en el mercado de dinero.

El sistema se mantuvo durante un siglo, cuando cambió en octubre de 1986 con la presencia del Big Bang, el valor total de la deuda gubernamental pendiente del Reino Unido a largo plazo era aproximadamente de £130 billones con un movimiento diario de £1.3 billones aproximadamente. A pesar de que el Reino Unido tuvo un excedente durante el periodo de 1988-1992, éste se convirtió en un déficit. La recesión producida por el déficit gubernamental a principios de los 90's estimuló la emisión de deuda pública.

El acontecimiento del Big Bang eliminó el sistema de capacidad única y permitió a los corredores de bolsa ser reconocidos por otras instituciones. Creyendo que la clave del éxito era el incremento en la escala de operaciones en el mercado, los corredores de bolsa, los intermediarios, y los bancos se fusionaron rápidamente. El resultado fue la creación de grandes firmas con bastante capital y con avanzados sistemas de cómputo. Inicialmente 27 firmas fueron autorizadas por el Banco de Inglaterra para establecer los mercados de bonos gubernamentales del Reino Unido. A mediados de los 90's el número de las firmas disminuyó a 18 debido a las condiciones del mercado, ya que el comercio fue menos productivo.

Instrumentos

Los valores gubernamentales del Reino Unido son emitidos por el Banco de Inglaterra y están garantizados por el gobierno. A estos instrumentos se les conoce como deuda pública o fondos públicos (GILTS o GILT-EDGED SECURITIES) debido a que originalmente los certificados fueron producidos con fondos públicos. Los gilts están disponibles para cualquier inversionista y representan cerca del 65% de la deuda nacional e incluso la proporción más grande de todos los bonos de libra esterlina.

Las emisiones son usualmente conocidas como "emisiones de la tesorería" o "emisiones del erario", dependiendo de las características legales del instrumento, pero esta distinción no es importante para efectos prácticos. A pesar de que técnicamente es posible comercializar gilts en una forma al portador conocida como "loan", el mercado comercializa en una forma nominativa conocida como "stock", porque ésta es más fácil de administrar. El interés se paga semestralmente sobre una base actual/365 días.

El mercado de gilts abarca todas las emisiones pendientes. Por conveniencia, los gilts con un vencimiento menor a cinco años son conocidos como "gilts a corto plazo"; aquellos con vencimientos de cinco a quince años son conocidos como "gilts a mediano plazo"; y aquellos con vencimientos mayores de quince años son conocidos como "gilts a largo plazo". Debido a que los gilts se han comercializado principalmente en forma nominativa, se han desarrollado convenios especiales con respecto a los contratos realizados poco antes de que se pague un cupón o un dividendo. Esos convenios se reflejan en la cotización del precio del mercado. Normalmente los gilts se comercializan con dividendos (con interés acumulado) de la misma forma que otros bonos; al acercarse la fecha de pago de dividendos los gilts se comercializan sin dividendos (sin interés acumulado).

El mercado primario

Anteriormente se utilizaba un proceso donde se ofrecían los títulos directamente a cierta oferta. Con este método, el Banco de Inglaterra elegía un precio mínimo de suscripción y solicitaba ofertas de las partes interesadas. Todas las posturas por arriba de la oferta más baja aceptada obtenían títulos a este precio. Cualquier título que no se encontrara en la propuesta era ofrecido a la venta, por el Banco de Inglaterra, a un precio fijo. Algunos títulos también podían ser destinados directamente a la venta por el Banco de Inglaterra, mediante el mecanismo de la propuesta.

Desde 1987, la mayor parte de los títulos ha sido emitida directamente en subasta sobre una base competitiva y una base no competitiva, siguiendo el modelo de las subastas estadounidenses con algunas diferencias importantes. Las ofertas en la subasta del Reino Unido se realizan sobre un precio base, en lugar de la base de rendimiento utilizada en Estados Unidos. También la subasta del Reino Unido no es una subasta alemana, es decir, todas los oferentes pagan el precio más bajo aceptado para los títulos en lugar del precio actual que fue ofrecido.

El mercado secundario

La estructura del mercado de bonos gubernamentales comprende la bolsa de valores que autoriza a los creadores del mercado (MARKET-MAKERS) para negociar directamente con el Banco de Inglaterra, a los *interdealer brokers* para negociar únicamente con los creadores del mercado, y las *agency brokers* para negociar con los creadores del mercado en nombre de los clientes. Esto es similar en el sistema estadounidense excepto por dos diferencias sobresalientes:

- Todos los creadores del mercado de los valores gubernamentales del Reino Unido deben ser miembros de la bolsa de valores. Esto permite a los bancos comerciales poseer filiales que comercialicen en el mercado de deuda gubernamental del Reino Unido y en otros títulos, principalmente acciones ordinarias. En Estados Unidos algunos de los negociantes del mercado primario son bancos comerciales, que están restringidos únicamente a los tipos de títulos que pueden negociar y no pueden negociar con acciones ordinarias.

- En el Reino Unido, los acuerdos de volver a comprar fueron prohibidos hasta 1996 cuando inicio el mercado de reporto del gilt. Hasta entonces no era posible comercializar títulos hasta que fuera un creador del mercado, lo cual ocasionó que se limitara la liquidez y por lo tanto el incremento de los rendimientos. Este movimiento fue también parte de los esfuerzos de mantener a Londres como el centro comercial más importante para la Unión Europea.

La extensión de las ofertas del mercado sobre una emisión particular depende del vencimiento del título y de su liquidez. Las horas en que opera el mercado son desde las 9:00 am hasta las 5:30 pm tiempo de Londres, a pesar de que el comercio se efectúa las 24 horas del día. Los pagos se realizan el mismo día en libras esterlinas. El pago de interés para los inversionistas del Reino Unido con respecto a las emisiones de gilts dependen del impuesto retenido sobre las tasas nacionales del Reino Unido. Ciertas emisiones permiten pagos de interés a inversionistas extranjeros sin impuesto retenido (FOTRA).

Inversionistas

El mercado de gilts está estructurado por:

- Gilts a mediano y largo plazo, son conservados por compañías de seguros y fondos de pensiones, con pasivos a largo plazo que deben ser saldados por activos.

- Gilts a mediano y largo plazo, son conservados por sociedades de crédito hipotecario y otras instituciones financieras (incluyendo bancos) cuya elección de inversión esta limitada por la ley.

- Los poseedores extranjeros de gilts frecuentemente son instituciones inversionistas que consideran el riesgo gubernamental del Reino Unido como una de sus opciones internacionales y que examinan el interés y los parámetros de la moneda sobre una base comparativa. Estos participantes generalmente tienen una preferencia por los vencimientos más cortos.

4.5 BONOS GUBERNAMENTALES DE LA UNIÓN EUROPEA

Desde el 1° de enero de 1999 once países formaron la Unión Europea (EMU) –Austria, Bélgica, Finlandia, Francia, Alemania, Irlanda, Italia, Luxemburgo, Holanda, Portugal y España- adoptando el euro como su moneda nacional. La introducción de una sola moneda marcó un cambio significativo para Europa y los mercados financieros del mundo. A partir de esta fecha, al fusionar sus mercados nacionales estos once países se convirtieron en el segundo mercado de bonos más grande del mundo (después de Estados Unidos, Japón y el Reino Unido).

Dos etapas cruciales crearon un mercado europeo liquido y profundo, dichas etapas fueron: la redenominación de instrumentos financieros de las monedas nacionales y la armonización de los convenios del mercado. La redenominación significa cambiar la denominación de emisiones de bonos existentes de monedas nacionales a euros mientras que la armonización consiste en estandarizar las reglas y los convenios de los diversos mercados de bonos que participan en el euro.

Todos los paises pertenecientes a la Unión Europa acordaron en redenominar todas sus deudas gubernamentales de monedas nacionales a euros la primera semana de enero de 1999. Esto aseguró una gran liquidez en el mercado de bonos gubernamentales europeos. Muchos de los miembros también decidieron adoptar nuevos convenios para comercializar sus deudas gubernamentales. Esta armonización tomó lugar sobre el primer cupón fechado después de enero de 1999.

4.6 BONOS GUBERNAMENTALES ALEMANES

El mercado de bonos gubernamentales alemanes es extraño debido a la historia económica y política de la República Federal. Alemania comenzó a existir como país unificado en el siglo XIX, al haber sido un conjunto de estados independientes.
El sistema financiero alemán al desarrollarse como lo hizo su economía, y todos sus sectores (bancos, bonos y títulos) fue muy famoso internacionalmente. Sin embargo, la Primera Guerra Mundial, produjo una consecutiva inflación y recesión, y la Segunda Guerra Mundial causó una gran ruptura con las instituciones financieras, la comunidad financiera y la confianza de los inversionistas. La recuperación económica posterior a la guerra restableció la prosperidad, y Alemania Occidental desarrolló un comercio, un excedente de capital, una moneda sólida, y un sistema bancario sólido. Sin embargo, los ciudadanos alemanes no trataron de invertir en instrumentos a largo plazo; sus ahorros fueron canalizados principalmente en depósitos bancarios. Como resultado, el sector público prestatario fue parcialmente financiado por bonos (50%), y el sector gubernamental fue una pequeña parte (30%) del total del mercado de bonos.

Por el contrario, los inversionistas internacionales fueron atraídos por la apreciación de la moneda y los rendimientos diferenciales que los bonos habían ofrecido mediante otras monedas más sólidas, en particular el franco suizo y el yen japonés.

El impacto económico de la unificación alemana tuvo como resultado una reducción de estos diferenciales. El mercado secundario también tuvo una comportamiento similar; como muchas emisiones de bonos gubernamentales alemanes se encontraban con inversionistas a largo plazo, el comercio más activo se llevó a cabo a través de bancos internacionales, en particular instituciones estadounidenses, y la mayor parte del mercado se encuentra en el mercado bursátil localizado en Londres.

Instrumentos

Los inversionistas internacionales están muy interesados en la alta liquidez de los Bundesanleihen (*BUNDS*), que representan cerca del 30% de los bonos gubernamentales en circulación (excluyendo los *SCHULDSCHEINE)* que son considerados como préstamos designados.

Los Bunds son instrumentos a largo plazo normalmente con un vencimiento de 10 años, aunque se han conocido vencimientos de 30 años. Son emitidos en libros contables de la tesorería, con una denominación mínima de 100 marcos alemanes, y pagan interés anual, calculado sobre un mes de 30 días y un año de 360 días.

El rendimiento que se cotiza sobre los bonos no se calcula utilizando el método estándar. Si existe un periodo fraccionado de interés acumulado, éste se negocia de cierta manera que da un rendimiento ligeramente más bajo que el obtenido por la fórmula estándar del rendimiento al vencimiento.

Los Bundesobligationen (*BOBLs*) emitidos en 1979 tuvieron una gran importancia en 1989, cuando se le permitió a los extranjeros comprarlos en el mercado secundario. El mercado fue extremadamente profundo y tuvo varios convenios a futuro.

Los BOBLs tienen vencimientos de 5 años y son emitidos sobre una base actual. Son bonos al portador, que producen interés anual. Otros tipos de bonos y pagarés gubernamentales a corto y mediano plazo son importantes para los inversionistas nacionales.

El mercado primario

Los Bundesanleihen (Bunds) son los bonos gubernamentales alemanes más comercializados. Han sido emitidos sobre una base mensual, pero este esquema no es muy preciso.

Desde 1995 los BOBLs son emitidos de dos formas:

Primero la emisión continua tradicional, abierta únicamente para los clientes privados

Seguida por una subasta abierta, una vez que se cierra la emisión continua.

Este método fue introducido para mejorar la liquidez y el volumen pendiente en el mercado de bonos gubernamentales a mediano plazo. Entonces los bonos son enlistados en la bolsa de valores.

El mercado secundario

A pesar de que los Bundesahleihen se cotizan sobre todas las bolsas de valores alemanas cerca del 70% del comercio se realiza en forma extrabursátil. El interés acumulado no está incluido en las cotizaciones de precios y los precios son cotizados como un porcentaje del valor nominal. Los precios bursátiles son netos (es decir los precios de oferta incluyen comisiones y honorarios).

La liquidación de los bonos alemanes normalmente se realiza dos días después de la fecha de negociación para los casos a nivel nacional y tres días para los casos internacionales. Las ventas en corto y el préstamo de los títulos se permitieron durante 1990 por el Bundesbank como parte de un proceso gradual de comercialización.

4.7 BONOS GUBERNAMENTALES MEXICANOS

Al igual que los demás países, México se ha visto en la necesidad de crear y renovar el mercado de bonos gubernamentales, con el objeto de recolectar fondos para desarrollar proyectos nacionales, refinanciar sus deudas y controlar su actividad económica.

La presencia del boom petrolero, en la década de los 70's, fomentó la necesidad de atraer capitales para poder desarrollar la infraestructura petrolera en nuestro país. De ahí la importancia de promover que los inversionistas participaran en el mercado nacional.

En 1978 el Banco de México implantó los Certificados de la Tesorería de la Federación (CETES), estos títulos fueron la base para el desarrollo en México de un mercado de bonos y valores de renta fija. La trascendencia de este acontecimiento se reflejó en la evolución financiera de México y también en el progreso de la banca central. La creación y madurez del mercado de bonos permitió las condiciones necesarias para llevar a cabo la regulación monetaria a través de operaciones de mercado abierto.

El objetivo general de estas implementaciones fue promover un mayor grado de transparencia dentro del mercado de valores, para así incrementar la confianza del público inversionista en éste como una alternativa atractiva de inversión, que a su vez permitiera el financiamiento de proyectos productivos, sobre todo de aquellos con horizonte de mediano y largo plazo mediante la emisión de deuda.

No obstante muchos instrumentos gubernamentales han desaparecido debido a las dificultades que el propio gobierno a encontrado para administrarlos adecuadamente, añadiendo la falta de inversión de los prestamistas en estos tipos de bonos. Entre dichos instrumentos destacan los petrobonos y ajustabonos.

Clasificación del mercado de deuda mexicano desde el punto de vista emisor (Gobierno Federal)

Mercado de deuda mexicano desde el punto de vista emisor
- Bonos cupón cero
  - -Cetes
- Bonos con cupón
  - - Bonos
  - -BondesT
  - -Udibonos
  - -Brems

4.7.1 BONOS CUPÓN CERO O INSTRUMENTOS QUE COTIZAN A DESCUENTO.

Los bonos cupón cero son instrumentos a corto plazo que cotizan debajo de su valor nominal y su descuento es la diferencia que existe entre el precio de venta y el precio de compra, (ver Apéndice A).

Entre los bonos cupón cero, emitidos por el gobierno federal se encuentran:

- CETES

Certificados de la Tesorería de la Federación

Descripción de los títulos

Nombre:
Certificados de la Tesorería de la Federación (CETES).

Valor nominal:
$10.00 (diez pesos)

Plazo:
Se pueden emitir a cualquier plazo siempre y cuando su fecha de vencimiento coincida con un jueves o la fecha que sustituya a este en caso de que fuera inhábil. En la actualidad los CETES se emiten y colocan a plazos de 28 y 91 días, y a plazos cercanos a los seis meses y un año.

Pago de intereses:
Estos títulos no devengan intereses debido a que son bonos cupón cero. Sin embargo la tasa de interés del título está implícita en la relación que existe entre su precio de adquisición, el valor nominal del título y su plazo a vencimiento.

Identificación de los títulos:
La clave de identificación de la emisión está constituida por ocho caracteres, el primero para identificar el título ("B"), el segundo es un espacio en blanco, y los seis restantes para indicar su fecha de vencimiento (año,mes,día).

Valuación de los CETES

En particular si se desea obtener el precio de un CETE, con plazo de 28 días, se requiere de una ecuación de valor cuyo lado izquierdo represente el precio del CETE, y el lado derecho represente el valor presente del valor nominal del instrumento, considerando como fecha focal el momento x (medido en días), donde x se encuentra dentro del plazo del instrumento.

Por un lado, la ecuación del CETE, considerando una tasa efectiva de rendimiento r, es:

$$P = VN\left[1 + TR\left(\frac{28}{360}\right)\right]^{-\left(1-\frac{x}{28}\right)} = (1+r)^{-\left(1-\frac{x}{28}\right)} \tag{4.1}$$

donde:

P =Precio del CETE en pesos
VN =Valor nominal del título en pesos
TR =Tasa de rendimiento anual del CETE
r =Tasa efectiva de rendimiento
x =Días transcurridos desde la fecha de emisión hasta la fecha de valuación del instrumento.

Por otro lado, la ecuación del CETE, considerando una tasa efectiva de descuento d, es:

$$P = VN\left[1 - TD\left(\frac{28}{360}\right)\right]^{\left(1-\frac{x}{28}\right)} = (1-d)^{\left(1-\frac{x}{28}\right)} \tag{4.2}$$

donde:

P =Precio del CETE en pesos
VN =Valor nominal del título en pesos
TD =Tasa de descuento anual del CETE
d =Tasa efectiva de descuento
x =Días transcurridos desde la fecha de emisión hasta la fecha de valuación del instrumento.

Nota: La explicación de las fórmulas (4.1) y (4.2) se presenta en el Apéndice A.

4.7.2 BONOS CUPONADOS

Cupón

El cupón es el medio por el cual se ejercen o cobran los derechos en el mercado de títulos de crédito, es el recibo o comprobante de que los derechos han sido aplicados, normalmente los derechos se refieren a los intereses ya que el capital principal o el valor nominal se recupera generalmente mediante la entrega del propio título de crédito para su cancelación.

Los ***bonos cuponados*** son instrumentos de plazo, que pagan intereses sobre el valor nominal del título, por periodos vencidos mediante la entrega de cupones, ofreciendo frecuentemente una "sobretasa" que aplica directamente sobre el título.

Estos bonos son instrumentos que cotizan a precio en el mercado de dinero, es decir, son títulos de plazo que pagan interés por cupones vencidos periódicamente sobre el valor nominal del título. Su precio está determinado por la suma de los flujos de efectivo a valor presente.

Entre los instrumentos más conocidos que emite el gobierno federal se encuentran:

- Bonos
- BondesT
- Udibonos
- Brems

Bonos de Desarrollo del Gobierno Federal con Tasa de Interés Fija

Descripción de los títulos

Nombre:
Bonos de Desarrollo del Gobierno Federal con tasa de interés fija (BONOS).

Valor nominal:
$100.00 (cien pesos)

Plazo:
Se pueden emitir a cualquier plazo siempre y cuando sea múltiplo de 182 días.

Periodo de interés:
Los títulos devengan intereses en pesos cada seis meses, es decir, cada 182 días o al plazo que sustituya a éste en caso de días inhábiles.

Tasa de interés:
La tasa de interés que pagan estos títulos es fijada por el Gobierno Federal en la emisión de la serie y es dada a conocer al público inversionista en la Convocatoria a la Subasta de Valores Gubernamentales.

Pago de intereses:
Los intereses se calculan considerando los días efectivamente transcurridos entre las fechas de pago de los mismos, tomando como base años de 360 días, y se liquidan al finalizar cada uno de los períodos de interés.

$$I_j = VN(TC)\left(\frac{N_j}{360}\right) \tag{4.3}$$

donde:

I_j =Interés por pagar al final del periodo j
VN =Valor nominal del título en pesos
TC =Tasa de interés anual del cupón j
N_j =Plazo en días del cupón j, en este caso de 182 días

Se debe notar que en ocasiones el Gobierno Federal ofrece en las subastas primarias títulos emitidos con anterioridad a su fecha de colocación. En estos casos, las subastas se realizan a precio limpio (sin intereses devengados), por lo que para liquidar estos títulos, se tiene que sumar al precio de asignación resultante en la subasta los intereses devengados del cupón vigente de acuerdo a la siguiente fórmula:

$$I_{devj} = VN(TC)\left(\frac{d}{360}\right) \tag{4.4}$$

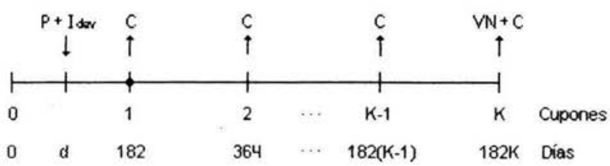
donde:

I_{devj} =Intereses devengados durante el periodo j.
D =Días transcurridos entre la fecha de emisión o el último pago de los intereses (j −1), según corresponda a la fecha de valuación.

Identificación de los títulos:
La clave de identificación de la emisión está constituida por ocho caracteres, el primero para identificar el título ("M"), el segundo para el plazo en años de la emisión, y los seis restantes para indicar su fecha de vencimiento (año,mes,día).

Valuación de los bonos

Se desea obtener el precio limpio del bono, para ello se requiere de una ecuación de valor cuyo lado izquierdo represente el valor actual del precio limpio y el valor actual de los intereses devengados (estos intereses se consideran d días después de la fecha de emisión del instrumento o del último cupón pagado), y el lado derecho represente el valor presente de los cupones que faltan de liquidar y el valor presente del valor nominal del instrumento, considerando como fecha focal el primer periodo posterior a la fecha de emisión del instrumento o a la fecha en que se liquidó el último cupón, es decir, 182 días.



Así la ecuación de valor del bono es

$$(P+I_{dev})(1+R)^{1-\frac{d}{182}} = C + Ca_{\overline{K-1}|\,R} + VN(1+R)^{-(K-1)}$$

donde:

P =Precio limpio del bono (redondeado a 5 decimales)
I_{dev} =Intereses devengados durante el periodo j
d =Número de días transcurridos del cupón vigente.
VN =Valor nominal
C_j=C=Cupón j

$$C = VN(TC)\left(\frac{N_j}{360}\right) = VN(TC)\left(\frac{182}{360}\right)$$

TC =Tasa de interés anual del cupón

N_j =Plazo en días del cupón, en este caso 182
K =Número de cupones por liquidar, incluyendo el vigente
R =Rendimiento efectivo por periodo

$$R = r\left(\frac{N_j}{360}\right) = r\left(\frac{182}{360}\right)$$

r =Rendimiento a vencimiento anual.

Despejando P de la ecuación anterior, se tiene que la fórmula para el precio limpio o el precio de asignación de la subasta es:

$$P = \frac{C + Ca_{\overline{K-1}|R} + VN(1+R)^{-(K-1)}}{(1+R)^{1-\frac{d}{182}}} - I_{dev} \quad (4.5)$$

Nota: El precio limpio del bono es el precio de asignación en la subasta, es el precio que propone el inversionista en su solicitud por cada título que esta dispuesto a comprar. Una vez que el inversionista recibe la asignación a dicha postura, d días después de la emisión del bono, tendrá que pagar:

$$P_{BONO} + I_{dev} \quad (4.6)$$

Bonos de Desarrollo del Gobierno Federal con Pago Trimestral de Interés (BONDEST)

Descripción de los títulos

Nombre:
Bonos de Desarrollo del Gobierno Federal con pago trimestral de interés (BONDEST).

Valor nominal:
$100.00 (cien pesos)

Plazo:
Se pueden emitir a cualquier plazo siempre y cuando sea múltiplo de 91 días.

Periodo de interés:
Los títulos devengan intereses en pesos cada tres meses, es decir, cada 91 días o al plazo que sustituya a éste en caso de días inhábiles.

Tasa de interés:
La tasa de interés es la tasa de rendimiento de los CETES, en colocación primaria, emitidos al plazo de 91 días, correspondiente a la semana que empiezan a devengarse los intereses. En caso de que no se coloquen CETES a dicho plazo, esta tasa se sustituye por la tasa de los CETES colocados en el mercado primario al plazo más cercano a tres meses, llevada en curva a 91 días.

Pago de intereses:
Los intereses se calculan considerando los días efectivamente transcurridos entre las fechas de pago de los mismos, tomando como base años de 360 días, y se liquidan al finalizar cada uno de los periodos de interés.

$$I_j = VN(TC_j)\left(\frac{N_j}{360}\right) \tag{4.7}$$

donde:

I_j =Interés por pagar al final del periodo j
VN =Valor nominal del título en pesos
TC_j =Tasa de interés anual del cupón j
N_j =Plazo en días del cupón j, en este caso de 91 días

Se debe notar que en ocasiones el Gobierno Federal ofrece en las subastas primarias títulos emitidos con anterioridad a su fecha de colocación. En estos casos, las subastas se realizan a precio limpio (sin intereses devengados), por lo que para liquidar estos títulos, se tiene que sumar al precio de asignación en la subasta los intereses devengados del cupón vigente de acuerdo a la siguiente fórmula:

$$I_{devj} = VN(TC_j)\left(\frac{d}{360}\right) \tag{4.8}$$

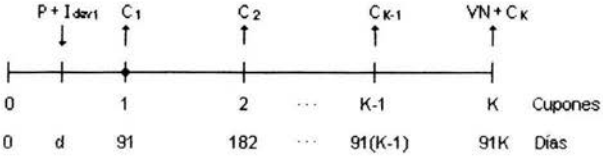
donde:

I_{devj} =Intereses devengados durante el periodo j.
d =Días transcurridos entre la fecha de emisión o el último pago de los intereses (j −1), según corresponda a la fecha de valuación.

Identificación de los títulos:
La clave de identificación de la emisión está constituida por ocho caracteres, los primeros dos para identificar el título ("LT"), y los seis restantes para indicar su fecha de vencimiento (año,mes,día).

Valuación de los bondesT

Se desea obtener el precio limpio del bondeT, para ello se requiere de una ecuación de valor cuyo lado izquierdo represente el valor actual del precio limpio y el valor actual de los intereses devengados (estos intereses se consideran d días después de la fecha de emisión del instrumento o del último cupón pagado), y el lado derecho represente el valor presente de los cupones que faltan de liquidar y el valor presente del valor nominal del instrumento, considerando como fecha focal el primer periodo posterior a la fecha de emisión del instrumento o a la fecha en que se liquidó el último cupón, es decir, 91 días.



Así la ecuación de valor del bondeT es

$$(P + I_{dev1})(1 + R_1)^{1-\frac{d}{91}} = C_1 + \sum_{j=2}^{K} [C_j(1 + R_j)^{-(j-1)}] + VN(1 + R_K)^{-(K-1)}$$

donde:

P =Precio limpio del bondeT (redondeado a 5 decimales)
I_{dev1} =Intereses devengados durante el periodo 1
d =Número de días transcurridos del cupón vigente.
VN =Valor nominal
C_j =Cupón j

$$C_j = VN(TC_j)\left(\frac{N_j}{360}\right) = VN(TC_j)\left(\frac{91}{360}\right)$$

TC_j =Tasa de interés anual del cupón j
N_j =Plazo en días del cupón, en este caso 91
K =Número de cupones por liquidar, incluyendo el vigente
R_j =Tasa interna de retorno esperada para el cupón j

$$R_j = (r_j + s_j)\left(\frac{N_j}{360}\right) = (r_j + s_j)\left(\frac{91}{360}\right)$$

r_j =Tasa de interés relevante para descontar el cupón j
s_j =Sobretasa asociada al cupón j

En la ecuación de valor del bondeT se debe notar que cuando j=1, se conocen los valores TC_1, r_1 y s_1 del primer periodo, se desea valuar la ecuación del bondeT es necesario estimar los valores de TC_j, r_j y s_j para j = 2,3,...,K. Una estimación sencilla es asignar valores fijos TC, r y s, además suponiendo que la tasa de cupones futuros es igual a la tasa que descuenta los flujos (TC=r)

$$\Rightarrow (P + I_{dev1})(1 + R_1)^{1-\frac{d}{91}} = C_1 + \sum_{j=2}^{K} [C(1 + R)^{-(j-1)}] + VN(1 + R)^{-(K-1)}$$

$$\Rightarrow (P + I_{dev1})(1 + R_1)^{1-\frac{d}{91}} = C_1 + Ca_{K-1|R} + VN(1 + R)^{-(K-1)}$$

Despejando P de la ecuación anterior, se tiene que la fórmula para el precio limpio o el precio de asignación de la subasta es:

$$P = \frac{C_1 + Ca_{K-1|R} + VN(1 + R)^{-(K-1)}}{(1 + R_1)^{1-\frac{d}{91}}} - I_{dev1} \qquad (4.9)$$

Nota: El precio limpio del bondeT es el precio de asignación en la subasta, es el precio que propone el inversionista en su solicitud por cada título que esta dispuesto a comprar. Una vez que el inversionista recibe la asignación a dicha postura, d días después de la emisión del bondeT, tendrá que pagar:

$$P_{BONDET} + I_{dev} \qquad (4.10)$$

Bonos de Desarrollo del Gobierno Federal Denominados en Unidades de Inversión

Descripción de los títulos

Nombre:
Bonos de Desarrollo del Gobierno Federal denominados en Unidades de Inversión (UDIBONOS).

Valor nominal:
100 UDIS (cien Unidades de Inversión).

Plazo:
Se pueden emitir a cualquier plazo siempre y cuando sea múltiplo de 182 días.

Periodo de interés:
Los títulos devengan intereses en UDIS cada seis meses, es decir, cada 182 días o al plazo que sustituya a éste en caso de días inhábiles.

Tasa de interés:
La tasa de interés que pagan estos títulos es fijada por el Gobierno Federal en la emisión de la serie y es dada a conocer al público inversionista en la Convocatoria a la Subasta de Valores Gubernamentales.

Pago de intereses:
Los intereses se calculan considerando los días efectivamente transcurridos entre las fechas de pago de los mismos, tomando como base años de 360 días, y se liquidan al finalizar cada uno de los períodos de interés.

$$I_j = VN(TC)\left(\frac{N_j}{360}\right) \tag{4.11}$$

donde:

I_j =Interés por pagar al final del periodo j
VN =Valor nominal del título en unidades de inversión
TC =Tasa de interés anual del cupón j
N_j =Plazo en días del cupón j, en este caso de 182 días

Las posturas que los participantes presentan en la subasta de estos instrumentos esta denominada en unidades de inversión.

Se debe notar que en ocasiones el Gobierno Federal ofrece en las subastas primarias títulos emitidos con anterioridad a su fecha de colocación. En estos casos, las subastas se realizan a precio limpio (sin intereses devengados), por lo que para liquidar estos títulos, se tiene que sumar al precio de asignación resultante en la subasta los intereses devengados del cupón vigente de acuerdo a la siguiente fórmula:

$$I_{devj} = VN(TC)\left(\frac{d}{360}\right) \tag{4.12}$$

donde:

I_{devj} =Intereses devengados durante el periodo j (redondeados a 12 decimales y en unidades de inversión)

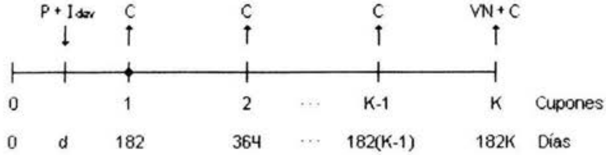
d =Días transcurridos entre la fecha de emisión o el último pago de los intereses (j –1), según corresponda a la fecha de valuación.

Conversión a moneda nacional:
Para efectos de la colocación, pago de intereses y amortización, la conversión a moneda nacional se realiza al valor de la UDI vigente el día en que se hacen las liquidaciones correspondientes.

Identificación de los títulos:
La clave de identificación de la emisión está constituida por ocho caracteres, el primero para identificar el título ("S"), el segundo para el plazo en años de la emisión, y los seis restantes para indicar su fecha de vencimiento (año,mes,día).

Valuación de los udibonos

Se desea obtener el precio limpio del udibono, para ello se requiere de una ecuación de valor cuyo lado izquierdo represente el valor actual del precio limpio y el valor actual de los intereses devengados (estos intereses se consideran d días después de la fecha de emisión del instrumento o del último cupón pagado), y el lado derecho represente el valor presente de los cupones que faltan de liquidar y el valor presente del valor nominal del instrumento, considerando como fecha focal el primer periodo posterior a la fecha de emisión del instrumento o a la fecha en que se liquidó el último cupón, es decir, 182 días.



Así la ecuación de valor del udibono es

$$(P + I_{dev})(1 + R)^{1-\frac{d}{182}} = C + Ca_{\overline{K-1|}\,R} + VN(1 + R)^{-(K-1)}$$

donde:

P =Precio limpio del udibono (redondeado a 5 decimales)
I_{dev} =Intereses devengados durante el periodo j
d =Número de días transcurridos del cupón vigente.
VN =Valor nominal
C_j=C=Cupón j

$$C = VN(TC)\left(\frac{N_j}{360}\right) = VN(TC)\left(\frac{182}{360}\right)$$

TC =Tasa de interés anual del cupón j
N_j =Plazo en días del cupón, en este caso 182
K =Número de cupones por liquidar, incluyendo el vigente
R =Rendimiento efectivo por periodo

$$R = r\left(\frac{N_j}{360}\right) = r\left(\frac{182}{360}\right)$$

r =Rendimiento a vencimiento anual.

Despejando P de la ecuación anterior, se tiene que la fórmula para el precio limpio o el precio de asignación de la subasta es:

$$P = \frac{C + Co_{\overline{K-1|}R} + VN(1+R)^{-(K-1)}}{(1+R)^{1-\frac{d}{182}}} - I_{dev} \tag{4.13}$$

Nota: El precio limpio del udibono es el precio de asignación en la subasta, es el precio que propone el inversionista en su solicitud por cada título que esta dispuesto a comprar. Una vez que el inversionista recibe la asignación a dicha postura, d días después de la emisión del udibono, tendrá que pagar:

$$P_{UDIBONO} + I_{dev} \tag{4.14}$$

Bonos de Regulación Monetaria del Banco de México (BREMS)

Descripción de los títulos

Nombre:
Bonos de Regulación Monetaria del Banco de México (BREMS).

Valor nominal:
$100.00 (cien pesos)

Plazo:
Se pueden emitir a cualquier plazo siempre y cuando sea múltiplo de 28 días.

Periodo de interés:
Los títulos devengan intereses en pesos cada mes, es decir, 28 días o al plazo que sustituya a éste en caso de días inhábiles.

Tasa de interés:
Para cada periodo de interés, se aplicará la tasa que resulte de la siguiente fórmula:

$$TC_j = \left[\prod_{x=1}^{N_j}\left(1 + \frac{r_x}{360}\right) - 1\right]\frac{360}{N_j}$$

donde:

TC_j =Tasa de interés anual del cupón j
N_j =Plazo en días del cupón j, en este caso de 28 días

r_x =Tasa ponderada de fondeo de títulos bancarios, correspondiente al día x. Con esta tasa las instituciones de crédito realizan las operaciones de compra-venta y reporto a plazo de un día hábil con títulos bancarios. Esta tasa la calcula diariamente el Banco de México y la da a conocer a través de su página electrónica. En caso de día inhábil, se utilizará la tasa que se dio a conocer el día hábil inmediato anterior

Pago de intereses:
Los intereses se calculan considerando los días efectivamente transcurridos entre las fechas de pago de los mismos, tomando como base años de 360 días, y se liquidan al finalizar cada uno de los períodos de interés.

$$I_j = VN(TC_j)\left(\frac{N_j}{360}\right)$$

donde:

I_j =Interés por pagar al final del periodo j
VN =Valor nominal del título en pesos
TC_j =Tasa de interés anual del cupón j
N_j =Plazo en días del cupón j, en este caso de 28 días

Se debe notar que en ocasiones el Gobierno Federal ofrece en las subastas títulos emitidos con anterioridad a su fecha de colocación. En estos casos, las subastas se realizan a precio limpio (sin intereses devengados), por lo que para liquidar estos títulos, se tiene que sumar al precio de asignación en la subasta los intereses devengados del cupón vigente de acuerdo a la siguiente fórmula:

$$I_{dev\,j} = VN(TC_{dev})\left(\frac{d}{360}\right)$$

donde:

I_{devj} =Intereses devengados durante el periodo j.
d =Días transcurridos entre la fecha de emisión o el último pago de los intereses (j −1), según corresponda a la fecha de valuación.
TC_{dev}= Tasa de interés anual devengada, la cual se calcula de acuerdo a la siguiente fórmula:

$$TC_{dev} = \left[\prod_{x=1}^{d} \left(1 + \frac{r_x}{360} \right) - 1 \right] \frac{360}{d}$$

donde:

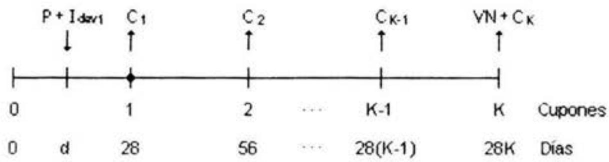
d =Días transcurridos entre la fecha de emisión o el último pago de los intereses (j −1), según corresponda a la fecha de valuación.

r_x =Tasa ponderada de fondeo de títulos bancarios, correspondiente al día x. Con esta tasa las instituciones de crédito realizan las operaciones de compra-venta y reporto a plazo de un día hábil con títulos bancarios. Esta tasa la calcula diariamente el Banco de México y la da a conocer a través de su página electrónica. En caso de día inhábil, se utilizará la tasa que se dio a conocer el día hábil inmediato anterior.

Identificación de los títulos:
La clave de identificación de la emisión está constituida por ocho caracteres, los primeros dos para identificar el título ("XA"), y los seis restantes para indicar su fecha de vencimiento (año,mes,día).

Valuación de los Brems

Se desea obtener el precio limpio del brem, para ello se requiere de una ecuación de valor cuyo lado izquierdo represente el valor actual del precio limpio y el valor actual de los intereses devengados (estos intereses se consideran d días después de la fecha de emisión del instrumento o del último cupón pagado), y el lado derecho represente el valor presente de los cupones que faltan de liquidar y el valor presente del valor nominal del instrumento, considerando como fecha focal el primer periodo posterior a la fecha de emisión del instrumento o a la fecha en que se liquidó el último cupón, es decir, 28 días.



Así la ecuación de valor del brem es

$$(P + I_{dev1})(1 + R_1)^{1-\frac{d}{28}} = C_1 + \sum_{j=2}^{K} [C_j(1 + R_j)^{-(j-1)}] + VN(1 + R_K)^{-(K-1)}$$

donde:

P =Precio limpio del brem (redondeado a 5 decimales)
I_{dev1} =Intereses devengados durante el periodo 1
d =Número de días transcurridos del cupón vigente.
VN =Valor nominal
C_j =Cupón j

$$C_j = VN(TC_j)\left(\frac{N_j}{360}\right) = VN(TC_j)\left(\frac{28}{360}\right)$$

TC_j =Tasa de interés anual del cupón j

$$TC_j = \left[\prod_{x=1}^{N_j}\left(1 + \frac{r_x}{360}\right) - 1\right]\frac{360}{N_j} \qquad \text{para } j = 2, 3, \ldots, K$$

$$\left[\left(1 + TC_{dev}\left(\frac{d}{360}\right)\right)\left(1 + \frac{r}{360}\right)^{28-d} - 1\right]\left(\frac{360}{28}\right) \quad \text{para } j = 1$$

r_x =Tasa ponderada de fondeo de títulos bancarios, correspondiente al día x.
r =Tasa ponderada de fondeo bancario publicada el día hábil anterior a la fecha de valuación.
N_j =Plazo en días del cupón, en este caso 28
K =Número de cupones por liquidar, incluyendo el vigente
R_j =Tasa interna de retorno esperada para el cupón j

$$R_j = (r_j + s_j)\left(\frac{N_j}{360}\right) = (r_j + s_j)\left(\frac{28}{360}\right)$$

r_j =Tasa de interés relevante para descontar el cupón j (tasa ponderada)
s_j =Sobretasa asociada al cupón j

En la ecuación de valor del brem se debe notar que cuando j=1, se conocen los valores TC_1, r_1 y s_1 del primer periodo, si se desea valuar la ecuación del brem es necesario estimar los valores de TC_j, r_j y s_j para $j = 2,3,\ldots,K$. Una estimación sencilla es asignar valores fijos TC, r y s, además suponiendo que la tasa de cupones futuros es igual a la tasa que descuenta los flujos (TC=r)

$$\Rightarrow (P + I_{dev1})(1 + R_1)^{1-\frac{d}{28}} = C_1 + \sum_{j=2}^{K} [C(1 + R)^{-(j-1)}] + VN(1 + R)^{-(K-1)}$$

$$\Rightarrow (P + I_{dev1})(1 + R_1)^{1-\frac{d}{28}} = C_1 + Ca_{\overline{K-1}|R} + VN(1 + R)^{-(K-1)}$$

Despejando P de la ecuación anterior, se tiene que la fórmula para el precio limpio o el precio de asignación de la subasta es:

$$P = \frac{C_1 + Ca_{\overline{K-1}|R} + VN(1 + R)^{-(K-1)}}{(1 + R_1)^{1-\frac{d}{28}}} - I_{dev1} \tag{4.15}$$

donde:

C_1 =Monto esperado del pago de interés actual

$$C_1 = VN(TC_1)\left(\frac{N_1}{360}\right) = VN(TC_1)\left(\frac{28}{360}\right)$$

TC_1 =Tasa anual esperada para el siguiente pago de intereses

$$TC_1 = \left[\left(1 + TC_{dev}\left(\frac{d}{360}\right)\right)\left(1 + \frac{r}{360}\right)^{28-d} - 1\right]\left(\frac{360}{28}\right)$$

r =Tasa ponderada de fondeo bancario publicada el día hábil anterior a la fecha de valuación.

C =Monto esperado pagos de intereses $j=1,2,\ldots,K$

$$C = VN(TC)\left(\frac{28}{360}\right)$$

TC =Tasa anual esperada para los pagos de intereses 2,3,..., K

$$TC = \left[\left(1+\frac{r}{360}\right)^{28}-1\right]\left(\frac{360}{28}\right)$$

R =Tasa de interés efectiva para descontar los flujos

$$R = \left[\left(1+\frac{r+s}{360}\right)^{28}-1\right]$$

s =Sobretasa

Nota: El precio limpio del brem es el precio de asignación en la subasta, es el precio que propone el inversionista en su solicitud por cada título que esta dispuesto a comprar. Una vez que el inversionista recibe la asignación a dicha postura, d días después de la emisión del brem, tendrá que pagar:

$$P_{BREM} + I_{dev} \qquad (4.16)$$

CONCLUSIONES

El estudio de las matemáticas financieras es indispensable para el desarrollo de nuevos instrumentos financieros que activen la economía de un país, así como el poder comparar las distintas tasas que ofrecen los mercados y sacar la mejor opción de inversión dependiendo de las necesidades que tengan los prestamistas y prestatarios que deseen invertir en el mercado. Por esta razón surge la necesidad de generar nuevos instrumentos con la finalidad de medir el riesgo implícito dentro de la inversión. Entre los nuevos productos financieros que se están contemplando actualmente en el mercado mexicano se encuentran los híbridos, como ejemplo se tienen los seguros de vida, que además de cubrir el riesgo por muerte generan un fondo que se entregará al asegurado bajo ciertas condiciones.

Los prestamistas buscan invertir sus capitales en países del tercer mundo, ya que sus tasas de interés brindan altos rendimientos. Además desean destinar sus capitales en naciones cuyas políticas económicas no sean demasiado estrictas; como en el caso de Brasil y Chile, países cuyas economías están muy reguladas por el FMI de manera que existen documentos legales que obligan a los prestamistas a invertir sus capitales durante cierto tiempo y no poder retirar los mismos hasta fechas específicas. En el caso de México no existe ningún documento que obligue a los inversionistas a permanecer participando dentro del mercado nacional durante cierto periodo, adicionando que los instrumentos gubernamentales ofrecen altos rendimientos; por esta razón muchos prestatarios invierten sus capitales en nuestro mercado nacional.

En México, las tasas de rendimiento de los instrumentos gubernamentales han ido disminuyendo, esta tendencia se ha presentando con el propósito de que los inversionistas nacionales y extranjeros inviertan su capital en la creación de micro-medianas empresas, con el fin de generar nuevos empleos a nivel nacional. El gobierno federal atrae a los inversionistas mediante altos rendimientos que los mismos instrumentos brindan, pero en éste momento el gobierno necesita que se produzcan empleos. Debido a esto han decrecido las tasas de ahorro y como consecuencia se ha reducido el número de ahorradores.

El crecimiento económico de nuestro país se refleja a nivel macroeconómico, ya que internacionalmente nuestra economía es sólida, a pesar de que a nivel microeconómico México muestre un estancamiento en su economía nacional. Al ver que la mayoría de la población sólo consumía artículos de primera necesidad, los grupos financieros se vieron obligados a otorgar créditos de bajos intereses con el objetivo de que la población consuma los artículos superfluos.

Los acontecimientos del 11 de septiembre de 2001 en la ciudad de Nueva York, afectaron la economía estadounidense de tal forma que el dólar se devaluó por cierto periodo. No obstante, el mercado de bonos gubernamentales estadounidense ha permanecido siendo el que conserva la mayor parte de la cartera de inversionistas en bonos a nivel internacional.

BIBLIOGRAFÍA

- **Barron's dictionary of finance and investment terms**
  Editorial Barron
- **Bond markets analysis and strategies**
  Frank J. Fabozzi
  Editorial Prentice Hall
- **Business spanish dictionary**
  Editorial Peter Colling Publishing
- **Diccionario bilingüe de economía y empresa**
  Editorial Trillas
- **Diccionario de finanzas**
  Andrés Cué Vega
  Editorial Banca y Comercio S.A.
- **Diccionario de términos financieros nacionales e internacionales**
  Arturo Morales Castro
  Editorial Pacífico, S.A. de C.V.
- **El mercado de valores**
  Nacional financiera
- **Financiación internacional**
  Blas Corbi Saenz
  Editorial AC
  Madrid 1991
- **Inversión en la globalización**
  Timothy Heyman
  Editorial Milenio, S.A. de C.V.
- **Las nuevas finanzas en México**
  Catherine Mansell Carstens
- **Los instrumentos de inversión**
  Enrique Núñez Escudero
  Editorial Shirebrook Commodities

- **Matemáticas financieras**
  Robert Cisell
  Compañía Editorial Continental, S.A. de C.V. México

- **Mercado de capitales**
  Ana Verchik
  Ediciones Macchi
  Buenos Aires-Argentina

- **Money and capital markets**
  Peter S. Rose
  Editorial Mc Graw Hill Higher Education

- **Programa de valuación de los instrumentos de inversión del mercado mexicano de valores**
  CNBV

- **The theory of interest**
  Stepen G. Kellison
  Editorial McGraw-Hill

- **Valuación y medición de riesgo para los bonos de desarrollo en el mercado mexicano**
  CNBV
  Jesús Tarriba Unger

- http\www.bankofengland.co.uk

- http\www.banxico.gob.mx

- http\www.cnbv.gob.mx

- http\www.cnsf.gob.mx

- http\www.elfinanciero.com

- http\www.financefixit.com

- http\www.giddy.org

- http\www.micex.com

- http\www.mizuho-sc.com
- http\www.shcp.gob.mx
- http\www.valmer.com
- http\www.wetsweater.com

APÉNDICE A

A.1 CÁLCULO DE LOS BONOS CUPON CERO

Los elementos de los bonos cupón cero son los siguientes:

- ***Valor nominal:*** Es el valor estipulado en el instrumento.
- ***Precio:*** Es el valor del instrumento expresado como un porcentaje de su valor nominal.
- ***Descuento:*** Es la diferencia que existe entre el valor nominal o el precio de venta y el precio de compra. Es el interés que el emisor paga al principio sobre el valor nominal al vencimiento.
- ***Tasa efectiva de descuento:*** Es la razón que existe entre el descuento y el valor nominal durante el plazo.
- ***Tasa nominal de descuento:*** Es la tasa de descuento que se maneja en el mercado de valores. Es el resultado de multiplicar la tasa efectiva de descuento por el inverso de la razón entre los días por vencer y los 360 días.
- ***Días por vencer:*** Es el número de días que faltan para que el instrumento venza y el emisor pague el valor nominal al acreedor.

Para poder analizar y calcular los elementos de los bonos cupón cero se utilizan las siguientes fórmulas:

VN: Representa el valor nominal.
P: Representa el precio.
D: Representa el descuento.
d: Representa la tasa efectiva de descuento.
TD: Representa la tasa nominal de descuento.
n: Representa los días que le falta al instrumento para vencer.

Suponiendo ser poseedores del instrumento en el mercado primario, entonces se conoce su valor nominal, su precio inicial y los días que le falta al instrumento por vencer.

Si se desea conocer cuánto vale el descuento de este instrumento, se obtiene con la siguiente fórmula:

$$D = VN - P \qquad (a.1)$$

En general, el acreedor que invierte en un instrumento no siempre lo conserva hasta el vencimiento ya que existen otros instrumentos en el mercado que ofrecen mejores rendimientos. Para verificar el rendimiento que tiene un instrumento es necesario conocer de antemano su tasa de descuento.

La fórmula para la tasa efectiva de descuento es:

$$d = \frac{\text{D}}{\text{VN}} \tag{a.2}$$

La fórmula para la tasa nominal de descuento es:

$$\text{TD} = d\left(\frac{\text{n}}{360}\right)^{-1} \tag{a.3}$$

Pero la tasa nominal de descuento también se puede expresar en términos del valor nominal y el precio, si se sustituye la fórmula (a.2) en la fórmula (a.3) se tiene

$$\text{TD} = \frac{\text{D}}{\text{VN}}\left(\frac{360}{\text{n}}\right) = \frac{\text{VN} - \text{P}}{\text{VN}}\left(\frac{360}{\text{n}}\right)$$

Entonces

$$\text{TD} = \frac{\text{VN} - \text{P}}{\text{VN}}\left(\frac{360}{\text{n}}\right) \tag{a.4}$$

Cuando el acreedor no desea seguir conservando el instrumento hasta su vencimiento, necesita conocer el precio al que va a vender el instrumento.

Como se sabe, el precio es un porcentaje del valor nominal, donde α es el factor que multiplica al valor nominal, es decir

$$\text{P} = \alpha\,\text{VN} \tag{a.5}$$

Pero el valor de α es variable, ya que el precio del instrumento cambia conforme transcurre el tiempo.

Despejando el precio en la fórmula (a.1) y sustituyéndolo en la fórmula (a.5) se tiene que

$$P = VN - D = \alpha VN,$$
$$\Rightarrow \alpha = \frac{VN - D}{VN} = 1 - \frac{D}{VN}$$
Pero
$$D = d(VN),$$
$$\Rightarrow \alpha = 1 - d$$

Como $v = 1 - d$

Entonces el precio del instrumento puede interpretarse como el valor presente del valor nominal.

Utilizando la tasa efectiva de descuento se tiene:

$$P = VN(1 - d) \tag{a.6}$$

Utilizando la tasa nominal de descuento se tiene:

$$P = VN\left[1 - TD\left(\frac{n}{360}\right)\right] \tag{a.7}$$

A.2 CÁLCULO DE TASAS DE RENDIMIENTO PARA BONOS CUPÓN CERO

La ***tasa de rendimiento*** es la tasa de interés a través de la cual el valor presente de los retiros de la inversión es igual al valor presente de las contribuciones de la inversión.

En el caso de los bonos cupón cero, el retiro representa al valor nominal y la contribución representa al precio del instrumento (desde el punto de vista del emisor).

Si se valúa el instrumento en el momento en que se compra en el mercado primario, se tiene que el valor presente del retiro de la inversión es el valor presente del valor nominal y el valor presente de la contribución de la inversión es el precio de compra original del instrumento. De tal forma que

$$P = VNv = VN(1 + r)^{-1} = VN\left[1 + TR\left(\frac{n}{360}\right)\right]^{-1}$$

donde r es la tasa efectiva de rendimiento y TR es la tasa nominal de rendimiento.

Despejando las tasas de rendimiento en términos del valor nominal y el precio se tiene que:

La tasa efectiva de rendimiento es

$$r = \frac{VN}{P} - 1 = \frac{VN - P}{P} \tag{a.8}$$

Como la tasa nominal de rendimiento es la tasa de rendimiento que se maneja en el mercado de valores. Es el resultado de multiplicar la tasa efectiva de rendimiento por el inverso de la razón entre los días por vencer y los 360 días.

Es decir:

$$TR = r\left(\frac{n}{360}\right)^{-1}$$

$$\Rightarrow r = TR\left(\frac{n}{360}\right)$$

Sustituyendo el valor anterior de r en la fórmula (a.8) produce

$$TR\left(\frac{n}{360}\right) = \frac{VN}{P} - 1 = \frac{VN - P}{P}$$

Así la tasa nominal de rendimiento es

$$TR = \left(\frac{VN}{P} - 1\right)\left(\frac{360}{n}\right) = \left(\frac{VN - P}{P}\right)\left(\frac{360}{n}\right) \tag{a.9}$$

La ***utilidad*** de un instrumento representa el descuento del instrumento, por lo cual está en función de la diferencia que existe entre el valor nominal del instrumento y el precio de compra o el precio de venta del instrumento.

$$\text{Utilidad} = VN - P \tag{a.10}$$

La tasa efectiva de rendimiento en términos de la utilidad es

$$r = \frac{\text{Utilidad}}{\text{P}} \tag{a.11}$$

La tasa nominal de rendimiento en términos de la utilidad es

$$\text{TR} = \frac{\text{Utilidad}}{\text{P}}\left(\frac{360}{\text{n}}\right) \tag{a.12}$$

Ahora, se encuentra una igualdad entre las tasas de rendimiento y las tasas de descuento.

Se sabe por la fórmula (a.6) que el precio del instrumento es el valor presente del valor nominal, entonces

$$\text{P} = \text{VN}(1-d) = \text{VN}(1+r)^{-1}$$
$$\Rightarrow 1-d = \frac{1}{1+r}$$

Por un lado despejando r se tiene que

$$\text{r} = \frac{1}{1-d} - 1 = \frac{d}{1-d}$$

Por otro lado despejando d se tiene que

$$d = 1 - \frac{1}{1+r} = \frac{r}{1+r}$$

De esta manera, la fórmula que expresa la tasa efectiva de rendimiento en términos de la tasa efectiva de descuento es

$$r = \frac{d}{1-d} \tag{a.13}$$

De esta manera, la fórmula que expresa la tasa efectiva de descuento en términos de la tasa efectiva de rendimiento es

$$d = \frac{r}{1+r} \tag{a.14}$$

Análogamente se puede expresar la tasa nominal de rendimiento en términos de la tasa nominal de descuento y viceversa.

Se sabe que

$$r = \mathrm{TR}\left(\frac{n}{360}\right)$$

y que

$$d = \mathrm{TD}\left(\frac{n}{360}\right)$$

Por un lado

$$\mathrm{TR}\left(\frac{n}{360}\right) = \frac{\mathrm{TD}\left(\frac{n}{360}\right)}{1 - \mathrm{TD}\left(\frac{n}{360}\right)} = \frac{\mathrm{TD}}{1 - \mathrm{TD}\left(\frac{n}{360}\right)}\left(\frac{n}{360}\right),$$

$$\Rightarrow \mathrm{TR} = \frac{\mathrm{TD}}{1 - \mathrm{TD}\left(\frac{n}{360}\right)}$$

Por otro lado

$$\mathrm{TD}\left(\frac{n}{360}\right) = \frac{\mathrm{TR}\left(\frac{n}{360}\right)}{1 + \mathrm{TR}\left(\frac{n}{360}\right)} = \frac{\mathrm{TR}}{1 - \mathrm{TR}\left(\frac{n}{360}\right)}\left(\frac{n}{360}\right),$$

$$\Rightarrow \mathrm{TD} = \frac{\mathrm{TR}}{1 + \mathrm{TR}\left(\frac{n}{360}\right)}$$

Así, la fórmula que expresa la tasa nominal de rendimiento en términos de la tasa nominal de descuento es

$$\mathrm{TR} = \frac{\mathrm{TD}}{1 - \mathrm{TD}\left(\frac{n}{360}\right)} \qquad \text{(a.15)}$$

De forma semejante, la fórmula que expresa la tasa nominal de descuento en términos de la tasa nominal de rendimiento es

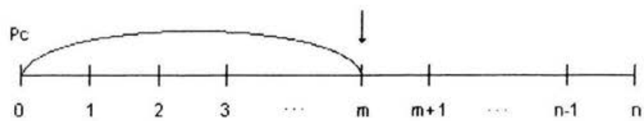
$$\mathrm{TD} = \frac{\mathrm{TR}}{1 + \mathrm{TR}\left(\frac{n}{360}\right)} \qquad \text{(a.16)}$$

A.3 CÁLCULO DE LA TASA EQUIVALENTE PARA BONOS CUPÓN CERO

La ***tasa equivalente*** es la tasa a través de la cual se pueden comparar varias opciones de inversión a plazo diferente.

Al suponer la adquisición de un instrumento que tiene un precio de *compra* P_c, una tasa efectiva de rendimiento r a un plazo de n días.
Después de m días se desea evaluar que rendimiento ha producido el instrumento y si conviene o no seguir conservándolo hasta el vencimiento. Por esta razón se necesita calcular una tasa equivalente efectiva.

Primero se observa el diagrama de tiempo, donde m < n:



Para encontrar el valor de la tasa equivalente efectiva en el momento m se necesita realizar una ecuación de valor, donde ϵ representa la tasa equivalente efectiva y TE representa la tasa equivalente nominal.

Así

$$P_c(1+\epsilon) = P_c(1+r)^{\frac{m}{n}}$$
$$\Rightarrow 1+\epsilon = (1+r)^{\frac{m}{n}}$$

De esta manera la fórmula de la tasa equivalente efectiva en términos de la tasa efectiva de rendimiento es

$$\epsilon = (1+r)^{\frac{m}{n}} - 1 \qquad \text{(a.17)}$$

Ahora la tasa equivalente efectiva y la tasa efectiva de rendimiento se pueden expresar en términos de la tasa equivalente nominal y la tasa nominal de rendimiento, respectivamente, es decir:

$$\epsilon = TE\left(\frac{m}{360}\right)$$

$$r = \mathrm{TR}\left(\frac{n}{360}\right)$$

Sustituyendo las dos fórmulas anteriores en la fórmula (a.17) se tiene que

$$\mathrm{TE}\left(\frac{m}{360}\right) = \left[1 + \mathrm{TR}\left(\frac{n}{360}\right)\right]^{\frac{m}{n}} - 1$$

Así se puede expresar una tasa equivalente nominal TE en términos de una tasa nominal de rendimiento TR:

$$\mathrm{TE} = \left\{\left[1 + \mathrm{TR}\left(\frac{n}{360}\right)\right]^{\frac{m}{n}} - 1\right\}\left(\frac{360}{m}\right) \qquad \text{(a.18)}$$

APÉNDICE B

TABLAS DE INTERÉS

TABLAS DE INTERÉS $i = 0.5\%$

Función	Valor
i	0.005000
$i^{(2)}$	0.004994
$i^{(3)}$	0.004992
$i^{(4)}$	0.004991
$i^{(6)}$	0.004990
$i^{(12)}$	0.004989
d	0.004975
$d^{(2)}$	0.004981
$d^{(3)}$	0.004983
$d^{(4)}$	0.004984
$d^{(6)}$	0.004985
$d^{(12)}$	0.004987
δ	0.004988
$(1+i)$	1.005000
$(1+i)^{1/2}$	1.002497
$(1+i)^{1/3}$	1.001664
$(1+i)^{1/4}$	1.001248
$(1+i)^{1/6}$	1.000832
$(1+i)^{1/12}$	1.000416
$(1-d)$	0.995025
$(1-d)^{1/2}$	0.997509
$(1-d)^{1/3}$	0.998339
$(1-d)^{1/4}$	0.998754
$(1-d)^{1/6}$	0.999169
$(1-d)^{1/12}$	0.999584

n	v^n	$(1+i)^n$	$a_{\overline{n}\rvert}$	$s_{\overline{n}\rvert}$	$1/s_{\overline{n}\rvert}$
1	0.995025	1.005000	0.9950	1.0000	1.000000
2	0.990075	1.010025	1.9851	2.0050	0.498753
3	0.985149	1.015075	2.9702	3.0150	0.331672
4	0.980248	1.020151	3.9505	4.0301	0.248133
5	0.975371	1.025251	4.9259	5.0503	0.198010
6	0.970518	1.030378	5.8964	6.0755	0.164595
7	0.965690	1.035529	6.8621	7.1059	0.140729
8	0.960885	1.040707	7.8230	8.1414	0.122829
9	0.956105	1.045911	8.7791	9.1821	0.108907
10	0.951348	1.051140	9.7304	10.2280	0.097771
11	0.946615	1.056396	10.6770	11.2792	0.088659
12	0.941905	1.061678	11.6189	12.3356	0.081066
13	0.937219	1.066986	12.5562	13.3972	0.074642
14	0.932556	1.072321	13.4887	14.4642	0.069136
15	0.927917	1.077683	14.4166	15.5365	0.064364
16	0.923300	1.083071	15.3399	16.6142	0.060189
17	0.918707	1.088487	16.2586	17.6973	0.056506
18	0.914136	1.093929	17.1728	18.7858	0.053232
19	0.909588	1.099399	18.0824	19.8797	0.050303
20	0.905063	1.104896	18.9874	20.9791	0.047666
21	0.900560	1.110420	19.8880	22.0840	0.045282
22	0.896080	1.115972	20.7841	23.1944	0.043114
23	0.891622	1.121552	21.6757	24.3104	0.041135
24	0.887186	1.127160	22.5629	25.4320	0.039321
25	0.882772	1.132796	23.4456	26.5591	0.037652
26	0.878380	1.138460	24.3240	27.6919	0.036112
27	0.874010	1.144152	25.1980	28.8304	0.034686
28	0.869662	1.149873	26.0677	29.9745	0.033362
29	0.865335	1.155622	26.9330	31.1244	0.032129
30	0.861030	1.161400	27.7941	32.2800	0.030979
31	0.856746	1.167207	28.6508	33.4414	0.029903
32	0.852484	1.173043	29.5033	34.6086	0.028895
33	0.848242	1.178908	30.3515	35.7817	0.027947
34	0.844022	1.184803	31.1955	36.9606	0.027056
35	0.839823	1.190727	32.0354	38.1454	0.026215
36	0.835645	1.196681	32.8710	39.3361	0.025422
37	0.831487	1.202664	33.7025	40.5328	0.024671
38	0.827351	1.208677	34.5299	41.7354	0.023960
39	0.823235	1.214721	35.3531	42.9441	0.023286
40	0.819139	1.220794	36.1722	44.1588	0.022646
41	0.815064	1.226898	36.9873	45.3796	0.022036
42	0.811009	1.233033	37.7983	46.6065	0.021456
43	0.806974	1.239198	38.6053	47.8396	0.020903
44	0.802959	1.245394	39.4082	49.0788	0.020375
45	0.798964	1.251621	40.2072	50.3242	0.019871
46	0.794989	1.257879	41.0022	51.5758	0.019389
47	0.791034	1.264168	41.7932	52.8337	0.018927
48	0.787098	1.270489	42.5803	54.0978	0.018485
49	0.783182	1.276842	43.3635	55.3683	0.018061
50	0.779286	1.283226	44.1428	56.6452	0.017654

TABLAS DE INTERÉS $i = 1.0\%$

Función	Valor
i	0.010000
$i^{(2)}$	0.009975
$i^{(3)}$	0.009967
$i^{(4)}$	0.009963
$i^{(6)}$	0.009959
$i^{(12)}$	0.009954
d	0.009901
$d^{(2)}$	0.009926
$d^{(3)}$	0.009934
$d^{(4)}$	0.009938
$d^{(6)}$	0.009942
$d^{(12)}$	0.009946
δ	0.009950
$(1+i)$	1.010000
$(1+i)^{1/2}$	1.004988
$(1+i)^{1/3}$	1.003322
$(1+i)^{1/4}$	1.002491
$(1+i)^{1/6}$	1.001660
$(1+i)^{1/12}$	1.000830
$(1-d)$	0.990099
$(1-d)^{1/2}$	0.995037
$(1-d)^{1/3}$	0.996689
$(1-d)^{1/4}$	0.997516
$(1-d)^{1/6}$	0.998343
$(1-d)^{1/12}$	0.999171

n	v^n	$(1+i)^n$	$a_{\overline{n}\mid}$	$s_{\overline{n}\mid}$	$1/s_{\overline{n}\mid}$
1	0.990099	1.010000	0.990099	1.000000	1.000000
2	0.980296	1.020100	1.970395	2.010000	0.497512
3	0.970590	1.030301	2.940985	3.030100	0.330022
4	0.960980	1.040604	3.901966	4.060401	0.246281
5	0.951466	1.051010	4.853431	5.101005	0.196040
6	0.942045	1.061520	5.795476	6.152015	0.162548
7	0.932718	1.072135	6.728195	7.213535	0.138628
8	0.923483	1.082857	7.651678	8.285671	0.120690
9	0.914340	1.093685	8.566018	9.368527	0.106740
10	0.905287	1.104622	9.471305	10.462213	0.095582
11	0.896324	1.115668	10.367628	11.566835	0.086454
12	0.887449	1.126825	11.255077	12.682503	0.078849
13	0.878663	1.138093	12.133740	13.809328	0.072415
14	0.869963	1.149474	13.003703	14.947421	0.066901
15	0.861349	1.160969	13.865053	16.096896	0.062124
16	0.852821	1.172579	14.717874	17.257864	0.057945
17	0.844377	1.184304	15.562251	18.430443	0.054258
18	0.836017	1.196147	16.398269	19.614748	0.050982
19	0.827740	1.208109	17.226008	20.810895	0.048052
20	0.819544	1.220190	18.045553	22.019004	0.045415
21	0.811430	1.232392	18.856983	23.239194	0.043031
22	0.803396	1.244716	19.660379	24.471586	0.040864
23	0.795442	1.257163	20.455821	25.716302	0.038886
24	0.787566	1.269735	21.243387	26.973465	0.037073
25	0.779768	1.282432	22.023156	28.243200	0.035407
26	0.772048	1.295256	22.795204	29.525631	0.033869
27	0.764404	1.308209	23.559608	30.820888	0.032446
28	0.756836	1.321291	24.316443	32.129097	0.031124
29	0.749342	1.334504	25.065785	33.450388	0.029895
30	0.741923	1.347849	25.807708	34.784892	0.028748
31	0.734577	1.361327	26.542285	36.132740	0.027676
32	0.727304	1.374941	27.269589	37.494068	0.026671
33	0.720103	1.388690	27.989693	38.869009	0.025727
34	**0.712973**	**1.402577**	**28.702666**	**40.257699**	**0.024840**
35	0.705914	1.416603	29.408580	41.660276	0.024004
36	0.698925	1.430769	30.107505	43.076878	0.023214
37	0.692005	1.445076	30.799510	44.507647	0.022468
38	0.685153	1.459527	31.484663	45.952724	0.021761
39	0.678370	1.474123	32.163033	47.412251	0.021092
40	0.671653	1.488864	32.834686	48.886373	0.020456
41	0.665003	1.503752	33.499689	50.375237	0.019851
42	0.658419	1.518790	34.158108	51.878989	0.019276
43	0.651900	1.533978	34.810008	53.397779	0.018727
44	0.645445	1.549318	35.455454	54.931757	0.018204
45	0.639055	1.564811	36.094508	56.481075	0.017705
46	0.632728	1.580459	36.727236	58.045885	0.017228
47	0.626463	1.596263	37.353699	59.626344	0.016771
48	0.620260	1.612226	37.973959	61.222608	0.016334
49	0.614119	1.628348	38.588079	62.834834	0.015915
50	0.608039	1.644632	39.196118	64.463182	0.015513

TABLAS DE INTERÉS $i = 1.5\%$

Función	Valor
i	0.015000
$i^{(2)}$	0.014944
$i^{(3)}$	0.014926
$i^{(4)}$	0.014916
$i^{(6)}$	0.014907
$i^{(12)}$	0.014898
d	0.014778
$d^{(2)}$	0.014833
$d^{(3)}$	0.014852
$d^{(4)}$	0.014861
$d^{(6)}$	0.014870
$d^{(12)}$	0.014879
δ	0.014889
$(1+i)$	1.015000
$(1+i)^{1/2}$	1.007472
$(1+i)^{1/3}$	1.004975
$(1+i)^{1/4}$	1.003729
$(1+i)^{1/6}$	1.002485
$(1+i)^{1/12}$	1.001241
$(1-d)$	0.985222
$(1-d)^{1/2}$	0.992583
$(1-d)^{1/3}$	0.995049
$(1-d)^{1/4}$	0.996285
$(1-d)^{1/6}$	0.997522
$(1-d)^{1/12}$	0.998760

n	v^n	$(1+i)^n$	$a_{\overline{n}\mid}$	$s_{\overline{n}\mid}$	$1/s_{\overline{n}\mid}$
1	0.985222	1.015000	0.985222	1.000000	1.000000
2	0.970662	1.030225	1.955883	2.015000	0.496278
3	0.956317	1.045678	2.912200	3.045225	0.328383
4	0.942184	1.061364	3.854385	4.090903	0.244445
5	0.928260	1.077284	4.782645	5.152267	0.194089
6	0.914542	1.093443	5.697187	6.229551	0.160525
7	0.901027	1.109845	6.598214	7.322994	0.136556
8	0.887711	1.126493	7.485925	8.432839	0.118584
9	0.874592	1.143390	8.360517	9.559332	0.104610
10	0.861667	1.160541	9.222185	10.702722	0.093434
11	0.848933	1.177949	10.071118	11.863262	0.084294
12	0.836387	1.195618	10.907505	13.041211	0.076680
13	0.824027	1.213552	11.731532	14.236830	0.070240
14	0.811849	1.231756	12.543382	15.450382	0.064723
15	0.799852	1.250232	13.343233	16.682138	0.059944
16	0.788031	1.268986	14.131264	17.932370	0.055765
17	0.776385	1.288020	14.907649	19.201355	0.052080
18	0.764912	1.307341	15.672561	20.489376	0.048806
19	0.753607	1.326951	16.426168	21.796716	0.045878
20	0.742470	1.346855	17.168639	23.123667	0.043246
21	0.731498	1.367058	17.900137	24.470522	0.040865
22	0.720688	1.387564	18.620824	25.837580	0.038703
23	0.710037	1.408377	19.330861	27.225144	0.036731
24	0.699544	1.429503	20.030405	28.633521	0.034924
25	0.689206	1.450945	20.719611	30.063024	0.033263
26	0.679021	1.472710	21.398632	31.513969	0.031732
27	0.668986	1.494800	22.067617	32.986678	0.030315
28	0.659099	1.517222	22.726717	34.481479	0.029001
29	0.649359	1.539981	23.376076	35.998701	0.027779
30	0.639762	1.563080	24.015838	37.538681	0.026639
31	0.630308	1.586526	24.646146	39.101762	0.025574
32	0.620993	1.610324	25.267139	40.688288	0.024577
33	0.611816	1.634479	25.878954	42.298612	0.023641
34	0.602774	1.658996	26.481728	43.933092	0.022762
35	0.593866	1.683881	27.075595	45.592088	0.021934
36	0.585090	1.709140	27.660684	47.275969	0.021152
37	0.576443	1.734777	28.237127	48.985109	0.020414
38	0.567924	1.760798	28.805052	50.719885	0.019716
39	0.559531	1.787210	29.364583	52.480684	0.019055
40	0.551262	1.814018	29.915845	54.267894	0.018427
41	0.543116	1.841229	30.458961	56.081912	0.017831
42	0.535089	1.868847	30.994050	57.923141	0.017264
43	0.527182	1.896880	31.521232	59.791988	0.016725
44	0.519391	1.925333	32.040622	61.688868	0.016210
45	0.511715	1.954213	32.552337	63.614201	0.015720
46	0.504153	1.983526	33.056490	65.568414	0.015251
47	0.496702	2.013279	33.553192	67.551940	0.014803
48	0.489362	2.043478	34.042554	69.565219	0.014375
49	0.482130	2.074130	34.524683	71.608698	0.013965
50	0.475005	2.105242	34.999688	73.682828	0.013572

TABLAS DE INTERÉS $i = 2.0\%$

Función	Valor
i	0.020000
$i^{(2)}$	0.019901
$i^{(3)}$	0.019868
$i^{(4)}$	0.019852
$i^{(6)}$	0.019835
$i^{(12)}$	0.019819
d	0.019608
$d^{(2)}$	0.019705
$d^{(3)}$	0.019737
$d^{(4)}$	0.019754
$d^{(6)}$	0.019770
$d^{(12)}$	0.019786
δ	0.019803
$(1+i)$	1.020000
$(1+i)^{1/2}$	1.009950
$(1+i)^{1/3}$	1.006623
$(1+i)^{1/4}$	1.004963
$(1+i)^{1/6}$	1.003306
$(1+i)^{1/12}$	1.001652
$(1-d)$	0.980392
$(1-d)^{1/2}$	0.990148
$(1-d)^{1/3}$	0.993421
$(1-d)^{1/4}$	0.995062
$(1-d)^{1/6}$	0.996705
$(1-d)^{1/12}$	0.998351

n	v^n	$(1+i)^n$	$a_{\overline{n}\rvert}$	$s_{\overline{n}\rvert}$	$1/s_{\overline{n}\rvert}$
1	0.980392	1.020000	0.980392	1.000000	1.000000
2	0.961169	1.040400	1.941561	2.020000	0.495050
3	0.942322	1.061208	2.883883	3.060400	0.326755
4	0.923845	1.082432	3.807729	4.121608	0.242624
5	0.905731	1.104081	4.713460	5.204040	0.192158
6	0.887971	1.126162	5.601431	6.308121	0.158526
7	0.870560	1.148686	6.471991	7.434283	0.134512
8	0.853490	1.171659	7.325481	8.582969	0.116510
9	0.836755	1.195093	8.162237	9.754628	0.102515
10	0.820348	1.218994	8.982585	10.949721	0.091327
11	0.804263	1.243374	9.786848	12.168715	0.082178
12	0.788493	1.268242	10.575341	13.412090	0.074560
13	0.773033	1.293607	11.348374	14.680332	0.068118
14	0.757875	1.319479	12.106249	15.973938	0.062602
15	0.743015	1.345868	12.849264	17.293417	0.057825
16	0.728446	1.372786	13.577709	18.639285	0.053650
17	0.714163	1.400241	14.291872	20.012071	0.049970
18	0.700159	1.428246	14.992031	21.412312	0.046702
19	0.686431	1.456811	15.678462	22.840559	0.043782
20	0.672971	1.485947	16.351433	24.297370	0.041157
21	0.659776	1.515666	17.011209	25.783317	0.038785
22	0.646839	1.545980	17.658048	27.298984	0.036631
23	0.634156	1.576899	18.292204	28.844963	0.034668
24	0.621721	1.608437	18.913926	30.421862	0.032871
25	0.609531	1.640606	19.523456	32.030300	0.031220
26	0.597579	1.673418	20.121036	33.670906	0.029699
27	0.585862	1.706886	20.706898	35.344324	0.028293
28	0.574375	1.741024	21.281272	37.051210	0.026990
29	0.563112	1.775845	21.844385	38.792235	0.025778
30	0.552071	1.811362	22.396456	40.568079	0.024650
31	0.541246	1.847589	22.937702	42.379441	0.023596
32	0.530633	1.884541	23.468335	44.227030	0.022611
33	0.520229	1.922231	23.988564	46.111570	0.021687
34	0.510028	1.960676	24.498592	48.033802	0.020819
35	0.500028	1.999890	24.998619	49.994478	0.020002
36	0.490223	2.039887	25.488842	51.994367	0.019233
37	0.480611	2.080685	25.969453	54.034255	0.018507
38	0.471187	2.122299	26.440641	56.114940	0.017821
39	0.461948	2.164745	26.902589	58.237238	0.017171
40	0.452890	2.208040	27.355479	60.401983	0.016556
41	0.444010	2.252200	27.799489	62.610023	0.015972
42	0.435304	2.297244	28.234794	64.862223	0.015417
43	0.426769	2.343189	28.661562	67.159468	0.014890
44	0.418401	2.390053	29.079963	69.502657	0.014388
45	0.410197	2.437854	29.490160	71.892710	0.013910
46	0.402154	2.486611	29.892314	74.330564	0.013453
47	0.394268	2.536344	30.286582	76.817176	0.013018
48	0.386538	2.587070	30.673120	79.353519	0.012602
49	0.378958	2.638812	31.052078	81.940590	0.012204
50	0.371528	2.691588	31.423606	84.579401	0.011823

TABLAS DE INTERÉS $i = 2.5\%$

Función	Valor
i	0.025000
$i^{(2)}$	0.024846
$i^{(3)}$	0.024795
$i^{(4)}$	0.024769
$i^{(6)}$	0.024743
$i^{(12)}$	0.024718
d	0.024390
$d^{(2)}$	0.024541
$d^{(3)}$	0.024591
$d^{(4)}$	0.024617
$d^{(6)}$	0.024642
$d^{(12)}$	0.024667
δ	0.024693
$(1+i)$	1.025000
$(1+i)^{1/2}$	1.012423
$(1+i)^{1/3}$	1.008265
$(1+i)^{1/4}$	1.006192
$(1+i)^{1/6}$	1.004124
$(1+i)^{1/12}$	1.002060
$(1-d)$	0.975610
$(1-d)^{1/2}$	0.987730
$(1-d)^{1/3}$	0.991803
$(1-d)^{1/4}$	0.993846
$(1-d)^{1/6}$	0.995893
$(1-d)^{1/12}$	0.997944

n	v^n	$(1+i)^n$	$a_{\overline{n}\rvert}$	$s_{\overline{n}\rvert}$	$1/s_{\overline{n}\rvert}$
1	0.975610	1.025000	0.975610	1.000000	1.000000
2	0.951814	1.050625	1.927424	2.025000	0.493827
3	0.928599	1.076891	2.856024	3.075625	0.325137
4	0.905951	1.103813	3.761974	4.152516	0.240818
5	0.883854	1.131408	4.645828	5.256329	0.190247
6	0.862297	1.159693	5.508125	6.387737	0.156550
7	0.841265	1.188686	6.349391	7.547430	0.132495
8	0.820747	1.218403	7.170137	8.736116	0.114467
9	0.800728	1.248863	7.970866	9.954519	0.100457
10	0.781198	1.280085	8.752064	11.203382	0.089259
11	0.762145	1.312087	9.514209	12.483466	0.080106
12	0.743556	1.344889	10.257765	13.795553	0.072487
13	0.725420	1.378511	10.983185	15.140442	0.066048
14	0.707727	1.412974	11.690912	16.518953	0.060537
15	0.690466	1.448298	12.381378	17.931927	0.055766
16	0.673625	1.484506	13.055003	19.380225	0.051599
17	0.657195	1.521618	13.712198	20.864730	0.047928
18	0.641166	1.559659	14.353364	22.386349	0.044670
19	0.625528	1.598650	14.978891	23.946007	0.041761
20	0.610271	1.638616	15.589162	25.544658	0.039147
21	0.595386	1.679582	16.184549	27.183274	0.036787
22	0.580865	1.721571	16.765413	28.862856	0.034647
23	0.566697	1.764611	17.332110	30.584427	0.032696
24	0.552875	1.808726	17.884986	32.349038	0.030913
25	0.539391	1.853944	18.424376	34.157764	0.029276
26	0.526235	1.900293	18.950611	36.011708	0.027769
27	0.513400	1.947800	19.464011	37.912001	0.026377
28	0.500878	1.996495	19.964889	39.859801	0.025088
29	0.488661	2.046407	20.453550	41.856296	0.023891
30	0.476743	2.097568	20.930293	43.902703	0.022778
31	0.465115	2.150007	21.395407	46.000271	0.021739
32	0.453771	2.203757	21.849178	48.150278	0.020768
33	0.442703	2.258851	22.291881	50.354034	0.019859
34	0.431905	2.315322	22.723786	52.612885	0.019007
35	0.421371	2.373205	23.145157	54.928207	0.018206
36	0.411094	2.432535	23.556251	57.301413	0.017452
37	0.401067	2.493349	23.957318	59.733948	0.016741
38	0.391285	2.555682	24.348603	62.227297	0.016070
39	0.381741	2.619574	24.730344	64.782979	0.015436
40	0.372431	2.685064	25.102775	67.402554	0.014836
41	0.363347	2.752190	25.466122	70.087617	0.014268
42	0.354485	2.820995	25.820607	72.839808	0.013729
43	0.345839	2.891520	26.166446	75.660803	0.013217
44	0.337404	2.963808	26.503849	78.552323	0.012730
45	0.329174	3.037903	26.833024	81.516131	0.012268
46	0.321146	3.113851	27.154170	84.554034	0.011827
47	0.313313	3.191697	27.467483	87.667885	0.011407
48	0.305671	3.271490	27.773154	90.859582	0.011006
49	0.298216	3.353277	28.071369	94.131072	0.010623
50	0.290942	3.437109	28.362312	97.484349	0.010258

TABLAS DE INTERÉS $i = 3.0\%$

Función	Valor
i	0.030000
$i^{(2)}$	0.029778
$i^{(3)}$	0.029705
$i^{(4)}$	0.029668
$i^{(6)}$	0.029632
$i^{(12)}$	0.029595
d	0.029126
$d^{(2)}$	0.029341
$d^{(3)}$	0.029414
$d^{(4)}$	0.029450
$d^{(6)}$	0.029486
$d^{(12)}$	0.029522
δ	0.029559
$(1+i)$	1.030000
$(1+i)^{1/2}$	1.014889
$(1+i)^{1/3}$	1.009902
$(1+i)^{1/4}$	1.007417
$(1+i)^{1/6}$	1.004939
$(1+i)^{1/12}$	1.002466
$(1-d)$	0.970874
$(1-d)^{1/2}$	0.985329
$(1-d)^{1/3}$	0.990195
$(1-d)^{1/4}$	0.992638
$(1-d)^{1/6}$	0.995086
$(1-d)^{1/12}$	0.997540

n	v^n	$(1+i)^n$	$a_{\overline{n}\rceil}$	$s_{\overline{n}\rceil}$	$1/s_{\overline{n}\rceil}$
1	0.970874	1.030000	0.970874	1.000000	1.000000
2	0.942596	1.060900	1.913470	2.030000	0.492611
3	0.915142	1.092727	2.828611	3.090900	0.323530
4	0.888487	1.125509	3.717098	4.183627	0.239027
5	0.862609	1.159274	4.579707	5.309136	0.188355
6	0.837484	1.194052	5.417191	6.468410	0.154598
7	0.813092	1.229874	6.230283	7.662462	0.130506
8	0.789409	1.266770	7.019692	8.892336	0.112456
9	0.766417	1.304773	7.786109	10.159106	0.098434
10	0.744094	1.343916	8.530203	11.463879	0.087231
11	0.722421	1.384234	9.252624	12.807796	0.078077
12	0.701380	1.425761	9.954004	14.192030	0.070462
13	0.680951	1.468534	10.634955	15.617790	0.064030
14	0.661118	1.512590	11.296073	17.086324	0.058526
15	0.641862	1.557967	11.937935	18.598914	0.053767
16	0.623167	1.604706	12.561102	20.156881	0.049611
17	0.605016	1.652848	13.166118	21.761588	0.045953
18	0.587395	1.702433	13.753513	23.414435	0.042709
19	0.570286	1.753506	14.323799	25.116868	0.039814
20	0.553676	1.806111	14.877475	26.870374	0.037216
21	0.537549	1.860295	15.415024	28.676486	0.034872
22	0.521893	1.916103	15.936917	30.536780	0.032747
23	0.506692	1.973587	16.443608	32.452884	0.030814
24	0.491934	2.032794	16.935542	34.426470	0.029047
25	0.477606	2.093778	17.413148	36.459264	0.027428
26	0.463695	2.156591	17.876842	38.553042	0.025938
27	0.450189	2.221289	18.327031	40.709634	0.024564
28	0.437077	2.287928	18.764108	42.930923	0.023293
29	0.424346	2.356566	19.188455	45.218850	0.022115
30	0.411987	2.427262	19.600441	47.575416	0.021019
31	0.399987	2.500080	20.000428	50.002678	0.019999
32	0.388337	2.575083	20.388766	52.502759	0.019047
33	0.377026	2.652335	20.765792	55.077841	0.018156
34	0.366045	2.731905	21.131837	57.730177	0.017322
35	0.355383	2.813862	21.487220	60.462082	0.016539
36	0.345032	2.898278	21.832252	63.275944	0.015804
37	0.334983	2.985227	22.167235	66.174223	0.015112
38	0.325226	3.074783	22.492462	69.159449	0.014459
39	0.315754	3.167027	22.808215	72.234233	0.013844
40	0.306557	3.262038	23.114772	75.401260	0.013262
41	0.297628	3.359899	23.412400	78.663298	0.012712
42	0.288959	3.460696	23.701359	82.023196	0.012192
43	0.280543	3.564517	23.981902	85.483892	0.011698
44	0.272372	3.671452	24.254274	89.048409	0.011230
45	0.264439	3.781596	24.518713	92.719861	0.010785
46	0.256737	3.895044	24.775449	96.501457	0.010363
47	0.249259	4.011895	25.024708	100.396501	0.009961
48	0.241999	4.132252	25.266707	104.408396	0.009578
49	0.234950	4.256219	25.501657	108.540648	0.009213
50	0.228107	4.383906	25.729764	112.796867	0.008865

TABLAS DE INTERÉS $i = 3.5\%$

Función	Valor
i	0.035000
$i^{(2)}$	0.034699
$i^{(3)}$	0.034599
$i^{(4)}$	0.034550
$i^{(6)}$	0.034500
$i^{(12)}$	0.034451
d	0.033816
$d^{(2)}$	0.034107
$d^{(3)}$	0.034205
$d^{(4)}$	0.034254
$d^{(6)}$	0.034303
$d^{(12)}$	0.034352
δ	0.034401
$(1+i)$	1.035000
$(1+i)^{1/2}$	1.017349
$(1+i)^{1/3}$	1.011533
$(1+i)^{1/4}$	1.008637
$(1+i)^{1/6}$	1.005750
$(1+i)^{1/12}$	1.002871
$(1-d)$	0.966184
$(1-d)^{1/2}$	0.982946
$(1-d)^{1/3}$	0.988598
$(1-d)^{1/4}$	0.991437
$(1-d)^{1/6}$	0.994283
$(1-d)^{1/12}$	0.997137

n	v^n	$(1+i)^n$	$a_{\overline{n}\rceil}$	$s_{\overline{n}\rceil}$	$1/s_{\overline{n}\rceil}$
1	0.966184	1.035000	0.966184	1.000000	1.000000
2	0.933511	1.071225	1.899694	2.035000	0.491400
3	0.901943	1.108718	2.801637	3.106225	0.321934
4	0.871442	1.147523	3.673079	4.214943	0.237251
5	0.841973	1.187686	4.515052	5.362466	0.186481
6	0.813501	1.229255	5.328553	6.550152	0.152668
7	0.785991	1.272279	6.114544	7.779408	0.128544
8	0.759412	1.316809	6.873956	9.051687	0.110477
9	0.733731	1.362897	7.607687	10.368496	0.096446
10	0.708919	1.410599	8.316605	11.731393	0.085241
11	0.684946	1.459970	9.001551	13.141992	0.076092
12	0.661783	1.511069	9.663334	14.601962	0.068484
13	0.639404	1.563956	10.302738	16.113030	0.062062
14	0.617782	1.618695	10.920520	17.676986	0.056571
15	0.596891	1.675349	11.517411	19.295681	0.051825
16	0.576706	1.733986	12.094117	20.971030	0.047685
17	0.557204	1.794676	12.651321	22.705016	0.044043
18	0.538361	1.857489	13.189682	24.499691	0.040817
19	0.520156	1.922501	13.709837	26.357180	0.037940
20	0.502566	1.989789	14.212403	28.279682	0.035361
21	0.485571	2.059431	14.697974	30.269471	0.033037
22	0.469151	2.131512	15.167125	32.328902	0.030932
23	0.453286	2.206114	15.620410	34.460414	0.029019
24	0.437957	2.283328	16.058368	36.666528	0.027273
25	0.423147	2.363245	16.481515	38.949857	0.025674
26	0.408838	2.445959	16.890352	41.313102	0.024205
27	0.395012	2.531567	17.285365	43.759060	0.022852
28	0.381654	2.620172	17.667019	46.290627	0.021603
29	0.368748	2.711878	18.035767	48.910799	0.020445
30	0.356278	2.806794	18.392045	51.622677	0.019371
31	0.344230	2.905031	18.736276	54.429471	0.018372
32	0.332590	3.006708	19.068865	57.334502	0.017442
33	0.321343	3.111942	19.390208	60.341210	0.016572
34	0.310476	3.220860	19.700684	63.453152	0.015760
35	0.299977	3.333590	20.000661	66.674013	0.014998
36	0.289833	3.450266	20.290494	70.007603	0.014284
37	0.280032	3.571025	20.570525	73.457869	0.013613
38	0.270562	3.696011	20.841087	77.028895	0.012982
39	0.261413	3.825372	21.102500	80.724906	0.012388
40	0.252572	3.959260	21.355072	84.550278	0.011827
41	0.244031	4.097834	21.599104	88.509537	0.011298
42	0.235779	4.241258	21.834883	92.607371	0.010798
43	0.227806	4.389702	22.062689	96.848629	0.010325
44	0.220102	4.543342	22.282791	101.238331	0.009878
45	0.212659	4.702359	22.495450	105.781673	0.009453
46	0.205468	4.866941	22.700918	110.484031	0.009051
47	0.198520	5.037284	22.899438	115.350973	0.008669
48	0.191806	5.213589	23.091244	120.388257	0.008306
49	0.185320	5.396065	23.276564	125.601846	0.007962
50	0.179053	5.584927	23.455618	130.997910	0.007634

TABLAS DE INTERÉS $i = 4.0\%$

Función	Valor
i	0.040000
$i^{(2)}$	0.039608
$i^{(3)}$	0.039478
$i^{(4)}$	0.039414
$i^{(6)}$	0.039349
$i^{(12)}$	0.039285
d	0.038462
$d^{(2)}$	0.038839
$d^{(3)}$	0.038965
$d^{(4)}$	0.039029
$d^{(6)}$	0.039093
$d^{(12)}$	0.039157
δ	0.039221
$(1+i)$	1.040000
$(1+i)^{1/2}$	1.019804
$(1+i)^{1/3}$	1.013159
$(1+i)^{1/4}$	1.009853
$(1+i)^{1/6}$	1.006558
$(1+i)^{1/12}$	1.003274
$(1-d)$	0.961538
$(1-d)^{1/2}$	0.980581
$(1-d)^{1/3}$	0.987012
$(1-d)^{1/4}$	0.990243
$(1-d)^{1/6}$	0.993485
$(1-d)^{1/12}$	0.996737

n	v^n	$(1+i)^n$	$a_{\overline{n\|}}$	$s_{\overline{n\|}}$	$1/s_{\overline{n\|}}$
1	0.961538	1.040000	0.961538	1.000000	1.000000
2	0.924556	1.081600	1.886095	2.040000	0.490196
3	0.888996	1.124864	2.775091	3.121600	0.320349
4	0.854804	1.169859	3.629895	4.246464	0.235490
5	0.821927	1.216653	4.451822	5.416323	0.184627
6	0.790315	1.265319	5.242137	6.632975	0.150762
7	0.759918	1.315932	6.002055	7.898294	0.126610
8	0.730690	1.368569	6.732745	9.214226	0.108528
9	0.702587	1.423312	7.435332	10.582795	0.094493
10	0.675564	1.480244	8.110896	12.006107	0.083291
11	0.649581	1.539454	8.760477	13.486351	0.074149
12	0.624597	1.601032	9.385074	15.025805	0.066552
13	0.600574	1.665074	9.985648	16.626838	0.060144
14	0.577475	1.731676	10.563123	18.291911	0.054669
15	0.555265	1.800944	11.118387	20.023588	0.049941
16	0.533908	1.872981	11.652296	21.824531	0.045820
17	0.513373	1.947900	12.165669	23.697512	0.042199
18	0.493628	2.025817	12.659297	25.645413	0.038993
19	0.474642	2.106849	13.133939	27.671229	0.036139
20	0.456387	2.191123	13.590326	29.778079	0.033582
21	0.438834	2.278768	14.029160	31.969202	0.031280
22	0.421955	2.369919	14.451115	34.247970	0.029199
23	0.405726	2.464716	14.856842	36.617889	0.027309
24	0.390121	2.563304	15.246963	39.082604	0.025587
25	0.375117	2.665836	15.622080	41.645908	0.024012
26	0.360689	2.772470	15.982769	44.311745	0.022567
27	0.346817	2.883369	16.329586	47.084214	0.021239
28	0.333477	2.998703	16.663063	49.967583	0.020013
29	0.320651	3.118651	16.983715	52.966286	0.018880
30	0.308319	3.243398	17.292033	56.084938	0.017830
31	0.296460	3.373133	17.588494	59.328335	0.016855
32	0.285058	3.508059	17.873551	62.701469	0.015949
33	0.274094	3.648381	18.147646	66.209527	0.015104
34	0.263552	3.794316	18.411198	69.857909	0.014315
35	0.253415	3.946089	18.664613	73.652225	0.013577
36	0.243669	4.103933	18.908282	77.598314	0.012887
37	0.234297	4.268090	19.142579	81.702246	0.012240
38	0.225285	4.438813	19.367864	85.970336	0.011632
39	0.216621	4.616366	19.584485	90.409150	0.011061
40	0.208289	4.801021	19.792774	95.025516	0.010523
41	0.200278	4.993061	19.993052	99.826536	0.010017
42	0.192575	5.192784	20.185627	104.819598	0.009540
43	0.185168	5.400495	20.370795	110.012382	0.009090
44	0.178046	5.616515	20.548841	115.412877	0.008665
45	0.171198	5.841176	20.720040	121.029392	0.008262
46	0.164614	6.074823	20.884654	126.870568	0.007882
47	0.158283	6.317816	21.042936	132.945390	0.007522
48	0.152195	6.570528	21.195131	139.263206	0.007181
49	0.146341	6.833349	21.341472	145.833734	0.006857
50	0.140713	7.106683	21.482185	152.667084	0.006550

TABLAS DE INTERÉS $i = 4.5\%$

Función	Valor
i	0.045000
$i^{(2)}$	0.044505
$i^{(3)}$	0.044341
$i^{(4)}$	0.044260
$i^{(6)}$	0.044179
$i^{(12)}$	0.044098
d	0.043062
$d^{(2)}$	0.043536
$d^{(3)}$	0.043696
$d^{(4)}$	0.043776
$d^{(6)}$	0.043856
$d^{(12)}$	0.043936
δ	0.044017
$(1+i)$	1.045000
$(1+i)^{1/2}$	1.022252
$(1+i)^{1/3}$	1.014780
$(1+i)^{1/4}$	1.011065
$(1+i)^{1/6}$	1.007363
$(1+i)^{1/12}$	1.003675
$(1-d)$	0.956938
$(1-d)^{1/2}$	0.978232
$(1-d)^{1/3}$	0.985435
$(1-d)^{1/4}$	0.989056
$(1-d)^{1/6}$	0.992691
$(1-d)^{1/12}$	0.996339

n	v^n	$(1+i)^n$	$a_{\overline{n\|}}$	$s_{\overline{n\|}}$	$1/s_{\overline{n\|}}$
1	0.956938	1.045000	0.956938	1.000000	1.000000
2	0.915730	1.092025	1.872668	2.045000	0.488998
3	0.876297	1.141166	2.748964	3.137025	0.318773
4	0.838561	1.192519	3.587526	4.278191	0.233744
5	0.802451	1.246182	4.389977	5.470710	0.182792
6	0.767896	1.302260	5.157872	6.716892	0.148878
7	0.734828	1.360862	5.892701	8.019152	0.124701
8	0.703185	1.422101	6.595886	9.380014	0.106610
9	0.672904	1.486095	7.268790	10.802114	0.092574
10	0.643928	1.552969	7.912718	12.288209	0.081379
11	0.616199	1.622853	8.528917	13.841179	0.072248
12	0.589664	1.695881	9.118581	15.464032	0.064666
13	0.564272	1.772196	9.682852	17.159913	0.058275
14	0.539973	1.851945	10.222825	18.932109	0.052820
15	0.516720	1.935282	10.739546	20.784054	0.048114
16	0.494469	2.022370	11.234015	22.719337	0.044015
17	0.473176	2.113377	11.707191	24.741707	0.040418
18	0.452800	2.208479	12.159992	26.855084	0.037237
19	0.433302	2.307860	12.593294	29.063562	0.034407
20	0.414643	2.411714	13.007936	31.371423	0.031876
21	0.396787	2.520241	13.404724	33.783137	0.029601
22	0.379701	2.633652	13.784425	36.303378	0.027546
23	0.363350	2.752166	14.147775	38.937030	0.025682
24	0.347703	2.876014	14.495478	41.689196	0.023987
25	0.332731	3.005434	14.828209	44.565210	0.022439
26	0.318402	3.140679	15.146611	47.570645	0.021021
27	0.304691	3.282010	15.451303	50.711324	0.019719
28	0.291571	3.429700	15.742874	53.993333	0.018521
29	0.279015	3.584036	16.021889	57.423033	0.017415
30	0.267000	3.745318	16.288889	61.007070	0.016392
31	0.255502	3.913857	16.544391	64.752388	0.015443
32	0.244500	4.089981	16.788891	68.666245	0.014563
33	0.233971	4.274030	17.022862	72.756226	0.013745
34	0.223896	4.466362	17.246758	77.030256	0.012982
35	0.214254	4.667348	17.461012	81.496618	0.012270
36	0.205028	4.877378	17.666041	86.163966	0.011606
37	0.196199	5.096860	17.862240	91.041344	0.010984
38	0.187750	5.326219	18.049990	96.138205	0.010402
39	0.179665	5.565899	18.229656	101.464424	0.009856
40	0.171929	5.816365	18.401584	107.030323	0.009343
41	0.164525	6.078101	18.566109	112.846688	0.008862
42	0.157440	6.351615	18.723550	118.924789	0.008409
43	0.150661	6.637438	18.874210	125.276404	0.007982
44	0.144173	6.936123	19.018383	131.913842	0.007581
45	0.137964	7.248248	19.156347	138.849965	0.007202
46	0.132023	7.574420	19.288371	146.098214	0.006845
47	0.126338	7.915268	19.414709	153.672633	0.006507
48	0.120898	8.271456	19.535607	161.587902	0.006189
49	0.115692	8.643671	19.651298	169.859357	0.005887
50	0.110710	9.032636	19.762008	178.503028	0.005602

TABLAS DE INTERÉS $i = 5.0\%$

Función	Valor
i	0.050000
$i^{(2)}$	0.049390
$i^{(3)}$	0.049189
$i^{(4)}$	0.049089
$i^{(6)}$	0.048989
$i^{(12)}$	0.048889
d	0.047619
$d^{(2)}$	0.048200
$d^{(3)}$	0.048396
$d^{(4)}$	0.048494
$d^{(6)}$	0.048592
$d^{(12)}$	0.048691
δ	0.048790
$(1+i)$	1.050000
$(1+i)^{1/2}$	1.024695
$(1+i)^{1/3}$	1.016396
$(1+i)^{1/4}$	1.012272
$(1+i)^{1/6}$	1.008165
$(1+i)^{1/12}$	1.004074
$(1-d)$	0.952381
$(1-d)^{1/2}$	0.975900
$(1-d)^{1/3}$	0.983868
$(1-d)^{1/4}$	0.987877
$(1-d)^{1/6}$	0.991901
$(1-d)^{1/12}$	0.995942

n	ν^n	$(1+i)^n$	$a_{\overline{n}\rceil}$	$s_{\overline{n}\rceil}$	$1/s_{\overline{n}\rceil}$
1	0.952381	1.050000	0.952381	1.000000	1.000000
2	0.907029	1.102500	1.859410	2.050000	0.487805
3	0.863838	1.157625	2.723248	3.152500	0.317209
4	0.822702	1.215506	3.545951	4.310125	0.232012
5	0.783526	1.276282	4.329477	5.525631	0.180975
6	0.746215	1.340096	5.075692	6.801913	0.147017
7	0.710681	1.407100	5.786373	8.142008	0.122820
8	0.676839	1.477455	6.463213	9.549109	0.104722
9	0.644609	1.551328	7.107822	11.026564	0.090690
10	0.613913	1.628895	7.721735	12.577893	0.079505
11	0.584679	1.710339	8.306414	14.206787	0.070389
12	0.556837	1.795856	8.863252	15.917127	0.062825
13	0.530321	1.885649	9.393573	17.712983	0.056456
14	0.505068	1.979932	9.898641	19.598632	0.051024
15	0.481017	2.078928	10.379658	21.578564	0.046342
16	0.458112	2.182875	10.837770	23.657492	0.042270
17	0.436297	2.292018	11.274066	25.840366	0.038699
18	0.415521	2.406619	11.689587	28.132385	0.035546
19	0.395734	2.526950	12.085321	30.539004	0.032745
20	0.376889	2.653298	12.462210	33.065954	0.030243
21	0.358942	2.785963	12.821153	35.719252	0.027996
22	0.341850	2.925261	13.163003	38.505214	0.025971
23	0.325571	3.071524	13.488574	41.430475	0.024137
24	0.310068	3.225100	13.798642	44.501999	0.022471
25	0.295303	3.386355	14.093945	47.727099	0.020952
26	0.281241	3.555673	14.375185	51.113454	0.019564
27	0.267848	3.733456	14.643034	54.669126	0.018292
28	0.255094	3.920129	14.898127	58.402583	0.017123
29	0.242946	4.116136	15.141074	62.322712	0.016046
30	0.231377	4.321942	15.372451	66.438848	0.015051
31	0.220359	4.538039	15.592811	70.760790	0.014132
32	0.209866	4.764941	15.802677	75.298829	0.013280
33	0.199873	5.003189	16.002549	80.063771	0.012490
34	0.190355	5.253348	16.192904	85.066959	0.011755
35	0.181290	5.516015	16.374194	90.320307	0.011072
36	0.172657	5.791816	16.546852	95.836323	0.010434
37	0.164436	6.081407	16.711287	101.628139	0.009840
38	0.156605	6.385477	16.867893	107.709546	0.009284
39	0.149148	6.704751	17.017041	114.095023	0.008765
40	0.142046	7.039989	17.159086	120.799774	0.008278
41	0.135282	7.391988	17.294368	127.839763	0.007822
42	0.128840	7.761588	17.423208	135.231751	0.007395
43	0.122704	8.149667	17.545912	142.993339	0.006993
44	0.116861	8.557150	17.662773	151.143006	0.006616
45	0.111297	8.985008	17.774070	159.700156	0.006262
46	0.105997	9.434258	17.880066	168.685164	0.005928
47	0.100949	9.905971	17.981016	178.119422	0.005614
48	0.096142	10.401270	18.077158	188.025393	0.005318
49	0.091564	10.921333	18.168722	198.426663	0.005040
50	0.087204	11.467400	18.255925	209.347996	0.004777

TABLAS DE INTERÉS $i = 5.5\%$

Función	Valor
i	0.055000
$i^{(2)}$	0.054264
$i^{(3)}$	0.054021
$i^{(4)}$	0.053901
$i^{(6)}$	0.053780
$i^{(12)}$	0.053660
d	0.052133
$d^{(2)}$	0.052830
$d^{(3)}$	0.053066
$d^{(4)}$	0.053184
$d^{(6)}$	0.053303
$d^{(12)}$	0.053422
δ	0.053541
$(1+i)$	1.055000
$(1+i)^{1/2}$	1.027132
$(1+i)^{1/3}$	1.018007
$(1+i)^{1/4}$	1.013475
$(1+i)^{1/6}$	1.008963
$(1+i)^{1/12}$	1.004472
$(1-d)$	0.947867
$(1-d)^{1/2}$	0.973585
$(1-d)^{1/3}$	0.982311
$(1-d)^{1/4}$	0.986704
$(1-d)^{1/6}$	0.991116
$(1-d)^{1/12}$	0.995548

n	ν^n	$(1+i)^n$	$a_{\overline{n}\rceil}$	$s_{\overline{n}\rceil}$	$1/s_{\overline{n}\rceil}$
1	0.947867	1.055000	0.947867	1.000000	1.000000
2	0.898452	1.113025	1.846320	2.055000	0.486618
3	0.851614	1.174241	2.697933	3.168025	0.315654
4	0.807217	1.238825	3.505150	4.342266	0.230294
5	0.765134	1.306960	4.270284	5.581091	0.179176
6	0.725246	1.378843	4.995530	6.888051	0.145179
7	0.687437	1.454679	5.682967	8.266894	0.120964
8	0.651599	1.534687	6.334566	9.721573	0.102864
9	0.617629	1.619094	6.952195	11.256260	0.088839
10	0.585431	1.708144	7.537626	12.875354	0.077668
11	0.554911	1.802092	8.092536	14.583498	0.068571
12	0.525982	1.901207	8.618518	16.385591	0.061029
13	0.498561	2.005774	9.117079	18.286798	0.054684
14	0.472569	2.116091	9.589648	20.292572	0.049279
15	0.447933	2.232476	10.037581	22.408663	0.044626
16	0.424581	2.355263	10.462162	24.641140	0.040583
17	0.402447	2.484802	10.864609	26.996403	0.037042
18	0.381466	2.621466	11.246074	29.481205	0.033920
19	0.361579	2.765647	11.607654	32.102671	0.031150
20	0.342729	2.917757	11.950382	34.868318	0.028679
21	0.324862	3.078234	12.275244	37.786076	0.026465
22	0.307926	3.247537	12.583170	40.864310	0.024471
23	0.291873	3.426152	12.875042	44.111847	0.022670
24	0.276657	3.614590	13.151699	47.537998	0.021036
25	0.262234	3.813392	13.413933	51.152588	0.019549
26	0.248563	4.023129	13.662495	54.965981	0.018193
27	0.235605	4.244401	13.898100	58.989109	0.016952
28	0.223322	4.477843	14.121422	63.233510	0.015814
29	0.211679	4.724124	14.333101	67.711354	0.014769
30	0.200644	4.983951	14.533745	72.435478	0.013805
31	0.190184	5.258069	14.723929	77.419429	0.012917
32	0.180269	5.547262	14.904198	82.677498	0.012095
33	0.170871	5.852362	15.075069	88.224760	0.011335
34	0.161963	6.174242	15.237033	94.077122	0.010630
35	0.153520	6.513825	15.390552	100.251364	0.009975
36	0.145516	6.872085	15.536068	106.765189	0.009366
37	0.137930	7.250050	15.673999	113.637274	0.008800
38	0.130739	7.648803	15.804738	120.887324	0.008272
39	0.123924	8.069487	15.928662	128.536127	0.007780
40	0.117463	8.513309	16.046125	136.605614	0.007320
41	0.111339	8.981541	16.157464	145.118923	0.006891
42	0.105535	9.475525	16.262999	154.100464	0.006489
43	0.100033	9.996679	16.363032	163.575989	0.006113
44	0.094818	10.546497	16.457851	173.572669	0.005761
45	0.089875	11.126554	16.547726	184.119165	0.005431
46	0.085190	11.738515	16.632915	195.245719	0.005122
47	0.080748	12.384133	16.713664	206.984234	0.004831
48	0.076539	13.065260	16.790203	219.368367	0.004559
49	0.072549	13.783849	16.862751	232.433627	0.004302
50	0.068767	14.541961	16.931518	246.217476	0.004061

TABLAS DE INTERÉS $i = 6.0\%$

Función	Valor
i	0.060000
$i^{(2)}$	0.059126
$i^{(3)}$	0.058838
$i^{(4)}$	0.058695
$i^{(6)}$	0.058553
$i^{(12)}$	0.058411
d	0.056604
$d^{(2)}$	0.057428
$d^{(3)}$	0.057707
$d^{(4)}$	0.057847
$d^{(6)}$	0.057987
$d^{(12)}$	0.058128
δ	0.058269
$(1+i)$	1.060000
$(1+i)^{1/2}$	1.029563
$(1+i)^{1/3}$	1.019613
$(1+i)^{1/4}$	1.014674
$(1+i)^{1/6}$	1.009759
$(1+i)^{1/12}$	1.004868
$(1-d)$	0.943396
$(1-d)^{1/2}$	0.971286
$(1-d)^{1/3}$	0.980764
$(1-d)^{1/4}$	0.985538
$(1-d)^{1/6}$	0.990336
$(1-d)^{1/12}$	0.995156

n	v^n	$(1+i)^n$	$a_{\overline{n}\vert}$	$s_{\overline{n}\vert}$	$1/s_{\overline{n}\vert}$
1	0.943396	1.060000	0.943396	1.000000	1.000000
2	0.889996	1.123600	1.833393	2.060000	0.485437
3	0.839619	1.191016	2.673012	3.183600	0.314110
4	0.792094	1.262477	3.465106	4.374616	0.228591
5	0.747258	1.338226	4.212364	5.637093	0.177396
6	0.704961	1.418519	4.917324	6.975319	0.143363
7	0.665057	1.503630	5.582381	8.393838	0.119135
8	0.627412	1.593848	6.209794	9.897468	0.101036
9	0.591898	1.689479	6.801692	11.491316	0.087022
10	0.558395	1.790848	7.360087	13.180795	0.075868
11	0.526788	1.898299	7.886875	14.971643	0.066793
12	0.496969	2.012196	8.383844	16.869941	0.059277
13	0.468839	2.132928	8.852683	18.882138	0.052960
14	0.442301	2.260904	9.294984	21.015066	0.047585
15	0.417265	2.396558	9.712249	23.275970	0.042963
16	0.393646	2.540352	10.105895	25.672528	0.038952
17	0.371364	2.692773	10.477260	28.212880	0.035445
18	0.350344	2.854339	10.827603	30.905653	0.032357
19	0.330513	3.025600	11.158116	33.759992	0.029621
20	0.311805	3.207135	11.469921	36.785591	0.027185
21	0.294155	3.399564	11.764077	39.992727	0.025005
22	0.277505	3.603537	12.041582	43.392290	0.023046
23	0.261797	3.819750	12.303379	46.995828	0.021278
24	0.246979	4.048935	12.550358	50.815577	0.019679
25	0.232999	4.291871	12.783356	54.864512	0.018227
26	0.219810	4.549383	13.003166	59.156383	0.016904
27	0.207368	4.822346	13.210534	63.705766	0.015697
28	0.195630	5.111687	13.406164	68.528112	0.014593
29	0.184557	5.418388	13.590721	73.639798	0.013580
30	0.174110	5.743491	13.764831	79.058186	0.012649
31	0.164255	6.088101	13.929086	84.801677	0.011792
32	0.154957	6.453387	14.084043	90.889778	0.011002
33	0.146186	6.840590	14.230230	97.343165	0.010273
34	0.137912	7.251025	14.368141	104.183755	0.009598
35	0.130105	7.686087	14.498246	111.434780	0.008974
36	0.122741	8.147252	14.620987	119.120867	0.008395
37	0.115793	8.636087	14.736780	127.268119	0.007857
38	0.109239	9.154252	14.846019	135.904206	0.007358
39	0.103056	9.703507	14.949075	145.058458	0.006894
40	0.097222	10.285718	15.046297	154.761966	0.006462
41	0.091719	10.902861	15.138016	165.047684	0.006059
42	0.086527	11.557033	15.224543	175.950545	0.005683
43	0.081630	12.250455	15.306173	187.507577	0.005333
44	0.077009	12.985482	15.383182	199.758032	0.005006
45	0.072650	13.764611	15.455832	212.743514	0.004700
46	0.068538	14.590487	15.524370	226.508125	0.004415
47	0.064658	15.465917	15.589028	241.098612	0.004148
48	0.060998	16.393872	15.650027	256.564529	0.003898
49	0.057546	17.377504	15.707572	272.958401	0.003664
50	0.054288	18.420154	15.761861	290.335905	0.003444

TABLAS DE INTERÉS $i = 6.5\%$

Función	Valor
i	0.065000
$i^{(2)}$	0.063977
$i^{(3)}$	0.063640
$i^{(4)}$	0.063473
$i^{(6)}$	0.063306
$i^{(12)}$	0.063140
d	0.061033
$d^{(2)}$	0.061994
$d^{(3)}$	0.062318
$d^{(4)}$	0.062482
$d^{(6)}$	0.062645
$d^{(12)}$	0.062810
δ	0.062975
$(1+i)$	1.065000
$(1+i)^{1/2}$	1.031988
$(1+i)^{1/3}$	1.021213
$(1+i)^{1/4}$	1.015868
$(1+i)^{1/6}$	1.010551
$(1+i)^{1/12}$	1.005262
$(1-d)$	0.938967
$(1-d)^{1/2}$	0.969003
$(1-d)^{1/3}$	0.979227
$(1-d)^{1/4}$	0.984380
$(1-d)^{1/6}$	0.989559
$(1-d)^{1/12}$	0.994766

n	v^n	$(1+i)^n$	$a_{\overline{n}\vert}$	$s_{\overline{n}\vert}$	$1/s_{\overline{n}\vert}$
1	0.938967	1.065000	0.938967	1.000000	1.000000
2	0.881659	1.134225	1.820626	2.065000	0.484262
3	0.827849	1.207950	2.648476	3.199225	0.312576
4	0.777323	1.286466	3.425799	4.407175	0.226903
5	0.729881	1.370087	4.155679	5.693641	0.175635
6	0.685334	1.459142	4.841014	7.063728	0.141568
7	0.643506	1.553987	5.484520	8.522870	0.117331
8	0.604231	1.654996	6.088751	10.076856	0.099237
9	0.567353	1.762570	6.656104	11.731852	0.085238
10	0.532726	1.877137	7.188830	13.494423	0.074105
11	0.500212	1.999151	7.689042	15.371560	0.065055
12	0.469683	2.129096	8.158725	17.370711	0.057568
13	0.441017	2.267487	8.599742	19.499808	0.051283
14	0.414100	2.414874	9.013842	21.767295	0.045940
15	0.388827	2.571841	9.402669	24.182169	0.041353
16	0.365095	2.739011	9.767764	26.754010	0.037378
17	0.342813	2.917046	10.110577	29.493021	0.033906
18	0.321890	3.106654	10.432466	32.410067	0.030855
19	0.302244	3.308587	10.734710	35.516722	0.028156
20	0.283797	3.523645	11.018507	38.825309	0.025756
21	0.266476	3.752682	11.284983	42.348954	0.023613
22	0.250212	3.996606	11.535196	46.101636	0.021691
23	0.234941	4.256386	11.770137	50.098242	0.019961
24	0.220602	4.533051	11.990739	54.354628	0.018398
25	0.207138	4.827699	12.197877	58.887679	0.016981
26	0.194496	5.141500	12.392373	63.715378	0.015695
27	0.182625	5.475697	12.574998	68.856877	0.014523
28	0.171479	5.831617	12.746477	74.332574	0.013453
29	0.161013	6.210672	12.907490	80.164192	0.012474
30	0.151186	6.614366	13.058676	86.374864	0.011577
31	0.141959	7.044300	13.200635	92.989230	0.010754
32	0.133295	7.502179	13.333929	100.033530	0.009997
33	0.125159	7.989821	13.459088	107.535710	0.009299
34	0.117520	8.509159	13.576609	115.525531	0.008656
35	0.110348	9.062255	13.686957	124.034690	0.008062
36	0.103613	9.651301	13.790570	133.096945	0.007513
37	0.097289	10.278636	13.887859	142.748247	0.007005
38	0.091351	10.946747	13.979210	153.026883	0.006535
39	0.085776	11.658286	14.064986	163.973630	0.006099
40	0.080541	12.416075	14.145527	175.631916	0.005694
41	0.075625	13.223119	14.221152	188.047990	0.005318
42	0.071010	14.082622	14.292161	201.271110	0.004968
43	0.066676	14.997993	14.358837	215.353732	0.004644
44	0.062606	15.972862	14.421443	230.351725	0.004341
45	0.058785	17.011098	14.480228	246.324587	0.004060
46	0.055197	18.116820	14.535426	263.335685	0.003797
47	0.051828	19.294413	14.587254	281.452504	0.003553
48	0.048665	20.548550	14.635919	300.746917	0.003325
49	0.045695	21.884205	14.681615	321.295467	0.003112
50	0.042906	23.306679	14.724521	343.179672	0.002914

TABLAS DE INTERÉS $i = 7.0\%$

Función	Valor
i	0.070000
$i^{(2)}$	0.068816
$i^{(3)}$	0.068427
$i^{(4)}$	0.068234
$i^{(6)}$	0.068042
$i^{(12)}$	0.067850
d	0.065421
$d^{(2)}$	0.066527
$d^{(3)}$	0.066901
$d^{(4)}$	0.067090
$d^{(6)}$	0.067279
$d^{(12)}$	0.067468
δ	0.067659
$(1+i)$	1.070000
$(1+i)^{1/2}$	1.034408
$(1+i)^{1/3}$	1.022809
$(1+i)^{1/4}$	1.017059
$(1+i)^{1/6}$	1.011340
$(1+i)^{1/12}$	1.005654
$(1-d)$	0.934579
$(1-d)^{1/2}$	0.966736
$(1-d)^{1/3}$	0.977700
$(1-d)^{1/4}$	0.983228
$(1-d)^{1/6}$	0.988787
$(1-d)^{1/12}$	0.994378

n	v^n	$(1+i)^n$	$a_{\overline{n}\vert}$	$s_{\overline{n}\vert}$	$1/s_{\overline{n}\vert}$
1	0.934579	1.070000	0.934579	1.000000	1.000000
2	0.873439	1.144900	1.808018	2.070000	0.483092
3	0.816298	1.225043	2.624316	3.214900	0.311052
4	0.762895	1.310796	3.387211	4.439943	0.225228
5	0.712986	1.402552	4.100197	5.750739	0.173891
6	0.666342	1.500730	4.766540	7.153291	0.139796
7	0.622750	1.605781	5.389289	8.654021	0.115553
8	0.582009	1.718186	5.971299	10.259803	0.097468
9	0.543934	1.838459	6.515232	11.977989	0.083486
10	0.508349	1.967151	7.023582	13.816448	0.072378
11	0.475093	2.104852	7.498674	15.783599	0.063357
12	0.444012	2.252192	7.942686	17.888451	0.055902
13	0.414964	2.409845	8.357651	20.140643	0.049651
14	0.387817	2.578534	8.745468	22.550488	0.044345
15	0.362446	2.759032	9.107914	25.129022	0.039795
16	0.338735	2.952164	9.446649	27.888054	0.035858
17	0.316574	3.158815	9.763223	30.840217	0.032425
18	0.295864	3.379932	10.059087	33.999033	0.029413
19	0.276508	3.616528	10.335595	37.378965	0.026753
20	0.258419	3.869684	10.594014	40.995492	0.024393
21	0.241513	4.140562	10.835527	44.865177	0.022289
22	0.225713	4.430402	11.061240	49.005739	0.020406
23	0.210947	4.740530	11.272187	53.436141	0.018714
24	0.197147	5.072367	11.469334	58.176671	0.017189
25	0.184249	5.427433	11.653583	63.249038	0.015811
26	0.172195	5.807353	11.825779	68.676470	0.014561
27	0.160930	6.213868	11.986709	74.483823	0.013426
28	0.150402	6.648838	12.137111	80.697691	0.012392
29	0.140563	7.114257	12.277674	87.346529	0.011449
30	0.131367	7.612255	12.409041	94.460786	0.010586
31	0.122773	8.145113	12.531814	102.073041	0.009797
32	0.114741	8.715271	12.646555	110.218154	0.009073
33	0.107235	9.325340	12.753790	118.933425	0.008408
34	0.100219	9.978114	12.854009	128.258765	0.007797
35	0.093663	10.676581	12.947672	138.236878	0.007234
36	0.087535	11.423942	13.035208	148.913460	0.006715
37	0.081809	12.223618	13.117017	160.337402	0.006237
38	0.076457	13.079271	13.193473	172.561020	0.005795
39	0.071455	13.994820	13.264928	185.640292	0.005387
40	0.066780	14.974458	13.331709	199.635112	0.005009
41	0.062412	16.022670	13.394120	214.609570	0.004660
42	0.058329	17.144257	13.452449	230.632240	0.004336
43	0.054513	18.344355	13.506962	247.776496	0.004036
44	0.050946	19.628460	13.557908	266.120851	0.003758
45	0.047613	21.002452	13.605522	285.749311	0.003500
46	0.044499	22.472623	13.650020	306.751763	0.003260
47	0.041587	24.045707	13.691608	329.224386	0.003037
48	0.038867	25.728907	13.730474	353.270093	0.002831
49	0.036324	27.529930	13.766799	378.999000	0.002639
50	0.033948	29.457025	13.800746	406.528929	0.002460

TABLAS DE INTERÉS $i = 7.5\%$

Función	Valor
i	0.075000
$i^{(2)}$	0.073644
$i^{(3)}$	0.073199
$i^{(4)}$	0.072978
$i^{(6)}$	0.072758
$i^{(12)}$	0.072539
d	0.069767
$d^{(2)}$	0.071029
$d^{(3)}$	0.071456
$d^{(4)}$	0.071671
$d^{(6)}$	0.071887
$d^{(12)}$	0.072103
δ	0.072321
$(1+i)$	1.075000
$(1+i)^{1/2}$	1.036822
$(1+i)^{1/3}$	1.024400
$(1+i)^{1/4}$	1.018245
$(1+i)^{1/6}$	1.012126
$(1+i)^{1/12}$	1.006045
$(1-d)$	0.930233
$(1-d)^{1/2}$	0.964486
$(1-d)^{1/3}$	0.976181
$(1-d)^{1/4}$	0.982082
$(1-d)^{1/6}$	0.988019
$(1-d)^{1/12}$	0.993991

n	v^n	$(1+i)^n$	$a_{\overline{n}\vert}$	$s_{\overline{n}\vert}$	$1/s_{\overline{n}\vert}$
1	0.930233	1.075000	0.930233	1.000000	1.000000
2	0.865333	1.155625	1.795565	2.075000	0.481928
3	0.804961	1.242297	2.600526	3.230625	0.309538
4	0.748801	1.335469	3.349326	4.472922	0.223568
5	0.696559	1.435629	4.045885	5.808391	0.172165
6	0.647962	1.543302	4.693846	7.244020	0.138045
7	0.602755	1.659049	5.296601	8.787322	0.113800
8	0.560702	1.783478	5.857304	10.446371	0.095727
9	0.521583	1.917239	6.378887	12.229849	0.081767
10	0.485194	2.061032	6.864081	14.147087	0.070686
11	0.451343	2.215609	7.315424	16.208119	0.061697
12	0.419854	2.381780	7.735278	18.423728	0.054278
13	0.390562	2.560413	8.125840	20.805508	0.048064
14	0.363313	2.752444	8.489154	23.365921	0.042797
15	0.337966	2.958877	8.827120	26.118365	0.038287
16	0.314387	3.180793	9.141507	29.077242	0.034391
17	0.292453	3.419353	9.433960	32.258035	0.031000
18	0.272049	3.675804	9.706009	35.677388	0.028029
19	0.253069	3.951489	9.959078	39.353192	0.025411
20	0.235413	4.247851	10.194491	43.304681	0.023092
21	0.218989	4.566440	10.413480	47.552532	0.021029
22	0.203711	4.908923	10.617191	52.118972	0.019187
23	0.189498	5.277092	10.806689	57.027895	0.017535
24	0.176277	5.672874	10.982967	62.304987	0.016050
25	0.163979	6.098340	11.146946	67.977862	0.014711
26	0.152539	6.555715	11.299485	74.076201	0.013500
27	0.141896	7.047394	11.441381	80.631916	0.012402
28	0.131997	7.575948	11.573378	87.679310	0.011405
29	0.122788	8.144144	11.696165	95.255258	0.010498
30	0.114221	8.754955	11.810386	103.399403	0.009671
31	0.106252	9.411577	11.916638	112.154358	0.008916
32	0.098839	10.117445	12.015478	121.565935	0.008226
33	0.091943	10.876253	12.107421	131.683380	0.007594
34	0.085529	11.691972	12.192950	142.559633	0.007015
35	0.079562	12.568870	12.272511	154.251606	0.006483
36	0.074011	13.511536	12.346522	166.820476	0.005994
37	0.068847	14.524901	12.415370	180.332012	0.005545
38	0.064044	15.614268	12.479414	194.856913	0.005132
39	0.059576	16.785339	12.538989	210.471181	0.004751
40	0.055419	18.044239	12.594409	227.256520	0.004400
41	0.051553	19.397557	12.645962	245.300759	0.004077
42	0.047956	20.852374	12.693918	264.698315	0.003778
43	0.044610	22.416302	12.738528	285.550689	0.003502
44	0.041498	24.097524	12.780026	307.966991	0.003247
45	0.038603	25.904839	12.818629	332.064515	0.003011
46	0.035910	27.847702	12.854539	357.969354	0.002794
47	0.033404	29.936279	12.887943	385.817055	0.002592
48	0.031074	32.181500	12.919017	415.753334	0.002405
49	0.028906	34.595113	12.947922	447.934835	0.002232
50	0.026889	37.189746	12.974812	482.529947	0.002072

TABLAS DE INTERÉS $i = 8.0\%$

Función	Valor
i	0.080000
$i^{(2)}$	0.078461
$i^{(3)}$	0.077957
$i^{(4)}$	0.077706
$i^{(6)}$	0.077457
$i^{(12)}$	0.077208
d	0.074074
$d^{(2)}$	0.075499
$d^{(3)}$	0.075982
$d^{(4)}$	0.076225
$d^{(6)}$	0.076470
$d^{(12)}$	0.076715
δ	0.076961
$(1+i)$	1.080000
$(1+i)^{1/2}$	1.039230
$(1+i)^{1/3}$	1.025986
$(1+i)^{1/4}$	1.019427
$(1+i)^{1/6}$	1.012909
$(1+i)^{1/12}$	1.006434
$(1-d)$	0.925926
$(1-d)^{1/2}$	0.962250
$(1-d)^{1/3}$	0.974673
$(1-d)^{1/4}$	0.980944
$(1-d)^{1/6}$	0.987255
$(1-d)^{1/12}$	0.993607

n	v^n	$(1+i)^n$	$a_{\overline{n}\mid}$	$s_{\overline{n}\mid}$	$1/s_{\overline{n}\mid}$
1	0.925926	1.080000	0.925926	1.000000	1.000000
2	0.857339	1.166400	1.783265	2.080000	0.480769
3	0.793832	1.259712	2.577097	3.246400	0.308034
4	0.735030	1.360489	3.312127	4.506112	0.221921
5	0.680583	1.469328	3.992710	5.866601	0.170456
6	0.630170	1.586874	4.622880	7.335929	0.136315
7	0.583490	1.713824	5.206370	8.922803	0.112072
8	0.540269	1.850930	5.746639	10.636628	0.094015
9	0.500249	1.999005	6.246888	12.487558	0.080080
10	0.463193	2.158925	6.710081	14.486562	0.069029
11	0.428883	2.331639	7.138964	16.645487	0.060076
12	0.397114	2.518170	7.536078	18.977126	0.052695
13	0.367698	2.719624	7.903776	21.495297	0.046522
14	0.340461	2.937194	8.244237	24.214920	0.041297
15	0.315242	3.172169	8.559479	27.152114	0.036830
16	0.291890	3.425943	8.851369	30.324283	0.032977
17	0.270269	3.700018	9.121638	33.750226	0.029629
18	0.250249	3.996019	9.371887	37.450244	0.026702
19	0.231712	4.315701	9.603599	41.446263	0.024128
20	0.214548	4.660957	9.818147	45.761964	0.021852
21	0.198656	5.033834	10.016803	50.422921	0.019832
22	0.183941	5.436540	10.200744	55.456755	0.018032
23	0.170315	5.871464	10.371059	60.893296	0.016422
24	0.157699	6.341181	10.528758	66.764759	0.014978
25	0.146018	6.848475	10.674776	73.105940	0.013679
26	0.135202	7.396353	10.809978	79.954415	0.012507
27	0.125187	7.988061	10.935165	87.350768	0.011448
28	0.115914	8.627106	11.051078	95.338830	0.010489
29	0.107328	9.317275	11.158406	103.965936	0.009619
30	0.099377	10.062657	11.257783	113.283211	0.008827
31	0.092016	10.867669	11.349799	123.345868	0.008107
32	0.085200	11.737083	11.434999	134.213537	0.007451
33	0.078889	12.676050	11.513888	145.950620	0.006852
34	0.073045	13.690134	11.586934	158.626670	0.006304
35	0.067635	14.785344	11.654568	172.316804	0.005803
36	0.062625	15.968172	11.717193	187.102148	0.005345
37	0.057986	17.245626	11.775179	203.070320	0.004924
38	0.053690	18.625276	11.828869	220.315945	0.004539
39	0.049713	20.115298	11.878582	238.941221	0.004185
40	0.046031	21.724521	11.924613	259.056519	0.003860
41	0.042621	23.462483	11.967235	280.781040	0.003561
42	0.039464	25.339482	12.006699	304.243523	0.003287
43	0.036541	27.366640	12.043240	329.583005	0.003034
44	0.033834	29.555972	12.077074	356.949646	0.002802
45	0.031328	31.920449	12.108402	386.505617	0.002587
46	0.029007	34.474085	12.137409	418.426067	0.002390
47	0.026859	37.232012	12.164267	452.900152	0.002208
48	0.024869	40.210573	12.189136	490.132164	0.002040
49	0.023027	43.427419	12.212163	530.342737	0.001886
50	0.021321	46.901613	12.233485	573.770156	0.001743

TABLAS DE INTERÉS $i = 8.5\%$

Función	Valor
i	0.085000
$i^{(2)}$	0.083267
$i^{(3)}$	0.082699
$i^{(4)}$	0.082418
$i^{(6)}$	0.082137
$i^{(12)}$	0.081858
d	0.078341
$d^{(2)}$	0.079939
$d^{(3)}$	0.080481
$d^{(4)}$	0.080754
$d^{(6)}$	0.081028
$d^{(12)}$	0.081303
δ	0.081580
$(1+i)$	1.085000
$(1+i)^{1/2}$	1.041633
$(1+i)^{1/3}$	1.027566
$(1+i)^{1/4}$	1.020604
$(1+i)^{1/6}$	1.013690
$(1+i)^{1/12}$	1.006821
$(1-d)$	0.921659
$(1-d)^{1/2}$	0.960031
$(1-d)^{1/3}$	0.973173
$(1-d)^{1/4}$	0.979812
$(1-d)^{1/6}$	0.986495
$(1-d)^{1/12}$	0.993225

n	v^n	$(1+i)^n$	$a_{\overline{n}\mid}$	$s_{\overline{n}\mid}$	$1/s_{\overline{n}\mid}$
1	0.921659	1.085000	0.921659	1.000000	1.000000
2	0.849455	1.177225	1.771114	2.085000	0.479616
3	0.782908	1.277289	2.554022	3.262225	0.306539
4	0.721574	1.385859	3.275597	4.539514	0.220288
5	0.665045	1.503657	3.940642	5.925373	0.168766
6	0.612945	1.631468	4.553587	7.429030	0.134607
7	0.564926	1.770142	5.118514	9.060497	0.110369
8	0.520669	1.920604	5.639183	10.830639	0.092331
9	0.479880	2.083856	6.119063	12.751244	0.078424
10	0.442285	2.260983	6.561348	14.835099	0.067408
11	0.407636	2.453167	6.968984	17.096083	0.058493
12	0.375702	2.661686	7.344686	19.549250	0.051153
13	0.346269	2.887930	7.690955	22.210936	0.045023
14	0.319142	3.133404	8.010097	25.098866	0.039842
15	0.294140	3.399743	8.304237	28.232269	0.035420
16	0.271097	3.688721	8.575333	31.632012	0.031614
17	0.249859	4.002262	8.825192	35.320733	0.028312
18	0.230285	4.342455	9.055476	39.322995	0.025430
19	0.212244	4.711563	9.267720	43.665450	0.022901
20	0.195616	5.112046	9.463337	48.377013	0.020671
21	0.180292	5.546570	9.643628	53.489059	0.018695
22	0.166167	6.018028	9.809796	59.035629	0.016939
23	0.153150	6.529561	9.962945	65.053658	0.015372
24	0.141152	7.084574	10.104097	71.583219	0.013970
25	0.130094	7.686762	10.234191	78.667792	0.012712
26	0.119902	8.340137	10.354093	86.354555	0.011580
27	0.110509	9.049049	10.464602	94.694692	0.010560
28	0.101851	9.818218	10.566453	103.743741	0.009639
29	0.093872	10.652766	10.660326	113.561959	0.008806
30	0.086518	11.558252	10.746844	124.214725	0.008051
31	0.079740	12.540703	10.826584	135.772977	0.007365
32	0.073493	13.606663	10.900078	148.313680	0.006742
33	0.067736	14.763229	10.967813	161.920343	0.006176
34	0.062429	16.018104	11.030243	176.683572	0.005660
35	0.057539	17.379642	11.087781	192.701675	0.005189
36	0.053031	18.856912	11.140812	210.081318	0.004760
37	0.048876	20.459750	11.189689	228.938230	0.004368
38	0.045047	22.198828	11.234736	249.397979	0.004010
39	0.041518	24.085729	11.276255	271.596808	0.003682
40	0.038266	26.133016	11.314520	295.682536	0.003382
41	0.035268	28.354322	11.349788	321.815552	0.003107
42	0.032505	30.764439	11.382293	350.169874	0.002856
43	0.029959	33.379417	11.412252	380.934313	0.002625
44	0.027612	36.216667	11.439864	414.313730	0.002414
45	0.025448	39.295084	11.465312	450.530397	0.002220
46	0.023455	42.635166	11.488767	489.825480	0.002042
47	0.021617	46.259155	11.510384	532.460646	0.001878
48	0.019924	50.191183	11.530308	578.719801	0.001728
49	0.018363	54.457434	11.548671	628.910984	0.001590
50	0.016924	59.086316	11.565595	683.368418	0.001463

TABLAS DE INTERÉS $i = 9.0\%$

Función	Valor
i	0.090000
$i^{(2)}$	0.088061
$i^{(3)}$	0.087427
$i^{(4)}$	0.087113
$i^{(6)}$	0.086800
$i^{(12)}$	0.086488
d	0.082569
$d^{(2)}$	0.084347
$d^{(3)}$	0.084952
$d^{(4)}$	0.085256
$d^{(6)}$	0.085562
$d^{(12)}$	0.085869
δ	0.086178
$(1+i)$	1.090000
$(1+i)^{1/2}$	1.044031
$(1+i)^{1/3}$	1.029142
$(1+i)^{1/4}$	1.021778
$(1+i)^{1/6}$	1.014467
$(1+i)^{1/12}$	1.007207
$(1-d)$	0.917431
$(1-d)^{1/2}$	0.957826
$(1-d)^{1/3}$	0.971683
$(1-d)^{1/4}$	0.978686
$(1-d)^{1/6}$	0.985740
$(1-d)^{1/12}$	0.992844

n	v^n	$(1+i)^n$	$a_{\overline{n}\rceil}$	$s_{\overline{n}\rceil}$	$1/s_{\overline{n}\rceil}$
1	0.917431	1.090000	0.917431	1.000000	1.000000
2	0.841680	1.188100	1.759111	2.090000	0.478469
3	0.772183	1.295029	2.531295	3.278100	0.305055
4	0.708425	1.411582	3.239720	4.573129	0.218669
5	0.649931	1.538624	3.889651	5.984711	0.167092
6	0.596267	1.677100	4.485919	7.523335	0.132920
7	0.547034	1.828039	5.032953	9.200435	0.108691
8	0.501866	1.992563	5.534819	11.028474	0.090674
9	0.460428	2.171893	5.995247	13.021036	0.076799
10	0.422411	2.367364	6.417658	15.192930	0.065820
11	0.387533	2.580426	6.805191	17.560293	0.056947
12	0.355535	2.812665	7.160725	20.140720	0.049651
13	0.326179	3.065805	7.486904	22.953385	0.043567
14	0.299246	3.341727	7.786150	26.019189	0.038433
15	0.274538	3.642482	8.060688	29.360916	0.034059
16	0.251870	3.970306	8.312558	33.003399	0.030300
17	0.231073	4.327633	8.543631	36.973705	0.027046
18	0.211994	4.717120	8.755625	41.301338	0.024212
19	0.194490	5.141661	8.950115	46.018458	0.021730
20	0.178431	5.604411	9.128546	51.160120	0.019546
21	0.163698	6.108808	9.292244	56.764530	0.017617
22	0.150182	6.658600	9.442425	62.873338	0.015905
23	0.137781	7.257874	9.580207	69.531939	0.014382
24	0.126405	7.911083	9.706612	76.789813	0.013023
25	0.115968	8.623081	9.822580	84.700896	0.011806
26	0.106393	9.399158	9.928972	93.323977	0.010715
27	0.097608	10.245082	10.026580	102.723135	0.009735
28	0.089548	11.167140	10.116128	112.968217	0.008852
29	0.082155	12.172182	10.198283	124.135356	0.008056
30	0.075371	13.267678	10.273654	136.307539	0.007336
31	0.069148	14.461770	10.342802	149.575217	0.006686
32	0.063438	15.763329	10.406240	164.036987	0.006096
33	0.058200	17.182028	10.464441	179.800315	0.005562
34	0.053395	18.728411	10.517835	196.982344	0.005077
35	0.048986	20.413968	10.566821	215.710755	0.004636
36	0.044941	22.251225	10.611763	236.124723	0.004235
37	0.041231	24.253835	10.652993	258.375948	0.003870
38	0.037826	26.436680	10.690820	282.629783	0.003538
39	0.034703	28.815982	10.725523	309.066463	0.003236
40	0.031838	31.409420	10.757360	337.882445	0.002960
41	0.029209	34.236268	10.786569	369.291865	0.002708
42	0.026797	37.317532	10.813366	403.528133	0.002478
43	0.024584	40.676110	10.837950	440.845665	0.002268
44	0.022555	44.336960	10.860505	481.521775	0.002077
45	0.020692	48.327286	10.881197	525.858734	0.001902
46	0.018984	52.676742	10.900181	574.186021	0.001742
47	0.017416	57.417649	10.917597	626.862762	0.001595
48	0.015978	62.585237	10.933575	684.280411	0.001461
49	0.014659	68.217908	10.948234	746.865648	0.001339
50	0.013449	74.357520	10.961683	815.083556	0.001227

TABLAS DE INTERÉS $i = 9.5\%$

Función	Valor
i	0.095000
$i^{(2)}$	0.092845
$i^{(3)}$	0.092141
$i^{(4)}$	0.091792
$i^{(6)}$	0.091444
$i^{(12)}$	0.091098
d	0.086758
$d^{(2)}$	0.088726
$d^{(3)}$	0.089395
$d^{(4)}$	0.089733
$d^{(6)}$	0.090071
$d^{(12)}$	0.090412
δ	0.090754
$(1+i)$	1.095000
$(1+i)^{1/2}$	1.046422
$(1+i)^{1/3}$	1.030714
$(1+i)^{1/4}$	1.022948
$(1+i)^{1/6}$	1.015241
$(1+i)^{1/12}$	1.007592
$(1-d)$	0.913242
$(1-d)^{1/2}$	0.955637
$(1-d)^{1/3}$	0.970202
$(1-d)^{1/4}$	0.977567
$(1-d)^{1/6}$	0.984988
$(1-d)^{1/12}$	0.992466

n	v^n	$(1+i)^n$	$a_{\overline{n}\rceil}$	$s_{\overline{n}\rceil}$	$1/s_{\overline{n}\rceil}$
1	0.913242	1.095000	0.913242	1.000000	1.000000
2	0.834011	1.199025	1.747253	2.095000	0.477327
3	0.761654	1.312932	2.508907	3.294025	0.303580
4	0.695574	1.437661	3.204481	4.606957	0.217063
5	0.635228	1.574239	3.839709	6.044618	0.165436
6	0.580117	1.723791	4.419825	7.618857	0.131253
7	0.529787	1.887552	4.949612	9.342648	0.107036
8	0.483824	2.066869	5.433436	11.230200	0.089046
9	0.441848	2.263222	5.875284	13.297069	0.075205
10	0.403514	2.478228	6.278798	15.560291	0.064266
11	0.368506	2.713659	6.647304	18.038518	0.055437
12	0.336535	2.971457	6.983839	20.752178	0.048188
13	0.307338	3.253745	7.291178	23.723634	0.042152
14	0.280674	3.562851	7.571852	26.977380	0.037068
15	0.256323	3.901322	7.828175	30.540231	0.032744
16	0.234085	4.271948	8.062260	34.441553	0.029035
17	0.213777	4.677783	8.276037	38.713500	0.025831
18	0.195230	5.122172	8.471266	43.391283	0.023046
19	0.178292	5.608778	8.649558	48.513454	0.020613
20	0.162824	6.141612	8.812382	54.122233	0.018477
21	0.148697	6.725065	8.961080	60.263845	0.016594
22	0.135797	7.363946	9.096876	66.988910	0.014928
23	0.124015	8.063521	9.220892	74.352856	0.013449
24	0.113256	8.829556	9.334148	82.416378	0.012134
25	0.103430	9.668364	9.437578	91.245934	0.010959
26	0.094457	10.586858	9.532034	100.914297	0.009909
27	0.086262	11.592610	9.618296	111.501156	0.008969
28	0.078778	12.693908	9.697074	123.093766	0.008124
29	0.071943	13.899829	9.769018	135.787673	0.007364
30	0.065702	15.220313	9.834719	149.687502	0.006681
31	0.060002	16.666242	9.894721	164.907815	0.006064
32	0.054796	18.249535	9.949517	181.574057	0.005507
33	0.050042	19.983241	9.999559	199.823593	0.005004
34	0.045700	21.881649	10.045259	219.806834	0.004549
35	0.041736	23.960406	10.086995	241.688483	0.004138
36	0.038115	26.236644	10.125109	265.648889	0.003764
37	0.034808	28.729126	10.159917	291.885534	0.003426
38	0.031788	31.458393	10.191705	320.614659	0.003119
39	0.029030	34.446940	10.220735	352.073052	0.002840
40	0.026512	37.719399	10.247247	386.519992	0.002587
41	0.024211	41.302742	10.271458	424.239391	0.002357
42	0.022111	45.226503	10.293569	465.542133	0.002148
43	0.020193	49.523020	10.313762	510.768636	0.001958
44	0.018441	54.227707	10.332203	560.291656	0.001785
45	0.016841	59.379340	10.349043	614.519364	0.001627
46	0.015380	65.020377	10.364423	673.898703	0.001484
47	0.014045	71.197313	10.378469	738.919080	0.001353
48	0.012827	77.961057	10.391296	810.116393	0.001234
49	0.011714	85.367358	10.403010	888.077450	0.001126
50	0.010698	93.477257	10.413707	973.444808	0.001027

TABLAS DE INTERÉS $i = 10.0\%$

Función	Valor
i	0.100000
$i^{(2)}$	0.097618
$i^{(3)}$	0.096840
$i^{(4)}$	0.096455
$i^{(6)}$	0.096071
$i^{(12)}$	0.095690
d	0.090909
$d^{(2)}$	0.093075
$d^{(3)}$	0.093812
$d^{(4)}$	0.094184
$d^{(6)}$	0.094557
$d^{(12)}$	0.094933
δ	0.095310
$(1+i)$	1.100000
$(1+i)^{1/2}$	1.048809
$(1+i)^{1/3}$	1.032280
$(1+i)^{1/4}$	1.024114
$(1+i)^{1/6}$	1.016012
$(1+i)^{1/12}$	1.007974
$(1-d)$	0.909091
$(1-d)^{1/2}$	0.953463
$(1-d)^{1/3}$	0.968729
$(1-d)^{1/4}$	0.976454
$(1-d)^{1/6}$	0.984240
$(1-d)^{1/12}$	0.992089

n	v^n	$(1+i)^n$	$a_{\overline{n}\vert}$	$s_{\overline{n}\vert}$	$1/s_{\overline{n}\vert}$
1	0.909091	1.100000	0.909091	1.000000	1.000000
2	0.826446	1.210000	1.735537	2.100000	0.476190
3	0.751315	1.331000	2.486852	3.310000	0.302115
4	0.683013	1.464100	3.169865	4.641000	0.215471
5	0.620921	1.610510	3.790787	6.105100	0.163797
6	0.564474	1.771561	4.355261	7.715610	0.129607
7	0.513158	1.948717	4.868419	9.487171	0.105405
8	0.466507	2.143589	5.334926	11.435888	0.087444
9	0.424098	2.357948	5.759024	13.579477	0.073641
10	0.385543	2.593742	6.144567	15.937425	0.062745
11	0.350494	2.853117	6.495061	18.531167	0.053963
12	0.318631	3.138428	6.813692	21.384284	0.046763
13	0.289664	3.452271	7.103356	24.522712	0.040779
14	0.263331	3.797498	7.366687	27.974983	0.035746
15	0.239392	4.177248	7.606080	31.772482	0.031474
16	0.217629	4.594973	7.823709	35.949730	0.027817
17	0.197845	5.054470	8.021553	40.544703	0.024664
18	0.179859	5.559917	8.201412	45.599173	0.021930
19	0.163508	6.115909	8.364920	51.159090	0.019547
20	0.148644	6.727500	8.513564	57.274999	0.017460
21	0.135131	7.400250	8.648694	64.002499	0.015624
22	0.122846	8.140275	8.771540	71.402749	0.014005
23	0.111678	8.954302	8.883218	79.543024	0.012572
24	0.101526	9.849733	8.984744	88.497327	0.011300
25	0.092296	10.834706	9.077040	98.347059	0.010168
26	0.083905	11.918177	9.160945	109.181765	0.009159
27	0.076278	13.109994	9.237223	121.099942	0.008258
28	0.069343	14.420994	9.306567	134.209936	0.007451
29	0.063039	15.863093	9.369606	148.630930	0.006728
30	0.057309	17.449402	9.426914	164.494023	0.006079
31	0.052099	19.194342	9.479013	181.943425	0.005496
32	0.047362	21.113777	9.526376	201.137767	0.004972
33	0.043057	23.225154	9.569432	222.251544	0.004499
34	0.039143	25.547670	9.608575	245.476699	0.004074
35	0.035584	28.102437	9.644159	271.024368	0.003690
36	0.032349	30.912681	9.676508	299.126805	0.003343
37	0.029408	34.003949	9.705917	330.039486	0.003030
38	0.026735	37.404343	9.732651	364.043434	0.002747
39	0.024304	41.144778	9.756956	401.447778	0.002491
40	0.022095	45.259256	9.779051	442.592556	0.002259
41	0.020086	49.785181	9.799137	487.851811	0.002050
42	0.018260	54.763699	9.817397	537.636992	0.001860
43	0.016600	60.240069	9.833998	592.400692	0.001688
44	0.015091	66.264076	9.849089	652.640761	0.001532
45	0.013719	72.890484	9.862808	718.904837	0.001391
46	0.012472	80.179532	9.875280	791.795321	0.001263
47	0.011338	88.197485	9.886618	871.974853	0.001147
48	0.010307	97.017234	9.896926	960.172338	0.001041
49	0.009370	106.718957	9.906296	1,057.189572	0.000946
50	0.008519	117.390853	9.914814	1,163.908529	0.000859

TABLAS DE INTERÉS $i = 10.5\%$

Función	Valor
i	0.105000
$i^{(2)}$	0.102380
$i^{(3)}$	0.101525
$i^{(4)}$	0.101102
$i^{(6)}$	0.100681
$i^{(12)}$	0.100262
d	0.095023
$d^{(2)}$	0.097394
$d^{(3)}$	0.098202
$d^{(4)}$	0.098610
$d^{(6)}$	0.099019
$d^{(12)}$	0.099431
δ	0.099845
$(1+i)$	1.105000
$(1+i)^{1/2}$	1.051190
$(1+i)^{1/3}$	1.033842
$(1+i)^{1/4}$	1.025275
$(1+i)^{1/6}$	1.016780
$(1+i)^{1/12}$	1.008355
$(1-d)$	0.904977
$(1-d)^{1/2}$	0.951303
$(1-d)^{1/3}$	0.967266
$(1-d)^{1/4}$	0.975348
$(1-d)^{1/6}$	0.983497
$(1-d)^{1/12}$	0.991714

n	v^n	$(1+i)^n$	$a_{\overline{n}\vert}$	$s_{\overline{n}\vert}$	$1/s_{\overline{n}\vert}$
1	0.904977	1.105000	0.904977	1.000000	1.000000
2	0.818984	1.221025	1.723961	2.105000	0.475059
3	0.741162	1.349233	2.465123	3.326025	0.300659
4	0.670735	1.490902	3.135858	4.675258	0.213892
5	0.607000	1.647447	3.742858	6.166160	0.162175
6	0.549321	1.820429	4.292179	7.813606	0.127982
7	0.497123	2.011574	4.789303	9.634035	0.103799
8	0.449885	2.222789	5.239188	11.645609	0.085869
9	0.407136	2.456182	5.646324	13.868398	0.072106
10	0.368449	2.714081	6.014773	16.324579	0.061257
11	0.333438	2.999059	6.348211	19.038660	0.052525
12	0.301754	3.313961	6.649964	22.037720	0.045377
13	0.273080	3.661926	6.923045	25.351680	0.039445
14	0.247132	4.046429	7.170176	29.013607	0.034467
15	0.223648	4.471304	7.393825	33.060035	0.030248
16	0.202397	4.940791	7.596221	37.531339	0.026644
17	0.183164	5.459574	7.779386	42.472130	0.023545
18	0.165760	6.032829	7.945146	47.931703	0.020863
19	0.150009	6.666276	8.095154	53.964532	0.018531
20	0.135755	7.366235	8.230909	60.630808	0.016493
21	0.122855	8.139690	8.353764	67.997043	0.014707
22	0.111181	8.994357	8.464945	76.136732	0.013134
23	0.100616	9.938764	8.565561	85.131089	0.011747
24	0.091055	10.982335	8.656616	95.069854	0.010519
25	0.082403	12.135480	8.739019	106.052188	0.009429
26	0.074573	13.409705	8.813592	118.187668	0.008461
27	0.067487	14.817724	8.881079	131.597373	0.007599
28	0.061074	16.373585	8.942153	146.415097	0.006830
29	0.055271	18.092812	8.997423	162.788683	0.006143
30	0.050019	19.992557	9.047442	180.881494	0.005528
31	0.045266	22.091775	9.092707	200.874051	0.004978
32	0.040964	24.411412	9.133672	222.965827	0.004485
33	0.037072	26.974610	9.170744	247.377238	0.004042
34	0.033549	29.806944	9.204293	274.351848	0.003645
35	0.030361	32.936673	9.234654	304.158792	0.003288
36	0.027476	36.395024	9.262131	337.095466	0.002967
37	0.024865	40.216501	9.286996	373.490489	0.002677
38	0.022503	44.439234	9.309499	413.706991	0.002417
39	0.020364	49.105354	9.329863	458.146225	0.002183
40	0.018429	54.261416	9.348292	507.251579	0.001971
41	0.016678	59.958864	9.364970	561.512994	0.001781
42	0.015093	66.254545	9.380064	621.471859	0.001609
43	0.013659	73.211272	9.393723	687.726404	0.001454
44	0.012361	80.898456	9.406084	760.937676	0.001314
45	0.011187	89.392794	9.417271	841.836132	0.001188
46	0.010124	98.779037	9.427394	931.228926	0.001074
47	0.009162	109.150836	9.436556	1,030.007963	0.000971
48	0.008291	120.611674	9.444847	1,139.158800	0.000878
49	0.007503	133.275900	9.452350	1,259.770473	0.000794
50	0.006790	147.269869	9.459140	1,393.046373	0.000718

TABLAS DE INTERÉS $i = 11.0\%$

Función	Valor
i	0.110000
$i^{(2)}$	0.107131
$i^{(3)}$	0.106196
$i^{(4)}$	0.105733
$i^{(6)}$	0.105273
$i^{(12)}$	0.104815
d	0.099099
$d^{(2)}$	0.101684
$d^{(3)}$	0.102566
$d^{(4)}$	0.103010
$d^{(6)}$	0.103458
$d^{(12)}$	0.103908
δ	0.104360
$(1+i)$	1.110000
$(1+i)^{1/2}$	1.053565
$(1+i)^{1/3}$	1.035399
$(1+i)^{1/4}$	1.026433
$(1+i)^{1/6}$	1.017545
$(1+i)^{1/12}$	1.008735
$(1-d)$	0.900901
$(1-d)^{1/2}$	0.949158
$(1-d)^{1/3}$	0.965811
$(1-d)^{1/4}$	0.974247
$(1-d)^{1/6}$	0.982757
$(1-d)^{1/12}$	0.991341

n	v^n	$(1+i)^n$	$a_{\overline{n}\rvert}$	$s_{\overline{n}\rvert}$	$1/s_{\overline{n}\rvert}$
1	0.900901	1.110000	0.900901	1.000000	1.000000
2	0.811622	1.232100	1.712523	2.110000	0.473934
3	0.731191	1.367631	2.443715	3.342100	0.299213
4	0.658731	1.518070	3.102446	4.709731	0.212326
5	0.593451	1.685058	3.695897	6.227801	0.160570
6	0.534641	1.870415	4.230538	7.912860	0.126377
7	0.481658	2.076160	4.712196	9.783274	0.102215
8	0.433926	2.304538	5.146123	11.859434	0.084321
9	0.390925	2.558037	5.537048	14.163972	0.070602
10	0.352184	2.839421	5.889232	16.722009	0.059801
11	0.317283	3.151757	6.206515	19.561430	0.051121
12	0.285841	3.498451	6.492356	22.713187	0.044027
13	0.257514	3.883280	6.749870	26.211638	0.038151
14	0.231995	4.310441	6.981865	30.094918	0.033228
15	0.209004	4.784589	7.190870	34.405359	0.029065
16	0.188292	5.310894	7.379162	39.189948	0.025517
17	0.169633	5.895093	7.548794	44.500843	0.022471
18	0.152822	6.543553	7.701617	50.395936	0.019843
19	0.137678	7.263344	7.839294	56.939488	0.017563
20	0.124034	8.062312	7.963328	64.202832	0.015576
21	0.111742	8.949166	8.075070	72.265144	0.013838
22	0.100669	9.933574	8.175739	81.214309	0.012313
23	0.090693	11.026267	8.266432	91.147884	0.010971
24	0.081705	12.239157	8.348137	102.174151	0.009787
25	0.073608	13.585464	8.421745	114.413307	0.008740
26	0.066314	15.079865	8.488058	127.998771	0.007813
27	0.059742	16.738650	8.547800	143.078636	0.006989
28	0.053822	18.579901	8.601622	159.817286	0.006257
29	0.048488	20.623691	8.650110	178.397187	0.005605
30	0.043683	22.892297	8.693793	199.020878	0.005025
31	0.039354	25.410449	8.733146	221.913174	0.004506
32	0.035454	28.205599	8.768600	247.323624	0.004043
33	0.031940	31.308214	8.800541	275.529222	0.003629
34	0.028775	34.752118	8.829316	306.837437	0.003259
35	0.025924	38.574851	8.855240	341.589555	0.002927
36	0.023355	42.818085	8.878594	380.164406	0.002630
37	0.021040	47.528074	8.899635	422.982490	0.002364
38	0.018955	52.756162	8.918590	470.510564	0.002125
39	0.017077	58.559340	8.935666	523.266726	0.001911
40	0.015384	65.000867	8.951051	581.826066	0.001719
41	0.013860	72.150963	8.964911	646.826934	0.001546
42	0.012486	80.087569	8.977397	718.977896	0.001391
43	0.011249	88.897201	8.988646	799.065465	0.001251
44	0.010134	98.675893	8.998780	887.962666	0.001126
45	0.009130	109.530242	9.007910	986.638559	0.001014
46	0.008225	121.578568	9.016135	1,096.168801	0.000912
47	0.007410	134.952211	9.023545	1,217.747369	0.000821
48	0.006676	149.796954	9.030221	1,352.699580	0.000739
49	0.006014	166.274619	9.036235	1,502.496533	0.000666
50	0.005418	184.564827	9.041653	1,668.771152	0.000599

TABLAS DE INTERÉS $i = 11.5\%$

Función	Valor
i	0.115000
$i^{(2)}$	0.111871
$i^{(3)}$	0.110853
$i^{(4)}$	0.110349
$i^{(6)}$	0.109848
$i^{(12)}$	0.109350
d	0.103139
$d^{(2)}$	0.105945
$d^{(3)}$	0.106903
$d^{(4)}$	0.107387
$d^{(6)}$	0.107873
$d^{(12)}$	0.108362
δ	0.108854
$(1+i)$	1.115000
$(1+i)^{1/2}$	1.055936
$(1+i)^{1/3}$	1.036951
$(1+i)^{1/4}$	1.027587
$(1+i)^{1/6}$	1.018308
$(1+i)^{1/12}$	1.009112
$(1-d)$	0.896861
$(1-d)^{1/2}$	0.947027
$(1-d)^{1/3}$	0.964366
$(1-d)^{1/4}$	0.973153
$(1-d)^{1/6}$	0.982021
$(1-d)^{1/12}$	0.990970

n	v^n	$(1+i)^n$	$a_{\overline{n}\rvert}$	$s_{\overline{n}\rvert}$	$1/s_{\overline{n}\rvert}$
1	0.896861	1.115000	0.896861	1.000000	1.000000
2	0.804360	1.243225	1.701221	2.115000	0.472813
3	0.721399	1.386196	2.422619	3.358225	0.297776
4	0.646994	1.545608	3.069614	4.744421	0.210774
5	0.580264	1.723353	3.649878	6.290029	0.158982
6	0.520416	1.921539	4.170294	8.013383	0.124791
7	0.466741	2.142516	4.637035	9.934922	0.100655
8	0.418602	2.388905	5.055637	12.077438	0.082799
9	0.375428	2.663629	5.431064	14.466343	0.069126
10	0.336706	2.969947	5.767771	17.129972	0.058377
11	0.301979	3.311491	6.069750	20.099919	0.049751
12	0.270833	3.692312	6.340583	23.411410	0.042714
13	0.242900	4.116928	6.583482	27.103722	0.036895
14	0.217847	4.590375	6.801329	31.220650	0.032030
15	0.195379	5.118268	6.996708	35.811025	0.027924
16	0.175227	5.706869	7.171935	40.929293	0.024432
17	0.157155	6.363159	7.329090	46.636161	0.021443
18	0.140946	7.094922	7.470036	52.999320	0.018868
19	0.126409	7.910838	7.596445	60.094242	0.016641
20	0.113371	8.820584	7.709816	68.005080	0.014705
21	0.101678	9.834951	7.811494	76.825664	0.013016
22	0.091191	10.965971	7.902685	86.660615	0.011539
23	0.081786	12.227057	7.984471	97.626586	0.010243
24	0.073351	13.633169	8.057822	109.853643	0.009103
25	0.065785	15.200983	8.123607	123.486812	0.008098
26	0.059000	16.949096	8.182607	138.687796	0.007210
27	0.052915	18.898243	8.235522	155.636892	0.006425
28	0.047457	21.071540	8.282979	174.535135	0.005730
29	0.042563	23.494768	8.325542	195.606675	0.005112
30	0.038173	26.196666	8.363715	219.101443	0.004564
31	0.034236	29.209282	8.397951	245.298109	0.004077
32	0.030705	32.568350	8.428655	274.507391	0.003643
33	0.027538	36.313710	8.456193	307.075741	0.003257
34	0.024698	40.489787	8.480891	343.389451	0.002912
35	0.022150	45.146112	8.503041	383.879238	0.002605
36	0.019866	50.337915	8.522907	429.025351	0.002331
37	0.017817	56.126776	8.540723	479.363266	0.002086
38	0.015979	62.581355	8.556703	535.490042	0.001867
39	0.014331	69.778211	8.571034	598.071396	0.001672
40	0.012853	77.802705	8.583887	667.849607	0.001497
41	0.011527	86.750016	8.595414	745.652312	0.001341
42	0.010338	96.726268	8.605753	832.402327	0.001201
43	0.009272	107.849788	8.615025	929.128595	0.001076
44	0.008316	120.252514	8.623341	1,036.978384	0.000964
45	0.007458	134.081553	8.630799	1,157.230898	0.000864
46	0.006689	149.500932	8.637488	1,291.312451	0.000774
47	0.005999	166.693539	8.643487	1,440.813383	0.000694
48	0.005380	185.863296	8.648867	1,607.506922	0.000622
49	0.004825	207.237575	8.653692	1,793.370218	0.000558
50	0.004328	231.069896	8.658020	2,000.607793	0.000500

TABLAS DE INTERÉS i = 12.0%

Función	Valor
i	0.120000
$i^{(2)}$	0.116601
$i^{(3)}$	0.115496
$i^{(4)}$	0.114949
$i^{(6)}$	0.114406
$i^{(12)}$	0.113866
d	0.107143
$d^{(2)}$	0.110178
$d^{(3)}$	0.111215
$d^{(4)}$	0.111738
$d^{(6)}$	0.112265
$d^{(12)}$	0.112795
δ	0.113329
$(1+i)$	1.120000
$(1+i)^{1/2}$	1.058301
$(1+i)^{1/3}$	1.038499
$(1+i)^{1/4}$	1.028737
$(1+i)^{1/6}$	1.019068
$(1+i)^{1/12}$	1.009489
$(1-d)$	0.892857
$(1-d)^{1/2}$	0.944911
$(1-d)^{1/3}$	0.962928
$(1-d)^{1/4}$	0.972065
$(1-d)^{1/6}$	0.981289
$(1-d)^{1/12}$	0.990600

n	v^n	$(1+i)^n$	$a_{\overline{n}\rceil}$	$s_{\overline{n}\rceil}$	$1/s_{\overline{n}\rceil}$
1	0.892857	1.120000	0.892857	1.000000	1.000000
2	0.797194	1.254400	1.690051	2.120000	0.471698
3	0.711780	1.404928	2.401831	3.374400	0.296349
4	0.635518	1.573519	3.037349	4.779328	0.209234
5	0.567427	1.762342	3.604776	6.352847	0.157410
6	0.506631	1.973823	4.111407	8.115189	0.123226
7	0.452349	2.210681	4.563757	10.089012	0.099118
8	0.403883	2.475963	4.967640	12.299693	0.081303
9	0.360610	2.773079	5.328250	14.775656	0.067679
10	0.321973	3.105848	5.650223	17.548735	0.056984
11	0.287476	3.478550	5.937699	20.654583	0.048415
12	0.256675	3.895976	6.194374	24.133133	0.041437
13	0.229174	4.363493	6.423548	28.029109	0.035677
14	0.204620	4.887112	6.628168	32.392602	0.030871
15	0.182696	5.473566	6.810864	37.279715	0.026824
16	0.163122	6.130394	6.973986	42.753280	0.023390
17	0.145644	6.866041	7.119630	48.883674	0.020457
18	0.130040	7.689966	7.249670	55.749715	0.017937
19	0.116107	8.612762	7.365777	63.439681	0.015763
20	0.103667	9.646293	7.469444	72.052442	0.013879
21	0.092560	10.803848	7.562003	81.698736	0.012240
22	0.082643	12.100310	7.644646	92.502584	0.010811
23	0.073788	13.552347	7.718434	104.602894	0.009560
24	0.065882	15.178629	7.784316	118.155241	0.008463
25	0.058823	17.000064	7.843139	133.333870	0.007500
26	0.052521	19.040072	7.895660	150.333934	0.006652
27	0.046894	21.324881	7.942554	169.374007	0.005904
28	0.041869	23.883866	7.984423	190.698887	0.005244
29	0.037383	26.749930	8.021806	214.582754	0.004660
30	0.033378	29.959922	8.055184	241.332684	0.004144
31	0.029802	33.555113	8.084986	271.292606	0.003686
32	0.026609	37.581726	8.111594	304.847719	0.003280
33	0.023758	42.091533	8.135352	342.429446	0.002920
34	0.021212	47.142517	8.156564	384.520979	0.002601
35	0.018940	52.799620	8.175504	431.663496	0.002317
36	0.016910	59.135574	8.192414	484.463116	0.002064
37	0.015098	66.231843	8.207513	543.598690	0.001840
38	0.013481	74.179664	8.220993	609.830533	0.001640
39	0.012036	83.081224	8.233030	684.010197	0.001462
40	0.010747	93.050970	8.243777	767.091420	0.001304
41	0.009595	104.217087	8.253372	860.142391	0.001163
42	0.008567	116.723137	8.261939	964.359478	0.001037
43	0.007649	130.729914	8.269589	1,081.082615	0.000925
44	0.006830	146.417503	8.276418	1,211.812529	0.000825
45	0.006098	163.987604	8.282516	1,358.230032	0.000736
46	0.005445	183.666116	8.287961	1,522.217636	0.000657
47	0.004861	205.706050	8.292822	1,705.883752	0.000586
48	0.004340	230.390776	8.297163	1,911.589803	0.000523
49	0.003875	258.037669	8.301038	2,141.980579	0.000467
50	0.003460	289.002190	8.304498	2,400.018249	0.000417

TABLAS DE INTERÉS i = 12.5%

Función	Valor
i	0.125000
$i^{(2)}$	0.121320
$i^{(3)}$	0.120126
$i^{(4)}$	0.119534
$i^{(6)}$	0.118947
$i^{(12)}$	0.118363
d	0.111111
$d^{(2)}$	0.114382
$d^{(3)}$	0.115501
$d^{(4)}$	0.116066
$d^{(6)}$	0.116634
$d^{(12)}$	0.117207
δ	0.117783
$(1+i)$	1.125000
$(1+i)^{1/2}$	1.060660
$(1+i)^{1/3}$	1.040042
$(1+i)^{1/4}$	1.029884
$(1+i)^{1/6}$	1.019824
$(1+i)^{1/12}$	1.009864
$(1-d)$	0.888889
$(1-d)^{1/2}$	0.942809
$(1-d)^{1/3}$	0.961500
$(1-d)^{1/4}$	0.970984
$(1-d)^{1/6}$	0.980561
$(1-d)^{1/12}$	0.990233

n	v^n	$(1+i)^n$	$a_{\overline{n}\rceil}$	$s_{\overline{n}\rceil}$	$1/s_{\overline{n}\rceil}$
1	0.888889	1.125000	0.888889	1.000000	1.000000
2	0.790123	1.265625	1.679012	2.125000	0.470588
3	0.702332	1.423828	2.381344	3.390625	0.294931
4	0.624295	1.601807	3.005639	4.814453	0.207708
5	0.554929	1.802032	3.560568	6.416260	0.155854
6	0.493270	2.027287	4.053839	8.218292	0.121680
7	0.438462	2.280697	4.492301	10.245579	0.097603
8	0.389744	2.565785	4.882045	12.526276	0.079832
9	0.346439	2.886508	5.228485	15.092061	0.066260
10	0.307946	3.247321	5.536431	17.978568	0.055622
11	0.273730	3.653236	5.810161	21.225889	0.047112
12	0.243315	4.109891	6.053476	24.879125	0.040194
13	0.216280	4.623627	6.269757	28.989016	0.034496
14	0.192249	5.201580	6.462006	33.612643	0.029751
15	0.170888	5.851778	6.632894	38.814223	0.025764
16	0.151901	6.583250	6.784795	44.666001	0.022388
17	0.135023	7.406156	6.919818	51.249252	0.019512
18	0.120020	8.331926	7.039838	58.655408	0.017049
19	0.106685	9.373417	7.146523	66.987334	0.014928
20	0.094831	10.545094	7.241353	76.360751	0.013096
21	0.084294	11.863231	7.325647	86.905845	0.011507
22	0.074928	13.346134	7.400575	98.769075	0.010125
23	0.066603	15.014401	7.467178	112.115210	0.008919
24	0.059202	16.891201	7.526381	127.129611	0.007866
25	0.052624	19.002602	7.579005	144.020812	0.006943
26	0.046777	21.377927	7.625782	163.023414	0.006134
27	0.041580	24.050168	7.667362	184.401340	0.005423
28	0.036960	27.056438	7.704322	208.451508	0.004797
29	0.032853	30.438493	7.737175	235.507946	0.004246
30	0.029203	34.243305	7.766378	265.946440	0.003760
31	0.025958	38.523718	7.792336	300.189745	0.003331
32	0.023074	43.339183	7.815410	338.713463	0.002952
33	0.020510	48.756581	7.835920	382.052645	0.002617
34	0.018231	54.851153	7.854151	430.809226	0.002321
35	0.016205	61.707547	7.870356	485.660379	0.002059
36	0.014405	69.420991	7.884761	547.367927	0.001827
37	0.012804	78.098615	7.897565	616.788918	0.001621
38	0.011382	87.860942	7.908947	694.887532	0.001439
39	0.010117	98.843559	7.919064	782.748474	0.001278
40	0.008993	111.199004	7.928057	881.592033	0.001134
41	0.007994	125.098880	7.936051	992.791037	0.001007
42	0.007105	140.736240	7.943156	1,117.889917	0.000895
43	0.006316	158.328270	7.949472	1,258.626157	0.000795
44	0.005614	178.119303	7.955086	1,416.954426	0.000706
45	0.004990	200.384216	7.960077	1,595.073729	0.000627
46	0.004436	225.432243	7.964513	1,795.457946	0.000557
47	0.003943	253.611274	7.968456	2,020.890189	0.000495
48	0.003505	285.312683	7.971961	2,274.501462	0.000440
49	0.003115	320.976768	7.975076	2,559.814145	0.000391
50	0.002769	361.098864	7.977845	2,880.790913	0.000347

GLOSARIO

Acción común (*COMMON STOCK*)

Parte del capital social de una empresa que da a su tenedor un derecho patrimonial (de participar en las utilidades y valor contable de la empresa), así como un derecho corporativo (de participar en la asamblea general de accionistas).

Aceptación bancaria (*BANK ACCEPTANCE*)

Instrumento de deuda emitido en el mercado de dinero por instituciones bancarias y cotizado a un descuento de su valor nominal.

Bolsa de valores (*STODK EXCHANGE*)

Organización para la compraventa de valores que normalmente reúne los requisitos de un mercado organizado: foro de operación, intermediarios, autoridades y reglas de inscripción, operación e información.

Bono cupón cero (*ZERO COUPON BOND*)

Bono cuyo rendimiento se obtiene por medio de un descuento sobre su valor nominal.

Bono indexado (*INDEX BOND*)

Obligación cuyo valor nominal está ligado a un índice. El Udibono, cuyo valor nominal está denominado en UDIs, que derivan su valor del Índice Nacional de Precios al Consumidor, es un ejemplo de un bono indexado.

Boom (*BOOM*)

Auge exagerado en el precio de un bien, seguido por un crac.

Bursatilidad (*MARKETABILITY*)

La facilidad de comprar o vender una inversión financiera. En este contexto, sinónimo de liquidez.

Calificación de deuda (*DEBT RATING*)

Expresión de una opinión acerca de la probabilidad y riesgo relativo de la capacidad e intención de un emisor de un instrumento de deuda de efectuar su pago precisamente en el plazo acordado.

Calificadora de valores (*RATING AGENCY*)

Empresa que emite una calificación de deuda para instrumento de deuda emitidos por el sector público y privado con criterios consistentes y comparables, para facilitar su colocación inicial y operación posterior en los mercados financieros.

Cartera (*PORTFOLIO*)

Una combinación de inversiones financieras.

Contrato adelantado (*FORWARD*)

Compromiso entre dos partes de comprar o vender un bien subyacente en un tiempo futuro a un precio preestablecido con montos y plazos no estandarizados, en forma extrabursátil.

Crac (*CRASH*)

Caída del precio de un bien que confirma la exageración de su precio en el boom anterior.

Crisis financiera (*FINANCIAL CRISIS*)

Sacudimiento del sistema financiero de un país o grupo de países que afecta, o puede afectar, a la economía real.

Curva de rendimiento (*YIELD CURVE*)

Representación gráfica de los rendimientos a distintos plazos de instrumentos de deuda contra sus plazos correspondientes, utilizada para el pronóstico de las tasas de interés.

Depreciación (*DEPRECIATION*)

Refiriéndose al tipo de cambio, el proceso de disminución gradual de la paridad de una moneda en relación con otra.

Derivado financiero (*FINANCIAL DERIVATIVE*)

Derivado cuyo subyacente es un instrumento financiero.

Desplazamiento (*DISPLACEMENT)*

Cambio drástico en el ambiente de inversión.

Devaluación (*DEVALUATION)*

Cambio brusco de la paridad de una moneda en relación con otra.

Duración (*DURATION*)

Medición utilizando el concepto de valor presente del vencimiento promedio de instrumentos de deuda que indica su sensibilidad a cambios en el nivel general de tasas de interés.

Emisor(a) (*ISSUER)*

Entidad que capta fondos por medio de la emisión de valores.

Especulación *(SPECULATION)*

Inversión a corto plazo, con alto riesgo y la expectativa de alto rendimiento.

Estándar (*BENCHMARK)*

Indicador del comportamiento de una categoría de inversión, normalmente medido por un índice, para fines de planeación y evaluación del desempeño de una cartera de inversiones.

Euro (*EURO)*

Nueva moneda de once países de la Unión Europea, que entró en vigor en 1999.

Eurobono *(EUROBOND)*

Bono, denominado en una eurodivisa, emitido en el mercado internacional de capitales por un emisor del sector público o privado.

Eurodivisa (*EUROCURRENCY)*

Divisa operada o depositada fuera de su país de emisión (ejemplo el "eurodólar")

Extrabursátil *(OVER THE COUNTER –OTC*)

Término aplicado a la operación de un instrumento financiero que no se lleva a cabo en un mercado organizado, o al instrumento mismo.

Forward (*FORWARD)*

Véase "contrato adelantado"

Futuro (*FUTURE)*

Compromiso entre dos partes de comprar o vender un bien subyacente en un tiempo futuro a un precio preestablecido con montos y plazos estandarizados en un mercado organizado.

Globalización (*GLOBALIZATION)*

El proceso de aumento de la interacción internacional y entre sí de ideas, información, capital, bienes y servicios y personas.

INDEVAL –Instituto para el Depósito de Valores (*SECURITIES DEPOSIT INSTITUTE)*

Organización establecida en México en 1978 para la custodia, compensación, liquidación, transferencia y administración de valores.

Inflación (*INFLATION)*

Aumento sostenido del nivel general de precios, normalmente medido por el aumento porcentual del índice nacional de precios al consumidor (INPC).

Inscripción (*LISTING)*

Proceso por el cual un instrumento de inversión se registra en un mercado organizado (normalmente una bolsa), después de satisfacer los requisitos de información, de tamaño y de número de inversionistas del mercado y de sus autoridades correspondientes.

Inversión (*INVESTMENT)*

Aportación de recursos para obtener un beneficio futuro.

Inversión individual *(INDIVIDUAL INVESTMENT)*

Inversión hecha por personas físicas.

Inversión institucional (*INSTITUTIONAL INVESTMENT)*

Inversión hecha por personas morales: compañías de seguros, empresas, fideicomisos, fondos de beneficencia, fondos de pensiones, instituciones financieras, o sociedades de inversión).

LIBOR (*LIBOR)*

LONDON INTERBANK OFFERED RATE. Tasa de interés ofrecida en el mercado de eurodivisas de Londres para depósitos de un plazo y de una divisa determinada.

Liquidez (*LIQUIDITY)*

La facilidad de comprar o vender una inversión financiera.

Margen *(MARGIN)*

Depósito de garantía que se requiere en los mercados de derivados para cubrir cualquier desviación en los precios pactados y asegurar su cumplimiento al vencimiento).

Mercado de capitales (*MARKET CAPITAL)*

Mercado de inversiones financieras en que se comercian instrumentos de largo plazo (en México, principalmente acciones y obligaciones).

Mercado de dinero (*MONEY MARKET)*

Mercado de inversiones financieras en que se comercian instrumentos de deuda de corto plazo y/o fácil realización (en México, principalmente Cetes, aceptaciones bancarias, papel comercial, y Udibonos).

Mercado de valores (*SECURITIES MARKET)*

Mercado organizado para la compraventa de inversiones financieras. Normalmente consiste en varios mercados subsidiarios: un mercado de capitales (para inversiones de largo plazo), un mercado de dinero (para inversiones a corto plazo), un mercado primario (para la nueva emisión de valores) y un mercado secundario (para la compraventa de valores ya emitidos).

Mercado primario (*PRIMARY MARKET)*

Mercado donde se colocan las nuevas emisiones de valores con una oferta pública inicial, una oferta primaria, una oferta secundaria o una oferta mixta.

Mercado secundario *(SECONDARY MARKET)*

Mercado donde se operan instrumentos de inversión después de su colocación inicial en el mercado primario.

Opción (*OPTION)*

Contrato que confiere el derecho de comprar (*CALL OPTION*) o vender (*PUT OPTION*) una cantidad del subyacente (*UNDERLYING)* a un precio de ejercicio (*STRIKE PRICE*) determinado por un periodo o en una fecha determinada.

Papel comercial (*COMMERCIAL PAPER)*

Instrumento de deuda privada del mercado de dinero cotizado a un descuento de su valor nominal.

Paridad (*PARITY)*

Tipo de cambio de una moneda en relación con otra.

Plazo (*TERM)*

Periodo que transcurre entre la compra de una inversión y su venta, o vencimiento.

Prima por riesgo (*RISK PREMIUM)*

El rendimiento esperado adicional requerido por un inversionista al incurrir en un riesgo esperado adicional.

Rendimiento *(RETURN O YIELD)*

Beneficio que se obtiene de una inversión por medio de ganancias de capital, intereses o dividendos, normalmente expresado como un porcentaje del monto invertido.

Reporto (*REPO)*

Operación del mercado de dinero en que una institución financiera garantiza una tasa de rendimiento a su contraparte por medio de una operación de venta con el compromiso simultáneo de recompra de su inversión en una fecha posterior.

Riesgo *(RISK)*

Posibilidad de que el rendimiento esperado de una inversión no se realice.

La variación *(VARIATION*) o volatilidad (*VOLATILITY)* de los rendimientos, medida por la desviación estándar de los rendimientos históricos.

Riesgo pais (*COUNTRY RISK)*

El concepto de riesgo aplicado a los instrumentos de inversión de un país.

Sociedad de inversión (*MUTUAL FUND)*

Fondo establecido para inversión en una variedad de instrumentos de inversión que ofrece al inversionista las ventajas de diversificación y administración profesional de sus inversiones.

Subyacente (*UNDERLYING)*

Bien o instrumento del cual depende el valor de un derivado.

Swap (*SWAP)*

Derivado que consiste en el intercambio de un flujo de pagos por otro.

Tasa anual (*ANNUAL RATE)*

Refiriéndose a rendimiento, tasa de rendimiento expresada en forma anual, sin especificar la reinversión o no de los rendimiento obtenidos durante el año.

Tasa bruta (*GROSS RATE)*

Tasa de rendimiento sin deducción de impuestos.

Tasa carente de riesgo *(RISK FREE RATE)*

Tasa de rendimiento de un país que se puede obtener de un instrumento de deuda denominada en la moneda del país con liquidez y sin riesgo de que no se obtenga el rendimiento esperado.

Tasa de descuento (DISCOUNT RATE)

Tasa que se utiliza para calcular el precio de compra-venta de instrumentos del mercado de dinero.

Sinónimo de la tasa de rendimiento (R) que se utiliza para descontar flujos futuros esperados de una inversión para calcular su valor presente.

Tasa interna de rendimiento (TIR) (INTERNAL RATE OF RETURN–IRR)

Tasa de rendimiento que descuenta los flujos futuros esperados de una inversión de tal manera que la suma de los flujos sea igual a la inversión original.

Tasa neta (NET RATE)

Tasa de rendimiento con deducción de impuestos.

Tasa nominal (NOMINAL RATE)

Refiriéndose a instrumentos de deuda, tasa de rendimiento pactado sobre el valor nominal de los mismos.

Tasa real (REAL RATE)

Tasa de rendimiento de una inversión deflactada por la inflación del plazo correspondiente.

UDI –Unidad de Inversión (*UDI*)

Unidad de inversión cuyo valor aumenta a diario con la tasa de inflación, medida por el aumento del Indice Nacional de Precios al Consumidor: utilizada como base para la valuación de instrumentos de deuda.

Valor nominal (PAR VALUE)

Monto principal de un instrumento de deuda.

Valor presente (PRESENT VALUE)

Valor calculado como la suma de flujos futuros esperados de una inversión descontados por una tasa de rendimiento (o descuento)

Valor presente neto (NET PRESENT VALUE)

Valor calculado como la diferencia entre la suma de flujos futuros esperados de una inversión descontados por una tasa de rendimiento (o descuento) y la inversión original.