



# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

“ASPECTOS DE DISEÑO Y ANÁLISIS  
ESTRUCTURAL DE UNA CANOA  
DE MATERIALES COMPUESTOS”

## T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO:  
I N G E N I E R O C I V I L  
P R E S E N T A:  
PETER RAFAEL CÁMARA STOUGAARD

*DIRECTOR DE TESIS:*  
DR. JOSÉ ALBERTO ESCOBAR SÁNCHEZ



MÉXICO, D.F.,

JULIO DE 2004



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

ESTA TESIS NO SALE  
DE LA BIBLIOTECA



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA  
DIRECCIÓN  
FING/DCTG/SEAC/UTIT/070/04

Señor  
PETER RAFAEL CÁMARA STOUGAARD  
Presente

En atención a su solicitud me es grato hacer de su conocimiento el tema que propuso el profesor DP. JOSÉ ALBERTO ESCOBAR SÁNCHEZ, que aprobó esta Dirección, para que lo desarrolle usted como tesis de su examen profesional de INGENIERO CIVIL.

**"ASPECTOS DE DISEÑO Y ANÁLISIS ESTRUCTURAL DE UNA CANOA DE MATERIALES COMPUESTOS"**

- INTRODUCCIÓN
- I. MARCO TEÓRICO BÁSICO
- II. GENERACIÓN DE MODELO
- III. ANÁLISIS
- IV. ESTUDIO PARAMÉTRICO
- V. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Ruego a usted cumplir con la disposición de la Dirección General de la Administración Escolar en el sentido de que se imprima en lugar visible de cada ejemplar de la tesis el Título de ésta.

Asimismo le recuerdo que la Ley de Profesiones estipula que deberá prestar servicio social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito para sustentar Examen Profesional.

Atentamente  
"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"  
Cd. Universitaria a 17 de Junio de 2004.  
EL DIRECTOR

M.C. GERARDO FERRANDO BRAVO  
GFB/AJP/crc.

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.

NOMBRE: Peter Rafael Cámara Stougaard

FECHA: 23 Junio 2004

FIRMA: [Firma]

## Agradecimientos



*A la Universidad Nacional Autónoma de México,  
por darme un sentido de pertenencia y ubicación.*

*A la Facultad de Ingeniería,  
por brindarme más que una educación.*

*Al Doctor José Alberto Escobar Sánchez, director de esta tesis,  
por ser el reflejo de mi motivación y vehículo de mis aspiraciones.*

*A los miembros del jurado, maestros y amigos,  
por enriquecer no sólo este trabajo escrito,  
sino toda mi trayectoria académica.*



*A los Maestros de esta Facultad,  
por acción u omisión forjaron mi carácter  
y moldearon mi intelecto.*

*Al Capítulo Estudiantil del American Concrete Institute,  
por convencerme de la nobleza del concreto  
e interesarme en su estudio.*



## **Dedicatorias**

*A mis padres Ulla y Ricardo.*

*A mis hermanos Roberto y Nicolás.*

*A mis abuelos, tíos y primos.*

*A mis entrañables amigos y amigas, José Manuel, Samantha, Sergio,  
Ana, Edgar, Adriana, Sato, Daniel,  
Rodrigo, Lucia, Salvador, Gabriela, Diego, Carlos,  
Cesar, Arturo, Sayuri, Eduardo, Inga y Virgilio,  
por nunca tomarme demasiado enserio  
y haberme apoyado a lo largo de todo el recorrido.*

*A los chicos ACI-Canoas, Roberto, Sergio, Juan José,  
Raúl, Juan, Milton, Aarón, Jorge, Guillermo y Carlos,  
por demostrar que el trabajo en equipo no  
es sólo una teoría de la administración.*

*A Jorge Mario Magallón, Araceli Barrios,  
Alejandro Encinas, Gerardo Ferrando y Ulises Lara,  
por ser mis mentores y otorgarme su confianza.*

# Índice

Índice .....	v
Introducción.....	viii
Antecedentes.....	viii
Justificación del estudio .....	xi
Presentación del trabajo.....	xii
Limitaciones del estudio.....	xiv
1 Marco teórico básico .....	1-1
1.1 Fundamentos de análisis estructural .....	1-1
1.1.1 Relaciones esfuerzo-deformación .....	1-1
1.1.2 Deducción de las matrices utilizadas en análisis estructural .....	1-4
1.1.3 Combinación de esfuerzos y deformaciones.....	1-8
1.1.4 Criterios de falla.....	1-10
1.2 Método del elemento finito .....	1-11
1.2.1 Funciones de forma .....	1-11
1.2.2 Elementos finitos a utilizar.....	1-11
1.3 Materiales compuestos.....	1-13
1.3.1 Qué son los materiales compuestos.....	1-13
1.3.2 Por qué usar materiales compuestos .....	1-19

## Introducción

---

2	Generación del modelo analítico de la canoa.....	2-1
2.1	Diseño hidrodinámico.....	2-1
2.1.1	Factores a considerar en el diseño.....	2-1
2.1.2	Parámetros de diseño.....	2-5
2.1.3	Programa de computo para análisis hidrodinámico.....	2-7
2.2	Elección del programa de análisis Estructural.....	2-8
2.3	Importación al programa de análisis.....	2-10
2.3.1	Procedimiento.....	2-10
2.3.2	Propiedades del modelo.....	2-10
2.3.3	Definición de propiedades de los materiales.....	2-11
2.4	Discusión sobre condiciones de frontera.....	2-16
2.4.1	Problemática.....	2-16
2.4.2	Estudio de diversas condiciones de frontera.....	2-17
2.4.3	Condición auto balanceada de carga.....	2-19
2.5	Modelado de las condiciones de carga.....	2-21
2.5.1	Peso de los remadores.....	2-21
2.5.2	Empuje hidrostático del agua.....	2-24
2.5.3	Peso de la canoa.....	2-24
2.5.4	Flexión reversible.....	2-25
3	Análisis.....	3-1
3.1	Estudios estimativos.....	3-1
3.1.1	Análisis simple.....	3-2
3.1.2	Análisis detallado.....	3-4

---



## Introducción

---

3.2	Análisis tridimensional.....	3-7
3.2.1	Carga normal .....	3-7
3.2.2	Esfuerzos fuera de los apoyos .....	3-7
3.2.3	Carga Invertida.....	3-8
3.3	Comparación de Resultados.....	3-9
4	Estudio Paramétrico .....	4-1
4.1	Introducción .....	4-1
4.1.1	Consideraciones para análisis .....	4-2
4.1.2	Procedimiento.....	4-2
4.2	Variación del Espesor del Casco.....	4-3
4.3	Utilización de costillas en la estructura.....	4-5
4.4	Disminución del espesor del casco. ....	4-7
4.5	Variación del módulo de elasticidad de las costillas .....	4-9
5	Conclusiones y Recomendaciones .....	5-1
5.1	Recomendaciones.....	5-5
	Apéndices .....	a
	Referencias .....	b
	Apéndice A. Condiciones de Frontera .....	d
	Apéndice B. Propiedades geométricas de la canoa.....	g
	Apéndice C. Módulo de Sección.....	n

# Introducción

## ***Antecedentes***

Construyendo, diseñando, proyectando, planeando, manteniendo, investigando, o demoliendo, los ingenieros civiles del mundo y de este país han provocado un importante cambio en la calidad de vida de las personas y han modificado para siempre su entorno.

La versatilidad de la ingeniería civil se manifiesta cuando los que la ejercen se dedican a gestionar proyectos de inversión, coordinar proyectos de investigación, y dirigir sectores productivos enteros buscando que las cosas se hagan mejor y a menor costo.

Desde un arte bastante empírico a una profesión basada en el método científico y posicionada en la vanguardia tecnológica, la ingeniería civil ha evolucionado y progresado para facilitar el desarrollo de las naciones y las comunidades.

Con el objetivo de generar en los futuros ingenieros civiles la conciencia de la grandeza de su profesión, es requisito crear instancias de integración que permitan a los estudiantes practicar los aspectos mencionados anteriormente. Para ello, organismos como el *American Concrete Institute* (ACI), el *Colegio de Ingenieros Civiles de México* (CICM), y sobretodo el *American Society of Civil Engineers* (ASCE) proponen anualmente concursos estudiantiles que involucran no sólo aspectos técnicos de la profesión sino también de gerencia y administración.

## Introducción

---

Ejemplo fundamental de esta propuesta es el concurso nacional de canoas de concreto (NCCC por sus siglas en inglés). A mediados de los años setenta, diversas agrupaciones estudiantiles de universidades de Estados Unidos de América comenzaron a competir en la construcción y operación de canoas de concreto, al retomar una práctica que inició a principios del siglo veinte. En efecto, las embarcaciones de concreto no constituyen un desarrollo novedoso, y muchas son las referencias bibliográficas que describen su concepción en los años de las guerras mundiales como posibilidad de ahorrar acero para su uso en armamento y equipamiento bélico (Chávez, 2003).

Sin embargo, esta nueva generación de embarcaciones construidas con concreto no busca únicamente hacer uso del principio de Arquímedes para lograr su flotabilidad sino también demostrar que el concreto es un material versátil y adaptable a infinitas necesidades. Algunos aspectos que se logran en el diseño de este concreto son:

- Concreto de baja contracción
- Concreto de alta resistencia
- Concreto de baja densidad (flota)
- Concreto flexible (no se agrieta)
- Concreto estético (acabados perfectos y cromáticos)

En las décadas de 1970 y 1980, los equipos constructores de canoas de concreto de las universidades comenzaron a enfrentarse en eventos regionales que constituyeron una motivación adicional para el mejoramiento constante de los materiales y las embarcaciones. En 1987, tras largas negociaciones con el ASCE y Master Builder Technologies (empresa

---

## Introducción

---

dedicada a la producción de aditivos para concreto) se logró instituir un evento de envergadura nacional que reuniría a los veinte mejores equipos de los EEUU a la vez que incrementó la exigencia del concurso al incluir diversos certámenes, regular las características de los productos y establecer la elegibilidad de los participantes. Es así, que el concurso se compuso de un reporte escrito, una presentación oral, un mostrador de dimensiones definidas en que se exponen las cualidades del producto, cinco carreras de distintas modalidades y la evaluación de la calidad del producto. En general siempre se ha favorecido el aspecto académico en los porcentajes de ponderación de cada prueba por lo que no basta tener remadores fuertes para ganar la competencia.

Las reglas son modificadas anualmente y buscan corregir errores de interpretación así como reducir la hegemonía de ciertos equipos promoviendo cambios radicales de diseño. Aún así, las quince competencias nacionales de los EE.UU. han sido llevadas por sólo seis universidades y tan solo tres escuelas han logrado doce campeonatos. La realidad es que se trata de un evento muy cerrado y extremadamente competitivo. La experiencia ha mostrado que se requiere de avances tecnológicos constantes para mantenerse en el pelotón y revoluciones para lograr estar en punta.

En 2002, el equipo de la Universidad Nacional Autónoma de México y sus dieciséis integrantes logró una victoria contundente en el campeonato nacional organizado por la UNAM y patrocinado por MBT y el ACI Sección Centro y Sur de México. Fue invitado a participar en el Campeonato Nacional celebrado en el marco del 150 aniversario de la ASCE en Madison Wisconsin, JUL. Su participación fue muy respetable, especialmente tomando en consideración los múltiples obstáculos que vencieron para lograr

---

## Introducción

---

asistir. Sin embargo, resultó evidente que el éxito en eventos de esta índole no es resultado de un año de trabajos intensos, sino de la acumulación de experiencia e institucionalización del evento en el seno de un equipo bien organizado y capaz de dar continuidad a esos trabajos.

### ***Justificación del estudio***

La participación en el Concurso de Canoas de Concreto se justifica ampliamente. En efecto, es de reconocer que al participar con calidad y dignidad se motiva a los alumnos integrantes del equipo y de toda la comunidad. Asimismo, se demuestra la vigencia y calidad de la Ingeniería Civil Mexicana. Por ende, la visión de los ingenieros y su actitud hacia el mundo se beneficia. Recíprocamente, la sociedad percibe la importancia y beneficios que le brinda la ingeniería.

Considerando la exigencia técnica del certamen así como la necesidad de implementar cambios revolucionarios, las distintas áreas del proyecto deberían dedicarse a un trabajo de investigación exhaustivo que garantizara los cimientos para equipos y canoas futuras. Buscando optimizar el uso de materiales de vanguardia y reducir la incertidumbre en el cálculo de esfuerzos a los que se somete la canoa (estructura) en las diferentes carreras (condiciones de carga) y condiciones de apoyo (condiciones de frontera) se llevaría la idealización de la canoa a un modelo en elementos finitos que permitiera conocer la magnitud y localización de esfuerzos críticos de trabajo. Quedaba claro que realizar este ambicioso trabajo con la seriedad requerida sería complicado sino imposible y sobretodo, el registro y

## Introducción

---

documentación del mismo sería insuficiente para garantizar continuidad y permitir a los futuros equipos dedicarse a innovar e investigar.

Esta tesis forma parte de un grupo de trabajos de titulación emprendidos con la finalidad de profundizar el conocimiento de las diversas áreas de proyecto y hacer posible una óptima participación del equipo de canoas de concreto de la Universidad Nacional Autónoma de México para el año 2003 con miras hacia el futuro.

### ***Presentación del trabajo***

El trabajo que se presenta se compone de cinco capítulos y los anexos correspondientes. El primer capítulo presenta el marco teórico básico que incluye conceptos de estructuras, elementos de mecánica del medio continuo, fundamentos de la teoría de la elasticidad, presentación de los elementos finitos, concluyendo con las bases de los materiales compuestos. Todo esto con la finalidad de establecer las teorías y conceptos que se requieren para la adecuada implementación de un modelo de elementos finitos.

En el segundo capítulo se presenta el proceso de generación del modelo en elementos finitos de la canoa de concreto. De manera sucinta se explica el uso del programa de análisis hidrodinámico utilizado para la generación del casco de la canoa. Posteriormente se detallan las adecuaciones requeridas para importar al programa de análisis estructural dicho casco así como las propiedades del modelo hidrodinámico. Utilizando los conceptos presentados en el primer capítulo se discuten las propiedades

## Introducción

---

mecánicas de los materiales a utilizar en la generación del compuesto para establecer los valores de módulo de elasticidad, módulo de Poisson y espesor del material que conforma el casco en el modelo. Así mismo será necesaria una discusión sobre condiciones de carga y condiciones de apoyo (estático o dinámico) a realizar. Para ello, se evalúan las diversas posibilidades para modelar las condiciones de apoyo o frontera y determinar las acciones estableciendo hipótesis simplificadoras.

El tercer capítulo presenta una serie de modelaciones simplistas que permiten tener idea del orden de magnitud esperado en los esfuerzos así como el procedimiento de análisis. Se procede a realizar el análisis tridimensional y entonces se hace una comparación de los resultados obtenidos.

En el cuarto capítulo se realiza una evaluación paramétrica de diversas opciones estructurales, y se discute en particular la pertinencia del uso de “costillas”. Se busca estudiar la relación entre dos parámetros fundamentales (espesor de casco y módulo de elasticidad) y el correspondiente valor crítico de esfuerzos. Asimismo, se estudian los posibles efectos de incrementar la rigidez de las costillas en el comportamiento de la estructura en su conjunto.

El quinto capítulo presenta las conclusiones y recomendaciones para la continuación de estos trabajos para su integración en futuras canoas de concreto.

### ***Limitaciones del estudio***

El estudio se concentrará en una canoa modelada mediante cascarones y su eventual refuerzo con costillas estructurales. Por motivos prácticos y diversas conclusiones que se abordarán en los capítulos correspondientes, los materiales se considerarán homogéneos, isotrópicos, elástico-lineales y con una deformación por efectos térmicos despreciable. Las deformaciones se considerarán lo suficientemente pequeñas para no tomar en consideración una eventual no-linealidad de la geometría.

Por otro lado, las pruebas físicas que brinden las propiedades de los materiales se limitarán a la compresión en cubos para determinar el módulo de elasticidad.



# 1 Marco teórico básico

En este capítulo se esbozan los conceptos teóricos mínimos requeridos para el desarrollo de un análisis por el método del elemento finito y asimismo introducir aspectos esenciales sobre materiales compuestos para justificar su utilización.

## 1.1 Fundamentos de análisis estructural

### 1.1.1 Relaciones esfuerzo-deformación

Esta sección presenta las relaciones para materiales lineales. Aunque la presentación puede hacerse con la misma facilidad considerando la deformación térmica, el problema en cuestión no tomará en cuenta dichos términos por lo que se omite del desarrollo posterior.

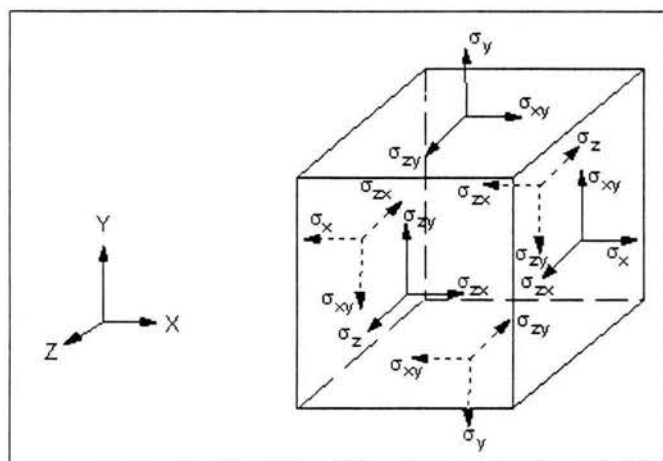


Figura 1-1 Cubo diferencial de esfuerzos

## Marco teórico básico

---

El esfuerzo se relaciona con las deformaciones mediante la Ley de Hooke:

$$\vec{\sigma} = \mathbf{D}\vec{\varepsilon} \quad (1.1)$$

donde:

$\vec{\sigma} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \sigma_{xy} \quad \sigma_{yz} \quad \sigma_{xz}]^T$  es el vector esfuerzo (Figura 1-1)

$\mathbf{D}$  es la matriz de elasticidad o matriz de rigidez elástica o matriz esfuerzo-deformación.

$\vec{\varepsilon} = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \varepsilon_{xy} \quad \varepsilon_{yz} \quad \varepsilon_{xz}]^T$  es el vector de deformación elástica.

Por convención, los esfuerzos y las deformaciones directas son positivos en tensión y negativos en compresión. Para cortantes, positivo significa que ambos ejes positivos giran uno hacia el otro.

La ecuación (1.1) puede ser invertida:

$$\vec{\varepsilon} = \mathbf{D}^{-1}\vec{\sigma} \quad (1.2)$$

donde

$$\mathbf{D}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/E_x & -\nu_{xy}/E_x & -\nu_{xz}/E_x & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{yx}/E_y & 1/E_y & -\nu_{yz}/E_y & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{zx}/E_z & -\nu_{zy}/E_z & 1/E_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{yz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{xz} \end{bmatrix} \text{ es}$$

la matriz de rigidez. Los términos típicos de  $\mathbf{D}^{-1}$  son:

$E_x$  = Módulo de Young o de elasticidad en la dirección x

$\nu_{xy}$  = Relación de Poisson mayor

$\nu_{yx}$  = Relación de Poisson menor

$G_{xy}$  = Módulo de cortante en el plano xy

Considerando materiales isotrópicos y simetría en la matriz:

$$E = E_x = E_y = E_z$$

$$\nu = \nu_{xy} = \nu_{yz} = \nu_{xz}$$

$$G = G_{xy} = G_{yz} = G_{xz} = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

La matriz  $\mathbf{D}^{-1}$  queda:

---

$$\mathbf{D}^{-1} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}$$

### 1.1.2 Deducción de las matrices utilizadas en análisis estructural

El principio de trabajo virtual establece que un cambio virtual (diferencial o muy pequeño) de la energía de deformación interna debe compensarse con un cambio idéntico en el trabajo externo debido a las cargas aplicadas.

Matemáticamente:

$$\delta U = \delta V \tag{1.3}$$

donde:

$U = U_1 + U_2$  es la energía de deformación (trabajo interno)

$V$  es el trabajo externo

$\delta$  es un operador virtual

La energía de deformación virtual es:

$$\delta U_1 = \int_{vol} \delta \bar{\epsilon} \bar{\sigma} d(vol)^T \tag{1.4}$$

## Marco teórico básico

---

donde  $vol$  es el volumen del elemento.

Para materiales y geometría lineales, las ecuaciones (1.3) y (1.4) se combinan en:

$$\delta U_1 = \int_{vol} \delta \bar{\epsilon}^T \mathbf{D} \bar{\epsilon} d(vol) \quad (1.5)$$

Las deformaciones se relacionan con los desplazamientos en los nodos de los elementos:

$$\bar{\epsilon} = \mathbf{B} \bar{u} \quad (1.6)$$

donde:

$\mathbf{B}$  es la matriz deformación-desplazamiento basado en la funciones de forma de los elementos

$\bar{u}$  es el vector de desplazamiento nodal.

Combinando (1.5) y (1.6), y considerando que  $\bar{u}$  no varía en el volumen:

$$\delta U_1 = \delta \bar{u}^T \left( \int_{vol} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d(vol) \right) \bar{u} \quad (1.7)$$

Otra forma de energía virtual de deformación se presenta cuando una superficie se desplaza contra una resistencia distribuida, sin embargo se desprecia este factor puesto que no será de relevancia en el análisis por realizar.

## Marco teórico básico

---

A continuación se presenta el trabajo virtual externo considerando primeramente los efectos inerciales.

$$\delta V_1 = - \int_{vol} \delta \bar{w}^T \frac{\bar{F}^a}{vol} d(vol) \quad (1.8)$$

donde:

$\bar{w}$  es el vector de desplazamientos de un punto cualquiera

$\bar{F}^a$  es el vector de fuerza de aceleración.

De acuerdo a la segunda ley de Newton:

$$\frac{\bar{F}^a}{vol} = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{w} \quad (1.9)$$

donde:

$\rho$  es la densidad del elemento

$t$  es el tiempo.

Los desplazamientos al interior del elemento se relacionan con los desplazamientos nodales mediante:

$$\bar{w} = \mathbf{N} \bar{u} \quad (1.10)$$

donde  $\mathbf{N}$  es la matriz de funciones de forma. Considerando que el material es homogéneo, y combinando (1.8), (1.9) y (1.10):

$$\delta V_1 = -\delta \bar{u}^T \rho \left( \int_{vol} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d(vol) \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{u} \quad (1.11)$$

## Marco teórico básico

---

Por otro lado, el vector de fuerza de presión:

$$\delta V_2 = \int_{area_p} \delta \vec{w}_n^T \vec{P} d(area_p) \quad (1.12)$$

donde:

$\vec{P}$  es el vector de presión aplicada

$area_p$  es el área sobre la cual se ejerce la presión.

Combinando (1.10) y (1.12):

$$\delta V_2 = \delta \vec{u}^T \int_{area_p} \mathbf{N}_n \vec{P} d(area_p) \quad (1.13)$$

La definición de presiones considera que las mismas son aplicadas sobre la superficie exterior de cada elemento y son normales a las superficies.

Las fuerzas nodales aplicadas al elemento se toman en consideración mediante:

$$\delta V_3 = \delta \vec{u}^T \vec{F}_e^{nd} \quad (1.14)$$

donde  $\vec{F}_e^{nd}$  son las fuerzas nodales aplicadas al elemento.

Finalmente combinando(1.3), (1.7), (1.13), (1.11) y (1.14).

$$\begin{aligned} & \delta \bar{\mathbf{u}}^T \left( \int_{vol} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d(vol) \right) \bar{\mathbf{u}} \\ &= -\delta \bar{\mathbf{u}}^T \rho \left( \int_{vol} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d(vol) \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{\mathbf{u}} + \delta \bar{\mathbf{u}}^T \int_{area_p} \mathbf{N}_n \bar{P} d(area_p) + \delta \bar{\mathbf{u}}^T \bar{F}_e^{nd} \end{aligned} \quad (1.15)$$

Tomando en consideración que el vector  $\delta \bar{\mathbf{u}}^T$  es un conjunto de desplazamientos arbitrarios común a todos los términos de la ecuación, la condición requerida para satisfacer (1.15) es:

$$\mathbf{K}_e \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{M}_e \ddot{\bar{\mathbf{u}}} + \bar{F}_e^{pr} + \bar{F}_e^{nd} \quad (1.16)$$

donde:

$\mathbf{K}_e$  es la matriz de rigidez del elemento

$\mathbf{M}_e$  es la matriz de masa del elemento

$\ddot{\bar{\mathbf{u}}}$  es el vector de aceleración (i.e. gravedad)

$\bar{F}_e^{pr}$  es el vector de presión del elemento

La ecuación (1.16) representa la ecuación de equilibrio de un elemento.

### 1.1.3 Combinación de esfuerzos y deformaciones

Cuando un modelo tiene solamente una dirección funcional de esfuerzos y deformaciones (i.e. una columna o tensor), la comparación con valores permisibles es directa. Pero cuando existen más de un componente,

---



## Marco teórico básico

---

estos usualmente son combinados en un número que permita una comparación con un permisible. Esta sección presenta algunas formas para lograr dicha combinación.

Las deformaciones principales son calculadas a partir de los componentes de deformación mediante la ecuación cúbica:

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_0 & \frac{1}{2} \varepsilon_{xy} & \frac{1}{2} \varepsilon_{xz} \\ \frac{1}{2} \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y - \varepsilon_0 & \frac{1}{2} \varepsilon_{yz} \\ \frac{1}{2} \varepsilon_{xz} & \frac{1}{2} \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z - \varepsilon_0 \end{vmatrix} = 0 \quad (1.17)$$

donde  $\varepsilon_0$  es la deformación principal (existen tres valores).

Los tres valores principales de deformación son denominados  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  y  $\varepsilon_3$  y son ordenados tales que  $\varepsilon_1$  sea el más positivo y  $\varepsilon_3$  sea el más negativo.

La **intensidad** de deformación  $\varepsilon_I$  es el mayor de los valores absolutos de  $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_2 - \varepsilon_3$  o  $\varepsilon_3 - \varepsilon_1$ .

La deformación **Von Mises** o deformación equivalente se calcula como:

$$\varepsilon_e = \frac{1}{1+\nu} \left( \frac{1}{2} \left[ (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2 \right] \right)^{1/2} \quad (1.18)$$

De manera similar, se pueden combinar los esfuerzos.

---

El esfuerzo de **Von Mises** o esfuerzo equivalente se calcula mediante la ley de Hooke y resulta:

$$\sigma_e = \left( \frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \right)^{1/2} \quad (1.19)$$

o también

$$\sigma_e = \left( \frac{1}{2} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{xz}^2)] \right)^{1/2} \quad (1.20)$$

### 1.1.4 Criterios de falla

A pesar de no contar con información detallada resultante de ensayos de laboratorio para determinar los esfuerzos y deformaciones permisibles en los materiales a utilizarse, el análisis estructural no tiene sentido si no se realiza para determinar si los mismos serán capaces de soportar las solicitaciones a las que están sometidos bajo las diversas condiciones de carga.

Para resistencia a tensión, el esfuerzo principal  $\sigma_1$  será comparado con la resistencia a tensión del material. En el caso de compresión convendrá comparar el esfuerzo principal  $\sigma_3$  con el esfuerzo permisible a compresión.

Para fines comparativos entre alternativas estructurales, convendrá utilizar el esfuerzo de Von Mises. El esfuerzo de Von Mises se conoce también como el esfuerzo de máxima distorsión.

## **1.2 Método del elemento finito**

No se trata aquí de presentar el desarrollo completo de la teoría y formulación del uso de elementos finitos para analizar estructuras. Únicamente se considera pertinente mencionar algunos aspectos relevantes así como presentar los elementos que serán utilizados.

### **1.2.1 Funciones de forma**

El método de análisis por elementos finitos discretiza componentes estructurales en elementos y plantea funciones de forma que describen la deformación de cada elemento sujeto a cargas. Las funciones de forma pueden ser de primer orden (lineales), de segundo orden (cuadráticas) o de orden superior. Para incrementar el orden de las funciones de forma se requiere también aumentar el número de nodos que conforman cada elemento. Por ello, el método requiere una importante capacidad de cómputo.

Es importante saber que cuando el enmallado y modelado es adecuado, el resultado del análisis converge a la solución exacta por debajo. Conforme se refina el enmallado el resultado se aproxima más y más, sin exceder el resultado exacto.

### **1.2.2 Elementos finitos a utilizar**

Para el modelado del casco de la canoa se requieren elementos finitos tipo cascarón. Los programas de cómputo presentan varias formulaciones para diversas aplicaciones. Se puede mencionar que existen cascarones de 3, 4, 8 y más nodos.

## Marco teórico básico

Cuando se busca modelar cascarones curvos (como el casco de la canoa) se recomienda utilizar elementos de orden superior, es decir que utilicen funciones de forma cuadráticas o superiores puesto que de lo contrario el centro de gravedad del elemento se encontrará fuera del mismo elemento. Un elemento rectangular con 8 nodos cuenta con funciones de forma cuadráticas (SHELL93 en ANSYS).

Es importante respetar las limitaciones que tienen estos elementos avanzados. En particular, es menester que el espesor del cascarón no exceda la quinta parte del radio de curvatura, aunque resultados satisfactorios pueden obtenerse con hasta el doble del radio de curvatura.

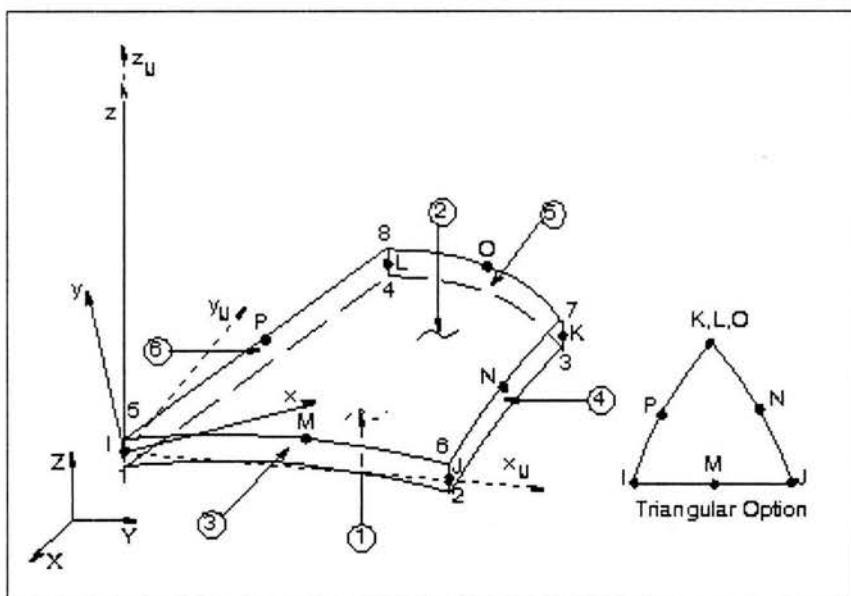


Figura 1-2 Descripción del elemento SHELL93 (ANSYS, 2002a, 2002b)

Por otro lado, para el modelado de costillas estructurales en el capítulo 4 se utilizará un elemento de viga BEAM189 que permite variar las

## Marco teórico básico

dimensiones de la sección e incluye la deformación por cortante. El elemento utiliza funciones de forma cuadráticas.

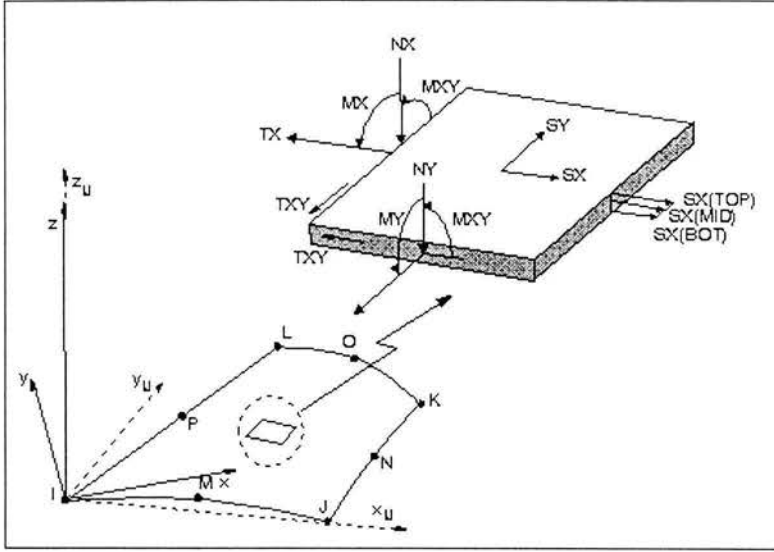


Figura 1-3 Elementos mecánicos resultantes del elemento SHELL93 (ANSYS, 2002a, 2002b)

## 1.3 Materiales compuestos

### 1.3.1 Qué son los materiales compuestos

Los compuestos no son materiales nuevos. Un compuesto es un material constituido por dos o más componentes o fases. Por ello pueden caer en esta clasificación ladrillos de adobe y otros. El mismo concreto es un material compuesto constituido una mezcla de piedras (agregados) y cemento. En la búsqueda de un desempeño mejorado en términos de diversos criterios tales como bajo precio, reducción de peso, e incremento de la resistencia se encuentra que los materiales actuales llegan a sus límites de

## Marco teórico básico

uso. Los científicos e ingenieros se encuentran en un esfuerzo constante para mejorar materiales tradicionales o incluso desarrollar materiales completamente nuevos. Los materiales compuestos son un ejemplo de esta última categoría. Existen compuestos naturales como la madera, el hueso, y las conchas de los moluscos.

Por otro lado, se espera que los materiales tengan una creciente importancia en el presente siglo (Figura 1-4).

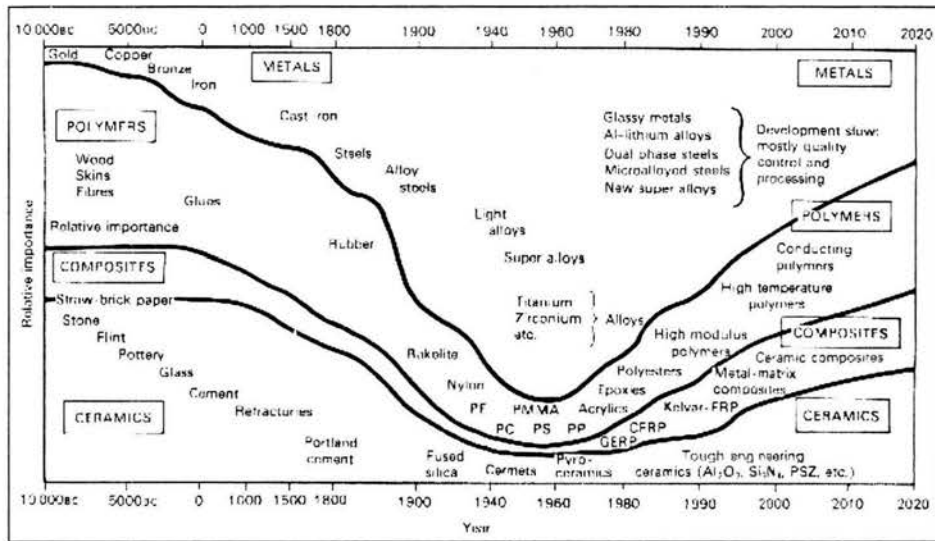


Figura 1-4 Evolución de la importancia relativa de algunos materiales a través de la historia del hombre. Se muestra también la fecha aproximada de la aparición de dichos materiales (Matthews y Rawlings, 1994)

### 1.3.1.1 Definición de compuestos

Ya se ha mencionado que un compuesto está formado por dos o más fases. Sin embargo esto no es una condición suficiente, y para declarar como compuesto un material se deben cumplir tres condiciones adicionales.

## Marco teórico básico

---

Primero los materiales constitutivos deben estar presentes en una proporción razonable, digamos superior a 5% (Matthews y Rawlings, 1994). Segundo, un material solo se considera compuesto cuando sus componentes tienen propiedades diferentes y las propiedades del compuesto difieren importantemente de aquellas de los materiales constituyentes. Los plásticos contienen pequeñas cantidades de lubricantes, absorbentes de rayos ultravioleta, entre otros que disminuyen el costo y facilitan la producción. Sin embargo no cumplen ninguna de estas condiciones, por lo que no se consideran compuestos. Finalmente, un compuesto se produce mezclando y combinando de manera íntima los materiales de varias maneras. Por ello una aleación con una micro estructura de dos fases producida mediante la solidificación de una mezcla homogénea no es normalmente considerada un compuesto. No obstante, cuando partículas de cerámica se mezclan con un metal para producir un metal que contiene una dispersión de partículas de cerámica, éste sí es un verdadero compuesto.

El material constitutivo continuo que frecuentemente está presente en mayor cantidad es denominado matriz. Generalmente se aprecia que son las propiedades de la matriz que se mejoran al incorporar otros materiales para producir un material compuesto. Un compuesto generalmente puede tener una matriz cerámica, metálica o polimérica. Las propiedades mecánicas de estas tres clases de material difieren considerablemente. De manera general, los polímeros tienen bajas resistencias y módulos de elasticidad, cerámicas son resistentes, rígidas y frágiles, y los metales tienen resistencias y módulos de elasticidad intermedios aunados a una buena ductilidad.

El segundo componente se conoce como refuerzo, dado que mejora o *refuerza* las propiedades mecánicas de la matriz. En la mayoría de casos el

---

## Marco teórico básico

---

refuerzo es más fuerte, resistente y rígido que la matriz. Claro está que hay excepciones como el refuerzo metálico dúctil utilizado en cerámicas (ge. concreto reforzado). Al menos una de las dimensiones del refuerzo es pequeña en relación a las demás. Se dice que la geometría del refuerzo es uno de los parámetros principales para determinar su efectividad (Matthews y Rawlings, 1994). Es decir, las propiedades mecánicas de los compuestos son función de la forma y dimensiones del refuerzo. Usualmente se puede describir el refuerzo como fibroso o discreto. La Figura 1-5 representa una clasificación común de materiales compuestos que utiliza la designación mencionada del refuerzo.

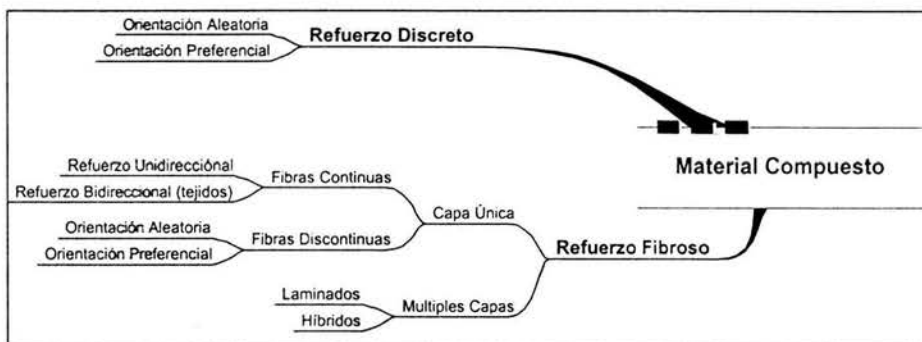


Figura 1-5 Clasificación de los materiales compuestos según su refuerzo.

### 1.3.1.2 Usos de compuestos

Los materiales compuestos son conocidos desde hace ya cientos de años. En particular los compuestos naturales y algunos sintéticos se han utilizado durante mucho tiempo con éxito, sin embargo gran parte del desarrollo de la ciencia de los materiales compuestos es relativamente reciente y puede concentrarse en los últimos 60 años.



## Marco teórico básico

---

La mera posibilidad de diseñar los materiales acorde a las necesidades del hombre abre campos de investigación y derrumba las limitantes existentes (Tabla 1-1).

Tabla 1-1 Algunos usos de materiales compuestos clasificados por sector industrial.

Sector	Matriz		
	Polimérica	Cerámica	Metálica
Aerospacial	Alas, fuselaje, hélices, asientos, pisos.	Frenos, protección térmica	Vigas, antenas
Automotriz	Defensas, consolas, paneles de instrumentos, transmisiones, engranes	Frenos	Cabezales de pistones
Eléctrico	Paneles, interruptores, aislantes, conectores.		Superconductores, contactos, filamentos, electrodos

En el inicio el hombre ocupaba los espacios disponibles naturalmente (cuevas, grutas, árboles, etc.), posteriormente le fue posible construir sus espacios con los materiales que encontraba de origen vegetal y animal, i.e. pieles animales y follaje. Transcurrió el tiempo y con mejores herramientas y conocimiento, empezó a utilizar otros materiales i.e. rocas y madera transformándolos de su estado natural dándoles una forma específica. También le fue posible descubrir algunos materiales (los primeros compuestos sintéticos) como el concreto y el adobe para construir sus espacios. Sin embargo, en cierta medida, sus espacios y creaciones han sido determinados siempre por los materiales que dispone. En este sentido se habla del diseño estructural como la determinación y cuantificación de los materiales a utilizar para lograr un óptimo uso de los mismos imponiéndoles

---

## Marco teórico básico

---

limitaciones geométricas y estéticas. En efecto, el proceso de diseño arquitectónico (entre otros) depende fuertemente de la disponibilidad de materiales. Así existen prerequisites como el uso de vigas, columnas y losas, impuestos por el uso dominante de materiales como el concreto reforzado y el acero estructural. Al presente, mediante el uso de compuestos, es posible diseñar estructuras, mecanismos, elementos, desde un punto de vista exclusivamente funcional para después diseñar el material que logre su comportamiento adecuado. El siguiente paso, que ya está siendo desarrollado es el diseño nanotecnológico. Este concepto se refiere ya no al diseño del material mediante alteraciones macroscópicas como lo son los materiales compuestos sino al diseño de la estructura molecular y hasta atómica de los materiales.

La evolución del conocimiento de los materiales y la capacidad del hombre de modificarlos en niveles cada vez menores son en gran medida responsables de la posibilidad de responder a las necesidades crecientes de estructuras, elementos y mecanismos más eficientes y funcionales haciendo uso más racional de los recursos y cubriendo la demanda de una población siempre creciente.

### **1.3.1.3 Tipos de compuestos**

Existen tres clases de compuestos según el tipo de matriz que utilizan. Específicamente se habla de compuestos de matriz polimérica, cerámica, y metálica. Se presentó en la Figura 1-5 una clasificación de materiales compuestos basada en el tipo de su refuerzo.

El concreto es un ejemplo de material compuesto de matriz cerámica con refuerzo discreto mineral (arena, grava, etc.) y orientación aleatoria. Las

---

propiedades (densidad, costo, resistencia, etc.) de la matriz (cemento) son alteradas de manera positiva o negativa según las necesidades agregando los minerales. Sin embargo la posibilidad de resistir esfuerzos de tensión no mejora sustancialmente. Por ello, se crea otro compuesto integrando un refuerzo dúctil metálico (fibroso) que a su vez sería un pobre portador de esfuerzos de compresión (por efecto de pandeo). Así se complementan los materiales y se obtiene un compuesto muy adecuado para varios tipos de esfuerzos.

### **1.3.2 Por qué usar materiales compuestos**

La utilización de materiales compuestos se da cuando se busca hacer el uso más racional de los materiales. La elección de un material compuesto debe basarse en la comparación de las propiedades físicas, mecánicas y económicas. Es por ello que no puede existir el “mejor material compuesto del mundo” y sí el mejor material para cierta aplicación.

Basándose únicamente en resistencia y rigidez, los compuestos poliméricos reforzados con fibras no tienen una clara ventaja sobre los materiales convencionales. Particularmente cuando se constata que su deformación a la fractura es mucho menor que la de aleaciones metálicas de resistencia comparable i.e. son más frágiles o menos dúctiles. La ventaja de un compuesto de matriz polimérica reside particularmente en su densidad.

## Marco teórico básico

---

El beneficio de una baja densidad es aparente cuando se evalúa el módulo específico  $E/\rho$  (módulo de elasticidad por masa unitaria) y la resistencia específica  $\sigma_r/\rho$  (esfuerzo de tensión de falla por masa unitaria).

El mayor valor de ambos parámetros para estos compuestos significa que el peso de ciertos componentes puede ser reducido. Este es un factor de gran importancia en componentes móviles, especialmente en cualquier modo de transporte donde la reducción de peso resulta en una mayor eficiencia conducente a ahorros de energía y por ende costo.

Sin embargo, los parámetros antes mencionados son capaces de describir el desempeño únicamente bajo ciertas condiciones de servicio. El módulo específico es en particular un parámetro aceptable para comparar materiales utilizados en componentes sujetos a tensión ya que el tensor más ligero capaz de soportar cierta carga sin exceder una deformación dada es el que se construye del material que tenga el mayor valor de módulo específico.

Por otro lado, cuando un elemento está sujeto a compresión, el pandeo elástico puede ser el factor limitante por lo que el elemento más ligero que pueda soportar una cierta carga sin pandeo será el que se construye del material que tenga el mayor valor de  $\sqrt{E}/\rho$  (Matthews y Rawlings, 1994). Adicionalmente, un cuarto parámetro se presenta al considerar una placa sujeta a flexión. Se encuentra que la placa más ligera capaz de soportar una carga bajo la mínima deflexión deberá ser construida del material que tenga el mayor valor de  $\sqrt[3]{E}/\rho$  (Matthews y Rawlings, 1994).

---

La Figura 1-6 muestra una representación gráfica comparativa de las propiedades de los materiales compuestos tomando como ejes el modulo de elasticidad y la densidad en una escala logarítmica.

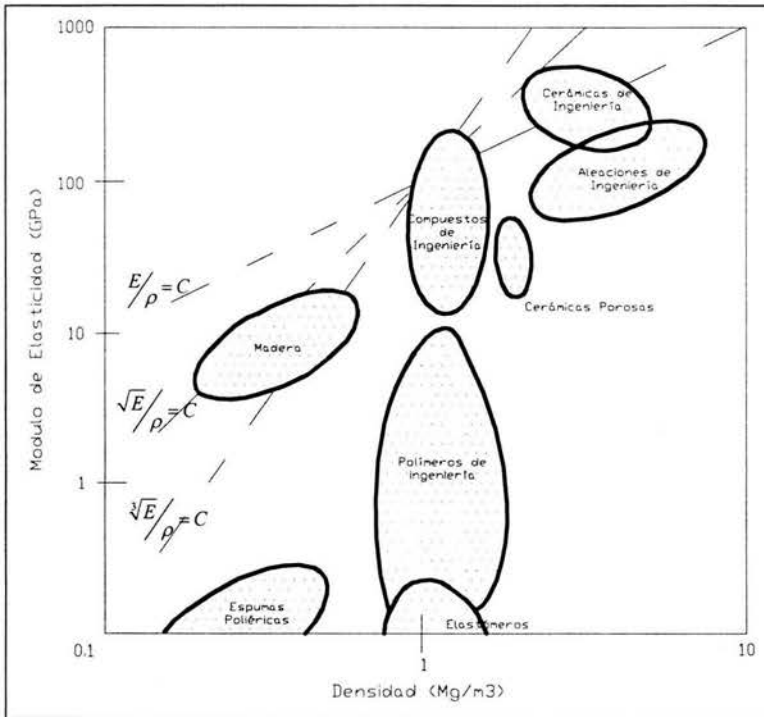


Figura 1-6 Gráfica de propiedades de distintos materiales. (Adaptado de Matthews y Rawlings, 1994)

Las condiciones del concurso y los materiales fácilmente disponibles determinan el tipo de compuesto a utilizar. En efecto, se buscará crear un material compuesto de concreto ligero con refuerzo fibroso de Kevlar. Bajo la clasificación antes mencionada y descrita en la Figura 1-5, el compuesto propuesto será de refuerzo fibroso, continuo, y bidireccional.

## 2 Generación del modelo analítico de la canoa.

### 2.1 Diseño hidrodinámico

#### 2.1.1 Factores a considerar en el diseño

Si bien el diseño hidrodinámico de canoas escapa al tema de este trabajo, se pueden abordar ciertos aspectos que justifican el modelo geométrico que se propone diseñar estructuralmente. La condición predominante para el dimensionamiento de la canoa es la carrera de cuatro personas, se puede mencionar el proceso de diseño para esta condición de carga y las consideraciones hechas para el mismo.

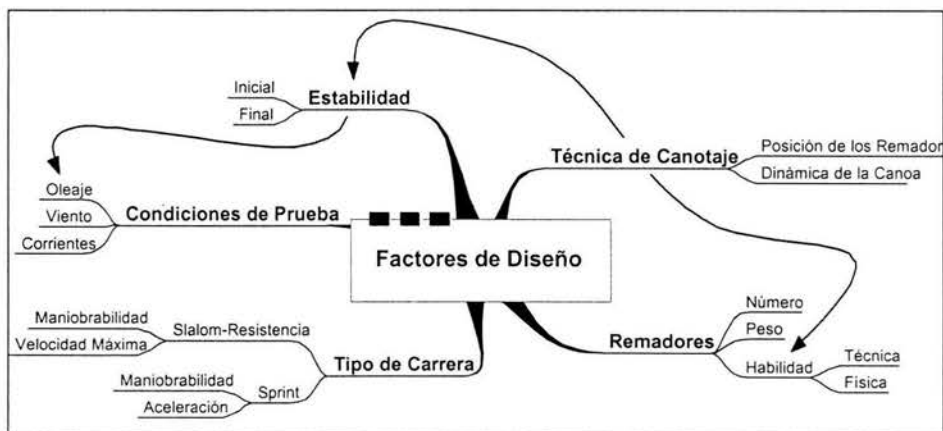


Figura 2-1 Relación de los principales factores de diseño a considerar.

## Generación del modelo analítico de la canoa.

---

La Figura 2-1 presenta algunos de los factores más importantes a considerar en el proceso de diseño hidrodinámico. Unos tendrán una importancia capital, mientras que otros difícilmente se podrán tomar en cuenta para el diseño hidrodinámico mas que otorgando un margen de incertidumbre. A continuación se presentan detalles de algunos de ellos.

### **2.1.1.1 Técnica de canotaje**

Se conocen dos técnicas básicas de canotaje. La técnica tradicional se practica de rodillas o sentado en la canoa y se utiliza fundamentalmente la fuerza de los brazos y hombros. Esta técnica es la que actualmente predomina en el circuito de competencias de canoas de concreto ya que permite buenos resultados con poco tiempo de entrenamiento y dedicación. Asimismo, la corta carrera de los movimientos permite lograr un elevado número de repeticiones y por ello mayor aceleración. Con ella se utilizan palas cortas de 1 m a 1.30 m de largo y grandes cucharas. Sin embargo es una técnica ineficiente y requiere de una gran fuerza muscular lo cual resalta su deficiencia para carreras largas.

La técnica canadiense u olímpica se practica en una posición intermedia con una rodilla sobre la canoa y la otra pierna apoyada sobre el pie. Esta técnica permite una mayor carrera lográndose mayores velocidades y el mantenimiento del impulso logrado con un esfuerzo neto menor. Permite buenos resultados con significativamente menos fuerza y privilegia el uso del músculo más grande del cuerpo, la espalda. Como inconvenientes presenta un mayor cabeceo inducido por el traslado de mayor masa del cuerpo así como la necesidad de mucho mayor tiempo de entrenamiento y preparación. Se practica con palas del tamaño de la persona con cucharas

## Generación del modelo analítico de la canoa.

---

menores. Comparativamente, la técnica canadiense requiere un mayor espacio en la embarcación por remador.

Tomando en consideración las capacidades físicas de la población estudiantil de la Facultad de Ingeniería de la UNAM, es casi inmediato el preferir la técnica canadiense. En conclusión, se requiere un importante francobordo (distancia vertical entre la línea de agua y el borde del casco de la canoa). Esto induce un mayor peso de la canoa. Por otra parte, la técnica de canotaje determina el espacio requerido por cada remador en la canoa y fijará un límite inferior para la eslora.

### **2.1.1.2 Tipo de carrera**

Lograr una alta velocidad y tener una embarcación maniobrable son objetivos contradictorios. En tanto, la relación eslora-manga definirá qué objetivo se está privilegiando. Las canoas tienen generalmente una relación eslora-manga muy elevada en comparación con buques y lanchas comunes, generalmente el cociente tiene un valor cercano a diez. Canoas con menor relación serán más maniobrables pero menos veloces y viceversa.

Lo anterior se manifestará directamente en el tipo de carrera por realizar. En la competencia de canoas de concreto se tienen tanto tramos largos como en slalom, por ello no se puede decidir directamente por una mayor o menor relación eslora-manga sino que se deben ponderar las cualidades de los remadores y hacer un análisis del impacto que puede tener cada tipo de canoa en el tiempo final de recorrido.



### **2.1.1.3 Estabilidad**

La estabilidad de un cuerpo parcialmente sumergido en un líquido se determina en función de la capacidad del cuerpo alejado del equilibrio a retornar de manera natural a este estado. Se habla de estabilidad inicial cuando el ángulo de inclinación del cuerpo es menor a 15° aproximadamente y estabilidad final para el ángulo último en el que se retoma el equilibrio.

Se puede decir que los factores que influyen en la estabilidad son la técnica de canotaje, la relación eslora-manga, la relación manga-calado, la relación entre el peso de los remadores y el peso de la canoa.

La estabilidad es un factor capital, ya que si un remador sufre desequilibrio y cae, la carrera está perdida y se pierde el esfuerzo y la dedicación de mucho tiempo de trabajo. Sin embargo, en un ámbito tan competitivo, quizás la única manera de ganar las carreras es sacrificando la estabilidad para tener un bote más ágil y veloz.

### **2.1.1.4 Condiciones de prueba**

Se debe tomar en cuenta dentro de lo posible las condiciones del sitio donde se realizarán las pruebas. Sin embargo, las condiciones climáticas son, naturalmente, variables. A pesar de saber que en presencia de fuertes vientos es mejor una menor área superficial (reduciendo el francobordo) de la canoa para reducir la resistencia al avance, el oleaje puede inducir entrada de agua en la embarcación y provocar su eventual hundimiento. Así resulta complejo mejorar la respuesta de la canoa a las sollicitaciones climáticas.

### **2.1.1.5 Remadores**

El peso, y posición de los remadores será muy importante ya que determina el desplazamiento de la canoa. Por ello, se debiera diseñar en función de los remadores presentes al inicio del proyecto. A considerar también, el hecho de que en cuatro carreras se tiene el peso de dos remadores y sólo en una el peso combinado de cuatro. De esta forma, en una carrera de dos personas, una canoa diseñada de manera óptima para dos remadores no tiene la misma eficiencia que una canoa diseñada para cuatro.

En el 2002, el equipo de la UNAM contempló una canoa que pesara 75 kilos. Se diseñó hidrodinámicamente para este peso, sin embargo, por defectos constructivos se tuvo un peso de 130 kg<sub>f</sub>. Por ello, a pesar de tener uno de los grupos de remadores más capaces y entrenados, los resultados no fueron satisfactorios.

### **2.1.2 Parámetros de diseño**

Se requiere definir el peso medio de los remadores y su equipamiento. Se considerará un peso de remadores de 80 kg<sub>f</sub>. cada uno y para las remadoras de 60 kg<sub>f</sub>., incluyendo su ropa y equipamiento. Queda claro que no hay certeza en cuanto a estas cargas ya que de presentarse un remador más pesado con fuerza y habilidad de canotaje no se le puede negar el uso de la canoa. Sin embargo, en este momento la discusión no porta sobre las cargas y sus efectos estructurales sino en la determinación del calado y desplazamiento de la canoa. Adicionalmente será necesario proponer a priori el peso de la canoa basándonos en experiencia previa y la certeza de requerir una canoa ligera. Por ello se estima que el casco de la canoa es de 60 kg<sub>f</sub> considerando que los perjuicios de subestimar el peso son mayores

---

## Generación del modelo analítico de la canoa.

---

que al sobreestimarlos. La Tabla 2-1 muestra las cargas consideradas para el diseño hidrodinámico de la canoa.

**Tabla 2-1 Cargas utilizadas en el diseño hidrodinámico**

<i>Elemento</i>	<i>Peso [ kg<sub>f</sub> ]</i>
Canoa	60
Remadora	60
Remador	80

Con las cargas mencionadas se obtiene un desplazamiento de 340 kg<sub>f</sub> con lo que se pueden estimar las relaciones manga-eslora, eslora-calado, calado-desplazamiento.

En 1999 en la Universidad de Oklahoma State se realizó un interesante estudio (OSU, 2002). Bajo ciertas condiciones de laboratorio y realizando modelos a escala, se encontró que importantes cambios en la geometría de la sección transversal sólo conducían a una diferencia en velocidad máxima de 2% (equivalente 1.6 segundos en la carrera de 200 m varonil).

Asimismo, se encontró que una reducción en 10% del desplazamiento lograba un incremento en velocidad máxima de 3%. Por otra parte, un incremento de 10% en la fuerza aplicada resultaba en 5% de incremento en velocidad máxima.

Entonces, resulta que la reducción del peso combinado de remadores y canoa tiene mayores consecuencias que las mejoras en el diseño hidrodinámico. Consecuentemente, resulta prioritario tener un equipo de remadores físicamente aptos y una canoa ligera.

### **2.1.3 Programa de computo para análisis hidrodinámico**

Tomando en cuenta los parámetros y factores de diseño, se trabajó en la Secretaría de Marina utilizando el programa MAXSURF (Formsys, 2004) y contando con la asesoría de oficiales dedicados al diseño. El programa mencionado es especializado para la generación de cascos de embarcaciones y cuenta con funciones avanzadas para el diseño completo de un buque. El diseño se hace mediante un procedimiento gráfico iterativo en que se genera un modelo base y se simulan las características dinámicas del mismo, a partir de ellas y con las consideraciones mencionadas en la sección 2.1, se realizan ajustes al modelo y se comparan los resultados.

Resulta importante mencionar que el módulo de simulación y las relaciones empíricas y teóricas para determinar la resistencia al avance por medio del programa MAXSURF se establecieron para relaciones usuales de eslora-manga (valor de 4 a 8), por lo que no se pueden obtener valores cuantitativos de la resistencia al avance para una canoa (valor de 9 ó 10). Sin embargo, de forma cualitativa sí se puede apreciar el efecto de las mejoras y elegir entre las diversas opciones.

El resultado final es un modelo para una canoa simétrica longitudinal y transversalmente de 6.4 m de eslora, 65 cm de manga en el centro, altura variable, y una superficie total de 5.5 m<sup>2</sup>.

Utilizando el programa MAXSURF (Formsys, 2004), se puede exportar el modelo a formato Autocad (DXF) (Autodesk, 2002) el cual puede ser utilizado en una variedad de plataformas de simulación, análisis

Generación del modelo analítico de la canoa.

---

estructural, diseño gráfico, generación de imágenes de realismo fotográfico, etc. También puede exportarse a formato IGES que es un formato de archivo especializado para la transferencia de superficies.

## **2.2 Elección del programa de análisis Estructural**

Existen en el mercado un gran número de programas de análisis por elemento finito, los que pueden destacarse por diversos motivos son SAP2000 (SAP2000, 1997b), ANSYS (ANSYS, 2002c) y MATLAB (Mathworks, 2004).

### ***SAP2000***

Es producido por Computers & Structures Inc en asociación con la Universidad de Berkeley en California (SAP2000, 1997b). Este programa ya en su versión última permite modelar y analizar utilizando sólidos. Es importante mencionar que también incorpora análisis de materiales no-lineales así como análisis dinámicos. En la aplicación presente, resulta un tanto limitado puesto que sólo cuenta con elementos de cascaron de tres y cuatro nodos, lo cual limita la generación de mallas, sobretodo en la cercanía a singularidades como puntos de aplicación de cargas, etc. Asimismo, la generación de la malla depende directamente de la malla generada por AUTOCAD al momento de importar, lo cual significa que no se pueden hacer modificaciones posteriores a la malla de una manera sencilla. Finalmente, es relevante mencionar que los elementos de cascaron permiten una variación de esfuerzos lineal mas no cuadrática.

---

### ***ANSYS***

Producido por ANSYS, Inc (Ansys, 2002c), este programa es sumamente especializado y permite realizar análisis de problemas dinámicos así como problemas estructurales, térmicos, magnéticos, eléctricos, y de dinámica de fluidos. Su biblioteca de elementos es muy diversa e incluye elementos en cascarón de 3, 4, y 8 nodos así como cascarones laminares de hasta cien capas con 8 nodos cada una. El manejo de las mallas se hace independientemente de la geometría de las superficies, por lo que puede ser modificado y refinado logrando describir variaciones de esfuerzo lineales o cuadráticas.

### ***MATLAB***

Si bien no es un programa especializado para el análisis por elemento finito, se ha generado un módulo que permite hacer análisis con rutinas de cálculo muy eficientes (Mathworks, 2004). Sin embargo, la interfaz de uso hace de esta opción la más complicada de aplicar puesto que se trata únicamente del procesador, es decir que no se cuenta con ambiente gráfico para el preprocesador y posprocesador.

Es pertinente mencionar, que el desarrollo analítico del problema en estudio se inició utilizando SAP2000 debido a que era el programa de más fácil acceso y en el cual se tenía ya cierta experiencia en el modelado de estructuras. Cuando surgieron dificultades en la obtención de resultados y se detectaron las limitantes que existen para el manejo adecuado de los elementos estructurales, se consideró pertinente migrar hacia ANSYS puesto que representa una solución informática mucho más completa.

## **2.3 Importación al programa de análisis**

### **2.3.1 Procedimiento**

Puesto que inicialmente se había contemplado utilizar SAP2000, que exclusivamente puede importar archivos de AUTOCAD, mientras que ANSYS importa exclusivamente formato IGES (formato estándar utilizado por la mayoría de programas que generan o trabajan con superficies y sólidos), fue necesario regenerar el modelo como superficies NURBS (non-uniform rational B-spline) las cuales se definen matemáticamente. Para ello, se utilizó el programa RHINOCEROS 3.0 (McNeel R., 2002a) que entre otras funcionalidades permite determinar la magnitud del empuje hidrostático ejercido sobre una superficie parcialmente sumergida, lo cual resulta de sumo interés. Una vez regenerado el modelo, se procedió a exportar el archivo como IGES para su introducción a ANSYS. Cabe mencionar, que MAXSURF permite obviar este paso, exportando directamente a IGES, pero ya no se contaba con el archivo original ni con el programa para hacerlo.

### **2.3.2 Propiedades del modelo**

Debido a la forma que ANSYS define gradientes de presión (en concreto no es posible fijar valores límite), resulta necesario cortar la superficie en el nivel correspondiente al calado de la condición por analizar, para así solo aplicar la presión hidrostática en las superficies sumergidas. En el caso de desplazamiento máximo, se determinó un calado de 17.7 cm que corresponde a un desplazamiento de 354 kgf.

## Generación del modelo analítico de la canoa.

---

Inicialmente, el modelo no contempla la utilización de costillas estructurales y elementos de rigidez adicional, pero su definición podrá hacerse directamente en ANSYS con las herramientas de modelado proveídas.

Considerando la necesidad de que la canoa mantenga su flotabilidad aún llena de agua (requisito por reglamento), la densidad de la canoa en general no podrá exceder  $1000 \text{ kg/m}^3$ , de manera que la masa máxima de la canoa será 55 kg.

### **2.3.3 Definición de propiedades de los materiales**

La mayoría de programas de análisis por el método de elementos finitos utiliza únicamente los parámetros usuales de los materiales como son el módulo de elasticidad, el módulo de Poisson, el coeficiente de expansión térmica, la densidad o en su caso el peso específico.

Como ya se ha mencionado, actualmente no se cuenta con suficiente información experimental para conocer con certeza las propiedades físicas del concreto y mucho menos del compuesto.

Martínez et al, (2004) desarrollan más las nociones de diseño de mezclas y pruebas de materiales.

#### **2.3.3.1 Módulo de elasticidad**

Para calcular el módulo de elasticidad del material compuesto se utiliza el método de la sección transformada, que en realidad es únicamente un promedio ponderado del módulo de elasticidad de cada uno de los

---



## Generación del modelo analítico de la canoa.

---

materiales constituyentes. Para ello, sin embargo, es requisito considerar que los materiales se deformarán de manera unida en el intervalo útil de carga lo cual es condicionante de que se les considere como compuesto.

Se analiza una sección transversal del material (no de la estructura) y se procede conforme a:

$$E_{comp} = \frac{\sum_i A_i E_i}{\sum_i A_i} \quad (2.1)$$

No se conoce propiamente el área transversal de las fibras de Kevlar, y en efecto, el fabricante la omite porque no es una cantidad exenta de variaciones. Una propiedad común en refuerzos fibrosos es el Denier (Dupont, 2002), que en realidad es una unidad de masa por unidad de longitud pero que equivale a la masa en gramos de diez mil metros de fibra (Tabla 2-1).

Tabla 2-1 Propiedades Básicas del Kevlar 49 (Dupont, 2002)

Propiedades Básicas	Cant.	Unidad
Densidad del Kevlar	1.44	g/cm <sup>3</sup>
Modulo Elástico Kevlar	112400	MPa
Relación de Poisson	0.36	
Denier	1270	g/(1000m)
Def unitaria a la falla	2.40	%
Número de Filamentos	768	filamentos
Diámetro del Filamento	1.200E-05	metros
Área de Fibra	8.82E-02	mm <sup>2</sup>

En conjunto con la densidad del material, se puede obtener el área transversal de la fibra.

---

## Generación del modelo analítico de la canoa.

---

$$A_k = \frac{d_{tex}}{\rho} \quad (2.2)$$

El refuerzo a utilizar consistirá en tejidos de Kevlar. Para el cálculo del módulo de elasticidad del compuesto se propone un espesor del casco de 10 mm, con una separación longitudinal y transversal entre fibras de 5 mm considerando un ancho del espécimen de 10 cm (Figura 2-2).

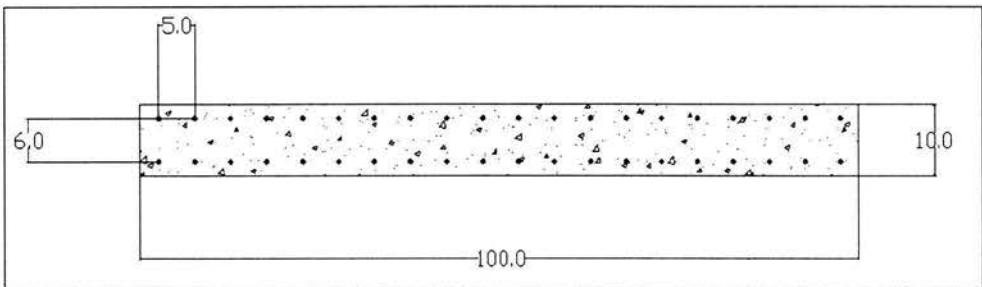


Figura 2-2 Sección transversal en mm para cálculo del módulo de elasticidad del concreto reforzado con Kevlar.

El refuerzo paralelo a la sección transversal no contribuye al módulo de elasticidad ni a la resistencia calculada de la sección.

El valor de módulo de elasticidad del concreto a utilizar es 5770 kg<sub>f</sub>/cm<sup>2</sup> (Martínez et al, 2004). A simple vista es un valor muy pequeño en comparación con los valores usuales, lo cual manifiesta la gran flexibilidad que tendrá la canoa. En pruebas como la que se muestra en la Figura 2-3 se percibe la linealidad que manifiesta la rama elástica de la curva esfuerzo-deformación. Esto último **justifica plenamente** la naturaleza lineal del comportamiento estructural de los materiales así como el análisis objeto de este trabajo.

## Generación del modelo analítico de la canoa.

Utilizando la ecuación (2.1), los datos de la Figura 2-2 y el valor del módulo de elasticidad del concreto, se obtiene un módulo de elasticidad del compuesto de  $9800 \text{ kgf/cm}^2$  que en lo subsiguiente se tomará como  $1 \times 10^4 \text{ kgf/cm}^2$ .

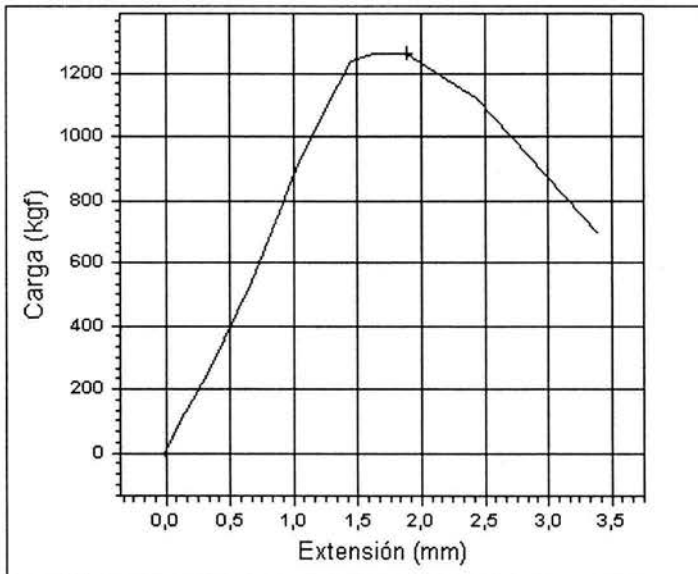


Figura 2-3 Curva carga-deformación de una prueba de concreto (Martinez et al. 2004)

### 2.3.3.2 Relación de Poisson

La relación de Poisson expresa la deformación transversal que experimenta un cuerpo debido a la carga axial a la que se le somete (Demeneghi et al. 2004). En términos de deformaciones

$$\nu = -\frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} \quad (2.3)$$

Aunque recientemente se han logrado producir espumas con valor  $\nu$  negativo, la relación de Poisson admite dos valores límite para materiales

## Generación del modelo analítico de la canoa.

---

comunes. Para un material incompresible su valor es 0.5 mientras que para un material infinitamente compresible, la relación toma el valor de 0. Por ende, cualquier valor de la relación de Poisson que se proponga para el material en estudio debe estar comprendido entre 0 y 0.5.

Sin poseer datos experimentales que sugieran lo contrario, resulta adecuado elegir un valor para la relación de Poisson del concreto de 0.2.

Si bien el refuerzo de Kevlar dará al compuesto una resistencia mayor a la del concreto, la relación de Poisson se verá poco modificada por su muy pequeña presencia en volumen.

### 2.3.3.3 Densidad

La densidad del material es una propiedad cuya medición es mucho más sencilla que las anteriores, basta determinar la masa de un volumen (como lo puede ser un cubo de prueba). Si es que la canoa flotará aún llena de agua, su densidad será cuando mucho igual a la del agua, es decir  $1000 \text{ kg/m}^3$ .

Resultados de pruebas de resistencia de concreto, sin ser conclusivas en cuanto a la relación entre densidad y resistencia, esbozan que las mezclas de mayor densidad tienen una mayor resistencia (Martínez et al. 2004). Por ello, resulta recomendable tomar como valor de la densidad el máximo permisible. Para fines de análisis se tomará una densidad de  $950 \text{ kg/m}^3$ . En los modelos que utilizan cascarones de espesor homogéneo, se utiliza también la propiedad de masa por unidad de área que equivale a la densidad dividida entre el valor del espesor del casco. En este caso, dicho parámetro toma el valor de  $9.5 \text{ kg/m}^2$ .

## **2.4 Discusión sobre condiciones de frontera**

### **2.4.1 Problemática**

La definición de las condiciones de frontera del modelo de una estructura es un factor determinante en la calidad del análisis por realizar en cualquier problema. Se recuerda el análisis bidimensional de vigas y el impacto que tiene la definición de condiciones de frontera en los elementos mecánicos resultantes.

Considérese como ejemplo el caso de una viga simplemente apoyada y una viga empotrada en los extremos, ambas con las mismas cargas y sección transversal.

Evidentemente, el momento flexionante crítico correspondiente a la viga simplemente apoyada es  $wl^2/8$  y se presenta en el centro del claro, mientras que en los apoyos no se impide el giro por lo que el momento flexionante es nulo. Para la viga empotrada se tiene un momento crítico ya no en el centro del claro, sino en los empotramientos y su valor es  $wl^2/12$ , mientras que en el centro del claro se obtiene  $wl^2/24$ . Ahora bien, no resulta extraño saber que la condición de frontera nunca será ni perfectamente empotrada ni perfectamente apoyo simple, por lo que se tendrán valores “reales” de momentos flexionantes que oscilen entre los valores extremos ya mencionados y expresados.

El ejemplo anterior pone en evidencia un serio problema para el análisis que se pretende realizar sobre el modelo de la canoa de concreto. En efecto, en este problema “sencillo” y bidimensional no se conoce a la

---

## Generación del modelo analítico de la canoa.

---

perfección la restricción a los grados de libertad de la estructura, pero sí se conoce la posición geométrica de los puntos en que se presenta la condición de frontera. Bajo estas condiciones, se tiene una importante incertidumbre, y ella se manifiesta de forma *crítica* ya que ahí (en los puntos de frontera) se desarrollan los elementos mecánicos de flexión críticos. Entonces, por analogía podría resultar en extremo complicado lograr el análisis de una estructura donde no se conoce el tipo de restricción al movimiento ni su ubicación.

En la realidad, la canoa de concreto que se pretende analizar nunca estará empotrada ni tendrá un apoyo fijo. La canoa modificará su posición, inclinación, calado y hasta geometría para responder a las cargas que se le apliquen.

### **2.4.2 Estudio de diversas condiciones de frontera**

En el Apéndice A se estudian diversas condiciones de frontera o apoyo del modelo de la canoa con la finalidad de establecer el tipo de apoyo que nos pueda llevar a resultados más fiables del análisis.

La condición más simple y también más fácil de desarrollar es el empotramiento puntual. Esta condición significa que un nodo de uno de los elementos tipo cascarón es utilizado para restringir los seis grados de libertad disponibles. Por la naturaleza discreta de este apoyo, se produce una importante concentración de esfuerzos, que para muchos análisis resultará crítica e impedirá una evaluación objetiva de los esfuerzos en el resto de la estructura.

## Generación del modelo analítico de la canoa.

---

Otra forma de frontera consiste en delimitar un área mediante la cual se considere sean distribuidos los esfuerzos. De tal forma, en lugar de una aplicación puntual de esfuerzos se tiene una distribución hacia el perímetro. El área puede tener cualquier forma (práctica) y la distribución de esfuerzos se logra mediante diversos artificios.

- Limitar la traslación vertical del perímetro
- Empotrar completamente el perímetro
- Limitar la traslación vertical del área.
- Empotrar completamente el área.
- Unificar el desplazamiento vertical en el área y empotrar el punto central
- Unificar el desplazamiento y rotación en el área y empotrar el punto central.
- Unificar la rotación en el área y empotrar el punto central.
- Unificar el desplazamiento total en el área y empotrar el punto central.

El análisis hecho en el Apéndice A muestra que el empotramiento del perímetro, el del área y la unión del desplazamiento y rotación del área producen valores de desplazamiento y esfuerzo crítico exactamente iguales puesto que representan realidades físicas semejantes.

De los resultados ahí plasmados se puede retomar un punto de particular interés. En ellos se observa que las condiciones de frontera continuas son preferibles a las condiciones puntuales o discontinuas. En particular, se ha visto que al restringir los grados de libertad en forma de cuadrado o rectángulo, las aristas agudas (discontinuidades matemáticas)

## Generación del modelo analítico de la canoa.

---

provocan un incremento inicial en el esfuerzo máximo detectado de 20 a 40%. Sin embargo, y de mayor gravedad es el hecho de que al refinar el emallado, los resultados no convergen debido a la discontinuidad misma (razón por la cual se hace referencia a un incremento inicial).

Asimismo, y de manera intuitiva se aprecia que al aumentar el perímetro del área en la cual se establece la condición de frontera, el esfuerzo máximo provocado en la frontera disminuye.

Ambas aseveraciones anteriores conducen a preferir condiciones de frontera que distribuyan ampliamente los esfuerzos así como evitar cambios de dirección bruscos en los perímetros.

La unificación de grados de libertad en una región (región rígida) es la condición que resulta más adecuada para el análisis de la canoa de concreto. En particular se puede pensar el apoyo del remador sobre el casco limita la deformación del área de apoyo por lo que también se representa de manera más fiel el fenómeno físico.

Esta condición dista mucho de la idea inicial de fijar verticalmente los puntos de apoyo de cada remador puesto que permite la deformación libre y congruente de la estructura.

### **2.4.3 Condición auto balanceada de carga**

Para evitar la dificultad de aplicar condiciones de frontera que pudieran imposibilitar hacer análisis certeros, se utiliza un artificio denominado **condición de carga auto balanceada**. En efecto, al balancear



## Generación del modelo analítico de la canoa.

---

las cargas se logra si no eliminar al menos sortear la interacción de la estructura con sus apoyos o condiciones de frontera.

Poco importa dónde se apoye una estructura y qué tipo de apoyo sea provisto, cuando las reacciones en los apoyos sean nulos. En particular, para el problema hidrostático que se presenta, queda claro que el empuje vertical ascendiente (“de Arquímedes”) debe compensar completamente el peso de los remadores, su equipamiento y el peso de la canoa misma. Claro está que la canoa puede sufrir cierta deformación bajo estas cargas y que a su vez esto provoque una alteración en el empuje hidrostático. Sin embargo para los fines de este estudio se considerará que las cargas no sufren alteración por alguna eventual no-linealidad en la geometría.

Lo anterior debe, sin embargo, obedecer a una importante salvedad, en una condición auto balanceada de cargas, los apoyos no interfieren en los elementos mecánicos ni en los esfuerzos resultantes. No obstante, tendrán un importante impacto en los desplazamientos absolutos de puntos sobre la estructura.

Así pues, se logra sortear la dificultad que se presentaría si se quisiera realizar el análisis definiendo condiciones de frontera. Sin embargo, esta condición auto balanceada, automáticamente impedirá hacer análisis más complejos (dinámicos) y restringe inevitablemente a un estudio estático, lo cual distará de la realidad física a la que estará sujeta la canoa.

## **2.5 Modelado de las condiciones de carga**

Hablar de condiciones de carga obliga a hablar de las consideraciones que se hacen al respecto de las mismas. En efecto, resultaría imposible que se pretendiera una representación “real” de las cargas.

Para hacer uso de la condición auto-balanceada de carga, se modelarán todas las condiciones de carga y frontera de manera simétrica.

Existen tres carreras en las que participará eventualmente la canoa diseñada. Una carrera de dos mujeres, otra con dos hombre, y una combinada de dos hombres y dos mujeres. Por las cargas que cada una de estas implica, resulta claro que la situación más desfavorable será la carrera de cuatro personas, razón por la cual esta es la carrera objeto del análisis.

### **2.5.1 Peso de los remadores**

La posición de los remadores en la canoa tendrá impacto en los esfuerzos internos a los que estará sujeta. En primera instancia, si se busca el máximo par de giro para realizar maniobras, es preferible que los remadores se sitúen lo más alejados del centro. Esto, en contraparte, genera mayores momentos flexionantes.

Determinar la posición de los remadores es una cuestión meramente geométrica y de comodidad en la canoa y dependerá de la técnica de canotaje utilizada.

Cuando se considera un remador actuando con la técnica canadiense, este se encuentra apoyado en tres puntos. Por lo cual su peso puede

## Generación del modelo analítico de la canoa.

---

distribuirse en los tres apoyos. La dificultad reside en determinar la proporción de la carga sobre cada apoyo.

En efecto, esto último, aun tratándose de un análisis estático dependerá del movimiento que realiza el remador en su recorrido. Si bien el pie trasero rara vez se apoya sobre la canoa, la distribución del peso sobre el pie delantero y la rodilla no está claramente definida.

La Figura 2-4 muestra esquemáticamente la posición de canotaje empleada y las reacciones en los apoyos. La distribución sobre los apoyos 1 y 2 dependerá de la distribución de masa en el cuerpo del remador así como del movimiento al remar. En cuanto a la distribución se puede mencionar que evidentemente la gran parte masa se encuentra en el tronco y por ende recae sobre la rodilla.

La condición más desfavorable sería concentrar las cargas de remador en los extremos de la canoa, sin embargo para ello se tendría que romper la dinámica del movimiento al remar puesto que los cuatro remadores avanzan simultáneamente. Elaborar sobre una distribución aleatoria de las cargas y buscar la más desfavorable también rompería la simetría de la condición de carga.

Por ello, se opta por descartar el apoyo del pie trasero y distribuir equitativamente el peso del remador sobre los dos apoyos restantes. La separación entre pie delantero y rodilla será de 0.65 m y la separación entre la rodilla y el pie delantero del siguiente remador será de 0.50 m. La simetría obliga a la rodilla del segundo remador a localizarse a 25 cm. del centro de la canoa.

## Generación del modelo analítico de la canoa.

---

En la Tabla 2-1 se anotan las masas de los remadores, sin embargo, para fines de análisis estructural se considera que la carga viva total es de 300 kg<sub>f</sub>. De tal forma, se considera un excedente de 20 kg<sub>f</sub> que contempla equipo adicional portado por los remadores. Así en lugar de modelar los remadores con los pesos correspondientes a la Tabla 2-1, se modelan todos con una masa de 75 kg.

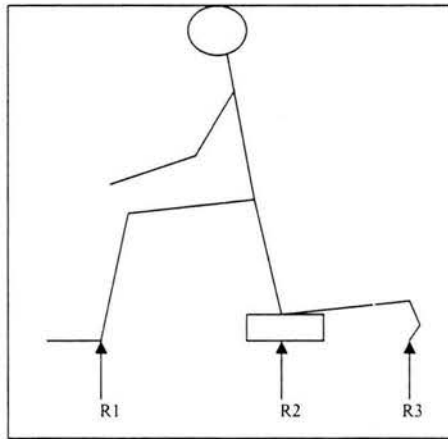


Figura 2-4 Esquema de la posición de canotaje canadiense

Para distribuir racionalmente la carga puntual de 37.5 kg<sub>f</sub> correspondiente a cada apoyo de los remadores se hará uso del resultado presentado en la discusión de condiciones de frontera. Se considerará que el peso de los remadores impide la deformación vertical del área de apoyo, para lo cual, se define una región circular de 10 cm de radio en cada apoyo y los nodos de los elementos ahí generados se unifican en  $U_z$  generando una región rígida a la deformación vertical. La Figura 2-5 muestra las regiones circulares creadas y su posición así como la denominación de los apoyos y ejes transversales.

Generación del modelo analítico de la canoa.

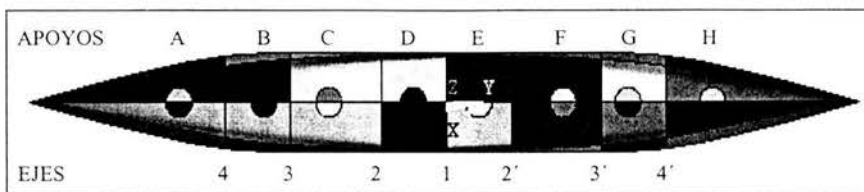


Figura 2-5 Modelo de la canoa en planta (Ansys, 2002c)

### 2.5.2 Empuje hidrostático del agua

El agua ejerce una presión normal a la superficie de todo cuerpo sumergido de magnitud  $P = -\gamma z$  en la que  $z$  es la profundidad desde la superficie libre. En la generación del modelo hidrodinámico se vio que el calado correspondiente a la condición de carga máxima es de 17.7 cm. Se define entonces un gradiente de presión aplicable a todas las superficies sumergidas. Esta aplicación se puede hacer de manera automática con las herramientas internas del programa de análisis (ANSYS, 2002c) (Figura 2-6).

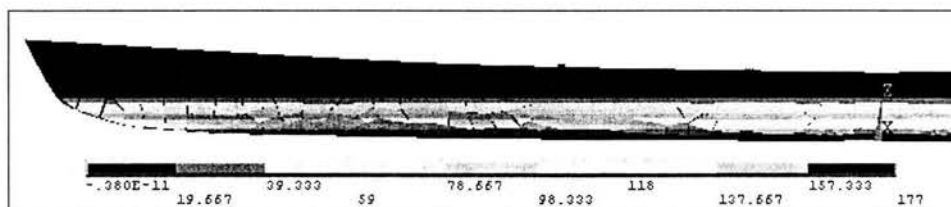


Figura 2-6 Empuje Hidrostático del Agua (Ansys, 2002c)

### 2.5.3 Peso de la canoa

La masa de la canoa se determina como el producto del volumen y la densidad, o en el caso del modelo de cascarones utilizado como el producto de la masa por unidad de área y el área del casco. Esta propiedad se

## Generación del modelo analítico de la canoa.

---

considera homogénea y es calculada automáticamente por el programa (ANSYS, 2002c).

Asimismo, es posible establecer el multiplicador de la gravedad para la carga inercial de la canoa. Es mediante este multiplicador que pueden hacerse los ajustes finos en el modelo y lograr la condición auto balanceada ya que por asimetrías en el enmallado (no en la geometría) los empujes hidrostáticos pueden generar fuerzas horizontales no compensadas.

### 2.5.4 Flexión reversible

A pesar de insistir en la naturaleza estática del análisis, una parte muy importante del comportamiento dinámico sí debe ser considerada.

En su recorrido sobre la superficie del agua, la canoa será elevada y soportada en diversos puntos por el oleaje. Conforme las olas recorren diversas posiciones sobre la superficie del casco, la presión ejercida pasará consecutivamente de valores máximos a valores mínimos. La Figura 2-7 muestra dos posiciones del oleaje sobre medio casco de la canoa. Sin entrar en más detalles sobre la pertinencia de refinar el modelado del empuje hidrostático, puesto que se trata aquí que una condición transitoria, se observa que todo punto sobre la superficie mojada de la canoa estará sujeto consecutivamente a presiones máximas y presiones mínimas.

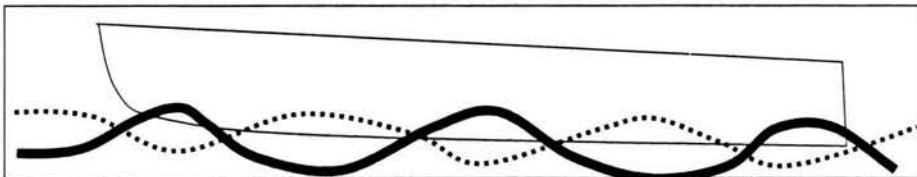


Figura 2-7 Dos modos de Oleaje para la canoa

## Generación del modelo analítico de la canoa.

---

Este efecto se denomina “flexión reversible” y se tomará en consideración para el análisis invirtiendo todas las acciones que obran sobre el modelo (peso de remadores, empuje hidrostático, y peso de la canoa). De manera que efectivamente se invertirán los diagramas de momento y cortante, teniendo por consecuencia ya no un valor en esfuerzos para compresión y otro distinto para tensión sino un valor único máximo para tensión y compresión.

La flexión reversible es la condición que exige al material compuesto simetría con respecto a su plano central, puesto que se requiere que tenga capacidad para soportar flexión positiva y flexión negativa de la misma manera.

## 3 Análisis

### 3.1 Estudios estimativos

Se ha visto que las condiciones de apoyo, las propiedades de los materiales, y sobretodo el gran número de elementos por definir generan una gran posibilidad de cometer errores para construir un modelo analítico confiable de la canoa. La sensibilidad de realizar un análisis estructural utilizando el método del elemento finito depende en buena medida de la calidad de los datos que proporcionemos al modelo y al programa de análisis. Por ello, resulta conveniente de sobremanera el realizar estudios simplificados que puedan proveer de una idea del orden de magnitud esperado en los resultados. Estos estudios deben realizarse antes de comenzar a trabajar en el análisis del modelo por el método del elemento finito, de lo contrario se observa la tendencia humana a ajustar el fenómeno a los resultados (Cook, 1995). En otras palabras, la fe que se llega a tener en el método de modelado por elementos finitos es tal que se justificarían los resultados obtenidos, fueran cuales fueran estos.

A continuación, se presentan dos modelos de grado de complejidad creciente con la finalidad de poder conocer los valores máximos de momento flexionante y esfuerzo cortante que puedan utilizarse para diseño. En ambos casos, se considera que la canoa se comporta como una viga y se despreciará la flexión que provoca deformación de secciones transversales.



### 3.1.1 Análisis simple

En este análisis interesa que todas las suposiciones lleven del lado de la seguridad. Para ello se elegirán siempre aquellas suposiciones que produzcan la condición razonable más desfavorable. Asimismo, se acepta que la sección crítica es el centro de la canoa (cosa fácilmente demostrable y verificable con análisis más detallados). Los pesos de los remadores se modelarán como cargas concentradas. El punto de aplicación estará situado a un metro de cada extremo de la canoa, es decir una posición cercana a la de la rodilla de descarga del remador extremo de cada grupo. El modelado del peso de la canoa se hace también por cargas concentradas porque resultaría muy complicado calcular el área del casco en cada sección para así determinar el peso. La mitad del peso de la canoa actuará en los puntos de aplicación anteriores.

De la manera más burda, se puede suponer que la reacción del agua sobre la canoa es uniformemente distribuida. Su magnitud será igual al cociente del desplazamiento y la distancia entre los puntos de aplicación de las cargas concentradas (o distancia entre remadores). Al suponer únicamente la distancia entre remadores y no la longitud mojada de la canoa se está maximizando el momento que se presentará en el centro de la canoa.

El momento flexionante será tomado en cuenta para analizar la sección transversal crítica y determinar la resistencia requerida por el concreto y el refuerzo.

## Análisis

---

Considerando que la carga está completamente balanceada, no es relevante la condición de apoyo ni su posición puesto que sean cuales sean estas, las reacciones deben ser nulas.

Cada remador tiene una masa de 80 kg y las remadoras 60 kg, mientras que la canoa tiene para este caso una masa de 64 kg. La Figura 3-1 muestra el diagrama de cuerpo libre para la condición de carga aquí mencionada.

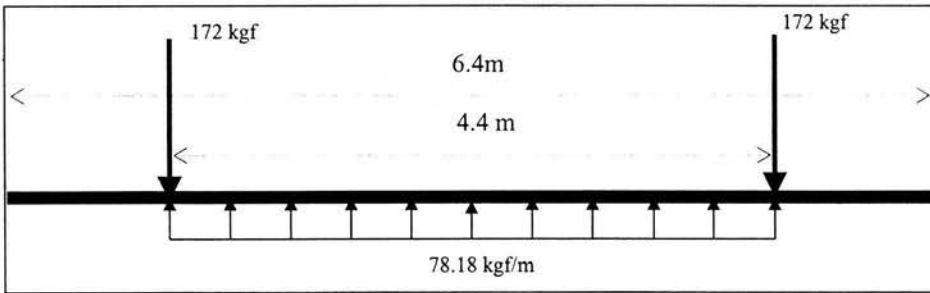


Figura 3-1 Diagrama de cuerpo libre para el análisis simple

El análisis conduce a los diagramas de elementos mecánicos de las figuras 3-2 y 3-3 (cortante y momento flexionante respectivamente).

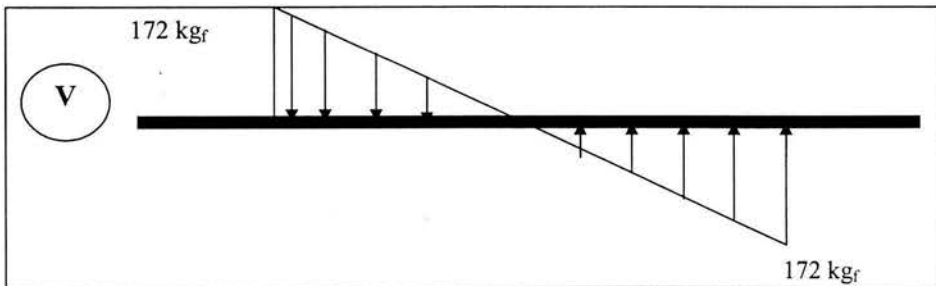


Figura 3-2 Diagrama de cortantes para el análisis simple

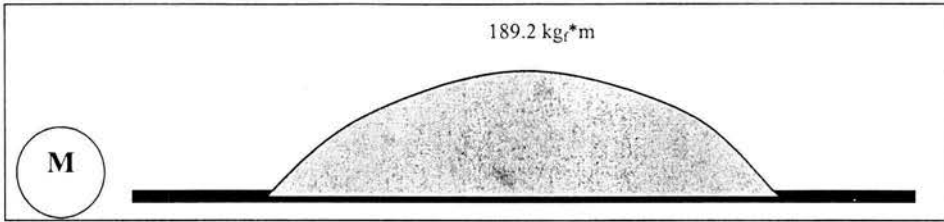


Figura 3-3 Diagrama de momentos flexionantes para el análisis simple

En este análisis solo se requirió el peso de los remadores, el peso supuesto y la longitud supuesta de la canoa. Es necesario tomar en cuenta que debido a lo burdo del análisis, es necesario tomar un elevado valor del factor de seguridad (2 a 3). Cabe mencionar que el análisis se hace definitivamente del lado de la seguridad.

### 3.1.2 Análisis detallado

En este análisis se modelan de manera más compleja las condiciones de carga. En particular se puede mencionar que se hará uso de un resultado importante desarrollado en el Apéndice B. La acción del agua se modelará como una carga distribuida triangular

Para el caso expuesto, se propone una longitud de 6.4 metros, carga muerta de la canoa de  $10 \text{ kg/m}$  y un empuje hidrostático triangular con valor pico  $97.5 \text{ kg/m}$ . Asimismo, se considera que el pie trasero de los remadores no contribuye carga alguna para fines prácticos, por lo que el peso de los remadores se repartirá equitativamente en la rodilla y en el pie delantero. La separación entre pie delantero y rodilla será de 0.65 m y la separación entre la rodilla y el pie delantero del siguiente remador será de 0.50 m (Figura 3-4).

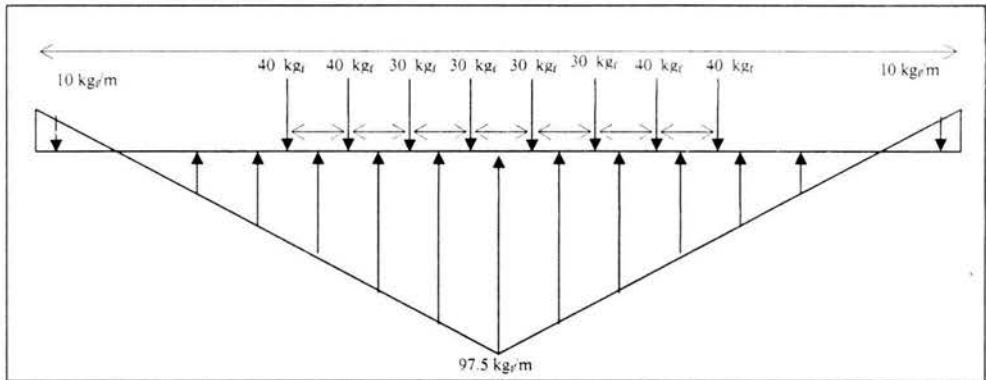


Figura 3-4 Diagrama de cuerpo libre para el análisis detallado

El hecho de distribuir el peso de la canoa, y no concentrar el peso de los remadores, tiene por efecto evidente una disminución en el momento que se presenta en el centro de la canoa.

Las figuras 3-5 y 3-6 muestran los resultados del análisis detallado. Los elementos mecánicos mostrados podrán ser utilizados para evaluar los esfuerzos cortantes y de flexión y compararlos con los permisibles de los materiales.

Para ello, es menester determinar también el módulo de sección en las secciones críticas y utilizar la ecuación de la escuadría. Ahora bien, aunque el momento máximo se presenta en la sección central de la canoa, es posible que un momento no crítico genere los esfuerzos máximos en una sección con menor módulo de sección. En el Apéndice C se describe gráficamente la evolución del módulo de sección a lo largo de la canoa y se logra concluir que la sección de máximo momento flexionante es también la que presenta los esfuerzos críticos.

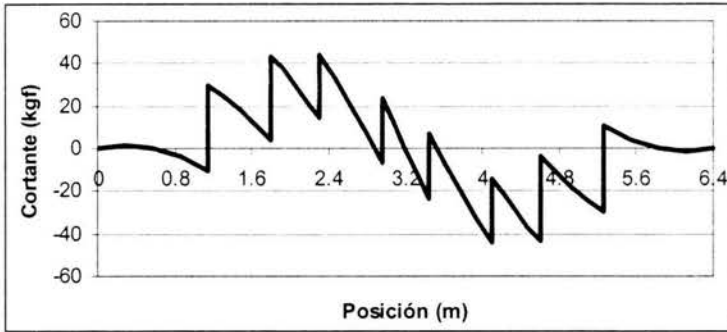


Figura 3-5 Diagrama de cortantes correspondiente al análisis detallado

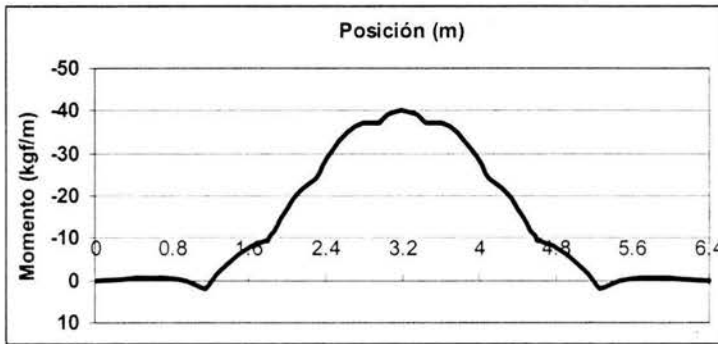


Figura 3-6 Diagrama de momentos flexionantes correspondiente al análisis detallado

Se percibe que los valores tanto de los cortantes, como de los momentos flexionantes son sumamente menores a los calculados en el primer análisis (75% y 80% respectivamente). Esto muestra que el primer análisis era demasiado conservador pero aún así requería un importante factor de seguridad.

De los resultados presentados en el Apéndice C se desprende que el esfuerzo máximo en la canoa es de  $12 \text{ kg}_f/\text{cm}^2$ .

## 3.2 Análisis tridimensional

### 3.2.1 Carga normal

Se aplicaron las condiciones de carga tal y como se mencionan en 2.5.

Para cumplir con la condición auto-balanceada se requirió ajustar levemente los multiplicadores de gravedad de manera que las fuerzas y momentos netos no excedieran  $0.001 \text{ kg}_f$  y  $0.001 \text{ kg}_f \cdot \text{m}$ . El multiplicador  $G_z$  se fijó en 1.017, el de  $G_x$  en  $1.01\text{E-}3$  y el de  $G_y$  en  $5\text{E-}6$ . La Tabla 3-1 muestra la magnitud de las fuerzas y momentos netos.

Tabla 3-1 Reacciones en el empotramiento.

Reacción	Magnitud ( $\text{kg}_f$ y $\text{m}$ )
$F_x$	-0.17016E-03
$F_y$	0.22202E-03
$F_z$	-0.23827E-03
$M_x$	0.24563E-03
$M_y$	0.95282E-03
$M_z$	0.0000

La deformación máxima es 2.18 cm y el esfuerzo de Von Mises resulta de  $39.96 \text{ kg}_f/\text{cm}^2$ .

### 3.2.2 Esfuerzos fuera de los apoyos

Se hace la revisión de las posiciones en que se presentan los esfuerzos máximos. La Tabla 3-2 muestra los principales puntos críticos en los que se

## Análisis

---

presentan esfuerzos relevantes. Se muestra la importancia y dominancia de los esfuerzos producidos por las cargas puntuales, aún con las consideraciones hechas para evitar la concentración de esfuerzos.

Es de remarcar que el valor del esfuerzo máximo de Von Mises, una vez descartados los apoyos de los pies, desciende hasta menos de la mitad del valor original. Puede entonces resultar interesante estudiar la forma de reforzar localmente los apoyos.

Tabla 3-2 Esfuerzos que se presentan en diversas posiciones del casco

Posición	SVMX (kg/cm <sup>2</sup> )
Pie C y F	39.96
Pie D y E	37.70
Pie B y G	37.07
Pie A y H	19.21

### 3.2.3 Carga Invertida

Se revisó la magnitud de las fuerzas y momentos netos sobre la canoa y, como es esperado, coinciden en magnitud con la condición de carga normal del 3.2.1 pero su sentido es inverso.

Para determinar la validez de la hipótesis de flexión reversible, es importante verificar el estado de esfuerzos que se presenta cuando el sentido de todas las cargas es invertido.

## Análisis

---

La deformación máxima es 2.18 cm y el esfuerzo de Von Mises resulta de  $39.96 \text{ kg}_f/\text{cm}^2$  coincidiendo perfectamente con la condición normal de carga.

### 3.3 Comparación de Resultados

Los resultados de las secciones 3.1.1, 3.1.2, aunados a las conclusiones del Apéndice C permiten sostener la congruencia de los resultados de la sección 3.2.

Se debe recalcar que tanto en 3.1.1 como en 3.1.2 no se tomó en consideración el empuje hidrostático que generaba deformaciones en la sección transversal. Por ello, los resultados de los estudios estimativos serán comparables con los esfuerzos perpendiculares a la sección central. De manera que se determinará para el modelo tridimensional la distribución de esfuerzos  $S_y$  en las posiciones extremas superior e inferior.

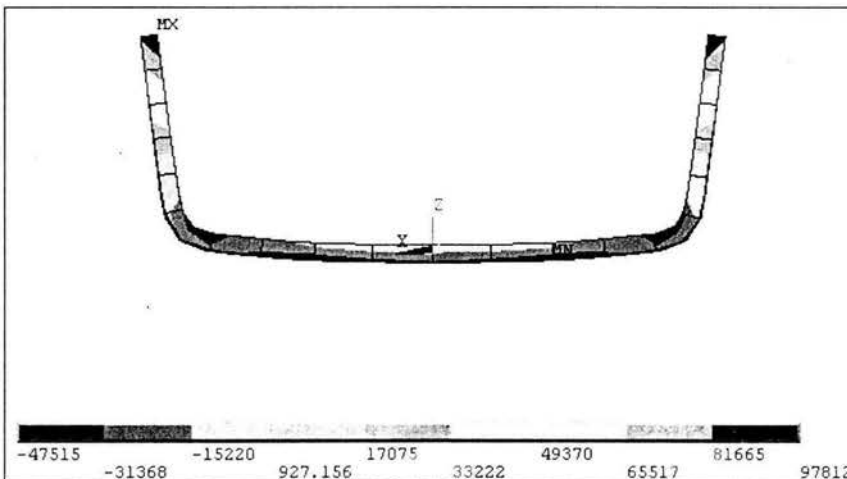


Figura 3-7 Distribución de esfuerzos debidos a flexión en la sección central de la canoa ( $\text{kg}_f/\text{m}^2$ )



## Análisis

---

La Figura 3-7 muestra la distribución de esfuerzos debidos a flexión, en la sección central de la canoa mediante el análisis tridimensional por elementos finitos.

**Tabla 3-3 Valores comparativos de esfuerzos en la canoa calculados con diferentes modelos**

<b>Análisis</b>	<b>Momento flexionante</b>	<b>Módulo de sección(cm<sup>3</sup>)</b>		<b>Esfuerzos (kgf/cm<sup>2</sup>)</b>	
	<b>kgf*cm</b>	<b>Sup</b>	<b>Inf</b>	<b>Sup</b>	<b>Inf</b>
Simple	18920	337.412	950.507	56.1	19.9
Detallado	4020			11.9	4.2
Tridimensional		N/A		9.780	4.75

La Tabla 3-3 muestra que el análisis tridimensional establece los esfuerzos en valores muy cercanos a los del análisis detallado bidimensional.

En ambos análisis bidimensionales, el cortante presente en la sección central es nulo. El cortante obtenido mediante el análisis tridimensional, exceptuando algunos puntos singulares también es nulo.

Los análisis bidimensionales no se realizaron con la finalidad de establecer la validez del tridimensional, en efecto las consideraciones simplificadoras hechas en ambos impiden que se considere a los primeros como los “exactos”. Si bien no se tiene la exactitud deseable, el orden de magnitud es satisfactorio y da suficiente confianza para estimar que los demás resultados que se puedan obtener del modelo son satisfactorios. Así pues, se condujeron tres análisis de complejidad creciente. El primero queda descartado por ser conservador en extremo mientras que el segundo permite dar certeza de que no hay fallas o errores de modelado en el análisis tridimensional.

## 4 Estudio Paramétrico

### 4.1 *Introducción*

Se realiza un estudio paramétrico de la estructura denominada canoa de concreto y las diversas variaciones que pudieran resultar en un diseño optimizado buscando reducir el peso total de la estructura y hacer un uso más racional de los materiales, en particular el refuerzo fibroso de Kevlar dado su elevado costo.

De manera directa se pretende establecer el efecto estructural que tiene la incorporación de costillas estructurales en diversas secciones transversales del casco, así como el efecto que tiene la relación entre la rigidez de estos elementos y el casco y su influencia en los esfuerzos resultantes. Se vislumbra que será posible utilizar concretos más resistentes y pesados en estos elementos de volumen limitado, por lo que se investiga de qué manera se compensan las masas al reducir el espesor general del casco.

La limitante principal en este estudio paramétrico es el desconocimiento de un amplio número de resultados experimentales que pudiesen dirigir más el estudio. Lo anterior debido a la falta de equipo especializado para pruebas directas de tensión en especímenes de concreto así como la fuerte variación observada en los resultados de pruebas que sí se han desarrollado con éxito.

Como se ha mencionado, se trabajó en el programa especializado para elemento finito ANSYS versión 7 para plataforma INTEL (ANSYS, 2002c).

### **4.1.1 Consideraciones para análisis**

En la presentación del modelo a utilizar se mencionó que se realizará un análisis estático con simetría longitudinal y transversal en condiciones de frontera, cargas y geometría. De forma que el análisis se considera auto-balanceado. Asimismo, por las pequeñas deformaciones esperadas el análisis será lineal en cuanto a la geometría, es decir que se despreciarán los efectos de deformación de los elementos para reevaluar las cargas. Debido al comportamiento requerido de la estructura en general, en particular la exigencia de un agrietamiento muy limitado por condiciones de servicio, el material deberá considerarse como operando en el rango elástico lineal.

### **4.1.2 Procedimiento**

Habiendo establecido en el análisis tridimensional del capítulo anterior el esfuerzo requerido del material para la canoa con un espesor de casco dado y sin el uso de costillas estructurales, se procede a evaluar las variaciones posibles de la estructura comparando los esfuerzos que en ellas resulten con los esfuerzos del análisis base.

Para fines de análisis y comparación únicamente se considerará el esfuerzo de Von Mises (SVM).

Las condiciones de frontera y de carga se mantienen en todos los análisis tal y como se definieron en el análisis tridimensional del capítulo tercero.

## 4.2 Variación del Espesor del Casco

En primera instancia, se determinará el impacto en el esfuerzo crítico que tiene el variar el espesor del casco.

Se variaron los espesores desde 8 a 11 mm. Del análisis de los resultados se puede llegar a una conclusión que conviene discutir. En efecto, la variación del esfuerzo de Von Mises es *directamente* proporcional al inverso del cuadrado del espesor (Figura 4-1).

De forma simplista se considera que el resultado anterior se puede derivar en parte del análisis de la ecuación de la escuadría.

Recordando que para una viga sujeta a flexión simple, la ecuación de la escuadría establece que:

$$f = M/S \quad (4.1)$$

donde

$$S = I_{xx}/c \quad (4.2)$$

y para una sección rectangular

$$I = bh^3/12 = Ah^2/12 \quad (4.3)$$

en el caso del casco compuesto

$$h = e \quad (4.4)$$

por lo que sustituyendo la ecuación (4.4) en (4.3)

$$I = f(e^2) \quad (4.5)$$

asimismo

$$S = f(e^2) \tag{4.6}$$

y finalmente

$$f = f(1/e^2) \tag{4.7}$$

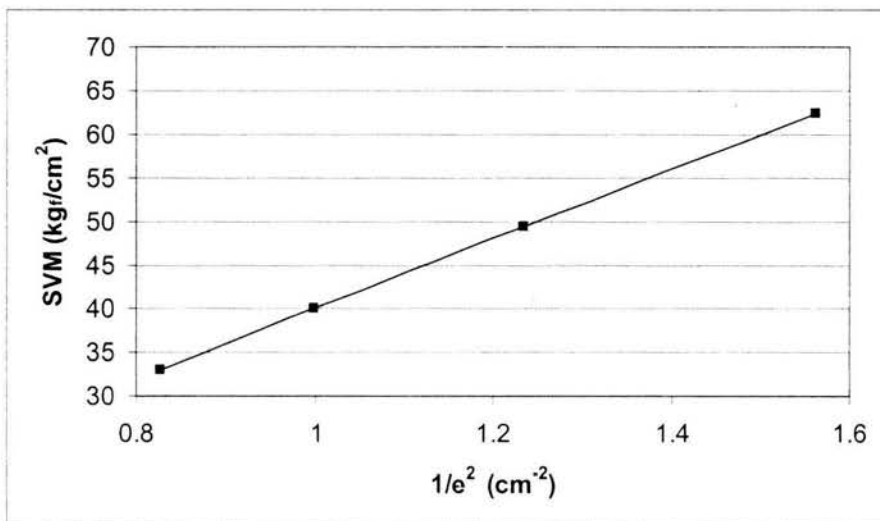


Figura 4-1 Correlación del esfuerzo de Von Mises y el Espesor del Casco

Si bien lo anterior, no demuestra formalmente la correlación que existe entre el esfuerzo de Von Mises obtenido en el análisis y el inverso del cuadrado del espesor del casco, sí permite intuir a una eventual demostración teórica de lo encontrado en este punto.

Obedeciendo a la ley de Hooke, la deformación encontrada en el análisis de cada espesor distinto es proporcional al esfuerzo de Von Mises y por ende lo es también al inverso del cuadrado del espesor del casco.

Por otra parte, y de manera intuitiva se concluye que la masa es directamente proporcional al espesor del casco.

### **4.3 Utilización de costillas en la estructura**

El uso de costillas estructurales para incrementar la rigidez de la estructura de la canoa es una idea que surge de manera intuitiva al visualizar la deformación de la misma. Se perciben deformaciones de las secciones transversales que incrementan hacia el centro de la canoa y resulta conveniente pensar en implementar algún elemento que reduzca o impida dicha deformación.

Se buscó establecer diversas posiciones de las costillas así como analizar múltiples combinaciones de estas. A pesar de las dificultades constructivas que significa su desarrollo, las costillas son elementos que incrementan notablemente la eficiencia y rigidez estructural.

El uso de costillas puede ser asimétrico, sin embargo para las idealizaciones adoptadas en este trabajo, romper con la simetría geométrica y estructural impediría proceder con el análisis como se ha hecho hasta el momento. Por ello se analizaron costillas en cuatro posiciones sobre la longitud de la canoa, definidas por los ejes transversales.

En este primer estudio, se propuso utilizar costillas de 2 cm de ancho y 4 cm de peralte. Por falta de resultados experimentales y pruebas de materiales se consideró que las costillas formarían parte integral del casco de la canoa y mantendrían el mismo módulo de elasticidad y relación de Poisson. Por sus dimensiones, la masa por unidad de longitud de las costillas es de 0.6 kg/m.

Las costillas propuestas para el análisis son:

## Estudio Paramétrico

---

- Eje 1: Sección central de la canoa. Una sola costilla.
- Ejes 2 y 2': Sección transversal a 0.5 m del centro de la canoa.
- Ejes 3 y 3': Sección transversal a 1.2 m del centro de la canoa.
- Ejes 4 y 4': Sección transversal a 1.7 m del centro de la canoa.

Formulando todas las combinaciones posibles de las costillas propuestas, se procedió a modelar las costillas y analizar las estructuras resultantes.

Para poder comparar las diversas alternativas, se define el concepto de eficiencia estructural. Se considera que un incremento en masa reduce la eficiencia estructural mientras que un incremento en el esfuerzo de Von Mises crítico la incrementa. Así, la eficiencia es un término relativo y se define como:

$$\eta_{st} = \frac{1 - \% \Delta m}{1 + \% \Delta S} = \frac{1 - \frac{m_2 - m_1}{m_1}}{1 + \frac{S_1 - S_2}{S_1}} = \frac{\frac{2m_1 - m_2}{m_1}}{\frac{2S_1 - S_2}{S_1}} = \frac{S_1}{m_1} \frac{m_1 - m_2}{S_1 - S_2} \quad (4.8)$$

Se determinó la masa de la estructura resultante y el esfuerzo de Von Mises crítico correspondiente. A pesar de que varias combinaciones de costillas resultan en un incremento en la eficiencia estructural de cerca de 35% como lo muestra la

Figura 4-2, tomando en consideración la complicación constructiva que representa implementar su uso se optó por la que menos costillas implica. Así la combinación más interesante en cuanto a disminución del

esfuerzo de Von Mises resulta de utilizar costillas en los ejes 2, 2', 3 y 3'. Con un incremento del 4.6% en la masa, se logra disminuir en 29% los esfuerzos, lo cual significa una eficiencia de casi 34%.

Lo anterior hace contundente el beneficio en la utilización de costillas. Más aún, el uso de las mismas no tiene por qué justificarse brindando seguridad estructural adicional. De manera más intrépida, el uso de costillas y su impacto en la disminución de los esfuerzos a los que está sujeta la canoa, debe utilizarse para lograr una mayor ventaja competitiva disminuyendo el espesor general del casco y logrando una reducción en el peso de la embarcación.

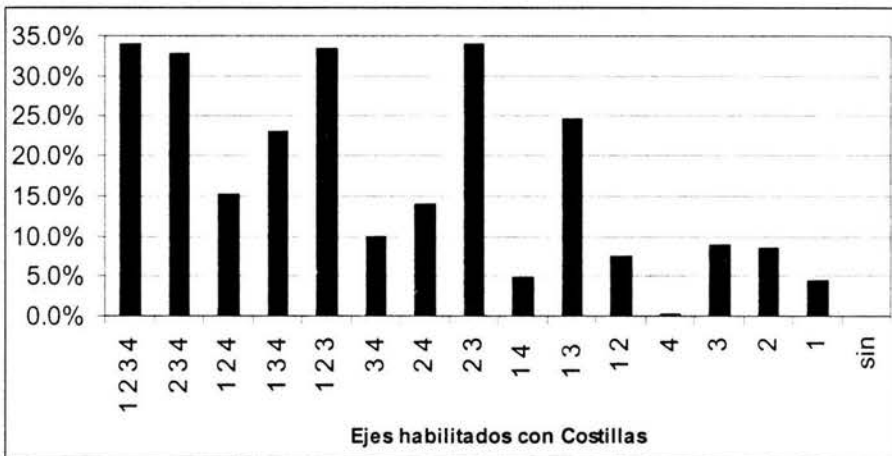


Figura 4-2 Incremento en la eficiencia estructural mediante el uso de costillas en diversas posiciones

#### 4.4 Disminución del espesor del casco.

El estudio precedente mostró el impacto estructural del uso de costillas estructurales, sin embargo los beneficios estructurales no son los



## Estudio Paramétrico

---

únicos. Como se mencionó, es de primordial importancia lograr la canoa del peso mínimo y disfrutar las gracias hidrodinámicas de una canoa más ligera.

Al utilizar costillas en los ejes 2, 2', 3 y 3', se ha logrado disminuir los esfuerzos que se presentan en la estructura en 29%, el propósito ahora es disminuir el espesor del casco hasta que los esfuerzos retomen sus valores originales.

Merece hacerse una precisión ya que al disminuir el espesor del casco manteniendo el número de capas de Kevlar utilizadas, el módulo de elasticidad se incrementa. Ello no significa, sin embargo, que la estructura sea más rígida puesto que el espesor ha disminuido y así también el momento de inercia. Ahora bien, para fines de análisis estructural, se decide mantener constante el módulo de elasticidad puesto que como ya se ha mencionado interesan los esfuerzos mas no las deformaciones (salvo para verificar la congruencia de los resultados).

Tomando como referencia la canoa del análisis tridimensional del capítulo cuarto, cuya masa es de 51.35 kg y el esfuerzo de Von Mises crítico es de  $39.40 \text{ kg}_f/\text{cm}^2$ , se procede a disminuir el espesor del casco.

Sin exceder más que levemente el esfuerzo de Von Mises, alcanzando  $39.80 \text{ kg}_f/\text{cm}^2$ , se logra reducir el espesor desde 10 mm hasta 7.6 mm. Así, la masa disminuye hasta 41.4 kg<sub>f</sub>, lo cual representa el 20% de decremento.

De tal forma, gracias al uso de costillas, manteniendo la resistencia de los materiales se logra disminuir muy importantemente la masa final de la canoa. Estos resultados muestran la importancia de un proceso de diseño integral, puesto que el decremento en masa puede tener un impacto en la

resistencia al avance de la canoa. Asimismo, una canoa ligera es más maniobrable y puede ser cargada por menos personas, facilitando el entrenamiento individual.

### **4.5 Variación del módulo de elasticidad de las costillas**

La forma de las costillas y la facilidad para incrementar localmente la cantidad de refuerzo puede hacer aún más interesante su uso. Queda claro que en las costillas cuyo peralte es varias veces mayor que el espesor del casco es relativamente sencillo incrementar el número de capas de refuerzo o la introducción de refuerzo adicional de otro tipo. En particular se puede considerar que en ellas es factible el uso de cuerda de carbono o Kevlar de un diámetro mayor. De tal forma, se incrementaría el módulo de elasticidad de la costilla en relación al casco, ello daría una rigidez adicional a la canoa y por consiguiente se reducirían los esfuerzos en los materiales.

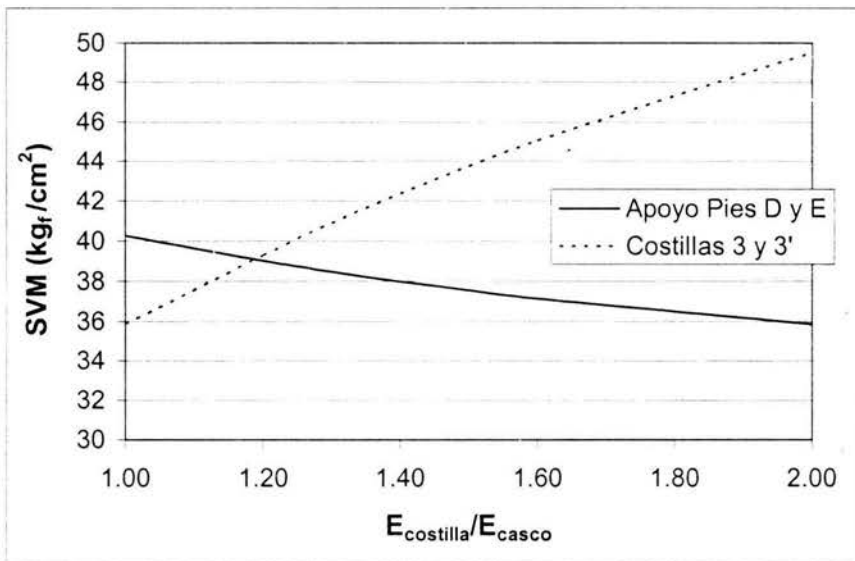
En este inciso se propone estudiar el impacto que tiene el incremento del módulo de elasticidad de las costillas en el esfuerzo crítico de Von Mises que se presenta en la canoa.

Queda claro, que el incremento de la rigidez de las costillas, tendrá eventualmente el efecto de transmitir los esfuerzos de los apoyos hacia las costillas mediante el mecanismo conocido como “redistribución de cargas”. De tal forma, conviene determinar para cada incremento del módulo de elasticidad de las costillas, el punto geométrico en donde se presenta el máximo esfuerzo.

## Estudio Paramétrico

Aún sin datos experimentales, es factible suponer que si se incrementa la cantidad volumétrica de refuerzo en las costillas con respecto al casco de manera a incrementar el módulo de elasticidad, también se logrará incrementar la resistencia de la costilla con respecto al casco. Así, aunque se presenten esfuerzos mayores en las costillas, es factible que estas logren resistir.

Figura 4-3 Efecto del incremento de rigidez de las costillas en los esfuerzos máximos del casco de la canoa



La Figura 4-3 muestra la variación cuadrática de los esfuerzos de Von Mises presentes en las costilla de los ejes 3 y 3' y en los apoyos D y E cuando se incrementa el módulo de elasticidad de las costillas en relación al del casco. En particular, es relevante comentar que el esfuerzo dominante en la canoa, presente en los apoyos D y E, se reduce lo suficiente al incrementar el módulo de elasticidad de las costillas para que el esfuerzo dominante se presente en las costillas de los ejes 3 y 3'. A partir de un incremento del

20% en el módulo de elasticidad de las costillas, el esfuerzo crítico deja de presentarse en el casco y es transferido a las costillas.

Este resultado es interesante puesto que gracias a un incremento del módulo de elasticidad en las costillas se puede seguir reduciendo el esfuerzo presente en el casco. Sin pretender reducir aún más el espesor del casco, el incremento de la rigidez de las costillas incrementa el factor de seguridad en el casco.

Asimismo, resulta interesante puesto que transmitiendo los esfuerzos críticos hacia las costillas, es más fácil detectar agrietamiento o aplastamiento y se reduce la posibilidad de falla catastrófica (falla frágil). En el mismo sentido, se puede hacer un mayor esfuerzo de control de calidad en el proceso constructivo enfocándose específicamente a las costillas y en caso de requerir alguna reparación será sin duda más sencillo reparar una grieta en la costilla que un hueco en el casco.

*El diseño estructural es el arte de usar materiales que en realidad no conocemos para formar estructuras que en realidad no podemos analizar, de manera que resistan cargas que en realidad no podemos evaluar, todo esto en modo tal que el público no se de cuenta de nuestra ignorancia.*

*Ingeniero Estructuralista Anónimo.*

## **5 Conclusiones y Recomendaciones**

El presente es un estudio parcial del complejo problema dinámico que representa el diseño y análisis de una canoa de concreto, sus materiales y sus sollicitaciones.

Se limitó el desarrollo, no por restricciones computacionales, sino más bien por desconocimiento e incapacidad para modelar fielmente los componentes del sistema estructura-cargas.

Se propuso demostrar la factibilidad de estudiar y evaluar diversas alternativas estructurales, desconociendo sus propiedades físicas precisas, para producir una justificación cualitativa del diseño estructural de una canoa de concreto fabricada con materiales compuestos.

Se presentaron los elementos teóricos suficientes para el entendimiento y desarrollo de los procedimientos de modelado y análisis,

## Conclusiones y Recomendaciones

---

incluyendo la introducción a los materiales compuestos. Asimismo se presentó la generación del modelo analítico comenzando por el diseño geométrico e hidrodinámico mencionando los factores involucrados y los métodos utilizados. Se discutió la elección de condiciones de frontera y su impacto en los resultados del análisis. Se presentó la condición de carga auto balanceada, bajo la noción de que se pueden eliminar los esfuerzos en un punto de empotramiento cuando las cargas están completamente balanceadas. Se procedió al análisis tridimensional por elementos finitos y se busco dar congruencia y validez a los resultados de un proceso computarizado en el que no se tendría injerencia comparándolos con los obtenidos mediante estática simple y cálculos sencillos.

Se realizó un estudio paramétrico con la finalidad de optimizar estructuralmente la canoa y se procedió a estudiar diversas combinaciones de costillas con la finalidad de establecer la optima. Se revisó el impacto en la masa total de la canoa y la correspondiente disminución en los esfuerzos pico. En consecuencia, se disminuyó el espesor del casco y finalmente, se estudió el impacto que tendría incrementar la rigidez de las costillas mismas buscando conocer los mecanismos de redistribución de esfuerzos presentes en la canoa.

El desarrollo permite enunciar una amplia serie de conclusiones, algunas generales, otras particulares al caso o condición. Se vio que los materiales compuestos pueden ser estudiados mediante el método conocido como “sección transformada” para así determinar su módulo de elasticidad. El concreto reforzado con Kevlar es en efecto un compuesto cerámico con

## Conclusiones y Recomendaciones

---

refuerzo fibroso, continuo y bidireccional que en conjunto forma un material ortotrópico.

Se advirtió sobre los factores de diseño hidrodinámico que resultarían irrelevantes y se indicó la dificultad de analizar otros. Se eligió como herramienta de análisis estructural el programa ANSYS por contar con elementos de orden superior y herramientas integradas de pre y pos procesado. Se demostró la importancia de condiciones de frontera continuas sin cambios bruscos de dirección para evitar concentraciones de esfuerzos. Se corroboró el beneficio de contemplar condiciones de frontera no puntuales generando un modelo confiable exento de singularidades.

Se indicó la factibilidad de modelar el empuje hidrostático como una carga vertical de forma triangular con un valor pico en la sección central. Se determinó que sería muy complicado determinar la distribución correcta del peso de los remadores y se optó por considerar dos cargas verticales de la mitad del peso en cada una aplicadas en las posiciones correspondientes al pie delantero y la rodilla.

Se comprobó que el primer análisis bidimensional adolecía de una gran incertidumbre y una extrema sobreestimación de los elementos mecánicos, sin embargo se pudo determinar que al modelar las cargas de manera más real, los elementos se reducirían considerablemente. A pesar de la variación del módulo de sección a lo largo de la canoa, se pudo ratificar que los esfuerzos máximos se presentarían en la sección crítica a flexión, es decir en la sección central.

## Conclusiones y Recomendaciones

---

Recordando la Ley de Hooke y obedeciendo completamente a la linealidad, se pudo iniciar el análisis de forma independiente al valor del módulo de elasticidad puesto que la variación numérica se da en las deformaciones, no en los esfuerzos.

El análisis tridimensional resultó sumamente aceptable ya que otorgó resultados muy comparables a los del análisis detallado, exentándolo por ende de alguna singularidad o error de modelado, no obstante, la diferencia observada ha de ser causada por la influencia de la cercanía de los apoyos de los remadores. Es pues la concentración de cargas en los puntos de apoyo la mayor justificación para realizar el análisis tridimensional. Si los resultados son tan semejantes, se podría entonces economizar esfuerzo, tiempo y recursos haciendo un análisis bidimensional detallado. Sin embargo, la concentración de esfuerzos bajo la rodilla y el pie de los remadores no es una cuestión virtual, es una carga real a la que se somete la canoa. En efecto se constató que los ocho puntos de mayores niveles de esfuerzos correspondían expresamente a las localizaciones de los apoyos de los remadores. Asimismo, descartadas situaciones locales, los esfuerzos presentes disminuyen al 50% de sus niveles máximos.

Se observó que cuando se disminuye el espesor del casco, manteniendo el nivel de refuerzo, el módulo de elasticidad incrementa, ello sin implicar una rigidización puesto que su capacidad para deformarse lo hace también puesto que se reduce su inercia. Por ello se optó por dejar invariante el módulo de elasticidad y se concluyó que el esfuerzo crítico de Von Mises es inversamente proporcional al cuadrado del espesor del casco obedeciendo a la ecuación de la escuadría.



Descartando la posibilidad de reforzar localmente el casco para resistir los esfuerzos presentes en los apoyos, se buscó el uso de otros elementos estructurales. Aceptando la falta de datos resultado de pruebas físicas para modelar con precisión los materiales, se logró proponer una estructura optimizada con costillas estructurales en la que se pudo reducir en 25% el espesor del casco. De la misma manera se permitió ubicar con precisión los puntos de flaqueza estructural en las costillas para buscar un control constructivo y facilitar su seguimiento.

### **5.1 Recomendaciones**

Si bien las conclusiones expresadas son satisfactorias, restan aspectos críticos para complementar este trabajo y contar con elementos suficientes para construir una canoa eficiente en los sentidos económico, estructural y constructivo.

Se debe hacer notar que el refuerzo altera las propiedades de flexión y tensión en las direcciones longitudinal y transversal, sin embargo en la dirección vertical del material no hay alteración. Así pues, se debería considerar al material como ortotrópico y no isotrópico. Para ello, las propiedades mecánicas conocidas son insuficientes y es necesario conducir pruebas de precisión para determinar con exactitud los módulos de cortante, de elasticidad y la relación de Poisson en cada dirección para así aprovechar las bondades computacionales al máximo. Entonces, podría hacerse uso de la no-linealidad en la geometría y en los materiales.

## Conclusiones y Recomendaciones

---

En el estudio de materiales compuestos, es necesario corroborar que su comportamiento efectivamente sea homogéneo. En particular, la relación modular correspondiente es muy grande y pueden surgir serios problemas de transmisión de esfuerzos y por tanto de adherencia entre el concreto y el refuerzo.

Reiterando la insuficiente información física disponible, la densidad del material compuesto se definió a priori obedeciendo a las restricciones del concurso y considerando preferible una sobreestimación. Mayor conocimiento de los concretos permitiría un modelado más certero. Hincapié debe hacerse también en la necesidad de conocer un valor de la relación de Poisson, puesto que a la fecha no se tiene siquiera un valor estimado para concretos ultra-ligeros.

Para fines prácticos, la presentación del material y su aplicación altera la dirección del refuerzo sobre la canoa. Asimismo en ciertas secciones se presentarían necesariamente traslapes. Lo primero impediría diferenciar la separación entre fibras en cada dirección, y lo segundo impondría la necesidad de estudiar la posición y longitud de traslape necesaria para la adecuada transmisión de esfuerzos.

La incorporación de costillas, es un requisito estructural evidente. Sin embargo, este conlleva complicaciones para su implementación. Se deberá revisar que la costilla aunada al casco trabajen de manera conjunta sin fallas de separación locales. Asimismo, se debe continuar con los trabajos de diseño de mezclas puesto que en elementos de volumen limitado (como lo serían las costillas) es factible utilizar concretos más pesados siempre y cuando compensen con una mayor resistencia y módulo de elasticidad. Se

## Conclusiones y Recomendaciones

---

deberá en particular revisar el reglamento del certamen y conocer los límites de refuerzo permitidos.

Por otro lado será factible la incorporación de otros elementos de rigidez tales como una quilla o relleno en las puntas, entre otros. De suma importancia será el análisis de la incorporación de técnicas de preesfuerzo. Será necesario incorporar estas alternativas a un diseño integral.

En el contexto de competitividad internacional actual, la participación en las competencias de Canoas de Concreto y en eventos de esta índole resulta provechosa a nivel social, institucional y personal. Se cuenta hoy en día con herramientas analíticas que permiten reducir la distancia entre las posibilidades de los equipos de nueva formación y los competidores consolidados. Resultará contradictorio que las herramientas modernas de análisis como ANSYS, deban ser conocidas por los alumnos en proyectos extracurriculares, pero sin duda alguna su familiarización no será despreciada por futuros empleadores. Por otro lado, existe suficiente información disponible en fuentes públicas para dirigir los procesos de diseño locales y permitir a cada universidad afianzar el trabajo que se deberá realizar de manera constante y comprometida en caso de buscar destacar.

Es de remarcar que los cálculos que se hagan en cualquier parte del mundo con las herramientas existentes darán sin duda alguna los mismos resultados. La diferencia reside, sin embargo, en la posibilidad de cada equipo técnico en llevar a cabo los resultados analíticos. En efecto el

## Conclusiones y Recomendaciones

---

concreto de módulo de elasticidad dado (en este caso  $10000 \text{ kg/cm}^2$ ) tendrá quizás las mismas propiedades mecánicas, pero el comportamiento físico al ser colado puede ser muy distinto. Pueden existir concretos ligeros auto compactantes, bombeables, aplicados con atomizador, las cimbras pueden ser hembra, macho, dobles, etc. Asimismo, es necesario revisar que efectivamente sea posible fabricar cascarones de concreto de 7.6 mm de espesor y lograr la adecuada transmisión de esfuerzos hacia las costillas. De tal modo, los aspectos constructivos deberán revisarse con cuidado para poder completar el proyecto.

En conjunto con otros trabajos desarrollados sobre el tema de las canoas de concreto, se procura avanzar en el desarrollo técnico y científico como método para motivar el orgullo por la ingeniería y régimen para incitar al desarrollo extracurricular de los estudiantes.

La conclusión de este desarrollo, no es el proyecto completo para la construcción de una canoa de materiales compuestos. Se han orientado las líneas de investigación con la finalidad de presentar un avance certero en futuras participaciones.

## Apéndices

## Referencias

- A. ANSYS (2002a), *Theory Reference*, ANSYS Inc.
- B. ANSYS (2002b), *ANSYS Element Reference*, ANSYS Inc.
- C. ANSYS (2002c), *Ansys Mechanical U version 7*, ANSYS Inc.
- D. Autodesk (2002), *Autocad 2002*, Autodesk, Inc.
- E. Buchanan G. R. (1995), *Finite Element Analysis*, Mc Graw Hill.
- F. Chandrupala T. y Belegundu A. (2002). *Introduction to Finite Elements in Engineering*, 3<sup>rd</sup> ed. Prentice-Hall.
- G. Chávez M.(2003), *La Programación y Presupuestación del Proyecto de Canoas de Concreto 2003*. Tesis de Licenciatura. Facultad de Ingeniería. UNAM.
- H. Cook R.D (1995)., *Finite Element Modeling for Stress Analysis*, 1<sup>st</sup> ed. John Wiley & Sons.
- I. Demeneghi A., Magaña R. y Sanginés H (2000), *Apuntes de Mecánica del Medio Continuo*, Facultad de Ingeniería. UNAM.
- J. Dupont (2002), *Kevlar Product Specifications Sheet*, Dupont, Inc.
- K. Formsys (2004). *Maxsurf version 9.6*. Formation Design Systems Inc, Inc.

## Referencias

---

- L. Martínez A., Martínez G. y Solís C. (2004), *La construcción de la segunda canoa de concreto del Equipo Representativo de la UNAM*, Tesis de Licenciatura, Facultad de Ingeniería. UNAM.
- M. Maschke K. (2003), *Analysis of Complex Hull Forms*. Final Project. University of Michigan.
- N. Mathworks (2004). *Matlab version 7.0*. Mathworks, Inc.
- O. Matthews F.L y Rawlings R.D (1994). *Composite Materials: Engineering & Science*, 1<sup>st</sup> ed. Woodhead Publishing.
- P. McNeel R. (2002a), *RHINOCEROS version 3.0*, Robert McNeel & Associates
- Q. McNeel R.(2002b), *RHINOCEROS 3.0 NURBS Modeling for Windows Reference Guide*. Robert McNeel & Associates.
- R. OSU (2002), Oklahoma State University *Concrete Canoe Home Page*  
[http://members.cox.net/concretecanoe/shape\\_opt.htm](http://members.cox.net/concretecanoe/shape_opt.htm)
- S. SAP2000 (1997a), *SAP 2000 Nonlinear v 6.11*, CSI Inc.
- T. SAP2000 (1997b), *Program Manual version 6.11*, CSI Inc.
- U. Skene N.L. (1938), *Elements of Yacht Design*. Sheridan House.
- V. Timoshenko S. y Goodier J.N (1968), *Teoría de la Elasticidad*, Ediciones URMO, Bilbao.
- W. Timoshenko S. y Young D.H (1976), *Teoría de las Estructuras*, Segunda Edición. Ediciones URMO, Bilbao.

## Apéndice A. Condiciones de Frontera

Este apéndice presenta el análisis realizado para elegir las condiciones de frontera que condicionarán el modelo analítico de la canoa.

Se generó el modelo de una placa del mismo concreto a utilizarse para la canoa. La placa es cuadrada de 1 metro de lado y su espesor es de 5 cm. El módulo de elasticidad se mantuvo en  $1 \times 10^4 \text{ kg}_f/\text{cm}^2$  así como la relación de Poisson en 0.2. El modelo utilizó cascarones SHELL93 (ANSYS, 2002c) y fue cargado con una presión vertical descendiente de  $100 \text{ kg}_f/\text{m}^2$ .

Se utilizaron tres geometrías para el apoyo: un círculo con 40 cm. de perímetro (circ40), un círculo con  $100 \text{ cm}^2$  de área (circ100), y un cuadrado que, a su vez tiene 40 cm de perímetro y  $100 \text{ cm}^2$  de área (cuad). Se compararon tanto la deformación máxima como el esfuerzo de Von Mises para tres casos de geometría del apoyo y varias configuraciones en la restricción del grado de libertad.

La Tabla A-1 muestra los valores obtenidos para cada caso de apoyo que podrán ser comparados con el resultado de haber apoyado únicamente en un empotramiento central ( $DMX=.002263 \text{ m}$ ,  $SVM=405787 \text{ kg}_f/\text{m}^2$ ).

Se observa que los esfuerzos son sumamente mayores en el caso de apoyo sobre un cuadrado. En efecto, a pesar de que las deformaciones oscilan entre 1.072 mm y 1.241 mm, variando únicamente un 15%, la variación en los esfuerzos es considerable.



## Condiciones de Frontera

Tabla A-1 Valores de deformación y esfuerzo de Von Mises en diversas condiciones de apoyo

<b>CIRC 40</b>	<b>DMX (m)</b>	<b>SVMX (kgf/m<sup>2</sup>)</b>
Apoyo vertical sobre el perímetro	0.001241	44140
Empotramiento en el perímetro	0.001072	65827
Empotramiento en el área	0.001072	65827
Región rígida en todos los DOF	0.001072	65827
Región rígida en U	0.001174	57096
Región rígida en ROT	0.001075	67084
Región rígida en Uz	0.001174	57096

<b>CIRC 100</b>	<b>DMX (m)</b>	<b>SVMX (kgf/m<sup>2</sup>)</b>
Apoyo vertical sobre el área	0.001207	59092
Empotramiento en el área	0.001112	69776
Región rígida en todos los DOF	0.001112	69776
Región rígida en U	0.001207	59092
Región rígida en ROT	0.001164	454036
Región rígida en Uz	0.001208	59113

<b>CUAD</b>	<b>DMX (m)</b>	<b>SVMX (kgf/m<sup>2</sup>)</b>
Apoyo vertical sobre el área	0.001184	68483
Apoyo vertical sobre el perímetro	0.001214	75829
Empotramiento en el perímetro	0.001095	79619
Empotramiento en el área	0.001095	79619
Región rígida en todos los DOF	0.001095	79619
Región rígida en U	0.001184	68411
Región rígida en ROT	0.001145	336726
Región rígida en Uz	0.001215	68411

Por otro lado se observa que en el caso de rigidizar el área interna del apoyo, cuando sólo se rigidiza el giro (ROT) los esfuerzos críticos se

## Condiciones de Frontera

---

incrementan severamente. Esto se debe a la aparición de ligeras asimetrías. La susceptibilidad de esta condición de apoyo conduce a preferir evitarla.

Adicionalmente se observa que cuando se empotra el perímetro del apoyo o se empotra el área interior o se define una región *completamente* rígida en esa área, el comportamiento es el mismo.

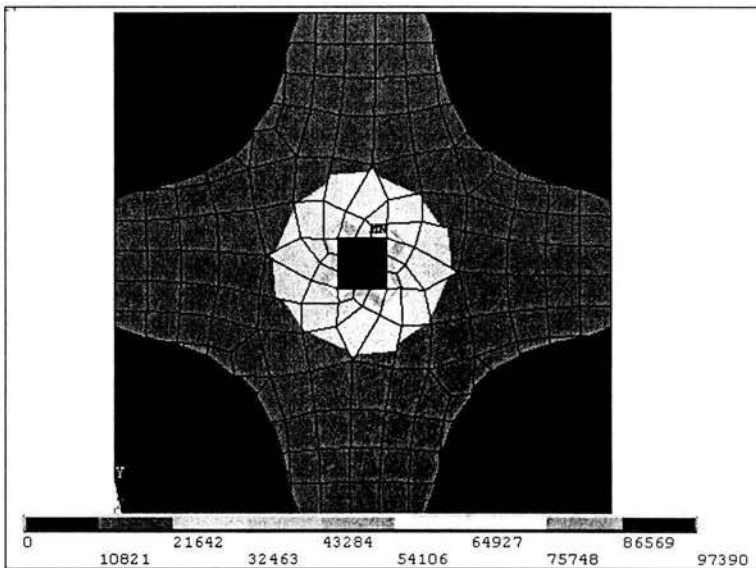


Figura A-1 Apoyo circ40 con región rígida en traslación ( $\text{kg}/\text{m}^2$ )

La Figura A-1 muestra una de las condiciones de apoyo estudiadas para la cual se definió un empotramiento en el perímetro del cuadrado de 10 cm de lado. Se detectan inmediatamente las concentraciones de esfuerzo en las esquinas del cuadrado y la consecuente deficiencia del tipo de apoyo.

La condición de apoyo preferible resulta en utilizar una región interna en que se unifican los grados de libertad de traslación vertical. También se verifica que es preferible el uso de apoyos circulares a los cuadrados.

## Apéndice B. Propiedades geométricas de la canoa

En el modelado de las condiciones de carga resulta conveniente determinar si es factible generar funciones matemáticas que describan el comportamiento de la geometría de la canoa. De ser posible, es entonces procedente sustituir procesos de interpolación y discretización de volúmenes y áreas por la evaluación de funciones numéricas. Inclusive, resultará interesante sustituir series de valores puntuales por funciones que sean solo ligeramente dependientes de la forma específica de la canoa. En particular, la acción hidrostática del agua sobre la canoa podrá ser sustituida a priori por una carga triangular.

Hacer este tipo de simplificaciones, puede ser muy útil para tener un mejor conocimiento de los aspectos hidrostáticos de la canoa, así como poder interrelacionar más los procesos de diseño. Es decir, partiendo de ciertas idealizaciones es posible comenzar el diseño estructural sin tener definido en su totalidad el diseño geométrico.

Las determinaciones y comportamientos analizados a continuación son estrictamente validos únicamente para la condición de máximo desplazamiento y el diseño geométrico de la canoa en estudio. Sin embargo, es factible que el comportamiento se reproduzca en otras condiciones de calado y variantes del diseño geométrico. Asimismo, utilizando la propiedad de simetría, solo se trabaja con la mitad del casco.

### Áreas

Una propiedad importante es la posibilidad de considerar el empuje hidrostático sobre la canoa como una carga triangularmente distribuida. Se propone demostrar la validez de esta suposición con el presente modelo. Se hizo un barrido longitudinal de la canoa vista en punta y se hicieron cortes transversales a cada 5 cm. Se obtuvo por medio de un programa de computadora (McNeel, 2002a), el área del plano comprendido entre el casco y la línea de agua. Mediante evaluación de volúmenes discretos se calculó el desplazamiento para compararlo con el valor real a manera de verificar el proceso, obteniendo menos de 1% de discrepancia.

La Figura B-1 muestra la curva de áreas-posición y se observan dos puntos de inflexión. Dado que en la posición 0 el área es cero, se puede suponer un ajuste mediante una función cúbica del tipo  $y = Ax^3 + Bx^2 + Cx$ .

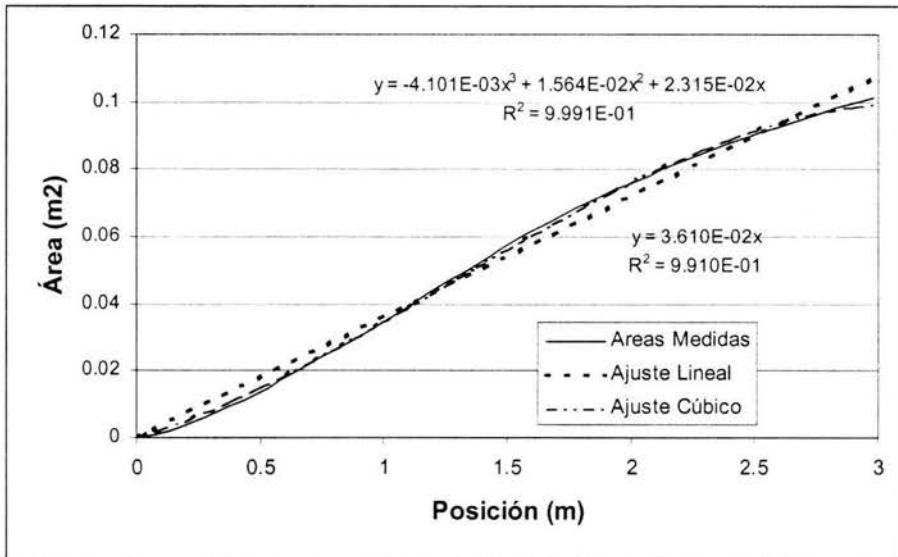


Figura B-1 Ajustes a la función área de la sección transversal-posición

## Propiedades geométricas de la canoa

---

Por otro lado, y más interesante aún, haciendo un ajuste lineal, se observa que el valor de correlación es muy adecuado (Figura B-1). Se observa en la Figura B-1 que en el centro de la canoa (3m) las curvas de ajuste están por encima de la curva real. Esto se interpreta como una sobreestimación el área al utilizar cualquiera de las funciones de ajuste. En consecuencia conduce a un exceso en la evaluación del desplazamiento en esa zona por lo que la acción del agua es también sobrevaluada. De esta forma, son incrementados los momentos flexionantes y cortantes en la región crítica con respecto a los valores reales. Por ello este ajuste se encuentra del lado de la seguridad. Por otra parte, la determinación de la función lineal resulta de lo más sencilla. Conociendo el desplazamiento ( $W$ ) y la longitud mojada de la canoa ( $l_m$ ), la distribución triangular tiene entonces un valor máximo de  $q = 2W/l_m$ . Esto resulta independiente de la forma precisa de la canoa.

### Demostración

$W$  es el desplazamiento ( $kg_f$ )

$l_m$  es la longitud mojada de la canoa (m).

Considerando que

$$a = f(l) \tag{6.1}$$

donde:

$a$  es el área de la sección transversal considerada( $m^2$ ).

## Propiedades geométricas de la canoa

---

$l$  es la distancia transversal de la sección medida desde el primer punto mojado sobre la quilla (m).

En un elemento diferencial de volumen

$$dV = a dl \quad (6.2)$$

$V$  es el volumen de agua desplazado ( $m^3$ ).

Por integración

$$V = \int a dl = \int f(l) dl \quad (6.3)$$

definiendo los límites de integración para media canoa:

$$V = 2 \int_0^{\frac{l_m}{2}} f(l) dl \quad (6.4)$$

con la función de ajuste lineal:

$$f(l) = kl \quad (6.5)$$

$$V = 2 \int_0^{\frac{l_m}{2}} k \cdot l dl \quad (6.6)$$

$$V = 2 \frac{kl^2}{2} \Big|_0^{\frac{l_m}{2}} = \frac{kl_m^2}{4} \quad (6.7)$$

## Propiedades geométricas de la canoa

---

aislando la constante de proporcionalidad de la función de ajuste:

$$k = \frac{4V}{l_m^2} \quad (6.8)$$

por definición:

$$W = V\rho \quad (6.9)$$

$$k = \frac{4W}{\rho l_m^2} \quad (6.10)$$

por lo que la función de ajuste resulta :

$$a = \frac{4W}{\rho l_m^2} l \quad (6.11)$$

Supongamos una carga distribuida por unidad de longitud  $q(l)$ .

$$q(l) = \frac{W(l)}{l} = \frac{V(l)\rho}{l} \quad (6.12)$$

Donde las funciones  $W(l)$  y  $V(l)$  son los valores acumulados de desplazamiento y volumen recorriendo la canoa desde una punta hasta la distancia  $l$ .

$$V(l) = 2 \int_0^l a(l) dl = 2 \int_0^l \frac{4W \cdot l}{\rho l_m^2} dl \quad (6.13)$$

$$V(l) = \frac{4Wl^2}{\rho l_m^2} \quad (6.14)$$

$$q(l) = \frac{4Wl}{l_m^2} \quad (6.15)$$

Si suponemos  $q$  el valor pico del empuje triangularmente distribuido.

$$q = q\left(\frac{l_m}{2}\right) = \frac{2W}{l_m} \quad (6.16)$$

De esta forma, es posible llevar a cabo el análisis simplificando la acción *hidrostática* del agua como una carga distribuida triangular con valor pico  $q$ .

### Desplazamientos

Una propiedad útil del modelo en estudio que posiblemente pueda ser extrapolada a otros diseños es que puede establecerse una función polinómica de bajo orden para relacionar el desplazamiento con el nivel de agua. Esto resulta sumamente interesante para lograr establecer el calado correspondiente a las distintas condiciones de carga. Con tan sólo cuatro o cinco puntos adecuadamente seleccionados se puede establecer un polinomio de cuarto o quinto orden respectivamente para ajustar la curva real de calado-desplazamiento. Siendo  $z$  el nivel del agua con respecto al fondo de la canoa, la eq (6.17) describe el polinomio.

$$V(z) = Az^4 + Bz^3 + Cz^2 + Dz \quad (6.17)$$



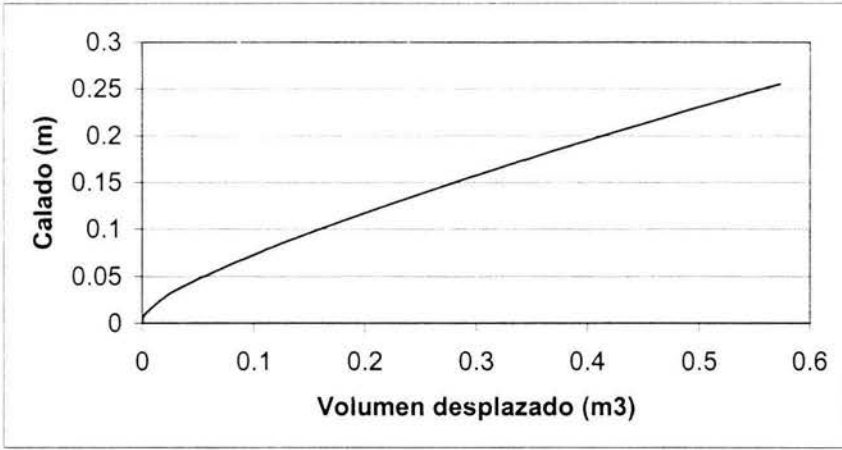


Figura B-2 Curva calado-volumen desplazado

La Figura B-2 muestra la forma que tiene la curva calado-volumen desplazado para la situación de canoa horizontal.

## **Apéndice C. Módulo de Sección**

El módulo de sección es una propiedad geométrica de las secciones transversales de vigas y es útil para determinar la distribución de esfuerzos cuando están sujetas a flexión.

En vigas de sección transversal uniforme, el módulo de sección es constante y por ende los esfuerzos críticos se presentarán en las secciones de momento flexionante crítico. Sin embargo, para la canoa en estudio, se percibe de inmediato una variación importante en la geometría de las secciones transversales de la misma.

Es deducible que el módulo de sección varíe a lo largo de la canoa y posible que en secciones de momento flexionante crítico no se presenten los esfuerzos críticos. Resulta entonces interesante conocer la variación del módulo de sección a lo largo de la canoa para, en conjunto con los diagramas de momentos, determinar las secciones que efectivamente son críticas.

Utilizando el programa Rhinoceros 3.0 (McNeel R. 2002a) se trabajó sobre el modelo geométrico efectuando los cortes necesarios para obtener diversas secciones transversales. Posteriormente, utilizando las funciones integradas de cálculo de momentos de área se obtuvieron los centroides y momentos de inercia. Aunado a las posiciones verticales extremas en cada sección se puede realizar el cálculo del módulo de sección inferior y

## Módulo de Sección

---

superior. La Figura C-1 muestra la variación en la geometría de las secciones transversales.

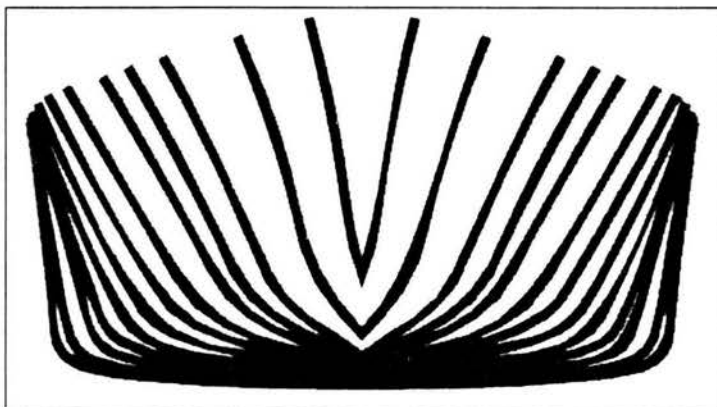


Figura C-1 Cortes transversales de la canoa.

En la Tabla C-1 se presentan las propiedades geométricas de las diversas secciones transversales. Cabe mencionar que estas se calcularon para la condición de base, es decir un espesor de casco de 10 mm.

**Dist:** La distancia de la sección transversal al centro de la canoa

**A:** El área de la sección transversal

**I<sub>x</sub>:** El momento de inercia centroidal.

**Z<sub>c</sub>:** La elevación del centroide de la sección transversal.

**Z<sub>b</sub>:** La elevación del punto inferior de la sección transversal.

**Z<sub>t</sub>:** La elevación del punto superior de la sección transversal.

## Módulo de Sección

---

Tabla C-1 Propiedades geométricas de las secciones transversales

Sección	Dist (m)	A (m <sup>2</sup> )	I <sub>x</sub> (m <sup>4</sup> )	Z <sub>c</sub> (m)	Z <sub>b</sub> (m)	Z <sub>t</sub> (m)
1	2.97	4.714E-03	2.70E-05	2.398E-01	1.011E-01	1.011E-01
2	2.67	6.417E-03	4.93E-05	1.920E-01	4.740E-02	4.740E-02
3	2.33	6.876E-03	5.58E-05	1.667E-01	2.660E-02	2.660E-02
4	2.15	7.687E-03	6.04E-05	1.564E-01	2.300E-02	2.300E-02
5	2.00	7.660E-03	5.90E-05	1.431E-01	2.020E-02	2.020E-02
6	1.76	8.205E-03	6.03E-05	1.270E-01	1.670E-02	1.670E-02
7	1.59	8.430E-03	6.09E-05	1.169E-01	1.400E-02	1.400E-02
8	1.36	8.702E-03	5.99E-05	1.044E-01	1.130E-02	1.130E-02
9	1.05	8.605E-03	5.82E-05	9.152E-02	8.000E-03	8.000E-03
10	0.83	9.702E-03	6.49E-05	8.934E-02	6.100E-03	6.100E-03
11	0.52	9.879E-03	6.38E-05	7.942E-02	3.700E-03	3.700E-03
12	0.22	1.031E-02	6.61E-05	7.422E-02	1.300E-03	1.300E-03
13	0.00	1.043E-02	6.40E-05	6.736E-02	0.000E+00	0.000E+00

La Figura C-2 muestra la evolución del módulo de sección inferior y superior a lo largo de la canoa, se puede mencionar que el módulo de sección superior es prácticamente constante hasta el extremo final de la canoa. La constancia del módulo de sección superior puede conducir con bastante certeza a concluir que la sección en la que se presenten los esfuerzos críticos será la sección en la que se presenten los momentos flexionantes máximos.

Por otro lado el módulo de sección inferior decrece prácticamente de manera lineal desde el centro hacia los extremos; por tal motivo no es posible concluir que la sección crítica en flexión correspondiente a la sección central como se vio en los análisis del capítulo tercero sea forzosamente la sección en la que se presenten los esfuerzos críticos.

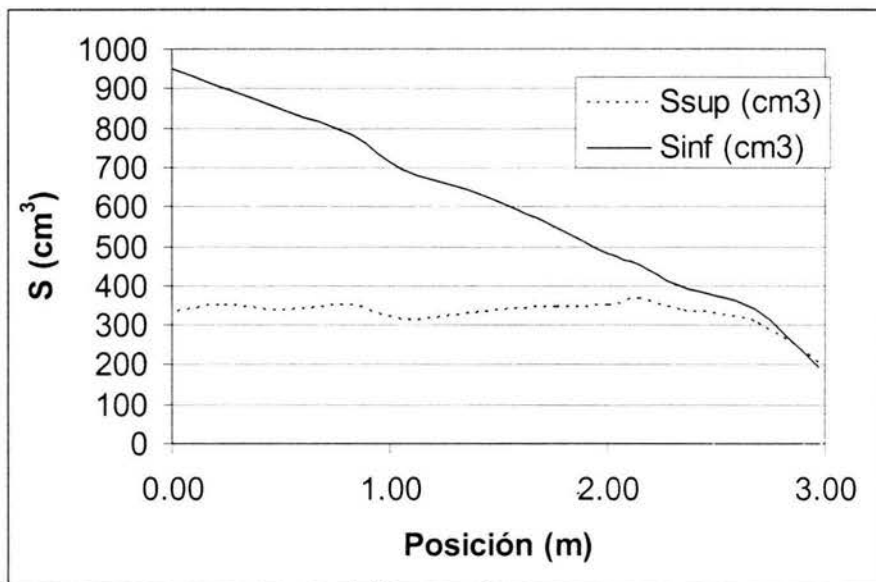


Figura C-2 Módulo de sección superior e inferior

De manera gráfica en la Figura 3-6, se obtienen los momentos flexionantes por interpolación para cada sección transversal en estudio y se procede a calcular el esfuerzo correspondiente.

En la Figura C-3 se puede apreciar finalmente que los esfuerzos críticos sí se presentan ahí donde los momentos flexionantes son máximos (en valor absoluto). Tomando en consideración únicamente la flexión longitudinal de la canoa, se puede establecer que el esfuerzo de tensión presente en la sección central es de  $12 \text{ kg}_f/\text{cm}^2$  y el de compresión en la misma sección es de  $4 \text{ kg}_f/\text{cm}^2$ .

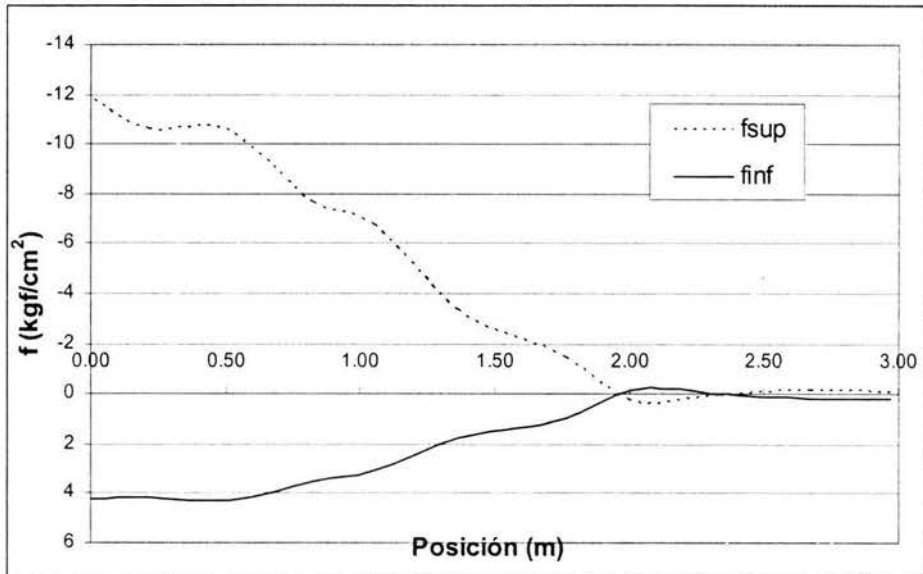


Figura C-3 Esfuerzos críticos correspondientes en la canoa correspondientes al análisis detallado

Cabe recordar que el problema planteado de flexión reversible nos conduce a un esfuerzo máximo de 12  $\text{kgf/cm}^2$  tanto a tensión como a compresión.