



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Mapeos y Bifurcaciones en Tejido
Cardiaco.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C A

P R E S E N T A :

SILVIA PATRICIA ROMERO HIDALGO

DIRECTOR DE TESIS: DR. JORGE HUMBERTO ARCE RINCON



FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

2004



FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION ESCOLAR



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

ESTA TESIS NO SALE
DE LA BIBLIOTECA



REPUBLICA NACIONAL
ESTADOS UNIDOS MEXICANOS

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.
 NOMBRE: Silvia Patricia Romero Hidalgo
 FECHA: 21 Junio 2004
 FIRMA: Silvia Romero

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:
 "Mapeos y Bifurcaciones en Tejido Cardíaco"

realizado por Silvia Patricia Romero Hidalgo
 con número de cuenta 8351544-8 , quien cubrió los créditos de la carrera de:
 Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
 Propietario Dr. Jorge Humberto Arce Rincón

[Handwritten signature]
 Nava Garza

Propietario M. en C. María de Lourdes Velasco Arregui

Propietario Dra. Hortensia González Gómez

[Handwritten signature]

Suplente Dr. Manuel Jesús Falconi Magaña

[Handwritten signature]

Suplente Dr. Héctor Méndez Lango

[Handwritten signature]
 Héctor Méndez L.

Consejo Departamental de Matemáticas

[Handwritten signature]

M. en C. Alejandro Bravo Mojica



FACULTAD DE CIENCIAS

A mi familia.

**Agradezco a la familia Arce González el apoyo brindado
para la realización de este trabajo.**

Presentación.

Actualmente cualquier rama del conocimiento humano requiere o involucra a las matemáticas, sin embargo se escucha frecuentemente a los estudiantes desde la enseñanza primaria hacer comentarios como que estas son difíciles y no son de su agrado, entre ellos he escuchado a personas estudiosas de los problemas biológicos. Es por esto que mi objetivo en esta tesis es presentar un texto que muestre que las matemáticas además de fáciles, son una gran herramienta en la resolución de problemas. El tema que se aborda es el estudio de la actividad eléctrica de células cardiacas.

Empezamos con una descripción del corazón y los problemas cardiovasculares, enfatizándose la gran importancia social que actualmente tienen esas enfermedades; se discute la anatomía y fisiología cardiacas, especialmente el potencial de acción. En el segundo y tercer capítulos se desarrollan conceptos de la teoría de los Sistemas Dinámicos Discretos, tales como orbitas, puntos fijos, atractores, repulsores, ciclos periódicos, bifurcaciones, etc. Este desarrollo se hace de manera intuitiva, apelando a una gran cantidad de ilustraciones gráficas para facilitar su comprensión. En el ultimo capítulo se aplican las herramientas construidas en los capítulos II y III a la respuesta de las células cardiacas, y se muestra un modelo matemático que predice rigurosamente el surgimiento de alternancias –fenómeno de gran importancia clínica- cuando se incrementa mucho la frecuencia de trabajo del tejido cardiaco.

Indice

Capitulo I. Acerca del corazón.

I.1 Introducción	1
I.2 El Sistema Circulatorio.	3
I.3 Anatomía y Fisiología del corazón.	5
I.4 Actividad Eléctrica en el corazón.	6
I.5 Potencial de Acción.	9
I.6 Electrocardiograma y Arritmias.	10

Capitulo II. Poblaciones e Iteración de Funciones.

II.1 Crecimiento Poblacional.	14
II.2 Un Enfoque Geométrico.	25
II.3 Caso Lineal.	33
II.4 Caso No Lineal.	39

Capitulo III. La Función Cuadrática $Q_c(x) = x^2 + c$.

III.1 Primeros Atractores.	48
III.2 Bifurcaciones.	57
III.3 ¿Qué cambios hay cuando el parámetro c es igual a -2 ?	67

Capitulo IV. Mapeos Cardiacos.	74
Conclusiones	88
Bibliografía	89

CAPITULO I

Acerca del corazón

I.1 Introducción

Este trabajo está dedicado a un tema de estudio poco común en el área de la Físico-Matemática: el estudio del corazón y de algunos de sus comportamientos patológicos. Una de las razones, que justifica la incursión desde el campo de las llamadas ciencias exactas a un problema de importancia clínica, biológica y más específicamente fisiológica, es que las enfermedades del corazón se han convertido en un problema importante de salud pública.

En el último siglo la esperanza de vida en el ser humano ha aumentado, y con ello la tasa de mortalidad por enfermedades cardiovasculares también ha aumentado.

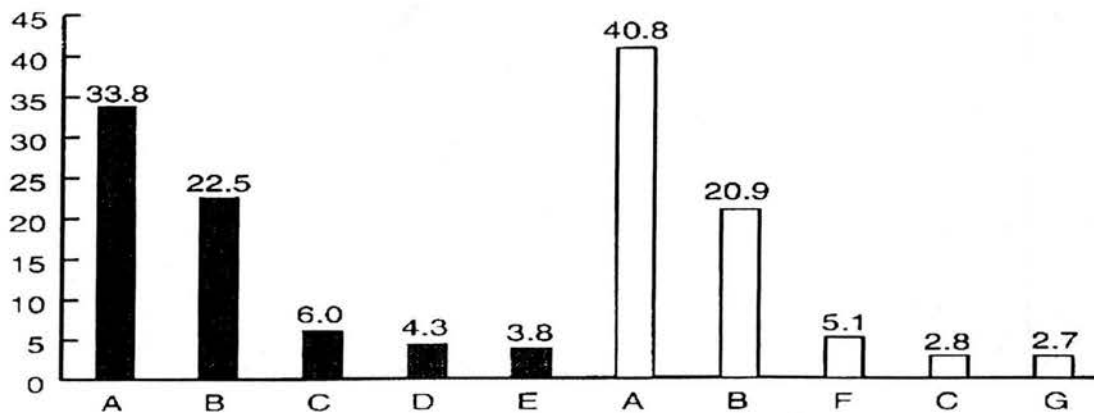


Figura I.1 Porcentaje de causas de muerte por enfermedad para mujeres (barras blancas) y hombres (barras oscuras) en Estados Unidos en el año 1999. A Enfermedades Cardiovasculares. B Cáncer. C Accidentes D Enfermedades respiratorias E Diabetes melitus. F Influenza y neumonía G Nefritis. (Tomada de "Asociación Americana del corazón").

Las enfermedades cardiovasculares cobraron 958 775 vidas en Estados Unidos de América en 1999, es decir el 40.1% de todas las muertes.

En la figura I.1 se presenta la gráfica de la Asociación Americana del Corazón que muestra el porcentaje de muerte por enfermedades para hombres y mujeres en Estados Unidos de América en 1999.

En la gráfica de la figura I.2 se muestra la distribución en porcentajes de las muertes ocurridas por las distintas enfermedades cardiovasculares.

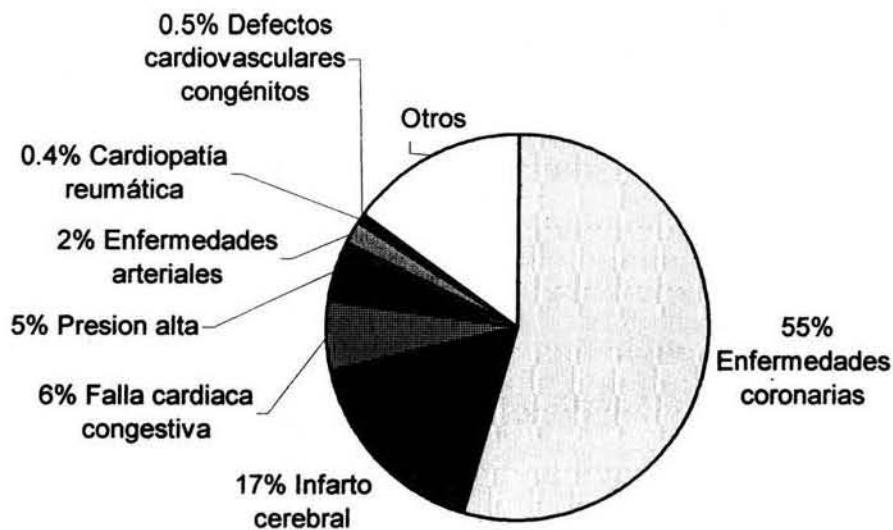


Figura I.2 Distribución de porcentaje de mortalidad por enfermedades Cardiovasculares en Estados Unidos en 1999. El 55% corresponde a enfermedades de las coronarias. (Tomada de <http://www.americanheart.org>).

El mayor porcentaje de estas muertes se debe a enfermedades de las vías coronarias. El engrosamiento de las coronarias está involucrado en el síndrome denominado "muerte súbita". La muerte súbita ocurre cuando la propagación de los impulsos eléctricos en el corazón se aceleran (taquicardia) y se vuelven caóticos (fibrilación). Este tipo de accidente cardiovascular puede entenderse como una pérdida del ritmo cardíaco, causada por la distorsión de la propagación

normal de la señal eléctrica que se mueve en el corazón. Tales ritmos irregulares llevan al corazón a detenerse.

Este padecimiento hace que el 50% de quienes los sufren fallezcan antes de llegar al hospital. Dichas personas mueren entre los 4 y 7 minutos de iniciado el evento.

I.2 El Sistema Circulatorio.

Hace millones de años surgieron en el mar los primeros organismos unicelulares, de él tomaban los nutrientes que necesitaban y en él también depositaban sus desechos. Al evolucionar los organismos multicelulares, seres más grandes y complejos requerían intercambiar nutrientes y desechos con el exterior. Las constantes demandas de intercambio de las células exigen que la distancia de difusión sean cortas, por lo cual se originó una especie de mar interno en estos seres, este mar debe llevar lo necesario a cada célula, es decir: nutrientes y oxígeno, y recoger los desechos producidos por las mismas.

El sistema circulatorio juega el papel del mar interno en las células primitivas. Para llevar a cabo su labor, se requieren tres partes fundamentales: la sangre, los canales que conducen la sangre por todo el cuerpo y una bomba que la mantiene circulando. El corazón es la bomba que mantiene la sangre circulando por el cuerpo.

En los animales vertebrados el corazón juega el papel principal en la circulación de la sangre. Durante la evolución de los vertebrados el corazón se ha hecho cada vez más complejo, empezando por el corazón con dos cámaras de los peces y terminando en los corazones de cuatro cámaras de las aves y mamíferos.

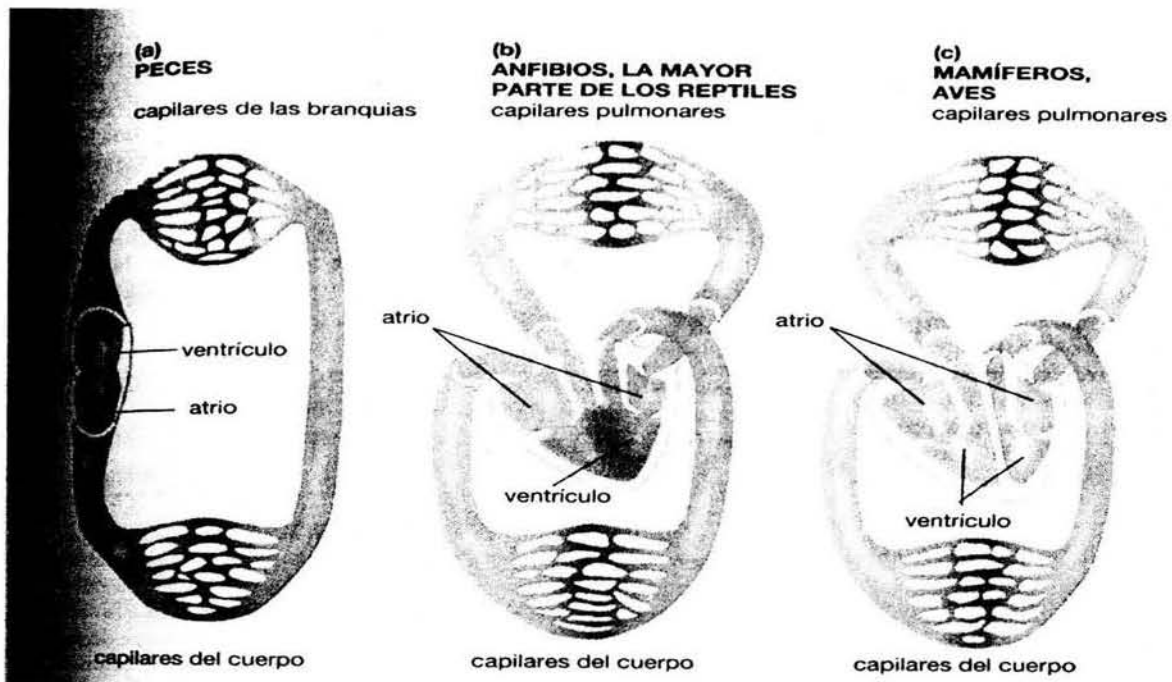


Figura 1.3 Evolución del corazón de los vertebrados. a) El corazón primitivo de los vertebrados se representa por un corazón de dos cámaras, es decir una aurícula y un ventrículo en los peces. b) En los anfibios y gran parte de los reptiles el corazón tiene dos aurículas las cuales vacían la sangre oxigenada y la no oxigenada a un solo ventrículo. c) El corazón de las aves y los mamíferos está formado de hecho por dos bombas separadas, que impiden la mezcla de sangre oxigenada y la no oxigenada.

En la figura 1.3 se presentan tres esquemas de la evolución del corazón de los vertebrados:

- representa un corazón de dos cámaras como el de los peces,
- corresponde al corazón de los anfibios y mayor parte de los reptiles, éste es un corazón de tres cámaras,
- muestra un corazón de cuatro cámaras como el de las aves y los mamíferos.

Entre las funciones que desempeña el sistema circulatorio son:

- Llevar oxígeno de los pulmones al cuerpo.
- Transportar bióxido de carbono del cuerpo a los pulmones.
- Distribuir los nutrientes por el cuerpo.

- Transportar los desechos de las células.
- Regular la temperatura, ajustando el flujo sanguíneo.
- Y desplazar las hormonas a todas partes del cuerpo.

I.3 Anatomía y Fisiología del Corazón

El corazón se sitúa atrás del esternón y está cubierto por el cartílago costal de la tercera, cuarta y quinta costilla. Su tamaño y peso varía en función de la edad, sexo, tamaño, grasa corporal y nutrición general. El promedio es de:

325 +(o menos) 75 gramos en el hombre

275 +(o menos) 75 gramos en la mujer.

El corazón está formado por dos bombas independientes, cada una bombea sangre en dos circuitos diferentes como se muestra en la figura I.4

Cada latido el corazón repite la sucesión de fenómenos siguiente:

La sangre sin oxígeno llega a través de la vena cava superior a la aurícula derecha donde se almacena brevemente, después pasa a través de la válvula tricúspide al ventrículo derecho, el cual al contraerse envía la sangre por las arterias pulmonares hacia los pulmones, donde toma oxígeno y pierde bióxido de carbono. Después regresa por las venas pulmonares hacia la aurícula izquierda, cruza la válvula bicúspide y pasa al ventrículo izquierdo que es la cámara del corazón con la pared muscular más gruesa, el cual al contraerse la distribuye a todo el cuerpo.

I.4 Actividad Eléctrica en el Corazón.

La contracción y la relajación alternada de las cuatro cámaras recibe el nombre de ciclo cardíaco. Las dos aurículas se contraen en sincronía vaciando su contenido en los ventrículos. Una fracción de segundos más tarde se contraen simultáneamente los ventrículos. Después ambas cámaras se relajan brevemente antes de que el ciclo se repita nuevamente.

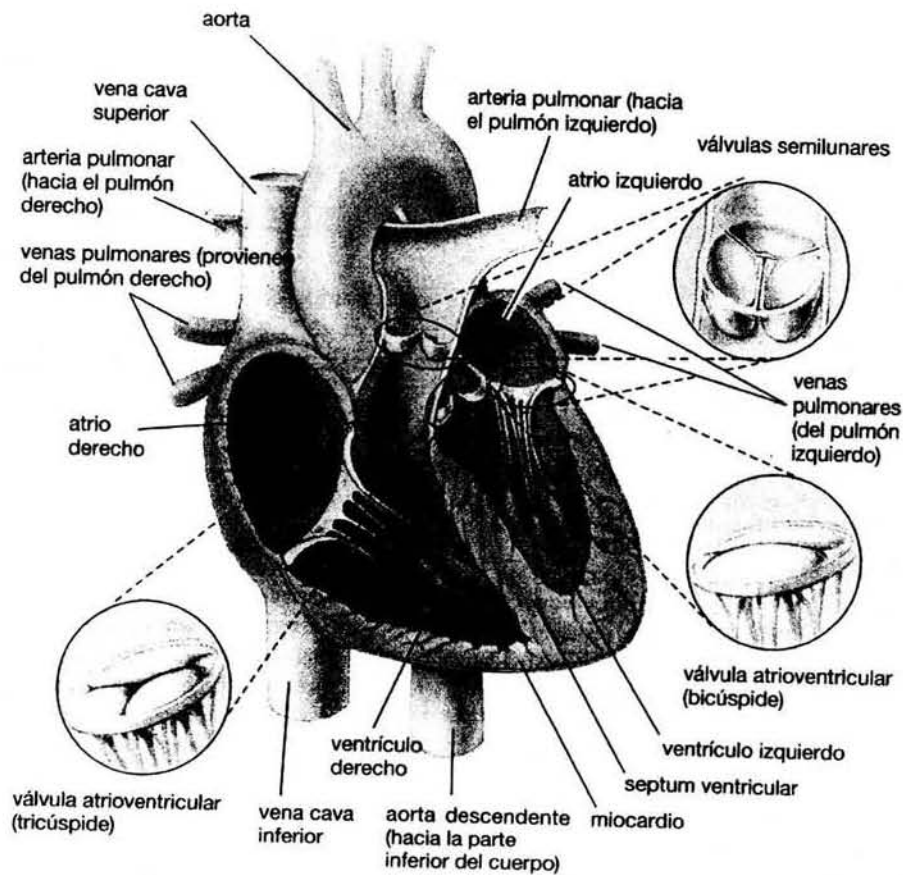


Figura I.4 Esquema del corazón humano. La sangre que entra a la aurícula derecha, pasa al ventrículo derecho y es bombeada a los pulmones. La sangre oxigenada regresa a la aurícula izquierda, pasa al ventrículo izquierdo donde es bombeada a todo el cuerpo.

Coordinar las actividades de las cuatro cámaras para mantener un flujo sanguíneo adecuado, representa varios retos, uno de ellos es la generación de contracciones coordinada de las células que conforman cada cámara.

Cuando una célula muscular es excitada produce señales eléctricas que hacen que la célula se contraiga. Las células cardiacas musculares se comunican entre sí por sus membranas, lo cual hace que las señales eléctricas que generan la contracción pasen rápidamente entre las células musculares.

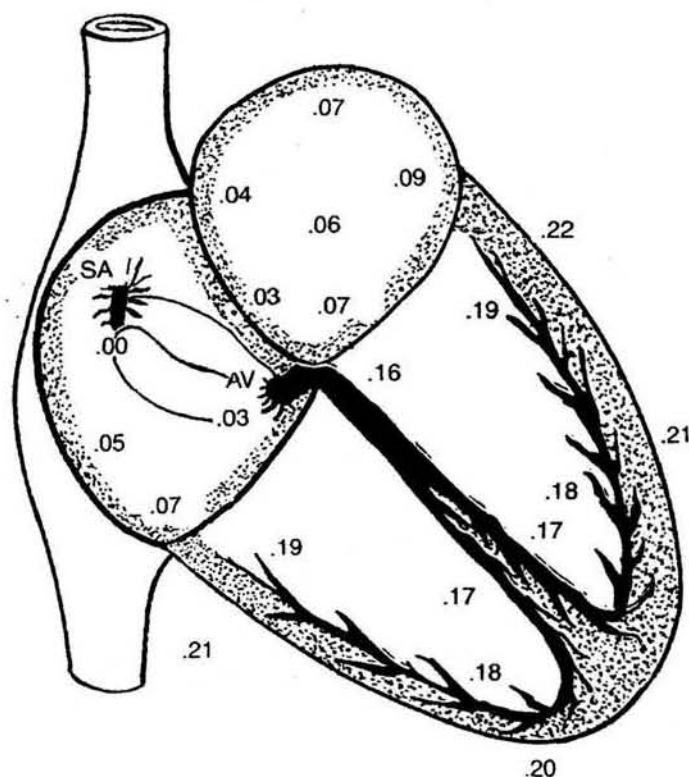


Figura 1.5 Transmisión del impulso eléctrico en el corazón. Los números indican el tiempo del impulso en fracción de segundos en diferentes partes.

La contracción del corazón se inicia en un conjunto de células especializadas que producen señales eléctricas a una frecuencia regular, llamado nodo sinoauricular, situado en la parte superior de la aurícula derecha. La señal del nodo se difunde en ambas aurículas provocando una onda de contracción sincronizada que

empuja la sangre a los ventrículos, esta onda se detiene en una barrera no excitable que separa las aurículas de los ventrículos llamada *sulcus coronary*.

El impulso eléctrico pasa a otro conjunto de células especializadas que se encuentran en la parte inferior de la aurícula derecha llamada nodo aurículo ventricular, en donde se retrasa la señal aproximadamente 0.1 segundos, lo que permite que la sangre se vacíe completamente en los ventrículos.

Después la señal viaja por el haz de His hasta las fibras de Purkinje, las cuales transmiten el impulso 5 veces más rápido que el músculo cardiaco normal. Las fibras de Purkinje distribuyen primero el impulso en la pared lateral de los ventrículos, esto tiene como consecuencia la contracción inicial de los ventrículos en el vértice del corazón, diseminándose con dirección a las aurículas, como se muestra en la figura 1.5

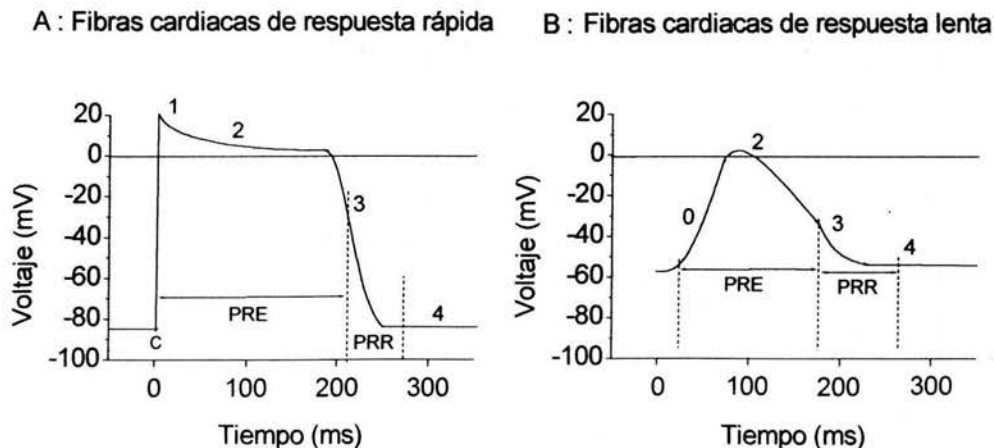


Figura 1.6 Cambios en los potenciales de acción observados para A) fibras cardiacas de respuesta rápida y B) fibras cardiacas de respuesta lenta. Puede observarse que comparado con el reposo de las fibras de respuesta rápida el potencial de reposo de la fibras de respuesta lenta es menos negativo, la fase 0 tiene una pendiente menor, la amplitud del potencial de acción es también menor y la fase 1 no existe para las fibras de respuesta lenta.

I.5 Potencial de Acción.

El impulso eléctrico que se genera en el nodo sinuauricular tiene su origen en los cambios en el potencial de membrana de las células cardíacas, estos cambios de potencial producen lo que se ha llamado potencial de acción.

El comportamiento eléctrico de una célula de músculo cardíaco ha sido estudiado colocando microelectrodos dentro y fuera de la célula, los cuales se conectan a un multímetro que registra la diferencia de potencial.

Sabemos que todas las células del cuerpo presentan un potencial de membrana tal que la parte interna de las células está cargada negativamente con respecto a la región externa,. A este potencial lo llamamos potencial de la membrana en reposo y su valor oscila entre -65 a -90 mV y en este caso decimos que la célula está polarizada.

Un potencial de acción ocurre cuando una célula es excitada e invierte rápida y temporalmente la polaridad eléctrica de su membrana, es decir el potencial antes negativo se vuelve positivo y llega a un valor aproximado de 20 mV.

En el corazón podemos observar dos tipos de potenciales de acción: el potencial que ocurre en las células de ventrículo, aurícula y fibras de Purkinje que llamamos de respuesta rápida y el potencial que ocurre en los nodos de respuesta lenta.

Podemos representar gráficamente el potencial de acción como se muestra en la figura I.6. La subida rápida del potencial se designa como fase 0. Inmediatamente después de la subida hay un breve periodo de repolarización parcial que corresponde a la fase 1. La membrana se mantiene en una meseta, cerca del valor más alto, entre 0.1 y 0.2 segundos. En la fase 3 el potencial se vuelve más negativo progresivamente hasta llegar al estado de reposo de la polarización inicial. El intervalo de la repolarización hasta el comienzo del siguiente potencial

de acción se denomina la fase 4. Todos estos cambios en la diferencia de potencial son provocados por la apertura de canales especiales en la membrana celular y el movimiento de iones de potasio, calcio y sodio a través de estos canales.

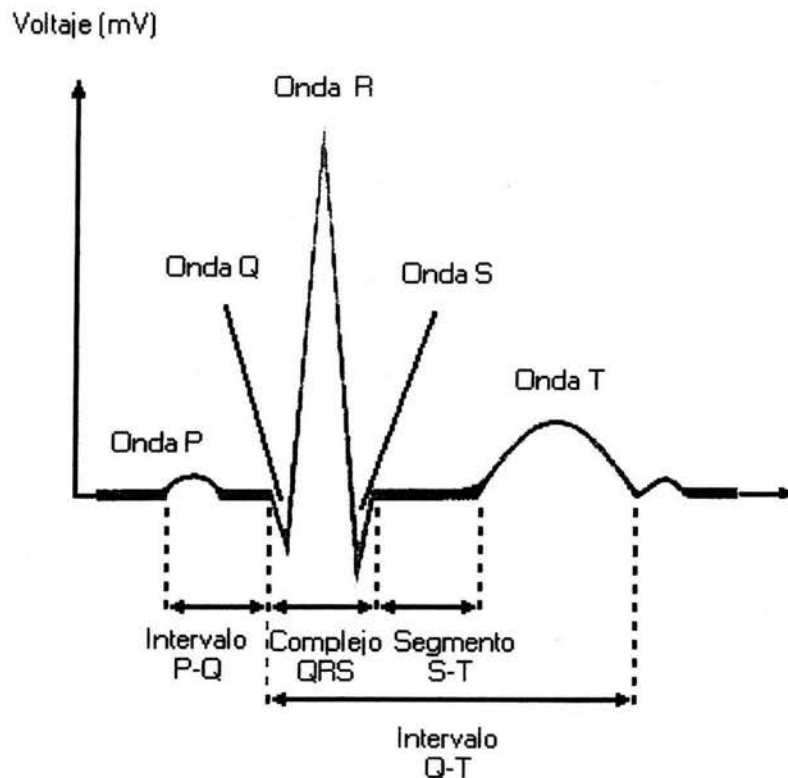


Figura 1.7 El electrocardiograma representa el registro gráfico en la superficie corporal de la actividad eléctrica del corazón. La onda P es causada por la depolarización de las aurículas, QRS es la depolarización de los ventrículos y la onda T representa su repolarización

1.6 Electrocardiogramas y Arritmias.

La actividad eléctrica generada en el corazón puede ser registrada por un electrocardiograma desde la superficie corporal y representa los campos de

potencial eléctrico que pasan del corazón a los tejidos cercanos durante cada ciclo cardiaco. En la figura I.7. se señalan las ondas P, Q, R, S, T. La onda P es causada por la depolarización en la aurícula, aproximadamente 0.16 segundos después ocurren la depolarización del ventrículo, lo cual se aprecia en la onda QRS. Finalmente la onda T, representa la repolarización de los ventrículos.



Figura I.8 Taquicardia. Cuando la frecuencia cardiaca es mayor a 100 latidos por minuto, decimos que hay taquicardia. En la ilustración la longitud del lado de cada cuadrado equivale a 200 milisegundos.

Algunas formas de mal funcionamiento del corazón ocurren no como resultado de anomalías en el músculo cardiaco, sino por anomalías del ritmo. La frecuencia normal del corazón es de 72 de latidos por minuto, llamamos taquicardia cuando se superan los 100 latidos por minuto. En la figura I.8 se muestra el electrocardiograma de un paciente con taquicardia, observamos que el electrocardiograma es normal, excepto por la tasa de latidos, en este caso de 150 por minuto.

Llamamos bradicardia cuando la frecuencia cardiaca es menor a 60 latidos por minuto. En la figura I.9 muestra el electrocardiograma de una persona con bradicardia.

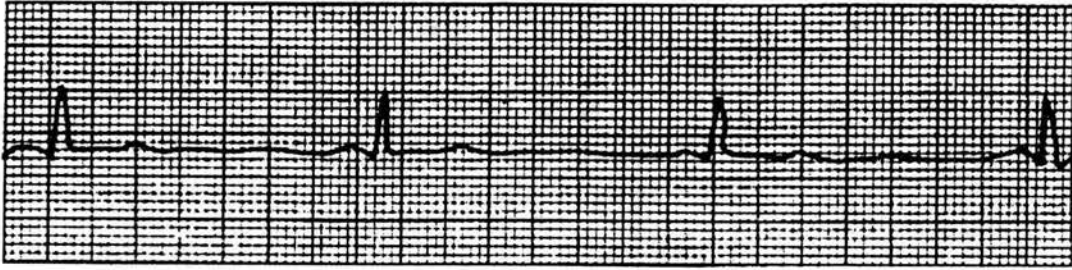


Figura 1.9 Bradicardia. Cuando la frecuencia cardiaca es menor que 60 latidos por minuto, tenemos un cuadro de Bradicardia. . En la ilustración la longitud del lado de cada cuadrado equivale a 200 milisegundos.

También encontramos ritmos anormales como resultado del bloqueo en la conducción del impulso de cualquiera de los nodos, a lo cual llamamos bloqueo sinoatrial y bloqueo atrioventricular.

Otro tipo de bloqueo ocurre en la conducción del impulso en porciones periféricas de las fibras de Purkinje. Cuando falla la transmisión de un impulso eléctrico a partes del corazón en ciertos ciclos, decimos que tenemos alternantes eléctricos. La figura 1.10 muestra un electrocardiograma de un paciente con taquicardia, en el se observan alternantes eléctricos.



Figura 1.10 Ciertas condiciones de isquemia, miocarditis o toxicidad pueden producir bloque intraventricular parcial lo cual lleva por lo general a alternantes eléctricos. . En la ilustración la longitud del lado de cada cuadrado equivale a 200 milisegundos.

La más peligrosa de todas las arritmias es la fibrilación ventricular, la cual si no es atendida rápidamente desemboca invariablemente en la muerte. La figura 1.11 presenta un electrocardiograma de fibrilación ventricular, en él apreciamos que no hay una tendencia hacia algún ritmo regular; en este caso los potenciales de acción cambian constante y espasmódicamente. Para algunos matemáticos estudiosos de estos fenómenos, la fibrilación corresponde a un comportamiento caótico del corazón.

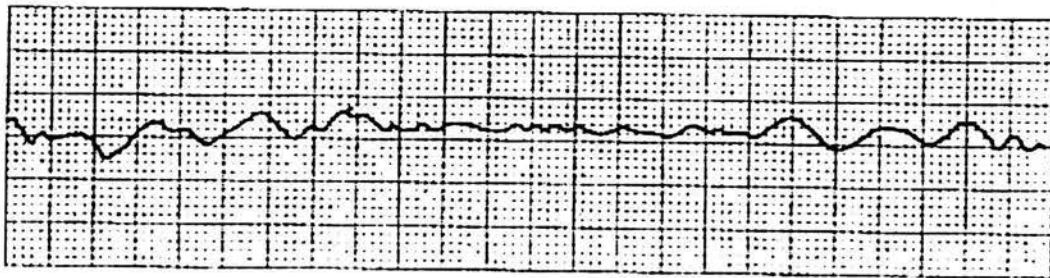


Figura 1.11. La etapa final de muchas de las arritmias es la **fibrilación**. La cual consiste en la contracción desordenada de las fibras cardíacas, lo cual impide el bombeo de la sangre al cuerpo y produce la muerte. Durante esta etapa el electrocardiograma no muestra ningún ritmo. . En la ilustración la longitud del lado de cada cuadrado equivale a 200 milisegundos.

Finalmente, ya para terminar este capítulo, debemos recordar que los electrocardiogramas aquí mostrados representan una suerte de suma de los campos eléctricos generados en cada célula del músculo cardíaco, cuando se disparan potenciales de acción. Una forma de ganar profundidad en el conocimiento de las distintas gráficas antes mostradas, es estimular periódicamente a células o regiones extendidas de tejido cardíaco. Las señales así generadas pueden verse como mapeos o funciones iteradas. Por todo ello en los dos próximos capítulos estudiaremos algunos aspectos de la teoría de iteración de funciones.

CAPITULO II

Poblaciones e Iteración de Funciones.

II.1 crecimiento Poblacional.

Existen una gran cantidad de fenómenos que involucran la idea de movimiento, esto es, que sufren cambios al transcurrir el tiempo. Un ejemplo común se encuentra al estudiar las modificaciones en el tamaño de una población en sucesivas generaciones.

Existe una inmensa variedad de ecosistemas en nuestro planeta que presentan diversos comportamientos, algunos de estos ecosistemas se mantienen inalterados, esto es, representan poblaciones que tienden a permanecer estables, otros constan de poblaciones que tienden a disminuir o aumentar de tamaño al transcurrir el tiempo.

Para comprender las modificaciones que puede experimentar el tamaño de una población analicemos brevemente cómo y por qué crecen las poblaciones. Hay tres factores principales que influyen en el cambio del tamaño de una población: los nacimientos, las muertes y la migración. Los organismos se integran a una población gracias a los nacimientos o a la inmigración (movimientos hacia adentro), y la abandonan por la muerte o emigración (movimiento hacia fuera). Una población permanece estable si en promedio llegan a ella los mismos individuos que se van. El tamaño de la población crece si el número de nacimientos más inmigrantes supera el número de muertes más emigrantes, y se reduce cuando ocurre lo contrario.

En muchas poblaciones naturales, los organismos que llegan y se van contribuyen relativamente poco al cambio en la población, así que son los procesos de

natalidad y mortalidad los factores primordiales que influyen en el tamaño de la población.

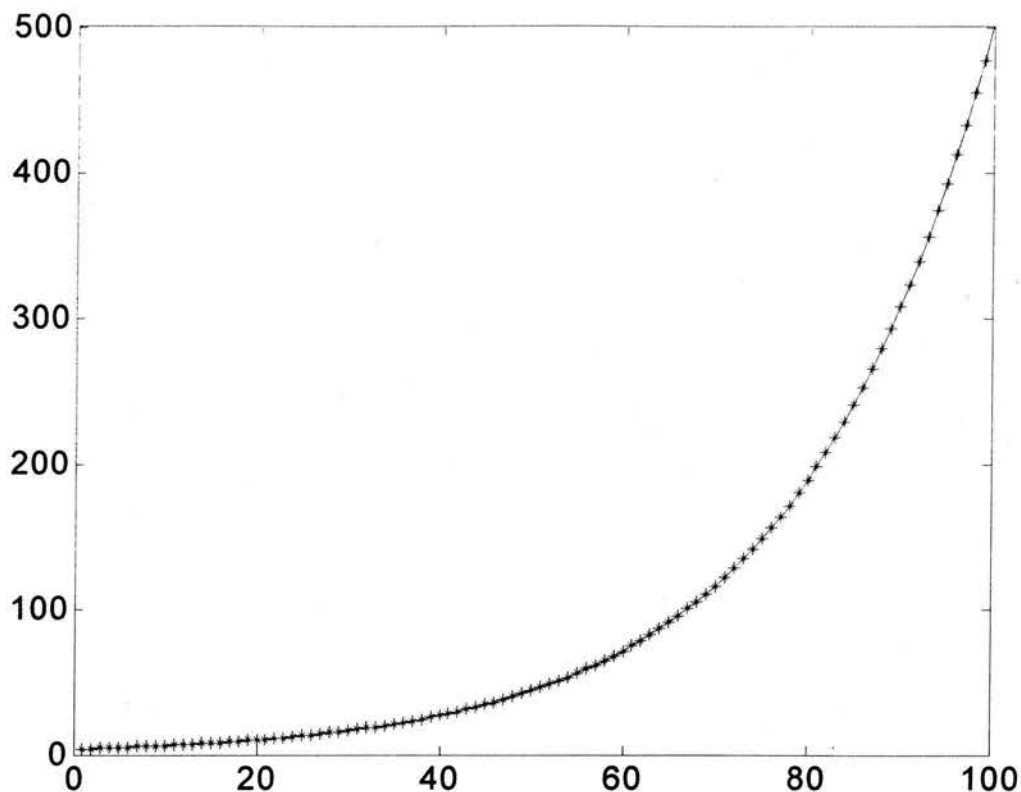


Figura II.1 Modelo de crecimiento poblacional dado por la ecuación $x(t+1) = (1+r)x(t)$ En este caso el parámetro r tiene como valor 0.05, lo cual indica que la tasa de nacimientos es mayor que la unidad, la condición inicial es 4, se indican las primeras 100 iteraciones. Como puede verse este mapeo describe un crecimiento exponencial lo cual desde el punto de vista biológico corresponde a una población con recursos ilimitados.

Llamemos r el tasa de crecimiento de una población, el cual determinaremos restando el tasa de mortalidad d del tasa de natalidad b :

$$r = b - d.$$

Cuando el cambio en el tamaño de una población depende de r , (la tasa de crecimiento de población), llamamos a la población denso independiente.

Para describir el crecimiento de una población debemos aceptar el hecho de que x_{n+1} el tamaño de la población en la generación $n+1$ depende del tamaño de la misma en la generación anterior x_n .

Sea x_0 una población inicial, si suponemos que cada individuo en la generación n aporta r individuos en la generación $n + 1$, el crecimiento de la población estará dado por $r x_0$. El tamaño de la población en la primera generación x_1 será entonces:

$$x_1 = x_0 + r x_0 \text{ de donde factorizando } x_0 \text{ tenemos } x_1 = x_0(1+r).$$

Análogamente el tamaño de la población en cada generación está en función del tamaño de la población en la generación anterior:

$$x_2 = x_1 + r x_1 \Rightarrow x_2 = x_1(1+r),$$

$$x_3 = x_2 + r x_2 \Rightarrow x_3 = x_2(1+r),$$

.....

.....

$$x_n = x_{n-1} + r x_{n-1} \Rightarrow x_n = x_{n-1} (1+r).$$

Ecuaciones de la forma $x_n = x_{n-1} (1+r)$, que relacionan valores en tiempos discretos, se llaman ecuaciones en diferencias finitas de primer orden

Podemos conocer el comportamiento a largo plazo del tamaño de la población en términos del tamaño de la población original, de la siguiente manera:

Como $x_1 = x_0(1+r)$ y $x_2 = x_1 (1+r)$, si escribimos la segunda expresión x_2 en términos de x_0 , tenemos que $x_2 = [x_0(1+r)](1+r)$ lo que es lo mismo que $x_2 = x_0(1+r)^2$.

De manera similar el valor de x_n se puede escribir en términos de x_0 , la condición inicial, como sigue:

$$x_n = x_0(1+r)^n$$

La ecuación $x_{n+1} = x_n(1+r)$ puede presentar diferentes comportamientos. En la figura II.1 observamos una población en la cual el número de nacimientos supera al número de muertes de manera constante. La tasa de crecimiento r es positiva,

lo que representa en promedio que cada individuo produce más de un descendiente que sobrevive.

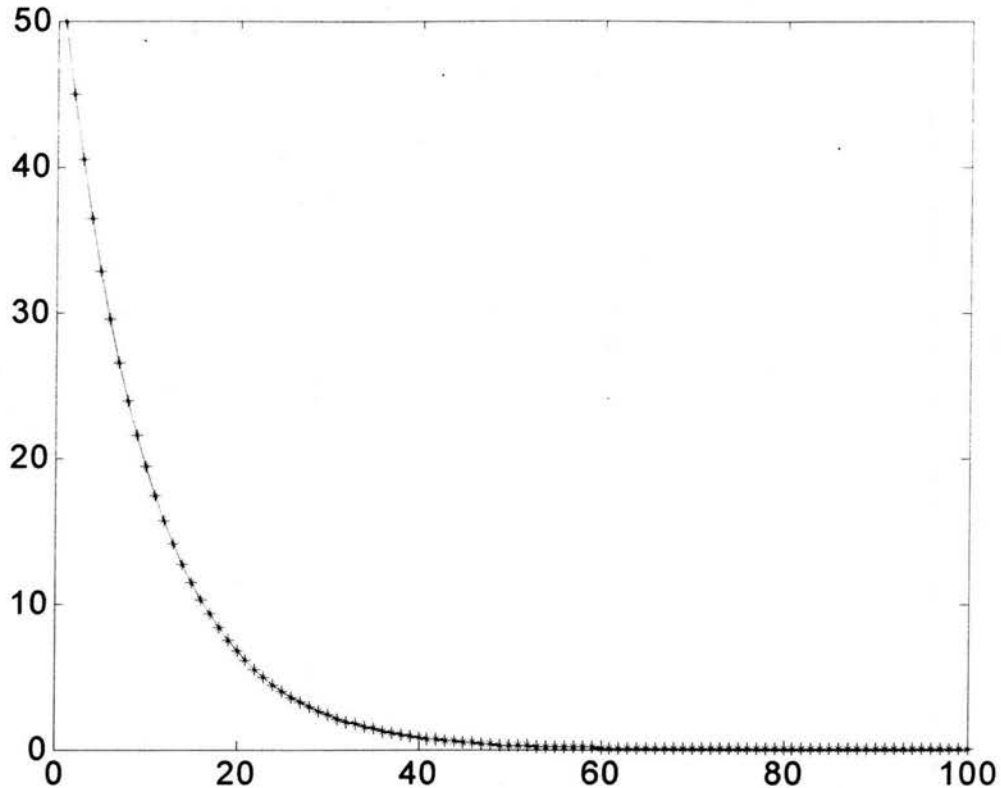


Figura II.2 Modelo de crecimiento poblacional de la ecuación descrita en la en la figura anterior. El parámetro r tiene como valor -0.1 , lo cual indica que la tasa de nacimientos es menor a la unidad, la población inicial consta de 50 individuos. Como puede verse el tamaño de la población tiende rápidamente a cero.

Observemos que en la gráfica II.1 ubicamos sobre el eje horizontal valores del tiempo, mientras que en el eje vertical representamos el tamaño de la población x_t . Cada * de la gráfica tiene una coordenada (t, x_t) que señala el tamaño de la población en el tiempo t . La línea punteada indica la forma en que cambia x_t al transcurrir el tiempo, así observamos que cuando t crece, el valor de x_t se incrementa rápidamente, esto es consecuencia del hecho de que r es positiva, es decir $r > 0$ y $(1+r) > 1$, por lo que la población tiene un exceso en cada generación, lo cual trae como consecuencia una explosión demográfica. Este comportamiento

se conoce como crecimiento exponencial, en él la población en cada generación crece un porcentaje fijo de la población inicial, por lo tanto se añade un número creciente de individuos a la población durante cada periodo sucesivo de tiempo, lo que hace que crezca el tamaño de la población a un paso siempre acelerado.

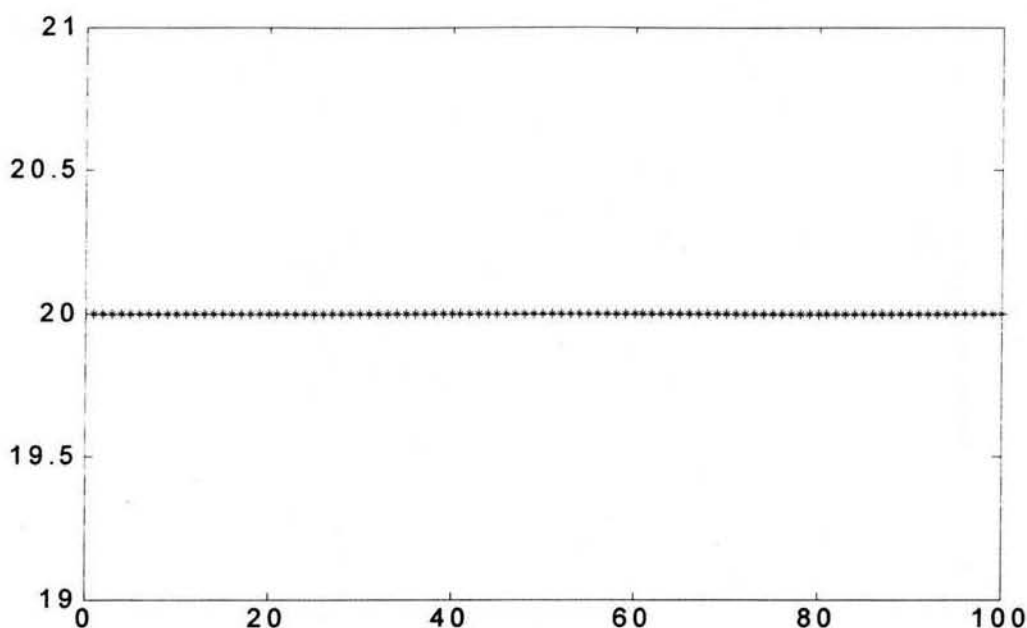


Figura II.3 Crecimiento poblacional dado por la ecuación $x(t+1) = (1+r)x(t)$, al asignarle a r el valor de 0, esto representa una población que se reproduce a sí misma en cada generación, lo que indica que el número de nacimientos es igual al número de muertes.

Obtenemos un comportamiento diferente al asignarle un valor negativo a r la tasa de crecimiento de la población, valor que sugiere que el número de muertes es mayor que el número de nacimientos en la población. En la figura II.2, se muestra la gráfica a partir de una población inicial igual a 50 individuos, a r le asignamos el valor de -0.1 , con lo cual el factor $(1 + r)$ es 0.9 , observamos una línea punteada decreciente lo que quiere decir que al aumentar t el valor de x_t se hace más pequeño. Este comportamiento indica que la población tiende a la extinción, ya que está no se reproduce a sí misma de generación en generación.

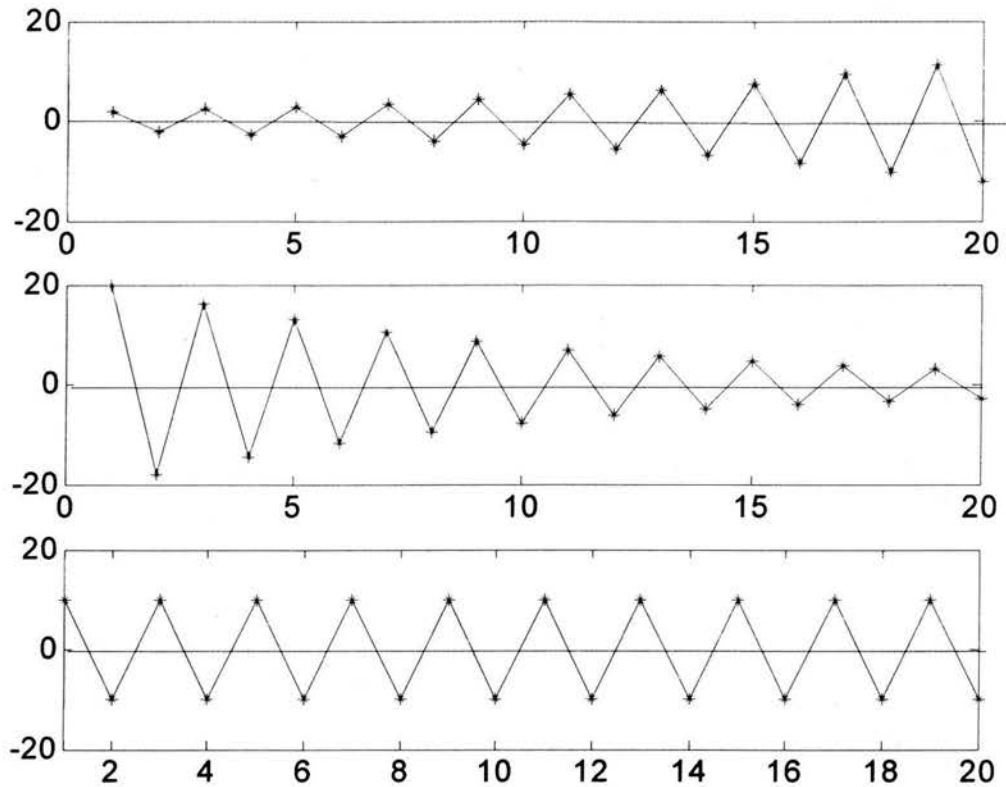


Figura II.4 Comportamiento cuando asignamos a $(1+r)$ valores negativos en la ecuación $x(t+1) = (1+r)x(t)$; a) $(1+r) < -1$, b) $-1 > (1+r) > 0$, c) $(1+r) = -1$. En todas las gráficas alternan entre valores positivos y negativos, lo cual no tiene sentido biológico.

Existen otras formas en las que puede evolucionar una población modelada por la ecuación $x_{t+1} = (1+r)x_t$, como veremos a continuación:

La figura II.3, sugiere una población que se reproduce exactamente a sí misma en cada generación, la cual tiene una tasa de crecimiento r igual a 0, lo que indica que el número de nacimientos es igual al número de muertes.

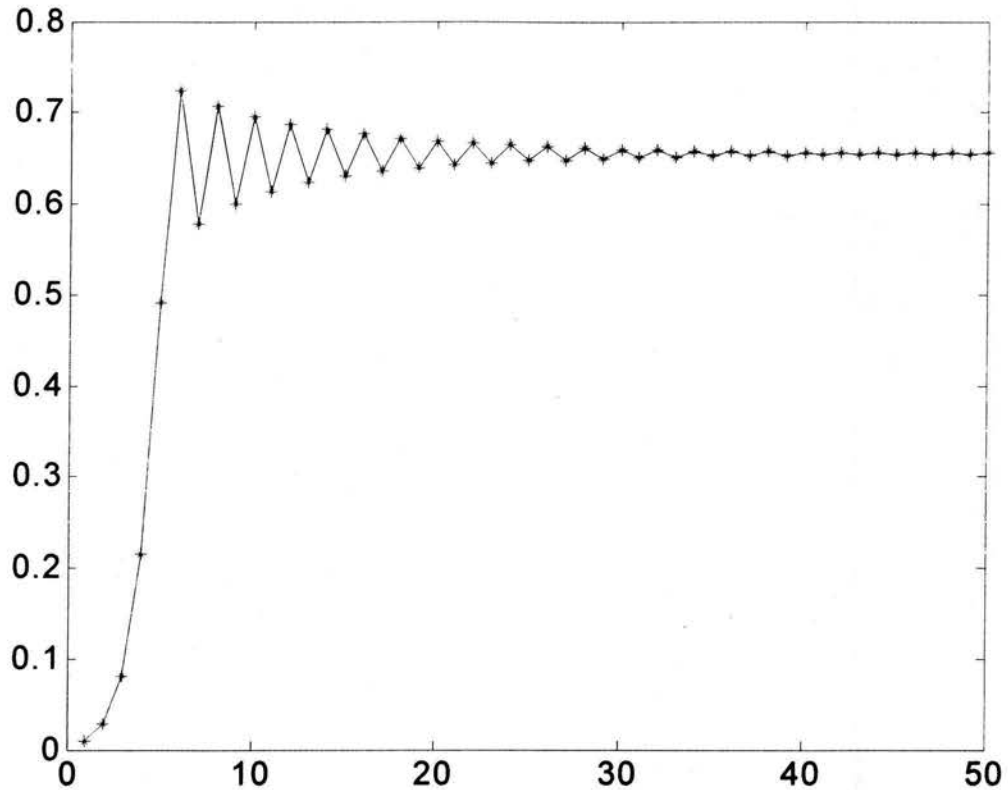


Figura II.5 Crecimiento poblacional dado por la ecuación logística cuando el parámetro R tiene como valor 2.9 y la condición inicial es 0.01. Se muestran las primeras 50 iteraciones. En este caso la población tiende asintóticamente a un valor distinto de cero al cual se aproxima de manera alternante.

La gráfica corresponde a una recta horizontal donde todos los puntos son de la forma (t, x_0) , es decir en cualquier tiempo t , el tamaño de la población se mantiene constante y corresponde a el valor de x_0 la condición inicial, lo que es lo mismo que el tamaño de la población original. Esta población se mantiene del mismo tamaño al transcurrir el tiempo.

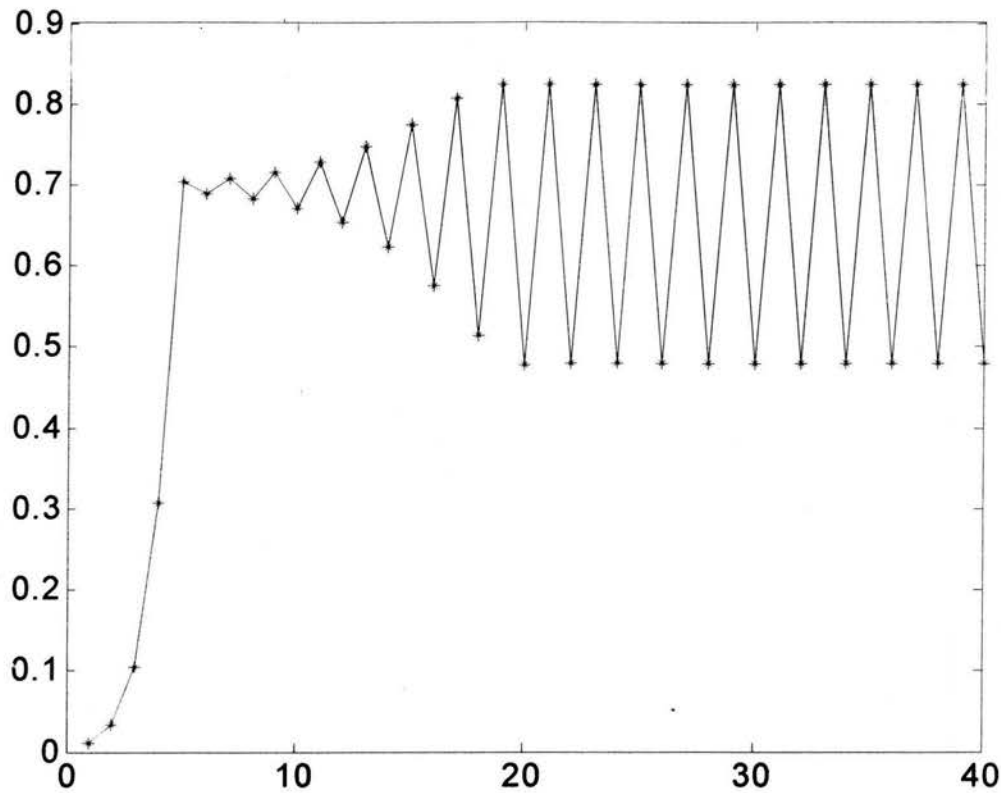


Figura II.6 Algunas poblaciones pasan por ciclos regulares, por ejemplo en climas templados los insectos crecen rápidamente en primavera y verano y después se desploman al toparse con las temperaturas invernales, este caso se presenta en poblaciones modelada por la ecuación logística con parámetro R igual a 3.3, condición inicial 0.01, se presenta 40 iteraciones.

Si le asignamos valores negativos al factor $(1+r)$, la ecuación $x_{t+1}=(1+r) x_t$, puede tomar otros comportamientos. En la figura II.4 se presentan tres casos:

- a) $(1+r) < -1$,
- b) $-1 < (1+r) < 0$
- c) $(1+r) = -1$.

En todas estas situaciones el tamaño de la población alterna entre valores positivos y negativos en generaciones sucesivas, lo cual no tiene sentido biológico en ninguno de los casos.

El tamaño de cualquier población es resultado de un equilibrio entre 2 factores: Uno de ellos llamado potencial biótico o índice máximo al cual puede aumentar una población suponiendo que haya condiciones ideales. El otro factor es la resistencia ambiental, determinada por la disponibilidad de alimento y espacio, la competencia entre organismos e interacción entre las especies como son las conductas predatorias y parasitismo.

Para que nuestra ecuación en diferencias modele el crecimiento de una población tomando en cuenta los factores anteriores debemos hacer que r sea función del tamaño de la población.. A estas funciones les llamamos denso dependientes. Sea θ al potencial biótico, x_n / θ designa el tamaño de la población como una fracción del índice máximo, donde x_n / θ toma valores en el intervalo $(0, 1]$.

En la siguiente ecuación en diferencias $x_{n+1} = r x_n (1-x_n/\theta)$, el termino $(1-x_n/\theta)$ le permite a la población crecer si es de baja densidad y detiene su desarrollo cuando el valor x_n alcanza el índice máximo, ya que si x_n es cercano a θ entonces $x_n/\theta = 1$ y por lo tanto el factor $(1-x_n/\theta)$ es cercano a 0, lo cual sugiere que la población x_{n+1} será menor que la población x_n . Si proponemos un cambio de variable $y_n = x_n/\theta$, reducimos el número de parámetros en la ecuación y obtenemos la ecuación $y_{n+1} = r y_n(1-y_n)$, conocida como la ecuación logística. Esta sencilla ecuación nos puede producir diferentes comportamientos a largo plazo según el valor que asignemos a " r ". Observamos en la figura II.5, la gráfica de una curva que inicia con un crecimiento exponencial, el cual ocurre en la naturaleza sólo en circunstancias especiales y durante un tiempo limitado, después de este periodo la población se estabiliza en un tamaño que puede sostener el ambiente llamado "capacidad de sostenimiento", el índice de crecimiento se reduce poco a poco y alcanza un estado de equilibrio a largo plazo. En este equilibrio el índice de nacimientos se iguala con el índice de mortalidad y se estabiliza el tamaño de la población. Este tipo de crecimientos es característico de organismos de larga vida que colonizan una región nueva. En la gráfica que se presenta en la figura II.5 asignamos a r el valor de 2.9 y partimos de una condición inicial igual a 0.01.

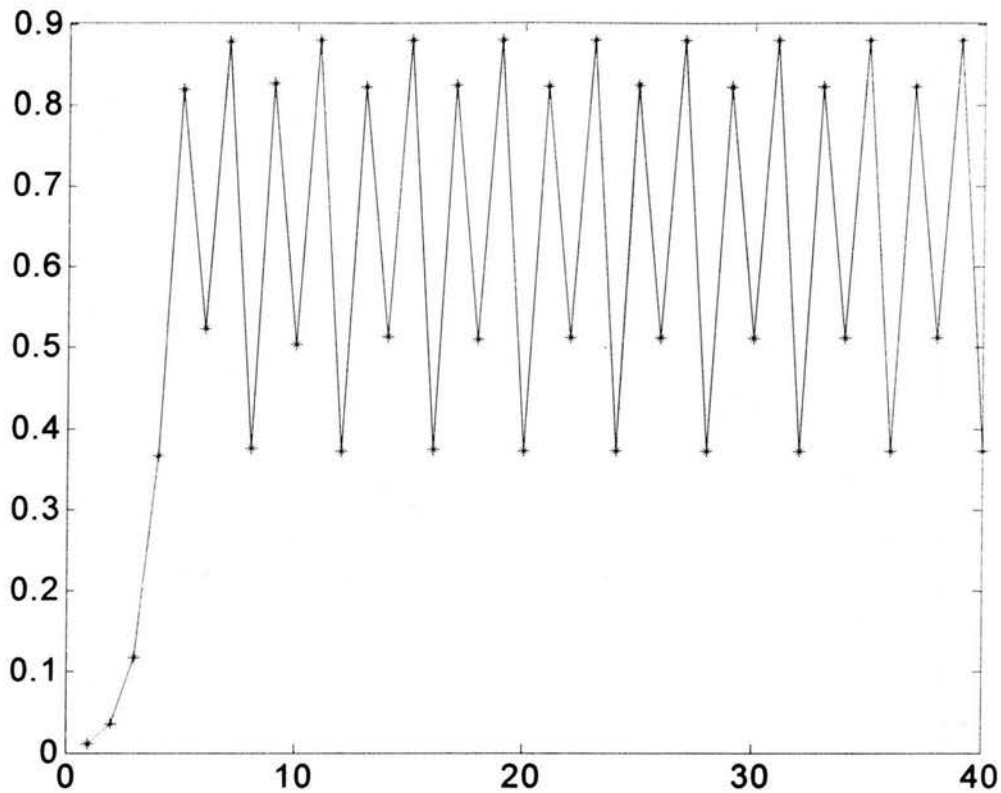


Figura II.7 Modelo de crecimiento poblacional dado por la ecuación logística con parámetro R igual a 3.52, condición inicial 0.01, se presentan 40 iteraciones. Existen factores complejos en la naturaleza que producen ciclos regulares de periodo 4, como en los ratones de Noruega.

Algunas poblaciones pasan por ciclos regulares, donde después de un rápido crecimiento hay una mortalidad masiva. Estos ciclos de abundancia y escasez ocurren en varias especies por diversas razones. Muchas especies de vida corta que se reproducen con rapidez, tienen ciclos de poblaciones de temporada, que se relacionan con la temperatura, la precipitación pluvial, etc... por ejemplo en climas templados las poblaciones de insectos crecen rápidamente durante la primavera y verano y después se desploman al toparse con las congelantes temperaturas invernales.

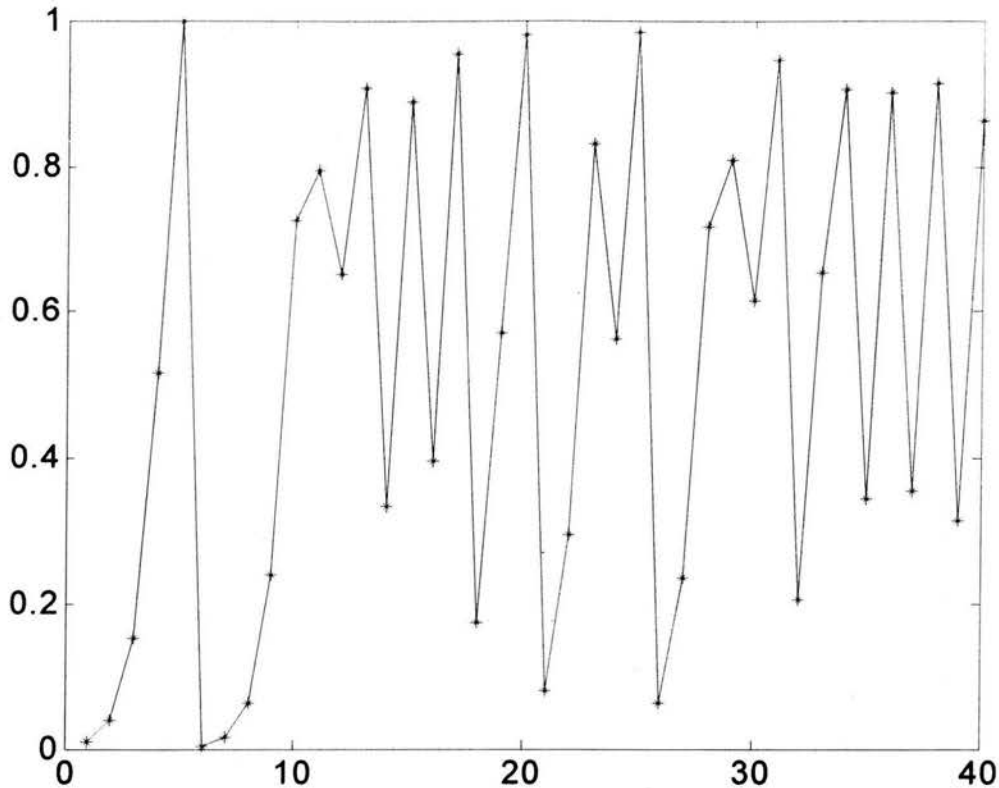


Figura II.8 La gráfica describe el comportamiento de una población modelada por la ecuación logística con parámetro R igual a 4, condición inicial 0.01, se presentan 40 iteraciones. Observamos en esta gráfica que los valores no se estabilizan, no forman ciclos, oscilan irregularmente.

Podemos mostrar este comportamiento si modificamos el valor de r en la ecuación logística. La figura II.6 corresponde a la misma ecuación con el valor del parámetro r de 3.3. Si examinamos la gráfica observamos al principio un crecimiento acelerado, el cual a partir de $t=5$, se vuelve alternante y se estabiliza poco después en 2 valores. A este comportamiento lo conocemos como un ciclo de periodo 2.

A continuación la figura II.7, nos presenta la gráfica que corresponde a la ecuación logística con un valor para el parámetro r de 3.52. Al examinar el trayecto de la línea punteada, comprobamos que después de pocas unidades de tiempo el valor x_t se estabiliza alternadamente en 4 diferentes valores, es decir

tenemos un ciclo de periodo 4. En la naturaleza, factores muy complejos producen ciclos de este tipo en algunas especies de mamíferos pequeños como las ratas de campo o los ratones de Noruega.

Por último al asignarle el valor de $r = 4$ al parámetro r en la ecuación logística, tenemos un comportamiento que no se estabiliza en ningún valor, tampoco forma ningún ciclo, simplemente oscila irregularmente como podemos apreciar en la figura II.8.

II.2 Un Enfoque Geométrico

Para saber de qué forma evoluciona una población, debemos evaluar x_0 , el tamaño de la población original en la ecuación en diferencias para conocer x_1 el tamaño de la población en la primera generación. Después evaluamos x_1 para conocer el valor de x_2 , si repetimos el procedimiento utilizando x_2 , obtendremos x_3 , valor que nos determina el tamaño de población en la tercera generación. Si deseamos conocer el tamaño de la población en la n -ésima generación, es necesario repetir el procedimiento n veces.

Podemos pensar este problema como un procedimiento iterativo o recursivo. Iterar significa repetir un proceso una y otra vez. En nuestro caso el proceso que se repite es la aplicación sucesiva de una función a sí misma, esto es, evaluando la función en el valor obtenido en la iteración anterior.

Definición. Si tenemos una función f y x_0 una condición inicial, al evaluar x_0 en la función llamamos $f(x_0)$ la primera iteración de x_0 , $f(f(x_0)) = f^2(x_0)$ la segunda iteración, etc...

Definición. El conjunto de todas las iteraciones de x_0 , bajo la función f , se llama la órbita de x_0 , es decir $\text{orb}(x_0, f) = \{x_0, f(x_0), f^2(x_0), f^3(x_0), \dots\}$

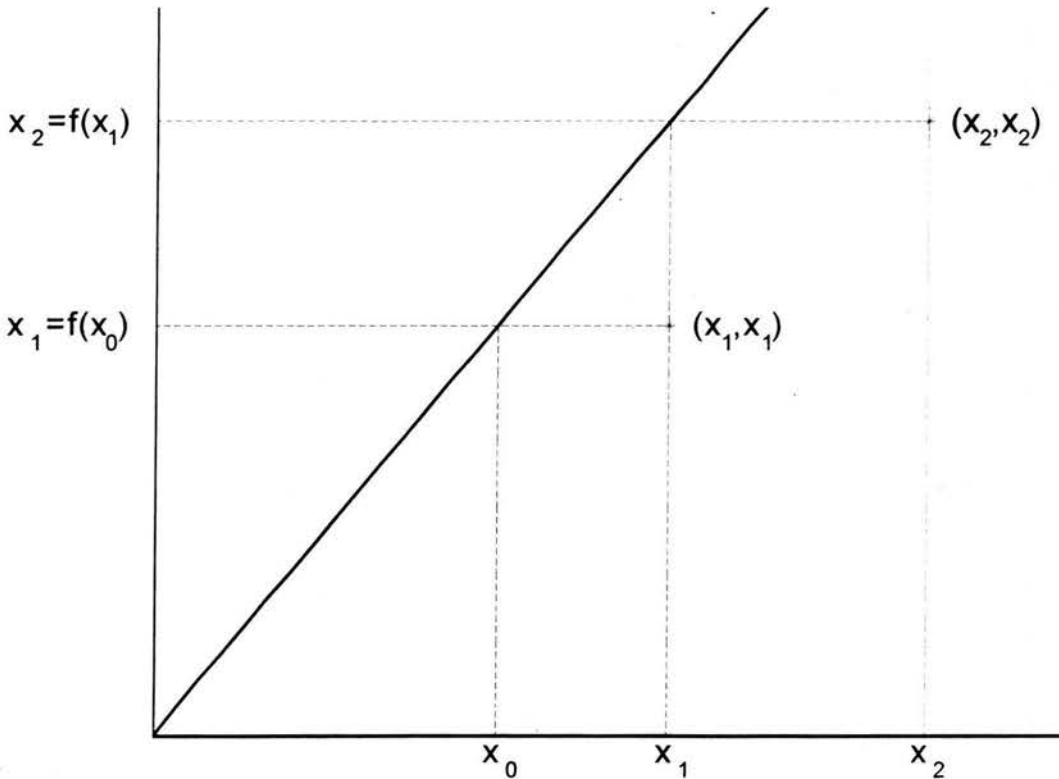


Figura II.9 La gráfica corresponde a una recta con pendiente 1.5. Al iterar una función partimos de una condición inicial x_0 , al evaluarla en la función obtenemos el valor x_1 . Si ubicamos x_1 en el eje horizontal y evaluamos nuevamente en la función obtenemos x_2 .

Comprender la evolución de una población, es describir el comportamiento de una órbita. Lo que nos interesa de una órbita, es saber cuál es su comportamiento a largo plazo.

Describir el comportamiento de una órbita, resulta bastante tedioso utilizando el procedimiento recién descrito, sin embargo existe un método geométrico que nos facilita el trabajo y requiere únicamente de la gráfica de la función y de una condición inicial.

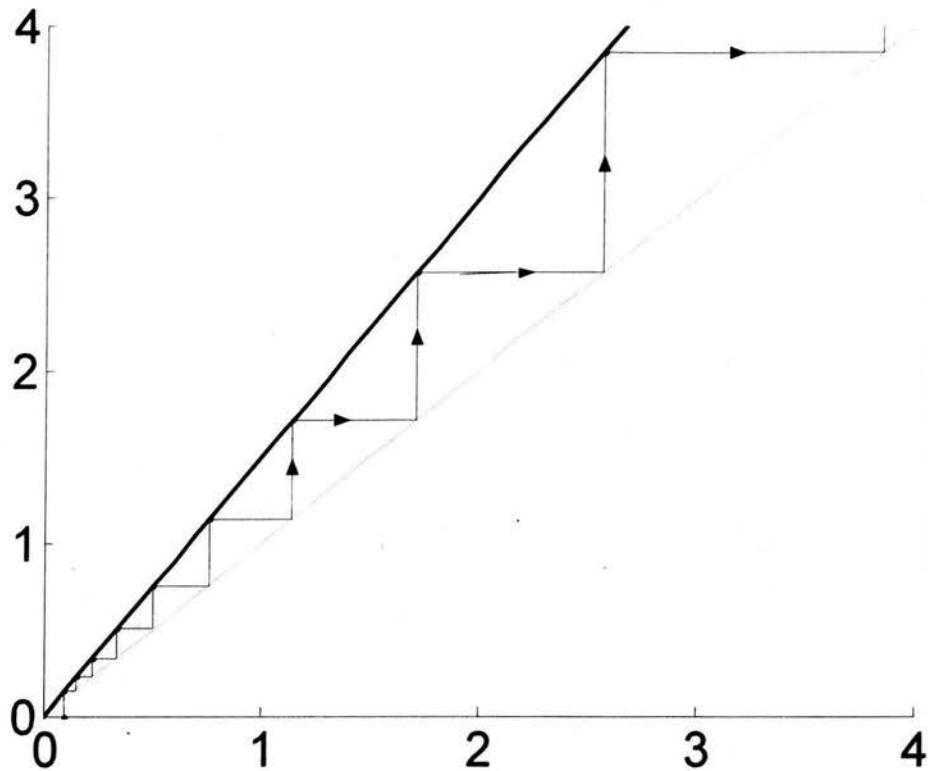


Figura II.10 La recta gruesa es la gráfica de función, esta recta tiene pendiente 1.5, valor mayor que la unidad. Esta recta pasa por el origen, la órbita de cualquier valor se separa del mismo, llamamos a este valor un repelor.

Al inicio del capítulo anterior estudiamos poblaciones que se modelan con la función $f(x) = (1 + r)x$. Si asignamos el valor de 0.5 a r tenemos la gráfica que se presenta en la figura II.9.

Dada una condición inicial x_0 , realizamos el siguiente procedimiento: Primero ubicamos la condición inicial x_0 sobre el eje horizontal, trazamos una vertical por este punto y la interceptamos con la gráfica de la función (en este caso una línea recta), encontramos el punto $(x_0, f(x_0))$, obsérvese que $f(x_0) = x_1$ es un valor ubicado sobre el eje vertical.

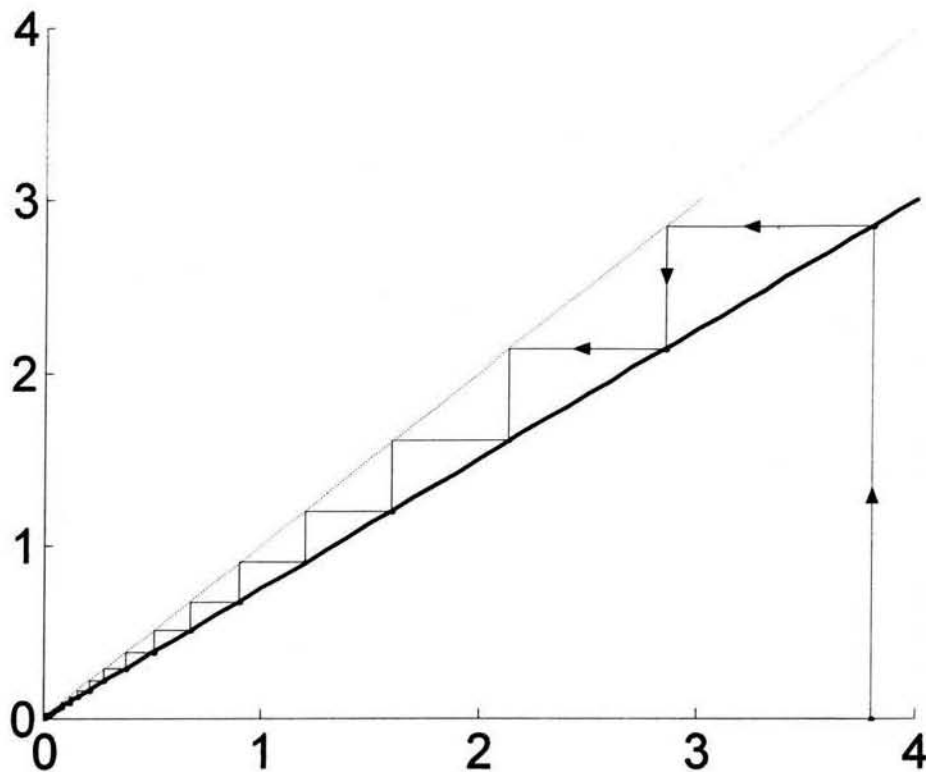


Figura II.11 La recta gruesa es la gráfica de la función, esta recta tiene pendiente 0.75, valor menor que la unidad. Esta recta pasa por el origen, valor al cual se dirige la órbita de cualquier valor. Llamamos a el origen un atractor.

Si a partir de este punto, trazamos un segmento de recta sobre el eje horizontal cuya longitud sea x_1 , en el extremo dibujamos una perpendicular al segmento, al prolongarla e intersectarla con la recta, gráfica de la función, habremos encontrado x_2 . Repitiendo este procedimiento encontramos los puntos (x_1, x_2) , (x_2, x_3) , $(x_3, x_4), \dots$

Con un poco de atención en la gráfica advertiremos que los puntos de intersección de los segmentos de recta horizontales y los verticales a la función son de la forma (x_i, x_i) . Esta observación nos simplifica de manera importante el procedimiento de localización de los puntos (x_n, x_{n+1}) , como se muestra en la figura II.10.

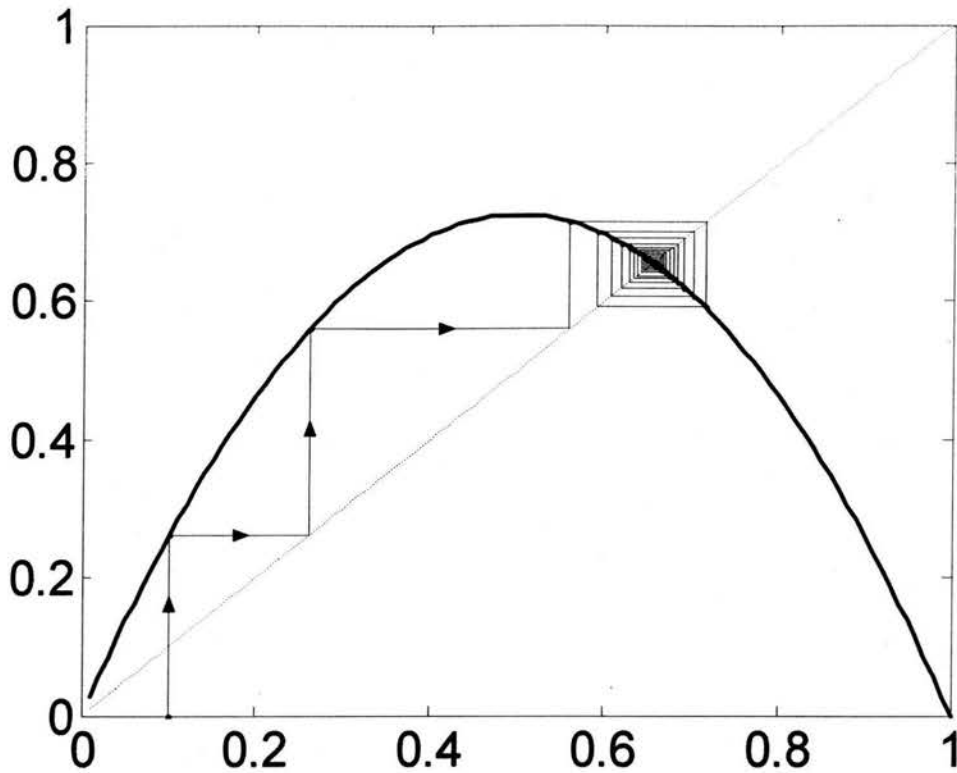


Figura II.12. La curva corresponde a la gráfica de la función logística, con parámetro r igual 2.9. La órbita de cualquier valor entre 0 y 1 converge al punto fijo, representado por la intersección de la curva con la función identidad $y = x$. Este punto es un atractor.

La línea punteada es la gráfica de la recta $y = x$ conocida como la identidad.

Iniciamos en la condición inicial x_0 con una recta vertical hasta la gráfica de la función, donde encontramos el punto (x_0, x_1) , de este punto nos movemos en dirección horizontal hasta encontrar la gráfica de la función identidad, punto cuyas coordenadas son (x_1, x_1) , desde este punto nos desplazamos perpendicularmente hasta intersectar la gráfica de la función, encontrando el punto (x_1, x_2) a partir de este punto repetimos el procedimiento, de manera similar localizamos los siguientes puntos (x_2, x_3) , (x_3, x_4) ,.....

A este método se le conoce como "cob-web" o tela araña.

La línea suave marca la evolución de la órbita dada la condición inicial.

Observemos en la figura II.10 que cada punto de la función (x_i, x_{i+1}) , se encuentra

por arriba del punto (x_{i-1}, x_i) , lo cual muestra que el tamaño de la población crece al transcurrir el tiempo.

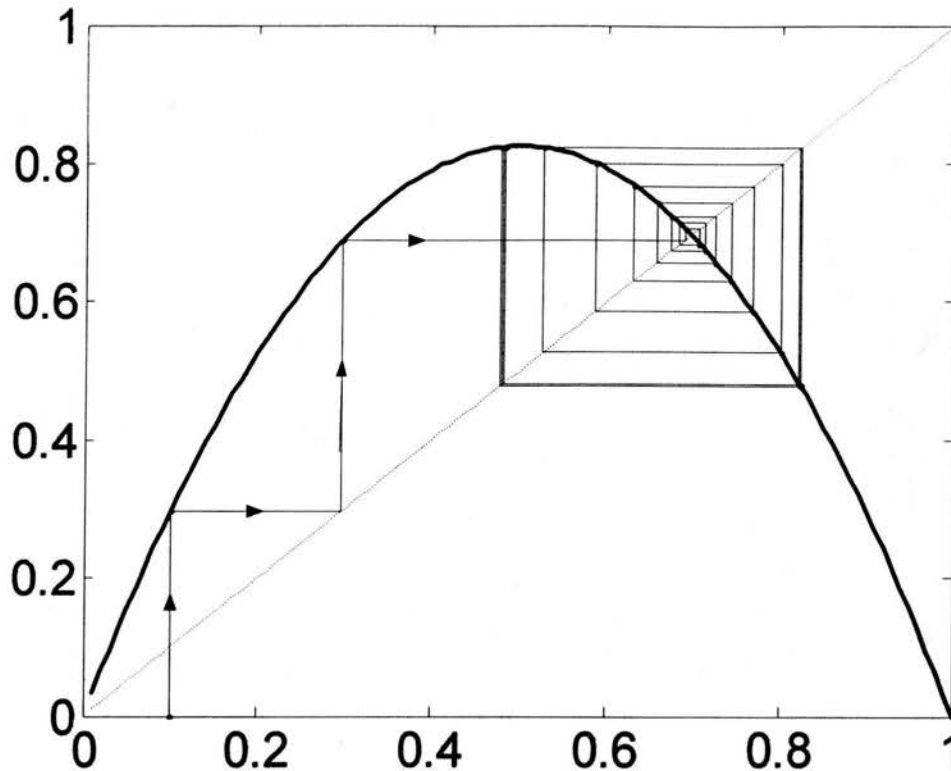


Figura II.13 La curva corresponde a la gráfica de la función logística con parámetro r igual 3.3. La órbita de cualquier valor entre 0 y 1 es atraída a un ciclo de periodo 2.

A continuación analizaremos bajo la óptica del método recién discutido, los comportamientos estudiados en la sección anterior.

En la figura II.11 se muestra la gráfica que corresponde a la ecuación $f(x)=(1+r)x$ donde r toma el valor de -0.25 y x_0 la condición inicial de 3.8. La gráfica de esta función es una línea recta que pasa por el punto $(0, 0)$, tiene pendiente positiva y se ubica por debajo de la recta identidad. La trayectoria del "cob-web" de cualquier órbita se acerca a cero al transcurrir el tiempo. A este comportamiento lo llamamos decaimiento exponencial y sabemos que representa una población que tiende a la extinción.

Si deseamos representar la evolución de una población modelada por la función logística $f(x) = r x (1-x)$ utilizando el “cob-web”, partiremos de la gráfica de una parábola cóncava negativa, para cualquier valor de r , que intersecta al eje horizontal en dos puntos que son $x=0$ y $x=1$.

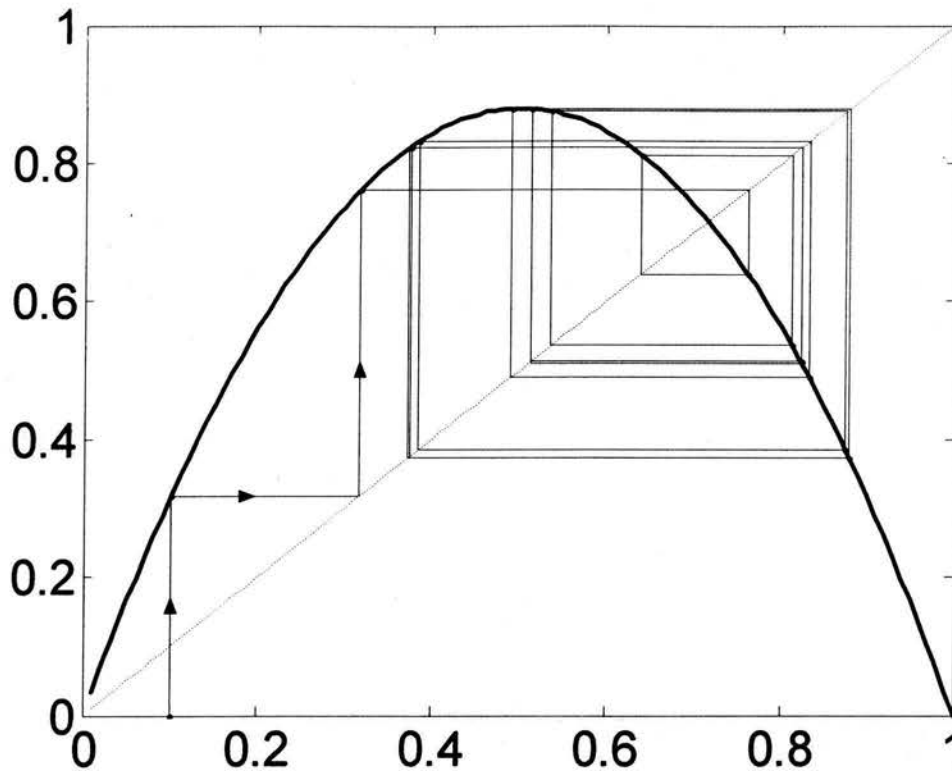


Figura II.14 La curva corresponde a la gráfica de la función logística con parámetro r igual a 3.52. La órbita de cualquier valor entre 0 y 1 es atraída por un ciclo de periodo 4.

Si le asignamos el valor de 2.9 a el parámetro r , obtendremos la trayectoria desplegada en la figura II.12, para la condición inicial de 0.01. En este caso la población después de un cierto tiempo se estabiliza en un valor fijo, la trayectoria de la órbita se dirige al valor que corresponde a la intersección de la parábola con la recta identidad, este valor es el límite de la órbita.

Definición. Sea f una función, decimos que c es un punto fijo si sucede que $f(c)=c$.

Si asignamos el valor de 3.3 al parámetro r , la gráfica de la función es semejante a la anterior, sin embargo al trazar la trayectoria "cob-web" partiendo de la condición inicial $x_0=0.01$, podemos ver en la figura II.13, que la órbita se acerca a 2 puntos del dominio de la función y una vez que llega a ellos se mantiene alternando entre ambos.

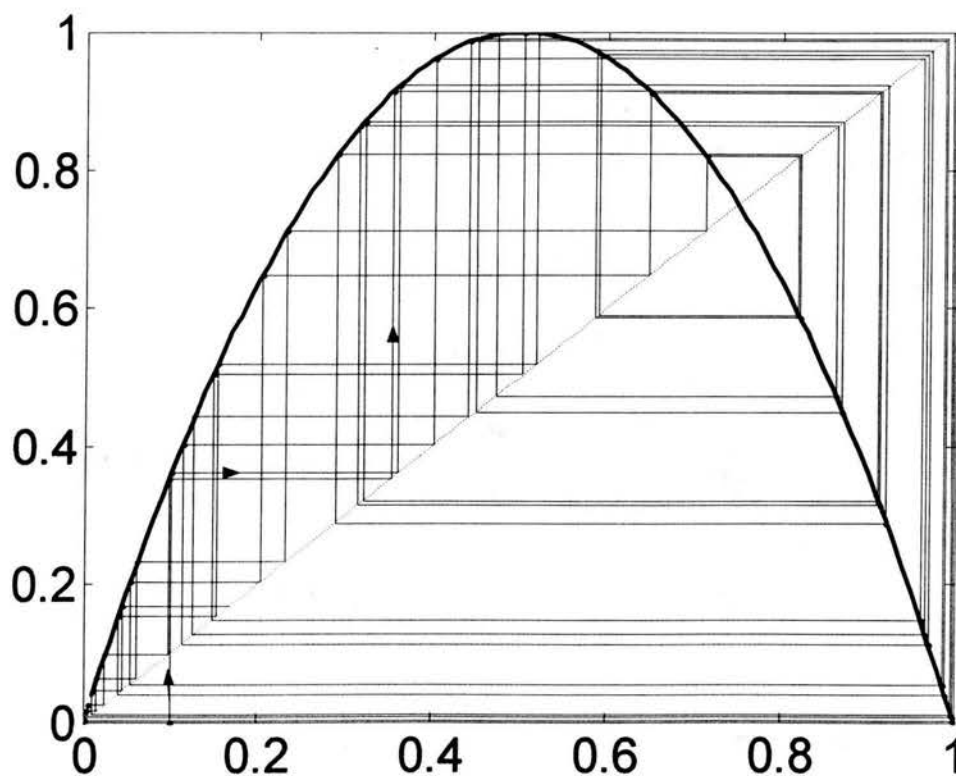


Figura II.15 La curva gruesa representa la gráfica de la función logística, con parámetro $r = 4$. La curva delgada corresponde a la órbita de la condición inicial $x_0 = 0.01$. Esta órbita no converge ni a un punto fijo, ni a un ciclo periódico.

Definición. Sea f una función. El punto x_0 es un punto periódico de f , si existe n , (n , número natural) tal que $f^n(x_0) = x_0$ y decimos que tiene periodo k si

$$k = \min \{ n / f^n(x_0) = x_0 \} \quad \text{y} \quad f^k(x_0) = x_0.$$

En otras palabras un punto periódico de f con periodo k es un punto fijo de f^k .

Definición. Si x es un punto periódico, entonces él y sus iteraciones forman una órbita periódica.

La figura II.14 corresponde a la ecuación logística con parámetro r igual a 3.52 y condición inicial $x_0=0.01$. En este caso se nos presenta una órbita que se estaciona alternadamente entre 4 valores, lo que forma una órbita periódica de periodo 4.

Cuando el parámetro r toma el valor de 4 en la función logística encontramos diferentes orbitas en los valores de un mismo intervalo, hay valores del dominio cuyas órbitas son atraídas a puntos fijos, también hay valores cuyas órbitas son atraídas a ciclos periódicos y al mismo tiempo hay órbitas que no divergen a infinito. En la figura II.15 se despliegan los primeros términos de una órbita que no es atraída a un punto fijo, ni a un ciclo atractor y que tampoco diverge a infinito. A este comportamiento le llamamos caos, para estudiarlo puedes leer el capítulo 10 de "A First Course in Chaotic Dynamical Systems" de Devaney. Addison Wesley Publishing company. Inc.

II.3 Caso Lineal.

Anteriormente se analizaron diversos comportamientos órbitas. En éste capítulo revisaremos algunas herramientas útiles para determinar el comportamiento a largo plazo de las órbitas generadas por algunas funciones.

En primer lugar estudiaremos funciones lineales. Sea $f(x) = \alpha x$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ una función cuya gráfica sabemos es una línea recta que pasa por el origen, este el único punto fijo de la función.

El comportamiento de la órbita de cualquier condición inicial x_0 dependerá del valor que tome α , al que llamaremos parámetro.

Caso a) La figura II.16 muestra la gráfica de una recta cuando el parámetro toma valores entre 0 y 1, es decir $0 < \alpha < 1$:

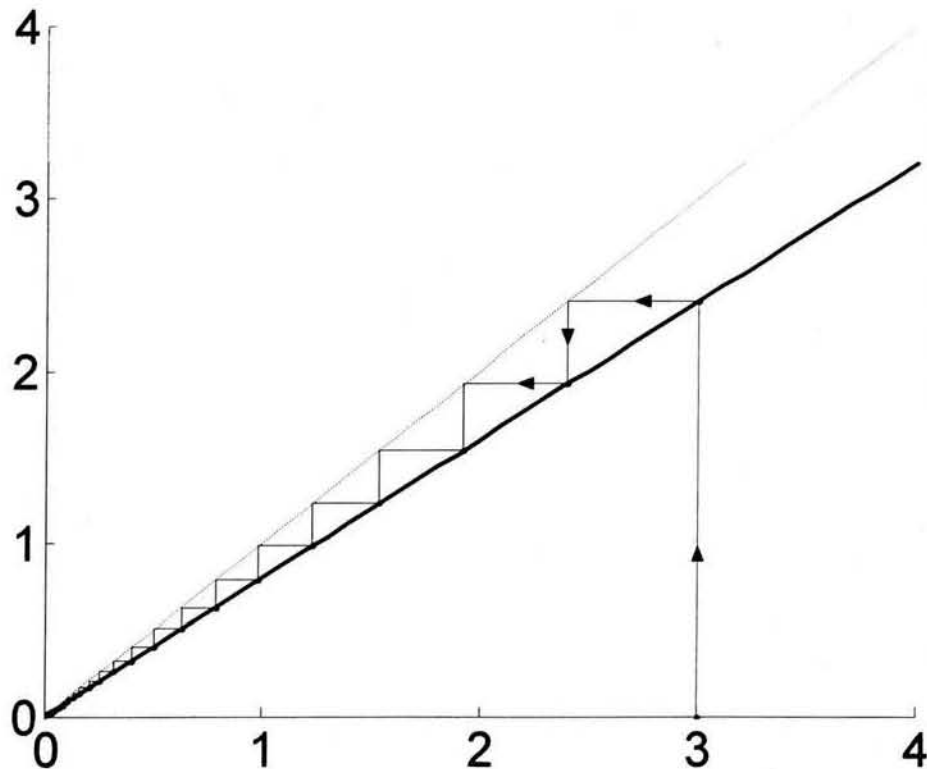


Figura II.16 La recta oscura tiene pendiente 0.8, la condición inicial es $x=3$. El punto fijo, en este caso el origen es un atractor. Las órbitas de cualquier valor son atraídas a él.

La línea punteada corresponde a la gráfica de la función identidad $f(x) = x$. La línea gruesa es la gráfica de la función $f(x) = \alpha x$ para algún valor de $\alpha \in (0, 1)$. La línea suave indica la trayectoria de la órbita para el valor inicial x_0 , obsérvese que esta trayectoria se dirige a cero después de algunas iteraciones. Este comportamiento se repite en todas las órbitas de esta función independientemente del valor inicial, por esto decimos que el punto fijo es un atractor.

Definición Decimos que x_0 es un punto fijo atractor de f , si $f(x_0) = x_0$ y existe un intervalo I que contiene a x_0 en su interior para el cual se satisface la siguiente condición: dado cualquier elemento x de I , $f^n(x)$ es también elemento de I para toda n y además $f^n(x) \rightarrow x_0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Caso b) La figura II.17 muestra la gráfica de una recta cuando el parámetro, toma valores mayores que 1.

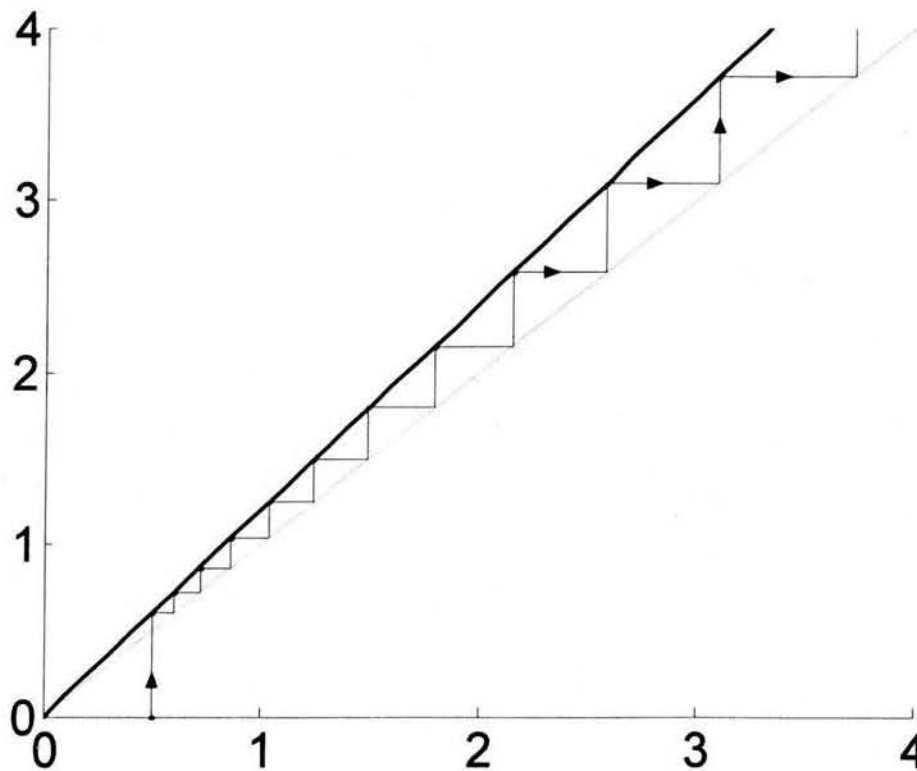


Figura II.17 La recta obscura tiene pendiente 1.2 y la condición inicial es 0.5. El punto fijo, el origen, es un repulsor, en este caso las órbitas de cualquier valor inicial positivo divergen a infinito.

La grafica de la función es la línea gruesa, se ubica por arriba de la función identidad que es la línea punteada. En este caso también tenemos un único punto fijo en el origen, que tiene un comportamiento diferente al anterior, ya que la órbita de cualquier condición inicial x_0 positiva diverge a ∞ , para x_0 , negativa la órbita de

cualquier condición inicial diverge a $-\infty$. Por esto al punto fijo lo llamamos repulsor.

Definición. Decimos que x_0 es un punto fijo repulsor de f , si $f(x_0) = x_0$ y existe un intervalo I que contiene a x_0 en el interior, en el cual se satisface la siguiente condición: para cualquier elemento x en I , diferente de x_0 , hay un entero $n > 0$ tal que $f^n(x)$ no es elemento de I .

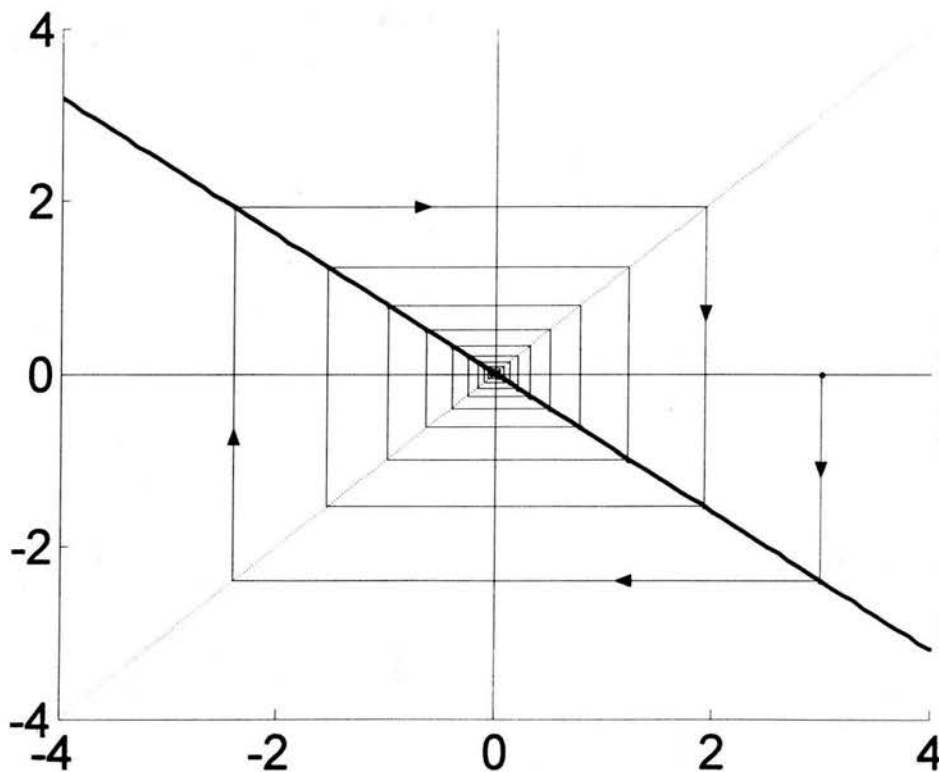


Figura II.18 La recta oscura en la gráfica tiene pendiente negativa con valor -0.8 , y condición inicial $x=3$. El punto fijo $x=0$ es un atractor, la órbita de cualquier valor se acerca a él de manera oscilante.

Caso c) La figura II.18 muestra la gráfica de una recta cuando le asignamos a α un valor negativo entre 0 y -1 , es decir $-1 < \alpha < 0$.

La gráfica de la función identidad es la línea punteada. La recta gruesa tiene pendiente negativa y corresponde a la grafica de la función. Tenemos como único punto fijo al $(0,0)$, y cualquier órbita en este caso se dirigiría a este valor de manera oscilante, es decir, los valores de la órbita alternan entre valores positivos y negativos consecutivamente.

Cuando un punto fijo es atractor para todos los valores del dominio de la función, decimos que es un atractor.

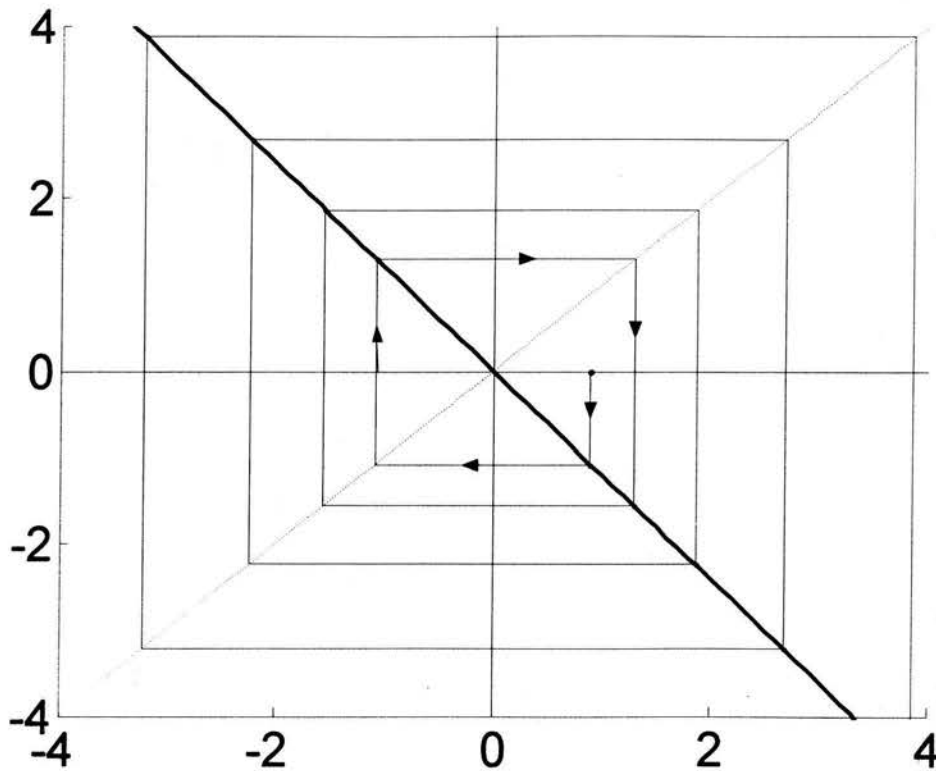


Figura II.19. La recta obscura es la gráfica de una recta con pendiente -1.2 y condición inicial 0.9 . El punto fijo en este caso es un repelot, las órbitas de cualquier número divergen a infinito de manera oscilante.

Caso d) La figura II.19 muestra la gráfica de una recta cuando el parámetro de α toma valores menores que -1 , o sea $\alpha < -1$,

La gráfica de la función es la línea gruesa con pendiente negativa. Observamos que cruza a la función identidad (línea punteada) en el punto $(0, 0)$, lo que señala el punto fijo. Este punto es, al igual que en el inciso c), un repulsor, ya que las órbitas generadas por cualquier condición inicial x , divergen a infinito en valor absoluto, en este caso de manera oscilante.

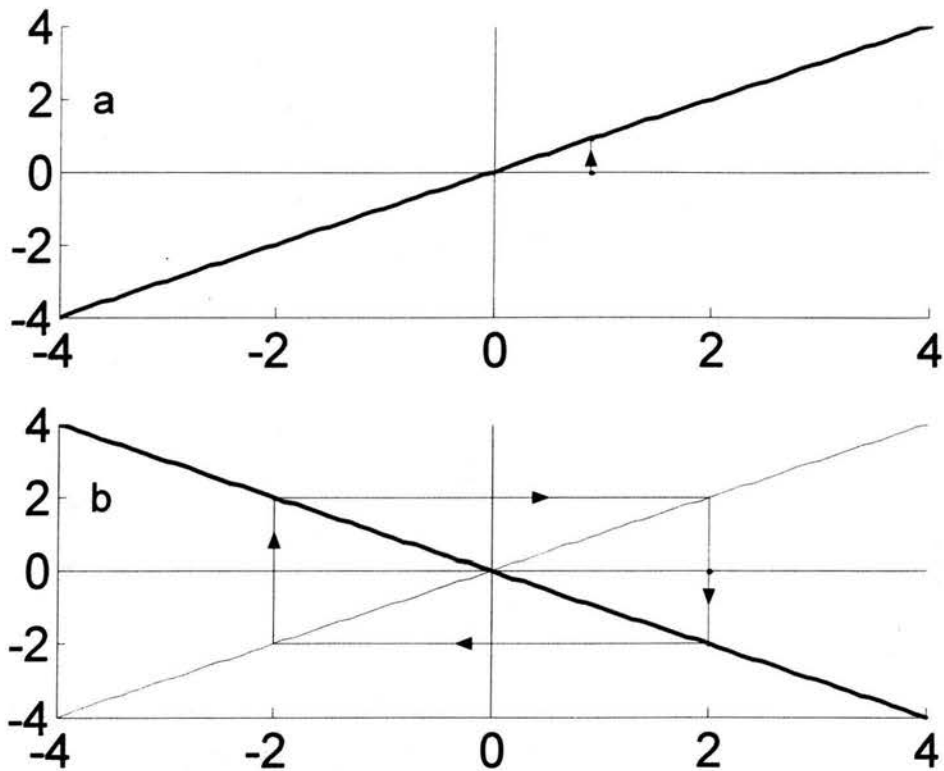


Figura II.20. a) La gráfica representa una recta con pendiente 1. Todos los puntos de la recta son puntos fijos neutros; b) La recta obscura tiene pendiente -1 . El origen es un punto fijo neutro, la órbita de cualquier número forma un ciclo de periodo 2.

Entre las funciones lineales, hay dos que presentan un comportamiento especial, en la figura II.20 se presenta las rectas cuando el valor del parámetro a) $\alpha = 1$

b) $\alpha = -1$

En la gráfica II.20 a) podemos observar que la función identidad coincide con la recta de la función. Cada valor del dominio de la función es un punto fijo. Este punto fijo no es atractor, ni repulsor y lo llamamos punto neutro.

La recta gruesa tiene pendiente negativa la cual cruza a la función identidad en un solo punto en el (0,0), el cual es el único punto fijo en la función. Este punto fijo no es un atractor ni repulsor. La órbita de cualquier condición inicial, forma un ciclo de periodo 2. Llamaremos a este punto fijo neutro.

Resumiendo; la dinámica de las funciones lineales $f(x) = \alpha x$ depende del valor del parámetro α . Estas funciones tienen un único punto fijo en $x=0$ si $\alpha = 1$.

Si $|\alpha| < 1$ entonces el punto fijo es un atractor.

Si $|\alpha| > 1$ entonces el punto fijo es un repulsor.

Si $|\alpha| = \pm 1$ decimos que el punto fijo es un punto neutro.

II.4 Caso No- Lineal.

Para describir el comportamiento de las órbitas generadas en funciones no lineales, primero necesitamos determinar los puntos fijos de la función, éstos se pueden encontrar por procedimientos algebraicos resolviendo la ecuación $x = f(x)$ ó por métodos geométricos, encontrando la intersección de la recta identidad con la gráfica de la función.

Estos puntos fijos también pueden ser atractores, repulsores o puntos neutros. ¿Qué criterio podemos usar para determinar si un punto fijo de una función no-lineal es atractor o repulsor?

En muchas ocasiones necesitamos aproximar funciones con reglas de correspondencia muy complicadas, por unas más sencillas. El caso más simple es hacerlo con las rectas tangentes a la función:

Sea $f(x)$ una función continua y derivable. Dado un punto a en el dominio de la función la recta tangente en el punto $(a, f(a))$ tiene pendiente $f'(a)$ y su ecuación es:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a) \quad \text{ó} \quad y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

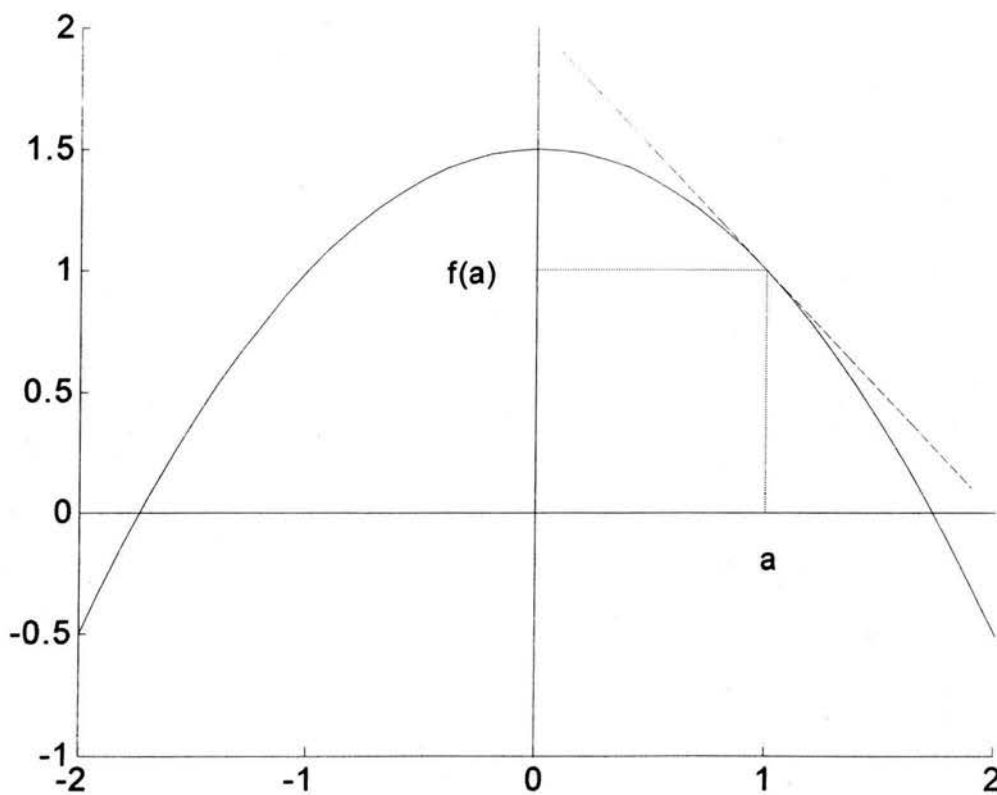


Figura II.21 La recta punteada es tangente a la gráfica de la función en el punto $(a, f(a))$. Esta recta tiene pendiente $f'(a)$.

Si tenemos que el punto $(a, f(a))$ es un punto fijo, podemos reducir el problema de determinar si este punto fijo es atractor o repulsor al de las funciones lineales analizando la pendiente de la recta tangente. Como la derivada nos da esta pendiente, podemos utilizar el siguiente criterio:

Si $|f'(a)| < 1 \Rightarrow a$ es un atractor

Si $|f'(a)| > 1 \Rightarrow a$ es un repulsor

Si $|f'(a)| = \pm 1 \Rightarrow a$ es un punto fijo neutro

Algunos puntos fijos tienen comportamientos especiales, por ejemplo la función $f(x) = x - x^2$, tiene como punto fijo a $x = 0$, valor que obtenemos al resolver la ecuación: $x = x - x^2$. Al evaluar este punto en la derivada $f'(x) = 1 - 2x$; tenemos un punto neutro $f'(0) = 1$

En la figura II.22 se presenta un panel con dos gráficas de la función anterior. En a) observamos que las órbitas de los valores entre 0 y 1 son atraídas al punto fijo en b) las órbitas de valores que no están contenidas en el intervalo $(0,1)$ divergen.

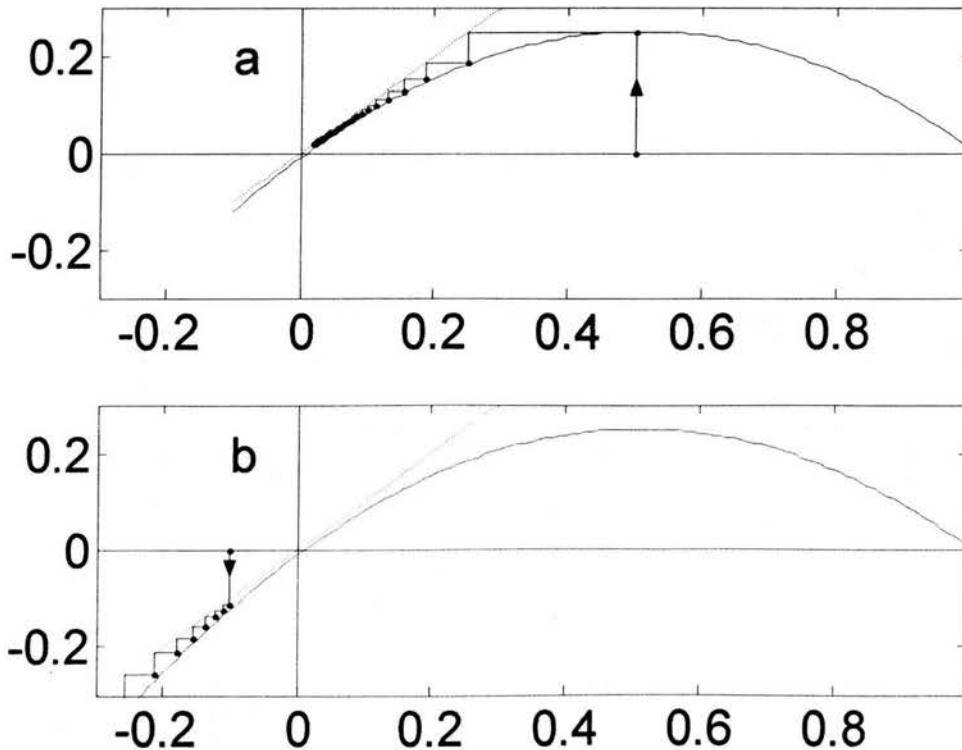


Figura II.22 La curva corresponde a la gráfica de la función $f(x) = x - x^2$, el punto fijo es $x = 0$, el cual no es atractor, ni repulsor; a) La órbita es atraída al punto fijo, b) La órbita es repelida por el punto fijo.

Llamamos cuenca de atracción al conjunto de valores del dominio de la función cuyas órbitas son atraídas a un cierto punto fijo. En el ejemplo anterior el punto fijo $x=0$ es atractor por la derecha y su cuenca de atracción es el intervalo $[0,1]$.

No todos los atractores son puntos fijos, también existen ciclos atractores, es decir órbitas cíclicas o periódicas que atraen otras órbitas a sí mismas, veamos el siguiente ejemplo: la función $f(x) = x^2 - 1$, tiene 2 puntos fijos que son: $x_1 = (1 + \sqrt{5})/2$, $x_2 = (1 - \sqrt{5})/2$. Evaluando en la derivada de la función estos puntos fijos observamos que no son atractores.

La órbita de $x_0=0$ es $\{0,-1,0,-1,0,\dots\}$ que es una órbita cíclica periódica de periodo dos.

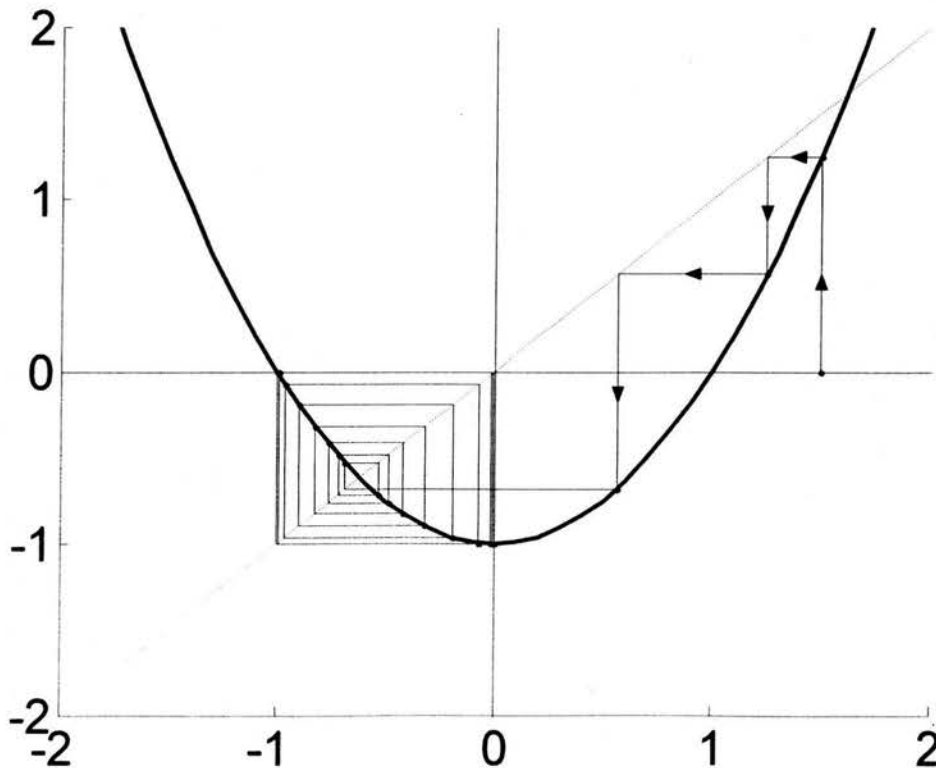


Figura II.23. La curva corresponde a la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 1$, observamos el mapeo de la órbita para la condición inicial $x = 1.5$. La órbita es atraída a un ciclo de periodo 2.

En la figura II.23 se muestra la gráfica de la función y la recta identidad. Se ha marcado también la órbita de $x_0=0$. Llamemos x_1 a la intersección de la parábola con la recta identidad en los valores positivos. La órbita de cualquier valor en el intervalo $(-x_1, x_1)$ se acercara a la órbita cíclica de $x_0=0$. Llamaremos a esta órbita un ciclo periódico atractor. Y al intervalo $(-x_1, x_1)$ la cuenca de atracción. La órbita de cualquier valor en los intervalos $(-\infty, -x_1) \cup (x_1, \infty)$ diverge a $+\infty$.

¿Qué criterio nos puede guiar, para saber si un ciclo periódico es atractor, repulsor o neutro?

Para establecer estos criterios necesitamos primero hacer algunas observaciones interesantes.

Existe una estrecha relación entre puntos fijos y ciclos periódicos, la cual podemos entender analizando el ejemplo anterior:

La función $f(x) = x^2 - 1$ tiene un ciclo periódico atractor para $x_0=0$, sabemos que su órbita es $\{0, -1, 0, -1, 0, -1, \dots\}$ donde sucede que:

$$\begin{aligned}x_0 &= 0 \\x_1 &= f(x_0) = -1 \\x_2 &= f(f(x_0)) = 0, \\&\text{etc.}\end{aligned}$$

Observemos que $x_0 = f(f(x_0)) = f^2(x_0)$ es decir, x_0 es un punto fijo de la segunda iteración de la función. Dijimos que la órbita de $x_0=0$, es un ciclo periodico atractor, extendiendo el criterio de punto fijo atractor y repelot que teníamos, debe suceder que:

$$|f^2'(0)| < 1.$$

Como $f^2(x)$ es una composición de funciones, utilizamos la regla de la cadena para derivarla. Tenemos que:

$$f^2'(x_0) = (f \circ f)'(x_0) = f'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

sabemos que $f(x_0) = x_1$, sustituyendo en la expresión anterior obtenemos:

$$f^2(x_0) = f(x_1) \cdot f(x_0).$$

Generalizando podemos decir:

Si tenemos un ciclo periódico, de periodo n ; $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}$, entonces

$$f^n(x_0) = f(x_0) \cdot f(x_1) \cdot f(x_2) \cdot \dots \cdot f(x_{n-1})$$

Además si el ciclo es atractor sucede que $|f^n(x)| < 1$, pero si es repulsor entonces sucederá $|f^n(x)| > 1$. Si tenemos $f^n(x) = \pm 1$. Llamamos al ciclo neutro.

Otra característica importante de los ciclos periódicos, la podemos estudiar con un enfoque geométrico.

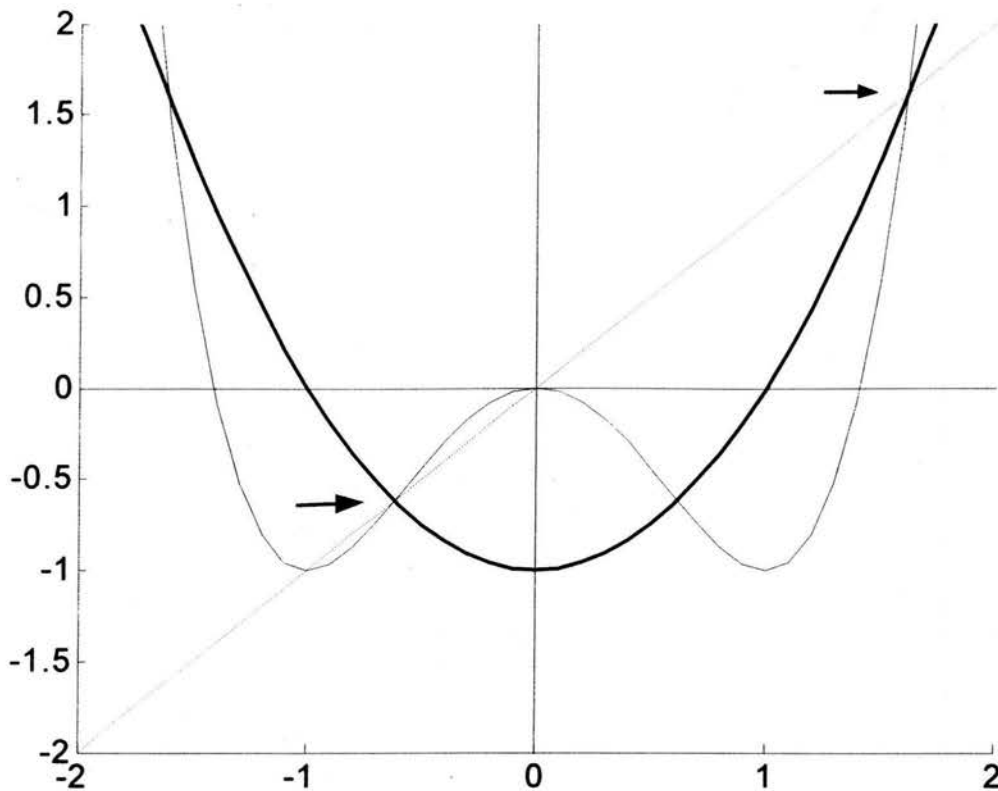


Figura II.24 La curva obscura corresponde a la gráfica de la parábola $f(x) = x^2 - 1$. La curva ondulada es la gráfica de la segunda iteración de la función. Observamos en la gráfica que dos de los puntos fijos de la segunda iteración corresponden a los valores del ciclo de periodo 2 de la función original.

En la figura II.24 se muestra la gráfica de $f(x) = x^2 - 1$, esta función tiene dos puntos fijos, que sabemos no son atractores. Estos puntos se encuentran en la intersección de la gráfica con la recta identidad y se están marcados con flechas en la figura.

La gráfica de $f^2(x)$ es la curva ondulada suave, esta curva corta en cuatro puntos a la recta identidad, es decir, la segunda iteración de la función, tiene cuatro puntos fijos, dos de los cuales eran los puntos fijos de la función original, los otros dos corresponden a los puntos que forman el ciclo periódico atractor igual a $\{0, -1, 0, -1, \dots\}$.

Es importante notar que cualquier punto fijo de $f(x)$, es también punto fijo de cualquier iteración de la función.

Otra observación interesante es que la derivada de la n -ésima iteración de f tiene el mismo valor en cualquier punto del ciclo. Para explicar esto regresemos nuevamente al ejemplo $f(x) = x^2 - 1$, sabemos que si tomamos como condición inicial a $x_0 = 0$, este valor genera una órbita cíclica atractora. Y sucede que

$$f^2'(0) = f'(0) \cdot f'(-1)$$

La condición inicial $x_0 = -1$ genera la misma órbita que 0, es decir,

$$\text{orb}(-1, f) = \text{orb}(0, f).$$

Como sucede que

$$f^2'(-1) = f'(-1) \cdot f'(0)$$

podemos concluir que: $f^2'(0) = f^2'(-1)$.

En general podemos afirmar que la derivada de la n -ésima iteración de f tiene el mismo valor para cualquier punto del ciclo periódico de periodo n . Dada la órbita $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \dots\}$

$\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}$ forman un ciclo de periodo n .

$$\text{Entonces } f^{n'}(x_0) = f^{n'}(x_1) = f^{n'}(x_2) = \dots = f^{n'}(x_{n-1}).$$

Recapitulando, hasta ahora hemos discutido, que existen fenómenos que cambian o evolucionan con el tiempo. También dijimos que lo que nos interesa es el comportamiento a largo plazo del sistema, para esto analizamos algunas herramientas como son, definir órbitas y estudiar sus características, encontrar puntos fijos y clasificarlos como atractores, repulsores o puntos neutros y reconocer si órbitas periódicas resultan ser ciclos atractores repulsores o neutros.

Entre las funciones que comúnmente se utilizan para modelar fenómenos están:

$Q_c(x) = x^2 + c, c \in \mathbb{R}$	familia cuadrática.
$f_\lambda(x) = \lambda x (1-x)$	familia logística
$E_\lambda(x) = \lambda e^x$	familia exponencial
$S_\mu(x) = \mu \text{sen}(x)$	familia seno,

A las constantes c, μ, λ , las llamamos parámetros y a las funciones las conoceremos como familias parametrizadas. El objetivo con estas familias de funciones no es conocer únicamente el comportamiento de una órbita, sino el poder establecer en general cuál es la conducta de todas las órbitas de un sistema. A este problema lo conocemos como estudiar la dinámica del sistema. En las funciones que mencionamos, la dinámica no es la misma para cualquier valor del parámetro por lo tanto analizaremos como cambia la dinámica de estas funciones al variar el parámetro, todo esto lo estudiaremos con un ejemplo, el de la familia de funciones $Q_c(x) = x^2 + C$.

CAPITULO III

La Familia Cuadrática $Q_c(x) = x^2 + c$.

III.1 Primeros Atractores.

En este capítulo estudiaremos la dinámica de la familia de funciones $Q_c(x) = x^2 + c$ para ilustrar de manera concreta el concepto de bifurcación. La gráfica de la función $x^2 + c$, es una parábola cóncava positiva, cuyo vértice se localiza siempre sobre el eje y, el parámetro c marca los desplazamientos verticales de la función x^2 .

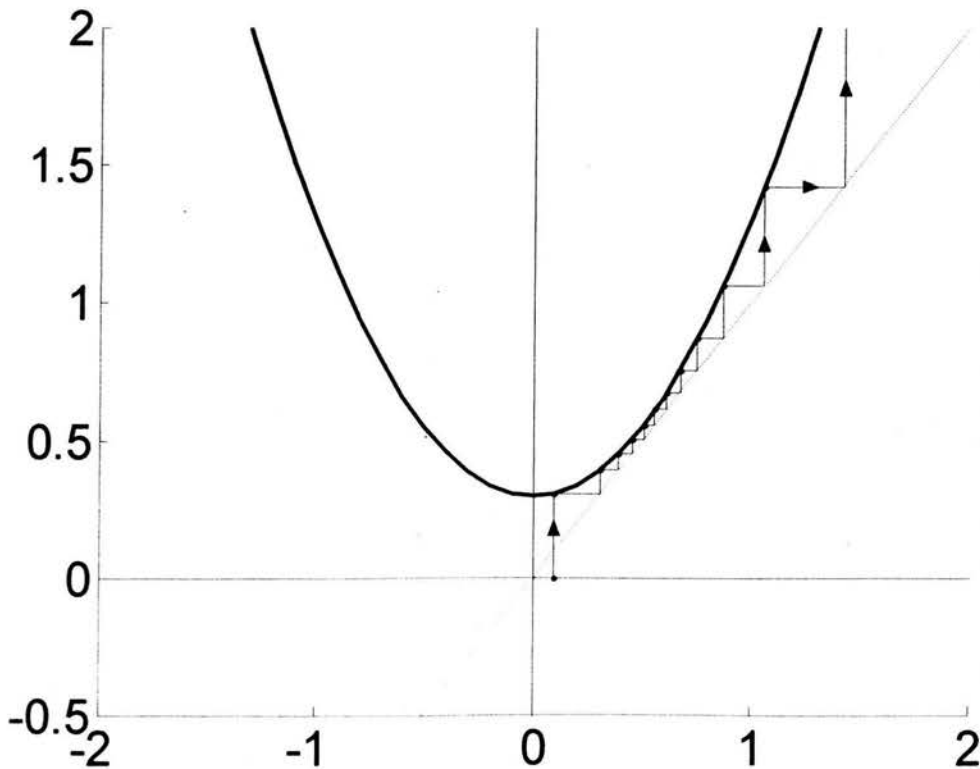


Figura III.1 La gráfica corresponde a la función cuadrática con parámetro c igual a 0.3. La órbita desplegada corresponde a la condición inicial $x = 0.1$. En este caso la órbita de cualquier valor diverge a infinito.

Para hacer un análisis del comportamiento de las órbitas de esta función, lo primero que necesitamos es determinar los puntos fijos, sabemos que los encontramos resolviendo la ecuación $x^2 + c = x$.

Las soluciones de la ecuación $x^2 - x + c = 0$ son $x = (1 \pm \sqrt{1-4c}) / 2$.

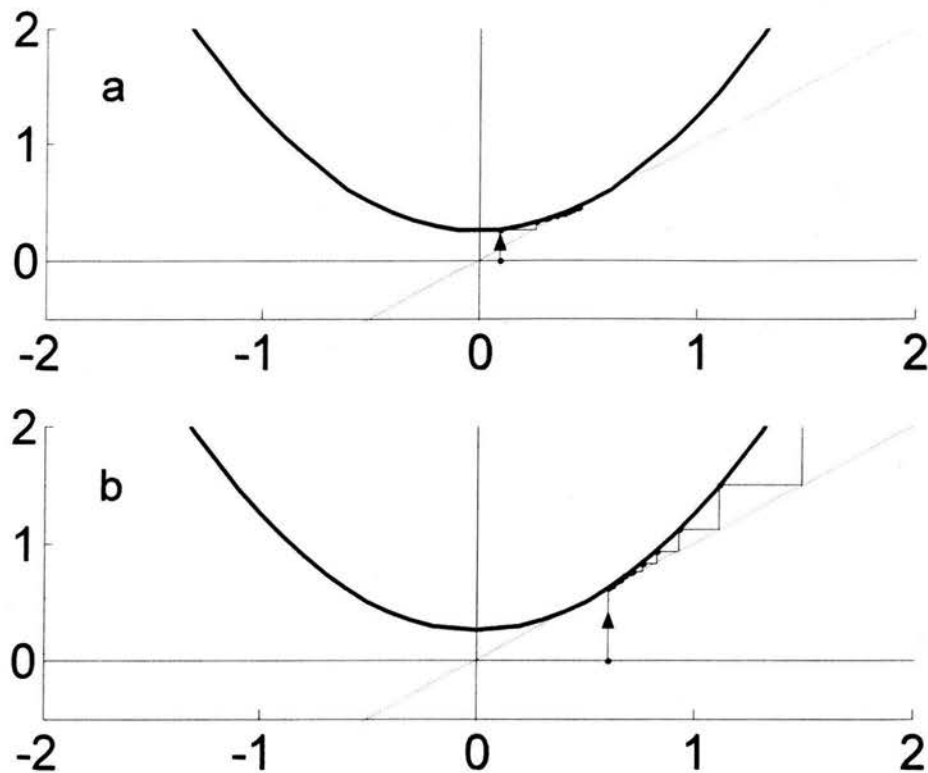


Figura III.2 En las siguientes figuras se presenta la gráfica de la función cuadrática para el valor de c igual a $\frac{1}{4}$. La curva interseca a la recta identidad en un solo punto. Este punto fijo es atractor por el lado izquierdo con cuenca de atracción $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. En el panel a) se muestra la órbita de la condición inicial $x_0=0.1$ la cual converge al punto fijo. En el panel b) se muestra la órbita de la condición inicial $x_0 = 0.6$, la cual diverge a infinito.

Estas soluciones nos generan tres casos, según el valor del discriminante $(1 - 4c)$:

- i) $(1 - 4c) < 0$. Observamos en la figura III.1, que la gráfica de la función y la recta identidad no se intersecan. Algebraicamente esto sucede cuando $c > \frac{1}{4}$. Esta función no tiene puntos fijos y la órbita de cualquier valor diverge a ∞ .

- ii) $(1 - 4c) = 0$. Cuando $c = \frac{1}{4}$ la gráfica de la función y la recta identidad, se intersectan en un solo punto y éste es el único punto fijo de la función. El punto fijo, se encuentra en $x = \frac{1}{2}$, si analizamos la condición de este punto, evaluándolo en la derivada $f'(x) = 2x$ tenemos $f'(\frac{1}{2}) = 2(\frac{1}{2})=1$, por lo que podemos concluir que $x = \frac{1}{2}$ es un punto neutro. En la figura III.2 a) y b) se presenta la gráfica de la función cuadrática cuando el valor del parámetro es $\frac{1}{4}$, en este caso el punto fijo es atractor por el lado izquierdo, con cuenca de atracción $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. En el panel a) se muestra la órbita de un valor en la cuenca de atracción. Las órbitas de los valores $x \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \infty)$ divergen a ∞ .
- iii) $(1 - 4c) > 0$. Observamos en las gráficas III.2.a) y III.2.b) la gráfica de la función y la recta $y = x$, las cuales se interceptan en 2 puntos, algebraicamente esto sucede para valores de $c < 1/4$. Esta función tiene 2 puntos fijos que son:

$$x_1 = (1 + \sqrt{1-4c})/2 \quad x_2 = (1 - \sqrt{1-4c})/2$$

Si analizamos la estabilidad de los puntos fijos, debemos evaluar cada punto fijo en la derivada de la función $f'(x) = 2x$ de donde obtenemos:

$$f'(x_1) = 1 + \sqrt{1-4c} \quad f'(x_2) = 1 - \sqrt{1-4c}$$

Las órbitas de los puntos que se encuentran entre $(-\infty, -x_1) \cup (x_1, \infty)$ divergen a ∞ , mientras que las órbitas de los valores del intervalo $(-x_1, x_1)$ son atraídas al punto fijo x_2 , para ciertos valores del parámetro c . En la figura III.3 a) se muestra un ejemplo de este caso.

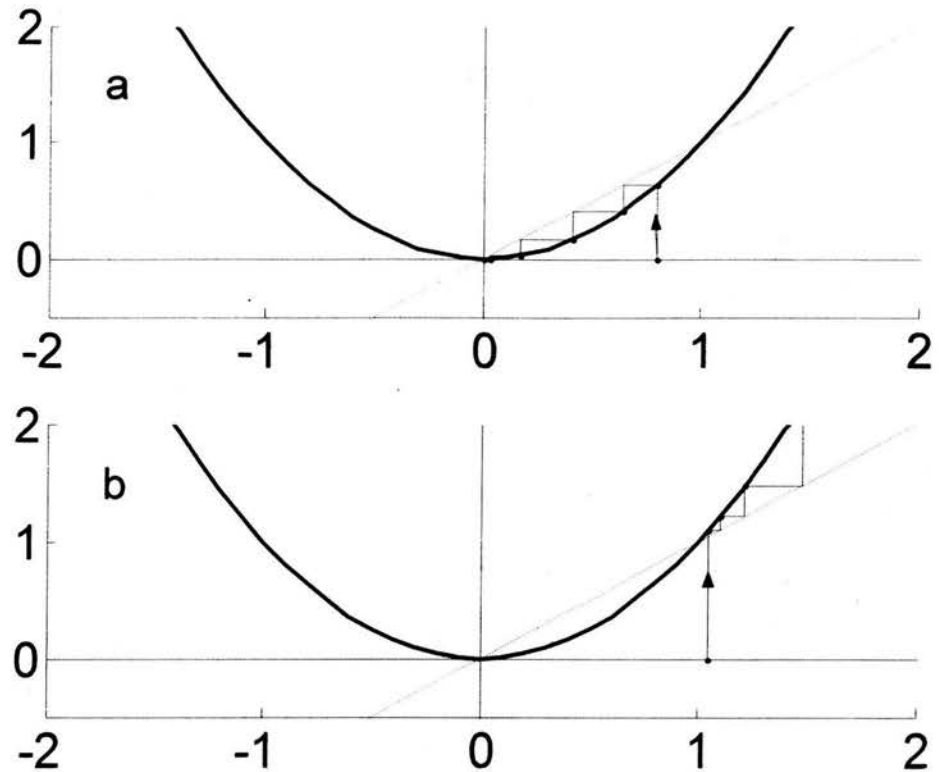


Figura III.3 Las gráficas siguientes corresponden a la función cuadrática con valor del parámetro $c=0$. Observamos que la parábola corta a la recta $y = x$ en dos puntos, uno de ellos es un atractor y el otro es un repulsor. En el panel a) se presenta la órbita para la condición inicial $x = 0.8$ la cual converge al atractor. En el panel b) se muestra la órbita para la condición inicial $x = 1.2$ la cual es repelida por el mismo punto.

Podemos verificar algebraicamente para que valores de c el punto fijo x_2 es un atractor. Según el criterio descrito anteriormente debe cumplirse que:

$$|f'(x_0)| < 1$$

$$|1 - \sqrt{1 - 4c}| < 1$$

$$-1 < 1 - \sqrt{1 - 4c}$$

$$\sqrt{1 - 4c} < 2$$

$$1 - 4c < 4$$

$$-3/4 < c$$

$$1 - \sqrt{1 - 4c} < 1$$

$$0 < \sqrt{1 - 4c}$$

$$0 < 1 - 4c$$

$$c < 1/4$$

Para los valores de c en el intervalo $(-3/4, 1/4)$ el punto $x_2 = (1 - \sqrt{1-4c})/2$ es un punto fijo atractor. Podemos comprobar que el punto fijo x_1 es un repulsor para cualquier valor de $C < 1/4$ ya que

$$|1 + \sqrt{1-4c}| > 1$$

$$1 + \sqrt{1-4c} > 1 \qquad 1 + \sqrt{1-4c} < -1$$

$$c < 1/4 \qquad \sqrt{1-4c} < -2$$

no tiene solución.

Una situación interesante se presenta cuando la derivada de un punto fijo es igual a -1 . Lo cual sucede en:

$$1 \pm \sqrt{1-4c} = -1$$

$$1 + \sqrt{1-4c} = -1$$

$$\sqrt{1-4c} = -2$$

no tiene solución

$$1 - \sqrt{1-4c} = -1$$

$$\sqrt{1-4c} = 2$$

$$c = -3/4$$

Cuando el parámetro c toma el valor de $-3/4$, cambia la condición del punto fijo x_2 , este valor marca cambios importantes en la dinámica del sistema.

Resumiendo:

Hasta este momento observamos los siguiente en la familia $Q_c(x) = x^2 + c$:

- a) Si $c > 1/4$, no hay puntos fijos y la órbita de cualquier valor diverge a ∞ .
- b) Si $c = 1/4$, tenemos un punto fijo neutro en $x = 1/2$.
- c) Si $c < 1/4$, encontramos 2 puntos fijos x_1 (valor positivo) y x_2 (valor negativo), donde x_1 es un repulsor, y x_2 es atractor para valores del parámetro en el intervalo $-3/4 < C < 1/4$.

d) Cuando $c = -3/4$ el punto fijo atractor x_2 se convierte en punto fijo neutro.

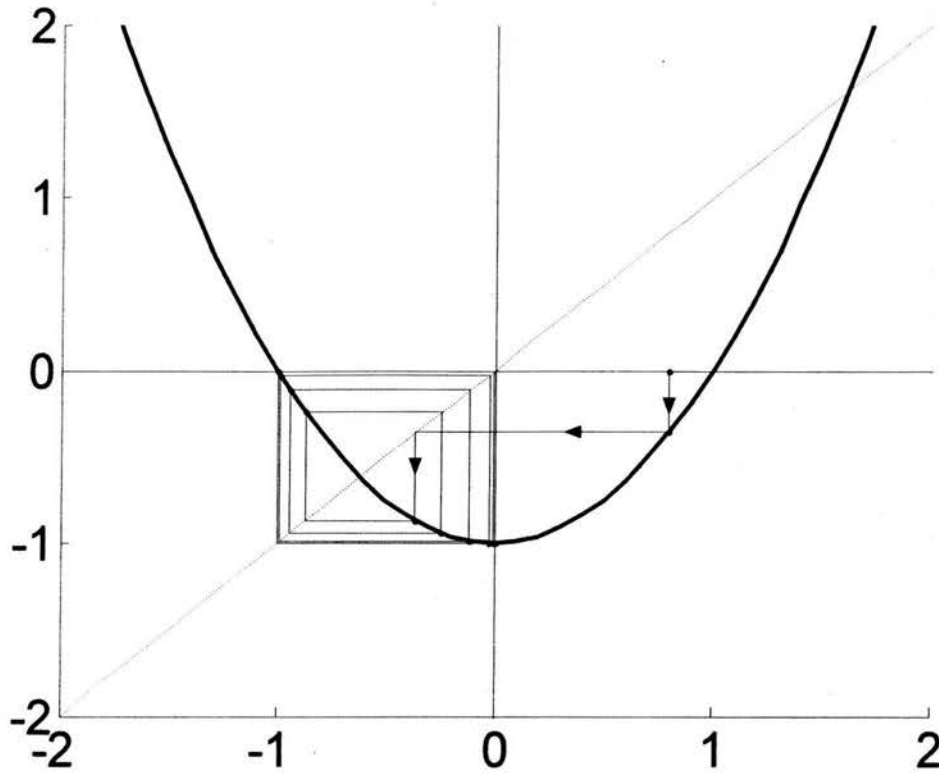


Figura III.4 La gráfica corresponde a la función cuadrática con valor del parámetro $c = -1$. Se presenta la órbita de la condición inicial $x = 0.8$, la cual converge a un ciclo de periodo 2.

Cuando $c=1/4$, marca el cambio de un punto fijo a 2 puntos fijos. A esto se le conoce como una bifurcación. Bifurcación significa división en dos y esto es lo que le ocurre a los puntos fijos de Q_c . Otro valor que indica cambios importantes es $c = -3/4$. ¿Cuáles son estos cambios? ¿Qué sucede si $c < -3/4$? El valor $c = -3/4$ marca un cambio en la estructura de los puntos fijos, sabemos que para valores mayores que $-3/4$ teníamos 2 puntos fijos, uno de los cuales era atractor y el otro repulsor.

Para valores c menores que $-3/4$ se modifica la estabilidad de los puntos fijos existentes y aparece un ciclo atractor de periodo 2.

Estudiamos en el capítulo anterior que los puntos que forman un ciclo de periodo n son puntos fijos de la n -ésima iteración de la función, entonces en la función cuadrática cuando el parámetro c toma valores menores que $-3/4$ los puntos del ciclo de periodo 2 que nace son puntos fijos de la segunda iteración de la función.

Los puntos fijos de la segunda iteración de la función son:

$$\begin{aligned}
 Q^2(x) &= x \\
 Q(Q(x)) &= x \\
 Q(x^2 + c) &= x \\
 (x^2 + c)^2 + c &= x \\
 x^4 + 2x^2c + c^2 + c &= x \\
 x^4 + 2x^2c - x + c^2 + c &= 0
 \end{aligned}$$

Ecuación que es difícil de solucionar, pero dado que conocíamos dos raíces de antemano, tenemos que:

$$\frac{x^4 + 2x^2c - x + c^2 + c}{x^2 - x + c} = x^2 + x + (c + 1)$$

Entonces debemos centrar nuestra atención en resolver esta nueva ecuación.

Ahora la ecuación $x^2 + x + c + 1 = 0$ tiene como raíces a:

$$x_3 = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4(c + 1)}}{2} \quad x_4 = \frac{-1 - \sqrt{1 - 4(c + 1)}}{2}$$

Si deseamos dos soluciones reales, $[1 - 4(c + 1)]$ debe ser mayor que cero, entonces $-4c - 3 > 0$ de donde $-4c > 3$, es decir $c < -3/4$.

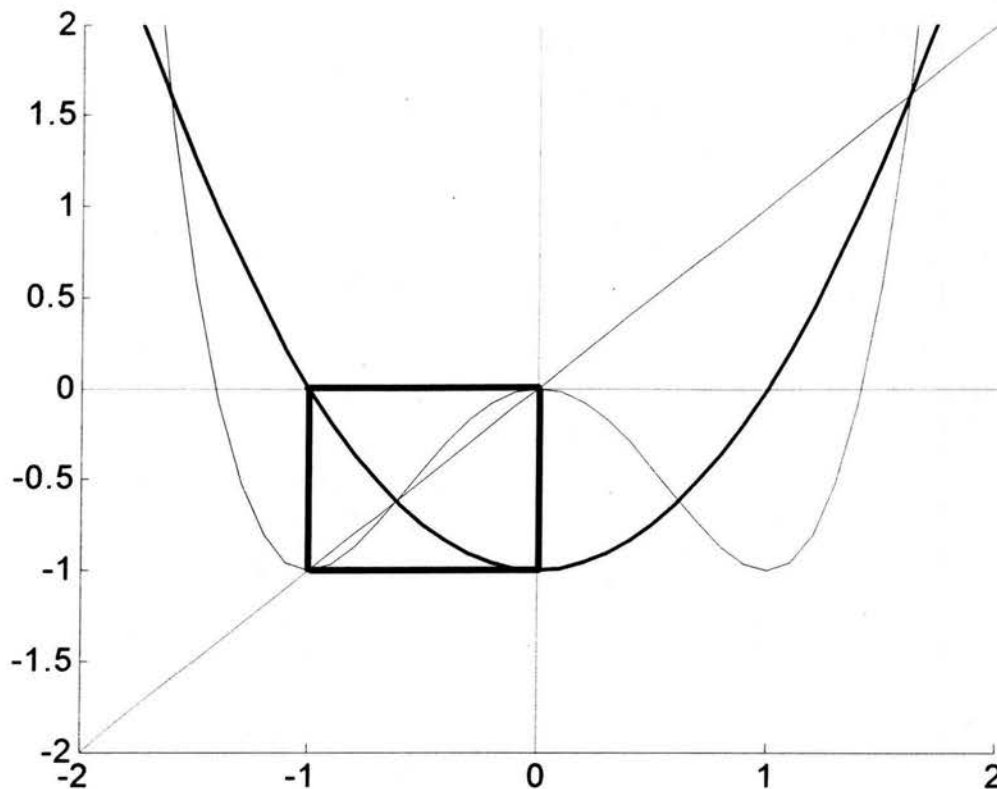


Figura III.5 La gráfica corresponde a la segunda iteración de la función cuadrática, ésta tiene dos puntos fijos más que la función original los cuales corresponden a un ciclo de periodo 2.

El ciclo periódico está formado por los valores x_3 y x_4 . Para analizar la estabilidad del ciclo de periodo 2 formado por los valores x_3 y x_4 , utilizamos los resultados estudiados con anterioridad. Primero verificamos el valor de la derivada de la segunda iteración de Q , evaluada en un punto del ciclo, sabemos que este valor es equivalente al número obtenido del producto de la derivada de la función en cada punto del ciclo.

Como $Q_c'(x) = 2x$ y la órbita cíclica $\{x_3, x_4, x_3, x_4, \dots\}$ tenemos que:

$$(Q_c^2)'(x_3) = Q_c'(x_3) \cdot Q_c'(x_4)$$

$$(Q_c^2)'(x_3) = 2 \frac{(-1 + \sqrt{-4c - 3})}{2} \cdot 2 \frac{(-1 - \sqrt{-4c - 3})}{2}$$

$$(Q_c^2)'(x_3) = +1 - (-4c - 3)$$

$$(Q_c^2)'(x_3) = 4c + 4$$

Para que el ciclo sea atractor, debe suceder que:

$$|4c + 4| < 1$$

$$-1 < 4c + 4 < 1$$

$$-1 < 4c + 4$$

$$-5/4 < c$$

$$4c + 4 < 1$$

$$c < -3/4$$

El ciclo de periodo 2 que surge para valores de $c \in (-5/4, -3/4)$ es un ciclo atractor.

Otra observación importante es que el punto fijo x_2 que era atractor para valores de c en el intervalo $(-3/4, 1/4)$ es repulsor en el intervalo $(-5/4, -3/4)$.

$$|1 - \sqrt{1 - 4c}| > 1$$

$$1 - \sqrt{1 - 4c} > 1$$

$$\sqrt{1 - 4c} > 0$$

$$\sqrt{1 - 4c} < 0$$

no tiene solución

$$1 - \sqrt{1 - 4c} < -1$$

$$2 < \sqrt{1 - 4c}$$

$$4 < 1 - 4c$$

$$c < -3/4$$

Resumiendo: Hasta el momento la función $Q_c(x) = x^2 + c$, tiene el siguiente comportamiento:

- a) Si $c = 1/4$ tenemos un punto fijo neutro.
- b) Si c toma valores en el intervalo $(-3/4, 1/4)$, hay dos puntos fijos, uno de ellos es un repulsor y el otro es un atractor y no existen ciclos de periodo 2.
- c) Si $c = -3/4$, este valor de c marca una segunda bifurcación, es decir un cambio en la dinámica del sistema, el punto fijo atractor, se convierte en punto fijo neutro y surge un ciclo de periodo dos.
- d) Cuando c toma valores entre $(-5/4, -3/4)$ el ciclo de periodo dos es atractor, y además el punto fijo que era atractor se vuelve repulsor en este intervalo.

III.2. Bifurcaciones.

Hasta este momento en el estudio de la función $Q_c(x) = x^2 + c$ hemos encontrado los valores de c para los cuales la función no tiene puntos fijos, tiene un punto fijo, tiene dos puntos fijos y un ciclo de periodo dos. Encontramos también los valores de c en donde se dan exactamente estos cambios y los llamamos bifurcaciones. Podemos decir que una bifurcación es el surgimiento de patrones adicionales en el comportamiento de un sistema. Al variar el valor del parámetro en una familia de funciones, una bifurcación se da en el valor que marca cambios cualitativos en el comportamiento de las órbitas.

En el análisis de la función $Q_c(x) = x^2 + c$ encontramos que los valores de $c = 1/4$ y $c = -3/4$, señalan cambios en la estructura de los puntos fijos, es decir en estos valores ocurre una bifurcación, sin embargo el cambio que ocurre en ambos casos es diferente.

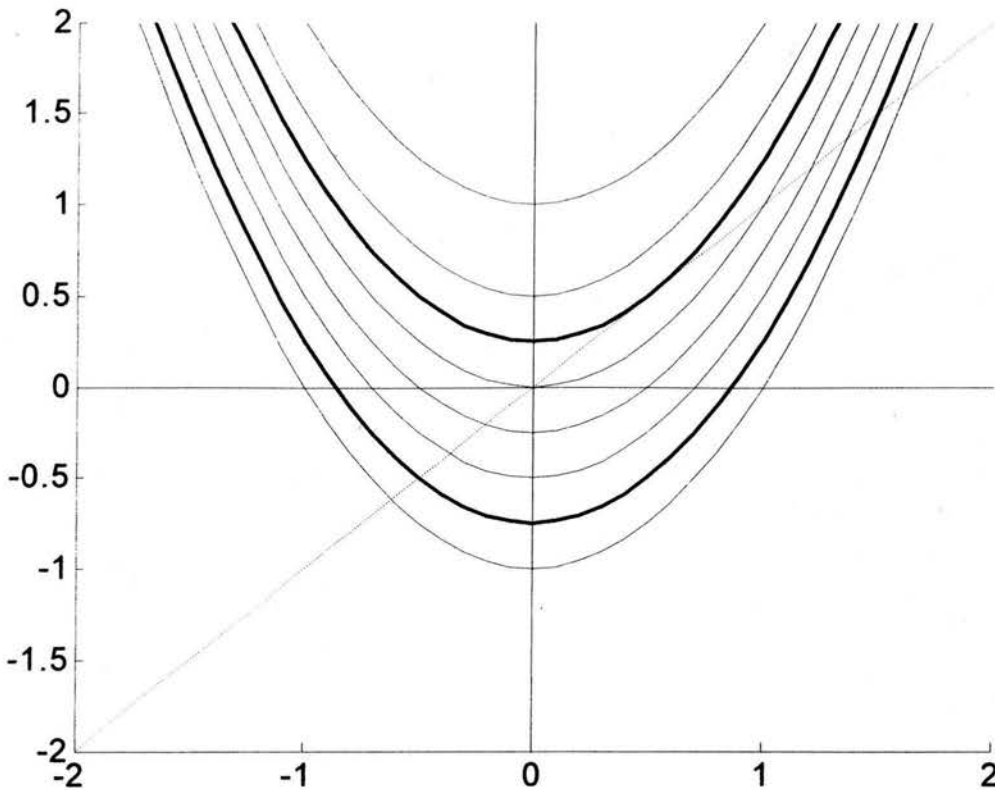


Figura III.6 Las curvas corresponden a la gráfica de la función cuadrática, dados diversos valores del parámetro. Las curvas oscuras corresponden a los valores particulares $c = 1/4$ y $c = -3/4$.

La bifurcación que ocurre en $c = 1/4$ es de punto silla, mientras que en $c = -3/4$ ocurre una bifurcación de doblamiento de periodo. A continuación describiremos brevemente estas bifurcaciones:

Bifurcación de Punto Silla.

Decimos que una bifurcación de punto silla ocurre en λ_0 , si para algún $\varepsilon > 0$ sucede que:

- 1º Para $\lambda \in (\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0)$ no hay puntos fijos en la función.
- 2º En λ_0 la función tiene un único punto fijo.

3° Para $\lambda \in (\lambda_0, \lambda_0 + \varepsilon)$ la función tiene 2 puntos fijos, de los cuales uno es atractor y el otro repulsor.

La explicación geométrica de esta bifurcación está en que el parámetro λ señala los desplazamientos verticales de la función $Q_c(x)$, cuando $\lambda = \lambda_0$ marca donde la gráfica de la función es tangente a la recta identidad. Esta bifurcación también se conoce como bifurcación tangencial.

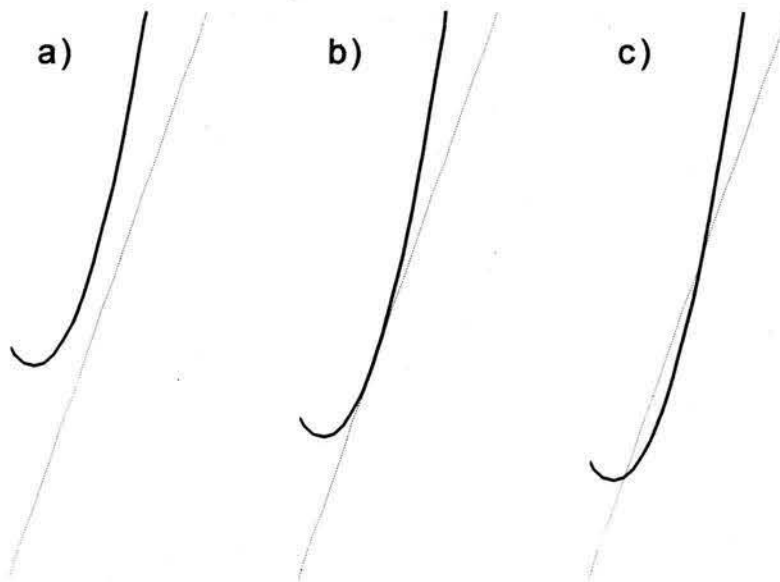


Figura III.7 La curva representa la gráfica de la función, la recta corresponde a $y = x$. En el panel a) se presenta el caso cuando $\lambda_0 < \lambda$, en el panel b) $\lambda_0 = \lambda$ corresponde al valor para el cual se da la bifurcación, en el c) $\lambda_0 > \lambda$ tenemos dos puntos fijos.

Observemos que en el caso donde $\lambda = \lambda_0$, hay un punto fijo, donde la pendiente de la tangente es 1. Esta es una condición necesaria para tener una bifurcación de este tipo, sin embargo no es suficiente ya que por ejemplo en la función $f(x) = x$ en

cada punto la pendiente de la tangente es uno y sin embargo ninguno de ellos señala una bifurcación, para no incluir este caso, es necesario pedir que $f'(x_0)$ sea diferente de 0, con esto garantizamos que la función sea cóncava y por lo tanto tendremos el cambio de 1 a 2 puntos fijos.

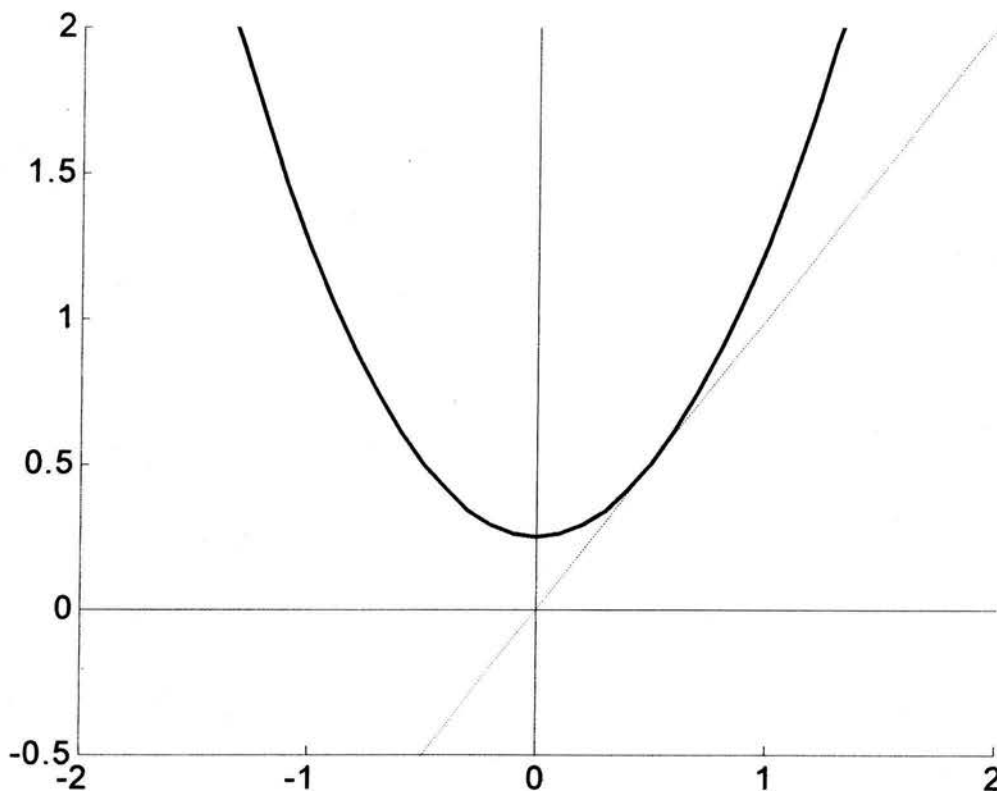


Figura III.8 La gráfica corresponde a la función cuadrática con parámetro $c = \frac{1}{4}$, valor en el ocurre una bifurcación de punto silla.

En la figura III.7 a) se presenta la gráfica cuando $\lambda < \lambda_0$, la figura III.7 b) corresponde a $\lambda = \lambda_0$ y la figura III.7 c) la gráfica es para valores $\lambda > \lambda_0$. Observemos en la figura b) que P es un punto cuya tangente a la gráfica tiene pendiente uno, como la curva es cóncava por lo menos en algún intervalo

alrededor de P , las tangentes de un lado serán menores que 1 y del otro lado mayores que uno, con lo cual aseguramos que cuando la función cruza la recta uno de los puntos es atractor y el otro repelente.

Podemos representar esta situación en un diagrama de bifurcación. En la figura III.9 se presenta el diagrama de bifurcación, observamos que está formado por un par de ejes coordenados, en los cuales graficamos el valor del parámetro λ sobre el eje x y los puntos fijos correspondientes a cada λ sobre el eje y . En la gráfica observamos que el punto $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ señala que para $\lambda = \frac{1}{4}$ tenemos un único punto fijo $x = \frac{1}{2}$. Para $\lambda=0$, tenemos los puntos $(0,0)$ y $(0,1)$ lo cual indica que cuando el parámetro es cero tenemos dos puntos fijos $x=0$ y $x=1$.

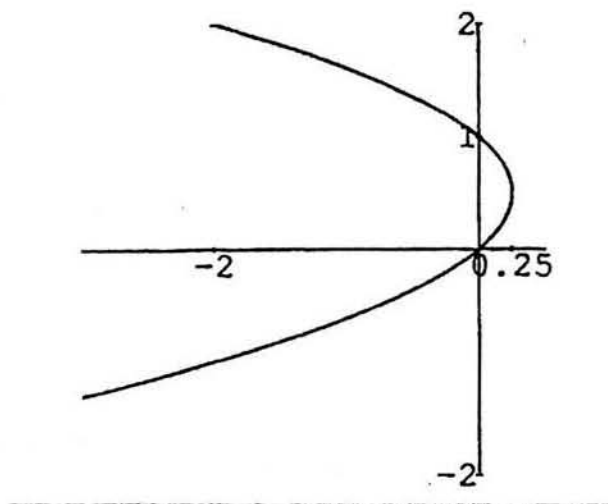
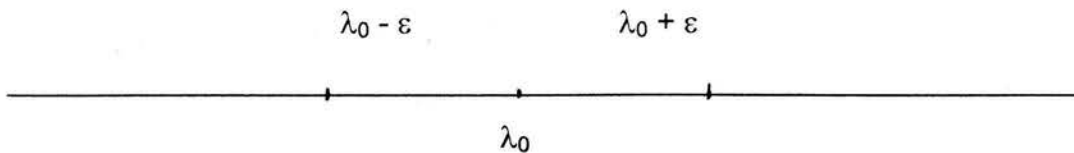


Figura III.9 La gráfica es un diagrama de bifurcaciones. En el eje horizontal se ubican los valores del parámetro λ y en el eje vertical los puntos fijos correspondientes para cada valor.

Bifurcación de doblamiento de periodo.

En la función cuadrática $Q_c(x) = x^2 + c$, para $c = -3/4$ ocurre una bifurcación de doblamiento de periodo.

Una bifurcación de doblamiento de periodo ocurre en un valor λ_0 , si existe un intervalo abierto alrededor de λ_0 y una $\varepsilon > 0$, para las cuales sucede que:



- 1.- Para valores en el intervalo $(\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0)$, p es un atractor y no hay ciclos de periodo dos.
- 2.- En el intervalo $(\lambda_0, \lambda_0 + \varepsilon)$ el punto fijo p que era atractor se convierte en repulsor y surge un ciclo de periodo 2 atractor.
- 3.- Si nos acercamos con valores λ a λ_0 en el intervalo $(\lambda_0, \lambda_0 + \varepsilon)$ los puntos que forman el ciclo periódico se acercan a p .

Esta bifurcación la podemos entender geoméricamente con las gráficas de la figura III.10, donde se muestran las mismas para diferentes valores de c :

a) $c > -3/4$, b) $c = -3/4$ c) $c < -3/4$. En estas gráficas la línea punteada representa la función identidad, la curva oscura es la gráfica de la función $Q_c(x) = x^2 + c$ para los valores de c iguales a $-1/4$, $-3/4$ y -1 , respectivamente. Las curvas delgadas representan la segunda iteración de la función $Q_c^2(x)$. El segmento de recta punteados es la tangente a $Q_c(x)$ en el punto fijo p .

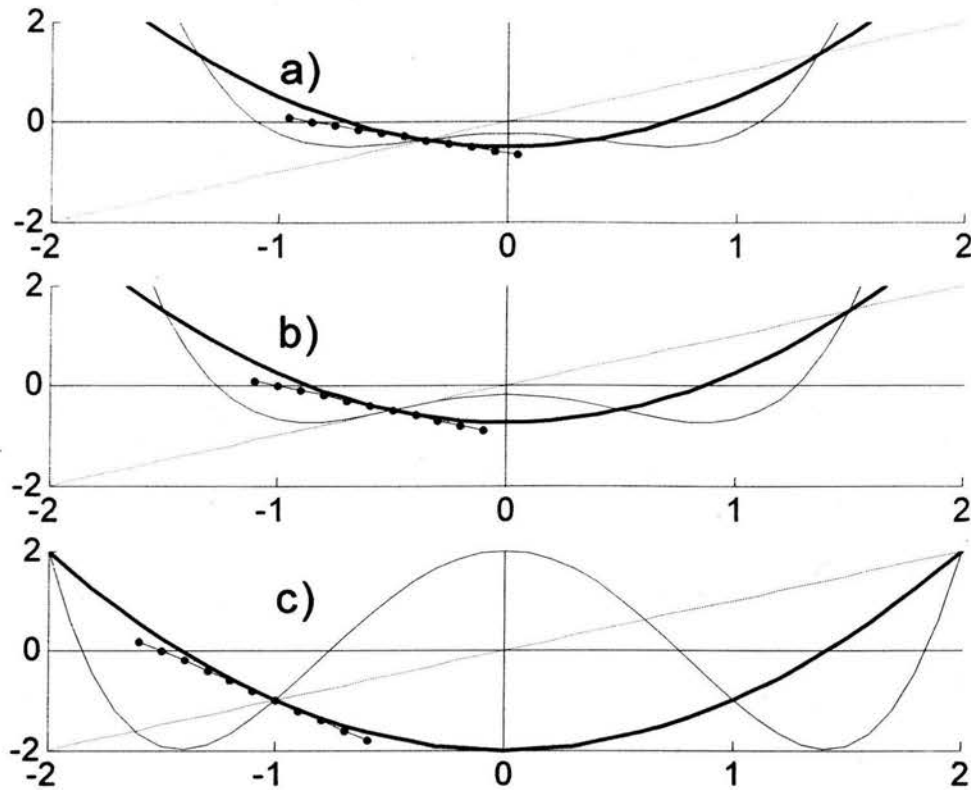


Figura III.10 En las siguientes gráficas la curva oscura representa a la función cuadrática con valor del parámetro a) $c > -3/4$, b) $c = -3/4$, c) $c < -3/4$. La curva suave en cada caso es la segunda iteración de la función. La recta punteada es la gráfica de $y = x$. El segmento de recta trazado en cada caso es la recta tangente a la función. La pendiente de este segmento de recta tiene valor absoluto menor que 1 en el panel a), es igual a -1 en el panel b) y tiene un valor absoluto mayor que 1 en el panel c).

A continuación se presentan algunas observaciones importantes de las gráficas en la figura III.10:

- Una bifurcación de doblamiento de periodo se da cuando la recta tangente a un punto fijo p es perpendicular a la recta identidad, es decir cuando $Q'_c(p) = -1$.
- En la figura III.10 a) la tangente al punto fijo p tiene pendiente negativa m tal que $m > -1$, por lo cual sabemos que este punto es un atractor, en la figura III.10 b) la tangente de p coincide con la recta $f(x) = -x$, en la figura III.10 c) la recta tangente

tiene pendiente negativa menor que -1 , es decir tiene una pendiente cuyo valor absoluto es mayor que 1 y por lo tanto, el punto fijo es un repulsor.

- Si observamos con atención la $Q_c^2(x)$ en la gráfica de la figura III.10 b), notamos que esta función tiene como recta tangente en el punto p a la recta $y = x$, es decir

- $(Q_c^2)'(x) = 1$, lo cual podemos verificar algebraicamente:

$$(Q_c^2)'(x) = [Q_c'(Q_c(x))] [Q_c'(x)]$$

$$\text{como } Q_c(p) = p \text{ y } Q_c'(p) = -1$$

$$(Q_c'(p)) (Q_c'(p)) = (-1) (-1) = 1$$

La pendiente de $Q_c^2(x)$ en p es menor que uno en la gráfica de la figura III.10 a) y mayor que uno en la gráfica de la figura III.10 c), la cual sugiere que la gráfica de $Q_c^2(x)$ se tuerce alrededor de la recta $f(x) = x$, generando 2 puntos fijos adicionales en $Q_c^2(x)$.

Cuando una bifurcación de doblamiento de periodo tiene lugar, el cambio de un punto fijo atractor a dos puntos fijos y a un ciclo de periodo dos atractor, no es exclusivo, también puede suceder que un ciclo de periodo 2^n pasa de atractor a repulsor en una bifurcación y ceda su lugar a un nuevo ciclo de periodo 2^{n+1} atractor.

La función cuadrática $Q_c(x) = x^2 + c$ pasa por una sucesión de bifurcaciones de doblamiento de periodo al variar el parámetro en ciertos valores menores a -1 , sin embargo llega un valor de c en el cual la dinámica cambia.

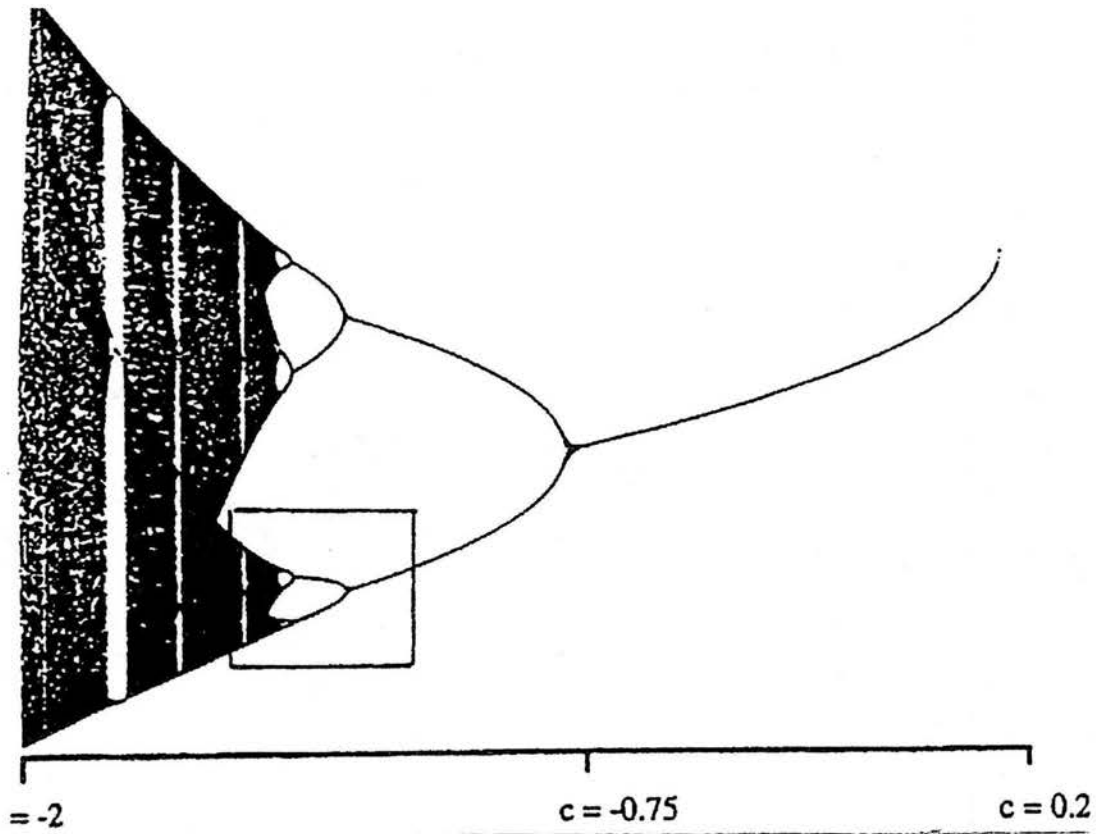


Figura III.11 Este dibujo es un diagrama de bifurcaciones, en el eje horizontal se ubican valores del parámetro c y en el eje vertical se muestran las órbitas a las cuales son atraídas casi todos los valores del intervalo $[x_0, x_0]$ donde $x_0 = 1 + \sqrt{(1 - 4c)}/2$.

Esta cascada de bifurcaciones y su transición al caos se puede representar utilizando un diagrama de órbitas, este diagrama es un intento por capturar la dinámica general de la familia $Q_c(x) = x^2 + c$.

En la figura III.11 se presenta la gráfica de diagrama de órbitas, en la recta horizontal representamos los valores del parámetro c . Para cada valor de c , tomamos como condición inicial a $x = 0$ y desarrollamos su órbita, iterando un número suficiente de veces hasta que la órbita muestra a que órbita o cuál zona del dominio es atraída.

Algunas observaciones interesantes sobre el diagrama son:

- En él observamos únicamente las orbitas periódicas atractoras.
- Al tomar c valores más pequeños que -1 se observa una sucesión de bifurcaciones de doblamiento de periodo.
- Las franjas blancas de la gráfica se conocen como ventanas de periodo n .

Un dato interesante es que si esbozamos el diagrama de órbitas para otras condiciones iniciales e incluso para otras funciones que experimentan bifurcaciones de doblamiento de periodo, éstas se dan en la misma razón geométrica, esta razón es universal y se conoce como la constante de Feigenbaum y es $4.669211660910\dots$ [10].

Recordemos que en la función cuadrática habíamos encontrado la primera bifurcación tangente en $x=1/4$, llamemos A_0 a este valor. En $x=-3/4$ se da la primera bifurcación de doblamiento de periodo, llamémoslo A_1 . De la misma forma $x=-5/4$ será A_2 valor que marca la tercera bifurcación que también es de doblamiento de periodo, así A_n marca la n -ésima bifurcación de doblamiento de periodo.

El segmento $A_0 A_1$ contiene los valores del parámetro para los cuales tenemos un ciclo atractor de periodo uno, cuya longitud es $A_0 - A_1$. Los valores del parámetro para los cuales encontramos ciclos de periodos dos atractores, están contenidos en el intervalo $A_1 A_2$ cuya longitud es $A_1 - A_2$ segmento cuya longitud es menor que el anterior. Continuando este procedimiento observamos que la longitud de los intervalos es cada vez menor en la sucesión de bifurcaciones de doblamiento de periodo.

Si llamamos f_i a la razón entre las longitudes de dos intervalos consecutivos, tenemos que:

$$f_i = (A_i - A_{i+1}) / (A_{i+1} - A_{i+2}).$$

Si calculamos el límite de f_i cuando i tiende a infinito encontramos el valor de delta, la constante de Feigenbaum.

$$\delta = \lim f_i \text{ cuando } i \rightarrow \infty. [3]$$

III.3.¿Qué cambios hay cuando el parámetro c es igual a -2 ?

En el estudio de la dinámica de la función $Q_c(x) = x^2 + c$, sabemos que si el parámetro c toma valores mayores que $-5/4$ encontramos algunos puntos periódicos, sin embargo cuando c se acerca a -2 hay una infinidad de puntos periódicos de todos los periodos.

¿Cuál es el cambio que se da cuando el parámetro c toma valores cercanos a -2 ? Para entender este cambio analizaremos que sucede en la función si le asignamos al parámetro el valor de -2 . En la figura III.12 se presenta la gráfica de la función para $c = -2$.

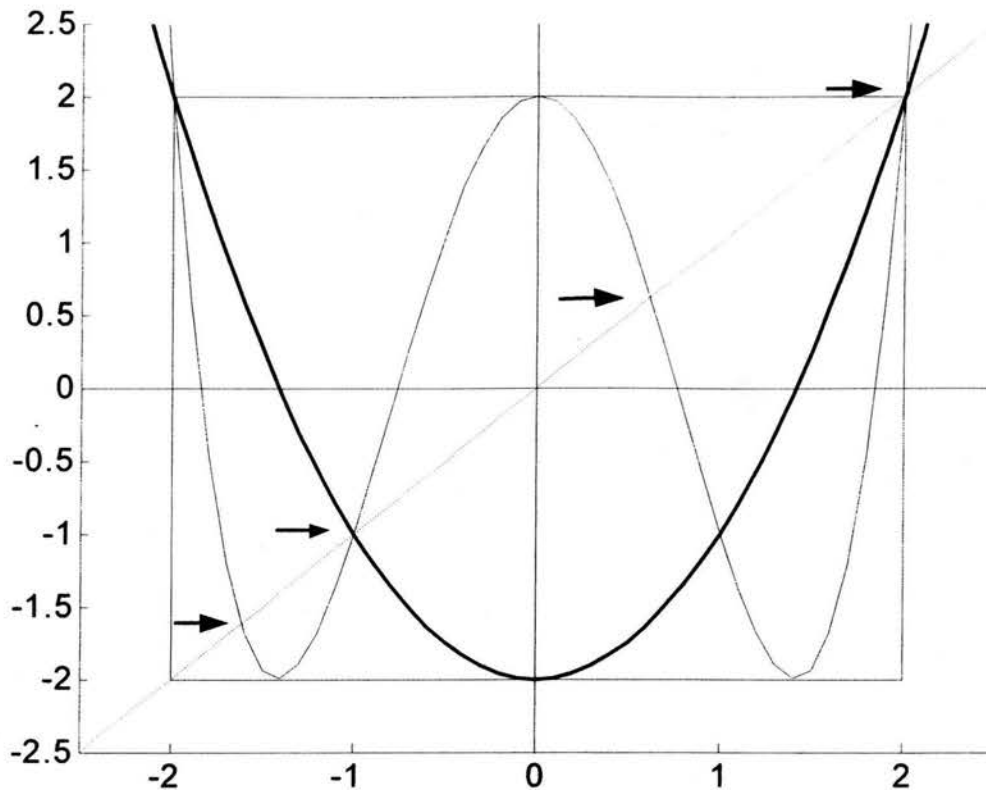


Figura III.12 La curva obscura es la gráfica de la función cuadrática con parámetro $c = -2$, la curva suave es la gráfica de la segunda iteración de la función. Las flechas señalan los puntos fijos.

En la gráfica anterior el cuadrado tiene como vértices los puntos $(2,2)$, $(-2,2)$, $(2, -2)$ y $(-2, -2)$. Llamemos I al intervalo $[-2,2]$ sobre el eje horizontal. La órbita de cualquier número que no sea elemento de I diverge a infinito.

¿Qué sucede con las órbitas de los elementos de I ? Para comprender este comportamiento analizaremos la gráfica anterior, la curva gruesa representa a la función $Q_c(x) = x^2 - 2$ y la curva delgada corresponde a la gráfica de la segunda iteración de la misma, es decir $Q_c^2(x)$

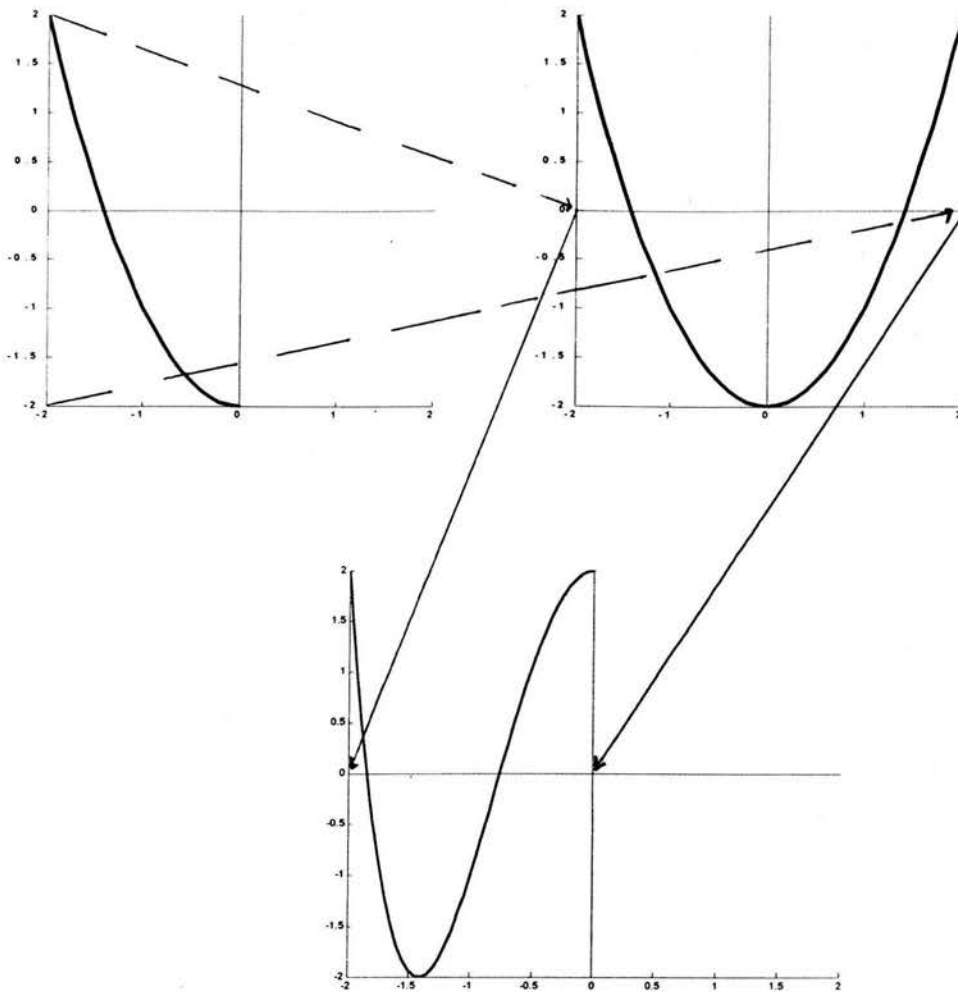


Figura III.13 Construcción de la gráfica de $Q_c^2(x)$ para $c = -2$.

La figura III.13 corresponde a la función $Q_{-2}(x)$ en el intervalo $[-2, 0]$, en ella observamos una curva suave estrictamente decreciente y por lo tanto inyectiva, además como es una función continua, cubre todos los valores del intervalo $[-2, 2]$ sobre el eje vertical.

Al componer la función consigo misma, el dominio de la composición es el dominio de $Q_{-2}(x)$, por lo que la gráfica de la primera iteración semeja un poco a la parábola original, comprimida en el intervalo $[-2, 0]$, como se muestra en la figura 2 c). Una situación análoga sucede al iterar la función en el intervalo $[0, -2]$.

Las órbitas de los elementos en I se mantienen acotadas en el cuadrado. Podemos trazar $Q_{-2}^2(x)$ a partir de la gráfica de $Q_{-2}(x)$ de una forma muy sencilla. Observando los datos de la siguiente tabla podemos hacer algunas observaciones:

x_0	$Q_{-2}(x)$	$Q_{-2}^2(x)$	$Q_{-2}^3(x)$
2	2	2	2
-2	2	2	2
0	-2	2	2
$\pm\sqrt{2}$	0	-2	2

- En $x=2$ tenemos un punto fijo de la función, punto que se mantendrá en este lugar bajo cualquier iteración. En la figura III.12 observamos que este punto es también es un punto máximo de la porción de la parábola acotada en el cuadrado.
- Si la condición inicial es -2 , en la primera iteración llegamos a 2, punto fijo que no cambiara su condición bajo ninguna iteración. Geométricamente el punto $(-2,2)$ es otro máximo de la parábola acotada en el cuadrado, punto que sostiene su condición de máximo bajo cualquier iteración.
- Si partimos de $x=0$, la primera iteración nos lleva al punto $(0,-2)$ punto mínimo de la parábola, mismo que en la tercera iteración va a dar al punto $(-2,2)$, es decir, el punto mínimo de $Q_{-2}(x)$ se convirtió en un máximo de $Q_{-2}^2(x)$ en la región acotada por el cuadrado.
- Al tomar como condición inicial los valores determinados por la intersección de la parábola con el eje horizontal, asociamos este valor con 0 en la primer

iteración, el 0 con -2 en la segunda iteración, o sea que un punto de la gráfica $Q_{-2}(x)$ que cruce al eje horizontal, será un punto mínimo de la gráfica $Q_{-2}^2(x)$.

Utilizando las observaciones hechas anteriormente, podemos esbozar la gráfica de $Q_c^3(x)$ a partir de la gráfica de $Q_c^2(x)$.

En la figura III.14 la curva delgada es la gráfica de $Q_c^2(x)$. La curva gruesa es la gráfica de $Q_c^3(x)$.

Los puntos donde la curva delgada, que corresponde a la gráfica $Q_c^2(x)$ corta al eje horizontal, se transforman en mínimos de la función en la siguiente iteración. Los puntos mínimos de la misma, se transforman en máximos para la tercera iteración. Por último los puntos máximos de la segunda iteración conservan su condición de máximos en la tercera iteración.

De los análisis que hemos hecho sabemos que en el intervalo $[-2,0]$ la función $Q_{-2}(x)$ es decreciente, por lo que corta a la recta identidad en un solo punto, al graficar $Q_{-2}^2(x)$ en el mismo intervalo la función semeja un poco una parábola estrechada que cortara a la recta identidad en dos puntos. Situación que se repite en el intervalo $[0,2]$.

En la n -ésima iteración la función corta a la recta identidad en 2^n puntos, lo que nos lleva a varios ciclos de periodo n de la función $Q(x)$, lo cual se puede enunciar como sigue:

“La función Q_{-2} tiene al menos 2^n puntos periódicos de periodo n en el intervalo I , que no son atractores”.

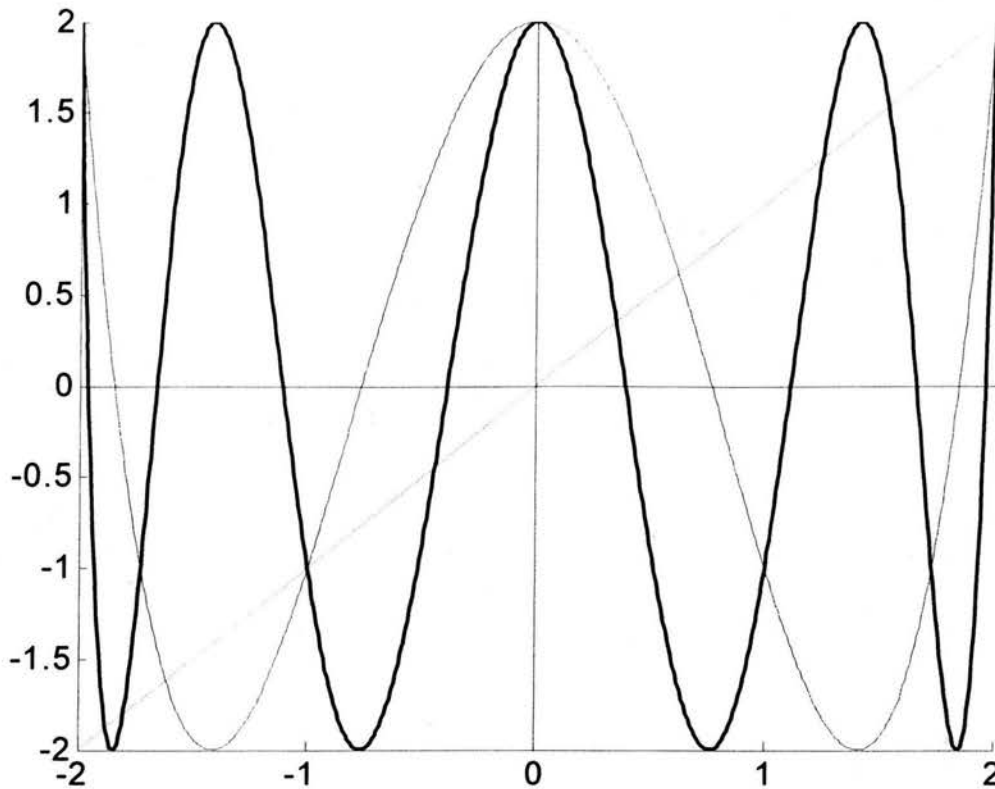


Figura III.14 La curva delgada corresponde a la segunda iteración de la función cuadrática con parámetro $c = -2$. La curva gruesa es la tercera iteración de la misma función.

Este resultado nos garantiza la existencia de una infinidad de ciclos periódicos en Q_{-2} en el intervalo I .

Podemos justificar el hecho de que estos ciclos no son atractores con un argumento geométrico, ya sabíamos que el problema de la estabilidad dependía de la pendiente de la tangente en el punto fijo. Al iterar la función $Q_{-2}(x)$, obtenemos la gráfica de una curva ondulada que cortará a la recta $y = x$ en 2^n puntos, cuya pendiente en valor absoluto será siempre mayor que 1.

Para una demostración formal puedes consultar la página 121 del capítulo de caos de "A first course in chaotic dynamical systems" de Devaney [4].

En conclusión, podemos ver que un esquema de cálculo de apariencia simple, como iterar la función cuadrática, puede llevar a comportamientos extremadamente complicados, comportamientos a los que se llega después de múltiples cambios cualitativos en el forma de las soluciones al variar el valor de un parámetro. En el caso de los sistemas cardiacos también pueden darse comportamiento extremadamente complicados, que algunos autores no vacilan en llamar caóticos. En el siguiente capítulo veremos cómo construir un mapeo a partir de la función de recuperación del tejido cardiaco y cómo ocurre una bifurcación de un comportamiento normal a uno alternante.

CAPITULO IV

Mapeos Cardiacos

En los capítulos anteriores describimos el comportamiento de fenómenos recursivos, es decir fenómenos que se modelan con funciones cuyo valor en un momento depende del valor de la función en el momento anterior. En estas funciones los cambios en la variable de interés se dan en tiempos discretos, la unidad temporal puede representar años como el caso de las poblaciones estudiadas anteriormente o fracciones de segundo en algunos procesos físicos o químicos.

Se ha investigado bajo que circunstancias la actividad eléctrica de las células cardiacas puede desencadenar ritmos periódicos y no periódicos, incluyendo alternancias y fibrilación ventricular. En este capítulo estudiaremos el comportamiento de los potenciales de acción que pueden desplegar las células cardiacas cuando un evento repentino las perturba fuera de su condición estable.

En el primer capítulo estudiamos la anatomía y fisiología del corazón incluyendo la actividad eléctrica de las células cardiacas, en particular los potenciales de acción. Recordemos que al perturbar suficientemente fuerte una célula obtenemos una respuesta que llamamos potencial de acción. El cual es el intercambio de carga eléctrica entre el interior y el exterior celular.

Las células cardiacas tienen una diferencia de potencial entre el interior y el exterior celular de aproximadamente -90 mV, que al ser perturbadas eléctricamente sube a $+20$ mV y luego baja nuevamente a la diferencia inicial. Estos cambios en la diferencia de potencial son provocados por la apertura de canales especiales en la membrana celular y el movimiento principalmente de iones de potasio, calcio y sodio a través de los mismos.

Los cambios en el potencial de acción son como sigue:

Reposo. Decimos que la membrana está polarizada por el estado negativo existente en su interior.

Depolarización. La membrana permite el paso de una gran cantidad de iones de sodio + y calcio al interior celular, lo cual cambia el potencial de negativo a positivo.

Repolarización. Se cierran los canales que permitieron el paso de iones de sodio y se abren los canales que permiten el paso de potasio, lo cual restablece el potencial negativo.

En las células cardíacas la membrana no se repolariza inmediatamente, en este caso el potencial se mantiene en una meseta cerca del valor más alto por algunos milisegundos. Si la célula es perturbada durante la meseta no se obtiene respuesta, al periodo en el que la célula no responde se le conoce como periodo refractario, llamaremos θ a este intervalo de tiempo.

En la figura IV.1 se presenta la gráfica de un potencial de acción.

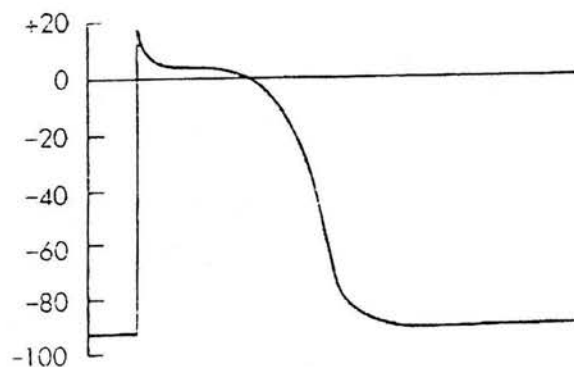


Figura IV.1 Potencial de acción típico registrado al perturbar células ventriculares.

Al perturbar periódicamente a una célula la respuesta obtenida no es siempre la misma, es decir el potencial de acción cardíaco cambia al variar la frecuencia de estimulación. La modificación que puede tener un potencial de acción se da

en su duración y gráficamente lo podemos representar como el ancho de la meseta.

Los cambios en la morfología de los potenciales de acción se aprecian en diversas circunstancias, por ejemplo, cuando cambia el periodo de nuestro ciclo cardiaco, es decir la frecuencia cardiaca. En la figura IV.2 se presentan diferentes potenciales de acción obtenidos al estimular células a diversas frecuencias. En el primer renglón de la figura se muestra el potencial de acción desplegado a un periodo de 2000 ms(milisegundos). En los siguientes renglones se reducen los periodos y el ancho de los potenciales. En la ultima línea el periodo de estimulación es de 200 ms y en ella observamos que los potenciales de acción son más delgados que en todas las figuras anteriores.

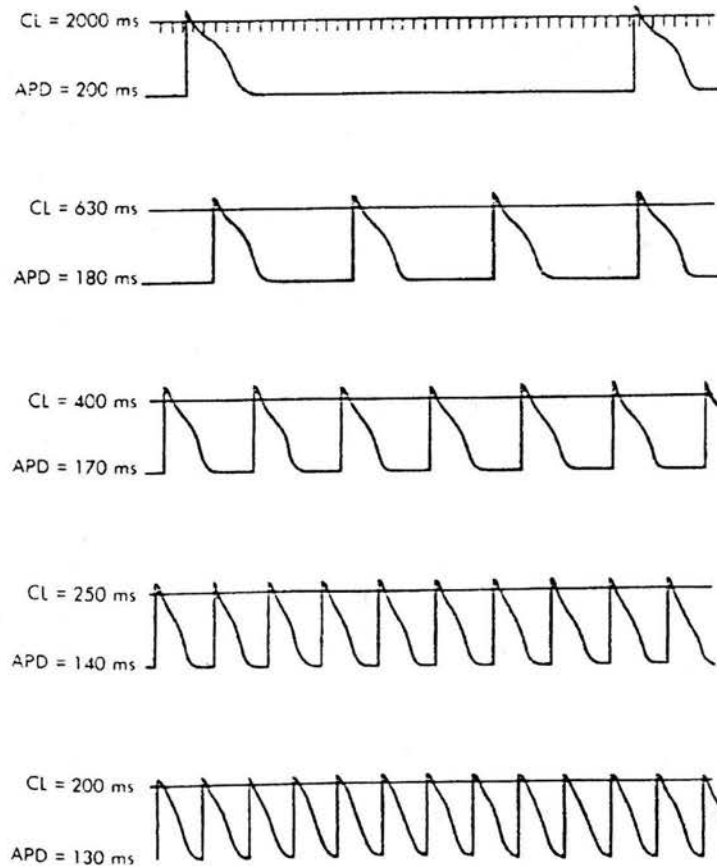


Figura IV.2 Efecto del cambio de la frecuencia de estimulación en el potencial de acción en fibras de Purkinje caninas. CL representa el periodo de estimulación, APD es el ancho del potencial de acción. (modificado por Singer D. Ten Euck RE: Am J Cardiol 28: 381, 1971)

Puede modificarse ligeramente el protocolo experimental anterior para entender el origen de los cambios en el ancho del potencial de acción, para ello se hacen series largas de estimuciones con un periodo constante, digamos 20 pulsos con 2000 ms de periodo, al final de cada serie se da una última perturbación a un intervalo de estimulación distinto (que puede tomarse al azar) y se mide el ancho del potencial resultante, así como el tiempo de descanso precedente. Este protocolo se conoce en la literatura como el protocolo S1S2 y sus resultados muestran que el ancho del potencial de acción depende directamente del tiempo de descanso que le antecede.

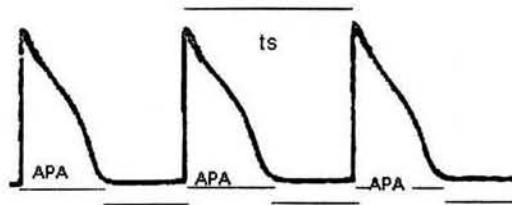


Fig IV.3 Al perturbar una célula cardíaca la respuesta se puede dividir en ancho de potencial de acción (APA) y tiempo de descanso λ .

Llamemos t_s al periodo de estimulación. Observamos en la figura IV.3 que en cada perturbación podemos dividir la respuesta de la célula en dos partes:

APA representa la duración o ancho del potencial de acción y

λ el tiempo de descanso

En cada periodo de estimulación $t_s = \text{APA} + \lambda$

Como dijimos anteriormente el ancho del potencial de acción depende de la frecuencia de estimulación, entonces podemos definir una función que asocie el tiempo de descanso λ con un ancho de potencial de acción, dicho de otra forma podemos ver el ancho de un potencial de acción como función del tiempo de descanso λ que tuvo la célula en la perturbación anterior. Esta función tiene un comportamiento creciente, a mayor tiempo de descanso, mayor ancho de potencial de acción y a menor tiempo de descanso, menor ancho de potencial.

Utilizando datos obtenidos experimentalmente, se determino la gráfica de la función anterior, a esta curva se le conoce como la curva de restitución eléctrica y su gráfica se presenta en la figura IV.4.

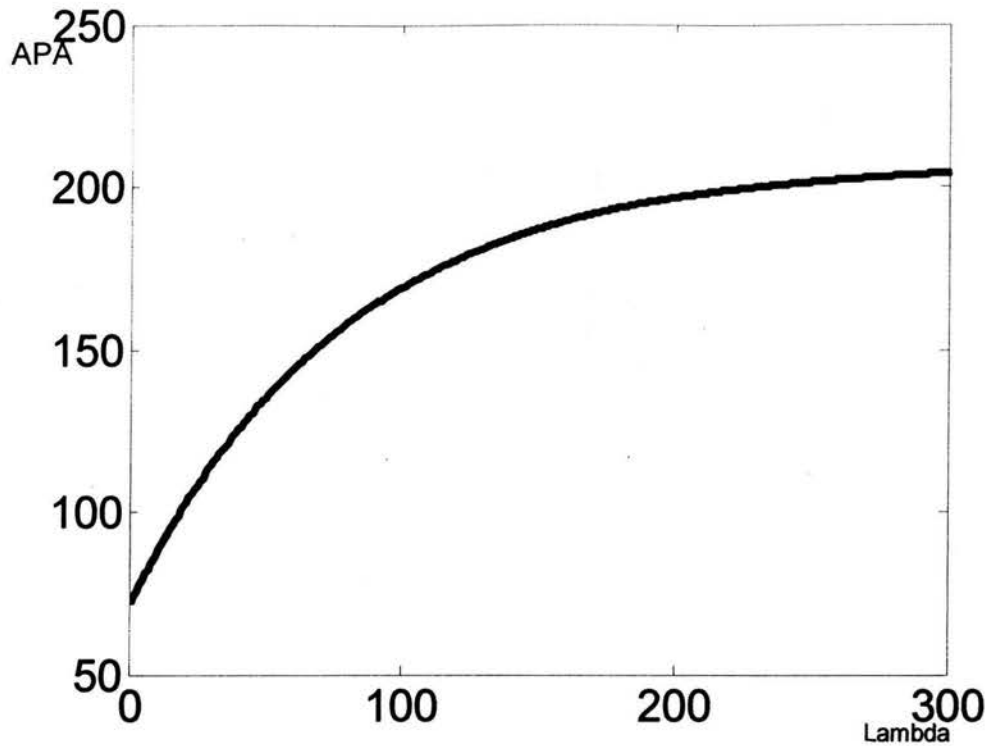


Figura IV.4 Curva de restitución eléctrica. En el eje horizontal se ubican valores del tiempo de descanso λ , a cada uno de estos valores le corresponde un ancho de potencial, el cual está representado en el eje vertical.

Si pensamos el conjunto de potenciales de acción desplegados al perturbar una célula como una sucesión ordenada, podemos señalar cada elemento de la sucesión con un índice.

Con la respuesta de la célula a una perturbación vamos a definir una función recursiva en la cual el ancho del potencial en la perturbación i , llamado APA_i , depende del ancho del potencial en la perturbación anterior $i-1$, APA_{i-1} .

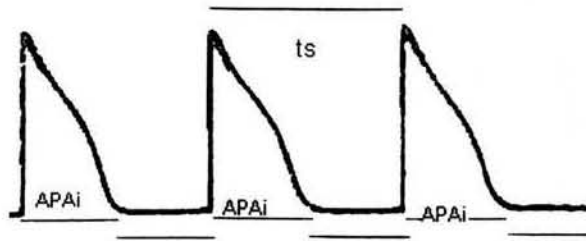


Figura IV.5 Potencial de acción. El conjunto de potenciales de acción puede ser estudiado como una sucesión ordenada, asociando cada elemento de la sucesión con un índice i donde $i \in N$.

Llamemos "g" a la función que determina la curva de restitución eléctrica.

$$APA_i = g(\lambda_{i-1}) \text{ Sabemos que } ts = APA_{i-1} + \lambda_{i-1}$$

$$\text{Despejando } \lambda_{i-1} = ts - APA_{i-1}$$

$$\text{Sustituyendo en la función "g" tenemos que } APA_i = g(ts - APA_{i-1})$$

La expresión anterior es una ecuación en diferencias finitas.

La gráfica de la ecuación en diferencias está formada por los puntos (APA_i, APA_{i+1}) . Podemos encontrar el valor asociado a cualquier APA_i geoméricamente utilizando la curva de restitución, como se ilustra en la figura IV.6.

- La gráfica corresponde a la curva de restitución, en ella observamos que λ está asociado a APA_i .
- Se incluyó en la gráfica del panel a) la recta de la función constante $y = ts$, donde ts es el periodo de estimulación, la línea obscura indica el segmento $(ts - APA_i)$.
- Al evaluar $(ts - APA_i)$ en la curva de restitución obtenemos APA_{i+1} .
- La gráfica de la ecuación en diferencias tiene como elemento a (APA_i, APA_{i+1}) .

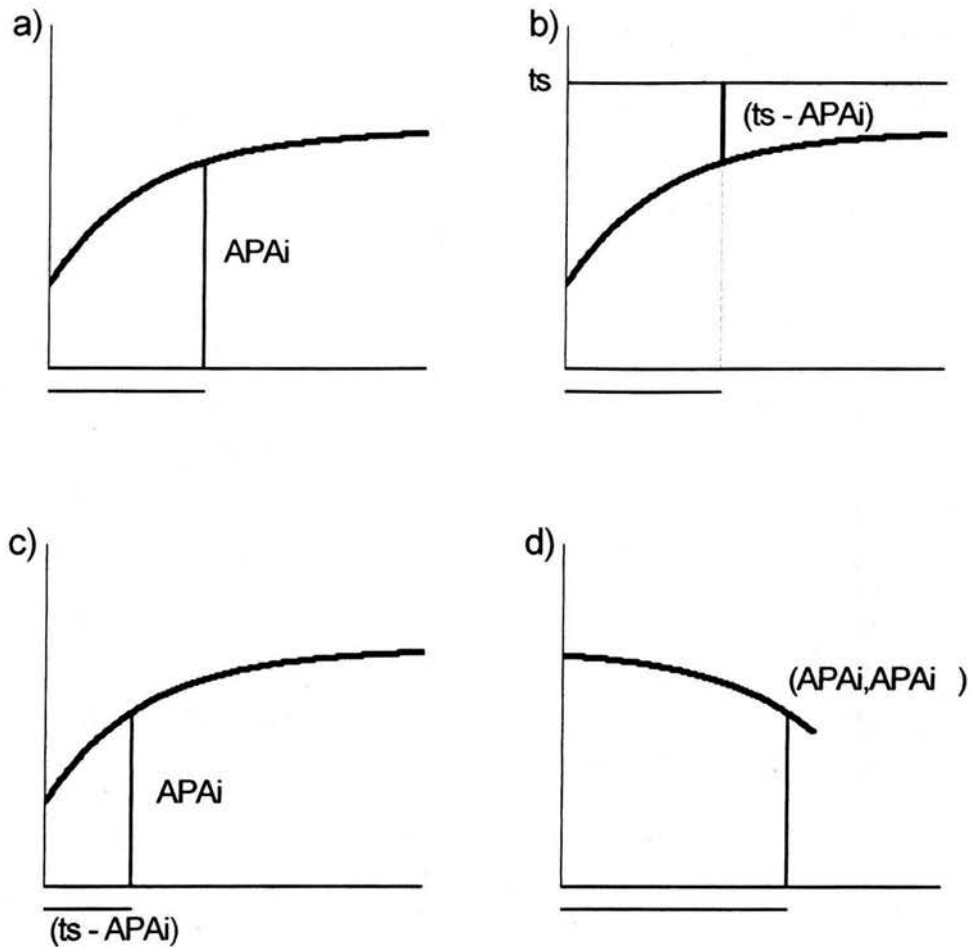


Figura IV.6. Las gráficas muestran el procedimiento geométrico que nos ayuda a determinar una pareja de la ecuación $APA_{i+1} = g(ts - APA_i)$ a partir de la curva de restitución eléctrica, al evaluar λ en esta curva, obtenemos APA_i , con este valor determinamos $(ts - APA_i)$, el cual evaluado en la misma curva nos asocia el valor APA_{i+1} . La pareja (APA_i, APA_{i+1}) pertenece a la gráfica de la ecuación en diferencias.

La gráfica de la ecuación en diferencias es decreciente. Podemos verificar este comportamiento determinando las parejas ordenadas cuyo primer elemento sea $APAMin$ y el $APAMax$. El valor $APAMin$ tiene asociado el segmento $(ts - APA)$ máximo, el cual al evaluarlo en la curva de restitución le corresponderá el valor más grande. De manera similar $APAMax$ tiene asociado el valor de $(ts - APA)$ mínimo, el cual nos genera en la curva de restitución el

valor más pequeño. Como la curva de restitución es estrictamente creciente, la gráfica de la ecuación en diferencias es decreciente.

Recordemos que deseamos describir el desarrollo de los potenciales de acción al variar la frecuencia, y que estos pueden presentar diversos comportamientos.

Cuando a estímulos iguales la célula responde con potenciales de acción morfológicamente iguales, decimos que tenemos un ritmo 1:1.

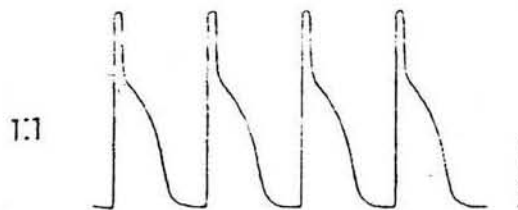


Figura IV.7 Ritmo 1:1 obtenido experimentalmente al perturbar células de corazón de pollo. Cuando a estímulos iguales la célula responde con potenciales de acción morfológicamente iguales, tenemos un ritmo 1:1.

Al aumentar la frecuencia de estimulación disminuye el ancho del potencial de acción, manteniéndose constante en cada perturbación, sin embargo si seguimos incrementando la frecuencia llegamos a un valor crítico en el cual se da un cambio sustancial en la respuesta de la célula. Si bien se presenta un potencial de acción a cada estímulo, su forma alterna entre un potencial de acción ancho con un potencial de acción delgado, en este caso decimos que tenemos un ritmo 2:2 y llamamos a los potenciales de acción alternantes.

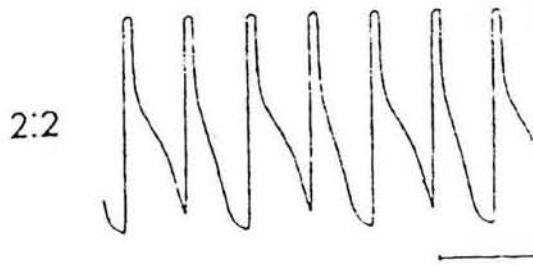


Figura IV.8 Ritmo 2:2 obtenido experimentalmente al perturbar células de corazón de pollo. Cuando a estímulos iguales la célula responde con potenciales de acción que alternan entre un potencial de acción ancho y un potencial de acción delgado.

El estudio de alternantes es importante porque se ha visto que estos anteceden a ritmos irregulares y a la fibrilación ventricular. En particular se han observado ritmos 2:2 en isquemias, hipotermia y estimulación rápida, casi siempre precediendo a fases que inducen arritmias malignas.

De la teoría estudiada en el capítulo II sabemos que si deseamos conocer el comportamiento a largo plazo de los potenciales de acción al perturbar una célula, primero debemos encontrar los puntos fijos de la función:

$$APA_{i+1} = g(ts - APA_i)$$

Recordemos que una función tiene un punto fijo cuando sucede que

$APA_{i+1} = APA_i$. Geométricamente encontramos estos puntos en la intersección de la gráfica de la función con la recta identidad.

Por otro lado para determinar la naturaleza del punto fijo tenemos varios criterios:

Si el valor absoluto de $\partial APA_{i+1} / \partial APA_i$ es menor que 1, entonces el punto fijo es un atractor, situación que corresponde a tener un ritmo 1:1 al perturbar la célula. Cuando el valor de $\partial APA_{i+1} / \partial APA_i$ es igual a -1 sabemos que ocurre una bifurcación de doblamiento de periodo y en este caso la dinámica del sistema pasa de tener un punto fijo, a tener un ciclo de periodo dos, lo cual

indica que después de una perturbación se presentan alternantes, dicho de otra forma se alcanza un ritmo 2:2.

Nuestro objetivo es encontrar la frecuencia crítica, en la cual la respuesta de la célula cambia de un ritmo 1:1 a un ritmo 2:2. Con los datos obtenidos experimentalmente podemos modelar la curva de restitución con una función exponencial de la forma:

$$g(\lambda) = \text{APA}_{\max} - \alpha e^{-\lambda/\tau}$$

donde: $\lambda > \theta$, θ es el periodo refractario.

α , τ son constantes positivas

APA_{\max} es el ancho máximo de potencial

Como $\lambda_i = \text{ts} - \text{APA}_i$ y $\text{APA}_{i+1} = g(\text{ts} - \text{APA}_i)$

$$\text{APA}_{i+1} = g(\text{ts} - \text{APA}_i) = \text{APA}_{\max} - \alpha e^{-(\text{ts} - \text{APA}_i)/\tau}$$

Si derivamos $g(\text{ts} - \text{APA}_i)$ respecto a APA_i , tenemos:

$$\partial \text{APA}_{i+1} / \partial \text{APA}_i = 0 + \alpha e^{-(\text{ts} - \text{APA}_i)/\tau} (1/\tau)$$

Como la bifurcación se da cuando la derivada es igual a -1:

$$-1 = -(\alpha/\tau) e^{-(\text{ts} - \text{APA}_i)/\tau} \text{ de donde } (\tau/\alpha) = e^{-(\text{ts} - \text{APA}_i)/\tau}$$

$$(\tau/\alpha) = 1 / e^{(\text{ts} - \text{APA}_i)/\tau} \text{ lo cual nos lleva a } (\alpha/\tau) = e^{(\text{ts} - \text{APA}_i)/\tau}$$

sustituyendo λ por $(\text{ts} - \text{APA}_i)$:

$$\alpha / \tau = e^{+\lambda \tau} \text{ despejando a } \lambda: \lambda / \tau = \ln(\alpha / \tau)$$

$$\text{con lo cual concluimos que } \lambda = \ln(\alpha / \tau) / \tau$$

De forma experimental al estimular agregados celulares de ventrículos de embriones de pollo, se estableció la función:

$$\text{APA} = 207 - 136 e^{(-\lambda / 78)}$$

De acuerdo con la teoría desarrollada se esperan alternantes en $\lambda = \ln(\alpha / \tau) / \tau$ lo cual corresponde en nuestro caso a:

$$\lambda = 78 \ln(136 / 78)$$

Para conocer el periodo crítico ts^* en el cual aparecen los alternantes, sustituimos el valor de λ en $ts = \text{APA} + \lambda$ y obtenemos:

$$ts = [207 - 136 e^{-\lambda / 78}] + \lambda$$

Entonces ts^* es igual a:

$$ts^* = \{ 207 - 136 e^{-[78 \ln(136 / 78) / 78]} + 78 \ln(136 / 78) / 78 \}$$

$$ts^* = \{ 207 - 136 / e^{+[\ln(136 / 78)]} + 78 \ln(136 / 78) / 78 \}$$

$$ts^* = \{ 207 - 136 / (136 / 78) + 78 \ln(136 / 78) / 78 \}$$

$$ts^* = \{ [207 - 78] + 78 \ln(136 / 78) / 78 \}$$

$$ts^* = 172.36 \dots \dots \dots$$

Podemos comprobar el comportamiento a largo plazo de las órbitas de los potenciales de acción, geoméricamente aplicando el método "Cob-Web" a la

gráfica de la función $APA_i = g(ts - APA_{i-1})$ para diferentes valores del periodo ts .

En la figura IV.9 se presenta en todos los paneles gráficas con periodo mayores al periodo crítico, en cada una de ellas se desplegó la órbita de la misma condición inicial. El punto fijo que geoméricamente es la intersección de la gráfica de la ecuación con la recta identidad es un atractor. En estas órbitas se aprecia que al acercarnos al valor del periodo crítico, la órbita tarda mas tiempo en llegar al punto fijo. Todas estas gráficas corresponden experimentalmente a ritmos 1:1.

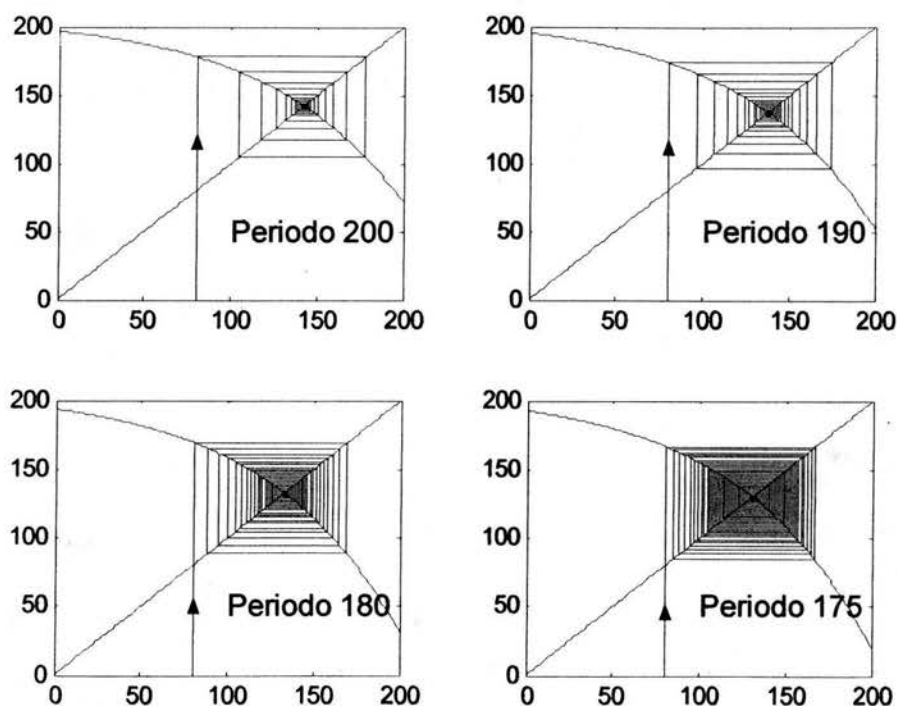


Figura IV.9 Estas curvas corresponden a la gráfica de la ecuación $APA_{i+1} = g(ts - APA_i)$. En todas las gráficas se despliega la órbita cuya condición inicial es APA_i igual a 80, estas órbitas son atraídas por el punto fijo que es la intersección de la función identidad con la curva. Cuando el periodo es 172.36 ocurre una bifurcación, al acercarnos a este valor las órbitas tardan más en llegar al atractor.

En la figura IV.10 se presentan las gráficas de las ecuaciones para valores del periodo menor que el periodo crítico. En todas ellas se desplegó la órbita de la misma condición inicial, estas órbitas son atraídas a un ciclo de periodo dos. Observamos que al acercarnos al valor del periodo crítico, los valores que forman el ciclo atractor de periodo dos se separan. Experimentalmente esto

indica la presencia de alternantes, cuyos anchos de potencial oscilan entre gruesos y delgados.

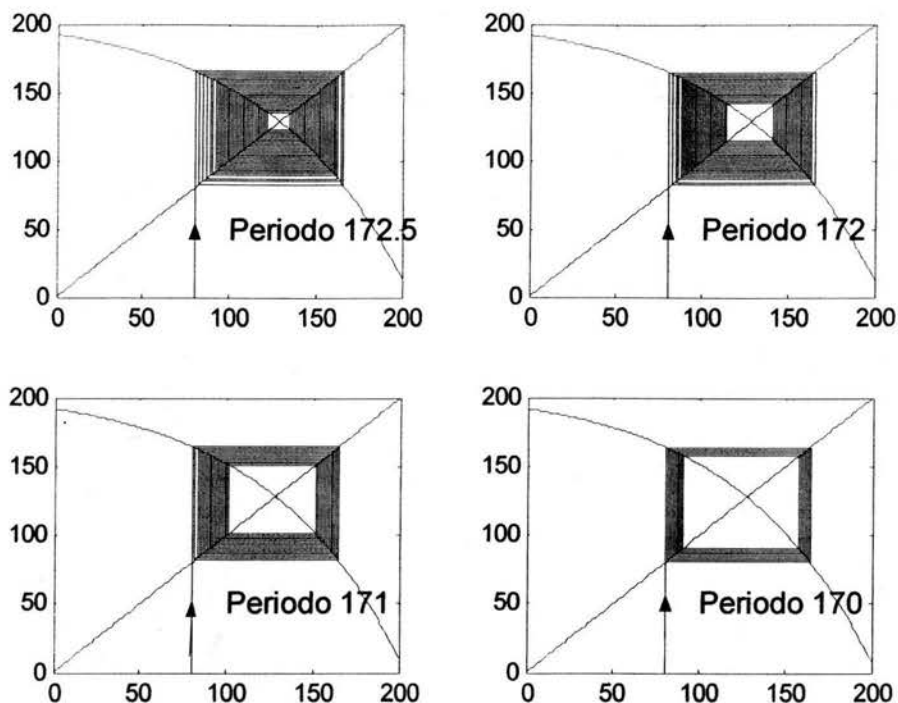


Figura IV.10 Estas curvas corresponden a la gráfica de la ecuación $APA_{i+1} = g(ts - APA_i)$. En todas las gráficas se despliega la órbita cuya condición inicial es APA_i igual a 80, estas órbitas son atraídas por un ciclo de periodo dos atractor. Observamos que a medida que el valor del periodo se aleja del periodo crítico los números que forman el ciclo atractor se separan.

En la figura IV.11 se muestra la gráfica del ancho de potencial de acción como función del periodo de estimulación.

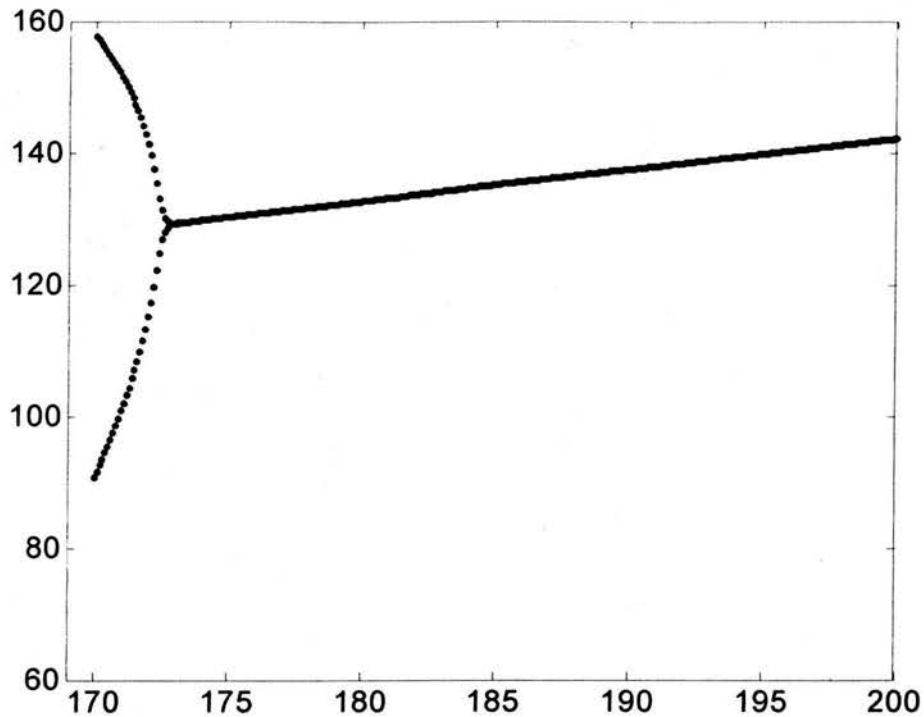


Figura IV.11 Esta gráfica muestra el ancho del potencial de acción como función del periodo de estimulación. En la gráfica observamos que en el eje horizontal se ubican valores del periodo entre 170 y 200 mseg, en el eje vertical se ubican los valores del punto fijo atractor o del ciclo periódico atractor.

Observemos que cuando el periodo es 200 tenemos el ancho máximo de potencial, al disminuir este valor, el ancho de potencial también disminuye. La parte derecha de la curva corresponde a un ritmo 1:1, el cual se bifurca en un ritmo 2:2 cuando la curva se divide en dos ramas. Para periodos menores a este valor tenemos alternantes, si se incrementa la frecuencia la diferencia entre el ancho del potencial de los alternantes es cada vez mayor.

Conclusiones

En esta tesis nos hemos acercado a dos fenómenos de gran importancia biológica, en primer término la evolución de poblaciones y en segundo los cambios en los potenciales de acción desplegados por células cardiacas.

Muchos problemas biológicos dependen de una gran cantidad de variables con relaciones muy complicadas entre ellas, de manera que describir sus comportamientos precisos se antoja imposible. Sin embargo en este texto presentamos utilizando conceptos muy sencillos de sistemas dinámicos discretos como son; iteración de funciones, órbitas, puntos fijos atractores o repulsores, ciclos periódicos y un poco de geometría, un modelo matemático que nos ayuda a predecir cambios importantes en la respuesta de las células cardiacas, que podemos representar como bifurcaciones de doblamiento de periodo. Estos cambios reciben clínicamente el nombre de alternancias y su estudio es importante porque se ha visto que frecuentemente anteceden ciertas arritmias o fibrilación ventricular.

Bibliografía

- 1.- Audersirk Teresa, Gerald.
Biología. La vida en la tierra.
Prentice Hall 1997.
- 2.-Berne Robert, Levy Mathew
Physiology
Mosby year book, 1993
- 3.- Devaney Robert L.
A First Course in Chaotic Dynamical Systems.
Addison-Wesley, 1992.
- 4.- Devaney Robert L.
An Introduction to Chaotic Dynamical Systems
Addison-Wesley, 1989.
- 5.- Guevara M, Ward G, Shrier A, Glass L.
Electrical alternants and period doubling bifurcations.
IEE Computers in Cardiology
Sept. 18-24, 167-170, 1984.
- 6.- Guyton and Hall
Textbook of Medical Physiology.
WB. Saunders Company 1996.
- 7.-Hasting H, Fenton F, Evans S, Hotomaroglu O, Geetha J, Gittelsohn K, Nilson
J, Garfinkel A.
Alternants and the onset of ventricular fibrillation.
Physical Review vol 62 num 3, 2000.
- 8.- Holmgren Richard.
A First Course in Discrete Dynamical Systems.
Springer-Verlag. 1996
- 9.-Hurst Willis
The Heart.
Mc. Graw Hill 1990.
- 10.- Kaplan Daniel, Glass Leon.
Understanding Nonlinear Dynamics
Springer-Verlag 1995.
- 11.-Mendez Hector.
Iteración de funciones.
Vinculos Matematicos # 4, 2000.
Facultad de Ciencias. UNAM.

12.-Timothy L, Guevara M.
Chaotic Dynamics in an ionic model of the propagated cardiac action potential.
J theor. Biol. 146, 407-432, 1990.