

01159



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO
FACULTAD DE INGENIERÍA

ANÁLISIS DE ESPUREIDAD EN FÓRMULAS
DE HIDRÁULICA FLUVIAL

T E S I S

Q U E P R E S E N T A

MICHIKO AMEMIYA RAMIREZ

PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRA EN INGENIERÍA CIVIL

con orientación en HIDRÁULICA



DIRECTOR: DR. GABRIEL ECHAVEZ ALDAPE

Junio 2004



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO
FACULTAD DE INGENIERÍA

Análisis de Espureidad en Fórmulas de Hidráulica Fluvial

Tesis que presenta

Michiko Amemiya Ramírez

Para obtener el grado de
Maestra en Ingeniería
(Hidráulica)

Director: Dr. Gabriel Echávez Aldape

Ciudad Universitaria
México, D.F. junio de 2004

Este trabajo fue posible gracias al apoyo del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología y a la Dirección General de Estudios de Posgrado durante mis estudios de posgrado.

*atardeceres,
fuentes de mil recuerdos,
también por venir.*

A mis padres

Agradecimientos

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología y a la Dirección General de Estudios de Posgrado de la Universidad Nacional Autónoma de México por su apoyo durante mis estudios de posgrado.

A mis sinodales por sus consejos e indicaciones.

A mi tutor, Dr. Gabriel Echávez por sus enseñanzas

A mi familia por su apoyo incondicional.

ÍNDICE

Introducción

1. Características de los Datos y Regresión.....	1
1.1. Características de los Datos y Medidas Descriptivas.....	1
1.2. Curvas de Regresión.....	3
1.2.1. Regresión Lineal.....	3
1.2.2. Regresión Múltiple.....	6
1.2.3. Regresión Curvilínea.....	7
1.3. Coeficiente de Correlación.....	9
2. Correlación Espuria.....	13
2.1. Análisis Dimensional o Teorema de Buckingham	13
2.2. Correlación Espuria	14
2.3. Fórmula General de Correlación Espuria	15
3. Análisis de Espureidad	29
3.1. Diagrama de Shields	29
3.2. Método de Brownlie (1983).....	31
3.3. Método de Karim y Kennedy (1990).....	34
3.4. Método de Nnadi y Wilson (1995).....	48
4. Resultados.....	53
4.1. Diagrama de Shields.....	53
4.2. Método de Brownlie	55
4.3. Método de Karim y Kennedy.....	59
4.4. Método de Nnadi y Wilson	70
5. Conclusiones y Recomendaciones.....	73

Apéndice I: El Inicio del Movimiento y la Curva de Shields (1936)

Bibliografía

INTRODUCCIÓN

Uno de los objetivos de la ingeniería experimental es formular relaciones entre variables que representan condiciones físicas causales para predecir una de ellas, la variable dependiente, de la manera más cercana posible.

La información necesaria relacionar una variable con las demás proviene de mediciones experimentales en las que se pueden controlar algunas variables, o mediciones de campo en donde las variables no están totalmente controladas.

Los datos obtenidos se utilizan para formular relaciones matemáticas que permitan realizar predicciones sobre los fenómenos físicos de la manera más confiable posible, determinando una variable a partir de otras. Es decir, se expresa una variable dependiente en función de una o más variables independientes.

Estas funciones tienen cierto grado de error debido a muchos factores. Entre estos están:

1. Las variables independientes no son suficientes o no representan el fenómeno de manera adecuada: Si el fenómeno tiene una naturaleza compleja en la que influyen condiciones que no se pueden medir o no se hayan tomado en cuenta, el fenómeno no estará representado en su totalidad. Esto es frecuente cuando se utilizan modelos, ya que el uso de estos implica cierto grado de simplificación para que el fenómeno se pueda entender.¹
2. Las variables medidas pueden no ser medidas de manera adecuada. Siempre que se realizan mediciones puede aparecer el error experimental, ya sea por que no se utilicen herramientas de medición adecuadas o por que el procedimiento provoque un error experimental significativo.
3. Confundir una correlación como una relación causal.²
4. Extrapolar el fenómeno más allá del intervalo de los datos utilizados. Al no conocerse la tendencia del fenómeno más allá de los intervalo de los datos, se pueden tener errores.
5. Relacionar las variables de tal forma que se cree una correlación espuria. Es decir, que se produzca una correlación aparente, no real, al plantear ecuaciones con productos adimensionales con variables en común. Esto sucede cuando se utiliza el análisis dimensional de manera errónea.

A pesar de sus limitaciones, es indudable la importancia de este tipo de relaciones en cualquier campo de la ingeniería. Para plantear la relación adecuada se deben conocer las características de los datos experimentales y utilizar técnicas estadísticas adecuadas de acuerdo con la naturaleza de los mismos.

¹ Ref. 14, p. 483.

² Ref 16, p. 258.

Para que se pueda considerar completa y confiable, una fórmula que pretenda representar un fenómeno natural debería estar acompañada de:

1. Una lista que especifique el intervalo de las variables.
2. Un análisis de sensibilidad en todo el intervalo de aplicación.
3. Una evaluación de la correlación espuria (si intervienen números adimensionales).
4. Una validación al compararla con datos experimentales y de campo.

A los tres primeros puntos anteriores se les podría llamar documentar la ecuación, y a la cuarta, confirmar su validez en el intervalo de aplicación propuesto.

El objetivo de este trabajo es analizar la espureidad del método de Shields y de algunos métodos de cálculo de la resistencia al flujo en cauces de planicie. Para este motivo se realizó un análisis de espureidad en cada uno de los casos; se evaluaron los coeficientes de correlación total y correlación espuria; se rescribieron algunas expresiones para reducir su grado de espureidad y se plantearon conclusiones y recomendaciones a partir de los resultados.

1. CARACTERÍSTICAS DE LOS DATOS Y REGRESIÓN

1.1 Características de los Datos y Medidas Descriptivas

Cuando se realizan experimentos, frecuentemente se pueden determinar las variables independientes, por lo que se puede considerar que éstas se observan sin error o con un error despreciable.³ Por tanto, aunque la variable independiente pueda estar fija en x , las mediciones repetidas de la variable dependiente pueden llevar a valores que difieren considerablemente. Tanto los datos correspondientes a la variable dependiente como las variables independientes forman poblaciones que tienen características estadísticas descriptivas. Es conveniente conocer estas características, ya que son útiles al momento de realizar regresiones y correlaciones.

1.1.1 Número de datos, n

Es la medida que indica el tamaño de la muestra. Generalmente se expresa con la letra n .

1.1.2 Rango de Muestreo

Es igual al valor mayor de la muestra menos el valor menor.

1.1.3 Media Aritmética, \bar{x}

La media de un grupo de n mediciones u observaciones, $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, se define como

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (1.1)$$

y representa el promedio de los valores de la muestra.

Cuando se tiene una función de probabilidad, $f(x)$, su media se define por medio de la ecuación

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) \quad (1.2)$$

En este caso, corresponde al centroide de la distribución de probabilidad.

³ Ref 16, p. 266.

1.1.4 Mediana

La mediana de n observaciones x_1, x_2, \dots, x_n , es el valor de en medio una vez que los datos se han ordenado según su tamaño. De una manera más precisa, si las observaciones se ordenan según su tamaño, de mayor a menor, y si n es un número impar, la mediana es el valor de observación numerado

$$\frac{n+1}{2}$$

Si n es un número par, la mediana es la media (promedio) de las observaciones numeradas

$$\frac{n}{2} \text{ y } \frac{n+2}{2}.$$

En ocasiones es preferible utilizar la mediana como una medida descriptiva del centro de un grupo de datos, especialmente si se quiere reducir el efecto de valores extremos.

1.1.5 Varianza, S^2

La varianza de n observaciones, x_1, x_2, \dots, x_n , mide el promedio cuadrado de sus desviaciones respecto a la media, \bar{x} . Se define con la ecuación

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1} \quad (1.3)$$

Para una variable aleatoria, la varianza de una distribución de probabilidad con valores $f(x)$ es

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 \cdot f(x) \quad (1.4)$$

1.1.6 Desviación Estándar

La desviación estándar de n observaciones, x_1, x_2, \dots, x_n , es la raíz cuadrada de la varianza, es decir

$$S = \left[\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1.5)$$

Tanto la desviación estándar como la varianza son medidas de variación absoluta; es decir, miden el monto real de variación presente en un conjunto de datos respecto a la media y dependen de la escala de medición.

1.1.7 Coeficiente de Variación

Para comparar la variación en varios conjuntos de datos, es deseable utilizar medidas de variación relativa como el coeficiente de variación. Se define como la razón de la desviación estándar a la media, es decir

$$C = \frac{S}{x} \quad (1.6)$$

1.2 Curvas de Regresión

Como se mencionó antes, una de las actividades frecuentes de la investigación experimental en ingeniería es desarrollar relaciones matemáticas en las que el valor de una variable (dependiente) se pueda calcular a partir de otras variables (independientes).

Un caso muy común es cuando se correlaciona una sola variable con otra. En estas condiciones, a la variable independiente se le denomina x y a la dependiente se le denomina y .⁴ A la relación entre las variables dependiente e independiente se le llama curva de regresión o función de regresión.

Frecuentemente, la relación entre la variable dependiente y las variables independientes no es una relación matemáticamente exacta, sino varios valores dependientes correspondientes a una combinación dada de valores dependientes distribuido alrededor de un valor que depende de los valores independientes.⁵ Es decir, para cada valor de x hay una población correspondiente de valores y . Si y es el valor de una variable aleatoria cuya distribución depende de x , interesa principalmente la relación entre x y la media de la distribución de los valores y .⁶ La curva de regresión deberá seguir de la manera más cercana posible la tendencia de esa media.

Existen diversos tipos de expresiones matemáticas que pueden ajustarse a estos datos y metodología específica para cada caso.

1.2.1 Regresión Lineal

En una regresión lineal, se supone que la curva de regresión de y sobre x es lineal, por lo que la función de regresión tiene una forma

$$y = \alpha + \beta x + \varepsilon \quad (1.7)$$

donde α y β son parámetros desconocidos que se estiman a partir de observaciones sobre los pares (x,y) ; ε es un valor que asume una variable aleatoria; sin embargo, se puede escoger α y β de tal manera que la media de su distribución sea igual a cero.⁷

⁴ La mayoría de las veces en un fenómeno están involucradas más de dos variables, sin embargo, se utilizará el caso de sólo dos variables para desarrollar de una manera más clara las relaciones y la metodología de regresión.

⁵ Ref. 1, p. 587.

⁶ Ref 16, p. 227.

⁷ Ref 16, p. 227.

Es razonable considerar que ambas poblaciones tienen homoscedadidad (homoscedacity)⁸, es decir, que se puede aceptar que la población de valores y en un valor x tiene varianza σ^2 para todos los valores de x .

Una relación no lineal pero suave se puede aproximar como una línea recta.⁹ Aunque la relación real no sea lineal, la descripción lineal puede ser adecuada en un intervalo particular de interés.

A α se le llama la intercepción, ya que es la altura en la cual la línea intercepta el eje y . Cuando se realiza una regresión lineal, los problemas estadísticos a resolver son determinar los parámetros α , β y σ^2 . Se pueden estimar estos parámetros y probar hipótesis sobre ellos.¹⁰ Un caso particular es cuando $\beta = 0$. Si esta hipótesis es cierta, la función de regresión se transforma en

$$y = \alpha \tag{1.8}$$

Es decir, que la función tiene un solo valor para cualquier valor de x . Esto significa que el valor de y es independiente de x .

1.2.1.1 Estimaciones de Mínimos Cuadrados

Con este procedimiento se estiman los coeficientes de regresión α y β de una regresión lineal. Se puede aplicar cuando los datos consisten de n pares de números $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ y se pueden dibujar en un plano cartesiano x - y para observar su dispersión.

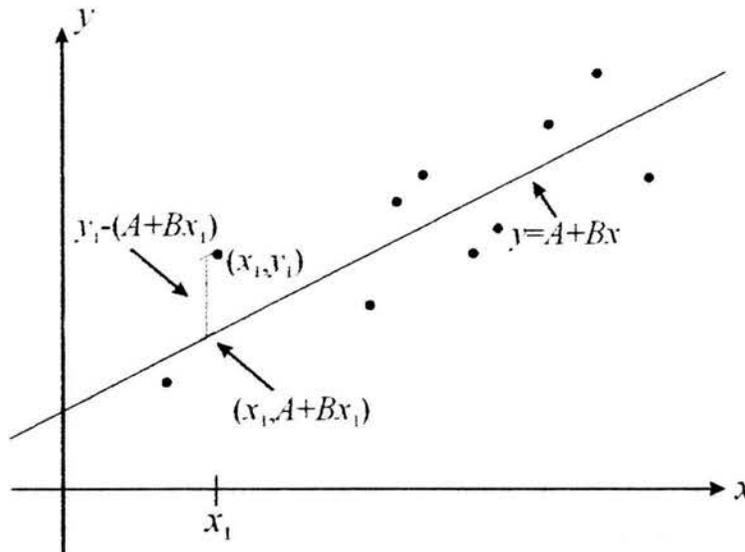


Fig. 1.1 Dispersión de puntos y posible línea de regresión. Se muestra la desviación del punto (x_1, y_1) de la línea $y = A + Bx$.

⁸ Ref. 1, p. 588.

⁹ Ref. 1, pp. 586-587.

¹⁰ Ref. 1, p. 258.

El procedimiento de mínimos cuadrados consiste en encontrar una línea de tipo

$$\hat{y}_i = A + Bx_i \quad (1.9)$$

en la que los valores \hat{y}_i sean lo sus cercano posible a los valores y_i . Para verificar si los valores de A y B , llamados estimados de mínimos cuadrados, son buenas opciones, se deben determinar las distancias entre las \hat{y}_i y y_i , las diferencias $y_i - \hat{y}_i$ se elevan al cuadrado y se suman, es decir

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$$

y si $\hat{y}_i = A + Bx_i$, la expresión anterior se puede escribir como

$$\sum_{i=1}^n (y_i - (A + Bx_i))^2$$

Según el principio de mínimos cuadrados, se deben escoger valores de A y B como estimados de α y β que minimicen la expresión anterior.

1.2.1.1.1 Metodología de Mínimos Cuadrados

Las ecuaciones de los valores a y b , que minimizan los valores de A y B respectivamente, son

$$b = \frac{S_{xy}}{S_x^2} \quad (1.10)$$

y

$$a = \bar{y} - b\bar{x} \quad (1.11)$$

donde

$$S_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n-1} \quad (1.12)$$

es la covarianza entre x y y ; y S_x^2 es la varianza de x . A los valores a y b se les llama estimados de mínimos cuadrados; \bar{x} y \bar{y} son los valores medios correspondientes a los valores x y y respectivamente.

Otra metodología equivalente para calcular el estimado b utiliza las expresiones ¹¹

$$S_{xx} = n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \quad (1.13)$$

$$S_{yy} = n \sum_{i=1}^n y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2 \quad (1.14)$$

¹¹ Ref. 16, p. 232.

$$S_{xy} = n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i \right) \quad (1.15)$$

El estimado b es entonces

$$b = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} \quad (1.16)$$

1.2.2 Regresión Múltiple

La regresión múltiple sirve para explicar y predecir una variable a partir de varias variables descriptivas. En regresión múltiple se manejan datos que consisten en $n(r+1)$ -útiples $(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ri}, y_i)$, en donde se supone que las x se conocen sin error y las y son variables aleatorias.¹² Si la relación entre la media y las variables independientes es lineal, se puede escribir como

$$y = \alpha + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_r x_r + \varepsilon \quad (1.17)$$

Existe una relación estadística entre tres variables, una dependiente y , y dos independientes descriptivas, x_1 y x_2 , cuando para valores fijos de x_1 y x_2 hay una población de valores y tales que la media es función de x_1 y x_2 , es decir¹³

$$y = f(x_1, x_2) \quad (1.18)$$

Si la función de regresión es lineal, esta relación se puede escribir como

$$y = f(x_1, x_2) = \alpha + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 \quad (1.19)$$

En este caso también se puede considerar razonable utilizar una función lineal como aproximación adecuada en intervalos específicos de x_1 y x_2 . Otra suposición aceptable es que para valores dados de x_1 y x_2 , los valores y en la población tienen una varianza σ^2 cuyo valor no depende de x_1 ni de x_2 .

1.2.2.1 Metodología de Mínimos Cuadrados para dos Variables Independientes y una Dependiente

El criterio de mínimos cuadrados también se puede aplicar en estas condiciones. En este caso, el objetivo es encontrar un plano que se ajuste de la mejor manera posible a n puntos con coordenadas (x_{1i}, x_{2i}, y_i) . Los estimados de los coeficientes α , β_1 y β_2 , que minimizan las distancias verticales entre los puntos y el plano propuesto se obtienen con la siguiente metodología:

Según la metodología de mínimos cuadrados, se debe minimizar la expresión

$$\sum_{i=1}^n [y_i - (\alpha + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i})]^2 \quad (1.20)$$

¹² Ref. 16, p. 246.

¹³ Ref. 1, pp. 620 – 621.

Para tal efecto, se plantean las ecuaciones¹⁴

$$\sum y = nb_0 + b_1 \sum x_1 + b_2 \sum x_2 \quad (1.21)$$

$$\sum x_1 y = b_0 \sum x_1 + b_1 \sum x_1^2 + b_2 \sum x_1 x_2 \quad (1.22)$$

$$\sum x_2 y = b_0 \sum x_2 + b_1 \sum x_1 x_2 + b_2 \sum x_2^2 \quad (1.23)$$

Donde $\sum x_1 = \sum_{i=1}^n x_{1i}$, $\sum x_1 x_2 = \sum_{i=1}^n x_{1i} x_{2i}$, etcétera. Las expresiones 1.21, 1.22 y 1.23 constituyen un sistema de ecuaciones simultáneas. Al resolver este sistema se obtienen b_0 , b_1 y b_2 , que son los estimados de mínimos cuadrados de α , β_1 y β_2 .

1.2.3 Regresión Curvilínea

Los problemas que involucran la regresión curvilínea son aquellos en el que la dispersión de puntos no es lineal. Es frecuente que los datos expresados como pares de puntos se dibujen en distintos tipos de escalas (logarítmicas, semilogarítmicas) para determinar en cuál los puntos forman una línea recta.¹⁵ De estas condiciones, según sea la transformación, se pueden encontrar los parámetros funcionales de la regresión.

1.2.3.1 Regresión Exponencial

Una regresión exponencial se da cuando un conjunto de datos formado por n puntos (x_i, y_i) forman una línea recta en un plano semilogarítmico.

En este caso, la media de la dispersión está dada por la expresión

$$y = \alpha \beta^x \quad (1.24)$$

Si se toman logaritmos a ambos lados de la ecuación anterior se obtiene

$$\log y = \log \alpha + x \log \beta \quad (1.25)$$

Al estar escrita de esta manera, se pueden encontrar los parámetros $\log \alpha$ y $\log \beta$ a partir de la metodología de mínimos cuadrados de manera similar al caso lineal. Las ecuaciones que se utilizan en este caso son

$$\log \alpha = \frac{\sum \log y}{n} \quad (1.26)$$

$$\log \beta = \frac{\sum x \log y}{\sum x^2} \quad (1.27)$$

¹⁴ Ref. 16, p. 247.

¹⁵ Ref. 16, p.240.

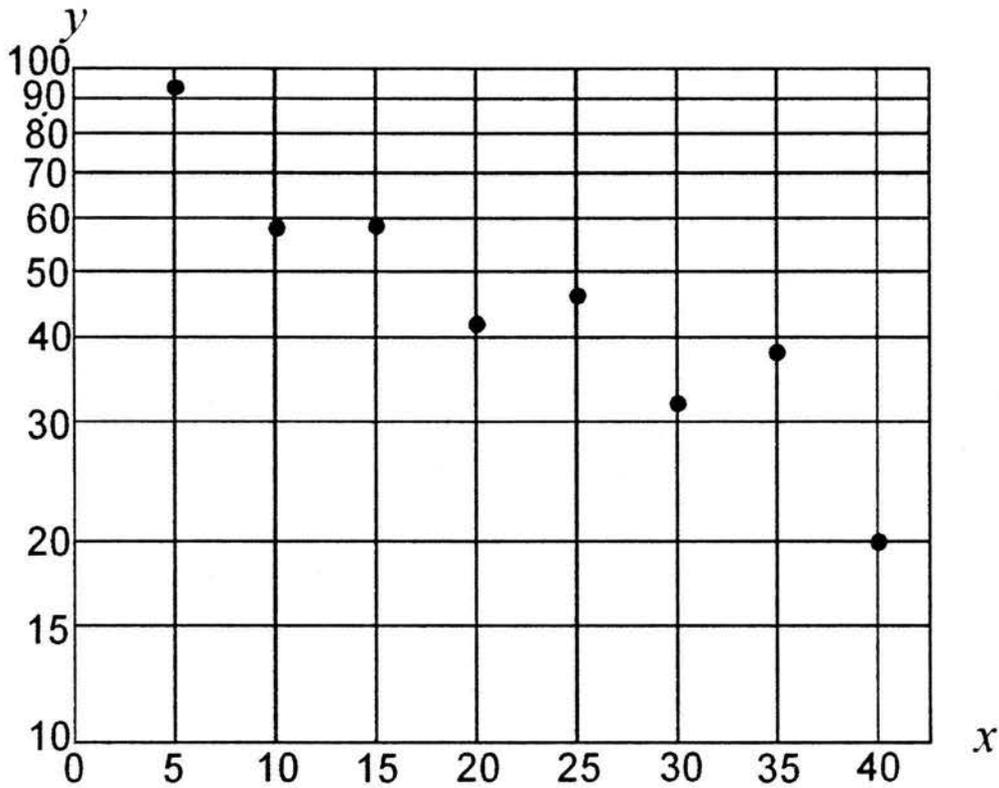


Fig. 1.2 Regresión exponencial en papel semilogarítmico.¹⁶

1.2.3.2 Función Recíproca

En la función recíproca, la media de la dispersión se puede ajustar a la función

$$y = \frac{1}{\alpha + \beta x} \quad (1.28)$$

La transformación para poder aplicar la metodología de mínimos cuadrados es una relación lineal entre x y $1/y$, es decir

$$\frac{1}{y} = \alpha + \beta x \quad (1.29)$$

De esta forma, se pueden obtener los parámetros α y β a partir de la metodología de mínimos cuadrados con los puntos $(x_i, 1/y_i)$.

1.2.3.3 Función Producto de Potencias ó Logarítmica

Una función producto de potencias tiene la forma

$$y = \alpha \cdot x^\beta \quad (1.30)$$

¹⁶ ref. 16, p. 241.

Para poder aplicar la metodología de mínimos cuadrados, la relación debe ser transformada de tal manera que represente una función lineal. Esta transformación tiene la forma

$$\log y = \log \alpha + \beta \log x \quad (1.31)$$

A partir de ésta, se pueden encontrar los estimados de $\log \alpha$ y β , y por tanto los estimados a y b , aplicando la metodología de mínimos cuadrados a partir de los pares de puntos ($\log x_i$, $\log y_i$).

1.2.3.4 Funciones Polinomiales

Cuando no hay una tendencia clara sobre la forma de la función de regresión de y sobre x , frecuentemente se supone que la relación real se comporta de tal manera que se puede aproximar por medio de una serie de Taylor y que los primeros términos de esta expansión bastan para dar una buena aproximación.¹⁷ En estos casos, los datos se ajustan a una ecuación predictiva con forma de polinomio, es decir

$$y = \alpha + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \dots + \beta_p x^p \quad (1.32)$$

El grado del polinomio se determina a partir de la inspección de los datos o utilizando un procedimiento matemático.

Dado un conjunto de datos formado por n puntos (x_i, y_i) , se estiman los coeficientes $\alpha, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$, al minimizar la expresión

$$\sum_{i=1}^n [y_i - (\alpha + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + \dots + \beta_p x_i^p)]^2 \quad (1.33)$$

Si se utiliza el criterio de mínimos cuadrados se obtienen $p+1$ ecuaciones simultáneas de forma

$$\sum y = na + b_1 \sum x + \dots + b_p \sum x^p \quad (1.34a)$$

$$\sum xy = a \sum x + b_1 \sum x^2 + \dots + b_p \sum x^{p+1} \quad (1.34b)$$

$$\sum x^p y = a \sum x^p + b_1 \sum x^{p+1} + \dots + b_p \sum x^{2p} \quad (1.34c)$$

donde a, b_1, b_2, \dots, b_p son los estimados mínimos de los coeficientes $\alpha, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$.

1.3 Coeficiente de Correlación

El coeficiente de correlación indica una medida de la dependencia lineal entre dos variables aleatorias; es la "fortaleza" de la relación lineal entre dos variables. Considérese que la variable dependiente tiene una distribución aleatoria con una dispersión alrededor de una

¹⁷ Ref. 16, p. 242.

media. La dispersión de los datos con respecto a esa media, para una sola variable independiente, se puede calcular por medio de la varianza¹⁸, es decir

$$S_y^2 = \frac{\sum (y - \bar{y})^2}{n-1} \quad (1.35)$$

donde S_y^2 es la variancia; y la ordenada observada; \bar{y} la media de las ordenadas y n el número de puntos. Si los datos se ajustan a una recta de regresión, un indicador de la dispersión alrededor de la recta se puede encontrar con el estadístico

$$S_e^2 = \frac{\sum (y - y_r)^2}{n-2} \quad (1.36)$$

donde S_e^2 es la variancia no explicada; y la ordenada observada y y_r la ordenada sobre la recta de regresión.

Utilizando los dos estadísticos anteriores, el coeficiente de correlación se puede definir como¹⁹

$$r = \left[1 - \frac{S_e^2}{S_y^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1.37)$$

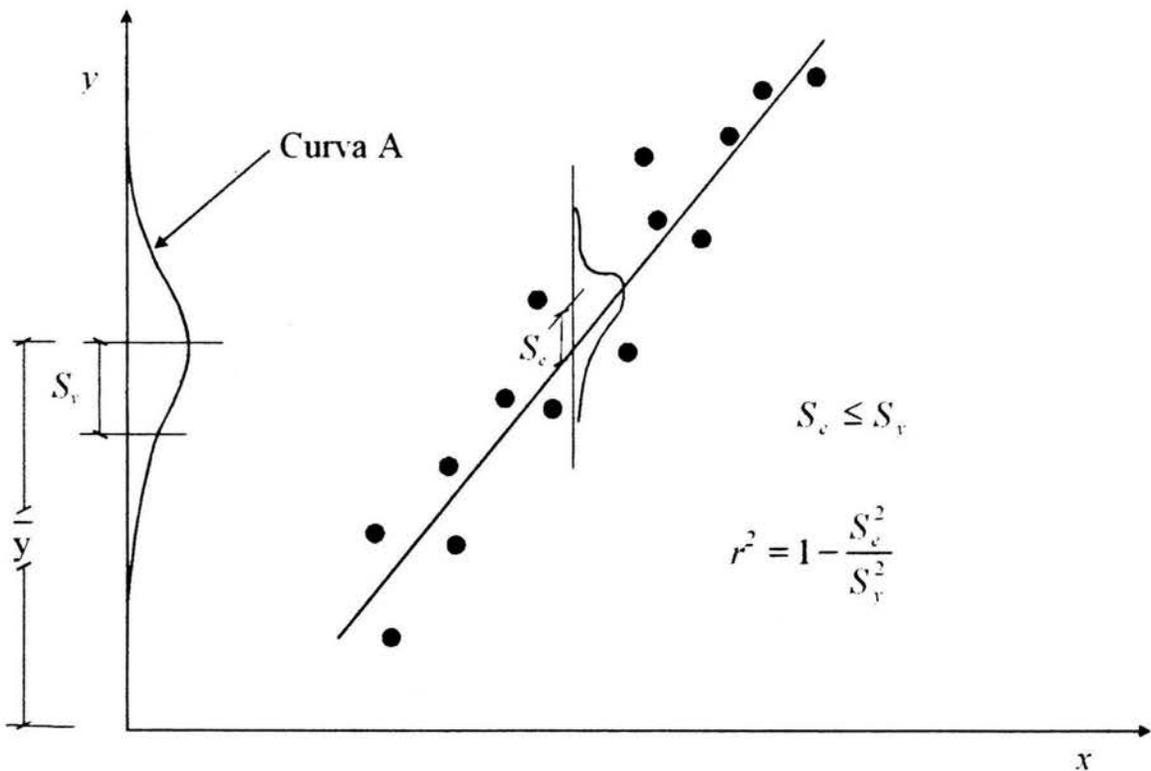


Fig. 1.3 Distribuciones total y con respecto a la recta de regresión.²⁰

¹⁸ Ref. 5, p. 2.

¹⁹ Ref. 5, p. 2.

Debido a que la varianza de las ordenadas, S_y^2 es mayor que la varianza no definida S_e^2 ,

$$S_e \leq S_y \quad (1.38)$$

el valor del coeficiente de correlación tiene valores en el intervalo

$$0 \leq r \leq 1 \quad (1.39)$$

Se puede observar que si los datos y ajustan de manera perfecta a una curva, el valor de S_e^2 será igual a cero, por lo que el valor del coeficiente de correlación es 1.

Existen otras definiciones equivalentes del coeficiente de correlación. Cuando se tienen datos con una distribución normal en ambas variables y se supone una función lineal, para cualquier x dado, se asume que la función es una distribución normal con media $f(x) = \alpha + \beta x$ y la variancia σ^2 . La distribución de la variable dependiente se describe por medio de las variables μ_1, σ_1 , y la distribución de la variable dependiente se describe por medio de las variables μ_2, σ_2 . En este caso, el coeficiente de correlación se define como²¹

$$\rho^2 = 1 - \frac{\sigma^2}{\sigma_2^2} \quad (1.40)$$

Considerando que

$$\mu_2 = \alpha + \beta\mu_1 \quad (1.41)$$

y

$$\sigma_2^2 = \sigma^2 + \beta^2\sigma_1^2 \quad (1.42)$$

En este caso, el signo del coeficiente de correlación depende de β , la pendiente de la recta de correlación, siendo positivo cuando β es positivo y siendo negativo cuando β es negativo.

El coeficiente de correlación, para esta definición tiene valores en el intervalo

$$-1 \leq \rho \leq 1 \quad (1.43)$$

En ocasiones, la definición del coeficiente de correlación anterior, ρ , se estima por medio del coeficiente de correlación de una muestra, r . Dada una muestra aleatoria de tamaño n de pares (x_i, y_i) , el coeficiente de correlación de muestra es²²

$$r = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx}S_{yy}}} \quad (1.44)$$

donde

$$S_{xx} = n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \quad (1.45)$$

$$S_{yy} = n \sum_{i=1}^n y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2 \quad (1.46)$$

²¹ Ref. 16, p. 255.

²² Ref. 16, p. 256.

$$S_{xy} = n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i \right) \quad (1.47)$$

Sin importar qué definición se utilice, el coeficiente de correlación es una medida de asociación a una línea recta entre dos variables cuantitativas; es un parámetro que indica qué tan lineal es una relación, y si lo es, qué tan útil es una variable para predecir otra. Es decir, el coeficiente de correlación indica en qué proporción la variación de las y 's se puede atribuir a una relación lineal con x .²³ Este coeficiente tendrá valores de 1 ó -1 sólo cuando todas las variables dependientes dato caen sobre la recta de regresión, es decir, cuando hay una relación lineal perfecta entre las dos variables aleatorias. Si el coeficiente tiene un valor igual a 0, implica que la pendiente de la relación lineal es igual a cero ($\beta = 0$). Esto implica que la línea de regresión y sobre x es una línea horizontal, y por tanto, el conocimiento de x no es útil en la predicción de y . En otras palabras, un coeficiente de correlación con valor cero implica que entre las variables no existe una relación lineal.²⁴

Según sea su magnitud, el coeficiente de correlación se puede interpretar de varias maneras. La interpretación se resume en la siguiente tabla.

Tabla 1.1 Interpretación del Coeficiente de Corelación²⁵

r^2	r	Interpretación
0	0	No hay correlación
0 – 0,25	0 – 0,5	Correlación débil
0,25 – 0,64	0,5 – 0,8	Correlación media
0,64 – 1	0,8 - 1	Correlación fuerte
1	1	Correlación perfecta

Entre las limitaciones en el uso del coeficiente de correlación está el hecho de que éste es un estimado de la representatividad de la asociación lineal entre variables aleatorias, por tanto, el coeficiente puede tener un valor cercano a cero aunque exista una relación representativa no lineal entre dos variables aleatorias. Otra limitación es que una correlación significativa no implica necesariamente una relación causal entre las dos variables aleatorias.²⁶

²³ Ref. 16, p. 256.

²⁴ En ocasiones se considera que un coeficiente de correlación $r = 0$ implica independencia, sin embargo, puede haber relaciones perfectas no lineales que tienen un coeficiente de correlación igual a cero. El coeficiente de correlación $r = 0$ implica independencia sólo en el caso lineal.

²⁵ Ref. 1, p. 598.

²⁶ Ref. 16, p. 258.

2. CORRELACIÓN ESPURIA

En la ingeniería experimental, para facilitar el manejo de datos, las variables medidas se agrupan en parámetros adimensionales que se obtienen a través del análisis dimensional (Teorema de Buckingham) El análisis adimensional se utiliza principalmente para obtener información a partir de las dimensiones de las variables que intervienen en un problema y para reducir el número de variables de un problema y por tanto, simplificarlo.²⁷ El análisis dimensional se basa en la premisa de que el fenómeno estudiado se puede describir por medio de una ecuación dimensionalmente correcta con ciertas variables.²⁸

El uso del análisis dimensional simplifica la investigación y el análisis del fenómeno estudiado. Sin embargo, existen algunas limitaciones para su uso. El análisis dimensional sólo es una herramienta matemática que no sustituye el conocimiento ni entendimiento del fenómeno físico. Además, si el análisis no se basa en razonamiento físico, puede producir formulaciones incorrectas.

Una vez que se han determinado los parámetros adimensionales, se desarrollan funciones predictivas. La selección de un grupo de variables independientes de los parámetros disponibles y su eficiencia predictiva se basa en un criterio visual o en el valor del coeficiente de correlación, r , en el caso de las correlaciones lineales.

Los criterios visuales o estadísticos aplicados a parámetros adimensionales no son suficientes para determinar la validez de la inferencia predictiva de las variables independientes con respecto a la variable dependiente. Para darle validez es necesario utilizar, conjuntamente a lo anterior, pruebas de hipótesis estadísticas y calcular intervalos de confianza para los valores calculados de la variable dependiente.

Otro riesgo adicional es que debido al mal uso del análisis dimensional, se esté produciendo una correlación inexistente o distorsionada, es decir, una correlación espuria.

2.1 Análisis Dimensional o Teorema de Buckingham

El análisis dimensional es una herramienta que da información utilizando las dimensiones de las variables que intervienen en un problema.²⁹ Una ecuación que represente un fenómeno físico, además de satisfacer la igualdad numérica, debe satisfacer que³⁰:

- a) Las dimensiones de los dos términos sean iguales, es decir, la ecuación debe ser dimensionalmente homogénea.
- b) La ecuación sólo es válida para cierto intervalo de las variables.

²⁷ Ref. 7, p. 7.

²⁸ Ref. 15, p. 941. Según Langharr, HL (1951), "Dimensional Analysis and Theory of Models", John Wiley and Sons, N.Y.

²⁹ Ref. 7, p. 7.

³⁰ Ref. 7, p. 11.

- c) No se pueden realizar todas las operaciones matemáticas con ella, por que “No se le puede asignar ningún significado definido al resultado de esta operación”³¹
Para poder realizar cualquier operación, conviene hacer adimensionales a las variables con anterioridad.

2.1.1 Matriz de Exponentes

Una matriz de exponentes expresa los exponentes de las dimensiones básicas que componen las variables que intervienen dentro de un problema. Para desarrollar esta matriz, en un renglón se expresan las variables que intervienen y en una columna sus dimensiones, en el sistema SI, masa, longitud y tiempo. En cada cruce, se expresa el exponente de la unidad correspondiente, por ejemplo, para fuerza, las unidades de masa serán 1, las unidades de longitud 1 y las unidades de tiempo -2 .

El rango de esta matriz será el orden de la mayor matriz cuadrada cuyo determinante no sea nulo.

2.1.2 Teorema de Buckingham – Vaschy

El Teorema de Buckingham – Vaschy, o Teorema π , indica que una ecuación dimensionalmente homogénea donde intervengan variables cuyo rango de la matriz de exponentes sea r , podrá expresarse como una combinación de $m - r$ productos adimensionales, es decir, en cada uno de ellos, las unidades fundamentales deben presentarse de tal manera que simplifiquen las del numerador como las del denominador.

2.2 Correlación Espuria

Karl Pearson observó por primera vez la correlación espuria en 1896. Basó sus observaciones en mediciones estadísticas de órganos y la llamó “correlación espuria”³² Pearson definió la correlación espuria como “La cantidad de correlación que aún existe entre los índices donde las longitudes absolutas de las que dependen son aleatorias.” La correlación espuria se puede definir como la correlación aparente que se produce entre variables aleatorias independientes producto de operaciones matemáticas entre ellas o la repetición de variables dentro de productos adimensionales.

En general, la correlación entre un grupo de variables independientes entre sí es nula. Sin embargo, la correlación entre combinaciones de variables aleatoria no es nula si en estas combinaciones hay variables comunes. La presencia de variables comunes en los parámetros dependiente e independientes puede introducir una correlación estadística que

³¹ Buckingham, según Bridgman, P. W. (1931) “Dimensional Analysis” Yale University Press, New Haven, USA.

³² Pearson, Karl. (1896) “Mathematical Contribution to the Theory of Evolution – On a Form of Spurious Correlation which may arise when indices are used in the Measurement of Organs” Proceedings. Royal Society of London. London, England, vol. 60.

puede no existir entre las variables dependiente e independientes. A esta relación se le conoce como correlación espuria.

Debido al constante uso de parámetros adimensionales, los campos de la Hidráulica y la Hidrología son especialmente susceptibles al mal uso del análisis dimensional, y por tanto, susceptibles a la correlación espuria.³³ Sin embargo, el conocimiento de la correlación espuria no se ha extendido en estas ciencias, sino que su conocimiento está restringido a áreas específicas de la literatura científica más relacionada con la estadística.³⁴

No tomar en cuenta o provocar efectos de correlación espuria produce errores, ya que falsea la posible correlación que existe entre los datos de origen, principalmente porque distorsiona el valor del coeficiente de correlación, generalmente, aumentando el valor de éste.

Como se mencionó anteriormente, una correlación espuria se produce cuando un parámetro, Π_1 , se correlaciona con un segundo parámetro, Π_2 , y ambos parámetros tienen alguna variable en común. Estos parámetros, Π_1 y Π_2 , pueden ser una suma, una razón, un producto o una variable.

Considérense tres variables independientes aleatorias x , y y z . Al ser independientes, los coeficientes de correlación entre estas variables es nulo, es decir, $r_{xy} = r_{yz} = r_{xz} = 0$. Al dibujar la gráfica de una función de la otra se obtendría una gráfica mostrando una dispersión sin un patrón definido. Sin embargo, si se forman dos parámetros, Π_1 y Π_2 , a partir de las variables originales, por ejemplo $\Pi_1 = x + y$ y $\Pi_2 = z + y$, el coeficiente de correlación de estos dos parámetros no es nulo, $r_{12} \neq 0$. Si se dibuja un parámetro en función de otro, se puede ajustar una línea a los puntos base.³⁵ Esto provoca que aparentemente, el parámetro x se pueda predecir a partir del parámetro z aunque estas sean independientes. El coeficiente de correlación r_{12} se le llama espurio porque implica una correlación entre dos parámetros formados a partir de variables independientes. El valor numérico de este coeficiente depende de la forma de los parámetros (suma, razón, producto, etc.) y la variabilidad de cada una de las variables originales.³⁶

2.3 Formula General de Correlación Espuria

La ecuación general de la correlación espuria se puede formular a partir de la ecuación general de la correlación entre dos funciones de Reed (1921) que se presenta a continuación³⁷:

Sean

- $x_1, x_2, x_3 \dots x_n$ un conjunto de n variables;
- $m_1, m_2, m_3 \dots m_n$ las medias de las variables;
- $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \dots \sigma_n$ las desviaciones estándar;

³³ Benson (1965); Yalin y Kamphuis (1971); Harrington y Kouwen (1978); Kenney, ref. K.

³⁴ Ref. 13, p. 1041.

³⁵ Ref. 13, p. 1041.

³⁶ Ref. 13, p. 1041.

³⁷ Ref. 5, pp. 3-4.

$r_{12}, r_{13}, r_{23} \dots r_{n-1 n}$ los coeficientes de correlación entre las variables tomadas en pares.

Y sean:

$x'_1, x'_2, x'_3 \dots x'_k$ un conjunto de k variables;

$m'_1, m'_2, m'_3 \dots m'_k$ las medias de las variables;

$\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3 \dots \sigma'_k$ las desviaciones estándar;

$r'_{12}, r'_{13}, r'_{23} \dots r'_{k-1 k}$ los coeficientes de correlación tomadas entre las variables tomadas en pares.

Si

$$y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

y

$$z = F(x'_1, x'_2, x'_3, \dots, x'_k)$$

dos funciones cualquiera de estos dos conjuntos de variables.

La correlación entre estas dos funciones estará dada por

$$r_{yz} = \frac{\sum_a \sum_b f_a F_b r_{ab} \sigma_a \sigma_b}{\left[\left(\sum_a \sum_c f_a f_c r_{ac} \sigma_a \sigma_c \right) \left(\sum_d \sum_b F_d F_b r_{db} \sigma_d \sigma_b \right) \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (2.1)$$

donde a y c varían desde x_1 hasta x_n ; d y b varían desde x'_1 hasta x'_k ;

y las expresiones f_a y F_b son las derivadas parciales de las ecuaciones originales:

$$f_a = \frac{\partial f(m_1, m_2, m_3, \dots, m_n)}{\partial m_a}; \quad (2.2a)$$

$$F_b = \frac{\partial F(m'_1, m'_2, m'_3, \dots, m'_k)}{\partial m_b}. \quad (2.2b)$$

La ec 2.1 se obtuvo por aproximación de series infinitas, despreciando términos de grados superiores a dos en los coeficientes de variación, C , dado por

$$C = \frac{\sigma}{m} \quad (1.6)$$

Donde m es la media de la variable y σ la desviación estándar.

A partir de la ec 2.1, si se tienen dos funciones

$$y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

y

$$z = F(x'_1, x'_2, x'_3, \dots, x'_k)$$

habrá correlación espuria total cuándo una o varias variables de y sean iguales a las de z , aunque todas las demás correlaciones entre las otras variables sean nulas, es decir

$$\begin{aligned}
 x_1 &= x'_1 \\
 x_2 &= x'_2 \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 x_h &= x'_L \text{ donde } h \leq n \text{ y } L \leq k
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

Según la definición de correlación espuria, el coeficiente de correlación entre las dos funciones, $r_{ab} = 0$, excepto para los casos en donde

$$a = b \begin{cases} \leq h \\ \leq L \end{cases}
 \tag{2.4}$$

En que $r_{ab} = 1$. Así de la ec 2.1, para $h = L$, se obtiene la ecuación general de correlación espuria

$$\rho_{yz} = \frac{\sum_e f_e F_e \sigma_e^2}{\left[\left(\sum_a f_a^2 \sigma_a^2 \right) \left(\sum_b F_b^2 \sigma_b^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}}}
 \tag{2.5}$$

Donde ρ_{yz} es el coeficiente de correlación espuria; y e varía desde x_1 hasta x_n .

En la práctica conviene obtener la correlación total de la ec 2.1 y luego y luego sustituir en esta misma ecuación las correlaciones nulas para calcular la correlación espuria.³⁸ Para saber si la correlación obtenida es espuria o no se deben comparar los dos coeficientes, el de correlación, r_{yz} (ec 2.1), y el de correlación espuria, ρ_{yz} (ec 2.5).

La relación es completamente espuria si al relacionar dos funciones se tiene que

$$r_{yz} = \rho_{yz}
 \tag{2.6a}$$

Y se tiene una correlación parcialmente espuria si se tiene que

$$r_{yz} > \rho_{yz}
 \tag{2.6b}$$

A partir de esto se puede definir un grado de espureidad dado por³⁹

$$G = \frac{\rho_{yz}}{r_{yz}}
 \tag{2.7}$$

La ecuación general de la correlación espuria según Pearson se puede utilizar para encontrar los coeficientes de correlación entre dos parámetros de correlación de cuatro variables y sus coeficientes de variación. Los casos básicos entre estas dos variables se dividen en:

1. Sumas y restas;

³⁸ Ref. 5, p. 5.

³⁹ Ref. 5, p. 5.

2. Razones y Productos, que a su vez se pueden clasificar como:

i. Correlación entre parámetros con un denominador común

$$y = \frac{x_1}{x_2}; z = \frac{x_3}{x_2}$$

ii. Correlación con un parámetro y una tercera variable

$$y = \frac{x_1}{x_2}; z = x_3$$

iii. Correlación de una relación con su propio denominador

$$y = \frac{x_1}{x_2}; z = x_2$$

iv. Correlación de una razón con su propio numerador

$$y = \frac{x_1}{x_2}; z = x_1$$

v. Correlación entre parámetros cuando el denominador de uno es el denominador del otro.

$$y = \frac{x_1}{x_2}; z = \frac{x_2}{x_4}$$

vi. La transformación logarítmica.

A continuación se presentan aplicaciones específicas de transformaciones de este tipo.

2.3.1.1 Sumas y Restas

El coeficiente de correlación, r_{xy} , entre dos variables x y y se define por medio de las desviaciones estándar de ambas variables y la covarianza entre ellas⁴⁰, es decir

$$r_{xy} = \frac{S_{xy}}{S_x S_y} \quad (2.8)$$

en el caso donde se tienen n pares de puntos (x_i, y_i) la ecuación se puede describir como:

$$r_{xy} = \frac{n \sum xy - \sum x \sum y}{\left[n \sum x^2 - (\sum x)^2 \right]^{1/2} \left[n \sum y^2 - (\sum y)^2 \right]^{1/2}} \quad (2.9)$$

⁴⁰ Para la definición de este coeficiente de correlación no es necesario distinguir entre la desviación estándar y covarianza de una muestra y de una población estos dos términos pueden utilizarse indistintamente. Según Pearson "la correlación puede ser de cualquier tipo por ejemplo: las frecuencias que no siguen la ley de gaus o la ley normal de error". (1897, pág. 491).

Para un parámetro que es la suma de dos variables, una como regresión de otra, el valor numérico del coeficiente de correlación espuria, r_{AB} se obtiene de la ecuación anterior. Sustituyendo $A = x + y$ y $B = x$, se obtiene⁴¹

$$r_{AB} = \frac{S_{AB}}{S_A S_B} = \frac{n \sum (x+y)(x) - \sum (x+y) \sum (x)}{\left[n \sum (x+y)^2 - (\sum (x+y))^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[n \sum x^2 - (\sum x)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (2.10)$$

Al expandir y simplificar lo anterior se obtiene

$$r_{AB} = \frac{S_x^2 + S_{xy}}{S_x \left[S_x^2 + S_y^2 + 2S_{xy} \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (2.11)$$

Al tomar en cuenta la ecuación que representa el coeficiente de la correlación entre las dos variables originales, la expresión anterior se simplifica como

$$r_{AB} = \frac{S_x + r_{xy} S_y}{\left[S_x^2 + S_y^2 + 2r_{xy} S_x S_y \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (2.12a)$$

Si se en esta última expresión se divide el numerador y el denominador entre S_y para examinar el valor asintótico del coeficiente r_{AB} cuando la razón entre la covarianza x entre la covarianza de y tiene en valor cercano a cero, es decir $S_x/S_y \rightarrow 0$,

$$r_{AB} = \frac{\frac{S_x}{S_y} + r_{xy}}{\left[\left(\frac{S_x}{S_y} \right)^2 + 1 + 2r_{xy} \left(\frac{S_x}{S_y} \right) \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (2.12b)$$

A partir de esta ecuación se puede observar que, cuando la variabilidad del término común x es mucho mayor que la variabilidad de y ($S_y/S_x \rightarrow 0$), entonces el coeficiente de correlación espuria tiende a uno, $r_{AB} \rightarrow 1$, independientemente del coeficiente de correlación entre x y y , r_{xy} . Cuando las variables son independientes, el valor del coeficiente de correlación entre ellas es nulo, $r_{xy} = 0$, por lo que la expresión anterior se puede describir como

$$r_{AB} = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{S_y}{S_x} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (2.13)$$

De la expresión anterior se puede deducir que el coeficiente de correlación entre dos parámetros $A = x + y$ y $B = x$ con un término común no es cero, incluso si los parámetros se forman de dos variables totalmente independientes. El valor de este coeficiente r_{AB} depende únicamente en la relación de las desviaciones estándar de x y y . Si estas son iguales, el coeficiente de correlación $r_{AB} = 0,71$. Si la desviación estándar de la variable

⁴¹ Ref. 13, p. 1042. Se utiliza el procedimiento planteado en esta referencia.

común x es grande, en comparación con la desviación estándar de y , el coeficiente de correlación espuria puede ser casi perfecto, es decir cuando $S_y/S_x \rightarrow 0$, $r_{AB} \rightarrow 1$.

Kenney (1982) dedujo una ecuación general para la correlación espuria de dos parámetros $A_i = \pm p_i \pm q_i$ y $B_i = \pm r_i \pm s_i$ siguiendo un procedimiento similar a lo anterior

$$r_{AB} = \frac{\pm r_{pr} S_p S_r \pm r_{qr} S_q S_r \pm r_{qs} S_q S_s \pm r_{ps} S_p S_s}{\left\{ S_p^2 + S_q^2 \pm 2r_{pq} S_p S_q \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ S_r^2 + S_s^2 \pm 2r_{rs} S_r S_s \right\}^{\frac{1}{2}}} \quad (2.14)$$

El signo es negativo antes de cada r_{vw} cuando el signo del producto $(\pm v)(\pm w)$ es negativo, siendo $v = p, q, r$, ó $s = w$.

En el caso de la suma, el valor medio de ambas variable no afecta la correlación espuria entre un parámetro que es la suma de los dos términos correlacionado contra uno de esos términos. Para la suma o diferencia, sólo la dispersión relativa de los puntos (S_y/S_x) es importante.

2.3.1.2 Razones y Productos

Pearson (1897) elaboró una expresión analítica para la correlación espuria de dos parámetros conformados por razones, $A_i = p_i/q_i$ y $B_i = r_i/s_i$, al sustituir en la ecuación que define el coeficiente de correlación razones de manera similar al caso de suma y resta. Sin embargo, la derivación de Pearson requería el uso expansión de series binomiales en la definición del coeficiente de variación, C , para cocientes donde el numerador σ es la desviación de un punto individual de la media μ . En el análisis de Pearson se despreciaron términos σ/μ de orden mayor a tres, por tanto, la ecuación de Pearson para razones

$$r_{AB} = \frac{r_{pr} C_p C_r - r_{ps} C_p C_s - r_{qr} C_q C_r + r_{qs} C_q C_s}{\left\{ C_p^2 + C_q^2 - 2r_{pq} C_p C_q \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ C_r^2 + C_s^2 - 2r_{rs} C_r C_s \right\}^{\frac{1}{2}}} \quad (2.15)$$

se puede aplicar sólo a datos con variaciones pequeñas con respecto a la media.⁴²

Reed (1921) elaboró un método generalizado para calcular el coeficiente de correlación espuria, r_{AB} , a partir de dos funciones analíticas cualquiera. Este método también asume que el coeficiente de variación, C , es pequeño. A pesar de esta limitación, Kenney (1982) demostró que para el caso de productos y razones, la correlación puede ser igualmente espuria incluso si no se pueden aplicar las condiciones descritas por Pearson, es decir, si la razón entre la desviación estándar de un punto y su media no son suficientemente pequeñas, la relación es igualmente espuria.

⁴² Ref. 13, p. 1043.

2.3.1.2.1 Correlación de una razón con su propio denominador

Para el caso donde una variable $A = y/x$ se correlaciona con su propio denominador $B = x$, la expresión de Pearson (ec 2.1) se replantea como

$$r_{AB} = \frac{r_{xy}C_y - C_x}{\left\{C_x^2 + C_y^2 - 2r_{xy}C_xC_y\right\}^{\frac{1}{2}}} \quad (2.16)$$

Si x y y son variables totalmente independientes, el coeficiente de correlación entre ellas es nulo, $r_{xy} = 0$, por lo que la expresión se rescribe como

$$r_{AB} = \frac{-1}{\left\{1 + \left(\frac{C_y}{C_x}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}} \quad (2.17)$$

Esta ecuación tiene la misma forma que la expresión para el coeficiente en el caso de sumas, pero utiliza el coeficiente de variación de las variables, C , en vez de la desviación estándar, S .

Sustituyendo valores en la expresión anterior se puede observar que:

Tabla 2.1 Valores del Coeficiente de Correlación para una razón y su propio denominador

Relación entre los Coeficientes de Variación	Coeficiente de Correlación Espuria
$C_x = C_y$	$r_{AB} = -0,71$
$C_x = 2C_y$	$r_{AB} = -0,89$
$C_x = 3C_y$	$r_{AB} = -0,95$

Se puede observar que para dos variables no relacionadas con la misma variabilidad, la correlación de la razón de dos variables con su propio denominador produce un coeficiente de correlación espuria con valor $r_{AB} = -0,71$. Conforme se incrementa la variación del elemento común, la correlación espuria se vuelve casi perfecta, $C_y/C_x \rightarrow 0$, $r_{AB} \rightarrow 1$.

Frecuentemente, las variables originales no son totalmente independientes. En estos casos, el valor del coeficiente de correlación espuria entre parámetros correlacionados es mucho mayor que entre las variables originales. Aunque existen casos en las que el coeficiente de correlación espuria puede ser menor.

2.3.1.2.2 Correlación de Dos Funciones con un Mismo Denominador

En ocasiones se relacionan dos razones con un mismo denominador. Considérese que

$$A = \frac{x_1}{x_2} \quad (2.18)$$

y

$$B = \frac{x_3}{x_2} \quad (2.19)$$

Para aplicar la fórmula de Pearson, se obtiene que para el parámetro A

$$f(m_1, m_2) = \frac{m_1}{m_2} \quad (2.20)$$

Y para el parámetro B

$$g(m_3, m_2) = \frac{m_3}{m_2} \quad (2.21)$$

Por tanto

$$f_1 = \frac{\partial f}{\partial m_1} = \frac{\partial}{\partial m_1} \left(\frac{m_1}{m_2} \right) = \frac{1}{m_2} \quad (2.22a)$$

$$f_2 = \frac{\partial f}{\partial m_2} = \frac{\partial}{\partial m_2} \left(\frac{m_1}{m_2} \right) = -\frac{m_1}{m_2^2} \quad (2.22b)$$

$$g_3 = \frac{\partial g}{\partial m_3} = \frac{\partial}{\partial m_3} \left(\frac{m_3}{m_2} \right) = \frac{1}{m_2} \quad (2.23a)$$

$$g_2 = \frac{\partial g}{\partial m_2} = \frac{\partial}{\partial m_2} \left(\frac{m_3}{m_2} \right) = -\frac{m_3}{m_2^2} \quad (2.23b)$$

Al sustituir estos resultados en la ec de Pearson en el numerador para valores $a = 1, 2$ y $b = 2, 3$

$$\begin{aligned} \sum_{a=1}^2 \sum_{b=2}^3 f_a g_b r_{ab} \sigma_a \sigma_b &= f_1 g_2 r_{12} \sigma_1 \sigma_2 + f_1 g_3 r_{13} \sigma_1 \sigma_3 + f_2 g_2 r_{22} \sigma_2 \sigma_2 + f_2 g_3 r_{23} \sigma_2 \sigma_3 \\ &= -\left(\frac{m_3}{m_2^3} \right) r_{12} \sigma_1 \sigma_2 + \left(\frac{1}{m_1 m_3} \right) r_{13} \sigma_1 \sigma_3 + \left(\frac{1}{m_2^2} \right) r_{22} \sigma_2^2 - \left(\frac{1}{m_2 m_3} \right) r_{23} \sigma_2 \sigma_3 \\ &= -r_{12} \left(\frac{\sigma_1}{m_1} \right) \left(\frac{\sigma_2}{m_2} \right) + r_{13} \left(\frac{\sigma_1}{m_1} \right) \left(\frac{\sigma_3}{m_3} \right) + r_{22} \left(\frac{\sigma_2^2}{m_2^2} \right) - r_{23} \left(\frac{\sigma_2}{m_2} \right) \left(\frac{\sigma_3}{m_3} \right) \\ &= -r_{12} C_1 C_2 + r_{13} C_1 C_3 + r_{22} C_2^2 - r_{23} C_2 C_3 \end{aligned}$$

En el término denominador, para $a = 1, 2$ y $c = 1, 2$

$$\sum_{a=1}^2 \sum_{c=1}^2 f_a f_c r_{ac} \sigma_a \sigma_c = f_1 f_1 r_{11} \sigma_1 \sigma_1 + f_1 f_2 r_{12} \sigma_1 \sigma_2 + f_2 f_1 r_{21} \sigma_2 \sigma_1 + f_2 f_2 r_{22} \sigma_2 \sigma_2$$

Al sustituir los valores correspondientes a las derivadas y multiplicando esta ecuación por $\frac{m_2^2}{m_1^2}$ se obtiene

$$\begin{aligned} & r_{11} \left(\frac{\sigma_1^2}{m_1^2} \right) - r_{12} \left(\frac{\sigma_1}{m_1} \right) \left(\frac{\sigma_2}{m_2} \right) - r_{21} \left(\frac{\sigma_1}{m_1} \right) \left(\frac{\sigma_2}{m_2} \right) + r_{22} \left(\frac{\sigma_2^2}{m_2^2} \right) \\ &= r_{11} C_1^2 - r_{12} C_1 C_2 - r_{21} C_1 C_2 + r_{22} C_2^2 \end{aligned}$$

Para el denominador del segundo término, para $b = 2,3$ y $d = 2,3$

$$\sum_{b=2}^3 \sum_{d=2}^3 g_b g_d r_{bd} \sigma_b \sigma_d = g_2 g_2 r_{22} \sigma_2 \sigma_2 + g_2 g_3 r_{23} \sigma_2 \sigma_3 + g_3 g_2 r_{32} \sigma_3 \sigma_2 + g_3 g_3 r_{33} \sigma_3 \sigma_3$$

Al sustituir los valores correspondientes a las derivadas y multiplicando por $\frac{m_2^2}{m_3^2}$ se obtiene

$$\begin{aligned} & r_{22} \left(\frac{\sigma_2^2}{m_2^2} \right) - r_{23} \left(\frac{\sigma_2}{m_2} \right) \left(\frac{\sigma_3}{m_3} \right) - r_{32} \left(\frac{\sigma_2}{m_2} \right) \left(\frac{\sigma_3}{m_3} \right) + r_{33} \left(\frac{\sigma_3^2}{m_3^2} \right) \\ &= r_{22} C_2^2 - r_{23} C_2 C_3 - r_{32} C_2 C_3 + r_{33} C_3^2 \end{aligned}$$

Al sustituir estos resultados en la ecuación de Pearson se obtiene

$$r_{AB} = \frac{-r_{12} C_1 C_2 + r_{13} C_1 C_3 + r_{22} C_2^2 - r_{23} C_2 C_3}{\left(r_{11} C_1^2 - r_{12} C_1 C_2 - r_{21} C_1 C_2 + r_{22} C_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(r_{22} C_2^2 - r_{23} C_2 C_3 - r_{32} C_3 C_2 + r_{33} C_3^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (2.21)$$

Si se considera que $r_{11} = r_{22} = r_{33} = 1$ y que $r_{23} = r_{32}$, se obtiene el coeficiente de correlación total entre las dos funciones consideradas⁴³

$$r_{AB} = \frac{-r_{12} C_1 C_2 + r_{13} C_1 C_3 - r_{23} C_2 C_3 + C_2^2}{\left(C_1^2 + C_2^2 - 2r_{12} C_1 C_2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(C_2^2 + C_3^2 - 2r_{23} C_2 C_3 \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (2.25)$$

Para obtener el coeficiente de correlación espuria, se considera la condición de que $r_{ij} = 0$ para $i \neq j$ y $r_{ii} = 1$. Es decir,

$$r_{12} = r_{13} = r_{23} = r_{21} = r_{32} = 0$$

Y

$$r_{11} = r_{22} = r_{33} = 1$$

Por tanto, la expresión del coeficiente de correlación espuria es (Chayes, 1949)

$$\rho_{AB} = \frac{C_2^2}{\left(C_1^2 + C_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(C_2^2 + C_3^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (2.26)$$

⁴³ Expresión obtenida por Chayes (1949).

2.3.1.2.3 Transformación Logarítmica

Si se correlaciona utilizando logaritmos o si se determina una correlación logarítmica con los parámetros $A = \log(y/x)$ contra $B = \log x$ en una escala lineal, una envolvente hiperbólica se transforma en una recta con pendiente de -1 . Esto provoca que el coeficiente de correlación, que es un indicador de la fuerza de la correlación lineal entre dos parámetros, sea mucho mayor que para una representación log-log.⁴⁴ Cuando se utilizan gráficas en escalas log-log los coeficientes de correlación pueden ser muy grandes debido a que la espureidad es mucho mayor.

Aunque las gráficas log-log dan correlaciones espurias de razones o productos aún más peligrosos al aumentar el valor del coeficiente de correlación, el valor esperado del coeficiente r_{AB} , para gráficas log-log se puede calcular a priori utilizando la ecuación para calcular el coeficiente de correlación para sumas y restas (ec 1.61). Eso se debe a que la gráfica de $\log(y/x)$ contra $\log x$ es idéntica a una gráfica de $\log y - \log x$ contra $\log x$. Por tanto, los coeficientes de correlación espuria se pueden calcular de la razón de la desviación estándar de $\log y$ a la desviación estándar de $\log x$ utilizando la ec 1.60 si $r_{\log x \log y} = 0$ ó la ec 1.61 si $r_{\log x \log y} \neq 0$.

A pesar de que la ecuación para sumas y restas se puede aplicar a la transformación logarítmica, los resultados varían un poco debido a que los valores absolutos de los datos afectan directamente los valores de $\log x$ y $\log y$ y sus desviaciones estándar.⁴⁵ En el caso de las regresiones lineales para una correlación totalmente espuria (cuando $r_{AB} \neq 0$, $r_{\log x \log y} = 0$) de cualquier parámetro tipo ley de potencia ($A = yx^m$ contra $B = x$) tendrá una pendiente m en una gráfica log log. Por tanto, siempre que un análisis de una correlación log log produzca un número para la pendiente de la línea de regresión, uno debe verificar la correlación espuria se produce al involucrar un término común elevado a alguna potencia en el parámetro ordenada.

Si un parámetro de forma $A = wyx^m$ (ordenada) se grafica contra un segundo parámetro de forma $B = vzx^n$ (abscisa), la pendiente de la línea de regresión para una correlación totalmente espuria es m/n , donde m y n pueden ser números positivos o negativos. Si la pendiente de la línea de regresión es significativamente distinta a m/n , entonces la línea de regresión no es una correlación totalmente espuria causada por el término común x , aunque los efectos espurios del término común aún estén presentes.

Para evitar los efectos de correlación espuria se debe evitar correlacionar parámetros con términos comunes. Si esto no se puede evitar, se deben evaluar cuidadosamente los efectos del término común, especialmente, los efectos del término común en la magnitud del coeficiente de correlación.

A continuación se muestran los coeficientes de correlación normal y espuria obtenidos por diversos autores para distintos modelos algebraicos.

⁴⁴ Ref. 13, p. 1046.

⁴⁵ Ref. 13, p. 1046.

Tabla 1.3 Modelos de relaciones comunes ⁴⁶

Modelo	Correlación Real (Pearson) r_{yz}	Correlación Totalmente Espuria $r_{ij} = 0, (i \neq j), \rho_{yz}$
$y = \frac{x_1}{x_2}$ $z = \frac{x_3}{x_4}$	$\frac{r_{13}C_1C_3 - r_{14}C_1C_4 - r_{23}C_2C_3 + r_{24}C_2C_4}{(C_1^2 + C_2^2 - 2r_{12}C_1C_2)^{\frac{1}{2}}(C_3^2 + C_4^2 - 2r_{34}C_3C_4)^{\frac{1}{2}}}$	0
$y = \frac{x_1}{x_2}$ $z = x_3$	$\frac{r_{13}C_1 - r_{23}C_2}{(C_1^2 + C_2^2 - 2r_{12}C_1C_2)^{\frac{1}{2}}}$	0
$y = \frac{x_1}{x_2}$ $z = \frac{x_1}{x_3}$	$\frac{C_1^2 - r_{13}C_1C_3 - r_{12}C_1C_2 + r_{23}C_2C_3}{(C_1^2 + C_2^2 - 2r_{12}C_1C_2)^{\frac{1}{2}}(C_1^2 + C_3^2 - 2r_{13}C_1C_3)^{\frac{1}{2}}}$	$\frac{C_1^2}{(C_1^2 + C_2^2)^{\frac{1}{2}}(C_1^2 + C_3^2)^{\frac{1}{2}}} = +\rho_{yz}$ $\rho_{yz} > 0$
Modelo	Correlación Real (Pearson) r_{yz}	Correlación Totalmente Espuria $r_{ij} = 0, (i \neq j), \rho_{yz}$
$y = \frac{x_5}{x_4}$ $z = \frac{x_6}{x_4}$	$\frac{C_4^2 + r_{56}C_5C_6 - r_{45}C_4C_5 - r_{46}C_4C_6}{(C_4^2 + C_5^2 - 2r_{45}C_4C_5)^{\frac{1}{2}}(C_4^2 + C_6^2 - 2r_{46}C_4C_6)^{\frac{1}{2}}}$	$\frac{C_4^2}{(C_4^2 + C_5^2)^{\frac{1}{2}}(C_4^2 + C_6^2)^{\frac{1}{2}}} = +\rho_{yz}$ $\rho_{yz} > 0$
$y = \frac{x_7}{x_8}$ $z = \frac{x_8}{x_9}$	$\frac{r_{78}C_7C_8 - r_{79}C_7C_9 + r_{89}C_8C_9 - C_8^2}{(C_7^2 + C_8^2 - 2r_{78}C_7C_8)^{\frac{1}{2}}(C_8^2 + C_9^2 - 2r_{89}C_8C_9)^{\frac{1}{2}}}$	$\frac{-C_8^2}{(C_7^2 + C_8^2)^{\frac{1}{2}}(C_8^2 + C_9^2)^{\frac{1}{2}}} = -\rho_{yz}$ $\rho_{yz} < 0$
$y = \frac{x_{10}}{x_{11}}$ $z = x_{10}$	$\frac{C_{10}^2 - r_{10,11}C_{11}}{(C_{10}^2 + C_{11}^2 - 2r_{10,11}C_{10}C_{11})^{\frac{1}{2}}}$	$\frac{C_{10}^2}{(C_{10}^2 + C_{11}^2)^{\frac{1}{2}}} = +\rho_{yz}$ $\rho_{yz} > 0$
$y = \frac{x_1}{x_2}$ $z = x_2$	$\frac{r_{12}C_1 - C_2}{(C_1^2 + C_2^2 - 2r_{12}C_1C_2)^{\frac{1}{2}}}$	$\frac{-C_2}{(C_1^2 + C_2^2)^{\frac{1}{2}}}$ $\rho_{yz} < 0$
$y = \frac{1}{x_2}$ $z = \frac{x_2}{x_4}$	$\frac{r_{24}C_4 - C_2}{(C_2^2 + C_4^2 - 2r_{24}C_2C_4)^{\frac{1}{2}}}$	$\frac{-C_2}{(C_2^2 + C_4^2)^{\frac{1}{2}}}$ $\rho_{yz} < 0$

⁴⁶ Ref. 13 y ref. 2, pp. 27 - 31

$y = \frac{x_1}{x_2}$ $z = x_2 x_3$	$\frac{r_{12}C_1C_2 + r_{13}C_1C_3 - C_2^2 - r_{23}C_2C_3}{(C_1^2 + C_2^2 - 2r_{12}C_1C_2)^{\frac{1}{2}}(C_2^2 + C_3^2 + 2r_{23}C_2C_3)^{\frac{1}{2}}}$	$\frac{-C_2^2}{(C_1^2 + C_2^2)^{\frac{1}{2}}(C_2^2 + C_3^2)^{\frac{1}{2}}}$ $\rho_{yz} < 0$
$y = \frac{x_1}{x_2^p}$ $z = x_2$	$\frac{r_{12}C_1C_2 - pC_2^2}{(C_1^2 + p^2C_2^2 - 2pr_{12}C_1C_2)^{\frac{1}{2}}(C_2^2)^{\frac{1}{2}}}$	$\frac{-pC_2^2}{(C_1^2 + p^2C_2^2)^{\frac{1}{2}}(C_2^2)^{\frac{1}{2}}}$ $\rho_{yz} < 0$
$y = x_1x_2$ $z = x_3x_4$	$\frac{r_{13}C_1C_3 + r_{14}C_1C_4 + r_{23}C_2C_3 + r_{24}C_2C_4}{(C_1^2 + C_2^2 + 2r_{12}C_1C_2)^{\frac{1}{2}}(C_3^2 + C_4^2 + 2r_{34}C_3C_4)^{\frac{1}{2}}}$	$\rho_{yz} = 0$
$y = x_1x_2$ $z = x_2x_3$	$\frac{r_{12}C_1C_2 + r_{13}C_1C_3 + r_{23}C_2C_3 + C_2^2}{(C_1^2 + C_2^2 + 2r_{12}C_1C_2)^{\frac{1}{2}}(C_2^2 + C_3^2 + 2r_{23}C_2C_3)^{\frac{1}{2}}}$	$\frac{C_2^2}{(C_1^2 + C_2^2)^{\frac{1}{2}}(C_2^2 + C_3^2)^{\frac{1}{2}}}$ $\rho_{yz} > 0$
$y = x_1x_2$ $z = x_3$	$\frac{r_{13}C_1 + r_{23}C_2}{(C_1^2 + C_2^2 + 2r_{12}C_1C_2)^{\frac{1}{2}}}$	$\rho_{yz} = 0$
$y = x_1x_2$ $z = x_2$	$\frac{r_{12}C_1 + C_2}{(C_1^2 + C_2^2 + 2r_{12}C_1C_2)^{\frac{1}{2}}}$	$\frac{C_2}{(C_1^2 + C_2^2)^{\frac{1}{2}}}$ $\rho_{yz} > 0$

2.3.2 Consideraciones Especiales para los Productos de Potencias

En el caso de funciones productos de potencias, por sus características algebraicas, se pueden realizar algunas simplificaciones que facilitan el procedimiento de la obtención del coeficiente de correlación total según la metodología de Pearson.

Considérense las funciones

$$y = Dx_1^n x_2^m x_3^p \quad (2.27)$$

Y

$$z = Ex_1^a x_2^b x_4^c \quad (2.28)$$

D y E son constantes. Transformadas en funciones f y g son

$$f = Dm_1^n m_2^m m_3^p \quad (2.29)$$

Y

$$g = Em_1^a m_2^b m_4^c \quad (2.30)$$

Sus derivadas son

$$\frac{\partial f}{\partial m_1} = Dnm_1^{n-1} m_2^m m_3^p = Dn \frac{m_1^{n-1} m_2^m m_3^p}{m_1} \quad (2.31a)$$

$$\frac{\partial f}{\partial m_2} = Dmm_1^n m_2^{m-1} m_3^p = Em \frac{m_1^n m_2^m m_3^p}{m_2} \quad (2.31b)$$

$$\frac{\partial f}{\partial m_3} = Dpm_1^n m_2^m m_3^{p-1} = Dp \frac{m_1^n m_2^m m_3^p}{m_3} \quad (2.31c)$$

Y

$$\frac{\partial g}{\partial m_1} = Eam_1^{a-1} m_2^b m_4^c = Ea \frac{m_1^a m_2^b m_4^c}{m_1} \quad (2.32a)$$

$$\frac{\partial g}{\partial m_2} = Ebm_1^a m_2^{b-1} m_4^c = Eb \frac{m_1^a m_2^b m_4^c}{m_2} \quad (2.32b)$$

$$\frac{\partial g}{\partial m_4} = Ecm_1^a m_2^b m_4^{c-1} = Ec \frac{m_1^a m_2^b m_4^c}{m_4} \quad (2.32c)$$

El numerador del coeficiente de correlación total en este caso sería

$$\begin{aligned} Num = & DE \frac{(an)m_1^{a+n} m_2^{b+m} m_3^{c+p}}{m_1 m_1} r_{11} \sigma_1 \sigma_1 + DE \frac{(am + bn)m_1^{a+n} m_2^{b+m} m_3^{c+p}}{m_1 m_2} r_{12} \sigma_1 \sigma_2 + \\ & + DE \frac{(ap)m_1^{a+n} m_2^{b+m} m_3^{c+p}}{m_1 m_3} r_{13} \sigma_1 \sigma_3 + DE \frac{(cn)m_1^{a+n} m_2^{b+m} m_3^{c+p}}{m_1 m_4} r_{14} \sigma_1 \sigma_4 + \\ & + DE \frac{(mb)m_1^{a+n} m_2^{b+m} m_3^{c+p}}{m_2 m_2} r_{22} \sigma_2 \sigma_2 + DE \frac{(bp)m_1^{a+n} m_2^{b+m} m_3^{c+p}}{m_2 m_3} r_{23} \sigma_2 \sigma_3 + \\ & + DE \frac{(mc)m_1^{a+n} m_2^{b+m} m_3^{c+p}}{m_2 m_4} r_{24} \sigma_2 \sigma_4 + DE \frac{(pc)m_1^{a+n} m_2^{b+m} m_3^{c+p}}{m_3 m_4} r_{34} \sigma_3 \sigma_4 \end{aligned} \quad (2.33)$$

Que se puede describir como

$$Num = DE m_1^{a+n} m_2^{b+m} m_3^{c+p} \left[(an)r_{11}C_1C_1 + (am + bn)r_{12}C_1C_2 + (ap)r_{13}C_1C_3 + (cn)r_{14}C_1C_4 + \right. \\ \left. + (mb)r_{22}C_2C_2 + (bp)r_{23}C_2C_3 + (mc)r_{24}C_2C_4 + (pc)r_{34}C_3C_4 \right] \quad (2.34)$$

De manera similar con el denominador correspondiente a la función f

$$\begin{aligned} Denl = & \frac{D^2 n^2 m_1^{2n} m_2^{2m} m_3^{2p}}{m_1 m_1} r_{11} \sigma_1 \sigma_1 + \frac{D^2 m^2 m_1^{2n} m_2^{2m} m_3^{2p}}{m_2 m_2} r_{22} \sigma_2 \sigma_2 + \\ & + \frac{D^2 p^2 m_1^{2n} m_2^{2m} m_3^{2p}}{m_3 m_3} r_{33} \sigma_3 \sigma_3 + \frac{2D^2 nm m_1^{2n} m_2^{2m} m_3^{2p}}{m_1 m_2} r_{12} \sigma_1 \sigma_2 + \\ & + \frac{2D^2 np m_1^{2n} m_2^{2m} m_3^{2p}}{m_1 m_3} r_{13} \sigma_1 \sigma_3 + \frac{2D^2 mp m_1^{2n} m_2^{2m} m_3^{2p}}{m_2 m_3} r_{23} \sigma_2 \sigma_3 \end{aligned} \quad (2.33)$$

Que al simplificar y obtener la raíz cuadrada resulta como

$$D_{enf} = Dm_1^n m_2^m m_3^p \left[n^2 r_{11} C_1 C_1 + m^2 r_{22} C_2 C_2 + p^2 r_{33} C_3 C_3 + 2mnr_{12} C_1 C_2 + \right. \\ \left. + 2npr_{13} C_1 C_3 + 2mpr_{23} C_2 C_3 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.34)$$

De manera similar, el producto resultante para la función g es

$$D_{eng} = Em_1^a m_2^b m_4^c \left[a^2 r_{11} C_1 C_1 + b^2 r_{22} C_2 C_2 + c^2 r_{44} C_4 C_4 + 2abr_{12} C_1 C_2 + \right. \\ \left. + 2acr_{14} C_1 C_4 + 2bcr_{24} C_2 C_4 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.35)$$

A partir de los valores anteriores, el coeficiente de correlación total es

$$r_{yz} = \frac{anC_1^2 + bmC_2^2 + (am + bn)r_{12}C_1 C_2 + apr_{13}C_1 C_3 + cnr_{14}C_1 C_4 + \\ + bpr_{23}C_2 C_3 + mcr_{24}C_2 C_4 + cpr_{34}C_3 C_4}{\left[n^2 C_1^2 + m^2 C_2^2 + p^2 C_3^2 + \right. \\ \left. + 2mnr_{12}C_1 C_2 + 2npr_{13}C_1 C_3 + \right. \\ \left. + 2mpr_{23}C_2 C_3 \right]^{\frac{1}{2}} \left[a^2 C_1^2 + b^2 C_2^2 + c^2 C_4^2 + \right. \\ \left. + 2abr_{12}C_1 C_2 + 2acr_{14}C_1 C_4 + \right. \\ \left. + 2bcr_{24}C_2 C_4 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (2.36)$$

Coficiente de correlación espuria, ρ_{yz} ,

$$\rho_{yz} = \frac{anC_1^2 + bmC_2^2}{\left[n^2 C_1^2 + m^2 C_2^2 + p^2 C_3^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[a^2 C_1^2 + b^2 C_2^2 + c^2 C_4^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (2.37)$$

Estas dos ecuaciones se pueden utilizar para calcular los coeficientes de correlación para productos de potencias de una manera más sencilla y sin necesidad de obtener las derivadas. Se puede observar que para obtener los coeficientes de correlación espuria y total, en el caso de productos de potencias, sólo es necesario conocer los exponentes de cada una de las variables.

2.3.3 Clasificación de las Condiciones de Espureidad

La condición de espureidad se define por medio del valor del grado de espureidad, GE .

Un $GE = 30\%$ se presenta siempre que se repite una variable dentro de los productos adimensionales. Por tanto, una expresión que tenga un grado de espureidad cercano a este valor, un grado de espureidad bajo, se puede considerar como confiable.

Una expresión con un grado de espureidad extremo, es decir, $GE \geq 100\%$, indica claramente la conveniencia de probar otros grupos de parámetros adimensionales para verificar la confiabilidad de la expresión propuesta. Si esto no es posible es recomendable que junto con sus resultados, el autor mencione que existe un grado de espureidad alto.

3. ANÁLISIS DE ESPUREIDAD

A continuación se muestran los coeficientes de correlación total y correlación espuria de los métodos analizados.

3.1 Diagrama de Shields

3.1.1 Números adimensionales originales τ_* y R_* .

Los parámetros adimensionales que utiliza Shields son

$$R_* = \frac{U_* D}{\nu} = 11,6 \frac{D}{\delta'} = \frac{D \sqrt{gdS}}{\nu} \quad (3.1)$$

Y

$$\tau_* = \frac{\tau_0}{D(\gamma_s - \gamma)} = \frac{RS}{gD(Ss-1)} \quad (3.2)$$

Se denominó el cortante adimensional, τ_* , como la función f y el número de Reynolds, R_* , de grano como la función g , por lo que las funciones f y g son las siguientes

$$f = m_1 m_2 m_3^{-1} m_4^{-1} \quad (3.3)$$

y

$$g = m_1^{\frac{1}{2}} m_2^{\frac{1}{2}} m_3 \quad (3.4)$$

Donde la el radio hidráulico, R , es la variable 1, la pendiente, S , es la variable 2, el diámetro, D , es la variable 3 y la gravedad específica, $Ss-1$, es la variable 4. Al ser ambas productos de potencias, no es necesario encontrar cada una de las derivadas. Los coeficientes de correlación total y espuria de estas dos variables son

Coefficiente de correlación total, r_{yz} ,

$$r_{yz} = \frac{C_1^2 + C_2^2 - 2C_3^2 + 2r_{12}C_1C_2 + r_{13}C_1C_3 + r_{23}C_2C_3 - r_{14}C_1C_4 - r_{24}C_2C_4 - r_{34}C_3C_4}{\left[\begin{array}{l} C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + 2r_{12}C_1C_2 - \\ -2r_{13}C_1C_3 - 2r_{14}C_1C_4 - 2r_{23}C_2C_3 - \\ -2r_{24}C_2C_4 + 2r_{34}C_3C_4 \end{array} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\begin{array}{l} C_1^2 + C_2^2 + 4C_3^2 + 2r_{12}C_1C_2 + \\ + 4r_{13}C_1C_3 + 4r_{23}C_2C_3 \end{array} \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.5)$$

Coefficiente de correlación espuria, ρ_{yz} ,

$$\rho_{yz} = \frac{C_1^2 + C_2^2 - 2C_3^2}{\left[C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[C_1^2 + C_2^2 + 4C_3^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.6)$$

3.1.2 Diagrama de Shields con parámetros cortante adimensional, τ_* , y Diámetro adimensional, D_* .

Las variables que se utilizan son

$$\tau_* = \frac{\tau_0}{D(\gamma_s - \gamma)} = \frac{RS}{gD(Ss-1)} \quad (3.2)$$

y

$$D_* = D_{50} \left[\frac{(Ss-1)g}{v^2} \right]^{1/3} \quad (3.7)$$

Se denominó el cortante adimensional, τ_* , como la función f y el diámetro adimensional, D_* , como la función g , por lo que las funciones f y g son las siguientes

$$f = m_1 m_2 m_3^{-1} m_4^{-1} \quad (3.3)$$

y

$$g = m_3 m_4^{\frac{1}{4}} \quad (3.8)$$

Donde el radio hidráulico, R , es la variable 1, la pendiente, S , es la variable 2, el diámetro, D_{50} , es la variable 3 y la gravedad específica, $Ss-1$, es la variable 4. Al ser ambas productos de potencias, no es necesario encontrar cada una de las derivadas. Los coeficientes de correlación total y espuria de estas dos variables son

Coefficiente de correlación total, r_{yz} ,

$$r_{yz} = \frac{-C_3^2 - \frac{1}{3}C_4^2 + r_{13}C_1C_3 + r_{23}C_2C_3 - \frac{4}{3}r_{34}C_3C_4 + \frac{1}{3}r_{14}C_1C_4 + \frac{1}{3}r_{24}C_2C_4}{\left[C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + 2r_{12}C_1C_2 - \right.} \quad (3.9)$$

$$\left. \begin{array}{l} -2r_{13}C_1C_3 - 2r_{14}C_1C_4 - 2r_{23}C_2C_3 - \\ -2r_{24}C_2C_4 + 2r_{34}C_3C_4 \end{array} \right]^{\frac{1}{2}} \left[C_3^2 + \frac{1}{3}C_4^2 + \frac{2}{3}r_{34}C_3C_4 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Coefficiente de correlación espuria, ρ_{yz} ,

$$\rho_{yz} = \frac{-C_3^2 - \frac{1}{3}C_4^2}{\left[C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[C_3^2 + \frac{1}{9}C_4^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.10)$$

3.2 Método de Bronwlie

3.2.1 Ecuaciones

Las ecuaciones del método de Brownlie son

Para el régimen inferior

$$\frac{R}{D_{50}} = 0.3724q_*^{0.6539} S^{-0.2542} \sigma_g^{0.1050} \quad (3.11a)$$

y para el régimen superior

$$\frac{R}{D_{50}} = 0.2836q_*^{0.6248} S^{-0.2877} \sigma_g^{0.08013} \quad (3.11b)$$

Donde el gasto unitario adimensional es

$$q_* = \frac{q}{gD_{50}^3} = \frac{Ud}{gD_{50}^3} \quad (3.12)$$

a) Ecuación original del régimen inferior

Sustituyendo la ecuación del gasto unitario adimensional en la ecuación original se obtuvo

$$\frac{R}{D_{50}} = 0,3724 \left[\frac{UR}{\sqrt{gD_{50}^3}} \right]^{0,6539} S^{-0,2542} \sigma_g^{0,1050} \quad (3.11c)$$

Se denominó el término del lado izquierdo como la función f y el término del lado derecho como el termino g . Estas funciones son

$$f = m_1 m_3^{-1} \quad (3.12)$$

y

$$g = m_1^{0,6539} m_2^{-0,2542} m_3^{-0,98085} m_4^{0,6539} m_5^{0,1050} \quad (3.13)$$

Donde el radio hidráulico, R , es la variable 1, la pendiente, S , es la variable 2, el diámetro, D_{50} , ese la variable 3, la velocidad media, U , es la variable 4 y la desviación estándar geométrica de tamaño de partícula, σ_g , es la variable 5. Al ser ambas productos de potencias, no es necesario encontrar cada una de las derivadas.

Los coeficientes de correlación total y espuria de esta ecuación son

Coficiente de correlación total, r_{yz} ,

$$r_{yz} = \frac{0,6539C_1^2 + 0,9805C_3^2 - 0,2542r_{12}C_1C_2 - 1,6348r_{13}C_1C_3 + 0,6539r_{14}C_1C_4 + 0,105r_{15}C_1C_5 + 0,2542r_{23}C_2C_3 - 0,6539r_{34}C_3C_4 - 0,105r_{35}C_3C_5}{\left[\begin{aligned} &0,4276C_1^2 + 0,0646C_2^2 + 0,9621C_3^2 + 0,4276C_4^2 + \\ &+ 0,0113C_5^2 - 0,3324r_{12}C_1C_2 - 1,2827r_{13}C_1C_3 - \\ &[C_1^2 + C_3^2 - 2r_{13}C_1C_3]^{\frac{1}{2}} - 0,8552r_{14}C_1C_4 + 0,1373r_{15}C_1C_5 + 0,4987r_{23}C_2C_3 - \\ &- 0,3324r_{24}C_2C_4 - 0,0534r_{25}C_2C_5 - 1,2827r_{34}C_3C_4 - \\ &- 0,2060r_{35}C_3C_5 + 0,1373r_{45}C_4C_5 \end{aligned} \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.14a)$$

Coefficiente de correlación espúria, ρ_{yz} ,

$$\rho_{yz} = \frac{0,6539C_1^2 + 0,9805C_3^2}{\left[C_1^2 + C_3^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[0,4276C_1^2 + 0,0646C_2^2 + 0,9621C_3^2 + 0,4276C_4^2 + 0,01103C_5^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.14b)$$

- b) Ecuación del régimen inferior rescrita en función del número de Froude de Grano y la rugosidad relativa.

En la ecuación original de Brownlie para el régimen inferior se repite en ambos lados la rugosidad relativa. Se rescribió la ecuación resolviéndola en función del número de Froude de grano

$$F_{D_{50}} = \frac{U}{\sqrt{gD_{50}}} \quad (3.15)$$

De esta manera se obtuvo una ecuación escrita en términos de productos adimensionales que sólo tienen en común una sola variable, el diámetro representativo, D_{50} .

$$\frac{U}{\sqrt{gD_{50}}} = 4,5295 \left(\frac{R}{D_{50}} \right)^{0,5293} S^{0,3887} \sigma_g^{-0,1606} \quad (3.16)$$

Se denominó al número de Froude de grano, $F_{D_{50}}$, como la función f y el término del lado derecho como la función g , quedando éstas como

$$f = m_3^{-0,5} m_4 \quad (3.17)$$

y

$$g = m_1^{0,5293} m_2^{0,3887} m_3^{-0,5293} m_5^{-0,1606} \quad (3.18)$$

Donde el radio hidráulico, R , es la variable 1, la pendiente, S , es la variable 2, el diámetro, D_{50} , es la variable 3, la velocidad media, U , es la variable 4 y la desviación estándar geométrica de tamaño de partícula, σ_g , es la variable 5. Al ser ambas productos de potencias, no es necesario encontrar cada una de las derivadas.

Los coeficientes de correlación total y espuria de esta ecuación son

Coefficiente de correlación total, r_{yz} ,

$$r_{yz} = \frac{0,2646C_3^2 - 0,2646r_{13}C_1C_3 + 0,5293r_{14}C_1C_4 - 0,1944r_{23}C_2C_3 + 0,3887r_{24}C_2C_4 - 0,5293r_{34}C_3C_4 + 0,0803r_{35}C_3C_5 - 0,1606r_{45}C_4C_5}{\left[0,25C_3^2 + C_4^2 - r_{34}C_3C_4 \right]^{\frac{1}{2}} \left[0,2802C_1^2 + 0,1511C_2^2 + 0,2802C_3^2 + 0,0258C_5^2 + 0,4115r_{12}C_1C_2 - 0,5603r_{13}C_1C_3 - 0,170r_{15}C_1C_5 - 0,4115r_{23}C_2C_3 - 0,1248r_{25}C_2C_5 + 0,170r_{35}C_3C_5 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.19)$$

Coefficiente de correlación espúria, ρ_{yz} ,

$$\rho_{yz} = \frac{0,2646C_3^2}{\left[0,25C_3^2 + C_4^2\right]^{\frac{1}{2}} \left[0,2802C_1^2 + 0,1511C_2^2 + 0,2802C_3^2 + 0,0258C_5^2\right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.20)$$

c) Ecuación original del régimen superior

Sustituyendo la ecuación del gasto unitario adimensional en la ecuación original se obtuvo

$$\frac{R}{D_{50}} = 0,2836 \left[\frac{UR}{\sqrt{gD_{50}^3}} \right]^{0,6248} S^{-0,2877} \sigma_g^{0,08013} \quad (3.21)$$

Se denominó el término del lado izquierdo como la función f y el término del lado derecho como el término g . Estas funciones son

$$f = m_1 m_3^{-1} \quad (3.22)$$

y

$$g = m_1^{0,6248} m_2^{-0,2877} m_3^{-0,9372} m_4^{0,6248} m_5^{0,08013} \quad (3.23)$$

Donde la el radio hidráulico, R , es la variable 1, la pendiente, S , es la variable 2, el diámetro, D_{50} , es la variable 3, la velocidad media, U , es la variable 4 y la desviación estándar geométrica de tamaño de partícula, σ_g , es la variable 5. Al ser ambas productos de potencias, no es necesario encontrar cada una de las derivadas.

Los coeficientes de correlación total y espuria de esta ecuación son

Coefficiente de correlación total, r_{yz} ,

$$r_{yz} = \frac{0,6248C_1^2 + 0,972C_3^2 - 0,2877r_{12}C_1C_2 - 1,562r_{13}C_1C_3 + 0,6248r_{14}C_1C_4 + 0,0801r_{15}C_1C_5 - 0,6248r_{34}C_3C_4 - 0,08013r_{35}C_3C_5}{\left[C_1^2 + C_3^2 - 2r_{13}C_1C_3 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\begin{array}{l} 0,3904C_1^2 + 0,0828C_2^2 + 0,8783C_3^2 + 0,3904C_4^2 + 0,0064C_5^2 - \\ - 0,3595r_{12}C_1C_2 - 1,1711r_{13}C_1C_3 + 0,7807r_{14}C_1C_4 + 0,1001r_{15}C_1C_5 + \\ + 0,5393r_{23}C_2C_3 - 0,3595r_{24}C_2C_4 - 0,0461r_{25}C_2C_5 - 1,1711r_{34}C_3C_4 - \\ - 0,1502r_{35}C_3C_5 + 0,1001r_{45}C_4C_5 \end{array} \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.24)$$

Coefficiente de correlación espúria, ρ_{yz} ,

$$\rho_{yz} = \frac{0,6248C_1^2 + 0,972C_3^2}{\left[C_1^2 + C_3^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[0,3904C_1^2 + 0,0828C_2^2 + 0,8783C_3^2 + 0,3904C_4^2 + 0,0064C_5^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.25)$$

d) Ecuación del régimen superior rescrita en función del número de Froude de Grano y la Rugosidad Relativa

De la misma manera que en el caso del régimen anterior, en la ecuación del régimen superior se encuentra el término rugosidad relativa, R/D_{50} , repetido en ambos lados de la ecuación, por lo que puede rescribirse para simplificar los términos de ambos lados.

Se rescribió esta ecuación para resolverla en términos del número de Froude de grano, quedando ésta como

$$\frac{U}{\sqrt{gD_{50}}} = 7,5154 \left(\frac{R}{D_{50}} \right)^{0,6005} S^{0,4605} \sigma_g^{-0,1282} \quad (3.25)$$

Se denominó al número de Froude de grano, F_{D50} , como la función f y el término del lado derecho como la función g , quedando éstas como

$$f = m_3^{-0,5} m_4 \quad (3.26)$$

y

$$g = m_1^{0,60051} m_2^{0,46047} m_3^{-0,60051} m_5^{-0,12825} \quad (3.27)$$

Donde el radio hidráulico, R , es la variable 1, la pendiente, S , es la variable 2, el diámetro, D_{50} , es la variable 3, la velocidad media, U , es la variable 4 y la desviación estándar geométrica de tamaño de partícula, σ_g , es la variable 5. Al ser ambas productos de potencias, no es necesario encontrar cada una de las derivadas.

Los coeficientes de correlación total y espuria de esta ecuación son

Coefficiente de correlación total, r_{yz} ,

$$r_{yz} = \frac{0,3003C_3^2 - 0,3003r_{13}C_1C_3 + 0,6005r_{14}C_1C_4 - 0,2302r_{23}C_2C_3 + 0,4605r_{24}C_2C_4 - 0,6005r_{34}C_3C_4 - 0,0641r_{35}C_3C_5 - 0,1283r_{45}C_4C_5}{\left[\left(0,25C_3^2 + C_4^2 - r_{34}C_3C_4 \right)^2 + \left(0,3606C_1^2 + 0,2120C_2^2 + 0,3606C_3^2 + 0,0164C_5^2 + 0,5530r_{12}C_1C_2 - 0,7212r_{13}C_1C_3 - 0,1540r_{15}C_1C_5 - 0,5530r_{23}C_2C_3 - 0,1181r_{25}C_2C_5 + 0,1540r_{35}C_3C_5 \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.28)$$

Coefficiente de correlación espuria, ρ_{yz} ,

$$\rho_{yz} = \frac{0,3003C_3^2}{\left[\left(0,25C_3^2 + C_4^2 \right)^2 + \left(0,3606C_1^2 + 0,2120C_2^2 + 0,3606C_3^2 + 0,0164C_5^2 \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.29)$$

3.3 Método de Karim y Kennedy

Este método está dividido en las siguientes formulaciones:

Relación Gasto Sólido y Velocidad no Asociados

$$\frac{U}{g(Ss-1)D_{50}} = 2,822 \left[\frac{q}{g(Ss-1)D_{50}^3} \right]^{0,376} S^{0,310} \quad (3.30)$$

Relación Formas de fondo y Velocidad Asociadas

Formulación IIA

$$\frac{U}{\sqrt{g(Ss-1)D_{50}}} = 3,197 \left[\frac{q}{\sqrt{g(Ss-1)D_{50}^3}} \right]^{0,385} S^{0,309} \left(\frac{f}{f_0} \right)^{-0,283} \quad (3.31)$$

Formulación IIB

$$\frac{U}{\sqrt{g(Ss-1)D_{50}}} = 6,683 \left(\frac{d}{D_{50}} \right)^{0,626} S^{0,503} \left(\frac{f}{f_0} \right)^{-0,465} \quad (3.32)$$

Donde

$$\frac{f}{f_0} = 1,20 + 8,92 \left[0,080 + 2,27 \left(\frac{\tau_*}{3} \right) - 18,13 \left(\frac{\tau_*}{3} \right)^2 + 70,90 \left(\frac{\tau_*}{3} \right)^3 - 88,33 \left(\frac{\tau_*}{3} \right)^4 \right]; \tau_* \leq 1,5 \quad (3.33a)$$

$$\frac{f}{f_0} = 1,20; \tau_* > 1,5 \quad (3.33b)$$

3.3.1 Formulación Gasto Sólido y Velocidad no Asociados

a) Ecuación original

Al sustituir la definición de gasto unitario en la ecuación original se obtuvo la siguiente ecuación

$$\frac{U}{\sqrt{g(Ss-1)D_{50}}} = 2,822 \left[\frac{UR}{\sqrt{g(Ss-1)D_{50}^3}} \right]^{0,376} S^{0,310} \quad (3.34)$$

Se determinó que el término del lado izquierdo como la función f y el término del lado derecho como la función g , por lo que éstas son

$$f = m_3^{-0,5} m_4^{-0,5} m_5 \quad (3.35)$$

y

$$g = m_1^{0,376} m_2^{0,310} m_3^{-0,564} m_4^{-0,188} m_5^{0,376} \quad (3.36)$$

Donde el radio hidráulico, R , es la variable 1, la pendiente, S , es la variable 2, el diámetro, D_{50} , es la variable 3, la gravedad específica, $Ss-1$, es la variable 4 y la velocidad media, U , es la variable 5. Al ser ambas productos de potencias, no es necesario encontrar cada una de las derivadas.

Los coeficientes de correlación total y espuria de esta ecuación son

Coefficiente de correlación total, r_{yz} ,

$$r_{yz} = \frac{0,282C_3^2 + 0,094C_4^2 + 0,376C_5^2 - 0,188r_{13}C_1C_3 - 0,155r_{23}C_2C_3 + 0,376r_{34}C_3C_4 - 0,752r_{35}C_3C_5 - 0,188r_{14}C_1C_4 - 0,155r_{24}C_2C_4 - 0,376r_{45}C_4C_5 + 0,376r_{15}C_1C_5 + 0,310r_{25}C_2C_5}{\left[\begin{array}{l} 0,1414C_1^2 + 0,0961C_2^2 + 0,3181C_3^2 + 0,0353C_4^2 + \\ 0,25C_3^2 + 0,25C_4^2 + \\ + C_5^2 + 0,5r_{34}C_3C_4 - \\ - r_{35}C_3C_5 - r_{45}C_4C_5 \end{array} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\begin{array}{l} 0,1414C_1^2 + 0,0961C_2^2 + 0,3181C_3^2 + 0,0353C_4^2 + \\ + 0,1414C_5^2 + 0,2331r_{12}C_1C_2 - 0,4241r_{13}C_1C_3 - \\ - 0,1414r_{14}C_1C_4 + 0,2827r_{15}C_1C_5 - 0,3497r_{23}C_2C_3 - \\ - 0,1166r_{24}C_2C_4 + 0,2331r_{25}C_2C_5 + 0,2121r_{34}C_3C_4 - \\ - 0,4241r_{35}C_3C_5 - 0,1414r_{45}C_4C_5 \end{array} \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.37)$$

Coefficiente de correlación espuria, ρ_{yz} ,

$$\rho_{yz} = \frac{0,282C_3^2 + 0,094C_4^2 + 0,376C_5^2}{\left[0,25C_3^2 + 0,25C_4^2 + C_5^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[0,1414C_1^2 + 0,0961C_2^2 + 0,3181C_3^2 + 0,0353C_4^2 + 0,1414C_5^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.38)$$

b) Ecuación rescrita en términos del número de Froude de grano y la rugosidad relativa

Al rescribir la ecuación original y resolverla para el número de Froude de grano se obtuvo

$$\frac{U}{\sqrt{gD_{50}}} = 5,2729\sqrt{(Ss-1)}\left(\frac{d}{D_{50}}\right)^{0,60256} S^{0,4968} \quad (3.39)$$

Se determinó que el término del lado izquierdo como la función f y el término del lado derecho como la función g , por lo que éstas son

$$f = m_3^{-0,5} m_5 \quad (3.40)$$

y

$$g = m_1^{0,6026} m_2^{0,4968} m_3^{-0,6026} m_4^{0,5} \quad (3.41)$$

Donde el radio hidráulico, R , es la variable 1, la pendiente, S , es la variable 2, el diámetro, D_{50} , es la variable 3, la gravedad específica, $Ss-1$, es la variable 4 y la velocidad media, U , es la variable 5.

Al ser ambas productos de potencias, no es necesario encontrar cada una de las derivadas. Los coeficientes de correlación total y espuria de esta ecuación son

Coefficiente de correlación total, r_{yz} ,

$$r_{yz} = \frac{0,3013C_3^2 - 0,3013r_{13}C_1C_3 + 0,6026r_{15}C_1C_5 - 0,2484r_{23}C_2C_3 + 0,4968r_{25}C_2C_5 - 0,6026r_{35}C_3C_5 - 0,25r_{34}C_3C_4 + 0,5r_{45}C_4C_5}{\left[\left[0,25C_3^2 + C_5^2 - r_{35}C_3C_5 \right]^{\frac{1}{2}} \left[0,3631C_1^2 + 0,2468C_2^2 + 0,3631C_3^2 + 0,25C_4^2 + 0,5987r_{12}C_1C_2 - 0,7262r_{13}C_1C_3 + 0,6026r_{14}C_1C_4 - 0,5987r_{23}C_2C_3 + 0,4968r_{24}C_2C_4 - 0,6026r_{34}C_3C_4 \right]^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.42)$$

Coefficiente de correlación espuria, ρ_{yz} ,

$$\rho_{yz} = \frac{0,3013C_3^2}{\left[0,25C_3^2 + C_5^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[0,3631C_1^2 + 0,2468C_2^2 + 0,3631C_3^2 + 0,25C_4^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.43)$$

3.3.2 Formulación IIA: Relación Formas de fondo y Velocidad Asociadas

a) Ecuación original cuando (f/f_0) es constante

Al sustituir la definición de gasto unitario en la ecuación original de la formulación IIA se obtuvo la expresión

$$\frac{U}{\sqrt{g(Ss-1)D_{50}}} = 3,197 \left[\frac{UR}{\sqrt{g(Ss-1)D_{50}^3}} \right]^{0,385} S^{0,309} \left(\frac{f}{f_0} \right)^{-0,283} \quad (3.44)$$

A partir de la expresión, se determinó que el término del lado izquierdo como la función f y el término del lado derecho como la función g , por lo que éstas son

$$f = m_3^{-0,5} m_4^{-0,5} m_5 \quad (3.45)$$

y

$$g = m_1^{0,385} m_2^{0,309} m_3^{-0,5775} m_4^{-0,1925} m_5^{0,385} \quad (3.46)$$

Donde el radio hidráulico, R , es la variable 1, la pendiente, S , es la variable 2, el diámetro, D_{50} , es la variable 3, la gravedad específica, $Ss-1$, es la variable 4 y la velocidad media, U , es la variable 5.

Al ser ambas productos de potencias, no es necesario encontrar cada una de las derivadas. Los coeficientes de correlación total y espuria de esta ecuación son

Coefficiente de correlación total, r_{yz} ,

$$r_{yz} = \frac{0,2887C_3^2 + 0,09625C_4^2 + 0,385C_5^2 - 0,1925r_{13}C_1C_3 - 0,1925r_{14}C_1C_4 + 0,385r_{15}C_1C_5 - 0,1545r_{23}C_2C_3 - 0,1545r_{24}C_2C_4 + 0,385r_{25}C_2C_5 + 0,385r_{34}C_3C_4 - 0,77r_{35}C_3C_5 - 0,385r_{45}C_4C_5}{\left[\begin{array}{l} 0,25C_3^2 + 0,25C_4^2 + \\ + C_5^2 + 0,5r_{34}C_3C_4 - \\ - r_{35}C_3C_5 - r_{45}C_4C_5 \end{array} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\begin{array}{l} 0,1482C_1^2 + 0,0955C_2^2 + 0,3335C_3^2 + 0,0370C_4^2 + \\ + 0,1482C_5^2 + 0,2379r_{12}C_1C_2 - 0,4447r_{13}C_1C_3 - \\ - 0,1482r_{14}C_1C_4 + 0,2964r_{15}C_1C_5 - 0,3569r_{23}C_2C_3 - \\ - 0,1189r_{24}C_2C_4 + 0,2379r_{25}C_2C_5 + 0,2223r_{34}C_3C_4 - \\ - 0,4447r_{35}C_3C_5 - 0,1482r_{45}C_4C_5 \end{array} \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.47)$$

Coefficiente de correlación espuria, ρ_{yz} ,

$$\rho_{yz} = \frac{0,2887C_3^2 + 0,09625C_4^2 + 0,385C_5^2}{\left[0,25C_3^2 + 0,25C_4^2 + C_5^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\begin{array}{l} 0,1482C_1^2 + 0,0955C_2^2 + 0,3335C_3^2 + \\ + 0,0370C_4^2 + 0,1482C_5^2 \end{array} \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.48)$$

- b) Ecuación rescrita en función del número de Froude de grano y la rugosidad relativa cuando (f/f_0) es constante

Debido a que en ambos lados de la ecuación original de la formulación IIA se repite el producto adimensional número de Froude de grano, se optó por describirla simplificando esos términos. La ecuación resultante es

$$\frac{U}{\sqrt{gD_{50}}} = 6,6179\sqrt{(Ss-1)} \left(\frac{d}{D_{50}} \right)^{0,6260} S^{0,5024} \left(\frac{f}{f_0} \right)^{-0,4602} \quad (3.49)$$

Se determinó que el término del lado izquierdo como la función f y el término del lado derecho como la función g , por lo que éstas son

$$f = m_3^{-0,5} m_5 \quad (3.50)$$

y

$$g = m_1^{0,626} m_2^{0,5024} m_3^{-0,626} m_4^{0,5} \quad (3.51)$$

Donde el radio hidráulico, R , es la variable 1, la pendiente, S , es la variable 2, el diámetro, D_{50} , es la variable 3, la gravedad específica, $Ss-1$, es la variable 4 y la velocidad media, U , es la variable 5.

Al ser ambas productos de potencias, no es necesario encontrar cada una de las derivadas. Los coeficientes de correlación total y espuria de esta ecuación son

Coefficiente de correlación total, r_{yz} ,

$$r_{yz} = \frac{0,313C_3^2 - 0,313r_{13}C_1C_3 + 0,626r_{15}C_1C_5 - 0,2512r_{23}C_2C_3 + 0,5024r_{25}C_2C_5 - 0,626r_{35}C_3C_5 - 0,25r_{34}C_3C_4 + 0,5r_{45}C_4C_5}{\left[\begin{array}{l} 0,3919C_1^2 + 0,2524C_2^2 + 0,3919C_3^2 + 0,25C_4^2 + \\ [0,25C_3^2 + C_5^2 - r_{35}C_3C_5] \\ + 0,6290r_{12}C_1C_2 - 0,7837r_{13}C_1C_3 + 0,626r_{14}C_1C_4 - \\ - 0,6290r_{23}C_2C_3 + 0,5024r_{24}C_2C_4 - 0,626r_{34}C_3C_4 \end{array} \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.52)$$

Coefficiente de correlación espuria, ρ_{yz} ,

$$\rho_{yz} = \frac{0,313C_3^2}{\left[0,25C_3^2 + C_5^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[0,3919C_1^2 + 0,2524C_2^2 + 0,3919C_3^2 + 0,25C_4^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.53)$$

c) Ecuación original cuando $(f/f_0) = \phi(\tau_*)$

Para este caso, la razón de rugosidad total a rugosidad de grano se puede describir, simplificando términos, de la siguiente manera

$$\frac{f}{f_0} = 1,9136 + 6,7495\tau_* - 17,9688\tau_*^2 + 23,42326\tau_*^3 - 8,65848\tau_*^4 \quad (3.54)$$

A su vez, tomando en cuenta el cortante adimensional, τ_* ,

$$\tau_* = \frac{RS}{D(Ss - 1)} \quad (3.55)$$

Es necesario derivar la ecuación de la formulación IIA para aplicar la ecuación de Pearson para la obtención de los coeficientes de correlación total y espuria.

Se definió una función valor cortante adimensional medio, m_{τ_*} , a partir de la definición del cortante adimensional, τ_* , con la siguiente forma

$$m_{\tau_*} = \frac{m_1 m_2}{m_3 m_4} \quad (3.56)$$

Al mismo tiempo, se definió una función M para expresar la razón entre la rugosidad total y la rugosidad de grano, f/f_0 , en función del valor cortante adimensional medio, m_{τ_*} , de forma

$$M = 1,9136 + 6,7495m_{\tau_*} - 17,9688m_{\tau_*}^2 + 23,42326m_{\tau_*}^3 - 8,65848m_{\tau_*}^4 \quad (3.57)$$

Tomando en cuenta lo anterior, función f , el lado derecho de la expresión original, y la función g , el lado izquierdo de la expresión, son

$$f = m_3^{-0,5} m_4^{-0,5} m_5 \quad (3.58)$$

y

$$g = m_1^{0,385} m_2^{0,309} m_3^{-0,5775} m_4^{-0,1925} m_5^{0,385} M^{-0,283} \quad (3.59)$$

Al derivar la función f se obtuvieron las siguientes expresiones

$$\frac{\partial f}{\partial m_3} = -0,5 \frac{m_3^{-0,5} m_4^{-0,5} m_5}{m_3} \quad (3.60a)$$

$$\frac{\partial f}{\partial m_3} = -0,5 \frac{m_3^{-0,5} m_4^{-0,5} m_5}{m_4} \quad (3.60b)$$

$$\frac{\partial f}{\partial m_3} = \frac{m_3^{-0,5} m_4^{-0,5} m_5}{m_5} \quad (3.60c)$$

Al derivar la función g se encontraron las siguientes expresiones

$$\frac{\partial g}{\partial m_1} = \frac{m_1^{0,385} m_2^{0,309} m_3^{-0,5775} m_4^{-0,1925} m_5^{0,385} M^{-0,283}}{m_1} \left[0,385 - 0,286 m_1 M^{-1} \frac{\partial M}{\partial m_{\tau_*}} \frac{\partial m_{\tau_*}}{\partial m_1} \right] \quad (3.61a)$$

$$\frac{\partial g}{\partial m_2} = \frac{m_1^{0,385} m_2^{0,309} m_3^{-0,5775} m_4^{-0,1925} m_5^{0,385} M^{-0,283}}{m_2} \left[0,309 - 0,286 m_2 M^{-1} \frac{\partial M}{\partial m_{\tau_*}} \frac{\partial m_{\tau_*}}{\partial m_2} \right] \quad (3.61b)$$

$$\frac{\partial g}{\partial m_3} = \frac{m_1^{0,385} m_2^{0,309} m_3^{-0,5775} m_4^{-0,1925} m_5^{0,385} M^{-0,283}}{m_3} \left[-0,5775 - 0,286 m_3 M^{-1} \frac{\partial M}{\partial m_{\tau_*}} \frac{\partial m_{\tau_*}}{\partial m_3} \right] \quad (3.61c)$$

$$\frac{\partial g}{\partial m_4} = \frac{m_1^{0,385} m_2^{0,309} m_3^{-0,5775} m_4^{-0,1925} m_5^{0,385} M^{-0,283}}{m_4} \left[-0,1925 - 0,286 m_4 M^{-1} \frac{\partial M}{\partial m_{\tau_*}} \frac{\partial m_{\tau_*}}{\partial m_4} \right] \quad (3.61d)$$

$$\frac{\partial g}{\partial m_5} = 0,385 \frac{m_1^{0,385} m_2^{0,309} m_3^{-0,5775} m_4^{-0,1925} m_5^{0,385} M^{-0,283}}{m_5} \quad (3.61e)$$

Siendo

$$\frac{\partial M}{\partial m_{\tau_*}} = -6,7495 - 35,9377 m_{\tau_*} + 70,2698 m_{\tau_*}^2 - 34,6331 m_{\tau_*}^3 \quad (3.62)$$

Y siendo

$$\frac{\partial m_{\tau_*}}{\partial m_1} = \frac{m_1 m_2 m_3^{-1} m_4^{-1}}{m_1} \quad (3.63a)$$

$$\frac{\partial m_{\tau_*}}{\partial m_2} = \frac{m_1 m_2 m_3^{-1} m_4^{-1}}{m_2} \quad (3.63b)$$

$$\frac{\partial m_{\tau}}{\partial m_3} = -\frac{m_1 m_2 m_3^{-1} m_4^{-1}}{m_3} \quad (3.63c)$$

$$\frac{\partial m_{\tau}}{\partial m_4} = -\frac{m_1 m_2 m_3^{-1} m_4^{-1}}{m_4} \quad (3.63d)$$

Si se definen las siguientes variables

$$T_1 = 0,385 - 0,286m_1M^{-1} \frac{\partial M}{\partial m_{\tau}} \frac{\partial m_{\tau}}{\partial m_1} = 0,385 - 0,286m_{\tau}M^{-1} \frac{\partial M}{\partial m_{\tau}} \quad (3.64a)$$

$$T_2 = 0,309 - 0,286m_2M^{-1} \frac{\partial M}{\partial m_{\tau}} \frac{\partial m_{\tau}}{\partial m_2} = 0,309 - 0,286m_{\tau}M^{-1} \frac{\partial M}{\partial m_{\tau}} \quad (3.64b)$$

$$T_3 = -0,5775 - 0,286m_3M^{-1} \frac{\partial M}{\partial m_{\tau}} \frac{\partial m_{\tau}}{\partial m_3} = -0,5775 + 0,286m_{\tau}M^{-1} \frac{\partial M}{\partial m_{\tau}} \quad (3.64c)$$

$$T_4 = -0,1925 - 0,286m_4M^{-1} \frac{\partial M}{\partial m_{\tau}} \frac{\partial m_{\tau}}{\partial m_4} = -0,1925 + 0,286m_{\tau}M^{-1} \frac{\partial M}{\partial m_{\tau}} \quad (3.64d)$$

Y se aplica el método de Pearson para obtener los coeficientes de correlación total y espuria son

Coefficiente de correlación total, r_{yz} ,

$$r_{yz} = \frac{-0,5T_3C_3^2 - 0,5T_4C_4^2 + 0,385C_5^2 - 0,5T_1r_{13}C_1C_3 - 0,5T_1r_{14}C_1C_4 + T_1r_{15}C_1C_5 - 0,5T_2r_{23}C_2C_3 - 0,5T_2r_{24}C_2C_4 + T_2r_{25}C_2C_5 - 0,5[T_3 + T_4]r_{34}C_3C_4 + [T_3 - 0,1925]r_{35}C_3C_5 + [T_4 - 0,1925]r_{45}C_4C_5}{\left[\begin{array}{l} 0,25C_3^2 + 0,25C_4^2 + \\ + C_5^2 + 0,5r_{34}C_3C_4 - \\ - r_{35}C_3C_5 - r_{45}C_4C_5 \end{array} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\begin{array}{l} T_1^2C_1^2 + T_2^2C_2^2 + T_3^2C_3^2 + T_4^2C_4^2 + 0,1482C_5^2 + \\ + 2T_1T_2r_{12}C_1C_2 + 2T_1T_3r_{13}C_1C_3 + 2T_1T_4r_{14}C_1C_4 + \\ + 0,77T_1r_{15}C_1C_5 + 2T_2T_3r_{23}C_2C_3 + 2T_2T_4r_{24}C_2C_4 + \\ + 0,77T_2r_{25}C_2C_5 + 2T_3T_4r_{34}C_3C_4 + \\ + 0,77T_3r_{35}C_3C_5 + 0,77T_4r_{45}C_4C_5 \end{array} \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.65)$$

Coefficiente de correlación espuria, ρ_{yz} ,

$$\rho_{yz} = \frac{-0,5T_3C_3^2 - 0,5T_4C_4^2 + 0,385C_5^2C_4C_5}{\left[0,25C_3^2 + 0,25C_4^2 + C_5^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[T_1^2C_1^2 + T_2^2C_2^2 + T_3^2C_3^2 + T_4^2C_4^2 + 0,1482C_5^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.66)$$

- d) Ecuación rescrita en función del número de Froude de grano y la rugosidad relativa cuando $(f/f_0) = \phi(\tau_*)$

A partir de la ecuación rescrita y de manera similar al caso anterior

$$\frac{U}{\sqrt{gD_{50}}} = 6,6179\sqrt{(Ss-1)}\left(\frac{d}{D_{50}}\right)^{0,6260} S^{0,5024}\left(\frac{f}{f_0}\right)^{-0,4602} \quad (3.67)$$

Se definió el número de Froude de grano como la función f y el lado derecho de la ecuación como la función g , resultando estas

$$f = m_3^{-0,5} m_5 \quad (3.68)$$

y

$$g = m_1^{0,626} m_2^{0,5024} m_3^{-0,626} m_4^{0,5} M^{-0,4602} \quad (3.69)$$

De manera similar al caso anterior, las derivadas de las funciones f y g son

$$\frac{\partial f}{\partial m_3} = -0,5 \frac{m_3^{-0,5} m_5}{m_3} \quad (3.70a)$$

$$\frac{\partial f}{\partial m_5} = \frac{m_3^{-0,5} m_5}{m_5} \quad (3.70b)$$

$$\frac{\partial g}{\partial m_1} = \frac{m_1^{0,626} m_2^{0,5024} m_3^{-0,626} m_4^{0,5} M^{-0,4602}}{m_1} \left[0,626 - 0,4602 m_1 M^{-1} \frac{\partial M}{\partial m_{\tau_*}} \frac{\partial m_{\tau_*}}{m_1} \right] \quad (3.71a)$$

$$\frac{\partial g}{\partial m_2} = \frac{m_1^{0,626} m_2^{0,5024} m_3^{-0,626} m_4^{0,5} M^{-0,4602}}{m_2} \left[0,5024 - 0,4602 m_2 M^{-1} \frac{\partial M}{\partial m_{\tau_*}} \frac{\partial m_{\tau_*}}{m_2} \right] \quad (3.71b)$$

$$\frac{\partial g}{\partial m_3} = \frac{m_1^{0,626} m_2^{0,5024} m_3^{-0,626} m_4^{0,5} M^{-0,4602}}{m_3} \left[-0,626 - 0,4602 m_3 M^{-1} \frac{\partial M}{\partial m_{\tau_*}} \frac{\partial m_{\tau_*}}{m_3} \right] \quad (3.71c)$$

$$\frac{\partial g}{\partial m_4} = \frac{m_1^{0,626} m_2^{0,5024} m_3^{-0,626} m_4^{0,5} M^{-0,4602}}{m_4} \left[0,5 - 0,4602 m_4 M^{-1} \frac{\partial M}{\partial m_{\tau_*}} \frac{\partial m_{\tau_*}}{m_4} \right] \quad (3.71d)$$

De manera similar al caso anterior se pueden definir las variables

$$N_1 = 0,626 - 0,4602 m_1 M^{-1} \frac{\partial M}{\partial m_{\tau_*}} \frac{\partial m_{\tau_*}}{m_1} = 0,626 - 0,462 m_{\tau_*} M^{-1} \frac{\partial M}{\partial m_{\tau_*}} \quad (3.72a)$$

$$N_2 = 0,5024 - 0,4602 m_2 M^{-1} \frac{\partial M}{\partial m_{\tau_*}} \frac{\partial m_{\tau_*}}{m_2} = 0,5024 - 0,4602 m_{\tau_*} M^{-1} \frac{\partial M}{\partial m_{\tau_*}} \quad (3.72b)$$

$$N_3 = -0,626 - 0,4602m_3M^{-1} \frac{\partial M}{\partial m_{\tau_3}} \frac{\partial m_{\tau_3}}{m_3} = -0,626 + 0,4602m_{\tau_3}M^{-1} \frac{\partial M}{\partial m_{\tau_3}} \quad (3.72c)$$

$$N_4 = 0,5 - 0,4602m_4M^{-1} \frac{\partial M}{\partial m_{\tau_4}} \frac{\partial m_{\tau_4}}{m_4} = 0,5 + 0,4602m_{\tau_4}M^{-1} \frac{\partial M}{\partial m_{\tau_4}} \quad (3.72d)$$

Al considerar las variables anteriores, los coeficientes de correlación total y espuria son
Coeficiente de correlación total, r_{yz} ,

$$r_{yz} = \frac{-0,5N_3C_3^2 - 0,5N_1r_{13}C_1C_3 + N_1r_{15}C_1C_5 - 0,5T_2r_{23}C_2C_3 + T_2r_{25}C_2C_5 + T_3r_{35}C_3C_5 - 0,5T_4r_{34}C_3C_4 + T_4r_{45}C_4C_5}{\left[0,25C_3^2 + C_5^2 - \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \left[\begin{matrix} N_1^2C_1^2 + N_2^2C_2^2 + N_3^2C_3^2 + N_4^2C_4^2 + 2N_1N_2r_{12}C_1C_2 + \\ + 2N_1N_3r_{13}C_1C_3 + 2N_1N_4r_{14}C_1C_4 + 2N_2N_3r_{23}C_2C_3 + \\ + 2N_2N_4r_{24}C_2C_4 + 2N_3N_4r_{34}C_3C_4 \end{matrix} \right] \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.73)$$

Coeficiente de correlación espuria, ρ_{yz} ,

$$\rho_{yz} = \frac{-0,5N_3C_3^2}{\left[0,25C_3^2 + C_5^2\right]^{\frac{1}{2}} \left[N_1^2C_1^2 + N_2^2C_2^2 + N_3^2C_3^2 + N_4^2C_4^2\right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.74)$$

3.3.3 Formulación IIB: Relación Formas de fondo y Velocidad Asociadas

a) Ecuación original cuando (f/f_0) es constante

A partir de la ecuación original de la formulación IIB

$$\frac{U}{\sqrt{g(Ss-1)D_{50}}} = 6,683 \left(\frac{d}{D_{50}} \right)^{0,626} S^{0,503} \left(\frac{f}{f_0} \right)^{-0,465} \quad (3.75)$$

Se determinó que el término del lado izquierdo como la función f y el término del lado derecho como la función g , por lo que éstas son

$$f = m_3^{-0,5} m_4^{-0,5} m_5 \quad (3.76)$$

y

$$g = m_1^{0,626} m_2^{0,503} m_3^{-0,626} \quad (3.77)$$

Donde el radio hidráulico, R , es la variable 1, la pendiente, S , es la variable 2, el diámetro, D_{50} , es la variable 3, la gravedad específica, $Ss-1$, es la variable 4 y la velocidad media, U , es la variable 5. Al ser ambas productos de potencias, no es necesario encontrar cada una de las derivadas.

Los coeficientes de correlación total y espuria de esta ecuación son

Coefficiente de correlación total, r_{yz} ,

$$r_{yz} = \frac{0,313C_3^2 - 0,313r_{13}C_1C_3 - 0,313r_{14}C_1C_4 + 0,626r_{15}C_1C_5 - 0,2515r_{23}C_2C_3 - 0,2515r_{24}C_2C_4 + 0,503r_{25}C_2C_5 - 0,626r_{35}C_3C_5}{\left[0,25C_3^2 + 0,25C_4^2 + C_5^2 + 0,5r_{34}C_3C_4 - r_{35}C_3C_5 - r_{45}C_4C_5\right]^{\frac{1}{2}} \left[0,3919C_1^2 + 0,2530C_2^2 + 0,3919C_3^2 + 0,6297r_{12}C_1C_2 - 0,7837r_{13}C_1C_3 - 0,6297r_{23}C_2C_3\right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.78)$$

Coefficiente de correlación espuria, ρ_{yz} ,

$$\rho_{yz} = \frac{0,313C_3^2}{\left[0,25C_3^2 + 0,25C_4^2 + C_5^2\right]^{\frac{1}{2}} \left[0,3919C_1^2 + 0,2530C_2^2 + 0,3919C_3^2\right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.79)$$

b) Ecuación rescrita en función del número de Froude de grano y la rugosidad relativa cuando (f/f_0) es constante

Al describir la formulación II en términos del número de Froude de grano se obtuvo la ecuación

$$\frac{U}{\sqrt{gD_{50}}} = 6,683 \left(\frac{d}{D_{50}}\right)^{0,626} S^{0,503} \sqrt{(Ss-1)} \left(\frac{f}{f_0}\right)^{-0,465} \quad (3.80)$$

Se determinó que el término del lado izquierdo como la función f y el término del lado derecho como la función g , por lo que éstas son

$$f = m_3^{-0,5} m_5 \quad (3.81)$$

y

$$g = m_1^{0,626} m_2^{0,503} m_3^{-0,626} m_4^{0,5} \quad (3.82)$$

Donde el radio hidráulico, R , es la variable 1, la pendiente, S , es la variable 2, el diámetro, D_{50} , es la variable 3, la gravedad específica, $Ss-1$, es la variable 4 y la velocidad media, U , es la variable 5.

Al ser ambas productos de potencias, no es necesario encontrar cada una de las derivadas. Los coeficientes de correlación total y espuria de esta ecuación son

Coefficiente de correlación total, r_{yz} ,

$$r_{yz} = \frac{0,313C_3^2 - 0,313r_{13}C_1C_3 + 0,626r_{15}C_1C_5 - 0,2515r_{23}C_2C_3 - 0,503r_{25}C_2C_5 - 0,25r_{34}C_3C_4 - 0,626r_{35}C_3C_5 + 0,5r_{45}C_4C_5}{\left[0,25C_3^2 + C_5^2 - r_{35}C_3C_5\right]^{1/2} \left[0,3919C_1^2 + 0,2530C_2^2 + 0,3919C_3^2 + 0,25C_4^2 + 0,6297r_{12}C_1C_2 - 0,7837r_{13}C_1C_3 - 0,626r_{14}C_1C_4 - 0,6297r_{23}C_2C_3 + 0,503r_{24}C_2C_4 - 0,626r_{34}C_3C_4\right]^{1/2}} \quad (3.83)$$

Coefficiente de correlación espuria, ρ_{yz} ,

$$\rho_{yz} = \frac{0,313C_3^2}{\left[0,25C_3^2 + C_5^2\right]^{1/2} \left[0,3919C_1^2 + 0,2530C_2^2 + 0,3919C_3^2 + 0,25C_4^2\right]^{1/2}} \quad (3.84)$$

c) Ecuación original cuando $(f/f_0) = \phi(\tau \cdot)$

A partir de la ecuación rescrita y de manera similar al caso anterior

$$\frac{U}{g(Ss-1)D_{50}} = 6,683 \left(\frac{d}{D_{50}}\right)^{0,626} S^{0,503} \left(\frac{f}{f_0}\right)^{-0,465} \quad (3.75)$$

Se definió el número de Froude de grano como la función f y el lado derecho de la ecuación como la función g , resultando estas

$$f = m_3^{-0,5} m_4^{-0,5} m_5 \quad (3.85)$$

y

$$g = m_1^{0,626} m_2^{0,503} m_3^{-0,626} M^{-0,465} \quad (3.86)$$

Donde el radio hidráulico, R , es la variable 1, la pendiente, S , es la variable 2, el diámetro, D_{50} , es la variable 3, la gravedad específica, $Ss-1$, es la variable 4 y la velocidad media, U , es la variable 5.

De manera similar al caso anterior, las derivadas de las funciones f y g son

$$\frac{\partial f}{\partial m_3} = -0,5 \frac{m_3^{-0,5} m_4^{-0,5} m_5}{m_3} \quad (3.87a)$$

$$\frac{\partial f}{\partial m_4} = -0,5 \frac{m_3^{-0,5} m_4^{-0,5} m_5}{m_4} \quad (3.87b)$$

$$\frac{\partial f}{\partial m_5} = \frac{m_3^{-0,5} m_4^{-0,5} m_5}{m_5} \quad (3.87c)$$

$$\frac{\partial g}{\partial m_1} = \frac{m_1^{0,626} m_2^{0,503} m_3^{-0,626} M^{-0,465}}{m_1} \left[0,626 - 0,465 m_1 M^{-1} \frac{\partial M}{\partial m_1} \frac{\partial m_\tau}{m_1} \right] \quad (3.88a)$$

$$\frac{\partial g}{\partial m_2} = \frac{m_1^{0,626} m_2^{0,503} m_3^{-0,626} M^{-0,465}}{m_2} \left[0,503 - 0,465 m_2 M^{-1} \frac{\partial M}{\partial m_{\tau}} \frac{\partial m_{\tau}}{m_2} \right] \quad (3.88b)$$

$$\frac{\partial g}{\partial m_3} = \frac{m_1^{0,626} m_2^{0,503} m_3^{-0,626} M^{-0,465}}{m_3} \left[-0,626 - 0,465 m_3 M^{-1} \frac{\partial M}{\partial m_{\tau}} \frac{\partial m_{\tau}}{m_3} \right] \quad (3.88c)$$

$$\frac{\partial g}{\partial m_4} = \frac{m_1^{0,626} m_2^{0,503} m_3^{-0,626} M^{-0,465}}{m_4} \left[0,465 m_4 M^{-1} \frac{\partial M}{\partial m_{\tau}} \frac{\partial m_{\tau}}{m_4} \right] \quad (3.88d)$$

De manera similar al caso anterior se pueden definir las variables

$$P_1 = 0,626 - 0,465 m_1 M^{-1} \frac{\partial M}{\partial m_{\tau}} \frac{\partial m_{\tau}}{m_1} = 0,626 - 0,465 m_{\tau} M^{-1} \frac{\partial M}{\partial m_{\tau}} \quad (3.89a)$$

$$P_2 = 0,503 - 0,465 m_2 M^{-1} \frac{\partial M}{\partial m_{\tau}} \frac{\partial m_{\tau}}{m_2} = 0,503 - 0,465 m_{\tau} M^{-1} \frac{\partial M}{\partial m_{\tau}} \quad (3.89b)$$

$$P_3 = -0,626 - 0,465 m_3 M^{-1} \frac{\partial M}{\partial m_{\tau}} \frac{\partial m_{\tau}}{m_3} = -0,626 + 0,465 m_{\tau} M^{-1} \frac{\partial M}{\partial m_{\tau}} \quad (3.89c)$$

$$P_4 = -0,465 m_4 M^{-1} \frac{\partial M}{\partial m_{\tau}} \frac{\partial m_{\tau}}{m_4} = 0,4602 m_{\tau} M^{-1} \frac{\partial M}{\partial m_{\tau}} \quad (3.89d)$$

Al considerar las variables anteriores, los coeficientes de correlación total y espuria son

Coefficiente de correlación total, r_{yz} ,

$$r_{yz} = \frac{-0,5P_3C_3^2 - 0,5P_4C_4^2 - 0,5P_1r_{13}C_1C_3 - 0,5P_1r_{14}C_1C_4 + P_1r_{15}C_1C_5 - 0,5P_2r_{23}C_2C_3 - 0,5P_2r_{24}C_2C_4 + P_2r_{25}C_2C_5 - 0,5(P_3 + P_4)r_{34}C_3C_4 + P_3r_{35}C_3C_5 + P_4r_{45}C_4C_5}{\left[0,25C_3^2 + 0,25C_4^2 + \left[\begin{array}{l} P_1^2C_1^2 + P_2^2C_2^2 + P_3^2C_3^2 + P_4^2C_4^2 + 2P_1P_2r_{12}C_1C_2 + \\ + C_5^2 + 0,5r_{34}C_3C_4 - \\ - r_{35}C_3C_5 - r_{45}C_4C_5 \end{array} \right] \right]^{\frac{1}{2}} \left[\begin{array}{l} P_1^2C_1^2 + P_2^2C_2^2 + P_3^2C_3^2 + P_4^2C_4^2 + 2P_1P_2r_{12}C_1C_2 + \\ + 2P_1P_3r_{13}C_1C_3 + 2P_1P_4r_{14}C_1C_4 + 2P_2P_3r_{23}C_2C_3 + \\ + 2P_2P_4r_{24}C_2C_4 + 2P_3P_4r_{34}C_3C_4 \end{array} \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.90)$$

Coefficiente de correlación espuria, ρ_{yz} ,

$$\rho_{yz} = \frac{-0,5P_3C_3^2 - 0,5P_4C_4^2}{\left[0,25C_3^2 + 0,25C_4^2 + C_5^2\right]^{1/2} \left[P_1^2C_1^2 + P_2^2C_2^2 + P_3^2C_3^2 + P_4^2C_4^2\right]^{1/2}} \quad (3.91)$$

d) Ecuación rescrita en función del número de Froude de grano y la rugosidad relativa cuando $(f/f_0) = \phi(\tau\star)$

A partir de la ecuación rescrita y de manera similar al caso anterior

$$\frac{U}{\sqrt{gD_{50}}} = 6,683 \left(\frac{d}{D_{50}}\right)^{0,626} S^{0,503} \sqrt{(Ss-1)} \left(\frac{f}{f_0}\right)^{-0,465} \quad (3.92)$$

Se definió el número de Froude de grano como la función f y el lado derecho de la ecuación como la función g , resultando estas

$$f = m_3^{-0,5} m_5 \quad (3.93)$$

y

$$g = m_1^{0,626} m_2^{0,503} m_3^{-0,626} m_4^{0,5} M^{-0,465} \quad (3.94)$$

Donde la el radio hidráulico, R , es la variable 1, la pendiente, S , es la variable 2, el diámetro, D_{50} , ese la variable 3, la gravedad específica, $Ss-1$, es la variable 4 y la velocidad media, U , es la variable 5.

De manera similar al caso anterior, las derivadas de las funciones f y g son

$$\frac{\partial f}{\partial m_3} = -0,5 \frac{m_3^{-0,5} m_5}{m_3} \quad (3.95a)$$

$$\frac{\partial f}{\partial m_5} = \frac{m_3^{-0,5} m_5}{m_5} \quad (3.95b)$$

$$\frac{\partial g}{\partial m_1} = \frac{m_1^{0,626} m_2^{0,503} m_3^{-0,626} m_4^{0,5} M^{-0,465}}{m_1} \left[0,626 - 0,465 m_1 M^{-1} \frac{\partial M}{\partial m_{\tau}} \frac{\partial m_{\tau}}{m_1} \right] \quad (3.96a)$$

$$\frac{\partial g}{\partial m_2} = \frac{m_1^{0,626} m_2^{0,503} m_3^{-0,626} m_4^{0,5} M^{-0,465}}{m_2} \left[0,503 - 0,465 m_2 M^{-1} \frac{\partial M}{\partial m_{\tau}} \frac{\partial m_{\tau}}{m_2} \right] \quad (3.96b)$$

$$\frac{\partial g}{\partial m_3} = \frac{m_1^{0,626} m_2^{0,503} m_3^{-0,626} m_4^{0,5} M^{-0,465}}{m_3} \left[-0,626 - 0,465 m_3 M^{-1} \frac{\partial M}{\partial m_{\tau}} \frac{\partial m_{\tau}}{m_3} \right] \quad (3.96c)$$

$$\frac{\partial g}{\partial m_4} = \frac{m_1^{0,626} m_2^{0,503} m_3^{-0,626} m_4^{0,5} M^{-0,465}}{m_4} \left[0,5 - 0,465 m_4 M^{-1} \frac{\partial M}{\partial m_{\tau_*}} \frac{\partial m_{\tau_*}}{m_4} \right] \quad (3.96d)$$

De manera similar al caso anterior se pueden definir las variables

$$J_1 = 0,626 - 0,465 m_1 M^{-1} \frac{\partial M}{\partial m_{\tau_*}} \frac{\partial m_{\tau_*}}{m_1} = 0,626 - 0,465 m_{\tau_*} M^{-1} \frac{\partial M}{\partial m_{\tau_*}} \quad (3.97a)$$

$$J_2 = 0,503 - 0,465 m_2 M^{-1} \frac{\partial M}{\partial m_{\tau_*}} \frac{\partial m_{\tau_*}}{m_2} = 0,503 - 0,465 m_{\tau_*} M^{-1} \frac{\partial M}{\partial m_{\tau_*}} \quad (3.97b)$$

$$J_3 = -0,626 - 0,465 m_3 M^{-1} \frac{\partial M}{\partial m_{\tau_*}} \frac{\partial m_{\tau_*}}{m_3} = -0,626 + 0,465 m_{\tau_*} M^{-1} \frac{\partial M}{\partial m_{\tau_*}} \quad (3.97c)$$

$$J_4 = 0,5 - 0,465 m_4 M^{-1} \frac{\partial M}{\partial m_{\tau_*}} \frac{\partial m_{\tau_*}}{m_4} = 0,5 + 0,465 m_{\tau_*} M^{-1} \frac{\partial M}{\partial m_{\tau_*}} \quad (3.97d)$$

Al considerar las variables anteriores, los coeficientes de correlación total y espuria son

Coefficiente de correlación total, r_{yz} ,

$$r_{yz} = \frac{-0,5J_3C_3^2 - 0,5J_1r_{13}C_1C_3 + J_1r_{15}C_1C_5 - 0,5J_2r_{23}C_2C_3 + J_2r_{25}C_2C_5 - 0,5J_4r_{34}C_3C_4 + J_3r_{35}C_3C_5 + J_4r_{45}C_4C_5}{\left[0,25C_3^2 + C_5^2 - \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \left[J_1^2C_1^2 + J_2^2C_2^2 + J_3^2C_3^2 + J_4^2C_4^2 + 2J_1J_2r_{12}C_1C_2 + \right. \right. \\ \left. \left. + 2J_1J_3r_{13}C_1C_3 + 2J_1J_4r_{14}C_1C_4 + 2J_2J_3r_{23}C_2C_3 + \right. \right. \\ \left. \left. + 2J_2J_4r_{24}C_2C_4 + 2J_3J_4r_{34}C_3C_4 \right] \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.98)$$

Coefficiente de correlación espuria, ρ_{yz} ,

$$\rho_{yz} = \frac{-0,5J_3C_3^2}{\left[0,25C_3^2 + C_5^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[J_1^2C_1^2 + J_2^2C_2^2 + J_3^2C_3^2 + J_4^2C_4^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.99)$$

3.4 Método de Nnadi y Wilson

Las ecuaciones del método de Nnadi y Wilson son

Para el régimen inferior ($\ln \tau_* < -0,64$)

$$\frac{U}{U_*} + 2,5 \ln \left(\frac{S}{S_s - 1} \right) = 2,5 \ln \tau_* + 4,3 \quad (3.100)$$

Para el régimen superior ($\ln \tau_* > -0,64$)

$$\frac{U}{U_*} + 2,5 \ln \left(\frac{S}{(S_s - 1)} \right) = 2,7 \quad (3.101)$$

a) Régimen inferior

Tomando en cuenta que en la ecuación del régimen inferior hay dos productos adimensionales en forma de logaritmos naturales que están multiplicados por la constante 2,5, se rescribe la expresión como

$$\frac{U}{U_*} - 2,5 \ln \left(\frac{R}{D_{50}} \right) = 4,3 \quad (3.102)$$

Se determinó que la razón de velocidades es la función f y el logaritmo natural es la función g , quedando estas

$$f = m_1^{-0,5} m_2^{-0,5} m_5 \quad (3.103)$$

y

$$g = 2,5 \ln \left(\frac{m_1}{m_3} \right) \quad (3.104)$$

Donde el radio hidráulico, R , es la variable 1, la pendiente, S , es la variable 2, el diámetro, D_{50} , es la variable 3 y la velocidad media, U , es la variable 5. Las derivadas de estas funciones son

$$\frac{\partial f}{\partial m_1} = -0,5 \frac{m_1^{-0,5} m_2^{-0,5} m_5}{m_1} \quad (3.105a)$$

$$\frac{\partial f}{\partial m_2} = -0,5 \frac{m_1^{-0,5} m_2^{-0,5} m_5}{m_2} \quad (3.105b)$$

$$\frac{\partial f}{\partial m_5} = \frac{m_1^{-0,5} m_2^{-0,5} m_5}{m_5} \quad (3.105c)$$

$$\frac{\partial g}{\partial m_1} = \frac{2,5}{m_1} \quad (3.106a)$$

$$\frac{\partial g}{\partial m_3} = -\frac{2,5}{m_3} \quad (3.106b)$$

Al aplicar la ecuación de Pearson y simplificando términos se obtuvieron los siguientes coeficientes de correlación total y espuria

Coefficiente de correlación total, r_{yz} ,

$$r_{yz} = \frac{-0,5C_1^2 - 0,5r_{12}C_1C_2 + 0,5r_{13}C_1C_3 + 0,5r_{23}C_2C_3 + r_{15}C_1C_5 - r_{35}C_3C_5}{\left[\begin{array}{l} 0,25C_1^2 + 0,25C_2^2 + C_5^2 - r_{15}C_1C_5 + 0,5r_{12}C_1C_2 - \\ - r_{25}C_2C_5 \end{array} \right]^{\frac{1}{2}} \left[C_1^2 + C_3^2 - r_{13}C_1C_3 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.107)$$

Coefficiente de correlación espuria, ρ_{yz} ,

$$\rho_{yz} = \frac{-0,5C_1^2}{\left[0,25C_1^2 + 0,25C_2^2 + C_5^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[C_1^2 + C_3^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.108)$$

b) Régimen superior

Para el caso del régimen superior,

$$\frac{U}{U_*} + 2,5 \ln \left(\frac{S}{(Ss-1)} \right) = 2,7 \quad (3.101)$$

Se determinó que la razón de velocidades es la función f y el logaritmo natural es la función g , quedando estas

$$f = m_1^{-0,5} m_2^{-0,5} m_5 \quad (3.109)$$

y

$$g = 2,5 \ln \left(\frac{m_2}{m_4} \right) \quad (3.110)$$

Donde el radio hidráulico, R , es la variable 1, la pendiente, S , es la variable 2, la gravedad específica, $Ss-1$, es la variable 4 y la velocidad media, U , es la variable 5. Las derivadas de estas funciones son

$$\frac{\partial f}{\partial m_1} = -0,5 \frac{m_1^{-0,5} m_2^{-0,5} m_5}{m_1} \quad (3.111a)$$

$$\frac{\partial f}{\partial m_2} = -0,5 \frac{m_1^{-0,5} m_2^{-0,5} m_5}{m_2} \quad (3.111b)$$

$$\frac{\partial f}{\partial m_5} = \frac{m_1^{-0,5} m_2^{-0,5} m_5}{m_5} \quad (3.111c)$$

$$\frac{\partial g}{\partial m_2} = \frac{2,5}{m_2} \quad (3.112a)$$

$$\frac{\partial g}{\partial m_4} = -\frac{2,5}{m_4} \quad (3.112b)$$

Al aplicar la ecuación de Pearson y simplificando términos se obtuvieron los siguientes coeficientes de correlación total y espuria

Coefficiente de correlación total, r_{yz} ,

$$r_{yz} = \frac{-0,5C_2^2 - 0,5r_{12}C_1C_2 + 0,5r_{14}C_1C_4 + 0,5r_{24}C_2C_4 + r_{25}C_2C_5 - r_{45}C_4C_5}{\left[\begin{array}{l} 0,25C_1^2 + 0,25C_2^2 + C_5^2 + 0,5r_{12}C_1C_2 - \\ -r_{15}C_1C_5 - r_{25}C_2C_5 \end{array} \right]^{\frac{1}{2}} \left[C_1^2 + C_4^2 - r_{14}C_1C_4 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.113)$$

Coefficiente de correlación espuria, ρ_{yz} ,

$$\rho_{yz} = \frac{-0,5C_2^2}{\left[0,25C_1^2 + 0,25C_2^2 + C_5^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[C_1^2 + C_4^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.114)$$

4. RESULTADOS

El objetivo de este trabajo es analizar la espureidad del método de Shields y de algunos métodos de cálculo de la resistencia al flujo en cauces de planicie. Con este propósito:

1. Se calcularon el coeficiente de correlación total y de correlación espuria de las ecuaciones originales.
2. Se calcularon el coeficiente de correlación total y de correlación espuria de algunas ecuaciones en las que se observó que la ecuación podía describirse o simplificarse.
3. Se calculó el grado de espureidad en cada caso. Para esto se supuso que el coeficiente de correlación entre todas las variables es $r_{ij} = 0,9$ y $C_i = 0,2$. Se escogió ese valor del coeficiente de correlación, r_{ij} , debido a que es el que se utiliza en pruebas estadísticas, y el valor del coeficiente de variación, C , es el valor típico correspondiente a una población con distribución normal.

4.1 Diagrama de Shields

- a) Números adimensionales originales τ_* y R_* .

Los coeficientes de correlación total y espuria de este caso son

Coeficiente de correlación total, r_{yz} ,

$$r_{yz} = \frac{C_1^2 + C_2^2 - 2C_3^2 + 2r_{12}C_1C_2 + r_{13}C_1C_3 + r_{23}C_2C_3 - r_{14}C_1C_4 - r_{24}C_2C_4 - r_{34}C_3C_4}{\left[C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + 2r_{12}C_1C_2 - 2r_{13}C_1C_3 - 2r_{14}C_1C_4 - 2r_{23}C_2C_3 - 2r_{24}C_2C_4 + 2r_{34}C_3C_4 \right]^{\frac{1}{2}} \left[C_1^2 + C_2^2 + 4C_3^2 + 2r_{12}C_1C_2 + 4r_{13}C_1C_3 + 4r_{23}C_2C_3 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.5)$$

Coeficiente de correlación espuria, ρ_{yz} ,

$$\rho_{yz} = \frac{C_1^2 + C_2^2 - 2C_3^2}{\left[C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[C_1^2 + C_2^2 + 4C_3^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.6)$$

Donde la el radio hidráulico, R , es la variable 1, la pendiente, S , es la variable 2, el diámetro, D , es la variable 3 y la gravedad específica, $Ss-1$, es la variable 4.

Para este caso, la existencia del coeficiente de correlación espuria indica que entre estos dos parámetros existe espureidad. Debido a la forma de estos coeficientes, si se escogen valores iguales para los coeficientes de correlación entre variables, r_{ij} , y los coeficientes de variación, C_i , el valor del coeficiente de correlación espuria es cero, a pesar de que existe

espureidad entre ambas variables. Por este motivo, se optó por dar los siguientes valores de coeficientes de correlación entre variables, r_{ij} , y los coeficientes de variación, C_i , para evaluar los coeficientes de correlación:

Coficiente de dispersión del radio hidráulico, R ,

$$C_1 = 0,19 \quad (4.1a)$$

Coficiente de dispersión de la pendiente, S ,

$$C_2 = 0,20 \quad (4.1b)$$

Coficiente de correlación del diámetro característico, D ,

$$C_3 = 0,21 \quad (4.1c)$$

Coficiente de dispersión de la gravedad específica, S_s ,

$$C_4 = 0,20 \quad (4.1d)$$

Utilizando estos valores, los coeficientes de correlación total y espuria tienen los valores:

Coficiente de correlación total

$$r_{yz} = 0,2021 \quad (4.2a)$$

Coficiente de correlación espuria

$$\rho_{yz} = -6,0162 * 10^{-2} \quad (4.2b)$$

Por lo que el grado de espureidad de esta combinación de variables es

$$GE = -0,2976 \quad (4.2c)$$

o un porcentaje de 29,76%, que representa un grado bajo de espureidad.

b) Diagrama de Shields con parámetros cortante adimensional, τ_* , y Diámetro adimensional, D_*

Para esta combinación de variables, los coeficientes de correlación total y espuria de estas dos variables son:

Coficiente de correlación total, r_{yz} ,

$$r_{yz} = \frac{-C_3^2 - \frac{1}{3}C_4^2 + r_{13}C_1C_3 + r_{23}C_2C_3 - \frac{4}{3}r_{34}C_3C_4 + \frac{1}{3}r_{14}C_1C_4 + \frac{1}{3}r_{24}C_2C_4}{\left[C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + 2r_{12}C_1C_2 - \right]^{\frac{1}{2}} \left[C_3^2 + \frac{1}{3}C_4^2 + \frac{2}{3}r_{34}C_3C_4 \right]^{\frac{1}{2}} - \left[-2r_{13}C_1C_3 - 2r_{14}C_1C_4 - 2r_{23}C_2C_3 - \right]^{\frac{1}{2}} \left[-2r_{24}C_2C_4 + 2r_{34}C_3C_4 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.9)$$

Coficiente de correlación espuria, ρ_{yz} ,

$$\rho_{yz} = \frac{-C_3^2 - \frac{1}{3}C_4^2}{\left[C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[C_3^2 + \frac{1}{9}C_4^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.10)$$

Donde el radio hidráulico, R , es la variable 1, la pendiente, S , es la variable 2, el diámetro, D_{50} , es la variable 3 y la gravedad específica, $Ss-1$, es la variable 4.

Para este caso se utilizaron coeficientes de correlación entre variables y coeficientes de dispersión iguales para cada variable y se evaluaron los coeficientes de correlación total y espuria. Los valores de estos coeficientes para estas condiciones son:

Coefficiente de correlación total

$$r_{yz} = -0,1461 \quad (4.3a)$$

Coefficiente de correlación espuria

$$\rho_{yz} = -0,6324 \quad (4.3b)$$

Por lo que el grado de espureidad de esta combinación de variables es

$$GE = 5,2324 \quad (4.3c)$$

o un porcentaje de 523,24%, que representa un grado extremo de espureidad.

4.2 Método de Brownlie

a) Régimen Inferior, ecuación original.

Los coeficientes de correlación total y espuria para esta combinación de variables son:

Coefficiente de correlación total, r_{yz} ,

$$r_{yz} = \frac{0,6539C_1^2 + 0,9805C_3^2 - 0,2542r_{12}C_1C_2 - 1,6348r_{13}C_1C_3 + 0,6539r_{14}C_1C_4 + 0,105r_{15}C_1C_5 + 0,2542r_{23}C_2C_3 - 0,6539r_{34}C_3C_4 - 0,105r_{35}C_3C_5}{\left[\begin{array}{l} 0,4276C_1^2 + 0,0646C_2^2 + 0,9621C_3^2 + 0,4276C_4^2 + \\ + 0,0113C_5^2 - 0,3324r_{12}C_1C_2 - 1,2827r_{13}C_1C_3 - \\ - 0,8552r_{14}C_1C_4 + 0,1373r_{15}C_1C_5 + 0,4987r_{23}C_2C_3 - \\ - 0,3324r_{24}C_2C_4 - 0,0534r_{25}C_2C_5 - 1,2827r_{34}C_3C_4 - \\ - 0,2060r_{35}C_3C_5 + 0,1373r_{45}C_4C_5 \end{array} \right]^{\frac{1}{2}} \left[C_1^2 + C_3^2 - 2r_{13}C_1C_3 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.14a)$$

Coefficiente de correlación espuria, ρ_{yz} ,

$$\rho_{yz} = \frac{0,6539C_1^2 + 0,9805C_3^2}{\left[C_1^2 + C_3^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\begin{array}{l} 0,4276C_1^2 + 0,0646C_2^2 + 0,9621C_3^2 + \\ + 0,4276C_4^2 + 0,01103C_5^2 \end{array} \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.14b)$$

Donde el radio hidráulico, R , es la variable 1, la pendiente, S , es la variable 2, el diámetro, D_{50} , es la variable 3, la velocidad media, U , es la variable 4 y la desviación estándar geométrica de tamaño de partícula, σ_g , es la variable 5.

Para evaluar estos coeficientes se utilizaron valores iguales del coeficiente de correlación entre variables y coeficiente de dispersión para todas las variables. Con estas condiciones, los valores de estos coeficientes son:

Coefficiente de correlación total

$$r_{yz} = 0,7813 \quad (4.4a)$$

Coefficiente de correlación espuria

$$\rho_{yz} = 0,8400 \quad (4.4b)$$

Por lo que el grado de espureidad de esta combinación de variables es

$$GE = 1,0751 \quad (4.4c)$$

o un porcentaje de 107,51%, que representa un grado extremo de espureidad.

- b) Ecuación del régimen inferior rescrita en función del número de Froude de Grano y la rugosidad relativa.

Los coeficientes de correlación total y espuria de esta ecuación son

Coefficiente de correlación total, r_{yz} ,

$$r_{yz} = \frac{0,2646C_3^2 - 0,2646r_{13}C_1C_3 + 0,5293r_{14}C_1C_4 - 0,1944r_{23}C_2C_3 + 0,3887r_{24}C_2C_4 - 0,5293r_{34}C_3C_4 + 0,0803r_{35}C_3C_5 - 0,1606r_{45}C_4C_5}{\left[0,25C_3^2 + C_4^2 - r_{34}C_3C_4\right]^{\frac{1}{2}} \left[0,2802C_1^2 + 0,1511C_2^2 + 0,2802C_3^2 + 0,0258C_5^2 + 0,4115r_{12}C_1C_2 - 0,5603r_{13}C_1C_3 - 0,170r_{15}C_1C_5 - 0,4115r_{23}C_2C_3 - 0,1248r_{25}C_2C_5 + 0,170r_{35}C_3C_5\right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.19)$$

Coefficiente de correlación espúria, ρ_{yz} ,

$$\rho_{yz} = \frac{0,2646C_3^2}{\left[0,25C_3^2 + C_4^2\right]^{\frac{1}{2}} \left[0,2802C_1^2 + 0,1511C_2^2 + 0,2802C_3^2 + 0,0258C_5^2\right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.20)$$

donde el radio hidráulico, R , es la variable 1, la pendiente, S , es la variable 2, el diámetro, D_{50} , es la variable 3, la velocidad media, U , es la variable 4 y la desviación estándar geométrica de tamaño de partícula, σ_g , es la variable 5.

Para evaluar estos coeficientes se utilizaron valores iguales del coeficiente de correlación entre variables y coeficiente de dispersión para todas las variables. Con estas condiciones, los valores de estos coeficientes son:

Coefficiente de correlación total

$$r_{yz} = 0,6292 \quad (4.5a)$$

Coefficiente de correlación espuria

$$\rho_{yz} = 0,2756 \quad (4.5b)$$

Por lo que el grado de espureidad de esta combinación de variables es

$$GE = 0,4380 \quad (4.5c)$$

o un porcentaje de 43,80%, que representa un grado moderado de espureidad. Se debe observar que ambos coeficientes, el de correlación total y correlación espuria, y también el grado de espureidad, son menores que el caso en el que se utiliza la ecuación original, por lo que rescribir la ecuación en forma de que se repita solo un valor dentro de los productos adimensionales, reduce la espureidad.

a) Ecuación original del régimen superior

Los coeficientes de correlación total y espuria de esta ecuación son

Coefficiente de correlación total, r_{yz} ,

$$r_{yz} = \frac{0,6248C_1^2 + 0,972C_3^2 - 0,2877r_{12}C_1C_2 - 1,562r_{13}C_1C_3 + 0,6248r_{14}C_1C_4 + 0,0801r_{15}C_1C_5 - 0,6248r_{34}C_3C_4 - 0,08013r_{35}C_3C_5}{\left[C_1^2 + C_3^2 - 2r_{13}C_1C_3 \right]^{\frac{1}{2}} \left[0,3904C_1^2 + 0,0828C_2^2 + 0,8783C_3^2 + 0,3904C_4^2 + 0,0064C_5^2 - 0,3595r_{12}C_1C_2 - 1,1711r_{13}C_1C_3 + 0,7807r_{14}C_1C_4 + 0,1001r_{15}C_1C_5 + 0,5393r_{23}C_2C_3 - 0,3595r_{24}C_2C_4 - 0,0461r_{25}C_2C_5 - 1,1711r_{34}C_3C_4 - 0,1502r_{35}C_3C_5 + 0,1001r_{45}C_4C_5 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.24)$$

Coefficiente de correlación espuria, ρ_{yz} ,

$$\rho_{yz} = \frac{0,6248C_1^2 + 0,972C_3^2}{\left[C_1^2 + C_3^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[0,3904C_1^2 + 0,0828C_2^2 + 0,8783C_3^2 + 0,3904C_4^2 + 0,0064C_5^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.25)$$

Donde la el radio hidráulico, R , es la variable 1, la pendiente, S , es la variable 2, el diámetro, D_{50} , es la variable 3, la velocidad media, U , es la variable 4 y la desviación estándar geométrica de tamaño de partícula, σ_g , es la variable 5.

Para evaluar estos coeficientes se utilizaron valores iguales del coeficiente de correlación entre variables y coeficiente de dispersión para todas las variables. Con estas condiciones, los valores de estos coeficientes son:

Coefficiente de correlación total

$$r_{yz} = -0,3534 \quad (4.6a)$$

Coefficiente de correlación espuria

$$\rho_{yz} = 0,8540 \quad (4.6b)$$

Por lo que el grado de espureidad de esta combinación de variables es

$$GE = -2,4166 \quad (4.6c)$$

o un porcentaje de 241,66%, que representa un grado extremo de espureidad.

b) Ecuación del régimen superior rescrita en función del número de Froude de Grano y la Rugosidad Relativa

Los coeficientes de correlación total y espuria de esta ecuación son

Coeficiente de correlación total, r_{yz} ,

$$r_{yz} = \frac{0,3003C_3^2 - 0,3003r_{13}C_1C_3 + 0,6005r_{14}C_1C_4 - 0,2302r_{23}C_2C_3 + 0,4605r_{24}C_2C_4 - 0,6005r_{34}C_3C_4 - 0,0641r_{35}C_3C_5 - 0,1283r_{45}C_4C_5}{\left[0,25C_3^2 + C_4^2 - r_{34}C_3C_4\right]^{\frac{1}{2}} \left[0,3606C_1^2 + 0,2120C_2^2 + 0,3606C_3^2 + 0,0164C_5^2 + 0,5530r_{12}C_1C_2 - 0,7212r_{13}C_1C_3 - 0,1540r_{15}C_1C_5 - 0,5530r_{23}C_2C_3 - 0,1181r_{25}C_2C_5 + 0,1540r_{35}C_3C_5\right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.28)$$

Coeficiente de correlación espuria, ρ_{yz} ,

$$\rho_{yz} = \frac{0,3003C_3^2}{\left[0,25C_3^2 + C_4^2 - r_{34}C_3C_4\right]^{\frac{1}{2}} \left[0,3606C_1^2 + 0,2120C_2^2 + 0,3606C_3^2 + 0,0164C_5^2\right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.29)$$

Donde el radio hidráulico, R , es la variable 1, la pendiente, S , es la variable 2, el diámetro, D_{50} , es la variable 3, la velocidad media, U , es la variable 4 y la desviación estándar geométrica de tamaño de partícula, σ_g , es la variable 5.

Para evaluar estos coeficientes se utilizaron valores iguales del coeficiente de correlación entre variables y coeficiente de dispersión para todas las variables. Con estas condiciones, los valores de estos coeficientes son:

Coeficiente de correlación total

$$r_{yz} = 0,6822 \quad (4.7a)$$

Coeficiente de correlación espuria

$$\rho_{yz} = 0,2756 \quad (4.7b)$$

Por lo que el grado de espureidad de esta combinación de variables es

$$GE = 0,4040 \quad (4.7c)$$

o un porcentaje de 40,4%, que representa un grado moderado de espureidad. Se observa que tanto el coeficiente de correlación total, como el coeficiente de correlación espuria y el grado de espureidad son menores que en el caso anterior.

4.3 Método de Karim y Kennedy

4.3.1 Formulación Gasto Sólido y Velocidad no Asociados

a) Ecuación original

Los coeficientes de correlación total y espuria de esta ecuación son

Coeficiente de correlación total, r_{yz} ,

$$r_{yz} = \frac{0,282C_3^2 + 0,094C_4^2 + 0,376C_5^2 - 0,188r_{13}C_1C_3 - 0,155r_{23}C_2C_3 + 0,376r_{34}C_3C_4 - 0,752r_{35}C_3C_5 - 0,188r_{14}C_1C_4 - 0,155r_{24}C_2C_4 - 0,376r_{45}C_4C_5 + 0,376r_{15}C_1C_5 + 0,310r_{25}C_2C_5}{\left[\begin{array}{l} 0,25C_3^2 + 0,25C_4^2 + \\ + C_5^2 + 0,5r_{34}C_3C_4 - \\ - r_{35}C_3C_5 - r_{45}C_4C_5 \end{array} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\begin{array}{l} 0,1414C_1^2 + 0,0961C_2^2 + 0,3181C_3^2 + 0,0353C_4^2 + \\ + 0,1414C_5^2 + 0,2331r_{12}C_1C_2 - 0,4241r_{13}C_1C_3 - \\ - 0,1414r_{14}C_1C_4 + 0,2827r_{15}C_1C_5 - 0,3497r_{23}C_2C_3 - \\ - 0,1166r_{24}C_2C_4 + 0,2331r_{25}C_2C_5 + 0,2121r_{34}C_3C_4 - \\ - 0,4241r_{35}C_3C_5 - 0,1414r_{45}C_4C_5 \end{array} \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.37)$$

Coeficiente de correlación espuria, ρ_{yz} ,

$$\rho_{yz} = \frac{0,282C_3^2 + 0,094C_4^2 + 0,376C_5^2}{\left[\begin{array}{l} 0,25C_3^2 + 0,25C_4^2 + C_5^2 \end{array} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\begin{array}{l} 0,1414C_1^2 + 0,0961C_2^2 + 0,3181C_3^2 + \\ + 0,0353C_4^2 + 0,1414C_5^2 \end{array} \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.38)$$

Donde el radio hidráulico, R , es la variable 1, la pendiente, S , es la variable 2, el diámetro, D_{50} , es la variable 3, la gravedad específica, $Ss-1$, es la variable 4 y la velocidad media, U , es la variable 5.

Para evaluar estos coeficientes se utilizaron valores iguales del coeficiente de correlación entre variables y coeficiente de dispersión para todas las variables. Con estas condiciones, los valores de estos coeficientes son:

Coeficiente de correlación total

$$r_{yz} = 0,5090 \quad (4.8a)$$

Coeficiente de correlación espuria

$$\rho_{yz} = 0,7175 \quad (4.8b)$$

Por lo que el grado de espureidad de esta combinación de variables es

$$GE = 1,4096 \quad (4.8c)$$

o un porcentaje de 140,96%, que representa un grado extremo de espureidad.

b) Ecuación rescrita en términos del número de Froude de grano y la rugosidad relativa

Los coeficientes de correlación total y espuria de esta ecuación son

Coefficiente de correlación total, r_{yz} ,

$$r_{yz} = \frac{0,3013C_3^2 - 0,3013r_{13}C_1C_3 + 0,6026r_{15}C_1C_5 - 0,2484r_{23}C_2C_3 + 0,4968r_{25}C_2C_5 - 0,6026r_{35}C_3C_5 - 0,25r_{34}C_3C_4 + 0,5r_{45}C_4C_5}{\left[0,25C_3^2 + C_5^2 - r_{35}C_3C_5\right]^{\frac{1}{2}} \left[0,3631C_1^2 + 0,2468C_2^2 + 0,3631C_3^2 + 0,25C_4^2 + 0,5987r_{12}C_1C_2 - 0,7262r_{13}C_1C_3 + 0,6026r_{14}C_1C_4 - 0,5987r_{23}C_2C_3 + 0,4968r_{24}C_2C_4 - 0,6026r_{34}C_3C_4\right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.42)$$

Coefficiente de correlación espuria, ρ_{yz} ,

$$\rho_{yz} = \frac{0,3013C_3^2}{\left[0,25C_3^2 + C_5^2\right]^{\frac{1}{2}} \left[0,3631C_1^2 + 0,2468C_2^2 + 0,3631C_3^2 + 0,25C_4^2\right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.43)$$

Donde el radio hidráulico, R , es la variable 1, la pendiente, S , es la variable 2, el diámetro, D_{50} , es la variable 3, la gravedad específica, $Ss-1$, es la variable 4 y la velocidad media, U , es la variable 5.

Para evaluar estos coeficientes se utilizaron valores iguales del coeficiente de correlación entre variables y coeficiente de dispersión para todas las variables. Con estas condiciones, los valores de estos coeficientes son:

Coefficiente de correlación total

$$r_{yz} = 0,8025 \quad (4.9a)$$

Coefficiente de correlación espuria

$$\rho_{yz} = 0,2437 \quad (4.9b)$$

Por lo que el grado de espureidad de esta combinación de variables es

$$GE = 0,3036 \quad (4.9c)$$

o un porcentaje de 30,36%, que representa un grado bajo de espureidad. En este caso, no hay un patrón similar a los casos anteriores para el comportamiento de las variables. Sin embargo, el grado de espureidad es mucho menor que la misma formulación escrita de otra manera.

4.3.2 Formulación IIA: Relación Formas de fondo y Velocidad Asociadas

a) Ecuación original cuando (f/f_0) es constante

Los coeficientes de correlación total y espuria de esta ecuación son

Coefficiente de correlación total, r_{yz} ,

$$r_{yz} = \frac{0,2887C_3^2 + 0,09625C_4^2 + 0,385C_5^2 - 0,1925r_{13}C_1C_3 - 0,1925r_{14}C_1C_4 + 0,385r_{15}C_1C_5 - 0,1545r_{23}C_2C_3 - 0,1545r_{24}C_2C_4 + 0,385r_{25}C_2C_5 + 0,385r_{34}C_3C_4 - 0,77r_{35}C_3C_5 - 0,385r_{45}C_4C_5}{\left[\begin{array}{l} 0,25C_3^2 + 0,25C_4^2 + \\ + C_5^2 + 0,5r_{34}C_3C_4 - \\ - r_{35}C_3C_5 - r_{45}C_4C_5 \end{array} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\begin{array}{l} 0,1482C_1^2 + 0,0955C_2^2 + 0,3335C_3^2 + 0,0370C_4^2 + \\ + 0,1482C_5^2 + 0,2379r_{12}C_1C_2 - 0,4447r_{13}C_1C_3 - \\ - 0,1482r_{14}C_1C_4 + 0,2964r_{15}C_1C_5 - 0,3569r_{23}C_2C_3 - \\ - 0,1189r_{24}C_2C_4 + 0,2379r_{25}C_2C_5 + 0,2223r_{34}C_3C_4 - \\ - 0,4447r_{35}C_3C_5 - 0,1482r_{45}C_4C_5 \end{array} \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.47)$$

Coefficiente de correlación espuria, ρ_{yz} ,

$$\rho_{yz} = \frac{0,2887C_3^2 + 0,09625C_4^2 + 0,385C_5^2}{\left[0,25C_3^2 + 0,25C_4^2 + C_5^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\begin{array}{l} 0,1482C_1^2 + 0,0955C_2^2 + 0,3335C_3^2 + \\ + 0,0370C_4^2 + 0,1482C_5^2 \end{array} \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.48)$$

Donde el radio hidráulico, R , es la variable 1, la pendiente, S , es la variable 2, el diámetro, D_{50} , es la variable 3, la gravedad específica, $Ss-1$, es la variable 4 y la velocidad media, U , es la variable 5.

Para evaluar estos coeficientes se utilizaron valores iguales del coeficiente de correlación entre variables y coeficiente de dispersión para todas las variables. Con estas condiciones, los valores de estos coeficientes son:

Coefficiente de correlación total

$$r_{yz} = 0,9324 \quad (4.10a)$$

Coefficiente de correlación espuria

$$\rho_{yz} = 0,7193 \quad (4.10b)$$

Por lo que el grado de espureidad de esta combinación de variables es

$$GE = 0,7715 \quad (4.10c)$$

o un porcentaje de 77,15%, que representa un grado alto de espureidad.

- b) Ecuación rescrita en función del número de Froude de grano y la rugosidad relativa cuando (f/f_0) es constante

Los coeficientes de correlación total y espuria de esta ecuación son

Coefficiente de correlación total, r_{yz} ,

$$r_{yz} = \frac{0,313C_3^2 - 0,313r_{13}C_1C_3 + 0,626r_{15}C_1C_5 - 0,2512r_{23}C_2C_3 + 0,5024r_{25}C_2C_5 - 0,626r_{35}C_3C_5 - 0,25r_{34}C_3C_4 + 0,5r_{45}C_4C_5}{\left[0,25C_3^2 + C_5^2 - r_{35}C_3C_5\right]^{\frac{1}{2}} \left[0,3919C_1^2 + 0,2524C_2^2 + 0,3919C_3^2 + 0,25C_4^2 + 0,6290r_{12}C_1C_2 - 0,7837r_{13}C_1C_3 + 0,626r_{14}C_1C_4 - 0,6290r_{23}C_2C_3 + 0,5024r_{24}C_2C_4 - 0,626r_{34}C_3C_4\right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.52)$$

Coefficiente de correlación espuria, ρ_{yz} ,

$$\rho_{yz} = \frac{0,313C_3^2}{\left[0,25C_3^2 + C_5^2 - r_{35}C_3C_5\right]^{\frac{1}{2}} \left[0,3919C_1^2 + 0,2524C_2^2 + 0,3919C_3^2 + 0,25C_4^2\right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.53)$$

Donde el radio hidráulico, R , es la variable 1, la pendiente, S , es la variable 2, el diámetro, D_{50} , es la variable 3, la gravedad específica, $Ss-1$, es la variable 4 y la velocidad media, U , es la variable 5.

Para evaluar estos coeficientes se utilizaron valores iguales del coeficiente de correlación entre variables y coeficiente de dispersión para todas las variables. Con estas condiciones, los valores de estos coeficientes son:

Coefficiente de correlación total

$$r_{yz} = 0,8022 \quad (4.11a)$$

Coefficiente de correlación espuria

$$\rho_{yz} = 0,2468 \quad (4.11b)$$

Por lo que el grado de espureidad de esta combinación de variables es

$$GE = 0,3077 \quad (4.11c)$$

o un porcentaje de 30,77%, que representa un grado bajo de espureidad. En este caso también se observa que tanto el coeficiente de correlación total como el coeficiente de correlación espuria y el grado de espureidad son menores que la misma formulación escrita de otra manera.

c) Ecuación original cuando $(f/f_0) = \phi(\tau_*)$

Los coeficientes de correlación total y espuria son

Coeficiente de correlación total, r_{yz} ,

$$r_{yz} = \frac{-0,5T_3C_3^2 - 0,5T_4C_4^2 + 0,385C_5^2 - 0,5T_1r_{13}C_1C_3 - 0,5T_1r_{14}C_1C_4 + T_1r_{15}C_1C_5 - 0,5T_2r_{23}C_2C_3 - 0,5T_2r_{24}C_2C_4 + T_2r_{25}C_2C_5 - 0,5[T_3 + T_4]r_{34}C_3C_4 + [T_3 - 0,1925]r_{35}C_3C_5 + [T_4 - 0,1925]r_{45}C_4C_5}{\left[\begin{array}{l} 0,25C_3^2 + 0,25C_4^2 + \\ + C_5^2 + 0,5r_{34}C_3C_4 - \\ - r_{35}C_3C_5 - r_{45}C_4C_5 \end{array} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\begin{array}{l} T_1^2C_1^2 + T_2^2C_2^2 + T_3^2C_3^2 + T_4^2C_4^2 + 0,1482C_5^2 + \\ + 2T_1T_2r_{12}C_1C_2 + 2T_1T_3r_{13}C_1C_3 + 2T_1T_4r_{14}C_1C_4 + \\ + 0,77T_1r_{15}C_1C_5 + 2T_2T_3r_{23}C_2C_3 + 2T_2T_4r_{24}C_2C_4 + \\ + 0,77T_2r_{25}C_2C_5 + 2T_3T_4r_{34}C_3C_4 + \\ + 0,77T_3r_{35}C_3C_5 + 0,77T_4r_{45}C_4C_5 \end{array} \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.65)$$

Coeficiente de correlación espuria, ρ_{yz} ,

$$\rho_{yz} = \frac{-0,5T_3C_3^2 - 0,5T_4C_4^2 + 0,385C_5^2}{\left[0,25C_3^2 + 0,25C_4^2 + C_5^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[T_1^2C_1^2 + T_2^2C_2^2 + T_3^2C_3^2 + T_4^2C_4^2 + 0,1482C_5^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.66)$$

Donde

$$M = 1,9136 + 6,7495m_{\tau_*} - 17,9688m_{\tau_*}^2 + 23,42326m_{\tau_*}^3 - 8,65848m_{\tau_*}^4 \quad (3.57)$$

$$m_{\tau_*} = \frac{m_1m_2}{m_3m_4} \quad (3.56)$$

$$\frac{\partial M}{\partial m_{\tau_*}} = -6,7495 - 35,9377m_{\tau_*} + 70,2698m_{\tau_*}^2 - 34,6331m_{\tau_*}^3 \quad (3.62)$$

$$T_1 = 0,385 - 0,286m_{\tau_*} M^{-1} \frac{\partial M}{\partial m_{\tau_*}} \quad (3.64a)$$

$$T_2 = 0,309 - 0,286m_{\tau_*} M^{-1} \frac{\partial M}{\partial m_{\tau_*}} \quad (3.64b)$$

$$T_3 = -0,5775 + 0,286m_{\tau_*} M^{-1} \frac{\partial M}{\partial m_{\tau_*}} \quad (3.64c)$$

$$T_4 = -0,1925 + 0,286m_{\tau_*} M^{-1} \frac{\partial M}{\partial m_{\tau_*}} \quad (3.64d)$$

Para calcular los coeficientes de correlación total y espuria, es necesario calcular los parámetros M , $\frac{\partial M}{\partial m_{\tau_i}}$ y m_{τ_i} . Por tanto se escogieron valores de radio hidráulico, pendiente, diámetro representativo y gravedad específica medios para calcular los coeficientes de correlación. Estos valores son:

Valor medio para radio hidráulico

$$m_1 = 2,0 \text{ m}$$

Valor medio para la pendiente

$$m_2 = 1 * 10^{-4}$$

Valor medio para el diámetro característico correspondiente a arena mediana

$$m_3 = 0,000375 \text{ m}$$

Valor medio para la gravedad específica

$$m_4 = 1,65$$

Para evaluar estos coeficientes se utilizaron valores iguales del coeficiente de correlación entre variables y coeficiente de dispersión para todas las variables. Tras evaluar estos parámetros, los coeficientes de correlación total y espuria son:

Coefficiente de correlación total

$$r_{yz} = 3,0466 \quad (4.12a)$$

Coefficiente de correlación espuria

$$\rho_{yz} = 1,1309 \quad (4.12b)$$

Por lo que el grado de espureidad de esta combinación de variables es

$$GE = 0,3712 \quad (4.12c)$$

o un porcentaje de 37,12%, que representa un grado bajo de espureidad. Se observa que los coeficientes de correlación y correlación espuria son especialmente altos, sin embargo, el grado de correlación es moderado.

- d) Ecuación rescrita en función del número de Froude de grano y la rugosidad relativa cuando $(f/f_0) = \phi(\tau_*)$

Los coeficientes de correlación total y espuria son:

Coefficiente de correlación total, r_{yz} ,

$$r_{yz} = \frac{-0,5N_3C_3^2 - 0,5N_1r_{13}C_1C_3 + N_1r_{15}C_1C_5 - 0,5T_2r_{23}C_2C_3 + T_2r_{25}C_2C_5 + T_3r_{35}C_3C_5 - 0,5T_4r_{34}C_3C_4 + T_4r_{45}C_4C_5}{\left[\begin{array}{l} 0,25C_3^2 + C_5^2 \\ -r_{35}C_3C_5 \end{array} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\begin{array}{l} N_1^2C_1^2 + N_2^2C_2^2 + N_3^2C_3^2 + N_4^2C_4^2 + 2N_1N_2r_{12}C_1C_2 + \\ + 2N_1N_3r_{13}C_1C_3 + 2N_1N_4r_{14}C_1C_4 + 2N_2N_3r_{23}C_2C_3 + \\ + 2N_2N_4r_{24}C_2C_4 + 2N_3N_4r_{34}C_3C_4 \end{array} \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.73)$$

Coefficiente de correlación espuria, ρ_{yz} ,

$$\rho_{yz} = \frac{-0,5N_3C_3^2}{\left[0,25C_3^2 + C_5^2\right]^{\frac{1}{2}} \left[N_1^2C_1^2 + N_2^2C_2^2 + N_3^2C_3^2 + N_4^2C_4^2\right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.74)$$

Donde:

$$N_1 = 0,626 - 0,462m_{\tau} M^{-1} \frac{\partial M}{\partial m_{\tau}} \quad (3.72a)$$

$$N_2 = 0,5024 - 0,4602m_{\tau} M^{-1} \frac{\partial M}{\partial m_{\tau}} \quad (3.72b)$$

$$N_3 = -0,626 + 0,4602m_{\tau} M^{-1} \frac{\partial M}{\partial m_{\tau}} \quad (3.72c)$$

$$N_4 = 0,5 + 0,4602m_{\tau} M^{-1} \frac{\partial M}{\partial m_{\tau}} \quad (3.72d)$$

Para evaluar estas variables se utilizaron los mismos valores medios que en el caso anterior. Adicionalmente, se utilizaron valores iguales del coeficiente de correlación entre variables y coeficiente de dispersión para todas las variables. Con estas condiciones, los valores de estos coeficientes son:

Coefficiente de correlación total

$$r_{yz} = 0,8025 \quad (4.13a)$$

Coefficiente de correlación espuria

$$\rho_{yz} = 0,2341 \quad (4.13b)$$

Por lo que el grado de espureidad de esta combinación de variables es

$$GE = 0,2917 \quad (4.13c)$$

o un porcentaje de 29,17%, que representa un grado bajo de espureidad. Este valor es menor que el correspondiente a la misma formulación escrita de distinta manera.

4.3.3 Formulación IIB: Relación Formas de fondo y Velocidad Asociadas

a) Ecuación original cuando (f/f_0) es constante

Los coeficientes de correlación total y espuria de esta ecuación son

Coefficiente de correlación total, r_{yz} ,

$$r_{yz} = \frac{0,313C_3^2 - 0,313r_{13}C_1 C_3 - 0,313r_{14}C_1 C_4 + 0,626r_{15}C_1 C_5 - 0,2515r_{23}C_2 C_3 - 0,2515r_{24}C_2 C_4 + 0,503r_{25}C_2 C_5 - 0,626r_{35}C_3 C_5}{\left[0,25C_3^2 + 0,25C_4^2 + C_5^2 + 0,5r_{34}C_3 C_4 - r_{35}C_3 C_5 - r_{45}C_4 C_5\right]^{\frac{1}{2}} \left[0,3919C_1^2 + 0,2530C_2^2 + 0,3919C_3^2 + 0,6297r_{12}C_1 C_2 - 0,7837r_{13}C_1 C_3 - 0,6297r_{23}C_2 C_3\right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.78)$$

Coefficiente de correlación espuria, ρ_{yz} ,

$$\rho_{yz} = \frac{0,313C_3^2}{\left[0,25C_3^2 + 0,25C_4^2 + C_5^2\right]^{\frac{1}{2}} \left[0,3919C_1^2 + 0,2530C_2^2 + 0,3919C_3^2\right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.79)$$

Donde el radio hidráulico, R , es la variable 1, la pendiente, S , es la variable 2, el diámetro, D_{50} , es la variable 3, la gravedad específica, $Ss-1$, es la variable 4 y la velocidad media, U , es la variable 5.

Para evaluar estos coeficientes se utilizaron valores iguales del coeficiente de correlación entre variables y coeficiente de dispersión para todas las variables. Con estas condiciones, los valores de estos coeficientes son:

Coefficiente de correlación total

$$r_{yz} = 0,1404 \quad (4.14a)$$

Coefficiente de correlación espuria

$$\rho_{yz} = 0,2510 \quad (4.14b)$$

Por lo que el grado de espureidad de esta combinación de variables es

$$GE = 1,788 \quad (4.14c)$$

o un porcentaje de 178,8%, que representa un grado extremo de espureidad.

- b) Ecuación rescrita en función del número de Froude de grano y la rugosidad relativa cuando (f/f_0) es constante

Los coeficientes de correlación total y espuria de esta ecuación son

Coeficiente de correlación total, r_{yz} ,

$$r_{yz} = \frac{0,313C_3^2 - 0,3131r_{13}C_1C_3 + 0,626r_{15}C_1C_5 - 0,2515r_{23}C_2C_3 - 0,503r_{25}C_2C_5 - 0,25r_{34}C_3C_4 - 0,626r_{35}C_3C_5 + 0,5r_{45}C_4C_5}{\left[\begin{array}{l} 0,25C_3^2 + C_5^2 \\ -r_{35}C_3C_5 \end{array} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\begin{array}{l} 0,3919C_1^2 + 0,2530C_2^2 + 0,3919C_3^2 + 0,25C_4^2 + \\ + 0,6297r_{12}C_1C_2 - 0,7837r_{13}C_1C_3 - 0,626r_{14}C_1C_4 - \\ - 0,6297r_{23}C_2C_3 + 0,503r_{24}C_2C_4 - 0,626r_{34}C_3C_4 \end{array} \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.83)$$

Coeficiente de correlación espuria, ρ_{yz} ,

$$\rho_{yz} = \frac{0,313C_3^2}{\left[0,25C_3^2 + C_5^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[0,3919C_1^2 + 0,2530C_2^2 + 0,3919C_3^2 + 0,25C_4^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.84)$$

Donde el radio hidráulico, R , es la variable 1, la pendiente, S , es la variable 2, el diámetro, D_{50} , es la variable 3, la gravedad específica, $Ss-1$, es la variable 4 y la velocidad media, U , es la variable 5.

Para evaluar estos coeficientes se utilizaron valores iguales del coeficiente de correlación entre variables y coeficiente de dispersión para todas las variables. Con estas condiciones, los valores de estos coeficientes son:

Coeficiente de correlación total

$$r_{yz} = 0,8020 \quad (4.15a)$$

Coeficiente de correlación espuria

$$\rho_{yz} = 0,2468 \quad (4.15b)$$

Por lo que el grado de espureidad de esta combinación de variables es

$$GE = 0,3077 \quad (4.15c)$$

o un porcentaje de 30,77%, que representa un grado bajo de espureidad. Este valor es significativamente menor al valor de correlación de la misma formulación escrita de manera distinta.

c) Ecuación original cuando $(f/f_0) = \phi(\tau_*)$

Coefficiente de correlación total, r_{yz} ,

$$r_{yz} = \frac{-0,5P_3C_3^2 - 0,5P_4C_4^2 - 0,5P_1r_{13}C_1C_3 - 0,5P_1r_{14}C_1C_4 + P_1r_{15}C_1C_5 - 0,5P_2r_{23}C_2C_3 - 0,5P_2r_{24}C_2C_4 + P_2r_{25}C_2C_5 - 0,5(P_3 + P_4)r_{34}C_3C_4 + P_3r_{35}C_3C_5 + P_4r_{45}C_4C_5}{\left[0,25C_3^2 + 0,25C_4^2 + C_5^2 + 0,5r_{34}C_3C_4 - r_{35}C_3C_5 - r_{45}C_4C_5\right]^{1/2} \left[P_1^2C_1^2 + P_2^2C_2^2 + P_3^2C_3^2 + P_4^2C_4^2 + 2P_1P_2r_{12}C_1C_2 + 2P_1P_3r_{13}C_1C_3 + 2P_1P_4r_{14}C_1C_4 + 2P_2P_3r_{23}C_2C_3 + 2P_2P_4r_{24}C_2C_4 + 2P_3P_4r_{34}C_3C_4\right]^{1/2}} \quad (3.90)$$

Coefficiente de correlación espuria, ρ_{yz} ,

$$\rho_{yz} = \frac{-0,5P_3C_3^2 - 0,5P_4C_4^2}{\left[0,25C_3^2 + 0,25C_4^2 + C_5^2\right]^{1/2} \left[P_1^2C_1^2 + P_2^2C_2^2 + P_3^2C_3^2 + P_4^2C_4^2\right]^{1/2}} \quad (3.91)$$

Donde

$$P_1 = 0,626 - 0,465m_{\tau_*} M^{-1} \frac{\partial M}{\partial m_{\tau_*}} \quad (3.89a)$$

$$P_2 = 0,503 - 0,465m_{\tau_*} M^{-1} \frac{\partial M}{\partial m_{\tau_*}} \quad (3.89b)$$

$$P_3 = -0,626 + 0,465m_{\tau_*} M^{-1} \frac{\partial M}{\partial m_{\tau_*}} \quad (3.89c)$$

$$P_4 = 0,4602m_{\tau_*} M^{-1} \frac{\partial M}{\partial m_{\tau_*}} \quad (3.89d)$$

En este caso también se utilizaron los mismos valores medios que la formulación anterior.

Para evaluar estos coeficientes se utilizaron valores iguales del coeficiente de correlación entre variables y coeficiente de dispersión para todas las variables. Con estas condiciones, los valores de estos coeficientes son:

Coefficiente de correlación total

$$r_{yz} = 0,1133 \quad (4.16a)$$

Coefficiente de correlación espuria

$$\rho_{yz} = 0,2204 \quad (4.16b)$$

Por lo que el grado de espureidad de esta combinación de variables es

$$GE = 1,9450 \quad (4.16c)$$

o un porcentaje de 194,5%, que representa un grado extremo de espureidad.

d) Ecuación rescrita en función del número de Froude de grano y la rugosidad relativa cuando $(f/f_0) = \phi(\tau_*)$

Los coeficientes de correlación total y espuria son

Coefficiente de correlación total, r_{yz} ,

$$r_{yz} = \frac{-0,5J_3C_3^2 - 0,5J_1r_{13}C_1C_3 + J_1r_{15}C_1C_5 - 0,5J_2r_{23}C_2C_3 + J_2r_{25}C_2C_5 - 0,5J_4r_{34}C_3C_4 + J_3r_{35}C_3C_5 + J_4r_{45}C_4C_5}{\left[0,25C_3^2 + C_5^2 - r_{35}C_3C_5\right]^{\frac{1}{2}} \left[J_1^2C_1^2 + J_2^2C_2^2 + J_3^2C_3^2 + J_4^2C_4^2 + 2J_1J_2r_{12}C_1C_2 + 2J_1J_3r_{13}C_1C_3 + 2J_1J_4r_{14}C_1C_4 + 2J_2J_3r_{23}C_2C_3 + 2J_2J_4r_{24}C_2C_4 + 2J_3J_4r_{34}C_3C_4\right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.98)$$

Coefficiente de correlación espuria, ρ_{yz} ,

$$\rho_{yz} = \frac{-0,5J_3C_3^2}{\left[0,25C_3^2 + C_5^2 - r_{35}C_3C_5\right]^{\frac{1}{2}} \left[J_1^2C_1^2 + J_2^2C_2^2 + J_3^2C_3^2 + J_4^2C_4^2\right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.99)$$

Donde la el radio hidráulico, R , es la variable 1, la pendiente, S , es la variable 2, el diámetro, D_{50} , ese la variable 3, la gravedad específica, $Ss-1$, es la variable 4 y la velocidad media, U , es la variable 5.

Donde

$$J_1 = 0,626 - 0,465m_{\tau_*} M^{-1} \frac{\partial M}{\partial m_{\tau_*}} \quad (3.97a)$$

$$J_2 = 0,503 - 0,465m_{\tau_*} M^{-1} \frac{\partial M}{\partial m_{\tau_*}} \quad (3.97b)$$

$$J_3 = -0,626 + 0,465m_{\tau_*} M^{-1} \frac{\partial M}{\partial m_{\tau_*}} \quad (3.97c)$$

$$J_4 = 0,5 + 0,465m_{\tau_*} M^{-1} \frac{\partial M}{\partial m_{\tau_*}} \quad (3.97d)$$

En esta formulación también se utilizaron los valores medios definidos en la formulación anterior. Para evaluar estos coeficientes se utilizaron valores iguales del coeficiente de correlación entre variables y coeficiente de dispersión para todas las variables. Con estas condiciones, los valores de estos coeficientes son:

Coefficiente de correlación total

$$r_{yz} = 0,7935 \quad (4.17a)$$

Coefficiente de correlación espuria

$$\rho_{yz} = 0,2314 \quad (4.17b)$$

Por lo que el grado de espureidad de esta combinación de variables es

$$GE = 0,2917 \quad (4.17c)$$

o un porcentaje de 29,17%, que representa un grado bajo de espureidad. Este valor es menor que el correspondiente al del caso anterior, correspondiente a la misma formulación pero escrita de otra manera.

4.4 Método de Nnadi y Wilson

a) Régimen inferior

Los coeficientes de correlación total y espuria son:

Coefficiente de correlación total, r_{yz} ,

$$r_{yz} = \frac{-0,5C_1^2 - 0,5r_{12}C_1C_2 + 0,5r_{13}C_1C_3 + 0,5r_{23}C_2C_3 + r_{15}C_1C_5 - r_{35}C_3C_5}{\left[\begin{array}{l} 0,25C_1^2 + 0,25C_2^2 + C_5^2 - r_{15}C_1C_5 + 0,5r_{12}C_1C_2 - \\ - r_{25}C_2C_5 \end{array} \right]^2 \left[C_1^2 + C_3^2 - r_{13}C_1C_3 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.107)$$

Coefficiente de correlación espuria, ρ_{yz} ,

$$\rho_{yz} = \frac{-0,5C_1^2}{\left[0,25C_1^2 + 0,25C_2^2 + C_5^2 \right]^2 \left[C_1^2 + C_3^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.108)$$

Donde el radio hidráulico, R , es la variable 1, la pendiente, S , es la variable 2, el diámetro, D_{50} , es la variable 3 y la velocidad media, U , es la variable 5.

Para evaluar estos coeficientes se utilizaron valores iguales del coeficiente de correlación entre variables y coeficiente de dispersión para todas las variables. Con estas condiciones, los valores de estos coeficientes son:

Coefficiente de correlación total

$$r_{yz} = -0,2887 \quad (4.18a)$$

Coefficiente de correlación espuria

$$\rho_{yz} = -0,2887 \quad (4.18b)$$

Por lo que el grado de espureidad de esta combinación de variables es

$$GE = 1,00 \quad (4.18c)$$

o un porcentaje de 100%, que representa un grado extremo de espureidad.

b) Régimen superior

Los coeficientes de correlación total y espuria son:

Coefficiente de correlación total, r_{yz} ,

$$r_{yz} = \frac{-0,5C_2^2 - 0,5r_{12}C_1C_2 + 0,5r_{14}C_1C_4 + 0,5r_{24}C_2C_4 + r_{25}C_2C_5 - r_{45}C_4C_5}{\left[0,25C_1^2 + 0,25C_2^2 + C_5^2 + 0,5r_{12}C_1C_2 - \right]^{\frac{1}{2}} \left[C_1^2 + C_4^2 - r_{14}C_1C_4\right]^{\frac{1}{2}} - r_{15}C_1C_5 - r_{25}C_2C_5} \quad (3.113)$$

Coefficiente de correlación espuria, ρ_{yz} ,

$$\rho_{yz} = \frac{-0,5C_2^2}{\left[0,25C_1^2 + 0,25C_2^2 + C_5^2\right]^{\frac{1}{2}} \left[C_1^2 + C_4^2\right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.114)$$

Donde la el radio hidráulico, R , es la variable 1, la pendiente, S , es la variable 2, el diámetro, D_{50} , ese la variable 3, la gravedad específica, $Ss-1$, es la variable 4 y la velocidad media, U , es la variable 5.

Para evaluar estos coeficientes se utilizaron valores iguales del coeficiente de correlación entre variables y coeficiente de dispersión para todas las variables. Con estas condiciones, los valores de estos coeficientes son:

Coefficiente de correlación total

$$r_{yz} = -0,2887 \quad (4.19a)$$

Coefficiente de correlación espuria

$$\rho_{yz} = -0,2887 \quad (4.19b)$$

Por lo que el grado de espureidad de esta combinación de variables es

$$GE = 1,00 \quad (4.19c)$$

o un porcentaje de 100%, que representa un grado extremo de espureidad.

En esta formulación, los coeficientes de correlación total, espuria y el grado de espureidad son iguales en el régimen superior e inferior debido a que, a pesar de tener distintas variables, la forma general de ambas formulaciones es muy similar. Se observa que a pesar de sólo compartir una variable entre los dos productos adimensionales, al estar involucrado un logaritmo adimensional, el grado de espureidad es muy alto.

Los resultados se pueden resumir en la siguiente tabla:

Tabla 4.1 Resumen de resultados

Método	Coefficiente de Correlación r_{yz}	Coefficiente de correlación Espuria ρ_{yz}	Grado de Espureidad $GE(\%)$	Condición de espureidad
Shields τ_* y R_*	0,2021	-0,0602	-29,76%	bajo
Shields τ_* y D_*	-0,1461	-0,6324	523,24%	Extremo
Brownlie, inferior ec. original	0,7813	0,8400	107,51%	Extremo
Brownlie, inferior, rescrita para F_{D50}	0,6292	0,2756	43,80%	Medio
Brownlie, superior, Ec. original	-0,3534	0,8540	-241,66%	Extremo
Brownlie, superior, rescrita para F_{D50}	0,6822	0,2756	40,40%	Medio
K. y K. Gsol y Vel no A. Ec original	0,5090	0,7175	140,96%	Extremo
K y K G sol y Vel no A. Ec para F_{D50}	0,8025	0,2437	30,36%	Bajo
K y K. Form. IIA Ec. original $f/f_0 = cte$	0,9324	0,7196	77,15%	Alto
K y K. Form. IIA Ec. con F_{D50} y $f/f_0 = cte$	0,8022	0,2468	30,77%	Bajo
K y K. Form. IIA Ec. original $f/f_0 = \phi(\tau_*)$	3,0466*	1,1309*	37,12%	Bajo
K y K. Form. IIA Ec. con F_{D50} y $f/f_0 = \phi(\tau_*)$	0,8025	0,2341	29,17%	Bajo
K y K. Form. IIB Ec. original $f/f_0 = cte$	0,1404	0,2510	178,8%	Extremo
K y K. Form. IIB Ec. con F_{D50} y $f/f_0 = cte$	0,8020	0,2468	30,77%	Bajo
K y K. Form. IIB Ec. original $f/f_0 = \phi(\tau_*)$	0,1133	0,2204	194,50%	Extremo
K y K. Form. IIB Ec. con F_{D50} y $f/f_0 = \phi(\tau_*)$	0,7935	0,2314	29,17%	Bajo
Nnadi y Wilson, R. Inf.	-0,2887	-0,2887	100%	Extremo
Nnadi y Wilson, Reg. Sup.	-0,2887	-0,2887	100%	Extremo

*Estos valores son el resultado numérico de la ecuación de Reed aplicada a este método. Están por arriba de los límites de la definición de coeficiente de correlación, por este motivo se deben considerar con cautela.

5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

- El análisis de espureidad es una herramienta útil para la elección de parámetros adimensionales en el momento de proponer fórmulas empíricas. De igual manera es útil para verificar si una relación empírica no es causal, sino espuria. Por este motivo, se debe realizar, siempre que sea posible, este tipo de análisis como validación de un procedimiento de cálculo empírico.
- La existencia de la correlación espuria depende principalmente de la forma de los productos adimensionales. Si una o más variables se repiten dentro de estas variables, existirá una correlación espuria.
- La existencia de un coeficiente de correlación espuria, implica cierto grado de espureidad. Sin embargo, la magnitud de la espureidad depende principalmente de las características estadísticas de las poblaciones dato, los coeficientes de correlación entre las distintas variables, r_{ij} , y el coeficiente de dispersión, C_i , de cada una de ellas.
- La espureidad provoca que existe una distorsión en la correlación entre las variables. Esto incluso puede provocar correlaciones inexistentes, y las formulaciones producto de estas condiciones tienen poca confiabilidad en el momento de realizar cálculos predictivos.
- La espureidad se provoca principalmente debido a que se repite varias veces la misma variable dentro de los productos adimensionales que se utilizan para crear las formulaciones. Esta espureidad puede incrementarse o disminuirse según sea la forma de la función por medio de la cual se relaciona a estos productos. Cuando se deba crear una formulación utilizando el análisis dimensional, se debe evitar lo más posible la repetición de variables para la conformación de la formulación para reducir el grado de espureidad. Posteriormente, se debe revisar la ecuación para verificar si se puede simplificar o rescribir de forma que se disminuya la espureidad. Para cada arreglo de productos adimensionales, conviene cuantificar el grado de espureidad de la variable dependiente y escoger el que tenga los valores más reducidos.
- En el caso de productos de potencias, el valor de la espureidad únicamente depende de las características de la dispersión y del coeficiente de correlación entre las distintas variables. Por tal motivo, a pesar de que cambien los valores medios, mientras las características de la dispersión y del coeficiente de correlación entre las distintas variables sean los mismos, el valor de las correlaciones total y espuria serán iguales para una misma formulación. Sin embargo, si la formulación

involucra polinomios, como en algunos casos de la formulación Karim – Kennedy, los valores medios sí influyen en la determinación de los coeficientes de correlación. Al facilitar el cálculo de los coeficientes de correlación, se recomienda aplicar el método propuesto para el caso de productos de potencias.

Método de Shields

- El grado de espureidad de la formulación número de Reynolds de grano – cortante adimensional, tiene una espureidad moderada, $GE = 29,76\%$ mientras que la formulación diámetro adimensional – cortante crítico adimensional tiene una espureidad extrema, $GE = 523 \%$.
- Ambas formulaciones son productos de potencias, por lo que los parámetros que influyen en el valor de los coeficientes de correlación son las características de la dispersión, el coeficiente de dispersión y el coeficiente de correlación entre variables.
- Para este caso, la existencia del coeficiente de correlación espuria indica que entre estos dos parámetros existe correlación espuria.
- Ambas formulaciones estudiadas tienen espureidad. Sin embargo, la formulación que involucra el diámetro adimensional y el cortante adimensional tiene una espureidad mucho mayor debido a que las variables que conforman el diámetro adimensional se repiten todas en el cortante adimensional. Por este motivo, se recomienda utilizar ecuaciones y conceptos basados en la formulación cortante adimensional – número de Reynolds de grano. ($\tau_* - R_*$)

Método de Brownlie

- En el método de Brownlie, ambas formulaciones tienen un coeficiente de correlación espuria no nulo, por tanto, en ambos casos existe algún grado de correlación espuria.
- Las dos formulaciones son productos de potencias, por lo que para la determinación de los coeficientes de correlación sólo se requiere de las características de la dispersión de las distintas variables.
- La ecuación del régimen inferior original tiene un grado extremo de espureidad, $GE = 107,51\%$, debido a que la variable rugosidad relativa se repite de ambos lados de la ecuación. Esta espureidad se reduce al rescribir la ecuación de manera que no se repita esta variable en ambos lados, resultando en un grado de espureidad moderado, $GE = 43,8 \%$.
- En el caso del régimen superior, la rugosidad relativa también se repite de ambos lados de la ecuación, por lo que la el grado de espureidad es alto, $GE = 241,66\%$. Al rescribir esta ecuación de manera que no se repita la rugosidad relativa de ambos

lados de la ecuación, la espureidad se reduce a $GE = 40,4\%$. Esto significa que la versión rescrita más confiable.

Método de Karim y Kennedy

Formulación Gasto Sólido y Velocidad no Asociados

- En la formulación de Gasto Sólido y Velocidad no Asociados se repite el parámetro número de Froude de grano de ambos lados de la ecuación. Esto hace que la espureidad sea grande, $GE = 140,96\%$. Al rescribir esta ecuación de modo que no se repita éste parámetro, se logra reducir la espureidad hasta un grado moderado, $GE = 30,36\%$.
- Esta formulación es un producto de potencias, por lo que las características que influyen en los coeficientes de correlación son las características de la dispersión de los datos originales.
- Debido a su forma, sería más conveniente utilizar esta formulación rescrita en términos del número de Froude de grano, incluso debido a que de esta manera se simplifica su uso.

Formulación IIA: Relación Formas de fondo y Velocidad Asociadas

- En esta formulación cuando la razón entre la rugosidad de grano y la rugosidad de formas de fondo es constante, la ecuación se puede rescribir en términos más simples. De esta manera se reduce la espureidad de $77,15\%$ a $30,77\%$.
- Cuando la razón entre rugosidades es constante, la formulación es un producto de potencias. En este intervalo, los factores que determinan los coeficientes de correlación son las características de la dispersión de los datos.
- En esta formulación también se observa que repetir una variable de ambos de la ecuación aumenta la espureidad.
- En el intervalo cuando la razón entre rugosidades depende del cortante adimensional, la función no es un producto de potencias, por lo que para la determinación de los coeficientes de correlación es necesario conocer, además de las características de las dispersiones de los datos originales, un valor medio.
- A pesar de repetirse variables de ambos lados de la ecuación, la espureidad es mucho menor en el intervalo donde la razón entre rugosidades depende del esuerzo cortante adimensional en la ecuación original, que cuando es constante.
- A pesar de tener un valor bajo, en el intervalo donde la razón de rugosidades es constante, el grado de espureidad se reduce aún más cuando se reduce el número de variables repetidas de ambos lados de la ecuación.
- La formulación IIA rescrita es muy similar a la formulación IIB, por lo que se puede considerar que son prácticamente la misma ecuación.

Formulación IIB: Relación Formas de fondo y Velocidad Asociadas

- Esta formulación también tiene espureidad. El grado de espureidad es muy diferente según dependiendo si la razón entre rugosidades es constante o depende del cortante adimensional.
- Cuando la razón entre rugosidad de grano y rugosidad de fondo con formas de fondo es constante, la formulación es un producto de potencias, por lo que los parámetros que se utilizan en la determinación de los coeficientes de correlación son la dispersión de las variables y la correlación entre ellas.
- Cuando la razón entre rugosidades depende del cortante adimensional, la formulación no es un producto de potencias y se requieren, además de las características de la dispersión, los valores medios de las variables.
- La formulación original cuando la razón entre rugosidades es constante tiene un grado de espureidad extremo, $GE = 178,8\%$, mientras que la misma formulación rescrita tiene un grado de espureidad moderado, $GE = 30,77\%$. Esto se debe a que la gravedad específica, que en la forma original aparece del lado izquierdo de la ecuación, es un producto adimensional en si mismo, e incluirlo en otros productos
- La formulación original cuando la razón entre rugosidades depende del cortante adimensional tiene una espureidad extrema, $GE = 194,5\%$. Cuando se rescribe, el grado de espureidad disminuye a un grado moderado, $GE = 29,17\%$. El alto nivel de espureidad en el caso de la ecuación original se puede atribuir a la posición de la variable gravedad específica sumergida, sobre todo, por que la razón entre rugosidades también es un parámetro que depende de ella.

Método de Nnadi y Wilson

- En este caso, para ambos regímenes, la espureidad es alta, $GE = 100 \%$. Se puede atribuir el alto grado de espureidad a que en ambos casos interviene la función logaritmo, esto hace que, a pesar de que sólo se repite una variable, la espureidad sea alta.

En el caso de procedimientos relacionados con la hidráulica fluvial, la complejidad del fenómeno y la cantidad de variables involucradas hace necesario el uso del análisis dimensional, y por consiguiente, el riesgo de provocar correlaciones espurias. Sería deseable replantear los métodos de cálculo de resistencia tratados en el presente trabajo, a partir de los datos originales, utilizando los parámetros Froude de grano, F_{D50} , y rugosidad relativa, y verificar si los coeficientes y exponentes se modifican o no. De cualquier manera, si se supone que no se alteran, las expresiones rescritas en términos de los parámetros Froude de grano y rugosidad relativa tienen un procedimiento de cálculo más sencillo, por lo que se recomienda utilizarlas de esta forma.

APÉNDICE I: EL INICIO DEL MOVIMIENTO Y LA CURVA DE SHIELDS (1936)

Los cauces naturales son todos los cursos de agua que existen en forma natural en la tierra. Estos son arroyos, ríos, etc. Generalmente no tienen una sección y pendientes constantes. En los cauces naturales, la vena líquida está en contacto con un material que puede ser arrastrado por la corriente. Como consecuencia, la superficie en contacto con el flujo sufre constantes deformaciones producto de erosión y sedimentación, esto es: la superficie y la sección transversal cambian constantemente de forma. El diseño de canales no revestidos y la ingeniería de ríos involucran el arrastre de sedimentos. En el caso de canales, el diseño es un problema de estabilidad de la sección.¹ En el caso de ríos, el interés se centra en evaluar la cantidad de sedimento que la corriente arrastra. Y en ambos casos, es importante evaluar la relación entre el gasto y alguna característica geométrica de la sección, como el tirante o el radio hidráulico.

El arrastre de sedimentos es un problema complicado. Algunos autores consideran que es tan complejo que no puede estar sujeto a una solución racional.² La dificultad de explicar el fenómeno se debe a que el flujo es no permanente y no uniforme ya que tanto la plantilla como la superficie del agua pueden cambiar continuamente de forma. El cambio en la plantilla y la sección transversal se debe fundamentalmente a la erosión y depósito de partículas en su interacción con el flujo.

Para estudiar el arrastre de sedimentos se ha simplificado el problema aislando un detalle o simplificando las condiciones de frontera para que sólo se consideren las variables significativas. Sin embargo, simplificar las condiciones en el transporte de sedimentos y analizar cada detalle por separado puede no reflejar la realidad. Es de uso común, a pesar de no ajustarse a las condiciones reales, asumir que el flujo en condiciones de arrastre de sedimentos como permanente y uniforme, aunque sólo sea así en sentido estadístico.

1. El Mecanismo de Arrastre (entrainment)

El inicio del movimiento se puede definir como el instante en que cada partícula sólida en el lecho de un cauce empieza a perder su equilibrio estático.³ Otras condiciones importantes del movimiento de partículas son las que se conocen como movimiento incipiente, movimiento crítico, condición crítica de arrastre, inicio de arrastre o transporte incipiente. El movimiento incipiente es cuando una o varias partículas comienzan a

¹ ref 19, p 87

² ref 18, p. 786.

³ ref 10 p 190.

moverse sin importar si continúan haciéndolo o no, y el transporte incipiente describe la condición en la que las partículas comienzan a moverse y continúan en movimiento. El transporte incipiente sucede cuando la fuerza que ejerce el flujo sobre las partículas del lecho es suficientemente grande para que la mayoría de las partículas pierdan su equilibrio estático y se muevan, pero sin desarrollar ondulaciones en el fondo del canal.

El inicio del movimiento de sedimento bajo la acción de un fluido está estrechamente ligado al tamaño de las partículas. Se considera que el desplazamiento del material comienza cuando la energía del agua es suficiente para que todo el lecho entre en movimiento.

Muchos autores han tratado de expresar analíticamente la fuerza resultante que actúa sobre una partícula de sedimento en el momento del inicio del arrastre / suspensión por el flujo. Las partículas de fondo no constituyen un medio continuo; son un conjunto de partículas generalmente heterogéneas, por lo que el problema adquiere un grado mayor de complejidad. Aplicar sólo el criterio de la fuerza de arrastre a las partículas de sedimento en conjunto en el fondo del agua se vuelve muy complejo estadísticamente.

La aplicación requiere describir varios aspectos del fenómeno por medio de funciones desconocidas. Este fenómeno limita necesariamente estos análisis a consideraciones físicas y dimensionales generales.⁴

2. Diagrama de Shields (1936)

Se considera al método desarrollado por Albert F. Shields (1936) como el que describe de manera más directa el fenómeno de arrastre de sedimento. Shields realizó experimentos en canales con materiales no cohesivos de diversos diámetros y de distribución uniforme, estudió las fuerzas que actúan sobre una partícula y estudió las condiciones necesarias que definen el momento en que el inicia el movimiento de las partículas de fondo; definió esta condición como inicio de movimiento y la planteó en términos de los parámetros adimensionales.

Shields hizo ciertas consideraciones burdas para evitar un enfoque puramente racional y posteriormente, a través de sus resultados experimentales, confirmó y complementó su análisis. La hipótesis fundamental de Shields, es que la fuerza que ejerce el flujo sobre una partícula de sedimento se puede expresar en términos de la relación de arrastre común:

$$F_D = C_D A \frac{\rho u^2}{2} = \phi_1 \left(\alpha_1, \frac{uD}{\nu} \right) \rho D^2 u^2 \quad (1)$$

Donde α_1 es un factor de forma; u la velocidad característica del flujo en la elevación z sobre el fondo proporcional al tamaño del sedimento D , por ejemplo

$$z = \alpha_2 D \quad (2)$$

⁴ Ref 18, p. 789.

La ecuación de distribución de velocidad es

$$\frac{U}{U_*} = 5,75 \log \frac{y}{k} + \phi \left(\frac{kU_*}{\nu} \right) \quad (3)$$

En donde U_* es la velocidad asociada al cortante definida como

$$U_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = \sqrt{gRS} \quad (4)$$

En donde el esfuerzo cortante de fondo, τ_0 , es

$$\tau_0 = \gamma_0 RS \quad (5)$$

En donde γ es el peso específico del fluido; R el radio hidráulico de la sección; S la pendiente; k es la rugosidad; ν la viscosidad y U la velocidad media.

De la ecuación de distribución de velocidad, se puede escribir que

$$U = U_* \left[5,75 \log \alpha_2 + \phi \left(\frac{DU_*}{\nu} \right) \right] = U_* \phi_2 \left(\alpha_2, \frac{DU_*}{\nu} \right) \quad (6)$$

La ecuación de arrastre y las anteriores se pueden combinar en una relación funcional general de forma

$$F_D = \tau_0 D^2 \phi_3 \left(\alpha_1, \alpha_2, \frac{DU_*}{\nu} \right) \quad (7)$$

Shields asumió que la resistencia de la partícula al movimiento, F_R , depende únicamente de la forma del fondo y el peso sumergido de la partícula, es decir

$$F_R = \alpha_3 (Ss - 1) \gamma D^3 \quad (8)$$

Donde Ss es la gravedad específica; y γ es el peso específico del sedimento.

Introdujo el término fuerza tractiva crítica, τ_c , para representar el valor de cortante de pared en el que la fuerza del flujo sobre la partícula apenas supera el movimiento. Tomando en cuenta este concepto, la expresión anterior se puede describir como

$$F_R = \alpha_3 (Ss - 1) \gamma D^3 = \tau_c D^2 \phi_4 \left(\alpha_1, \alpha_2, \frac{DU_*}{\nu} \right) \quad (9)$$

Shields investigó el caso específico de un fondo con partículas con un tamaño uniforme. Cuando se tiene un fondo con estas características, los distintos coeficientes que representan las características del fondo y de partículas se pueden asociar en una sola constante, resultando en

$$\frac{\tau_c}{\gamma D (Ss - 1)} = \phi \left(\frac{DU_*}{\nu} \right) \quad (10)$$

Los resultados de Shields están plasmados en un diagrama que lleva su nombre. A partir de resultados experimentales, Shields planteó el momento en el que las partículas de fondo comienzan a moverse (movimiento incipiente) y el momento en el que quedan suspendidos (transporte incipiente) y las formas que se presentaban en el fondo en forma gráfica. El diagrama original de Shields en el que se presenta una correlación τ_* versus R_* , también conocido como diagrama de fuerza tractiva, mostraba una zona que indica el inicio y el fin

subcapa laminar. En estas condiciones, el movimiento de las partículas depende totalmente de la acción viscosa.⁶

La línea horizontal representa las condiciones en las cuales la subcapa laminar ha sido totalmente alterada por la rugosidad de fondo que producen las partículas, por tanto, el movimiento involucra la acción de la turbulencia en la frontera.⁷ Los experimentos de Shields y de la mayoría de los autores estaban limitados a sedimentos compuestos por partículas de tamaño uniforme. Por tanto, sólo se puede suponer que un fondo natural no uniforme produciría una curva de transición similar a la mostrada en la figura original de Shields.

A partir de las observaciones de Shields se puede concluir que la configuración de fondo depende principalmente del parámetro R_* .⁸ A valores bajos de este parámetro, en el fondo se presentan rizos, mientras que a valores altos se forman barras largas. Este comportamiento tiene como consecuencia que en modelos hidráulicos de fondo móvil se utilice material grueso con gravedad específica baja.

Ya que se ha desarrollado una configuración de fondo específica, se considera que la rugosidad de fondo depende del tamaño de partícula, D , ya que este factor rige la forma de las configuraciones.

Los resultados de Shields se deben utilizar bajo las siguientes consideraciones:⁹

1. El uso de una fuerza tractiva media para representar el inicio del movimiento del material de fondo es arbitrario, ya que la naturaleza estadística del flujo¹⁰ y las características del sedimento causan que las partículas a nivel individual se muevan de manera intermitente antes de que se presente la fuerza crítica, incluso a pesar de que el flujo ejerza una fuerza mayor a la crítica, las partículas no permanecen en movimiento continuo. En estados avanzados de movimiento ocurre un intercambio de partículas entre las zonas de movimiento y el fondo. El arrastre neto depende del grado de balance entre estas dos fases de intercambio.
2. El diámetro es un parámetro muy útil para la cuantificación del peso y la rugosidad. Adicionalmente, el análisis de Shields involucra implícitamente la velocidad de caída, ya que se incorpora la relación de arrastre básica y por tanto, es consistente con las consideraciones generales de los principios del movimiento y arrastre de sedimentos.
3. El diámetro no representa la rugosidad de fondo, k , en estados avanzados de transporte. En estos estados, la función de arrastre debe expresarse de manera más general en términos del parámetro

$$\frac{kU_*}{v}$$

Y la relación entre la velocidad de caída, ω , a la velocidad asociada al cortante de fondo, U_* .

⁶ Ref 18, p. 791.

⁷ Ref. 18, p. 791.

⁸ Ref. 18, p. 791.

⁹ ref. 18, pp. 791 – 792.

¹⁰ Por la naturaleza turbulenta del fluido, los valores de velocidad y dirección tienen una variación a partir de un valor medio. Esto provoca que en general, a nivel local no se pueda considerar los valores de velocidad y dirección como constantes.

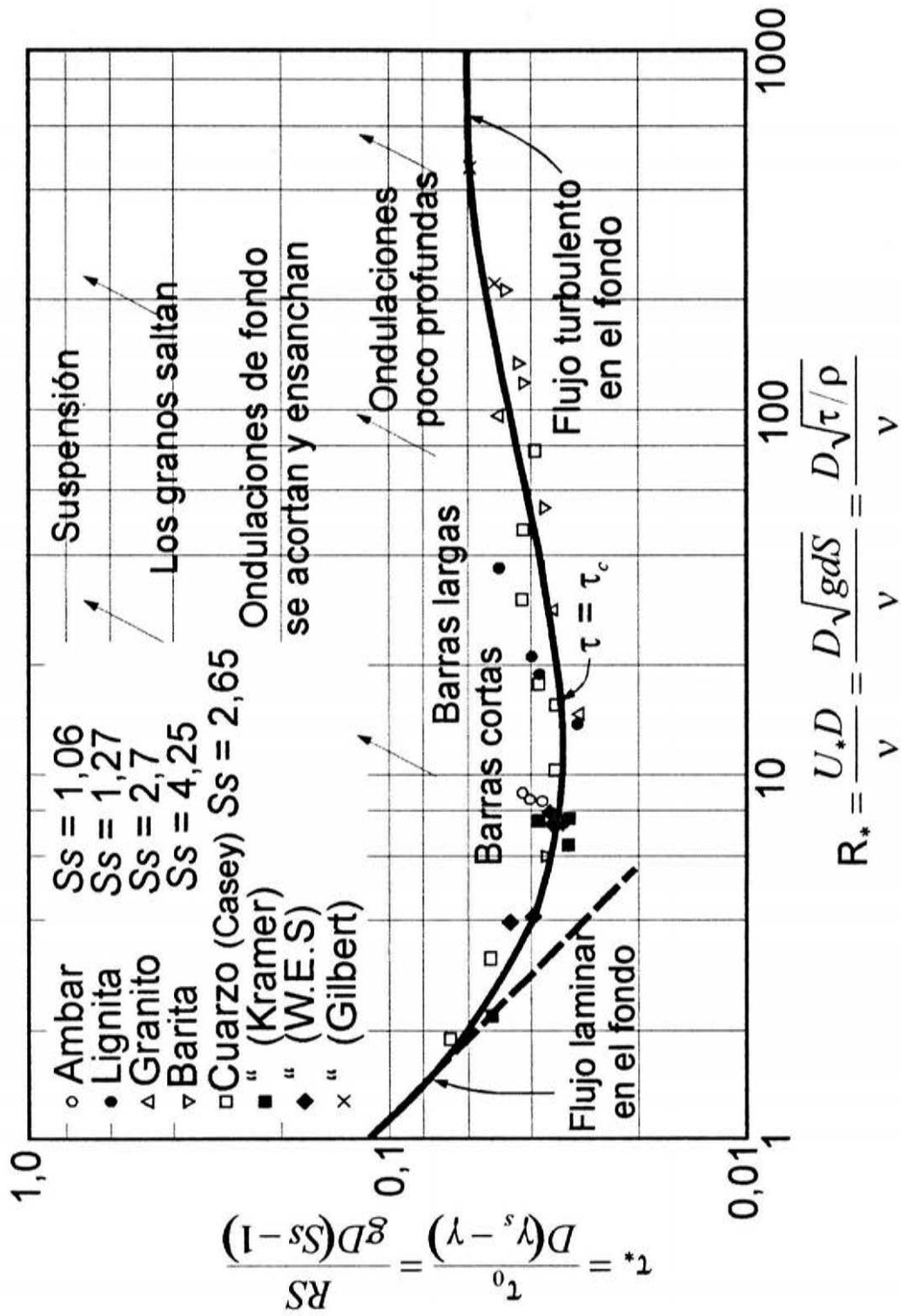


Fig. 3 Diagrama de Shields adaptado por Hunter Rouse (1950)

2.1 Representación Numérica de la Curva de Shields

2.1.1 Ecuaciones de Yalin y Karahan (1979)

Yalin y Karahan realizaron experimentos con arena de tamaño uniforme y con varias densidades de fondo. Sus resultados indican que el esfuerzo cortante crítico correspondiente a flujos laminar y turbulento tiene su propia curva de inicio de arrastre. En la curva correspondiente al flujo turbulento, para valores grandes de R_* , el valor constante de τ_* es 0,045 en vez de 0,06 que es el valor en la curva original de Shields. Este límite se alcanza cuando $R_* = 70$, que corresponde al valor donde la frontera se vuelve hidrodinámicamente rugosa. Para valores inferiores de R_* , correspondientes a fronteras hidrodinámicamente lisa, τ_* es inversamente proporcional a $R_*^{0,3}$.

La dispersión de los datos de Yalin y Karahan indica que los criterios que se utilizan en el diagrama no son los únicos que definen la condición crítica de arrastre.¹¹

Yalin y Karahan utilizan un parámetro denominado diámetro adimensional, D_* , que se define como

$$D_* = \left[\frac{R_*^2}{\tau_*} \right]^{\frac{1}{3}} = D \left[\frac{(\gamma_s - \gamma) g}{\gamma v^2} \right]^{\frac{1}{3}} = D \left[\frac{g(Ss-1)}{v^2} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (13)$$

Este parámetro se puede utilizar para simplificar algunos cálculos o establecer una relación directa con el cortante adimensional, τ_* .

Yalin y Karahan proponen las siguientes ecuaciones para representar la curva de Shields:

En función del parámetro R_* , para flujo turbulento¹²,

$$\tau_{*c} = 0,1R_{*c}^{-0,3} \quad \text{para } 0,02 < R_{*c} \leq 1,0395 \quad (14a)$$

$$\tau_{*c} = \frac{0,1013}{R_{*c}^{0,6338}} + 0,0486 \exp \left[- \left(\frac{17,6427}{R_{*c}} \right)^{1,0311} \right] \quad \text{para } 1,0395 \leq R_{*c} < 70 \quad (14b)$$

La expresión anterior se complementa con

$$\tau_{*c} = 0,045 \quad \text{cuando } R_{*c} \geq 70 \quad (14c)$$

Y para flujo laminar en función del parámetro R_*

$$\tau_{*c} = \frac{0,114}{R_{*c}^{0,2655}} + 0,0091 \exp \left[- \left(\frac{3,8200}{R_{*c}} \right)^{6,3767} \right] \quad (15)$$

¹¹ Ref. 8, p. 8.

¹² Esta ecuación inicial fue propuesta por Mantz (1977).

Las curvas en función del diámetro adimensional, D_* , son las siguientes:

Flujo turbulento

$$\tau_{*c} = 0,1371D_{*c}^{-0,3770} \text{ cuando } 0,10735 < D_{*c} \leq 2,0838 \quad (16a)$$

Esta función se complementa con las expresiones

$$\tau_{*c} = \frac{0,1777}{D_{*c}^{0,7303}} + 0,0437 \exp\left[-\left(\frac{31,9536}{D_{*c} + 10}\right)^{2,4531}\right] \text{ cuando } 2,0838 \leq D_{*c} \leq 47,75233 \quad (16b)$$

y

$$\tau_{*c} = 0,045 \text{ cuando } D_{*c} \geq 47,75233 \quad (16c)$$

La curva en función del diámetro adimensional, D_* , para el flujo laminar son:

$$\tau_{*c} = \frac{0,1439}{D_{*c}^{0,3524}} + 0,0084 \exp\left[-\left(\frac{5,6243}{D_{*c}}\right)^{9,2084}\right] \text{ cuando } 0,21637 \leq D_{*c} \leq 11,25177 \quad (17)$$

2.1.2 Ecuaciones de Maza (1986)

La ecuación de maza describe una curva que queda en medio de la zona o banda definida por los datos experimentales originales de Shields. Esta expresiones son

$$\tau_{*c} = \frac{0,097}{R_{*c}} + 0,077 \exp\left\{-\left[\frac{19,58}{R_{*c}}\right]^{0,3191}\right\} \text{ válida cuando } 1 \leq R_{*c} \leq 1500 \quad (18a)$$

y

$$\tau_{*c} = 0,06 \text{ cuando } R_{*c} > 1500 \quad (18b)$$

Maza también planteó ecuaciones en función del diámetro adimensional. Estas expresiones son

$$\tau_{*c} = \frac{0,2196}{D_{*c}} + 0,077 \exp\left\{-\left[\frac{30,36}{D_{*c}}\right]^{0,563}\right\} \text{ cuando } 1 \leq D_{*c} \leq 333 \quad (19a)$$

y

$$\tau_{*c} = 0,06 \text{ cuando } D_{*c} > 333 \quad (19b)$$

2.1.3 Ecuaciones de Chien y Wan (1983)

El método de Chien y Wan utiliza los parámetros adimensionales cortante adimensional, τ_{*c} , y diámetro adimensional, D_* , para elaborar la curva

$$\tau_{*c} = 0,126D_*^{-0,44}; \quad D_* < 1,5 \quad (20a)$$

$$\tau_{*c} = 0,131D_*^{-0,55}; \quad 1,5 \leq D_* < 10 \quad (20b)$$

$$\tau_{*c} = 0,0685D_*^{-0,27}; \quad 10 \leq D_* < 20 \quad (20c)$$

$$\tau_{*c} = 0,0173D_*^{0,19}; \quad 20 \leq D_* < 40 \quad (20d)$$

$$\tau_{*c} = 0,0115D_*^{0,30}; \quad 40 \leq D_* < 150 \quad (20e)$$

$$\tau_{*c} = 0,052; \quad D_* \geq 150 \quad (20f)$$

2.1.4 Ecuaciones de van Rijn (1984)

Las ecuaciones de van Rijn definen una línea para la definición del cortante crítico adimensional, τ_{*c} , en función del diámetro adimensional, D_* .

$$\tau_{*c} = 0,24D_*^{-1}; \quad D_* \leq 4 \quad (21a)$$

$$\tau_{*c} = 0,14D_*^{-0,64}; \quad 4 < D_* \leq 10 \quad (21b)$$

$$\tau_{*c} = 0,04D_*^{-0,10}; \quad 10 < D_* \leq 20 \quad (21c)$$

$$\tau_{*c} = 0,013D_*^{0,29}; \quad 20 < D_* \leq 150 \quad (21d)$$

$$\tau_{*c} = 0,055; \quad D_* > 150 \quad (21e)$$

Estas ecuaciones son para sedimento con diámetro y densidad uniformes.

2.2 Observaciones sobre el Diagrama de Shields

2.2.1 Propiedades del Sedimento

Las características del sedimento que conforman los datos que utiliza Shields son:

Tabla 1 Características del sedimento utilizado por Shields.¹³

Material	S_s	D (mm)
Ambar	$S_s = 1,06$	1,56 mm
Lignita	$S_s = 1,27$	1,71 mm
Granito	$S_s = 2,70$	2,44 mm
Barita	$S_s = 4,25$	2,46 mm
Cuarzo	$S_s = 2,65$	2,47 mm

¹³ Ref. 18, p. 795.

Utilizando estos valores, la gravedad específica y el diámetro se pueden correlacionar por medio de relaciones de segundo grado similares a una parábola.

La relación entre diámetro y gravedad específica, tomando como dato el diámetro, es

$$S_s = 3,5106 - 4,0615D + 1,6021D^2 \quad (2.22a)$$

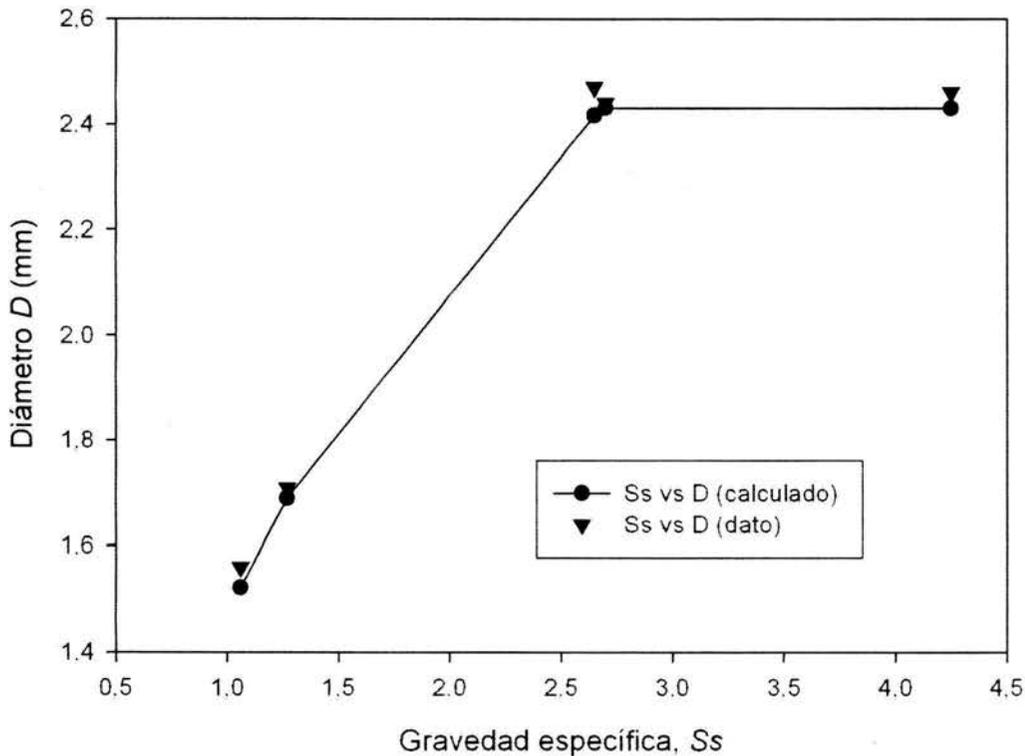


Fig. 4a Características del sedimento y curva de regresión 22a

La ecuación resultante cuando se considera la gravedad específica como dato es

$$D = 0,43705 + 1,20763S_s - 0,17380S_s^2 \quad (22b)$$

Se puede afirmar que existe una relación no aleatoria entre el diámetro y la gravedad específica. Estos dos parámetros se utilizan para conformar los parámetros número de Reynolds adimensional, R_* , y esfuerzo cortante adimensional, τ_* , por lo que la relación entre éstos está influenciada por la relación entre las variables que los componen.

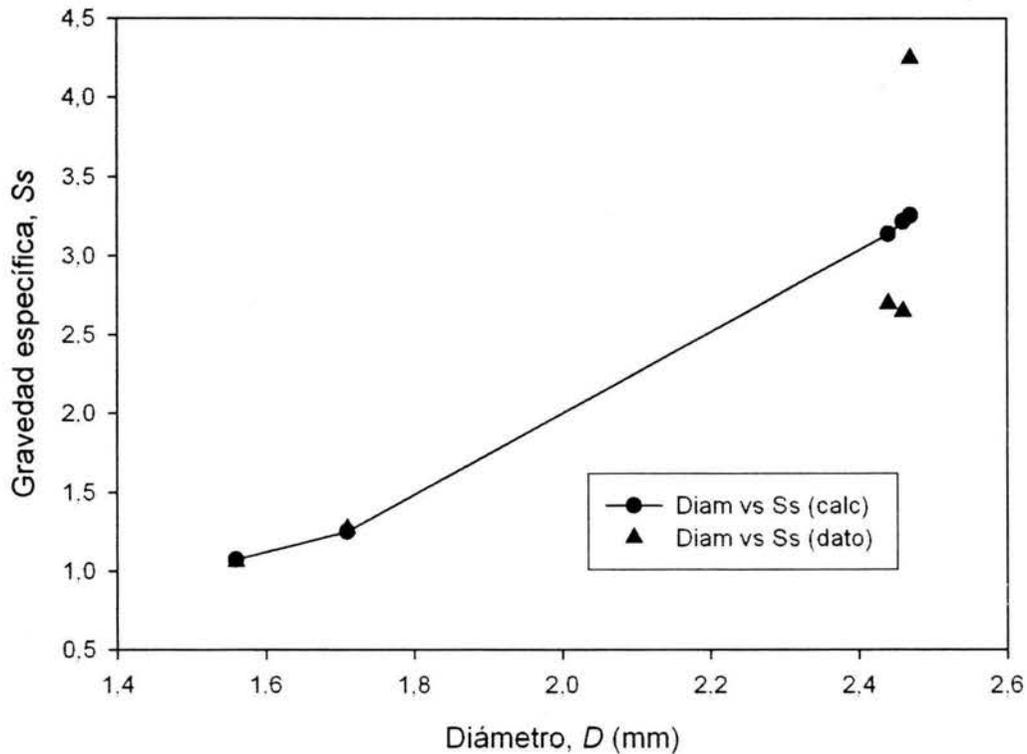


Fig. 4b Características del sedimento y curva de regresión 22.b.

2.2.2 Conformación de las variables

Obsérvense la definición de los parámetros número de Reynolds adimensional, R_* , y esfuerzo cortante adimensional, τ_* .

$$R_* = \frac{U \cdot D}{\nu} = 11,6 \frac{D}{\delta'} = \frac{D \sqrt{gdS}}{\nu} \quad (11)$$

$$\tau_* = \frac{\tau_0}{D(\gamma_s - \gamma)} = \frac{RS}{gD(Ss - 1)} \quad (12)$$

Estos dos parámetros tienen como parámetros comunes el diámetro del sedimento, D , el radio hidráulico, R , y el tirante, d ,¹⁴ y la pendiente, S . Adicionalmente, existe una relación entre la gravedad específica, Ss , y el diámetro, D . La repetición de parámetros y la relación que existe entre el diámetro y la gravedad específica produce un cierto grado de espureidad entre estos dos parámetros.

¹⁴ En el caso de cauces de planicie en los que la relación ancho tirante es mayor de cuatro, $B/d \geq 4$, estos parámetros se consideran equivalentes.

3. Métodos de Cálculo de Resistencia al Flujo en Ríos de Planicie

3.1 Método de Brownlie (1983)

William R. Brownlie analizó los métodos desarrollados hasta el momento (Alam, Cheyer y Kennedy, 1965; Chu y Mostafa, 1979; Einstein y Barbarossa, 1952; Engelund, 1967; Garde y Ranga Raju, 1970; White, Paris y Bettess, 1979) y observó que varios eran iterativos o requerían el uso de diagramas. Basándose en éstos, y utilizando las ecuaciones de Manning, Chézy y Darcy – Weisbach, el diagrama de Moody y los experimentos de Nikuradse, desarrolló un método que no utiliza diagramas y no es iterativo. El método de Brownlie se puede adaptar fácilmente a aplicaciones de modelación ya que las ecuaciones que lo constituyen son sencillas. Brownlie basó su método semi-empírico de resistencia no dividida en el análisis dimensional y de regresión aplicado a una gran cantidad de datos de campo y laboratorio recolectados por otros autores.

3.1.1 Ecuaciones

Brownlie define los parámetros radio hidráulico adimensional, q_* ,

$$q_* = \frac{q}{gD_{50}^3} = \frac{Ud}{gD_{50}^3} \quad (23)$$

R número de Reynolds

$$R = \frac{4q}{\nu} \quad (24)$$

Cuando un material de fondo tiene una distribución de tamaño de tipo log-normal, cualquier diámetro de partícula se puede relacionar con el tamaño medio D_{50} , por medio de la expresión

$$D_n = \sigma_g^{z_n} D_{50} \quad (25)$$

donde z_n es la variable aleatoria centrada estándar¹⁵, y el subíndice n se refiere al porcentaje de peso de las partículas menores que tamaño dado.

Brownlie propuso dos ecuaciones para calcular la relación radio hidráulico–tamaño medio de partícula, válidas para canales anchos en los cuales el tirante se puede considerar equivalente al radio hidráulico, es decir $d = R$:

Para el régimen inferior

$$\frac{R}{D_{50}} = 0.3724q_*^{0.6539} S^{-0.2542} \sigma_g^{0.1050} \quad (26a)$$

y para el régimen superior

$$\frac{R}{D_{50}} = 0.2836q_*^{0.6248} S^{-0.2877} \sigma_g^{0.08013} \quad (26b)$$

¹⁵ Este parámetro se utiliza cuando se presenta una distribución granulométrica de tipo log-normal que es muy común en los sedimentos naturales. En la función de distribución de Gauss, está relacionada con un valor de probabilidad. Su media es igual a cero y su desviación estándar igual a uno.

Brownlie no analizó situaciones que involucraran el régimen de transición.
Determinación del Régimen de Flujo

Brownlie definió dos criterios para la determinación del régimen de flujo.

Para el primero, válido cuando los efectos viscosos son despreciables, definió el parámetro

$$F_g^* = 1,74S^{-1,3} \quad (27)$$

Definió un número de Froude de grano, F_g como

$$F_g = \frac{U \cdot \bar{\rho}}{(\rho_s - \rho)gD_{50}} = \frac{U}{(Ss-1)gD_{50}} \quad (28)$$

Con estos dos parámetros, para pendientes $S \leq 0,006$:

- Si $F_g/F_g^* \leq 0,8$, el régimen es inferior.
- Si $F_g/F_g^* \geq 1,25$, el régimen es superior.
- Si $0,8 < F_g/F_g^* < 1,25$ el régimen es de transición.

Para pendientes $S > 0,006$, el régimen es siempre superior (Fig. 4.7).

Para el segundo criterio, válido cuando los efectos viscosos son significativos, Brownlie propuso dos ecuaciones para definir la región de transición:

Límite superior del régimen de transición

$$\log \frac{F_g}{F_g^*} = \begin{cases} -0,02469 + 0,1517 \log \frac{D_{50}}{\delta} + 0,8381 \left(\log \frac{D_{50}}{\delta} \right)^2 & \text{para } \frac{D_{50}}{\delta} < 2 \\ \log 1,25 & \text{para } \frac{D_{50}}{\delta} \geq 2 \end{cases} \quad (29a)$$

y límite inferior

$$\log \frac{F_g}{F_g^*} = \begin{cases} -0,2026 + 0,07026 \log \frac{D_{50}}{\delta} + 0,9330 \left(\log \frac{D_{50}}{\delta} \right)^2 & \text{para } \frac{D_{50}}{\delta} < 2 \\ \log 0,8 & \text{para } \frac{D_{50}}{\delta} \geq 2 \end{cases} \quad (29b)$$

El parámetro D_{50}/δ es la razón del tamaño medio de grano al grosor de la subcapa laminar que se define como

$$\frac{D_{50}}{\delta} = \frac{D_{50}U'}{11,6\nu} \quad (30)$$

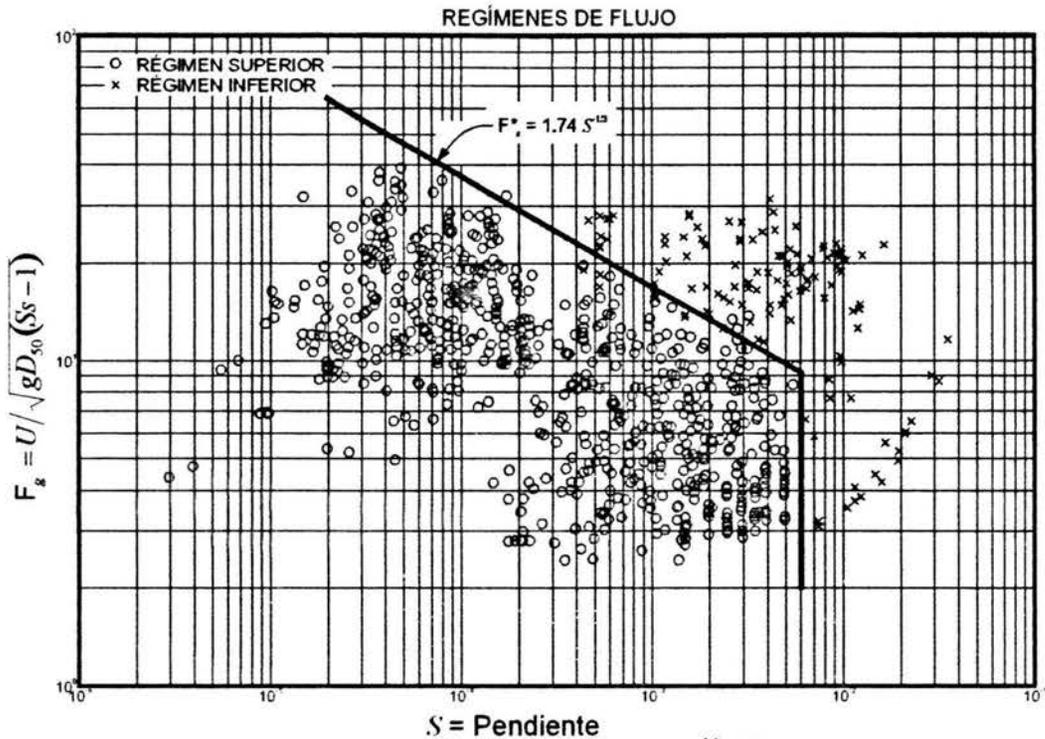


Fig. 5 Datos de Brownlie para la determinación de régimen¹⁶. (F_g vs S).

3.1.2 Aplicación

Este método no requiere iteración o interpolación gráfica para canales anchos. Como un caso particular, para canales de laboratorio $q = UR$ en lugar de $q = Ud$, para algunos casos se puede requerir iteración. Siendo: q gasto unitario; U velocidad media del flujo; R radio hidráulico; d tirante medio del flujo.

Durante la formulación de su método, Brownlie utilizó datos de 22 fuentes, que en total representaban 900 corridas, para encontrar los coeficientes de las ecs 26. Se mencionan las 22 fuentes, pero Brownlie no presenta los datos. Los intervalos de los datos utilizados en el análisis de regresión son:

Tamaño medio de partícula:	$0,088 < D_{50} < 2,8 \text{ mm}$
Gasto unitario:	$0,012 < q < 40 \text{ m}^3/\text{s/m}$
Pendiente:	$3,0 * 10^{-6} < S < 3,7 * 10^{-2}$
Radio hidráulico:	$0,025 < R < 17 \text{ m}$
Temperatura:	$0 < Te < 63 \text{ °C}$
Relación ancho – tirante:	$B/d \geq 4$
Desviación estándar geométrica de tamaño de partícula:	$\sigma_g \leq 5$

¹⁶ Ref. 6

3.1.3 Procedimiento de Cálculo

3.1.3.1 Cálculo de la Velocidad Media de Flujo

Brownlie no propuso ningún procedimiento de cálculo, sin embargo, partiendo de sus ecuaciones se propone el siguiente procedimiento; Se requieren como datos iniciales: las dimensiones del canal, las características del material de fondo, la pendiente de fondo, el gasto, y la temperatura del agua.

Para canales anchos, cuando d (tirante de flujo) = R (radio hidráulico):

- i) Calcular las velocidades del régimen inferior y superior utilizando las ecs 26a y b rescritas en función de la velocidad

Régimen inferior

$$U = 4,5295 \sqrt{gD_{50}} \left(\frac{R}{D_{50}} \right)^{0,5293} S^{0,3887} \sigma_g^{-0,1606} \quad (31a)$$

Régimen superior

$$U = 7,5154 \sqrt{gD_{50}} \left(\frac{R}{D_{50}} \right)^{0,6005} S^{0,4605} \sigma_g^{-0,1282} \quad (31b)$$

- ii) Determinar el régimen:

a. Si $S > 0,006$, el régimen es superior.

b. Si $S \leq 0,006$:

- i. Calcular el número de Froude de grano, F_g , definido por Brownlie, con la ec 28

$$F_{g50} = \frac{U \sqrt{\rho}}{(\rho_s - \rho)gD_{50}} = \frac{U}{(Ss-1)gD_{50}} \quad (28)$$

- ii. Calcular F_g^* utilizando la ec 27

$$F_g^* = 1,74S^{-1,3} \quad (27)$$

- iii. Si los efectos viscosos no son significativos:

1. Si $F_g/F_g^* \leq 0,8$, el régimen es inferior.

2. Si $F_g/F_g^* \geq 1,25$, el régimen es superior.

3. Si $0,8 < F_g/F_g^* < 1,25$ el régimen es de transición.

- iii) Elegir la velocidad correcta según el régimen determinado en el paso anterior.

3.1.4 Comentarios

Este método es uno de los pocos métodos de cálculo de resistencia aluvial que toma en cuenta la distribución de tamaño del sedimento.

Van Rijn (1984) utilizó el método de Brownlie, junto con el suyo y otros, para comparar su desempeño. Encontró que el método de Brownlie daba mejores resultados que los procedimientos propuestos por van Rijn, White et al. y Engelund. Sin embargo, atribuyó

esto a que Brownlie utilizó parte del conjunto utilizado para la comparación, compuesto por datos de Guy et al, 1966; canales en Pakistán recopilados por Mahmood et al., 1971; y ríos en E.U.A. recopilados por Peterson y Howells, 1973, para la calibración de sus expresiones.

Thompson (1988) comparó tirantes medidos con tirantes obtenidos utilizando los métodos de Meyer-Peter y Mueller, Mostafa y McDermid, Manning con una n constante, Brownlie y la relación velocidad (o tirante) TLTM (relaciones velocidad – tasa de transporte) desarrollada por Karim y Kennedy (1981) utilizando datos compilados por Brownlie (1981) y Karim y Kennedy (1981). De comparaciones gráficas encontró que los procedimientos propuestos por Brownlie y Karim y Kennedy tenían los mejores resultados. Sin embargo concluyó que, partiendo de la inspección visual de las gráficas de resultados y debido a la facilidad de su aplicación, el método de Karim y Kennedy tiene un mejor desempeño que el método de Brownlie.

Karim y Kennedy (1990) compararon sus formulaciones de gasto sólido-velocidad independientes, gasto sólido-velocidad interdependientes y velocidad-formas de fondo interdependientes con los resultados obtenidos de las comparaciones de Brownlie entre su método y otros siete métodos. Concluyeron que las formulaciones de velocidad-formas de fondo interdependientes eran más exactas que el método de Brownlie.

Shields y Gippel (1993) consideraron que el método de Brownlie es suficientemente útil y exacto. Así, utilizaron estas ecuaciones en el desarrollo de su método para el cálculo de radio hidráulico con escombros naturales en cauces de fondo arenoso. También utilizaron el criterio de Brownlie para la determinación de régimen.

James P. Bennett (1994) propuso un algoritmo para calcular la resistencia al flujo y al transporte en canales de fondo arenoso. Comparó una combinación del método Yang (1973) y Brownlie (1983) con los procedimientos desarrollados por medio de su algoritmo, y los aplicó a datos del Río Grande. También utilizó el método de Brownlie para compararlo con datos del río Mississippi. Encontró que para el caso del Río Grande, la combinación de los métodos de Yang y Brownlie subestimaba el transporte para gastos unitarios mayores a $0,2 \text{ m}^3/\text{s}/\text{m}$. Mientras que para el río Mississippi, el método de Brownlie sobreestimaba el tirante para gastos unitarios mayores a $20 \text{ m}^3/\text{s}/\text{m}$.

3.2 Método de Karim y Kennedy (1990)

Fazle Karim y John F. Kennedy utilizaron el análisis no lineal de regresión múltiple y desarrollaron relaciones entre la velocidad, el gasto sólido, la geometría de las formas de fondo y el factor de rugosidad de cauces aluviales. Utilizaron modelos computacionales y analizaron varios grupos de datos de campo y laboratorio recopilados por otros investigadores para obtener las distintas formulaciones. De estas formulaciones, tres no consideran la influencia del gasto sólido en la resistencia; de estas, una relaciona las dimensiones de las formas de fondo con la resistencia y otra es un método gráfico para el caso de curvas gasto - tirante discontinuas.

3.2.1 Ecuaciones

3.2.1.1 Relación Gasto Sólido y Velocidad No Asociados

Como parte de la relación entre gasto sólido y velocidad no asociados propusieron una ecuación para la resistencia aluvial de forma

$$\frac{U}{\sqrt{g(Ss-1)D_{50}}} = 2,822 \left[\frac{q}{\sqrt{g(Ss-1)D_{50}^3}} \right]^{0,376} S^{0,310} \quad (32)$$

Thompson (1988) reescribió la ec 32 de forma

$$d = \frac{Q}{10^{0,45} S^{0,31} B \sqrt{g(Ss-1)D_{50}}} \left\{ \frac{B \sqrt{g(Ss-1)D_{50}^3}}{Q} \right\}^{0,38} \quad (33)$$

donde: Q gasto líquido total; B ancho del canal; U velocidad media del flujo; q gasto unitario; S_s peso específico; S pendiente.

Karim y Kennedy observaron que la ec 32 tiene un mejor desempeño en flujos muy por arriba del movimiento incipiente.

3.2.1.2 Formas de fondo y Velocidad Asociadas

Al asociar las formas de fondo con la velocidad obtuvieron las expresiones:

Formulación IIA

$$\frac{U}{\sqrt{g(Ss-1)D_{50}}} = 3,197 \left[\frac{q}{\sqrt{g(Ss-1)D_{50}^3}} \right]^{0,385} S^{0,309} \left(\frac{f}{f_0} \right)^{-0,283} \quad (34)$$

Y una alternativa, Formulación IIB

$$\frac{U}{\sqrt{g(Ss-1)D_{50}}} = 6,683 \left(\frac{d}{D_{50}} \right)^{0,626} S^{0,503} \left(\frac{f}{f_0} \right)^{-0,465} \quad (35)$$

Donde: f_0 es el coeficiente de pérdida por rugosidad de grano con fondo plano; f coeficiente de pérdida del flujo sobre un fondo móvil.

Coficiente de pérdida por rugosidad de grano con fondo plano

$$f_0 = \frac{8}{\left[6,25 + 2,5 \ln \left(\frac{d}{2,5 D_{50}} \right) \right]^2} \quad (36)$$

Relación altura de formas de fondo–tirante, Δ/d

$$\frac{f}{f_0} = 1,20 + 8,92 \frac{\Delta}{d} \quad (37)$$

donde Δ es la altura representativa de formas de fondo.

Relación entre el factor de pérdida de sedimento para fondo plano sin transporte y el factor de pérdida total, según Allen (1978),

$$\frac{\Delta}{d} = 0,080 + 2,24 \left(\frac{\tau_*}{3} \right) - 18,13 \left(\frac{\tau_*}{3} \right)^2 + 70,90 \left(\frac{\tau_*}{3} \right)^3 - 88,33 \left(\frac{\tau_*}{3} \right)^4; \quad \tau_* \leq 1,5 \quad (38a)$$

$$\frac{\Delta}{d} = 0; \quad \tau_* > 1,5 \quad (38b)$$

para plantear la ecuación

$$\frac{f}{f_0} = 1,20 + 8,92 \left[0,080 + 2,24 \left(\frac{\tau_*}{3} \right) - 18,13 \left(\frac{\tau_*}{3} \right)^2 + 70,90 \left(\frac{\tau_*}{3} \right)^3 - 88,33 \left(\frac{\tau_*}{3} \right)^4 \right]; \quad \tau_* \leq 1,5 \quad (39a)$$

$$\frac{f}{f_0} = 1,20; \quad \tau_* > 1,5 \quad (39b)$$

Donde τ_* es el esfuerzo cortante adimensional de fondo.

Karim y Kennedy también propusieron el calcular la velocidad media de flujo utilizando la ecuación de Darcy – Weisbach,

$$U = \sqrt{\frac{8}{f} g d S} \quad (40)$$

con un coeficiente de pérdida f calculado con las ecuaciones 36 y 39.

Karim y Kennedy observaron si se asumen los valores de peso específico y de gravedad $S_s = 2,68$ y $g = 9,82$, la ec 35 se puede plantear en forma similar a la ecuación de Manning

$$U = \frac{1}{n} d^{2/3} S^{1/2} \quad (41)$$

con valores del coeficiente de rugosidad, n :

$$n = 0,037 D_{50}^{0,126} \left(\frac{f}{f_0} \right)^{0,465} \quad (D_{50} \text{ en m}) \quad (50a)$$

$$n = 0,032 D_{50}^{0,126} \left(\frac{f}{f_0} \right)^{0,465} \quad (D_{50} \text{ en ft}) \quad (50b)$$

Aplicación

En su análisis, Karim y Kennedy hicieron algunas recomendaciones para el uso de las formulaciones desarrolladas:

1. Las relaciones de velocidad que incluyen gasto sólido y características de forma de fondo son más precisas que las que no las incluyen.
2. La formulación de velocidad y gasto sólido no asociada es atractiva debido a su simplicidad, relativamente buena precisión y bajos requerimientos computacionales.

Karim y Kennedy no especificaron el intervalo de aplicación de las expresiones desarrolladas.

Procedimiento de Cálculo

· Procedimiento de cálculo de la formulación Velocidad y Gasto Sólido no Asociados

La ecuación propuesta por Karim y Kennedy

$$\frac{U}{g(Ss-1)D_{50}} = 2,822 \left[\frac{q}{g(Ss-1)D_{50}^3} \right]^{0,375} S^{0,310} \quad (34)$$

si se toma en cuenta que el gasto por unidad de ancho es

$$q = Ud \quad (51)$$

se puede reescribir resolviendo para la velocidad media del flujo, U ,

$$U = 5,2729 \frac{g(Ss-1)D_{50}}{d} \left(\frac{d}{D_{50}} \right)^{0,60256} S^{0,4968} \quad (52)$$

El problema se puede resolver directamente al utilizar la expresión anterior si se conoce la granulometría del sedimento, o el diámetro medio, D_{50} , la densidad específica del sedimento, Ss , el tirante, d , o el radio hidráulico, R , en el caso de cauces anchos ($R \approx d$), y la pendiente, S .

· Procedimiento de Cálculo para las formulaciones de Velocidad y Formas de fondo Asociadas

Si se tienen como datos la granulometría del sedimento, o el diámetro medio, D_{50} , la densidad específica del sedimento, Ss , el tirante, d , o el radio hidráulico, R , en el caso de cauces anchos ($R \approx d$), y la pendiente, S .

- i. Calcular el esfuerzo cortante adimensional de fondo, τ_* ,

$$\tau_* = \frac{RS}{(Ss-1)D_{50}} = \frac{\tau_0}{\gamma(Ss-1)D_{50}} \quad (11)$$

- ii. Según el valor del esfuerzo cortante adimensional de fondo, τ_* , calcular la relación entre el coeficiente de pérdida por rugosidad de grano con fondo plano y el coeficiente de pérdida real, (f/f_0) ,

$$\frac{f}{f_0} = 1,20 + 8,92 \left[0,080 + 2,27 \left(\frac{\tau_*}{3} \right) - 18,13 \left(\frac{\tau_*}{3} \right)^2 + 70,90 \left(\frac{\tau_*}{3} \right)^3 - 88,33 \left(\frac{\tau_*}{3} \right)^4 \right]; \tau_* \leq 1,5 \quad (39a)$$

$$\frac{f}{f_0} = 1,20; \quad \tau_* > 1,5 \quad (39b)$$

- iii. Según la formulación elegida:

- a. Si la formulación escogida es

$$\frac{U}{\sqrt{g(Ss-1)D_{50}}} = 3,197 \left[\frac{q}{\sqrt{g(Ss-1)D_{50}^3}} \right]^{0,385} S^{0,309} \left(\frac{f}{f_0} \right)^{-0,283} \quad (34)$$

Se puede resolver para la velocidad,

$$U = 6,6179 \sqrt{g(Ss-1)D_{50}} \left(\frac{d}{D_{50}} \right)^{0,6260} S^{0,5024} \left(\frac{f}{f_0} \right)^{-0,4602} \quad (53)$$

y resolver directamente.

- b. Si la formulación escogida es

$$\frac{U}{\sqrt{g(Ss-1)D_{50}}} = 6,683 \left(\frac{d}{D_{50}} \right)^{0,626} S^{0,503} \left(\frac{f}{f_0} \right)^{-0,465} \quad (35)$$

se puede resolver directamente

- c. Si se escoge la ecuación de Darcy–Weisbach

$$U = \sqrt{\frac{8}{f} g d S} \quad (40)$$

- i. Calcular el coeficiente de pérdida de grano con fondo plano

$$f_0 = \frac{8}{\left[6,25 + 2,5 \ln \left(\frac{d}{2,5 D_{50}} \right) \right]^2} \quad (36)$$

- ii. Encontrar el valor del factor de pérdida real, f , utilizando el valor de la relación (f/f_0) .

- iii. Utilizar el valor calculado de f en la ecuación de Darcy–Weisbach.

Comentarios

Según Taylor y Mostafa (1992), las ecuaciones de Karim y Kennedy son un procedimiento útil debido a su sencillez. Señalaron que la relación de velocidad y gasto sólido no

asociados es la relación más lógica para el desarrollo de una ecuación de tipo Manning, ya que el gasto sólido es un parámetro de diseño y no introduce un error significativo en las aplicaciones de diseño.

Karim y Kennedy respondieron que la formulación de gasto y formas de fondo es superior a la de velocidad y gasto sólido no asociados, debido a que considera la relación entre las formas de fondo y el factor de pérdida.

3.3 Método de Nnadi y Wilson (1995)

Fidelia N. Nnadi y Kenneth C. Wilson realizaron experimentos con flujos que presentaban arrastre de sedimentos en conductos cerrados con el propósito de estudiar las formas de fondo, en especial durante cambio de régimen con dunas al régimen de fondo plano. Sus conclusiones son la continuación de las teorías elaboradas por Wilson (1989) y Wilson y Nnadi (1992) sobre flujos con esfuerzos cortantes altos. De manera similar a las expresiones de Wilson (1989), Wilson y Nnadi elaboran expresiones simples similares a la ecuación de Keulegan (1938). Estas expresiones tienen como particularidad que los datos con los que fueron calibradas tienen valores del parámetro adimensional de Shields muy por arriba del inicio del movimiento.

3.3.1 Ecuaciones

Relación de velocidad adimensional para pared rugosa en régimen inferior

$$\frac{U}{U_*} + 2,5 \ln \left(\frac{S}{S_s - 1} \right) = 2,5 \ln \tau_* + 4,3 \quad (54)$$

Relación de velocidad para un flujo en régimen superior con fondo plano (Fig 4.12)

$$\frac{U}{U_*} + 2,5 \ln \left(\frac{S}{(S_s - 1)} \right) = 2,7 \quad (55)$$

Según Nnadi y Wilson la transición entre los regímenes inferior y superior es súbita, es decir, no se presenta un régimen de transición.

3.3.2 Procedimiento de Cálculo

Nnadi y Wilson no propusieron ningún procedimiento de cálculo ni los intervalos en los cuales la expresión es válida. Sin embargo, utilizando sus expresiones se propone el siguiente procedimiento:

Si se tienen como datos el tirante, d , la pendiente, S , y las características del sedimento.

- i.) Calcular el número adimensional de Shields, τ_* ,

$$\tau_* = \frac{\tau_0}{\rho g (S_s - 1) D} = \frac{SR}{(S_s - 1) D} \quad (4.11)$$

- a. Si $\ln \tau_* < -0,64$, el régimen es inferior.
 b. Si $\ln \tau_* > -0,64$, el régimen es superior.

- ii.) Ya identificado el régimen, calcular la velocidad utilizando las ecuaciones:

Para régimen inferior

$$\frac{U}{U_*} + 2,5 \ln \left(\frac{S}{S_s - 1} \right) = 2,5 \ln \tau_* + 4,3 \quad (4.64)$$

Para régimen superior

$$\frac{U}{U_*} + 2,5 \ln \left(\frac{S}{S_s - 1} \right) = 2,7 \quad (4.67)$$

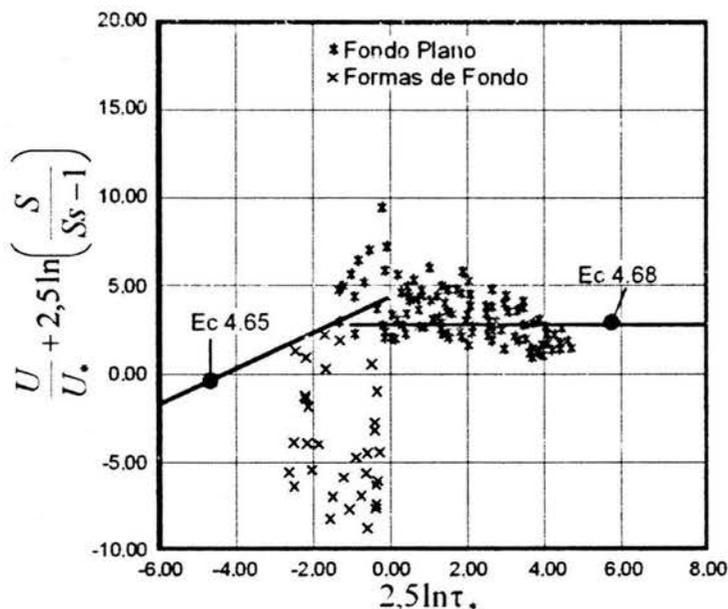


Fig. 4.6 Comparación por medio de los coeficientes τ_* y $S/(S_s-1)$ de las mediciones para fondo plano y formas de fondo según Nnadi y Wilson. (1995)

3.3.3 Comentarios

Nnadi y Wilson elaboraron expresiones sumamente simplificadas de los datos disponibles. En la Fig 4.12, se puede observar que las ec 4.65 y 4.68 y los datos reales muestran una tendencia divergente conforme aumenta el valor del esfuerzo cortante. Las ec 4.64 y 4.67 son prácticas y de fácil aplicación, sin embargo, debido a que divergen, pueden provocar errores en los resultados muy por arriba de lo permitido en aplicaciones de ingeniería.

BIBLIOGRAFÍA

1. Anderson, T.W., Stanley L. Sclove (1978) "An Introduction to the Statistical Analysis of Data" Houghton Mifflin Co. Dallas, US.
2. Arrijoa Juárez, Raúl (2002) "A Correlação Espúria na Engenharia Hidráulica" Tesis de Doctorado – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. São Paulo, Brasil.
3. Bennet, James (1995) "Algorithm for Resistanse to Flow and Transport in Sand-Bed Channels" ". *Journal of Hydraulic Engineering ASCE*. Vol 121, No. 8.
4. Benson, Manuel A. (1965) "Spurious Correlation in Hydraulics and Hydrology" *Journal of the Hydraulics Division, ASCE*. HY4, July.
5. Breamauntz Monge, Carlos, Gabriel Echávez Aldape. (1979) "Correlación y Correlación Espuria en la Hidráulica". IV Congreso Nacional de Hidráulica. Acapulco, México.
6. Brownlie, William R. (1983) "Flow Depth in Sand-Bed Channels". *Journal of Hydraulic Engineering ASCE*. Vol. 109, No. 7.
7. Echávez Aldape, Gabriel (1996) "Introducción a los Modelos Hidráulicos y la Ingeniería Experimental" UNAM – CONACyT – Asociación Mexicana de Hidráulica. México. 1era. Ed.
8. García Flores, Manuel, José Antonio Maza Álvarez. (1997) "Inicio de Movimiento y Acorazamiento". Cap. 8 del Manual de Ingeniería de Ríos. Series del Instituto de Ingeniería – 592. UNAM. México.
9. García Flores, Manuel, José Antonio Maza Álvarez. (1998) "Origen y Propiedades de los sedimentos". Cap. 7 del Manual de Ingeniería de Ríos. Series del Instituto de Ingeniería-601. UNAM. México.
10. Gardea Villegas, Humberto. (1997) "Hidráulica de Canales" 2ª ed. UNAM-FICA. México.
11. Karim, M. Fazle, John F. Kennedy. (1990) "Menu of Coupled Velocity and Sediment Discharge Relations For Rivers". *Journal of Hydraulic Engineering ASCE*. Vol. 116, No. 8.
12. Kennedy, John F. (1995) "The Albert Shields Story". *Journal of Hydraulic Engineering ASCE*. Vol. 121, No. 11, pp 766-772.

13. Kenney, Bernard C. (1982) "Beware of Spurious Self Correlations!" *Water Resources Research*, Vol. 18, No. 4. August. pp 1041 – 1048. American Geophysical Union.
14. Kitte, Geoff. (1989) "Some Statistical Observations". *Water Resources Bulletin*. American Water Resources Association. Vol. 25, No. 3. June. Pp. 483 – 490.
15. Mahmood, Khalid, M. M. Siddiqui. (1980) "Serious Correlation in Dimensional Analysis". *Journal of the Engineering Mechanics Division*. ASCE Vol. 106, No. EM1, February.
16. Miller, Irwin, John E, Freund (1965) "Probability and Statistics for Engineers, a highly practical approach to statistical methods with a modern treatment of probability based on sets." Prentice Hall, New Jersey, U.S.
17. Nnadi, Fidelia N., Kenneth C. Wilson. (1995) "Bed-Load Motion at High Shear Stress: Dune Washout and Plane-Bed Flow". *Journal of Hydraulic Engineering* ASCE, Vol. 121, No. 3. p 267 - 273.
18. Rouse, Hunter, ed. (1949) "Engineering Hydraulics; Proceedings of the Fourth Hydraulics Conference" Iowa Institute of Hydraulic Research. John Wiley & Sons, NY.
19. Sotelo Ávila, Gilberto. (1997) "Hidráulica General, Vol. 1, Fundamentos". LIMUSA-Noriega. México.
20. Van Rijn, Leo C. (1984) "Sediment Transport, Part I: Bed Load Transport". *Journal of Hydraulic Engineering* ASCE, Vol. 110, No. 10.