

01170



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE  
MEXICO

Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería



**Diseño de un algoritmo de  
control de posición/fuerza  
para manipuladores industriales**

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

**Maestro En Ingeniería**

AREA: ELÉCTRICA CAMPO: CONTROL

P R E S E N T A:

**Adrian Miguel Castillo Sánchez**

ASESOR: DR. MARCO ANTONIO ARTEAGA PÉREZ

México, 2004



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Índice General

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Antecedentes matemáticos</b>	<b>11</b>
2.1	Definición de trabajo y trabajo virtual . . . . .	11
2.1.1	Principio de trabajo virtual para un sistema de cuerpos rígidos conectados . . . . .	13
2.2	Modelo cinemático directo de un robot manipulador . . . . .	14
2.2.1	Espacio de las articulaciones y espacio operacional . . . . .	14
2.3	Jacobiano de un robot manipulador . . . . .	16
2.3.1	Jacobiano geométrico . . . . .	16
2.3.2	Jacobiano Analítico . . . . .	17
2.4	Modelo dinámico de un robot manipulador con movimiento libre . . .	17
2.5	Relación entre la fuerza del efector final y el torque de las articulaciones	18
2.5.1	Singularidades . . . . .	19
2.6	Restricciones naturales y artificiales . . . . .	20
2.7	Movimiento restringido y dinámica del robot . . . . .	21
2.8	Propiedades del modelo del robot con movimiento restringido . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Control de fuerza-posición</b>	<b>25</b>
3.1	Esquema de Control . . . . .	25
3.1.1	Obtención del modelo en lazo cerrado . . . . .	29
3.2	Definición del observador de velocidad . . . . .	29
3.2.1	Prueba de convergencia . . . . .	31
<b>4</b>	<b>Resultados experimentales</b>	<b>34</b>
4.1	Descripción del equipo experimental . . . . .	34
4.2	Resultados y condiciones de las pruebas . . . . .	36
<b>5</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>45</b>

---

<b>A</b>	<b>Modelo dinámico del robot A465</b>	<b>46</b>
A.1	Cinemática directa del robot A465 . . . . .	46
A.2	Cinemática inversa del robot A465 . . . . .	47
A.3	Modelo dinámico . . . . .	50
A.3.1	Introducción de la dinámica de los motores al modelo del robot	52
<b>B</b>	<b>Demostración del Lema 3.1</b>	<b>55</b>
<b>C</b>	<b>Prueba de estabilidad del controlador</b>	<b>64</b>
<b>D</b>	<b>Inversa generalizada de Moore-Penrose</b>	<b>68</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>71</b>

# Índice de Figuras

1.1	Sensor de fuerza típico para muñeca. . . . .	3
2.1	Diagrama del desplazamiento de una partícula debido a una fuerza . . . . .	11
2.2	Trabajo realizado por un par. Fuente: Hibbeler, R. (1996). <i>Mecánica para Ingenieros: Estática</i> . pp. 528 . . . . .	12
2.3	Sistemas clásicos de cuerpos rígidos conectados. Fuente: Hibbeler, R. (1996). <i>Mecánica para Ingenieros: Estática</i> . pp. 531 . . . . .	13
2.4	Componentes de fuerza y torque en un manipulador en contacto con el ambiente. . . . .	19
2.5	Singularidades comunes que se presentan en los manipuladores. Fuente: Spong, M. Vidyasagar, M. (1989). <i>Robot Dynamics and Control</i> . pp. 244 . . . . .	19
2.6	Manipulador en contacto con el entorno. . . . .	20
4.1	Sistema experimental del laboratorio de robótica del Posgrado de la Facultad de Ingeniería . . . . .	34
4.2	Sistema experimental con movimiento restringido. . . . .	35
4.3	Trayectoria deseada (—) vs trayectoria real (- - -) de las articulaciones del robot A465. . . . .	38
4.4	Error de seguimiento en coordenadas de las articulaciones para el robot A465. . . . .	39
4.5	Trayectoria deseada (—) vs trayectoria real (- - -) en coordenadas rectangulares del robot A465. . . . .	40
4.6	Errores de seguimiento en coordenadas rectangulares para el robot A465. . . . .	41
4.7	Fuerza deseada (—) vs fuerza real (- - -) en el punto de contacto y su correspondiente error de seguimiento. . . . .	42
4.8	Errores de observación. . . . .	43
4.9	Voltaje de control para las articulaciones del robot A465. . . . .	44
A.1	Esquema y diagrama de cuerpo libre para el robot A465. . . . .	46

# Índice de Tablas

1.1 Ejemplos de relaciones de Fuerza-Movimiento. . . . .	5
A.1 Parámetros del robot A465. . . . .	47
A.2 Parámetros obtenidos del manual de los motores para el robot A465. . . . .	54

# Capítulo 1

## Introducción

En la primera generación los robots fueron concebidos como dispositivos de posicionamiento a “lazo abierto”, que operaban con poca o nula retroalimentación del proceso del cual participaban. Para entornos de ensamble industrial, esto implica que todas las partes o sub-ensambles tienen que ser preposicionados con alta precisión, lo cual requiere equipo periférico costoso y generalmente inflexible. Al proporcionar a los robots capacidades sensitivas se pueden reducir estos requerimientos de precisión considerablemente.

La ejecución de una tarea de manipulación requiere a menudo la interacción entre el manipulador y el ambiente. Una clasificación completa de las tareas de manipulación es compleja en vista de la gran variedad de casos que pueden ocurrir. Además, tal clasificación no sería realmente útil para encontrar una estrategia general para controlar la interacción. Los ejemplos típicos de las tareas de manipulación son: el acoplamiento de partes mecánicas, el seguimiento superficial del contorno de un objeto y el empleo de herramientas para ensamblar piezas mecánicas. Durante la interacción, el entorno fija restricciones en las trayectorias geométricas que pueden ser seguidas por el efector final del manipulador. Esta situación es generalmente llamada como *movimiento restringido* (Sciavicco y Siciliano 2000).

El uso de una estrategia simple de control de movimiento para interacción requiere que la trayectoria de la tarea del efector final sea planeada con elevada exactitud. Así mismo, el sistema de control debe garantizar que la posición del efector final se desvíe de la posición deseada lo menos posible a lo largo de la trayectoria dada. Por lo tanto, el éxito de una tarea de interacción con el ambiente, usando algoritmos de control de movimiento depende enteramente de la exactitud del planeamiento y del funcionamiento del controlador. Para este propósito, es crucial tener un modelo preciso del manipulador (cinemática y dinámica) y del entorno (características mecánicas y geométricas). El modelo del robot puede ser conocido con suficiente

precisión, pero una descripción detallada del ambiente es más difícil de obtener. La inevitable aparición de errores en la planeación puede dar lugar a una trayectoria asignada al efector final que no sea tan conveniente para la ejecución correcta de la tarea. Otro factor que condiciona la eficacia de un planteamiento de control de movimiento al problema de controlar el movimiento restringido es la exactitud de posicionamiento del efector final del manipulador con respecto al entorno.

La existencia de errores de modelado y la exactitud finita de posicionamiento afecta la determinación de la posición absoluta del manipulador y del ambiente. Una consecuencia directa es que el conocimiento de la posición relativa entre el manipulador y el ambiente es también afectado por la incertidumbre. Para entender la importancia de esta implicación, es suficiente observar que para realizar el acoplamiento de una parte mecánica con un enfoque posicional, la colocación relativa de las piezas debe ser garantizada con una exactitud de un orden de magnitud mayor que la tolerancia de la parte mecánica. Una vez que la posición absoluta de una parte es conocida con precisión, el manipulador debe dirigir el movimiento de la otra pieza con la misma exactitud.

La dificultad inherente en el planteamiento y control de movimiento exacto del manipulador necesariamente lleva a la cuestión de analizar los efectos de la desviación de la trayectoria de las condiciones ideales de interacción con el ambiente. Cuando el robot es gobernado por algoritmos de control de posición, cualquier desviación de la trayectoria real de la de referencia provoca una reacción del sistema de control, el cual tiende a reducir al mínimo tal desviación independientemente de la causa que la genere. Por lo tanto, si la desviación de la trayectoria planeada es debida a la interacción del manipulador con el ambiente, se presentan fuerzas de reacción y el control de posición intenta reducir la desviación como haría para cualquier perturbación que se opone al movimiento del efector final. En este caso, el efecto de la acción del control puede ser el aumento de la fuerza de contacto, la cual no es acompañada por una disminución del error. Esta situación puede conducir a un aumento de la fuerza de contacto hasta que el límite natural impuesto por la saturación de los actuadores del manipulador se alcance, u ocurra una crisis mecánica de uno de los elementos que toman parte en la interacción.

Cuanto más altas sean la rigidez del ambiente y la exactitud del control de posición, más fácil es que un caso de contacto inestable como el descrito previamente pueda ocurrir. De hecho, de la deformación de un ambiente rígido bajo una fuerte acción del control de posición resultan grandes fuerzas de reacción restringidas. Por ejemplo, considérese el problema de controlar un manipulador para escribir una frase sobre un pizarrón. Para formar las letras de la frase, se debe controlar certeramente el efector final del manipulador o, equivalentemente, la posición del marcador. Como



cualquiera que ha escrito sobre un pizarrón sabe, la fuerza con la cual se presiona también debe ser controlada. Esto es, presionando muy ligeramente puede dar como resultado letras que no son fácilmente legibles, mientras que presionando muy fuerte puede resultar en el rompimiento de la punta. Este ejemplo ilustra claramente que varias aplicaciones de la robótica requieren que una trayectoria de posición deseada y una trayectoria de fuerza deseada sean especificadas.

Una medida del estado de la interacción es proporcionada por las características de la fuerza de contacto intercambiada entre el manipulador y el ambiente. Para un manejo apropiado de la interacción es entonces necesario considerar estrategias de control que permitan respetar las restricciones impuestas por la fuerza de interacción, directa o indirectamente. La principal diferencia entre las dos categorías es que la primera logra el control de fuerza vía control de movimiento, sin cierre explícito del lazo de control de retroalimentación de fuerza; el segundo, en cambio, ofrece la posibilidad de controlar la fuerza de contacto a un valor deseado, gracias al cierre del lazo de control para retroalimentación de la fuerza.

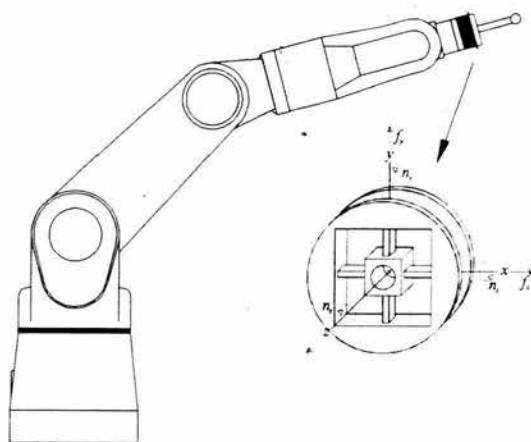


Figura 1.1: Sensor de fuerza típico para muñeca.

Hay tres tipos principales de sensores para la retroalimentación de fuerza: sensores de fuerza de muñeca, sensores de torque en las articulaciones y sensores táctiles o de mano. Un sensor de fuerza de muñeca tal como se muestra en la Figura 1.1, consiste de un arreglo de medidores de deformación que generalmente puede precisar las tres componentes del vector de fuerza a lo largo de las tres ejes del marco de coordenadas del sensor y las tres componentes de torque sobre estos ejes. Un sensor

común de torque en las articulaciones consiste también en medidores de deformación (tensión) situados en el eje del actuador. En el caso de actuadores eléctricos se puede utilizar la corriente del motor como indicación del esfuerzo de torsión (torque) en el eje del motor. Los sensores táctiles están situados en los dedos de la pinza y son generalmente útiles para detectar la fuerza de agarre y para la detección de la forma de los objetos. Para propósitos de controlar las interacciones entre el efector final y el entorno, el sensor de muñeca de seis ejes generalmente proporciona los mejores resultados. En adelante se asumirá que al referirse a un sensor de fuerza será de este tipo.

La creación del control de fuerza requiere la generación de cada uno de los siguientes puntos: una descripción de la tarea, relaciones de fuerza-movimiento, una estrategia para la ejecución de la tarea, una lógica de comando, control y estabilidad. A continuación se describe cada uno de los puntos mencionados.

### **Descripción de la tarea**

La descripción de la tarea consiste en el modelo de un evento o eventos que prediga la forma en que el movimiento, el contacto, la deformación y las fuerzas asociadas se presentan e interactúan. Ejemplo de ellas tareas incluyen el montaje de piezas mecánicas, seguimiento de borde y esmerilado.

### **Relaciones de fuerza-movimiento**

Éste es un subconjunto esencial de la descripción de la tarea, en el cual se describe explícitamente qué fuerzas (movimientos) se presentarán en respuesta a varios movimientos (fuerzas) posibles, sin importar si estas interacciones de fuerza-movimiento son deseables o no, y sin importar si se presentan debido a interacciones pasivas o activas. Algunos ejemplos se incluyen en la Tabla 1.1. El término *activo* significa que las fuerzas o los movimientos ocurren directamente como resultado de proporcionar energía a los actuadores. El término *pasivo* significa que las fuerzas o los movimientos ocurren directamente como resultado de la deformación de los cuerpos elásticos. Los actuadores pueden mover estos cuerpos, pero sus entradas no se alteran como resultado de las fuerzas de interacción.

### **Estrategia para la ejecución de la tarea**

El diseñador del sistema de posición/fuerza debe crear la estrategia basada en la descripción de la tarea y las relaciones de fuerza-movimiento. La meta es alcanzar algunas fuerzas, movimientos o estados de posición-velocidad deseados y evitar los indeseables, de modo que la tarea sea ejecutada.

	Pasivo	Activo
Deseado	Ensamble de piezas usando sensación remota de deformación	Ligera eliminación de metal durante el esmerilado
No deseado	Obstrucción o interferencia de partes durante el ensamblado	Rechazo o brincoteo del disco para esmerilar

Tabla 1.1: Ejemplos de relaciones de Fuerza-Movimiento.

### Lógica de comando

Éste es un subconjunto esencial de la estrategia para la ejecución de la tarea. Consiste en elegir entre las fuerzas o velocidades comandadas, o una combinación de ambas, para causar que ciertas respuestas de fuerzas o movimientos se presenten en el efector final del manipulador.

### Control

El diseñador debe llevar a cabo su estrategia midiendo las respuestas de fuerzas y movimientos, y procesándolas vía la estrategia de ejecución para dirigir la tarea a la conclusión deseada. Esto requiere generalmente modificar o crear nuevos comandos de fuerza y posición.

### Estabilidad

El control crea un lazo cerrado en el cual los comandos dan lugar a las respuestas, que alternadamente dan lugar a nuevos comandos. En tales situaciones, es posible que la inestabilidad se presente. La inestabilidad puede llevar al manipulador fuera de los límites de la descripción de la tarea original y, generalmente, se presenta por la interacción entre la tarea, la estrategia y el robot.

A continuación se presenta un resumen del estado del arte. En los años 1940's, Goertz (1952) inventó los manipuladores mecánicos maestro-esclavo (master-slave) para trabajo radiactivo peligroso de laboratorio. En los años 1950's, los puso en ejecución con actuadores servo-eléctricos con reflexión de la fuerza: el operador dirigía al maestro con su mano y sentía las fuerzas de contacto experimentadas por el esclavo, que eran reflejadas a través de las articulaciones de ambos dispositivos.

En los años 1960's, Rothchild y Mann (1966) condujeron el desarrollo de un codo artificial con retroalimentación de fuerza para personas con amputación. La

articulación del motor era accionada por las señales generadas por electrodos conectados al músculo y por un medidor de tensión en la articulación. De este modo, la persona amputada podría ejercer esfuerzo en el músculo para aplicar fuerza casi como lo hacía con su brazo natural. Sin embargo, un pequeño retraso de 250ms en estos sistemas provocó que se hicieran inestables (Ferrell 1965). Aunque un diseño apropiado puede eliminar el problema en brazos artificiales, esto desalentó la utilización de manipuladores con retroalimentación de fuerza en estaciones espaciales controladas desde la tierra. El retardo en la propagación de la onda de radio no es la razón, sino más bien el retraso práctico causado por la codificación, decodificación, chequeo de las fallas, distribución del canal, etcétera. Retardos similares existen hoy en los sistemas de control de robots, causados por limitaciones dinámicas del ancho de banda de los brazos robots y por el retraso computacional.

A finales de los años 1960's y principios de los 1970's, la atención se enfocó en sustituir al operador humano por una computadora. Una persona en tierra podría dar los comandos del objetivo para la ejecución por una computadora al brazo en el espacio, eliminando así el retraso (Ferrell y Sheridan 1967). Dos importantes problemas surgieron con esta solución:

1. Cómo estructurar los sistemas de brazos multi-ejes para que detecten fuerzas y las utilicen para modificar los comandos de posición, y
2. Cómo relacionar los requisitos de una tarea con los movimientos requeridos y las fuerzas anticipadas de modo que las estrategias de fuerza-movimiento pudieran ser formuladas.

Dos caminos surgieron en la búsqueda de resolver estos temas, el método de retroalimentación por bifurcación lógica y el método de retroalimentación continua (Whitney 1987). El primero comienza con el trabajo de Ernst (1961) y se extiende a través de Barber (1967), Hill y Sword (1973), y Paul y Shimano (1976). Es principalmente de naturaleza escalar y consiste en cadenas de declaraciones en un lenguaje de control para computadora:

Moverse en X hasta que la fuerza excede F  
Girar sobre Z hasta que el torque excede T

La esencia de este método es un conjunto de movimientos discretos terminados por un evento discreto, tal como el contacto. Una de las ideas derivadas de este método es la tentativa de crear sistemas de control de fuerza basados en reglas.

El control continuo de fuerza comienza con el trabajo de Groome (1972), Nevins y Whitney (1973), y Whitney (1977). Se basa en la información multi-eje de

fuerza-torque obtenida de los ejes del sensor (Drake y Watson 1975), combinados con una respuesta multi-ejes basada en movimientos continuos de ejes coordinados (Whitney 1972). El control continuo de fuerza fue aplicado a tareas de ensamble y de seguimiento de borde, y se basaba en una matriz de retroalimentación que convertía un vector de la fuerza medida en un vector de velocidad de respuesta. Esta velocidad de respuesta era combinada con el comando original de la velocidad para crear un nuevo comando. Puesto que un contacto continuo era mantenido entre el brazo y el ambiente, la sincronización y la estabilidad de los movimientos controlados eran importantes.

Desde que estos métodos fueron planteados, otros procedimientos y técnicas se han desarrollado. De una manera breve se explicarán las ideas fundamentales de los métodos más comunes para controlar la fuerza de contacto.

#### 1. Métodos que implican la relación entre la posición y la fuerza aplicada

- **Control de rigidez pasivo.** También conocido como control *compliance* pasivo, es una solución simple para reducir las fuerzas de contacto entre el robot y su entorno. Básicamente, consiste en interponer entre la parte manipulada y el robot un dispositivo mecánico capaz de cambiar su configuración bajo los efectos de las fuerzas de contacto. Así, incorporando a la estructura un comportamiento elástico que compense los errores de posición (Drake y Simunovic 1977). Este método es típicamente usado para manejar los problemas de insertar un perno en un agujero (peg-in-hole). El control *compliance* pasivo ofrece algunas ventajas tales como inserciones rápidas y precisas de partes sin requerir estrategias complejas.
- **Control de rigidez activo.** Este método controla activamente la rigidez aparente del efector final del robot y permite controlar la fuerza y posición simultáneamente. El usuario puede especificar la rigidez traslacional y rotacional deseadas del sistema de referencia de contacto. La rigidez puede ser cambiada bajo un programa de control para cubrir los requerimientos de cada tarea. Una alta ganancia es asignada a las direcciones en las que la posición debe ser controlada, mientras que ganancias bajas son asignadas a las direcciones de las fuerzas controladas. La ventaja del esquema de control de rigidez activo es que es relativamente simple y la matriz de rigidez necesaria para implementar el controlador puede ser cambiada en línea para adaptar el comportamiento del robot para varias tareas restringidas.

#### 2. Métodos que usan la relación entre la velocidad y la fuerza aplicada

- **Control por impedancia.** De acuerdo con Hogan (1985), la idea básica

---

del control por impedancia es asignar un comportamiento dinámico pre-establecido para el robot mientras su efector final está actuando con el entorno. El desempeño deseado es especificado por una impedancia dinámica generalizada representando un sistema masa-resorte-amortiguador. Este método puede ser implementado con o sin retroalimentación de fuerza. Para más información se puede consultar Khalil y Dombre (2002)

- **Accommodation control.** Este esquema fue desarrollado por Whitney (1977); comparado con el control de rigidez, este es un controlador integrativo en el cual las fuerzas sensadas dan lugar a las modificaciones en velocidad, que resultan de multiplicar las fuerzas medidas por una matriz de admitancia (velocidad/fuerza). En este esquema, las señales deseadas son la velocidad del efector final y la fuerza de contacto.

### 3. Métodos utilizando retroalimentación de fuerza y posición

- **Control híbrido de posición/fuerza.** Para las tareas donde la posición del efector final y la fuerza de contacto deben ser controladas simultáneamente, Raibert y Craig (1981) propusieron el llamado control híbrido de posición/fuerza, introduciendo un modo de selección que distingue las componentes de control de posicionamiento de las del control de fuerza en coordenadas cartesianas. Sin embargo, este concepto, en principio, puede ser aplicado solamente para el caso donde la superficie de contacto es un plano liso en coordenadas cartesianas. Más recientemente, MaClamroch y Wang (1990) dieron una prueba de estabilidad local de un control en lazo cerrado usando retroalimentación lineal para un punto de operación cuando los objetivos de posición y fuerza de contacto son constantes para el manipulador. Ellos demuestran que en principio no es necesario el uso de la matriz de selección de modo. MaClamroch y Wang (1988) también resolvieron un problema de seguimiento general para robots restringidos usando retroalimentación no lineal a partir de un método modificado de torque calculado. Kankaanranta y Koivo (1988) trataron el problema usando una transformación no lineal del modelo en coordenadas de las articulaciones dentro del sistema coordinado de referencia restringido y reduciendo la dimensión del modelo de forma parecida a lo presentado por MaClamroch y Wang (1988). Arimoto *et al.* (1993) renuevan el concepto de control híbrido de posición/fuerza para una clase de tareas donde el efector final toca con una superficie suave. Ellos proponen el método por el principio de ortogonalización que distingue las señales de retroalimentación de posición de las de fuerza, al introducir una matriz de proyección en coordenadas de las articulaciones. Aunque la mayoría de los esquemas consideran el conocimiento de la velocidad

---

en las articulaciones. Esta limitación ha sido resuelta por Gudiño *et al.* (2003) incorporando un observador al esquema de control.

- **Control híbrido de posición/fuerza paralelo.** Este control encuentra sus raíces en el trabajo de Raibert y Craig (1981). Este control satisface simultáneamente la posición deseada y la fuerza restringida de la tarea. Las posiciones y las fuerzas son especificadas de acuerdo a la formulación de Mason: las direcciones que están restringidas en posición son controladas en fuerza, mientras que las direcciones que son restringidas en fuerza (fuerza cero) son controladas en velocidad o posición. Duffy (1990) ha demostrado que no es correcto considerar el subespacio de la velocidad y el subespacio de la fuerza como ortogonales como lo sugieren Raibert y Craig (1981). Más bien, son las direcciones de posición o velocidad controladas y las direcciones de fuerzas controladas las que tienen que ser ortogonales en el marco de referencia de contacto. En el método de control híbrido paralelo, el robot es controlado por dos lazos de retroalimentación complementarios, uno para la posición y otro para la fuerza. Cada uno tiene su propio sistema de monitoreo y ley de control. Las leyes de control de ambos lazos son sumadas antes de ser enviados al actuador. Este método comprende el uso de una matriz de selección que permite que cada grado de libertad del manipulador sea controlado por el lazo de control de fuerza o de posición.
- **Control híbrido externo.** Este esquema de control se compone de dos lazos de control anidados: el lazo externo controla la fuerza mientras el lazo interno controla la posición (DeSchutter y Van Brussel 1988). La salida del lazo exterior es transformada en una entrada de posición deseada para el lazo interior. El desplazamiento resultante del robot permite ejercer la fuerza de contacto sobre el entorno. El esquema de control híbrido externo es relativamente fácil de implementar y requiere poca cantidad computacional. Puede ser implementada en robots industriales mientras se mantienen sus controladores convencionales.

#### 4. Métodos sin retroalimentación de fuerza

- **Control de fuerza implícito.** Refiriéndose como implícito a los controladores sin retroalimentación de fuerza, Huang y Tzeng (1989) utilizan una transformación no lineal para cambiar el modelo dinámico de un robot manipulador calculado por la formulación Euler-Lagrange, con el fin de obtener una representación entrada-salida para facilitar el diseño de un observador de fuerza. Liu y Arimoto (1996) proponen un algoritmo de control implícito basado en la estructura de un controlador híbrido obtenido por el principio de ortogonalización. Ellos muestran que la



---

fuerza real converge exponencialmente a la deseada.

5. Métodos sin utilizar retroalimentación de fuerza ni retroalimentación de velocidad

- La mayoría de los trabajos previos requieren retroalimentación de la posición y/o velocidad de las articulaciones, y de la fuerza ejercida por el efector final del manipulador. Son realmente pocos los trabajos que consideran la eliminación de sensores. Queiroz *et al.* (1996) proponen dos controladores de posición/fuerza para robots manipuladores con movimiento restringido considerando el conocimiento exacto del modelo dinámico. En estos controladores no se requiere ni la medición de velocidad de las articulaciones ni la de fuerzas de contacto. En Queiroz *et al.* (1996) se mencionan dos trabajos previos de Han-Pang Huang sobre controladores de posición/fuerza que no requieren de la medición de la fuerza de contacto ni de la velocidad de las articulaciones. Queiroz *et al.* (1997) se presenta un control adaptable para control de posición/fuerza sin medición de velocidad en las articulaciones y la fuerza de contacto. Este último trabajo se obtiene el modelo reducido de un manipulador de 2 grados de libertad, y con base en este modelo dividen el problema en componentes de fuerza y componentes de posicionamiento. Ellos proponen un filtro para estimar la velocidad de las articulaciones.

Con los antecedentes descritos previamente se puede notar que en un principio las diferentes técnicas para el control de fuerza han sido resultado de la solución de problemas específicos. Conforme ha pasado el tiempo los algoritmos se han refinado para ser más versátiles y eliminar en lo posible el uso de sensores, reduciendo el costo de los sistemas de control de posición/fuerza. Como resultado de esta tendencia, en esta tesis se propone el diseño de un algoritmo de control de posición/fuerza considerando a la posición de las articulaciones la única información disponible para el lazo de control. Esto es, la fuerza que ejerce el efector final del manipulador sobre la superficie de contacto no es retroalimentada y la velocidad de las articulaciones es estimada por medio de un observador. Para cuestiones de resultados experimentales se considerarán los experimentos reportados en Queiroz *et al.* (1997).

La tesis está organizada de la siguiente manera: en el Capítulo 2 se presentan los conceptos, ideas y herramientas matemáticas para la comprensión y desarrollo del algoritmo de control propuesto. En el Capítulo 3 se propone el algoritmo de posición/fuerza y el análisis de estabilidad es discutido. En el Capítulo 4 se describe el equipo experimental y las condiciones de las pruebas; además, los resultados experimentales son mostrados y analizados. Por último se presentan algunas conclusiones y trabajo futuro.



## Capítulo 2

### Antecedentes matemáticos

En este capítulo se introducirán los conceptos matemáticos e ideas principales para el diseño de un algoritmo de control de posición/fuerza en robots manipuladores.

#### 2.1 Definición de trabajo y trabajo virtual

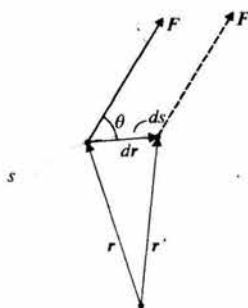


Figura 2.1: Diagrama del desplazamiento de una partícula debido a una fuerza

En la mecánica, una fuerza  $\mathbf{F}$  aplicada a una partícula efectúa trabajo sólo cuando existe un desplazamiento en el mismo sentido de la fuerza. Por ejemplo, considérese la fuerza  $\mathbf{F}$  en la Figura 2.1, que se localiza en la trayectoria  $s$  especificada por el vector de posición  $\mathbf{r}$ . Si la fuerza se mueve a lo largo de la trayectoria a una nueva posición  $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + d\mathbf{r}$ , el desplazamiento  $d\mathbf{r}$  y, por tanto, el trabajo  $dU$  es una cantidad escalar, definida por el producto escalar

$$dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (2.1)$$

Denotando por  $F$  la magnitud de la fuerza y puesto que  $d\mathbf{r}$  es infinitesimal, la magnitud de  $d\mathbf{r}$  puede representarse por  $ds$ , el segmento diferencial de arco a lo

largo de la trayectoria. Si el ángulo entre los segmentos representativos de  $d\mathbf{r}$  y de  $\mathbf{F}$  es  $\theta$ , entonces por definición del producto punto o producto escalar, la ecuación anterior se puede escribir como

$$dU = F ds \cos \theta \quad (2.2)$$

Nótese que si  $0^\circ \leq \theta < 90^\circ$ , el desplazamiento y la componente de la fuerza tienen el mismo sentido, de modo que el trabajo es positivo; en tanto que si  $90^\circ < \theta \leq 180^\circ$ , los vectores en cuestión tienen sentidos contrarios y por tanto el trabajo es negativo. Además,  $dU = 0$  si la fuerza es perpendicular al desplazamiento, pues  $\cos 90^\circ = 0$ , o si la fuerza se aplica en un sólo punto, porque en este último caso  $ds = 0$ .

A continuación se analizará el caso del trabajo realizado por un par. Las dos

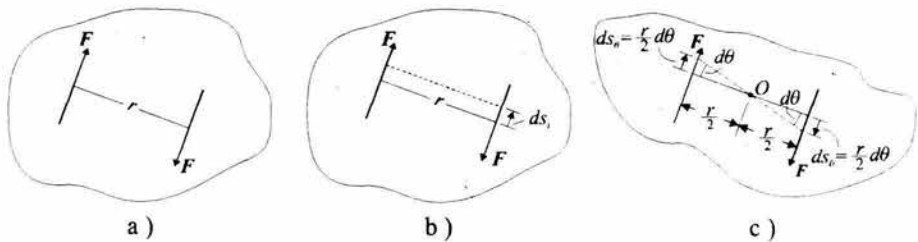


Figura 2.2: Trabajo realizado por un par. Fuente: Hibbeler, R. (1996). *Mecánica para Ingenieros: Estática*. pp. 528

fuerzas del torque efectúan trabajo cuando el par gira en torno a un eje perpendicular al plano en que se aplica. Para mostrarlo, considere el cuerpo rígido en la Figura 2.2(a), que está sujeto a un par cuyo momento tiene magnitud  $M = Fr$ . Cualquier desplazamiento diferencial general del cuerpo puede considerarse como la combinación de una traslación y una rotación. Cuando el cuerpo rígido se traslada de tal manera que la componente del desplazamiento a lo largo de la línea de acción de cada fuerza es  $ds_t$ , es claro que el trabajo “positivo” de una de las fuerzas ( $Fds_t$ ) cancela el trabajo “negativo” de la otra ( $Fds_t$ ) (Figura 2.2b)). Considérese ahora una rotación diferencial  $d\theta$  del cuerpo alrededor de un eje perpendicular al plano del par, y que interseca el plano en el punto  $O$  (Figura 2.2c)). Como se muestra, cada fuerza está sujeta a un desplazamiento  $ds_\theta = \frac{r}{2}d\theta$  en el sentido de la fuerza; por tanto, el trabajo de las dos fuerzas es

$$dU = F \left( \frac{r}{2} d\theta \right) + F \left( \frac{r}{2} d\theta \right) = (F r) d\theta \quad (2.3)$$

$$dU = M d\theta \quad (2.4)$$

El trabajo resultante es positivo cuando el sentido de  $M$  es el mismo que el de  $d\theta$ , y negativo de otra manera. En general, el trabajo efectuado por un par está definido por el producto escalar,  $dU = \mathbf{M} \cdot d\theta$ .

### 2.1.1 Principio de trabajo virtual para un sistema de cuerpos rígidos conectados

Hasta el momento las definiciones del trabajo de una fuerza y de un par se han presentado en términos de movimientos reales expresados por desplazamientos diferenciales de magnitudes  $ds$  y  $d\theta$ . Considérese ahora un movimiento imaginario o virtual, que indica un desplazamiento o rotación que se supone y no existe en realidad. Estos movimientos son cantidades diferenciales de primer orden y se designarán mediante los símbolos  $\delta s$  y  $\delta\theta$ . El trabajo virtual efectuado por una fuerza sometida a un desplazamiento virtual  $\delta s$  es

$$\delta U = F \cos \theta \delta s \quad (2.5)$$

Análogamente, cuando a un par se le da una rotación virtual  $\delta\theta$  en el plano de las fuerzas del par, el trabajo virtual es

$$\delta U = M \delta\theta \quad (2.6)$$

El método del trabajo virtual es el más indicado para resolver problemas de equilibrio que involucran un sistema de varios cuerpos rígidos conectados, como se muestra en la Figura 2.3.

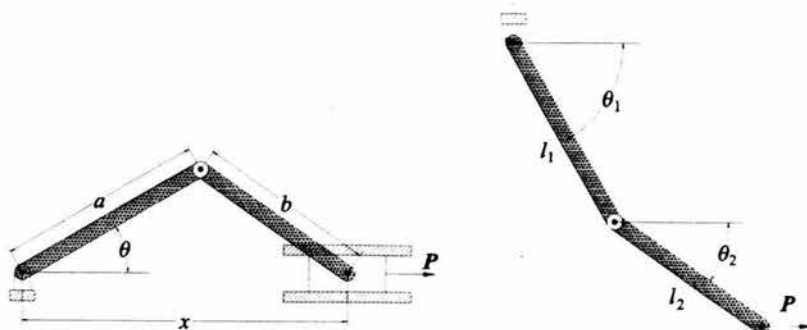


Figura 2.3: Sistemas clásicos de cuerpos rígidos conectados. Fuente: Hibbeler, R. (1996). *Mecánica para Ingenieros: Estática*. pp. 531

El principio del trabajo virtual para un sistema de cuerpos rígidos cuyas conexiones son sin fricción puede enunciarse como sigue: Un sistema de cuerpos rígidos conectados está en equilibrio a condición de que el trabajo virtual realizado por todas las fuerzas externas y pares que actúan sobre el sistema sea cero para cada desplazamiento virtual independiente del sistema (Hibbeler 1996). Matemáticamente, esto puede expresarse como

$$\delta U = 0, \quad (2.7)$$

donde  $\delta U$  representa el trabajo virtual de todas las fuerzas externas (y pares) que actúan sobre el sistema durante cualquier desplazamiento virtual independiente.

## 2.2 Modelo cinemático directo de un robot manipulador

El problema de la cinemática directa es determinar la posición del *efector final* de acuerdo con la posición angular que tiene cada una de las articulaciones de los robots. La forma más común de representar la cinemática directa es a través de una matriz de transformación homogénea  ${}^0T_n \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ , donde  $n$  es el número de articulaciones del robot. La matriz  ${}^0T_n$  está definida como:

$${}^0T_n = {}^0A_1 {}^1A_2 \dots {}^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} {}^0R_n & {}^0d_n \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.8)$$

donde  ${}^{i-1}A_i \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  con  $i = 1, 2, \dots, n$ , es la matriz homogénea que transforma las coordenadas de un punto del sistema de coordenadas  $i$  al sistema  $i-1$ .  ${}^0R_n \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  es una matriz ortogonal de rotación que representa la rotación del sistema coordinado  $o_n x_n y_n z_n$  con respecto al sistema de la base  $o_0 x_0 y_0 z_0$ , y cumple con

$$\begin{aligned} {}^0R_n &= ({}^nR_0)^{-1} = {}^nR_0^T \\ \det {}^0R_n &\equiv +1 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Por otra parte,  ${}^0d_n \in \mathbb{R}^3$  es el vector que indica la posición del origen del sistema  $n$  medido desde el origen del sistema de referencia  $o_0 x_0 y_0 z_0$ . Usualmente se utiliza la representación de Denavit-Hartenberg para calcular cada matriz de transformación  ${}^{i-1}A_i$  (Spong y Vidyasagar 1989).

### 2.2.1 Espacio de las articulaciones y espacio operacional

Como se menciona en esta sección, las ecuaciones de cinemática directa de un manipulador permiten expresar la posición y orientación del sistema coordinado del

efector final como una función de las variables de las articulaciones con respecto al sistema de la base. Si una tarea es especificada para el efector final, es necesario asignar su posición y orientación, eventualmente como una función del tiempo. Esto es relativamente fácil para la posición. Por otro lado, especificar la orientación a través de un vector en  $\mathbb{R}^3$  es bastante difícil, puesto que sus nueve componentes deben satisfacer las restricciones de ortonormalidad impuestas por (2.9) para cada instante. El problema de describir la orientación del efector final admite una solución natural si se elige la representación (2.8). En este caso, una trayectoria de movimiento puede ser asignada para el conjunto de ángulos elegidos para representar la orientación. Por lo tanto, la posición puede ser dada por un número mínimo de coordenadas respecto a la geometría de la estructura, y la orientación puede ser especificada en términos de una mínima representación (ángulos de Euler) describiendo la rotación del sistema coordenado del efector final con respecto al sistema de la base. De esta forma, es posible describir la configuración de posición/orientación del manipulador por medio del vector ( $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ ), con  $m \leq n$ ,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \phi \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

donde  $\mathbf{p}$  describe la posición del efector final y  $\phi$  su orientación. Esta representación de posición y orientación permite la descripción de una tarea del efector final en términos de un número de parámetros inherentemente independientes. El vector  $\mathbf{x}$  es definido en el espacio en el cual la tarea del manipulador es especificada, generalmente llamado *espacio operacional*.

Por otro lado, el *espacio de las articulaciones* (espacio de configuración) denota el espacio en el cual el vector de dimensión  $n \times 1$  de las variables de las articulaciones

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

está definido. Debido a la dependencia entre la posición y la orientación de las variables de las articulaciones, la ecuación de cinemática directa puede ser escrita de una forma diferente a (2.8), esto es

$$\mathbf{x} = \mathbf{k}(\mathbf{q}), \quad (2.12)$$

El vector función  $\mathbf{k}(\cdot) \in \mathbb{R}^{m \times 1}$  -en general no lineal- permite el cálculo de las variables del espacio operacional a partir del conocimiento de las variables en el espacio de las articulaciones.

## 2.3 Jacobiano de un robot manipulador

En la sección anterior, la cinemática directa estableció la relación entre las variables de las articulaciones y la posición y orientación del efector final. En esta sección, la cinemática diferencial, la cual da la relación entre la velocidad de las articulaciones y la correspondiente velocidad lineal y angular del efector final, es presentada. Este mapeo es descrito por una matriz, referida como Jacobiano geométrico, la cual depende de la configuración del robot. Alternativamente, si la localización del efector final es expresada con referencia a una representación mínima en el espacio operacional, es posible calcular la matriz Jacobiana vía la diferenciación de la función de cinemática directa con respecto a las variables de las articulaciones. El Jacobiano resultante, referido como Jacobiano analítico, en general difiere del Jacobiano geométrico. El Jacobiano constituye una de las más importantes herramientas para la caracterización del robot. De hecho, es útil para encontrar configuraciones singulares, análisis de redundancia, el mapeo entre las fuerzas aplicadas por el efector final y los torques resultantes en las articulaciones, así como la obtención de las ecuaciones de movimiento del manipulador.

### 2.3.1 Jacobiano geométrico

Considérese un manipulador de  $n$  grados de libertad. La ecuación de cinemática directa puede ser escrita de la forma definida por (2.8). El objetivo de la cinemática diferencial es encontrar la relación entre las velocidades de las articulaciones y la velocidad lineal y angular del efector final. En otras palabras, se desea expresar  $\dot{\mathbf{q}}$  por medio de las siguientes relaciones:

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{J}_P(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad (2.13)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{J}_O(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad (2.14)$$

En (2.13),  $\mathbf{J}_P$  es la matriz ( $3 \times n$ ) que relaciona la contribución de la velocidad de las articulaciones  $\dot{\mathbf{q}}$  con la velocidad lineal  $\dot{\mathbf{p}}$  del efector final, mientras en (2.14)  $\mathbf{J}_O$  es la matriz ( $3 \times n$ ) que relaciona la contribución de la velocidad de las articulaciones  $\dot{\mathbf{q}}$  a la velocidad angular  $\boldsymbol{\omega}$  del efector final. En forma compacta, (2.13) y (2.14) pueden ser escritas como

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}, \quad (2.15)$$

la cual representa la ecuación dinámica diferencial del manipulador. La matriz  $\mathbf{J}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{6 \times n}$  es el Jacobiano geométrico del manipulador.

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_P \\ \mathbf{J}_O \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

En general, (2.16) es una función de las variables de las articulaciones.

### 2.3.2 Jacobiano Analítico

Si la posición y orientación del efector final se especifican en términos de un número mínimo de parámetros en el espacio operacional como en (2.10), es natural preguntarse si es posible calcular el Jacobiano vía diferenciación de la función de cinemática directa con respecto a la variable de las articulaciones. La velocidad traslacional del sistema de coordenadas del efector final puede ser expresada como la derivada en el tiempo del vector  $\mathbf{p}$ , representando el origen del sistema del efector final con respecto al sistema de la base, esto es

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_P(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}, \quad (2.17)$$

En lo que concierne a la velocidad rotacional del sistema del efector final, se puede considerar la representación mínima de orientación en términos de tres variables  $\phi$ . Su derivada con respecto al tiempo  $\dot{\phi}$  en general difiere del vector de velocidad angular  $\omega$ . En cualquier caso, una vez que la función  $\phi(\mathbf{q})$  es conocida, es formalmente correcto considerar el Jacobiano obtenido como

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_\phi(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (2.18)$$

Calcular el Jacobiano  $\mathbf{J}_\phi(\mathbf{q})$  como  $\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{q}}$  no es directo, puesto que la función  $\phi(\mathbf{q})$  no está usualmente disponible en forma directa. Sobre esta idea, la ecuación cinemática diferencial puede ser obtenida como la derivada con respecto al tiempo de la ecuación (2.12), esto es

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_P(\mathbf{q}) \\ \mathbf{J}_\phi(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_A(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (2.19)$$

donde el Jacobiano analítico

$$\mathbf{J}_A(\mathbf{q}) = \frac{d\mathbf{k}(\mathbf{q})}{d\mathbf{q}} \quad (2.20)$$

es diferente del Jacobiano geométrico  $\mathbf{J}$ , puesto que la velocidad angular  $\omega$  del efector final con respecto al sistema de la base no está dada por  $\dot{\phi}$ .

## 2.4 Modelo dinámico de un robot manipulador con movimiento libre

Utilizando la formulación de Euler-Lagrange, la ecuación dinámica de movimiento de un manipulador de  $n$  grados de libertad está dada por la ecuación (2.21). Esta

ecuación describe la evolución en el tiempo del manipulador sujeto a restricciones holonómicas, cuando las fuerzas restringidas satisfacen el principio del trabajo virtual (Spong y Vidyasagar 1989).

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + D\dot{q} + g(q) = \tau, \tag{2.21}$$

En (2.21) se tiene

- $\tau \in \mathbb{R}^n$  : vector de fuerzas o momentos generalizados actuando en las articulaciones.
- $H(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  : matriz simétrica positiva definida de inercia generalizada.
- $C(q, \dot{q})\dot{q} \in \mathbb{R}^n$  : vector de fuerzas centrífugas y de Coriolis.
- $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$  : matriz diagonal semidefinida positiva de términos disipativos. Considera los coeficientes de fricción viscosa de las articulaciones.
- $g(q) \in \mathbb{R}^n$  : vector de términos gravitacionales.
- $n$  : grados de libertad
- $q \in \mathbb{R}^n = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$  : vector de coordenadas generalizadas

## 2.5 Relación entre la fuerza del efector final y el torque de las articulaciones

La interacción del manipulador con el entorno produce fuerzas y momentos en el efector final o la herramienta. Sea  $F = (F_x, F_y, F_z, n_x, n_y, n_z)^T$  el vector de fuerzas y torques en el efector final, expresado en el sistema coordenado de la herramienta.  $F_x, F_y, F_z$  son las componentes de fuerza en el efector final y  $n_x, n_y, n_z$  del torque, como se muestra en la Figura 2.4. Sea  $\tau$  el vector de torques en las articulaciones y  $\delta X$  el desplazamiento virtual del efector final causado por la fuerza  $F$ . Finalmente, sea  $\delta q$  el correspondiente desplazamiento virtual en las articulaciones. Estos desplazamientos son relacionados a través del Jacobiano  $J(q)$  del manipulador de acuerdo con

$$\delta X = J(q)\delta q. \tag{2.22}$$

El trabajo virtual  $\delta W$  del sistema es

$$\delta W = F^T \delta X - \tau^T \delta q. \tag{2.23}$$

Substituyendo (2.22) en (2.23) se obtiene

$$\delta W = (F^T J(q) - \tau^T) \delta q. \tag{2.24}$$



Nótese que (2.24) es igual a cero si el manipulador está en equilibrio. Puesto que las coordenadas generalizadas  $q$  son independientes se tiene la igualdad

$$\tau = J(q)^T F. \tag{2.25}$$

En otras palabras las fuerzas del efector final se relacionan con los torques en las articulaciones por la transpuesta del Jacobiano del manipulador, de acuerdo con la ecuación (2.25).

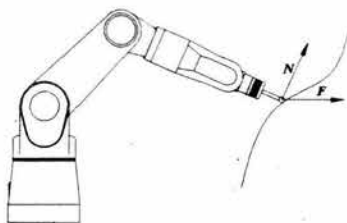


Figura 2.4: Componentes de fuerza y torque en un manipulador en contacto con el ambiente.

### 2.5.1 Singularidades

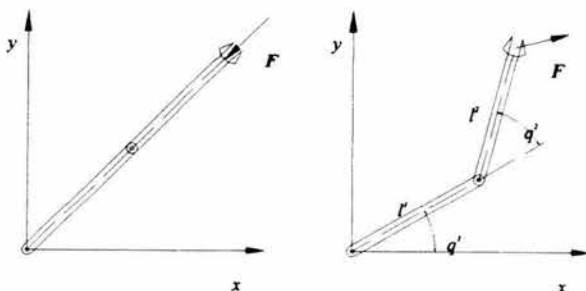


Figura 2.5: Singularidades comunes que se presentan en los manipuladores. Fuente: Spong, M. Vidyasagar, M. (1989). *Robot Dynamics and Control*. pp. 244

Se puede observar que el Jacobiano desempeña un papel importante en las fuerzas y torques que actúan en un manipulador. Por lo tanto, se espera que configuraciones singulares den lugar a un comportamiento especial respecto a estas fuerzas y torques. En una configuración singular, es decir una configuración de  $q$  donde el espacio nulo del  $J^T$  no sea vacío, un vector  $F$  en este espacio no produce ningún

torque en las articulaciones. Asimismo, en una configuración singular hay direcciones en el espacio cartesiano en el cual el manipulador no puede ejercer fuerzas (ver Figura 2.5).

## 2.6 Restricciones naturales y artificiales

Las tareas de control de fuerza se pueden pensar en términos de las restricciones impuestas en el manipulador por su interacción con el entorno. Un manipulador que se mueve a través del espacio libre dentro de su espacio de trabajo no está restringido en la posición y, por tanto, no puede ejercer ninguna fuerza. Un sensor de fuerza en tal caso registraría solamente las fuerzas de inercia debido a cualquier aceleración del efector final. Tan pronto como el manipulador entre en contacto con una superficie rígida, como se muestra en la Figura 2.6, un grado de libertad en la posición se pierde puesto que el manipulador no puede moverse a través de la superficie. Al mismo tiempo, el manipulador puede ejercer fuerzas normales a la superficie. Esto es, el movimiento es posible a lo largo de la dirección de los vectores tangentes a la superficie de restricción, mientras que las fuerzas pueden ser ejercidas a lo largo de la dirección de los vectores normales a la superficie. Así, el control de posición y el control de fuerza se excluyen mutuamente: no se puede controlar una fuerza y una posición a lo largo de la misma dirección simultáneamente.

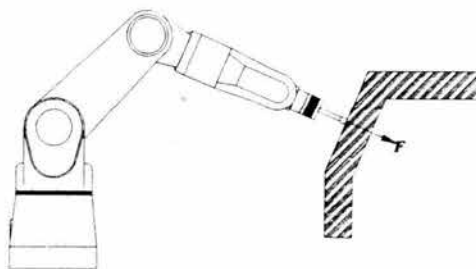


Figura 2.6: Manipulador en contacto con el entorno.

Para describir las tareas de control de fuerza se acostumbra introducir un marco de referencia  $o_c x_c y_c z_c$  (también llamado marco de referencia de la restricción), de tal manera que la tarea que será realizada sea descrita fácilmente. Por ejemplo, en una aplicación para lavar una ventana se puede definir un marco de referencia en la herramienta con el eje  $z_c$  a lo largo de la dirección normal de la superficie. La especificación de la tarea entonces sería expresada en función de mantener una fuerza

constante en la dirección  $z_c$  mientras se sigue una trayectoria preescrita en el plano  $x_c - y_c$ . Más específicamente, un marco de restricción es un sistema coordenado (variante en el tiempo) cuyos ejes coordenados descomponen la tarea en direcciones a lo largo de las cuales los comandos de posición pura o un comando de fuerza pura pueden ser programados.

Con respecto al marco de restricción coordenado se pueden asociar ciertos conjuntos de restricciones conocidas como *restricciones naturales y restricciones artificiales*, que definen la tarea. Por ejemplo, una restricción de la posición en la dirección de  $z_c$  que se presenta por la presencia de una superficie rígida es un restricción natural, mientras que la trayectoria  $x_c - y_c$  necesaria para lavar la ventana es una restricción artificial.

## 2.7 Movimiento restringido y dinámica del robot

Cuando un robot manipulador está en contacto con el entorno, se producen fuerzas adicionales debido a la interacción entre el efector final del robot y este. Sea  $\mathbf{f}_e$  la fuerza ejercida por el robot debido al contacto con el entorno. Es fácil demostrar, usando el principio de trabajo virtual, que el torque en una articulación del robot está dado por  $\boldsymbol{\tau}_e = \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{f}_e$ , donde  $\mathbf{J}(\mathbf{q})$  es el Jacobiano del manipulador. Así, la ecuación (2.21) puede ser modificada como

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} + \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{f}_e \quad (2.26)$$

para incorporar la fuerza externa debida a la interacción con el entorno.  $\mathbf{f}_e^T = (\mathbf{f}^T \ \mathbf{m}^T) \in \mathbb{R}^6$  representa las fuerzas ( $\mathbf{f}$ ) y los torques ( $\mathbf{m}$ ) en el sistema coordenado de referencia en el punto de contacto. La fuerza de contacto  $\mathbf{f}_e$  es determinada por la ecuación (2.25) y por la dinámica del entorno, cuyo modelo dinámico se caracteriza por:

- La cinemática de la geometría de contacto. Esto es, en qué direcciones los movimientos del manipulador están restringidos.
- La relación entre la fuerza aplicada y la deformación de la superficie de restricción.

Generalmente se consideran dos casos: (1) el robot y el ambiente son perfectamente rígidos y (2) el entorno se comporta como un sistema masa-resorte-amortiguador. El primer modelo es más apropiado para:

- Propósitos de especificación de movimiento: el usuario tiene que especificar el movimiento deseado del robot, así como la fuerza de contacto deseada. Esto es fácil dentro de un modelo cartesiano, rígido y restringido geoméricamente.

- Propósitos teóricos: una interacción perfectamente rígida entre el robot y su entorno es un caso límite ideal interesante, con el cual otros métodos de control pueden ser comparados.

Dos casos son considerados para entornos rígidos: 1) las restricciones son formuladas en el espacio de las articulaciones y 2) las restricciones son formuladas en el espacio cartesiano. Para esta tesis sólo se contempla la representación para el espacio de las articulaciones.

Supóngase ahora que las restricciones cinemáticas impuestas por el entorno son expresadas en el espacio de las articulaciones por  $m$  ecuaciones algebraicas

$$\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}. \quad (2.27)$$

Esta ecuación asume que la restricción es rígida, bilateral y holonómica y que las  $m$  restricciones son independiente entre sí; por lo tanto el manipulador queda con  $n - m$  grados de libertad.  $\mathbf{x}$  es el espacio coordenado y  $\mathbf{q}$  debe satisfacer

$$\varphi(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{q})) = \mathbf{0}, \quad (2.28)$$

donde  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{q})$  representa la cinemática directa del manipulador

La dinámica para el robot restringido es obtenida a partir del modelo sin restricción (2.21) por la técnica clásica de incorporar las restricciones dentro de la función Lagrangiana. Para el sistema sin restricción, el Lagrangiano es la diferencia entre la energía cinética del sistema  $\mathcal{K}$  y su energía potencial  $\mathcal{P}$ . Para que el método de Lagrange satisfaga las ecuaciones dinámicas del sistema y las restricciones se define el Lagrangiano extendido

$$\mathcal{L} = \mathcal{K} - \mathcal{P} + \sum_{j=1}^m \lambda_j \varphi_j(\mathbf{q}) \quad (2.29)$$

con  $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1 \dots \lambda_m]^T$ . La solución de las ecuaciones Lagrangianas

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{d\mathcal{L}}{d\dot{q}_k} \right) - \frac{d\mathcal{L}}{dq_k} = \tau_k, \quad k = 1, \dots, n \quad (2.30)$$

resulta en

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} + \mathbf{J}_{\varphi}^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda} \quad (2.31)$$

donde  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$  es el vector de coordenadas generalizadas de las articulaciones,  $\mathbf{H}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz de inercia simétrica positiva definida,  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$

es el vector de torques centrífugos y de Coriolis,  $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de torques gravitacionales,  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz diagonal semidefinida positiva la cual considera los coeficientes de fricción viscosa de las articulaciones,  $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n$  es el vector de torques actuando en las articulaciones, y  $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$  es el vector multiplicador de Lagrange (físicamente representa la fuerza aplicada en el punto de contacto).  $\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q}) = \nabla\varphi(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$  es una matriz ortogonal, cuyo rango se asume completo debido a que se considera que todas las restricciones son independientes.  $\nabla\varphi(\mathbf{q})$  denota el vector gradiente de la superficie del objeto  $\varphi \in \mathbb{R}^m$ , el cual mapea un vector sobre el plano normal al plano tangente en el punto de contacto.  $\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})$  representa la fuerza de contacto ideal, esto es, contacto sin fricción.

Cabe mencionar que la restricción holonómica juega un papel muy importante debido a que, si se calcula adecuadamente, es posible saber qué debe satisfacer la trayectoria del robot para garantizar que el manipulador permanecerá en contacto con la superficie del objeto.

## 2.8 Propiedades del modelo del robot con movimiento restringido

El modelo dinámico (2.31) tiene propiedades útiles para desarrollar el algoritmo de control y verificar su estabilidad. Primero se denota el valor propio más grande (pequeño) de una matriz por  $\lambda_{\max}(\cdot)$  ( $\lambda_{\min}(\cdot)$ ). La norma de un vector  $\mathbf{x}$  de dimensión  $n \times 1$  está definida por  $\|\mathbf{x}\| \triangleq \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}$ , mientras que la norma de una matriz  $\mathbf{A}$  de dimensión  $m \times n$  es la correspondiente norma inducida  $\|\mathbf{A}\| \triangleq \sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})}$ . Recordando que se consideran articulaciones de revolución, las siguientes propiedades pueden ser establecidas.

**Propiedad 2.1**  $\mathbf{H}(\mathbf{q})$  satisface  $\lambda_h \|\mathbf{x}\|^2 \leq \mathbf{x}^T \mathbf{H} \mathbf{x} \leq \lambda_H \|\mathbf{x}\|^2 \quad \forall \mathbf{q}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  
donde  $\lambda_h \triangleq \min \lambda_{\min}(\mathbf{H})$ ,  $\lambda_H \triangleq \max \lambda_{\max}(\mathbf{H})$ , y  $0 < \lambda_h < \lambda_H < \infty$  △

**Propiedad 2.2** Con una apropiada definición de  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ ,  $\dot{\mathbf{H}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  es anti-simétrica △

**Propiedad 2.3** El vector  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{x})\mathbf{y}$  satisface  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{x})\mathbf{y} = \mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{y})\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  △

**Propiedad 2.4** Se satisface  $\|\mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{x})\| \leq k_c \|\mathbf{x}\|$  con  $0 < k_c < \infty$ ,  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  △

**Propiedad 2.5** *El vector  $\dot{\mathbf{q}}$  puede ser escrito como*

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{q}} &= \dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{J}_\varphi^+ \mathbf{J}_\varphi \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{J}_\varphi^+ \mathbf{J}_\varphi \dot{\mathbf{q}}) & (2.32) \\
 &= (\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{J}_\varphi^+ \mathbf{J}_\varphi) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}_\varphi^+ \mathbf{J}_\varphi \dot{\mathbf{q}} \\
 &= (\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{P}(\mathbf{q})) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}_\varphi^+ \mathbf{J}_\varphi \dot{\mathbf{q}} \\
 &\triangleq \mathbf{Q}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}_\varphi^+(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{p}}
 \end{aligned}$$

con  $\mathbf{P}(\mathbf{q}) = \mathbf{J}_\varphi^+ \mathbf{J}_\varphi$  y  $\mathbf{Q}(\mathbf{q}) = \mathbf{I} - \mathbf{P}(\mathbf{q})$ . Donde  $\mathbf{J}_\varphi^+ = \mathbf{J}_\varphi^T (\mathbf{J}_\varphi \mathbf{J}_\varphi^T)^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  es conocida como la pseudoinversa de  $\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})$  y  $\mathbf{Q}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  satisface  $\text{rango}(\mathbf{Q}(\mathbf{q})) = n - m$ . Estas dos matrices son ortogonales, i.e.  $\mathbf{Q}(\mathbf{q}) \mathbf{J}_\varphi^+(\mathbf{q}) = \mathbf{O}$  (y  $\mathbf{J}_\varphi^+(\mathbf{q}) \mathbf{Q}(\mathbf{q}) = \mathbf{O}$ ).  $\dot{\mathbf{p}} \triangleq \mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^m$  es conocida como la velocidad restringida. Puesto que están siendo consideradas restricciones homogéneas, de acuerdo con (2.28), se tiene

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{0} \quad \text{y} \quad \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad (2.33)$$

△

# Capítulo 3

## Control de fuerza-posición

En este capítulo se presenta el algoritmo de control de posición/fuerza tema de esta tesis. En primer lugar se presenta el esquema de control con las definiciones pertinentes. A continuación se define el observador de velocidad para la implementación del algoritmo. Por último se analizan el acotamiento de los estados y la estabilidad del controlador.

### 3.1 Esquema de Control

Para poder diseñar el esquema de control-observador, las siguientes suposiciones son hechas:

**Suposición 3.1** *El robot satisface las restricciones*

$$\varphi(\mathbf{q}) = \mathbf{0} \quad (3.1)$$

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad (3.2)$$

para todo tiempo. Además, el manipulador no es redundante.  $\square$

**Suposición 3.2** *La matriz  $\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})$  es Lipschitz continua, esto es*

$$\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q}) = \nabla \varphi(\mathbf{q}) = \frac{\partial \varphi(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \quad (3.3)$$

$$\|\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q}) - \mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q}_d)\| \leq L \|\mathbf{q} - \mathbf{q}_d\|, \quad (3.4)$$

para una constante positiva  $L$  y para toda  $\mathbf{q}, \mathbf{q}_d \in \mathbb{R}^n$ . Además, existe una constante positiva finita  $c_0$  que satisface

$$c_0 = \max_{\forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n} \|\mathbf{J}_\varphi^+(\mathbf{q})\| \quad (3.5)$$

$\square$

Nótese que la Suposición 3.1 de que el robot no sea redundante significa que (2.28) puede ser satisfecha solamente por un vector acotado  $\mathbf{q}$ . Las ecuaciones (3.3)-(3.4) en la Suposición 3.2 considera que la restricción no incluye singularidades. La ecuación (3.5) es bastante razonable para robots de revolución, puesto que los elementos de  $\mathbf{q}$  aparecen como argumentos de funciones de senos y cosenos. Esta es la razón de que (3.5) sea válida. Nótese que no solamente  $\mathbf{J}_\varphi^+(\mathbf{q})$  está acotada, sino también  $\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})$  está acotada para cualquier  $\mathbf{q}$ .

A continuación, considérese el modelo dinámico de un robot manipulador con movimiento restringido descrito en la Sección 2.7

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} + \mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda}. \quad (3.6)$$

Los errores de seguimiento y observación se definen como

$$\tilde{\mathbf{q}} \triangleq \mathbf{q} - \mathbf{q}_d \quad (3.7)$$

$$\mathbf{z} \triangleq \mathbf{q} - \hat{\mathbf{q}}, \quad (3.8)$$

respectivamente, donde  $\mathbf{q}_d$  es una trayectoria deseada suave y acotada que satisface la restricción (3.1), y  $(\cdot)$  representa el valor estimado de  $(\cdot)$ . Otras definiciones de error son:

$$\Delta \mathbf{p} \triangleq \mathbf{p} - \mathbf{p}_d \quad (3.9)$$

$$\Delta \boldsymbol{\lambda} \triangleq \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_d \quad (3.10)$$

donde  $\mathbf{p}_d$  es la posición deseada de la restricción que satisface (3.2), y  $\boldsymbol{\lambda}_d$  es la fuerza deseada aplicada por el robot sobre la superficie de restricción.

La referencia nominal está definida por

$$\dot{\hat{\mathbf{q}}}_r \triangleq \mathbf{Q}(\mathbf{q}) (\dot{\mathbf{q}}_d - \boldsymbol{\Lambda}(\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}_d)) + \mathbf{J}_\varphi^+(\mathbf{q}) (\dot{\mathbf{p}}_d - \beta \Delta \mathbf{p}), \quad (3.11)$$

donde  $\boldsymbol{\Lambda} = k\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  con  $k > 0$  y  $\beta$  es una constante positiva. Sea

$$\mathbf{s} \triangleq \dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\hat{\mathbf{q}}}_r. \quad (3.12)$$

Utilizando la Propiedad (2.32) y sustituyendo (3.11) en (3.12) se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &= \mathbf{Q}(\mathbf{q})\dot{\hat{\mathbf{q}}} + \mathbf{J}_\varphi^+(\mathbf{q})\dot{\mathbf{p}} - [\mathbf{Q}(\mathbf{q}) (\dot{\mathbf{q}}_d - \boldsymbol{\Lambda}(\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}_d)) + \mathbf{J}_\varphi^+(\mathbf{q}) (\dot{\mathbf{p}}_d - \beta \Delta \mathbf{p})] \\ &= \mathbf{Q}(\mathbf{q}) [\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d + \boldsymbol{\Lambda}(\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}_d)] + \mathbf{J}_\varphi^+(\mathbf{q}) (\dot{\mathbf{p}} - \dot{\mathbf{p}}_d + \beta \Delta \mathbf{p}) \\ &= \mathbf{Q}(\mathbf{q}) [\tilde{\dot{\mathbf{q}}} + \boldsymbol{\Lambda}(\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}_d)] + \mathbf{J}_\varphi^+(\mathbf{q}) (\Delta \dot{\mathbf{p}} + \beta \Delta \mathbf{p}) \\ &\triangleq \mathbf{s}_p + \mathbf{s}_f \end{aligned} \quad (3.13)$$



Nótese que  $s_p$  y  $s_f$  son vectores ortogonales y, con la ayuda de la ecuación (3.8),  $s$  puede ser escrito como

$$\begin{aligned} s &= \mathbf{Q}(\mathbf{q}) \left[ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \underbrace{\Lambda(\mathbf{q} - \mathbf{z} - \mathbf{q}_d)}_{\tilde{\mathbf{q}}} \right] + \mathbf{J}_\varphi^+(\mathbf{q}) (\Delta\dot{\mathbf{p}} + \beta\Delta\mathbf{p}) \\ &= \mathbf{Q}(\mathbf{q}) \left[ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \Lambda(\mathbf{q} - \mathbf{q}_d) - \Lambda\mathbf{z} \right] + \mathbf{J}_\varphi^+(\mathbf{q}) (\Delta\dot{\mathbf{p}} + \beta\Delta\mathbf{p}) \\ &= \mathbf{Q}(\mathbf{q}) \left( \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \Lambda\tilde{\mathbf{q}} - \Lambda\mathbf{z} \right) + \mathbf{J}_\varphi^+(\mathbf{q}) (\Delta\dot{\mathbf{p}} + \beta\Delta\mathbf{p}) \end{aligned} \quad (3.14)$$

A continuación se analiza  $\ddot{\mathbf{q}}_r$ . Esta cantidad está dada por

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{q}}_r &= \dot{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}) (\dot{\mathbf{q}}_d - \Lambda(\tilde{\mathbf{q}} - \mathbf{q}_d)) + \mathbf{J}_\varphi^+(\mathbf{q}) (\dot{\mathbf{p}}_d - \beta\Delta\dot{\mathbf{p}}) \\ &\quad + \mathbf{Q}(\mathbf{q}) \left( \ddot{\mathbf{q}}_d - \Lambda(\dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d) \right) + \mathbf{J}_\varphi^+(\mathbf{q}) (\ddot{\mathbf{p}}_d - \beta\Delta\dot{\mathbf{p}}) \end{aligned} \quad (3.15)$$

Como se mostrará adelante,  $\ddot{\mathbf{q}}_r$  es necesario para implementar el controlador y el observador. Sin embargo, esta cantidad no está disponible puesto que  $\dot{\mathbf{q}}$  no es medible. Para superar este inconveniente, considérese  $\mathbf{Q}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Entonces, se tiene

$$\dot{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_{11}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} & \cdots & \frac{\partial a_{1n}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial a_{n1}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} & \cdots & \frac{\partial a_{nn}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

donde  $a_{\alpha\beta}$  es el elemento  $\alpha\beta$  de  $\mathbf{Q}(\mathbf{q})$ . Basado en (3.16) se define

$$\dot{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}) \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial a_{11}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}}_o & \cdots & \frac{\partial a_{1n}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}}_o \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial a_{n1}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}}_o & \cdots & \frac{\partial a_{nn}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}}_o \end{bmatrix}, \quad (3.17)$$

con

$$\dot{\mathbf{q}}_o \triangleq \dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \Lambda\mathbf{z}. \quad (3.18)$$

De este modo se puede definir

$$\ddot{\mathbf{Q}}(\mathbf{r}) \triangleq \dot{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}) - \dot{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_{11}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{r} & \cdots & \frac{\partial a_{1n}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial a_{n1}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{r} & \cdots & \frac{\partial a_{nn}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{r} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

con

$$\mathbf{r} \triangleq \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_o = \dot{\mathbf{q}} - \dot{\hat{\mathbf{q}}} + \Lambda \mathbf{z} = \dot{\mathbf{z}} + \Lambda \mathbf{z}, \quad (3.20)$$

De (3.17), se propone la siguiente sustitución para  $\ddot{\mathbf{q}}_r$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{q}}_r \triangleq & \dot{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}) (\dot{\mathbf{q}}_d - \Lambda(\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}_d)) + \dot{\mathbf{J}}_\varphi^+(\mathbf{q}) (\dot{\mathbf{p}}_d - \beta\Delta\mathbf{p}) \\ & + \mathbf{Q}(\mathbf{q}) (\ddot{\mathbf{q}}_d - \Lambda(\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d)) + \mathbf{J}_\varphi^+(\mathbf{q}) (\ddot{\mathbf{p}}_d - \beta\Delta\dot{\mathbf{p}}) \end{aligned} \quad (3.21)$$

donde  $\dot{\mathbf{J}}_\varphi^+(\mathbf{q})$  se define de manera similar a  $\dot{\mathbf{Q}}(\mathbf{q})$  en (3.17). Nótese que el valor de  $\dot{\mathbf{p}}$  se usa también, puesto que se conoce de (3.2). De la ecuación (3.15) se tiene

$$\begin{aligned} & \mathbf{Q}(\mathbf{q}) (\ddot{\mathbf{q}}_d - \Lambda(\dot{\hat{\mathbf{q}}} - \dot{\mathbf{q}}_d)) + \mathbf{J}_\varphi^+(\mathbf{q}) (\ddot{\mathbf{p}}_d - \beta\Delta\dot{\mathbf{p}}) \\ & = \ddot{\mathbf{q}}_r - \dot{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}) (\dot{\mathbf{q}}_d - \Lambda(\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}_d)) - \dot{\mathbf{J}}_\varphi^+(\mathbf{q}) (\dot{\mathbf{p}}_d - \beta\Delta\mathbf{p}) \end{aligned} \quad (3.22)$$

Sustituyendo (3.22) en (3.21) se tiene

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{q}}_r \triangleq & \dot{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}) (\dot{\mathbf{q}}_d - \Lambda(\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}_d)) + \dot{\mathbf{J}}_\varphi^+(\mathbf{q}) (\dot{\mathbf{p}}_d - \beta\Delta\mathbf{p}) \\ & + \ddot{\mathbf{q}}_r - \dot{\mathbf{Q}}(\mathbf{q}) (\dot{\mathbf{q}}_d - \Lambda(\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}_d)) - \dot{\mathbf{J}}_\varphi^+(\mathbf{q}) (\dot{\mathbf{p}}_d - \beta\Delta\mathbf{p}) \end{aligned} \quad (3.23)$$

Después de simplificar (3.23) se obtiene

$$\ddot{\mathbf{q}}_r = \ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{e}(\mathbf{r}), \quad (3.24)$$

con

$$\mathbf{e}(\mathbf{r}) \triangleq -\dot{\mathbf{Q}}(\mathbf{r}) (\dot{\mathbf{q}}_d - \Lambda(\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}_d)) - \dot{\mathbf{J}}_\varphi^+(\mathbf{r}) (\dot{\mathbf{p}}_d - \beta\Delta\mathbf{p}) \quad (3.25)$$

El control propuesto es

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_r)\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{g}(\mathbf{q}) - \mathbf{K}_R(\dot{\mathbf{q}}_o - \dot{\mathbf{q}}_r) - \mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda}_d \quad (3.26)$$

donde  $\mathbf{K}_R \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz diagonal positiva definida. Nótese que de (3.12) y (3.20) se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{s} \triangleq \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_r & \Rightarrow \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{s} + \dot{\mathbf{q}}_r \\ \mathbf{r} \triangleq \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_o & \Rightarrow \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{r} + \dot{\mathbf{q}}_o \Rightarrow \dot{\mathbf{q}}_o - \dot{\mathbf{q}}_r = \mathbf{s} - \mathbf{r}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Sustituyendo (3.24) y (3.27) en (3.26) se obtiene

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{H}(\mathbf{q})(\ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{e}(\mathbf{r})) + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_r)\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{g}(\mathbf{q}) - \mathbf{K}_R(\mathbf{s} - \mathbf{r}) - \mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda}_d \quad (3.28)$$

### 3.1.1 Obtención del modelo en lazo cerrado

Sustituyendo (3.28) en el modelo del robot (3.6) se obtiene el modelo a lazo cerrado

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) - \mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda} = \quad (3.29)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})(\ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{e}(\mathbf{r})) + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_r)\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{g}(\mathbf{q}) - \mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda}_d - \mathbf{K}_R(\mathbf{s} - \mathbf{r}),$$

o bien

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})(\ddot{\mathbf{q}} - \ddot{\mathbf{q}}_r) + \mathbf{D}(\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_r) - \mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q})(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_d) + \mathbf{K}_R\mathbf{s} - \mathbf{K}_R\mathbf{r} \quad (3.30)$$

$$+ \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_r)\dot{\mathbf{q}}_r = \mathbf{H}(\mathbf{q})\mathbf{e}(\mathbf{r})$$

A continuación se manipula  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_r)\dot{\mathbf{q}}_r$  con ayuda de la definición (3.27) y la Propiedad 2.3 se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_r)\dot{\mathbf{q}}_r &= \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})(\mathbf{s} + \dot{\mathbf{q}}_r) - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_r)\dot{\mathbf{q}}_r \quad (3.31) \\ &= \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{s} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_r - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_r)\dot{\mathbf{q}}_r \\ &= \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{s} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_r)\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_r)\dot{\mathbf{q}}_r \\ &= \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{s} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_r)(\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_r) \\ &= \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{s} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_r)\mathbf{s}. \end{aligned}$$

Sustituyendo (3.12) y (3.31) en (3.30) se obtiene el sistema en lazo cerrado en términos de  $\mathbf{s}$ ,  $\mathbf{r}$  y  $\Delta\boldsymbol{\lambda}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{s}} &= -\mathbf{K}_R\mathbf{s} - \mathbf{D}\mathbf{s} + \mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q})\Delta\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{K}_R\mathbf{r} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{s} \quad (3.32) \\ &\quad - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_r)\mathbf{s} + \mathbf{H}(\mathbf{q})\mathbf{e}(\mathbf{r}) \\ &= -\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{s} - \mathbf{K}_{DR}\mathbf{s} + \mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q})\Delta\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{K}_R\mathbf{r} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_r)\mathbf{s} + \mathbf{H}(\mathbf{q})\mathbf{e}(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{K}_{DR} \triangleq \mathbf{K}_R + \mathbf{D}$ .

## 3.2 Definición del observador de velocidad

La dinámica del observador está dada por

$$\dot{\hat{\mathbf{q}}} = \dot{\hat{\mathbf{q}}}_o + \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{z} + k_d\mathbf{z} \quad (3.33)$$

$$\ddot{\hat{\mathbf{q}}}_o = \ddot{\hat{\mathbf{q}}}_r + k_d\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{z}, \quad (3.34)$$

donde  $k_d$  es una constante positiva. Sustituyendo (3.24) en (3.34) se tiene

$$\ddot{\hat{\mathbf{q}}}_o = \ddot{\hat{\mathbf{q}}}_r + \mathbf{e}(\mathbf{r}) + k_d\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{z}. \quad (3.35)$$

Despejando  $\dot{\tilde{q}}_o$  de (3.33) y derivando se obtiene

$$\ddot{\tilde{q}}_o = \ddot{\tilde{q}} - \Lambda \dot{z} - k_d \dot{z}. \quad (3.36)$$

Sustituyendo (3.20) y (3.36) en (3.35)

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{q}}_r &= \ddot{\tilde{q}} - \Lambda \dot{z} - k_d \dot{z} - k_d \Lambda z - e(r) \\ &= \ddot{\tilde{q}} - \Lambda \dot{z} - k_d (\dot{z} + \Lambda z) - e(r) \\ &= \ddot{\tilde{q}} - \Lambda \dot{z} - k_d r - e(r). \end{aligned} \quad (3.37)$$

De la ecuación (3.8) se puede deducir  $\ddot{\tilde{q}} = \ddot{q} - \ddot{z}$ ; por lo tanto (3.37) se puede reescribir como

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{q}}_r &= \ddot{q} - \underbrace{\ddot{z}}_{-\dot{r}} - k_d r - e(r) \\ \ddot{\tilde{q}}_r &= \ddot{q} - \dot{r} - k_d r - e(r) \\ \Rightarrow \dot{s} &= \dot{r} + k_d r + e(r) \end{aligned} \quad (3.38)$$

con  $\dot{s} = \ddot{q} - \ddot{\tilde{q}}_r$ . Multiplicando (3.38) por  $\mathbf{H}(q)$  se tiene

$$\mathbf{H}(q)\dot{s} = \mathbf{H}(q)e(r) + \mathbf{H}(q)\dot{r} + k_d \mathbf{H}(q)r. \quad (3.39)$$

Sustituyendo (3.32) en (3.39)

$$\begin{aligned} & -\mathbf{C}(q, \dot{q})s - \mathbf{K}_{DR}s + \mathbf{J}_\varphi^T(q)\Delta\lambda + \mathbf{K}_R r + \mathbf{H}(q)e(r) - \mathbf{C}(q, \dot{q}_r)s \\ &= \mathbf{H}(q)e(r) + \mathbf{H}(q)\dot{r} + k_d \mathbf{H}(q)r \\ \Rightarrow \mathbf{J}_\varphi^T(q)\Delta\lambda - \mathbf{K}_{DR}s + \mathbf{K}_R r - \mathbf{C}(q, \dot{q})s - \mathbf{C}(q, \dot{q}_r)s &= \mathbf{H}(q)\dot{r} + k_d \mathbf{H}(q)r \end{aligned} \quad (3.40)$$

Despejando  $\mathbf{H}(q)\dot{r}$  de (3.40)

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(q)\dot{r} &= -\mathbf{K}_{DR}s - k_d \mathbf{H}(q)r + \mathbf{K}_R r - \mathbf{C}(q, \dot{q})s - \mathbf{C}(q, \dot{q}_r)s + \mathbf{J}_\varphi^T(q)\Delta\lambda \\ &= -\mathbf{K}_{DR}s - \mathbf{H}_{rd}r - \mathbf{C}(q, \dot{q})s - \mathbf{C}(q, \dot{q}_r)s + \mathbf{J}_\varphi^T(q)\Delta\lambda \end{aligned} \quad (3.41)$$

donde  $\mathbf{H}_{rd} \triangleq k_d \mathbf{H}(q) - \mathbf{K}_R$ . Usando nuevamente la Propiedad 2.3 para manipular el término  $-\mathbf{C}(q, \dot{q})s - \mathbf{C}(q, \dot{q}_r)s$  de (3.41) se tiene

$$\begin{aligned} & -\mathbf{C}(q, \dot{q})s - \mathbf{C}(q, \dot{q}_r)s - \mathbf{C}(q, \dot{q})r + \mathbf{C}(q, \dot{q})r \\ &= -\mathbf{C}(q, \dot{q})(s - r) - \mathbf{C}(q, \dot{q}_r)s - \mathbf{C}(q, \dot{q})r \\ &= -\mathbf{C}(q, s + \dot{q}_r)(s - r) - \mathbf{C}(q, \dot{q}_r)s - \mathbf{C}(q, \dot{q})r \\ &= -\mathbf{C}(q, s + \dot{q}_r)s + \mathbf{C}(q, s + \dot{q}_r)r - \mathbf{C}(q, \dot{q}_r)s - \mathbf{C}(q, \dot{q})r \\ &= -\mathbf{C}(q, s)(s + \dot{q}_r) + \mathbf{C}(q, s + \dot{q}_r)r - \mathbf{C}(q, s)\dot{q}_r - \mathbf{C}(q, \dot{q})r \\ &= -\mathbf{C}(q, s)(s + 2\dot{q}_r) + \mathbf{C}(q, s + \dot{q}_r)r - \mathbf{C}(q, \dot{q})r \\ &= -\mathbf{C}(q, s + 2\dot{q}_r)s + \mathbf{C}(q, s + \dot{q}_r)r - \mathbf{C}(q, \dot{q})r \end{aligned} \quad (3.42)$$

Sustituyendo (3.42) en (3.41) se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{r}} = & -\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{r} - \mathbf{H}_{rd}\mathbf{r} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{s} + 2\dot{\mathbf{q}}_r)\mathbf{s} \\ & + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{s} + \dot{\mathbf{q}}_r)\mathbf{r} - \mathbf{K}_{DR}\mathbf{s} + \mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q})\Delta\lambda \end{aligned} \quad (3.43)$$

### 3.2.1 Prueba de convergencia

Sea

$$\mathbf{x} \triangleq [\mathbf{s}^T \quad \mathbf{r}^T]^T, \quad (3.44)$$

el vector de estados asociado al sistema en lazo cerrado (3.32) y (3.43). La idea principal del diseño control-observador es demostrar que cuando  $\|\mathbf{x}\|$  tiende a cero, los errores de seguimiento  $\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, \Delta\mathbf{p}, \Delta\dot{\mathbf{p}} \text{ y } \Delta\lambda$  y los de observación  $\mathbf{z}$  y  $\dot{\mathbf{z}}$  tenderán todos a cero también. De (3.20) es obvio que si  $\mathbf{r}$  está acotada y tiende a cero, así lo harán  $\mathbf{z}$  y  $\dot{\mathbf{z}}$ . Pero esto no es claro para las otras variables. El Lema 3.1 muestra que realmente es el caso bajo algunas condiciones.

**Lema 3.1** *Si  $\mathbf{x}$  está acotada por  $x_{\max}$  y tiende a cero, entonces los siguientes hechos se satisfacen:*

- $\Delta\mathbf{p}$  y  $\Delta\dot{\mathbf{p}}$  permanecen acotadas y tienden a cero.
- $\tilde{\mathbf{q}}$  y  $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}$  permanecen acotadas. Si la cota  $x_{\max}$ , para  $\|\mathbf{x}\|$  se elige suficientemente pequeña para garantizar que  $\|\tilde{\mathbf{q}}\| \leq \eta$  para toda  $t$ , con  $\eta$  una constante positiva suficientemente pequeña, entonces  $\tilde{\mathbf{q}}$  y  $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}$  tenderán a cero también.
- Si, además, el vector de velocidad  $\dot{\mathbf{q}}$  está acotado, entonces  $\Delta\lambda$  permanecerá acotada y tenderá a cero.

△

La prueba del lema se encuentra en el Apéndice B. La principal conclusión es que si  $\mathbf{x}$  está acotada, también lo están  $\mathbf{s}$  y  $\mathbf{r}$ . Aún más,  $\mathbf{s}$  y  $\mathbf{r}$  tenderán a cero si  $\mathbf{x}$  lo hace. De hecho cualquier otra señal de error estará acotada y tenderá a cero.

Es interesante notar que, si  $\|\mathbf{x}\|$  está acotada por  $x_{\max}$ , entonces siempre es posible encontrar una cota para  $\mathbf{e}(\mathbf{r})$  en (3.25) la cual satisfaga

$$\|\mathbf{e}(\mathbf{r})\| \leq M_e(x_{\max})\|\mathbf{r}\| < \infty. \quad (3.45)$$

Considérese ahora la siguiente función candidata de Lyapunov para el sistema (3.32) y (3.43)

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{M}\mathbf{x} \quad (3.46)$$

donde  $\mathbf{M} \triangleq$  bloque  $\text{diag}\{\mathbf{H}(\mathbf{q}) \ \mathbf{H}(\mathbf{q})\}$ , y  $V(\mathbf{x})$  satisface

$$\lambda_1 \|\mathbf{x}\|^2 \leq V(\mathbf{x}) \leq \lambda_2 \|\mathbf{x}\|^2, \quad (3.47)$$

con

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\triangleq \frac{1}{2} \min_{\forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n} \lambda_{\min}(\mathbf{M}) \\ \lambda_2 &\triangleq \frac{1}{2} \max_{\forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n} \lambda_{\max}(\mathbf{M}), \end{aligned} \quad (3.48)$$

Supóngase que se puede encontrar una región de atracción

$$S_a = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| \leq a\} \quad (3.49)$$

donde la derivada de  $V(\mathbf{x})$  cumple  $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$  con  $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$  si y solo si  $\mathbf{x} = 0$ . Si  $a$  es elegida tal que  $\|\mathbf{x}\| \leq x_{\max}$  sea válido para todo tiempo y  $x_{\max}$  es suficientemente pequeño en el sentido del Lema 3.1, entonces de la discusión previa se puede concluir la convergencia a cero de todas las señales de error. El Teorema 3.1 establece las condiciones para los parámetros del controlador-observador para garantizar la convergencia.

**Teorema 3.1** *Considérese el sistema dinámico descrito por (3.1) y (3.6), en lazo cerrado con la ley de control (3.26) y el observador (3.33)-(3.34), donde  $\mathbf{q}_d$  y  $\mathbf{p}_d$  son las posiciones deseadas y acotadas de las articulaciones y de la restricción, con derivadas  $\dot{\mathbf{q}}_d$ ,  $\ddot{\mathbf{q}}_d$ ,  $\dot{\mathbf{p}}_d$  y  $\ddot{\mathbf{p}}_d$  acotadas también, y satisfacen la restricción (3.2). Considérese también (3.48) y la región de atracción definida por (3.49), donde la cota  $a$  se elige de acuerdo con*

$$a \leq \frac{\eta\alpha}{(1 + \sqrt{n})} \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \quad (3.50)$$

con  $\alpha \triangleq k - |k - \beta| - \gamma > 0$ . Entonces, los errores de seguimiento, observación y fuerza permanecerán acotados y presentarán una dinámica asintóticamente estable, i.e.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{q}} &= 0 & \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} &= 0 & \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{z} &= 0 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\tilde{\mathbf{z}}} &= 0 & \lim_{t \rightarrow \infty} \Delta\lambda &= 0, \end{aligned} \quad (3.51)$$

si las siguientes condiciones son satisfechas

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(\mathbf{K}_R) &= \delta_1 - \mu_1 + 1 \\ k_d &= \frac{\lambda_{\max}(\mathbf{K}_R) + \omega}{\lambda_h} \end{aligned} \quad (3.52)$$

donde  $\omega = \mu_2 + \xi_2 + \frac{1}{4}(\lambda_H M_e(x_{\max}) + \lambda_D + \mu_3 + \xi_1)^2 + \delta_2$ , donde  $\delta_1$  y  $\delta_2$  son constantes positivas y

$$\mu_1 \triangleq \max_{\|x\| \leq x_{\max}} \|C(q, \dot{q}_r)\| \quad (3.53)$$

$$\mu_2 \triangleq \max_{\|x\| \leq x_{\max}} \|C(q, s + \dot{q}_r)\| \quad (3.54)$$

$$\mu_3 \triangleq \max_{\|x\| \leq x_{\max}} \|C(q, s + 2\dot{q}_r)\| \quad (3.55)$$

$$\mu_4 \triangleq M_e(x_{\max})\lambda_H \quad (3.56)$$

$$\lambda_D \triangleq \lambda_{\max}(D) \quad (3.57)$$

$$x_{\max} = a \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \quad (3.58)$$

$$c_1 = \max_{\forall q \in \mathbb{R}^n} \|J_\varphi(q)\| \quad (3.59)$$

$$c_2 = \max_{\forall q \in \mathbb{R}^n} \|R^{-1}(q)\| \quad (3.60)$$

$$c_3 = c_1 \sigma_H (\mu_3 + \lambda_{\max}(K_R) + \lambda_D) \quad (3.61)$$

$$c_4 = \max_{\forall q \in \mathbb{R}^n} \|J_\varphi(q)\| \quad (3.62)$$

$$\sigma_H \triangleq \max \lambda_{\max}(H^{-1}(q)) \quad (3.63)$$

$$\xi_1 \triangleq c_1 c_2 (c_3 + c_4) \quad (3.64)$$

$$\xi_2 \triangleq c_1^2 c_2 (\sigma_H \lambda_{\max}(K_R) + M_e(x_{\max})) \quad (3.65)$$

donde se está haciendo uso de (3.45) y de las Propiedades 2.1 y 2.4

△

La prueba del Teorema 3.1 se desarrolla en el Apéndice C. Es importante mencionar que el resultado del Teorema 3.1 es solamente local. Esto es para garantizar la convergencia a cero de los errores de seguimiento  $\tilde{q}$  y  $\tilde{\dot{q}}$ . Sin embargo, esto no representa un serio inconveniente puesto que para la sujeción de objetos (grasping) es usual programar trayectorias suaves con errores de posición inicial igual a cero.

# Capítulo 4

## Resultados experimentales

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos al implementar el algoritmo de control propuesto en el Capítulo 3, en un robot industrial para que realizara seguimiento de fuerza y posición simultáneamente.

### 4.1 Descripción del equipo experimental

El equipo experimental disponible en el Laboratorio de Robótica del Posgrado de la Facultad de Ingeniería comprende dos robots industriales de la marca canadiense CRS Robotics adaptados para comprobar algoritmos de control de alto nivel (Figura 4.1).

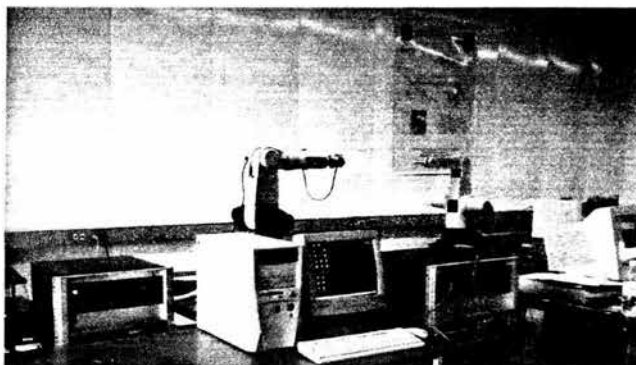


Figura 4.1: Sistema experimental del laboratorio de robótica del Posgrado de la Facultad de Ingeniería

Para la realización de los experimentos se utilizó el robot A465 de 6 grados de



libertad. Este manipulador tiene articulaciones de revolución actuadas por motores de CD vía un juego de engranes; la posición de cada articulación es proporcionada por codificadores ópticos (encoders).

El A465 es controlado por una combinación de una tarjeta de adquisición de datos PCI-FlexMotion-6C de *National Instruments* y una unidad de acondicionamiento de señales C500. Los algoritmos de control son programados en una computadora PC pentium 4 a 1.5 GHz con un tiempo de muestreo de 5ms. La arquitectura abierta del sistema experimental permite la evaluación de algoritmos de control avanzados. El lenguaje de programación utilizado es LabWindows/CVI, que es de alto nivel y parecido al C. Permite manipular de forma directa las tarjetas de adquisición de datos (Castillo-Sánchez 2002).

Un sensor de fuerza/torque de seis ejes de la marca JR3 modelo 67M25A 63N4, con un rango de fuerza máximo de  $\pm 100N$  está montado en el efector final del robot. El sensor está protegido con un switch de presión neumático SR45 de *ATI Industrial Automation*. El sensor está conectado a la PC por medio de una tarjeta-interfaz paralela la cual provee la lectura de seis componentes de la fuerza generalizada a 1ms.

El tipo de entorno considerado para comprobar el algoritmo de control consiste de una superficie de restricción plana. La Figura 4.2 muestra el sistema de un sólo robot con una restricción en  $x$ .

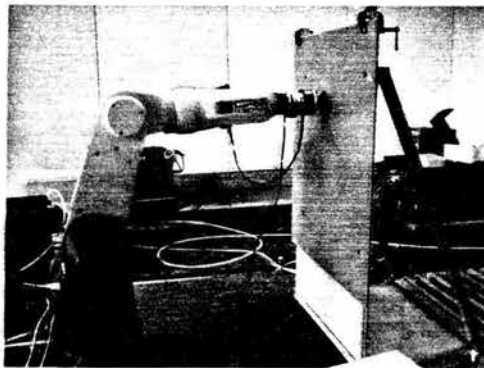


Figura 4.2: Sistema experimental con movimiento restringido.

## 4.2 Resultados y condiciones de las pruebas

Aunque el robot A465 tiene 6 grados de libertad; solamente las 3 primeras articulaciones son usadas para el experimento, mientras que el resto están bloqueadas mecánicamente. La dinámica de los actuadores fue incluida para implementar la ley de control y el observador.

El marco de referencia del sistema completo está en la base del robot A465, con una restricción de movimiento en el eje  $x$ . Si la tarea consiste en seguir una trayectoria de posición deseada sobre la superficie y presionar con una fuerza pre-determinada, entonces la restricción en coordenadas cartesianas está dada por

$$\varphi = x - b = 0, \quad (4.1)$$

para  $b$  como una constante positiva. Las trayectorias deseadas están definidas por

$$x_d = 0.529 \text{ [m]} \quad 5s \leq t \leq 65s \quad (4.2)$$

$$y_d = \begin{cases} 0.0 \text{ [m]} & 5s \leq t < 10s \\ 0.0125 \sin(\omega(t - t_i)) \text{ [m]} & 10s \leq t < 60s \\ 0.0 \text{ [m]} & 60s \leq t < 65s \end{cases} \quad (4.3)$$

$$z_d = \begin{cases} 7.5 \times 10^{-6}(t - 5)^5 - 1.875 \times 10^{-4}(t - 5)^4 + 1.25 \times 10^{-3}(t - 5)^3 + 0.51 \text{ [m]} & 5s \leq t < 10s \\ 0.635 + 0.0125 \cos(\frac{5\pi}{80}(t - 15)) - 0.0125 \text{ [m]} & 10s \leq t < 60s \\ -7.5 \times 10^{-6}(t - 60)^5 + 1.875 \times 10^{-4}(t - 60)^4 - 1.25 \times 10^{-3}(t - 60)^3 + 0.635 \text{ [m]} & 60s \leq t < 65s \end{cases} \quad (4.4)$$

Nótese que la cinemática inversa del manipulador tiene que ser empleada para calcular  $q_d$ . Estas trayectorias son válidas de un tiempo inicial  $t_i$  hasta un tiempo final  $t_f$ , mientras que  $\omega$  es un polinomio de quinto orden diseñado para satisfacer que  $\omega(t_i) = \omega(t_f) = 0$  y las derivadas de  $\omega$  sean cero en  $t_i$  y  $t_f$ . Eligiendo adecuadamente (4.2)-(4.4), el robot hará un círculo en el plano  $y - z$ . El manipulador es controlado sin consideración de la fuerza hasta que se encuentra en contacto con la superficie en (0.529, 0.0, 0.51) [m]. La fuerza deseada está dada por

$$\lambda_d = \begin{cases} 0.0048(t - 5)^5 - 0.12(t - 5)^4 + 0.8(t - 5)^3 & 5s \leq t < 15s \\ 60 + 20 \cos(\frac{5\pi}{80}(t - 15)) & 15s \leq t < 55s \\ 60.0 - 6.0(t - 55); & 55s \leq t < 65s \end{cases} \quad (4.5)$$

Los parámetros de la ley de control y el observador son  $\mathbf{K}_R = \text{diag}\{60 \ 70 \ 70\}$ ,  $\Lambda = 22\mathbf{I}$ ,  $k_d = 10$ . El experimento dura 70s. El manipulador hace contacto con la restricción en  $t = 5s$ ; antes el robot se encuentra en movimiento libre. La ley de control (3.26) y el observador (3.33)-(3.34) son usados con la parte de fuerza colocada en cero (*i.e.*  $\mathbf{Q}(q) = \mathbf{I}$  y  $\mathbf{J}_\varphi(q) = \mathbf{O}$ ). Es fácil probar que este esquema de control es estable para movimiento no-restringido. De  $t = 5s$  a  $t = 10s$  el efector final del manipulador es llevado a la posición inicial para realizar el círculo. De  $t = t_i = 5s$  a  $t = t_f = 65s$  el término de control de fuerza es activado, *i.e.*, el esquema completo control-observador presentado en la Sección 3 se utiliza sólo durante este periodo de

tiempo. De  $t = 65s$  a  $t = 70s$  el robot regresa a su posición inicial. En adelante, solamente se tratará el periodo de tiempo  $t = [5, 65]s$

Ahora, se presentan las gráficas obtenidas durante el experimento de validación. En la Figura 4.4 se muestran los errores de seguimiento de posición en coordenadas de las articulaciones, y en la Figura 4.6 se muestran en coordenadas cartesianas. Se puede apreciar que estos errores son relativamente grandes, aproximadamente  $\pm 3.8mm$ . Esto es principalmente por el hecho de que es requerido un conocimiento exacto de la dinámica del manipulador, mientras que los modelos usados en los experimentos no son precisos. Por otro lado, para la fuerza deseada (4.5) el resultado puede ser considerado bueno (Figura 4.7) en comparación con el algoritmo presentado en Queiroz *et al.* (1997), donde se presenta un porcentaje de error promedio del 15%, mientras que el error de fuerza obtenido en esta tesis representa el 10% promedio. Además, existen otras causas que permiten deducir un mejor desempeño del controlador: 1) el experimento se realizó en tres dimensiones, en (Queiroz *et al.* 1997) se presentan resultados en 2D solamente; 2) el manipulador utilizado es industrial y no experimental y; 3) el tiempo de muestreo de 5ms del sistema es grande considerando el tipo de dinámica. Como se puede apreciar en la Figura 4.8, los errores de observación son bastante buenos, presumiblemente porque el observador usa poca información de la dinámica del robot. Esto confirma que el error de seguimiento puede ser reducido considerando un modelo más exacto del manipulador o modificando la ley de control para tener en cuenta incertidumbres paramétricas. Finalmente, la Figura 4.9 muestra los voltajes de control. En esta última gráfica se puede apreciar que no existen problemas de saturación.

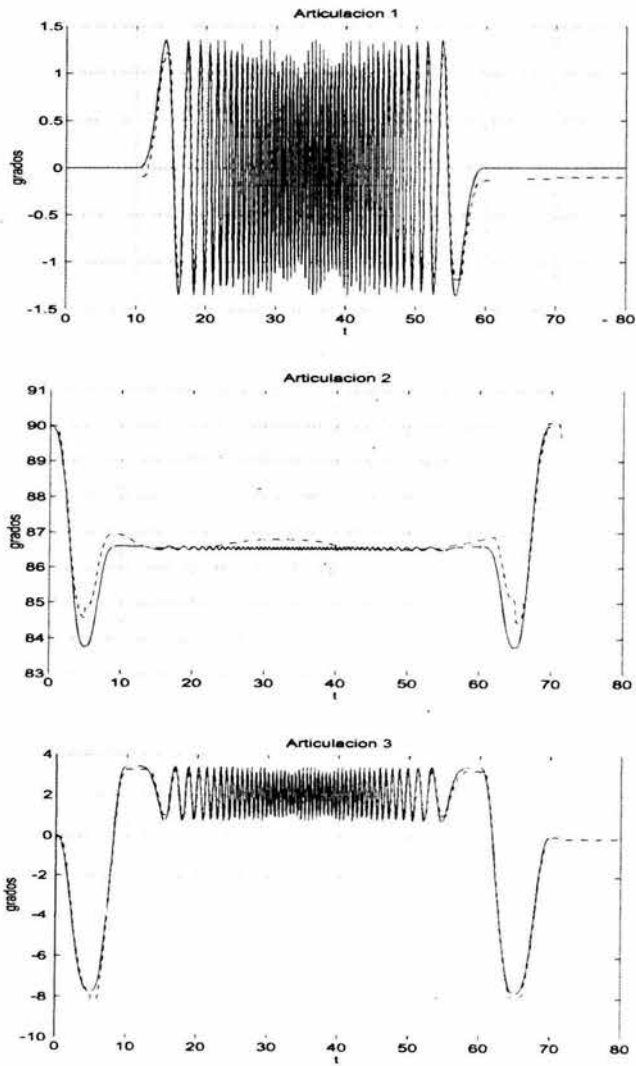


Figura 4.3: Trayectoria deseada (—) vs trayectoria real (- -) de las articulaciones del robot A465.

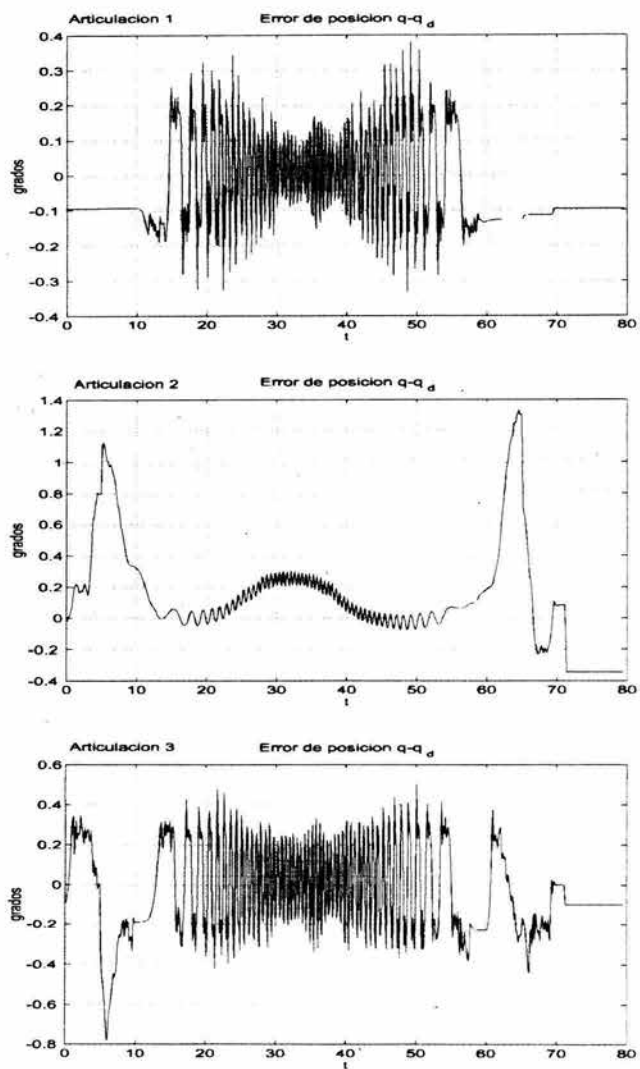


Figura 4.4: Error de seguimiento en coordenadas de las articulaciones para el robot A465.

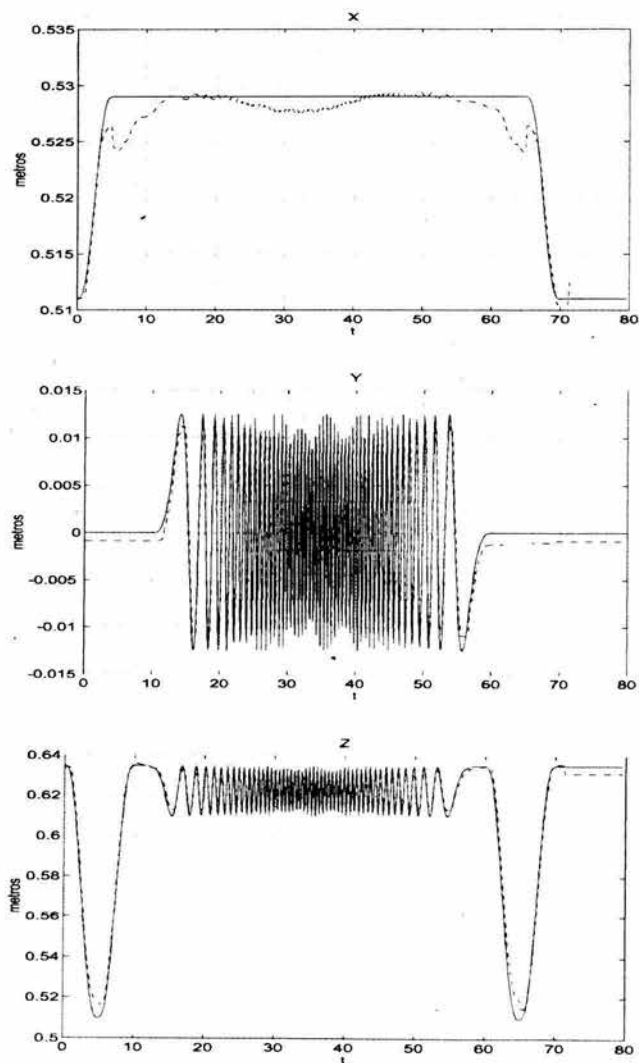


Figura 4.5: Trayectoria deseada (—) vs trayectoria real (- -) en coordenadas rectangulares del robot A465.

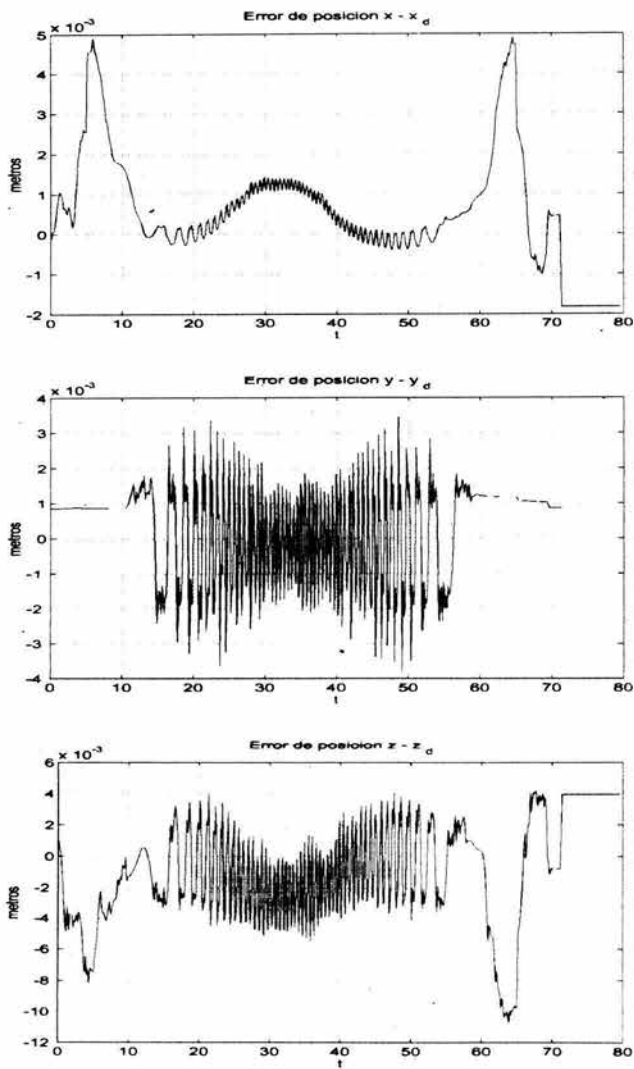


Figura 4.6: Errores de seguimiento en coordenadas rectangulares para el robot A465.

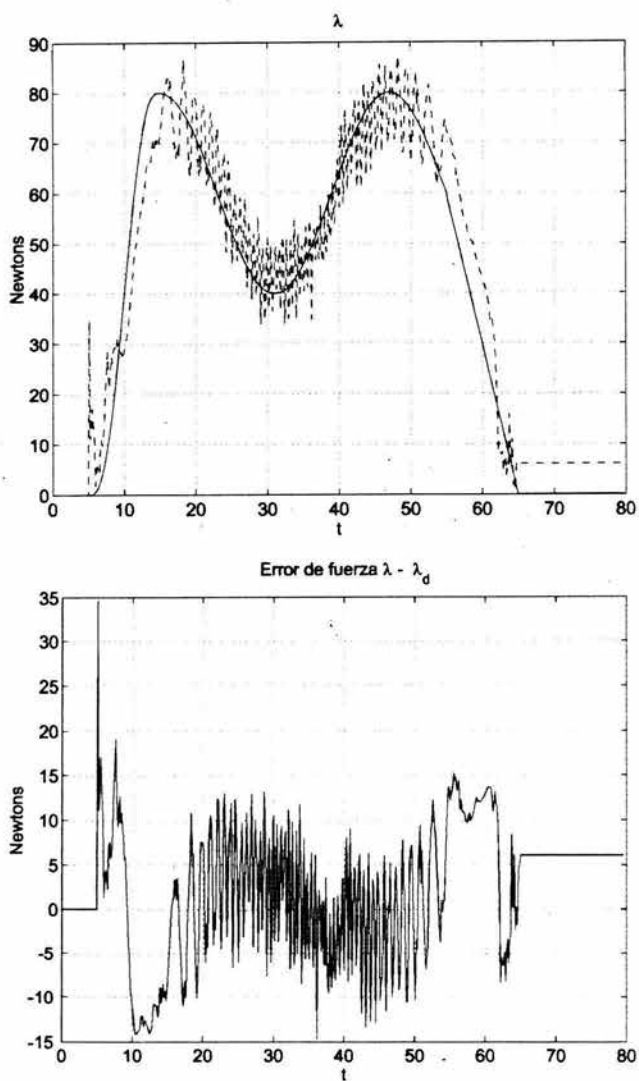


Figura 4.7: Fuerza deseada (—) vs fuerza real (- - -) en el punto de contacto y su correspondiente error de seguimiento.



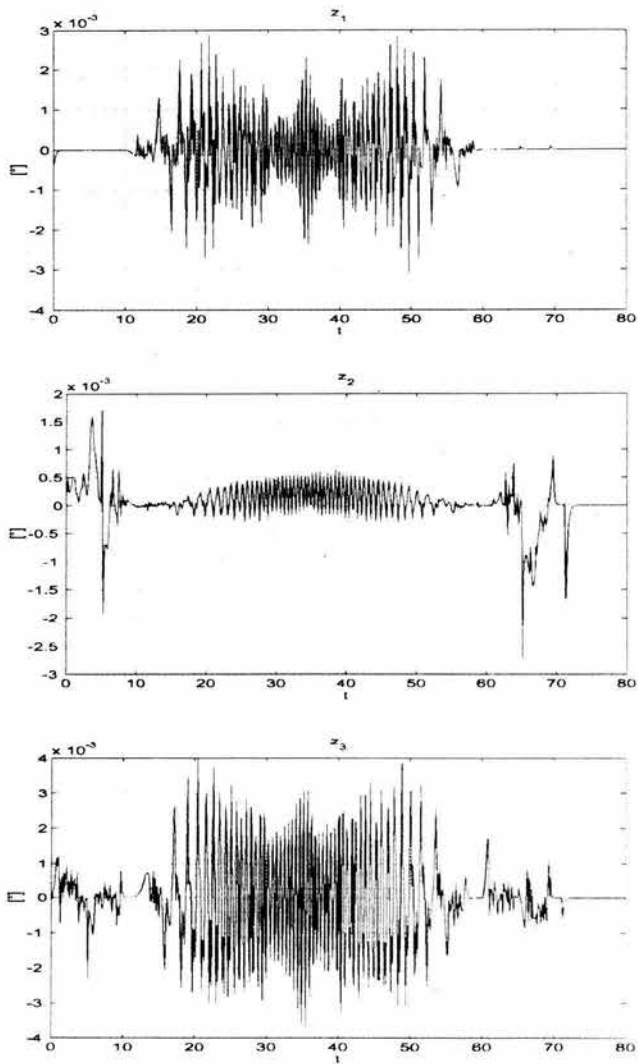


Figura 4.8: Errores de observación.

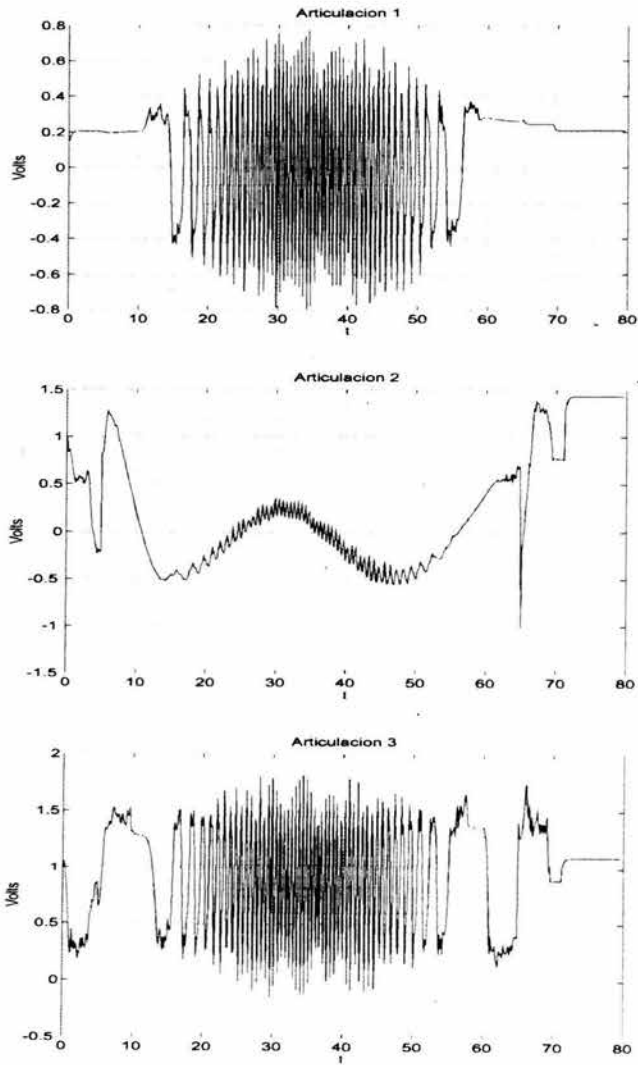


Figura 4.9: Voltaje de control para las articulaciones del robot A465.

# Capítulo 5

## Conclusiones

En esta tesis se presenta un algoritmo de control de posición/fuerza para robots manipuladores en movimiento restringido. El algoritmo propuesto se compone de un controlador-observador que permite el uso de la posición en las articulaciones como única retroalimentación.

A pesar de la incertidumbre paramétrica y de la carencia de medición de velocidad y fuerza, el controlador presenta resultados locales de estabilidad asintótica. Pese a que el análisis de estabilidad es complejo, el controlador y en especial el observador no lo son. Esto es debido a que se utiliza el principio de ortogonalización para diseñar el control y poder separar el seguimiento de fuerza y posición.

Se llevaron a cabo experimentos para probar el desempeño del algoritmo propuesto, consiguiendo seguimiento de posición y fuerza simultáneamente. Los experimentos se realizaron en un manipulador industrial, teniendo resultados en general buenos. El tiempo de muestreo de 5ms es uno de los principales obstáculos en el desempeño del algoritmo. Utilizando simulaciones, se puede demostrar que la disminución del tiempo de muestreo mejora considerablemente el desempeño, permitiendo una mejor sintonización de las ganancias.

El trabajo futuro comprende la modificación del algoritmo presentado para tomar en cuenta inexactitudes en el modelo dinámico del manipulador y la fricción en el punto de contacto. Además, se debe considerar la ejecución del algoritmo en un sistema con menor tiempo de muestreo para validar las simulaciones.

# Apéndice A

## Modelo dinámico del robot A465

En este apéndice se describe el modelo dinámico para el robot A465 de la marca canadiense CRS Robotics. El robot A465 es un robot de 6 grados de libertad con motores de corriente directa como actuadores. En primer lugar se obtendrá el modelo cinemático directo e inverso y, posteriormente se obtendrá el modelo dinámico del robot sin restricción.

### A.1 Cinemática directa del robot A465

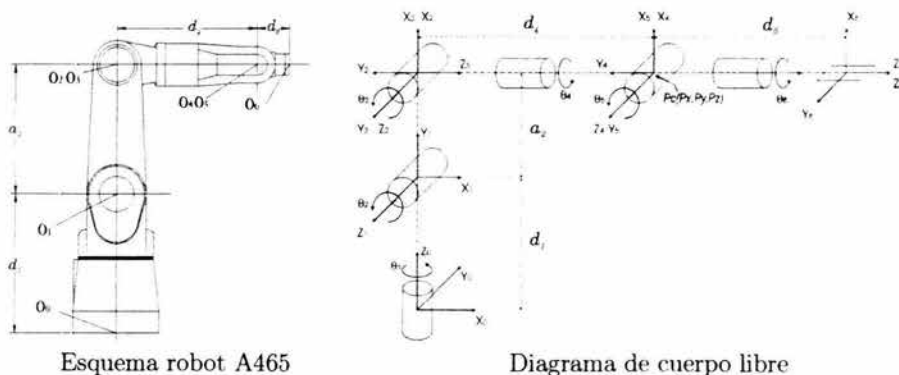


Figura A.1: Esquema y diagrama de cuerpo libre para el robot A465.

El problema de la cinemática directa es determinar la posición del *efector final* de acuerdo a la posición angular que tiene cada una de las articulaciones de los robots. La forma más común de representar la cinemática directa es a través de una matriz

A	1	2	3	4	5	6
$a_i$ (metros)	0	0.305	0	0	0	0
$d_i$ (metros)	0.330	0	0	0.330	0	0.076

Tabla A.1: Parámetros del robot A465.

de transformación homogénea  ${}^0T_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , donde  $n$  es el número de articulaciones del robot. La matriz  ${}^0T_n$  esta definida como:

$${}^0T_n = {}^0A_1 {}^1A_2 \dots {}^{i-1}A_i$$

donde  ${}^{i-1}A_i$  con  $i = 1, 2, \dots, n$ , es la matriz homogénea que transforma las coordenadas de un punto del sistema de coordenadas  $i$  al sistema  $i - 1$ . La Figura A.1 muestra un esquema del robot y su correspondiente diagrama de cuerpo libre. La Tabla A.1 muestra los parámetros del diagrama de cuerpo libre. Para obtener las matrices de transformación del robot A465 se utilizó el algoritmo de Denavit-Hartenberg (Spong y Vidyasagar 1989). Las matrices de transformación homogénea quedan como sigue

$$\begin{aligned}
 {}^0A_1 &= \begin{bmatrix} C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} &
 {}^1A_2 &= \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & a_2 C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & a_2 S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 {}^2A_3 &= \begin{bmatrix} C_3 & 0 & S_3 & 0 \\ S_3 & 0 & -C_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} &
 {}^3A_4 &= \begin{bmatrix} C_4 & 0 & -S_4 & 0 \\ S_4 & 0 & C_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 {}^4A_5 &= \begin{bmatrix} C_5 & 0 & S_5 & 0 \\ S_5 & 0 & -C_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} &
 {}^5A_6 &= \begin{bmatrix} C_6 & -S_6 & 0 & 0 \\ S_6 & C_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

con:  $S_i = \sin(\theta_i)$  y  $C_i = \cos(\theta_i)$

## A.2 Cinemática inversa del robot A465

El problema de la cinemática inversa es determinar los ángulos de cada una de las articulaciones de los robots a partir de la posición del *efector final*, en coordenadas

rectangulares ( $X, Y, Z$ ). La cinemática inversa para el robot A465 puede ser dividida en dos problemas independientes: posición inversa y orientación inversa. El procedimiento es descrito a continuación.

### Posición Inversa

La posición del *efector final* en el robot está determinada por las tres primeras articulaciones. Recordando la Figura A.1 el valor de  $\mathbf{P}_c$  se calcula como:

$$\mathbf{P}_c = \mathbf{d} - d_6 \mathbf{R} \mathbf{k}$$

donde:

$$\mathbf{P}_c = [P_x \ P_y \ P_z]^T$$

$\mathbf{d}$ : posición deseada del *efector final* medido desde la base del robot.

$d_6$ : distancia entre el *efector final* y el centro de la muñeca del robot A465.

$\mathbf{R}$ : matriz que denota la orientación deseada del *efector final* con respecto al sistema de coordenadas  $0X_0Y_0Z_0$ .

$$\mathbf{k} = [0 \ 0 \ 1]^T$$

Utilizando el procedimiento descrito en Spong y Vidyasagar (1989) para obtener la cinemática inversa se obtiene

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \arctan\left(\frac{P_y}{P_x}\right) \\ \theta_2 &= \arctan\left(\frac{P_z - d_1}{\sqrt{P_x^2 + P_y^2}}\right) - \arctan\left(\frac{d_4 \sin \theta'_3}{a_2 + d_4 \cos \theta'_3}\right) \\ \theta_3 &= \theta'_3 + \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

con:

$$\begin{aligned}\theta'_3 &= \arctan\left(\frac{\pm\sqrt{1-D^2}}{D}\right) \\ D &\triangleq \frac{(P_x - d_1)^2 + P_y^2 + P_z^2 - a_2^2 - d_4^2}{2a_2d_4}\end{aligned}$$

### Orientación Inversa

La orientación del *efector final* está determinada por las tres últimas articulaciones en el robot A465. Para encontrar  $\theta_4$ ,  $\theta_5$  y  $\theta_6$  se toma en cuenta que:

$${}^0\mathbf{R}_6 = {}^0\mathbf{R}_1 {}^1\mathbf{R}_2 {}^2\mathbf{R}_3 {}^3\mathbf{R}_4 {}^4\mathbf{R}_5 {}^5\mathbf{R}_6 = \mathbf{R} = {}^0\mathbf{R}_3 {}^3\mathbf{R}_6 \quad (\text{A.1})$$

donde:

$${}^0\mathbf{R}_3 = {}^0\mathbf{R}_1 {}^1\mathbf{R}_2 {}^2\mathbf{R}_3$$

$${}^3\mathbf{R}_6 = {}^3\mathbf{R}_4 {}^4\mathbf{R}_5 {}^5\mathbf{R}_6$$

Despejando  ${}^3\mathbf{R}_6$  de (A.1) se tiene

$$\mathbf{U} \triangleq {}^3\mathbf{R}_6(\theta_4, \theta_5, \theta_6) = {}^0\mathbf{R}_3^T \mathbf{R} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

La matriz  ${}^3\mathbf{R}_6$  es calculada con la ayuda de los resultados obtenidos de la cinemática directa, por lo tanto se obtiene

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6 & -C_4 C_5 S_6 - S_4 C_6 & C_4 S_5 \\ S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6 & -S_4 C_5 S_6 + C_4 C_6 & S_4 S_5 \\ -S_5 C_6 & S_5 S_6 & C_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

A partir de la ecuación (A.3) se calculará los ángulos  $\theta_4$ ,  $\theta_5$  y  $\theta_6$  para el robot

- Si  $u_{13}$  y  $u_{23} \neq 0 \Rightarrow u_{33} \neq \pm 1$

$$\theta_5 = \arctan\left(\frac{\pm\sqrt{1-u_{33}^2}}{u_{33}}\right)$$

Se observa que  $\theta_4$  y  $\theta_6$  dependen del signo que se elija para el radical en  $\theta_5$

Si se elige (+) se tiene:

$$\theta_4 = \arctan\left(\frac{u_{23}}{u_{13}}\right)$$

$$\theta_6 = \arctan\left(\frac{u_{32}}{-u_{31}}\right)$$

Si se elige (-) se tiene:

$$\theta_4 = \arctan\left(\frac{-u_{23}}{-u_{13}}\right)$$

$$\theta_6 = \arctan\left(\frac{-u_{32}}{u_{31}}\right)$$

- Si  $u_{33} = 1 \Rightarrow \theta_5 = 0 \quad \therefore \sin(\theta_5) = 0 ; \cos(\theta_5) = 1$   
 $\Rightarrow \theta_4 + \theta_6 = \arctan\left(\frac{u_{21}}{u_{22}}\right) = \arctan\left(\frac{-u_{12}}{u_{11}}\right) = \arctan\left(\frac{u_{21}}{u_{11}}\right) = \arctan\left(\frac{-u_{12}}{u_{22}}\right)$

Por convención se tiene  $\theta_4 \triangleq 0$ , entonces

$$\theta_6 = \arctan\left(\frac{u_{21}}{u_{22}}\right) = \arctan\left(\frac{-u_{12}}{u_{11}}\right) = \arctan\left(\frac{u_{21}}{u_{11}}\right) = \arctan\left(\frac{-u_{12}}{u_{22}}\right)$$

- Si  $u_{33} = -1 \Rightarrow \theta_5 = \pi \quad \therefore \sin(\theta_5) = 0 ; \cos(\theta_5) = -1$

$$\Rightarrow \theta_4 - \theta_6 = \arctan\left(\frac{-u_{21}}{u_{22}}\right) = \arctan\left(\frac{-u_{12}}{-u_{11}}\right) = \arctan\left(\frac{-u_{21}}{-u_{11}}\right) = \arctan\left(\frac{-u_{12}}{u_{22}}\right)$$

Por convención se tiene  $\theta_4 \triangleq 0$ , entonces

$$\theta_6 = \arctan\left(\frac{-u_{21}}{u_{22}}\right) = \arctan\left(\frac{-u_{12}}{-u_{11}}\right) = \arctan\left(\frac{-u_{21}}{-u_{11}}\right) = \arctan\left(\frac{-u_{12}}{u_{22}}\right)$$

### A.3 Modelo dinámico

Utilizando la formulación de Euler-Lagrange, la ecuación dinámica de movimiento de un manipulador de  $n$  grados de libertad esta dada por la ecuación (A.4). Es importante mencionar que el modelo dinámico del robot A465 se obtuvo considerando el manipulador con tres grados de libertad solamente.

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad (\text{A.4})$$

donde:

$\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n$ : vector de fuerzas o momentos generalizados.

$\mathbf{H}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ : matriz de inercia generalizada.

$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$ : vector de fuerzas centrífugas y de Coriolis.

$\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ : términos disipativos.

$\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$ : vector de términos gravitacionales.

$$\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$$

$$\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n = [\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n]^T$$

$$\ddot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n = [\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \dots, \ddot{q}_n]^T$$

$n$ : grados de libertad

#### Matriz $\mathbf{H}(\mathbf{q})$

La matriz  $\mathbf{H}(\mathbf{q})$  esta definida por:



$$\mathbf{H}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

donde:

$$h_{11} = 0.72899 + 0.36865 \cos(2q_2) + 0.36987 \sin(q_3) + 0.36987 \sin(2q_2 + q_3) - 0.162177 \cos(2q_3 + 2q_2)$$

$$h_{12} = 0$$

$$h_{13} = 0$$

$$h_{21} = 0$$

$$h_{22} = 1.08725 + 6.0 \times 10^{-11} \cos(2q_2) + 0.739747 \sin(q_3)$$

$$h_{23} = 0.36987 \sin(q_3) + 0.34077$$

$$h_{31} = 0$$

$$h_{32} = 0.36987 \sin(q_3) + 0.34077$$

$$h_{33} = .34077$$

### Matriz $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$

La matriz  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  está definida como

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

Los elementos de  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  están definidos como:

$$C_{11} = (-0.369 \sin(2q_2) + 0.1622 \sin(2q_3 + 2q_2) + 0.37 \cos(2q_2 + q_3)) \dot{q}_2 + (0.185 \cos(q_3) + 0.1622 \sin(2q_3 + 2q_2) + 0.185 \cos(2q_2 + q_3)) \dot{q}_3$$

$$C_{21} = (0.369 \sin(2q_2) - 0.1622 \sin(2q_3 + 2q_2) - 0.37 \cos(2q_2 + q_3)) \dot{q}_1$$

$$C_{31} = (-0.185 \cos(q_3) - 0.1622 \sin(2q_3 + 2q_2) - 0.185 \cos(2q_2 + q_3)) \dot{q}_1$$

$$C_{12} = (-0.369 \sin(2q_2) + 0.1622 \sin(2q_3 + 2q_2) + 0.37 \cos(2q_2 + q_3)) \dot{q}_1$$

$$C_{22} = -6 \times 10^{-11} \sin(2q_2) \dot{q}_2 + 0.37 \cos(q_3) \dot{q}_3$$

$$C_{32} = -0.37 \cos(q_3) \dot{q}_2$$

$$C_{13} = (0.185 \cos(q_3) + 0.1622 \sin(2q_3 + 2q_2) + 0.185 \cos(2q_2 + q_3)) \dot{q}_1$$

$$C_{23} = 0.37 \cos(q_3) \dot{q}_2 + 0.37 \cos(q_3) \dot{q}_3$$

$$C_{33} = 0.0$$

### Vector $g(q)$

El vector de términos gravitacionales esta definido como:

$$g(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ 24.7065 \cos(q_2) + 11.897 \sin(q_2 + q_3) \\ 11.897 \sin(q_2 + q_3) \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

### Términos disipativos $D$ y $F_c$

La fricción viscosa en el modelo del robot es el término  $D\dot{q}$ , donde  $D \in \mathbf{R}^{n \times n}$  es una matriz constante positiva definida, en general diagonal. Por dar un aproximado, se asumirá que  $D$  se obtiene de los valores de los motores de las articulaciones, en general es mayor el valor ya que se debe sumar la fricción de los motores con los del propio robot.

$$D\dot{q} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 3.5 & 0 \\ 0 & 0 & 3.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix}$$

El término de fricción de Coulomb  $F_c(\dot{q}) \in \mathbf{R}^n$ , esta definido como:

$$F_c(\dot{q}) = \begin{bmatrix} f_{c1} \text{sign}(\dot{q}_1) \\ f_{c2} \text{sign}(\dot{q}_2) \\ f_{c3} \text{sign}(\dot{q}_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.0821 \text{sign}(\dot{q}_1) \\ 3.97254 \text{sign}(\dot{q}_2) \\ 8.7074 \text{sign}(\dot{q}_3) \end{bmatrix}$$

Cabe hacer notar que para el análisis de estabilidad del algoritmo de control propuesto el término de fricción de Coulomb no es considerado. La fricción de Coulomb es compensada al implementar el algoritmo en el sistema experimental.

#### A.3.1 Introducción de la dinámica de los motores al modelo del robot

Aunque ya se han definido cada uno de los componentes de la ecuación (A.4), aún falta incluir la dinámica de los actuadores para tener un modelo completo del sistema. En este caso particular se trata de motores de CD con imán permanente. El procedimiento mostrado a continuación se describe en Kelly (1989), la ecuación (A.8) describe la dinámica de un motor de CD.

$$J_m \ddot{q} + f_m \dot{q} + \frac{K_a K_b}{R_a} \dot{q} + \frac{\tau}{r^2} = \frac{K_a}{r R_a} v \quad (\text{A.8})$$

donde:

$J_m$ : inercia del rotor.

$f_m$ : coeficiente de amortiguamiento debido a la fricción.

$K_a$ : constante motor-par (Nm/A)

$K_b$ : constante de contrareacción electromotriz (Vs)

$R_a$ : resistencia de armadura

$\tau$ : par neto aplicado después del juego de engranes sobre el eje de la carga.

$r$ : relación de reducción de los engranes.

Despejando  $\tau$  tenemos:

$$\tau = \left( -J_m \ddot{q} - f_m \dot{q} - \frac{K_a K_b}{R_a} \dot{q} + \frac{K_a}{r R_a} v \right) r^2 \quad (\text{A.9})$$

Ahora permita hacer las siguientes definiciones:

$$M_a = J_m r^2 \quad (\text{A.10})$$

$$M_b = f_m r^2 + \frac{K_a K_b}{R_a} r^2 \quad (\text{A.11})$$

$$M_c = \frac{K_a}{R_a} r \quad (\text{A.12})$$

Sustituyendo (A.10), (A.11) y (A.12) en (A.9) se obtiene

$$\tau = -M_a \ddot{q} - M_b \dot{q} + M_c v \quad (\text{A.13})$$

La ecuación (A.13) es la expresión correspondiente a un sólo motor, la extensión a  $n$  motores desacoplados es inmediata definiendo:

$$M_a = \text{diag} \{ J_{m_i} r_i^2 \} = \begin{bmatrix} 0.90352 & 0 & 0 \\ 0 & 0.90352 & 0 \\ 0 & 0 & 0.90352 \end{bmatrix} \quad (\text{A.14})$$

$$M_b = \text{diag} \left\{ \left( f_{m_i} + \frac{K_{a_i} K_{b_i}}{R_{a_i}} \right) r_i^2 \right\} = \begin{bmatrix} 242.0336183 & 0 & 0 \\ 0 & 242.0336183 & 0 \\ 0 & 0 & 242.0336183 \end{bmatrix} \quad (\text{A.15})$$

$$M_c = \text{diag} \left\{ \frac{K_{a_i} \tau_i}{R_{a_i}} \right\} = \begin{bmatrix} 16.94047619 & 0 & 0 \\ 0 & 16.94047619 & 0 \\ 0 & 0 & 16.94047619 \end{bmatrix} \quad (\text{A.16})$$

con

Parámetro	Sistema Ingles		Sistema Internacional	
	Valor	Unidades	Valor	Unidades
$K_a$	1.26	$\left( \frac{\text{Lbf-in}}{\text{Amp}} \right)$	0.1423	$\left( \frac{\text{N-m}}{\text{Amp}} \right)$
$K_b$	14.9	$\left( \frac{\text{Volts}}{\text{KRPM}} \right)$	0.142285	$\left( \frac{\text{V-seg}}{\text{rad}} \right)$
$R_a$	0.84	$\Omega$	0.84	$\Omega$
$J_m$	0.0008	$(\text{Lbf-in} - \text{seg}^2)$	$9.035 \times 10^{-5}$	$(\text{N-m} - \text{seg}^2)$
$\tau$	100	—	100	—
$f_m$	0.09	$\left( \frac{\text{Lbf-in}}{\text{KRPM}} \right)$	$9.7064 \times 10^{-5}$	$\left( \frac{\text{N-m-seg}}{\text{rad}} \right)$

Tabla A.2: Parámetros obtenidos del manual de los motores para el robot A465.

#### Notas:

- Es importante notar que  $M_c$  es la matriz que transforma de voltaje a torque  $(N - m)$ .
- Los motores de las primeras articulaciones del robot A465 son idénticos, la Tabla A.2 lista los parámetros de los motores.

El modelo dinámico completo de un robot manipulador incorporando la dinámica de los actuadores se puede obtener reemplazando  $\tau$  de (A.13) en (A.4):

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = -\mathbf{M}_a\ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{M}_b\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{M}_c\mathbf{v} \quad (\text{A.17})$$

Agrupando términos se tiene la ecuación completa

$$(\mathbf{H}(\mathbf{q}) + \mathbf{M}_a)\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{D} + \mathbf{M}_b)\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{M}_c\mathbf{v} \quad (\text{A.18})$$

## Apéndice B

### Demostración del Lema 3.1

En este apéndice se prueba el Lema 3.1. Es importante tener en cuenta la suposición de que  $\mathbf{x} \triangleq [\mathbf{s}^T \ \mathbf{r}^T]^T$  está acotada y tiende a cero.

- a) Primero, se demostrará que  $\Delta \mathbf{p}$  y  $\Delta \dot{\mathbf{p}}$  están acotados para todo tiempo. Hay que hacer notar que esto se hace con el fin de formalizar la demostración, puesto que estos dos errores están siempre acotados en vista del hecho de que  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{p}_d$  son cero para las restricciones real y deseada.

De la ecuación (3.14) se tiene

$$\mathbf{s} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}) \left( \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \Lambda \tilde{\mathbf{q}} - \Lambda \mathbf{z} \right) + \mathbf{J}_\varphi^+(\mathbf{q}) (\Delta \dot{\mathbf{p}} + \beta \Delta \mathbf{p}). \quad (\text{B.1})$$

Multiplicando ambos lados de (B.1) por  $\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})$  se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})\mathbf{s} &= \underbrace{\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})\mathbf{Q}(\mathbf{q})}_{\mathbf{O}} \left( \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \Lambda \tilde{\mathbf{q}} - \Lambda \mathbf{z} \right) + \underbrace{\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})\mathbf{J}_\varphi^+(\mathbf{q})}_{\mathbf{I}} (\Delta \dot{\mathbf{p}} + \beta \Delta \mathbf{p}) \\ &= \Delta \dot{\mathbf{p}} + \beta \Delta \mathbf{p} \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

El lado izquierdo de la ecuación (B.2) está acotado y tiende a cero de acuerdo a la suposición principal sobre  $\mathbf{x}$ , mientras que el lado derecho de (B.2) representa un filtro lineal estable, por lo que  $\Delta \mathbf{p}$  y  $\Delta \dot{\mathbf{p}}$  deben ser acotadas y tender a cero.

- b) El siguiente paso es analizar el comportamiento de los errores de posición  $\tilde{\mathbf{q}}$  y velocidad  $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}$ . Puesto que  $\mathbf{x}$  está acotada,  $\mathbf{s}$  también lo está. De la ecuación (3.13) se observa que  $\mathbf{s}_p$  y  $\mathbf{s}_f$  están acotadas puesto que son vectores ortogonales. Nótese que  $\mathbf{s}_p$  puede ser escrito como

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_p &= \mathbf{Q}(\mathbf{q}) \left( \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \Lambda \tilde{\mathbf{q}} - \Lambda \mathbf{z} \right) \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{J}_\varphi^+(\mathbf{q})\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})) \left( \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \Lambda \tilde{\mathbf{q}} - \Lambda \mathbf{z} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

de acuerdo con la definición de  $\mathbf{Q}(q)$ . La ecuación (B.3) puede ser escrita como

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}(q) \left( \dot{\tilde{q}} + \Lambda \tilde{q} - \Lambda z \right) &= \left( \mathbf{I} - \mathbf{J}_\varphi^+(q) \mathbf{J}_\varphi(q) \right) \left( \dot{\tilde{q}} + \Lambda \tilde{q} - \Lambda z \right) \\ &= \dot{\tilde{q}} + \Lambda \tilde{q} - \Lambda z - \mathbf{J}_\varphi^+(q) \mathbf{J}_\varphi(q) \left( \dot{\tilde{q}} + \Lambda \tilde{q} - \Lambda z \right) \\ &= \dot{\tilde{q}} + \Lambda \tilde{q} - \Lambda z - \mathbf{J}_\varphi^+(q) \mathbf{J}_\varphi(q) \left( \dot{\tilde{q}} + \Lambda \tilde{q} \right) + \mathbf{J}_\varphi^+(q) \mathbf{J}_\varphi(q) \Lambda z \\ \\ \therefore \dot{\tilde{q}} + \Lambda \tilde{q} &= \underbrace{\mathbf{Q}(q) \left( \dot{\tilde{q}} + \Lambda \tilde{q} - \Lambda z \right)}_{\text{acotado}} + \underbrace{\Lambda z - \mathbf{J}_\varphi^+(q) \mathbf{J}_\varphi(q) \Lambda z}_{\text{acotado}} \\ &\quad + \mathbf{J}_\varphi^+(q) \mathbf{J}_\varphi(q) \left( \dot{\tilde{q}} + \Lambda \tilde{q} \right).\end{aligned}\quad (\text{B.4})$$

Se puede asegurar que los primeros términos del lado derecho de la ecuación (B.4) están acotados, considerando que se está analizando el caso donde  $\mathbf{x}$  en (3.44) está acotada. Esto se deduce de las ecuaciones (3.5) (cota de  $\mathbf{J}_\varphi^+(q)$  y  $\mathbf{J}_\varphi(q)$ ), (3.20) y (3.44) (cota de  $z$ ), y de (B.3) (cota de  $\mathbf{Q}(q) \left( \dot{\tilde{q}} + \Lambda \tilde{q} - \Lambda z \right)$ ).

Es claro que si el último término del lado derecho está acotado, entonces  $\tilde{q}$  y  $\dot{\tilde{q}}$  deben ser acotadas porque la ecuación (B.4) tiene la forma de un filtro lineal estable.

Así, es necesario determinar si el término  $\mathbf{J}_\varphi^+(q) \mathbf{J}_\varphi(q) \left( \dot{\tilde{q}} + \Lambda \tilde{q} \right)$  está acotado. Nótese que

$$\mathbf{J}_\varphi(q) \dot{\tilde{q}} = \mathbf{J}_\varphi(q) (\dot{q} - \dot{q}_d) = \mathbf{J}_\varphi(q) \dot{q} - \mathbf{J}_\varphi(q) \dot{q}_d \quad (\text{B.5})$$

sumando y restando el término  $\mathbf{J}_{\varphi d} \dot{q}_d$  a (B.5) se obtiene

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_\varphi(q) \dot{\tilde{q}} &= \underbrace{\mathbf{J}_\varphi(q) \dot{q}}_{\dot{p}} - \mathbf{J}_\varphi(q) \dot{q}_d + \mathbf{J}_{\varphi d} \dot{q}_d - \underbrace{\mathbf{J}_{\varphi d} \dot{q}_d}_{\dot{p}_d} \\ &= \dot{p} - \dot{p}_d - \mathbf{J}_\varphi(q) \dot{q}_d + \mathbf{J}_{\varphi d} \dot{q}_d \\ &= \dot{p} - \dot{p}_d - (\mathbf{J}_\varphi(q) - \mathbf{J}_{\varphi d}) \dot{q}_d.\end{aligned}\quad (\text{B.6})$$

Por lo tanto (B.6) está acotada, con  $\mathbf{J}_{\varphi d} = \mathbf{J}_\varphi(q_d)$ . Esto es en vista de que se están considerando articulaciones de revolución. Así, el lado derecho de (B.4) sólo puede estar no acotada si  $\mathbf{J}_\varphi^+(q) \mathbf{J}_\varphi(q) \Lambda \tilde{q}$  no lo está. Expandiendo esta expresión se tiene

$$\mathbf{J}_\varphi^+(q) \mathbf{J}_\varphi(q) \Lambda \tilde{q} = \mathbf{J}_\varphi^+(q) \mathbf{J}_\varphi(q) \Lambda (q - q_d). \quad (\text{B.7})$$

Se observa que (B.7) estará acotada si  $\mathbf{q}$  lo está. En este punto es importante recordar que, de la Suposición 3.1,  $\mathbf{q}$  debe satisfacer la restricción  $\varphi(\mathbf{q}) = 0$  y que el robot no es redundante. Así, la restricción sólo puede ser satisfecha por un vector acotado  $\mathbf{q}$ . Se puede concluir, de (B.4), que  $\tilde{\mathbf{q}}$  y  $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}$  permanecerán acotados mientras  $\mathbf{x}$  lo esté.

Ahora falta demostrar que los errores de seguimiento tienden a cero siempre que  $\mathbf{x}$  lo haga también. Para esto, se usará el siguiente enfoque. Si  $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$ , entonces (3.13) se convierte en

$$\mathbf{Q}(\mathbf{q}) \left[ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \Lambda \left( \underbrace{\mathbf{q}}_{\dot{\mathbf{q}}=\mathbf{q}} - \mathbf{q}_d \right) \right] + \mathbf{J}_\varphi^+(\mathbf{q}) (\Delta \dot{\mathbf{p}} + \beta \Delta \mathbf{p}) = \mathbf{0} \quad (\text{B.8})$$

puesto que los errores de seguimiento  $\mathbf{s}$  y de observación  $\mathbf{r}$  son igual a cero. Tomando en consideración

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}} &= \mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \\ \Delta \dot{\mathbf{p}} &\triangleq \dot{\mathbf{p}} - \dot{\mathbf{p}}_d = \mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{J}_{\varphi_d} \dot{\mathbf{q}}_d \\ \Delta \mathbf{p} &= \varphi(\mathbf{q}) - \varphi(\mathbf{q}_d). \end{aligned}$$

Entonces (B.8) se puede escribir como

$$\mathbf{Q}(\mathbf{q}) \left( \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \Lambda \tilde{\mathbf{q}} \right) + \mathbf{J}_\varphi^+(\mathbf{q}) \left[ \mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{J}_{\varphi_d} \dot{\mathbf{q}}_d + \beta (\varphi(\mathbf{q}) - \varphi(\mathbf{q}_d)) \right] = \mathbf{0}. \quad (\text{B.9})$$

Supóngase que  $\mathbf{q} \equiv \mathbf{q}_d$ , en otras palabras  $\tilde{\mathbf{q}} = 0$ , entonces, considerando (2.32), la ecuación (B.9) se reescribe como

$$\mathbf{Q}(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{J}_\varphi^+(\mathbf{q}) \mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{0}. \quad (\text{B.10})$$

Esto muestra que si  $\|\tilde{\mathbf{q}}\|$  tiende a cero, entonces  $\|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\|$  también tenderá a cero. En otras palabras, probando que  $\tilde{\mathbf{q}}$  tenderá a cero se puede asegurar que  $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}$  también lo hará. Se procederá a demostrar que  $\tilde{\mathbf{q}}$  tenderá a cero. Puesto que están siendo utilizadas restricciones homogéneas, la siguiente relación se satisface

$$\Delta \mathbf{p} = \varphi(\mathbf{q}) - \varphi(\mathbf{q}_d) \quad (\text{B.11})$$

Desarrollando la serie de Taylor alrededor de la trayectoria deseada  $\mathbf{q}_d$ , para  $\varphi(\mathbf{q})$  se tiene (Chen 1999)

$$\varphi(\mathbf{q}) = \varphi(\mathbf{q}_d) + \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{q}} \right|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_d} (\mathbf{q} - \mathbf{q}_d) + t.o.s. \quad (\text{B.12})$$

Por lo tanto, existe un valor positivo  $\eta$  lo suficientemente pequeño tal que si

$$\|\tilde{\mathbf{q}}\| \leq \eta, \quad (\text{B.13})$$

entonces los términos de orden superior (*t.o.s.*) en (B.12) pueden ser ignorados de tal forma que de (B.11),

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{p} &= \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{q}} \right|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_d} (\mathbf{q} - \mathbf{q}_d) \\ &= \mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q}_d) \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_{\varphi d} \tilde{\mathbf{q}}, \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

es válida. La siguiente discusión se llevará a cabo asumiendo que (B.13) se satisface. Para probar que  $\tilde{\mathbf{q}}$  tiende a cero se requiere encontrar una ecuación dinámica la cual describa su comportamiento. Esta ecuación puede ser formada de la siguiente forma. De  $\mathbf{s}_p$  en (3.13) se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_p &= \mathbf{Q}(\mathbf{q}) \left( \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \Lambda(\tilde{\mathbf{q}} - \mathbf{z}_d) \right) \\ &= \left( \mathbf{I} - \underbrace{\mathbf{J}_\varphi^+(\mathbf{q}) \mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})}_{\mathbf{P}(\mathbf{q})} \right) \left( \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \Lambda(\tilde{\mathbf{q}} - \mathbf{z}) \right) \\ &= \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \Lambda \tilde{\mathbf{q}} - \Lambda \mathbf{z} - \mathbf{P}(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \mathbf{P}(\mathbf{q}) \Lambda \tilde{\mathbf{q}} + \mathbf{P}(\mathbf{q}) \Lambda \mathbf{z} \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

con  $\mathbf{P}(\mathbf{q}) \triangleq \mathbf{J}_\varphi^+(\mathbf{q}) \mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})$  y  $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q} - \mathbf{z}$  de (3.8). Multiplicando  $\tilde{\mathbf{q}}^T$  en ambos lados de (B.15) se tiene

$$\tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{s}_p = \tilde{\mathbf{q}}^T \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \tilde{\mathbf{q}}^T \Lambda \tilde{\mathbf{q}} - \tilde{\mathbf{q}}^T \Lambda \mathbf{z} - \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{P}(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{P}(\mathbf{q}) \Lambda \tilde{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{P}(\mathbf{q}) \Lambda \mathbf{z}. \quad (\text{B.16})$$

Puesto que

$$\tilde{\mathbf{q}}^T \dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \|\tilde{\mathbf{q}}\| \frac{d}{dt} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \quad (\text{B.17})$$

(B.16) se puede escribir como

$$\|\tilde{\mathbf{q}}\| \frac{d}{dt} \|\tilde{\mathbf{q}}\| = \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{s}_p - \tilde{\mathbf{q}}^T \Lambda \tilde{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{q}}^T \Lambda \mathbf{z} + \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{P}(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{P}(\mathbf{q}) \Lambda \tilde{\mathbf{q}} - \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{P}(\mathbf{q}) \Lambda \mathbf{z} \quad (\text{B.18})$$

Para desarrollar el lado derecho de esta ecuación se analizará en primer lugar el término  $\tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{P}(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}}$ . De (B.6) se tiene

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\mathbf{p}} &= \dot{\mathbf{p}} - \dot{\mathbf{p}}_d = \mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + (\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q}) - \mathbf{J}_{\varphi d}) \dot{\mathbf{q}}_d \\ &= \mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + (\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q}) - \mathbf{J}_{\varphi d}) \dot{\mathbf{q}}_d. \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$



Multiplicando (B.14) por  $\beta$  y sumando el resultado a (B.19) se tiene

$$\beta \Delta \mathbf{p} = \beta \mathbf{J}_{\varphi d} \tilde{\mathbf{q}}. \quad (\text{B.20})$$

Sumando (B.20) a (B.19) se obtiene

$$\mathbf{J}_{\varphi}(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \Delta \dot{\mathbf{p}} + \beta \Delta \mathbf{p} - \beta \mathbf{J}_{\varphi d} \tilde{\mathbf{q}} - (\mathbf{J}_{\varphi}(\mathbf{q}) - \mathbf{J}_{\varphi d}) \dot{\mathbf{q}}_d. \quad (\text{B.21})$$

Sumando y restando a la parte derecha de (B.21) el término  $\beta \mathbf{J}_{\varphi}(\mathbf{q}) \tilde{\mathbf{q}}$  se tiene

$$\mathbf{J}_{\varphi}(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \Delta \dot{\mathbf{p}} + \beta \Delta \mathbf{p} - \beta \mathbf{J}_{\varphi d} \tilde{\mathbf{q}} - (\mathbf{J}_{\varphi}(\mathbf{q}) - \mathbf{J}_{\varphi d}) \dot{\mathbf{q}}_d + \beta \mathbf{J}_{\varphi}(\mathbf{q}) \tilde{\mathbf{q}} - \beta \mathbf{J}_{\varphi}(\mathbf{q}) \tilde{\mathbf{q}}. \quad (\text{B.22})$$

Premultiplicando (B.22) por  $\tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}_{\varphi}^+(\mathbf{q})$  se obtiene

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{P}(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} &= \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}_{\varphi}^+(\mathbf{q}) \Delta \dot{\mathbf{p}} + \beta \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}_{\varphi}^+(\mathbf{q}) \Delta \mathbf{p} - \beta \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}_{\varphi}^+(\mathbf{q}) \mathbf{J}_{\varphi d} \tilde{\mathbf{q}} \\ &\quad - \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}_{\varphi}^+(\mathbf{q}) (\mathbf{J}_{\varphi}(\mathbf{q}) - \mathbf{J}_{\varphi d}) \dot{\mathbf{q}}_d + \beta \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}_{\varphi}^+(\mathbf{q}) \mathbf{J}_{\varphi}(\mathbf{q}) \tilde{\mathbf{q}} \\ &\quad - \beta \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}_{\varphi}^+(\mathbf{q}) \mathbf{J}_{\varphi}(\mathbf{q}) \tilde{\mathbf{q}} \\ &= \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}_{\varphi}^+(\mathbf{q}) \Delta \dot{\mathbf{p}} + \beta \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}_{\varphi}^+(\mathbf{q}) \Delta \mathbf{p} - \beta \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}_{\varphi}^+(\mathbf{q}) \mathbf{J}_{\varphi d} \tilde{\mathbf{q}} \\ &\quad - \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}_{\varphi}^+(\mathbf{q}) (\mathbf{J}_{\varphi}(\mathbf{q}) - \mathbf{J}_{\varphi d}) \dot{\mathbf{q}}_d + \beta \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}_{\varphi}^+(\mathbf{q}) \mathbf{J}_{\varphi}(\mathbf{q}) \tilde{\mathbf{q}} \\ &\quad - \beta \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{P}(\mathbf{q}) \tilde{\mathbf{q}} \\ &= \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}_{\varphi}^+(\mathbf{q}) \Delta \dot{\mathbf{p}} + \beta \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}_{\varphi}^+(\mathbf{q}) \Delta \mathbf{p} + \beta \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}_{\varphi}^+(\mathbf{q}) [\mathbf{J}_{\varphi}(\mathbf{q}) - \mathbf{J}_{\varphi d}] \tilde{\mathbf{q}} \\ &\quad - \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}_{\varphi}^+(\mathbf{q}) [\mathbf{J}_{\varphi}(\mathbf{q}) - \mathbf{J}_{\varphi d}] \dot{\mathbf{q}}_d - \beta \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{P}(\mathbf{q}) \tilde{\mathbf{q}} \\ &= \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}_{\varphi}^+(\mathbf{q}) \Delta \dot{\mathbf{p}} + \beta \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}_{\varphi}^+(\mathbf{q}) \Delta \mathbf{p} \\ &\quad - \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}_{\varphi}^+(\mathbf{q}) [\mathbf{J}_{\varphi}(\mathbf{q}) - \mathbf{J}_{\varphi d}] (\dot{\mathbf{q}}_d - \beta \tilde{\mathbf{q}}) - \beta \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{P}(\mathbf{q}) \tilde{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

De la definición de  $\mathbf{P}(\mathbf{q})$  se puede escribir

$$\tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{P}(\mathbf{q}) \tilde{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}_{\varphi}^+(\mathbf{q}) \mathbf{J}_{\varphi}(\mathbf{q}) \tilde{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}_{\varphi}^T(\mathbf{q}) [\mathbf{J}_{\varphi}(\mathbf{q}) \mathbf{J}_{\varphi}^T(\mathbf{q})]^{-1} \mathbf{J}_{\varphi}(\mathbf{q}) \tilde{\mathbf{q}} \quad (\text{B.24})$$

De las ecuaciones (B.23)-(B.24) se obtiene

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{P}(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} &= \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}_{\varphi}^T(\mathbf{q}) [\mathbf{J}_{\varphi}(\mathbf{q}) \mathbf{J}_{\varphi}^T(\mathbf{q})]^{-1} \mathbf{J}_{\varphi}(\mathbf{q}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ &= \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}_{\varphi}^+(\mathbf{q}) \Delta \dot{\mathbf{p}} + \beta \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}_{\varphi}^+(\mathbf{q}) \Delta \mathbf{p} \\ &\quad - \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}_{\varphi}^+(\mathbf{q}) [\mathbf{J}_{\varphi}(\mathbf{q}) - \mathbf{J}_{\varphi d}] (\dot{\mathbf{q}}_d - \beta \tilde{\mathbf{q}}) - \beta \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{P}(\mathbf{q}) \tilde{\mathbf{q}}. \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

Sustituyendo (B.25) en (B.18) se obtiene

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \frac{d}{dt} \|\tilde{\mathbf{q}}\| &= \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{s}_p - \tilde{\mathbf{q}}^T \Lambda \tilde{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}_{\varphi}^+(\mathbf{q}) \Delta \dot{\mathbf{p}} + \beta \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}_{\varphi}^+(\mathbf{q}) \Delta \mathbf{p} \\ &\quad - \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{P}(\mathbf{q}) \Lambda \mathbf{z} + \tilde{\mathbf{q}}^T \Lambda \mathbf{z} - \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}_{\varphi}^+(\mathbf{q}) [\mathbf{J}_{\varphi}(\mathbf{q}) - \mathbf{J}_{\varphi d}] (\dot{\mathbf{q}}_d - \beta \tilde{\mathbf{q}}) \\ &\quad - \beta \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{P}(\mathbf{q}) \tilde{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{P}(\mathbf{q}) \Lambda \tilde{\mathbf{q}}. \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

Si  $\Lambda \triangleq k\mathbf{I}$ , entonces

$$\tilde{\mathbf{q}}^T \Lambda \tilde{\mathbf{q}} = k (q_1^2 + \dots + q_n^2) = k \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2 \quad (\text{B.27})$$

Sustituyendo (B.27) en (B.26)

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \frac{d}{dt} \|\tilde{\mathbf{q}}\| &= \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{s}_p - k \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2 + \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}_\varphi^+(\mathbf{q}) (\Delta \dot{\mathbf{p}} + \beta \Delta \mathbf{p}) \\ &\quad - \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}_\varphi^+(\mathbf{q}) [\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q}) - \mathbf{J}_{\varphi d}] (\dot{\mathbf{q}}_d - \beta \tilde{\mathbf{q}}) \\ &\quad + (k - \beta) \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{P}(\mathbf{q}) \tilde{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{q}}^T \Lambda \mathbf{z} - \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{P}(\mathbf{q}) \Lambda \mathbf{z}. \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

Desarrollando el término  $\tilde{\mathbf{q}}^T \Lambda \mathbf{z} - \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{P}(\mathbf{q}) \Lambda \mathbf{z}$  de (B.28) se obtiene

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{q}}^T \Lambda \mathbf{z} - \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{P}(\mathbf{q}) \Lambda \mathbf{z} &= \tilde{\mathbf{q}}^T (\mathbf{I} - \mathbf{P}(\mathbf{q})) \Lambda \mathbf{z} \\ &= k \tilde{\mathbf{q}}^T (\mathbf{I} - \mathbf{P}(\mathbf{q})) \mathbf{z} \\ &= k \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{Q}(\mathbf{q}) \mathbf{z}. \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

Por lo tanto (B.28) se puede escribir como

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \frac{d}{dt} \|\tilde{\mathbf{q}}\| &= \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{s}_p - k \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2 + \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}_\varphi^+(\mathbf{q}) (\Delta \dot{\mathbf{p}} + \beta \Delta \mathbf{p}) \\ &\quad - \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}_\varphi^+(\mathbf{q}) [\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q}) - \mathbf{J}_{\varphi d}] (\dot{\mathbf{q}}_d - \beta \tilde{\mathbf{q}}) \\ &\quad + (k - \beta) \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{P}(\mathbf{q}) \tilde{\mathbf{q}} + k \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{Q}(\mathbf{q}) \mathbf{z} \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

En vista de la Suposición 3.2, la siguiente cota puede ser establecida

$$\|\tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}_\varphi^+(\mathbf{q}) [\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q}) - \mathbf{J}_{\varphi d}] (\dot{\mathbf{q}}_d - \beta \tilde{\mathbf{q}})\| \leq \gamma \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2, \quad (\text{B.31})$$

con  $\gamma \triangleq c_0 L (\mathcal{V}_m + \beta \eta)$ .  $\mathcal{V}_m$  es la cota del vector de velocidad, esto es  $\|\dot{\mathbf{q}}_d\| \leq \mathcal{V}_m$  para todo tiempo.

Por otro lado de (3.13) se tiene

$$\mathbf{s}_p = \mathbf{s} - \mathbf{J}_\varphi^+(\mathbf{q}) (\Delta \dot{\mathbf{p}} + \beta \Delta \mathbf{p}) \quad (\text{B.32})$$

Sustituyendo (B.31)-(B.32) en (B.30) y sacando normas se obtiene

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \frac{d}{dt} \|\tilde{\mathbf{q}}\| &= \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{s} - k \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2 - \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}_\varphi^+(\mathbf{q}) [\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q}) - \mathbf{J}_{\varphi d}] (\dot{\mathbf{q}}_d - \beta \tilde{\mathbf{q}}) \\ &\quad + (k - \beta) \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{P}(\mathbf{q}) \tilde{\mathbf{q}} + k \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{Q}(\mathbf{q}) \mathbf{z} \\ &\leq \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\mathbf{s}\| - k \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2 + \gamma \|\tilde{\mathbf{q}}\|^2 + |k - \beta| \|\tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{P}(\mathbf{q}) \tilde{\mathbf{q}}\| + k \|\tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{Q}(\mathbf{q}) \mathbf{z}\|. \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

Dividiendo entre  $\|\tilde{\mathbf{q}}\|$  se obtiene

$$\frac{d}{dt}\|\tilde{\mathbf{q}}\| \leq \|\mathbf{s}\| - k\|\tilde{\mathbf{q}}\| + \gamma\|\tilde{\mathbf{q}}\| + |k - \beta|\|\mathbf{P}(\mathbf{q})\tilde{\mathbf{q}}\| + k\|\mathbf{Q}(\mathbf{q})\mathbf{z}\|. \quad (\text{B.34})$$

Ahora bien,  $\mathbf{P}(\mathbf{q})$  y  $\mathbf{Q}(\mathbf{q})$  son matrices de proyección, tal que

$$\|\mathbf{Q}(\mathbf{q})\mathbf{z}\| \leq b_1\|\mathbf{z}\| \quad \text{donde } 0 \leq b_1 \leq 1 \quad (\text{B.35})$$

$$\|\mathbf{P}(\mathbf{q})\tilde{\mathbf{q}}\| \leq b_2\|\tilde{\mathbf{q}}\| \quad \text{donde } 0 \leq b_2 \leq 1. \quad (\text{B.36})$$

Considerando los casos críticos ( $b_1 = b_2 = 1$ ), la ecuación (B.34) se puede escribir como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\|\tilde{\mathbf{q}}\| &\leq -k\|\tilde{\mathbf{q}}\| + \gamma\|\tilde{\mathbf{q}}\| + |k - \beta|\|\tilde{\mathbf{q}}\| + \|\mathbf{s}\| + k\|\mathbf{z}\| \\ &\leq -\alpha\|\tilde{\mathbf{q}}\| + \|\mathbf{s}\| + k\|\mathbf{z}\| \end{aligned} \quad (\text{B.37})$$

con  $\alpha = k - |k - \beta| - \gamma$ . Nótese que  $k, \beta, \mathcal{V}_m$  y  $\eta$  pueden ser elegidas para que  $\alpha > 0$ , y que los últimos elementos de (B.37) están acotados puesto que  $\mathbf{x}$  lo está. Sin embargo, (B.37) es válida sólo si (B.13) se mantiene. Así, no es suficiente que  $\mathbf{x}$  esté acotada, se debe encontrar una cota  $x_{\max}$  tal que (B.13) sea válida. Para garantizar esto,  $x_{\max}$  debe aparecer en (B.37) explícitamente. Por supuesto, si  $\|\mathbf{x}\| \leq x_{\max}$ , entonces se tiene

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{s}\|^2 + \|\mathbf{r}\|^2 \leq x_{\max}^2, \quad (\text{B.38})$$

con  $\mathbf{r} = \dot{\mathbf{z}} + \mathbf{\Lambda}\mathbf{z}$ . Puesto que en (B.37) se tiene  $\mathbf{z}$  y no  $\mathbf{r}$ , se debe notar que cada elemento de  $\mathbf{r}$  está dado por  $r_j = \dot{z}_j + kz_j$ , para  $j = 1, \dots, n$ . Esto es un filtro lineal estable con ganancia  $\frac{1}{k}$ , i.e. se tiene

$$|z_j| \leq \frac{1}{k} \max |r_j| \quad \forall t \quad (\text{B.39})$$

Así, es de manera directa mostrar que

$$\|\mathbf{z}\| \leq \frac{\sqrt{n}}{k} x_{\max} \quad (\text{B.40})$$

lo cual permite reescribir (B.37) como,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\|\tilde{\mathbf{q}}\| &\leq -\alpha\|\tilde{\mathbf{q}}\| + x_{\max} + \sqrt{n}x_{\max} \\ &\leq -\alpha\|\tilde{\mathbf{q}}\| + \sigma \end{aligned} \quad (\text{B.41})$$

con

$$\sigma \triangleq (1 + \sqrt{n})x_{\max}. \quad (\text{B.42})$$

Del Lema de Comparación (Khalil 1996), se puede deducir

$$\|\tilde{q}(t)\| \leq \frac{\sigma}{\alpha} + e^{-\alpha t} \left( \|\tilde{q}(0)\| - \frac{\sigma}{\alpha} \right), \quad (\text{B.43})$$

para todo tiempo. Por lo tanto, la ecuación (B.13) será satisfecha si

$$\|\tilde{q}(0)\| \leq \frac{\sigma}{\alpha} = \frac{(1 + \sqrt{n})x_{\max}}{\alpha} \leq \eta \quad (\text{B.44})$$

La ecuación (B.44) puede ser fácilmente satisfecha si

$$x_{\max} \leq \frac{\eta\alpha}{1 + \sqrt{n}} \quad (\text{B.45})$$

Así, si  $\|\mathbf{x}\|$  tiende a cero, es claro de (B.37) que  $\|\tilde{q}\|$  tenderá a cero también. Cabe recordar que esto implica la convergencia a cero de  $\|\dot{\tilde{q}}\|$ .

- c) Cuando  $\mathbf{x}$  tiende a cero, no necesariamente  $\Delta\lambda$  lo hace o permanece acotado. Para probar esto, se puede hacer el siguiente análisis. Multiplicando (3.32) por  $\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q})$  se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})\dot{\mathbf{s}} &= -\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{s} - \mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{K}_{\text{DR}}\mathbf{s} \quad (\text{B.46}) \\ &\quad + \mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{J}_\varphi^{\text{T}}(\mathbf{q})\Delta\lambda + \mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{K}_{\text{R}}\mathbf{r} \\ &\quad - \mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_r)\mathbf{s} + \mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{H}(\mathbf{q})\mathbf{e}(\mathbf{r}) \\ &= -\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{s} - \mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{K}_{\text{DR}}\mathbf{s} \\ &\quad + \mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{J}_\varphi^{\text{T}}(\mathbf{q})\Delta\lambda + \mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{K}_{\text{R}}\mathbf{r} \\ &\quad - \mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_r)\mathbf{s} + \mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})\mathbf{e}(\mathbf{r}) \\ &= -\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q}) \left( \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_r) + \mathbf{K}_{\text{DR}} \right) \mathbf{s} \\ &\quad + \mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{J}_\varphi^{\text{T}}(\mathbf{q})\Delta\lambda + \mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{K}_{\text{R}}\mathbf{r} \\ &\quad + \mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})\mathbf{e}(\mathbf{r}) \\ &= -\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q}) \left( \mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{s} + 2\dot{\mathbf{q}}_r) + \mathbf{K}_{\text{DR}} \right) \mathbf{s} \\ &\quad + \mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{J}_\varphi^{\text{T}}(\mathbf{q})\Delta\lambda + \mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{K}_{\text{R}}\mathbf{r} \\ &\quad + \mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})\mathbf{e}(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

Puesto que  $\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})\mathbf{s} = 0 \rightarrow \mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})\dot{\mathbf{s}} = -\dot{\mathbf{J}}_\varphi(\mathbf{q})\mathbf{s}$ , la ecuación (B.46) puede ser escrita como

$$\mathbf{R}(\mathbf{q})\Delta\lambda = - \left[ \dot{\mathbf{J}}_\varphi(\mathbf{q}) - \mathbf{B}(\mathbf{q}) \right] \mathbf{s} - \mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{K}_{\text{R}}\mathbf{r} - \mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})\mathbf{e}(\mathbf{r}) \quad (\text{B.47})$$

con

$$\mathbf{R}(\mathbf{q}) = \mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{J}_\varphi^{\text{T}}(\mathbf{q}) \quad (\text{B.48})$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{q}) = \mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q}) (\mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{s} + 2\dot{\mathbf{q}}_r) + \mathbf{K}_{DR}). \quad (\text{B.49})$$

Puesto que  $\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})$  es de rango completo y  $\mathbf{H}(\mathbf{q})$  es positiva definida,  $\mathbf{R}(\mathbf{q})$  es invertible. Por lo tanto (B.47) se convierte en

$$\Delta\boldsymbol{\lambda} = -\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{q}) \left\{ \left[ \dot{\mathbf{J}}_\varphi(\mathbf{q}) - \mathbf{B}(\mathbf{q}) \right] \mathbf{s} - \mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{K}_R\mathbf{r} - \mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})\mathbf{e}(\mathbf{r}) \right\} \quad (\text{B.50})$$

Ahora, considérese las siguientes definiciones

$$c_1 = \max_{\forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n} \|\mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q})\| \quad (\text{B.51})$$

$$c_2 = \max_{\forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n} \|\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{q})\| \quad (\text{B.52})$$

$$\|\mathbf{s}\|^2 \leq x_{\max} \|\mathbf{s}\| \quad (\text{B.53})$$

$$\sigma_H \triangleq \max \lambda_{\max}(\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q})) \quad (\text{B.54})$$

$$\|\mathbf{B}(\mathbf{q})\| \leq c_3 \quad (\text{B.55})$$

$$\|\dot{\mathbf{J}}_\varphi(\mathbf{q})\| \leq c_4, \quad (\text{B.56})$$

con  $c_3 = c_1\sigma_H(\mu_3 + \lambda_{\max}(\mathbf{K}_R) + \lambda_D)$ . Así, considerando las definiciones (B.52)-(B.55) la ecuación (B.50) puede ser escrita como

$$\begin{aligned} \|\Delta\boldsymbol{\lambda}\| &\leq c_2 \{ (c_3 + c_4) \|\mathbf{s}\| + c_1\sigma_H\lambda_{\max}(\mathbf{K}_R)\|\mathbf{r}\| + c_1M_e(x_{\max})\|\mathbf{r}\| \} \\ &\triangleq \zeta_1\|\mathbf{s}\| + \zeta_2\|\mathbf{r}\| \end{aligned} \quad (\text{B.57})$$

con  $\zeta_1 \triangleq c_2(c_3 + c_4)$  y  $\zeta_2 \triangleq c_1c_2(\sigma_H\lambda_{\max}(\mathbf{K}_R) + M_e(x_{\max}))$ . Se concluye que  $\Delta\boldsymbol{\lambda}$  está acotada puesto que el lado derecho de (B.57) lo está. Nótese que, de (B.46),  $\dot{\mathbf{s}}$  permanece acotado también. Finalmente, si  $\mathbf{x}$  tiende a cero, así lo harán  $\mathbf{s}$  y  $\mathbf{r}$  y de este modo se llega a la conclusión de que  $\Delta\boldsymbol{\lambda}$  tenderá a cero también.

# Apéndice C

## Prueba de estabilidad del controlador

El Teorema 3.1 puede ser demostrado de la siguiente forma. Considérese la función candidata de Lyapunov (3.46)

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x}, \quad (\text{C.1})$$

donde  $\mathbf{x}(0)$  pertenece a la región descrita por (3.49)

$$S_a = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| \leq a\}. \quad (\text{C.2})$$

Si  $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$  con  $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$  si y solo si  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , entonces el valor máximo que la norma de  $\mathbf{x}$  puede tener está dada por (3.58). De acuerdo a la demostración del Lema 3.1,  $x_{\max}$  debe satisfacer (B.45) para garantizar que  $\tilde{\mathbf{q}}$  y  $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}$  tiendan a cero si  $\mathbf{x}$  lo hace.

En vista de (3.58), la condición (B.45) puede ser satisfecha si (3.50) se cumple. Por supuesto, queda por demostrar que  $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$  realmente pasa. Reescribiendo (C.1), se tiene

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{H} \mathbf{s} + \frac{1}{2} \mathbf{r}^T \mathbf{H} \mathbf{r}. \quad (\text{C.3})$$

La derivada de (C.3) a lo largo de (3.32) y (3.43) puede ser calculada como

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{H}}(\mathbf{q}) \mathbf{s} + \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{H}}(\mathbf{q}) \mathbf{s} + \mathbf{r}^T \dot{\mathbf{H}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{r}} + \frac{1}{2} \mathbf{r}^T \dot{\mathbf{H}}(\mathbf{q}) \mathbf{r} \quad (\text{C.4})$$

Sustituyendo (3.32) y (3.43) en (C.4) se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) = & \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{H}}(\mathbf{q}) \mathbf{s} + \frac{1}{2} \mathbf{r}^T \dot{\mathbf{H}}(\mathbf{q}) \mathbf{r} + \mathbf{s}^T \mathbf{H}(\mathbf{q}) \mathbf{e}(\mathbf{r}) - \mathbf{s}^T \mathbf{K}_{\text{DR}} \mathbf{s} + \mathbf{s}^T \mathbf{J}_{\varphi}^T(\mathbf{q}) \Delta \lambda \\ & + \mathbf{s}^T \mathbf{K}_{\text{R}} \mathbf{r} - \mathbf{s}^T \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{s} - \mathbf{s}^T \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_r) \mathbf{s} + \mathbf{r}^T \mathbf{J}_{\varphi}^T(\mathbf{q}) \Delta \lambda - \mathbf{r}^T \mathbf{K}_{\text{DR}} \mathbf{s} \\ & - \mathbf{r}^T \mathbf{H}_{\text{rd}} \mathbf{r} - \mathbf{r}^T \mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{s} + 2\dot{\mathbf{q}}_r) \mathbf{s} + \mathbf{r}^T \mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{s} + \dot{\mathbf{q}}_r) \mathbf{r} - \mathbf{r}^T \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{r}. \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

Para simplificar (C.5) se debe considerar lo siguiente

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^T \mathbf{K}_{DR} \mathbf{s} &= \mathbf{r}^T \mathbf{K}_R \mathbf{s} + \mathbf{r}^T \mathbf{D} \mathbf{s} \\ \Rightarrow \mathbf{s}^T \mathbf{K}_R \mathbf{r} - \mathbf{r}^T \mathbf{K}_{DR} \mathbf{s} &= -\mathbf{r}^T \mathbf{D} \mathbf{s} \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Sustituyendo (C.6) en (C.5) y considerando la Propiedad 2.2 se tiene

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) &= \mathbf{s}^T \mathbf{H}(\mathbf{q}) \mathbf{e}(\mathbf{r}) - \mathbf{s}^T \mathbf{K}_{DR} \mathbf{s} + \mathbf{s}^T \mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q}) \Delta \lambda \\ &\quad - \mathbf{r}^T \mathbf{D} \mathbf{s} - \mathbf{s}^T \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_r) \mathbf{s} + \mathbf{r}^T \mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q}) \Delta \lambda \\ &\quad - \mathbf{r}^T \mathbf{H}_{rd} \mathbf{r} - \mathbf{r}^T \mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{s} + 2\dot{\mathbf{q}}_r) \mathbf{s} + \mathbf{r}^T \mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{s} + \dot{\mathbf{q}}_r) \mathbf{r}. \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

De (3.14) se tiene

$$\mathbf{s}^T = \left( \tilde{\mathbf{q}} + \Lambda \tilde{\mathbf{q}} - \Lambda \mathbf{z} \right)^T \mathbf{Q}^T(\mathbf{q}) + (\Delta \dot{\mathbf{p}} + \beta \Delta \mathbf{p})^T \mathbf{J}_\varphi^{+T}(\mathbf{q}). \quad (\text{C.8})$$

Entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{s}^T \mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q}) \Delta \lambda &= \left( \tilde{\mathbf{q}} + \Lambda \tilde{\mathbf{q}} - \Lambda \mathbf{z} \right)^T \mathbf{Q}^T(\mathbf{q}) \mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q}) \Delta \lambda \\ &\quad + (\Delta \dot{\mathbf{p}} + \beta \Delta \mathbf{p})^T \mathbf{J}_\varphi^{+T}(\mathbf{q}) \mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q}) \Delta \lambda \\ &= (\Delta \dot{\mathbf{p}} + \beta \Delta \mathbf{p})^T \Delta \lambda = 0, \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

Este análisis es valido si se satisfacen la Propiedad 2.5 y la restricción (3.2) para  $\mathbf{p}$ ,  $\dot{\mathbf{p}}$ ,  $\mathbf{p}_d$  y  $\dot{\mathbf{p}}_d$ . Así, la ecuación (C.7) se convierte en

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) &= \mathbf{s}^T \mathbf{H}(\mathbf{q}) \mathbf{e}(\mathbf{r}) - \mathbf{s}^T \mathbf{K}_{DR} \mathbf{s} + \mathbf{r}^T \mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q}) \Delta \lambda - \mathbf{r}^T \mathbf{D} \mathbf{s} - \mathbf{s}^T \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_r) \mathbf{s} \\ &\quad - \mathbf{r}^T \mathbf{H}_{rd} \mathbf{r} - \mathbf{r}^T \mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{s} + 2\dot{\mathbf{q}}_r) \mathbf{s} + \mathbf{r}^T \mathbf{C}(\mathbf{q}, \mathbf{s} + \dot{\mathbf{q}}_r) \mathbf{r} \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

Puesto que  $\mathbf{x}(0)$  está dentro de la región (C.2) y tomando en cuenta las definiciones (3.53)-(3.58) se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}(0)) &\leq \lambda_H M_e(x_{\max}) \|\mathbf{r}\| \|\mathbf{s}\| - \lambda_{\min}(\mathbf{K}_R) \|\mathbf{s}\|^2 + \lambda_D \|\mathbf{s}\| \|\mathbf{r}\| + \mu_1 \|\mathbf{s}\|^2 \\ &\quad - (k_d \lambda_h - \lambda_{\max}(\mathbf{K}_R)) \|\mathbf{r}\|^2 + \mu_3 \|\mathbf{r}\| \|\mathbf{s}\| + \mu_2 \|\mathbf{r}\|^2 + \|\mathbf{r}^T \mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q}) \Delta \lambda\| \\ &\leq (\lambda_H M_e(x_{\max}) + \lambda_D + \mu_3) \|\mathbf{r}\| \|\mathbf{s}\| - (\lambda_{\min}(\mathbf{K}_R) - \mu_1) \|\mathbf{s}\|^2 \\ &\quad - (k_d \lambda_h - \lambda_{\max}(\mathbf{K}_R) - \mu_2) \|\mathbf{r}\|^2 + \|\mathbf{r}^T \mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q}) \Delta \lambda\| \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

Ahora, para obtener una cota para el término  $\mathbf{r}^T \mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q}) \Delta \lambda$  se puede reemplazar la ecuación (B.50) como sigue

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^T \mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q}) \Delta \lambda &= -\mathbf{r}^T \mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q}) \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{q}) \left\{ \left[ \dot{\mathbf{J}}_\varphi(\mathbf{q}) - \mathbf{B}(\mathbf{q}) \right] \mathbf{s} \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q}) \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q}) \mathbf{K}_R \mathbf{r} - \mathbf{J}_\varphi(\mathbf{q}) \mathbf{e}(\mathbf{r}) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

Considerando las cotas (B.51) y (B.57) se tiene

$$\|\mathbf{r}^T \mathbf{J}_\varphi^T(\mathbf{q}) \Delta \boldsymbol{\lambda}\| \leq c_1 \zeta_1 \|\mathbf{s}\| \|\mathbf{r}\| + c_1 \zeta_2 \|\mathbf{r}\|^2 = \xi_1 \|\mathbf{s}\| \|\mathbf{r}\| + \xi_2 \|\mathbf{r}\|^2 \quad (\text{C.13})$$

Sustituyendo (C.13) en (C.11) se tiene

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}(\mathbf{0})) &\leq (\lambda_H M_e(x_{\max}) + \lambda_D + \mu_3 + \xi_1) \|\mathbf{r}\| \|\mathbf{s}\| - (\lambda_{\min}(\mathbf{K}_R) - \mu_1) \|\mathbf{s}\|^2 \\ &\quad - (k_d \lambda_h - \lambda_{\max}(\mathbf{K}_R) - \mu_2 - \xi_2) \|\mathbf{r}\|^2. \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

Ahora bien, si

$$\lambda_{\min}(\mathbf{K}_R) \geq \delta_1 - \mu_1 + 1$$

$$k_d \geq \frac{\lambda_{\max}(\mathbf{K}_R) + \mu_2 + \xi_2 + \frac{1}{4}(\lambda_H M_e(x_{\max}) + \lambda_D + \mu_3 + \xi_1)^2 + \delta_2}{\lambda_h}$$

con  $\delta_1, \delta_2 > 0$ , (C.14) puede ser escrita como

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}(\mathbf{0})) &\leq (\lambda_H M_e(x_{\max}) + \lambda_D + \mu_3 + \xi_1) \|\mathbf{r}\| \|\mathbf{s}\| - (\delta_1 + 1) \|\mathbf{s}\|^2 \\ &\quad - \left[ \frac{1}{4}(\lambda_H M_e(x_{\max}) + \lambda_D + \mu_3 + \xi_1)^2 + \delta_2 \right] \|\mathbf{r}\|^2. \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

Ordenado términos se tiene

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}(\mathbf{0})) &\leq -\delta_1 \|\mathbf{s}\|^2 - \delta_2 \|\mathbf{r}\|^2 \\ &\quad - \|\mathbf{s}\|^2 + (\lambda_H M_e(x_{\max}) + \lambda_D + \mu_3 + \xi_1) \|\mathbf{r}\| \|\mathbf{s}\| \\ &\quad - \frac{1}{4}(\lambda_H M_e(x_{\max}) + \lambda_D + \mu_3 + \xi_1)^2 \|\mathbf{r}\|^2 \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

Utilizando la forma de binomio cuadrado se tiene

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \leq -\delta_1 \|\mathbf{s}\|^2 - \delta_2 \|\mathbf{r}\|^2 - \left( \|\mathbf{s}\| - \frac{1}{2}(\lambda_H M_e(x_{\max}) - \lambda_D - \mu_3 - \xi_1) \|\mathbf{r}\| \right)^2 \quad (\text{C.17})$$

Así  $\dot{V}(\mathbf{x})$  es negativa. Pero para continuar con la solución,  $\|\mathbf{x}\|$  no puede ser más grande que  $x_{\max}$  mientras  $\dot{V}(t)$  sea negativa. Puesto que el estado inicial está en la región  $S_a$ , en (C.17) se puede concluir que  $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0 \forall t \geq 0$  y que  $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$  si y sólo si  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . De este modo,  $\mathbf{x}(t)$  tiende a cero y está acotada por  $x_{\max}$ . De la definición (3.20) se tiene directamente

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{z} = \mathbf{0} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{0}.$$



Del Lema 3.1 a) y b), se tiene

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{0} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \Delta \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \mathbf{0} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$$

Para aplicar c) del Lema 3.1, solamente es necesario mostrar que  $\dot{\mathbf{q}}$  está acotada. Este es el caso debido a que  $\tilde{\mathbf{q}}$  y  $\dot{\mathbf{q}}_d$  lo están, por lo que se satisface

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta \lambda = \mathbf{0}$$

△

## Apéndice D

# Inversa generalizada de Moore-Penrose

Para una matriz no singular  $\mathbf{A}$ , la inversa usual, denotada por  $\mathbf{A}^{-1}$ , es la única matriz que satisface

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

donde  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad. Esta inversa tiene varias propiedades útiles que ayudan en la solución de ecuaciones de matrices. Sin embargo, las matrices no singulares componen un subconjunto relativamente pequeño de la clase de todas las matrices. La inversa generalizada de Moore-Penrose es una herramienta análoga a la inversa de una matriz no singular, pero existe tanto para matrices singulares y no singulares de igual forma. Fue definida independientemente por Moore en 1920 y por Penrose en 1955, y se le conoce como inversa generalizada, pseudoinversa o inversa de Moore-Penrose.

**Definición 1** (Ben-Israel y Greville 1977) *Dada una matriz  $\mathbf{B}$  de dimensión  $m \times n$  la matriz inversa generalizada de Moore-Penrose es una única matriz  $\mathbf{B}^+$  de dimensión  $n \times m$  que satisface las siguientes condiciones:*

$$\begin{aligned}\mathbf{B}\mathbf{B}^+\mathbf{B} &= \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^+\mathbf{B}\mathbf{B}^+ &= \mathbf{B}^+ \\ (\mathbf{B}\mathbf{B}^+)^T &= \mathbf{B}\mathbf{B}^+ \\ (\mathbf{B}^+\mathbf{B})^T &= \mathbf{B}^+\mathbf{B}\end{aligned}$$

□

# Bibliografía

- Arimoto, S., Y. Liu y Naniwa, T.. 1993. Principle of orthogonalization for hybrid control of robot arms. *Proceedings of 12th IFAC World Congress* 1. 507-512.
- Barber, J. 1967. *MANTRAN: A symbolic language for supervisory control of an intelligent remote manipulator*. S. M. thesis. Massachusetts Institute of Technology.
- Ben-Israel, A. y T.Ñ. E. Greville. 1977. *Generalized Inverses: Theory and Applications*. New York: Wiley.
- Castillo-Sánchez, A. M. 2002. *Adaptación de dos robots industriales para su utilización en el desarrollo de nuevas técnicas y algoritmos de control*. Tesis de Licenciatura. Escuela Nacional de Estudios Profesionales Aragón, Universidad Nacional Autónoma de México.
- Chen, C.-T. 1999. *Linear System theory and design*. 3a. edición edn. New York, USA: Oxford University Press. 330p.
- DeSchutter, J. y H. Van Brussel. 1988. Compliant robot motion - ii - a control approach based on external control loop. *The Int. J. of Robotics Research* 7(4). 18-33.
- Drake, S. y S. Simunovic. 1977. The use of compliance in a robot assembly systems. *Preprints, IFAC Symp. on Info. and control problems in Manuf. Tech.*. IFAC. Tokio.
- Drake, S. y P. Watson. 1975. Pedestal and wrist force sensors for industrial assembly. *Proc. 5th Int. Symp. Industr. Robots*. Chicago.
- Duffy, J. 1990. The fallacy of modern hybrid control theory that is based on orthogonal complements of twisty and wrench spaces. *J. of Robotic Systems* Vol. 7(No. 2). 139-144.
- Ernst, H. 1961. *MH1 - a computer operated mechanical hand*. Sc. D. thesis. Massachusetts Institute of Technology.

ESTA TESIS NO SALE  
DE LA BIBLIOTECA

- Ferrell, W.** 1965. Remote manipulation with transmission delay.
- Ferrell, W. y T. Sheridan.** 1967. Supervisory control of remote manipulators. *IEEE Spectrum* 4. 81-88.
- Goertz, R.** 1952. Fundamentals of general purpose remote manipulators. *Nucleonics* 10. 36-42.
- Groome, R.** 1972. *Force feedback steering of a teleoperator system*. S. M. thesis. Massachusetts Institute of Technology.
- Gudiño, J., M. Arteaga y V. Parra-Vega.** 2003. On the control of cooperative robots without velocity measurements. *IEEE transactions on control systems technology*. Sometido y Aceptado.
- Hibbeler, R.** 1996. *Ingeniería mecánica: estática*. 6a edn. México: Prentice Hall Hispanoamericana.
- Hill, J. y A. Sword.** 1973. Manipulation based on sensors-directed control. *17th Annual Human Factors Convention*.
- Hogan, N.** 1985. Impedance control: an approach to manipulation. *Trans of ASME J. of Dynamics Systems, Measurement, and Control* 107. 1-24.
- Huang, H. y W. Tzeng.** 1989. Robotic force control by using estimated contact force. *Proceedings of the 28th conference on decision and control*. IEEE. Tampa, Florida. 2158-2163.
- Kankaanranta, R. y H. Koivo.** 1988. Dynamics and simulation of compliant motion of a manipulator. *IEEE J. of Robotics and Automation* 4(2). 163-173.
- Kelly, R.** 1989. *Control de movimiento de robots manipuladores*. México: F.I.. UNAM.
- Khalil, H. K.** 1996. *Nonlinear Systems*. 2a. edición edn. USA: Prentice Hall. 734p.
- Khalil, W. y E. Dombre.** 2002. *Modeling, identification and control of robots*. London: HPS. 479p.
- Liu, Y.-H. y S. Arimoto.** 1996. Implicit and explicit force controllers for rheoholonomically constrained manipulators and their extensions to distributed cooperation control. *13<sup>th</sup> Triennial World Congress*. IFAC. San Francisco, USA.
- MaClamroch, N. y D. Wang.** 1988. Feedback stabilization and tracking of constrained manipulators. *IEEE Trans. on Automatic Control* AC-33(5). 419-426.

- MaClamroch, N. y D. Wang.** 1990. Linear feedback control of position and contact force for a nonlinear constrained mechanism. *Trans. on the ASME J. Dyn. Sys. Meas. and control* 112. 640-645.
- Nevins, J. y D. Whitney.** 1973. The force vector assembler concept. *Proceedings 1st CISM-IFTOMM Symp. on theory and practice of robots and manipulators.* UDINE. Italy.
- Paul, R. y B. Shimano.** 1976. Compliance and control. *Proc. JACC* 694-699.
- Queiroz, M. S., J. Hu y D. Watson.** 1997. Adaptive position/force control of robot manipulators without velocity/force measurements: Theory and experimentation. *IEEE Transactions on Systems, Man, and cybernetics* 27(5). 796-809.
- Queiroz, M. S., D. Watson. y T. Burg.** 1996. Position/force control of robots manipulators without velocity/force measurements. *Conferece On Robotics and Automation.* Minnesota, USA. 2561-2566.
- Raibert, M. y J. Craig.** 1981. Hybrid position/force control of manipulators. *Trans. ASME J. Dyn. Sys. Meas. and control* 102. 126-133.
- Rothchild, R. y R. Mann.** 1966. An emg-controlled force sensing proportional rate elbow prosthesis. *Proc. 1966 Symp. on Biomedical Eng.* Milwaukee.
- Sciavicco, L. y B. Siciliano.** 2000. *Modelling and Control of Robot Manipulators.* : Springer. 371p.
- Spong, M. y M. Vidyasagar.** 1989. *Robot Dynamics and control.* Singapore: John Wiley & Sons.
- Whitney, D.** 1972. The mathematics of coordinated control of prosthetic arms and manipulators. *Trans. ASME J. Dyn. Sys. Meas. and control* 303-309.
- Whitney, D.** 1977. Force feedback control of manipulator fine motions. *ASME J. Dyn. Sys. Meas. and control* 91-97.
- Whitney, D.** 1987. Historical perspective and state of the art in robot force control. *The International Journal of Robotics Research.*