



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería

---

## **FACULTAD DE INGENIERÍA**

# **DESPLAZAMIENTO DE UN FLUIDO NO-NEWTONIANO, CON LEY DE POTENCIA, CONFINADO ENTRE PLACAS PLANAS**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRO EN INGENIERÍA**

**PRESENTA:**

**CARLOS ESCOBAR DEL POZO**



**ASESOR: DR. FEDERICO MÉNDEZ LAVIELLE**

**MÉXICO, D. F.**

**2004**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

*A mi familia,  
en especial a mis padres y hermano*

**Mis más sinceros agradecimientos:**

Al Dr. Federico Méndez Lavielle por sus comentarios, sus consejos, su tiempo y sobre todo por su confianza.

Al Dr. Francisco Solorio Ordaz y el Dr. Jaime Cervantes de Gortari por sus enseñanzas dentro y fuera del salón de clase.

Al CONACYT por su apoyo sin el cual no se hubiera realizado este trabajo.

Al Departamento de Termoenergía y Mejoramiento Ambiental, de la Facultad de Ingeniería UNAM, por brindarme los recursos necesarios para la realización del trabajo.

## RESUMEN

En este trabajo se presenta un estudio analítico y numérico con el fin de obtener el espesor de la capa residual, cuando un fluido de viscosidad despreciable desplaza a un fluido no newtoniano, caracterizado por la ley de potencia, que se encuentra confinado entre dos placas planas.

Se presenta una visión general del fenómeno del desplazamiento de un fluido por otro. Se realiza una breve descripción de dos aplicaciones de gran importancia en las cuales dicho fenómeno se presenta: recuperación de petróleo y moldeado de partes asistido por inyección de gas. A continuación se describen brevemente los fluidos no newtonianos, dando mayor relevancia a los fluidos pseudoplásticos.

Posteriormente se presenta la deducción del modelo matemático; dicho modelo describe la frontera del frente entre el fluido desplazante y el desplazado, así como el movimiento de éste último; con lo cual se llega a una ecuación que determina el espesor de capa residual de fluido. Para la obtención del modelo se utiliza la teoría de perturbación y partiendo de los conceptos de la teoría, se concluye que el fenómeno bajo estudio es un problema de perturbación singular, por lo que se emplea la técnica de acoplamiento asintótico para la deducción del modelo, en donde las expansiones se desarrollan en términos del número capilar  $Ca$ .

Una vez que se tiene la ecuación que determina el espesor de la capa residual se obtienen resultados para diferentes valores del índice de potencia. En primer lugar se compara la solución para un fluido newtoniano con los resultados de otros autores, después se presenta la fracción de cobertura cuando se tienen fluidos no-newtonianos. A partir de estos resultados se obtienen conclusiones de la influencia de diferentes parámetros sobre el espesor de capa residual.

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Generalidades . . . . .	1
1.2. Fluidos no-newtonianos . . . . .	4
1.3. Antecedentes . . . . .	5
<b>2. Análisis del problema</b>	<b>11</b>
2.1. Modelo físico . . . . .	11
2.2. Modelo matemático . . . . .	12
2.2.1. Ecuaciones flujo no-newtoniano . . . . .	12
2.2.2. Condiciones en la frontera . . . . .	14
2.3. Análisis de órdenes de magnitud . . . . .	17
2.3.1. Región capilar estática . . . . .	18
2.3.2. Región de transición . . . . .	20
2.4. Ecuaciones adimensionales . . . . .	21
2.4.1. Región capilar estática . . . . .	21
2.4.2. Región de transición . . . . .	23
2.5. Metodo de solución . . . . .	25
2.5.1. Región capilar estática . . . . .	26
2.5.2. Región de transición . . . . .	28
2.5.3. Condición de acoplamiento . . . . .	32
<b>3. Resultados</b>	<b>37</b>
3.1. Resultados: fluido newtoniano . . . . .	37
3.2. Resultados para diferentes índices de potencia . . . . .	40
<b>4. Conclusiones</b>	<b>50</b>
<b>5. Apéndices</b>	<b>52</b>
5.1. Apéndice A . . . . .	52
5.2. Apéndice B . . . . .	54
5.3. Apéndice C . . . . .	56

## NOMENCLATURA

$Bo$	Número de Bond $Bo = \frac{\rho g R^2}{\sigma}$
$Ca$	Número Capilar $Ca = \frac{KU^n R^{1-n}}{2^{n-1}\sigma}$
$h(x)$	Distancia del perfil de la burbuja a partir de la placa [ $m$ ]
$K$	Índice de consistencia $\left[\frac{kg \cdot s^{n-2}}{m}\right]$
$L$	Distancia entre el eje de región capilar estática y punta del perfil [ $m$ ]
$l$	Distancia entre los sistemas de referencia [ $m$ ]
$m$	Fracción de fluido residual en las placas
$n$	Índice de potencia
$P$	Salto de presión $\left[\frac{N}{m^2}\right]$
$R$	Distancia entre las placas [ $m$ ]
$Re$	Número de Reynolds $Re = \frac{2^{n-1}\rho U^{2-n} R^n}{K}$
$T_{ij}$	Tensor de esfuerzos
$t$	Espesor de capa, en la región de espesor constante [ $m$ ]
$U$	Velocidad de la burbuja $\left[\frac{m}{s}\right]$
$u$	Componente de la velocidad en la dirección $x$
$v$	Componente de la velocidad en la dirección $y$
$(\hat{\quad})$	Variables región capilara estática
$(\tilde{\quad})$	Variables región de transición

## Símbolos Griegos

$\tau_{ij}$	Esfuerzo en el plano $i$ dirección $j$ $\left[\frac{N}{m^2}\right]$
$\gamma$	Rapidez de deformación $\left[\frac{1}{s}\right]$
$\varepsilon_{ij}$	Tensor de deformación
$\mu$	Viscosidad fluidos newtonianos [ $Pa \cdot s$ ]
$\rho$	Densidad del fluido $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$
$\sigma$	Tensión superficial $\left[\frac{N}{m}\right]$

# 1. Introducción

En el presente trabajo se estudia el desplazamiento de un fluido no-newtoniano, que se encuentra confinado entre dos placas planas, por un fluido de viscosidad despreciable. Se utiliza la ley de potencia para caracterizar al fluido no-newtoniano. Se supone una separación entre las placas pequeña además que el fluido desplazante se mueve a una velocidad muy pequeña, esto tiene como consecuencia que el número capilar y número de Reynolds asociados al fenómeno sean muy pequeños. Por simplicidad se considera el caso en estado permanente y que la tensión superficial entre los fluidos es constante.

El objetivo de la presente tesis es determinar mediante un modelo matemático el espesor de la capa residual,  $t$ , y el salto de presión entre los fluidos; así como mostrar la relación que existe entre el espesor residual con dos parámetros adimensionales: el número capilar,  $Ca$ , y el índice de potencia,  $n$ . Para lograr dicho objetivo se emplea la técnica de acoplamiento asintótico para resolver el conjunto de ecuaciones que modelan el problema físico, en el límite del número capilar pequeño.

## 1.1. Generalidades

Los efectos de tensión superficial son la causa de muchos fenómenos que se observan en el comportamiento de los líquidos, de los cuales pocos son comprendidos ampliamente en la actualidad. Dentro de los ejemplos más conocidos están la formación de burbujas de jabón; el rompimiento de un chorro de agua en pequeñas gotas, cuyos principios físicos son la base en el funcionamiento de las impresoras de inyección de tinta; la columna de líquido ascendente en un tubo, este fenómeno se presenta cuando se tiene un tubo capilar sumergido en un recipiente que contiene un fluido, dentro del tubo se forma una columna de fluido cuya superficie libre alcanza una altura mayor al nivel de la superficie fuera del tubo; etc. Se podrían seguir nombrando ejemplos que resultan de la fuerza de tensión superficial entre líquidos, gases y sólidos, debido a que son numerosos en la naturaleza.

A todos los ejemplos anteriormente mencionados se les llama fenómenos de capilaridad, éstos se pueden definir como los fenómenos resultantes del hecho de que una superficie libre de líquido tenga un ángulo de contacto finito o igual a cero con una pared sólida y consigue dicho ángulo al ponerse en contacto con la pared. Comúnmente se piensa en movimiento capilar al hablar de la ascensión de líquidos en tubos pequeños o en un medio poroso; sin embargo, este concepto es más general y se define como cualquier flujo que esté gobernado, en alguna medida, por fuerzas asociadas a la tensión superficial [1].

La capilaridad y el movimiento capilar son fenómenos de gran aplicación en un amplio rango de procesos técnicos. Dentro de las aplicaciones más importantes se encuentran los recubrimientos (coating flows), mediante los cuales se deposita una capa muy delgada de fluido en superficies sólidas, frecuentemente se emplean las características de tensión superficial en la película para lograr un mejor recubrimiento; la producción de semiconductores, al aprovechar los gradientes en la tensión superficial para hacer crecer cristales. En esta última aplicación la tensión superficial puede no ser uniforme debido a diferentes razones, por ejemplo: el material en el que se deposita la capa, gradientes de temperatura, variaciones de la carga eléctrica, etc., que tiene como consecuencia un desbalance de las fuerzas que finalmente produce movimientos del fluido.

En el presente trabajo se estudia la penetración de una burbuja en un tubo lleno de fluido no-newtoniano, el cual es un problema que tiene un tratamiento matemático muy similar a los flujos de recubrimiento [2]. El fenómeno del desplazamiento de un fluido por otro tiene diversas aplicaciones tales como el proceso de moldeado asistido por inyección de gas, la producción de capas delgadas de fibras, recubrimiento de convertidores catalíticos y la recuperación de petróleo. En esta última aplicación los yacimientos presentan grietas con longitudes muy grandes en comparación con su espesor, que se pueden idealizar como placas planas.

Al explotar un yacimiento petrolero una cantidad importante de petróleo se queda atrapada dentro del manto, por lo que es necesario extraer de manera económica el petróleo atrapado. Para recuperar dicho petróleo se han desarrollado varias técnicas de recuperación mejorada y secundaria, una de ellas es la inyección alternada de agua y gas (water alternating gas injection,

WAG) [3], que consiste en inyectar agua y gas de forma alternada en el manto, que es un medio poroso. El frente de fluido inyectado desplaza al petróleo, que es un fluido no-newtoniano, hasta que se lleva a un sitio en donde es posible extraer dicho petróleo. Dentro de estas técnicas resulta de gran importancia determinar el espesor de capa que van dejando a su paso las burbujas de gas, ya que se desea obtener la mayor cantidad posible de petróleo. Se han hecho diversos esquemas numéricos con el fin de realizar una simulación de lo que sucedería al inyectar el gas (y/o el agua) con el fin de determinar las condiciones más adecuadas para extraer la mayor cantidad de petróleo. En la técnica WAG para recuperación secundaria de petróleo se presenta un número capilar  $10^{-4} < Ca < 10^{-6}$ .

El moldeado asistido por la inyección de gas es un método de conformado en polímeros para piezas simétricas, algunas de las aplicaciones más comunes son: molduras y parachoques automotrices, mangos, tubos, piezas simétricas, cubiertas y armazones de máquinas, mangos, muebles, cubiertas de televisores. El proceso se puede describir en tres pasos: el primer paso es el llenado del molde con el polímero, 75-98 % del volumen de la cavidad; después de un tiempo residual se presenta el segundo paso que consiste en inyectar gas a una cierta presión, usualmente nitrógeno, para que después ocurra el tercer paso, que se da debido a la disminución volumétrica del polímero; el plástico se solidifica al mismo tiempo que el gas se expande creando la contracción del plástico. En este proceso es de gran importancia determinar el espesor de la capa de polímero que queda una vez que pasa la burbuja (como lo muestra el trabajo de Koelling y Kaminski [4]), por lo que es necesario un modelo con el que se pueda determinar dicha incógnita. Con el fin de obtener más datos y llegar al modelo se han realizado diversos trabajos experimentales, hasta ahora sólo se han desarrollado correlaciones para el proceso de moldeado asistido por la inyección de gas; así también se ha demostrado que el espesor de la parte moldeada depende del tiempo residual de la burbuja, este tiempo se define para un punto como la diferencia de tiempo entre el momento en que pasa el frente de polímero y el momento en que pasa el frente de la burbuja.

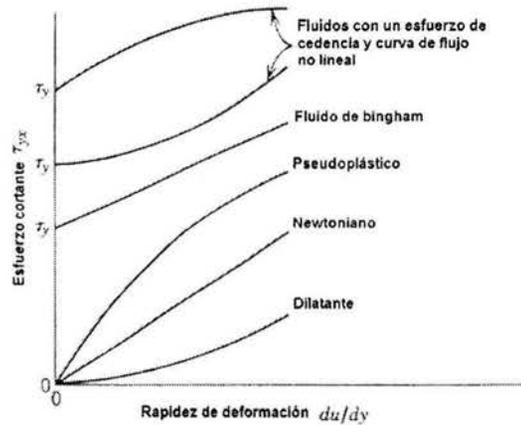


Figura 1: Curvas de flujo, esfuerzo cortante contra rapidez de deformación

## 1.2. Fluidos no-newtonianos

Los fluidos se pueden clasificar de acuerdo a la respuesta a un esfuerzo cortante aplicado de manera externa; atendiendo a esta clasificación podemos distinguir dos grandes grupos: los fluidos newtonianos y los no-newtonianos. Se puede definir como fluido no-newtoniano aquél que en la curva esfuerzo cortante contra rapidez de deformación, fig. 1, no presenta un comportamiento lineal para una presión y temperatura dada.

Dentro de los fluidos no-newtonianos podemos distinguir tres categorías principales: fluidos independientes del tiempo, fluidos dependientes del tiempo y fluidos viscoelásticos. En los primeros la rapidez de deformación en un punto dado sólo depende del esfuerzo cortante instantáneo en dicho punto. Los fluidos dependientes del tiempo se caracterizan porque la rapidez de deformación depende de la magnitud y de la historia del esfuerzo cortante (es decir, de la duración o los intervalos de tiempo que se aplica dicho esfuerzo). Por último los fluidos viscoelásticos son sustancias que muestran características de fluidos ideales y elasticidad de sólidos, teniendo una recuperación parcial después de que se aplicó un esfuerzo.

Los fluidos independientes del tiempo a su vez se dividen en fluidos viscoplásticos, que son aquellos fluidos que presentan un esfuerzo de fluencia; pseudoplásticos, cuyo valor del cortante disminuye conforme la rapidez de deformación aumenta; y dilatantes, en donde el valor del cortante aumenta a medida de que la rapidez de deformación se incrementa; estos dos últimos no presentan un esfuerzo de cedencia.

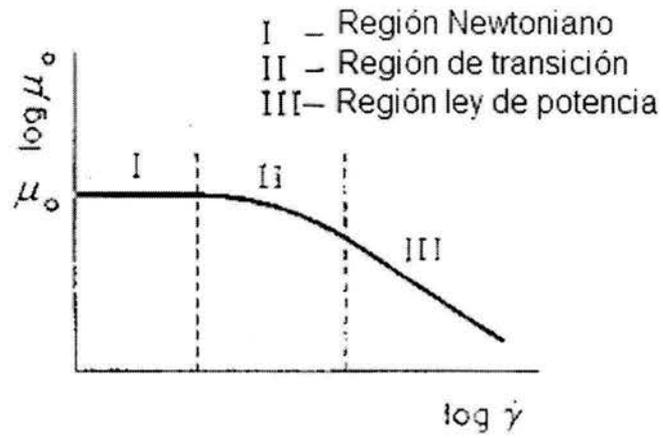
La mayoría de los materiales no-newtonianos se encuentran en la categoría de los pseudoplásticos; su curva de comportamiento se muestra en fig. 1 y se caracterizan por tener un comportamiento lineal para muy alta y muy baja rapidez de deformación,  $\frac{du}{dy}$ , en estos casos se tiene un comportamiento lineal y se puede obtener una *viscosidad a esfuerzo infinito*,  $\mu_\infty$ , cuando la rapidez de deformación es alta, y la *viscosidad a rapidez de deformación cero*,  $\mu_0$ , cuando se está cerca del origen. Para observar mejor el comportamiento de los fluidos pseudoplásticos se propone una gráfica log-log de la viscosidad aparente,  $\mu_a$ , contra la rapidez de deformación, la fig. 2 muestra el comportamiento de los fluidos pseudoplásticos así como ejemplos de éstos.

De la fig. 2 se pueden observar tres regiones: cuando se aplican bajas velocidades de deformación se tiene un comportamiento newtoniano (región I), es decir, la viscosidad aparente es constante. Al aumentar las velocidades de deformación la viscosidad aparente comienza a decrecer (región II, región de transición) hasta que se estabiliza en una línea recta (región III) con pendiente negativa, en dicha región el fluido se comporta de acuerdo con la ley de potencia.

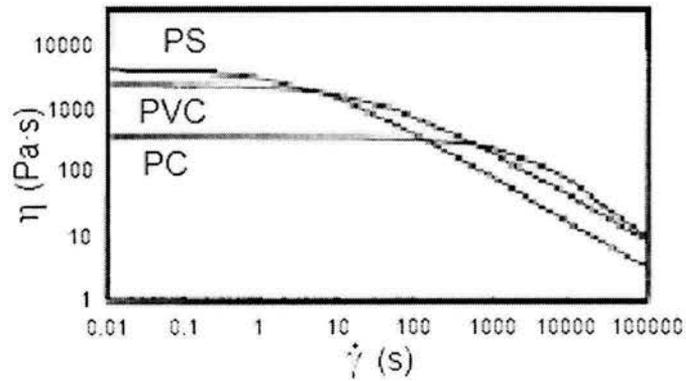
Para cada fluido comentado se tiene una serie de modelos matemáticos que son discutidos en detalle en textos como Harris [5], Skelland [6], Bird et al. [7]. Además de dichos modelos, en las referencias citadas se pueden obtener las características de flujo de los diferentes fluidos no-newtonianos.

### 1.3. Antecedentes

Se han desarrollado diversos trabajos, tanto experimentales como teóricos, con el objetivo de determinar el espesor de la capa de fluido, así como identificar las variables principales. La mayoría de los estudios toman en cuenta que el fluido es newtoniano, aunque en los últimos años se han hecho trabajos



Curva típica de un fluido pseudoplástico



Curva para PVC, PS, PC

Figura 2: Curvas de flujo log-log

experimentales con fluidos no newtonianos debido a la gran importancia de éstos últimos.

El primer estudio fue realizado por Fairbrother y Stubbs [8], donde se analiza la penetración de una burbuja a través de un líquido en un tubo circular. Fairbrother y Stubbs demuestran experimentalmente que la fracción de cobertura,  $m$ , está en función del número capilar,  $Ca$ , siendo  $m$  la fracción de fluido que queda dentro del tubo una vez que pasa la burbuja y  $Ca$  un número adimensional que relaciona las fuerzas viscosas con las fuerzas de tensión superficial. Con los resultados se obtiene la siguiente expresión empírica para valores  $10^{-5} < Ca < 10^{-2}$ , ec. (1.1), que relaciona la fracción del fluido con el número capilar:

$$m = Ca^{1/2}, \quad (1.1)$$

donde el número capilar se define como:  $Ca = \frac{\mu U}{\sigma}$ .

Taylor [9] generalizó los resultados obtenidos por Fairbrother y Stubbs y demuestra que la ec. (1.1) sólo es válida para  $Ca < 0,09$ . Para esto realiza experimentos en un tubo horizontal con fluidos de distintas viscosidades; el tubo se llena de alguno de los fluidos y se inyecta aire en un extremo de tal forma que se forme una burbuja que se mueva a velocidad constante. La fracción de cobertura,  $m$ , se mide de manera indirecta pesando el fluido que es expulsado del tubo y comparando con lo que se introdujo al tubo. Taylor presenta una gráfica de la fracción contra el número capilar, fig. 3, donde se observa que conforme el número capilar crece la fracción de cobertura tiende a un valor asintótico de 0.55 para los diferentes fluidos utilizados.

Bretherton [10] es el primero en desarrollar una teoría para este tipo de problemas, partiendo de las siguientes consideraciones: a) flujo unidireccional en la región de espesor constante; b) toma en cuenta la aproximación de la teoría de lubricación para la región de transición; c) la velocidad de la burbuja y el diámetro del tubo son suficientemente pequeños para que los términos inerciales y los efectos de la fuerza de gravedad sean despreciables en comparación con los términos viscosos, efectos capilares y salto de presión. Tomando en cuenta estas consideraciones obtiene una solución aproximada del espesor para el límite en el que el número capilar sea muy pequeño ( $Ca \rightarrow 0$ ), y obtiene la siguiente expresión:

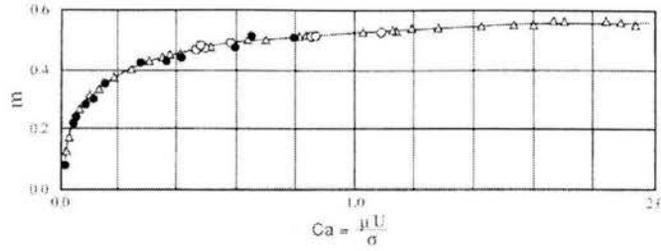


Figura 3: Gráfica fracción de cobertura ( $m$ ) contra el número capilar ( $Ca$ ), Taylor [9]

$$m \simeq 1,29 (3Ca)^{2/3}. \quad (1.2)$$

Bretherton también realizó experimentos para validar los resultados de la teoría. La teoría presenta una discrepancia considerable con los resultados obtenidos de los experimentos. Para valores del número capilar mayores a  $10^{-4}$  la fracción de cobertura se comporta como predice la ec. (1.2); sin embargo, para velocidades muy pequeñas (es decir valores  $Ca \sim 10^{-6}$ ) el valor medido de la fracción de cobertura es mayor que el que predice la teoría. Bretherton trató de explicar las razones por las cuales se presentaba dicha discrepancia pero no llegó a una conclusión sólida. Más tarde Telezke et al. [11] explicaron que las diferencias entre los experimentos y la teoría se deben fundamentalmente a la presencia de impurezas en la superficie de la burbuja.

Goldsmith y Mason [12] realizaron una visualización del flujo, tanto de la burbuja como del fluido desplazado, cuando se tiene el movimiento de una burbuja inducido por la fuerza de gravedad en un tubo vertical. Con los experimentos determinaron el espesor de la capa de fluido que queda una vez que pasa la burbuja así como el perfil de velocidades en el fluido desplazado. Este trabajo se lleva a cabo para tres casos: a) cuando el fluido desplazado tiene una viscosidad despreciable en comparación con el desplazante; b) cuando la burbuja presenta una viscosidad despreciable en comparación con la viscosidad del fluido desplazado; c) cuando ambos fluidos presentan viscosidad del mismo orden de magnitud; en este último caso se observa que dentro

de la burbuja se presenta un patrón de recirculación del fluido. También determinan el perfil de la burbuja, tanto para burbujas de tamaño finito como para burbujas infinitas, entendiéndose esto cuando la longitud de la burbuja,  $l_b$ , presenta la relación  $l_b \gg 2R$ , donde  $R$  es el radio del tubo.

Cox [13, 14] extendió el trabajo realizado por Taylor, estudiando la penetración de una burbuja de tetracloruro de carbono en oro fundido contenido en tubos capilares, para números capilares que van desde cero hasta diez. En este estudio se mide el espesor de la capa mediante fotografías que se toman al tiempo que avanza la burbuja. Se realiza un análisis teórico despreciando los términos inerciales y la gravedad. En este trabajo se encuentra que la fracción de cobertura tiende a un valor asintótico,  $m = 0,60$  para números capilares grandes, lo cual está en concordancia con lo estimado por Taylor con  $m = 0,55$ .

Park y Homsy [15] desarrollaron la teoría para flujo bifásico en una celda de Hele Shaw, las cuales se utilizan para modelar medios porosos. Formularon una teoría con una doble expansión asintótica para el número capilar y un parámetro de espesor. En la expansión para el número capilar se tiene un problema singular por lo que se emplea la técnica de acoplamiento asintótico (matching asymptotic expansion), mientras que para la expansión con el parámetro de espesor es un problema regular [16]; con este desarrollo demuestran que la teoría desarrollada por Bretherton para determinar el espesor y el salto de presión, es válida en un problema de dos dimensiones.

Schwartz et. al. [17] realizaron experimentos sobre el movimiento de burbujas de tamaño variable dentro de un tubo horizontal. Con dichos experimentos se muestra que el espesor de capa que deja la burbuja a su paso depende de la velocidad y la longitud de la burbuja. Se observa que para burbujas cuya longitud es menor a 20 veces el radio del tubo se tiene un comportamiento como el que predice la teoría de Bretherton. Schwartz encontró que para burbujas con una longitud muchas veces mayores al diámetro del tubo el espesor de capa está en función, solamente, del número capilar. También se mostró que los efectos de la fuerza de gravedad se pueden despreciar para burbujas de longitud mediana y pequeña.

Huzyak y Koelling [18] realizaron experimentos para la penetración de una burbuja en un tubo que se encuentra lleno de un fluido viscoelástico, con el objetivo de identificar los efectos de la elasticidad del fluido en el espesor de

la capa que deja el paso de otro fluido. Llevaron a cabo el mismo experimento que Taylor [9], confirmando los resultados obtenidos en dicho trabajo. Una vez hecho esto llevan a cabo los experimentos con los fluidos viscoelásticos. Se caracteriza la fracción de cobertura  $m$  en términos del número capilar  $Ca = \frac{\mu U}{\sigma}$  y el número de Deborah  $De = \lambda \gamma_w$ , donde  $\lambda$  es un tiempo de relajación característico del material y  $\gamma_w$  es la rapidez de deformación en la pared del tubo. Se observa que la fracción de cobertura presenta el mismo comportamiento que para los fluidos newtonianos cuando se tiene  $De < 1$ ; sin embargo, la fracción comienza a aumentar cuando  $De \sim 1$ . También se encuentra que la fracción de cobertura es independiente del diámetro del tubo para los fluidos newtonianos.

Dentro de los trabajos con fluidos no newtonianos, Kamisli y Ryan[19] presentan resultados experimentales, para el caso de un fluido newtoniano y para dos fluidos caracterizados con la ley de potencia, de la fracción de cobertura en un tubo circular. En este trabajo también se presenta la solución teórica, usando la teoría de perturbación, para el problema en un tubo con sección circular; sin embargo, los resultados experimentales no coinciden con los teóricos en el caso de un fluido pseudoplástico,  $n \neq 1$ . Kamisli [20] realiza un desarrollo teórico en el problema de recubrimientos en paredes verticales e inclinadas, que es un problema con un tratamiento matemático muy similar al que se emplea para el desplazamiento de un fluido, cuando se tiene un fluido caracterizado con la ley de potencia. En este último caso presenta los resultados teóricos para diferentes índices de potencias

## 2. Análisis del problema

### 2.1. Modelo físico

Existen diversas relaciones matemáticas que permiten modelar las características de flujo de un fluido no-newtoniano. Para el presente estudio se eligió el modelo de ley de potencia, también conocido como *modelo de Ostwald de Waele*. Se seleccionó este modelo debido a que la mayoría de los fluidos no-newtonianos son pseudoplásticos (caracterizados por índices de potencias menores que uno,  $n < 1$ ), por la facilidad para recuperar el caso de un fluido newtoniano y con esto comparar los resultados, además por ser el modelo más sencillo para el análisis matemático.

El modelo físico simplificado que se estudia en el presente trabajo se muestra en la fig. 4. Un fluido viscoso no-newtoniano (fluido 1), caracterizado por la ley de potencia, se encuentra confinado entre dos placas planas horizontales, separadas una distancia  $2R$ , lo suficientemente pequeña para que los efectos gravitacionales sean despreciables, por lo que el número de Bond es muy pequeño  $Bo \ll 1$ , y se considera que el sistema está en equilibrio termodinámico. La longitud transversal de las placas es mucho mayor que la separación entre ellas, por lo tanto se considera que tiene una longitud transversal infinita. En uno de los extremos se inyecta un fluido con viscosidad despreciable (fluido 2) que avanza con una velocidad constante  $U$  expulsando al fluido 1 que se encontraba originalmente entre las placas.

Para el presente estudio se supone que el fluido 1 moja totalmente la superficie de las placas. Se considera que la tensión superficial entre los dos fluidos es constante y conocida. Por otra parte la velocidad de la burbuja,  $U$ , es lo suficientemente pequeña para considerar que el perfil de la burbuja no se deforma conforme avanza. El estudio se realiza en una zona lo suficientemente alejada de la entrada de las placas con el fin de considerar que se encuentra en régimen permanente.

Los valores de la viscosidad y la tensión superficial, por ejemplo en el caso del petróleo (que es la principal motivación del presente estudio), son

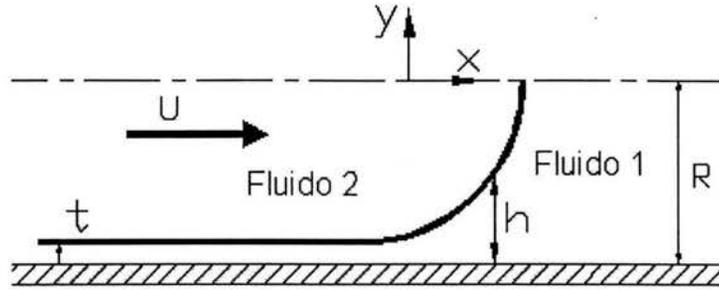


Figura 4: Modelo físico simplificado

del orden de  $\mu \sim 10^{-3} [Pa \cdot s]$  y  $\sigma \sim 10^{-2} [\frac{N}{m}]$ . De acuerdo a estos valores de viscosidad y tensión superficial se considera que la velocidad del perfil y el espacio entre las placas son lo suficientemente pequeños para considerar que  $Re \ll 1$  y  $Ca \ll 1$ .

## 2.2. Modelo matemático

### 2.2.1. Ecuaciones flujo no-newtoniano

**Ecuación de continuidad** La ecuación de continuidad para un flujo bidimensional, con densidad constante y en régimen permanente; en coordenadas cartesianas para el fluido 1, se puede escribir como:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.1)$$

Donde  $u$  es la componente de la velocidad en la dirección  $x$  y  $v$  la componente de la velocidad en la dirección  $y$ .

**Ecuación de la conservación de cantidad de movimiento** Las ecuaciones de conservación de cantidad de movimiento en su forma más general en coordenadas cartesianas, para un flujo en régimen permanente son:

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) \quad (2.2)$$

$$\rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \right) \quad (2.3)$$

donde  $\tau_{xx}$ ,  $\tau_{yy}$ ,  $\tau_{xy}$  y  $\tau_{yx}$  son los esfuerzos cortantes que se encuentran definidos por la ley de potencia que está dada por la siguiente relación:

$$\tau_{ij} = 2K \varepsilon_{ij}^n \quad (2.4)$$

Donde  $K$  es el índice de consistencia y tiene unidades de  $[MT^{n-2}L^{-1}]$ ,  $n$  es el índice que caracteriza al fluido y es adimensional (en el caso de  $n < 1$  se está hablando de un fluido pseudoplástico, cuando  $n = 1$  es un fluido newtoniano y si  $n > 1$  se trata de un fluido dilatante),  $\tau_{ij}$  es el tensor de esfuerzos cortantes y  $\varepsilon_{ij}$  es el tensor de deformación definido de la siguiente forma:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Sustituyendo los esfuerzos cortantes (2.4) en las ecs. de movimiento (2.2) y (2.3), se obtienen las ecuaciones de cantidad de movimiento para un fluido caracterizado por la ley de potencia:

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + 2K \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \right]^n \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right]^n \right) \right] \quad (2.5)$$

$$\rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + 2K \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right]^n \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \left[ \frac{\partial v}{\partial y} \right]^n \right) \right] \quad (2.6)$$

### 2.2.2. Condiciones en la frontera

Las ecuaciones de conservación y cantidad de movimiento, presentadas anteriormente, se deben resolver teniendo en cuenta las condiciones en la frontera. La condición en la frontera más simple ocurre cuando un fluido está en contacto con una superficie sólida e impermeable. A esta condición se le conoce como de no deslizamiento, la cual acopla el vector velocidad del fluido con la velocidad de la superficie. En este caso la superficie de la placa no se mueve por lo que la condición de no deslizamiento se expresa de la siguiente manera:

$$u = 0 \text{ en } y = 0 \quad (2.7)$$

Para determinar el espesor de la capa de fluido que queda una vez que pasa el frente se deben definir las condiciones cinemática y dinámica de la interfaz que separa los fluidos, por lo que es importante definir la posición de dicha interfaz, fig. 5, que se define como:

$$h = h(x) \quad (2.8)$$

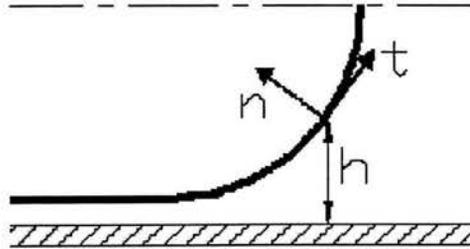


Figura 5: Geometría de la interfaz axisimétrica

En un punto de la superficie, definido por  $h(x)$ , se tienen los vectores normal y tangencial a la superficie  $\vec{n}$  y  $\vec{t}$ , respectivamente, mediante las expresiones:

$$\vec{n} = n_x i + n_y j, \quad (2.9)$$

$$\vec{t} = t_x i + t_y j, \quad (2.10)$$

Donde las componentes de los vectores se pueden escribir en función de la geometría, es decir, de la posición de la interfaz de la siguiente manera:

$$n_x = -t_y = -h'(1 + h'^2)^{-1/2} \quad (2.11)$$

$$n_y = t_x = (1 + h'^2)^{-1/2} \quad (2.12)$$

donde  $h' = \frac{dh}{dx}$

La frontera entre los fluidos es impermeable y la condición cinemática que afirma que el fluido no atraviesa la superficie se expresa de la siguiente manera:

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = un_x + vn_y = 0 \quad (2.13)$$

Desarrollando la ec. (2.13) se tiene lo siguiente:

$$v = uh'. \quad (2.14)$$

Las condiciones dinámicas son más complejas. La primera de estas condiciones describe que no hay esfuerzos tangenciales en la superficie libre, esto se debe a que la tensión superficial es constante a lo largo de toda la superficie y que el fluido desplazante tiene una viscosidad despreciable en comparación con el fluido desplazado. La segunda condición dinámica establece que los esfuerzos en el fluido 1, normales a la superficie, se equilibran con los esfuerzos normales provocados por la tensión superficial.

Para definir las condiciones de esfuerzos en la frontera se requiere el tensor de esfuerzos  $T_{ij}$  en un punto de la interfaz y que se define de la siguiente manera:

$$T_{ij} = \tau_{ij} - I_{ij}P \quad (2.15)$$

Donde  $I_{ij}$  es la matriz identidad,  $P$  la presión ejercida por el fluido y  $\tau_{ij}$  el tensor de esfuerzos cortantes definido por la ec. (2.4). Usando esta definición, el tensor de esfuerzos para un fluido no newtoniano descrito por la ley de potencia es:

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} 2K \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^n - P & 2K \left( \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] \right)^n \\ 2K \left( \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] \right)^n & 2K \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^n - P \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Como ya se había mencionado se considera que la tensión superficial entre los fluidos es constante, además el fluido desplazante tiene viscosidad despreciable en comparación con el fluido desplazado. Por estas razones los esfuerzos tangenciales en la frontera son nulos. Entonces la condición en la frontera de esfuerzos cortantes se escribe de la siguiente forma:

$$(T_{ij} \cdot n) \cdot t = T_{xx}n_xn_y + T_{xy}n_y^2 - T_{yx}n_x^2 - T_{yy}n_xn_y = 0 \quad (2.17)$$

Desarrollando la ec. (2.17) y sustituyendo las componentes de los vectores así como sus correspondientes elementos del tensor de esfuerzos definidos en la ec. (2.16) se llega a la siguiente expresión:

$$2K \left( \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] \right)^n (1 - h'^2) - 2K \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^n - \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^n \right] h' = 0 \quad (2.18)$$

La condición de esfuerzos normales se expresa de la siguiente manera:

$$(T_{ij} \cdot n) \cdot n = T_{yy}n_y^2 + T_{xx}n_x^2 + T_{xy}n_xn_y + T_{yx}n_xn_y = -\sigma \left( \frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y} \right) \quad (2.19)$$

donde  $\sigma$  es el coeficiente de tensión superficial.

En la ec. (2.19) se tienen dos radios principales, en este caso el problema sólo tiene curvatura en  $x$ , por lo que sólo se tiene un radio principal. Dicho radio se describe, en términos de  $h(x)$ , por la siguiente ecuación [22]:

$$\frac{1}{R} = \frac{h''}{[1 + h'^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (2.20)$$

Sustituyendo los valores de las componentes del vector normal, tensor de esfuerzos y el inverso del radio, ec. (2.20), en la ec. (2.19) se llega a la condición de esfuerzos normales dada por la siguiente expresión:

$$\frac{2K}{(1 + h'^2)} \left[ 2 \left( \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] \right)^n h' - \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^n h'^2 - \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^n \right] + P = \frac{\sigma h''}{(1 + h'^2)^{3/2}} \quad (2.21)$$

### 2.3. Análisis de órdenes de magnitud

Con el objetivo de obtener parámetros adimensionales que relacionen las propiedades físicas del fenómeno, la dependencia funcional de las variables físicas de interés con variables conocidas y las escalas características del problema, se realiza un análisis de órdenes de magnitud para las regiones capilar estática y de transición que a continuación se describen.

Como se puede apreciar en la fig. 6 el dominio del problema se divide en tres regiones: región de espesor constante (región I); el frente o perfil de la burbuja (región II); y la región estática (región III). En la región de espesor constante se usa la teoría de lubricación para determinar el flujo de la capa de fluido que deja a su paso el frente de la burbuja. En esta región el problema se puede resolver una vez que se conoce el espesor constante de capa de fluido. Suponemos que en la región III el fluido se mueve con una velocidad cercana a la velocidad de la burbuja. El sistema coordenado que se encuentra en el centro de la burbuja, fig. 6 (sistema de coordenadas  $\hat{x} - \hat{y}$ ), se mueve a la misma velocidad que la burbuja. Tomando dicho sistema como referencia el perfil de la burbuja y el fluido que se encuentra delante de ella se mantiene estático, por lo que se considera a la región III como una región estática. La región II requiere de un estudio detallado para resolver el problema completo.

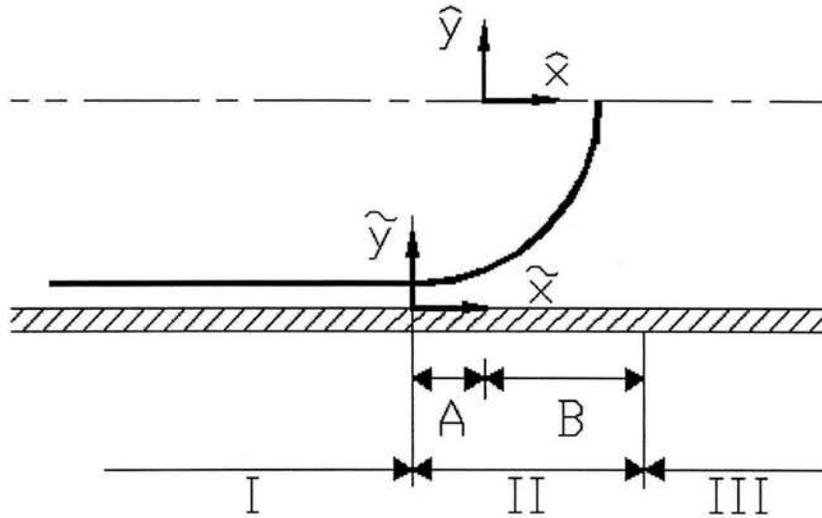


Figura 6: Sistema de coordenadas para las diferentes regiones

Analizando el fenómeno con las técnicas asintóticas de perturbación, cuando el número capilar tiende a cero, se observa que la solución de la región estática no se acopla de forma suave con la solución de la región de espesor constante. Por lo tanto, para obtener la solución completa del problema, se requiere de una zona donde se acoplen ambas soluciones. Esta zona es la región del frente de la burbuja, que a su vez se divide en dos sub-regiones: la región capilar estática (región B), donde el perfil de la burbuja se acerca a la forma circular y las fuerzas dominantes son las relacionadas con la tensión superficial y las fuerzas originadas por la presión; y la región de transición (región A) donde el perfil de la burbuja se deforma debido a las fuerzas viscosas, por lo que éstas últimas son importantes además de las fuerzas de tensión superficial y presión. Por lo tanto es necesario conocer las escalas importantes en cada región así como los parámetros adimensionales que relacionen a las fuerzas presentes en el fenómeno.

### 2.3.1. Región capilar estática

En la región capilar estática las escalas más importantes son:

$$x \sim R, \quad y \sim R, \quad h \sim R, \quad u \sim U, \quad v \sim U, \quad P \sim \frac{\sigma}{R}$$

Partiendo de las ecuaciones de cantidad de movimiento (2.5) y (2.6) y usando las escalas anteriores para dicha región se tiene que:

$$\text{Re}Ca \sim 1, \quad 2^n Ca, \quad Ca \quad (2.22)$$

términos inerciales  $\sim$  presión, términos viscosos

$$\text{Re}Ca \sim 1, \quad Ca, \quad 2^n Ca \quad (2.23)$$

términos inerciales  $\sim$  presión, términos viscosos

Donde  $\text{Re} = \frac{2^{n-1} \rho U^{2-n} R^n}{K}$  es el número de Reynolds, que representa la competencia de las fuerzas viscosas con las fuerzas inerciales.  $Ca$  es el número capilar definido de la siguiente manera:  $Ca = \frac{KU^n R^{1-n}}{\sigma 2^{n-1}}$ , este número adimensional relaciona las fuerzas viscosas con las fuerzas de tensión superficial.

En el problema físico en estudio  $\text{Re} \ll 1$ , además se estudia el límite en que  $Ca \rightarrow 0$ . Si en las ecs. (2.22) y (2.23) se considera que  $\text{Re} = 0$  y  $Ca = 0$ , en la región capilar estática el término de la presión es la fuerza dominante. Debido a esto se puede decir que en dicha región la presión es prácticamente constante.

Al aplicar el análisis de orden de magnitud en la condición de esfuerzos normales en la frontera, ec. (2.21), se tiene que:

$$2Ca, \quad 2^n Ca, \quad 1 \sim 1 \quad (2.24)$$

fuerzas viscosas, presión  $\sim$  Tensión superficial

De lo anterior se concluye que las fuerzas dominantes en la frontera entre los fluidos son la tensión superficial y la presión.

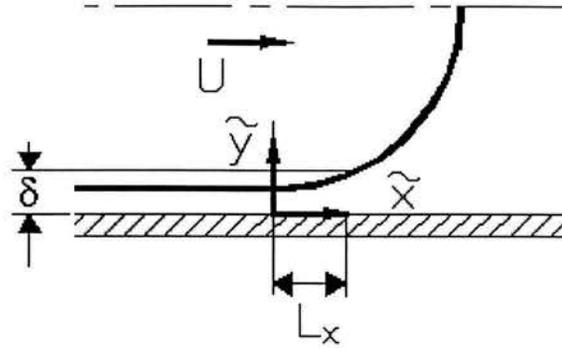


Figura 7: Escalas de la región de transición

### 2.3.2. Región de transición

Las escalas importantes de la región de transición son las siguientes:

$$x \sim L_x, \quad y \sim \delta, \quad h \sim \delta, \quad u \sim U, \quad v \sim V, \quad P \sim \frac{\sigma}{R}$$

Donde  $V$  es la velocidad en la dirección  $y$ ,  $L_x$ ,  $\delta$  y  $U$  se muestran en la fig. 7.  $L_x$ ,  $\delta$  y  $V$  son desconocidas, por lo que parte del problema reside en encontrar dichos valores.

Partiendo de la ecuación de continuidad, dada por la ec. (2.1), se obtiene una relación entre las tres variables desconocidas:

$$\frac{U}{V} \frac{\delta}{L_x} \sim 1 \quad (2.25)$$

Al aplicar el análisis de orden de magnitud en la ecuación de cantidad de movimiento, ec. (2.5), y tomando en cuenta que en la región de transición los términos viscosos adquieren importancia, se balancea el término viscoso en dirección transversal (ya que los cambios son más grandes en esta dirección que en la dirección longitudinal) con el término relacionado con la presión. Al realizar esto se obtiene una segunda relación para las incógnitas:

$$\frac{1}{Ca} \frac{\delta^{n+1}}{R^n L} \sim 1 \quad (2.26)$$

Realizando el análisis de orden de magnitud para la ecuación de cantidad de movimiento en  $y$ , se llega a lo siguiente:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

Aplicando el análisis en la condición de esfuerzos normales, ec. (2.21), las fuerzas más importantes son la presión y la fuerza relacionada a la tensión superficial, y se obtiene una tercera relación entre las variables:

$$1 \sim \frac{\delta R}{L_x^2} \quad (2.27)$$

Con las relaciones (2.25), (2.26) y (2.27) podemos conocer el orden de magnitud de  $L_x$ ,  $\delta$  y  $V$ ; además de saber que solamente están en función del número Capilar,  $Ca$ . Lo anterior conduce a los siguientes relaciones:

$$\delta \sim Ca^{\frac{2}{2n+1}} R, \quad L_x \sim Ca^{\frac{1}{2n+1}} R, \quad V \sim UCa^{\frac{1}{2n+1}}$$

## 2.4. Ecuaciones adimensionales

En el presente apartado se obtendrán las ecuaciones adimensionales que describen el fenómeno físico. Para tal efecto se emplearán las escalas características estimadas en la sección anterior.

### 2.4.1. Región capilar estática

La región capilar estática se muestra en la fig. 6 (sistema de coordenadas  $\hat{x}-\hat{y}$ ), región B. El sistema de referencia para dicha región está en el centro de la burbuja a una distancia  $L$  de la punta de la burbuja. Además el sistema se mueve a la misma velocidad que la burbuja, haciendo que el perfil se mantenga estático con respecto a dicho sistema de referencia.

Para obtener las ecuaciones adimensionales se realizó el siguiente cambio de variable:

$$\hat{x} = \frac{x - Ut}{R}, \quad \hat{y} = \frac{y}{R}, \quad \hat{h} = \frac{h}{R}, \quad \hat{u} = \frac{u}{U}, \quad \hat{v} = \frac{v}{U}, \quad \hat{P} = \frac{P}{\sigma/R}$$

Aplicando el cambio de variables a las ecs. (2.1), (2.5), (2.6), (2.14), (2.18) y (2.21), se obtienen las siguientes ecuaciones:

### Ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{y}} = 0 \quad (2.28)$$

### Ecuaciones de cantidad de movimiento

$$\text{Re } Ca \left[ \hat{u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + \hat{v} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{y}} \right] = -\frac{\partial \hat{P}}{\partial \hat{x}} + 2^n Ca \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left[ \left( \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} \right)^n \right] + Ca \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \left[ \left( \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{y}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}} \right)^n \right] \quad (2.29)$$

$$\text{Re } Ca \left[ \hat{u} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}} + \hat{v} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{y}} \right] = -\frac{\partial \hat{P}}{\partial \hat{y}} + Ca \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left[ \left( \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{y}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}} \right)^n \right] + 2^n Ca \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \left[ \left( \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{y}} \right)^n \right] \quad (2.30)$$

### Condiciones en la frontera

$$\hat{y} = -1 : \quad \hat{u} = -1, \quad \hat{v} = 0 \quad (2.31)$$

$$\hat{y} = -\hat{h} : \quad \hat{v} = \hat{u}\hat{h}' \quad (2.32)$$

$$\frac{1}{2^n} \left( \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{y}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}} \right)^n (1 - \hat{h}'^2) - \left[ \left( \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} \right)^n - \left( \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{y}} \right)^n \right] \hat{h}' = 0 \quad (2.33)$$

$$\frac{2Ca}{(1 + \hat{h}'^2)} \left[ \left( \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{y}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}} \right)^n \hat{h}' - 2^{n-1} \left( \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} \right)^n \hat{h}'^2 - 2^{n-1} \left( \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{y}} \right)^n \right] \quad (2.34)$$

$$+ \hat{P} = \frac{\hat{h}''}{(1 + \hat{h}'^2)^{3/2}}$$

#### 2.4.2. Región de transición

El sistema de referencia para la región de transición se puede observar en la fig. 6 (sistema de coordenadas  $\tilde{x} - \tilde{y}$ ). Para este cambio de variables se reescaló el problema con los resultados obtenidos del análisis de orden de magnitud para dicha región.

Para obtener las ecuaciones adimensionales en la región de transición se realizó el siguiente cambio de variables:

$$\tilde{x} = \frac{\hat{x} + \hat{l}}{Ca^{\frac{1}{2n+1}}}, \quad \tilde{y} = \frac{\hat{y} + 1}{Ca^{\frac{2}{2n+1}}}, \quad \tilde{h} = \frac{1 - \hat{h}}{Ca^{\frac{2}{2n+1}}}, \quad \tilde{u} = \hat{u}, \quad \tilde{v} = \frac{\hat{v}}{Ca^{\frac{1}{2n+1}}}, \quad \tilde{P} = \hat{P}$$

donde  $\hat{l}$  es la distancia entre los sistemas de referencia.

Al usar este cambio de variables en las ecs. (2.1), (2.5), (2.6), (2.14), (2.18) y (2.21) se obtiene que:

#### Ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = 0 \quad (2.35)$$

**Ecuaciones de cantidad de movimiento**

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} Ca \left[ \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \right] &= -\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{x}} + 2^n Ca^{\frac{n+1}{2n+1}} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left[ \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} \right)^n \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left[ \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} + Ca^{\frac{2}{2n+1}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} \right)^n \right] \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} Ca \left[ \tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} \right] &= -\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{y}} + Ca^{\frac{2}{2n+1}} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left[ \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} + Ca^{\frac{2}{2n+1}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} \right)^n \right] \\ &+ 2^n Ca^{\frac{n+1}{2n+1}} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left[ \left( \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} \right)^n \right] \end{aligned} \quad (2.37)$$

**Condiciones en la frontera**

$$\tilde{y} = 0 :$$

$$\tilde{u} = -1, \quad \tilde{v} = 0 \quad (2.38)$$

$$\tilde{y} = \tilde{h} :$$

$$\tilde{v} = \tilde{u} \tilde{h}' \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^n} \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} + Ca^{\frac{2}{2n+1}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} \right)^n (1 - Ca^{\frac{2}{2n+1}} \tilde{h}'^2) + \\ + Ca^{\frac{n+1}{2n+1}} \left[ \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} \right)^n - \left( \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} \right)^n \right] \tilde{h}' = 0 \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$\frac{2Ca^{\frac{2}{2n+1}}}{(1 + Ca^{\frac{2}{2n+1}} \tilde{h}'^2)} \left[ - \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} + Ca^{\frac{2}{2n+1}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}} \right)^n \tilde{h}' - 2^{n-1} Ca^{\frac{n+1}{2n+1}} \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} \right)^n \tilde{h}'^2 \right] \quad (2.41)$$

$$-\frac{2Ca^{\frac{2}{2n+1}}}{\left(1 + Ca^{\frac{2}{2n+1}}\tilde{h}'^2\right)} \left[2^{n-1}Ca^{\frac{n-1}{2n+1}} \left(\frac{\partial\tilde{v}}{\partial\tilde{y}}\right)^n\right] + \tilde{P} = -\frac{\tilde{h}''}{\left(1 + Ca^{\frac{2}{2n+1}}\tilde{h}'^2\right)^{3/2}}$$

## 2.5. Metodo de solución

El conjunto de ecs. (2.28)-(2.41) que describen el movimiento de la burbuja que desplaza a un fluido caracterizado por la ley de potencia, será resuelto mediante la teoría de perturbación, la cual es una colección de métodos analíticos para obtener la solución aproximada de problemas que involucren un parámetro pequeño. Las técnicas de perturbación formales son una generalización de las ideas del análisis local de ecuaciones diferenciales; el análisis local trata de aproximarse a la solución de una ecuación diferencial en un punto dado ( $x = a$ ), desarrollando series de potencias de un parámetro pequeño alrededor de dicho punto. Una vez que se conoce el comportamiento principal de la solución cercano al punto, se pueden determinar los coeficientes restantes de la serie de forma recursiva [23].

Los problemas de perturbación se dividen en regulares y singulares. Se dice que un problema es regular cuando las series de perturbación se presentan en potencias del parámetro pequeño,  $\varepsilon$ , y tienen un radio de convergencia infinito. Un problema de perturbación es singular cuando su serie de perturbación no se expresa en potencias del parámetro pequeño,  $\varepsilon$ , o en caso de que lo haga, dicha serie tiene un radio de convergencia finito. El caso que se analiza es un problema de perturbación singular debido a que las series de perturbación presentan un radio de convergencia finito.

En el problema del movimiento de la burbuja se tiene una zona pequeña donde se presentan grandes cambios en el perfil de la burbuja. A este tipo de problemas se les conoce con el nombre de problemas de capa límite, que se resuelven mediante la técnica de acoplamiento asintótico, por lo que se utilizará dicha técnica de perturbación para resolver las ecuaciones siendo el número capilar,  $Ca$ , el parámetro pequeño.

El principio de la técnica de acoplamiento asintótico es simple; el intervalo en el cual se tiene un problema de capa límite se divide en una secuencia de

dos o más subintervalos comunes, en cada subintervalo se utiliza la teoría de perturbación para obtener una solución aproximada de la ecuación diferencial en dicha región. Finalmente, el acoplamiento requiere que las soluciones asintóticas tengan la misma forma funcional en las regiones comunes de cada par de subintervalos. Con esto se obtiene una secuencia de aproximaciones asintóticas de la solución de la ecuación diferencial, en donde cada aproximación satisface todas las condiciones en la frontera dadas para diferentes puntos en el intervalo. El resultado es la solución aproximada del problema válido para todo el intervalo.

El intervalo de estudio del presente problema se divide en tres regiones, como se muestra en la fig. 6. En la región de espesor constante y región estática, región I y III respectivamente, el problema se puede resolver de forma analítica. La teoría de perturbación se emplea para obtener la solución en la región del frente de la burbuja, región II, en la cual se presenta un problema de perturbación singular por lo que se divide en dos subregiones. A continuación se presenta el desarrollo cuando  $Ca \rightarrow 0$  así como las ecuaciones del orden cero del problema para cada subregión, región capilar estática y región de transición. Las correcciones de orden superior se presentan en el Apéndice C para ambas regiones.

### 2.5.1. Región capilar estática

Se supone que la expansión de perturbación es de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\hat{h}(\hat{x}) &= \sum_{m=0}^{\infty} Ca^{\left(\frac{m}{2n+1}\right)} \hat{h}_m(\hat{x}) \\ \hat{P}(\hat{x}, \hat{y}) &= \sum_{m=0}^{\infty} Ca^{\left(\frac{m}{2n+1}\right)} \hat{P}_m(\hat{x}, \hat{y}) \\ \hat{u}(\hat{x}, \hat{y}) &= \sum_{m=0}^{\infty} Ca^{\left(\frac{m}{2n+1}\right)} \hat{u}_m(\hat{x}, \hat{y})\end{aligned}\tag{2.42}$$

Donde  $Ca$  es el número capilar definido en la sección de análisis de orden de magnitud y  $n$  es el índice de potencia. A continuación se presenta el orden cero de la ecuación de continuidad, las ecuaciones de cantidad de movimiento y las condiciones de frontera, así como la solución del orden cero del problema.

Orden cero Ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \hat{u}_0}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{v}_0}{\partial \hat{y}} = 0 \quad (2.43)$$

Ecuaciones de cantidad de movimiento

$$\frac{\partial \hat{P}_0}{\partial \hat{x}} = 0 \quad (2.44)$$

$$\frac{\partial \hat{P}_0}{\partial \hat{y}} = 0 \quad (2.45)$$

Condiciones en la frontera

$$\hat{y} = -1 :$$

$$\hat{u}_0 = -1, \hat{v}_0 = 0 \quad (2.46)$$

$$\hat{y} = -\hat{h} :$$

$$\hat{v}_0 = \hat{u}_0 \hat{h}'_0 \quad (2.47)$$

$$\frac{1}{2^n} \left( \frac{\partial \hat{u}_0}{\partial \hat{y}} + \frac{\partial \hat{v}_0}{\partial \hat{x}} \right)^n (1 - \hat{h}'_0{}^2) - \hat{h}'_0 \left[ \left( \frac{\partial \hat{u}_0}{\partial \hat{x}} \right)^n - \left( \frac{\partial \hat{v}_0}{\partial \hat{y}} \right)^n \right] = 0 \quad (2.49)$$

$$\hat{P}_0 = \frac{\hat{h}_0''}{(1 + \hat{h}'_0{}^2)^{3/2}} \quad (2.50)$$

Para conocer el perfil del menisco estático,  $\hat{h}_0$ , sólo es necesario resolver la ec. (2.50), debido a que no está acoplada con el campo de velocidades, el desarrollo se presenta en el Apéndice A. La solución a la ec. (2.50) es la siguiente:

$$\hat{h}_0 = -\frac{1}{\hat{P}_0} \left( 1 - \left[ \hat{P}_0 (\hat{x}_0 - L) - 1 \right]^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.51)$$

En la ec. (2.51) el salto de presión,  $\hat{P}_0$ , y la distancia entre el eje de la región capilar y la punta de la burbuja,  $L$ , son constantes desconocidas, las cuales serán determinadas con las condiciones de acoplamiento con la región de transición.

### 2.5.2. Región de transición

En esta región se supone que la expansión de perturbación es de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \tilde{h}(\tilde{x}) &= \sum_{j=0}^{\infty} Ca^{\left(\frac{j}{2n+1}\right)} \tilde{h}_j(\tilde{x}) \\ \tilde{P}(\tilde{x}, \tilde{y}) &= \sum_{j=0}^{\infty} Ca^{\left(\frac{j}{2n+1}\right)} \tilde{P}_j(\tilde{x}, \tilde{y}) \\ \tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{y}) &= \sum_{j=0}^{\infty} Ca^{\left(\frac{j}{2n+1}\right)} \tilde{u}_j(\tilde{x}, \tilde{y}) \end{aligned} \quad (2.52)$$

y al igual que en la región anterior  $Ca$  es el número Capilar y  $n$  es el índice de potencia del fluido.

**Orden cero** Ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}_0}{\partial \tilde{y}} = 0 \quad (2.53)$$

Ecuaciones de cantidad de movimiento

$$-\frac{\partial \tilde{P}_0}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left[ \left( \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial \tilde{y}} \right)^n \right] = 0 \quad (2.54)$$

$$\frac{\partial \tilde{P}_0}{\partial \tilde{y}} = 0 \quad (2.55)$$

Condiciones en la frontera

$\tilde{y} = 0$  :

$$\tilde{u}_0 = -1, \quad \tilde{v}_0 = 0 \quad (2.56)$$

$\tilde{y} = \tilde{h}$  :

$$\tilde{v}_0 = \tilde{u}_0 \tilde{h}'_0 \quad (2.57)$$

$$\left( \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial \tilde{y}} \right)^n = 0 \quad (2.58)$$

$$\tilde{P}_0 = -\tilde{h}_0'' \quad (2.59)$$

De las ecuaciones de cantidad de movimiento y condiciones en la frontera se puede obtener una expresión para la forma de la interfase, el desarrollo para obtener la ecuación se muestra en el Apéndice B y resulta en una ecuación diferencial de tercer orden:

$$\frac{d^3 \tilde{h}_0}{d\tilde{x}^3} = \frac{(\tilde{h}_0 - \tilde{t}_0)^n}{(\tilde{h}_0)^{2n+1}} \cdot \left( \frac{2n+1}{n} \right)^n \quad (2.60)$$

La ec. (2.60) es una ecuación diferencial de tercer orden no lineal. Para hacer más sencillo su tratamiento se realiza una transformación en las variables, que se realizó de la siguiente manera con el fin de quitar la dependencia del espesor constante,  $\tilde{t}_0$ , de la ecuación anterior. La transformación es la siguiente:

$$H_0 = \frac{\tilde{h}_0}{\tilde{t}_0}, \quad X = \frac{\tilde{x} + \tilde{s}}{(\tilde{t}_0)^{(n+2)/3}} \cdot \left( \frac{2n+1}{n} \right)^{n/3}$$

Donde  $\tilde{s}$  es una constante, que permite recorrer el origen sin perder la física del problema. Entonces la expresión queda de la siguiente forma:

$$\frac{d^3 H_0}{dX^3} = \frac{(H_0 - 1)^n}{(H_0)^{2n+1}} \quad (2.61)$$

Para esta ecuación se presentan dos límites de estudio. El primero de ellos se presenta al acercarse a la región de espesor constante (región I), siendo la condición de acoplamiento la siguiente:

$$X \rightarrow -\infty; \quad H_0 \rightarrow 1 \quad (2.62)$$

Con el fin de facilitar el análisis de problemas se realiza el siguiente cambio de variable:

$$\eta = H_0 - 1$$

por lo que la ec. (2.61) queda de la siguiente forma:

$$\frac{d^3 \eta}{dX_0^3} = \frac{\eta^n}{(\eta + 1)^{2n+1}} \quad (2.63)$$

y la condición de acoplamiento con la región de espesor constante es la siguiente:

$$X \rightarrow -\infty; \quad \eta \rightarrow 0$$

Linealizando la ec. (2.63) de acuerdo con la condición de acoplamiento a la región de espesor constante, se tiene que:

$$\frac{d^3 \eta}{dX_0^3} = \eta^n \quad (2.64)$$

Para la ec. (2.64) se presentan dos comportamientos. El primero es en el caso que  $n = 1$ , es decir, cuando se tiene un fluido newtoniano, se tiene una ecuación diferencial ordinaria lineal, de tercer orden y equidimensional en  $\eta$ . Se dice que una ecuación es equidimensional en  $\eta$  porque la ecuación

se mantiene invariante para el siguiente cambio de escala:  $\eta \rightarrow a\eta$ , donde  $a$  es una constante. Una ecuación equidimensional se le puede reducir un orden si se realiza la siguiente transformación:  $\eta(x) = e^{u(x)}$ .

La solución para la ec. (2.64), válida para  $X \rightarrow -\infty$ , cuando se tiene un fluido newtoniano es la siguiente:

$$\eta = F_1 e^X \quad (2.65)$$

donde  $F_1$  es una constante de integración, esta constante puede adquirir un valor arbitrario debido al corrimiento del origen  $\tilde{s}$  al hacer el cambio de variable sin que se pierda generalidad en el problema.

En el caso de  $n < 1$ , fluido pseudoplástico, se convierte en una ecuación diferencial no lineal y deja de ser una ecuación equidimensional en  $y$ , por lo que no acepta como solución una función exponencial [23], entonces se tiene que hacer un análisis local del problema. Kamisli [20] no toma esto último en cuenta y usa la ec. (2.65) como solución en la región de espesor constante para índices de potencia menores que la unidad; además de considerar, como solución válida cuando  $X \rightarrow -\infty$ , una ecuación cuadrática de la misma forma que la ec. (2.67). Lo que lleva a un error en el desarrollo teórico.

El segundo caso de estudio de la ec. (2.61) se presenta al aproximarse a la punta de la burbuja,  $X \rightarrow \infty$  y  $H_0 \gg 1$ , entonces la ec. (2.61) para esta región se aproxima de la siguiente forma:

$$\frac{d^3 H_0}{dX_0^3} \approx 0 \quad (2.66)$$

La solución de la ec. (2.66) es:

$$H_0 \simeq \frac{1}{2}AX^2 + BX + C \quad (2.67)$$

donde  $A$ ,  $B$  y  $C$  son constantes de integración que se determinan a partir de una integración numérica de la ec. (2.61). La integración numérica se hace mediante el método de Runge-Kutta de cuarto orden. Para dicha integración se utiliza la ec. (2.65) como condición inicial cuando se tiene un fluido newtoniano. Cuando el fluido desplazado es no-newtoniano, debido a que no se

tiene una expresión para la condición inicial, se emplea la misma condición utilizada para el fluido newtoniano y se realizan iteraciones hasta que se tiene un valor para la condición inicial, de tal forma que con dicho valor inicial se obtengan un error determinado ( $error \leq 0,000001$ ) en los valores de la segunda derivada de  $H_0$ . Los resultados obtenidos de la solución numérica se muestran en la fig. 8 y la tabla 2.1 para diferentes valores de  $n$ .

$n$	$A$	$B$	$C$
1	0.643008	-0.534989	3.014785
0.8	0.587688	3.794382	14.146793
0.6	0.567040	5.877294	31.963826
0.5	0.567064	6.582094	39.521015
0.4	0.572674	7.186487	46.352983
0.3	0.581745	7.726253	52.447555
0.2	0.588039	8.1462215	57.467551

Tabla 2.1 Valores de las constantes determinadas por la integración numérica

Regresando la ec. (2.67) a las variables originales se tiene que:

$$\begin{aligned} \tilde{h}_0(\tilde{x}) = & \frac{A}{2} \frac{\left(\frac{2n+1}{n}\right)^{2n/3}}{\tilde{t}_0^{(2n+1)/3}} \tilde{x}^2 + \left[ A\tilde{s} \frac{\left(\frac{2n+1}{n}\right)^{2n/3}}{\tilde{t}_0^{(2n+1)/3}} + B \frac{\left(\frac{2n+1}{n}\right)^{n/3}}{\tilde{t}_0^{(n-1)/3}} \right] \tilde{x} + \\ & + \left[ \frac{A\tilde{s}^2}{2} \frac{\left(\frac{2n+1}{n}\right)^{2n/3}}{\tilde{t}_0^{(2n+1)/3}} + B\tilde{s} \frac{\left(\frac{2n+1}{n}\right)^{n/3}}{\tilde{t}_0^{(n-1)/3}} + C\tilde{t}_0 \right] \end{aligned} \quad (2.68)$$

### 2.5.3. Condición de acoplamiento

El acoplamiento de la solución de la región de transición con la región de espesor constante se garantiza con la condición (2.62). Sin embargo, ésta está incompleta hasta que se determine el espesor  $\tilde{t}_0$ . Esta cantidad se determinará al realizar el acoplamiento de la solución de la región capilar estática con la región de transición. La condición de acoplamiento entre las regiones antes mencionadas está dada por la siguiente relación:

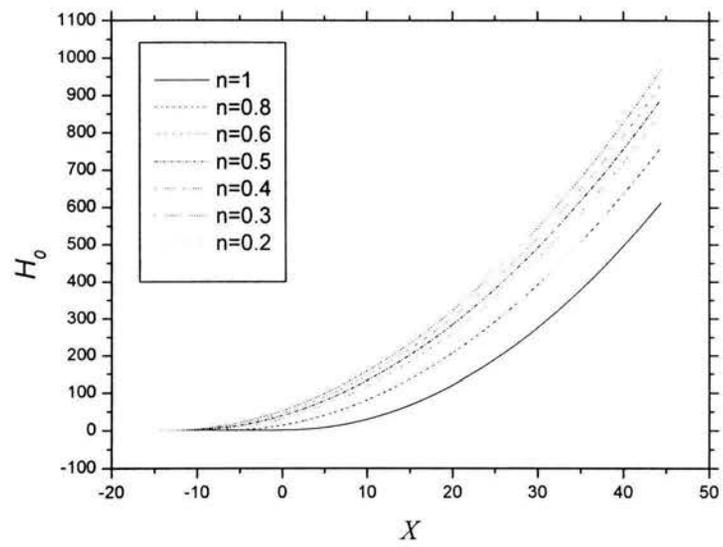


Figura 8: Función  $H_0$  determinada por integración numérica para diferentes valores del índice de potencia

$$\lim_{\hat{x} \rightarrow -\hat{l}} \hat{h}(\hat{x}) = \lim_{\tilde{x} \rightarrow \infty} \left( 1 - \tilde{h}(\tilde{x}) C a^{2/2n+1} \right) \quad (2.69)$$

Expandiendo  $\hat{h}(\hat{x})$  alrededor de  $\hat{x} = -\hat{l}$  usando series de Taylor y reescribiendo dicha expansión de  $\hat{h}(\hat{x})$  en variables internas, es decir, en variables de la región de transición, se obtiene una expresión para  $\hat{h}(\hat{x})$  que será usada en la condición de acoplamiento.

Para obtener el acoplamiento entre las dos regiones la expresión para  $\hat{h}(\hat{x})$  y la ec. (2.68), para definir  $\tilde{h}_0(\tilde{x})$ , se sustituyen en la condición de acoplamiento dada por la ec. (2.69). Una vez que se tiene esto se comparan los términos de ambos lados y se obtiene lo siguiente:

Orden cero:

$$\hat{h}_0(-\hat{l}) = 1, \quad (2.70a)$$

$$\hat{h}'_0(-\hat{l}) = 0, \quad (2.70b)$$

$$\hat{h}''_0(-\hat{l}) = -A \frac{\left(\frac{2n+1}{n}\right)^{2n/3}}{\tilde{t}_0^{(2n+1)/3}}. \quad (2.70c)$$

Primer orden de corrección:

$$\hat{h}_1(-\hat{l}) = 0, \quad (2.71a)$$

$$\hat{h}'_1(-\hat{l}) = - \left[ A \tilde{s} \frac{\left(\frac{2n+1}{n}\right)^{2n/3}}{\tilde{t}_0^{(2n+1)/3}} + B \frac{\left(\frac{2n+1}{n}\right)^{n/3}}{\tilde{t}_0^{(n-1)/3}} \right], \quad (2.71b)$$

$$\hat{h}''_1(-\hat{l}) = 0. \quad (2.71c)$$

Segundo orden de corrección:

$$\hat{h}_2(-\hat{l}) = - \left[ \frac{A \tilde{s}^2 \left(\frac{2n+1}{n}\right)^{2n/3}}{2 \tilde{t}_0^{(2n+1)/3}} + B \tilde{s} \frac{\left(\frac{2n+1}{n}\right)^{n/3}}{\tilde{t}_0^{(n-1)/3}} + C \tilde{t}_0 \right], \quad (2.72a)$$

$$\hat{h}'_2(-\hat{l}) = 0, \quad (2.72b)$$

$$\widehat{h}_2''(-\widehat{l}) = 0. \quad (2.72c)$$

Las condiciones (2.70a) y (2.70b) sirven para determinar el orden cero de la presión y localizar el origen de sistema de referencia de la región de transición. Usando dichas relaciones y la ec. (2.51) se obtiene:

$$\widehat{P}_0 = -1 \quad (2.73)$$

$$l = 1 - L, \quad (2.74)$$

donde  $L$  es la distancia que va del origen del sistema de referencia de la región capilar estática a la punta de la burbuja.

Una vez que se conocen  $\widehat{P}_0$  y  $l$ , entonces es posible determinar  $\widetilde{t}_0$  a partir de la condición (2.70c), y se obtiene lo siguiente:

$$\widetilde{t}_0 = \left[ A \left( \frac{2n+1}{n} \right)^{2n/3} \right]^{\frac{3}{2n+1}}. \quad (2.75)$$

Regresando la ec. (2.75) a variables de la región capilar estática se tiene que el espesor adimensional de la capa está dado por:

$$\widehat{t}_0 = Ca^{\frac{2}{2n+1}} \left[ A \left( \frac{2n+1}{n} \right)^{2n/3} \right]^{\frac{3}{2n+1}}. \quad (2.76)$$

La definición de la fracción de fluido que queda una vez que ha pasado la burbuja,  $m$ , es:

$$m = \frac{A_T - A_B}{A_T} \quad (2.77)$$

Donde  $A_T$  y  $A_B$  son el área transversal de la cavidad y el área transversal de la burbuja, respectivamente. En nuestro caso se tiene un área transversal rectangular, por lo que la fracción de fluido queda definido como:

$$m = 2\widehat{t} \quad (2.78)$$

Por lo tanto la fracción de fluido que queda dentro del tubo una vez que pasa la burbuja está dado por la siguiente expresión:

$$m = 2Ca^{\frac{2}{2n+1}} \left[ A \left( \frac{2n+1}{n} \right)^{2n/3} \right]^{\frac{3}{2n+1}} \quad (2.79)$$

### 3. Resultados

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos del problema del desplazamiento de un fluido viscoso no-newtoniano por un fluido de viscosidad despreciable. En primer lugar se muestran los resultados obtenidos a partir del modelo, ecs. (2.76) y (2.79), para un fluido newtoniano y se comparan con datos experimentales y teóricos de diversos autores, con el fin de validar el modelo matemático desarrollado en el presente trabajo. Posteriormente se muestran los resultados al variar el índice  $n$  de la ley de potencia, con esto se describe el comportamiento de diferentes fluidos; en los casos de los fluidos no-newtonianos se presenta una comparación con datos experimentales para dos valores diferentes del índice de potencia.

#### 3.1. Resultados: fluido newtoniano

El fenómeno del desplazamiento de un fluido viscoso por un fluido de viscosidad despreciable se puede dar en tubos de sección transversal arbitraria, por lo que es necesario determinar la influencia de la sección transversal en la fracción de cobertura (o en el espesor de la capa). Para esto se tomaron las correlaciones empíricas desarrolladas por Fairbrother y Stubbs [8], ec. (1.1), y la correlación presentada por Schwartz et. al. [17] dada por la siguiente expresión:

$$m = 0,05 (3Ca)^{1/3} + 2 (0,643) (3Ca)^{2/3} \quad (3.1)$$

Ambas correlaciones se toman a partir de datos obtenidos al experimentar con un tubo de sección circular; mientras que el presente modelo, ec.(2.79), toma en cuenta una sección transversal rectangular.

En la fig. 9 se comparan los resultados obtenidos por la ec. (2.79) cuando  $n = 1$ , y las correlaciones antes mencionadas. En dicha figura se puede apreciar claramente que conforme el número capilar decrece, la diferencia de la fracción de cobertura teórica con las fracción de cobertura de ambas correlaciones empíricas aumenta. Esto se debe a que el problema de desplazamiento

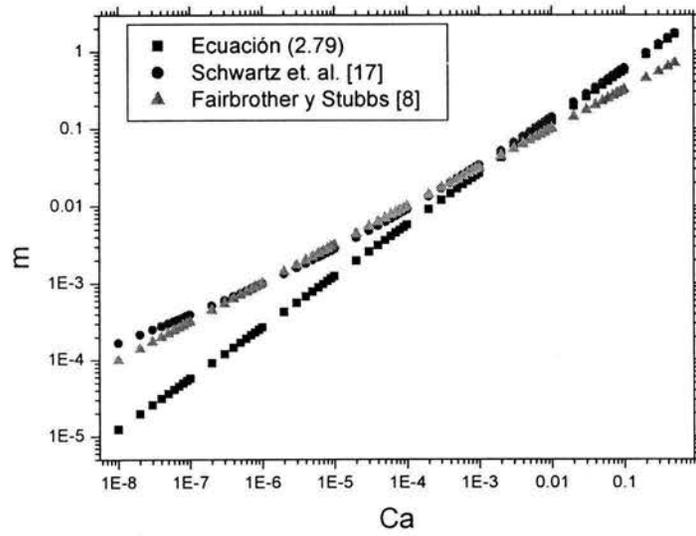


Figura 9: Fracción de cobertura contra número capilar (escala logarítmica), para  $n=1$

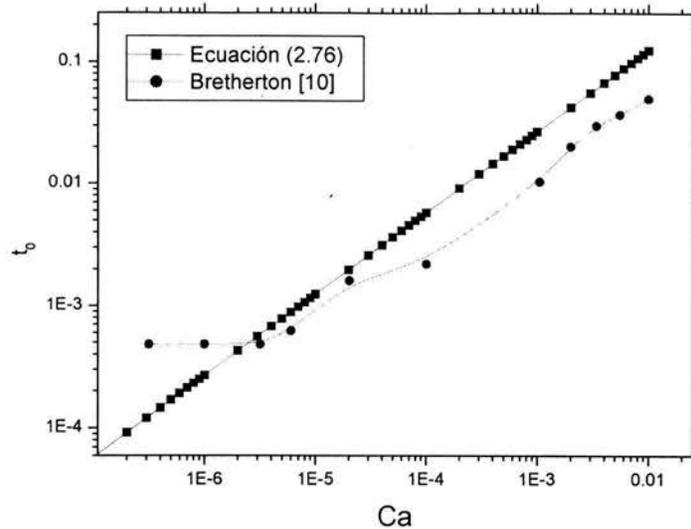


Figura 10: Espesor adimensional contra número capilar (escala logarítmica)

que se desarrolla en un tubo con sección transversal circular se tienen presentes efectos de curvatura transversal que se deben considerar. En un problema de placas planas (donde la longitud transversal se puede tomar como infinita con respecto a la separación entre las placas) sólo se tiene un radio principal y no existen efectos debidos a la curvatura transversal. Además se debe considerar que en los experimentos se tiene una interfaz con contaminantes y que las paredes tienen rugosidad, ambos efectos hacen que el espesor de capa sea más grueso. Esta misma diferencia se puede observar en la fig. 10, en la cual se muestran los resultados del espesor obtenido a partir de la ec. (2.76) cuando  $n = 1$ , y los datos experimentales de Bretherton [10] para un tubo circular con un diámetro interior de 2 mm.

Para verificar la validez del modelo desarrollado es necesario comparar los resultados con datos experimentales y modelos obtenidos por diferentes autores. Con este fin se toman los resultados obtenidos por Park y Homsy [15], los cuales desarrollan la teoría en tres dimensiones para un desplazamiento

de dos fases en celdas de Hele Shaw, las cuales tienen sección transversal rectangular, y presentan las siguientes expresiones para el espesor adimensional y el salto de presión:

$$\hat{t} = 1,337Ca^{2/3} \left[ 1 + \epsilon^2 \left( \frac{1}{4}\pi f'' + [f']^2 \right) \right] + O(\epsilon^2 Ca, Ca^{4/3}) \quad (3.2)$$

$$P = 1 + 3,80Ca^{2/3} - \frac{1}{4}\pi f''\epsilon^2 + O(Ca, \epsilon^2 Ca^{2/3}) \quad (3.3)$$

Donde  $\epsilon = \frac{R}{L_T}$ ,  $L_T$  es la longitud transversal entre las placas;  $f$  es una función, que depende de la coordenada transversal, que determina la longitud entre el origen del sistema de referencia de la región capilar estática y la punta de la burbuja. En el caso que se estudia consideramos  $\epsilon = 0$  y  $f = L$ , que es una constante y representa la distancia que hay entre el origen del sistema de referencia de la región capilar estática y la punta de la burbuja. Los resultados a los que se llegan cuando  $n = 1$  con la ec. (2.76) para determinar el espesor adimensional y la ec. (2.73) para el salto de presión, sumando las correcciones de orden superior (Apéndice C) en ambos casos, se muestran a continuación:

$$\hat{t} = 1,33751Ca^{2/3} \quad (3.4)$$

$$P = 1 + 3,7346Ca^{2/3} \quad (3.5)$$

Con esto se puede decir que el modelo desarrollado en el presente trabajo está de acuerdo con el trabajo de Park y Homsy [15].

### 3.2. Resultados para diferentes índices de potencia

La ec. (2.76) es la solución para cualquier índice de potencia. A partir de dicha ecuación se puede observar que el espesor de la capa de fluido que deja la burbuja a su paso depende de dos parámetros: el número capilar,  $Ca$ , y el índice de potencia,  $n$ . En la tabla 3.1 se muestra la fracción de cobertura para diferentes índices de potencia, en cada uno de ellos se aprecia claramente la dependencia de la fracción de cobertura con respecto al número capilar.

$n$	$m$
1	$2.67502Ca^{2/3}$
0.8	$2.237Ca^{10/13}$
0.6	$1.87427Ca^{10/11}$
0.5	$1.70808Ca$
0.4	$1.5412Ca^{10/9}$
0.3	$1.35684Ca^{5/4}$
0.2	$1.11778Ca^{10/7}$

Tabla 3.1  $m$  para diferentes valores del índice de potencia  $n$

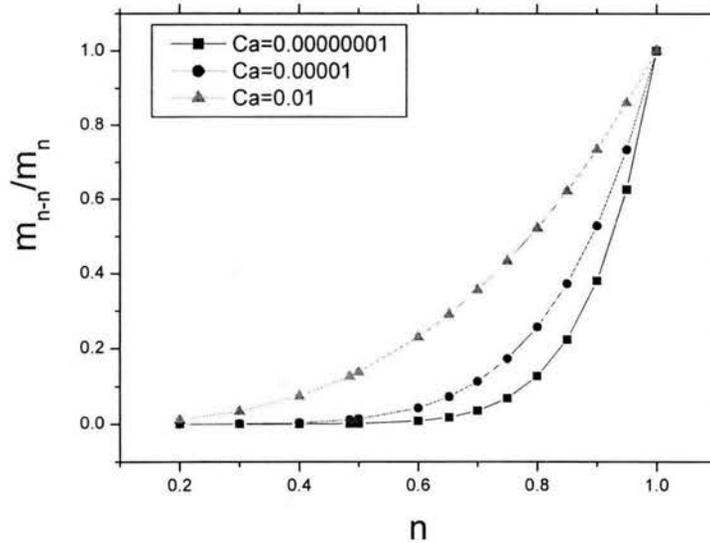


Figura 11: Razón de fracciones de cobertura contra índice de potencia

En las relaciones expresadas en la tabla 3.1, la dependencia del número capilar es explícita; sin embargo, la dependencia del índice de potencia no se puede apreciar ya que está en forma implícita en la constante. Con el fin de observar la dependencia en el índice de potencia, la fig. 11 muestra la razón de

fracciones de cobertura, donde la referencia es la fracción de cobertura para un fluido newtoniano, contra el índice de potencia manteniendo el número capilar constante. En esta figura se aprecia que la fracción de cobertura decrece conforme el índice de potencia disminuye. Partiendo de esta gráfica se observa que conforme el número capilar aumenta la fracción de cobertura es mayor, esto se traduce que a una menor velocidad de inyección del fluido desplazante la cantidad de fluido que se queda dentro de las placas será menor, por lo que es recomendable, en caso de un mismo fluido, que se inyecte el fluido de tal suerte que la velocidad con la que se desplace sea la menor posible.

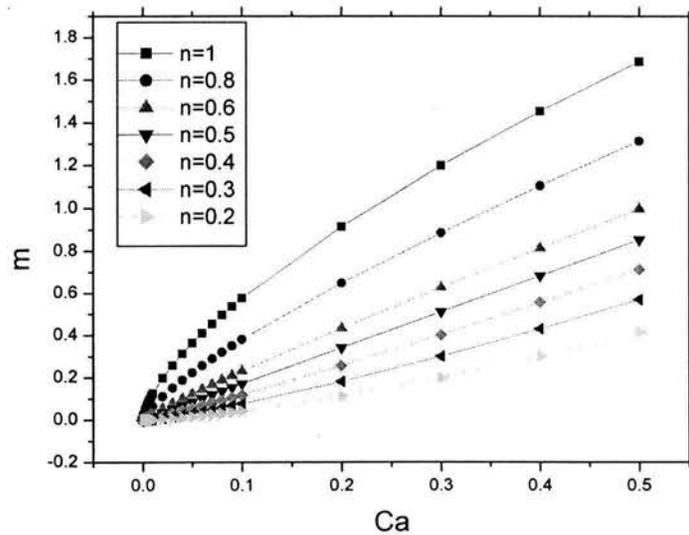


Figura 12: Fracción de cobertura contra número capilar

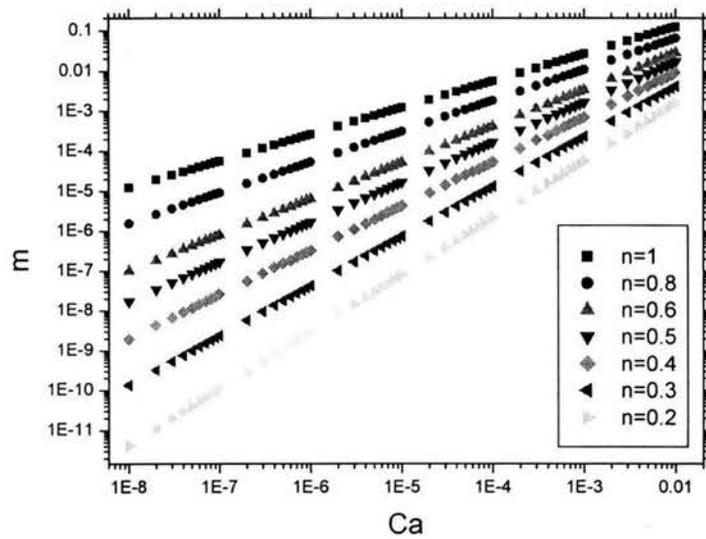


Figura 13: Fracción de cobertura contra número capilar (escala logarítmica)

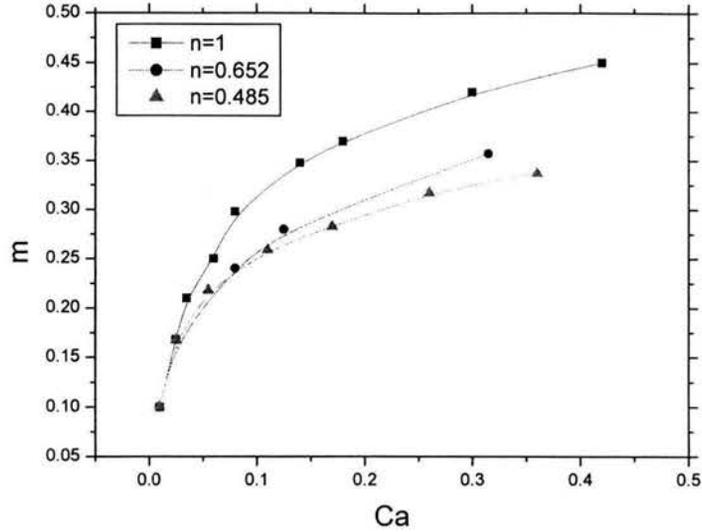


Figura 14: Fracción de cobertura contra número capilar, datos experimentales Kamisli y Ryan [19]

En las figs. 12 y 13 se muestra la fracción de cobertura para diferentes valores del índice de potencia, ec. (2.79). Como se puede apreciar conforme el índice de potencia disminuye la fracción de cobertura decrece. Este resultado está en concordancia con los resultados experimentales obtenidos por Kamisli y Ryan [19], fig. 14, donde se observa que conforme disminuye el índice de potencia la fracción de cobertura disminuye. En la fig. 14 se observa que la fracción de cobertura tiende a un valor asintótico para números capilares grandes, dicho valor asintótico decrece conforme el índice de potencia decrece, lo cual está en correspondencia con los resultados obtenidos mediante la ec. (2.79). No es posible realizar una comparación entre la teoría y resultados experimentales, cuando el número capilar es muy pequeño, debido a que no se tienen resultados para  $Ca < 0,001$ .

En las figs. 15-18, se muestran los resultados obtenidos experimentalmente por Kamisli y Ryan [19] contra los resultados obtenidos por el modelo desarrollado en el presente trabajo, en este caso los experimentos se realizaron con tubos de sección transversal circular, por lo que sólo se destaca la tendencia; así como también se observan diferencias al igual que con el fluido newtoniano. En la figs. 15 y 16 se muestran los resultados para un fluido newtoniano. En las figs. 17 y 18, se presentan los resultados para  $n = 0,652$  (carboxymethylcellulose, CMC) y  $n = 0,485$  (hydroxyethylcellulose HEC), respectivamente.

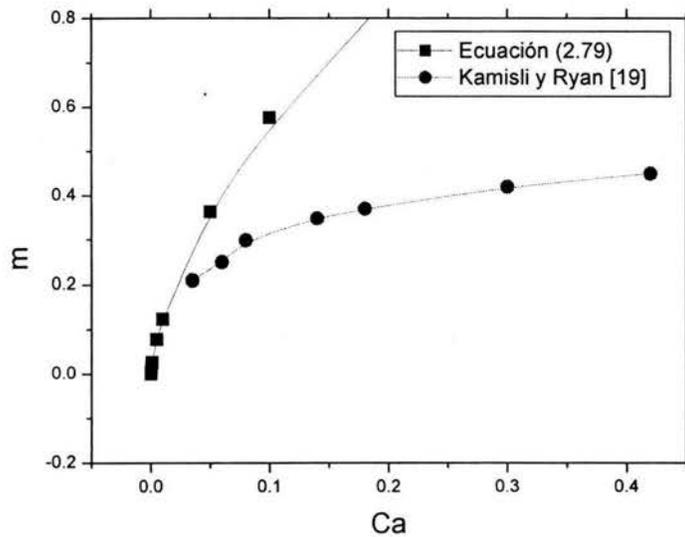


Figura 15: Fracción de cobertura contra número capilar,  $n=1$

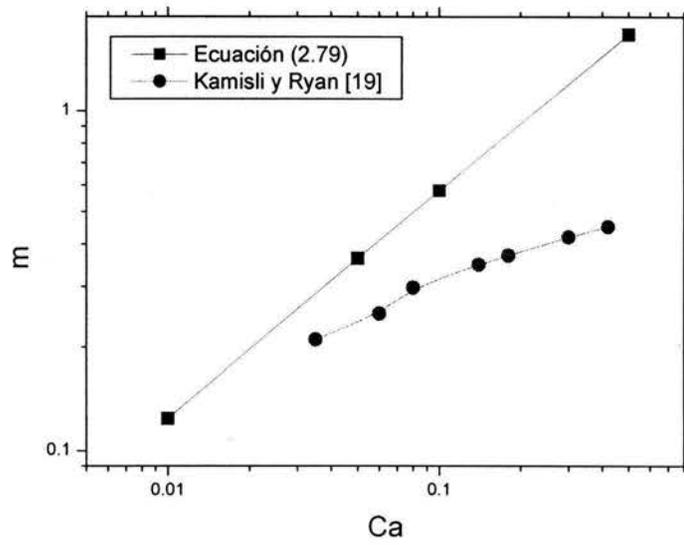


Figura 16: Fracción de cobertura contra número capilar (escala logarítmica),  $n=1$

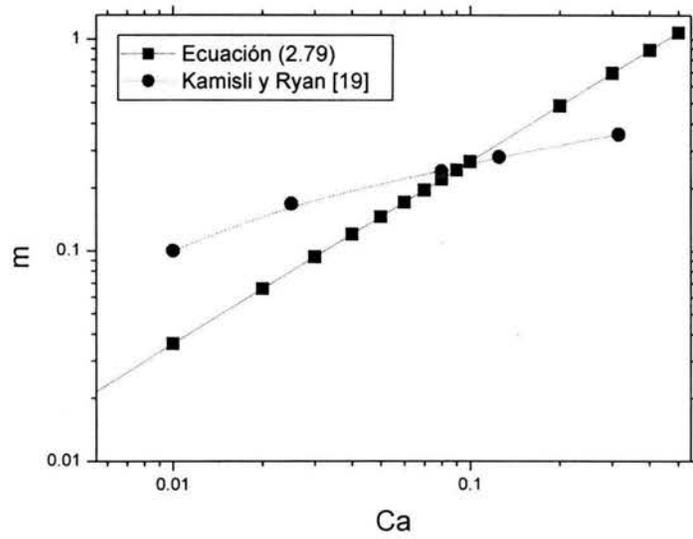


Figura 17: Fracción de cobertura contra número capilar (escala logarítmica),  $n=0.652$

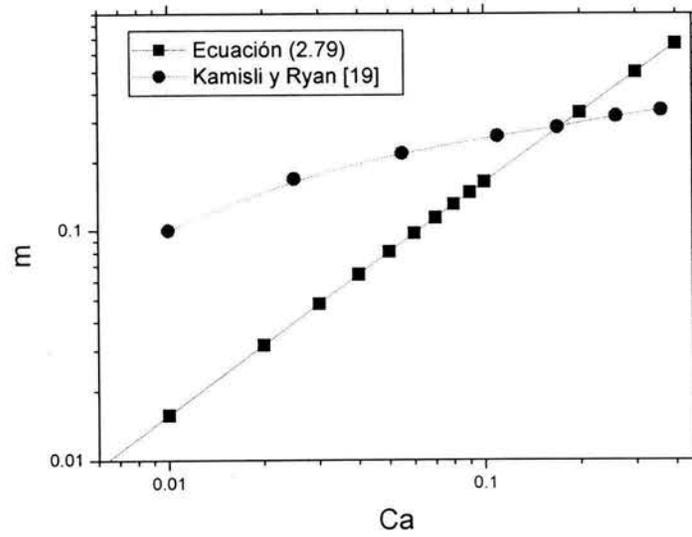


Figura 18: Fracción de cobertura contra número capilar (escala logarítmica),  $n=0.485$

En las figs. 17 y 18 se observa que la teoría no predice correctamente la fracción de cobertura. Esto se debe a que la región de validez de la teoría, tomando como referencia los trabajos realizados para fluidos newtonianos, es para valores del número capilar  $Ca < 0,001$ . Se debe tener en cuenta que los resultados experimentales son para un tubo de sección circular y presenta diferencias considerables con respecto al fenómeno que ocurre entre dos placas planas, lo cual se demostró en la sección anterior. Además de la sección transversal existen dos efectos que influyen en la diferencia entre los experimentos y los resultados teóricos: la presencia de contaminantes en la interfaz y la superficie rugosa de los tubos.

## 4. Conclusiones

En el presente trabajo se desarrolló un modelo que determina el espesor de la capa residual de fluido que queda atrapado entre dos placas planas una vez que ha pasado un fluido de viscosidad despreciable con el fin de determinar el espesor así como las condiciones para que dicho espesor sea el mínimo posible, ya que en algunas aplicaciones se requiere extraer la mayor cantidad de fluido posible.

De acuerdo con los resultados, para cualquier índice de potencia se obtiene el espesor mínimo para números capilares pequeños, esto se traduce en que la velocidad con la que se mueve el perfil del fluido debe ser lo menor posible y/o que se busque un fluido desplazante cuya tensión superficial con el fluido a desplazar sea la mayor posible; ya que el índice de consistencia,  $K$ , es característico del fluido y la distancia de separación entre las placas no se puede modificar.

En los resultados obtenidos con fluido newtoniano se observa, cuando se tienen números capilares pequeños, que se presenta una diferencia entre la fracción que predice la teoría y los datos experimentales, además dicha diferencia aumenta conforme el número capilar disminuye. Esta diferencia entre los resultados no es atribuible al método de obtención del modelo, debido a que en el caso del fluido newtoniano reproduce los resultados obtenidos por Park y Homsy [15] sino que se debe a la sección transversal del tubo, por lo que se concluye que la forma de la sección transversal influye de manera importante en el espesor de capa de fluido que se queda dentro de la cavidad cuando se tiene un número capilar muy pequeño.

Se debe tener en cuenta que en los experimentos se pueden presentar errores cuando se trata de números capilares muy pequeños,  $Ca < 10^{-5}$ , debido a la complicación de realizar los experimentos; además se ha determinado que existen diferencias entre la teoría y los experimentos debido a impurezas en la superficie de la interfaz y rugosidad del tubo, que no se toman en cuenta al desarrollar la teoría. La presencia de estos efectos tiene como consecuencia un aumento la fracción de cobertura.

El modelo desarrollado para un fluido caracterizado por la ley de potencia reproduce los resultados obtenidos para un fluido newtoniano. Sin embargo con los resultados obtenidos en la sección anterior no se puede determinar la comparación del modelo matemático desarrollado para predecir el espesor de capa, cuando se trata de un fluido no-newtoniano; ya que los datos experimentales con que se cuentan se realizaron con tubos de sección transversal circular, por lo que es necesario obtener datos para el fenómeno en placas planas con el fin de determinar la validez del modelo.

Como se observó con los resultados obtenidos, es necesario desarrollar una teoría cuando se tiene una sección circular para un fluido no-newtoniano ya que no se tiene un estudio en el cual se tome en cuenta la circunferencia transversal, lo que implica un error importante en las teorías hasta ahora desarrolladas. Además para completar el problema se tendría que hacer un desarrollo usando la teoría de perturbación en el límite del número capilar grande, para después acoplar ésta última solución con la que se presenta en este trabajo. Con esto sería posible determinar el espesor de capa residual para cualquier número capilar y comparar los resultados con los que se cuenta actualmente.

Dentro de los trabajos que se pueden realizar a futuro está el análisis en que ambos fluidos tengan viscosidades comparables; para determinar, de manera teórica en el caso de la recuperación de petróleo por el método inyección alternada de agua y gas, el espesor de capa de petróleo que queda atrapado en el yacimiento. Así también se puede llevar a cabo un estudio en el cual se tenga un gradiente de temperaturas longitudinal y observar el efecto que tiene éste en la fracción de cobertura, tanto para un fluido newtoniano como para fluidos no newtonianos.

## 5. Apéndices

### 5.1. Apéndice A

Para obtener la ec. (2.51) se reescribe la ec. (2.50) de la siguiente manera:

$$\frac{d^2\hat{h}_0}{d\hat{x}_0^2} = \hat{P}_0 \left(1 + \hat{h}_0'^2\right)^{3/2} \quad (\text{A.1})$$

Se integra la ec. (A.1), para esto se realiza el siguiente cambio de variable:  $u = \frac{d\hat{h}_0}{d\hat{x}_0}$ . El resultado de la integración es el siguiente:

$$\frac{d\hat{h}_0}{d\hat{x}_0} = (P_0x + C_1) \left(1 + \left[\frac{d\hat{h}_0}{d\hat{x}_0}\right]^2\right)^{1/2} \quad (\text{A.2})$$

Despejando  $\frac{d\hat{h}_0}{d\hat{x}_0}$  de la ec. (A.2) se tiene la siguiente expresión:

$$\frac{d\hat{h}_0}{d\hat{x}_0} = \frac{P_0x + C_1}{[1 - (P_0x + C_1)^2]^{1/2}} \quad (\text{A.3})$$

Para integrar la ec. (A.3) se realiza un doble cambio de variable, primero  $v = P_0x + C_1$ , y el segundo cambio de variable es:  $z = 1 - v^2$ . Una vez hecho esto se puede integrar la expresión modificada de la ec. (A.3), de donde se llega a lo siguiente una vez que se regresa a las variables originales:

$$\hat{h}_0 = -\frac{1}{\hat{P}_0} \left[ C_2 + \left(1 - [\hat{P}_0\hat{x}_0 + C_1]^2\right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (\text{A.4})$$

Para evaluar las constantes  $C_1$  y  $C_2$  se usarán las siguientes condiciones:

$$\hat{x} = \hat{L} \quad \hat{h} = 0 \quad (\text{A.5a})$$

$$\hat{x} \rightarrow \hat{L} \quad \hat{h}' \rightarrow -\infty \quad (\text{A.5b})$$

De las ecs. (A.5a) y (A.5b), se obtiene que  $C_1 = -1 - \hat{P}_0 L$  y  $C_2 = 0$ , entonces la ec. (A.4) queda de la siguiente manera:

$$\hat{h}_0 = -\frac{1}{\hat{P}_0} \left( 1 - \left[ \hat{P}_0 (\hat{x}_0 - L) - 1 \right]^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.6})$$

## 5.2. Apéndice B

Para obtener la ecuación diferencial de tercer orden, ec. (2.60), se tiene que realizar un análisis del volumen de control como se muestra en la fig. 19.

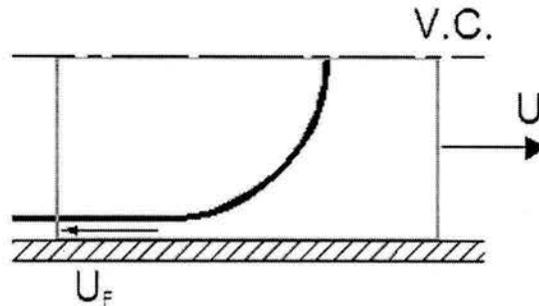


Figura 19: Volumen de control

Al realizar el cambio de variable para la región capilar estática, el sistema de referencia se mueve a la misma velocidad que la burbuja,  $U$ , por lo que el análisis del volumen de control queda de la siguiente forma:

$$\int_0^t (U - u) dy = \int_0^R U dy \quad (\text{B.1})$$

Desarrollando los términos que contengan variables conocidas y agrupando términos se llega a la siguiente expresión:

$$- \int_0^t u dy = U (R - t). \quad (\text{B.2})$$

El análisis de volumen de control para el fluido desplazado, debido a que la frontera (interfase entre los fluidos) y la pared son impermeables, es de la siguiente forma::

$$\int_0^t u dy = \int_0^h u dy \quad (\text{B.3})$$

Usando el cambio de variable para la región de transición en la ec. (B.2), una vez que se ha empleado la ec. (B.3), se tiene:

$$-\int_0^{\tilde{h}} \tilde{u} d\tilde{y} = \tilde{t}. \quad (\text{B.4})$$

La velocidad del fluido se obtiene a partir de la ec. (2.54), se integra dos veces utilizando la condición de esfuerzos cortantes, ec. (2.58), y la condición de no deslizamiento, ec. (2.56), para definir las constantes de integración. Haciendo lo anterior se tiene que el orden cero de la velocidad del fluido en la región de transición está dado por la siguiente expresión:

$$\tilde{u}_0 = \left( \frac{d\tilde{P}_0}{d\tilde{x}} \right)^{1/n} \frac{n}{1+n} \left[ (\tilde{y} - \tilde{h}_0) (\tilde{y} - \tilde{h}_0)^{1/n} + \tilde{h}_0 (-\tilde{h}_0)^{1/n} \right] - 1. \quad (\text{B.5})$$

Con la velocidad dada por la ec. (B.5), se desarrolla la ec. (B.4) y se obtiene lo siguiente:

$$-\left( \frac{d\tilde{P}_0}{d\tilde{x}} \right)^{1/n} \frac{n}{2n+1} \tilde{h}_0^2 (-\tilde{h}_0)^{1/n} + \tilde{h}_0 = \tilde{t}_0. \quad (\text{B.6})$$

Para que la ec. (B.6) sólo quede en función de  $h_0$ , se utiliza la ec. (2.59), sustituyendo ésta última y despejando la derivada de mayor orden se llega a la ecuación diferencial de tercer orden:

$$\frac{d^3 \tilde{h}_0}{d\tilde{x}^3} = \frac{(\tilde{h}_0 - \tilde{t}_0)^n}{(\tilde{h}_0)^{2n+1}} \cdot \left( \frac{2n+1}{n} \right)^n, \quad (\text{B.7})$$

que es la ecuación 2.60.

### 5.3. Apéndice C

En este anexo se presentan las correcciones de orden superior para la región capilar estática así como para la región de transición.

#### Región capilar estática

Ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \widehat{u}_1}{\partial \widehat{x}} + \frac{\partial \widehat{v}_1}{\partial \widehat{y}} = 0 \quad (\text{C.1})$$

Ecuaciones de cantidad de movimiento

$$\frac{\partial \widehat{P}_1}{\partial \widehat{x}} = 0 \quad (\text{C.2})$$

$$\frac{\partial \widehat{P}_1}{\partial \widehat{y}} = 0 \quad (\text{C.3})$$

Condiciones en la frontera

$$\widehat{y} = -1 :$$

$$\widehat{u}_1 = 0, \widehat{v}_1 = 0 \quad (\text{C.4})$$

$$\widehat{y} = -\widehat{h} :$$

$$\widehat{v}_1 = \widehat{u}_0 \widehat{h}'_1 + \widehat{u}_1 \widehat{h}'_0 \quad (\text{C.5})$$

$$\frac{n}{2^n} \left( \frac{\partial \widehat{u}_0}{\partial \widehat{y}} + \frac{\partial \widehat{v}_0}{\partial \widehat{x}} \right)^{n-1} \left( \frac{\partial \widehat{u}_1}{\partial \widehat{y}} + \frac{\partial \widehat{v}_1}{\partial \widehat{x}} \right) \left( 1 - \widehat{h}_0'^2 \right) - 2^{1-n} \left( \frac{\partial \widehat{u}_0}{\partial \widehat{y}} + \frac{\partial \widehat{v}_0}{\partial \widehat{x}} \right)^n \widehat{h}'_0 \widehat{h}'_1 \quad (\text{C.6})$$

$$- \left[ \left( \frac{\partial \widehat{u}_0}{\partial \widehat{x}} \right)^n - \left( \frac{\partial \widehat{v}_0}{\partial \widehat{y}} \right)^n \right] \widehat{h}'_1 + n \left[ \left( \frac{\partial \widehat{u}_0}{\partial \widehat{x}} \right)^{n-1} \frac{\partial \widehat{u}_1}{\partial \widehat{x}} - \left( \frac{\partial \widehat{v}_0}{\partial \widehat{y}} \right)^{n-1} \frac{\partial \widehat{v}_1}{\partial \widehat{y}} \right] \widehat{h}'_0 = 0$$

$$\widehat{P}_1 = \frac{\widehat{h}''_1}{(1 + \widehat{h}_0'^2)^{3/2}} - \frac{3P_0 \widehat{h}'_0 \widehat{h}'_1}{(1 + \widehat{h}_0'^2)}. \quad (\text{C.7})$$

Al igual que en el caso del orden cero, para determinar el perfil de orden  $Ca^{\frac{1}{2n+1}}$  no es necesario conocer el perfil de velocidades y se puede obtener a partir de la ec. (C.7). Sustituyendo el valor de  $P_0 = -1$  en la ec. (C.7), se reescribe de la siguiente manera:

$$\widehat{P}_1 = \frac{d}{d\widehat{x}} \left[ \frac{\widehat{h}'_1}{(1 + \widehat{h}_0'^2)^{3/2}} \right]. \quad (\text{C.8})$$

Integrando esta última expresión se tiene que:

$$\widehat{P}_1 \widehat{x} + C_I = \frac{\widehat{h}'_1}{(1 + \widehat{h}_0'^2)^{3/2}}. \quad (\text{C.9})$$

Para evaluar la constante de integración se utiliza el orden cero del perfil y su primera derivada, dadas por las ecs. (A.6) y (A.3), respectivamente. Además son necesarias las condiciones en la punta de la burbuja, ecs. (A.5a) y (A.5b), que para las correcciones de orden superior se escriben de la siguiente forma:

$$\widehat{x} = \widehat{L} \quad \widehat{h}_1 = 0, \quad \widehat{h}_2 = 0 \quad (\text{C.10a})$$

$$\widehat{x} \rightarrow \widehat{L} \quad \widehat{h}'_1 \rightarrow 0, \quad \widehat{h}'_2 \rightarrow 0 \quad (\text{C.10b})$$

Partiendo de la ec. (C.9) y usando la condición dada por la ec. (C.10b) se llega a que:

$$C_I = -\widehat{P}_1 L. \quad (\text{C.11})$$

De la ec. (C.11) no se puede obtener el valor de la constante, ya que desconocemos el valor de  $\widehat{P}_1$  y  $L$ . Debido a esto es necesario expresar la ec. (C.9) de otra forma con el fin de obtener dicha constante, por lo que utilizamos el valor de la derivada de orden cero del perfil, el cual se obtiene a partir de la ec. (A.6). Sustituyendo la derivada del perfil en orden cero, el valor de la constante dado por la ec. (C.11) y haciendo el siguiente cambio de variable:  $u = 1 + \widehat{x} - L$ ; se llega a la expresión:

$$\widehat{P}_1 = (1 - u)^{1/2} (1 + u)^{3/2} \frac{d\widehat{h}_1}{du}. \quad (\text{C.12})$$

Haciendo el cambio de variable para las condiciones en la punta de la burbuja, ecs. (C.10a) y (C.10b), se tiene que:

$$\widehat{x} = \widehat{L}, \quad u = 1. \quad (\text{C.13})$$

De la expresión anterior y la ec. (C.12) se llega a la conclusión de que  $\widehat{P}_1 = 0$ , por lo tanto  $C_I = 0$ . De lo anterior se sabe que:

$$\frac{d\widehat{h}_1}{d\widehat{x}} = 0 \quad y \quad \widehat{h}_1 = 0. \quad (\text{C.14})$$

Por lo tanto en la región capilar estática las correcciones de primer orden son cero.

Una vez que se ha llegado a las expresiones (C.14) podemos determinar la longitud del desplazamiento  $\widetilde{s}$ , que se realizó de forma arbitraria al cambiar de variable para la ec. (2.61). Usando la condición de acoplamiento (2.71b) se tiene lo siguiente:

$$\widetilde{s} = -\frac{B}{A} \left( \frac{2n+1}{n} \right)^{-n/3} \widetilde{t}_0^{(n+2)/3}. \quad (\text{C.15})$$

Para el siguiente orden de corrección,  $Ca^{\frac{2}{2n+1}}$ , se tiene que la condición de esfuerzos normales es:

$$\widehat{P}_2 = \frac{d}{d\widehat{x}} \left[ \frac{\widehat{h}'_2}{(1 + \widehat{h}'_0)^{3/2}} \right] \quad (\text{C.16})$$

Integrando la ec. (C.16) sujeta a las condiciones (C.10a) y (C.10b), se obtiene una expresión para la presión:

$$\widehat{h}_2(\widehat{x}) = \widehat{P}_2 \frac{-\widehat{x} + L}{(1 - [-\widehat{x} - 1 + L]^2)^{1/2}}. \quad (\text{C.17})$$

Evaluando la ec. (C.17) en  $\widehat{x} = -\widehat{l}$  y sustituyendo el resultado obtenido en la condición de acoplamiento dada por la ec. (2.72a), se obtiene una corrección de orden superior para la presión:

$$P_2 = - \left[ \frac{A\widetilde{s}^2}{2} \frac{\left(\frac{2n+1}{n}\right)^{2n/3}}{\widetilde{t}_0^{(2n+1)/3}} + B\widetilde{s} \frac{\left(\frac{2n+1}{n}\right)^{n/3}}{\widetilde{t}_0^{(n-1)/3}} + C\widetilde{t}_0 \right]. \quad (\text{C.18})$$

donde  $t_0$ ,  $s$ ,  $A$ ,  $B$  y  $C$  son conocidas.

### Región de transición

Ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \widetilde{u}_1}{\partial \widetilde{x}} + \frac{\partial \widetilde{v}_1}{\partial \widetilde{y}} = 0 \quad (\text{C.19})$$

Ecuaciones de cantidad de movimiento

$$-\frac{\partial \widetilde{P}_1}{\partial \widetilde{x}} + n \frac{\partial}{\partial \widetilde{y}} \left[ \left( \frac{\partial \widetilde{u}_0}{\partial \widetilde{y}} \right)^{n-1} \frac{\partial \widetilde{u}_1}{\partial \widetilde{y}} \right] = 0 \quad (\text{C.20})$$

$$\frac{\partial \widetilde{P}_1}{\partial \widetilde{y}} = 0 \quad (\text{C.21})$$

Condiciones en la frontera

$$\widetilde{y} = 0 :$$

$$\widetilde{u}_1 = 0, \quad \widetilde{v}_1 = 0 \quad (\text{C.22})$$

$$\widetilde{y} = \widetilde{h} :$$

$$\tilde{v}_1 = \tilde{u}_0 \tilde{h}'_1 + \tilde{u}_1 \tilde{h}'_0 \quad (\text{C.23})$$

$$n \left( \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial \tilde{y}} \right)^{n-1} \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \tilde{y}} = 0 \quad (\text{C.24})$$

$$\tilde{P}_1 = -\tilde{h}''_1. \quad (\text{C.25})$$

Con el fin de obtener una expresión para el primer orden de corrección del perfil de la burbuja en la región de transición se combinan las ecs. (C.19)-(C.25), de forma similar a lo realizado con el orden cero. De este desarrollo se obtiene el perfil de velocidad:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1 = & \left\langle \left( \tilde{y} - \tilde{h}_0 - \tilde{h}_1 Ca^{\left(\frac{1}{2n+1}\right)} \right) \left( \tilde{y} - \tilde{h}_0 - \tilde{h}_1 Ca^{\left(\frac{1}{2n+1}\right)} \right)^{1/n} + \right. \\ & \left. + \left( \tilde{h}_0 + \tilde{h}_1 Ca^{\left(\frac{1}{2n+1}\right)} \right) \left( -\tilde{h}_0 - \tilde{h}_1 Ca^{\left(\frac{1}{2n+1}\right)} \right)^{1/n} \right\rangle \frac{1}{n} \frac{d\tilde{P}_1}{d\tilde{x}} \left( \frac{d\tilde{P}_0}{d\tilde{x}} \right)^{1-n/n} \frac{n}{1+n} \end{aligned} \quad (\text{C.26})$$

Desarrollando la ec. (B.4) para los diferentes órdenes de magnitud se tiene lo siguiente:

$$- \int_0^{\tilde{h}} \tilde{u}_0 d\tilde{y} - Ca^{\left(\frac{1}{2n+1}\right)} \int_0^{\tilde{h}} \tilde{u}_1 d\tilde{y} = \tilde{t}_0 + \tilde{t}_1 Ca^{\left(\frac{1}{2n+1}\right)}. \quad (\text{C.27})$$

Si se sustituyen los perfiles de velocidad dados por las ecs. (B.5) y (C.26), en la ec. (C.27); así como también se utiliza la condición de esfuerzos normales, ec. (C.25), para obtener una ecuación diferencial no lineal de tercer orden, la cual describe el perfil de la burbuja para el primer orden de corrección:

$$\frac{d^3 \tilde{h}_1}{d\tilde{x}^3} = - \left( \frac{2n+1}{n} \right)^n \frac{\tilde{h}_1 \left( \tilde{h}_0 \left[ \frac{n+1}{n} \right] - \tilde{t}_0 \left[ \frac{2n+1}{n} \right] \right) + \tilde{t}_1 \tilde{h}_0}{\left( \tilde{h}_0 \right)^{2n+2}} \cdot \frac{1}{\left( \tilde{h}_0 - \tilde{t}_0 \right)^{1-n}} \quad (\text{C.28})$$

De manera equivalente al orden cero, se realiza el siguiente cambio de variable:

$$H_0 = \frac{\tilde{h}_0}{\tilde{t}_0} \quad , \quad H_1 = \frac{\tilde{h}_1}{\tilde{t}_0} \quad , \quad X_0 = \frac{\tilde{x} + \tilde{s}}{(\tilde{t}_0)^{(n+2)/3}} \cdot \left( \frac{2n+1}{n} \right)^{n/3}$$

Entonces la ec. (C.28) queda de la siguiente manera:

$$\frac{d^3 \tilde{H}_1}{d\tilde{X}^3} = - \frac{\tilde{H}_1 \left( \tilde{H}_0 \left[ \frac{n+1}{n} \right] - \left[ \frac{2n+1}{n} \right] \right) + R\tilde{H}_0}{\left( \tilde{H}_0 \right)^{2n+2}} \cdot \frac{1}{\left( \tilde{H}_0 - 1 \right)^{1-n}} \quad (\text{C.29})$$

donde  $R = \frac{\tilde{t}_1}{\tilde{t}_0}$

La ecuación anterior presenta dos límites, al igual que en el orden cero. El primero de ellos se presenta al acercarse a la región de espesor constante, la condición de acoplamiento a dicha región es la siguiente:

$$X \rightarrow -\infty; \quad H_0 \rightarrow 1, \quad H_1 \rightarrow R \quad (\text{C.30})$$

Usando el mismo procedimiento que en el orden cero, la solución analítica para  $H_1$  válida cuando  $X \rightarrow -\infty$  es:

$$H_1 = R + F_2 e^{x/\sqrt[3]{\delta}} \quad (\text{C.31})$$

donde  $\delta = \left( \tilde{H}_0 - 1 \right)^{1-n}$  y es una constante conocida.

El segundo caso de estudio se presenta al encontrarse cerca de la nariz de la burbuja,  $X \rightarrow \infty$ , y la condición de acoplamiento es la siguiente:

$$X \rightarrow \infty; \quad H_0 \rightarrow \infty, \quad H_1 \rightarrow \infty \quad (\text{C.32})$$

Entonces la ec. (C.29) se aproxima de la siguiente forma:

$$\frac{d^3 \tilde{H}_1}{d\tilde{X}^3} = 0 \quad (\text{C.33})$$

La solución para la ec. (C.33), al igual que en el orden cero, es una ecuación cuadrática:

$$\tilde{H}_1 \simeq \frac{1}{2}D_0X^2 + D_1X + D_2 \quad (\text{C.34})$$

donde  $D_0$ ,  $D_1$  y  $D_2$  son constantes de integración que se determinaran a partir de una integración numérica de la ec. (C.29). Haciendo el cambio a variables originales en la ec. (C.34) se tiene que:

$$\begin{aligned} \tilde{h}_1(\tilde{x}) = & \frac{D_0}{2} \frac{\left(\frac{2n+1}{n}\right)^{2n/3}}{\tilde{t}_0^{(2n+1)/3}} \tilde{x}^2 + \left[ D_0 \tilde{s} \frac{\left(\frac{2n+1}{n}\right)^{2n/3}}{\tilde{t}_0^{(2n+1)/3}} + D_1 \frac{\left(\frac{2n+1}{n}\right)^{n/3}}{\tilde{t}_0^{(n-1)/3}} \right] \tilde{x} + \\ & + \left[ \frac{D_0 \tilde{s}^2}{2} \frac{\left(\frac{2n+1}{n}\right)^{2n/3}}{\tilde{t}_0^{(2n+1)/3}} + D_1 \tilde{s} \frac{\left(\frac{2n+1}{n}\right)^{n/3}}{\tilde{t}_0^{(n-1)/3}} + D_2 \tilde{t}_0 \right] \end{aligned} \quad (\text{C.35})$$

Al usar la condición de acoplamiento dada por la ec. (2.69) se obtiene lo siguiente:

$$\hat{h}_1''(-\hat{l}) = D_0 \frac{\left(\frac{2n+1}{n}\right)^{2n/3}}{\hat{t}_0^{(2n+1)/3}} \quad (\text{C.36})$$

$$\hat{h}_2'(-\hat{l}) = - \left[ D_0 \tilde{s} \frac{\left(\frac{2n+1}{n}\right)^{2n/3}}{\tilde{t}_0^{(2n+1)/3}} + D_1 \frac{\left(\frac{2n+1}{n}\right)^{n/3}}{\tilde{t}_0^{(n-1)/3}} \right] \quad (\text{C.37})$$

$$\hat{h}_3(-\hat{l}) = - \left[ \frac{D_0 \tilde{s}^2}{2} \frac{\left(\frac{2n+1}{n}\right)^{2n/3}}{\tilde{t}_0^{(2n+1)/3}} + D_1 \tilde{s} \frac{\left(\frac{2n+1}{n}\right)^{n/3}}{\tilde{t}_0^{(n-1)/3}} + D_2 \tilde{t}_0 \right] \quad (\text{C.38})$$

Anteriormente se determinó que  $\hat{h}_1$  es cero en todo el dominio, por lo tanto  $D_0$  debe ser cero. Entonces se debe encontrar, para cualquier valor de  $n$ , el valor de  $R$  con el cual  $D_0 = 0$ . Al resolver numéricamente la ec. (C.29), para diferentes valores del índice de potencia variando el valor de  $R$ , se obtiene que para todos los casos  $R = 0$ . Por lo tanto no existe corrección de orden superior para el espesor en la región de transición.

## Referencias

- [1] Probstein, R., *Physicochemical Hydrodynamics: an introduction*, Butterworths (1989).
- [2] Landau, I. y Levich, B., "Dragging of a liquid by a moving plate", *Acta Phys. Chiem*, Vol. 17, pp. 42 (1942).
- [3] Tehrani, D. H., Danesh, A., Sohrabi, M., y Henderson, G.; "Enhanced oil recovery by water alternating gas (wag) injection", Department of Petroleum Engineering, University Edinburgh, UK
- [4] Koelling, K. W., y Kaminski, R.C., "Gas-assisted Injection Molding: Influence of Processing Conditions and Material Properties"
- [5] Harris, J., *Rheology and Non-Newtonian Flow*, Longman Group Limited, New York (1977).
- [6] Skelland, A. H. P., *Non-Newtonian Flow and Heat Transfer*, John Wiley and Sons (1967).
- [7] Bird, R. B., Armstrong, R. C. y Hassanger, O., *Dynamics of Polymeric Liquids*, Vol. 1: Fluids Mechanics, John Wiley and Sons (1977).
- [8] Fairbrother, F. y Stubbs, A. E., *Journal of Chemistry Society*, Vol. 1, pp. 527 (1935).
- [9] Taylor, G. I., "Deposition of a viscous fluid on the wall of a tube", *Journal of Fluids Mechanics*, Vol. 10, pp. 161-165 (1961).
- [10] Bretherton, F. P., "The motion of long bubbles in tubes", *Journal of Fluids Mechanics*, Vol. 10, pp. 166-188 (1961).
- [11] Telezke, G. F., Davis, H. T. y Scriven, L. E., "Wetting hydrodynamics", *Reveu de Physique Appliquée*, Vol. 23, pp. 989-1007 (1988).

- [12] Goldsmith, H. L., y Mason, S. G., "The movement of single large bubble in closed vertical tubes", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol 14, pp. 42 (1962).
- [13] Cox, C. G., "On driving a viscous fluid out of a tube" ,*Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 14, pp. 81 (1962).
- [14] Cox, C. G., "An experimental investigation of the streamlines inviscous fluid expelled from a tube" ,*Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 20, pp. 193 (1964).
- [15] Park, C. W. y Homsy, G. M., "Two-phase displacement in Hele Shaw cells: theory", *Journal of Fluids Mechanics*, Vol. 139, pp. 291-308 (1984).
- [16] Nayfeh, A. H., *Introduction to perturbation techniques*, John Wiley and Sons, (1981).
- [17] Schwartz, L. W., Princen, H. M. y Kiss, A. D., "On the motion of bubbles in capillary tubes", *Journal of Fluids Mechanics*, Vol. 172, pp. 259-275 (1986).
- [18] Huzyak, P. C. y Koelling, K. W., "The penetration of a long bubble through a viscoelastic fluid in a tube", *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, Vol. 71, pp. 73-88 (1997).
- [19] Kamisli, F y Ryan, M. E., "Perturbation method in gas-assited power law fluid displacement in a circular and rectangular channel", *Chemical Engineering Journal*, Vol. 75, pp. 167-176 (2002)
- [20] Kamisli, F., "Free coating of a non-newtonian liquid onto walls of a vertical and inclined tube", *Chemical Engineering and Processing*, Vol. 42, pp. 569-582 (2003).
- [21] Middleman, S., *Modeling Axisymmetric Flows, Dynamics of films, jets and drops*; Academic Press (1995).
- [22] Sokowski, *Cálculo con geometría analítica*, Wadsworth (1982).
- [23] Bender, C.M. y Orszag, S. A., *Advanced Mathematical Methodos for Scientists and Engineers*, McGraw-Hill (1978).