01048

FICCIONALISMO Y ANALITICIDAD EN MATEMÁTICAS

TESIS DE MAESTRÍA

ULIANOV MONTAÑO JUÁREZ

Codirectores:
Atocha Aliseda Llera
Axel Arturo Barceló Aspeitia

MAESTRÍA EN FILOSOFÍA DE LA CIENCIA
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES FILOSÓFICAS
FACULTAD DE FILOSOFÍA Y LETRAS
CIUDAD UNIVERSITARIA, 2004

AGRADECIMIENTOS

Sé que estoy en deuda con mucha gente y sé que la brevedad de esta página me dejará apenas con esas mismas deudas menos una hoja de papel. Aún así, valgan estos renglones como sitio propicio para comenzar a dar las gracias.

Mi gratitud mayor es para la Doctora Atocha Aliseda y el Doctor Axel Arturo Barceló, cuyo esfuerzo en la dirección conjunta de esta tesis es responsable de cualquier cosa que en ella valga la pena. Sin su claridad de ideas, su entusiasmo y su preocupación más allá de lo estrictamente académico este trabajo no habría llegado a buen término. Les agradezco, además de su dirección, el hecho de que sean grandes seres humanos.

Agradezco a la Dra. Ana Rosa Pérez Ransanz, al Dr. Jose Alfredo Amor y al Dr. Silvio Pinto su amabilidad al haber aceptado calificar esta tesis. También doy las gracias a mis compañeros de la Maestría en Filosofía de la Ciencia y a la Coordinación del Posgrado en Filosofía de la Ciencia por su paciencia y apoyo.

A mi amiga Dalia Rebollo le agradezco tantas cosas que es injusto mencionar sólo algunas (tú sabes que si pudiera juntar los amaneceres de Abril y toda la lluvia del otoño, te los daría sin dudar). Pero me parece que lo más pertinente aquí es consignar que la revisión somera de la idea de analiticidad que aparece en este trabajo es un préstamo generoso que ella me concedió. Gracias Dalia.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

En este trabajo buscaremos una respuesta a la pregunta ¿Por qué los enunciados matemáticos se han considerado verdades analíticas? Para contestarla tomaremos una posición en filosofía de las matemáticas afín al ficcionalismo de Hartry Field. La respuesta que ofreceremos es, en resumen, la siguiente:

El afirmar que las matemáticas son analíticas constituye una explicación muy simple de dos hechos: a) hay algo peculiar en las matemáticas muy semejante a lo analítico y b) la semántica de las matemáticas ha sido de utilidad para obtener beneficios epistémicos como la explicación de su aprioricidad.

Ahora bien, aunque esta explicación es muy simple, para admitir definitivamente que las matemáticas son analíticas haría falta aclarar y justificar los hechos a y b. Si la única forma de aclarar a y b es mediante la hipótesis de la analiticidad, la anterior explicación se verá muy fortalecida. Pero, en cambio, si encontramos algún modo de elucidar dichos hechos que no necesite de la hipótesis de la analiticidad, entonces tendremos dos teorías respecto a los hechos a y b. Eso debilitará a la anterior explicación.

Lo que en este trabajo propondremos es que la hipótesis de la analiticidad es una explicación simple de a y b, y eso ha conducido a aceptar dicha hipótesis. Pero también propondremos que la analiticidad no es necesariamente el único medio para aclarar la naturaleza de a y b; aquí ensayaremos una elucidación alternativa para estos mismo hechos con estas dos tesis: 1) la consistencia sustituye a la verdad en el sistema de valores de los matemáticos y 2) las matemáticas sólo se asemejan a lo analítico, pues las teorías matemáticas poseen esta propiedad: son consistentes en virtud sólo de su significado[1]. A lo largo de este trabajo desarrollaremos estas ideas con detalle, por el momento expondremos los motivos para emprender la investigación.

El ficcionalismo matemático es una corriente en filosofía de las matemáticas que niega la existencia de entidades matemáticas, que considera que las teorías matemáticas son literalmente falsas y que sólo son verdaderas en un sentido ficticio (semejante al sentido en

[1] Enfaticemos aquí que la *consistencia en virtud del significado* es un resultado que hemos introducido nosotros y gran parte de este trabajo se ocupa de establecerlo.

que son verdaderos los enunciados de una historia de ficción). El más influyente representante del ficcionalismo matemático es Hartry Field y tomaremos sus ideas como base para el presente trabajo. El ficcionalismo matemático puede verse como un intento por evitar los problemas suscitados por el realismo matemático contemporáneo. El realismo o platonismo matemático[2] que aquí nos concierne es una postura que recobró importancia luego de que se asociaron a ella los nombres de Willard von Orman Quine y Hillary Putnam, por medio del argumento de la indispensabilidad de las matemáticas en la ciencia[3] –esto es a lo que se le conoce como el argumento Quine-Putnam[4]. Todo esto se verá con más detenimiento en el capítulo 1.

Ya que el ficcionalista no cree que las matemáticas sean verdaderas, tampoco creerá que son analíticas, pues la analiticidad de un enunciado involucra de manera fundamental la verdad misma del enunciado[5]. De modo que si a un ficcionalista se le presenta a consideración la idea de que las matemáticas son analíticas, después de meditar un momento podrá responder que tal idea está equivocada. Para justificar su respuesta podría argumentar que la analiticidad de las matemáticas implica que los enunciados matemáticos son verdaderos por razones que tienen que ver sólo con su significado, pero los enunciados matemáticos no son verdaderos, puesto que su verdad implicaría la existencia de objetos matemáticos[6] y dichos objetos no existen. Además, aún en caso de que los enunciados matemáticos fueran verdaderos, no lo sería sólo en razón de su significado, ya que su verdad dependería tanto de lo que significan los enunciados como de la existencia de las cosas descritas en ellos. Podría decírsenos que no se necesita ser ficcionalista para rechazar la idea de la analiticidad de las matemáticas, pues la distinción analítico-sintético ha perdido casi toda la fuerza filosófica que el empirismo lógico le había otorgado[7]. Concediendo lo anterior, daría la impresión de que no hay mucho que explicar en relación con la analiticidad de las matemáticas, de que no hay nada más que decir, salvo anecdóticamente, a la manera de una reconstrucción histórica.

---

[2] Los términos realismo o platonismo aplicados a las matemáticas contemporáneas, de principios del siglo XXI, se usan indistintamente, sin embargo debemos advertir desde ahora que el platonismo que aprecerá en todo este trabajo se refiere sólo al platonismo que se sustenta en argumentos de indispensabilidad en ciencia. En este trabajo usaremos el término "platonismo" pero podríamos usan el término "realismo" sin mayores problemas.

[3] Balager 2000, Field 1989, Colyvan 2001.

[4] Al introducir el ficcionalismo en el capítulo 1, abundaremos acerca del argumento de indispensabilidad y las motivaciones del ficcionalismo.

[5] Aquí sólo trataremos de las ideas de analiticidad que han sido tradicionalmente asociadas a las matemáticas, en particular la tradición que incluye a Frege y la filosofía analítica.

[6] véase la sección 2 del capítulo 1.

[7] véase capítulo 1 sección 4.

Nuestro interés no es abundar sobre un tema que fue históricamente importante, sino replantear la vigencia del tema de la analiticidad en la filosofía contemporánea de las matemáticas. Por ello, la posición que defendemos en este trabajo es que todavía puede decirse algo sustantivo respecto al tema, aparte de una reconstrucción o de un mero rechazo de la analiticidad de las matemáticas.

Al intentar retomar la discusión de la analiticidad una estrategia que inmediatamente acude a la mente es poner en entredicho las ideas vigentes. Ello implicaría rescatar la distinción analítico-sintético y la idea de analiticidad de un modo que resulte relevante para la filosofía. En los últimos años este tipo de inquietud por recuperar una noción epistémicamente sustantiva de analiticidad se ha manifestado en los trabajos de autores como Paul Boghossian[8]. Sin embargo, el problema que aquí nos ocupa no es explicar la analiticidad (o la no-analiticidad) de las matemáticas sino explicar por qué se ha pensado que son analíticas. El primer problema, dilucidar la naturaleza de la analiticidad de las matemáticas, es un problema semántico –aunque con repercusiones epistemológicas. Mientras que si tratamos de explicar por qué se ha pensado que las matemáticas son analíticas estaremos abordando un hecho histórico, documentado claramente en las actitudes de filósofos como Frege, Russell o los empiristas lógicos. En este trabajo no trataremos de rescatar la idea de la analiticidad o, mejor dicho, no intentaremos rescatar alguna idea de analiticidad –puesto que las concepciones acerca de lo que son los enunciados analíticos no siempre han sido las mismas[9]– pues el ficcionalismo está ligado a una idea correspondentista de la verdad. Veremos que las caracterizaciones de analiticidad que involucran tal idea de verdad, son irreconciliables con el ficcionalismo.

Si la noción de analiticidad es definitivamente incompatible con la visión ficcionalista de las matemáticas parecería inútil insistir en el problema, pues parece difícil ir más allá de la simple respuesta de que no hay verdad analítica para las matemáticas. Field, por ejemplo, no se ocupa del tema; sólo lo menciona tangencialmente y ve en la analiticidad de las matemáticas una objeción contra el ficcionalismo[10].

---

[8] Boghossian 1996.

[9] véase capítulo 1 sección 4.

[10] Field propone la idea de que un enunciado matemático es analítico debe interpretarse como que dicho enunciado es verdadero en razón solo del significado de sus términos. Pero en tal caso los enunciados matemáticos existenciales también deberían ser verdaderos o no tendrían significado alguno, lo que implica la existencia de objetos matemáticos. Pero el significado de los enunciados matemáticos de ninguna manera puede ser suficiente para asegurar la existencia de las entidades involucradas. Field no se muestra interesado por recurrir a nociones más débiles de analiticidad, como tampoco se muestra interesado por ideas más débiles de verdad. Ello se debe muy probablemente a que tanto la idea de verdad como la de analiticidad son importantes fuera de las matemáticas.

A pesar de lo anterior, nos parece que hay cuando menos tres razones para abundar sobre el tema de la analiticidad.

La primera razón tiene que ver con el contenido y la actitud del ficcionalismo ante los problemas de la filosofía de las matemáticas. Podríamos exigir al ficcionalismo un tratamiento del tema de la analiticidad semejante al de la verdad. Mientras que el tema de la verdad es central en su doctrina, el de la analiticidad se deja de lado. Lo más coherente sería proponer alguna elucidación de la idea de la analiticidad, del mismo modo que se nos ofrece una idea de "verdad ficticia" para la verdad. El ficcionalismo tiene un contenido positivo y uno negativo. La parte positiva consiste de las tesis que asume como parte de su cuerpo doctrinal y de los problemas que se compromete a resolver; la parte negativa consiste de los problemas que no intenta resolver, ya sea porque desde su punto de vista resultan triviales o no son legítimos. Un ejemplo del contenido negativo del ficcionalismo es que el ficcionalista no tiene que ofrecer una epistemología sustantiva para las teorías matemáticas, pues el conocimiento matemático no es el contenido de las teorías matemáticas[11]. Ahora bien, la verdad matemática también es parte del contenido negativo del ficcionalismo pues, como en el caso del conocimiento teórico, para el ficcionalista no hay literalmente verdad matemática que deba explicarse. A pesar de esto, el ficcionalismo nos explica la verdad matemática, nos dice que hay un sentido ficticio en el cual los enunciados matemáticos son verdaderos. Es decir, se ocupa de la verdad aún cuando no está obligado a ello. En nuestra opinión si el ficcionalismo ha de ser una postura filosófica satisfactoria, no puede sólo dejar de lado los problemas que integran su contenido negativo, es preciso aclarar por qué dichos problemas son triviales o por qué se dejan de lado. La verdad ficticia cumple el cometido de dar cuenta de la concepción tradicional según la cual las matemáticas son verdaderas. Ahora bien, el tema de la analiticidad está ligado al tema de la verdad matemática, y si el ficcionalismo detalla el sentido ficticio de la verdad matemática en lugar de simplemente hacerlo a un lado, en nuestra opinión eso nos da un motivo para esperar detalles semejantes acerca de la analiticidad.

La segunda razón para profundizar en la analiticidad es que la relación entre analiticidad y matemáticas ha sido percibida como una asociación característica, por lo menos para alguien tan influyente en la filosofía de las matemáticas como Bertrand Russell.

[11] véase el capítulo 1 sección 2.2.

La verdad matemática se ha percibido como un hecho peculiar, como un tipo de verdad diferente a la que priva fuera de las matemáticas; la verdad matemática se percibía como una verdad *a priori*, necesaria y analítica. Russell en particular[12], percibe que el carácter lógico-matemático (para él no había diferencia entre lógica y matemáticas) de las proposiciones lógico-matemáticas reside en un rasgo muy específico, rasgo que él identifica como la analiticidad de dichas proposiciones. Así, la analiticidad es un rasgo característico, un rasgo básico de las matemáticas, un rasgo que debe ser expresado satisfactoriamente por una noción adecuada. Russell, sin embargo, estaba convencido de que la noción kantiana de analiticidad no expresaba cabalmente el rasgo en que estaba interesado y que no es útil al propósito de caracterizar las proposiciones matemáticas. La preocupación de Russell, sin embargo, no es la que ha prevalecido en el estudio de la analiticidad. La analiticidad, tradicionalmente, es una propiedad que se manifiesta en el antagonismo entre enunciados sintéticos y analíticos, y el estudio de la distinción analítico-sintético es la base de las teorías acerca de lo analítico. Bajo la perspectiva tradicional los enunciados matemáticos simplemente están del lado analítico de la distinción; solamente son instancias donde se manifiesta la propiedad de ser analítico. Pero la preocupación de Russell va en un sentido muy diferente: una idea correcta de analiticidad debe expresar satisfactoriamente aquella cualidad responsable de otorgar el carácter matemático a las proposiciones matemáticas. Es decir, no basta con revisar el concepto de analiticidad y cotejar que las matemáticas caen (o no caen) bajo dicho concepto: la actitud de Russell debe llamarnos la atención acerca de que las matemáticas poseen algo especial, algo que las distingue del resto de los enunciados científicos, y que este rasgo peculiar es a lo que le nombramos "analiticidad". Si las nociones de analiticidad no expresan satisfactoriamente este rasgo matemático no podemos simplemente declarar "las matemáticas no son analíticas", porque estaríamos desatendiendo la tarea de aclarar en que consiste la especificidad de lo matemático. En otras palabras, para acercarnos a la analiticidad tenemos dos alternativas que se encaminan en sentidos opuestos. Por un lado, la tradicional; pensamos que la analiticidad puede explicar cosas acerca de las matemáticas, como su aprioricidad o su necesidad. Esta es la actitud que privó en el empirismo lógico; la analiticidad explicaría a las matemáticas. Por otro lado, contraria a la anterior actitud; pensamos que el estudio de los rasgos específicos de las matemáticas

[12] Russell 1988 pp. 178-179.

ayudará a entender qué es aquello que percibimos como –y que provisionalmente hemos llamado– "lo analítico". Lo matemático explicaría lo analítico. Esta última actitud es más cercana a las preocupaciones de Russell.

Entonces, aunque podamos comprobar que las matemáticas no cumplen con ninguna noción de analiticidad, todavía nos hace falta (no solamente al ficcionalismo sino a la filosofía de las matemáticas en general) contestar preguntas como ¿Por qué se han percibido a las matemáticas como especiales, como vinculadas a lo analítico?, ¿Cuál es el rasgo especial de las matemáticas al que se refería Russell y que él suponía era la analiticidad? Estas preguntas son suficientes para motivar una segunda revisión de la analiticidad de las matemáticas.

La tercera razón para retomar el tema de la analiticidad, es que la distinción analítico-sintético ha tenido relevancia más allá de las matemáticas o la mera semántica (que pareciera ser su estrecho campo natural). La importancia de la distinción es notable en la actitud del empirismo lógico, que encontró una utilidad extra-lingüística a la analiticidad pues pudo reducir problemas metafísicos, como la necesidad, y epistemológicos, como el del *a priori*, a problemas lingüísticos[13]. Un panorama general de la analiticidad de las matemáticas debe contemplar no sólo las concepciones de la analiticidad, sino también los objetivos y los potenciales beneficios del empleo de la analiticidad en la filosofía. Esto significa que debemos preguntar no solo si las matemáticas caen bajo el concepto de analiticidad, sino también si obtenemos algún beneficio al afirmar este hecho. Eso es algo que todavía falta por hacer y una tarea en la cual esperamos dar los primeros pasos en este trabajo.

Estas tres razones son nuestros motivos. Hablemos ahora de nuestra estrategia para abordar el tema. Ya que para el ficcionalista las matemáticas no son literalmente analíticas, podríamos intentar encontrar un sentido ficticio de analiticidad según el cual las matemáticas fuesen "analíticas", de modo similar al sentido ficticio que se nos propone para la verdad. Un problema con esta estrategia es que una noción ficticia de analiticidad sólo necesita apelar a la noción ficticia de verdad, pero de este modo desatenderíamos a la segunda y tercera razones que acabamos de ofrecer para profundizar en la analiticidad. Pues una analiticidad ficticia en este sentido no es mas que una analiticidad relativa y esta última

[13] véanse las secciones 3 del capítulo 1 y las secciones 1 y 2 del capítulo 2.

sólo es interesante en tanto que la verdad relativa (o ficticia) es importante. Y ésta última difícilmente puede iluminarnos acerca de la relación tradicional entre matemáticas y analiticidad que le preocupa a Russell. Además, y la analiticidad ficticia tampoco nos permite vislumbrar la importancia filosófica de la analiticidad de las matemáticas.

Debido a lo anterior, en lugar de buscar una analiticidad ficticia intentaremos hacer un examen más amplio de la actitud de la filosofía frente a la analiticidad:

Optaremos por revisar no sólo la noción de analiticidad sino su relevancia para la filosofía de las matemáticas. Veremos[14] que un componente crucial de la importancia filosófica de la analiticidad es que los enunciados analíticos representan una vía para obtener beneficios filosóficos sustantivos a partir de simples tesis lingüísticas[15].

Ya que en un primer momento las tesis lingüísticas son más visibles que los potenciales beneficios filosóficos, tomaremos el análisis de la semántica de las matemáticas como nuestro punto de partida. A partir de allí investigaremos si puede obtenerse alguna ventaja filosófica de las tesis semánticas del ficcionalismo. Siguiendo el espíritu de Russell nuestra investigación partirá de los rasgos semánticos básicos de las matemáticas y no del análisis de una idea preconcebida de lo analítico; intentaremos clarificar la peculiaridad de las matemáticas que nos ha conducido a pensar que son analíticas, pero teniendo en cuenta que la analiticidad tiene un valor para los filósofos, además del semántico.

Al intentar explicar por qué se han supuesto analíticas a las matemáticas veremos que no podemos auxiliarnos de la misma analiticidad, de modo que usaremos el supuesto de que hay solamente un parecido entre los enunciados analíticos y los matemáticos. Así entonces, el objetivo de este trabajo es presentar una explicación de la semejanza que hay entre analiticidad y matemáticas. Veremos que desde el punto de vista del ficcionalismo hay una asociación entre el significado de las teorías matemáticas y su consistencia, entendiendo que la consistencia juega el papel de sustituto de la verdad en el sistema de valores matemáticos de un ficcionalista.

Para conseguir nuestro objetivo, el trabajo estará organizado de la siguiente manera:

El capítulo 1 está dedicado a consignar los antecedentes que nos servirán de marco para la discusión.

---

[14] En el capítulo 1 sección 4.

[15] El empirismo lógico usaba la distinción analítico sintético para explicar el a priori o para distinguir entre metafísica y matemáticas, ambas disciplinas a priori, pero la primera inaceptable para el empirismo.

En la primera parte del capítulo 1 presentaremos el ficcionalismo matemático. Para ello discutiremos las dificultades que el platonismo naturalizado contemporáneo enfrenta. Sólo discutiremos este tipo de platonismo y únicamente en tanto que es el mejor marco de referencia para apreciar al ficcionalismo en la filosofía contemporánea de las matemáticas. Veremos la concepción de Field del ficcionalismo y su postura deflacionista del conocimiento matemático. Por último discutiremos el sistema de valores ficcionalista y su contraste con el sistema de valores del platonismo; este último punto será significativo porque estableceremos el paralelo entre verdad y consistencia que nos permitirá establecer la semejanza analítico-matemática en el capítulo 3.

En la segunda parte del capítulo 1 revisaremos brevemente algunas ideas de analiticidad, en particular las de Frege, Russell, Carnap y Quine, que han estado asociadas con las matemáticas. También el estado reciente del debate acerca de la analiticidad y su pertinencia para el ficcionalismo. En la parte final propondremos una caracterización general de analiticidad que nos será útil para evitar una revisión caso por caso de las nociones de analiticidad.

En el capítulo 2 introduciremos el problema de explicar la aparente analiticidad de las matemáticas, problema que nombraremos pseudo-analiticidad de las matemáticas. Propondremos una explicación de la pseudo-analiticidad basada en una inferencia a la explicación más simple, inferencia que involucra como premisa la semejanza entre analiticidad y matemáticas. Esto nos conducirá a dar cuenta dicha semejanza. También veremos cuáles son las bases semánticas a las que el ficcionalismo puede recurrir para tratar de explicar la referida similitud. Al resultar insuficientes las tesis básicas del ficcionalismo complementaremos la doctrina ficcionalista con dos nuevas tesis acerca del significado de los términos matemáticos: el modelo de uso de la definición implícita y la constitutividad los conjuntos de enunciados matemáticos.

En el capítulo 3, usando las tesis semánticas introducidas en el capítulo 2, le atribuiremos a las teorías matemáticas el siguiente rasgo: son *consistentes en virtud sólo de su significado*. Este rasgo nos permitirá explicar la similitud analítico-matemática y con ello la pseudo-analiticidad de las matemáticas.

CAPÍTULO 1. FILOSOFÍA DE LAS MATEMÁTICAS

En este capítulo presentaremos una breve descripción del panorama sobre el cual desarrollaremos este trabajo. Presentaremos la doctrina ficcionalista de Hartry Field acerca de las matemáticas. Introduciremos el ficcionalismo como una alternativa al platonismo contemporáneo, de modo que sólo nos detendremos en las dificultades platonistas que el ficcionalismo quiere solucionar o evitar. Posteriormente revisaremos el tema de la analiticidad y su relación con las matemáticas y el ficcionalismo.

1. Platonismo

Es difícil sentir aprecio por el ficcionalismo matemático a primera vista, porque atenta contra posiciones muy tradicionales; niega cosas como la verdad de las matemáticas. El ficcionalismo se aprecia mejor cuando se le presenta como alternativa al platonismo. Por ello será preferible tocar algunos puntos relevantes del platonismo matemático contemporáneo para luego introducir el ficcionalismo. En esta sección presentaremos a grandes rasgos el platonismo matemático contemporáneo y las dificultades que le aquejan. Enfatizamos desde el principio que el platonismo del que hablaremos en todo este trabajo es una posición que se sustenta en el argumento de indispensabilidad y que hablaremos de él sólo en tanto que su discusión nos ayudará a reconocer las motivaciones del ficcionalismo.

1.1 El platonismo y sus razones.

El platonismo es una doctrina filosófica que se remonta a la antigüedad, pero en este trabajo estamos interesados en un tipo específico de platonismo, que concierne sólo a las matemáticas. El platonismo matemático tiene diversas variaciones, pero dejaremos de lado las posiciones que se apoyan en argumentos metafísicos o teológicos. Nos concentraremos en el platonismo naturalizado contemporáneo, que sustenta sus tesis metafísicas apelando al éxito de la ciencia. De este modo tomaremos a la forma más fuerte de platonismo contemporáneo; cuya fuerza reside en el éxito de las matemáticas al aplicarse en ciencia. Veamos los detalles de esta doctrina.

Un realista o platonista matemático es una persona quien (a) cree en la existencia de entidades matemáticas (números, funciones, conjuntos, etc.), y (b) cree que estas entidades son independientes de la mente e independientes del lenguaje[16].

Una vez que sabemos qué es el platonismo será importante saber por qué un filósofo de principios del siglo XXI habría de ser platonista. Un punto inevitable al tratar de encontrar alguna base sólida para el platonismo matemático contemporáneo es la bancarrota de la distinción analítico-sintético[17], ya que el apoyo más sólido que podemos encontrar para una filosofía platonista naturalizada de las matemáticas está íntimamente relacionado con la visión holista del conocimiento científico (la tesis Duhem-Quine). Así que empezaremos por ver cuál era la relación entre la distinción analítico-sintético y las matemáticas. Tradicionalmente la verdad de las matemáticas ha sido considerada como un hecho peculiar: según la visión tradicional las proposiciones matemáticas no solamente son verdaderas, sino que son *a priori*, necesarias y, por algún tiempo, analíticas. El empirismo lógico, por ejemplo, explicaba que la aprioricidad de las matemáticas era resultado de su analiticidad, como también lo era su necesidad (sostenía la tesis de que toda necesidad es una necesidad lingüística y esta última podía ser explicada en función de la analiticidad). La distinción analítico-sintético parecía proveerle todo lo necesario para entender las peculiaridades de la verdad matemática. Y no sólo eso, la distinción analítico-sintético les permitía distinguir a las matemáticas de disciplinas como la metafísica especulativa que, sospechosamente, también eran *a priori*; mientras que las matemáticas son verdaderas analíticamente, los enunciados no-verificables de la metafísica carecen de significado[18]. El empirismo lógico tenía una elucidación de la verdad matemática y una caracterización de las matemáticas que las distinguían de las disciplinas *a posteriori* y la metafísica. Como es bien sabido, esta situación no perduró.

Ya que estas posiciones dependían de la distinción analítico-sintético, cualquier duda respecto de dicha distinción repercutiría sobre ellas. Sabemos que Quine rechazó la distinción analítico-sintético y dicho rechazo se convirtió en la posición dominante. Por

[16] Field 1989 p. 1.
[17] Nos referimos al creciente escepticismo acerca del papel epistemológico de la distinción analítico-sintético que suscitaron en la comunidad filosófica los diversos cuestionamientos y desafíos de filósofos como Quine a partir de los años de 1950 y 60. Este punto de inflexión se tratrá más adelante, en la sección 4 de este el capítulo, donde hablaremos de analiticidad.
[18] Carnap 1998, Dales 1998, Harman 1996

esta y otras razones las explicaciones acerca de la naturaleza de las matemáticas que presuponían a la analiticidad cayeron en el descrédito.

Junto con el rechazo de la analiticidad, Quine propuso un modelo holista para la epistemología que minaba abiertamente la explicación de la aprioricidad de la verdad matemática. Según este modelo no hay conocimiento científico *a priori*, sino que la evidencia para cada enunciado particular depende de la evidencia para la totalidad del sistema de conocimiento. En estas circunstancias, debía preguntarse cómo entender la verdad de las matemáticas. La solución más aceptada fue que la teoría que aclarase la verdad matemática, debía ser la misma que aclarase la verdad fuera de las matemáticas. Esto es precisamente lo que nos da una razón para aceptar un platonismo de tipo naturalizado: Una teoría de la verdad al estilo Tarski, dice que un enunciado como "Hay números pares mayores que nueve", es verdadero si y sólo si hay al menos un número par mayor que nueve. Las teorías matemáticas implican la existencia de entidades matemáticas, por tanto, si aceptamos que son verdaderas y que su verdad es como en cualquier otra disciplina, tendremos que aceptar la existencia de las entidades implicadas en ellas.

Pero esta no es la única razón a favor del platonismo naturalizado contemporáneo. La razón más fuerte hoy en día deriva del empleo indispensable de las matemáticas en la ciencia[19]. Las ciencias que describen a nuestro mundo hacen un empleo frecuente de las matemáticas. Generalmente recurren a cuantificaciones existenciales sobre entidades matemáticas como funciones, números o conjuntos. Cualquiera que esté preocupado por tener descripciones correctas de la naturaleza, estará preocupado por la verdad de las teorías que la describen. Y, por tanto, estará preocupado por la verdad de las matemáticas que aparecen en dichas teorías. Dado que las teorías científicas cuantifican existencialmente sobre entidades matemáticas, si creemos en dichas teorías, debemos creer también en entidades matemáticas. Las aplicaciones de las matemáticas en ciencia dan al platonismo su argumento más fuerte: el argumento de la indispensabilidad de las matemáticas.

Field presenta a los argumentos de indispensabilidad de la siguiente manera:

> Un argumento de indispensabilidad es un argumento de que debemos creer en una cierta suposición (v. g. una suposición que afirma la existencia de un cierto tipo de entidad) porque hacerlo así es indispensable para ciertos propósitos (los

[19] Colyvan, 2001.

cuales son entonces detallados por el argumento).[20]

Field entiende a la inferencia a la mejor explicación (IME) como un argumento de indispensabilidad. La presenta así:

> Supóngase (a) que tenemos ciertas creencias, creencias acerca de 'los fenómenos', las cuales no deseamos abandonar; (b) que esta clase de 'fenómenos' en los que creemos es grande y compleja; (c) que tenemos una explicación bastante buena de estos fenómenos (en el sentido de un cuerpo relativamente simple de principios no-ad hoc de los cuales se siguen); y (d) una de las cosas que aparecen en la explicación es la suposición S, y estamos muy seguros de que no es posible hacer ninguna explicación de los fenómenos sin S. La idea de la 'inferencia a la mejor explicación' es que bajo estas circunstancias tenemos fuertes razones para creer S.[21]

Mucha de las inducciones que ejecutamos en situaciones comunes o en la ciencia, están relacionada con la inferencia a la mejor explicación. Esta es de particular importancia para tratar con creencias acerca de entidades inobservables. En física, por ejemplo, para explicar el decaimiento radioactivo, ciertos patrones característicos en las familias de partículas de alta energía o los rastros dejados en las cámaras de niebla de los aceleradores de partículas, es necesario postular la existencia de entidades que llamamos "partículas elementales" (v. g. electrones o quarks). Cualquiera que crea que nuestras explicaciones en física son parte de lo que constituye nuestro mejor conocimiento acerca del mundo natural, encontrará en la inferencia a la mejor explicación una fuerte razón para creer en la existencia de electrones o quarks. En general si creemos en las explicaciones científicas y confiamos en la inferencia a la mejor explicación, tendremos fuertes razones para sostener creencias acerca de las entidades inobservables involucradas en esas explicaciones. De otra manera entraríamos en contradicción ya sea con nuestra creencia en las teorías científicas o con nuestra confianza en los métodos de inferencia.

Ahora bien, si alguien cree en cosas como electrones o quarks, podría justificarse con la IME. Pero las explicaciones que presuntamente justificarían la creencia en los quarks involucran indispensablemente no solamente quarks, sino también entidades como funciones, conjuntos o números. La IME justifica creer en quarks porque no podemos dar la explicación sin los quarks, pero tampoco podemos dar la explicación sin usar funciones,

[20] Field 1989, p. 14
[21] Field 1989, p. 15

conjuntos o números. Entonces la IME también deberá justificar la creencia en entidades matemáticas como funciones, conjuntos o números. No sólo eso, sino que este tipo de argumento a favor de las entidades matemáticas es más fuerte que cualquier argumento a favor de algún inobservable físico. Porque las matemáticas no sólo están involucradas en las explicaciones de fenómenos particulares que postulan inobservables físicos, sino también en las explicaciones mismas de esos inobservables (v. g. en la teoría de quarks). Las matemáticas están involucradas en muchas y diferentes explicaciones, de modo que si alguna teoría física falla, seguramente habrá otra más exitosa que también usará matemáticas, proporcionando con ello el sustento a la creencia en objetos matemáticos.

Si creemos literalmente en las explicaciones científicas y confiamos en la IME, tenemos fuertes razones para ser platonistas de corte naturalizado. Debemos notar que el apoyo de la ciencia no es lo que dio origen al platonismo. El platonismo por sí mismo no depende los anteriores argumentos, tan sólo el platonismo matemático naturalizado contemporáneo que aquí nos interesa. Podría pensarse en argumentos metafísicos o teológicos que expliquen nuestro don de conocer objetos abstractos. Pero esos argumentos difícilmente dejan espacio para un debate en un terreno naturalista, de modo que, como ya lo habíamos anunciado, en este trabajo sólo nos ocuparemos del platonismo naturalizado contemporáneo que se apoya en la indispensabilidad de las matemáticas.

Hasta ahora hemos visto al platonismo desde una perspectiva externa a las matemáticas; desde el ambiente filosófico, el científico y importancia de las aplicaciones externas de las matemáticas. Antes de revisar los problemas del platonismo, es necesario ver el panorama completo desde una perspectiva interna a las matemáticas[22].

Si creemos en las teorías matemáticas, hemos de creer también en las entidades que ellas postulan. Ahora bien, ¿Qué otra cosa podría decir el platonismo acerca de estas entidades matemáticas? Lo único que sabemos de cosas como conjuntos o números es lo que las teorías matemáticas nos dicen acerca de ellas. El platonismo sólo puede completar sus tesis acerca de lo que son los objetos matemáticos recurriendo a las teorías matemáticas mismas, las cuales no describen la locación espacio-temporal de los objetos a que se refieren y tampoco describen métodos para obtener su locación. No describen tampoco a qué tipo interacciones están sometidos en relación con objetos familiares –como las

[22] Extrañamente los problemas que habrá de enfrentar el platonismo tienen que ver sobre todo con la apreciación de las matemáticas que tienen de ellas los mismos matemáticos.

moléculas o los cuerpos masivos. Todo esto, junto con el hecho de que la hipótesis de que las entidades matemáticas son objetos concretos es muy poco plausible[23], nos da una razón para pensar que los objetos matemáticos son objetos abstractos: objetos que no poseen locación espacio-temporal y que no entran en interacción causal con los objetos de nuestro mundo[24]. Así, consideraremos que una forma estándar de platonismo matemático afirma las siguientes tesis:

- Existen los objetos matemáticos.
- Los objetos matemáticos son independientes de la mente y del lenguaje
- Los objetos matemáticos son objetos abstractos.

Con este panorama podemos ahora revisar los problemas del platonismo.

1.2 Problemas del platonismo

Los problemas que aquejan al platonismo son la principal motivación para proponer el ficcionalismo. En esta sección resumiremos dos de los problemas más notorios. Los llamaremos el problema de la interidentificación teórica y la tensión semántica-epistemología en el platonismo.

El problema de la interidentificación teórica surge al observar el siguiente hecho: muchos términos de las teorías matemáticas, por ejemplo "número", pueden ser definidos en función de teorías diferentes, por ejemplo la teoría de conjuntos. En muchos casos existe más de una definición para los términos de una teoría. Por ejemplo el término aritmético "número" puede definirse de diversas maneras en teoría de conjuntos.

El platonista, naturalmente, cree que "número" se refiere a cierto objeto matemático descrito por la aritmética y que un conjunto es un objeto descrito por la teoría de conjuntos. De este modo, si podemos definir al número dos como el conjunto $\{ \{\}, \{\{\}\} \}$, debemos pensar que, a nivel ontológico, estamos estableciendo la identidad entre el número dos y el conjunto $\{ \{\}, \{\{\}\} \}$. El problema surge cuando notamos que también podemos definir al número dos como el conjunto $\{ \{\{\}\} \}$, lo que también implica su identidad. Tenemos, entonces, un par de identidadesficaciones para el número dos. Además, podemos hacer

[23] En primer lugar la sugerencia de que los objetos matemáticos son objetos concretos en este mundo, resulta demasiado extraña dada la peculiaridad de las teorías matemáticas. En segundo lugar, aunque ha habido intentos por hacer plausible la idea de que los objetos matemáticos son objetos que existen en nuestro mundo, tal como pensamos que existen árboles o personas en este mundo, hay serias dificultades para hacer esta idea coherente con las mismas teorías y prácticas matemáticas (Hart 1996 y Maddy 1990).

[24] Balaguer 1998, p. 76

estas identificaciones de manera arbitraria, porque no hay ningún hecho que nos permita decidir cuál identificación elegir. Ahora, si el número dos es idéntico al conjunto {{}, {{}} } y también al conjunto { {{}} }, este par de conjuntos deben ser idénticos entre sí. ¡Pero la teoría de conjuntos nos dice que estos conjuntos no son idénticos entre sí! La teoría de conjuntos afirma que el conjunto { {}, {{}} } es diferente del conjunto { {{}} }, de tal suerte que no podemos identificar arbitrariamente al número dos con cualquiera de ellos.

Este problema todavía puede llevarse a un nivel más fundamental: Si la teoría de conjuntos es la teoría básica de las matemáticas, podemos suponer que los conjuntos son los objetos básicos a partir de los cuales se construyen todos los demás. El problema es que en matemáticas también podemos definir a los conjuntos a partir de los números naturales, o de funciones de identidad en teoría de categorías. Ya que podemos definir a los conjuntos en término de números naturales o funciones de identidad, parece legítimo pensar que estos objetos son más básicos que los conjuntos. Pero tampoco en este caso tenemos la posibilidad de decidir cuál de ellos es el objeto más fundamental, ni cuál equivalencia entre objetos es la correcta. Este es el núcleo del problema de la interidentificación teórica.

Para ser justos, debemos decir que no hay un consenso en cuanto a la relevancia de este problema. La pregunta de qué significa la interidentificación ha suscitado muchas discusiones. La interidentificación arbitraria puede interpretarse como simplemente señalando que hay problemas abiertos en la ontología de las matemáticas o en la teoría de la referencia del platonismo. Aquí no trataremos de encontrar el sentido de este problema, en cambio remarcaremos algo que parece pasarse por alto: independientemente de la fuerza que tenga el problema de la interidentificación teórica como objeción a los principios del platonismo, el problema plantea dificultades severas al platonismo naturalizado. La idea de que el platonismo matemático es una extensión natural de una filosofía general de la ciencia, idea que está implícita en el origen naturalizado del platonismo contemporáneo. El problema es que el platonismo no puede conciliar de una manera natural (es decir sin apelar a tesis extravagantes o no-naturalistas acerca de la ontología o la referencia) sus tesis con los sucesos que podemos observar en la práctica matemática cotidiana.

Pasaremos ahora al segundo problema. Lo que aquí llamamos la *tensión semántica-epistemologia del platonismo*. Nombramos así a este problema debido a que el platonismo le debe mucho de su plausibilidad a la sencillez con que aborda el problema de la verdad para las matemáticas, pero esta sencillez se logra a costa de suscitar problemas serios en relación con la naturaleza del conocimiento matemático. El problema, a grandes rasgos, es que si las teorías matemáticas son verdaderas y describen objetos abstractos, resultará muy difícil explicar como es que son informes confiables de la naturaleza de los referidos objetos. Recordemos que se trata de objetos que por principio no tienen locación espacio-temporal ni sostienen ningún tipo de interacción causal con nuestro mundo o nuestra mente. En estas condiciones es muy plausible que jamás llegásemos a tener conocimiento de ellos. A modo de muestra pensemos en esto: Europa no tuvo ningún conocimiento acerca del continente americano durante mucho tiempo, a pesar de que lo único que los separaba era el Atlántico; por principio siempre fue posible que Europa entrara en contacto con América. Hay muchas cosas a las que es posible en principio tener acceso y, sin embargo, no tenemos conocimiento de ellas. Descubrimientos acerca de regiones remotas de nuestra galaxia o de la vida en las profundidades del mar, por citar algo, siguen siendo motivo de sorpresa. A pesar de todo, el platonista nos dice que poseemos conocimiento acerca de objetos que por principio son inaccesibles. Si bien es posible establecer la verdad de las creencias acerca de números o conjuntos, vía el argumento de la indispensabilidad, también nos gustaría saber por qué habríamos de creer tales cosas en primer lugar y cómo es que llegamos a ellas. Esto representa el principal problema epistemológico para el platonismo.

Acerca de este problema, Field[25] enfatiza acertadamente que no se trata solamente de justificar la verdad de nuestras creencias matemáticas usando sus conexiones lógicas con las teorías empíricas verdaderas, sino de explicar la confiabilidad de estas creencias. Podemos creer en la existencia de objetos matemáticos como los números naturales y podríamos asegurar la verdad de esta creencia usando la verdad de las teorías donde aparecen números naturales y un argumento de indispensabilidad. En cierto sentido estaríamos en la misma posición al creer en quarks, que al creer en los números naturales. Pero eso no explica "cómo nuestras creencias acerca de estas remotas entidades pueden reflejar tan adecuadamente los hechos acerca de ellas"[26].

Es decir, el platonismo no solamente requiere de poder encadenar lógicamente las creencias matemáticas con la creencia en las teorías científicas, sino que, por la naturaleza de las primeras (acerca de entidades inaccesibles), también requiere de explicar con más

[25] Field 1989 pp. 25-30.
[26] Field 1989 p. 26.

detalle cuál es la relación entre creencia matemática y hecho matemático.

Field acepta que para que esta línea de argumentación contra el platonismo tenga éxito precisa todavía de completarse, mostrando cuando menos (a) que el platonista tiene necesariamente el compromiso de explicar la confiabilidad de sus creencias y (b) que es imposible ofrecer una buena explicación[27].

Concluiremos está sección haciendo un énfasis que Field parece pasar por alto al tocar los problemas epistemológicos del platonismo naturalizado; este platonismo no puede reconciliar entre sí sus propias posturas: En general la relación entre las nociones de creencia y hecho que requerimos para explicar la confiabilidad de nuestras creencias no es simple, aún para el caso de creencias acerca de entidades observables. Pero para el caso de hechos accesibles esta relación hecho-creencia es también de un tipo accesible –en el mismo sentido en que serán accesibles cosas como las creencias y los hechos; la relación hecho-creencia puede ser, por ejemplo, una relación de tipo causal. Pero para el caso de las matemáticas la explicación de la relación hecho-creencia debe ser de una índole completamente distinta, ya que los hechos matemáticos son inaccesibles, y las explicaciones de la relación hecho matemático-creencia matemática deben ser de índole distinta a las que privan en la epistemología común. Recordemos que el platonismo naturalizado tiene entre sus motivaciones la de ser una doctrina que mantiene una continuidad con las opiniones filosóficas fuera de las matemáticas: la teoría de la verdad, los argumentos de indispensabilidad y la inferencia a la mejor explicación son cuestiones cuyas virtudes y desventajas comparte el platonista con el filósofo (un realista, por ejemplo) que las sostiene fuera de las matemáticas. Pero la epistemología platonista de las matemáticas, aún si pudiese resolver sus problemas, representa una marca de discontinuidad con la filosofía general de la ciencia. La tensión semántica-epistemología es una tensión dentro del propio cuerpo doctrinal platonista, porque sus soluciones semánticas crean problemas epistémicos. Pero también hay una tensión con la filosofía externa a las matemáticas, porque la epistemología platonista deberá ser de índole diferente a la epistemología para el resto de la ciencia. Parecería que el propósito de integrar a las matemáticas al retículo holista de la ciencia mediante el platonismo enfrenta serias dificultades. La atractiva integración del platonismo como filosofía de las matemáticas a

[27] Field 1989 p. 26.

una filosofía más general de la ciencia es, después de todo, una integración parcial.

2. Ficcionalismo como Antiplatonismo

En esta sección presentaremos al ficcionalismo como un intento de explicar a las matemáticas evitando los problemas del platonismo matemático contemporáneo. El ficcionalismo es una forma de antiplatonismo. Su mayor influencia proviene del trabajo de Hartry Field. En esta sección, y en lo que resta del trabajo, tomaremos como base para la discusión al ficcionalismo de Field.

2.1 Ficcionalismo en Field

Un antiplatonista es por supuesto alguien que rechaza el platonismo. Un realista o platonista matemático es una persona que cree en la existencia de entidades matemáticas independientes de la mente y el lenguaje. Un antiplatonista es alguien que no cree en la existencia de entidades matemáticas o bien que no cree que las entidades matemáticas son independientes de la mente o del lenguaje.

El idealista matemático es justamente alguien que niega la independencia de las entidades matemáticas y cree, por ejemplo, que son construcciones mentales o lingüísticas. Otro tipo de antiplatonista es el que no cree en la existencia de entidades matemáticas. Puesto que las teorías matemáticas hablan acerca de cierto reino de entidades matemáticas, este último antiplatonista no cree literalmente en las teorías matemáticas y es, consecuentemente, un ficcionalista matemático. Field lo caracteriza del siguiente modo:

> (...) un anti-platonista debe adoptar el ficcionalismo acerca de las matemáticas –o cuando menos, ficcionalismo acerca de las matemáticas-tomadas-nominalmente[28]. Un ficcionalista acerca de las matemáticas-tomadas-nominalmente es alguien quien no cree literalmente los enunciados matemáticos, al menos cuando estos son tomados nominalmente (o si se prefiere "ascender semánticamente", un ficcionalista es alguien que no considera dichos enunciados, tomados

[28] "tomar nominarlmente" a las matemáticas es atribuir a las teorías y enunciados matemáticos el contenido que perecen tener, "hay numeros mayores a dos" tomado nominalmente es la afirmación de que existe al menos un numero que es mayor que dos. La aclaración es relevante porque una estrategia socorrida es pensar que los enunciados matemáticos significan más de lo que en apariencia significan, por ejemplo "hay numeros mayores a dos" podría significar si hay numeros entonces hay al menos un numero que es mayor que dos. El ficcionalismo no trata de encontrar un significado a las matemáticas, salvo el que ya parecen poseer.

nominalmente, como literalmente verdaderos).

El ficcionalista al igual que el platonista, cree que una teoría de la verdad para las matemáticas no debe ser distinta de la que opera fuera de las matemáticas pero, al contrario del platonista, no cree que las teorías matemáticas son literalmente verdaderas. En relación con este tema Field completa la imagen del ficcionalista del siguiente modo:

> Un ficcionalista no necesita (y no debe) negar que hay algún sentido en el cual '2+2=4' es verdadero; pero conceder que es verdadero en algún sentido no nos compromete a encontrar algún procedimiento de traducción interesante que tome supuestos matemáticos interesantes y los tome en supuestos verdaderos que no postulen entidades matemáticas. En vez de esto el ficcionalista puede decir que el sentido en el cual '2+2=4' es verdadero es el mismo que el sentido en el cual 'Oliver Twist vivió en Londres' es verdadero: este último es verdadero sólo en el sentido de que es "verdadero de acuerdo con" cierta historia bien conocida, y el primero es verdadero solamente en el sentido de que es verdadero de acuerdo con las matemáticas estándar. Similarmente el ficcionalista cree que 2+2=4 sólo en el sentido de que cree que las matemáticas estándar dicen que (o tienen como consecuencia que) 2+2=4, justamente como la mayoría de nosotros cree que Oliver Twist vivió en Londres solamente en el sentido de que creemos que la novela dice que o tiene como consecuencia que Oliver Twist vivió en Londres. Si uno cree solamente esto, parece natural decir que uno no cree literalmente que Oliver Twist vivió en Londres; similarmente, el ficcionalista que considera razonablemente apta la comparación encontrará natural decir que no cree literalmente que 2+2=4.[29]

El ficcionalismo de Field no sólo niega las tesis del platonismo, además, detalla una verdad ficticia para las matemáticas, al estilo de la verdad de los relatos ficticios. Entonces, podemos resumir el ficcionalismo como los siguientes principios:

1.- No existen entidades matemáticas.

2.- Las teorías matemáticas no son literalmente verdaderas; el ficcionalista no cree en las matemáticas-tomadas-literalmente.

3.- Hay un sentido en el que los enunciados matemáticos son verdaderos: son verdaderos de acuerdo con las matemáticas estándar.

---

[29] Field 1989 p. 3

Ya revisamos las razones para ser platonistas, ahora veamos qué razones tenemos para ser ficcionalistas. Una de las razones para adoptar el ficcionalismo es que no tiene las dificultades del platonismo. Platonismo y ficcionalismo son posiciones antagónicas, pero hay un punto que ambos comparten, la naturalización: una explicación simple de la verdad matemática fue un incentivo para la filosofía de las matemáticas tras el descrédito de la distinción analítico-sintético. La noción de verdad es la misma para platonistas naturalizados y ficcionalistas, pero los platonistas afirman que los enunciados matemáticos son verdaderos mientras que los ficcionalistas no. Ahora, renunciar a algo tan preciado como la verdad de las matemáticas no es sencillo y el ficcionalismo debe argumentar por qué habríamos de hacerlo. Además de eso, debe sortear los problemas del platonismo. Veremos primero cómo el ficcionalismo se libra de estos problemas, el argumento para abandonar la verdad lo abordaremos en las siguientes secciones.

El problema de la interidentificación teórica puede ser fácilmente explicado en términos ficcionalistas: Puesto que las entidades a las que se refieren las teorías no existen, no tiene sentido pensar que ocurre una u otra identificación de los objetos de varias teorías. Pero si la identificación inter-teórica de entidades no tiene sentido para el ficcionalismo, debe explicársenos de que se trata esta aparente identificación. He aquí la explicación: Si las teorías matemáticas son buenas historias acerca de entidades ficticias como números o conjuntos, nada nos impide construir buenas historias (historias coherentes) acerca de cómo una se reduce a la otra. Una de esas buenas historias consiste en definir los términos de una teoría con enunciados de otra teoría diferente, esto explica la definición inter-teórica. Como tampoco proclamamos que nuestras historias son ciertas, nada nos impide proponer varias historias para explicar o definir los términos de las diversas teorías; esto explicaría la multiplicidad de identificaciones. Todo esto se parece mucho a la práctica real de las matemáticas, pues los matemáticos hacen algo muy parecido: En lugar de estar preocupados por descubrir la verdadera identidad del número dos, se alienta la búsqueda de definiciones, exigiendo solamente que se atiendan a las virtudes reconocidas en una teoría matemática (su simplicidad, unificación, coherencia, elegancia etc.).

Pasemos ahora al problema de la tensión semántica-epistemología. Estrictamente, en el ficcionalismo no surge tal tensión. Por una parte el ficcionalismo no está comprometido con una continuidad entre el conocimiento del mundo natural y el conocimiento matemático. Por otra parte, aunque la verdad científica y la verdad matemática se entienden de igual manera, no hay necesidad de justificar la verdad matemática, puesto que el ficcionalista no cree literalmente en las teorías matemáticas. El conocimiento del mundo natural, si hay tal cosa, se expresa en las mejores teorías científicas que poseemos. Pero el conocimiento matemático para Field no incluye lo que expresan las teorías matemáticas, veremos más adelante que el conocimiento matemático es un conocimiento acerca de la disciplina de las matemáticas y no de un reino independiente de objetos matemáticos. El platonismo está estrechamente relacionado con el realismo científico y aunque el ficcionalismo guarda afinidad con el instrumentalismo científico, no necesita de una filosofía instrumentalista de la ciencia. El papel de las matemáticas aplicadas a otras ciencias, según Field, es el de una herramienta inferencial que nos permite extraer fácilmente consecuencias lógicas de las teorías científicas. Cierta parte del trabajo de Field está dedicado a explicar detalladamente la naturaleza y la función del conocimiento matemático, y en ningún caso la plausibilidad del ficcionalismo depende de la plausibilidad de una u otra doctrina acerca del conocimiento científico. Field explica la función de las matemáticas en la ciencia con su proyecto de nominalización de la ciencia, sustituyendo la función que juega la verdad de las matemáticas en ciencia por una propiedad de las teorías matemáticas que Field denomina conservatividad [30](que es una especie de consistencia con todas las teorías consistentes). Esto lo abordaremos en la sección 2.2. También veremos, junto a la visión de Field del conocimiento matemático, la segunda parte del argumento para aceptar el ficcionalismo, es decir, qué razón tendríamos para abandonar la verdad en las matemáticas.

2.2 Conocimiento matemático en Field

En esta sección hablaremos del conocimiento matemático. Como sabemos, el ficcionalismo no solamente debe sortear los problemas del platonismo, también debe proponernos alguna razón para abandonar la verdad de las matemáticas. De eso nos ocuparemos en esta sección al tocar la propuesta de la conservatividad y el proyecto de nominalización de la ciencia.

Field propone que la bondad de las teorías matemáticas no consiste en su verdad

[30] Field usa el término "conservative", que en español equivale al término "conservador"; en general traduciremos el termino como "conservador ". Pero tambien usaremos el término "conservativo" cuando sea mas fácil simplemente *españolizar* los términos en ingles, como es el caso de "conservatividad" por "conservativity".

sino en su conservatividad. La primera duda que surge cuando pensamos en el conocimiento matemático desde el punto de vista ficcionalista es cómo reconciliar al ficcionalismo con las consideraciones epistemológicas tradicionales, es decir, con la visión que tiene a las matemáticas como un conocimiento fundamental y necesario. La actitud de una persona común o incluso de los especialistas ante la cuestión de la verdad de enunciados como 2+2=4, es casi siempre de seguridad. La verdad matemática no solamente parece algo seguro, también parece algo necesario, independiente de las contingencias del mundo. Las matemáticas son, en la conciencia colectiva, el modelo de Lo Verdadero. Pero el ficcionalista cree que las teorías matemáticas solamente son verdaderas en un sentido ficticio. Este último sentido de verdad es muy pobre para ser satisfactorio por sí mismo en vista de la idea tradicional de las matemáticas.

No tenemos una razón para declinar la opinión tradicional acerca de la verdad matemática, aunque la mera opinión tradicional tampoco es una razón para suscribirla. El filósofo estaría comprometido con la verdad de las matemáticas si esta fuera un hecho bruto o si tuviera importancia al grado de ser irrenunciable. La verdad matemática no es un hecho bruto, pero hay dos puntos por los cuales la verdad matemática es filosóficamente importante. El primero es que es la verdad lo determina una buena teoría matemática. El segundo es que la verdad tiene un papel al explicar la aplicación de las matemáticas fuera de las matemáticas (en física o en metalógica por ejemplo). El ficcionalismo puede renunciar a la verdad solamente en tanto que pueda dar cuenta de estos dos puntos, la bondad de las teorías matemáticas y su aplicación externa, sin recurrir a la verdad. Field se ocupa del primer tema en los siguientes párrafos:

> Nuestra disputa, entonces, es entre un realista quien cree que existen entidades matemáticas y que el objetivo de las matemáticas es dar un recuento verdadero de ellas y de sus interrelaciones, por una parte, y un anti-realista, por otra parte, quien no cree que haya entidades matemáticas y que piensa que las matemáticas tienen otro objetivo, diferente de la verdad.
>
> ¿Qué objetivo alternativo puede sugerir el anti-realista? Un objetivo que en ocasiones ha sido sugerido como alternativa a la verdad es la consistencia. Por supuesto, la consistencia por sí misma no es garantía de interés matemático; pero para el realista matemático la verdad tampoco es garantía de interés matemático,

porque son solamente las teorías verdaderas lo suficientemente ricas las que son matemáticamente interesantes (...) Una versión de anti-realismo es, entonces, que si una teoría matemática es suficientemente rica para ser interesante, además de esto lo único que debemos solicitarle es que sea consistente; es completamente irrelevante requerir que también sea verdadera y, de hecho, este último objetivo jamás se cumple puesto que requeriría de la existencia de entidades matemáticas.[31]

El segundo punto, la aplicación de las matemáticas, es también una preocupación de Field para el cual la consistencia de las teorías matemáticas no es suficiente. Porque hay teorías consistentes que al usarse para describir el mundo físico pueden arrojar conclusiones falsas[32]. El ficcionalismo necesita una explicación más detallada de la función de las matemáticas cuando se aplican al mundo físico. Por ello Field ha introducido una explicación de la aplicación de las matemáticas: su función en la ciencia es instrumental; es facilitar inferencias dentro de las teorías. Esto gracias a una propiedad que Field llama conservatividad[33]. Para consolidar la idea de que la verdad no es necesaria, él emprendió un proyecto con el fin de socavar el argumento de la indispensabilidad de las matemáticas: las matemáticas, cuando menos todas las cuantificaciones sobre entidades matemáticas, son dispensables en ciencia. Detengámonos un momento en esta propuesta.

> (...) tratemos una segunda versión de anti-realismo no sujeta a la anterior objeción (la aplicación al mundo). Digamos que para que una teoría matemática interesante sea buena, necesita solamente ser consistente con toda teoría internamente consistente acerca del mundo físico (...) la teoría no necesita ser verdadera para ser buena.[34]

Field llama a este tipo de teorías matemáticas conservadoras:

> (C) Una teoría matemática M es conservadora si y sólo si para cualquier afirmación A acerca del mundo físico y cualquier cuerpo N de tales afirmaciones, A no se sigue de N+M a menos que se siga solamente de N.[35]

---

[31] Field 1989, pp. 54-55
[32] Field 1980 y 1989
[33] La conservatividad es importante al explicar la aplicación de las matemáticas, porque la mera consistencia de una teoría no asegura que al usarse en otra teoría, de esta última se obtendrán resultados verdaderos. La conservatividad, en cambio preserva la verdad de la teoría a la cual se aplica.
[34] Field 1989 p. 58
[35] Field 1989 p. 59

Diremos que una teoría o un enunciado es nominalista si no hace referencia a entidades matemáticas. Ahora bien, parecería que si las teorías matemáticas (cuando menos las que se aplican al mundo físico) son conservadoras entonces en realidad no tienen ninguna utilidad; porque si de una teoría nominalista se puede derivar A con o sin teorías matemáticas, estas últimas son superfluas. En atención a este aparente hecho, Field señala dos maneras según las cuales una teoría conservadora puede ser valiosa:

En primer lugar una teoría matemática conservadora puede facilitar inferencias a partir de teorías nominalistas. Field consigna ejemplos muy significativos para las ciencias de la naturaleza y la metalógica[36] en los cuales muestra concretamente el referido valor de las teorías matemáticas como herramientas inferenciales. En segundo lugar una teoría conservadora puede aparecer esencialmente en las premisas de nuestras teorías físicas. Esto plantea una dificultad para el ficcionalismo, pues apunta a la posibilidad de que no en todos los casos sea posible encontrar un sustrato nominalista para nuestras teorías, y en tal caso la verdad de la teoría matemática estaría vinculada a la verdad de la teoría no-nominalizable. Si esto último ocurriese, tendríamos en pie un argumento de indispensabilidad teórica para las matemáticas. De modo que el ficcionalismo, además de exponer el valor de la conservatividad como herramienta inferencial, también debe mostrar que todas las teorías científicas son nominalizables. Precisamente en esto consiste el proyecto de nominalización de la ciencia que emprende Field[37]. Si bien el proyecto de nominalización no está concluido, los resultados hacen plausible la propuesta de que las matemáticas son dispensables. Sin indispensabilidad no tenemos motivos para mantener que las matemáticas son verdaderas ni que la bondad de sus teorías es la verdad.

Dejemos el asunto de la verdad matemática y regresemos al de la naturaleza del conocimiento matemático. Hay algo que debemos advertir: la conservatividad de una teoría y su verdad son características independientes una de la otra. Y no sólo eso, cuando las contemplamos desde la perspectiva del conocimiento acerca del mundo, la conservatividad es indeseable en una teoría física, contrariamente a la verdad de la teoría.

Si hay algo como el conocimiento del mundo físico, seguramente esta expresado en las mejores teorías científicas que poseemos, y esto da origen a problemas acerca de la realidad que describen dichas teorías. Ahora bien, para que nuestras mejores teorías

[36] Field 1989 y 1980
[37] Field 1980

científicas puedan ser consideradas como las mejores, deben llenar algunos requisitos -por así decirlo. Una de las características que deben presentar es que sean empíricamente comprobables, es decir que tengan algún tipo de contenido que pueda ser sometido a pruebas empíricas o que pueda ser contrastado con la experiencia. Otra característica es que no sean redundantes respecto del repertorio de enunciados que consideramos como conocimiento. En general al integrar una nueva teoría al cuerpo total del conocimiento, esperamos que la teoría trate de asuntos que todavía no están determinados y esperamos que su integración resulte en conclusiones observables. En resumen, una buena teoría científica debe ser ampliativa respecto del cuerpo de conocimiento del que forma parte, de otro modo sería imposible decidir si la teoría es aceptable como una descripción del mundo. Por ejemplo, supongamos que T es una teoría física y que al incorporar T al cuerpo total de enunciados que expresan nuestro conocimiento resulta que no podemos derivar de T salvo enunciados que podríamos derivar en ausencia de T (T es una teoría física conservadora). Si bien no podemos decir que T es falsa, tampoco tenemos la necesidad de complicar nuestro cuerpo teórico con una teoría que no nos dice nada que no supiéramos antes, tal vez podríamos asignarle un papel práctico a esa teoría, pero esto no nos ayuda a determinar que cosas sabemos acerca del mundo físico. Desde este punto de vista la conservatividad es más bien trivial, pues tiene solamente un valor práctico (a menos que seamos instrumentalistas científicos) y no un valor intrínseco como la verdad. Cuando tratamos con problemas acerca del conocimiento de la naturaleza, esta diferencia de valores que se le asigna a la conservatividad dentro y fuera de las matemáticas marca un severo contraste entre ciencia y matemáticas. Y nos revela que el ficcionalismo, al contrario del platonismo, no está comprometido con una continuidad entre ciencia y matemáticas, ni entre conocimiento científico y conocimiento matemático. Esto constituye un buen telón de fondo para presentar la concepción del conocimiento matemático en Field, quien la expone de la siguiente manera:

> (...) quiero sostener lo que puede ser llamada una posición deflacionista acerca del conocimiento matemático. En otras palabras, quiero decir que lo que separa a una persona que sabe muchas matemáticas de otra que sabe solamente un poco de matemáticas no es que el primero sabe mucho y el último sabe poco de supuestos como aquellos para los cuales los matemáticos comúnmente presentan

pruebas (...) En lugar de eso, en tanto que lo que separa a estas personas es tan solo el conocimiento, es conocimiento de varios tipos diferentes. Algo del conocimiento que los separa es conocimiento empírico (e. g. acerca de lo que otros matemáticos aceptan y lo que otros usan como axiomas) (...) Poniendo el conocimiento empírico aparte, lo que sostengo es que el resto del conocimiento que separa a aquellos quienes saben mucho de matemáticas de aquellos quienes saben poco es conocimiento de un tipo puramente lógico (...)

Las ventajas epistemológicas de tal posición son obvias: evita la necesidad de postular conocimiento matemático que no es lógico y por lo tanto que es presumiblemente sintético a priori; y (poniendo las cuestiones acerca de la aprioricidad o aposterioricidad de lado) evita la necesidad de postular algún acceso epistémico a un reino especial de entidades matemáticas (...)[38]

Para sostener esta visión del conocimiento matemático es importante contar con una concepción de la lógica y de la metalógica que no recurra a matemáticas platonistas. Se requiere de una nominalización de metalógica[39]. No describiremos con detalle este proyecto, baste aquí reportar que la estrategia de Field es optar por concebir como primitivos a nociones como consistencia u operador modal. Lo importante es que Field transforma los problemas de la epistemología de las matemáticas en cuestiones técnicas de la metalógica; consiguiendo así un tratamiento mucho menos problemático que, por ejemplo, intentar desarrollar una epistemología para las entidades matemáticas abstractas.

Esta visión del conocimiento matemático no suscita los problemas que tradicionalmente se le han adjudicado al conocimiento matemático. Por ejemplo, la aprioricidad del conocimiento matemático no es un problema, pues gran parte de este conocimiento deriva de la experiencia[40]. Pero el giro más importante que da es quizá que las teorías y los enunciados de las matemáticas ya no son los portadores del conocimiento matemático. En su lugar este conocimiento es acerca de las propiedades lógicas de las teorías matemáticas y de las consideraciones que hacen los matemáticos respecto de sus teorías, pero no es acerca de lo que hablan estas teorías. De nuevo hay una gran diferencia entre el conocimiento matemático y el conocimiento del mundo físico (que consiste

[38] Field 1989 pp. 82-83
[39] Field 1989 pp. 83-104
[40] Por ejemplo, el conocimiento de cuál es la teoría de conjuntos que es más aceptada en la comunidad matemática es un conocimiento que deriva de la experiencia.

precisamente de lo que dicen las teorías acerca del mundo físico). El conocimiento matemático es afín al conocimiento que tenemos en otro tipo de disciplinas. Por ejemplo en la música. El conocimiento musical es un conocimiento acerca de la obra y los métodos de cierta comunidad de músicos; pero no pensamos que el conocimiento musical consiste de lo que se dice en las sinfonías o las sonatas. Un músico conoce la estructura de las formas musicales y sabe cuáles son los principios básicos para componer música. A partir de ellos puede componer una fuga, pero sería muy extraño que alguien nos dijera que lo que constituye el conocimiento musical del compositor es precisamente lo que esta fuga dice. De manera semejante un matemático sabe cuáles son los teoremas y teorías aceptadas por los matemáticos y sabe cuáles son los principios que rigen una demostración. A partir de ellos puede producir una teoría matemática, pero lo que dice tal teoría no necesariamente es conocimiento matemático.

El conocimiento matemático en Field comparte los problemas que suscitan otras disciplinas *a posteriori*, con sus propias peculiaridades por supuesto. Pero está libre de problemas especiales como el del *a priori* o el de una epistemología de objetos abstractos. La parte lógica del conocimiento matemático comparte los problemas de la lógica, pero de estos debe ocuparse la filosofía de la lógica. El principal reto para el ficcionalismo, es presentar una metalógica nominalizada, que es una tarea de índole técnico.

3. Valores matemáticos: verdad y consistencia como valores teóricos

En el capítulo 3 nos resultará de mucha importancia el papel epistemológico y en general la importancia filosófica de la verdad y la consistencia; en especial su papel como valores para los matemáticos. Por esa razón nos ocuparemos en esta sección de la verdad frente al ficcionalismo no como una mera propiedad semántica, sino como un valor. Veremos que el sistema de valores del ficcionalismo es diferente al del platonismo, en particular que la consistencia pasa a ocupar el papel de la verdad como valor principal para el ficcionalismo[41].

[41] Debemos recordar que la razón para proponer la conservatividad es que ciertas teorías matemáticas se aplican en ciencia. Pero difícilmente un matemático, salvo si es un metalógico, estará preocupado por la conservatividad; en cambio estará preocupado por la

Hemos mencionado que renunciar a la verdad matemática provoca incomodidad. Un motivo de esta incomodidad es que la verdad es en apariencia la razón de ser de las matemáticas. Esta visión puede resultar demasiado exigente, pero la preocupación expresada en esta imagen es muy legítima. Esta preocupación tiene que ver con la estructura de valores que priva en la comunidad matemática. De entre todas las cualidades que los matemáticos aprecian en sus teorías, la verdad tradicionalmente ocupa uno de los más importantes. Hasta ahora hemos visto que el ficcionalismo puede abordar a la verdad desde el punto de vista semántico, al admitir que la teoría de la verdad es homogénea se trate de matemáticas o no. También hemos visto que el papel epistemológico de la verdad (explicar el éxito de las matemáticas aplicadas) no es indispensable si le asignamos a las teorías matemáticas la propiedad de la conservatividad. Nos resta por decir algo acerca del lugar de la verdad dentro de los valores matemáticos.

Al colocar a la verdad como la "razón de ser" de las matemáticas se está estableciendo un compromiso muy fuerte entre el realismo y las matemáticas. Una imagen más moderada es concebir a la verdad como un valor importante o, si se prefiere, el más importante, de las matemáticas. Así, al juzgar cierta teoría matemática siempre deberíamos tener en cuenta su verdad; una buena teoría matemática debería ser, principalmente, una teoría verdadera. Su bondad sería, básicamente, su verdad. Si el platonismo naturalizado es un intento por continuar el realismo científico en las matemáticas, sus juicios de valor acerca de las teorías matemáticas serían una continuación de los que se hacen acerca del resto de las teorías científicas[42]. De modo que el platonismo exigirá de una teoría matemática, para ser una buena teoría matemática, que sea verdadera.

El ficcionalismo disiente de esta opinión. Si la verdad fuese la principal bondad de las teorías matemáticas, el ficcionalista se encontraría ante el problema de que ninguna teoría matemática es una buena teoría. De modo que la bondad de las teorías matemáticas ha de ser algo diferente de su verdad. Field está consciente de esto y lo expresa en los siguientes párrafos:

> Una pregunta natural acerca del ficcionalismo es esta: seguramente el

consistencia o la verdad de sus teorías. Nosotros nos ocuparemos de estas propiedades. En todo caso, la siguiente discusión puede adaptarse para tratar con conservatividad en lugar de consistencia.

[42] El platonismo no establece una continuidad con cualquier filosofía de la ciencia, sino solo con aquellas posiciones que pueden ofrecerle sustento, es decir con posiciones que coinciden con el platonismo en sostener tesis epistemologicas holísticas (v.g. la tesis Duhem-Quine) que incluyan al conocimiento matemático y que admitiesen argumentos de indispensabilidad como la inferencia a la mejor explicación (que es la base del argumento Quine-Puntam de la indispensabilidad de las matemáticas para la ciencia).

> ficcionalista debe admitir que las matemáticas son en muchos sentidos una buena 'historia': ¿Pero cómo puede dar contenido a esto excepto diciendo que su bondad consiste en su verdad? Por supuesto, hay una respuesta: que la historia de Oliver Twist es también buena, pero su bondad no consiste en su verdad. Pero esto difícilmente es satisfactorio: obviamente, el modo en el cual la 'historia' contada por las matemáticas estándar es buena es muy diferente del modo en que la historia de Oliver Twist es buena. Hay varias diferencias que podrían ser mencionadas, pero tal vez la más importante es que las matemáticas son buenas como instrumento que puede ser aplicado en dominios fuera de las matemáticas, y nada parecido pasa con la historia de Oliver Twist (...) Debido a esta diferencia, hay espacio para una sospecha de que para las matemáticas estándar la única explicación razonable de su bondad involucra la verdad –o tal vez la verdad necesaria (...) Creo que el platonismo puede ofrecer una explicación alternativa (...) en esta explicación, la verdad no se requiere para la bondad.[43]

En otra ocasión, Field reitera que la bondad de las teorías matemáticas no consiste necesariamente en su verdad:

> Desde nuestra posición anti-realista, la verdad es una cosa y el interés matemático es otra, incompatible con la verdad (...) nuestro debate es entonces, entre un realista quien cree que hay entidades matemáticas y que cree que el objetivo de las matemáticas es dar una recuento verdadero de estas y sus interrelaciones por una parte; y por la otra un anti-realista quien no cree que haya entidades matemáticas y piensa que las matemáticas tienen otro objetivo, diferente a la verdad.
>
> ¿Qué objetivo alternativo puede sugerir el anti-realista? Un objetivo que ha sido sugerido en ocasiones como alternativa a la verdad es la consistencia. Por supuesto la consistencia por si sola no es garantía de interés matemático; pero para el realista matemático la verdad tampoco es garantía de interés matemático, porque son solamente las teorías matemáticas verdaderas lo suficientemente ricas las que son matemáticamente interesantes(...) Una versión de anti-realismo, entonces, es que si una teoría matemática es suficientemente rica para ser interesante, lo único que además debemos pedirle es que sea consistente; es completamente irrelevante que sea

[43] Field 1989, p. 11

también verdadera y, de hecho, este último objetivo jamás se cumple ya que ello requeriría la existencia de entidades matemáticas.[44]

Field sugiere a la consistencia como alternativa a la verdad, pero para nuestros propósitos debemos investigar, además, cuál es la relación entre la consistencia y la verdad en lo que respecta al papel de cada uno dentro del sistema de valores de los matemáticos. Aquí trataremos de establecer la diferencia en el papel que se asigna a la consistencia en el esquema de valores ficcionalista y platonista, y también su diferencia en relación con la verdad. La consistencia tiene un papel diferente dependiendo de si la vemos desde el platonismo o desde el ficcionalismo. Si la verdad tiene algún papel en el esquema de valores ficcionalista, su valor derivará de razones independientes y ajenas a sus principios (razones pragmáticas por ejemplo). Pero el valor de la consistencia está ligado a los principios mismos del ficcionalismo. La situación del platonismo es muy diferente. En un esquema de valores de corte platonista la consistencia por lo general no tendrá un valor intrínseco, sino que su valor es derivado del valor de la verdad.

Antes de seguir introduzcamos algunas definiciones que nos resultarán útiles. Diremos que una bondad teórica de la teoría E, es una propiedad de E que se juzga deseable en las teorías que cierta comunidad C posee[45]. En otras palabras P es una bondad teórica si la comunidad C juzga positivamente el hecho de que sus teorías (o enunciados) posean la propiedad P. Denotaremos por s(E) el hecho de que los enunciados de la teoría E posean el significado que les atribuyen los usuarios competentes del lenguaje en el cual se expresa E. Denotaremos el hecho de que la conjunción de todos los enunciados de E sean verdaderos como v(E) y como c(E) al hecho de que E sea una teoría consistente. C denotará a la comunidad de usuarios competentes de la teoría E.

Pensemos en las comunidades científicas. Dichas comunidades estarán interesadas en tener un cierto conocimiento del mundo. Estas comunidades tienen, por tanto, interés en los enunciados que dicen algo acerca del mundo y sobre todo en los enunciados que describen acertadamente al mundo, es decir, están interesadas en los enunciados verdaderos. El hecho de que a la verdad se le atribuya un cierto valor puede ayudarnos a explicar las conductas y las reacciones de los filósofos y de la gente común ante la idea de que ciertos enunciados

[44] Field 1989, p.54

[45] Toda la siguiente discusión puede hacerce tambien respecto a enunciados aislados, si sólo pensamos en el caso en que la teoría E está conformada por un único enunciado "E".

son verdaderos. Las reacciones de aprobación de los científicos ante teorías que creen verdaderas es evidencia de que la verdad tiene un valor positivo. Las constantes disputas y discusiones científicas y filosóficas son motivadas generalmente por la sospecha de que ciertas teorías o enunciados que sostiene algún miembro de la comunidad no son verdaderos. De este modo podemos considerar que tenemos evidencia para pensar que la verdad se valora positivamente y la falacia negativamente, por científicos y filósofos pues las reacciones de las comunidades científicas y filosóficas ante la verdad son explicadas al suponer que la verdad se juzga positivamente y la falsedad, negativamente. Según definimos a una bondad teórica, resulta que la verdad es una bondad teórica para los científicos realistas y para los matemáticos platonistas, pero la situación es diferente si los matemáticos son ficcionalistas.

Aclaramos arriba que la consistencia para el ficcionalismo es una alternativa a la verdad, sin embargo, la consistencia no está ausente del sistema de valores del platonismo, lo que estamos estableciendo es que su papel es diferente.

La consistencia repercute sobre la verdad de una teoría, de modo que si consideramos a la verdad de una teoría matemática como su principal bondad teórica, no necesitamos atribuirle a su consistencia un valor independiente. En estas circunstancias, exceptuando casos especiales como la metalógica, la inclusión de la consistencia en nuestro sistema resultaría redundante. A manera de muestra pensemos en lo siguiente: Supongamos que la teoría T es cerrada bajo consecuencia lógica y que pretende ser una descripción de ciertos fenómenos de la naturaleza. Supongamos también lógica de primer orden. T es una descripción adecuada sólo en tanto que es una teoría verdadera. Ahora bien, si T no es una teoría consistente, acontecerá que de T puede derivarse algún enunciado 'E' y también a su negación 'no E'. Como T describe fenómenos del mundo, seguramente hay algún enunciado 'f' derivado de T que describe algún fenómeno particular del mundo, tal como lo hace T misma. Ya que T es inconsistente, también podremos derivar de ella 'no f', este último enunciado describe un fenómeno del mundo de manera similar a 'f'. Pero no hay forma de que 'f' y 'no f' sean ambos verdaderos porque describen cosas contradictorias acerca del mundo, entonces ¡alguno de ellos es un enunciado falso! Si T incluye un enunciado falso, T es una teoría falsa. De este modo los hechos acerca de la consistencia de T tienen repercusiones inmediatas sobre la verdad de T. Por supuesto no tratamos de establecer una equivalencia entre consistencia y verdad; pues la consistencia de una teoría no depende de la verdad, lo que estamos estableciendo es que la verdad de una teoría depende de su consistencia. La consistencia de una teoría T será deseable para cualquiera que considere deseable la verdad de T, porque su consistencia es un requisito para su verdad. La consistencia de T debe su relevancia a su influencia sobre la verdad de T. Ahora podemos ver que la consistencia tiene un papel implícito en el sistema de valores de alguien para quien la verdad es una bondad teórica. El incluir a la consistencia como una bondad teórica independiente resultará redundante[46]. Porque, si la verdad ya es parte de nuestro sistema de valores, sólo se juzgarán positivamente a las teorías que son verdaderas. Una teoría falsa, aún si es consistente, será catalogada como una mala teoría. En estas circunstancias las actitudes de rechazo o aceptación de una comunidad hacia las teorías, pueden explicarse suponiendo que las clasifican como buenas o malas. Esto significa que hacen juicios de valor acerca de las teorías dependiendo del valor que se le conceda a sus propiedades. Calificar a una teoría como buena porque es consistente, supone que hay un juicio acerca de la consistencia de la teoría, sin embargo, si la verdad es un valor, las actitudes de aceptación o rechazo pueden explicarse simplemente suponiendo que hay un juicio acerca de la verdad de la teoría. Pensemos por ejemplo que cierta comunidad rechaza la teoría inconsistente I; este rechazo puede explicarse suponiendo que la inconsistencia es valorada negativamente. Pero si esa comunidad valora la verdad, el rechazo de I puede explicarse también porque I es falsa; sin hacer ningún juicio acerca de la consistencia de I. Si la verdad es parte de nuestro sistema de valores, las explicaciones de la conducta de cierta comunidad que involucre la valoración de la consistencia, puede hacerse involucrando solamente la valoración de la verdad. Si la verdad es la principal bondad teórica, una teoría consistente no necesariamente es buena, y una teoría inconsistente es mala no necesariamente porque es inconsistente, sino simplemente porque es falsa. Resulta innecesario ofrecer explicaciones de las reacciones de las comunidades científicas, por ejemplo, que incluyan juicios sobre la consistencia de sus teorías, siendo que podemos ofrecer esas mismas explicaciones, pero con alcance más general, simplemente suponiendo

[46] Por supuesto debemos excluir los casos especiales como la metalógica, donde verdad y consistencia, por razones específicas a la misma disciplina, tienen su propio valor. Pero esto en realidad no es problemático, porque verdad y consistencia tienen valores independientes como *objeto* de estudio de la disciplina, estos valores son diferentes a los propósitos de la disciplina, que constituyen los valores que aquí nos ocupan. En cierto sentido para casos como la metalógica deberíamos hacer una distinción entre "valor-objeto" y el valor de las teorías de la disciplina. Si la metalógica quiere describir alguna parte de nuestra realidad, su valor teórico es la verdad, independientemente de los valores-objeto que figuren al interior del trabajo metalógico.

juicios acerca de la verdad de sus teorías.

Todas estas reflexiones nos dan suficientes indicios de la diferencia en la estructura del sistema de valores que hay entre un platonista matemático y un ficcionalista.

Para el platonista la verdad es una bondad teórica primordial, y este hecho tiene que ver con los principios del platonismo. La consistencia, en cambio, tiene valor solamente porque es un requerimiento sin el cual las teorías matemáticas no podrían ser verdaderas; tiene un valor derivado del valor de la verdad. En cierto sentido la consistencia es una bondad teórica secundaria, mientras que la verdad es una bondad teórica primaria para el platonismo. Si bien algunas disciplinas como la metalógica pueden admitir a la verdad y la consistencia como valores teóricos independientes, sus motivos son independientes de los motivos del platonismo y por lo tanto no pueden usarse para integrar consistencia y verdad de manera independiente al sistema de valores del platonismo.

Para el ficcionalista la verdad no es una bondad teórica, pues lo deseable en una teoría es la consistencia. En su sistema de valores el lugar de la verdad es ocupado por la consistencia, convirtiéndose esta en una bondad teórica por razones que tienen que ver con los principios mismos del ficcionalismo. La consistencia es una bondad teórica primaria para el ficcionalista por razones propias de la doctrina ficcionalista.

Esta diferencia entre platonistas y ficcionalistas será relevante en el capítulo 3 para establecer la similitud analítico-matemática. Por el momento concluiremos este tema aquí. También concluimos aquí la revisión del ficcionalismo.

4. Analiticidad

En esta sección presentaremos las ideas generales acerca de la analiticidad que servirán como guía para la discusión en los siguientes capítulos. La tesis que en este trabajo sostendremos es que uno de los roles filosóficos importantes de la analiticidad ha sido el permitir extraer resultados extra-lingüísticos (explicar el *a priori*, la necesidad y la descalificación de la metafísica) a partir de las simples propiedades lingüísticas de ciertos enunciados. Para ello presentaremos la distinción analítico-sintético y algunas concepciones de la analiticidad que han sido importantes para la filosofía de las matemáticas. Veremos también cómo autores como Boghossian han renovado recientemente el debate acerca de la analiticidad. Por último presentaremos una caracterización general que abarque las propiedades sobresalientes de las concepciones revisadas.

4.1 La distinción analítico-sintético

La discusión acerca de la distinción analítico-sintético ha estado ligada a la discusión de la naturaleza del conocimiento matemático. La Crítica de la Razón Pura, por ejemplo, encuentra uno de sus motivos principales en el problema de los juicios sintéticos *a priori*, representados principalmente por los juicios matemáticos. Aunque la distinción analítico-sintético estrictamente es una distinción semántica (significado y verdad son nociones semánticas), la concepción de la distinción ha tenido diferentes matices y este hecho es particularmente notable cuando tratamos de ubicar a las matemáticas de acuerdo a esta distinción. Para Kant los juicios matemáticos eran sintéticos y explicar su aprioricidad requería de profundos refinamientos epistemológicos. Después del trabajo de Frege la analiticidad comienza a percibirse más ligada a los asuntos de la justificación del conocimiento matemático. En algún sentido la distinción analítico-sintético quedó más firmemente asociada con la distinción epistemológica *a priori-a posteriori*.

Un papel epistemológico importante de la distinción analítico-sintético consiste en señalar que hay dos tipos de verdades y con ello dos tipos de justificación, dependiendo de si los enunciados son analíticos o sintéticos. La relevancia epistemológica de la analiticidad ha tenido consecuencias importantes para la epistemología del siglo XX; la distinción entre los enunciados que son verdaderos en razón de la forma particular del mundo y los que no lo son, es una buena pauta para explicar la distinción entre el conocimiento cuya justificación involucra a la experiencia sensible y el conocimiento lógico y matemático, que puede justificarse sin apelar a la experiencia. Al menos así lo entendió el empirismo lógico.

La distinción analítico-sintético permitía ofrecer diferentes justificaciones para el conocimiento matemático y para el conocimiento del mundo físico. Pero la bancarrota de la distinción, abanderada por Quine, tornó la epistemología hacia la búsqueda de explicaciones homogéneas para el conocimiento y, así mismo, arrojó severas dudas sobre la aprioricidad del conocimiento matemático. La ausencia de la distinción analítico-sintético tuvo efectos sensibles hasta hoy en día sobre la filosofía de las matemáticas. La continuidad entre ciencia y matemáticas se tornó atractiva luego de que la distinción analítico-sintético perdió credibilidad. De ello se benefició la filosofía platonista de las matemáticas.

El conocimiento matemático en Field plantea una discontinuidad con el conocimiento del mundo físico. Sin embargo, esta discontinuidad no se basa en algún tipo de distinción fundamental del tipo analítico-sintético, porque la diferencia radica en los medios de expresar el conocimiento. La distinción analítico-sintético o la *a piori-a posteriori*, supondrían que el conocimiento matemático está expresado en las teorías matemáticas, tal como el conocimiento del mundo físico está expresado en las teorías acerca del mundo físico. Pero para Field el conocimiento matemático no incluye las descripciones expresadas en los enunciados y teorías matemáticas. Entonces, si a un ficcionalista le preguntamos por la analiticidad de las matemáticas, responderá que los enunciados matemáticos no son ni verdaderos ni analíticos. Pero esta respuesta no es lo más importante, lo más importante es que la cuestión de la analiticidad ya no es epistemológicamente significativa, pues el conocimiento matemático no involucra la verdad de los enunciados matemáticos y, por tanto, tampoco su justificación.

Si la distinción analítico-sintético no tiene relevancia epistemológica para el ficcionalismo tal vez no tenga ninguna otra importancia. Pero no debemos precipitarnos. La idea de analiticidad no sólo ha desempeñado un papel epistemológico. Recordemos primero que la analiticidad involucra sólo la idea de verdad, que es una noción semántica, y la idea de significado, que también es semántica; se trata de una noción semántica. Pero el empirismo lógico le asignó a la analiticidad papeles en su explicación de la necesidad (un papel metafísico) o del carácter de la metafísica (un papel en la filosofía de la ciencia)[47]. De modo que una buena estrategia para acercarnos a la analiticidad de las matemáticas, será revisar el papel general de la analiticidad ante la filosofía. Antes debemos revisar las ideas concretas de analiticidad.

4.2 Analiticidad y Matemáticas

En esta sección revisaremos algunas ideas de la analiticidad que han sido importantes para las matemáticas.

4.2.1 Frege, Russell, Carnap

El trabajo de Frege influyó mucho en el empirismo lógico. Después de Frege, la idea de que los enunciados matemáticos son analíticos cobró mucho sentido y popularidad. Su

[47] Boghossian 1996 y Harman 1996

concepción de analiticidad aparece en *Los Fundamentos de la Aritmética*, obra cuya finalidad es clarificar el concepto de número y encontrar un fundamento sustantivo para la aritmética. Frege piensa que puede explicarse a la aritmética en términos puramente lógicos y de ese modo concederle una impecable legitimidad. Está consciente de que la certidumbre de la aritmética depende tanto de la precisión de sus pruebas (en el sentido técnico) como de la justificación de las definiciones de los conceptos involucrados. Por ello es que está preocupado por las dos distinciones fundamentales que atañen a la justificación, la distinción analítico-sintético y la *a priori-a posteriori*[48]. A Frege las concepciones kantianas le parecen limitadas (solamente se ocupan de las formas sujeto-predicado) y acaso dudosas porque su vaguedad da pie a interpretaciones psicologistas[49]. Por ello hace un planteamiento muy diferente para estas distinciones. Las cuales están fundamentadas en el tipo de justificación que es posible ofrecer para las proposiciones. Los enunciados analíticos son aquellos que pueden justificarse únicamente con base en leyes y definiciones lógicas, mientras que los sintéticos se justifican con base en verdades, no solamente lógicas, que pertenezcan a algún campo específico del conocimiento. Los enunciados *a priori* son los que pueden justificarse basándose solamente en leyes generales. Los enunciados *a posteriori* se justifican con base en los hechos[50]. Frege presenta versiones epistémicas de las distinciones y tiene por objetivo explicar y justificar a la aritmética a partir solamente de la lógica. Su programa logicista sería luego retomado y ampliado por Bertrand Russell.

Russell emprendió un proyecto para continuar y extender las ideas de Frege a todas las matemáticas. En *Principia Mathematica* intenta explicar la totalidad de las matemáticas a partir de la lógica. El trabajo de Russell apoya tácitamente las concepciones fregeanas y parece confirmar una sólida asociación entre lógica y matemáticas y, por lo tanto, la analiticidad de las matemáticas. Debe hacerse notar que Russell no se pronuncia explícitamente por una concepción específica de la analiticidad de las matemáticas; simplemente explica cómo pueden reducirse las matemáticas a la lógica. Aunque en el capítulo 18 de *Introducción a la Filosofía Matemática*, Russell considera que la analiticidad de la lógica es un asunto que debe aclararse para comprender la naturaleza de los enunciados lógicos. Según él, las proposiciones lógicas (y, por tanto, las matemáticas)

48 Frege 1972 pp. 113-114

49 La psicología por entonces era todavía una parte muy especulativa de la filosofía y no una ciencia completamente independiente.

50 Frege 1972 pp. 115-118

pueden ser expresadas formalmente en función de constantes y variables lógicas, sin embargo, no todo lo así expresable es una proposición lógica. De entre la totalidad de las posibles expresiones formales, todas y sólo las proposiciones lógicas tienen una característica distintiva: la de ser analíticas[51]. Pero también considera que todavía no se ha dado una caracterización satisfactoria para esta propiedad. Por ejemplo, la idea de que un enunciado analítico es un enunciado cuya negación es auto-contradictoria parece depender sólo de la ley de la no-contradicción; sin embargo, para verificar que en efecto su negación es auto-contradictoria debe recurrirse a las demás leyes lógicas, lo cual hace ver lo poco claro que es poner a la analiticidad en términos sólo de la ley de la no-contradicción. Russell cree que la analiticidad de las proposiciones lógicas y matemáticas está muy relacionada a la tautología de estas proposiciones y sugiere que esa es la línea de investigación más promisoria, aunque él jamás llega a concretar una versión propia de analiticidad.

Si Russell extendió el programa de Frege de la aritmética a la totalidad de las matemáticas, Carnap llevó a las ideas y motivaciones de Frege un enorme paso (o muchos) adelante, extendiéndolas a la totalidad de la ciencia y la filosofía.

Con su teoría de la Sintaxis Lógica[52], Carnap se da a la tarea de mostrar que la filosofía consiste solamente del análisis lógico –mediante el método sintáctico– y con ello también se propone librar al pensamiento filosófico de la metafísica y, como Frege quería, de la psicología. Carnap se proclama empirista y supone al verificacionismo como el enfoque correcto para hacer su análisis filosófico de las proposiciones. El lenguaje en la lógica, la filosofía y las ciencias empíricas, desde su punto de vista, tiene una función representativa; a diferencia de la función expresiva que posee en disciplinas como la poesía.

Los objetos de análisis de la sintaxis lógica son los lenguajes, que él define como sistemas de reglas: las de formación y las de transformación. De particular importancia en el lenguaje son las oraciones verdaderas. Hay ciertas oraciones que son verdaderas o falsas no sólo en función de su forma sino de la experiencia. Pero hay casos en los que ciertas oraciones son verdaderas o falsas sólo en razón de las reglas del lenguaje.

---

[51] Russell 1998 pp. 171-179
[52] Carnap 1998

Las oraciones válidas[53] son verdaderas sólo en razón de las reglas del lenguaje, y las oraciones contraválidas son falsas sólo en razón de las reglas del lenguaje. A las oraciones válidas y contraválidas les llama en conjunto oraciones determinadas. Carnap considera que una oración O es válida si O es consecuencia de premisas de la clase nula. Una oración O es contraválida si cualquier oración es consecuencia de O. Además hay dos tipos de reglas de transformación, las reglas L que son de un carácter lógico-matemático y las reglas F que son algunas leyes físicas con carácter de oraciones primitivas. Una oración O es consecuencia L de un conjunto dado de oraciones P, si sólo se usan reglas L para derivar O de P. O es consecuencia F, si además de reglas L se usan reglas F[54].

Veamos ahora la noción de analiticidad de Carnap: una oración es analítica o *válida L*[55], si es consecuencia L de las premisas de la clase nula. Las verdades analíticas dentro de un determinado lenguaje son aquellas que se verifican en razón solamente de las reglas L del lenguaje.

El empirismo lógico, junto con Carnap, encontró en la distinción analítico-sintético una herramienta poderosa para abordar problemas como el *a priori* o la necesidad: La verdad analítica originaba conocimiento *a priori*. Y las verdades necesarias son solamente verdades analíticas, convencionales en nuestro lenguaje; toda necesidad es sólo una necesidad lingüística[56]. La distinción también tuvo un papel en sus propósitos anti-metafísicos: La metafísica y la matemática son disciplinas *a priori*, no tienen verificación empírica. Pero podríamos legitimar a las matemáticas al mismo tiempo que descalificar a la metafísica especulativa basándose en principios lógico-lingüísticos, porque las matemáticas son verdades analíticas que se verifican solamente por las reglas del lenguaje, mientras que los enunciados de la metafísica, al no poder ser verificados, carecen de significado[57].

Como es bien sabido, todo el programa del empirismo lógico habría de verse sacudido en sus fundamentos cuando Quine proclamó que la distinción analítico-sintético y el reduccionismo no tienen ningún fundamento. Pero a pesar de esto, la discusión de la

[53] Para aclarar la distinción entre las oraciones cuya verdad o falsedad depende solamente de las reglas del lenguaje Carnap usa el término "válido" el cual, desafortunadamente, aparece también en la lógica contemporánea pero con una acepción diferente. La idea carnapiana de oración válida es más afín a la idea contemporánea de teorema, de modo que en el momento de revisar su concepción de oración analítica debe dejarse de lado nuestra concepción contemporánea de validez.
[54] Carnap 1998 pp. 26-34
[55] Tal vez sea buena idea aclarar que lo que Carnap concebía como validez L es lo que en la lógica moderna se denomina validez universal. En todo caso debe tenerse presente que Carnap usa sus téminos en un sentido diferente.
[56] Boghossian 1996, Harman 1996
[57] Carnap 1998, Harman 1996

analiticidad no es un asunto concluido. La perspectiva de recuperar una explicación del *a priori* vía la idea de analiticidad tiene defensores hoy en día. El trabajo de Paul Boghossian es un representante del intento de regreso radical de la analiticidad. Revisémoslo.

4.2.2 Analiticidad después de Quine.

En *Dos Dogmas del Empirismo*[58], Quine muestra que la distinción analítico-sintético carece de fundamento, pues la noción de analiticidad no puede aclararse satisfactoriamente. Ya que el trabajo de Quine es bien conocido, aquí sólo puntualizaremos dos cosas. Primero, la noción de analiticidad que Quine critica (y que él atribuye a Frege): un enunciado es analítico si es posible transformarlo en una verdad lógica al sustituir sinónimos por sinónimos[59]. Segundo, Quine reconoce que la idea de analiticidad está tan profundamente ligada a la epistemología, que parece concluir que la caída de la distinción analítico-sintético implica la caída de la distinción *a priori-a posteriori*. Él explica que la dificultad que enfrenta la distinción analítico-sintético se debe en gran parte a que la unidad mínima de significación es la totalidad de la ciencia y no el enunciado. Esta última es una tesis semántica, pero él la asocia casi de inmediato con el hecho de que la verificación en ciencia es holista. Quine no presenta en este artículo un argumento a favor del verificacionismo, simplemente parece conceder que el tribunal que juzga al conocimiento se basa en la verificación. Al negar que no hay principios para distinguir conocimiento *a priori*, está admitiendo implícitamente que la analiticidad es importante sólo en tanto que tiene que ver con la explicación del conocimiento, pues es sólo el verificacionismo lo que permitía establecer un puente entre el holismo del significado y el holismo del conocimiento.

Dejemos aquí a Quine y sigamos con Boghossian.

Paul Boghossian en su articulo "Analyticity Reconsidered"[60], propone una explicación analítica del a priori. Trata de explicar la aprioricidad de la lógica mediante la analiticidad de los enunciados lógicos y a partir de allí la aprioricidad de todos los demás enunciados que pueden ser transformados en verdades lógicas por sustitución de sinónimos por sinónimos. Esta estrategia, reconoce Boghossian, es muy afín a la explicación que ofrecía el empirismo lógico pero, en algún sentido, menos rebuscada.

---

[58] Quine 1953
[59] Quine 1953 p.71
[60] Boghossian 1996

Boghossian comienza por enfatizar que hay dos formas de entender la analiticidad; una metafísica y otra epistémica. En la analiticidad metafísica, la verdad de un enunciado analítico A, es un hecho que acontece simplemente en virtud otro hecho: el significado de A. Boghossian dice que éste es el concepto de analiticidad que la crítica quineana ha devastado, y él se declara a favor de esta crítica. Sin embargo, piensa que el concepto epistémico de analiticidad puede rescatarse y puede ser usado para explicar el *a priori* de la lógica. Según el concepto epistémico, un enunciado A es analítico si la mera aprehensión de su significado basta para que alguien esté justificado en tenerlo como verdadero[61]. Según él, esta analiticidad epistémica puede tener dos explicaciones. La primera de ellas es que un enunciado A es analítico porque al sustituir en A sinónimos por sinónimos puede obtenerse una verdad lógica; a esta idea la llama analiticidad-Frege. La segunda explicación es que ciertos enunciados son analíticos porque esos enunciados deben ser verdaderos para definir el significado de algún término que aparece en ellos (la idea tradicional de la definición implícita). A esta idea le llama analiticidad-Carnap[62].

Hay tres razones por las cuales la analiticidad-Frege no puede explicar totalmente el *a priori*: (1) presupone la aprioricidad de la sinonimia y la aprioricidad de la verdad lógica; (2) hay enunciados *a priori* que no son analíticos-Frege, i.e. que no son transformables en verdades lógicas por sustitución de sinónimos por sinónimos (por ejemplo los que son analíticos-Carnap); y (3) las verdades lógicas mismas satisfacen trivialmente esta condición de analiticidad, pero el que una verdad lógica pueda convertirse en la misma verdad lógica no explica su aprioricidad[63].

Boghossian piensa que "Dos Dogmas" si bien presenta objeciones notables a la idea de analiticidad, no liquida totalmente la explicación analítica del a priori. Sólo muestra que el problema de la aprioricidad se reduce, en gran parte, al problema de la aprioricidad de la sinonimia y de la verdad lógica. Mucho del recelo de Quine hacia la sinonimia –argumenta Boghossian– deriva del escepticismo quineano hacia el significado, el cual no es compartido por la mayoría de los filósofos contemporáneos. A Boghossian le parecería complicado el problema de la aprioricidad de la sinonimia sólo si aceptásemos la indeterminación del significado, tesis que no es muy aceptada hoy en día. Por lo tanto, la

---

[61] Boghossian 1996
[62] Boghossian 1996, pp. 363-386
[63] Por razones de espacio no incluiremos ejemplos de estos tipos de analiticidad, sin embargo pueden consultarse en el artículo de Boghossian. De todos modos, esos ejemplos no son relevantes para nuestro trabajo.

aprioricidad de la sinonimia no es su mayor problema.

Así pues, Boghossian piensa que sólo le resta aclarar el *a priori* de la verdad lógica para completar toda su explicación. Para ello optará por la analiticidad-Carnap. El problema de la verdad lógica está asociado a otro problema que tradicionalmente se ha considerado aún más apremiante y que no podemos pasarse por alto: el problema del significado de las constantes lógicas. Debido a que las constantes lógicas son primitivos para los cuales no hay definiciones explícitas, la explicación de cómo se les da significado debe resolverse por otros medios. La única explicación disponible –argumenta Boghossian– para fijar el significado de las constantes lógicas es la definición implícita en términos de su rol conceptual. La definición implícita nos dice que el significado de las partículas lógicas como "o", "y" o "no" está dado por el papel que estas partículas juegan en ciertos enunciados verdaderos o en ciertos argumentos válidos, de modo que si aceptamos que las partículas lógicas poseen significado, su significado esta dado por su papel en ciertos enunciados verdaderos o argumentos válidos. Debemos aceptar, entonces, que esos argumentos o enunciados son válidos o verdaderos, simplemente porque tienen significado.

La idea de la definición implícita ha sido sometida a diversas objeciones que no discutiremos aquí. Baste mencionar que Boghossian no encuentra contundentes a dichas objeciones y, en cambio, nos dice que el rechazar la definición implícita nos conduciría a la indeterminación del significado de las partículas lógicas.

Es así como Boghossian quiere afirmar la analiticidad-Carnap de las verdades lógicas; las verdades lógicas sólo significan lo que significan si son verdaderas. La verdad es una condición para que la definición implícita funcione. Entonces, la mera aprehensión del significado de las verdades lógicas basta para tenerlas por verdaderas. Las verdades lógicas son verdades en las que podemos confiar sin recurrir a la experiencia.

Boghossian han sido sometido a diversas críticas que no consignaremos aquí[64], pero su propuesta acerca de la indeterminación del significado y su caracterización de la idea de analiticidad nos resultarán de utilidad cuando discutamos el significado –en el capítulo 2– y la aparente analiticidad –en el capítulo 3– de los enunciados matemáticos.

[64] Harman 1996, Horwich 1997, Fodor 1993.

5. La caracterización general de analiticidad

Hemos visto las ideas de analiticidad que fueron relevantes para la filosofía de las matemáticas. Frege, Russell y después Carnap, encausaron una visión del conocimiento basada en el análisis lógico y la distinción analítico-sintético. Las nociones de analiticidad que revisamos están pensadas para ofrecer una justificación de la verdad de cierta clase de enunciados, que incluiría a los matemáticos. Ahora, aún si podemos ofrecer una respuesta a la interrogante de si las matemáticas son analíticas atendiendo a las nociones de Frege, Carnap o Quine, todavía debe preocuparnos el hecho de que la discusión acerca de la analiticidad no es un asunto concluido. Si la cuestión de qué es la analiticidad sigue esperando respuesta, la discusión de la analiticidad matemática deberá supeditarse a dicha respuesta. En tal caso nuestra decisión acerca de la analiticidad para el ficcionalismo debería esperar a que se hayan revisado todas las posibles propuestas acerca de lo que es la analiticidad.

Aquí intentaremos una alternativa a esta espera. En lugar de emprender una revisión caso por caso, investigaremos como sería una idea general que abarque los rasgos importantes de las versiones de analiticidad relevantes para las matemáticas, a la cual llamaremos una 'caracterización general de analiticidad'.

Nos basaremos en los rasgos comunes a las ideas de analiticidad que ya hemos revisado.

La primera cosa que debemos hacer notar es que para cada una de las nociones que revisamos hay una explicación, en términos estrictamente lógico-lingüísticos, que establece una asociación entre las propiedades meramente lingüísticas de un enunciado y su verdad[65]. Esto es particularmente notable en las ideas de Carnap: para él un lenguaje es un sistema que incluye diversos conjuntos de reglas, reglas entre las cuales figuran las leyes lógicas; de modo que las justificaciones lógicas son también justificaciones lingüísticas.

Esta relación entre las propiedades lógico-lingüísticas y la verdad de un enunciado puede ampliarse si contemplamos también a la idea que aparece en "Dos Dogmas"[66] y a la que menciona Boghossian[67]. Así las propiedades lógico-lingüísticas involucradas en la definición de un enunciado analítico son todas aquellas que determinan el significado de un

[65] Véase capítulo 1 secc. 4.2.1 y Boghossian 1996.
[66] La transformación en verdad lógica por sustitución de sinónimos.
[67] La aprehensión del significado de un enunciado basta para creer justificadamente en su verdad.

enunciado (a saber, la lógica, la sinonimia y los mecanismos para fijar el significado de las palabras). Como esta asociación entre los hechos que determinan el significado y la verdad del enunciado aparece constantemente en el núcleo de las ideas de analiticidad, podemos pensar que cualquier explicación satisfactoria de la analiticidad que aquí nos ocupa, establecerá una relación entre dos hechos acerca de cierto enunciado A: Una relación entre el hecho de que A posee el significado s (este hecho lo abreviaremos como s(A)) y el hecho de que A es un enunciado verdadero (este hecho lo abreviaremos como v(A)).

Ahora bien, hacer esta mera descripción de la relación involucrada en la analiticidad difícilmente será satisfactoria como una noción de analiticidad. Para empezar porque la relación entre significado y verdad es una relación que encontraremos en cualquier enunciado que pueda ser verdadero. Necesitamos que se nos explique por qué ocurre de modo particular dicha relación en los enunciados analíticos, y que se nos muestre lo distintivo de la relación entre los hechos s(A) y v(A) de un enunciado analítico.

Llamaremos una caracterización general de analiticidad a la explicitación de lo que es un 'enunciado verdadero en razón solamente de los hechos de su significado'. Una caracterización de analiticidad es un intento de especificar qué ocurre en los casos en los cuales cierto enunciado A puede considerarse verdadero *sólo por el hecho de poseer su significado*. Debemos aclarar que este "poseer su significado" incluye todos los hechos lingüísticos relevantes a este respecto.

Así, una explicación de la noción de enunciado analítico debe incluir por lo menos la atribución de los siguientes rasgos a dichos enunciados:

- Que hay una relación especial entre el significado y la verdad del enunciado.
- Que dicha relación puede explicarse en términos que solamente conciernen al significado del enunciado.

Si queremos ser más puntuales, diremos que una caracterización general de analiticidad debe incluir:

a) La declaración (o formulación) del hecho de que existe una relación entre la significatividad y la verdad del enunciado.

b) La descripción de cuál es el tipo de relación entre significado y verdad del enunciado.

c) La explicación, que nos permite entender cómo es que ocurre el hecho de que significación y verdad están relacionados, explicación que apelará solamente a hechos lingüísticos.

El punto (a) es simplemente la declaración de que existe una relación entre significado y verdad. Los puntos (b) y (c) se encargan de atribuir y explicar el contenido factual que se le atribuye a la analiticidad. El punto (b) se refiere a la forma particular como interpretaremos la relación entre significado y verdad, mientras que el punto (c) puntualiza cómo ocurre la relación. Esta subdivisión en los puntos (b) y (c) es probablemente una idealización difícilmente observable en la práctica: ya que la explicación de la analiticidad es de naturaleza semántica, una descripción de la teoría del significado que aclare los hechos relevantes de la analiticidad, contiene implícitamente la explicación de la analiticidad. La naturaleza de la analiticidad hace que la mera descripción de la relación significado-verdad involucre en sí misma una explicación de esta. Por ejemplo, consideremos la idea de que un enunciado es analítico si al sustituir sinónimos por sinónimos obtenemos una verdad lógica. Esta explicación de la analiticidad involucra las nociones de verdad lógica y sinonimia. Si consideramos que la lógica es parte de los principios de nuestro lenguaje, deberemos explicar verdad lógica y sinonimia como hechos semánticos. Entonces para entender la analiticidad es necesario entender verdad lógica y sinonimia. Para entender estos últimos conceptos necesitamos de una teoría del significado que nos permita familiarizarnos con estas nociones, es decir necesitamos entender que es el significado. Ahora, una vez que se nos explique que es el significado, tendremos implícitamente todo los elementos para entender la analiticidad. Así que describir el significado y las relaciones relevantes para la analiticidad es implícitamente explicarlas.

Considerando que los puntos (b) y (c) están relacionados íntimamente, es razonable pensar que una caracterización general de analiticidad ofrece solamente una declaración de la relación particular que existe entre significado y verdad de los enunciados analíticos y una descripción-explicación en función de la semántica de lo que es esta relación. Podemos agrupar estos rasgos para constituir los dos rasgos que deben cumplirse en una caracterización de la analiticidad:

Primero: debe declarar que hay una conexión substantiva[68] entre el significado del

[68] Al decir que hay una conexión substantiva nos referimos simplemente a que la relación declarada tiene un contenido factual, aún si esta primera parte solo se ocupa de presentarla. Además el contenido factual de la relación debe extenderse a las ideas de verdad y de significado. Dos de las consecuencias importantes de la crítica de Quine a la distinción analíticos sintetico son por una parte que el

enunciado y su verdad.

R(s(E), v(E))

Segundo: debe aclarar que hay una explicación de cuál es la relación entre significado y verdad, explicación que es de índole estrictamente semántica y del tipo:

Los hechos que determinan s(E) explican por sí solos v(E)

En este segundo rasgo debe detallarse la mecánica que establece la conexión entre significado y verdad. Las diferencias respecto de cómo es esta conexión es lo diferencia a las diversas ideas de analiticidad entre sí. Enfatizaremos, para concluir esta sección, que el ficcionalismo no puede sostener esta segunda parte de la caracterización general de analiticidad para el caso de los enunciados matemáticos. Por ello negará la analiticidad de las matemáticas no solamente para casos particulares, sino para cualquier idea que caiga bajo la caracterización general aquí propuesta.

significado de los enunciados analíticos no nos remiten a hechos incontrovertibles (o cuando menos que no podemos determinar si su contenido es factual) y por la otra que la verdad involucrada en las verdades analíticas -como las verdades lógicas- no tiene contenido factual sino solo el contenido trivial que se expresa cuando decimos que las verdades lógicas son obviedades (cf. Harman 1998, Boghossian 1993, Quine 1936), de modo que si la noción de analiticidad ha de ser interesante, debe tener contenido no-trivial.

CAPÍTULO 2. PSEUDO-ANALITICIDAD Y SEMÁNTICA PARA EL FICCIONALISMO

En este capítulo presentaremos el problema de la pseudo-analiticidad de las matemáticas, bosquejaremos una solución y expondremos las tesis semánticas que nos ayudarán a abordarla.

En el capítulo 1 sección 4 presentamos diversas ideas de analiticidad. Desde el punto de vista del ficcionalismo ninguna de esas ideas es apta para iluminar algún aspecto importante de la naturaleza de las matemáticas, puesto que todas involucran fundamentalmente la verdad de los enunciados analíticos, incluyendo la caracterización general presentada en la sección anterior. Pero decir que las matemáticas no son analíticas para el ficcionalista, no es un resultado muy importante. Por ello daremos un giro y nos concentraremos en el papel que la semántica, que bajo la forma de la idea de analiticidad, ha jugado en la filosofía del siglo XX (en particular para el empirismo lógico) y en el provecho que la misma filosofía ha obtenido de la analiticidad[69].

El empirismo lógico explicaba el conocimiento *a priori* afirmando que hay verdades analíticas que no necesitan verificación empírica, la necesidad reduciéndola a la necesidad lingüística de las verdades analíticas convencionales. También purificó a la filosofía del psicologismo al concebir a la idea de analiticidad como una noción estrictamente lógico-lingüística. Y por último identificó a la metafísica como carente de significado, porque no tiene método de verificación ni una explicación de su verdad a diferencia de las matemáticas y la lógica, cuya verdad es analítica. De esta suerte, las matemáticas obtendría dos beneficios de su analiticidad: su legitimación como parte de la ciencia (diferente de la especulación metafísica o de la psicología pseudo-científica) y la explicación de su aprioricidad y su necesidad. Así que al afirmar la analiticidad de las matemáticas obtenemos una ventaja filosófica. En este trabajo daremos los primeros pasos para averiguar si el ficcionalismo, a pesar de rechazar la analiticidad de las matemáticas, puede también sacar alguna ventaja de las propiedades semánticas de las matemáticas.

[69] Capítulo 1 sección 4.2.1.

1. Analiticidad y pseudo-analiticidad

En esta sección 1 nos ocuparemos de exponer cuál es la actitud del ficcionalismo frente a la analiticidad. El ficcionalista cree que las matemáticas no son verdaderas ni analíticas, pero todavía puede interrogársele acerca del motivo por el cual en apariencia son analíticas. Esto es lo que nos conducirá a explicar la semejanza entre las matemáticas y lo analítico.

1.1 El papel de la noción de enunciado analítico

En este apartado nos aproximaremos al problema de la analiticidad ofreciendo una explicación de por qué las matemáticas aparentan ser analíticas sin serlo.

Como establecimos en nuestra caracterización general, un enunciado analítico E es un enunciado para el cual los hechos que determinan s(E) explican por sí solos v(E). Según vimos en el capítulo 1 sección 4, a los enunciados matemáticos se les ha citado como ejemplos de enunciados verdaderos por razones puramente lógico-lingüísticas. Pero el ficcionalismo de Field no puede consentir esta idea.

Ahora bien, el interés por rescatar la noción de analiticidad no está del todo extinto[70] y si miramos con atención, podremos ver que el reciente intento por rescatar a la analiticidad tiene -como lo tuvo antes- el interés por una explicación del conocimiento *a priori*.

La filosofía, por lo menos desde Kant, se ha ocupado de la analiticidad desde una perspectiva que no es simplemente lingüística, pues los filósofos están interesados en entender y conocer. De allí que tengan interés en los enunciados verdaderos, por la propiedad de la verdad en general y por los enunciados analíticos. En los enunciados analíticos nuestra seguridad en su verdad depende sólo de hechos acerca de su significado; no solamente hay un interés por la analiticidad como una curiosidad lingüística, también se encuentra en ella una manera de obtener ventajas epistemológicas[71].

Las ganancias extra-semánticas de la analiticidad fueron reconocidas y explotadas como nunca antes por el empirismo lógico. Algunos de los papeles que le asignó a la analiticidad que representaron beneficios extra-lingüísticos fueron, como hemos dicho, la

[70] Boghossian 1996.

[71] Cuando menos para el empirismo lógico con la explicación del conocimiento a priori, el desenmascaramineto de la psicología como pseudoconocimiento y de la metafísica como carente de significado.

explicación analítica del conocimiento *a priori*, la teoría lingüística de la necesidad o la demarcación entre ciencia y metafísica especulativa. De este modo la analiticidad ofrece la perspectiva de dividendos filosóficos a partir de simples tesis semánticas. Entre los beneficiarios de estos dividendos deberán poder contarse los filósofos de las matemáticas, puesto que una explicación del conocimiento *a priori* puede aclarar la naturaleza del conocimiento matemático y sus aplicaciones.

El ficcionalista no cree en la analiticidad de las matemáticas, pero hasta ahora no ha contemplado el papel filosófico de la analiticidad. Por ello revisaremos la visión tradicional de que las matemáticas son analíticas sin pasar por alto el papel filosófico de la analiticidad.

1.2 Pseudo-analiticidad

En esta sección veremos que el ficcionalismo podría ofrecer una explicación de la aparente analiticidad de las matemáticas de manera similar a la que da de su verdad ficticia.

Una filosofía de las matemáticas debe ocuparse de sus preguntas apremiantes, por ejemplo acerca de la verdad matemática o de su aplicabilidad. Hay dos formas como puede ocuparse de estas preguntas: la primera es dar una solución a los problemas; la segunda es aclarar que ciertos supuestos problemas no son tales. El ficcionalismo emplea estas dos formas[72] y eso conforma su contenido positivo y negativo respectivamente. En su contenido positivo está su preocupación por la verdad de las matemáticas: la teoría de la verdad de las matemáticas es la misma que priva fuera. Parte de su contenido negativo es que no se ocupa de justificar la verdad de las creencias matemáticas, pues no hay verdad que justificar. No obstante, el ficcionalismo explica que hay un sentido en el cual las matemáticas son verdaderas. Esta explicación es de particular importancia para nosotros, no tanto por su contenido mismo, sino por la motivación que tendríamos para ofrecerla en primer lugar.

Ya tenemos una respuesta concreta a la interrogante de la verdad matemática, entonces, ¿por qué insistir sobre el tema? Si las matemáticas no son verdaderas, ¿por qué explicar que hay un sentido en el que las podemos considerar verdaderas? La respuesta es bastante simple: la verdad de las matemáticas es parte central de lo que conforma la visión tradicional acerca de las matemáticas y como tal no puede simplemente dejarse de lado.

Ahora, si el ficcionalismo se siente obligado a dar una explicación de la verdad

[72] Field 1989 p. 6

ficticia de las matemáticas a pesar de que sostiene que las teorías matemáticas no son verdaderas, bien podemos interrogarle acerca de otras partes de la visión tradicional de las matemáticas; como su aprioricidad o su necesidad. Tradicionalmente asentimos ante la afirmación de que las matemáticas son verdaderas, y también ante la afirmación de que la verdad matemática es *a priori*. La explicación más simple de la aprioricidad de las matemáticas es que las matemáticas son analíticas.

Ya que según el ficcionalismo las matemáticas no son analíticas, el problema no es explicar su analiticidad, porque no hay analiticidad que explicar. El problema es explicar por qué se han considerado o –si Boghossian o alguien afín tuviese éxito– se consideran analíticas. En la sección anterior hemos visto que la idea de enunciado analítico ha sido tomada por la filosofía con más seriedad que a una simple curiosidad lingüística, esa importancia filosófica es la pieza que falta, además de un análisis de la noción de enunciado analítico, para ofrecer un cuadro más completo de la analiticidad. En adelante llamaremos a la aparente analiticidad de las matemáticas su pseudo-analiticidad.

2. El proyecto de explicación de la pseudo-analiticidad para el ficcionalismo

En esta sección expondremos la estrategia para explicar la pseudo-analiticidad de las matemáticas desde el punto de vista del ficcionalista. Dividiremos esta estrategia en dos partes, la primera tiene que ver con la similitud entre enunciados matemáticos y analíticos y la segunda con la utilidad de la semántica de las matemáticas. Lo que resta de este trabajo está dedicado a la similitud entre enunciados analíticos y matemáticos.

La pseudo-analiticidad de las matemáticas puede entenderse como el resultado de una inferencia a la más simple explicación[73]. Veamos cómo; concedamos estos dos supuestos: Primero, los enunciados matemáticos parecen cumplir con alguna noción de analiticidad, sea la de Frege o la de Carnap por ejemplo. Segundo, los enunciados matemáticos parecen cumplir con las mismas funciones que los enunciados analíticos cumplen en la filosofía. De estos dos supuestos es razonable inferir la afirmación "las

[73] Con "inferencia a la mas simple explicación" simplemente damos a entender que la analiticidad es una explicación muy simple de los hechos planteados de las matemáticas. Decidimos usar este término en analogía con la inferencia a la mejor explicación, pero debe notarse que según lo hemos definido en el capítulo 1, la IME es un argumento de indispensibilidad mientras que la inferencia a la más simple explicación es afín al principio de economía o de la Navaja de Ockham.

matemáticas son analíticas", ya que es una explicación muy simple de ellos. Entonces la pseudo-analiticidad de las matemáticas es el resultado de esta inferencia a la más simple explicación. La forma de nuestra inferencia a la más simple explicación es muy sencilla: si algo parece analítico y se comporta como se comporta lo analítico; no hay razón para pensar que no es analítico. Aquí la conclusión de que las matemáticas son analíticas no solamente tiene que ver con el concepto de analiticidad, sino con el papel que la filosofía le ha asignado, pues de ello habla el segundo supuesto.

Ahora bien, aunque tengamos confianza en el empleo de nuestra inferencia, todavía debemos justificar los dos supuestos involucrados. Debemos mostrar que de hecho ocurre que las matemáticas parecen analíticas y que de hecho ocurre que ello representa ventajas filosóficas extra-lingüísticas. Pero ya que el ficcionalismo no sostiene que las matemáticas sean analíticas, lo que tendremos que hacer es dar una explicación alternativa de estos supuestos, que no involucre analiticidad. Si podemos conseguirlo, explicaremos la pseudo-analiticidad de las matemáticas con la inferencia planteada, y clarificaremos sus dos supuestos sin recurrir a la analiticidad, lo que mostrará que esta inferencia no es necesaria.

Para comenzar a justificar nuestros dos supuestos, resultará de utilidad guiarnos con un panorama del modo en el que el ficcionalismo puede explicar la verdad matemática sin decir que las matemáticas son verdaderas. Hay tres puntos importantes concernientes a la verdad matemática: la teoría de la verdad, la opinión tradicional y su utilidad. El modo como el ficcionalismo se ocupa de ellos es: (a) Aclarar lo que es la verdad (o mejor dicho la no-verdad) de las matemáticas, mediante una teoría general de la verdad a la Tarski (b) explicar la opinión tradicional de la verdad matemática con su idea de que hay una verdad ficticia, que tiene que ver con las relaciones lógicas intra-teóricas de las teorías matemáticas y (c) detallar que la verdad matemática carece de función en ciencia, pues sólo se necesita la conservatividad.

Ya que tenemos este panorama podremos darnos una idea de lo que deberemos conseguir para el caso de la analiticidad. Si conseguimos establecer los supuestos de la inferencia que hemos propuesto sin apelar a lo analítico deberíamos colocarnos en una situación en la que podríamos explicar la pseudoanliticidad atendiendo a tres aspectos, análogos al caso de la verdad recien revisado: Una teoría independiente de lo analítico, una explicación de la opinión tradicional y un recuento de su utilidad. Entonces debemos darnos a la tarea de: (a) explicar la analiticidad (o mejor dicho la no-analiticidad) de las matemáticas, pues como hemos visto[74] ningún concepto de analiticidad es coherente con el ficcionalismo (b) explicar la visión tradicional de la analiticidad de las matemáticas como el resultado de la inferencia a la más simple explicación y (c) aclarar cuál es la función filosófica de la analiticidad sin recurrir a la tesis de la analiticidad.

Si estamos en lo correcto, el proyecto de explicación ficcionalista de la pseudo-analiticidad debe comprender dos partes: La primera es justificar la primera suposición en nuestra inferencia; es decir, mostrar que las propiedades semánticas de los enunciados matemáticos los asemejan a los enunciados analíticos. La segunda consiste en justificar la segunda suposición; mostrar que las propiedades semánticas de las matemáticas pueden ser aprovechadas para obtener beneficios filosóficos extra-lingüísticos[75].

Llamaremos a la primera parte de nuestro proyecto de explicación la *similaridad analítico-matemática*, esta parte ha resultado ser bastante laboriosa, de modo que lo que resta de este trabajo se ocupará de completarla; la segunda parte la pospondremos por el momento[76].

Henos aquí, entonces, frente a la tarea de explicar cómo las características semánticas de los enunciados matemáticos guardan semejanza con la noción de enunciado analítico. Para ello recurriremos de nuevo al papel epistemológico de la analiticidad: En los enunciados analíticos encontramos asociados de una manera particular su verdad y su significado. Pero tanto verdad como significado son nociones semánticas. La importancia de los enunciados analíticos no radica en la pura semántica, sino el hecho de que la verdad es valiosa para los filósofos. Más adelante usaremos este hecho para nuestro propósito; sostendremos que en los enunciados analíticos existe una asociación entre hechos semánticos y valores epistemológicos. Mientras tanto deberemos preparar el terreno con los preliminares teóricos necesarios.

---

[74] Capítulo 1 sección 5.

[75] Este trabajo no se ocupará de esta segunda tarea, pero podemos adelantar que la semántica puede encontrar un papel en la caracterización de lo que es una teoría matemática estándar y en la explicación de la aplicabilidad.

[76] Llamaremos a esta segunda parte la *utilidad filosófica de la pseudo-analiticidad*.
La utilidad filosófica de la analiticidad puede resumirese en dos usos importantes que el empirismo lógico le otorgó a la analiticidad: la explicación del conocimiento a priori y la distinción entre ciencia formal y metafísica especulativa. (Harman 1996). El ficcionalismo no puede recuperar íntegramente estos usos, de tal suerte que la utilidad filosófica de la pseudo-analiticidad no puede ser la misma que la utilidad de la analiticidad, sin embargo hay problemas relacionados con la explicación del conocimiento matemático y la demarcación de la disciplina matemática que son importantes para el ficcionalismo. Dos usos importantes que la semántica de las matemáticas pueden tener son, primero la explicación de la *aplicabilidad* extra-matemática de las matemáticas y segundo la caracterización de lo que es una teoría matemática (recordemos que la verdad ficcionalista depende de la noción de matemáticas estándar). Usar la semántica de las matemáticas para articular la explicación de la aplicabilidad y una caracterización de las teorías matemáticas constituiría la segunda parte del proyecto de explicación de la pseudo-analiticidad, i. e. la *utilidad filosófica de la pseudo-analiticidad*.

3. Las tesis semánticas del ficcionalismo.

La analiticidad, aunque Boghossian considera que hay un tipo metafísico y otro epistémico, es básicamente una noción semántica. Para tratarla adecuadamente, y para empezar la exposición de la similitud analítico-matemática deberemos organizar y aclarar cuáles son los supuestos semánticos que el ficcionalismo sostiene. En esta sección veremos, primero, que el ficcionalismo tiene dos supuestos semánticos fundamentales, el primero tiene que ver con la verdad de las teorías y el segundo con la interpretación de los enunciados matemáticos. Posteriormente, al agregar dos nuevas tesis –el modelo de uso y la constitutividad– completaremos nosotros mismos el panorama teórico que nos permitirá realizar nuestra labor.

3.1 Verdad

El ficcionalismo rechaza la existencia de objetos matemáticos. Si consideramos a una teoría T como un enunciado "Tc" formado por la conjunción de todos los enunciados simples de T, y el valor de verdad de T como el valor de verdad de "Tc" entonces cualquier teoría matemática que incluya enunciados existenciales será una teoría falsa. De modo que podemos enunciar nuestra Primera Tesis Semántica del Ficcionalismo como:

La verdad de una teoría matemática se determina del mismo modo que la verdad de cualquier otra teoría, y en general una teoría matemática es una teoría falsa.

3.2 Interpretación y ficción

Una importante función de la verdad de las teorías matemáticas es explicar la aplicación de las matemáticas en la ciencia, pero esta función puede ser suplida por la conservatividad. A pesar de esto a Field le parece importante aclarar el porqué de la verdad matemática. De esta suerte el ficcionalismo cuenta con un doble estándar para asignar valores de verdad. El primero es el estipulado en la Primera Tesis Semántica del Ficcionalismo, que llamaremos la interpretación literal de los enunciados. El segundo, que llamaremos la interpretación ficticia de los enunciados matemáticos, consiste en asignar valores de verdad de acuerdo con las relaciones de lógicas que sostienen con las teorías estándar de las matemáticas.

La Segunda Tesis Semántica del Ficcionalismo la enunciaremos así:

> Los enunciados matemáticos poseen un significado según el cual un enunciado matemático "E" es literalmente falso (o vacuamente verdadero). Pero "E" es verdadero de acuerdo con las matemáticas estándar si puede deducirse de una teoría matemática M que es reconocida y aceptada por la comunidad matemática.

El doble estándar para la verdad expresado en la esta Segunda Tesis tiene como propósito dar cuenta de la opinión tradicional acerca de la verdad de las matemáticas. Pero debe entenderse que el significado de un enunciado matemático es simplemente su significado literal. No deben buscarse interpretaciones no-literales bajo las cuales las matemáticas sean "realmente" verdaderas[77], pues ello atentaría contra los propósitos naturalizados del ficcionalismo.

Los enunciados matemáticos ostentan un *significado nominal*[78], que es simplemente el significado que a primera vista parecen tener. Alguien que cree en las matemáticas toma a sus enunciados con su significado nominal y los cree verdaderos. Como el ficcionalista no cree que las matemáticas son verdaderas con este significado nominal, tal vez podría ocurrírsele que las matemáticas tienen algún otro significado, bajo el cual sean efectivamente verdaderas. Entonces este ficcionalista podría darse a la tarea de encontrar aquel significado no-nominal que salve la verdad de las matemáticas. Field no cree que haya que buscar esa hipotética interpretación de los enunciados matemáticos; las matemáticas significan lo que parece que significan y sólo eso, después de todo la conservatividad hace innecesaria la verdad.

4. Dos nuevas tesis semánticas

En esta sección presentaremos dos tesis semánticas que no son parte explícita de la doctrina de Field, pero que son compatibles con esta y que nos ayudarán a abordar el problema de la pseudo-analiticidad. Introduciremos la Tercera Tesis Semántica que expone a la definición implícita como el mecanismo para dotar de significado a los términos matemáticos. La Cuarta Tesis Semántica sostiene que ciertos conjuntos de enunciados matemáticos poseen

[77] La Primera Tesis Semántica del ficcionalismo parece bastante incómoda; es muy inquietante negar la verdad de las matemáticas. El ficcionalismo tal vez podría hacer un intento por rescatar la verdad de las matemáticas. Ya que no existen *objetos* matemáticos, tal vez los términos matemáticos no designan objetos sino otras cosas que tengan como resultado que todos estos enunciados sean verdaderos. Dicho significado sería el "significado real" de las teorías y los enunciados matemáticos. Field se pronuncia explícitamente en contra de esta actitud, el prefiere respetar las consideraciones internas que hacen los matemáticos, antes que emprender una cruzada tras objetivos (como la verdad) que le convienen más al filósofo que al matemático.

[78] Field 1989 p. 7.

una propiedad que llamaremos constitutividad[79], la cual resultará útil para explicar la similitud analítico-matemática.

4.1 Términos matemáticos y Definición Implícita

El objetivo de toda esta sección 4.1 es introducir a la semántica del ficcionalismo la estrategia de la definición implícita. Presentándola como el mecanismo mediante el cual se les da significado a los términos matemáticos primitivos, pues para darles significado debemos definirlos y la definición explícita no puede cumplir este cometido.

Antes que nada, recordemos que la Primera y Segunda Tesis Semánticas del ficcionalismo tratan de objetos lingüísticos de cierta complejidad: teorías y enunciados. Es natural preguntarse ahora por entidades lingüísticas más simples; los términos matemáticos.

Para ello discutiremos las siguientes posibilidades:

1. Los términos matemáticos no tienen significado.

2. El significado de los términos matemáticos es el contenido conceptual que el matemático designa para estos términos[80].

3. Se les da significado a los términos matemáticos por definición explícita.

4. Se les da significado a los términos matemáticos por definición implícita.

Las posibilidades 3 y 4 serán objeto de las secciones 4.1.1 y 4.1.2 hasta concluir con el modelo de uso en 4.1.4. Nos ocuparemos enseguida de descartar las posibilidades 1 y 2.

Las teorías y los enunciados matemáticos hacen una descripción literal de un inaccesible reino matemático; detallan qué objetos contiene dicho reino y cuáles son las relaciones entre ellos. Los términos matemáticos son los que se ocupan de hacer referencia a estos objetos y relaciones. Ahora bien, los objetos matemáticos son objetos abstractos, objetos que no tienen locación espacio temporal ni tampoco ningún tipo de relación causal con nuestro propio universo. De modo que, por principio, no podemos tener acceso a los referentes de nuestros términos matemáticos. Por lo tanto, si los términos matemáticos han de tener significado, este significado no puede ser resultado de algún tipo de experiencia que relacione al mundo matemático con nuestro lenguaje. No hay una suerte de "bautizo inicial" que una un objeto matemático con su nombre. Ya que no es del tipo causa-efecto, el

[79] La discusión de la constitutividad será más extensa, pero consideramos importante revisarla poque el tema de constitutividad es ampliamente debatido en la filosofía de la lógica, pero poco tocado con respecto a las matemáticas.
[80] Podemos abreviar esta alternativa diciendo que el significado de los términos es el que los matemáticos imaginan para ellos.

significado de los términos y enunciados debe ser de otro tipo. Tal vez el significado de los términos matemáticos es resultado de experiencias que asocian el lenguaje de las matemáticas y nuestro mundo en lugar del mundo matemático. Esta posibilidad la exploraremos en la sección 4.1.2. Pero antes debemos explorar las otras posibilidades. Veamos la posibilidad 1:

Los enunciados y los términos matemáticos tal vez no tienen significado. Así evitamos el problema de conectar términos de nuestro lenguaje y objetos inaccesibles. Esta sería una posición muy cercana al formalismo; las matemáticas serían un complejísimo juego sintáctico. La idea de que los términos matemáticos carecen de significado ha tenido detractores serios. Frege mismo sentía que la aritmética debía fundamentarse claramente, pues solamente así podría diferenciársela de un mero juego sintáctico. Si bien podemos tratar a las matemáticas como sistemas sintácticos purificados de significado, ello no es evidencia de que las matemáticas no tengan significado. Pero el aprecio que los matemáticos sienten por la significación de sus teorías tampoco es evidencia a favor del significado, así como tampoco es un buen argumento filosófico. Nosotros defenderemos la posición de que las matemáticas tienen significado. Pero para sostenerla necesitamos argumentos que tengan algo más de sonoridad que el entusiasmo de los matemáticos.

Podemos pensar en dos razones por las cuales los filósofos naturalizados de las matemáticas deberían estar dispuestos a aceptar que las matemáticas tienen significado. La primera tiene que ver directamente con el holismo. Si se sostiene una visión holista del conocimiento, deberá admitirse que las matemáticas comparten la suerte de las demás partes de la ciencia. Los procesos responsables de garantizar la plausibilidad de un enunciado matemático dependen de las garantías para todo el resto de la ciencia. Es difícil pensar cuál puede ser la garantía para sistemas sintácticos sin significado si ésta debe depender del resto de las garantías del conocimiento científico, ya que el conocimiento científico es un sistema teórico con significados muy concretos (electrón, fuerza, distancia, etc.). Podríamos también apelar a Quine, quien en "Dos Dogmas" explica que una de las confusiones que han conducido a creer en la distinción analítico-sintético es el no advertir que la unidad mínima de significación es la totalidad de la ciencia y no los enunciados aislados. Lo cual le atribuye implícitamente significado a las matemáticas, en el mismo sentido que tiene significado el resto de la ciencia. Un problema con esto es que esa aserción dependía de una semántica verificacionista. Pero aunque no podamos apelar directamente a Quine, sí podemos apelar indirectamente, pues podemos ver que sus ideas han repercutido en diversos aspectos de la filosofía de la ciencia. Ello nos conducirá a la segunda razón en pro del significado matemático.

La segunda razón tiene que ver con la preocupación filosófica por la verdad matemática. Aunque una semántica holista de corte verificacionista ya no sea muy popular, la epistemología sí está inclinada hacia el holismo[81]. Ahora, el holismo implica cierta homogeneidad dentro del sistema del conocimiento, las diferencias son solamente cuestión de grado[82]. Si las matemáticas carecieran de significado, entonces el sentido en que los enunciados matemáticos son verdaderos o falsos no sería el mismo sentido en que un enunciado científico que posee significado es verdadero o falso. Eso introduciría una diferencia cualitativa entre la verdad de las matemáticas y la del resto de la ciencia, y representaría un problema para el holismo epistemológico y para las filosofías naturalizadas de las matemáticas. En general una filosofía de las matemáticas que insista en que el conocimiento de las matemáticas es afín al conocimiento científico preferirá el holismo epistémico y con él preferirá también la homogeneidad semántica (al menos en lo que respecta a la teoría de la verdad), lo que le llevará a admitir alguna suerte de significado en las teorías matemáticas. Si bien el ficcionalismo no precisa del holismo epistemológico, admite, en cambio, que la teoría de la verdad debe ser la misma, se trate o no de matemáticas. De modo que el holismo nos da una razón para admitir el significado de las matemáticas; si a eso le sumamos la posición de los mismos matemáticos a favor del significado, resultará preferible admitir que en efecto las matemáticas tienen significado.

Veamos ahora la posibilidad 2:

El significado de los enunciados y términos matemáticos podría ser el contenido conceptual que los matemáticos les designan. Esta parece una idea plausible. Históricamente muchas teorías matemáticas se han creado como elaboraciones o análisis de conceptos que ya se poseían antes de comenzar a teorizar. La teoría de conjuntos, podría decírsenos, es un intento de alcanzar un mejor conocimiento de la noción intuitiva de conjunto. Si las teorías matemáticas cumplen el cometido aclarar conceptos intuitivos, parecería muy sensato pensar que el significado de los términos matemáticos coincide más

---

[81] Gracias a Quine, lo cual es patente en el nombre de la tesis Duhem-Quine.
[82] Recordemos que Quine sentía que la diferencia entre los enunciados lógicos, matemáticos y empíricos era solamente cuestión de grado.

o menos exactamente con el concepto cuyo estudio motivó en primer lugar el desarrollo de la teoría.

Pero será muy difícil mostrar que esto siempre es así. Contemplemos el siguiente ejemplo: tanto los matemáticos como cualquier otra persona instruida poseen un concepto intuitivo de conjunto; pero sus conceptos no necesariamente coinciden entre sí. Para estar de acuerdo acerca de si el término "conjunto" que aparece en la teoría matemática coincide con su propio concepto, tendrían que revisar al significado del término "conjunto" tal como aparece en la teoría, pues nadie tiene acceso directo al contenido mental de alguien más. Al hacer esto, no solamente se encontrarán con el hecho de que "conjunto" es un primitivo de la teoría (es indefinible en la teoría), sino que advertirán que para determinar cuáles cosas que caen bajo el concepto conjunto deberán recurrir a los enunciados de la teoría y no a su concepto privado. Aparte de este ejemplo, la historia nos muestra que el concepto matemático de conjunto se modifica de acuerdo con las modificaciones que se llevan a cabo en la teoría. Parece ser que las modificaciones conceptuales se ajustan a las modificaciones teóricas; y no al contrario. Ese es justamente el caso de la noción de "conjunto" en matemáticas; la noción se ha modificado como resultado de las rectificaciones en la teoría matemática y no de acuerdo a los vericuetos por los que transitó el concepto pre-teórico.

Nuestro ejemplo y la historia contradicen la tesis de que el concepto intuitivo pre-teórico determina el significado de los términos en una teoría matemática. En cambio parecen indicar que el significado de los términos matemáticos está más relacionado con la dinámica de las teorías en las que aparece que con las intuiciones que les dieron origen.

A pesar de que rechazamos la tesis del significado como concepto intuitivo, podemos sacar provecho de ella. En lugar de pensar que el significado *es* el concepto pre-teórico, podríamos tomar la tesis más débil de que el significado es *resultado* del concepto pre-teórico. Ahora, para aceptar esta tesis necesitamos que se nos explique el mecanismo por el cual se vinculan el concepto intuitivo y el significado de un término matemático. Pues no podemos aceptar sin argumentos que existe una transferencia de los contenidos de la vida mental del matemático a las teorías.

El significado matemático y la posesión de un concepto son cosas diferentes. Por ejemplo, podemos ver que el significado de nuestro término conjunto en la teoría moderna, no es idéntico al contenido conceptual que Frege poseía al momento de usar su término. En general, no hay automáticamente una transmisión del contenido conceptual desde la mente del matemático hasta los términos de sus teorías. Imaginarse un círculo no es lo mismo que darle significado a la palabra círculo, así como imaginar una mesa redonda no es lo mismo que construir una mesa redonda; en ambos casos la conceptualización tiene una relación con el significado o con el objeto construido, pero para pasar de uno a otro es necesario un mecanismo intermediario; por ejemplo para obtener la mesa redonda que imaginamos no sólo tenemos que imaginarla, debemos construirla. Darle significado a los términos matemáticos no es lo mismo que tener en la mente algún contenido que suponemos es su significado. Para dar significado a un término necesitamos hacer algo más que imaginar un significado, tenemos, por así decirlo, que "construir" el significado.

Entonces, tampoco aceptaremos sin modificaciones la tesis débil de que el significado es resultado del concepto pre-teórico, pues nos parece que el significado es más bien el resultado de un proceso de "construcción" del significado. Creemos que el significado de un término matemático, por ejemplo "número", en lugar de ser el resultado directo de un contenido mental, es más bien el resultado de un mecanismo para otorgarle significado. Ahora ¿Cuál es el mecanismo para dar significado a los términos en matemáticas? Casi cualquier matemático estará de acuerdo en que este mecanismo es la definición del término. Esto nos lleva directamente a las posibilidades 3 y 4; las definiciones explícitas e implícitas de los términos matemáticos. Trataremos estas posibilidades en las siguientes secciones.

4.1.1 Definición explícita

En esta sección veremos el alcance de las definiciones explícitas y la necesidad de completarlas con la definición implícita de los términos primitivos.

El mecanismo para dar significado a los términos en matemáticas es la definición de los términos. Los matemáticos definen constantemente términos matemáticos. La importancia de la definición de términos se manifiesta agudamente en los programas reduccionistas. Términos matemáticos como "número" o "función" pueden definirse como construcciones que utilizan solamente los axiomas o principios de la teoría de conjuntos. A la teoría de conjuntos se le considera la teoría fundamental de las matemáticas. Cualquier teoría matemática T puede reducirse a la teoría de conjuntos, es decir, que todos los términos y enunciados de T son definibles función de los de la teoría de conjuntos.

El mecanismo de definición que se emplea en tales casos no es muy complicado: una expresión D define a otra expresión E, si D no incluye a E y si las apariciones de E pueden ser reemplazadas en cada caso por D, preservando las relaciones lógicas con el resto de la teoría. Llamaremos a esta mecánica definición por eliminación.

Las definiciones de este estilo son extensamente socorridas en matemáticas al hacer reducciones de unas teorías a otras. En este sentido los significados de cualquier teoría matemática pueden considerarse como significados derivados de la teoría de conjuntos, pero ¿qué ocurre con los términos de la teoría fundamental?

Ya que toda teoría matemática puede definirse a partir de la teoría de conjuntos, sólo nos resta preguntarnos acerca de las definiciones para la teoría de conjuntos. Y para ello bastará concentrarnos en los enunciados básicos de la teoría de conjuntos -todos los demás enunciados están relacionados lógicamente con estos. Los axiomas de la teoría de conjuntos son enunciados que incluyen términos del lenguaje natural, excepto por ciertos términos específicos cuyo significado es crucial para la teoría. En teoría de conjuntos aparecen términos como "conjunto", "objeto" o "pertenece a" que deben entenderse en un sentido técnico, en lugar de conferirles el significado que tienen en el uso corriente del lenguaje. Estos términos poseen un significado peculiarmente matemático. En el lenguaje natural no hay definiciones de estos términos que resulten completamente satisfactorias para los matemáticos. La definición explícita por eliminación, sea en función del lenguaje natural o de otros términos matemáticos, no parece ser el mecanismo que está en juego al dar significado a los primitivos de la teoría de conjuntos, pues de ser así podríamos eliminar primitivos como 'conjunto' o 'pertenece a'. Si no es la definición explícita el mecanismo de significación debe ser algo más.

Los matemáticos y filósofos como Hilbert o Russell[83] tienen una solución estándar a la necesidad de un mecanismo alternativo de definición: la definición implícita. Esta estrategia será el objeto de la siguiente sección, por lo pronto examinaremos si hay alguna alternativa a la definición implícita.

Como no hay definiciones satisfactorias de los primitivos de la teoría de conjuntos en función del lenguaje natural u otras teorías matemáticas, podríamos intentar otra

[83] Russell 1988.

posibilidad de definición explícita: Pongamos a los enunciados de la teoría de conjuntos en correspondencia con situaciones observables. De este modo, el contenido de nuestros enunciados y términos matemáticos sería del mismo tipo que el de cualquier otra ciencia natural. Nuestros términos seguirían siendo irreducibles, pero ya no serían peculiarmente matemáticos como habíamos dicho. Bajo esta perspectiva los términos "pertenece a" o "conjunto" no referirían a objetos abstractos, sino a una clase de objetos observables en nuestro propio mundo. Hay por lo menos dos problemas con este enfoque.

Primero, no hay una única teoría de conjuntos, puesto que hay enunciados indecidibles que están relacionadas con la teoría de conjuntos[84] y que por principio no pueden ser confirmados o refutados por la experiencia. Estaríamos, entonces, ante la perspectiva de desechar muchas hipótesis y teorías que los matemáticos consideran como legítimamente matemáticas, es decir, ante un proyecto de depuración de las matemáticas. Algo muy incómodo respecto de este proyecto es que no habría emanado de las mismas matemáticas, sino de la inquietud filosófica por buscarles significado y lo peor es que aspira a reglamentar semánticamente a las matemáticas y no solamente a describirlas.

El segundo problema es que no hay aplicaciones canónicas para las matemáticas, lo que quiere decir que su significado no esta fijado por el tipo de interpretación que se le da en alguna aplicación particular. El término "función", por ejemplo, puede ser aplicado al espacio físico o a los grados de creencia. Si el contenido del término fuera tal que pueda identificarse con ciertos fenómenos en el mundo, deberíamos poder encontrar en el mundo una traducción entre los fenómenos del espacio físico y los de los grados de creencia, ya que ambas son descritas con el mismo término. Si bien la reducción intra-matemática de términos ha gozado de mucho éxito[85], serán mucho más difíciles de aceptar las supuestas reducciones extra-matemáticas que asegurarían el contenido empírico del término. No disponemos de evidencia ni de un buen argumento para aceptar las extrañas reducciones implicadas por esta posición, por ejemplo traducir espacio físico a grados de creencia.

Para concluir hablaremos de una ultima alternativa de definición explícita: El significado de los términos de la teoría de conjuntos podría ser simplemente su extensión. Por ejemplo la extensión de la relación "pertenece a" (en adelante la designaremos como

[84] Por ejemplo la hipótesis del continuo, que afirma que la cardinalidad del continuo es igual a 2 elevado a la cardinalidad de los naturales.
[85] véase Cap. 1 secc 1.2.

"$\in$"), es simplemente el conjunto de pares ordenados (x,Y) tales que $x \in Y$. En tal caso lo único que necesitaríamos es un modelo lo suficientemente completo para hacer verdaderas a todas las expresiones del tipo "$x \in Y$".

Esta idea también implica dificultades. Antes que nada, "$x \in Y$" no puede tener un contenido extra-matemático, porque de ser así todas las teorías matemáticas podrían reducirse a teorías acerca del sujeto particular que se eligiera para interpretar a "$x \in Y$", y este sujeto deberá poder dar cuenta de todas las aplicaciones de las matemáticas. Hasta donde se sabe solamente las mismas matemáticas tienen esa generalidad.

Una opción con la suficiente generalidad podría ser la teoría de modelos. Ahora, tenemos dos opciones para entender la teoría de modelos: o bien es una teoría matemática o no lo es. Si es una teoría matemática, nos encontraríamos con el mismo problema al tratar de definir los primitivos de la teoría de modelos que al definir los términos de la teoría de conjuntos: no hay definición explícita de sus primitivos. Además, al ficcionalismo le resulta incómoda esta opción pues los modelos a los que haríamos referencia serían objetos matemáticos. Pensemos entonces que la teoría de modelos no es matemática. Si considerásemos a la teoría de modelos como una teoría lingüística[86], por ejemplo, nos encontraremos de nuevo con el problema de que el contenido de las matemáticas no es matemático sino lingüístico y todas las teorías matemáticas serían simples extensiones de la lingüística. Esto último no es una alternativa plausible, ya que la lingüística (o la disciplina que albergase a la teoría de modelos) se vería comprometida a explicar todas las aplicaciones y usos que tienen las matemáticas en ciencia y otras disciplinas. La definición por extensión tampoco nos parece una buena alternativa de definición de los primitivos.

En vista de lo difícil que es para la definición explícita dar significado a los primitivos de las matemáticas examinemos la solución estándar; la definición implícita.

4.1.2 Definición Implícita

En esta sección veremos que la definición implícita de los términos matemáticos es un mecanismo usado constantemente en matemáticas y expondremos en que consiste el modelo estándar de definición implícita. También veremos que al ficcionalismo le resulta problemático el modelo estándar de definición implícita, razón por la cual habrá de optar

[86] Una teoría que habla de cosas y relaciones, como lenguajes o significados, que tienen que ver sólo con el lenguaje y no de objetos matemáticos.

por el llamado modelo de uso.

Cuando no disponemos de buenas definiciones explícitas de un término matemático, hay una respuesta muy difundida acerca de cuál es su significado. Por ejemplo el significado de conjunto es todo aquello que satisface al término "conjunto" en los axiomas de la teoría de conjuntos. Russell mismo[87] dice que algo similar ocurrirá para términos como "número", "cero" o "sucesor"; serán cualquier cosa que cumpla con los axiomas de Peano. En otras palabras, el significado de estos términos se fija por definición implícita.

El modelo estándar de definición implícita nos dice que algunos términos adquieren su significado dentro de ciertos enunciados que contienen a dichos términos.

Supongamos que un término "t" aparece en los enunciados

E1, E2,..., En

Y los enunciados E1, E2,..., En no pueden entenderse en ausencia del término "t". De modo que "t" es necesario para entender E1, E2,..., En.

Decimos entonces que E1, E2,..., En definen implícitamente a "t", si E1, E2,..., En son enunciados verdaderos.

La estrategia de la definición implícita ha aparecido de manera significativa fuera de las matemáticas. La definición implícita ha tenido un papel en la discusión de la analiticidad[88] y tiene un importante papel en ciencias como la física para dar significado a sus términos. Pensemos por ejemplo en el caso del término "quark". Podemos intentar entender a que nos referimos cuando hablamos de quarks mediante analogías con teorías y términos familiares como "partícula elemental" o "electrón". Estrictamente, sin embargo, el significado del término "quark" se lo el papel que tiene en la teoría donde aparece. Es bien reconocido que en las teorías científicas a menudo se fija el significado de sus términos por definición implícita.

Pero a pesar de que la definición implícita es un mecanismo muy aceptado, el ficcionalismo tendrá problemas para emplearla. Veremos enseguida cuál es la dificultad.

Por comodidad, sea la teoría "D_t" la clase de todos los enunciados E1, E2,..., En que participan en una definición implícita del término "t". En el modelo estándar de definición implícita, para fijar el significado de un término "t" requerimos afirmar el

---

[87] Russell 1988 p. 153.

[88] véase Cap. 1 secc.4.2.

conjunto de enunciados que lo definen, i.e. requerimos afirmar "D_t". Esto quiere decir que si "D_t" es una definición implícita para "t", "t" sólo tendrá significado si "D_t" es verdadera[89]. Si el conjunto de enunciados que conforman "D_t" es finito, podemos considerar a "D_t" simplemente como un enunciado resultado de la conjunción de los enunciados que participan en la definición. Nuestros argumentos no se verán afectados si se toma a "D_t" como un enunciado en lugar de una teoría, de modo que en adelante lo trataremos como enunciado.

Pensemos ahora en el caso de que E1, E2,..., En son los axiomas de una teoría fundamental en matemáticas y "D_t" su conjunción. Según la idea estándar de definición implícita, sólo si "D_t" es verdadero sus términos primitivos adquirirán significado. Los axiomas que constituyen "D_t" forman una teoría matemática, pero Field nos ha dicho que bajo su interpretación literal las teorías matemáticas son falsas y por lo tanto lo es "D_t". Así que no podemos sostener al mismo tiempo el ficcionalismo y el modelo estándar de definición implícita.

Ya hemos visto que la definición explícita de los términos primitivos de las matemáticas no representa una buena alternativa, sobre todo para el ficcionalismo pues implica la creencia en objetos matemáticos o la reducción de las matemáticas a disciplinas no matemáticas. De modo que buscaremos un modo de rescatar a la definición implícita para el ficcionalismo.

4.1.3 Problemas con la definición implícita

En esta sección veremos que el modelo estándar, además de ser problemático para el ficcionalismo, enfrenta sus propios problemas, cuya solución conducirá a un modelo de definición implícita que por fortuna es conveniente para el ficcionalismo.

La definición implícita encuentra usos desde la explicación analítica del *a priori*; hasta la definición de términos científicos como "quark". Sin embargo, el modelo estándar de definición implícita enfrenta varias dificultades.

El problema más significativo de la concepción estándar ha sido denominado el problema de la existencia del significado. Denotaremos como "D_" a un enunciado de la

[89] Veremos en la siguiente sección que la verdad de la definición asegura que exista el significado para el término. La decisión de que la definición sea verdadera es implícitamente la desición de concederle un significado altérmino.

forma "D_t" pero en el cual no aparece el término "t". "D_" es un enunciado incompleto que está constituido por términos que ya poseen su propio significado, de modo que "D_" posee un significado parcial.

Veamos el problema de la existencia del significado. Al tratar de definir un término "t" mediante "D_t", puede ocurrir la siguiente situación: "D_" posee un significado que lo hace falso por sí mismo. Por ejemplo "D_t" podría ser "La nieve es negra y t es rojo". Como "la nieve es negra" es falso, no existirá un significado que le podamos dar a "t" que haga verdadero a "D_t". La definición implícita de "t" falla. No existe un significado para "t" bajo esta supuesta definición. En este y en casos similares el modelo de definición implícita no puede cumplir su cometido.

Hay una solución simple al problema de la existencia y es la siguiente[90]: Si podemos asegurar que de hecho nuestra definición "D_t" es verdadera, aseguraremos que "t", de hecho, posee significado. Según esta solución, el significado del término "t" está asegurado por la verdad de nuestra definición; de su verdad se sigue el significado de nuestro término. El modelo estándar de definición implícita sin problema de existencia describe el significado concedido a "t" de la siguiente manera:

(V) El significado de "t" es el significado necesario para hacer verdadero al enunciado "D_t".

Debemos asegurar la verdad de "D_t" para asegurar la existencia de un significado para "t", pero el significado del enunciado por sí mismo no puede asegurar su propia verdad. La verdad del enunciado debe asegurarse por medios extra-lingüísticos, por lo tanto la definición implícita sin problema de existencia tiene efectos devastadores para los propósitos de explicar el *a priori* por medio de la definición implícita.

Pero la descripción (V) todavía es poco satisfactoria para nuestros propósitos, pues aunque no involucra verdad *a priori* requiere que la verdad de la definición se asegure por algún medio independiente. Los ficcionalistas no son los únicos a quienes la descripción (V) les resulta insatisfactoria, los usos de la definición implícita en ciencia tampoco se apegan a ella. Según el modelo estándar sin problema de existencia, para asegurar la existencia de algún significado para el término teórico "t", debemos asegurar la verdad de su definición implícita "D_t", lo que significa que debemos asegurar la verdad de la teoría

[90] Horwich 1997 p. 425.

en que aparece nuestro término. Pero según sabemos toda teoría científica es sólo probablemente verdadera y tiene una probabilidad de ser falsa; ninguna teoría científica es completamente certera. Ya que la verdad es lo que asegura la existencia del significado, en los casos de definición de términos teóricos en una teoría científica, no podemos estar seguros de que exista un significado para sus términos teóricos, porque no podemos estar seguros de la verdad de la teoría. Este problema tiene, además, otra faceta: Hay teorías científicas falsas (v. g. la teoría del flogisto) que definen sus términos por definición implícita (v. g. "flogisto"). Lo que nos muestran este y el anterior ejemplo es que en ciencia tenemos casos de definición implícita que no trabajan según lo que nos dice el modelo estándar[91]. Horwich tiene una solución a estos problemas que será interesante revisar.

4.1.4 Tercera Tesis Semántica: el modelo de uso de definición implícita

En está sección presentaremos un modelo alternativo de definición implícita, el modelo de uso propuesto por Paul Horwich que, según él, está libre de las dificultades que aquejan al modelo estándar y que, además, es más hospitalario al ficcionalismo.

Paul Horwich en "Implicit definition"[92] se preocupa por mantener a la definición implícita como el mecanismo de constitución del significado de las partículas lógicas y de los términos teóricos en ciencia. Él se ocupa de los problemas tradicionales y de algunos otros que aquejan a la concepción estándar de definición implícita. Los problemas pueden evadirse, concluirá Horwich, si renunciamos al modelo estándar de la definición implícita. Horwich rescata la función semántica de la definición implícita de dar significado y renuncia a las supuestas explicaciones del *a priori* que dependen esta. Él piensa que los problemas con la definición implícita son, en primer lugar, su dependencia de la verdad de las definiciones y en segundo lugar su papel en un proyecto de explicación del conocimiento a priori. El trabajo de Horwich nos resulta interesante porque el ficcionalismo no tiene reservas para renunciar ni a la verdad ni al *a priori* de las matemáticas. Veamos, pues, un poco más del trabajo de Horwich.

Según él, la idea estándar de definición implícita es que la decisión de considerar a "D_t " como verdadera es implícitamente la decisión de dar a "t" el significado necesario

91 Horwich 1997.
92 Implicit Definition, Analitic Truth, and A priori Knowledge. Nous, 1997

para que "D_t" sea verdadera[93]. Él nos dice que hay cuatro problemas importantes en el modelo estándar; les llama el problema de la existencia, el de unicidad, el de la posesión y el de la explicación.

El primer problema es el de la existencia, que ya hemos revisado. La solución a este problema es simplemente decir que la verdad de nuestro enunciado "D_t" asegura el significado de nuestro término "t". Así que según el modelo estándar:

(V2) El significado de "t" es el significado necesario para que "D_t" sea verdadero.

El segundo problema es el de unicidad: Concediendo que hay un significado para "t" bajo la descripción anterior, no podemos afirmar que este significado es único. Nada hay en la descripción (V2) que nos permita asegurar que hay sólo un significado que lo haga verdadero. Puede ser que existan varios significados s1, s2,... que atribuidos a "t" resulten en proposiciones p_t1, p_t2,... verdaderas. Lo inquietante aquí no es que nuestro mecanismo no opere en absoluto, sino que este mecanismo, al no señalar un único significado para "t", no define el significado de "t".

Horwich encuentra otros dos problemas en el modelo estándar, que nombra el problema de la posesión y el de la explicación

Aún si la descripción del significado en (V2) es correcta, todavía no estamos seguros –asegura Horwich– de que nuestro término "t" llegará poseer significado, pues el significado de términos teóricos en teorías científicas falsas o en desuso no caen bajo tal descripción. Sin embargo, aún las teorías falsas definen términos y lo hacen por definición implícita. Eso quiere decir que la definición no requiere verdad y que el mecanismo de atribución de significados funciona de modo diferente al contemplado por la descripción (V2): si podemos fijar el significado de "t" por definición implícita aunque "D_t" es falsa, la descripción del significado de un término de verdad en (V2) no asegura que haya un mecanismo que confiera significado a nuestro término, pues el mecanismo no parece implicar la verdad, aún si este significado existe y es único[94].

Por último el problema de la explicación: Concedamos que el significado de "t" existe, es único, y que es como lo describe (V2). Todavía no es claro como dicho significado puede llega a asociarse con "t". ¿Cómo opera el proceso que hace que nuestra

[93] Horwich 1997 p. 424.
[94] Horwich 1997 p 432.

decisión de considerar un enunciado como verdadero resulte en investir a uno de sus términos constituyentes con un significado? El problema de explicación –asegura Horwich– no puede abordarse sin tener una concepción concreta de lo que es el significado[95].

Los tres primeros problemas del modelo estándar tienen que ver con la necesidad de suponer al enunciado verdadero. Los problemas de existencia y de posesión, además, tienen fuertes repercusiones negativas al considerar la función epistemológica de la definición implícita y su papel en la explicación del *a priori*. Horwich nos dice que el problema más básico y más directamente atacable es el de la explicación. De modo que él ofrece una respuesta a este problema que parece arreglárselas muy bien frente a las restantes dificultades: lo que necesitamos es una idea concreta de lo que es el significado que nos permita dar una explicación de cómo opera la definición implícita. La teoría del significado como uso le parece la más adecuada.

> La solución más directa al problema de explicación involucra la así llamada "teoría del uso del significado", que consiste, a grandes rasgos, en que el significado de una palabra es engendrado por las regularidades básicas de su uso. Desde esta perspectiva, cuando se introduce un término "t" al decidir considerar a "D_t" verdadera, estamos instigando un modo particular de usar "t". Y ese modo de usarle –esa regularidad en su uso– constituirá la posesión de su significado. Así, lo que propongo es que consideremos al significado que se está definiendo implícitamente, no del modo que hasta ahora se había imaginado, como
>
> El significado que "t" necesitaría para que "D_t" sea verdadera.
>
> Sino como:
>
> El significado constituido al considerar "D_t" como verdadera.
>
> El modelo de definición implícita de la teoría de uso, no solamente ofrece una solución trivial al problema de la explicación, sino que evita todas las demás dificultades que aquejan al modelo estándar.
>
> (...) la existencia del significado está garantizada por la satisfacibilidad de la regularidad: la de considerar al enunciado "D_t" como verdadero; la unicidad del significado está garantizada por la unicidad de la regularidad básica de uso que gobierna el uso de "t"; la posesión del significado por "t" está garantizada por el

[95] Horwich 1997 p 432.

hecho de que usamos "t" de acuerdo con esa regularidad (considerar "D_t" como verdadera); y el hecho de que "t" adquiere significado, en virtud de ese uso, es explicado por la naturaleza misma del significado.[96]

La propuesta de Horwich evita los problemas del modelo estándar a costa de dos cosas: renunciar a la verdad[97] de los enunciados que constituyen la definición y renunciar a un proyecto de explicación semántica de la aprioricidad de estos mismos enunciados. Pero esto no debe preocupar al ficcionalista, pues es precisamente lo que buscaba. Hasta donde puede verse el modelo de uso parece oponer poca resistencia a los principios del ficcionalismo, de modo que el modelo de la teoría del uso de la definición implícita se nos presenta como un prospecto interesante.

Concluiremos esta sección proponiendo al modelo de uso de la definición implícita como el mecanismo que explica cuál es el mecanismo de definición y cómo se le da significado a los términos matemáticos en sus teorías. Enunciaremos la Tercera Tesis Semántica del Ficcionalismo de la siguiente manera:

Los términos primitivos de una teoría matemática M, adquieren su significado por definición implícita, según su modelo de uso. Es decir, adquieren su significado al suponer verdaderos los axiomas de una teoría que incluye términos primitivos (o si se prefiere todos los enunciados de la teoría M).[98]

4.2 Constitutividad

En sección tocaremos varios puntos. En primer lugar se discutirá si podemos atribuir una diferencia significativa a los enunciados matemáticos con base en la tesis de la definición implícita. Luego, en 4.2.1, concretaremos un rasgo de los enunciados matemáticos derivado de la tesis de la definición implícita: se expondrá la idea de constitutividad. Después, en 4.2.2 y 4.2.3, se expondrán y responderán dos objeciones a la noción de constitutividad. Concluiremos enunciando la Cuarta Tesis Semántica del Ficcionalismo: los enunciados de una teoría matemática son constitutivos del significado de sus términos.

---

[96] Horwich 1997 pp. 434-440.

[97] No es lo mismo que el enunciado "E" sea verdadero a que el enunciado "E" pueda suponerse verdadero. Horwich sólo nos solicita esto último. La diferencia es la misma que hay entre una teoría verdadera y una teoría consistente o lógicamente satisfacible.

[98] La definición implícita podría usarse para proponer una definición alternativa de la idea de que las matemáticas son verdaderas de acuerdo con las matemáticas estándar. Suponiendo significados estándar en lugar de teorías estándar. Pero por el momento las traeremos sólo como tesis compatibles

Argumentaremos que los enunciados de las matemáticas son constitutivos del significado de sus propios términos, y que el hecho de ser constitutivo del significado es una propiedad semántica legítima. Llamaremos tesis de la constitutividad a la afirmación de que los enunciados de una teoría matemática T definen o constituyen, en conjunto, el significado de los términos primitivos[99] de T.

La propiedad de la constitutividad será resultado de un esfuerzo por poner la discusión de la semántica de las matemáticas en función de propiedades de enunciados, para asemejarla a la discusión de la analiticidad. Será mucho más fácil comparar los hechos semánticos de las matemáticas y contrastarlos con los supuestos de la analiticidad si expresamos ambos bajo una forma básica compatible. La analiticidad es una propiedad que se atribuye a una clase específica de enunciados, de modo que será conveniente extraer de nuestras tesis semánticas alguna propiedad que podamos atribuir también a una clase específica de enunciados: Hasta ahora solamente hemos tratado con tesis acerca del significado de las matemáticas, todavía no poseemos una propiedad peculiar de los enunciados matemáticos que podamos atribuirles como resultado de estas. Usaremos la tesis de la definición implícita para señalar un rasgo específico de los enunciados matemáticos, les atribuiremos la propiedad de ser constitutivos de sus primitivos.

El modelo de uso de la definición implícita nos dice que lo único que precisamos para asegurar que existe un significado para "t" es que podamos suponer verdadero a "D_t"[100]. De la tesis de la definición implícita extraeremos un rasgo peculiar en los enunciados "E" que participan en la definición de "t". Ese rasgo es precisamente el participar en la definición, "E" posee el rasgo particular de ser parte constituyente de "D_t". Si estamos en lo correcto, rasgo es la base para postular la propiedad de la constitutividad.

A primera vista pareciera que el movimiento que acabamos de hacer es demasiado simple. La participación en la definición de "t" no parece constituir un rasgo lo suficientemente relevante como para caracterizar sustantivamente una clase de enunciados. Alguien puede objetarnos que figurar en una definición implícita no es un rasgo distintivo que exprese cierta peculiaridad interesante sino que, por el contrario, tal hecho es

[99] Un término primitivo es un término irreducible por definición o simplemente un término "indefinido" explícitamente.
[100] Para ciertos casos podemos tomar a "D_t" como una clase de enunciados que conforman una teoría, o como un conjunto de esquemas axiomáticos para la teoría, en cualquier caso estos casos especiales no afectan la siguiente discusión.

totalmente arbitrario. Podríamos establecer una variedad de términos arbitrarios que fuesen definidos por enunciados igualmente arbitrarios, y proceder así indefinidamente.

Aquí sostendremos que al menos para el caso de los enunciados matemáticos, el aparecer en una definición implícita no es un hecho arbitrario. Conceder la arbitrariedad en las definiciones matemáticas nos pondría ante un escenario matemático plagado de infinidad de términos cuyo significado sería asignado por sendas definiciones, hechas de enunciados arbitrarios. Este panorama no coincide en lo absoluto con el modo en que acontecen las definiciones de términos en matemáticas. La práctica matemática se nos presenta como una actividad compleja y llena de reglas. Si bien las reglas pueden ser arbitrarias, una vez establecidas y aceptadas no podemos decidir arbitrariamente si las seguimos o no, debemos apegarnos a ellas. Así que esas reglas hacen difícil el proferir afirmaciones arbitrarias. Es muy razonable esperar que entre las cosas que hacen complejas a las matemáticas figura el hecho de que no toleran la definición arbitraria de sus términos. Recordemos que Russell también creía que había algo peculiar que distinguía a las proposiciones lógico-matemáticas del resto de las posibles formulaciones proposicionales.

Entonces, el hecho de figurar en alguna supuesta definición del término matemático "t", debe poder legitimarse ante la complejidad inherente a la disciplina de las matemáticas. El hecho de que un enunciado figure, arbitrariamente, en la supuesta definición de un término, no es estrictamente el hecho que se constituye en un rasgo distintivo de los enunciados matemáticos, pues cualquier enunciado podría jugar ese papel.

Supongamos que estamos interesados en un primitivo matemático "t". De entre todos los enunciados posibles de un lenguaje L, sólo algunos tendrán la particularidad de aparecer en una definición "D_t" que tentativamente definiría el significado de "t". Y de entre todos posibles enunciados "D_t", solamente algunos son parte de las teorías matemáticas. Sólo estos últimos serán definiciones de los términos matemáticos, es decir, definiciones que de hecho establecen el significado de "t". A estas les llamaremos definiciones legítimas

Es el hecho de figurar en una definición que de hecho determina el significado de un primitivo matemático "t", el hecho de figurar en una definición legítima, lo que constituye un rasgo distintivo de los enunciados matemáticos. En otras palabras, es sólo la relación de los enunciados de una teoría matemática con las definiciones legítimas de los términos de esa misma teoría lo que distingue, de entre todas las posibles formaciones enunciativas, a ciertos enunciados del lenguaje como peculiarmente matemáticos. Todos los enunciados matemáticos serán parte de alguna definición implícita de un primitivo matemático; pero no cualquier enunciado es parte de esas definiciones. A esta propiedad nos referimos cuando pensamos que hay un rasgo particular de los enunciados matemáticos.

Entonces, debe quedar claro que si el hecho de que un enunciado "E" figure en una definición de términos matemáticos ha de constituirse en una característica sustancial y distintiva de "E"; debemos exigir que "E" figure en la legítima definición de términos primitivos (como "∈" por ejemplo), y que su papel en la definición no sea arbitrario. Trataremos de aclarar esta exigencia con un ejemplo.

Pensemos en la teoría de conjuntos que fue axiomatizada por Russell, que en adelante llamaremos axiomatización de Russell[101] o sólo AR. La relación de pertenencia "∈", que figura en el conjunto de axiomas AR es un término primitivo. Los axiomas y teoremas de la teoría son enunciados que hablan de conjuntos y de sus propiedades. La definición implícita nos explica cómo se fija el significado del término "∈" en los axiomas AR: consideramos que los enunciados en los que participa "∈" son verdaderos. De este modo los axiomas AR deberían determinar un uso regular para el término "∈": la regularidad involucrada en el uso sistemático de los axiomas AR. Ahora bien, sabemos que el uso de los axiomas AR nos conducirá a la afirmación de un enunciado y su negación y sabemos, entonces, que podremos derivar cualquier enunciado; en resumen, sabemos que AR es inconsistente. La inconsistencia de AR representa un problema lo suficientemente grave para los matemáticos como para conducirlos a búsqueda de mejores axiomatizaciones para la teoría de conjuntos. En general una teoría inconsistente es inaceptable para las matemáticas porque la inconsistencia es un problema para cualquier teoría inteligible[102]. Pero en este contexto, centrado sobre el problema de la definición de términos matemáticos, la inconsistencia también es un problema para el significado de sus términos: si podemos derivar cualquier cosa de AR, no existe ningún significado que le podamos dar a "∈" bajo el cual AR pueda considerarse como una teoría verdadera (este es precisamente el problema de la existencia del significado en la definición implícita).

[101] El Doctor Silvio M. Pinto ha llamado nuestra atención acerca de que debemos hacer justicia a Russell aclarando que la teoría de conjuntos a la que harems referencia no es de Russell. Russell encontró, gracias en parte a su clara axiomatización, que la teoría era inconsistente. Y en "Principia Mathematica" propone, en lugar de esta, su teoria de clases, la cual es consistente.

[102] véase cap. 1 secc. 3.

En general la inconsistencia del conjunto de enunciados que componen una definición implícita impide que dichos enunciados le den significado a sus términos. Será oportuno aclarar aquí cuál es la dificultad. Una teoría inconsistente no puede ser verdadera, porque incluye la negación de muchos enunciados verdaderos. Eso explica por qué no hay un significado para "t" bajo el modelo estándar de definición implícita: no hay verdad posible para "D_t", por tanto, no hay significado para "t"[103]. Pero el modelo de uso no necesita que nuestros enunciados sean verdaderos. Ya que la verdad de los enunciados no es el obstáculo, debemos dar otra razón para asegurar que la inconsistencia de un conjunto de enunciados es un obstáculo para que dichos enunciados funcionen como una definición implícita. Horwich ofrece una explicación que por desgracia incluye presupuestos lógicos; nosotros ofreceremos una alternativa que no recurra a la idea misma de consistencia.

Presentemos primero la explicación de Horwich[104]:

> De acuerdo con la teoría de uso del significado todo lo que se necesita hacer para mostrar que un conjunto dado de presuntas regularidades de uso constituyen un significado posible, es mostrar que esas regularidades pueden ser satisfechas –es decir, mostrar que dichas regularidades caracterizan un posible uso. Escribir un conjunto de presuntas regularidades es una cosa y otra cosa que sea lógicamente posible satisfacerlas; y una definición implícita puede ser exitosa sólo si especifica una regularidad que pueda ser satisfecha.[105]

Según Horwich, una definición implícita es exitosa solamente si es lógicamente satisfacible; aunque el no aclara a que se refiere con esto, parece referirse a que es posible usar las reglas sin violar los principios de la lógica. En esta explicación está implícita la idea de que todas las regularidades de uso son regularidades lógicas. Si bien ésta idea no es descabellada, tampoco es irreprochable. Para nuestro problema la respuesta de Horwich es insatisfactoria porque simplemente toma a la *posibilidad lógica* como una condición dada. De modo que si preguntamos ¿por qué la inconsistencia es un obstáculo para la definición implícita? Horwich nos respondería que la inconsistencia es un obstáculo para la *satisfacción lógica* de una regularidad. Pero alguien atento podría advertirnos que la idea de

[103] véase capítulo 1 sección 3.
[104] Horwich 1997 p. 428.
[105] According to the use theory of meaning all that needs to be done to show that a given set of alleged regularities of use constitutes a possible meaning is to show that those regularities *can* be satisfied -that is, to show that they characterize a *possible* use. It is one thing to write down an alleged set of regularities, and another thing for it to be ***logically possible*** that they be satisfied; and an implicit definition can be successsful only if it specifies a regularity that can be satisfied.

satisfacción lógica está estrechamente vinculada con la idea de consistencia y que la respuesta de Horwich es en cierto sentido circular. Pues satisfacción lógica es seguir reglas de acuerdo con la lógica, y eso es seguir reglas que sean consistentes. De modo que su respuesta a la pregunta de por qué la inconsistencia es un obstáculo, es simplemente que las reglas son inconsistentes; pero esta respuesta no nos aclara nada. En la respuesta de Horwich se pasa por alto que preguntar ¿por qué la inconsistencia es un obstáculo para la definición implícita? es también preguntar ¿por qué la insatisfacibilidad lógica es un obstáculo para la definición implícita?

Para evitar esta dificultad presentaremos una respuesta diferente: la inconsistencia es un obstáculo para la definición implícita porque una definición inconsistente no puede diferenciarse de una ausencia de regularidades (y esto último no es una definición).

Lo que proponemos es simplemente que, en el contexto de la producción de teorías y significados, los resultados de una conducta que sigue reglas inconsistentes, por un lado, y los resultados de una conducta que no se ajusta a ninguna regla, por el otro, son indistinguibles entre sí. Y ya que la única evidencia que tenemos para distinguir a una teoría de otra es precisamente el contenido enunciativo de las teorías, podemos suponer que una teoría inconsistente y una teoría resultado de la ausencia de reglas son similares entre sí. De este modo la regularidad de uso que subyace a la afirmación de un conjunto inconsistente de enunciados es similar a la regularidad de uso que subyace a una conducta lingüística sin regulación; una conducta errática y arbitraria. Si consideramos que una conducta errática no determina una regularidad de uso para sus palabras y términos (porque su papel es arbitrario), entonces consideraremos que tampoco lo hace un conjunto inconsistente de enunciados.

Por ejemplo, supongamos, primero, que un sujeto S se comporta respecto de los enunciados que contienen al termino "t", sin restricción alguna, es decir, sin reglas que ajusten o guíen su conducta lingüística respecto de "t". En esta situación resultará que S puede afirmar cualquier enunciado que contenga a "t", y de hecho a cualquier enunciado que esté a su disposición. Pensemos en la "producción teórica" de S; es decir, en la teoría A constituida por los enunciados afirmados por S. La teoría resultante de una conducta sin restricciones para la elección y manipulación de enunciados es una teoría en la que puede "derivarse" cualquier enunciado, incluyendo un enunciado "E" y su negación "no E", porque lo único necesario para "derivarlos" es que se encuentren a disposición de S.

Ahora supongamos un conjunto de postulados D que contienen a "t" (y que tentativamente definirían el significado de "t"). Supongamos también que S está dispuesto a reformarse y a ajustar su conducta a las reglas que le dictemos. Le decimos que simplemente respete la lógica de primer orden y que trate a los postulados D como si fueran verdaderos. Entonces S usará el término "t" conforme a lo estipulado por D. Si el conjunto de enunciados D es inconsistente, resultará que S obtendrá una teoría B donde es posible derivar cualquier enunciado que contenga "t", y de hecho cualquier declaración enunciativa incluyendo a un enunciado "E" y su negación "no E".

Comparando los dos anteriores casos podemos ver que no podemos distinguir A de B. Es decir, que los resultados (la producción teórica) de regular nuestra conducta lingüística respecto a "t" conforme a lo estipulado por los postulados inconsistentes D, son indistinguibles de los resultados que se obtienen en ausencia de reglas de uso para "t". Nos parece bastante claro que si la teoría resultante de una conducta sin regulación es indistinguible de la teoría determinada por un conjunto inconsistente de postulados, entonces el uso de un conjunto de postulados inconsistentes D, es indistinguible de un uso carente de regularidades. Es muy trivial afirmar que la ausencia de regularidades de uso no tiene detrás regularidades de uso. Pero como no podemos distinguir el uso sin regularidades del uso inconsistente, entonces es razonable pensar que las teorías inconsistentes tampoco determinan una regularidad de uso. Esto esclarece por qué la inconsistencia impide la definición implícita.

Una vez aclarado este asunto, regresemos a la discusión de las propiedades de los enunciados matemáticos.

Bajo el modelo de uso AR no determina un significado para "$\in$" porque el derivar "$a\in B$" y su negación "$-a\in B$" de AR, nos muestra que suponer verdaderos esos axiomas nos conduce al mismo resultado que obtendríamos si nos condujéramos desordenadamente, suponiendo verdadero cualquier enunciado, incluso enunciados que se contradicen entre sí. Dado que el tratar a los axiomas que conforman AR como verdaderos conduce a una situación equivalente a un comportamiento sin regularidades de uso para sus términos, AR no es un caso legítimo de definición del término "$\in$", puesto que dichos axiomas no determinan una regularidad de uso.

Al incluir un término indefinido en cualquier conjunto de enunciados y aplicar la estrategia de definición implícita, no necesariamente tendremos como resultado la definición del término; pues algunos conjuntos de enunciados (particularmente los inconsistentes) no determinan un uso regular de nuestros términos.

En vista esto, concluiremos que el figurar como "enunciado definidor" dentro de una legítima definición no es un hecho arbitrario. Hay conjuntos de enunciados que establecen el significado de sus términos. Pero hay conjuntos de enunciados que no pueden tomarse como definiciones implícitas legítimas y que no pueden dar significado a sus términos. Desde el punto de vista de la mecánica de la definición implícita es razonable afirmar que los enunciados matemáticos participan en definiciones implícitas legítimas de los términos matemáticos y que esto solamente es lo que constituye un rasgo distintivo.

4.2.1 La constitutividad como propiedad semántica

En esta sección introduciremos la propiedad de la constitutividad y veremos que podemos usarla como un rasgo sustantivo de los enunciados matemáticos.

De entre todos los enunciados que incluyen un término matemático primitivo "t", solamente algunos forman parte de la definición legítima de dicho término, y el hecho de ser partícipe de la definición legítima constituye una cualidad peculiar de esos enunciados. Llamaremos a esta cualidad, la propiedad de ser constitutivo del significado de "t".

Por ejemplo, supongamos que queremos definir el término "t" usando los enunciados "A_t" y "B_t", que son enunciados que incluyen al término "t". La definición implícita nos dice cómo se fija su significado: suponemos verdaderos a los enunciados "A_t" y "B_t".

Si la definición implícita tiene éxito, la afirmación de los enunciados "A_t" y "B_t" (o simplemente " A_t y B_t ") definen el significado de "t". Entonces diremos que los enunciados "A_t" y "B_t" son constitutivos del significado de "t". En general el enunciado "E" es constitutivo del significado de un término "t" si forma parte del conjunto de enunciados "D_t" que legítimamente definen implícitamente a "t" o, en otras palabras, si "E" es un definidor implícito legítimo de "t".

Como se ilustró en el caso de los axiomas AR, no todas las supuestas definiciones son exitosas, de allí que no todos los enunciados son constitutivos del significado de algún término. Pensemos en todos los posibles enunciados que involucran un cierto término "t".

De entre ellos, hay una clase particular de enunciados que son relevantes para una teoría matemática T que involucra en sus enunciados al término "t". Esta clase la forman los enunciados que definen "t" en T. (esta clase la forman no sólo son los axiomas de T, sino todos sus enunciados). Los enunciados que poseen a "t" y que no son constitutivos de "t" son, por ejemplo, las negaciones de los enunciados que conforman T. Entonces hay una diferencia entre los enunciados que participan en la definición de "t" y lo que no lo hacen. Los primeros son constitutivos del significado de "t". Podremos afirmar que hay una diferencia sustantiva entre los enunciados que son constitutivos y los que no lo son, sólo si podemos afirmar que la propiedad de la constitutividad tiene un contenido sustantivo, un contenido sustentado en la diferencia factual que existe entre la clase de enunciados que definen "t" y la clase de los que no lo definen.

Aquí sostendremos que, para el caso de las matemáticas, hay enunciados que son constitutivos y que hay una diferencia sustancial entre los que son y no son constitutivos. A estas afirmaciones les llamaremos la tesis de la constitutividad, esta tesis la incorporaremos como la Cuarta Tesis Semántica del Ficcionalismo.

4.2.2 Objeciones a la constitutividad

Frente a la posición pro-constitutividad que defendemos, alguien podría replicarnos que la propiedad de la constitutividad es ilegítima como un rasgo semántico, arguyendo que a la noción misma de constitutividad no puede dársele un contenido sustancial que respalde su existencia. La anterior réplica genera dos objeciones[106]. La primera tiene que ver con el contenido factual de la propiedad: no existe algo como la propiedad de la constitutividad, simplemente porque no hay enunciados constitutivos, puesto que intentar dar significado a un término por definición implícita presupone que la definición es entendida desde el principio y, por tanto, ya tiene significado. La definición implícita sería innecesaria. La segunda objeción tiene que ver con la expresión de los principios que sustentan a la idea de constitutividad: no puede dársele sentido a la idea de constitutividad porque no podemos diferenciar sistemáticamente a los enunciados constitutivos de los no-constitutivos: no hay un criterio para reconocer con certeza a un enunciado constitutivo.

[106] inspiradas en Quine 1936 p.103, Quine 1954, Boghossian 1993, Boghossian 1996 y Block 1993.

4.2.2.1 Primera objeción: Inexistencia de enunciados constitutivos

En esta sección expondremos la primera objeción a la idea de constitutividad. Se nos objeta que la propiedad de ser constitutivo es ilegítima, porque no existen enunciados constitutivos. Como respuesta a esta dificultad, veremos que negar que hay enunciados constitutivos es negar la existencia de definiciones implícitas, pero la definición implícita es el único recurso para explicar el significado de los términos matemáticos primitivos. Así que negar la constitutividad es negarle el significado a las matemáticas, tesis que ya hemos rechazado.

Elaboraremos esta primera objeción: Se nos dice que no existen enunciados constitutivos. Pues para suponer verdaderos los enunciados que definirán al término "t" (nuestros enunciados constitutivos), necesitamos entender que es lo que dicen los enunciados, y para entender a cada enunciado necesitamos entender el término "t" que, según la estrategia de definición implícita, está en proceso de definirse. Así entonces el mecanismo mismo de definición implícita no tiene un papel en la atribución de un significado a "t", y eso nos deja frente a las siguientes opciones: o bien la definición implícita es impotente –y, por tanto, no tenemos razones para calificar a algún enunciado como constitutivo– o bien en los casos en que la definición es exitosa, el fenómeno de la significación opera por medios diferentes a la definición implícita.

Si la objeción es correcta, o bien no hay definiciones implícitas o bien el proceso dar significado siempre tiene detrás un proceso previo de interpretación de los enunciados.

Esta objeción conduce, entonces, a afirmar que solamente existen mecanismos de definición explícita. Es decir, que siempre es posible respaldar la definición del término solamente mediante interpretaciones del estilo:

(I): "E" es verdadero syss "E" significa P y es el caso que P.

Y que la razón de que "E" signifique P es alguna familiaridad con P.

Ahora bien, ¿es necesario aceptar esta idea? Ya nos hemos pronunciado al respecto[107], y la respuesta es no. Pero ahora que disponemos del modelo de uso podemos abundar.

El modelo de uso de definición implícita[108] no necesita que el enunciado sea interpretado de la forma (I). Pues sólo nos pide que podamos conducir nuestra conducta

[107] cap. 2 secc. 4.1.1 y 4.1.2.
[108] véase cap. 2 secc. 4.1.4.

lingüística de un determinado modo, estipulado por "E". Para este modelo la función semántica de los enunciados constitutivos no es hacer una descripción factual de alguna situación, sino simplemente describir una regularidad de uso para los términos involucrados en la definición. Dicho de otro modo, la función de los enunciados constitutivos no es especificar algo acerca de ésta o aquella situación relacionada con t, sino describir las reglas para el uso metódico del término "t".

El modelo de uso de definición implícita nos dice para que nuestra definición sea exitosa, bastará con mostrar que podemos usar nuestros enunciados constitutivos de manera regular[109]. Si hay una regularidad de uso para los enunciados constitutivos de "t", hay un significado para nuestro término "t". Los enunciados constitutivos, como hemos dicho, tienen la función de establecer las reglas de uso de "t". De modo que la pregunta acerca de la existencia de enunciados constitutivos puede entenderse como la pregunta acerca de cómo es que podemos seguir ciertas reglas, o cómo ajustamos nuestra conducta lingüística a ciertas regularidades. Al decírsenos que no hay procesos de definición implícita porque estos usan interpretaciones al estilo (I), se nos está diciendo que el hecho seguir las reglas de una definición implícita está supeditado a la interpretación previa de los enunciados "E" que expresan dichas reglas. Y que la interpretación es del tipo (I). Siendo así, nuestro objetor debería ofrecernos argumentos fuertes para aceptar que el hecho de poder seguir reglas involucra necesariamente interpretaciones previas al estilo (I).

Podemos encontrar ejemplos que muestran que nuestro objetor está equivocado. Es posible ajustar la conducta lingüística a ciertas regularidades estipuladas en "E" sin recurrir a interpretaciones que involucren una familiaridad previa con el significado de "E".

En disciplinas técnicas como la ingeniería es frecuente que se emita la recomendación de usar constantemente una teoría para entender su significado. Otro caso notable es la introducción de términos técnicos en ciencia. El significado de algunos de estos términos es incomprensible cuando se introducen por primera vez. Por ejemplo, es muy complicado comprender el significado técnico del término "quark" (no estamos hablado de su sentido genérico o de alguna metáfora didáctica como "especie de partícula elemental") cuando se nos expone a él por primera vez. La mejor forma de familiarizarse con su significado es familiarizándose con su papel dentro de la teoría de las partículas elementales en la física

[109] Horwich 1997 p.428.

contemporánea. Esto quiere decir que cualquiera puede utilizar apropiadamente el término "quark" ajustando su conducta verbal según lo estipulado por los enunciados de dicha teoría. En cierto sentido la mejor forma de entender el significado de "quark" es aprender a usar adecuadamente el término dentro de la teoría donde aparece. Este caso nos permite ver que los físicos pueden ajustar su conducta respecto de los enunciados de una teoría como si fuesen reglas, sin suponer una interpretación completa de los enunciados.

El modelo de uso de la definición implícita es una forma genérica que expresa el fenómeno de la significación en casos como los anteriores, pues lo único que requiere es que podamos ajustar nuestra conducta a la regularidad establecida por algún postulado "E".

4.2.2.2 Segunda objeción: Criterio de demarcación

La segunda objeción nos dice que es imposible establecer un criterio para distinguir a los enunciados constitutivos y por ello la constitutividad carece de sentido. Esta segunda objeción puede asumir dos formas que consignaremos como Forma 1 y Forma 2. La Forma 1 es otro tipo de escepticismo frente a la definición implícita. A ella responderemos de nuevo que ese escepticismo es la negación de ciertos hechos básicos de las matemáticas. La Forma 2 es más elaborada y en respuesta a esta segunda objeción veremos que para mostrar que la idea de constitutividad es vacía, no basta la ausencia de un criterio de demarcación.

Comencemos a elaborar la segunda objeción: Se nos dice que dado que la constitutividad es una propiedad que se le atribuye a ciertos enunciados con base en la tesis de la definición implícita y dado que se tiene una explicación de la mecánica con la que opera la definición implícita, es razonable exigir una explicación detallada de la supuesta constitutividad de aquellos enunciados a los que se les atribuye la propiedad. Esta explicación debe ofrecernos un criterio para discriminar a los enunciados constitutivos de todo el resto de los enunciados. Y este criterio sería una expresión del contenido de la propiedad de la constitutividad. Es decir que el carácter distintivo de la constitutividad debe expresarse bajo la forma de un criterio de separación. Pero –concluye la objeción– hay razones[110] para asegurar que aquel supuesto criterio no puede establecerse. Por lo tanto la idea de la constitutividad es o inútil o vacía. Ahora, hay dos formas que esta crítica puede tomar: en la primera, las mismas regularidades sintácticas de un lenguaje son motivo de

[110] En la próxima sección veremos que se trata del resultado de indecidibilidad de Gödel.

duda, la llamaremos Forma 1. La Forma 2 es más elegante y la trataremos en 4.2.2.2.2.

4.2.2.2.1 Forma 1 de la objeción: Holismo Extremo y Definición en Vacío

La forma 1 nos dice que en ausencia de un método para distinguir a los enunciados constitutivos, las únicas alternativas que nos restan son o bien suponer que en la definición de "t" no participa ningún enunciado, o bien que participan todos los enunciados. Responderemos a esta objeción mostrando que este problema puede reducirse al escepticismo ante la definición implícita.

Veamos de cerca la dificultad. Supongamos que "t" es un término cuyo significado queremos fijar por definición implícita. El significado de "t" se constituye al suponer verdaderos los enunciados adecuados que contienen a "t", por ejemplo: "A_t" y "B_t". Así, los enunciados "A_t" y "B_t" serían constitutivos del significado de "t".

La objeción cuestiona la idea de la constitutividad del siguiente modo:

"A_t" y "B_t" no son los únicos enunciados que contienen al término "t". Hay muchos otros enunciados que también incluyen a "t", por ejemplo "C_t" y "D_t" [111].

En estas circunstancias, no podemos distinguir *a priori* los enunciados que son constitutivos del significado de "t" de los que no lo son.

En ausencia de un criterio para demarcar entre definiciones constitutivas y no-constitutivas no disponemos de un criterio para elegir que enunciados participan en nuestra definición. De todos los posibles enunciados de un lenguaje L sólo algunos incluirán al término "t", el problema es que no tenemos un criterio para elegir de entre todos estos cuáles participan en la definición implícita del significado de "t". Ya que no sabemos cuáles enunciados elegir, una vez que comenzáramos a incluir enunciados en nuestra definición no tendríamos razón para excluir a algún enunciado mientras que incluimos a otros. Entonces la definición de "t" se llevará a cabo según alguna de estas dos alternativas: o bien todos los enunciados que incluyen a "t" son parte de la definición de "t" –llamaremos a esta estrategia Holismo Extremo[112]– o bien ningún enunciado es parte de la definición de "t" –llamaremos a esta estrategia Definición en Vacío.

Revisemos primero la estrategia de la Definición en Vacío. Para definir el significado de "t", el mecanismo de definición debe incluir algún modo de señalar a "t" como el

[111] Algunos de estos enunciados pueden ser incompatibles con "A_t" o "B_t" o ambos, por ejemplo, la negación de "A_t" o de "B_t".
[112] Esto sólo es una notación y no tiene que ver con la tesis del holismo del significado,aquí solo estamos tratando de definición implícita.

destinatario del significado. Pero si la definición no incluye ningún enunciado, el mecanismo no cuenta con ningún medio para señalar a algún término particular como el destinatario del significado, y tampoco cuenta con ninguna regularidad específica que engendre algún significado. De este modo la idea misma de definición no tiene sentido en la Definición en Vacío. En suma la Definición en Vacío nos conduce al escepticismo ante la definición implícita. Recordemos que lo que cuestionaba esta objeción no era la existencia de definiciones, sino la coherencia de la idea de constitutividad. Ya hemos visto que las definiciones de hecho existen. Por ello debemos rechazar la Definición en Vacío.

Revisemos ahora el Holismo Extremo. Este presume que en ausencia de un criterio para elegir sólo a algunos enunciados que incluyan a "t" de un determinado lenguaje para definir "t", todos los enunciados participarán en el proceso de definición. Este Holismo Extremo nos impedirá también llevar a cabo la definición implícita puesto que al suponer verdaderos a todos los enunciados que incluyen a "t" obtendríamos una definición inconsistente, pues deberíamos suponer verdadero a "A_t" y a su negación "no A_t". Podría decírsenos que "no A_t" no puede ser parte de la teoría porque ya lo es "A_t", pero si tenemos un criterio para determinar la teoría de la cual es parte, ese mismo criterio sería el criterio de constitutividad. El problema es precisamente que no tenemos dicho criterio.

Este Holismo Extremo implicaría que ni siquiera disponemos de discriminaciones sintácticas para distinguir a unos enunciados de otros; aunque en la práctica pensamos que de hecho podemos distinguir de entre todos los posibles enunciados algunos que forman, por ejemplo, una teoría matemática. Si aceptamos que podemos distinguir los enunciados de una teoría matemática hemos de rechazar la idea del Holismo Extremo (reiteramos que no debemos confundir esta objeción con la tesis del holismo del significado, pues aquí sólo nos ocupa el significado por definición implícita). El problema de la ausencia de un criterio de distinción no tiene que ponerse de forma tan extrema, puede en cambio apuntar hacia una dificultad más legítima bajo la Forma 2.

4.2.2.2.2 Forma 2 de la objeción: Criterio de Demarcación e Indecidibilidad

La Forma 2 de la segunda objeción tiene que ver con un holismo más sutil. Nos dice que el resultado de indecidibilidad de Gödel nos da una poderosa razón para sostener que es imposible presentar un criterio formal para distinguir y separar a ciertos conjuntos de enunciados basándose en el hecho de que sean constitutivos del significado de algún término (en adelante lo llamaremos un criterio de demarcación para la constitutividad). A esta objeción responderemos diciendo que para rechazar a la constitutividad como una propiedad legítima no basta con mostrar que no puede existir un criterio de demarcación, sino que también deben dársenos razones para admitir que la diferencia en cuanto a constitutividad debe necesariamente expresarse bajo la forma de un criterio de demarcación; además presentaremos dos razones para rechazar la idea de que la diferencia debe expresarse necesariamente como un criterio de demarcación.

Veamos, pues, la Forma 2: Se nos objeta que la ausencia de un criterio de demarcación para enunciados constitutivos, nos impide saber si los enunciados que constituyen realmente el significado de "t" son los enunciados "C_t" y "D_t" por ejemplo, en lugar de los enunciados "A_t" y "B_t". Tampoco podemos saber si acaso son los cuatro enunciados "A_t", "B_t", "C_t" y "D_t", en lugar de solamente "A_t" y "B_t" (esta es una forma moderada de holismo). El caso es que no podemos decir que un cierto subconjunto de enunciados que incluyen a "t" del lenguaje L es un verdadero conjunto de enunciados constitutivos de "t". En suma, la objeción ya no trata de criterios para escoger enunciados en un lenguaje, sino de criterios para preferir ciertos conjuntos de enunciados y discriminarlos del resto. La objeción afirma que de entre todos los subconjuntos de enunciados que incluyen a "t" que podemos formar en un lenguaje, no podemos decidir cuáles son constitutivos de "t". En otras palabras, concediendo que en un lenguaje podemos distinguir ciertas teorías (si por el momento pensamos que una teoría es un conjunto de enunciados), todavía no podemos decir cuáles de entre todas las posibles teorías que incluyen a "t" son constitutivas de su significado.

Podemos ejemplificar esta objeción en teoría de conjuntos. Para definir el término "$\in$" podemos usar distintos conjuntos de enunciados, uno de ellos es el conjunto de axiomas AR, otro los axiomas Zermelo-Fraenkel(en adelante sólo ZF).

Los axiomas AR difieren de los axiomas ZF. Sin embargo, ambos axiomas incluyen el término primitivo "$\in$", cuyo significado está dado por definición implícita. El significado de "$\in$" depende de los axiomas específicos que estemos afirmando y entonces –sigue la objeción– no podemos saber si en realidad AR y ZF significan cosas diferentes. No podemos saber cuál de estos conjuntos de axiomas define legítimamente a "$\in$" o si lo hace la unión de AR y ZF. Debido a esto no podemos saber si los axiomas difieren en aspectos tales que determinasen que el significado de "$\in$" en la teoría ZF sea de un modo que resulte en que los axiomas ZF signifiquen lo mismo que los axiomas AR. Para determinar el significado de "$\in$" necesitamos un criterio para determinar cuál de estos conjuntos de axiomas son constitutivos del significado de sus términos. Pero intentar ofrecer un criterio de demarcación para enunciados constitutivos reafirmará el escepticismo acerca de la constitutividad. Veamos el porqué.

Pensemos en la definición del término "$\in$" por AR. AR es inconsistente y no determinan una regularidad para "$\in$", por ello no determina su significado. En este caso hemos podido distinguir a los axiomas AR como no-constitutivos del significado de "$\in$". Ahora, determinar cuáles enunciados son constitutivos del significado de un término y cuáles no lo son implica que podemos determinar por lo menos cuáles enunciados no son constitutivos. Suponiendo que en el hecho de poder discriminar a los enunciados no-constitutivos se expresan ciertas características que deben estar presentes en un criterio general de distinción (que nos permita discriminar entre enunciados no-constitutivos y constitutivos), es razonable pensar que en la discriminación de ciertos enunciados no-constitutivos están las bases para el criterio de distinción que necesitamos.

Tratemos, entonces, de completar el criterio de demarcación. El modelo de uso nos dice que AR no determina un significado para "$\in$" porque no establece una regularidad de uso para "$\in$". Entonces, un criterio general de demarcación, debe incluir un criterio para determinar si hay o no alguna regularidad de uso para nuestro término, dados los enunciados en los que participa. Sabemos que una teoría inconsistente no determina una regularidad de uso para sus términos[113]. Como una teoría inconsistente no establece una regularidad de uso para sus enunciados, estos tampoco pueden ser constitutivos del significado de sus términos. Entonces, el hecho de que un conjunto de enunciados D sea constitutivo y otro conjunto E no lo sea, debería poder traducirse en el hecho de que D es consistente, mientras que E no lo es (pues esta es precisamente la mínima diferencia en la regularidad de uso que nos permite distinguir a AR como un conjunto de enunciados no-constitutivo). La diferencia entre conjuntos de enunciados consistentes e inconsistentes nos daría la base para establecer un criterio de demarcación. Nuestro criterio para discriminar a los enunciados constitutivos de los no-constitutivos deberá discriminar a los conjuntos de

[113] véase el Cap 2 secc 4.2 y Horwich 1997.

enunciados consistentes de los inconsistentes (pues sabemos que un conjunto inconsistente de enunciados no puede ser un conjunto de enunciados constitutivos del significado de sus términos). Si queremos saber si hay una regularidad de uso para "t", debemos poder asegurar que los enunciados en los que aparece "t" pueden usarse coherentemente. La consistencia de los enunciados que definen a "t" es un requisito para su constitutividad. Es aquí donde surge el mayor problema

El criterio de demarcación para la constitutividad debe incluir un criterio para determinar la consistencia de los enunciados partícipes en la definición, pero según sabemos por el trabajo de Gödel, no existe una prueba de consistencia para todo conjunto de enunciados. En este contexto eso quiere decir que no existe un criterio para determinar si cierto enunciado es o no constitutivo del significado de sus términos.

Aunque no haya un criterio formal de constitutividad todavía sabemos que la inconsistencia de un conjunto de enunciados implica que no es constitutivo. Pero el asunto que nos ocupa aquí es si hay enunciados constitutivos, y cómo sabemos cuáles son. No nos sirve de nada dar un criterio para decir que ciertos conjuntos de enunciados no son constitutivos, porque lo que se nos alega es que ninguno lo es. Si no hay enunciados constitutivos es trivial señalar a cualquier enunciado como no-constitutivo. Pareciera ser que el escepticismo hacia la constitutividad es, después de todo, muy sólido.

No tenemos un criterio de demarcación para determinar cuáles enunciados son constitutivos y por tanto –insiste la objeción– no podemos darle sustancia a la idea de que los enunciados matemáticos poseen la propiedad de ser constitutivos. El hecho de que no podemos explicitar un criterio de distinción es una expresión de que la propiedad de la constitutividad no tiene contenido.

Ahora debemos responder a esta objeción.

No tenemos ninguna razón para exigir que la noción de constitutividad deba expresarse como un criterio de demarcación entre conjuntos de enunciados constitutivos y no constitutivos. Pues la ausencia de un criterio formal para elegir enunciados constitutivos no implica la ausencia de una diferencia en cuanto a constitutividad y la ausencia de un criterio no implica que la idea de constitutividad no tenga sentido.

Ampliaremos un poco esta respuesta. Tenemos por un lado el hecho de que no existe un criterio formal de demarcación entre definiciones constitutivas y no constitutivas

Por otro lado tenemos un hecho acerca la existencia (o inexistencia) de una diferencia entre conjuntos de enunciados constitutivos y no-constitutivos. Pero que el que haya un criterio es una cosa, y que haya una diferencia es otra, no necesariamente son idénticas.

Por ejemplo. Si se nos pidiera separar los objetos que son rojos de los que no lo son, podríamos determinar un criterio para hacerlo. Sin embargo, ese criterio no es lo que constituye la diferencia que existe entre los objetos que son rojos y los que no lo son. Esa diferencia radica en la propiedad de ser rojo. La propiedad de ser rojo puede definirse como un hecho físico, por ejemplo reflejar ciertas longitudes de onda en el espectro electromagnético. Mientras que el criterio puede basarse en simples percepciones, que bien pueden ser sólo fenómenos psicológicos. Así, cualquier persona podría separar objetos rojos sin necesidad de saber nada de fisiología o de electromagnetismo. Nuestro criterio de separación no necesariamente es la propiedad. Análogamente, tal vez existe alguna conexión entre los hechos acerca del criterio de demarcación y los hechos acerca de la diferencia que hay entre las definiciones constitutivas y no-constitutivas, pero eso no quiere decir que criterio y diferencia sean la misma cosa.

El criterio de demarcación es simplemente la explicitación de un procedimiento mediante el cual escogemos a la definición o conjunto de enunciados C en un lenguaje y dejamos de lado el resto de las definiciones D, F, G,...,Z. La definición elegida C es precisamente el conjunto de enunciados constitutivos del significado de un término "t"; las definiciones que no fueron elegidas son conjuntos no-constitutivos de "t". Pero este procedimiento o mejor dicho, la expresión de este procedimiento es diferente al hecho de que exista una diferencia entre C y los demás conjuntos de enunciados D, F, G, ..., Z. La diferencia que hay entre ellos es que uno posee la propiedad de la constitutividad y los demás no la poseen. Que no exista un procedimiento formal para escoger a C no es lo mismo que no exista una diferencia entre C y D, F, G, ..., Z.

El ejemplo de separar objetos rojos muestra que la presencia de un criterio de demarcación no es necesariamente lo que constituye la diferencia en cuanto a la propiedad de ser rojo. También podemos ver que la ausencia de un criterio no implica la ausencia de una diferencia. Por ejemplo, no hay un criterio de demarcación para las teorías consistentes e inconsistentes, sin embargo podemos reconocer a una teoría inconsistente. Aquí se nos podría argumentar que, entonces, sí tenemos un criterio para elegir teorías inconsistentes;

pero debe recordarse que lo que esta en cuestión es la existencia de propiedades como la constitutividad o la consistencia. Si alguien alegase que la propiedad de ser consistente no tiene sentido porque no hay un criterio para determinar qué teorías son consistentes, el hecho de que le mostrásemos que algunas teorías no son inconsistentes, le resultaría trivial; pues lo que se pone en duda es la existencia de la consistencia, no de la no-consistencia. Aunque no tengamos un criterio de consistencia, pensamos que hay una diferencia entre las teorías que son consistentes y las que son inconsistentes, de otra forma no nos molestaríamos en buscar teorías que estén libres de contradicciones internas. Es razonable pensar que el criterio de demarcación no es lo que establece la diferencia entre enunciados constitutivos y no constitutivos, tal como un criterio de decidibilidad tampoco establece la diferencia entre teorías consistentes e inconsistentes. Además, no hay nada en la idea de la definición implícita que nos conduzca a la necesidad de un criterio de demarcación.

El caso de la consistencia muestra que una noción sustancial, como la de consistencia, no necesariamente involucra un criterio de demarcación con respecto a esta noción: No existe un criterio para determinar cuáles teorías son consistentes y a pesar de esto pensamos que la noción de consistencia es una noción sustancial con cierto contenido. Bien, pues no es descabellado pensar que la idea de constitutividad puede compartir la suerte de la idea de consistencia. Tenemos un par de razones, de las cuales nos ocuparemos en las siguientes secciones, para pensar que de hecho así ocurre. De este modo, la ausencia de un criterio no es una objeción fulminante en contra de la idea de que los enunciados matemáticos son constitutivos de sus términos.

4.2.2.2.3 Indeterminación del significado e indeterminación de los axiomas.

Presentemos la primera de las dos razones para optar por la constitutividad a pesar de la falta de un criterio de demarcación: Al admitir que el criterio necesariamente expresa la diferencia, estaríamos admitiendo que no podemos determinar qué conjunto de enunciados constituyen una teoría matemática o, de forma más simple, que los conjuntos de axiomas en matemáticas son indeterminados. Los matemáticos, sin embargo, responderían afirmando que hay conjuntos determinados de axiomas para sus teorías.

Si aceptásemos que la constitutividad debe necesariamente expresarse como un criterio de demarcación entre enunciados constitutivos y no-constitutivos entonces la ausencia del criterio pondría en evidencia que no hay diferencia substantiva entre los enunciados con base en la constitutividad del significado para un término. Como lo que se nos disputa no es la tesis de la definición implícita, podríamos decir entonces, que el conjunto de enunciados que participan en la definición implícita de "t", simplemente permanece indeterminado; pues no hay un hecho que determine si acaso hay enunciados constitutivos, o cuáles son estos. Ahora bien, si el conjunto de nuestros enunciados definidores no es un conjunto determinado, sucede que cualquier afirmación que hagamos acerca del significado de un conjunto de enunciados que incluyan al término "t" estará equivocada, porque nunca podríamos saber a que conjunto de verdades o de regularidades de uso atenernos. No podríamos decir que todos o que ninguno de los enunciados que contienen a "t" determinan su significado, ni tampoco que algún conjunto específico D de enunciados lo determina, porque cualquier conjunto concreto de enunciados D que propusiésemos sería en ese momento un conjunto determinado de enunciados. Así, el rechazo de la idea de constitutividad nos conduciría a afirmar que los axiomas que definen el significado en la teoría de conjuntos están indeterminados; nuestro objetor no nos dirá que hay ocasiones en las que nos equivocamos al elegir unos axiomas para la teoría, sino que siempre estaremos equivocados.

Está última afirmación, junto con la negación de la constitutividad, no puede ser defendida, pues ZF o AR son, después de todo, conjuntos determinados de axiomas.

4.2.2.2.4 Indecidibilidad e investigación en matemáticas.

Detallemos ahora la segunda razón pro-constitutividad: Sabemos que la consistencia es una propiedad necesaria para la verdad y valiosa para los matemáticos, y que no hay un método para determinar cuales axiomas son consistentes. No obstante, al hacer matemáticas suponemos que existe una diferencia entre los conjuntos de axiomas que se admiten como teorías matemáticas y los que se rechazan. La práctica de las matemáticas apoya la idea de que existe una diferencia sustantiva aún en la ausencia de un criterio de separación. Lo que ocurre es simplemente que la diferencia no radica en el criterio.

Abundemos un poco sobre el tema. La exigencia de expresar la constitutividad en un criterio de demarcación se traduce en la exigencia de un método de trabajo para las matemáticas que nos asegure la decidibilidad de interrogantes acerca de la consistencia de las teorías matemáticas. Como otras disciplinas de investigación, el quehacer matemático es un trabajo en el cual se cometen errores. Podemos suponer que una teoría matemática es consistente y descubrir después que no lo es.

Presentar un criterio riguroso de distinción entre enunciados constitutivos y no constitutivos implicaría presentar un método para distinguir cuáles conjuntos de enunciados son consistentes. Esto a su vez constituiría un método de trabajo siempre decidible para las matemáticas. Dicho método nos permitiría abolir definitivamente los errores en el trabajo de los matemáticos (por lo menos en lo concerniente a la consistencia de las teorías). Por supuesto que no disponemos de un método de trabajo siempre decidible y, según Gödel, no podremos disponer nunca de él. Ya vimos que un criterio de constitutividad debe permitirnos determinar si los enunciados de la definición son consistentes, pues esto es un requisito para la existencia de regularidades de uso. Las razones para rechazar un criterio formal de distinción para la constitutividad son las mismas que para rechazar un criterio general de consistencia. Entonces debemos pensar que así como la ausencia de un criterio de distinción nos indica que no hay una diferencia entre los enunciados que son constitutivos y los que no lo son, la indecidibilidad nos indica que tampoco hay una diferencia entre los conjuntos de enunciados matemáticos que son consistentes y los que no lo son.

Veamos un ejemplo. Pensemos en ZF y en AR. No podríamos distinguir a los axiomas ZF –que suponemos consistentes– de los AR –que sabemos son inconsistentes, porque ambos usan los mismos términos primitivos y no sabemos si los enunciados de las teorías son constitutivos ni si son consistentes. Sin embargo, creemos que ZF es consistente y que hay una diferencia entre este y AR. Por supuesto podemos estar equivocados. Pero aún si estamos equivocados, eso no mostraría que no hay diferencia entre el hecho de que ZF sea consistente y el hecho de que sea inconsistente. De modo semejante alguien podría creer que AR es consistente, pero un matemático podría hacerle ver su error. Es precisamente la diferencia que existe entre el hecho de que AR sea consistente y el hecho de que sea inconsistente lo que nos permite decir que estamos cometiendo un error al suponer AR consistente cuando en realidad no lo es. El hecho de que un matemático nos haga ver nuestro error muestra que él cree que hay una diferencia entre ser consistente y ser inconsistente. Si no existiese esta diferencia no habría error que él pudiera señalarnos.

Veámoslo así: No podemos determinar la consistencia de una teoría, pero podemos reconocer la aparición de enunciados mutuamente contradictorios. Entonces sí podemos reconocer a una teoría inconsistente. De manera similar podemos reconocer un conjunto no-constitutivo de axiomas. La labor de los matemáticos es proponer teorías interesantes que suponen consistentes, pero no puede saberse si lo son o si en el futuro se descubrirá alguna contradicción. El trabajo productivo en matemáticas se aventura a postular teorías de las cuales no podemos asegurar que son consistentes ni significativas. No podemos asegurar que todas nuestras teorías matemáticas sean consistentes o significativas, pero sabemos que es posible descubrir que en ocasiones nos equivocamos. En ocasiones una teoría que suponíamos consistente en realidad no lo es, y a veces el significado que le atribuíamos a un primitivo en realidad no existe. Si los matemáticos tolerasen la exigencia de un criterio de distinción para la constitutividad, estarían descalificando sus propias prácticas y métodos. Al menos en lo que concierne a la forma en como reconoce sus propios errores. Porque es un hecho que pueden cometerse errores acerca de la consistencia de las teorías, pero también es un hecho que podemos reconocer estos errores.

Aunque no podemos ofrecer una réplica rotunda a la objeción contra la constitutividad, aceptarla nos conduciría a contradecir la práctica matemática misma. Partiendo de la estrategia de la definición implícita podemos, entonces, determinar que hay un hecho semántico sustantivo que expresamos como la propiedad de la constitutividad del significado y que esta propiedad distingue a una clase particular de enunciados. Así como en un lenguaje suponíamos que había ciertos enunciados peculiares, que denominábamos analíticos, entre todos los posibles conjuntos de enunciados algunos son constitutivos del significado de los términos matemáticos.

La Tesis de la Constitutividad es la *Cuarta Tesis Semántica* que le atribuiremos al ficcionalismo. Con estas cuarta tesis consideramos establecido el panorama teórico para acometer nuestro proyecto de explicación. Concluiremos aquí este capítulo y retomaremos la explicación de la semejanza analítico matemático en el siguiente.

CAPÍTULO 3. SEMEJANZA ENTRE ANALITICIDAD Y MATEMÁTICAS

En este capítulo aclararemos la semejanza entre enunciados analíticos y matemáticos. Nombraremos a nuestra elucidación la *tesis de similaridad analítico-matemática*, que afirmar que en los enunciados matemáticos existe una asociación entre la bondad teórica de las matemáticas –la consistencia– y su significado, de manera semejante a la relación que existe entre la verdad –que es su bondad teórica– y su significado en los enunciados analíticos. Para confirmarla recurriremos a los resultados que hemos desarrollados a lo largo de los capítulos anteriores; en cierto sentido este capítulo se encargará de poner las piezas en su lugar para ver en un cuadro completo el resultado de este trabajo.

1. Resumen de la explicación de la pseudo-analiticidad

Reiteraremos aquí, por comodidad, lo establecido en las primeras secciones del capítulo 2:

Los enunciados matemáticos son pseudo-analíticos si el suponer que son analíticos representa una buena explicación de ciertos hechos relevantes. Dichos hechos involucran el papel filosófico de la analiticidad de las matemáticas. Estos son: Primero, en los enunciados matemáticos parece haber una asociación entre significado y verdad. Segundo, sostener la existencia de enunciados analíticos representa una posición filosóficamente ventajosa, pues nos permite tener una idea coherente del conocimiento y la naturaleza de las matemáticas.

Lo que argumentaremos es que el primer hecho no presupone analiticidad, sino sólo cierta semejanza con esta. Y esta se explica porque en los enunciados matemáticos hay una asociación entre el significado y la consistencia. Presentamos, entonces, la tesis de que en efecto hay sólo una semejanza entre los enunciados analíticos y los matemáticos.

2. Similaridad entre enunciados analíticos y matemáticos

En esta sección explicaremos la semejanza entre matemáticas y analiticidad.

Primero introduciremos una nomenclatura que será de utilidad. Todos los enunciados susceptibles de ser verdaderos o falsos presentan una asociación entre su significado y su verdad, pero solamente los analíticos presentan una asociación entre su significado y su verdad de tal modo que los simples hechos acerca del significado del enunciado explican su verdad, sin recurrir a hechos acerca del mundo. Para todo enunciado con contenido factual hay siempre una asociación entre su significado y su verdad, pero si la verdad del enunciado puede explicarse por medios que apelan solamente a hechos acerca de su significado diremos que el enunciado presenta una "asociación que se explica semánticamente" entre su significado y su verdad. Usaremos el término "asociación semántica" para referirnos a la relación entre el significado y la verdad que existe en un enunciado analítico.

Ahora sigamos con la semejanza entre los enunciados matemáticos y los analíticos. Tanto los enunciados analíticos como los matemáticos comparten un rasgo importante: en ambos casos existe una asociación semántica entre las virtudes teóricas[114] que una comunidad le atribuye a un enunciado A y su significado. Es decir, que la relación entre significado y bondades teóricas es de una índole tal que puede ser explicada recurriendo solamente a los hechos que determinan el significado. Los enunciados analíticos son enunciados cuya verdad estaría determinada solamente por su significado, mientras que los enunciados matemáticos son enunciados que conforman teorías cuya consistencia es determinada solamente por su significado[115]. Así es que para estos enunciados el hecho de poseer significado no es solamente un hecho semántico[116], sino que representa también una ventaja, epistemológica en el caso de la analiticidad y metalógica en el de las matemáticas[117].

Las anteriores afirmaciones pueden parecer problemáticas a simple vista. A diferencia de la verdad, la consistencia puede entenderse como una propiedad sintáctica, sin relación con el significado. Field prefiere tomar a la consistencia como una noción primitiva de la lógica[118] y esa idea es compatible con el trabajo que aquí desarrollamos. Hasta ahora no ha sido necesario interpretar a la consistencia como una propiedad semántica o sintáctica, pues

[114] Las virtudes teóricas son las virtudes que se le atribuyen a una teoría, como la verdad, la consistencia, la simplicidad o la elegancia.
[115] En el capítulo 1 sección 3 se ha justificado la elección de la consistencia.
[116] Debe insistirse en que la importancia de esta peculiaridad de los enunciados, no consiste solamente en que hay una relación entre propiedades lingüísticas, sino que una de esas propiedades tiene un *valor extra-lingüístico*. La verdad de sus teorías, en el caso de los filósofos y la consistencia en el de los matemáticos, son relevantes porque tienen una particular importancia extra-semántica *para las comunidades* que poseen dichas teorías, de otro modo la idea de analiticidad no sería relevante salvo como una curiosidad de los filósofos del lenguaje.
[117] Si recordamos que en el ficcionalismo el conocimiento matemático substantivo es conocimiento lógico, podríamos sostener una tesis todavía más fuerte al afirmar que la semejanza se explica porque ambos tipos de enunciados presentan una asociación puramente semántica entre significado y valor epistemologico, pero dejaremos la tesis tal como está.
[118] Field 1989, pp 106-115.

el papel que nos importa es sólo como un valor para los matemáticos o como un requisito para la constitutividad. Ninguno de estos ha implicado una interpretación semántica o sintáctica de la consistencia y tampoco lo necesitaremos en lo que resta del trabajo. El propósito de las siguientes secciones es aclarar con más detalle cuál es la relación entre consistencia y significado.

2.1 La tesis de la similaridad analítico-matemática

Presentaremos la tesis de similaridad analítico-matemática, que retoma nuestra explicación de la percepción de que las matemáticas parecen analíticas.

Recordemos que, en el capítulo 1 sección 3, definimos una bondad teórica como una propiedad de ciertas teorías que se considera valiosa para la comunidad que las posee.

Presentemos ahora nuestra hipótesis. Los enunciados analíticos y los matemáticos comparten el siguiente rasgo: existe una asociación semántica entre la bondad teórica principal que una comunidad C le atribuye a un enunciado A y el significado de A. También podríamos decir que: Tanto los enunciados analíticos como los matemáticos exhiben una asociación semántica entre la posesión de una bondad teórica primaria y la posesión de su significado. A la anterior aseveración le llamaremos la Tesis de Similaridad Analítico-Matemática.

La tesis de similaridad no implica que exista en realidad una clase de enunciados que sean verdaderos analíticamente, ni que los enunciados matemáticos son especimenes de esta clase de enunciados. Por el contrario lo que tratamos de decir es que no es necesario suponer la analiticidad de los enunciados matemáticos para entender la similaridad.

De los enunciados constitutivos del significado de las matemáticas podremos decir, en la siguiente sección, que conforman conjuntos de enunciados que son "consistentes en virtud solamente de su significado". Esta noción es parecida a la de analiticidad (verdadero en virtud sólo de su significado) si la verdad y la consistencia se consideran como bondades y no sólo como meras propiedades de las teorías; es importante exigir esto último porque es la forma en que introducimos la función filosófica de la analiticidad. El ficcionalismo no puede reconciliarse con la idea de que las teorías matemáticas son teorías verdaderas o analíticas pero puede tolerar, en cambio, la idea de que son consistentes en razón solamente de su significado. De este modo el ficcionalismo (y solamente el ficcionalismo o posiciones afines) puede explicar la aparente analiticidad de las matemáticas.

Resta por mostrar que la tesis de similaridad es razonablemente correcta. Para ello es preciso comprobar en primer lugar que en la analiticidad hay una asociación entre el significado y la verdad como bondad teórica. En segundo lugar que ocurre algo semejante con los enunciados matemáticos, pero siendo la consistencia la bondad teórica que está asociada con el significado. Nos ocuparemos de todo eso enseguida.

2.2 La comprobación de la tesis de similaridad

En esta sección veremos que la analiticidad cumple la tesis de similaridad. Veremos también que debemos establecer la asociación significado-consistencia para el caso de las matemáticas, lo cual haremos en su propia sección.

Primero veremos que la analiticidad es una asociación (explicable en función sólo del significado) entre significado y la bondad teórica de la verdad. Es decir, indagaremos si se apega a lo descrito por la tesis de similaridad. La factibilidad de la analiticidad no es el tema en discusión, así que no nos interesa pronunciarnos a favor de una explicación específica de los enunciados analíticos. Pero tampoco nos interesa excluir las ideas o nociones particulares acerca de qué son los enunciados analíticos. Evitaremos comparar las peculiaridades de las matemáticas con las diferentes ideas de analiticidad caso por caso y sólo nos concentraremos en sus rasgos relevantes, explicados en nuestra caracterización general de la analiticidad presentada en el capítulo 1 sección 5. La caracterización general de analiticidad nos dice que hay una relación de explicación entre los hechos que determinan el significado de cierto enunciado A y los que determinan la verdad de A.

En el capítulo 1 sección 3 establecimos que la verdad es la principal bondad teórica de las teorías que poseen los científicos realistas y los matemáticos platonistas. Si A es un enunciado analítico bajo la concepción de nuestra caracterización general de analiticidad entonces, para las comunidades antes citadas, existe una asociación que puede explicarse en términos puramente semánticos entre el significado de A y la bondad teórica primaria que se le atribuye a A. Es decir, cumple con lo que dice la tesis de similaridad.

En el caso de la analiticidad nos encontramos ante una asociación semántica entre significado y verdad. Si bien significado y verdad son también dos hechos semánticos, la verdad del enunciado es al mismo tiempo un valor, una virtud que se busca en las teorías.

Esa es una de las razones por las cuales la analiticidad cobra relevancia filosófica. Antes de pasar de lleno a comprobar la tesis de similaridad para los enunciados matemáticos debemos aclarar un punto crucial a este respecto: La posición que ocupen la verdad y la consistencia en el sistema de valores es de fundamental importancia para establecer nuestra tesis de similaridad. Ello es de esperarse, puesto que la posición que hemos tomado en este trabajo al aproximarnos a la analiticidad es que su relevancia radica en que (si se nos permite la metáfora) los enunciados analíticos establecen el puente directo que conecta a la semántica y la epistemología, pasando por encima de las turbulencias de la verificación empírica. Es la conexión directa y libre de cargas empíricas entre significado y conocimiento lo que ha instigado a los filósofos, desde Frege hasta Boghossian, a sacar ventajas de la analiticidad. La importancia de la analiticidad se debe en gran medida a la importancia de la verdad involucrada en su noción; es decir se debe al valor de la verdad.

Ahora, en la sección 3 del capítulo 1 hemos visto que en la visión ficcionalista de las matemáticas la verdad no tiene un lugar en el sistema de valores que se emplea para evaluar teorías matemáticas[119]. La consistencia en cambio ocupa el lugar principal, o en todo caso (y esto es lo importante) ocupa el lugar de la verdad. Para el platonismo la verdad es la bondad principal y la consistencia tiene un valor secundario, derivado del de la verdad.

Ser una bondad teórica primaria es lo que establece la analogía entre consistencia y verdad y también la semejanza entre matemáticas y analiticidad. Lo que requerimos para establecer la similitud analítico-matemática es, entonces, que la consistencia juegue el papel de bondad teórica primaria para la comunidad matemática.

Establecimos que hay un contraste en el papel que juega la consistencia para la comunidad de matemáticos y el que juega para las comunidades que incluyen a la verdad en su sistema de valores teóricos. Este contraste es importante porque al poseer la consistencia un valor derivado, habría una relación de dependencia y no de similaridad entre las ideas de analiticidad y de enunciados matemáticos.

El ficcionalista está en condiciones de afirmar la tesis de similaridad, pues para él la consistencia de las matemáticas está en un nivel paralelo al de la verdad en la analiticidad. Establecido esto solamente nos resta aclarar la asociación semántica entre significado matemático y consistencia, su bondad teórica primaria.

[119] Salvo quizá un lugar esporádico o menor, motivado por razones contingentes.

2.2.1- Relación entre significado y consistencia.

En esta sección estableceremos la asociación semántica entre significado y consistencia para los enunciados matemáticos.

Hemos determinado que la consistencia es una bondad teórica para los matemáticos, también que su valor es diferente según el valor que se le atribuya a la verdad. Nos ocuparemos ahora de aclarar la asociación entre el significado y la consistencia de los conjuntos de enunciados constitutivos de las teorías matemáticas que incluyen términos primitivos. Es aquí donde resultará de utilidad la largamente discutida constitutividad de los enunciados matemáticos: nos ayudará a explicar cómo los enunciados matemáticos cumplen con la tesis de similaridad.

El significado de los enunciados matemáticos está supeditado al hecho de su constitutividad y ésta a su vez está relacionada con la consistencia del conjunto de enunciados que conforman la definición del término. Entonces la relación entre significado y consistencia puede ser explicada simplemente por el hecho de que hay enunciados constitutivos (hecho que también es simplemente semántico). Veamos los detalles:

Los enunciados que conforman la definición implícita de un término "t" son constitutivos de su significado, solamente en ese caso el término "t" (y el enunciado definidor "D_t") tiene significado. No todas las supuestas definiciones implícitas aseguran la existencia de un significado para sus términos. En el capítulo 2 sección 4.2 ya se ha argumentado sobre este tema, aquí solamente retomaremos la conclusión: un conjunto inconsistente de enunciados no puede determinar un significado por definición implícita.

De modo que si el modelo de uso determina un significado (y lo hace si los enunciados involucrados son sus enunciados constitutivos) debe ocurrir que en efecto los enunciados que constituyen nuestro significado no son inconsistentes entre sí. De otro modo estaríamos frente al problema de la existencia, problema que cualquier modelo de definición implícita debe resolver. Ahora tenemos en su lugar todas las piezas para el siguiente argumento:

Argumento A

Dado que:

1.- Los enunciados matemáticos significan lo que parece que significan[120].

2.- Por composicionalidad del significado, los enunciados matemáticos poseen significado sólo si todos sus términos tienen significado (entonces, de 1 y 2, sabemos que los términos matemáticos tienen significado).

3.- El significado de los términos matemáticos se establece por definición implícita[121].

4.- La existencia del significado de los términos matemáticos, supone que los enunciados matemáticos básicos (los axiomas o esquemas axiomáticos) de una teoría son enunciados constitutivos de los términos de dicha teoría[122].

5.- Los elementos de un conjunto inconsistente de enunciados que incluyen a "t" no pueden ser constitutivos del significado de "t".

De aquí podemos concluir que

6.- Los conjuntos de enunciados básicos de una teoría matemática no son inconsistentes. (puesto que son significativos y constitutivos)

Ya que ninguna de las anteriores premisas involucra tesis de índole extra-semántica, podemos extraer un segundo resultado: Los enunciados constitutivos en una teoría matemática son consistentes entre sí en razón sólo de su significado. Puesto que el Argumento A puede explicar la consistencia de los axiomas que definen a sus primitivos a partir sólo de los hechos que determinan su significado.

De este modo es como explicamos que el hecho de que los enunciados de una teoría matemática posean el significado que poseen, garantiza que estos agregados de enunciados no sean inconsistentes. Debemos remarcar aquí lo que este argumento establece y lo que no establece: De la existencia del significado de una teoría matemática se sigue que dicha teoría no es inconsistente. Pero no establece que la consistencia implica la existencia de un significado. Esto último no es muy importante aquí, pues lo que nos interesa es solamente que las teorías matemáticas sean consistentes en virtud del significado. No necesitamos establecer que son significativas en virtud de la consistencia. Ello es debido a que la idea de enunciado analítico que nos preocupa es la de enunciado verdadero en virtud del significado, y no una hipotética noción de enunciado significativo en virtud de su verdad.

[120] véase la primera tesis semántica del ficcionalismo cap. 1 secc. 2.1 y cap. 2 secciones 3.1 y 3.2.
[121] cap. 2 secciones 4.1.1 y 4.1.2.
[122] cap. 2 secciones 4.2.1 y 4.2.2.

3. La comprobación de la explicación de la pseudo-analiticidad

Sabemos que para el ficcionalismo la consistencia es la bondad teórica primaria y que para el platonismo u otros realismos es una bondad teórica dependiente de la verdad.

Ya que pudimos explicar la consistencia de las teorías –que es la bondad teórica primaria para el ficcionalista– a partir sólo de principios semánticos de las matemáticas, podemos ahora comprobar que existe una asociación semántica entre el significado de los enunciados matemáticos y su bondad teórica primaria. Podemos concluir trivialmente que los enunciados matemáticos poseen la siguiente característica: exhiben una asociación, explicable en función sólo de tesis acerca del significado, entre su significado y la bondad teórica primaria de las matemáticas, que es la consistencia.

Como la tesis de similaridad justamente afirma que comparte esta característica con los enunciados analíticos, podemos concluir que la tesis de similaridad es correcta.

Reiteremos que el caso es diferente si se ve desde una óptica platonista. Para el platonismo el valor de la consistencia es un valor derivado de la verdad, es decir que la consistencia es una bondad teórica secundaria. Desde el punto de vista platonista no hay un caso de semejanza entre la analiticidad y matemáticas. Para el platonista la idea de "consistente en virtud del significado" no es paralela a la idea de "verdadero en virtud del significado" porque la consistencia es una condición para la verdad y por lo tanto "consistente en virtud del significado" es una condición para "verdadero en virtud del significado". Sólo si somos ficcionalistas podemos atribuirle a la consistencia un valor independiente y establecer la semejanza analítico-matemática. La semántica ficcionalista que hemos propuesto en el capítulo 2 nos permite explicar la percepción de que las matemáticas son analíticas y al mismo tiempo aclarar que las matemáticas no necesitan ser analíticas para dar cuenta de los fenómenos de los que daba cuenta la analiticidad.

Desde la perspectiva ficcionalista existe una similitud entre enunciados analíticos y matemáticos. Ello representa una conclusión filosófica que alcanzamos a partir de supuestos semánticos, lo cual alienta la confianza en nuestro proyecto. Mientras tanto la explicación de la pseudo-analiticidad está completa en su primera parte (correspondiente a la semejanza con lo analítico).

3.1 Una objeción a la relación entre significado y consistencia

Aquí presentaremos una objeción a la relación entre significado y consistencia[123]. La expondremos del siguiente modo: Concedamos el modelo de uso; el significado es uso. Concedamos la relación significado-consistencia establecida en 3.2.1; si cierto conjunto de axiomas no es consistente entonces no tienen significado. Entonces los axiomas inconsistentes no tienen significado ni uso. Ahora bien, sabemos que AR es inconsistente y por ello no debe tener ni significado ni uso. Sin embargo, los matemáticos siguen usando estos axiomas en diversas situaciones. Si nos atenemos a la práctica cotidiana, los axiomas AR son usados con tanta o más frecuencia que ZF (que se supone consistente). Estamos ante una situación que contradice uno de los supuestos porque, o bien la práctica desmiente el modelo de uso, o bien AR debería determinar algún significado para sus términos.

RESPUESTA A LA OBJECIÓN.

Hagamos frente a la dificultad planteada. Antes que nada debemos identificar el problema. El conflicto surge cuando se sostienen las tres cosas siguientes: la idea de que el significado es uso (la teoría de uso del significado), la idea de que las definiciones inconsistentes no determinan un significado para sus términos y el hecho de que en la práctica se usan teorías inconsistentes.

Deben aclarase dos cosas. Primero, en el modelo de uso no hay una identidad entre uso y significado. No todo uso de una palabra es su significado. El uso ocasional de un término, por ejemplo, no le confiere significado. Segundo, el modelo de uso nos dice que las regularidades básicas que gobiernan el uso de un término son las que engendran el significado. En ausencia de dichas regularidades no se engendra un significado. Eso es lo que ocurre en el caso del empleo ocasional de un término, su uso no tiene detrás una regularidad que engendre un significado. Distingamos el uso de un término apegado a una regularidad capaz de engendrar un significado llamándole un 'uso semánticamente fértil' o simplemente 'uso semántico'. No todos los usos lingüísticos tienen que ver con significado proposicional. En cierto sentido el uso lingüístico es una clase amplia entre la cual el uso semánticamente fértil es solo un caso especial, y sólo en este caso estamos interesados aquí.

Aclarado esto, podemos pensar en dos formas de replicar a la objeción.

Primero, diciendo que los matemáticos usan de AR, pero que este uso no es un uso

[123] Este problema fue sugerido por la Doctora Atocha Aliseda y algo del material que se empleó en la solución también puede atribuírsele.

semánticamente fértil.

Segundo, diciendo que cuando los matemáticos dicen usar AR, en realidad no están usando AR. En realidad usan ciertos principios heurísticos para sacar ventaja de AR.

La primera respuesta apela a la aclaración que hemos hecho arriba. El significado no es idéntico al uso. Un caso notable es el problema de la existencia del significado, que nos dice que hay ciertas definiciones implícitas para las cuales no existe un significado. En el modelo estándar el problema es que no hay un significado que haga verdadera a la definición; en el modelo de uso, no hay un significado que nos permita suponerlas verdaderas. Esto se manifiesta, bajo ambos modelos, en el uso de teorías o definiciones implícitas inconsistentes. El uso de una teoría inconsistente no es un uso semánticamente fértil. Es más parecido al uso ocasional, una suerte de uso de "baja calidad" semántica.

Veamos un ejemplo. Imaginemos que somos estudiantes primerizos de teoría de conjuntos. Se nos presenta una teoría inconsistente I, lo suficientemente complicada para que no advirtamos inmediatamente su inconsistencia (o tal vez ni siquiera tenemos idea de lo que es la consistencia). La teoría incluye primitivos como "conjunto" o "pertenece a" cuyo significado se nos dice dado por definición implícita. Supongamos somos afortunados al usar I, de tal suerte que no advertimos contradicciones. Ahora, el profesor de teoría de conjuntos puede saber cómo encontrar una contradicción, y puede mostrarnos que en efecto la teoría es inconsistente. Pero la teoría era inconsistente aún antes de que lo advirtiésemos. El hecho de que nosotros no hayamos encontrado contradicciones en la teoría o que no sepamos cómo reconocer una teoría inconsistente no modifica el hecho de que la teoría lo sea. Lo mismo puede decirse del significado de los términos de I, nosotros suponíamos que había un significado para los términos "conjunto" y "pertenece a". Pero el problema de la existencia nos puede hacer ver que no existe un significado para esos términos, y ese hecho es independiente de que nosotros lo supiéramos o no.

Ahora bien, lo anterior tiene que ver con los casos en los que ignoramos la inconsistencia de la teoría que estamos usando. En tales casos simplemente estamos cometiendo un error (creer que la teoría es consistente o significativa), de lo cual nadie esta exento. Pero qué pasa cuando a pesar de que sabemos de la inconsistencia de nuestra teoría, la seguimos usando; tal es el caso de AR que se nos objeta.

En estos casos el uso persiste en razón de cierta utilidad, que no necesariamente engendra significados. Ahora, la persistencia del uso no necesariamente involucra una regularidad. Alguien que desconoce el significado de la palabra "perro" podría usarla un día como si significara gato, al siguiente como si significara ratón, al siguiente como león, etc. Su uso de la palabra "perro" persiste, pero no es necesariamente regular; persistencia no es regularidad. Pero el caso de los matemáticos usando AR debe tener una razón detrás, pues no creemos que lo hacen sólo por simple compulsión. Y la razón es, como hemos dicho, que el uso de AR resulta de utilidad. Así como hay usos ocasionales que no necesariamente son semánticamente fecundos, puede haber otros usos que persisten porque tienen alguna otra utilidad. Por ejemplo, puede ser que emplear los axiomas AR nos permita llegar a resultados que serían mucho más complicados de derivar usando otra teoría. En tal caso usamos AR como una herramienta para facilitarnos la búsqueda de resultados. Podríamos llamar a esa actividad, un "uso heurístico" de la teoría. Ahora, una teoría que tiene un uso heurístico no necesariamente tiene detrás una regularidad que engendre significados, pues el que sea útil al ejecutar búsquedas no quiere decir que deba ser verdadera o consistente. Pensemos, como muestra de esto, en la teoría I, que contiene los siguientes enunciados.

- No existen números A, B y C tales que $A^2+B^2=C^2$
- Para toda n mayor a dos, existen números A, B y C tales que $A^n+B^n=C^n$
- Para toda n mayor a dos, no existen números A, B y C tales que $A^n+B^n=C^n$

Podemos derivar trivialmente la célebre conjetura de Fermat de I. Pero I es una teoría inconsistente (y falsa). Si simplemente estamos buscando el resultado "Existen números A, B y C tales que para toda n $A^n+B^n=C^n$", la teoría sirve a ese propósito. Pero si lo que queremos es mostrar que ese enunciado puede derivarse de las matemáticas estándar y que es un resultado significativo, tendremos que hacerlo por otros medio. En física también se usan teorías falsas para obtener resultados aproximados a los de una teoría verdadera[124]; ciertas teorías persisten por su utilidad y no por su verdad (según Field este es el caso de las matemáticas). Algo parecido ocurre con AR; muchos de los resultados que obtengamos de AR podremos después justificarlos por otros medios, pero muchos otros no podrán justificarse. El que AR tenga un uso heurístico no implica ni presupone que sea consistente, ni verdadera, ni que tenga significado. Podemos recordar que una teoría matemática que se aplica a teorías verdaderas no necesariamente es una teoría verdadera, basta que sea

[124] Baird, 1995.

conservativa. El que una teoría sea aplicable no la hace verdadera. De modo análogo, el que una teoría sea útil heurísticamente no la hace consistente ni significativa[125]. AR tiene un uso semántico de baja calidad, pero un uso heurístico de alta calidad. Así se explica su persistencia, pero ello no implica que AR engendre significados.

En la objeción que estamos respondiendo se confunde persistencia con regularidad, ello conduce a identificar uso y significado. Si existiese la identidad uso-significado estaríamos autorizados a decir que la existencia del uso implica la existencia del significado y que la existencia del significado implica la existencia del uso. El uso ocasional nos hace ver que la relación entre significado y uso no es la de identidad. El modelo de uso que sostenemos es más afín a una implicación del tipo: "La inexistencia de regularidades (en una definición implícita) implica que no se puede engendrar un significado". Y con esta última, la objeción del uso de AR no se sostiene.

Para concluir. Aún si concediésemos la identidad uso-significado, podríamos recurrir a nuestra segunda replica: cuando los matemáticos parecen usar AR, en realidad no están usando AR. Los matemáticos saben que cuando usan AR lo hacen junto con ciertos principios para evitar las inconsistencias más conocidas (v. g. la paradoja de Russell). Pero usar AR acompañado de ciertos otros principios no es lo mismo que usar AR. Si agregamos una sola regla "r" a un conjunto de reglas C, cuando las usemos no estaremos usando C sino un nuevo conjunto de reglas. Imaginemos que a las reglas del ajedrez les agregamos la regla "las piezas negras no pueden tomar piezas blancas". Cuando comencemos a jugar con estas nuevas reglas difícilmente podríamos decir que estamos jugando al ajedrez, porque, estrictamente, no estamos usando sus reglas.

Cuando los matemáticos usan AR, están conscientes de que su uso los llevaría a caer en contradicciones, por ello tienden a hacer cosas como evitar el uso del conjunto de todos los conjuntos. Si un matemático estuviera usando simplemente AR debería poder usar en cualquier momento el conjunto de todos los conjuntos, de modo que en realidad están usando una regla que no aparece en AR. Así, como en el caso del ajedrez, difícilmente podríamos decir que siguen usando sólo AR.

[125] Indagar el porqué ciertas teorías son heurísticamente útiles es otro problema, pero aquí no es necesario abordarlo.

CONCLUSIONES

En este trabajo nos propusimos como meta dar una explicación de la percepción de las matemáticas son analíticas evitando proponer un "sentido ficticio" de lo analítico. Nos concentramos en la analiticidad como puente entre semántica y epistemología, es decir, no en su papel en una teoría de la analiticidad sino en su papel, por así llamarle, meta-teórico. En el curso de esta investigación se hicieron presentaciones breves de la tensión platonismo-antiplatonismo en la filosofía contemporánea de las matemáticas y de la relación de la distinción analítico-sintético con las matemáticas. También complementamos la semántica del ficcionalismo. Al hacer esto abordamos temas interesantes, como los problemas de la definición implícita o la constitutividad de los enunciados matemáticos – tema que ha sido extensamente discutido en relación con los enunciados de la lógica, pero poco en relación con las matemáticas. Al final hemos propuesto que existe un rasgo especial de las teorías matemáticas: son *consistentes en virtud sólo de su significado.* Ello no solamente explica la semejanza entre enunciados analíticos y matemáticos al pensar que verdad y consistencia son bondades teóricas primarias, sino que abre la perspectiva de concederle un papel filosóficamente importante a la semántica de las matemáticas.

Concluiremos este trabajo llamando la atención acerca del significado de renovar la discusión acerca de la analiticidad de las matemáticas. El ficcionalismo, como el platonismo naturalizado contemporáneo, tiene una de sus mayores motivaciones en la necesidad de una buena teoría de la verdad matemática. Teoría que debe coexistir con un ámbito filosófico carente de la distinción analítico-sintético. Pero la semántica parece no tener otro papel en las preocupaciones de la filosofía de las matemáticas. A diferencia de otras épocas, el significado matemático ya no es una fuente de soluciones o explicaciones para los problemas de la filosofía de las matemáticas. En nuestra opinión, discutir la analiticidad puede conducirnos a ahondar la comprensión de las diferencias (o continuidades) de justificación de las matemáticas respecto a otras partes de la ciencia, o bien acerca de la relación misma entre matemáticas y ciencia. Si Quine nos hizo ver que el carácter analítico de las matemáticas era un dogma sin fundamento, también podríamos preguntarnos si el carácter científico de las matemáticas no podría correr la misma suerte.

Referencias

Baird, David Carr (1995) *Experimentation: An-introduction to measurement theory and experiment design.* : Prentice-Hall: Englewood Cliffs, N.J. 1995.

Balager, Mark (1998) *Platonism and Anti-platonism in Mathematics.* Oxford University Press, NY 1998.

Block, Ned (1993) *Holism, Hyperholism and Hyperanalyticity* . Mind and Language 8,1, 1993, pp. 11-26.

Boghossian, Paul Artin (1993) *Does an Inferential Role Semantics Rest Upon a Mistake* . Mind and Language 8,1, 1993, pp. 27-40.

Boghossian, Paul Artin (1996) *Analyticity Reconsidered* . Nous 30:3, 1996 pp. 360-391.

Carnap, Rudolf (1998) *Filosofía y sintaxis lógica.* Instituto de Investigaciones Filosóficas. *Colección*: Cuadernos. UNAM, México 1998.

Colyvan, Mark (2001) *The Indispensability of Mathematics.* Oxford University Press, NY 2001.

Dales, H. G. y Olivieri, G. (1998) *Truth in Mathematics.* Oxford: Claredon, NY 1998.

Field, Hartry (1989) *Mathematics, Realism and Truth* . Cambridge, Harvard University Press, 1989.

Frege, Gottlob (1972) *Conceptografía. Los Fundamentos de la aritmética.* Instituto de Investigaciones Filosóficas, UNAM, México 1972.

Harman, Gilbert (1996) *Analyticity Regained?* . Nous 30:3, 1996 pp. 392-400.

Hart, W. D. (1996) *The Philosophy of Mathematics.* Oxford University Press, NY 1996.

Horwich, Paul (1997) *Implicit Definition, Analytic Truth, and Apriori Knowledge.* Nous 31:4, 1997 pp 423-440.

Maddy, Penelope (1990) *Realism in Mathematics.* Claredon Press; Oxford University Press, NY 1990.

Quine, W. V. (1936) *Truth by Convention.* Reimpreso en "The Ways of Paradox and Others Essays", Random House, N. Y. 1996. pp. 70-99.

Quine, W. V. (1954) *Carnap and Logical Truth.* Reimpreso en "The Ways of Paradox and Others Essays", Random House, N. Y. 1996. pp. 100-125.

Quine, W. V.(1953) , *Two Dogmas of Empiricism* . En "From a Logical Point of View", Harvard University Press 1953 pp 20-46. Reimpreso en: Benacerraff and Putnam "The Philosophy of Mathematics" pp. 346-365.

Russell, Bertrand (1988) *Introducción a la Filosofía Matemática.* Editorial Paidos, España 1988.