



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES CUAUTITLAN

DESARROLLO DE UN PROGRAMA COMPUTACIONAL  
PARA EL PROYECTO MECANICO DE  
ENGRANES HELICOIDALES

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE  
**INGENIERO MECANICO ELECTRICISTA**  
P R E S E N T A  
**MARCOS JOSE ECHEVARRIA QUINTANA**

ASESOR: M. EN I. FELIPE DIAZ DEL CASTILLO RODRIGUEZ

CUAUTITLAN IZCALLI, EDO. DE MEXICO

2004



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



**FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES CUAUTITLAN**  
**UNIDAD DE LA ADMINISTRACION ESCOLAR**  
**DEPARTAMENTO DE EXAMENES PROFESIONALES**

ASUNTO: VOTOS APROBATORIOS

U. N. A. M.  
 FACULTAD DE ESTUDIOS  
 SUPERIORES-CUAUTITLAN



DEPARTAMENTO DE  
 EXAMENES PROFESIONALES

**DR. JUAN ANTONIO MONTARAZ CRESPO**  
 DIRECTOR DE LA FES CUAUTITLAN  
 P R E S E N T E

ATN: Q. Ma. del Carmen García Mijare,  
 Jefe del Departamento de Exámenes  
 Profesionales de la FES Cuautitlán

Con base en el art. 28 del Reglamento General de Exámenes, nos permitimos comunicar a usted que revisamos la TESIS:

Desarrollo de un programa computacional para el proyecto mecánico de engranes helicoidales.

que presenta el pasante: Marcos José Echevarría Quintana  
 con número de cuenta: 9757020-6 para obtener el título de :  
Ingeniero Mecánico Electricista

Considerando que dicho trabajo reúne los requisitos necesarios para ser discutido en el EXAMEN PROFESIONAL correspondiente, otorgamos nuestro VOTO APROBATORIO.

**A T E N T A M E N T E**  
**"POR MI RAZA HABLARA EL ESPIRITU"**

Cuautitlán Izcalli, Méx. a 20 de Enero de 2004

PRESIDENTE	<u>Ing. Samuel Pérez Díaz</u>	
VOCAL	<u>M.I. Felipe Díaz del Castillo Rodríguez</u>	
SECRETARIO	<u>Ing. Ramón González Vargas</u>	
PRIMER SUPLENTE	<u>Ing. Juan Antonio Preciado Valtierra</u>	
SEGUNDO SUPLENTE	<u>Ing. Gabriel Vázquez Castillo</u>	

A Dios

Por tu amor y los dones que me diste, aún sin merecerlos,  
por mi familia y amigos,  
por la oportunidad diaria de ser y hacer,  
por todas las gracias y bendiciones,  
por ser lo más grande y darme la oportunidad de estar contigo.

A mis Padres

Por el amor y los valores que he recibido de ustedes  
y que han llevado al hombre que soy,  
y que son mi alegría, inspiración y ejemplo de vida.

A mis Hermanas

Por el amor que me dan,  
por el orgullo que siento de tenerlas y  
por hacerme la vida más alegre.

A mi Familia

Por el amor y cuidado constante,  
por haber estado siempre conmigo,  
por su confianza y generosidad,  
por su integridad como personas y como familia.

A mis Amigos

Por su compañía y respeto,  
por ser parte de mi formación académica y humana.

A mi Asesor

Al M. en I. Felipe Díaz del Castillo Rodríguez,  
por su asesoría en la realización de éste trabajo.

# ÍNDICE

Introducción	1
--------------	---

## CAPÍTULO 1.

### CARACTERÍSTICAS GENERALES DE LOS ENGRANES.

1.1. Antecedentes.	3
1.2. Definición.	4
1.3. Clasificación de los engranes.	5
1.3.1. Engranés rectos.	5
1.3.2. Engranés helicoidales.	5
1.3.2.1. Engranés helicoidales de ejes paralelos.	6
1.3.2.2. Engranés helicoidales de ejes cruzados.	7
1.3.2.3. Engranés helicoidales dobles.	7
1.3.3. Engranés cónicos.	8
1.3.3.1. Engranés cónicos rectos.	8
1.3.3.2. Engrane cónico Zerol.	9
1.3.3.3. Engrane cónico espiral.	10
1.3.3.4. Engrane cónico hipoidal.	10
1.3.4. Tornillo sin fin.	10
1.3.4.1. Envolute simple.	11
1.3.4.2. Envolute doble.	11
1.3.5. Cremalleras.	12
1.3.6. Engranés internos.	12

## CAPÍTULO 2.

### GEOMETRÍA DEL DIENTE.

2.1. Involutetría.	14
2.2. Nomenclatura de engranes.	18
2.2.1. Ángulo de presión.	19
2.2.2. Paso circular.	19

2.2.3. Diámetro de paso.	19
2.2.4. Círculo base.	19
2.2.5. Paso base.	20
2.2.6. Paso diametral.	20
2.2.7. Módulo.	20
2.2.8. Adendum.	20
2.2.9. Dedendum.	21
2.2.10. Distancia entre centros.	21
2.2.11. Profundidad total del diente.	21
2.2.12. Longitud del diente.	21
2.2.13. Diámetro exterior.	22
2.2.14. Relación de contacto.	22
2.3. Características geométricas del diente.	22
2.3.1. Cara.	22
2.3.2. Flanco.	23
2.3.3. Parte superior.	23
2.3.4. Parte inferior.	23
2.4. Relación de velocidades	23
2.5. Huelgo.	24
2.6. Rebaje en dientes de engranes.	25
2.7. Fabricación de engranes.	26
2.7.1. Corte rotatorio.	26
2.7.2. Cepillado.	26
2.7.3. Tallado con fresa generadora.	26
2.7.4. Método Fellows.	27
2.8. Métodos de acabado.	28
2.8.1. Rasurado.	28
2.8.2. Pulimento.	28
2.8.3. Lapidado.	28

2.8.4. Rectificado.	28
2.8.5. Bruñido.	28
2.9. Materiales de engranes.	29
2.9.1. Endurecimiento total.	29
2.9.2. Carbo cementación.	29
2.9.3. Nitruración.	29
2.9.4. Inducción y temple por flama.	30
2.10. Lubricación y montaje de engranes.	30
2.11. Calidad de engranes.	31

### **CAPÍTULO 3.**

#### **ENGRANES HELICOIDALES.**

3.1. Nomenclatura de engranes helicoidales	32
3.2. Fuerzas en el diente del engrane.	36
3.3. Esfuerzos en los dientes del engrane.	39
3.4. Ecuación de esfuerzos.	39
3.4.1. Ecuación de esfuerzos.	39
3.4.1.1. Factor dinámico.	40
3.4.1.2. Factor de distribución de carga.	41
3.4.1.3. Factor de tamaño.	41
3.4.1.4. Factor de espesor de borde.	42
3.4.1.5. Factor de sobrecarga.	41
3.4.1.6. Factor geométrico de esfuerzos.	42
3.4.2. Ecuación de esfuerzo permisible de flexión.	45
3.4.2.1. Esfuerzo permisible de flexión.	46
3.4.2.2. Factor de ciclo de esfuerzos.	46
3.4.2.3. Factor de seguridad.	47
3.4.2.4. Factor de temperatura.	47
3.4.2.5. Factor de confiabilidad.	47

3.4.3. Esfuerzo de contacto en el diente.	47
3.4.3.1. Coeficiente elástico.	48
3.4.3.2. Factor de condición superficial para la resistencia a la picadura.	48
3.4.4. Límite de fatiga superficial.	48
3.4.4.1. Ecuación de esfuerzo permisible de contacto para el material.	49
3.4.4.2. Factor de ciclos de esfuerzo para la resistencia a la picadura.	50
3.4.4.3. Factor de razón de dureza para resistencia a la picadura.	50

## **CAPÍTULO 4.**

### **PROGRAMA PARA EL CÁLCULO DE ENGRANES HELICOIDALES.**

4.1. Programación orientada a objetos.	51
4.1.1.1. Objetos	51
4.1.1.2. Encapsulación.	51
4.1.1.3. Jerarquía.	52
4.1.1.4. Relaciones.	52
4.1.1.5. Polimorfismo.	52
4.1.1.6. Herencia.	52
4.2. Diagrama de flujo del programa.	53
4.3. Requerimientos del sistema para el uso del programa.	54
4.4. Uso del programa.	54
Conclusiones.	66
Bibliografía.	67
Nomenclatura	69

## INTRODUCCIÓN

El objetivo de la tesis es el de hacer un programa de computadora que calcule los parámetros y esfuerzos que se presentan en el diseño de engranes helicoidales.

El programa es de tipo didáctico para cualquier usuario que quiera involucrarse en el diseño de éste tipo de engranes, y puede ser utilizado como apoyo didáctico cuando se impartan temas relacionados con el diseño mecánico de engranes helicoidales en la FES Cuautitlán.

Es un programa que comprende los parámetros necesarios para que los engranes helicoidales puedan ser fabricados ya que se presenta la información completa de la nomenclatura de engranes y las fórmulas de cálculo de los parámetros de diseño.

Los engranes son los elementos mecánicos más utilizados para la transmisión de potencia cuando se requiere control de la potencia y de la velocidad de rotación, así como de una exacta relación de velocidades en la entrada y en la salida de un sistema con éstas características.

La ventaja que tienen sobre la transmisión de bandas con polea o de las ruedas dentadas, es la precisión en la relación de velocidades, y que pueden trabajar con una potencia mucho mayor que las anteriores.

Éstos elementos son utilizados prácticamente en todas las áreas de la industria, desde la automotriz hasta la alimenticia, con sistemas de tren de engranes tales como troqueladoras, reductores de velocidad, cajas de velocidades, bandas de transporte, instrumentos de medición, relojes, entre otros.

El Capítulo 1 contiene la información general de los engranes, la clasificación y descripción de cada uno de los diferentes tipos. Nos muestra el panorama general de los engranes antes de adentrarnos en el diseño.

El Capítulo 2 contiene la nomenclatura general de engranes, los cuales aplican a casi todos los tipos de engranes. Muestran los distintos parámetros de tipo geométrico con los cuales se puede dibujar y trazar un engrane con su definición y fórmula, así como también la forma de trazo de la involuta y de los dientes del engrane, además de una descripción de los métodos de fabricación de engranes, lubricación y materiales utilizados para los engranes de acuerdo a su uso.

El Capítulo 3 trata particularmente a los engranes helicoidales, de la nomenclatura específica para estos tipos de engranes y los parámetros adicionales que se deben analizar para el diseño de engranes helicoidales.

En este capítulo se muestran con figuras la nomenclatura de los engranes helicoidales así como la definición y fórmulas para el cálculo de los valores geométricos.

También contiene la explicación y fórmulas para el cálculo de las fuerzas que actúan en los dientes de este tipo de engranes y los esfuerzos que se generan en el acoplamiento de este tipo de engranes.

El Capítulo 4 hace referencia al programa. Consta de una breve explicación de la programación orientada a objetos, un diagrama de flujo general de la secuencia del programa, y una explicación del programa, del tipo de pantallas que se presentan al correr el programa y las acciones que hay que tomar con cada una de ellas.

Este programa considera todos los parámetros necesarios y actualizados para el diseño mecánico de engranes helicoidales y puede ser utilizado para la fabricación de este tipo de elementos mecánicos.

# **CAPÍTULO 1.**

CARACTERÍSTICAS GENERALES DE LOS ENGRANES.

# CAPITULO 1

## CARACTERÍSTICAS GENERALES DE LOS ENGRANES

### 1.1. ANTECEDENTES

Los engranes son elementos mecánicos que sirven para transmitir torque y movimiento rotativo .

Leonardo da Vinci en el siglo XVI hizo los primeros trazos de ruedas dentadas sobre ejes paralelos y cruzados para transmitir un movimiento circular como en la figura 1.1. Estas ideas de Leonardo se enfocaban hacia artefactos para transmitir movimiento a pequeña y gran escala como se muestra en la figura 1.2. Pero también empezó a idearlos en sistemas donde se requería utilizar una gran fuerza.

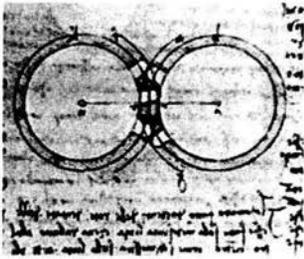


Figura 1.1.- Bocetos de dientes del engrane

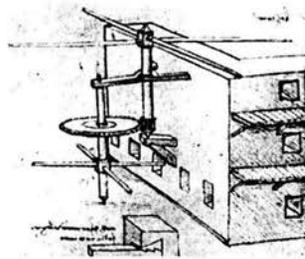


Figura 1.2.- Dibujos de engranes acoplados

A partir de entonces se han utilizado engranes con geometrías primitivas que van siendo modificadas para mejorar el rendimiento de los sistemas de engranajes.

Los primeros engranes fueron construidos de madera hasta la época de la revolución industrial, en la que, al empezar la siderurgia de una manera más técnica y estudiada se comenzó a trabajar con materiales más duros como el hierro; Fué entonces cuando se tuvieron aplicaciones más amplias.

Actualmente, la AGMA ( American Gear Manufacturers Association ), es el organismo encargado de estandarizar, generar las tablas de cálculo y los procedimientos para éste, actualizar datos y fórmulas para el diseño y cálculo de los engranes de todos los tipos, su manufactura y ensamble.

Los estándares realizados por la AGMA son utilizados por otras organizaciones como la ASME ( American Society of Mechanical Engineers ) y la AISI ( American Iron and Steel Institute ) para generar las normas de los engranes.

La geometría estandarizada por la AGMA de la forma del diente del engrane es la involuta o envolvente, que reduce el deslizamiento entre dientes y el esfuerzo que se produce por el contacto entre estos, así como el ruido y las vibraciones.

Se conoce al engrane que transmite la potencia como piñón, y regularmente está conectado al eje del motor, y engranes o coronas a los cuales les es transmitida la potencia como en la figura 1.3.

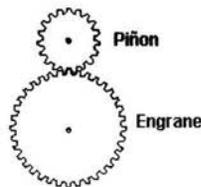


Figura 1.3.- Piñón y engrane en una transmisión simple

La forma en la que se acopla el engrane al eje generalmente es por medio de cuñas y estrías, que permiten que no se deslice sobre el eje cuando se le aplica una carga.

## 1.2. DEFINICIÓN

Los engranes se emplean para transmitir potencia y velocidades angulares. Tienen una gran cantidad de aplicaciones sobre todo en sistemas en los cuales se requiere transmitir gran potencia, siendo mejor que las bandas y cadenas, y velocidades específicas altas o bajas. Como ejemplos podemos mencionar cajas de transmisión, reductores de velocidad, mecanismos lineales y planetarios, etc...

### 1.3. CLASIFICACIÓN DE LOS ENGRANES

La clasificación que a continuación se presenta se basa en la posición del diente en el engrane:

- Engranés Rectos.
- Engranés Helicoidales.
- Engranés Cónicos.
- Tornillo Sin fin.
- Cremalleras.
- Engranés Internos

#### 1.3.1. Engranés Rectos.

Se utilizan cuando los ejes de los engranes son paralelos entre sí, quedando los dientes sobre el eje axial. Esta es la geometría más utilizada en los sistemas de engranes y es la de más fácil fabricación. Véase la figura 1.4.

El número mínimo de dientes que se pueden utilizar en estos engranes es de 12.

Los ángulos de presión estandarizados para este tipo son  $20^\circ$  y  $25^\circ$ , quedando ya descontinuados los de  $14.5^\circ$ .



Figura 1.4.- Engranés de dientes rectos.

#### 1.3.2. Engranés Helicoidales.

Se utilizan en ejes paralelos y transversales. Véase la figura 1.5.

El ángulo de los dientes helicoidales se encuentran entre  $10^\circ$  y  $30^\circ$  principalmente, respecto al eje de rotación, creando un contacto gradual en la superficie de cada diente y siempre hay

más de un diente en contacto, lo cual produce una operación mas suave y silenciosa y un promedio de carga más baja que en los engranes rectos.

El contacto entre los dientes comienza en la orilla y avanza por la cara del diente sobre la línea de paso hasta llegar a la orilla opuesta, en este momento otros dientes ya están en contacto directo, provocando que los esfuerzos generados en el diente por el contacto se vea reducido al estar distribuido entre varios dientes junto con el ángulo de presión del diente, el cual, si se ve incrementado provoca aumento de la carga en dirección axial.

La desventaja de los engranes helicoidales, con excepción de los helicoidales dobles, es que la carga axial creada por el ángulo de presión genera un empuje sobre el eje y es necesario utilizar rodamientos especiales para este tipo de carga.

El corte de los dientes se realiza con cortadores para engranes rectos, pero con un acomodo en la inclinación de sus ejes, para permitir el ángulo helicoidal.

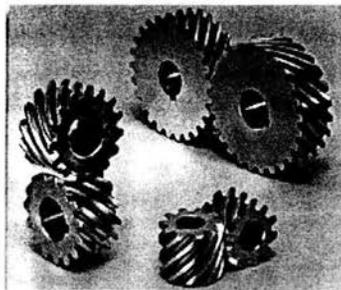


Figura 1.5.- Engranes helicoidales.

### **1.3.2.1. Engranes Helicoidales de ejes paralelos.**

Estos engranes colocados sobre ejes paralelos deben tener hélices en sentidos contrarios, es decir, una hélice derecha y una izquierda para su funcionamiento. Véase la figura 1.6.

Combinan el deslizamiento entre los dientes haciendo que la superficie de contacto sea mayor y se utilizan cuando se requiere transmitir un torque elevado.

Su funcionamiento es más silencioso por el contacto gradual entre los dientes generando una disminución en las vibraciones.

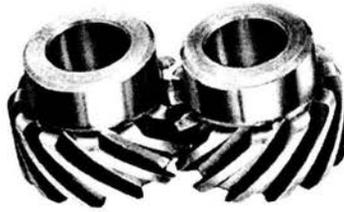


Figura 1.6.- Engranés helicoidales de ejes paralelos.

### 1.3.2.2. Engranés Helicoidales de ejes cruzados.

Son aquellos con disposición de ejes en  $90^\circ$ , por lo que requiere que las hélices de los dientes sean iguales. Véase la figura 1.7.

A diferencia de los engranes paralelos estos no generan empuje axial sobre el eje debido al punto de contacto y los dientes ruedan sin deslizarse provocando que se pueda producir un par pequeño.



Figura 1.7.- Engranés helicoidales de ejes cruzados.

### 1.3.2.3. Engranés helicoidales dobles.

El diseño esta hecho con una hélice izquierda y una hélice derecha dentro del mismo engrane, con la misma geometría de los anteriores engranes helicoidales y ángulos de entre  $23^\circ$  y  $45^\circ$ , con la ventaja de que no genera empuje o carga axial debido a la distribución de sus hélices encontradas, por lo que la sumatoria de estas fuerzas se vuelve cero.

Se pueden presentar con una ranura en la mitad de sus hélices debido a que es un espacio considerado para la operación de la hélice contraria de la fresa, o sin ésta separación que la realizan máquinas especialmente diseñadas para éste tipo de engranes. Véase la figura 1.8.

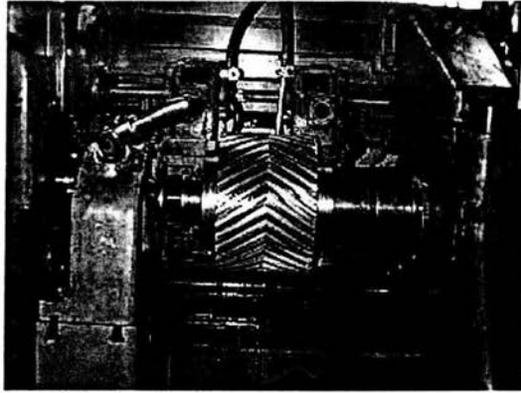


Figura 1.8.- Engranajes helicoidales dobles.

### 1.3.3. Engranajes Cónicos.

Se utilizan cuando se tienen ejes perpendiculares, intersectados y generalmente colocados a  $90^\circ$ . Véase la figura 1.9.

Estos engranes generan mayor ruido que los demás y no son intercambiables entre sí, sino que cada uno está diseñado para trabajar con su pareja.

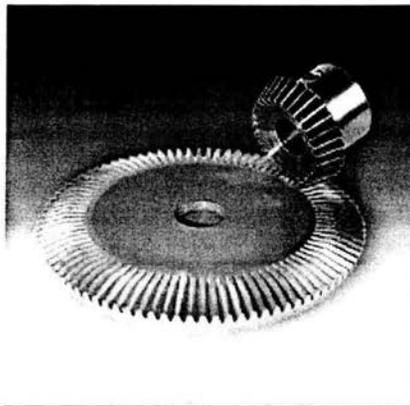


Figura 1.9.- Engranajes cónicos.

#### 1.3.3.1. Engranajes Cónicos Rectos.

Se usan cuando sus ejes son perpendiculares entre sí, y son los más conocidos como engranes cónicos. Véase la figura 1.10. Aunque el desempeño de éstos puede ser menos

eficiente al de los diferentes tipos de engranes cónicos que se presentan más adelante, pues producen un mayor ruido, vibraciones y permiten una menor transmisión de potencia.



Figura 1.10.- Engranes cónicos rectos.

### 1.3.3.2. Engrane Cónico Zerol.

Está compuesto por dientes curvos, pero con un ángulo espiral nulo, sus dientes tienen la misma dirección que los engranes cónicos rectos. Véase la figura 1.11. De los engranes cónicos éste es el más silencioso y suave en su funcionamiento. Se emplean para alcanzar grandes velocidades, arriba de los 40 m/s.

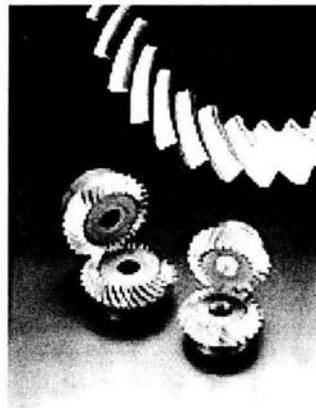


Figura 1.11.- Engranes cónicos Zerol.

### 1.3.3.3. Engrane Cónico Espiral.

El diente tiene forma espiral con un ángulo  $\phi$  al eje del cono.

En comparación con los engranes cónicos rectos, su giro es más silencioso y suave y pueden tener un diámetro menor para una igual capacidad de carga, ya que debido a su geometría entran en contacto un mayor número de dientes en un mismo instante. Véase la figura 1.12.

Tiene un ángulo de presión generalmente de  $20^\circ$  y alcanza velocidades de hasta 10m/s.



Figura 1.12.- Engrane cónico espiral

### 1.3.3.4. Engrane Cónico Hipoidal.

Ésta pieza es similar al engrane helicoidal, con la diferencia de que los centros geométricos o ejes en los cuales se montan para funcionar entre sí están descentrados, es decir, no coinciden los centros sino que presentan una excentricidad. Véase la figura 1.13.

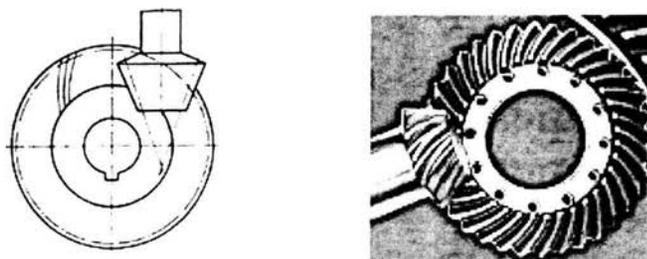


Figura 1.13.- Engrane cónico hipoidal.

### 1.3.4. Tornillo Sin fin.

El diseño de éste tipo de engrane presenta una mayor complicación en su fabricación que cualquiera de los engranes aquí mencionados.

Su funcionamiento requiere de un gusano impulsor ( tornillo Sin fin ) y de un engrane helicoidal ( engrane Sin fin ), dispuestos sobre ejes perpendiculares.

El tornillo Sin fin puede verse como un engrane helicoidal de un solo diente que llega a dar varias vueltas. Frecuentemente se utilizan en reductores de velocidad. Véase la figura 1.14.



Figura 1.14.- Engranaje de tornillo sin fin.

#### **1.3.4.1. Envolvente Simple.**

Los engranes de tornillo Sin fin presentan variantes en su diseño y uso, es el caso de envolvente simple que se montan sobre ejes paralelos que no se intersectan entre sí.

Existe un movimiento axial entre los elementos con ángulos de presión estándar de  $14.5^\circ$ ,  $17.5^\circ$ ,  $20^\circ$ ,  $22.5^\circ$ ,  $25^\circ$ ,  $27.5^\circ$  y  $30^\circ$ . Conforme éste ángulo se incrementa, también lo hace el esfuerzo entre dientes y aumenta la fricción.

El diente del engrane recubre al tornillo sin fin en su periferia.

Se utilizan cuando es necesario un alto torque y alta velocidad o alto torque y baja velocidad ( con diámetros mayores ) usándose normalmente en reductores de velocidad.

#### **1.3.4.2. Envolvente Doble.**

Ésta es la segunda variante de los engranes de tornillo Sin fin, y también se les conoce como globoides o gusano en forma de tornillo albardillado sin fin.

Se enlaza con el engrane helicoidal y da por resultado un contacto de área y no de línea, lo que permite transmitir mayor potencia específica a una relación de reducción en particular.

Para su buen funcionamiento deben tener una alineación exacta.

### 1.3.5. Cremalleras.

Las cremalleras son un arreglo especial que tiene dientes normalmente rectos ( no de involuta ) en una base recta ( cremallera ), de una distancia no reducida, que trabaja con un engrane recto sobre un eje perpendicular teniendo la posibilidad de fijar cualquiera de los dos. Véase la figura 1.15.

Tiene la posibilidad de ser muy exacta en su avance. Genera movimiento rectilíneo a partir de uno giratorio y viceversa.

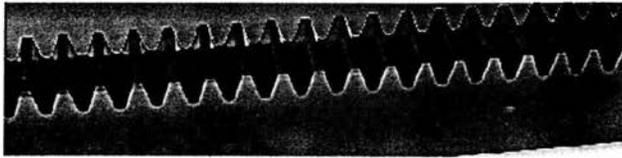


Figura 1.15.- Cremalleras.

### 1.3.6. Engranés Internos.

Son un tipo especial de engranes cuyos dientes se encuentran hacia dentro del mismo. Tiene aplicaciones muy especiales y su elaboración es de una manufactura complicada. Véase la figura 1.16.

El número mínimo de dientes permisible para su funcionamiento es el siguiente:

8 dientes para diente corto de  $20^\circ$ .

10 dientes para dientes de profundidad total a  $20^\circ$ .

12 dientes de profundidad total a  $14.5^\circ$ .

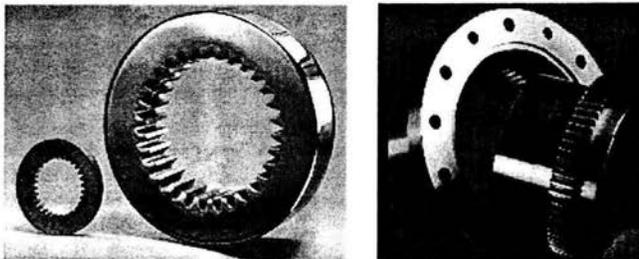


Figura 1.16.- Engranés internos.

Cada uno de los engranes de la clasificación anterior esta diseñado para un arreglo lineal o planetario. Véase la figura 1.17.

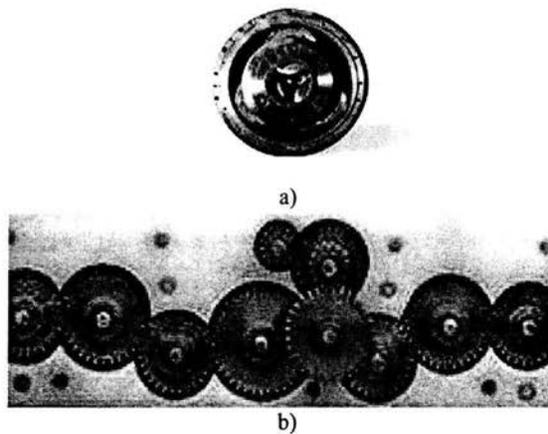


Figura 1.1.7.- a) Sistema planetario. b) Sistema lineal.

## **CAPÍTULO 2.**

GEOMETRÍA DEL DIENTE.

## CAPITULO 2

### GEOMETRÍA DEL DIENTE.

#### 2.1. INVOLUMENTRÍA.

La forma estandarizada por la AGMA respecto a la geometría del diente es la involuta.

La involuta es una curva mixta o conjugada que se utiliza para la fabricación estándar de engranes rectos, helicoidales, cónicos, etc. Véase la figura 2.1.



Figura 2.1.- Diente del engrane.

Dicha curva permite una relación de velocidad angular constante entre el piñón y el engrane, desde el momento en que entran en contacto; la velocidad del piñón está en proporción a la velocidad del engrane por lo cual permite que en la rotación de los engranes éstos generen menor esfuerzo, deslizamiento e interferencia, y aumente su resistencia debido a la geometría, además de reducir vibraciones y ruido.

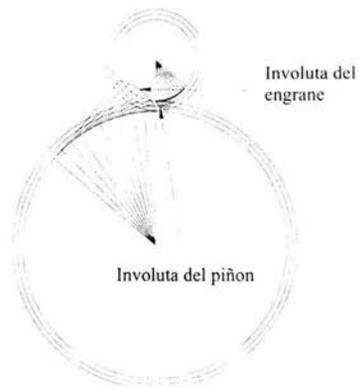


Figura 2.2.- Trazo de la involuta.

La involuta se calcula a partir de las siguientes fórmulas:

$$\theta = \text{tg } \Phi \quad (2.1)$$

$$\psi = \text{tg } \Phi - \Phi \quad (2.2)$$

$$\psi = \text{inv } \Phi \quad (2.3)$$

$$\theta = \psi + \Phi \quad (2.4)$$

$$\theta = \text{tg } \Phi \quad (2.5)$$

$$OP \cos \Phi = rb \quad (2.6)$$

$$OP \text{ sen } \Phi = rb \text{ tg } \Phi \quad (2.7)$$

$$OP \text{ sen } \Phi = PP' \quad (2.8)$$

Donde:

$\Phi$  (phi) es el ángulo de contacto, generado entre la línea  $OP'$  y  $OP$ . [grados]

$\psi$  (psi) es el ángulo entre la línea  $OP$  y la vertical. [radianes]

$\theta$  (teta) es la suma de los ángulos  $\Phi$  y  $\psi$ . [grados]

$PP'$  es la línea generada de manera tangencial al círculo de paso.

$OP$  es la línea que parte del centro del engrane y corta al círculo de paso con un ángulo dado dependiendo de la precisión del trazo de la involuta.

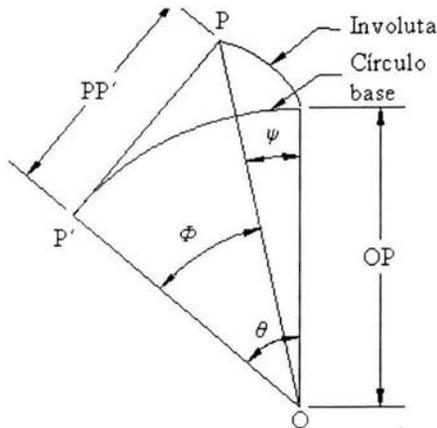


Figura 2.3.- Generación de las líneas de trazo de la involuta.

La involuta se traza a partir de los valores mostrados en la tabla 2.1.

Tabla 2.1.- Valores para el cálculo de los puntos de trazo de la involuta.

$\Phi$ (grados)	$\psi = \tan\Phi - \Phi$ (rad)				$\theta$ (grados)
	$\tan \Phi$ (rad)	$\Phi$ (rad)	$\psi$ (rad)	$\psi$ (grados)	
0	0	0	0	0	0
1	0.017455	0.017453	0.000002	0.000146	1.000146
2	0.034921	0.034907	0.000014	0.000814	2.000814
3	0.052408	0.05236	0.000048	0.002758	3.002758
4	0.069927	0.069813	0.000114	0.006509	4.006509
5	0.087489	0.087266	0.000223	0.01275	5.01275
10	0.176327	0.174533	0.001794	0.102789	10.102789
15	0.267949	0.261799	0.00615	0.352346	15.352346
20	0.36397	0.349065	0.014905	0.853994	20.853994
25	0.466307	0.43633	0.029977	1.717155	26.717155
30	0.57735	0.523599	0.053751	3.079717	33.079717
35	0.7002	0.610807	0.089394	5.12187	40.12187
40	0.839099	0.698132	0.140967	8.076831	48.076831
45	1	0.785398	0.214602	12.295789	57.295789
50	1.19175	0.87266	0.31909	18.28251	68.28251

Para generar las líneas de trazo, se requiere proponer un paso diametral ( P ) y un número de dientes ( N ).

Para un P = 14, rb = 2.013627 y N = 60, OP es:

Tabla 2.2.- Valores para el trazo de la involuta.

$\theta$ (grados)	OP(mm)	$\theta$ (grados)	OP(mm)
0.000	2.014	20.854	2.143
1.000	2.014	26.717	2.222
2.001	2.015	33.080	2.325
3.003	2.016	40.122	2.458
4.007	2.019	48.077	2.629
5.013	2.021	57.296	2.848
10.103	2.045	68.283	3.133
15.352	2.085		

Con éstos valores como se traza el perfil de la involuta para cada diente de engrane.

El tamaño del diente del engrane depende del valor del paso diametral (sistema inglés), que se explica ampliamente más adelante, y éstos pueden ser de dos tipo el fino y el grueso, los cuales dependen de la precisión y uso de los engranes, tabla2.3.

Tabla 2.3.- Valores de paso diametral estandarizados.

<b>Grueso (P&lt;20)</b>	<b>Fino (P&gt;20)</b>
1	20
1.25	24
1.5	32
1.75	48
2	64
2.5	72
3	80
4	96
5	120
6	
8	
10	
12	
14	
16	
18	

En la tabla 2.4 se proporciona el número mínimo de dientes de profundidad completa y ángulo de presión de 20°

Tabla 2.4.- Número de dientes en engranes para prevenir interferencia.

<b>Número mínimo de dientes del piñón</b>	<b>Número máximo de dientes del engrane</b>
17	1309
16	101
15	45
14	26
13	16

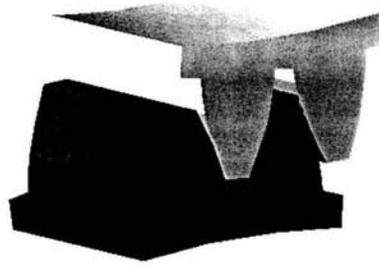


Figura 2.4.- Acoplamiento de engrane y piñón.

## 2.2. NOMENCLATURA DE ENGRANES

La figura 2.5 muestra la nomenclatura básica de los engranes.

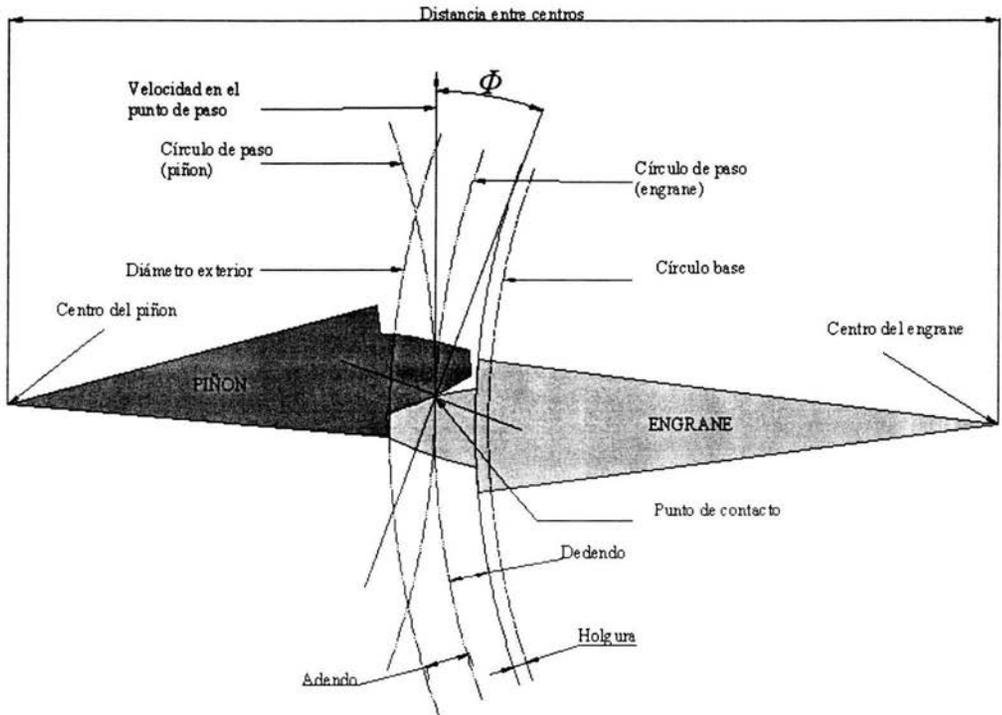


Figura 2.5.- Nomenclatura de engranes.

### 2.2.1. Ángulo de presión. ( $\Phi$ )

Es el ángulo entre la línea de acción a los círculos de paso y la normal común que se forma en el punto de paso.

Los ángulos de presión estandarizados son de 14.5°, 20° y 25°; Aunque los de 14.5° están descontinuados y los más utilizados son los de 20°.

$$\Phi = \text{inv}^{-1} \psi \quad (2.9)$$

### 2.2.2. Paso circular. ( $P_c$ )

Se trata de la distancia que existe entre un punto tomado en cualquier lugar del diente y otro punto tomado en el mismo lugar pero del diente adyacente sobre el diámetro de paso, definiendo así el tamaño del diente. Véase la figura 2.6.

$$P_c = \frac{\pi}{P} \quad (2.10)$$

$$P_c = \frac{\text{perímetro}}{N} \quad (2.11)$$

### 2.2.3. Diámetro de paso. ( $D_p$ )

Es el círculo sobre el cual se presenta el contacto entre dientes, en los que ambos diámetros de paso permanecen tangentes en el lugar llamado punto de paso, que es donde se presenta el contacto entre dientes.

$$D_p = N / P \quad (2.12)$$

### 2.2.4. Círculo base. ( $cb$ )

Es el círculo sobre el cual se comienza el diseño del engrane, y se sitúa debajo del círculo del dedendo o la parte inferior del diente del engrane.

$$Cb = D_p - 2d \quad (2.13)$$

### 2.2.5. Paso base. ( $P_b$ )

Es la distancia que existe entre un punto tomado en cualquier lugar del diente y otro punto tomado en el mismo lugar pero del diente adyacente sobre círculo de base. Véase la figura 2.6.

$$P_b = P_c \cos\phi \quad (2.14)$$

### 2.2.6. Paso diametral. ( $P$ )

Aquí consideraremos el número de dientes del engrane por pulgada de diámetro de paso. Conforme aumenta el  $P$  el tamaño del diente disminuye y viceversa.

El  $P$  puede ser, si  $P < 20$  es paso grueso, y si  $P > 20$  es paso fino.

$$P = \frac{N}{D} \quad (2.15)$$

$$P = \frac{\pi D}{N} \quad (2.16)$$

### 2.2.7. Módulo. ( $m$ )

El módulo o paso se refiere al tamaño de los dientes, donde el módulo se considera como el diámetro del círculo primitivo dividido entre el número de dientes. También se obtiene del inverso del paso diametral.

$$m = \frac{25.4}{P} \text{ en sistema internacional.} \quad (2.17)$$

### 2.2.8. Adendo. ( $a$ )

Es la distancia entre el círculo de adendo y el círculo de paso. Es decir, la distancia que hay entre la parte superior del diente y el círculo de paso.

$$a = \frac{1}{P} \quad (2.18)$$

### 2.2.9. Dedendo. ( b )

Es la distancia que existe entre el círculo de paso y el círculo de dedendo localizado en la parte inferior del diente, considerando también el espaciamento.

$$b = \frac{1.157}{P} \quad (2.19)$$

### 2.2.10. Distancia entre centros. ( C )

Es la distancia que hay entre los centros de los engranes, que es igual a la suma de los radios de paso de piñón y engrane.

$$C = \frac{Dp + Dg}{2} = \frac{Np + Ng}{2P} \quad (2.20)$$

### 2.2.11. Profundidad total del diente. ( ht )

Es el tamaño que tiene el diente, es decir la distancia que hay desde la base o parte inferior del diente hasta la punta o parte superior del diente, o también, la suma entre adendo y dedendo.

$$ht = \frac{2.157}{P} = a + d \quad (2.21)$$

### 2.2.12. Longitud del diente. ( F )

Es la profundidad del diente, determinado por la potencia que debe transmitir, que hace que el diente a cuanto más profundidad mayor carga y viceversa. Véase figura 2.6.

$$F = \frac{12.5664}{P} \quad (2.22)$$



Figura 2.6.- Ancho del diente de un engrane.

### 2.2.13. Diámetro exterior. ( O )

Es el círculo que coincide con la parte superior del diente, y el que delimita el tamaño del diente y del engrane.

$$O = dp + 2a \quad (2.23)$$

### 2.2.14. Relación de contacto. ( $m_p$ )

Define el número de dientes que entran en contacto a un mismo tiempo cuando se presenta la rotación del engrane. Se recomienda que esta relación de dientes que actúan al mismo tiempo sea mayor a 1.4, debido a que la carga de empuje estará distribuida entre más de un diente y esto disminuye la carga en cada diente y reduce las oscilaciones de velocidad, vibraciones y ruidos.

$$m_p = \frac{Z}{Pb} = \frac{PZ}{\pi \cos \phi} \quad (2.24)$$

Z es la longitud de la línea de acción.

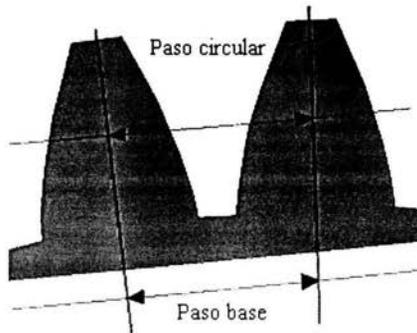


Figura 2.7.- Paso circular y paso base.

## 2.3. CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS DEL DIENTE.

Las características geométricas más importantes del diente de un engrane se muestran en la figura 2.8., y son las siguientes:

**2.3.1. Cara.** Es la superficie lateral del diente comprendida entre el círculo exterior del engrane y el círculo de paso.

**2.3.2. Flanco.** Es la superficie lateral del diente comprendida entre el círculo de paso hasta el círculo de raíz incluyendo el chaflán.

**2.3.4. Parte superior.** Es la superficie superior del diente comprendida entre los arcos que forman el diente y el largo del mismo.

**2.3.5. Parte inferior.** Es la superficie de la base del diente, comprendida entre cada uno de los dientes en la separación que se genera.

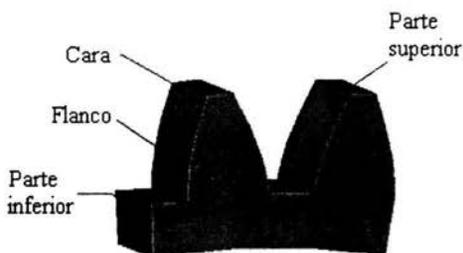


Figura 2.8.- Características geométricas del diente.

## 2.4. RELACION DE VELOCIDADES

La relación de velocidades entre los trenes de engranes ( 2 o más engranes ) se obtiene a partir de la ley fundamental del engranaje, que enuncia: “*la razón de la velocidad angular entre los engranes de un engranaje permanece constante en toda la conexión*”, y “*la normal común a los perfiles de los dientes en todos los puntos de contacto dentro del engranado deben pasar siempre por un punto fijo en la línea de centros, llamado punto de paso*”.

De acuerdo a ésta ley, se genera la siguiente ecuación que presenta la relación que existe entre el tamaño del engrane y el piñón en la relación de velocidades del tren:

$$m_v = \frac{\omega_{salida}}{\omega_{entrada}} = \frac{r_{salida}}{r_{entrada}} = \frac{d_{salida}}{d_{entrada}} \quad (2.25)$$

donde:

$m_v$  relación de velocidad del tren de engranes.

$\omega_{salida}$  velocidad angular de salida.

$\omega_{entrada}$  velocidad angular de entrada.

$r_{entrada}$  radio del piñón.

$r_{salida}$  radio del engrane.

$d_{entrada}$  diámetro del piñón.

$d_{salida}$  diámetro del engrane.

$m_v$  = producto del número de dientes en engranes impulsores / producto del número de dientes en engranes impulsados.

$$m_v = \left( \frac{-N_2}{N_3} \right) \left( \frac{-N_4}{N_5} \right) \quad (2.26)$$

donde  $N_2, N_3, N_4, N_5$  son los números de dientes de cada engrane, en la relación de velocidad de entrada y salida en un tren de engranes, figura 2.9.

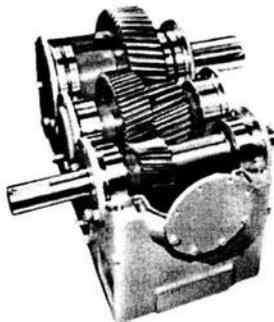


Figura 2.9.- Reductor de velocidad. ( Tren de engranes )

## 2.5. HUELGO.

En el diseño de engranes es común suponer que el espesor del diente de engrane medido sobre el círculo primitivo es exactamente la mitad del paso circular. Debido a las inexactitudes en la fabricación de engranes, es necesario rebajar los dientes de los engranes para que no choquen entre sí, y permitan una mejor circulación de un diente sobre el otro.

Éste margen entre los espacios de dientes en contacto excede el espesor del diente que se acopla, haciendo la medición sobre el círculo primitivo, en los que podría realizarse éste rebaje a solo uno de los engranes que entran en contacto.

Debido a éste margen u holgura se generan también cargas dinámicas, pero son consideradas en el diseño debido a un factor que lo contempla ( $K_v$ ), el cual se verá más adelante.

La ecuación de huelgo recomendado en engranes es:

$$huelgo = \frac{1.157}{P} \quad (2.27)$$

## 2.6. REBAJE EN DIENTES DE ENGRANES.

La acción de rebaje se realiza en la base del diente, donde se remueve material entre el punto de la línea de tangencia del círculo base y la línea de presión, para evitar interferencia en el movimiento del engrane en sus dientes, y se presenta generalmente en engranes de pocos dientes.

Esto, además de debilitar el diente, reduce el largo de la involuta del diente, que provoca que el contacto se vea reducido al no correr sobre todo el largo de la involuta, aunque no sea necesario que se deslice sobre toda la involuta para su funcionamiento.

Ningún rebaje puede ocurrir si el adendo no se extiende dentro del punto de interferencia.

El número mínimo de dientes que un engrane debe tener para que los dientes de los engranes no sean rebajados es:

Engranes de profundidad total a 20° :	m=1 ;	N=32
Engranes dientes cortos a 20° :	m=0.8 ;	N=14

$$a = \frac{m}{P} = \frac{N}{2P} \text{sen}^2 \phi \quad (2.28)$$

$$N = \frac{2m}{\text{sen}^2 \phi} \quad (2.29)$$

Debido a esto se utilizan dientes de adendo largo y adendo corto para evitar interferencia.

## **2.7. FABRICACIÓN DE ENGRANES**

La fabricación de engranes es un proceso que comienza con el disco sobre el cual se va a generar el engrane. Los engranes pequeños comienzan, en su mayoría, a partir de una barra maciza forjada, y si se requiere de alguna forma no maciza en su parte media, éste requiere de ser maquinado, hasta casi llegar a las dimensiones finales. También se contempla el ancho del diente para tener la base sobre la cual se generarán los dientes del engrane. Los engranes grandes se pueden construir a partir de sus componentes, es decir, se fabrica primero la base del engrane, ya sea colado o maquinado, y posteriormente se sueldan los engranes (la corona y la parte de los dientes pueden ser rolados) en su contorno, teniendo que rectificar las uniones para que se observen como una sola pieza aunque se recomienda que sea de una sola pieza.

Los métodos más conocidos para la fabricación de engranes son los siguientes:

### **2.7.1. Corte rotatorio.**

Se utiliza un cortador rotatorio que tiene la forma del espacio entre dientes, el cual, se corta por completo para dar la forma del diente y va realizando el corte mientras el disco gira hasta llegar al espacio adyacente. Se utiliza para engranes de gran tamaño y puede llegar a tener buena precisión.

### **2.7.2. Cepillado.**

Se utiliza una cremallera con bordes cortantes alrededor del borde del diente, con lo cual, al tener un movimiento alternativo paralelo al eje del engrane de igual velocidad a la línea de paso, el material entre dientes es recortado y genera dientes de involuta.

### **2.7.3. Tallado con fresa generadora.**

Los dientes se generan a partir de una fresa generadora polidentada o madre, colocada en un eje perpendicular al del engrane, y el movimiento hace que el diente se vaya formando de manera gradual a medida que la fresa se va acercando hacia el engrane haciendo de esta manera la separación entre dientes es mas precisa y su funcionamiento es más regular. Véase Figura 2.10.

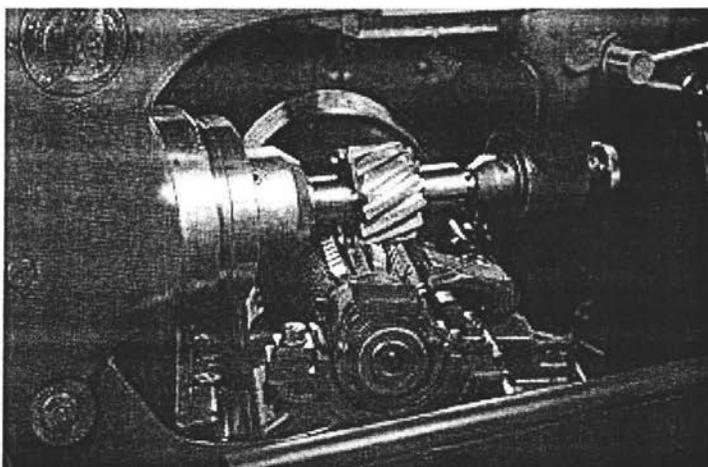
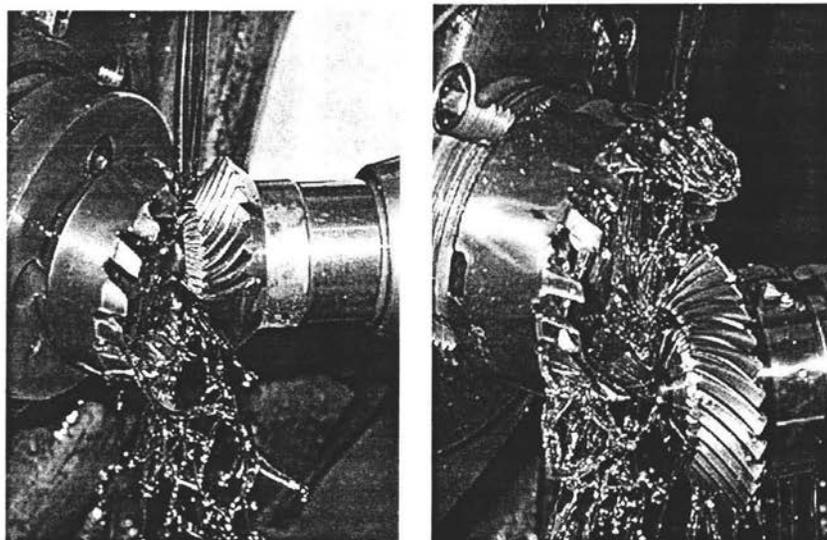


Figura 2.10. Generadora de engranes.

#### 2.7.4. Método Fellows.

Esta técnica utiliza un cortador que tiene la apariencia de un engrane endurecido con bordes apropiadamente relevados. El cortador y el toco se montan sobre ejes paralelos y giran lentamente, al cortador se le da un movimiento alternativo adicional sobre su eje. Figura 2.11. Éste método se utiliza también para la fabricación de engranes internos, aunque los cortadores Fellows se utilizan para cortar engranes de todos los sistemas.



Figuras 2.11.- Método Fellows de fabricación de engranes.

## **2.8. MÉTODOS DE ACABADO.**

Existen varios métodos de acabado de engranes para dar una mayor precisión en la transmisión. Éstos son:

### **2.8.1. Rasurado.**

El engrane se desplaza a través de una cremallera que tiene un cortador axial, el cual remueve finas virutas de la superficie corrigiendo los errores en el perfil del engrane. El rasurado se realiza antes del endurecimiento.

### **2.8.2. Pulimento.**

Se trata de un procedimiento en el cual el engrane ya endurecido, es recorrido por una herramienta de forma de engrane helicoidal, que contiene material plástico abrasivo, el cual corrige y mejora la forma del diente y la tersura de las superficies.

### **2.8.3. Lapeado ( Lapping ).**

El engrane es recorrido por la herramienta lapidante en un medio rico en abrasivos, teniendo especial cuidado para no perder la forma de la involuta.

### **2.8.4. Rectificado.**

Se realiza después del tratamiento térmico para corregir los errores que resultan de la distorsión térmica durante el endurecimiento y para tener un mejor acabado y un mejor funcionamiento de los engranes.

### **2.8.5. Bruñido.**

Es un proceso plástico de frotamiento, que consiste en tallar y aplanar las superficies de los engranes para dispersar las irregularidades superficiales, generando esfuerzos residuales de compresión benéficos.

## **2.9. MATERIALES DE ENGRANES**

Los componentes en la fabricación de engranes son materiales como hierro gris, hierro fundido aleado, acero fundido, acero laminado, acero forjado, latón, bronce, plásticos diversos entre otros.

Los aceros de bajo carbono no endurecidos y de fácil maquinado son igualmente materiales comunes en la fabricación de engranes, con la condición de trabajarlos bajo aplicaciones que requieren una intensidad moderada y buena resistencia al impacto.

Para una dureza superficial y una resistencia mayor se aplican tratamientos térmicos hasta alcanzar estas propiedades; Los principales procesos en tratamiento térmico para engranes son los siguientes:

### **2.9.1. Endurecimiento total.**

En este proceso se usan materiales con un contenido de carbono suficientemente alto del orden de 0.35% a 0.50%, después de ser cortado, se temple y se estira a temperatura adecuada para obtener las propiedades físicas deseadas. Los aceros como el 1040, 1050 y 1137, están sometidos a distorsión por el templado y no sufren de un endurecimiento profundo. Los aceros como el 4140 y 4340 sufren de un endurecimiento completo y retienen su forma cuando se les aplica tratamiento térmico. Los materiales al encontrar la mayor resistencia y dureza sufren también de un proceso de pérdida de ductilidad.

### **2.9.2. Carbocementación.**

Aquí el engrane es sometido a alta temperatura elevada al punto de rojo dentro de un horno en un compuesto de carbono. El carbono es absorbido por las capas superficiales del engrane con una penetración dependiente del tiempo de exposición, volviéndose más dura la superficie después del temple y revenido.

### **2.9.3. Nitruración.**

Se utiliza cuando se requieren superficies muy duras y de gran resistencia al desgaste. Se realiza después del tratamiento térmico manteniendo el material a una temperatura entre los 850°C y 1000°C por un tiempo prolongado, en presencia de amoníaco, formando en la

superficie nitruros. Se utilizan aceros 4140 y 4340. Estos engranes se emplean cuando se requiere de operaciones de temperatura más altas que los carbocementados y al igual que la carbocementación, dejan la superficie en un estado de compresión, que es benéfico bajo los esfuerzos de fatiga que presentan los engranes.

#### **2.9.4. Inducción y temple por flama.**

El engrane se calienta dentro de una bobina de inducción y posteriormente se temple en aceite. También se realiza calentamiento en los dientes a base de una flama oxiacetilénica dirigida.

El acero debe contener suficiente cantidad de carbono lo que endurece al templearlo, utilizando aceros 4140 y 4340 para este tipo de tratamiento.

#### **2.10. LUBRICACIÓN Y MONTAJE DE ENGRANES.**

La lubricación que se hace en engranes depende del tipo de engrane y su funcionamiento. Para engranes no cerrados o expuestos, la lubricación se realiza por medio de un bidón, de un gotero o un cepillo. Si los engranes están expuestos al agua o a algún ácido, el lubricante debe ser pegajoso para que se adhiera al metal. Cuando los engranes se encuentran dentro de una caja cerrada, éstos pueden sumergirse en un baño de aceite, o por medio de rociado con la circulación que éstos generan entre sí. Cuando la presión de contacto es muy alta debe utilizarse una presión extrema de lubricante para impedir la ruptura de la película de aceite y situarse en el contacto entre metales. Véase figura 2.12.

Existen lubricantes que contienen aditivos que incrementan la velocidad de trabajo conforme incrementa la capacidad de carga y previenen la expulsión forzada del lubricante.

Considerando que la pérdida de potencia es del 1% al 2% de la potencia total transmitida.



Figura 2.12.- Lubricación de engranes.

Para el montaje de engranes se debe de tener cuidado de que los ejes, tanto del engrane como de la flecha, estén paralelos entre sí, o la carga total será tomada en los extremos de los dientes en lugar del ancho completo de la cara, que producirá un desgaste excesivo del engrane lo mismo pasa si los dientes no cortan al eje de rotación en forma paralela.

Es importante contemplar que debe hacerse balanceo y ajuste adecuados para evitar que se generen vibraciones que provoquen desgaste y una menor vida útil.

El montaje de engranes en los ejes se puede hacer mediante una cuña, para lo cual, el engrane debe tener un escalón junto al círculo que se monta en el eje, mediante un opresor, que presiona al eje impidiendo que el engrane patine o resbale sobre él, o bien mediante estrías que generan una fricción tal que permita que no patine.

## 2.11. CALIDAD DE ENGRANES. ( Qv )

La norma AGMA 2000-A88 define las tolerancias dimensionales de los dientes de los engranes y del índice de calidad (Qv) que va del más bajo que es 3, al más alto de mayor precisión que es 16. El método de manufactura determina la calidad del engrane.

Tabla 2.5.- Número de calidad AGMA de acuerdo a la velocidad de la línea de paso.

Velocidad de línea de paso (pies/min)	Número de calidad AGMA	Velocidad de líneas de paso (m/s)
De 0 a 800	de 6 a 8	de 0 a 4
de 800 a 2000	De 8 a 10	de 4 a 11
de 2000 a 4000	De 10 a 12	de 11 a 22
Más de 4000	De 12 a 14	más de 22

Tabla 2.6.- Calidad de los engranes de acuerdo a su aplicación.

<b>Aplicación</b>	<b>Número de calidad AGMA</b>
Impulsor de malacate para mezcladora de cemento	de 3 a 5
Horno para secar cemento	de 5 a 6
Impulsores para fresadora de acero	de 5 a 6
Cosechadora de granos	de 5 a 7
Grúas	de 5 a 7
Prensa de punzón	de 5 a 7
Transportador para minería	de 5 a 7
Máquina para fabricar cajas de papel	de 6 a 8
Mecanismos para medir gas	de 7 a 9
Taladro eléctrico pequeño	de 7 a 9
Lavadora de ropa	de 8 a 10
Prensa para imprimir	de 9 a 11
Mecanismo de computadora	de 10 a 11
Transmisión automotriz	de 10 a 11
Impulsor para antena de radar	de 10 a 12
Impulsor de propulsión marina	de 10 a 12
Impulsor para motor de avión	de 10 a 13
Giroscopio	de 12 a 14

## **CAPÍTULO 3.**

ENGRANES HELICOIDALES.



Esta interpretación se puede hacer en base a la sección transversal de acuerdo al corte AA' que se muestra en la figura 3.1., teniendo una dirección transversal y un ángulo de presión  $\phi_t$ , con una paso circular  $P_t$  asociados a esta dirección; y también se puede hacer en base a la sección normal XX' que se muestra en la figura, teniendo una dirección en el plano normal con un ángulo de presión normal  $\phi_n$ .

La relación entre el paso transversal  $P_t$  y el paso normal  $P_n$  está dada por la siguiente expresión:

$$P_t = \frac{P_n}{\cos \psi} \quad (3.1)$$

donde:  $\psi$  es el ángulo helicoidal.

El paso axial  $P_x$  esta definido por la siguiente ecuación:

$$P_x = \frac{P_t}{\text{sen } \psi} \quad (3.2)$$

El número de dientes por pulgada sobre el círculo primitivo en la dirección del movimiento de los dientes es el paso diametral  $P$ , el cual define el tamaño del diente, y está dado por:

$$P = \frac{N}{d} = \frac{\pi}{P_t} = \frac{\pi}{P_c} \quad (3.3)$$

La relación entre el ángulo de presión normal  $\phi_n$  y el ángulo de presión transversal  $\phi_t$  en función al ángulo helicoidal  $\psi$  es la siguiente:

$$\tan \phi_n = \tan \phi_t \cos \psi \quad (3.4)$$

Los ángulos de presión en los dos planos están relacionados por:

$$\tan \phi_t = \tan \phi = \frac{\tan \phi_n}{\cos \psi} \quad (3.5)$$

El paso diametral en el plano normal  $P_{nd}$  está dado por:

$$P_{nd} = \frac{P_t}{\cos \psi} \quad (3.6)$$

$$(P_n)P_{nd} = \pi \quad (3.7)$$

El diámetro del círculo primitivo  $d$ , que determina el tamaño del engrane, está dado por:

$$d = \frac{N}{P_{nd} \cos \psi} \quad (3.8)$$

Donde:  $d_1$  y  $d_2$  son los diámetros de los círculos primitivos para engranes casantes con ángulos helicoidales  $\psi_1$  y  $\psi_2$ , y se obtienen de las siguientes ecuaciones:

$$d_1 = \frac{N_1 p}{\pi} = \frac{N_1 P_n}{\pi \cos \psi_1} = \frac{N_1}{P_n \cos \psi_1} \quad (3.9)$$

$$d_2 = \frac{N_2 p}{\pi} = \frac{N_2 P_n}{\pi \cos \psi_1} = \frac{N_2}{P_n \cos \psi_2} \quad (3.10)$$

La distancia entre centros es la siguiente:

$$c = \frac{d_1 + d_2}{2} = \frac{1}{2 P_n} \left[ \frac{N_1}{\cos \psi_1} + \frac{N_2}{\cos \psi_2} \right] \quad (3.11)$$

$V_n$  es la velocidad común normal a las superficies de los dientes del engrane,  $V_1$  y  $V_2$  son las velocidades de la línea de paso, la relación entre éstas es la siguiente:

$$V_n = V_1 \cos \psi_1 = V_2 \cos \psi_2 \quad (3.12)$$

La relación entre las velocidades de la línea de paso  $V_1$  y  $V_2$ , y los ángulos helicoidales  $\psi_1$  y  $\psi_2$  está dada por:

$$V_2 = \frac{\cos \psi_1}{\cos \psi_2} V_1 \quad (3.13)$$

Las velocidades angulares de los engranes son:

$$\omega_1 = \frac{2V_1}{d_1} \quad (3.14)$$

$$\omega_2 = \frac{2V_2}{d_2} = \frac{2 \cos \psi_1}{d_2 \cos \psi_2} \quad (3.15)$$

La relación de velocidades entre un par de engranes es:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{d_2 \cos \psi_2}{d_1 \cos \psi_1} \quad (3.16)$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{N_2}{N_1} \quad (3.17)$$

La razón de velocidades es independiente del ángulo helicoidal, y está dado por:

$$\beta = \frac{N_1}{N_2} \quad (3.18)$$

y también:

$$\frac{\beta}{\cos \psi_1} + \frac{1}{\cos \psi_2} = \frac{2(P_n d) c}{N_2} \quad (3.19)$$

La razón de contacto axial  $m_F$  se da por el hecho de que los dientes de los engranes están inclinados con un ángulo  $\psi$ , donde  $\psi$  debe ser mayor o igual a 1, lo que indica que mientras mayor sea el ángulo helicoidal  $\psi$  mayor será el número de dientes que entran en contacto en un mismo tiempo, y está dado por:

$$m_F = \frac{F}{P_x} = \frac{FP \tan \psi}{\pi} \quad (3.20)$$

### 3.2. FUERZAS EN EL DIENTE DEL ENGRANE.

La fuerza que actúa de forma directa en el diente del engrane y que será considerada para el análisis de esfuerzos en el diente más adelante es  $W$ , que refleja el contacto de un diente sobre otro a la entrada, que es donde se tiene el momento máximo, en la transmisión de potencia en un juego de engranes.

$W$  es la única fuerza que se transmite de un diente del piñón a uno del engrane, y actúa con el mismo ángulo de presión de diseño sobre el diente del engrane.

La fuerza transmitida al diente del piñón está definida por el ángulo de presión y el ángulo de la hélice del diente del engrane helicoidal.

$$W = \frac{W_t}{\cos \psi \cos \phi_n} \quad (3.21)$$

$W_t$  es la fuerza que actúa directamente sobre el diente y es por esto que es la fuerza que se toma en cuenta para el diseño del engrane y se considera como una viga cantilever, y  $W_r$  al ser la fuerza radial genera un esfuerzo de compresión sobre el diente del engrane, y debido a que los materiales utilizados para la fabricación de engranes tienen una muy alta resistencia a la compresión, no afecta el desempeño ni genera alguna modificación en la geometría del diente y no se toma en cuenta para el análisis de diseño.

Las reacciones generadas por la fuerza  $W$  que es la reacción  $R$  y sus componentes  $R_r$  y  $R_s$ , son de igual magnitud que las componentes  $W_r$  y  $W_t$  pero en sentido contrario como se muestra en la figura 3.2.

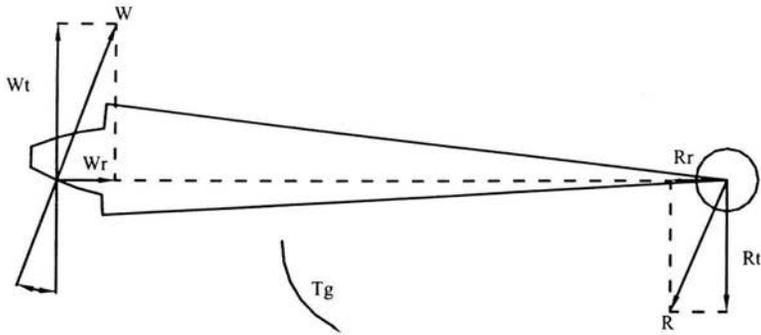
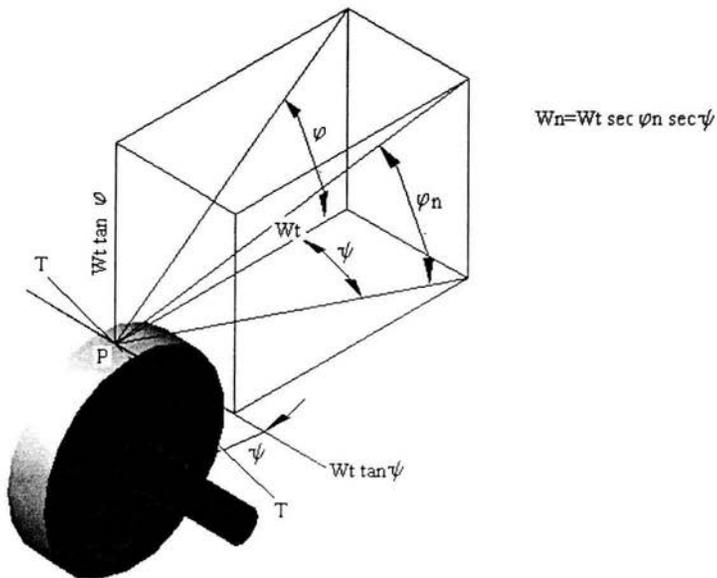


Figura 3.2.- Fuerzas en el engrane.

Las fuerzas que se presentan en los dientes de los engranes helicoidales y los ángulos generados por estas fuerzas se presentan en la figura 3.3.



$$W_n = W_t \sec \varphi_n \sec \psi$$

Figura 3.3.- Fuerzas en los dientes de los engranes helicoidales.

La fuerza tangencial  $W_t$  se puede expresar en función de los momentos que ésta genera, es decir, por el torque que provoca con su respectiva distancia, y el tamaño del diente dado por el paso diametral  $P$ .

$$W_t = \frac{T_p}{R_p} = \frac{2T_p}{d_p} = \frac{2PT_p}{N_p} \quad (3.22)$$

También puede ser expresada por la fuerza normal y la inclinación del ángulo al plano tangente al círculo de paso  $\phi_n$  y con un ángulo helicoidal  $\psi$  con el plano de rotación.

$$W_t = W \cos \phi_n \cos \psi \quad (3.23)$$

Una relación útil entre el  $\phi_n$  de los dientes, el ángulo de presión en el plano de rotación  $\phi$  y el ángulo helicoidal  $\psi$  es:

$$\tan \phi_n = \tan \phi \cos \psi \quad (3.24)$$

La fuerza radial o de compresión está dada por la siguiente ecuación:

$$W_r = W_t \tan \phi \quad (3.25)$$

$T_p$  es el torque transmitido por el piñón,  $R_p$  es el radio primitivo del piñón,  $N_p$  el número de dientes del piñón y  $D_p$  es el diámetro primitivo del piñón.

$$T_p = \frac{P}{\omega_p} \quad (3.26)$$

$$T_g = m_G T_p \quad (3.27)$$

Se tienen las siguientes ecuaciones:

$$V_b = \frac{\pi d n \cos \phi}{60,000} \quad (3.28)$$

$$kW = \frac{WV_b}{1,000} = \frac{W_t V}{1,000} \quad (3.29)$$

donde:  $V_b$  es la velocidad en el círculo exterior.

$D$  es el diámetro exterior.

$n$  es la velocidad angular.

$kW$  es la potencia transmitida.

Si el torque es constante, con el tiempo, el diente experimentará cargas repetidas como resultado del engranaje, creando la situación de cargas de fatiga.

Las fuerzas de fricción, al ser muy bajas, no se consideran.

### 3.3. ESFUERZOS EN LOS DIENTES DEL ENGRANE.

En el diente del engrane se presentan 2 tipos de esfuerzos, el normal ( $\sigma$ ) y el cortante ( $\tau$ ).

En esta sección se determinará el esfuerzo normal que actúa en el diente del engrane, el esfuerzo cortante no se calcula por ser muy bajo.

Hay 2 causas principales que afectan al diente del engrane:

1. Fractura por fatiga.
2. Fatiga de la superficie.

Éste último es el modo mas común de fractura.

La ecuación de Lewis en 1892, fué la primera ecuación para la curva de esfuerzos en un diente, considerándolo como viga cantilever, tal como se muestra en la figura 3.4.

$$\sigma = \frac{WtP}{FY} \quad (3.30)$$

donde Y es el factor de geometría de Lewis.

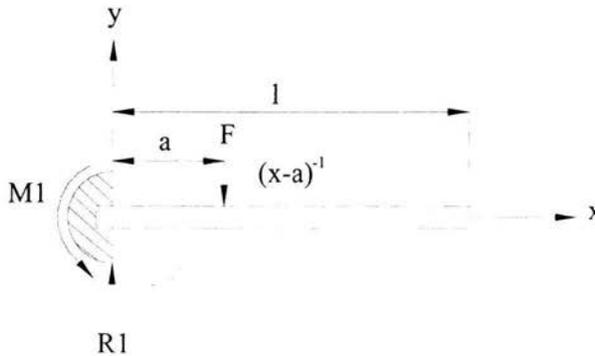


Figura 3.4.- Viga cantilibre.

### 3.4. ECUACIÓN DE ESFUERZOS.

Las ecuaciones de esfuerzos necesarias para el cálculo y diseño de los engranes helicoidales necesarias para establecer los datos correctos para su fabricación se presentan a continuación.

### 3.4.1. Esfuerzo de flexión en el diente. ( S )

La ecuación de esfuerzos de norma AGMA 2001-C95 es válida para las siguientes asunciones de la geometría del diente del engrane:

1. Relación de contacto entre 1 y 2.
2. No hay interferencia entre las puntas y los filetes de la raíz y no hay rebaje de los dientes arriba del inicio teórico del perfil activo del diente.
3. Los dientes no son puntiagudos.
4. El huelgo es nulo.
5. Los filetes de las raíces son estándar, tersos y producidos por un proceso de generación.
6. Las fuerzas de fricción no están consideradas.

La ecuación de esfuerzo de flexión es la siguiente:

$$S = \frac{W_t P}{F J} K_m K_B K_o K_v K_s \quad (3.31)$$

#### 3.4.1.1. Factor dinámico. ( $K_v$ )

Este factor toma en cuenta las cargas entre dientes que se generan internamente y que son inducidas por un acoplamiento no conjugado entre los dientes del engrane, cuando está en movimiento.

Este factor contempla las vibraciones (cargas dinámicas) que se producen por los impactos continuos entre los dientes del engrane. A éstas vibraciones por cargas dinámicas se les llama errores de transmisión.

$$A = 50 + 56(1.0 - B) \quad (3.32)$$

$$B = 0.25(12 - Q_v)^{0.667} \quad (3.33)$$

$$K_v = \left( \frac{A + \sqrt{V_t}}{A} \right)^B \quad (3.34)$$

donde:

$A$  y  $B$  son constantes que dependen de  $Q_v$ .

$Q_v$  es la calidad AGMA

$V_t$  es la velocidad tangencial

### 3.4.1.2. Factor de distribución de carga. ( $K_m$ )

Se utiliza para aproximar las cargas desiguales en el diente como cargas distribuidas, procurando incrementar el esfuerzo de diseño en el diente para cualquier desalineación axial o desviación axial, que generen cargas disperejas distribuidas sobre el ancho de cara del diente, es por esto que se presentan más pronunciados sobre los dientes de cara larga.

Los siguientes factores pueden provocar desalineación en el diente del piñón en relación a los del engrane:

1. Desalineación de los ejes.
2. Poca precisión en los dientes de los engranes.
3. Deformación elástica de los engranes.
4. Distorsión térmica durante la operación.
5. Espaciamientos entre los ejes, engranes, cojinetes y cuñeros.
6. Calidad del material del engrane.

Los valores de  $K_m$  se proporcionan en la tabla 3.1.

Tabla 3.1.- Valores de  $K_m$

Ancho del diente		$K_m$
In	mm	
<2	50	1.6
6	150	1.7
9	250	1.8
12	350	1.9
>20	500	2

Para  $\frac{8}{P} < F < \frac{16}{P}$ , con  $\frac{12}{P}$  como nominal.

$F$  es el ancho del diente o ancho de cara.

### 3.4.1.3. Factor de tamaño. ( $K_s$ )

Este factor refleja la no uniformidad de las propiedades del material. A la falta de valores estandarizados para su utilización, la AGMA propone tomar el valor de  $K_s = 1$  para diseño de engranes comunes con  $P \geq 5$ , y utiliza valores de 1.25 o 1.5 para  $P < 5$  por tener tamaños de diente muy grandes, para procurar un coeficiente de seguridad por tamaño más alto en el diseño.

#### 3.4.1.4. Factor de espesor de borde. ( $K_B$ )

Se usa cuando el engrane se construye con un borde y rayos antes que como un disco sólido, por lo que puede ocurrir falla a través del borde en vez de en la raíz del diente y si la corona es muy delgada, puede deformarse y provocar que el punto de tensión máxima cambie el área del chaflán de los dientes del engrane a un punto dentro de la corona.

$$m_B = \frac{t_R}{h_t} \quad (3.35)$$

$$K_B = 1.6 \ln \left( \frac{2.242}{m_B} \right), \quad 0.5 \leq m_B \leq 1.2 \quad (3.36)$$

$$K_B = 1.0, \quad m_B > 1.2 \quad (3.37)$$

$m_B$  es la razón de respaldo o apoyo.

$t_R$  es el espesor del borde bajo la raíz del diente.

$h_t$  es la profundidad total.

AGMA 2001-B88

#### 3.4.1.5. Factor de sobrecarga. ( $K_o$ )

El factor de sobrecarga toma en cuenta todas las cargas que se aplican de forma externa en exceso de la carga tangencial nominal.

Para seguridad se utiliza un factor de  $K_o=1$  para una capacidad de soportar hasta 200% de sobrecargas momentáneas, y un valor de  $K_o>1$  para una capacidad mayor de sobrecargas.

#### 3.4.1.6. Factor geométrico de esfuerzos. ( $J$ )

El factor geométrico se calcula mediante un algoritmo definido en la norma AGMA 908-B89, y debido a ésta complejidad se proporcionan las tablas para engranes estandarizados

Éste factor se obtiene como un análisis más completo de la geometría, partiendo de la ecuación de Lewis.

Las tablas de factor geométrico se presentan en las tablas 3.2.

Tabla 3.2.- Valores del Factor geométrico J para ángulos de presión de 20° y 25° y ángulo helicoidales de 10°, 15°, 20° y 25°.

Ángulo de presión **20**

Ángulo helicoidal **15**

Dientes Del engrane	Dientes del piñón															
	12		14		17		21		26		35		55		135	
	P	E	P	E	P	E	P	E	P	E	P	E	P	E	P	E
12	U	U														
14	U	U	U	U												
17	U	U	U	U	0.43	0.43										
21	U	U	U	U	0.44	0.46	0.47	0.47								
26	U	U	U	U	0.45	0.49	0.48	0.5	0.5	0.5						
35	U	U	U	U	0.46	0.52	0.49	0.53	0.51	0.53	0.54	0.54				
55	U	U	U	U	0.47	0.55	0.5	0.56	0.53	0.57	0.56	0.58	0.59	0.59		
135	U	U	U	U	0.48	0.59	0.51	0.6	0.54	0.61	0.57	0.62	0.61	0.64	0.65	0.65

La letra "U" indica una combinación de dientes de engranes que producen una forma de diente rebajado en una o ambas componentes y debe ser evitada.

Ángulo de presión **20**

Ángulo helicoidal **10**

Dientes Del engrane	Dientes del piñón															
	12		14		17		21		26		35		55		135	
	P	E	P	E	P	E	P	E	P	E	P	E	P	E	P	E
12	U	U														
14	U	U	U	U												
17	U	U	U	U	U	U										
21	U	U	U	U	U	U	0.46	0.46								
26	U	U	U	U	U	U	0.47	0.49	0.49	0.49						
35	U	U	U	U	U	U	0.48	0.52	0.5	0.53	0.54	0.54				
55	U	U	U	U	U	U	0.49	0.55	0.52	0.56	0.55	0.57	0.59	0.59		
135	U	U	U	U	U	U	0.5	0.6	0.53	0.61	0.57	0.62	0.6	0.63	0.65	0.65

La letra "U" indica una combinación de dientes de engranes que producen una forma de diente rebajado en una o ambas componentes y debe ser evitada.

Ángulo de presión **20**

Ángulo helicoidal **20**

Dientes del engrane	Dientes del piñón															
	12		14		17		21		26		35		55		135	
	P	E	P	E	P	E	P	E	P	E	P	E	P	E	P	E
12	U	U														
14	U	U	U	U												
17	U	U	U	U	0.44	0.44										
21	U	U	U	U	0.45	0.46	0.47	0.47								
26	U	U	U	U	0.45	0.49	0.48	0.49	0.5	0.5						
35	U	U	U	U	0.46	0.51	0.49	0.52	0.51	0.53	0.54	0.54				
55	U	U	U	U	0.47	0.54	0.5	0.55	0.52	0.56	0.55	0.57	0.58	0.58		
135	U	U	U	U	0.48	0.58	0.51	0.59	0.54	0.6	0.57	0.61	0.6	0.62	0.64	0.64

La letra "U" indica una combinación de dientes de engranes que producen una forma de diente rebajado en una o ambas componentes y debe ser evitada.

Ángulo de presión **20**

Ángulo helicoidal **30**

Dientes del engrane	Dientes del piñón															
	12		14		17		21		26		35		55		135	
	P	E	P	E	P	E	P	E	P	E	P	E	P	E	P	E
12	U	U														
14	U	U	0.39	0.39												
17	U	U	0.39	0.41	0.41	0.41										
21	U	U	0.4	0.43	0.42	0.43	0.44	0.44								
26	U	U	0.41	0.44	0.43	0.45	0.45	0.46	0.46	0.46						
35	U	U	0.41	0.46	0.43	0.47	0.45	0.48	0.47	0.48	0.49	0.49				
55	U	U	0.42	0.49	0.44	0.49	0.46	0.5	0.48	0.5	0.5	0.51	0.52	0.52		
135	U	U	0.43	0.51	0.45	0.52	0.47	0.53	0.49	0.53	0.51	0.54	0.53	0.55	0.56	0.56

La letra "U" indica una combinación de dientes de engranes que producen una forma de diente rebajado en una o ambas componentes y debe ser evitada.

Ángulo de presión **25**

Ángulo helicoidal **15**

Dientes del engrane	Dientes del piñón															
	12		14		17		21		26		35		55		135	
	P	E	P	E	P	E	P	E	P	E	P	E	P	E	P	E
12	U	U														
14	U	U	0.49	0.49												
17	U	U	0.5	0.53	0.53	0.53										
21	U	U	0.5	0.56	0.54	0.57	0.58	0.58								
26	U	U	0.51	0.59	0.55	0.6	0.58	0.61	0.61	0.61						
35	U	U	0.52	0.63	0.55	0.64	0.59	0.64	0.62	0.65	0.66	0.66				
55	U	U	0.52	0.67	0.56	0.68	0.6	0.68	0.63	0.69	0.67	0.7	0.71	0.71		
135	U	U	0.53	0.72	0.57	0.72	0.61	0.73	0.64	0.74	0.68	0.75	0.72	0.76	0.78	0.78

La letra "U" indica una combinación de dientes de engranes que producen una forma de diente rebajado en una o ambas componentes y debe ser evitada.

Ángulo de presión **25**

Ángulo helicoidal **10**

Dientes del engrane	Dientes del piñón															
	12		14		17		21		26		35		55		135	
	P	E	P	E	P	E	P	E	P	E	P	E	P	E	P	E
12	U	U														
14	U	U	0.47	0.47												
17	U	U	0.48	0.51	0.52	0.52										
21	U	U	0.48	0.55	0.52	0.55	0.56	0.56								
26	U	U	0.49	0.58	0.53	0.58	0.57	0.59	0.6	0.6						
35	U	U	0.5	0.61	0.54	0.62	0.57	0.63	0.61	0.64	0.64	0.64				
55	U	U	0.51	0.65	0.55	0.66	0.58	0.67	0.62	0.68	0.65	0.69	0.7	0.7		
135	U	U	0.52	0.7	0.56	0.71	0.6	0.72	0.63	0.73	0.67	0.74	0.71	0.75	0.76	0.76

La letra "U" indica una combinación de dientes de engranes que producen una forma de diente rebajado en una o ambas componentes y debe ser evitada.

Ángulo de presión 25

Ángulo helicoidal 20

Dientes del engrane	Dientes del piñón															
	12		14		17		21		26		35		55		135	
	P	E	P	E	P	E	P	E	P	E	P	E	P	E	P	E
12	0.47	0.47														
14	0.47	0.5	0.5	0.5												
17	0.48	0.53	0.51	0.54	0.54	0.54										
21	0.48	0.56	0.51	0.57	0.55	0.58	0.58	0.58								
26	0.49	0.59	0.52	0.6	0.55	0.6	0.69	0.61	0.62	0.62						
35	0.49	0.62	0.53	0.63	0.56	0.64	0.5	0.64	0.62	0.65	0.66	0.66				
55	0.5	0.66	0.53	0.67	0.57	0.67	0.6	0.68	0.63	0.69	0.67	0.7	0.71	0.71		
135	0.51	0.7	0.54	0.71	0.58	0.72	0.62	0.72	0.65	0.73	0.68	0.74	0.72	0.75	0.76	0.76

Ángulo de presión 25

Ángulo helicoidal 30

Dientes del engrane	Dientes del piñón															
	12		14		17		21		26		35		55		135	
	P	E	P	E	P	E	P	E	P	E	P	E	P	E	P	E
12	0.46	0.46														
14	0.47	0.49	0.49	0.49												
17	0.47	0.51	0.5	0.52	0.52	0.52										
21	0.48	0.54	0.5	0.54	0.53	0.55	0.55	0.55								
26	0.48	0.56	0.51	0.56	0.53	0.57	0.56	0.57	0.58	0.58						
35	0.49	0.58	0.51	0.59	0.54	0.59	0.56	0.6	0.58	0.6	0.61	0.61				
55	0.49	0.61	0.52	0.61	0.54	0.62	0.57	0.62	0.59	0.63	0.62	0.64	0.64	0.64		
135	0.5	0.64	0.53	0.64	0.55	0.65	0.58	0.66	0.6	0.66	0.62	0.67	0.65	0.68	0.68	0.68

### 3.4.2. Ecuación de esfuerzo permisible de flexión . ( Sp )

Ésta ecuación permite encontrar el esfuerzo permisible del engrane en su accionamiento, en base a diversos factores que consideran tanto el material del cual está hecho el engrane como la utilización del engrane y la vida útil que éste debe tener.

$$S_p \leq \frac{S_{at} Y_N}{S_F K_T K_R} \quad (3.38)$$

donde:

$S_{at}$  Esfuerzo permisible de flexión.

$Y_N$  Factor del ciclo de esfuerzo para la resistencia a la picadura.

$S_F$  Factor de seguridad.

$K_T$  Factor de temperatura.

$K_R$  Factor de confiabilidad.

### 3.4.2.1. Esfuerzo permisible de flexión sin corrección. ( $S_{at}$ )

Éste esfuerzo depende de factores como: limpieza, composición de material, esfuerzo residual, calidad del material, microestructura, tratamiento térmico y operación; Y varía dependiendo del material del que está hecho el engrane, por lo que se recomienda consultar la norma AGMA 2001-C95 para encontrar el valor correcto del  $S_{at}$  o consultar la siguiente tabla:

Tabla 3.3.- Esfuerzo permisible de flexión para engranes de hierro y bronce.

Material	Designación del material	Tratamiento térmico	Dureza superficial mínima típica	Esfuerzo permisible de flexión $S_e$ Lb/in <sup>2</sup>
Hierro fundido gris ASTM A48	Clase 20	Tal como es fundido	-----	5,000
	Clase 30	Tal como es fundido	174 HB	8,500
	Clase 40	Tal como es fundido	201 HB	13,000
Hierro dúctil ASTM A536	Grado 60-40-18	Recocido	140 HB	22,000-33,000
	Grado 80-55-06	Templado y revenido	179 HB	23,000-33,000
	Grado 100-70-03	Templado y revenido	229 HB	27,000-40,000
	Grado 120-90-02	Templado y revenido	269 HB	31,000-44,000
Bronce	-----	Fundido en arena	Resistencia mínima a la tensión de 40,000 lb/in <sup>2</sup>	5,700
	Aleación 954 ASTM M-148	Tratado térmicamente	Resistencia mínima a la tensión de 90,000 lb/in <sup>2</sup>	23,600

### 3.4.2.2. Factor de ciclo de esfuerzo. ( $Y_N$ )

Se emplea para hacer un ajuste del número permisible de ciclos de esfuerzos de la operación, es decir, el número de acoplamientos del diente del engrane cuando se encuentra bajo carga. La norma AGMA establece un valor de  $Y_N=1$  para  $10^7$  ciclos unidireccionales de carga en el diente con una confiabilidad del 99% y un valor de  $Y_N>1$  para ciclos menores de  $10^7$ .

### 3.4.2.

### 3.4.2.3. Factor de seguridad. ( $S_F$ )

El factor de seguridad contempla las incertidumbres que provienen de las características del material, tolerancias y factor de riesgo humano entre otras.

Este factor es propuesto por el diseñador por códigos industriales, y debe ser  $>1$ .

### 3.4.2.4. Factor de temperatura. ( $K_T$ )

El factor de temperatura contempla la ductilidad y dureza del material influido por el comportamiento de los lubricantes en la variación de la temperatura.

Éste factor se considera  $K_T = 1$ , para engranes que operan con temperaturas del aceite no mayor a 250°F. Para temperaturas superiores a los 250°F o menores a los del punto de congelación, es necesario consultar las normas AGMA 2001-C95.

### 3.4.2.5. Factor de confiabilidad. ( $K_R$ )

Éste factor se utiliza para ajustar el número de fallas a la distribución estadística normal de fallas encontradas en pruebas de materiales.

Los valores de  $K_R$  se presentan a continuación:

$K_R = 1.50$  , para menos de una falla en 10,000,000 ciclos.

$K_R = 1.25$  , para menos de una falla en 1,000,000 ciclos.

$K_R = 1.00$  , para menos de una falla en 100,000 ciclos.

### 3.4.3. Esfuerzo de contacto en el diente.( $S_c$ )

Es la aplicación del esfuerzo para la falla por picadura.

La ecuación de esfuerzo de contacto es la siguiente:

$$S_c = C_p \sqrt{W_t K_o K_v} \frac{K_m C_f}{d F I} \quad (3.39)$$

$$d = \frac{2C}{m_G + 1} \quad (3.40)$$

- C<sub>p</sub> Coeficiente elástico (lb/in<sup>2</sup>)<sup>0.5</sup>.
- S<sub>c</sub> Esfuerzo de contacto (psi).
- C<sub>f</sub> Factor de condición superficial para la resistencia a la picadura.
- d Diámetro del círculo primitivo
- I Momento de inercia

### 3.4.3.1. Coeficiente elástico. (C<sub>p</sub>)

El coeficiente elástico depende de las propiedades mecánicas del material y se define con la siguiente ecuación:

$$C_p = \sqrt{\frac{1}{\pi \left[ \left( \frac{1 - \mu_p^2}{E_p} \right) + \left( \frac{1 - \mu_G^2}{E_G} \right) \right]}} \quad (3.41)$$

Donde:  $E_p$  Módulo de elasticidad del material del piñón.

$E_G$  Módulo de elasticidad del material del engrane.

$\mu_p$  Razón de Poisson para el piñón. ( $0.3 < \mu_p < 0.45$  dependiendo del tipo de material)

$\mu_G$  Razón de Poisson para el engrane. ( $0.3 < \mu_p < 0.45$  dependiendo del tipo de material)

### 3.4.3.2. Factor de condición superficial para la resistencia a la picadura. (C<sub>f</sub>)

Este factor depende de la superficie del diente, de los esfuerzos presentes y del efecto plástico que se presenta en los distintos materiales. La AGMA recomienda un factor de condición superficial de 1 para dientes maquinados de forma estándar y >1 para maquinados de menor calidad.

### 3.4.4. Límite a la fatiga superficial. (S<sub>f</sub>)

La fatiga superficial es la primera causa de fractura en los materiales, debido a esto, la AGMA generó una fórmula en la que combina los principales factores que se combinan para crear la fatiga de los diferentes materiales.

$$S_f = \frac{S_{ac} Z_N C_H}{S_H K_T K_R} \quad (3.42.)$$

- Donde:
- $S_{ac}$  Esfuerzo permisible de contacto para el material. (Psi)
  - $Z_N$  Factor de ciclo de esfuerzos para la resistencia a la picadura.
  - $C_H$  Factor de razón de dureza para resistencia a la picadura.

### 3.4.4.1. Ecuación de esfuerzo permisible de contacto para el material. ( $S_{ac}$ )

El esfuerzo permisible de contacto, es el esfuerzo máximo que permite el material en su superficie, el cual incluye factores tales como la limpieza del material, el esfuerzo residual neto, los cristales, la composición del material, el tratamiento término al cual fue sujeto y a la calidad y tipo de mecanizado que se le realiza.

Los esfuerzos  $S_{ac}$  se presentan en la siguiente tabla:

Tabla 3.4.- Esfuerzo permisible a la fatiga superficial.

Material	Designación del material	Tratamiento térmico	Dureza superficial mínima típica	Esfuerzo permisible de flexión $S_{ac}$ lb/in <sup>2</sup>
Hierro fundido gris ASTM A48	Clase 20	Tal como es fundido	-----	55,000
	Clase 30	Tal como es fundido	174 HB	70,000
	Clase 40	Tal como es fundido	201 HB	82,000
	Grado 60-40-18	Recocido	140 HB	77,000-92,000
Hierro dúctil ASTM A536	Grado 80-55-06	Templado y revenido	179 HB	77,000-92,000
	Grado 100-70-03	Templado y revenido	229 HB	92,000-112,000
	Grado 120-90-02	Templado y revenido	269 HB	115,000
Bronce	-----	Fundido en arena	Resistencia mínima a la tensión de 40,000 lb/in <sup>2</sup>	30,000
	Aleación 954 ASTM M-148	Tratado térmicamente	Resistencia mínima a la tensión de 90,000 lb/in <sup>2</sup>	65,000

### 3.4.4.2. Factor de ciclos de esfuerzos para la resistencia a la picadura. ( $Z_N$ )

Se trata del número de ciclos de contacto entre cada acoplamiento de dientes bajo carga, donde es un factor para ajustar los ciclos requeridos con el esfuerzo permisible de los distintos materiales.

$Z_N = 1$  para un factor de confiabilidad de  $10^7$  ciclos bajo carga unidireccional, y  $Z_N > 1$  si el número de ciclos aumenta hasta llegar a  $Z_N = 2$  y  $Z_N < 1$  para ciclos menores.

### 3.4.4.3. Factor de razón de dureza para resistencia a la picadura. ( $C_H$ )

Es el factor de razón de dureza que debe existir entre el piñón y los engranes, el cual depende del acabado superficial y de la dureza del material.

Éste factor se da debido a que los dientes del piñón regularmente tienen menos dientes que los del engrane, es por esto que la razón de contacto ( $m_p$ ) entre engrane y piñón hacen que los dientes del piñón tengan un mayor desgaste debido a que entran en acoplamiento un mayor número de veces que los de los engranes.

$$m_p = 0 \quad C_H = 1 \quad (3.43)$$

$$1.2 < m_p < 1.7 \quad C_H = 1.0035 \quad (3.42)$$

$$m_p > 1.7 \quad C_H = 1.00698 \quad (3.43)$$

## **CAPÍTULO 4.**

PROGRAMA PARA EL CÁLCULO DE ENGRANES  
HELICOIDALES.

## CAPÍTULO 4

### PROGRAMA PARA EL CÁLCULO DE ENGRANES HELICOIDALES.

#### 4.1. PROGRAMACIÓN ORIENTADA A OBJETOS

La Programación Orientada a Objetos ( OOP ) es una forma y una metodología de diseño de programación de software. La OOP empieza en los años 80 a partir de la programación estructurada (que se enfoca a la manipulación de datos), y trata de organizar el programa en base al modelo, en el que la estructura de datos es el pivote de las operaciones que analiza la interrelación entre los datos y las acciones que realizan. La OOP estructura los datos en objetos que pueden almacenar, manipular y combinar información proporcionando uniformidad, comprensión, flexibilidad, estabilidad y reusabilidad.

##### 4.1.1 Objetos.

Los objetos son las etiquetas, botones, casillas de verificación, cuadro de grupo, botón de opción, cuadro de lista entre otros que tienen un icono y una función propia con los que se empieza la OOP en Visual Basic. Los objetos constan de identidad aunque tengan atributos iguales. Las clases permiten la agrupación y relación de objetos que comparten las mismas propiedades (atributos) y comportamiento (operaciones).

La presentación de información en un objeto puede ser:

- **Interna:** que es privada, y es información que necesitan los objetos para operar.
- **Externa:** que es pública, y es la información que necesitan los demás objetos para interactuar con el objeto definido.

##### 4.1.2. Encapsulación.

La encapsulación indica la información oculta que tiene un objeto que es necesaria para el uso interno pero no para los usuarios, y debe ser fácilmente modificable (mantenibilidad) y la utilización de códigos generales (librerías) aplicables a otros programas (reusabilidad). La ocultación de información son aquellos datos que no están disponibles para los usuarios.

### 4.1.3. Jerarquía

Los objetos tienen jerarquía que pueden ser simple o compleja, y se distinguen en tres niveles:

- **La raíz de la jerarquía**, es un objeto único y especial que tiene el más alto nivel en la estructura y tiene un nombre muy genérico.
- **Los objetos intermedios** (clases), descienden directamente de la raíz y a su vez tienen descendientes y tienen nombres genéricos.
- **Los objetos terminales**, descienden de una clase o subclase, no tienen descendientes y tienen nombres específicos o particulares.

### 4.1.4. Relaciones.

Son los enlaces entre los objetos de la estructura.

Existen 2 tipos:

**Relaciones jerárquicas**, son bidireccionales y va ordenado por niveles de importancia.

**Relaciones semánticas**, son aquellas que no forman parte de los objetos que las establecen, es decir, dependen de sí mismos.

### 4.1.5 Polimorfismo

El polimorfismo permite definir varias operaciones con el mismo nombre y solo diferenciadas en los parámetros de entrada. Permite construir varios métodos con el mismo nombre, pero con relación a la clase a la que pertenece con diferentes comportamientos.

### 4.1.6. Herencia.

La herencia consiste en dar atributos y operaciones a distintas subclases definidas de una clase común o principal, como estructuras jerárquicas en las que las subclases operan con sus propios atributos.

## 4.2. DIAGRAMA DE FLUJO DEL PROGRAMA.

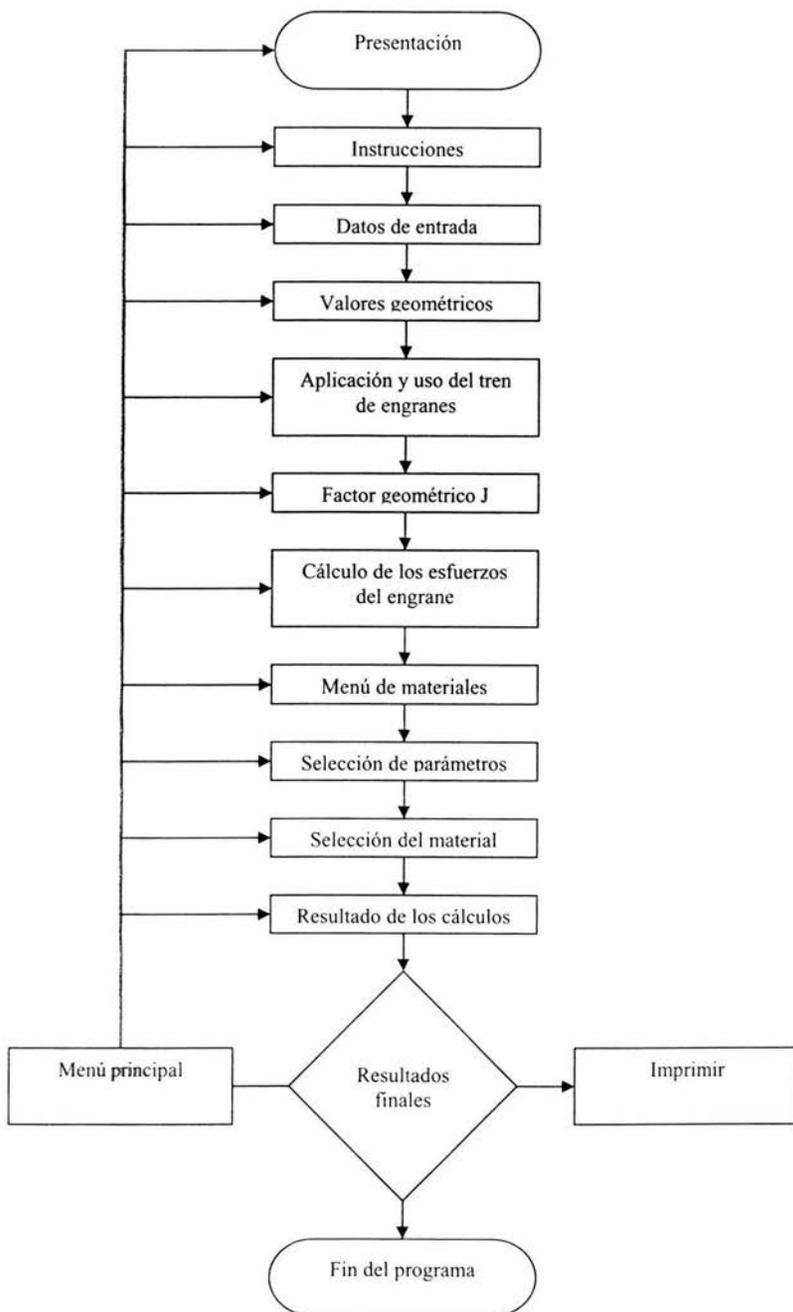


Figura 4.1. Diagrama de flujo

### 4.3. REQUERIMIENTOS DEL SISTEMA PARA EL USO DEL PROGRAMA

Para poder correr el programa en la computadora se necesita lo siguiente:

- Microsoft Windows 98, 2000, Me o XP
- Procesador a mas de 300 MHz.
- 48 MB en memoria RAM o superior.
- 30 MB disponibles en disco duro o más.

### 4.4. USO DEL PROGRAMA PARA EL CÁLCULO DE ENGRANES HELICOIDALES.

#### 4.4.1. Uso del programa.

La primer pantalla es la presentación del programa con los datos generales del mismo. Figura 4.2. A ésta forma sólo basta dar clic en el botón “Iniciar HENGEAR” para continuar.



Figura 4.2.- Presentación

La pantalla Instrucciones, es una introducción al programa que contiene las instrucciones generales. Muestra también las diferentes maneras de introducir datos al programa y el cómo debe hacerse en cada uno de ellos.

En el cuadro e llenado es necesario introducir un valor numérico después de dar un clic sobre el cuadro.

El cuadro de opciones permite introducir un valor numérico así como seleccionarlo al dar un clic sobre la flecha, que muestra los diferentes valores estandarizados según sea el caso.

Las tablas de selecciones permiten que después de seleccionar una opción por medio de un clic, se genere un valor automático de acuerdo a la selección realizada. Figura 4.3.

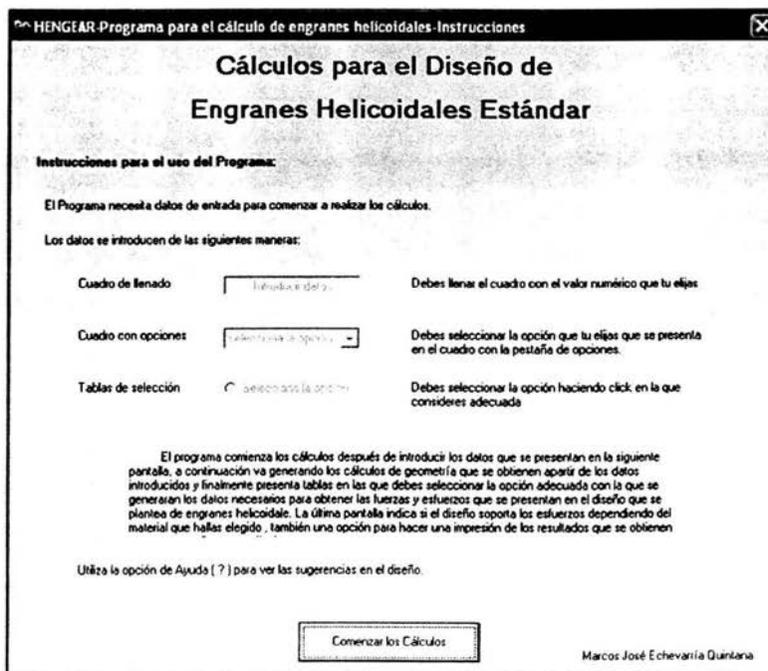


Figura 4.3.- Instrucciones.

La pantalla Datos de entrada, presenta los datos de entrada que deben ser introducidos por el usuario para empezar a generar los cálculos. Si el usuario tiene duda se presenta un botón de “Ayuda” para que pueda ser utilizada y facilitar la introducción de los datos.

En ésta pantalla se presentan 2 maneras de introducir valores numéricos que son el cuadro de llenado y el cuadro de opciones.

Éstos son los valores con los que se empieza a generar los cálculos para diseño de engranes helicoidales. Figura 4.4.

Datos de Entrada	
Unidades para realizar los cálculos	Sistema Inglés
Potencia	5 Hp
Módulo	12
Ángulo helicoidal del Piñón	20
Ángulo helicoidal del Engrane	0
Ángulo de presión	25
Velocidad del piñón	1750 rpm
Número de dientes del Piñón	14
Relación de velocidad	Piñón : Engrane 2 a 1

Regresar      Continuar      ?

Figura 4.4.- Datos de entrada.

La pantalla Valores Geométricos, presenta los resultados encontrados con los datos introducidos en la pantalla Datos de entrada, los resultados encontrados hasta este momento son de la geometría del engrane, con el cual si no son los que el usuario busca puede dar clic en el botón *Regresar* para volver a introducir valores en la pantalla Datos de entrada e ir buscando la geometría que desee.

A excepción del valor de ancho de cara que es un cuadro de llenado donde se permite la introducción de valores numéricos para ésta dimensión, los demás valores únicamente se muestran, y la única forma de variarlos es a través de los valores introducidos en la pantalla anterior. Figura 4.5.

**Valores Geométricos**

Paso Diametral Normal	$P_d$	0.2815	plg	Velocidad del Piñón	$V_p$	267.2537	pie/min
Paso Circular	$P_c$	0.2618	plg	Velocidad del Engrane	$V_g$	133.6268	pie/min
Adendo	$a$	0.0833	plg	Distancia entre Centros	$c$	1.75	plg
Destado	$b$	0.0964	plg	Número de Dientes del Piñón	$N_p$	14	
Diámetro Piñón	$d_p$	1.1667	plg	Número de Dientes del Engrane	$N_g$	28	
Diámetro Engrane	$d_g$	2.3333	plg	Profundidad Total del Diente	$h_t$	0.1797	plg
Diámetro Exterior Piñón	$O_p$	1.3333	plg				
Diámetro Exterior Engrane	$O_g$	2.5	plg				
				Introduzca el valor del Ancho de Cara	$F$	1	plg

Regresar      Continuar

Figura 4.5.- Valores Geométricos.

La pantalla Aplicación, presenta una tabla en la que debes seleccionar con un clic la aplicación en la que se ocuparán los engranes helicoidales. Ésta tabla indica la calidad AGMA que debe tener el engrane en su diseño para cumplir con el uso que se desea. El número de calidad AGMA se incrementa en tanto la aplicación del tren de engranes requiera de una precisión mayor para sistemas que así lo requieren. Se presenta también una opción de ayuda ( ? ) si el usuario la requiere. Figura 4.6.

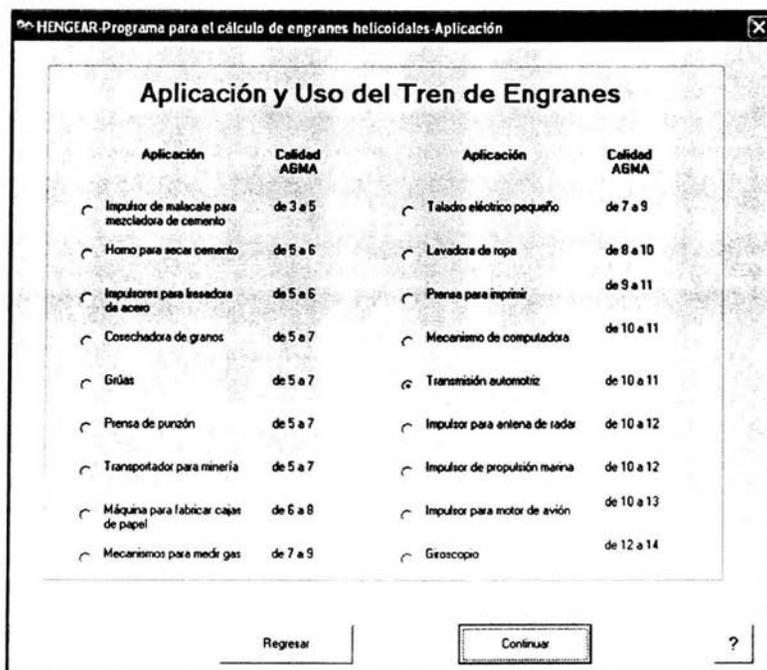


Figura 4.6.- Aplicación.

La pantalla Factor Geométrico presenta una tabla con el factor geométrico ( J ) que varia de acuerdo al ángulo helicoidal y el ángulo de presión. La selección del valor se da por medio de un clic en el valor deseado en la tabla de acuerdo al número de dientes del engrane y el piñón que se presentan del lado izquierdo; Pudiendo introducir un valor distinto si así lo requiere el usuario, sobre el cuadro de llenado donde se pide se introduzca dicho valor. Se muestra un cuadro de ayuda ( ? ) si el usuario así lo requiere. En caso de que no se presente el valor exacto en la intersección del número de dientes entre piñón y engrane, se recomienda usar el valor del siguiente inmediato superior para utilizarlo. Figura 4.7.

HENGEAR-Programa para el cálculo de engranes helicoidales-Factor Geométrico

Ángulo de presión 25  
 Ángulo helicoidal 20

Dientes del engrane	Dientes del piñón															
	12		14		17		21		26		35		55		135	
	P	E	P	E	P	E	P	E	P	E	P	E	P	E	P	E
12	0.47	0.47														
14	0.47	0.5	0.5	0.5												
17	0.48	0.53	0.51	0.54	0.54	0.54										
21	0.48	0.56	0.51	0.57	0.55	0.58	0.58	0.58								
26	0.49	0.59	0.52	0.6	0.55	0.6	0.69	0.61	0.62	0.62						
35	0.49	0.62	0.53	0.63	0.58	0.64	0.5	0.64	0.62	0.65	0.66	0.66				
55	0.5	0.66	0.53	0.67	0.57	0.67	0.6	0.68	0.63	0.69	0.67	0.7	0.71	0.71		
135	0.51	0.7	0.54	0.71	0.58	0.72	0.62	0.72	0.65	0.73	0.68	0.74	0.72	0.75	0.76	0.76

Np  Seleccione el valor del Factor Geométrico.

Ng

Figura 4.7.- Factor Geométrico.

La pantalla Esfuerzos, presenta valores encontrados de las tablas anteriores, las constantes para las fórmulas de esfuerzo y las fuerzas encontradas con los datos hasta ahora introducidos. Figura 4.8.

HENGGEAR-Programa para el cálculo de engranes helicoidales-Esfuerzos

### Fuerzas en el Diente del Engrane

Factor de Distribución de Carga $K_m$		1.9		Factor Geométrico $J$		0	
Factor de Espesor de Borde $K_B$		0.05		Paso Diámetro $P_d$		12	
Factor de Sobrecarga $K_o$		1.5		Ancho de Cara $F$		1	plg
Factor Dinámico $K_v$		1		Fuerza Tangencial $W_t$		617.39	lb
Factor de Tamaño $K_s$		1		Fuerza Normal $W$		698.46	lb
				Torque $T_p$		30.01	lb-plg

Figura 4.8.- Fuerzas en el diente del Engrane.

La pantalla Materiales, presenta ventanas desplegables en las que se presentan diferentes materiales para fabricar engranes, de los cuales debes seleccionar un material para la fabricación con los cuales comparar los esfuerzos generados por los datos de entrada y la mecánica del material, y debes seleccionar un material adecuado en dureza a tus necesidades. Es por eso que se presenta la dureza HB.

Se presenta un cuadro de ayuda ( ? ) si el usuario lo requiere. Figura 4.9.

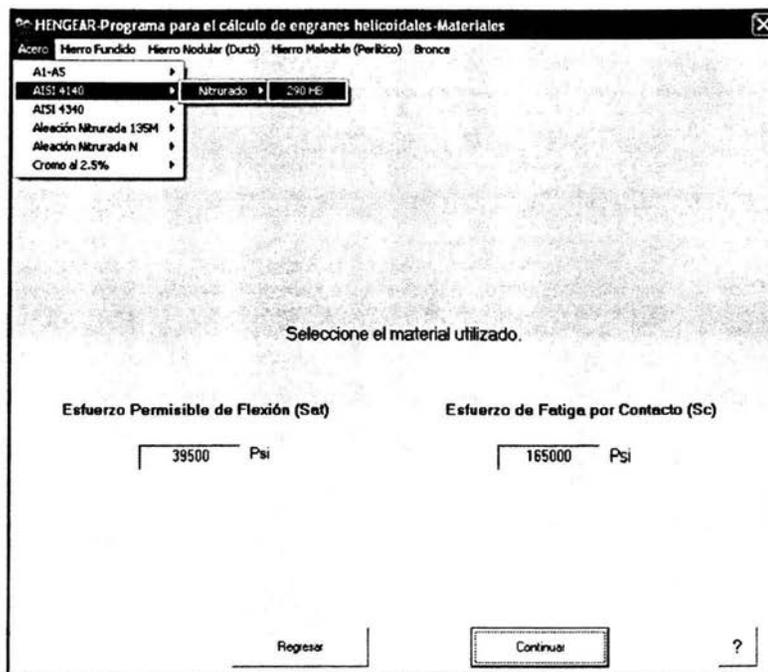


Figura 4.9.- Materiales.

La pantalla Materiales para piñón y engrane, presenta 2 tablas de constantes, en las cuales debes seleccionar la opción que creas pertinente.

Se recomienda utilizar materiales iguales para piñón y engrane o incluso de una dureza mayor en el piñón, debido a que es el que transmite la potencia.

Se presenta un cuadro de ayuda ( ? ) si el usuario lo requiere. Figura 4.10.

Material para el Piñón	Material para el Engrane					
	Acero	Hierro maleable	Hierro nodular	Hierro fundido	Bronce con Aluminio	Bronce con Estaño
Acero	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>				
Hierro maleable	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Hierro nodular	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Hierro fundido	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Bronce con Aluminio	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Bronce con Estaño	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

Regresar      Continuar      ?

Figura 4.10.- Materiales para piñón y engrane.

La pantalla Constantes, presenta dos tablas en las que debes seleccionar con un clic la opción que desees.

El factor de confiabilidad se refiere al número de ciclos que al que se va a someter el tren de engranes para que aparezca una falla, mientras que el factor de seguridad es de diseño.

Figura 4.11.

Se presenta un cuadro de ayuda ( ? ) si el usuario así lo requiere.

Kf	Factor de Confiabilidad	Sf	Factor de Seguridad
<input checked="" type="radio"/>	Para menos de una falla en 10,000,000 ciclos	<input checked="" type="radio"/>	99.99%
<input type="radio"/>	Para menos de una falla en 1,000,000 ciclos	<input type="radio"/>	99.9%
<input type="radio"/>	Para menos de una falla en 100,000 ciclos	<input type="radio"/>	99%
		<input type="radio"/>	97%

Regresar      Continuar      ?

Figura 4.11.- Constantes.

La pantalla Resultados, presenta los factores que se requieren para completar los cálculos de los esfuerzos. Ésta tabla es informativa, debido a que no se pueden cambiar los valores a menos que se regrese en el programa. Figura 4.12.

The screenshot shows a window titled "HENGEAR-Programa para el cálculo de engranes helicoidales-Resultados". The main heading is "Factores de Esfuerzos". The window contains two columns of factors, each with a label, a variable name, and a numerical value in a text input field. At the bottom, there are two buttons: "Regresar" and "Continuar".

Factor	Variable	Valor	Factor	Variable	Valor
Factor de Confiabledad	Kt	0.75	Coefficiente Elástico	Cp	2300
Factor de Temperatura	Kt	1.2	Factor de Superficie para la Picoadura	Cf	1
Factor de Seguridad	Sf	2	Factor de ciclos de esfuerzos para la	Zn	0.75
Factor de Ciclo de Esfuerzo	Yn	1	Factor de razón de dureza para la Picoadura	Ch	1

Figura 4.12.- Resultados.

La pantalla Resultados de diseño, presenta los resultados finales de los cálculos e indica si el tren de engranes helicoidales funciona o no con los datos introducidos. También tiene opciones para poder realizar otros cálculos, para poder imprimir los resultados, regresar una forma y terminar el programa. Figura 4.13.

Figura 4.13.- Resultados del diseño.

La pantalla Menú, es una forma que contiene el menú general que tiene la opción de desplegar las formas anteriores para poder hacer modificaciones y distinguir las alteraciones que se presentan. Figura 4.14.

Figura 4.14.- Menú.

## CONCLUSIONES

El programa calcula los parámetros de diseño de los engranes helicoidales, así como las fuerzas que actúan en los dientes y los esfuerzos a los que están sometidos; De éste modo se tienen los parámetros necesarios para mandar fabricar engranes helicoidales a la medida que se desee.

Se muestra la información más actualizada en cuanto a teoría y fórmulas para el diseño de engranes helicoidales de acuerdo a la bibliografía que se presenta, con la desventaja de que éstas teorías y fórmulas van cambiando y mejorándose conforme avanza el tiempo debido a los nuevos estudios realizados a éste tipo de elementos por lo que es necesario tener la información actualizada para su mejor aplicación y alcance de eficiencia en los sistemas que se ocupan.

La AGMA como organismo regulador de todos éstos estudios guarda la información en normas AGMA que no están a disposición del público en general, y al momento de crear manuales técnicos para el diseño de engranes le pone una cuota al acceso de información de éste tipo, por lo que las referencias nombradas son las de los autores de libros especializados en éste tema.

La transmisión de potencia se hace mucho mejor a través de engranes helicoidales que a través de otro tipo de engranes bajo las mismas condiciones, puesto que la carga se transmite a través de más superficie entre los dientes que con otras geometrías.

Para el cálculo del factor geométrico de forma, las tablas presentadas se hacen en base al análisis del diente como viga cantilibrada, no con la geometría del diente de acuerdo al paso diametral y su involuta, por lo que se debería considerar la forma del diente no solo como viga cantilibrada sino con la forma que se presenta en el diente de acuerdo a diseño para estar más próximos a los esfuerzos que sufre el diente.

## BIBLIOGRAFÍA.

1. Gear Handbook: The design manufacture and application of gears  
Dudley, Darle W.  
Mc Graw Hill
2. Diseño de máquinas: Una introducción a la síntesis y al análisis de mecanismos y maquinas.  
Norton Robert L.  
Mc Graw Hill
3. Diseño de mecanismos: Análisis y síntesis  
Erdmon Arthur G., George N. Sandor  
Prentice Hall.
4. Diseño de elementos de máquinas  
Faires, Virgil Moring  
Montaner y Simon.
5. ASME Handbook, Engineering Tables.  
Editado por Jesse Huckert  
Mc Graw Hill, 1ª. Edición
6. Manual de cálculos para los ingenieros  
Hicks  
Mc Graw Hill, 3a. Edición
7. Gears. Spurs, helical, internal, epicyclic and worm  
P.S.Houghton  
Technical press. 3a. Edición
8. Elementos de mecanismos  
Venton Levy Doughtie  
Compania Editorial Continental S.A. de C.V., 1ª. Edición
9. Mecanismos y dinámica de maquinaria  
Hamilton H. Mabie, Fred W. Ocvirk  
Editorial Limusa, 3ª. Edición
10. Análisis cinemático de mecanismos  
Joseph Edward Shigley  
Ediciones del Castillo S.A.

11. Mecanismos  
S.N. Kozhevnikov  
Editorial Gustavo Gili S.A., 3a. Edición
12. Machine Design. An Integrated Approach  
Robert L. Norton  
Prentice Hall.
13. Elementos de Máquinas  
M.F.Spotts., T.E.Shoup.  
Pearson Educación.

## NOMENCLATURA

$\Phi$	Ángulo de presión o de contacto.
$\phi_n$	Ángulo al plano tangente al círculo de paso.
$\varphi_n$	Ángulo de presión normal.
$\mu_p$	Razón de Poisson para el piñón.
$\mu_G$	Razón de Poisson para el engrane.
$\theta$	Suma de los ángulos $\Phi$ y $\psi$ .
$\sigma$	Esfuerzo normal .
$\sigma$	Resistencia a la flexión.
$\tau$	Esfuerzo cortante.
$\omega$	Velocidad angular.
$\omega_{salida}$	Velocidad angular de salida.
$\omega_{entrada}$	Velocidad angular de entrada.
$\psi$	Ángulo helicoidal.
$PP'$	Línea generada de manera tangencial al círculo de paso.
$OP$	Línea que parte del centro del engrane y corta al círculo de paso.
$A$ y $B$	Valores constantes para valores Kv.
$a$	Adendo.
$b$	Dedendo.
$\beta$	Razón de velocidades.
$C$	Distancia entre centros.
$cb$	Círculo base.
$C_p$	Coefficiente elástico.
$d$	Diámetro del círculo primitivo.
$d_{entrada}$	Diámetro del piñón.
$d_{salida}$	Diámetro del engrane.
$D$	Diámetro de paso.
$E_p$	Módulo de elasticidad del material del piñón.

$E_G$	Módulo de elasticidad del material del engrane.
F	Longitud del diente.
ht	Profundidad total del diente.
J	Factor geométrico de esfuerzos.
$K_B$	Factor de espesor de borde.
$K_m$	Factor de distribución de carga.
$K_o$	Factor de sobrecarga.
$K_R$	Factor de confiabilidad.
$K_S$	Factor de tamaño.
$K_T$	Factor de temperatura.
$K_v$	Factor dinámico.
m	Módulo.
$m_F$	Razón de contacto axial.
$m_p$	Radio de contacto.
$m_v$	Relación de velocidad del tren de engranes.
n	Velocidad angular.
$N_G$	Número de dientes del engrane.
$N_p$	Número de dientes del piñón.
O	Diámetro exterior.
P	Paso diametral.
Pb	Paso base.
Pc	Paso circular.
$P_n$	Paso normal.
$P_t$	Paso transversal.
$P_{nd}$	Paso diametral en el plano normal.
$P_x$	Paso axial.
Qv	Calidad de engranes.
$r_{entrada}$	Radio del piñón.
$r_{salida}$	Radio del engrane.
$R_r$	Reacción radial.

$R_t$	Reacción tangencial.
$R_p$	Radio primitivo del piñón.
$S_{at}$	Esfuerzo permisible de flexión.
$S_t$	Ecuación de esfuerzo permisible de flexión.
$S_F$	Factor de seguridad.
$T_p$	Torque transmitido por el piñón.
$V_b$	Velocidad en el círculo exterior.
$V_n$	Velocidad común normal a las superficies de los dientes.
$W$	Fuerza transmitida al diente del piñón.
$W_r$	Fuerza radial.
$W_t$	Fuerza tangencial.
$Y$	Factor de geometría de Lewis.
$Y_N$	Factor de ciclo de esfuerzo.