

00362



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

N. de Matriz: 332503

ESTADOS BARIÓNICOS  
EN UN MODELO ESQUEMÁTICO  
DE QUARKS Y GLUONES  
CONSTITUYENTES.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRA EN CIENCIAS (FÍSICA)

P R E S E N T A:

MARIBEL NÚÑEZ VALDEZ

ASESOR:

Dr. PETER OTTO HESS BECHSTEDT.

COMITÉ TUTORAL:

Dr. CHRISTOPHER STEPHENS STEVENS

Dr. JUAN CARLOS LÓPEZ VIEYRA.



Posgrado en ciencias físicas  
unam

Junio 2004

0332503



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

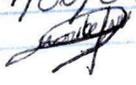
El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

ESTA TESIS NO SALE  
DE LA BIBLIOTECA

Autorizo a la Direccion General de Bibliotecas de la  
UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el  
contenido de mi trabajo recepcional.

NOMBRE: Maribel Núñez Valdez

FECHA: 7/06/09

FIRMA: 

# Agradecimientos para:

\* La DGEP de la UNAM, el proyecto IN-119002 de la DGAPA y el SNI por su incommensurable ayuda económica.

\* El comité tutorial, el sínodo y el asesor de esta tesis por sus constructivas y enriquecedoras observaciones con respecto de este trabajo.

A mis padres y a mis hermanos.

Dies iræ, dies illa,  
Solvat sæclum in favilla:  
Teste David cum Sibylla.

Quantus tremor est futurus,  
Quando judex est venturus,  
Cuncta stricte discussurus!

*WAM*

Que Dios, ayude a mi pobre alma.

*EAP*

# Índice General

Introducción	3
<b>1 Las bases del modelo</b>	<b>7</b>
1.1 Los gluones: un estudio general	7
1.2 Los quarks dentro del modelo	10
1.3 La interacción quarks-gluons	12
<b>2 Estados mesónicos</b>	<b>15</b>
2.1 Un modelo simple para describir mesones	15
2.2 Los mesones: ensayo y error	17
2.3 Acoplamiento de espín $S = 0, 1$ y sabor $(\lambda, \mu) = (0, 0)$ y $(1, 1)$	19
2.4 Consideraciones del mapeo bosónico general	21
2.5 Eigenestados del Hamiltoniano bosónico	23
2.6 Arreglo del espectro mesónico	24
<b>3 Estados bariónicos</b>	<b>29</b>
3.1 Los bariones: una primera aproximación	29
3.2 Quarks de valencia: de espectadores a jugadores	31
3.3 El ajuste al espectro bariónico	37
3.4 Estados mesónicos adicionales	38
3.5 Resonancias nucleares	40
3.6 Estados exóticos: penta- y heptaquarks	41
3.7 Resonancias $\Delta$	42
3.8 Errores y confiabilidad	44
<b>Conclusiones</b>	<b>45</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>47</b>



# Introducción

Hoy en día, la teoría aceptada como fundamental, que gobierna las interacciones fuertes es la Cromodinámica Cuántica (QCD), y su éxito estriba en la descripción de los espectros hadrónicos experimentales a altas energías, donde la naturaleza partónica de los constituyentes hadrónicos desempeña un papel preponderante. Sin embargo, a bajas energías, los resultados no han sido tan satisfactorios, lo cual se debe en buena parte al fenómeno de *esclavitud infrarroja*, cuya principal consecuencia es el confinamiento de los estados con color, i.e., los *gluones* y los quarks se mantienen ligados para formar los hadrones.

Por ejemplo, el espectro bariónico por sí mismo sugiere que los bariones están compuestos de quarks. Sin embargo, la interacción entre los quarks no puede ser deducida fácilmente de las energías de los estados. Debido a las dificultades inherentes que se tienen para penetrar en la región infrarroja a través de la teoría fundamental misma, se han buscado diferentes métodos para tratar el problema, por ejemplo, suponer confinamiento *a priori* [1]-[6], o trabajar con teorías de campo efectivas, es decir, manejando directamente los campos mesónico y bariónico y ajustando parámetros de interacción a los resultados experimentales. Muchos intentos, con diversos grados de dificultad, se han hecho y hoy en día existen bastantes modelos que producen resultados de mayor o menor calidad en su aproximación al espectro de las masas bariónicas. Tales modelos incluyen el de sabor  $SU(6)$ , el modelo de bolsa MIT [7], el de bolsa Skyrmion [8], modelos de potencial con quarks no relativistas y modelos de quarks constituyentes. El modelo de sabor  $SU(6)$  postula que los quarks *up*, *down*, y *strange* son eigenvalores de un grupo de simetría interna, a saber  $SU(3)$ . Para incluir el espín y, como consecuencia la separación entre los multipletes de espín  $\frac{1}{2}$  y  $\frac{3}{2}$ , este grupo es extendido a  $SU(6) \supset SU(2) \times SU(3)$ . Esta simetría es entonces rota en tal forma que los términos de masa que aparecen dependientes sólo de operadores pueden ser diagonalizados simultáneamente. De esta manera se obtienen fórmulas de masas que describen sus diferencias en un multiplete. En el modelo de bolsa MIT, los quarks pueden ocupar todos los estados satisfaciendo condiciones de frontera específicas. Tales estados existen para cualquier momento angular, i.e., el espectro para una sola partícula contiene todos los estados conocidos de la física atómica:  $s_{1/2}, p_{1/2}, p_{3/2}, d_{3/2}, d_{5/2}, \dots$ . En principio, estados de muchas partículas con espín y paridad definidos pueden ser construidos derivando las correspondientes masas de las condiciones de frontera de la bolsa. No obstante, este procedimiento ofrece resultados desastrosamente malos. Para mejorar esto, interacciones residuales adicionales (como el intercambio de un gluón y otras correcciones pueden ser tomadas en cuenta, pero espectros bariónicos satisfactorios son obtenidos sólo después de introducir un número suficientemente grande de parámetros. Igualmente el modelo de bolsa Skyrmion, el cual está basado en suposiciones totalmente diferentes, produce resultados similares. En este modelo, la característica principal es que, el número bariónico está dado como un número cuántico topológico y los diferentes bariones son identificados según éste. Los modelos de potenciales resuelven la ecuación de Schrödinger para quarks no relativistas incluyendo una interacción espín-espín y una espín-tensor, y constantes de acoplamiento

son ajustadas a los estados base de los bariones mientras que los estados excitados son predichos. En los modelos de quarks constituyentes [9], los hadrones son simples estados ligados de unos cuantos quarks constituyentes. A los quarks *up*, *down* y *strange* se les asigna una masa aproximadamente igual a un tercio de la masa del protón, es decir, alrededor de 333 Mev [10]. El quark constituyente fue introducido aproximadamente hace 30 años como una entidad puramente fenomenológica para permitir una descripción de hadrones como estados ligados de objetos de tamaño más pequeño, elementos de la representación fundamental de los grupos de simetría de color y sabor. Los Hamiltonianos más simples de los modelos de quarks constituyentes fueron escritos en los años 60 y contenían sólo la cinética o términos de masa y la interacción espín-espín para distancias cortas. A pesar de su simplicidad, los Hamiltonianos de este tipo reproducen el espectro a bajas energías de los multipletes mesónico y bariónico conduciendo a la aceptación del quark constituyente.

Un proyecto pensado para describir el espectro hadrónico tuvo como trabajo pionero la teoría desarrollada por Hess *et al.* en la Ref. [11]. En dicho trabajo se estudió la clasificación de estados para un sistema de muchos gluones que se agrupan en *glueballs*. El espectro de glueballs encontrado se comparó con el obtenido a través de cálculos de *lattice* hallándose un gran acuerdo. Lo anterior llevó a Lerma *et. al.*, a extender el modelo en [13, 14, 16] para incluir quarks y antiquarks constituyentes. En tales trabajos se modeló la interacción entre el sector fermiónico de quarks y antiquarks introducido, con el glueball de más baja energía,  $0^{++}$ , proveniente de [11]. Hecho lo anterior se construyó un Hamiltoniano efectivo con parámetros de ajuste basado en los grados de libertad básicos de la QCD en un espacio fermiónico. Entonces, a partir del esquema más simple posible, acoplamiento de pares de quark-antiquark ( $q\bar{q}$ ) a sabor y color cero se hizo un estudio completo, primero con estados coherentes y después numéricamente. Esto se tradujo en experiencia consiguiendo importantes pistas para tratar el modelo general que acopla pares fermiónicos de sabor  $(\lambda, \mu) = (0, 0)$  y  $(1, 1)$  con espín  $S = 0$  y  $1$ . No obstante, el estudio de los eigenestados y las eigenenergías se volvió complicado, y para sortear las dificultades se realizó un mapeo del Hamiltoniano a un espacio bosónico donde tuvo fácil manipulación, aunque no de forma analítica, sino con la codificación del proceso a través de programas en FORTRAN, debido a que el manejo sólo era posible mediante métodos numéricos.

Sin embargo, el proyecto inicial tenía un enfoque íntegro de los espectros hadrónicos y el espectro bariónico satisfactorio no fue obtenido en ningún trabajo anterior, por tal motivo, en esta tesis se toma como objetivo único, encontrar la extensión adecuada de los trabajos previos de Hess, Lerma *et. al.*, para lograr la mejor descripción de las masas bariónicas a bajas energías y conseguir la completez o cerradura del proyecto original. Esto lleva a hacer una revisión de lo desarrollado hasta el momento, con la finalidad de encontrar los ingredientes faltantes para completar el escenario hadrónico. No sin olvidar los puntos esenciales del modelo como son los grados de libertad de color, sabor y espín, los cuales deben ser tomados en cuenta explícitamente para construir las configuraciones bariónicas.

Con base en lo anterior, el presente trabajo que sirve como conclusión de la Maestría en Ciencias (Física), se organiza de una manera muy corta y simple, debiendo señalar que el nivel de conocimientos del contenido está en acuerdo con el nivel de los cursos de preparación estudiados en el trayecto de su elaboración. Por lo tanto, en el primer capítulo se revisa el proyecto original, i.e., los fundamentos del modelo de gluones y la inclusión de los quarks y antiquarks constituyentes. Así mismo, se estudia la construcción del Hamiltoniano efectivo a partir del Hamiltoniano microscópico de la QCD. En el capítulo 2, se repasan las principales consideraciones que hacen posible la modelación de los estados mesónicos en el marco teórico sentado en el capítulo anterior. Así, en el último capítulo se plantea el espectro bariónico después de agregar

tres quarks de valencia al sistema, sin embargo, no se toma en cuenta de principio su interacción con el sector bosónico, de lo cual se consiguen resultados que dan luz y una visión que encamina el esquema a la consideración de interacciones adicionales. Nuevamente el trabajo es desarrollado en un espacio bosónico donde el Hamiltoniano efectivo ahora contiene cuatro constantes más de ajuste, dos para el grupo de resonancias nucleares y dos para el de resonancias  $\Delta$ , que mediante una serie de métodos y programas en FORTRAN se determinan. Entre los resultados, además de obtener las típicas resonancias también se obtienen estados, a veces llamados exóticos en la literatura, de *pentaquark* y *heptaquark*. Finalmente en las conclusiones se resume lo logrado con el proyecto original hasta antes y después de esta tesis, observando puntualmente que el objetivo planteado es cumplido con el término de este trabajo.

# Capítulo 1

## Las bases del modelo

Mediante el uso de argumentos generales y simples basados en la estructura de grupos de la QCD, Hess *et al.* en la Ref. [11, 18] proponen un Hamiltoniano efectivo, restringido al sector de norma puro, para una descripción a bajas energías de un sistema de muchos gluones constituyentes. El Hamiltoniano resultante es una función de modos colectivos espacialmente constantes cuyos eigenestados pueden ser organizados en conjuntos clasificados por las representaciones irreducibles (irreps) del grupo  $O(8)$ . A partir de esto se determina la paridad y la conjugación de carga de los estados. Lo relevante y el sustento para tomar el marco teórico desarrollado en la Ref. [11], es que, a pesar de la sencillez del esquema de trabajo, el espectro de glueballs obtenido a partir de tales consideraciones queda dentro de un acuerdo razonable con el conseguido por los cálculos de lattice [12]. Por lo tanto, en este capítulo, en la primera sección se empieza con el planteamiento del modelo para la descripción de un sistema de gluones exclusivamente, a partir de cual se consigue un espectro que es comparado con el obtenido por los cálculos de lattice. En la segunda sección, se extiende el modelo de la sección previa para incluir un sector fermiónico de quarks y antiquarks constituyentes. Finalmente, en la última sección, con base en las interacciones de los campos de la QCD, se encuentra un Hamiltoniano efectivo de interacción entre los quarks, antiquarks y gluones constituyentes del modelo.

### 1.1 Los gluones: un estudio general

La importancia de estudiar los estados con grados de libertad gluónicos radica en que, la materia hadrónica consiste de una masa proveniente de los constituyentes y una masa creada por sus interacciones. Para describir la creación de masa de los quarks constituyentes, se debe entender, por ejemplo, el fenómeno del *rompimiento espontáneo de la simetría quiral*, en virtud de que una de sus consecuencias es que los quarks adquieren un masa dinámica o constituyente. Sin embargo, no es el objetivo de este trabajo y del proyecto original estudiar este proceso y llegado el momento de incluir los quarks en el presente modelo, de inicio se supondrán quarks constituyentes.

Así, la espectroscopía hadrónica es la inspiración del modelo  $SU(3)$  de quarks y de la QCD, la teoría de las interacciones fuertes. Debido a que la QCD es una teoría de norma no-abeliana, los bosones de norma -los gluones- pueden interactuar entre ellos. Esto es, una de las predicciones más sobresalientes de la QCD en el régimen no-perturbativo es la existencia de estados ligados de gluones, llamados *glueballs* ( $gg$ ,  $ggg$ ), que a diferencia de otros hadrones, obtienen su masa solamente a través de la interacción fuerte. Otros tipos de materia hadrónica en la cual los gluones pueden contribuir a los números cuánticos, llamados híbridos ( $q\bar{q}g$ ), pueden existir también. Una

excitación gluónica en un híbrido conduce a nuevos números cuánticos  $J^{PC}$  para tales estados, donde  $J$  denota el momento angular total de la resonancia, mientras que  $P$  y  $C$  la paridad y la conjugación de carga respectivamente. Por lo tanto, resultados precisos de las propiedades de varios glueballs o estados híbridos y la comparación con los mesones  $q\bar{q}$ , ayudaría a entender la QCD en el régimen de bajas energías.

Ahora, para entender la estructura del espectro de un sistema de muchos gluones, no basta con tomar en cuenta los grupos  $SU(3)$  de color y  $SO(3)$  de espín debido a que los campos gluónicos no se transforman de acuerdo a la irrep fundamental del grupo de color, además de que aquí se está tratando un sistema de bosones idénticos, lo que hace necesario introducir la estadística de Bose-Einstein (EBE). Una forma de tratar lo anterior, es utilizando grupos más altos. Con respecto a las rotaciones de color, los campos gluónicos se transforman como vectores en ocho dimensiones, por lo cual se le puede asociar un grupo de rotación unitario  $U(8)$  con transformaciones de color. Por otro lado, asociando el grupo  $U(3)$  a las rotaciones espaciales se tiene también el grupo de espín  $SO(3)$ . Luego, relacionando a este nivel las transformaciones de color y espín al grupo  $U(24)$ , la EBE es agregada formalmente [18], con lo que se obtiene la cadena de grupos:

$$\begin{array}{ccccccc}
 [N] & & [h_1 h_2 h_3] & & & & \\
 U(24) & \supset & U(8) & \otimes & U(3) & & \\
 & & \xi & \cup & \cup & & \\
 & & (\omega_1 \omega_2 \omega_3 0) & O(8) & SU(3)_J & (p, q) & \\
 & & & \cup & \cup & K & \\
 & & (0, 0) & SU_c(3) & SO(3) & J, M & 
 \end{array} \quad (1.1)$$

donde para cada grupo los números cuánticos de la correspondiente irrep son dados, mientras  $\xi$  y  $K$  son índices de multiplicidad que aparecen en las respectivas reducciones.  $[N]$  denota la irrep completamente simétrica de  $U(24)$  para  $N$  modos gluónicos, lo cual impone la EBE. Las diferentes irreps posibles de  $U(8)$  y  $U(3)$  son dadas por las tablas de Young  $[h_1 h_2 h_3]$  consistentes de tres renglones con  $h_1$ ,  $h_2$  y  $h_3$  cajas, respectivamente, y satisfaciendo la ecuación  $h_1 + h_2 + h_3 = N$ . Nótese que, el hecho de que las irreps de  $U(8)$  y  $U(3)$  esten acopladas a la irrep completamente simétrica de  $U(24)$  restringe sus tablas de Young a ser iguales [19, 20]. Los estados posibles construidos con base en la cadena (1.1) y algunas consideraciones adicionales contempladas en [11], están agrupados en la Tabla 1.1. En términos generales, se encuentra la reducción de seis gluones constituyentes de  $U(8)$  a  $O(8)$ , donde sólo las irreps de  $U(8)$  con al menos un escalar de color son consideradas. También se tiene que, la densidad Hamiltoniana en la norma temporal como función de la densidad de energía cinética y de un potencial es de la forma

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{i,a} (\partial_0 A_a^i)^2 + V(A) \quad (1.2)$$

Para obtener la acción efectiva de la teoría cuántica, se debe integrar sobre todas las posibles configuraciones inequivalentes físicamente del campo de norma, tarea que es imposible de resolver exactamente, a excepción de algunos casos especiales. Una manera de aproximarse es utilizar teoría de perturbaciones, excepto porque a bajas energías, región de estudio del presente trabajo, no es aplicable. Otra posibilidad es emplear la aproximación de Born-Oppenheimer [21], la cual se caracteriza por integrar las fluctuaciones “rápidas” (longitudes de onda cortas), para trabajar con una teoría efectiva de los modos “lentos” (longitudes de onda grandes). Por lo tanto, como en la Ref. [11], limitando el Hamiltoniano efectivo a bajas energías como una función solamente

$U(8)$ ( $U(3)$ )	$O(8)$	$\#(0,0)$	$SO(3)$ ( $J$ )	$P$	$C$
[2]	(0000)	1	0,2	+1	+1
[4]	(0000)	1	0,2,4	+1	+1
[2 <sup>2</sup> ]	(0000)	1	0,2	+1	+1
[6]	(0000)	1	0,2,4,6	+1	+1
[42]	(0000)	1	0,2,2,3,4	+1	+1
[2 <sup>3</sup> ]	(0000)	1	0	+1	+1
[3]	(3000)	1	1,3	-1	-1
[5]	(3000)	1	1,3,5	-1	-1
[41]	(3000)	1	1,2,3,4	-1	-1
[32]	(3000)	1	1,2,3	-1	-1
[1 <sup>3</sup> ]	(1110)	1	0	-1	+1
[31 <sup>2</sup> ]	(1110)	1	0,2	-1	+1
[21 <sup>2</sup> ]	(2110)	1	1	+1	-1
[41 <sup>2</sup> ]	(2110)	1	1,3	+1	-1
[321]	(2110)	1	1,2	+1	-1
[2 <sup>2</sup> ]	(2200)	1	0,2	+1	+1
[42]	(2200)	1	0,2,2,3,4	+1	+1
[321]	(2200)	1	1,2	+1	+1
[2 <sup>3</sup> ]	(2200)	1	0	+1	+1
[2 <sup>2</sup> 1]	(2210)	1	1	-1	-1
[31 <sup>2</sup> ]	(3110)	1	0,2	-1	-1
[6]	(6000)	1	0,2,4,6	+1	+1
[42]	(4200)	1	0,2,2,3,4	+1	+1
[41 <sup>2</sup> ]	(4110)	1	1,3	+1	-1
[3 <sup>2</sup> ]	(3300)	1	1,3	+1	-1
[2 <sup>3</sup> ]	(2220)	1	0	+1	+1

Tabla 1.1: Reducción de  $U(8)$  a  $O(8)$  para seis gluones constituyentes. El número de estados con color cero está en la columna  $\#(0,0)$ . En la cuarta columna, la reducción de  $U(3)$  usando  $SU_J(3)$  para el grupo de momento angular  $SO(3)$ , los valores correspondientes de  $J$  y las multiplicidades son indicadas como subíndice. La Paridad y la Conjugación están en las últimas dos columnas [11].

de los campos de norma espacialmente constantes, se tiene como ansatz general:

$$H_{eff} = -\frac{1}{2B_\rho} \sum_{i,a} \frac{\partial^2}{(\partial A_a^i)^2} + V_{eff}(A) \quad , \quad (1.3)$$

donde, casi siempre, el potencial efectivo  $V_{eff}(A)$ , es una función complicada de los campos  $A_a^i$ . Aquí debe enfatizarse que el ansatz de que el Hamiltoniano efectivo a bajas energías es una función solamente de modos constantes, es una suposición que tiene su fundamento en la invarianza traslacional del vacío de la QCD. Es decir, detrás del ansatz nada más se encuentra el hecho de que la dinámica de los modos constantes solamente da información sobre el espectro de los glueballs, los estados excitados de la teoría, pero no de la estructura interna de los estados. Esta aproximación ha sido verificada para un volumen finito con condiciones de frontera periódicas en trabajos como el de la Ref. [21]. En este trabajo las condiciones anteriores se asume satisfechas. La constante  $B_\rho$  es de renormalización y un parámetro de ajuste cuyo significado “más” físico queda claro adelante.

Hecho lo anterior, el Hamiltoniano (1.3) es invariante ante transformaciones de norma globales, por lo que se impone a los estados físicos la condición de que no tengan color [21], i.e.,

$$G_a \Psi_{phys}(A) = 0, \quad (1.4)$$

donde  $G_a$  son los generadores de las transformaciones de norma global. Tomando para el potencial

$$V_{eff}(A) = \frac{C_g}{2} \sum_{ia} A_i^a A_i^a, \quad (1.5)$$

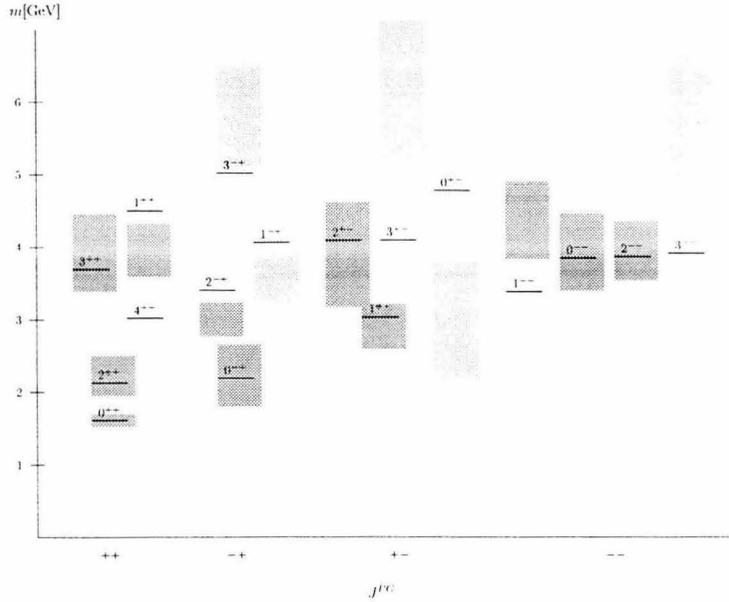


Figura 1.1: Espectro de glueballs correspondiente a la Ec. (1.6) (líneas). Las barras oscuras y claras son, respectivamente, estimaciones y límites superiores de los cálculos de lattice de la Ref. [12].

la ecuación (1.3) toma la forma de un Hamiltoniano para un oscilador armónico de dimensión  $dim = 24$ , frecuencia  $\omega = \sqrt{C_\varrho/B_\varrho}$  y eigenenergías  $E = \hbar\omega(N + 12)$ . En el trabajo original [11], el espectro del Hamiltoniano (1.3) con (1.5) se obtiene básicamente a través del ajuste a un espectro de glueballs de 16 estados. El resultado de dicho procedimiento es

$$E_{n_\varrho, N_2}^{(\omega_1\omega_2\omega_3), \mathcal{L}} = \sqrt{\frac{C_\varrho}{B_\varrho}} \left\{ 2n_\varrho + \left[ 4\sqrt{\frac{C_2}{B_2}}\sigma^2 N_2 + k_1(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + 12) + k_2(\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2 + 3\lambda + 3\mu) + k_3\mathcal{L}(\mathcal{L} + 1) + k_4 \right]^{\frac{1}{2}} - \sqrt{k_4} \right\}, \quad (1.6)$$

donde  $n_\varrho$  y  $N_2$  son los números cuánticos de osciladores armónicos en una y cinco dimensiones y  $(\sigma, \omega_i, \lambda, \mu$  y  $\mathcal{L})$  son los números cuánticos asociados a los grupos de la cadena (1.1) y trabajados en la Ref. [22]. La combinación de los seis parámetros  $(\frac{C_\varrho}{B_\varrho}, \frac{C_2}{B_2}, k_i)$  de (1.6), que mejor ajusta al espectro de los glueballs de los cálculos de lattice, se encuentra también en [11], y el resultado del ajuste es indicado con líneas en la Fig. 1.1.

## 1.2 Los quarks dentro del modelo

Debido a que los resultados encontrados en la sección previa para el espectro de los glueballs estuvieron en acuerdo con los reportados por los cálculos de lattice, el modelo gluónico de [11] se retoma en los trabajos [13] y [16] y se extiende incorporando quarks constituyentes. Lo anterior se hace con base en el término de interacción  $(\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi G_\mu)$  de la QCD, sin embargo, se limita solamente a la interacción entre pares de quark-antiquark ( $q\bar{q}$ ) y los glueballs de menor energía ( $0^{++}$ ), considerando al resto como “espectadores”. La manera en que los quarks y antiquarks se

incluyen, es a través de un sistema fermiónico consistente de dos niveles de energía fijos en 0.33 GeV y  $-0.33$  GeV, valores que son tomados de acuerdo a las masas de los quarks constituyentes [10]. Cabe señalar que el escenario previo es inspirado por los modelos de Lipkin, Meshkov y Glick [23], y de Schüütte y Da Providencia [24]. En el esquema de este trabajo cada uno de los dos niveles tiene una degeneración  $2\Omega$ , con un valor mínimo correspondiente a 2 proyecciones de espín,  $N_c$  número de colores y  $N_f$  número de sabores, i.e.,  $2\Omega_{min} = 2N_cN_f$ . Como en los trabajos previos, en esta tesis también se asume una sola excitación orbital. Así, lo anterior se puede pensar como un esquema tipo Dirac, donde los quarks se representan por partículas en el nivel superior y los antiquarks por “agujeros” en el nivel inferior. La imagen matemática en la representación de Schrödinger de lo anterior, se encuentra mediante la cuantización del campo de Dirac como se hace en la Ref. [25], de la cual también se toma la notación para vectores (negritas), cuadvectores (cursivas) y operadores (negritas cursivas),

$$\psi(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_{s=1,2} \left( e^{i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}} \mathbf{a}_{\mathbf{p}cf_s} u_s(\mathbf{p}) + e^{-i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}} \mathbf{d}_{\mathbf{p}cf_s}^\dagger v_s(\mathbf{p}) \right), \quad (1.7)$$

donde  $e^{i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}} u_s(\mathbf{p})$  son eigenfunciones del Hamiltoniano de Dirac<sup>1</sup> con eigenvalores  $2E_{\mathbf{p}}$  (soluciones para energía positiva). Similarmente,  $e^{-i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}} v_s(\mathbf{p})$  (o equivalentemente,  $e^{+i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}} v_s(-\mathbf{p})$ ) son eigenfunciones de  $h_D$  con eigenvalores  $-2E_{\mathbf{p}}$  (soluciones para energía negativa). Los índices  $c, f$  y  $s$  se refieren a color, sabor y espín, respectivamente.  $\mathbf{a}_{\mathbf{p}cf_s}$  y  $\mathbf{d}_{\mathbf{p}cf_s}^\dagger$  son los operadores de aniquilación y creación, i.e.,  $\mathbf{a}_{\mathbf{p}cf_s}$  destruye una partícula de energía positiva y  $\mathbf{d}_{\mathbf{p}cf_s}^\dagger$  crea una de energía negativa. Para pasar a la representación de Heisenberg, se usan las relaciones

$$e^{iHt} \mathbf{a}_{\mathbf{p}cf_s} e^{-iHt} = \mathbf{a}_{\mathbf{p}cf_s} e^{-iE_{\mathbf{p}}t}, \quad e^{iHt} \mathbf{d}_{\mathbf{p}cf_s}^\dagger e^{-iHt} = \mathbf{d}_{\mathbf{p}cf_s}^\dagger e^{+iE_{\mathbf{p}}t},$$

e inmediatamente se obtienen los campos

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_{s=1,2} \left( e^{-ip\cdot x} \mathbf{a}_{\mathbf{p}cf_s} u_s(p) + e^{ip\cdot x} \mathbf{d}_{\mathbf{p}cf_s}^\dagger v_s(p) \right), \quad (1.8)$$

$$\bar{\psi}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_{s=1,2} \left( e^{-ip\cdot x} \mathbf{d}_{\mathbf{p}cf_s} \bar{v}_s(p) + e^{ip\cdot x} \mathbf{a}_{\mathbf{p}cf_s}^\dagger \bar{u}_s(p) \right). \quad (1.9)$$

donde los operadores de aniquilación y creación obedecen las reglas de anticonmutación

$$\left\{ \mathbf{a}_{\mathbf{p}cf_s}, \mathbf{a}_{\mathbf{p}'c'f's'}^\dagger \right\} = \left\{ \mathbf{d}_{\mathbf{p}cf_s}, \mathbf{d}_{\mathbf{p}'c'f's'}^\dagger \right\} = (2\pi^3) \delta_{c'}^c \delta_{f'}^f \delta_{s'}^s \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}'), \quad (1.10)$$

cualquier otro anticonmutador es cero. El vacío  $|0\rangle$ , se define como el estado tal que

$$\mathbf{a}_{\mathbf{p}cf_s} |0\rangle = \mathbf{d}_{\mathbf{p}cf_s} |0\rangle = 0. \quad (1.11)$$

Con lo anterior el Hamiltoniano para el campo de Dirac, puede ser escrito como

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_s E_{\mathbf{p}} \left( \mathbf{a}_{\mathbf{p}cf_s}^\dagger \mathbf{a}^{\mathbf{p}cf_s} + \mathbf{d}^{\mathbf{p}cf_s} \mathbf{d}_{\mathbf{p}cf_s} \right), \quad (1.12)$$

donde se ha excluido el término constante e infinito que viene de la anticonmutación de  $\mathbf{d}_{\mathbf{p}cf_s}$  y  $\mathbf{d}^{\mathbf{p}cf_s}$ .

<sup>1</sup>El Hamiltoniano de Dirac para una partícula libre esta dado por  $h_D = -i\boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + m\beta$  donde  $\boldsymbol{\alpha} = \gamma^0 \boldsymbol{\gamma}$  y  $\beta = \gamma^0$  con  $\gamma^0$  y  $\boldsymbol{\gamma}$  las matrices de Dirac [26].

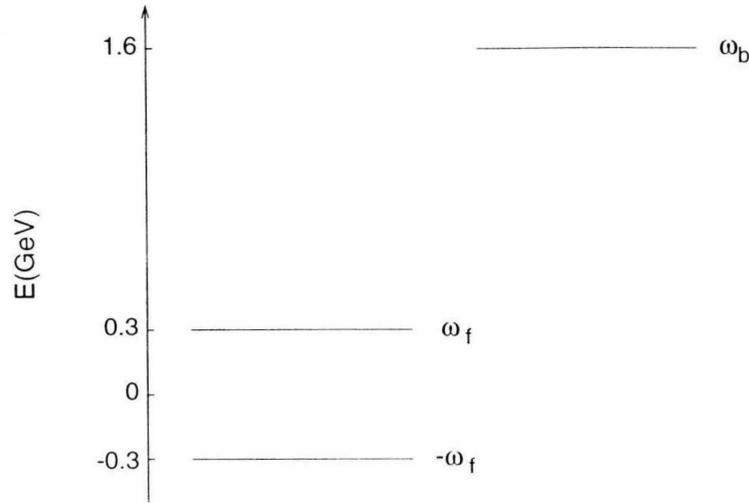


Figura 1.2: Niveles fermiónicos [23, 24] y bosónico del modelo. La energía  $\omega_b = 1.6$  GeV corresponde a la masa del glueball  $0^{++}$ , mientras que, la energía  $\omega_f = 0.33$  GeV es la masa de los quarks constituyentes.

### 1.3 La interacción quarks-glueballs

El Hamiltoniano para modelar la interacción entre los quarks del sistema de dos niveles y los glueballs, visto en detalle en el trabajo de Lerma [16], se toma de la QCD

$$\mathbf{H}_i = - \int d^3x \mathcal{L}_{\mathcal{I}} = \int d^3x g \bar{\psi}_{c_1 f} \gamma^\mu G_{\mu c_2}^{c_1} \psi^{c_2 f}, \quad (1.13)$$

donde  $G_{\mu c_2}^{c_1} = G_\mu^a \lambda_{c_2}^{a c_1} / 2$  con  $\lambda_{c_2}^{a c_1}$  las matrices de Gell-Mann. Esquemáticamente se tienen los dos niveles fermiónicos con un nivel bosónico en 1.6 GeV que representa el glueball  $0^{++}$ , Fig. 1.2. Así que, para derivar su interacción efectiva, primero se hace necesario tomar las variables efectivas en (1.13), lo cual conduce a tener campos de norma  $G_{\mu c_2}^{c_1}$  constantes y campos fermiónicos de momento fijo. Después de una sencilla serie de pasos algebraicos, el Hamiltoniano efectivo que se obtiene es

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_i = & \int d^3p \left( \left[ \mathbf{a}_{\mathbf{p} c f \sigma}^\dagger \mathbf{a}^{\mathbf{p} c' f \sigma} - \mathbf{d}_{\mathbf{p} c f \sigma} \mathbf{d}^\dagger \mathbf{p} c' f \sigma \right] \frac{p^i}{E} + \right. \\ & \left. \left[ \mathbf{a}_{\mathbf{p} c f \sigma}^\dagger \mathbf{d}^\dagger \mathbf{p} c' f \sigma' + \mathbf{d}_{\mathbf{p} c f \sigma} \mathbf{a}^{\mathbf{p} c' f \sigma'} \right] \left[ \sigma_{\sigma \sigma'}^i - \frac{p^i}{E(m + E)} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})_{\sigma \sigma'} \right] \right) G_{i c c'}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

donde se han usado las matrices de Pauli  $\boldsymbol{\sigma}$ , con  $\boldsymbol{\sigma}^3$  cumpliendo la ecuación de eigenvalores  $\boldsymbol{\sigma}^3 \chi_\sigma = \sigma \chi_\sigma$  para espinores de Pauli  $\chi_\sigma$ . Como siguiente paso para llegar a la interacción efectiva entre los quarks y los gluones, se aplica teoría de perturbaciones por medio de la cual se obtiene el Hamiltoniano efectivo restringido a un subespacio  $\mathcal{H}_{(0,0)}$  donde los quarks y los gluones están acoplados a color (0,0) en forma independiente en el régimen de bajas energías. Así que, reacoplando los operadores fermiónicos y gluónicos resulta el Hamiltoniano efectivo sobre  $\mathcal{H}_{(0,0)}$ , dado por [16]:

$$\mathbf{H}_{i(0,0)} = C_1 (\mathbf{H}_S^{jk} + \mathbf{H}_P^{jk} + \mathbf{H}_E^{jk}) G_a^j G_a^k, \quad (1.15)$$

donde  $C_1$  es una constante y cada uno de los términos  $\mathbf{H}_L^{jk}$  es expresado como

$$\mathbf{H}_S^{jk} = \int d^3p_1 d^3p_2 \left( \mathbf{a}_{\mathbf{p}_1 c f \sigma_1}^\dagger \mathbf{a}^{\mathbf{P}_1 c' f \sigma_1} \mathbf{a}_{\mathbf{p}_2 c' f' \sigma_2}^\dagger \mathbf{a}^{\mathbf{P}_2 c f' \sigma_2} + \mathbf{d}_{\mathbf{p}_1 c f \sigma_1} \mathbf{d}^\dagger \mathbf{P}_1 c' f \sigma_1 \mathbf{d}_{\mathbf{p}_2 c' f' \sigma_2} \mathbf{d}^\dagger \mathbf{P}_2 c f' \sigma_2 - 2 \mathbf{a}_{\mathbf{p}_1 c f \sigma_1}^\dagger \mathbf{a}^{\mathbf{P}_1 c' f \sigma_1} \mathbf{d}_{\mathbf{p}_2 c' f' \sigma_2} \mathbf{d}^\dagger \mathbf{P}_2 c f' \sigma_2 \right) \frac{p_1^j p_2^k}{E_1 E_2}, \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_P^{jk} = & \int d^3p_1 d^3p_2 \left( \mathbf{a}_{\mathbf{p}_1 c f \sigma_1}^\dagger \mathbf{d}^\dagger \mathbf{P}_1 c' f \sigma_1' \mathbf{a}_{\mathbf{p}_2 c' f' \sigma_2}^\dagger \mathbf{d}^\dagger \mathbf{P}_2 c f' \sigma_2' + \mathbf{d}_{\mathbf{p}_1 c f \sigma_1} \mathbf{a}^{\mathbf{P}_1 c' f \sigma_1'} \mathbf{d}_{\mathbf{p}_2 c' f' \sigma_2} \mathbf{a}^{\mathbf{P}_2 c f' \sigma_2'} \right. \\ & + \mathbf{a}_{\mathbf{p}_1 c f \sigma_1}^\dagger \mathbf{d}^\dagger \mathbf{P}_1 c' f \sigma_1' \mathbf{d}_{\mathbf{p}_2 c' f' \sigma_2} \mathbf{a}^{\mathbf{P}_2 c f' \sigma_2'} + \mathbf{d}_{\mathbf{p}_1 c f \sigma_1} \mathbf{a}^{\mathbf{P}_1 c' f \sigma_1'} \mathbf{a}_{\mathbf{p}_2 c' f' \sigma_2}^\dagger \mathbf{d}^\dagger \mathbf{P}_2 c f' \sigma_2' \left. \right) \\ & \times \left( \boldsymbol{\sigma}_{\sigma_1 \sigma_1'}^j - \frac{p_1^j}{E_1(m+E_1)} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{P}_1)_{\sigma_1 \sigma_1'} \right) \left( \boldsymbol{\sigma}_{\sigma_2 \sigma_2'}^k - \frac{p_2^k}{E_2(m+E_2)} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{P}_2)_{\sigma_2 \sigma_2'} \right), \end{aligned} \quad (1.17)$$

y

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{\mathcal{E}}^{jk} = & \int d^3p_1 d^3p_2 \left( \mathbf{a}_{\mathbf{p}_1 c f \sigma_1}^\dagger \mathbf{a}^{\mathbf{P}_1 c' f \sigma_1} \mathbf{a}_{\mathbf{p}_2 c' f' \sigma_2}^\dagger \mathbf{d}^\dagger \mathbf{P}_2 c f' \sigma_2' + \mathbf{a}_{\mathbf{p}_1 c f \sigma_1}^\dagger \mathbf{a}^{\mathbf{P}_1 c' f \sigma_1} \mathbf{d}_{\mathbf{p}_2 c' f' \sigma_2} \mathbf{a}^{\mathbf{P}_2 c f' \sigma_2'} \right. \\ & - \mathbf{d}_{\mathbf{p}_1 c f \sigma_1} \mathbf{d}^\dagger \mathbf{P}_1 c' f \sigma_1' \mathbf{a}_{\mathbf{p}_2 c' f' \sigma_2}^\dagger \mathbf{d}^\dagger \mathbf{P}_2 c f' \sigma_2' - \mathbf{d}_{\mathbf{p}_1 c f \sigma_1} \mathbf{d}^\dagger \mathbf{P}_1 c' f \sigma_1' \mathbf{d}_{\mathbf{p}_2 c' f' \sigma_2} \mathbf{a}^{\mathbf{P}_2 c f' \sigma_2'} \\ & + \mathbf{a}_{\mathbf{p}_2 c f \sigma_2}^\dagger \mathbf{d}^\dagger \mathbf{P}_2 c' f \sigma_2' \mathbf{a}_{\mathbf{p}_1 c' f' \sigma_1}^\dagger \mathbf{a}^{\mathbf{P}_1 c f' \sigma_1} - \mathbf{a}_{\mathbf{p}_2 c f \sigma_2}^\dagger \mathbf{d}^\dagger \mathbf{P}_2 c' f \sigma_2' \mathbf{d}_{\mathbf{p}_1 c' f' \sigma_1} \mathbf{d}^\dagger \mathbf{P}_1 c f' \sigma_1 \\ & \left. + \mathbf{d}_{\mathbf{p}_2 c f \sigma_2} \mathbf{a}^{\mathbf{P}_2 c' f \sigma_2'} \mathbf{a}_{\mathbf{p}_1 c' f' \sigma_1}^\dagger \mathbf{a}^{\mathbf{P}_1 c f' \sigma_1} - \mathbf{d}_{\mathbf{p}_2 c f \sigma_2} \mathbf{a}^{\mathbf{P}_2 c' f \sigma_2'} \mathbf{d}_{\mathbf{p}_1 c' f' \sigma_1} \mathbf{d}^\dagger \mathbf{P}_1 c f' \sigma_1 \right) \\ & \times \frac{p_1^j}{E_1} \left( \boldsymbol{\sigma}_{\sigma_2 \sigma_2'}^k - \frac{p_2^k}{E_2(m+E_2)} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{P}_2)_{\sigma_2 \sigma_2'} \right). \end{aligned} \quad (1.18)$$

Antes de concluir con este capítulo, se bosqueja un punto más, el concerniente al término  $G_a^j G_a^k$ , el cual se puede llevar a una forma que involucra operadores de creación y aniquilación bosónicos. Para esto, se toma en cuenta el hecho de que las excitaciones del glueball considerado, el  $0^{++}$ , están dadas por la parte radial de un oscilador armónico en 24 dimensiones de acuerdo a [11], por lo tanto, en términos de  $\mathbf{g}$  y  $\mathbf{g}^\dagger$ , operadores que aniquilan y crean<sup>2</sup>, respectivamente, gluones efectivos, se tiene que

$$G_a^j G_a^k \propto \left( \mathbf{g}_{aj}^\dagger \mathbf{g}_{ak}^\dagger + \mathbf{g}_{aj} \mathbf{g}_{ak} + 2 \mathbf{g}_{aj}^\dagger \mathbf{g}_{ak} \right), \quad (1.19)$$

pero a través de un mapeo bosónico encontrado en [27]:

$$\mathbf{g}_{ai}^\dagger \mathbf{g}_{ai}^\dagger \rightarrow \sqrt{48} \mathbf{b}, \quad (1.20)$$

$$\mathbf{g}_{ai} \mathbf{g}_{ai} \rightarrow \sqrt{48} \mathbf{b}^\dagger \left( 1 + \frac{\mathbf{b}^\dagger \mathbf{b}}{12} \right), \quad (1.21)$$

$$\mathbf{g}_{ai}^\dagger \mathbf{g}_{ai} \rightarrow 2 \mathbf{b}^\dagger \mathbf{b}, \quad (1.22)$$

$$(1.23)$$

para  $j = k$  en (1.19), se produce

$$G_j^a G_j^a \rightarrow \left( \mathbf{b} + \mathbf{b}^\dagger \left( 1 + \frac{\mathbf{b}^\dagger \mathbf{b}}{12} \right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \mathbf{b}^\dagger \mathbf{b} \right), \quad (1.24)$$

---

<sup>2</sup> $\mathbf{g}$  y  $\mathbf{g}^\dagger$  satisfacen el álgebra de conmutadores:  $[\mathbf{g}_{ai}, \mathbf{g}_{a'j}^\dagger] = \delta_{aa'} \delta_{ij}$ ,  $[\mathbf{g}_{ai}, \mathbf{g}_{a'j}] = [\mathbf{g}_{ai}^\dagger, \mathbf{g}_{a'j}^\dagger] = 0$

No obstante, para la adecuada descripción de los espectros mesónico [16] y bariónico, tema central de esta tesis, todavía deben efectuarse algunas depuraciones y consideraciones relevantes sobre los términos del Hamiltoniano (1.15), las cuales se discuten en los capítulos respectivos a mesones y bariones.

# Capítulo 2

## Estados mesónicos

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos por Lerma *et al.* en los trabajos [13, 14, 16] para los estados mesónicos obtenidos a través del modelo visto en el primer capítulo, agregando algunas consideraciones adicionales que se explican en las secciones subsecuentes. Esto con la finalidad de ilustrar la efectividad del modelo que da pauta para desarrollar la extensión a los estados bariónicos utilizando las mismas bases, objetivo de esta tesis y detallado en el capítulo siguiente. Las secciones incluidas en este apartado muestran como se evoluciona desde un modelo restringido a pares escalares de sabor y espín hasta alcanzar un modelo general. En la primer sección se hacen las acotaciones necesarias para obtener un Hamiltoniano efectivo para el sector mesónico a partir de lo encontrado en el capítulo previo, tales consideraciones incluyen los criterios de elección y desecho de algunos de los términos del Hamiltoniano (1.15), así como una asociación a un grupo de pseudoespín  $SU_{\mathcal{J}}(2)$ . En la sección 2.2 se discuten, como preámbulo y ensayo para el tratamiento del caso general, los acoplamientos de pares de sabor (0,0) y espín 0, y la aparición de lo que parece ser una transición de fase del sistema. En las últimas cuatro secciones del capítulo se estudian todos los acoplamientos posibles entre los sabores (0,0) y (1,1) con los espines 0 y 1. El tratamiento bosquejado se hace mediante un mapeo bosónico que simplifica la tarea de encontrar los eigenestados y eigenenergías del Hamiltoniano propuesto. El ajuste al espectro de mesones se obtiene mediante cuatro constantes de acoplamiento que resultan de considerar 13 estados mesónicos observados.

### 2.1 Un modelo simple para describir mesones

Como primera acotación al modelo discutido anteriormente, el Hamiltoniano (1.15) debe restringirse a un solo momento, i.e.,  $|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2| = p$  para describir al sistema de la Fig. (1.2). También deben efectuarse los reacoplamientos de sabor y espín, notando que, la parte gluónica puede acoplarse a espín  $J = 0, 2$ , de igual forma que la parte fermiónica. Por otro lado, en el reacoplamiento de sabor, es suficiente considerar la parte fermiónica que resulta acoplada a color (0,0) y sabor (0,0) y (1,1), en virtud de que los gluones son escalares de sabor. Así mismo, se tiene en cuenta que el modelo está restringido a una sola excitación orbital ( $L = 0$ ). Finalmente como el interés de este capítulo es la descripción de los estados mesónicos, el Hamiltoniano efectivo se reduce a operadores compuestos de la forma  $\mathbf{a}^\dagger \mathbf{d}^\dagger$  y  $\mathbf{d} \mathbf{a}$  para la creación y aniquilación de un par  $q\bar{q}$ , respectivamente. Por lo tanto, después de realizar lo anterior y ordenando normalmente,

el Hamiltoniano efectivo de interacción que resulta es:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{ief} = A_1 G_i^a G_i^a \sum_{\lambda=0}^1 \sum_{S=0}^1 A_{\lambda S} \left[ (\mathbf{B}_{(\lambda,\lambda)S}^\dagger \cdot \mathbf{B}_{(\lambda,\lambda)S}^\dagger) + (\mathbf{B}_{(\lambda,\lambda)S} \cdot \mathbf{B}_{(\lambda,\lambda)S}) \right. \\ \left. + 2(\mathbf{C}_{(\lambda,\lambda)S} \cdot \bar{\mathbf{C}}_{(\lambda,\lambda)S}) + A'_S (\mathbf{B}_{(\lambda,\lambda)S}^\dagger \cdot \mathbf{B}_{(\lambda,\lambda)S}) \right], \end{aligned} \quad (2.1)$$

con  $A_1$ ,  $A_{\lambda S}$  y  $A'_S$  constantes indeterminadas, mientras que los operadores bifermiónicos tienen la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{(\lambda,\lambda)f;SM}^\dagger &= \sum_{cf_1 f_2 s_1 s_2} \left( (1,0)f_1; (0,1)f_2 | (\lambda,\lambda)f \right) \left( \frac{1}{2}s_1; \frac{1}{2}s_2 | SM \right) \mathbf{a}_{cf_1 s_1}^\dagger \mathbf{d}_{cf_2 s_2}^\dagger, \\ \mathbf{B}_{(\lambda,\lambda)f;SM} &= \sum_{cf_1 f_2 s_1 s_2} \left( (1,0)f_1; (0,1)f_2 | (\lambda,\lambda)f \right) \left( \frac{1}{2}s_1; \frac{1}{2}s_2 | SM \right) \mathbf{d}_{cf_1 s_1} \mathbf{a}_{cf_2 s_2}, \\ \mathbf{C}_{(\lambda,\lambda)f;SM} &= \sum_{cf_1 f_2 s_1 s_2} \left( (1,0)f_1; (0,1)f_2 | (\lambda,\lambda)f \right) \left( \frac{1}{2}s_1; \frac{1}{2}s_2 | SM \right) \mathbf{a}_{cf_1 s_1}^\dagger \mathbf{a}_{cf_2 s_2}, \\ \bar{\mathbf{C}}_{(\lambda,\lambda)f;SM} &= \sum_{cf_1 f_2 s_1 s_2} \left( (1,0)f_1; (0,1)f_2 | (\lambda,\lambda)f \right) \left( \frac{1}{2}s_1; \frac{1}{2}s_2 | SM \right) \mathbf{d}_{cf_1 s_1}^\dagger \mathbf{d}_{cf_2 s_2}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

donde  $\left( (1,0)f_1; (0,1)f_2 | (\lambda,\lambda)f \right) \left( \frac{1}{2}s_1; \frac{1}{2}s_2 | SM \right)$  son los coeficientes de Clebsch-Gordon de  $SU(3)$  de sabor [28] y  $SU(2)$  de espín [29, 30].

Por último, tomando en cuenta el resultado de (1.24), y el hecho de que para los primeros eigenestados de energía el número de gluones no es muy grande, el mapeo bosónico se toma a primer orden, obteniendo así, el Hamiltoniano efectivo del modelo considerado para mesones:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{ef} &= \omega_f \sum_{cf\sigma} \left( \mathbf{a}_{cf\sigma}^\dagger \mathbf{a}^{cf\sigma} + \mathbf{d}^{\dagger cf\sigma} \mathbf{d}_{cf\sigma} \right) + \omega_b \mathbf{b}^\dagger \mathbf{b} \\ &+ \sum_{\lambda=0}^1 \sum_{S=0}^1 V_{\lambda S} \left( \mathbf{B}_{(\lambda,\lambda)S}^\dagger \cdot \mathbf{B}_{(\lambda,\lambda)S}^\dagger + 2\mathbf{B}_{(\lambda,\lambda)S}^\dagger \cdot \mathbf{B}_{(\lambda,\lambda)S} + \mathbf{B}_{(\lambda,\lambda)S} \cdot \mathbf{B}_{(\lambda,\lambda)S} \right) (\mathbf{b} + \mathbf{b}^\dagger), \end{aligned} \quad (2.3)$$

donde las constantes de interacción  $V_{\lambda S}$  han absorbido los diferentes parámetros encontrados.

Si ahora se considera el número de partículas que tiene el sistema de la Fig. (1.2),  $n_1$  partículas en el nivel inferior y  $n_2$  en el nivel superior, el número total de partículas está dado por  $N = n_1 + n_2$ . Por lo tanto, el número de quarks es  $n_q = n_2$ , mientras que el número de antiquarks está dado por el número de “agujeros” en el nivel inferior, i.e.,  $n_{\bar{q}} = 2\Omega - n_1$ , de aquí que,  $N = n_q - n_{\bar{q}} + 2\Omega$ . También se observa que, los pares  $q\bar{q}$  acoplados a espín y sabor cero del Hamiltoniano (2.3), satisfacen el álgebra de pseudoespín  $\mathcal{J}$ ,  $SU_{\mathcal{J}}(2)$  [31]:

$$\begin{aligned} [\mathbf{S}_+, \mathbf{S}_-] &= 2\mathbf{S}_0, \\ [\mathbf{S}_0, \mathbf{S}_\pm] &= \pm\mathbf{S}_\pm, \end{aligned} \quad (2.4)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_+ &= \mathbf{a}_{cf\sigma}^\dagger \mathbf{d}^{\dagger cf\sigma} = \sqrt{6} \mathbf{B}_{(0,0)0}^\dagger, \\ \mathbf{S}_- &= \mathbf{d}_{cf\sigma} \mathbf{a}^{cf\sigma} = \sqrt{6} \mathbf{B}_{(0,0)0}, \\ \mathbf{S}_0 &= \frac{1}{2} \left( \mathbf{a}_{cf\sigma}^\dagger \mathbf{a}^{cf\sigma} + \mathbf{d}^{\dagger cf\sigma} \mathbf{d}_{cf\sigma} \right) - \Omega = \frac{\mathbf{n}_q + \mathbf{n}_{\bar{q}}}{2} - \Omega. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Por lo que, reescribiendo el Hamiltoniano (2.3) para el acoplamiento a espín y sabor cero en términos de los operadores anteriores, se encuentra que

$$\mathbf{H}_{(0,0)0} = 2\omega_f (\mathbf{S}_0 + \Omega) + \omega_b \mathbf{n}_b + V_1 :(\mathbf{S}_+ + \mathbf{S}_-)^2: (\mathbf{b}^\dagger + \mathbf{b}), \quad (2.6)$$

donde  $V_{(0,0)}$  junto con las raíces de (2.5) se han incorporado al nuevo parámetro  $V_1$ ,  $\mathbf{n}_b = \mathbf{b}^\dagger \mathbf{b}$  y los dobles puntos definen el ordenamiento normal.

## 2.2 Los mesones: ensayo y error

Si de los términos de interacción del Hamiltoniano (2.6), se toman en cuenta solamente  $\mathbf{S}_+^2 \mathbf{b}$  y  $\mathbf{b}^\dagger \mathbf{S}_-^2$  (creación y aniquilación de pares  $q\bar{q}$ ) se puede obtener una solución exacta para el modelo en espacios de dimensión finita. Sin embargo, aquí se ilustra inmediatamente el proceso para obtener los eigenestados del Hamiltoniano (2.6) completo. Debe notarse que, la presencia de todos los términos de interacción mezcla los subespacios del operador  $\mathbf{R} = (\mathbf{S}_0 + \Omega)/2 + \mathbf{n}_b$ , lo cual lleva a una diagonalización en espacios de dimensión infinita. Para tener una aproximación del comportamiento real de los eigenvalores del Hamiltoniano (2.6), se usan estados fermiónicos y bosónicos coherentes, de la forma

$$\begin{aligned} |z\rangle &= |z_f\rangle |z_b\rangle, \\ |z_f\rangle &= \frac{1}{(1 + |z_f|^2)^\Omega} e^{z_f \mathbf{S}_+} |0\rangle_f, \\ |z_b\rangle &= e^{-\frac{|z_b|^2}{2}} e^{z_b \mathbf{b}^\dagger} |0\rangle_b, \end{aligned} \quad (2.7)$$

los cuales son definidos para la irrep  $\mathcal{J} = \Omega$  de  $SU_{\mathcal{J}}(2)$ . Por lo tanto, usando tales estados, se obtiene la expresión para el valor de expectación del Hamiltoniano en cuestión, como

$$\begin{aligned} \langle z | \mathbf{H}_{(0,0)0} | z \rangle &= 4\Omega\omega_f \frac{\rho_f^2}{(1 + \rho_f^2)} + \omega_b \rho_b^2 \\ &+ \frac{4\Omega V_1 \rho_f^2}{(1 + \rho_f^2)^2} [(\Omega - 1) \cos(2\phi_f) + \Omega + \rho_f^2] 2\rho_b \cos(\phi_b), \end{aligned} \quad (2.8)$$

donde se utiliza la notación  $z_f = \rho_f e^{i\phi_f}$  y  $z_b = \rho_b e^{i\phi_b}$ . Es claro que el valor de expectación (2.8) cambia según la constante  $V_1$  que se tenga. Además teniéndose en cuenta el parámetro adicional que introducen las fases con  $z_f$  y  $z_b$ , el valor de expectación tiene un mínimo cuando se cumplen las condiciones:

$$\begin{aligned} \cos(\phi_{b \min}) &= -1, \\ \cos(2\phi_{f \min}) &= +1, \end{aligned} \quad (2.9)$$

y para  $\rho_b$ :

$$\rho_{b \min} = \left( \frac{4\Omega V_1 \rho_f^2}{\omega_b (1 + \rho_f^2)^2} \right) [4\Omega - 1 + \rho_f^2]. \quad (2.10)$$

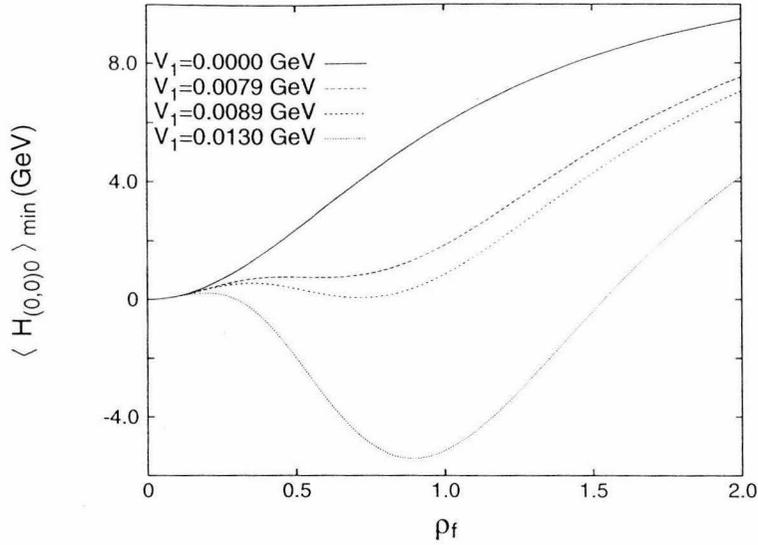


Figura 2.1: Hamiltoniano (2.6) como función de  $\rho_f$

Con lo anterior, el valor de expectación minimizado como función de  $\rho_f$  para diferentes valores de  $V_1$  se muestra en la Fig. 2.1. El comportamiento del Hamiltoniano (2.6) para valores de  $V_1$  menores que  $V_1 = V_c = 0.0089$  GeV, indica un mínimo global para  $\rho_{fmin} = 0$  correspondiente al estado  $|z_f = 0\rangle \otimes |z_b = 0\rangle = |0\rangle_f \otimes |0\rangle_b$ . Luego aparece un mínimo local en  $\rho_f \neq 0$  que se convierte en global para  $V_1 > V_c$ . De tal forma que, para  $\rho_f \neq 0$  se obtienen:

$$\begin{aligned} \langle z_f; z_b | \mathbf{n}_b | z_f z_b \rangle_{\min} &= \rho_{bmin}^2, \\ \langle z_f; z_b | \mathbf{n}_f | z_f z_b \rangle_{\min} &= \frac{2\Omega\rho_f^2}{(1 + \rho_f^2)}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

De lo anterior, se puede concluir, de acuerdo a la referencia [32], que el sistema exhibe una transición de fase cuántica, i.e., de una fase perturbativa pasa a una condensada donde el estado base tiene un condensado fermiónico y bosónico que crece monótonamente con  $V_1$ . De aquí también se entiende que para el estado base, por el Principio de Exclusión de Pauli, el condensado fermiónico tiende a un valor fijo,  $\Omega$ , cuando  $V_1$  crece ilimitadamente, mientras que para el condensado bosónico no se tiene restricción. Sin embargo, como  $n_b \approx 0$  para  $V_1 < V_c$ , y  $\langle \mathbf{n}_b \rangle$  crece monótonamente desde  $\langle \mathbf{n}_b \rangle \approx 2.5$  a partir de  $V_1 \geq V_c$ , se puede suponer que si  $V_1 \sim V_c$ , los primeros eigenestados del Hamiltoniano (2.6) no cambian apreciablemente cuando un número grande de excitaciones bosónicas interviene. Por lo tanto, si se introduce un corte  $n_{bmax}$  que acote el número máximo de excitaciones bosónicas permitidas para la matriz Hamiltoniana, se obtienen, ahora, matrices finitas que se diagonalizan numéricamente. Observando, además, que el Hamiltoniano (2.6) conserva Paridad, la diagonalización numérica es independiente del hecho de que los eigenestados tengan un número par o impar de excitaciones bifermiónicas. Así, los elementos de matriz diferentes de cero son:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{J} n_f; n_b | 2\omega_f(\mathbf{S}_0 + \Omega) | \mathcal{J} n_f; n_b \rangle &= 2\omega_f(n_f - \mathcal{J} + \Omega) \\ \langle \mathcal{J} n_f; n_b | \omega_b \mathbf{b}^\dagger \mathbf{b} | \mathcal{J} n_f; n_b \rangle &= \omega_b n_b \\ \langle \mathcal{J} n_f + 2; n_b - 1 | \mathbf{S}_+^2 \mathbf{b} | \mathcal{J} n_f; n_b \rangle &= \sqrt{(n_f + 1)(n_f + 2)} \sqrt{(2\mathcal{J} - n_f)(2\mathcal{J} - (n_f + 1))} \sqrt{n_b} \end{aligned}$$

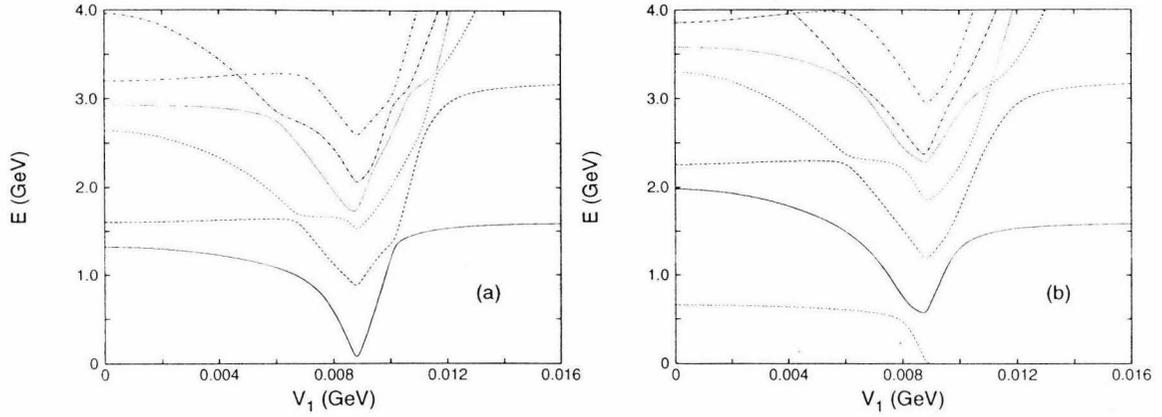


Figura 2.2: Espectro del Hamiltoniano (2.6) como función de  $V_1$  para los estados de paridad positiva (a) y negativa (b).

$$\begin{aligned}
 \langle \mathcal{J} \ n_f - 2; n_b - 1 | \mathbf{S}_-^2 \mathbf{b} | \mathcal{J} \ n_f; n_b \rangle &= \sqrt{(n_f)(n_f - 1)} \sqrt{(2\mathcal{J} - (n_f - 1))(2\mathcal{J} - (n_f - 2))} \sqrt{n_b} \\
 \langle \mathcal{J} \ n_f; n_b - 1 | \mathbf{S}_+ \mathbf{S}_- \mathbf{b} | \mathcal{J} \ n_f; n_b \rangle &= n_f (2\mathcal{J} - (n_f - 1)) \sqrt{n_b}
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

donde los subespacios en los que se diagonalizó están dados por

$$|\mathcal{J} = \Omega \ n_f \rangle \otimes |n_b \rangle \equiv |\mathcal{J} = \Omega \ n_f; n_b \rangle, \tag{2.13}$$

con  $n_f = 0, 2, 4, \dots, 2\Omega$  para la paridad positiva y  $n_f = 1, 3, 5, \dots, 2\Omega - 1$  para la negativa, en ambos casos  $n_b = 0, 1, 2, \dots, n_{bmax}$ .

Del proceso numérico efectuado con un programa en FORTRAN, se encuentra que para diagonalizar el Hamiltoniano (2.6) con valores de  $V_1 \leq 0.016$  GeV, basta un valor de corte  $n_{bmax} = 40$ .

El resultado de la diagonalización son los espectros de los estados de paridad positiva y negativa mostrados en la Fig. 2.2, donde se observa como el sistema, efectivamente, transita de una fase perturbativa a una fase condensada cuando  $V_c = V_1 \approx 0.0089$  GeV. Nótese que en la fase condensada ( $V_1 \gg V_c$ ), el espectro está dado por excitaciones que equidistan por una energía de 1.6 GeV, correspondiente a la masa  $\omega_b$  del glueball  $0^{++}$ . Por otro lado, la diferencia entre el número de excitaciones bosónicas y fermiónicas como función de  $V_1$  en el estado base del sistema, indica que para valores de  $V_1$  tales que  $V_c < V_1 < 0.015$  GeV, el condensado fermiónico domina sobre el bosónico, y *vice versa* para valores de  $V_1 > 0.015$  GeV, Fig. 2.3, esto debido a la limitación impuesta por el Principio de exclusión de Pauli.

### 2.3 Acoplamiento de espín $S = 0, 1$ y sabor $(\lambda, \mu) = (0, 0)$ y $(1, 1)$

En esta sección 2.3, se resumen los principales resultados para la descripción de los estados mesónicos a bajas energías del modelo de quarks y gluones constituyentes presentado en el primer capítulo. Lerma *et al.* en [14, 16], obtuvieron con el Hamiltoniano más general todos los acoplamientos posibles entre espín ( $S = 0, 1$ ) y sabor ( $(\lambda, \mu) = (0, 0), (1, 1)$ ). También se delinea el mapeo bosónico utilizado, en virtud de las dificultades técnicas que surgen cuando se trabaja en el espacio fermiónico directamente.

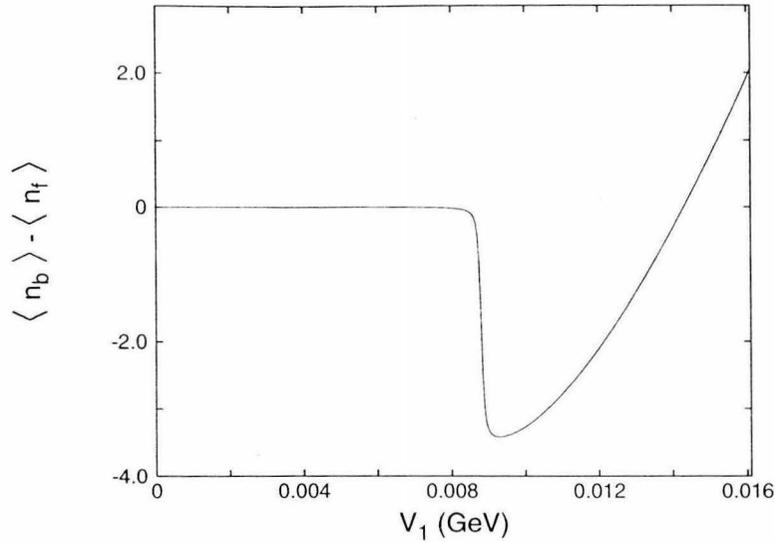


Figura 2.3: Diferencia entre los valores de expectación del número de pares fermiónicos y bosónicos en el estado base como función de  $V_1$ .

Como se observó párrafos atrás, los pares  $q\bar{q}$  del modelo, son dados por los operadores bifermiónicos (2.2), donde los operadores  $\mathbf{B}_{(\lambda,\lambda)f;SM}$  aniquilan el vacío  $|0\rangle$ , el cual está dado como la configuración donde el estado inferior está totalmente lleno y el superior completamente vacío. Con base en la teoría de grupos, se encuentra la clasificación completa para los estados que incluye el sabor,  $SU_f(3)$  y el espín,  $SU_S(2)$ , y su representación está dada por

$$\begin{array}{ccccccc}
 [1^N] & & [\tilde{h}_1 \dots \tilde{h}_{\frac{\Omega}{3}}] & & [h_1 \dots h_{12}] & & \sum_{i=1}^{12} h_i = N \\
 U(4\Omega) & \supset & U(\frac{\Omega}{3}) & \otimes & U(12) & & \\
 & & & & \cup \varrho_f & & \\
 & & & & [f_1 f_2 f_3] & U_f(3) \otimes U(4) & [g_1 g_2 g_3 g_4] \dots (2.14) \\
 & & \cup & & \cup \varrho_S & & \\
 (\lambda_C, \mu_C) & & SU_C(3) & & (\lambda_f, \mu_f) & SU_f(3) \otimes SU_S(2) & S M ;
 \end{array}$$

donde la irrep de  $U(4\Omega)$  es completamente antisimétrica,  $N$  es el número de partículas de energía positiva y negativa. La irrep  $[\tilde{h}]$  de  $U(\Omega/3)$  es el diagrama de Young transpuesto de la irrep  $[h]$  de  $U(12)$ . Si  $\Omega = 9$ , entonces  $U(\Omega/3)$  es el grupo de color y sus irreps tienen tres renglones como máximo. Los índices  $\varrho_f$  y  $\varrho_S$  son índices de multiplicidad en la reducción de  $U(12)$  y de  $U(4)$  al grupo de espín total  $SU_S(2)$ , respectivamente. Los índices de color y sabor se relacionan con los índices de los grupos unitarios a través de  $\lambda_C = \tilde{h}_1 - \tilde{h}_2$ ,  $\mu_C = \tilde{h}_2 - \tilde{h}_3$  y  $\lambda_f = f_1 - f_2$ ,  $\mu_f = f_2 - f_3$ . La reducción de  $U(12)$  se efectúa mediante programas en FORTRAN presentados también en [16]. El estado completo es dado por la expresión:

$$\left| N, [g_1 g_2 g_3 g_4] (\lambda_C, \mu_C) Y_C T_C T_{3C}, \varrho_f (\lambda_f, \mu_f) Y_f T_f T_{3f}, \varrho_S S M \right\rangle, \quad (2.15)$$

donde  $Y$ ,  $T$  y  $T_3$  son la hipercarga, isoespín y proyección del isoespín de las irreps  $SU(3)$  de color y sabor. Para estados mesónicos, los números cuánticos de color considerados son  $(\lambda_C, \mu_C) = (0, 0)$ . Tales estados se sitúan en un volumen elemental de aproximadamente  $4\pi/3 f \bar{m}^3$ . Para obtener los valores de  $\tilde{h}_i$  y determinar  $(\lambda, \mu)$ , se considera todas las posibles particiones de  $N = \tilde{h}_1 + \tilde{h}_2 + \tilde{h}_3$ ,

para  $N = 0, 1, \dots, 4\Omega$ ,  $\tilde{h}_{i+1} \leq \tilde{h}_i$  y  $\tilde{h}_1 \leq 12$ , así, para los estados de color cero se tiene  $\tilde{h}_1 = \tilde{h}_2 = \tilde{h}_3 = \tilde{h}$ .

## 2.4 Consideraciones del mapeo bosónico general

Debido a que la construcción explícita de los estados fermiónicos (2.15), y el cálculo de los elementos de matriz es altamente complicado para la idea de un modelo simple, se recurre a un mapeo bosónico de los operadores  $B^\dagger$  y  $B$  que llevan el modelo del espacio fermiónico al bosónico. Esto es,

$$B_{f_1\sigma_1}^{\dagger f_2\sigma_2} \rightarrow b_{f_1\sigma_1}^{\dagger f_2\sigma_2}, \quad B_{f_1\sigma_1}^{f_2\sigma_2} \rightarrow b_{f_1\sigma_1}^{f_2\sigma_2}, \quad (2.16)$$

donde los operadores  $b^\dagger$  y  $b$  satisfacen las relaciones de conmutación para bosones

$$\left[ b_{f_1\sigma_1}^{f_2\sigma_2}, b_{f_3\sigma_3}^{\dagger f_4\sigma_4} \right] = \delta_{f_3 f_2} \delta_{f_4 f_1} \delta_{\sigma_3 \sigma_2} \delta_{\sigma_4 \sigma_1} \quad (2.17)$$

El mapeo bosónico, exacto y general, existe [27, 38]. Sin embargo, su aplicación no está en acuerdo con el concepto de modelo esquemático debido a las dificultades que introduce en el Hamiltoniano. Si más bien, se piensa que desde el inicio se trabaja en el espacio bosónico y se define un Hamiltoniano bosónico y una base equivalentes a aquellos del espacio fermiónico se obtiene una simplificación de los cálculos involucrados. No obstante, el precio a pagar es la aparición de estados *espurios*, i.e., estados no físicos y cuyo significado se discute más adelante. Para escoger una base apropiada en el espacio bosónico, se usa el hecho de que los grados de libertad básicos están dados por los operadores bosónicos de creación

$$b_{(\lambda,\lambda)_{fSM}}^\dagger \equiv b_{\lambda_{fSM}}^\dagger, \quad (2.18)$$

para  $\lambda = 0, 1$  y  $S = 0, 1$ . La consideración de tales valores, implica cuatro posibles combinaciones de  $[\lambda, S]$ :  $[0, 0]$ ,  $[0, 1]$ ,  $[1, 0]$  y  $[1, 1]$ . De aquí que, el espacio total de Hilbert sea pensado como el producto directo de los espacios correspondientes a osciladores armónicos de una, tres, ocho y 24 dimensiones<sup>1</sup>. La base, ahora, se escoge como una base de *seniority* bien definida para cada oscilador armónico en una, tres, ocho y 24 dimensiones. La seniority en este caso se asocia al número de bosones  $b_{\lambda S}^\dagger$  no acoplados en pares a un escalar,

$$\mathcal{N}_{N_{\lambda S} \nu_{\lambda S}} \left( b_{\lambda S}^\dagger \cdot b_{\lambda S}^\dagger \right)^{\frac{N_{\lambda S} - \nu_{\lambda S}}{2}} |\nu_{\lambda S} \alpha_{\lambda S}\rangle, \quad (2.19)$$

donde  $N_{\lambda S}$  es el número de bosones del tipo  $[\lambda, S]$ ,  $\nu_{\lambda S}$  es la seniority correspondiente y  $\mathcal{N}_{N_{\lambda S} \nu_{\lambda S}}$  es una constante de normalización,  $\alpha_{\lambda S}$  etiqueta al resto de los números cuánticos necesarios para caracterizar a los estados de un oscilador armónico particular. La elección de una base de seniority es debido a que el cálculo de los elementos de matriz de la interacción del Hamiltoniano bosónico,  $(b_{\lambda S}^\dagger \cdot b_{\lambda S}^\dagger)$ ,  $(b_{\lambda S} \cdot b_{\lambda S})$  y  $(b_{\lambda S}^\dagger \cdot b_{\lambda S})$ , se efectúa de manera más fácil que en otras bases. También debe observarse que, la forma explícita de  $|\nu_{\lambda S} \alpha_{\lambda S}\rangle$  no es necesaria, sino que basta solamente el conocimiento de los números cuánticos  $\alpha_{\lambda S}$  para cada  $\nu_{\lambda S}$  dada. Por ejemplo, para el oscilador unidimensional,  $[0, 0]$ , el estado correspondiente es de la forma

$$(b_{00}^\dagger)^{N_{00}} |0\rangle = (b_{00}^\dagger b_{00}^\dagger)^{\frac{N_{00} - \nu_{00}}{2}} (b_{00}^\dagger)^{\nu_{00}} |0\rangle, \quad (2.20)$$

<sup>1</sup>Las dimensiones de las irreps respectivas,  $\dim(0,0) \times \dim(S=0) = 1$ ,  $\dim(0,0) \times \dim(S=1) = 3$ ,  $\dim(1,1) \times \dim(S=0) = 8$  y  $\dim(1,1) \times \dim(S=1) = 24$

y  $\nu_{00}$  puede tomar los valores de 0 ó 1 (número par o impar de excitaciones). Para el caso del oscilador en tres dimensiones,  $[0, 1]$ , la seniority es igual al espín  $S_{01}$

$$\left| N_{01} S_{01} M = S_{01} \right\rangle = \mathcal{N}_{N_{01} S_{01}} \left( \mathbf{b}_{01}^\dagger \cdot \mathbf{b}_{01}^\dagger \right)^{\frac{N_{01} - S_{01}}{2}} \left( \mathbf{b}_{01}^\dagger \right)_{1}^{S_{01}} \left| 0 \right\rangle. \quad (2.21)$$

En ocho dimensiones,  $[1, 0]$ , se encuentra que el oscilador sólo contribuye al sabor, cuyo contenido  $(\lambda_{10}, \mu_{10})$  para cualquier  $\nu_{10}$  dada, puede determinarse de forma recursiva a través de la reducción de las irreps totalmente simétricas  $[N_{10}]$  del grupo  $U_{10}(8)$  en irreps del grupo  $SU_{10}(3)$ . De lo anterior se deriva que,  $\nu_{10} = 1$  contiene únicamente sabor  $(1, 1)$  y que a  $\nu_{10} = 3$  le corresponde el  $(0, 0)$ . Así, la diferencia de las multiplicidades de las irreps  $(\lambda, \mu)$  en  $[N_{10} - 2]$  y  $[N_{10}]$  da el contenido de sabor para  $\nu_{10} = N_{10}$ .

Finalmente, para el oscilador armónico en 24 dimensiones,  $[1, 1]$ , el procedimiento es similar al de ocho dimensiones. De reducir las irreps totalmente simétricas  $[N_{11}]$  de  $U(24)$ , a los grupos  $SU(3)$  y  $SU(2)$  de sabor  $(\lambda_{11}, \mu_{11})$  y espín  $S_{11}$ , y de conocer el contenido de sabor y espín de  $[N_{11} - 2]$  y  $[N_{11}]$ , los espines y sabores de seniority  $\nu_{11} = N_{11}$ , se obtienen restando las multiplicidades de las irreps de sabor y espín contenidas en  $[N_{11} - 2]$  y  $[N_{11}]$ . Los espines  $S_{01}$  y  $S_{11}$  deben ser acoplados a espín total  $S$  y los sabores  $(\lambda_{10}, \mu_{10})$  y  $(\lambda_{11}, \mu_{11})$  a sabor total  $(\lambda, \mu)$  para encontrar el contenido de sabor y espín de la tétrada de seniority  $(\nu_{11}, \nu_{10}, \nu_{01}, \nu_{00})$  dada. Los procedimientos anteriores también son sistematizados a través de códigos en FORTRAN. El proceso se encuentra en más detalle en [30].

La paridad de cada estado es dada por  $P = (-1)^{n_f}$ , donde  $n_f = \sum_{\lambda, S=0}^1 \nu_{\lambda S}$ , en virtud de que, cada bosón  $[\lambda, S]$  representa a un par  $q\bar{q}$  de momento orbital cero, el cual tiene paridad negativa.

La propiedad de conjugación de carga se obtiene de aplicar el operador de conjugación  $C$  al operador de creación de pares  $B_{(\lambda, \lambda) f, SM}^\dagger$ :

$$C B_{\lambda f, SM}^\dagger C^{-1} = (-1)^S B_{\bar{\lambda} \bar{f}, SM}^\dagger, \quad (2.22)$$

donde  $\lambda \equiv (\lambda, \mu)$  y  $f \equiv Y, T, T_z$ , y sus índices conjugados  $\bar{\lambda} = (\mu, \lambda)$  y  $\bar{f} = -Y, T, -T_z$ . De aquí que, sólo estados con  $Y = 0, T_z = 0$  y  $\mu = \lambda$ , tengan conjugación de carga  $C$  definida. En la ec.(2.22) se aplicó el operador  $C$  que intercambia los operadores de quarks y antiquarks ( $a^\dagger \leftrightarrow d^\dagger$ ) e invierte los números cuánticos magnéticos de sabor ( $Y_i \rightarrow -Y_i$  y  $T_{iz} \rightarrow -T_{iz}$ ). También se encuentra la conjugación de carga para el producto de dos y tres operadores de creación de pares  $q\bar{q}$ :

$$C \left[ B_{\lambda_1, S_1}^\dagger \otimes B_{\lambda_2, S_2}^\dagger \right]_{f, M}^{\rho(\lambda, \mu) S} C^{-1} = (-1)^{S_1 + S_2 - \lambda - \mu + \rho_{max} - \rho} \left[ B_{\lambda_1, S_1}^\dagger \otimes B_{\lambda_2, S_2}^\dagger \right]_{\bar{f}, M}^{\rho(\mu, \lambda) S}, \quad (2.23)$$

donde  $\rho$  es el índice de multiplicidad de  $(\lambda, \mu)$  en el producto  $(\lambda_1, \lambda_1) \otimes (\lambda_2, \lambda_2)$  y  $\rho_{max}$  es el valor máximo de  $\rho$ ; y

$$C \left[ \left[ B_{\lambda_1, S_1}^\dagger \otimes B_{\lambda_2, S_2}^\dagger \right]_{f, M}^{\rho_{12}(\lambda_{12}, \mu_{12}), S_{12}} \otimes B_{\lambda_3, S_3}^\dagger \right]_{f, M}^{\rho(\lambda, \mu), S} C^{-1} = (-1)^{S_1 + S_2 + S_3 - \lambda - \mu + \rho_{12, max} - \rho_{12} + \rho_{max} - \rho} \left[ \left[ B_{\lambda_1, S_1}^\dagger \otimes B_{\lambda_2, S_2}^\dagger \right]_{f, M}^{\rho_{12}(\mu_{12}, \lambda_{12}), S_{12}} \otimes B_{\lambda_3, S_3}^\dagger \right]_{\bar{f}, M}^{\rho(\mu, \lambda), S} \quad (2.24)$$

con  $\rho_{12}$  el índice de multiplicidad de  $(\lambda_{12}, \mu_{12})$  en el producto  $(\lambda_1, \lambda_1) \otimes (\lambda_2, \lambda_2)$ ,  $\rho$  la multiplicidad de  $(\lambda, \mu)$  en el último de los acoplamientos y  $\rho_{12, max}$  el valor máximo de  $\rho_{12}$ . El signo  $\otimes$  denota el producto combinado en  $SU_f(3)$  y  $SU_S(2)$ .

Por lo tanto, como conclusión de esta sección se tiene que el espacio total del modelo es el producto directo de los espacios de los osciladores armónicos anteriores con el espacio bosónico de las excitaciones de los glueballs  $0^{++}$  ( $(\mathbf{b}^\dagger)^{n_b}|0\rangle$ ).

## 2.5 Eigenestados del Hamiltoniano bosónico

El Hamiltoniano usado para trabajar en el espacio bosónico es de la forma

$$\begin{aligned} H = & 2\omega_f \mathbf{n}_f + \omega_b \mathbf{n}_b + \\ & \sum_{\lambda, S=0}^1 \mathcal{V}_{\lambda S} \left\{ \left[ \left( \mathbf{b}_{\lambda S}^\dagger \cdot \mathbf{b}_{\lambda S}^\dagger \right) + 2 \left( \mathbf{b}_{\lambda S}^\dagger \cdot \mathbf{b}_{\lambda S} \right) + \left( \mathbf{b}_{\lambda S} \cdot \mathbf{b}_{\lambda S} \right) \right] \left( 1 - \frac{\mathbf{n}_f}{2\Omega} \right) \mathbf{b} + \right. \\ & \left. \mathbf{b}^\dagger \left( 1 - \frac{\mathbf{n}_f}{2\Omega} \right) \left[ \left( \mathbf{b}_{\lambda S}^\dagger \cdot \mathbf{b}_{\lambda S}^\dagger \right) + 2 \left( \mathbf{b}_{\lambda S}^\dagger \cdot \mathbf{b}_{\lambda S} \right) + \left( \mathbf{b}_{\lambda S} \cdot \mathbf{b}_{\lambda S} \right) \right] \right\} , \end{aligned} \quad (2.25)$$

donde  $\mathbf{n}_f = \sum_{\lambda S} \mathbf{N}_{\lambda S}$  es el operador de número total de los pares  $q\bar{q}$ . El término  $(\mathbf{b}_{\lambda S}^\dagger \cdot \mathbf{b}_{\lambda S}^\dagger)$   $[(\mathbf{b}_{\lambda S} \cdot \mathbf{b}_{\lambda S})]$  describe la creación [aniquilación] de dos pares  $q\bar{q}$  con la creación o aniquilación de un par de gluones. El término  $(\mathbf{b}_{\lambda S}^\dagger \cdot \mathbf{b}_{\lambda S})$  describe la dispersión de un par fermiónico con la creación o aniquilación de un glueball  $0^{++}$ . Nótese que todos los procesos pueden ser representados por diagramas de Feynman, y debido a que las constantes  $\mathcal{V}_{\lambda S}$  deben ser invariantes ante el intercambio de líneas en los diagramas, a primera aproximación se toman las mismas constantes de acoplamiento para todos los canales. El factor  $(1 - \mathbf{n}_f/2\Omega)$  representa un “corte” que imita el efecto de un mapeo bosónico exacto y provoca la disminución de la interacción cuando el número de pares  $q\bar{q}$  es cercano a  $2\Omega$ , i.e., este factor simula principio de exclusión de Pauli que no permite más que  $2\Omega$  pares.

El Hamiltoniano (2.25) contiene 4 parámetros (los valores de  $\mathcal{V}_{\lambda S}$ ). El valor de  $\omega_f$  está fijo a 0.33 GeV (valor de la masa reportada en la literatura para los quarks constituyentes [10]). Así, los elementos de matriz del Hamiltoniano calculados en la base de seniority construida arriba están dados por

$$\begin{aligned} \langle n_b | \mathbf{n}_b | n_b \rangle &= n_b , \\ \langle N_{\lambda S} + 2 \nu_{\lambda S} \alpha_{\lambda S} | \mathbf{n}_f | N_{\lambda S} \nu_{\lambda S} \alpha_{\lambda S} \rangle &= N_{\lambda S} , \\ \langle n_b + 1 | \mathbf{b}^\dagger | n_b \rangle &= \sqrt{n_b + 1} , \\ \langle n_b - 1 | \mathbf{b} | n_b \rangle &= \sqrt{n_b} , \\ \langle N_{\lambda S} + 2 \nu_{\lambda S} \alpha_{\lambda S} | (\mathbf{b}_{\lambda S}^\dagger \cdot \mathbf{b}_{\lambda S}^\dagger) | N_{\lambda S} \nu_{\lambda S} \alpha_{\lambda S} \rangle &= \sqrt{(N_{\lambda S} - \nu_{\lambda S} + 2)(N_{\lambda S} + \nu_{\lambda S} + d_{\lambda S})} , \\ \langle N_{\lambda S} - 2\nu_{\lambda S} \alpha_{\lambda S} | (\mathbf{b}_{\lambda S} \cdot \mathbf{b}_{\lambda S}) | N_{\lambda S} \nu_{\lambda S} \alpha_{\lambda S} \rangle &= \sqrt{(N_{\lambda S} - \nu_{\lambda S})(N_{\lambda S} + \nu_{\lambda S} + d_{\lambda S} - 2)} , \\ \langle N_{\lambda S} \nu_{\lambda S} \alpha_{\lambda S} | (\mathbf{b}_{\lambda S}^\dagger \cdot \mathbf{b}_{\lambda S}) | N_{\lambda S} \nu_{\lambda S} \alpha_{\lambda S} \rangle &= N_{\lambda S} , \end{aligned} \quad (2.26)$$

donde  $d_{\lambda, S} = 1, 3, 8$  y  $24$  para las combinaciones  $[\lambda, S] = [0, 0], [0, 1], [1, 0]$  y  $[1, 1]$  respectivamente.

El suponer de entrada el Hamiltoniano (2.25) para el sistema original, simplifica los cálculos subsecuentes, sin embargo, este supuesto tiene consecuencias, y la principal es la introducción de los estados espurios mencionados párrafos arriba, puesto que, el espacio de Hilbert bosónico es más grande que el espacio de los pares fermiónicos. En algunos casos, los estados espurios se pueden identificar, por ejemplo, si solamente los pares de sabor  $(0, 0)$  y espín  $0$  son tomados en cuenta, la estructura de grupos relevante es  $U(4\Omega) \supset U(2\Omega) \otimes \supset U(2)$ . La irrep de  $U(4\Omega)$

debe ser antisimétrica, lo cual implica que  $U(2\Omega)$  y  $U(2)$  deben ser complementarios, i.e., si  $U(2)$  está dada por un diagrama de Young con dos renglones, la representación de  $U(2\Omega)$  debe ser la adjunta, obtenida por el intercambio de renglones y columnas. Entonces, el límite superior, por arriba del cual ningún estado espurio aparece, es  $2\Omega$ , ya que  $U(2\Omega)$  permite  $2\Omega$  renglones en el diagrama de Young, y éste también, es el número máximo de pares permitido. Si, en general, los sabores  $(0, 0)$  y  $(1, 1)$  y espines 0 y 1 son considerados,  $U(4\Omega) \supset U(\Omega/3) \otimes \supset U(12)$  tiene como límite superior el número  $\Omega/3$ , por abajo del cual ningún estado espurio aparece. En vista de lo anterior, el criterio adoptado para cortar el espacio bosónico de los osciladores armónicos en 1, 3, 8 y 24 dimensiones y evitar lo más posible la aparición de estados no físicos es el siguiente:

$$\begin{aligned} N_{00} + N_{01} + N_{10} + N_{11} &\leq 2\Omega, \\ N_{01} &\leq \Omega, \\ N_{10} &\leq \frac{2\Omega}{3}, \\ N_{11} &\leq \frac{\Omega}{3}. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Para  $\Omega = 9$  los límites son 18, 9, 6 y 3 respectivamente. Debe mencionarse que el precio pagado por minimizar la influencia de los estados espurios mediante estos cortes, es la eliminación también de algunos estados físicos.

## 2.6 Arreglo del espectro mesónico

La obtención del espectro mesónico es el resultado de una serie de códigos en FORTRAN que toman en cuenta el Hamiltoniano (2.25), la base en el espacio bosónico (2.19) y el criterio de corte (2.27). El cálculo de los eigenestados y las eigenenergías es función de las constantes de interacción, para lo cual se utiliza la seniority de cada  $(\lambda, \mu)S^P$  más un proceso de minimización que finalmente conduce al “mejor” ajuste del modelo al espectro experimental de los estados mesónicos.

En el proceso de la determinación del espectro de los estados mesónicos, se usan como datos de entrada en los programas, sólo los estados con  $T = 0$  y  $Y = 0$  de cada multiplete. Para un octete todos los estados tienen la misma energía, como el singulete de isoespín y el estado de hipercarga cero. En la Tabla 2.1 se muestran los estados usados como entrada, así como su sabor, espín y paridad junto con sus valores experimentales [39] y el peso dado en el ajuste. Sin embargo, debe notarse que los valores marcados con (\*), son valores corregidos por mezcla de sabor, i.e., tomando en cuenta el rompimiento de la simetría del sabor, la cual se debe a que, en la realidad las masas de los quarks up, down y strange no son todas iguales [34], y al efecto de excitaciones topológicas llamadas instantones [35]. Esto da un corrimiento en las masas de un mismo multiplete y la mezcla de las partículas isoescalares ( $T = 0 = Y$ ) de los octetes y singuletes de sabor. En [16], se eligen las masas isoescalares como energías representativas de los multipletes mesónicos y se considera la mezcla de los octetes y singuletes mesónicos. El Hamiltoniano bosónico considerado produce partículas de sabor definido, no obstante, las energías experimentales son más bien, combinaciones lineales de los estados de un sabor determinado, siendo este efecto más marcado en las energías de las partículas marcadas con (\*). En total son considerados 13 estados con espín 0 y 1. Las energías teóricas sin interacción, resultantes del ajuste y de la combinación de los osciladores armónicos, son graficadas en la Fig. 2.4 para diferentes valores de  $S^{PC}$ . En la figura también se ilustra lo grande de la multiplicidad a energías menores a 2 GeV, consecuencia que

partícula	$(\lambda_f, \mu_f)$	$J^P$	$E_{mod}$ (GeV)	$E_{exp}$ (GeV)	$p_i$	$\langle n_{10} \rangle$	$\langle n_f \rangle$	$\langle n_g \rangle$
vacío	(0,0)	$0^+$	0.0	0.0	0	3.118	3.177	1.705
$f_0(400-1200)$	(0,0)	$0^+$	0.656	0.600	25	0.457	0.471	0.321
$f_0(980)$	(1,1)	$0^+$	0.797	0.980	25	3.781	3.832	1.495
$f_1(1420)$	(0,0)	$1^+$	1.445	1.420	100	2.392	3.434	0.902
$f_1(1285)$	(1,1)	$1^+$	1.363	1.285	100	2.464	3.519	0.993
$\eta'$ (958)	(0,0)	$0^-$	0.885	*0.892	300	2.509	3.562	1.292
$\eta(1440)$	(0,0)	$0^-$	1.379	1.440	0	0.773	1.790	0.444
$\eta(541)$	(1,1)	$0^-$	0.602	*0.615	300	2.711	2.766	1.163
$\eta(1295)$	(1,1)	$0^-$	1.428	1.295	20	1.611	1.638	0.531
$\eta(1760)$	(1,1)	$0^-$	1.671	1.760	10	3.535	4.581	1.254
$\omega(782)$	(0,0)	$1^-$	0.851	*0.861	300	2.563	3.621	1.341
$\phi(1020)$	(1,1)	$1^-$	0.943	*0.940	300	2.394	3.438	1.198
$\omega(1420)$	(1,1)	$1^-$	1.389	1.420	20	0.853	1.870	0.468
$\omega(1600)$	(1,1)	$1^-$	1.639	1.650	10	3.546	4.597	1.206

Tabla 2.1: Datos de entrada para el ajuste del espectro de mesones. Las energías experimentales son tomadas de [39] y el (\*) indica que el valor está corregido por mezcla de sabor [16, 33]. Las energías obtenidas del ajuste son mostradas bajo la columna de  $E_{mod}$ .

se puede entender debido a las distintas formas para las cuales el mismo conjunto de números cuánticos puede ser obtenido, para una configuración dada, cuando muchos quarks, antiquarks y gluones son considerados. A esto se le conoce como el *problema de multiplicidad*.

Los espectros con interacción para los estados de espín 0, 1, 2, y 3 son el resultado de usar las constantes de interacción obtenidas en el ajuste. En la Fig. 2.5 se muestran tales espectros, donde se compara cada estado teórico obtenido con la masa isoescalar experimental respectiva [39], el sabor y la multiplicidad también son indicados. Ahora, debe observarse que la mayoría de las multiplicidades han desaparecido gracias a la interacción, en virtud de que esta cambia el número de partículas y relaciona el sector de quarks y antiquarks con los gluones, i.e., la interacción de mezcla de partículas remueve el problema de multiplicidad. Los casos de espín 2 y 3 son predichos por el modelo y los estados teóricos parecen estar en acuerdo con el experimento. Las constantes de interacción  $\mathcal{V}_{\lambda S}$  que arroja el proceso de ajuste son:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{00a} &= 0.0337 \text{ GeV}, & \mathcal{V}_{01a} &= 0.0422 \text{ GeV}, \\ \mathcal{V}_{10a} &= 0.1573 \text{ GeV}, & \mathcal{V}_{11a} &= 0.0177 \text{ GeV}. \end{aligned}$$

mientras que sus valores críticos están dados por

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{00c} &= 0.1584 \text{ GeV}, & \mathcal{V}_{01c} &= 0.1500 \text{ GeV}, \\ \mathcal{V}_{10c} &= 0.1425 \text{ GeV}, & \mathcal{V}_{11c} &= 0.01525 \text{ GeV}. \end{aligned}$$

Comparando los valores de ajuste con los críticos, se observa que sólo en el canal  $[1, 0]$  el sistema alcanza la fase deformada, la cual se acompaña de un estado de paridad negativa muy bajo en energía con los números cuánticos del canal. También se encuentra que los valores críticos no se alteran si se hallan por abajo de los valores de acoplamiento. En la Tabla 2.2, se resumen los resultados de un ajuste que fija todas las constantes  $\mathcal{V}_{\lambda S}$  a cero, excepto  $\mathcal{V}_{10}$ . Esto con el fin de mostrar que el canal  $[1, 0]$  es el fundamental para lograr la reproducción del espectro mesónico.

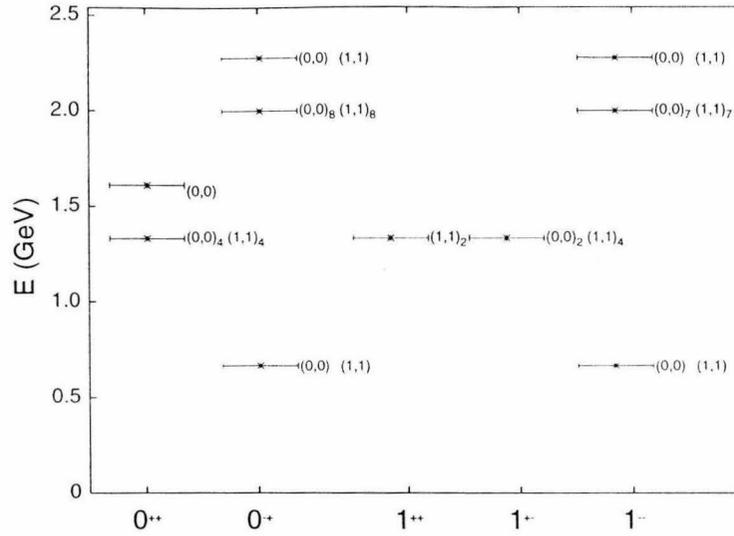


Figura 2.4: Espectro mesónico para estados de espín 0 y 1 en el caso sin interacción. Nótese la gran multiplicidad que presentan los estados.

partícula	$(\lambda_f, \mu_f)$	$J^\pi$	$E_{mod}$ (GeV)	$E_{exp}$ (GeV)
vacío	(0,0)	$0^+$	0.0	0.0
$f_0(400-1200)$	(0,0)	$0^+$	0.671	0.600
$f_0(980)$	(1,1)	$0^+$	0.796	0.980
$f_1(1420)$	(0,0)	$1^+$	1.508	1.420
$f_1(1285)$	(1,1)	$1^+$	1.508	1.285
$\eta'$ (958)	(0,0)	$0^-$	1.005	*0.892
$\eta(1440)$	(0,0)	$0^-$	1.409	1.440
$\eta(541)$	(1,1)	$0^-$	0.615	*0.615
$\eta(1295)$	(1,1)	$0^-$	1.444	*1.295
$\eta(1760)$	(1,1)	$0^-$	1.784	1.760
$\omega(782)$	(0,0)	$1^-$	1.005	*0.861
$\phi(1020)$	(1,1)	$1^-$	1.005	*0.940
$\omega(1420)$	(1,1)	$1^-$	1.409	1.420
$\omega(1600)$	(1,1)	$1^-$	1.784	1.650

Tabla 2.2: Resultados del ajuste de  $\mathcal{V}_{10}$  a la masa del mesón  $\eta(541)$ , el resto de las constantes de acoplamiento son fijadas a cero.

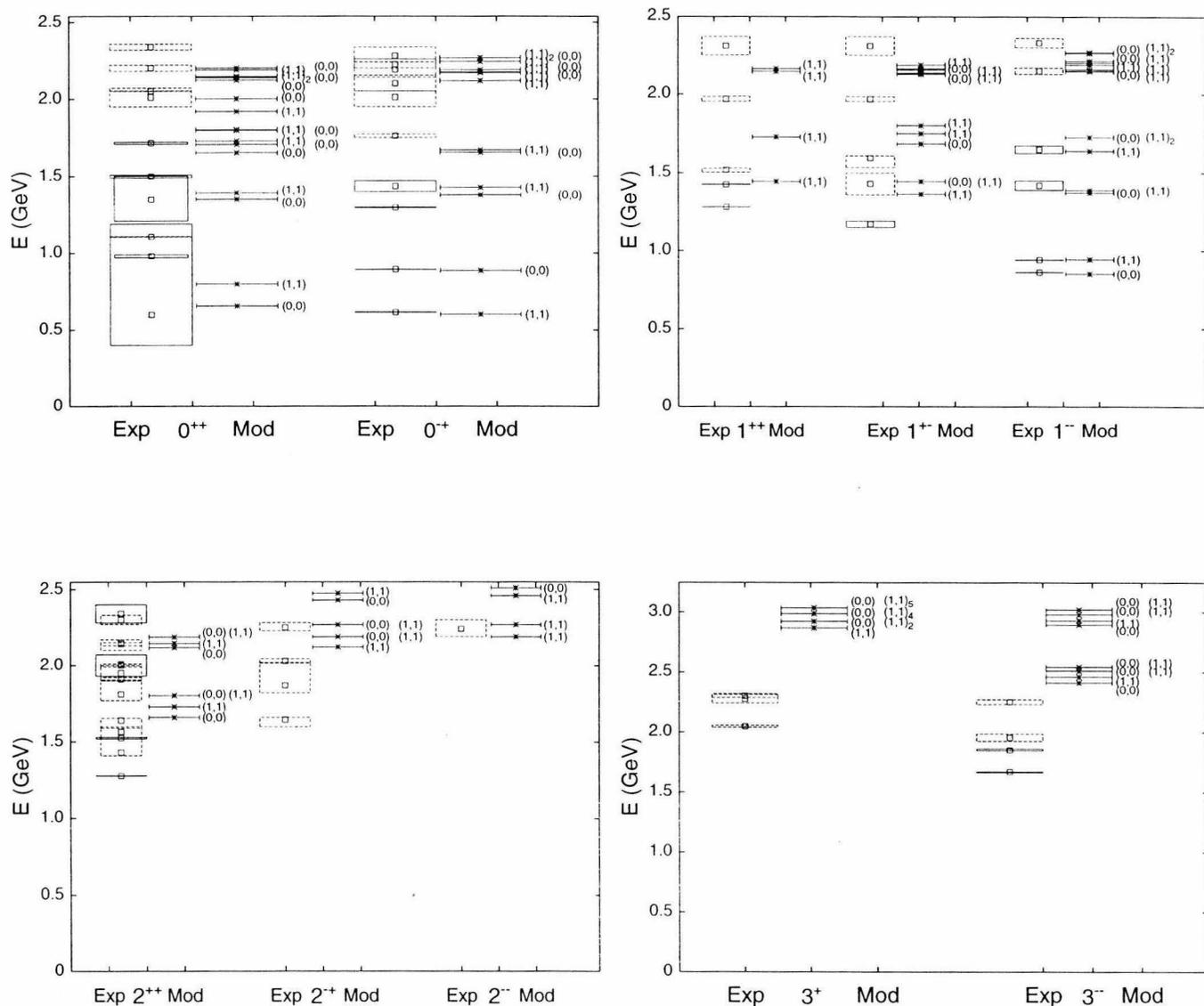


Figura 2.5: Espectro mesónico para espín 0, 1, 2 y 3. Los valores experimentales son tomados de [39]. En cada sector  $S^{PC}$ , se muestran, del lado derecho, las masas del modelo y del lado izquierdo los valores experimentales con su incertidumbre. Rectángulos punteados indican estados mesónicos experimentales que requieren confirmación.

En la Tabla 2.1, también se muestra que la contribución de los pares  $[1, 0]$  es dominante respecto de la contribución que viene de los pares fermiónicos  $\langle n_f \rangle$  y de glueballs  $\langle n_g \rangle$ .

A manera de final para este capítulo, se resumen las características y principales resultados obtenidos. A partir del modelo esquemático de la QCD propuesto en el primer capítulo, se propone un Hamiltoniano bosónico con cuatro parámetros libres y que es diagonalizado en una base de seniority, tomando en cuenta criterios de corte que minimizan los efectos de los estados espurios introducidos por el hecho de trabajar en el marco de un modelo bosónico. A través de los procesos numéricos construidos para este capítulo, se hace un ajuste a 13 estados mesónicos observados con espín 0 y 1 a partir del cual se encuentran los valores de las cuatro constantes de acoplamiento y se predicen los estados para espín 2 y 3.

Es verdad que, el espectro experimental no es reproducido en detalle por el modelo, pero debe recordarse que ese nunca fue el objetivo primario, en cambio sí, se obtienen las características generales del espectro como la densidad de estados en los diferentes sectores y las energías de separación entre los grupos de estados poco densos a bajas energías con respecto de aquellos de energías y densidades más grandes. Es decir, con las constantes de acoplamiento encontradas, el espectro del modelo tiene la misma estructura cualitativa que la del espectro mesónico experimental, hecho que puede tomarse como un precursor para seguir explorando la descripción de más hadrones con este modelo esquemático.

# Capítulo 3

## Estados bariónicos

El presente trabajo y en particular este capítulo, como se anticipó en la introducción, tiene como propósito principal, sino el cerrar un ciclo en cierta forma, sí el servir de completez al modelo y resultados presentados en los dos capítulos anteriores. Es decir, se ha construido un modelo que describe, primero, un espectro de gluones, pero que mediante la inclusión de un sector fermiónico de quarks y antiquarks también delinea el espectro de mesones. Con lo cual solamente una parte de la materia hadrónica ha quedado descrita, faltando aún lo respectivo al sector bariónico, lo cual completa y prueba de manera más definitiva la validez y aplicabilidad del modelo estudiado hasta ahora. Teniendo esto en mente, el presente capítulo se dedica al tratamiento de espectro bariónico. En la primera sección, se obtiene una vista preliminar de las masas bariónicas dentro del modelo manejado en el capítulo anterior para mesones. Los resultados de esta sección 3.1, llevan al replanteamiento del Hamiltoniano en la sección 3.2, el cual ahora considera términos adicionales con respecto al Hamiltoniano de los estados mesónicos, e introduce nuevos parámetros de ajuste. En la tercera sección se discute el método de ajuste de este nuevo Hamiltoniano al espectro bariónico mediante el ya conocido proceso numérico de programas en FORTRAN. Finalmente, en las últimas secciones se estudian los espectros de las resonancias nucleares y  $\Delta$ , así como las configuraciones de estados identificados con penta- y heptaquarks.

### 3.1 Los bariones: una primera aproximación

La configuración de los estados bariónicos (antibariónicos), en el marco del modelo presentado en el capítulo anterior, se construyen mediante tres quarks (antiquarks) de valencia,  $n_q = 3$  ( $n_{\bar{q}} = 3$ ). Para bariones o antibariones  $\mathcal{J} = \Omega - \frac{3}{2}$  con lo cual el número de excitaciones  $q\bar{q}$  se reduce de  $n_f = 2\Omega$  a  $n_f = 2\Omega - 3$  debido al bloqueo introducido por el Principio de Pauli. La base de los estados bariónicos en este contexto es dada por la expresión

$$\left| q^3 (q\bar{q})^n (\lambda_f, \mu_f), SM \right\rangle \sim (\mathbf{S}_+)^n \left| q^3 (\lambda_f, \mu_f), SM \right\rangle, \quad (3.1)$$

donde  $(\lambda_f, \mu_f)$  se refiere al sabor, el cual es, por ejemplo, (1,1) para el octete.  $q^3$  indica que el estado a la derecha, sobre el cual el operador  $\mathbf{S}_+$  actúa, es un estado puro de tres quarks. La base (3.1) también satisface

$$\mathbf{S}_- \left| q^3 (\lambda_f, \mu_f), SM \right\rangle = 0, \quad (3.2)$$

lo anterior se entiende debido a que, los operadores de pares de  $q\bar{q}$  contienen un operador de aniquilación que conmuta con los operadores de creación del estado y aniquila el vacío. Si se toma en cuenta como Hamiltoniano de prueba el Hamiltoniano (2.6):

$$\mathbf{H}_{(0,0)0} = 2\omega_f (\mathbf{S}_0 + \Omega) + \omega_b \mathbf{n}_b + V_1 :(\mathbf{S}_+ + \mathbf{S}_-)^2: (\mathbf{b}^\dagger + \mathbf{b}), \quad (3.3)$$

debe notarse que no se hace diferencia entre diferentes sabores, por lo que los bariones de sabor (1, 1) y (3, 0) son degenerados. Parte de la degeneración puede ser removida si se introducen términos dependientes de la hipercarga y el isospín. Para remover completamente la degeneración entre las configuraciones de sabor (1, 1) y (3, 0), deben incluirse interacciones dependientes del sabor, como se hace en formulaciones más generales. La diagonalización del Hamiltoniano (3.3) en la base (3.1) lleva el mismo proceso y utiliza los mismos programas que en el caso de mesones, con la única diferencia de que el tamaño de las matrices es reducido en virtud de que  $\mathcal{J} = \Omega - \frac{3}{2}$ . En la Fig. (3.1), se muestra el espectro de los estados bariónicos más bajos medido respecto al estado base del sistema total, i.e., el espectro es referido al estado base de  $\mathcal{J} = \Omega$ , como función de la constante de acoplamiento  $V_1$ . Se observa también que, el comportamiento cualitativo de los estados bariónicos es muy similar al de los estados mesónicos correspondientes al Hamiltoniano en cuestión, apreciándose como única diferencia el corrimiento del valor de la constante  $V_1$  crítica, para la cual ocurre la transición de fase, que se establece aquí como  $V_{cBar} \approx 0.011$  GeV. Cuando  $V_1 = 0$  se tiene que el primer estado bariónico está compuesto de los

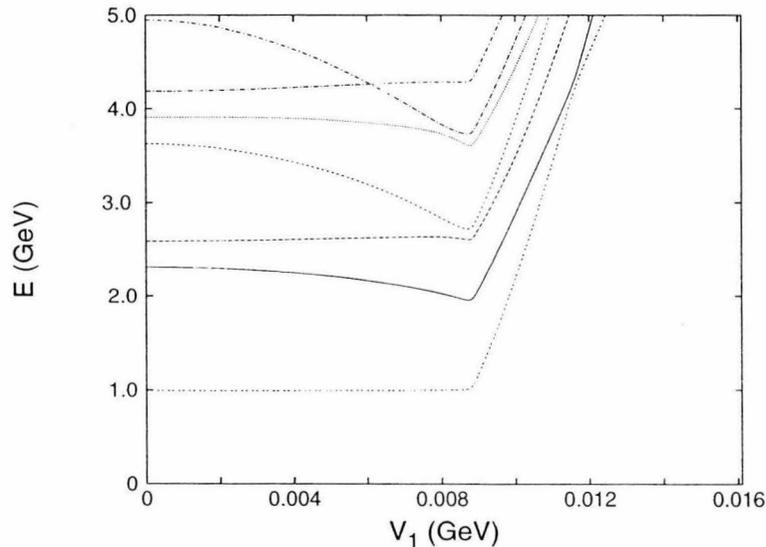


Figura 3.1: Estados bariónicos como función de  $V_1$ . La energía es medida respecto al estado base global para cada valor de  $V_1$ .

tres quarks de valencia cuya masa total es  $3\omega_f = 1.0$  GeV, el segundo estado es el primero más dos pares  $q\bar{q}$  y su masa resulta de  $7\omega_f = 2.3$  GeV, el tercer estado lo constituyen los tres quarks de valencia más un glueball  $3\omega_f + \omega_b = 2.6$  GeV, etc. Tal patrón no se altera de manera significativa hasta que se alcanza el valor de  $V_1 \approx 0.0089$  GeV, el cual corresponde a la transición de los estados mesónicos para los cuales el estado base decrece rápidamente, resultando en un agudo aumento de los estados bariónicos. La Fig. 3.2, ilustra el contenido de los pares  $q\bar{q}$  y gluones del primer estado bariónico como función de  $V_1$ . En la gráfica puede verse como para valores de  $V_1 < V_{cBar} \approx 0.011$  GeV, los gluones no contribuyen y el contenido de pares fermiónicos viene exclusivamente de los tres quarks de valencia. Cuando  $V_1 > V_{cBar} \approx 0.011$  GeV ambas

contribuciones se hacen presentes llegando a dominar el contenido fermiónico sobre el gluónico. Como se ha visto, las masas bariónicas resultan demasiado altas cuando,  $V_1 > V_c \approx 0.0089$  GeV,

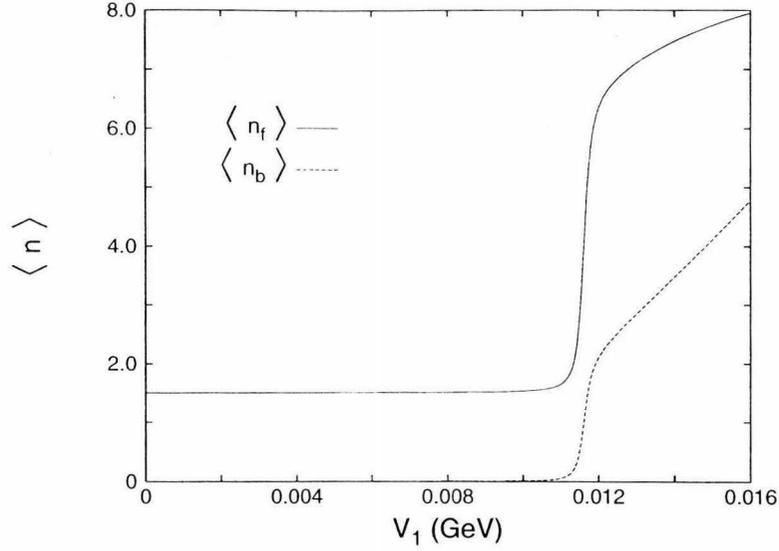


Figura 3.2: Contenido fermiónico de pares  $q\bar{q}$ ,  $\langle n_f \rangle$ , y gluónico,  $\langle n_b \rangle$ , del primer estado bariónico como función de  $V_1$ .

esta sobreestimación radica en el hecho de que los quarks de valencia hasta ahora han actuado como meros “espectadores”, i.e., el Hamiltoniano tomado no modela términos de interacción con quarks y antiquarks de valencia. Además debe notarse que en el rango de valores de  $V_1$  tales que  $V_c \approx 0.0089$  GeV  $< V_1 < V_{cBar} \approx 0.011$  GeV, el espectro mesónico experimental tiene una escala similar a la del modelo propuesto, sin embargo, en dicha región los estados mesónicos tienen una estructura complicada de quarks, antiquarks y gluones, mientras que los bariones presentan una estructura simple de estados constituidos por tres quarks de valencia en un fondo mesónico, pero sin interacción entre ellos, lo cual es contrario a lo reportes experimentales que vislumbran una contribución del “mar” de quarks y gluones. Una manera de acercarse a la realidad debe ser la introducción de términos que acoplen a los quarks de valencia con excitaciones gluónicas.

## 3.2 Quarks de valencia: de espectadores a jugadores

Recordando que en la primera sección del capítulo 2, el Hamiltoniano efectivo de interacción se restringió, a operadores compuestos de la forma  $\mathbf{a}^\dagger \mathbf{d}^\dagger$  y  $\mathbf{d} \mathbf{a}$  para la creación y aniquilación de un par  $q\bar{q}$ , respectivamente, dejando fuera los términos de  $\mathbf{H}_{\mathcal{B}}$  (1.18), los dos primeros de  $\mathbf{H}_{\mathcal{S}}$  (1.16), y los dos últimos de  $\mathbf{H}_{\mathcal{P}}$  (1.17). Sin embargo, de estos términos, los de  $\mathbf{H}_{\mathcal{S}}$ , por ejemplo, tienen la forma  $\mathbf{a}^\dagger \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} \mathbf{a}$  y  $\mathbf{d}^\dagger \mathbf{d}^\dagger \mathbf{d} \mathbf{d}$ , los cuales pueden reescribirse como operadores de creación y aniquilación de *diquarks* y *antidiquarks*. En esta sección dichos términos se retoman en virtud de que, a través de ellos se acoplan los quarks de valencia con los glueballs  $0^{++}$ . Esto es, los términos de  $\mathbf{H}_{\mathcal{S}}$  y  $\mathbf{H}_{\mathcal{P}}$  que ahora se introducen son, respectivamente

$$\mathbf{a}_{\mathbf{p}_1 c f \sigma_1}^\dagger \mathbf{a}_{\mathbf{p}_1 c' f \sigma_1} \mathbf{a}_{\mathbf{p}_2 c' f' \sigma_2}^\dagger \mathbf{a}_{\mathbf{p}_2 c f' \sigma_2} + \mathbf{d}_{\mathbf{p}_1 c f \sigma_1} \mathbf{d}_{\mathbf{p}_1 c' f \sigma_1}^\dagger \mathbf{d}_{\mathbf{p}_2 c' f' \sigma_2} \mathbf{d}_{\mathbf{p}_2 c f' \sigma_2}^\dagger \quad (3.4)$$

$$\mathbf{a}_{\mathbf{p}_1 c f \sigma_1}^\dagger \mathbf{d}_{\mathbf{p}_1 c' f' \sigma_1}^\dagger \mathbf{d}_{\mathbf{p}_2 c' f' \sigma_2} \mathbf{a}_{\mathbf{p}_2 c f' \sigma_2} + \mathbf{d}_{\mathbf{p}_1 c f \sigma_1} \mathbf{a}_{\mathbf{p}_1 c' f' \sigma_1} \mathbf{a}_{\mathbf{p}_2 c' f' \sigma_2}^\dagger \mathbf{d}_{\mathbf{p}_2 c f' \sigma_2}^\dagger \quad (3.5)$$

que mediante reacoplamiento de sabor, color y espín se obtienen las expresiones para el canal de sabor  $(0, 0)$  y espín 0 y 1, en términos de los operadores de número de quarks y antiquarks,

$\mathbf{n}_q$  y  $\mathbf{n}_{\bar{q}}$ , y operadores de espín  $S$ . Para los términos de  $H_S$

$$(\lambda, \lambda)S = (0, 0)0 : \mathbf{n}_q^2 + \mathbf{n}_{\bar{q}}^2, \quad (3.6)$$

$$(\lambda, \lambda)S = (0, 0)1 : \mathbf{S}_q^2 + \mathbf{S}_{\bar{q}}^2, \quad (3.7)$$

mientras que para los de  $H_P$

$$(\lambda, \lambda)S = (0, 0)0 : 2\mathbf{n}_q^2 \mathbf{n}_{\bar{q}}^2, \quad (3.8)$$

$$(\lambda, \lambda)S = (0, 0)1 : 2\mathbf{S}_q^2 \cdot \mathbf{S}_{\bar{q}}^2. \quad (3.9)$$

De manera similar, se obtienen los términos para el sabor (1, 1). Estos nuevos términos considerados, se incluyen en el Hamiltoniano de interacción junto con parámetros de acoplamiento  $C_{H_S \lambda S}$  y  $C_{H_P \lambda S}$ . De esta manera, los Hamiltonianos bariónicos de interacción resultan ser:

$$\mathbf{H}_{SB} = \left( C_{H_S 00} (\mathbf{n}_q^2 + \mathbf{n}_{\bar{q}}^2) + C_{H_S 01} (\mathbf{S}_q^2 + \mathbf{S}_{\bar{q}}^2) \right) (\mathbf{b}^\dagger + \mathbf{b}), \quad (3.10)$$

$$\mathbf{H}_{PB} = \left( C_{H_P 00} \mathbf{n}_q \mathbf{n}_{\bar{q}} + C_{H_P 01} \mathbf{S}_q \cdot \mathbf{S}_{\bar{q}} \right) (\mathbf{b}^\dagger + \mathbf{b}). \quad (3.11)$$

De estas expresiones se observa que, los términos de  $\mathbf{H}_{SB}$  están conformados por operadores de quarks o antiquarks, no así los de  $\mathbf{H}_{PB}$ . De aquí que, los términos de  $\mathbf{H}_{SB}$  se puedan reescribir por medio de operadores de creación y aniquilación de diquarks y antidiquarks  $D^\dagger$ ,  $D$ ,  $\bar{D}^\dagger$  y  $\bar{D}$  como:

$$\left( D_{(\lambda, \mu)S}^\dagger \cdot D_{(\lambda, \mu)S} + \bar{D}_{(\lambda, \mu)S}^\dagger \cdot \bar{D}_{(\lambda, \mu)S} \right) (\mathbf{b}^\dagger + \mathbf{b}), \quad (3.12)$$

que en la aproximación bosónica tiene la expresión

$$(\mathbf{n}_{qq(\lambda, \mu)S} + \mathbf{n}_{\bar{q}\bar{q}(\lambda, \mu)S}) (\mathbf{b}^\dagger + \mathbf{b}), \quad (3.13)$$

donde, ahora, aparecen los operadores de número de diquarks y antidiquarks,  $\mathbf{n}_{qq}$  y  $\mathbf{n}_{\bar{q}\bar{q}}$ , para sabor y espín  $(\lambda, \mu)S = (2, 0)0, (0, 1)0, (2, 0)1$  y  $(0, 1)1$ .

De esta forma, el Hamiltoniano efectivo de interacción para bariones, resulta de multiplicar cada uno de los términos de (3.13) por constantes que deben ajustarse para cada canal de sabor y espín al espectro bariónico experimental

$$\mathbf{H}_{SB} = \sum_{\lambda \mu S} \mathcal{V}_{(\lambda, \mu)S} (\mathbf{n}_{qq(\lambda, \mu)S} + \mathbf{n}_{\bar{q}\bar{q}(\lambda, \mu)S}) (\mathbf{b}^\dagger + \mathbf{b}). \quad (3.14)$$

Sin embargo, para un diquark en la representación totalmente antisimétrica, sólo están permitidos los acoplamientos de sabor y espín  $(\lambda, \mu)S = (0, 1)0, (2, 0)1$ . Lo cual se ve de los diagramas de Young respectivos que se obtienen de la reducción a los grupos de sabor y espín,  $U(6) \supset U_f(3) \otimes U_S(2)$ . Por lo tanto el Hamiltoniano efectivo completo en el espacio bosónico está dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{H} = & 2\omega_f \mathbf{n}_f + \omega_b \mathbf{n}_b + \\ & \sum_{\lambda S} V_{\lambda S} \left( \mathbf{b}_{\lambda S}^\dagger \cdot \mathbf{b}_{\lambda S}^\dagger + 2\mathbf{b}_{\lambda S}^\dagger \cdot \mathbf{b}_{\lambda S} + \mathbf{b}_{\lambda S} \cdot \mathbf{b}_{\lambda S} \right) \left( 1 - \frac{\mathbf{n}_f}{2\Omega} \right) (\mathbf{b}^\dagger + \mathbf{b}) + \\ & \mathbf{n}_{(0,1)0} (D_1 \mathbf{n}_b + D_2 (\mathbf{b}^\dagger + \mathbf{b})) + \mathbf{n}_{(2,0)1} (E_1 \mathbf{n}_b + E_2 (\mathbf{b}^\dagger + \mathbf{b})) \quad , \end{aligned} \quad (3.15)$$

donde los últimos dos términos vienen de (3.14),  $\mathbf{n}_{(0,1)0}$  y  $\mathbf{n}_{(2,0)1}$  son los operadores de número de diquarks en los canales de sabor y espín  $(\lambda, \mu)S = (0, 1)0$  y  $(2, 0)1$ . Los parámetros  $D_j$  y  $E_j$  para  $j = 1, 2$ , son factores de ajuste a los espectros de las resonancias nucleares y  $\Delta$ , respectivamente. Como se hizo en el capítulo 2, la masa  $\omega_f = 0.33$  GeV y la  $\omega_b = 1.6$  GeV se mantienen fijas. Las constantes de acoplamiento  $\mathcal{V}_{(\lambda, \mu)S}$  se encuentran ajustando el espectro mesónico, (2.28). De tales valores, se deduce que la interacción más fuerte ocurre para el canal de sabor y espín  $(1, 1)0$ .

Para la clasificación de los estados nuevamente se utiliza la cadena de grupos

$$\begin{array}{ccccccc}
 [1^N] & & [\tilde{h}_1 \dots \tilde{h}_{\frac{\Omega}{3}}] & & [h_1 \dots h_{12}] & & \sum_{i=1}^{12} \tilde{h}_i = N \\
 U(4\Omega) & \supset & U(\frac{\Omega}{3}) & \otimes & U(12) & & \\
 & & & & \cup \varrho_f & & \\
 & & & & [f_1 f_2 f_3] & U_f(3) \otimes U(4) & [g_1 g_2 g_3 g_4] \quad (3.16) \\
 & & \cup & & \cup \varrho_S & & \\
 (\lambda_C, \mu_C) & & SU_C(3) & & (\lambda_f, \mu_f) & SU_f(3) \otimes SU_S(2) & S M \quad ,
 \end{array}$$

El estado completo está determinado por

$$|N, [g_1 g_2 g_3 g_4](\lambda_C, \mu_C), \rho_f(\lambda_f, \mu_f) Y T T_z, \rho_S S M\rangle \quad , \quad (3.17)$$

con  $Y$  la hipercarga,  $T$  el isoespín y  $T_z$  su tercera componente. Los estados mesónicos son considerados de color  $(\lambda_C, \mu_C) = (0, 0)$ , lo cual implica  $\tilde{h}_1 = \tilde{h}_2 = \tilde{h}_3 = \tilde{h}$ . Con esto, la irrep  $[\tilde{h}\tilde{h}\tilde{h}]$  para  $\Omega = 9$  y color  $(0, 0)$ , fija automáticamente la irrep de  $U(12)$  dada por  $[3^6, 0^6]$  para mesones y por  $[3^7, 0^5]$  para bariones. El contenido parcial de  $U(4) \otimes U_f(3)$  de la irrep  $[3^6, 0^6]$  se lista en la Tabla 3.1, mientras que en la Tabla 3.2 se encuentra el contenido parcial de las irreps de  $U(4)$  de la tabla anterior. El número mínimo de quarks en una irrep de  $U(4)$  está dado por la suma de los últimos dos renglones del diagrama de Young. El número de antiquarks es la diferencia de  $2\Omega = 18$  y la suma de los dos primeros renglones del diagrama de Young de  $U(4)$ .

En la representación de espín para quarks,  $[q_1, q_2]$ , la suma  $n_q = q_1 + q_2$  da el número de quarks y  $S_q = (q_1 - q_2)/2$  su espín. Análogamente para antiquarks,  $[\bar{q}_1, \bar{q}_2]$ ,  $n_{\bar{q}} = 2\Omega - \bar{q}_1 - \bar{q}_2$  y su espín  $S_{\bar{q}} = (\bar{q}_1 - \bar{q}_2)/2$ . Lo anterior debido al hecho de que el estado base no perturbado en el espacio del sistema de los dos niveles contiene 18 quarks. El espín total del sistema  $S$ , debe cumplir la condición de que  $|S_q - S_{\bar{q}}| \leq S \leq S_q + S_{\bar{q}}$ . En la Tabla 3.3, se consideran los estados de  $U(4) \otimes U_f(3)$  (irrep  $[3^7 0^5]$ ), los cuales contienen cinco quarks y 2 antiquarks. Las irreps  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(3, 0)$ ,  $(0, 3)$ ,  $(2, 2)$  y  $(4, 1)$  describen el singulete, octete, decuplete, antidecuplete, 27-plete y 35-plete de sabor, respectivamente. Los contenidos de  $q\bar{q}$  de algunas irreps de bariones en  $U(4)$  son enlistados en la Tabla 3.4. Nótese que sólo son mostradas las irreps que contienen resonancias nucleares y  $\Delta$  o estados de penta- y heptaquark con sabores poco usuales.

En este apartado también se extienden las configuraciones de mesones discutidas en el capítulo anterior, para ello se incluyen las irreps de sabor  $(3, 0)$ ,  $(0, 3)$  y  $(2, 2)$  en virtud de que ellas contienen al menos dos pares de  $q\bar{q}$ . Las irreps  $(3, 0)$  y  $(0, 3)$  tienen espín total 1, mientras que la irrep  $(2, 2)$  puede tener valores de espín total 0, 1 y 2.

$U(4)$	$U_f(3)$	$(\lambda, \mu)$	mult
[8811]	[666]	(0,0)	1
[8811]	[765]	(1,1)	1
[8811]	[864]	(2,2)	1
[9711]	[765]	(1,1)	1
[9711]	[774]	(0,3)	1
[9711]	[855]	(3,0)	1
[8820]	[765]	(1,1)	1
[8820]	[774]	(0,3)	1
[8820]	[855]	(3,0)	1
[9720]	[666]	(0,0)	1
[9720]	[765]	(1,1)	1
[9720]	[864]	(2,2)	1
[9810]	[765]	(1,1)	1
[9900]	[666]	(0,0)	1

Tabla 3.1: Contenido parcial  $U(12) \supset U(4) \otimes U_f(3)$  de la irrep  $[3^6 0^6]$  (estados mesónicos de color cero).

$U(4)$	$[q_1 q_2]$	$n_q$	$S_q$	$[\bar{q}_1 \bar{q}_2]$	$n_{\bar{q}}$	$S_{\bar{q}}$	$S$
[8811]	[11]	2	0	[88]	2	0	0
[9711]	[11]	2	0	[97]	2	1	1
[8820]	[20]	2	1	[88]	2	0	1
[9720]	[20]	2	1	[97]	2	1	0, 1, 2
[9810]	[10]	1	$\frac{1}{2}$	[98]	1	$\frac{1}{2}$	0, 1
[9810]	[11]	2	0	[97]	2	1	1
[9810]	[11]	2	0	[88]	2	0	0
[9810]	[20]	2	1	[97]	2	1	0, 1, 2
[9810]	[20]	2	1	[88]	2	0	1
[9900]	[00]	0	0	[99]	0	0	0
[9900]	[10]	1	$\frac{1}{2}$	[98]	1	$\frac{1}{2}$	0, 1
[9900]	[20]	2	1	[97]	2	1	0, 1, 2

Tabla 3.2: Contenido de pares  $q\bar{q}$  de algunas irreps de mesones de  $U(4)$ .

$U(4)$	$U_f(3)$	$(\lambda, \mu)$	mult
[8832]	[1074]	(3,3)	1
[8841]	[1074]	(3,3)	1
[9732]	[1074]	(3,3)	1
[9822]	[777]	(0,0)	1
[9822]	[876]	(1,1)	1
[9822]	[966]	(3,0)	1
[9822]	[975]	(1,1)	1
[9831]	[777]	(0,0)	1
[9831]	[876]	(1,1)	2
[9831]	[966]	(3,0)	1
[9831]	[885]	(0,3)	1
[9831]	[975]	(2,2)	1
[9831]	[1065]	(4,1)	1
[8850]	[777]	(0,0)	1
[8850]	[876]	(1,1)	1
[8850]	[885]	(0,3)	1
[8850]	[975]	(2,2)	1
[9840]	[876]	(1,1)	1
[9840]	[975]	(2,2)	1
[9821]	[876]	(1,1)	1
[9930]	[966]	(3,0)	1

Tabla 3.3: Contenido parcial  $U(12) \supset U(4) \otimes U_f(3)$  de la irrep  $[3^7 0^5]$  (estados bariónicos de color cero.)

$U(4)$	$[q_1 q_2]$	$n_q$	$S_q$	$[\bar{q}_1 \bar{q}_2]$	$n_{\bar{q}}$	$S_{\bar{q}}$	$S$
[8832]	[32]	5	$\frac{1}{2}$	[88]	2	0	$\frac{1}{2}$
[8841]	[41]	5	$\frac{1}{2}$	[88]	2	0	$\frac{3}{2}$
[9732]	[32]	5	$\frac{1}{2}$	[97]	2	1	$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$
[9831]	[41]	5	$\frac{3}{2}$	[88]	2	0	$\frac{3}{2}$
[9831]	[32]	5	$\frac{1}{2}$	[88]	2	0	$\frac{1}{2}$
[9831]	[32]	5	$\frac{1}{2}$	[97]	2	1	$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$
[8850]	[50]	5	$\frac{5}{2}$	[88]	2	0	$\frac{5}{2}$
[9840]	[50]	5	$\frac{5}{2}$	[88]	2	0	$\frac{5}{2}$
[9840]	[50]	5	$\frac{5}{2}$	[97]	2	1	$\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}$
[9840]	[41]	5	$\frac{3}{2}$	[97]	2	1	$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}$
[9831]	[31]	4	1	[98]	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}$
[9840]	[40]	4	2	[98]	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}$
[9921]	[21]	3	$\frac{1}{2}$	[0]	0	0	$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}$
[9930]	[30]	3	$\frac{3}{2}$	[0]	0	0	$\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}$

Tabla 3.4: Contenido de pares  $q\bar{q}$  de algunas irreps  $U(4)$  de estados bariónicos correspondientes a resonancias nucleares,  $\Delta$  y estados de penta- y heptaquark con sabor poco usual. Los primeros tres renglones corresponden a irreps de sabor (3,3).

Con la representación bosónica de los pares de  $q\bar{q}$  las irreps de sabor y espín  $(3, 0)1$ ,  $(0, 3)1$  pueden ser obtenidas mediante el esquema de acoplamiento

$$\left[ b_{(1,1)0}^\dagger \times b_{(1,1)1}^\dagger \right]_{f_0 m=1}^{(3,0)1} |0\rangle . \quad (3.18)$$

Las irreps  $(2, 2)S$  para  $S = 0, 1, 2$  se consiguen a través de

$$\left[ b_{(1,1)1}^\dagger \times b_{(1,1)1}^\dagger \right]_{f_0 m=S}^{(2,2)S=0,1,2} |0\rangle, \quad \left[ b_{(1,1)0}^\dagger \times b_{(1,1)0}^\dagger \right]_{f_0 m=S}^{(2,2)S=0} |0\rangle. \quad (3.19)$$

Las dos configuraciones con  $S = 0$  son combinaciones lineales de las irreps de  $U(4)$  [9720] y [8811]. Para  $S = 1$  el esquema de acoplamiento es

$$\left[ b_{(1,1)0}^\dagger \times b_{(1,1)1}^\dagger \right]_{f_0 m=S}^{(2,2)S=1} |0\rangle. \quad (3.20)$$

Para todas las configuraciones,  $f_0$  indica el estado de sabor con máximo peso.

En la representación bosónica, la base de seniority definida para cada uno de los espacios de los osciladores armónicos está dada por

$$\mathcal{N}_{N_{\lambda S} \nu_{\lambda S}} \left( \mathbf{b}_{\lambda S}^\dagger \cdot \mathbf{b}_{\lambda S}^\dagger \right)^{\frac{N_{\lambda S} - \nu_{\lambda S}}{2}} |\nu_{\lambda S} \alpha_{\lambda S}\rangle, \quad (3.21)$$

donde  $N_{\lambda S}$  es el número de bosones de tipo  $[\lambda, S]$ ,  $\nu_{\lambda S}$  es la seniority y  $\mathcal{N}_{N_{\lambda S}}$  una constante de normalización, como ya se había apuntado. El estado (3.21), se puede pensar como la superposición de un cierto número de pares  $q\bar{q}$  acoplados a una combinación dada de sabor y espín. Este número de pares  $q\bar{q}$ , se usa para denotar configuraciones no triviales.

No debe olvidarse que el Hamiltoniano (3.15) cambia el número de pares bosónicos trivial (del tipo  $\mathbf{b}_{\lambda S}^\dagger \cdot \mathbf{b}_{\lambda S}^\dagger$ ), pero deja la seniority invariante. El número de estos pares bosónicos no es conservado, esto es, el estado general (3.21) contiene una seniority dada, la cual está relacionada a un número entero de pares  $q\bar{q}$ , y a un número de pares bosónicos que no está fijo. Por lo tanto, como el Hamiltoniano solamente cambia el número de pares bosónicos, el espacio de Hilbert puede ser dividido en subespacios de combinaciones de seniority de los diferentes tipos de pares de  $q\bar{q}$  con una combinación de sabor y espín determinada. De esta manera, el espectro obtenido para una combinación de sabor, espín y seniority es igual a otro obtenido con sabor y espín diferentes, pero con la misma distribución de seniority. Lo cual se observa como una degeneración, al menos, aparentemente.

Para los estados bariónicos, en la representación bosónica, se debe tomar en cuenta los tres quarks de valencia que son agregados al sistema de dos niveles representando quarks y antiquarks acoplados a un tercer nivel bosónico. Los tres quarks de valencia, de acuerdo a los diagramas de Young, pueden estar en cualquiera de los estados de sabor y espín  $(1, 1)_{\frac{1}{2}}$  ó  $(3, 0)_{\frac{3}{2}}$ , los cuales deben ser acoplados al fondo mesónico a sabor y espín total. El estado de  $(1, 1)_{\frac{1}{2}}$  para describir las resonancias nucleares y el  $(3, 0)_{\frac{3}{2}}$  para las  $\Delta$ . Esto implica una degeneración para diferentes irreps de sabor y espín. Por ejemplo, el estado  $(1, 1)_{\frac{1}{2}}$  de paridad positiva acoplado con la irrep de mesones  $(1, 1)0$  de paridad negativa conduce a las irreps  $(0, 0)_{\frac{1}{2}}$ ,  $(1, 1)_{\frac{1}{2}}$ ,  $(3, 0)_{\frac{1}{2}}$ ,  $(0, 3)_{\frac{1}{2}}$  y  $(2, 2)_{\frac{1}{2}}$  de paridad negativa.

Un punto que requiere de un énfasis especial es el hecho de que en el modelo propuesto no hay conservación de número de partículas (quarks, antiquarks y gluones), lo cual puede entenderse como una propiedad de las teorías relativistas con constantes de interacción grandes. Esto da

lugar a que partículas como los nucleones no tengan un “número fijo” de quarks, antiquarks y/o gluones, sino un número promedio de pares  $q\bar{q}$  y  $gg$ . Esta mezcla de partículas eventualmente llega a ser esencial para remover la multiplicidad de los estados a bajas energías, característica propia de los modelos de quarks constituyentes cuando el número de partículas que interviene es fluctuante.

### 3.3 El ajuste al espectro bariónico

Para obtener el espectro de los estados bariónicos considerados en este trabajo, resonancias nucleares como  $\Delta$ , se usa una serie de programas en FORTRAN. Para el ajuste se escogen algunos valores experimentales reportados en [39], en este trabajo se usaron los que figuran en la Tabla 3.5. Cabe señalar que, los pesos asignados a los estados experimentales son escogidos con un criterio arbitrario, entendiendo por esto que, de acuerdo al objetivo que se tenga se puede querer mayor o menor seguridad de algunos estados con respecto a otros. Un método sistemático y riguroso puede ser implementado, teniendo en cuenta teoría de probabilidades entre otras cosas, sin embargo, en el modelo esquemático hasta ahora trabajado se han buscado criterios simples que conduzcan a un acuerdo aceptable con la realidad. Una vez completada esta parte del espectro hadrónico, trabajo futuro puede explorar más posibilidades del modelo, así como la aplicación de métodos más refinados. Por lo pronto y para la meta de este trabajo, el manejo de los datos empleado parece ser suficiente.

Las constantes de acoplamiento encontradas antes para el sector mesónico,

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{00a} &= 0.0337 \text{ GeV}, & \mathcal{V}_{01a} &= 0.0422 \text{ GeV}, \\ \mathcal{V}_{10a} &= 0.1573 \text{ GeV}, & \mathcal{V}_{11a} &= 0.0177 \text{ GeV}. \end{aligned}$$

aquí se mantienen fijas y se determinan los nuevos parámetros  $D_1, D_2$  para el sector de resonancias nucleares y  $E_1, E_2$  para el de resonancias  $\Delta$ . El programa utilizado para encontrar los mejores valores de estas últimas constantes es *fit-bar.f* [16], que a través de una serie de subrutinas, y la rutina *minuit* de las librerías del CERN [36] minimiza la función

$$FCN(D_i, E_i) = \sum_k p_k (E_{kmod} - E_{kexp})^2, \quad (3.22)$$

donde  $k$  considera el número de valores experimentales de entrada y  $p_k$  el peso asignado a cada uno de ellos.  $E_{kmod}$  y  $E_{kexp}$  son las energías, la primera del modelo y la segunda la reportada de experimentos. Además del ajuste llevado a cabo, también se obtiene una serie de estados adicionales y que resultan como “predicciones” completamente del modelo. Debe observarse que debido a que el Hamiltoniano (3.15) conserva sabor, espín y paridad, todos los estados pertenecientes a la misma irrep de sabor son degenerados, lo cual no es indicado por el espectro bariónico experimental. Para corregir esto, una opción es utilizar la fórmula de masas de Gell-Mann-Okubo [19]

$$M = a + bY + c \left[ T(T + 1) - \frac{1}{4}Y^2 \right], \quad (3.23)$$

donde  $M$  es la masa en cuestión,  $Y$  la hipercarga, y  $T$  el isoespín. Las constantes  $a$  y  $b$  se determinan en el multiplete respectivo de  $SU(3)$ . Sin embargo, en esta tesis no se utiliza el criterio anterior, el cual usan Bijker *et al* en la Ref. [40], en virtud de que, el Hamiltoniano utilizado en el proceso numérico involucra parámetros de ajuste para reproducir las masas experimentales.

partícula	$(\lambda_f, \mu_f)$	$J^P$	$E_{\text{exp}}$ (GeV)	$p_i$
nucleón	(0,0)	$\frac{1}{2}^+$	0.938	100
res. Roper	(0,0)	$\frac{1}{2}^+$	1.440	100
N(1535)	(0,0)	$\frac{1}{2}^-$	1.535	20
$\Delta(1232)$	(0,0)	$\frac{3}{2}^+$	1.232	80
$\Delta(1600)$	(0,0)	$\frac{3}{2}^+$	1.600	100
$\Delta(1620)$	(0,0)	$\frac{1}{2}^-$	1.620	20

Tabla 3.5: Estados experimentales usados para el ajuste del espectro bariónico [39].

### 3.4 Estados mesónicos adicionales

En el transcurso del trabajo realizado para obtener los resultados del espectro bariónico, también se obtuvieron algunos estados mesónicos diferentes a los del capítulo anterior, ahora con sabor  $(2, 2)$ ,  $(3, 0)$  y  $(0, 3)$ . Tales estados muestran el papel de algunas degeneraciones adicionales del modelo y sus posibles implicaciones físicas. La Tabla 3.6 presenta varios estados mesónicos, los últimos tres, son los nuevos resultados. También es indicado el número promedio de pares  $q\bar{q}$ ,  $\langle n_{\lambda_s} \rangle$ , acoplados a sabor y espín  $(\lambda, \mu)S$ .  $\langle n_g \rangle$  es el número promedio de pares de gluones acoplados al singulete de color con espín 0. Los contenidos de seniority también son dados,  $\nu = \nu_{00}, \nu_{01}, \nu_{10}, \nu_{11}$ , donde  $\nu_{\lambda S}$  se refiere a la seniority del canal de sabor y espín  $(\lambda, \mu)S$ . Algunos de los estados mesónicos enlistados pertenecen a irreps de sabor que contienen combinaciones exóticas de hipercarga e isospín y que no son permitidas en el sistema más simple de  $q\bar{q}$ . En el contenido de seniority se observa que dichos estados poseen al menos dos pares de  $q\bar{q}$ .

En los resultados también se nota que, mientras los estados de sabor  $(3, 0)$  y  $(0, 3)$  tienen energías de casi 1.5 GeV, el estado de sabor  $(2, 2)$  tiene una energía cercana a la del estado  $f_0(980)$ . En los espectros experimentales el mesón  $f_0$  tiene una energía de aproximadamente dos veces la energía del estado  $\eta(541)$ . Estudiando su decaimiento dominante en  $K^+K^-$ , se llega a la interpretación de estos estados en términos de moléculas  $K^+K^-$ . En el marco de este modelo el estado  $(2, 2)0^+$  es construido a partir de un estado de seniority  $\nu = 2$ ,

$$\left[ \mathbf{b}_{(1,1)0}^\dagger \times \mathbf{b}_{(1,1)0}^\dagger \right]_{f,0}^{(2,2)0} \left| 0 \right\rangle . \quad (3.24)$$

El estado de peso más alto es simplemente el producto directo de dos pares del tipo  $(1, 1)0^-$ ,

$$\mathbf{b}_{(1,1)_{f_0,0}}^\dagger \mathbf{b}_{(1,1)_{f_0,0}}^\dagger \left| 0 \right\rangle , \quad (3.25)$$

lo cual puede ser interpretado dentro del modelo como una configuración de dos mesones  $q\bar{q}$ . Por ejemplo, la diferencia de masas entre 2 pares  $q\bar{q}$  y la masa del estado  $(2, 2)0^+$  es aproximadamente de 0.4 GeV, valor que es más grande que el observado, no obstante, se debe mantener en mente que el modelo es bastante esquemático y que no incluye interacciones que mezclen sabores para poder combinar estados  $(1, 1)0^-$  con estados  $(2, 2)0^-$  de lo cual inducir un acoplamiento del mesón  $f_0$  con estados moleculares, entre otros. Del modelo también resultan estados del tipo  $(q\bar{q})^2$  que pueden ser acoplados a irreps de sabor  $(3, 0)$  y  $(0, 3)$  con distribución de seniority (0011), energías alrededor de 1.44 GeV, configuraciones de hipercarga e isospín que no pueden ser obtenidas por un sólo par de  $q\bar{q}$ .

partícula	$E_{mod}$ GeV	%-Error	$(\lambda_f, \mu_f)$	$J^\pi$	$(\nu)$	$\langle n_{00} \rangle$	$\langle n_{01} \rangle$	$\langle n_{10} \rangle$	$\langle n_{11} \rangle$	$\langle n_g \rangle$
vacío	0.0	0 %	(0,0)	$0^+$	(0000)	0.00	0.03	3.11	0.03	1.705
$f_0(400-1200)$	0.656	10%	(0,0)	$0^+$	(0000)	0.00	0.01	0.46	0.01	0.32
$f_0(980)$	0.797	19%	(1,1)	$0^+$	(0020)	0.00	0.02	3.78	0.02	1.49
$f_1(1420)$	1.445	2%	(0,0)	$1^+$	(0011)	0.00	0.02	2.39	1.02	0.90
$f_2(1270)$	1.363	6%	(1,1)	$1^+$	(0110)	0.00	1.03	2.46	0.02	0.99
$\eta'(958)^*$	0.885	1%	(0,0)	$0^-$	(1000)	1.01	0.02	2.51	0.02	1.29
$\eta(1440)$	1.379	4%	(0,0)	$0^-$	(1000)	1.00	0.01	0.77	0.01	0.44
$\eta(541)^*$	0.602	2%	(1,1)	$0^-$	(0010)	0.00	0.02	2.71	0.03	1.16
$\eta(1295)^*$	1.428	10%	(1,1)	$0^-$	(0010)	0.00	0.01	1.61	0.01	0.53
$\eta(1760)$	1.671	9%	(1,1)	$0^-$	(1020)	1.01	0.02	3.53	0.02	1.25
$\omega(782)^*$	0.851	1%	(0,0)	$1^-$	(0100)	0.04	1.03	2.56	0.02	1.34
$\phi(1020)^*$	0.943	0%	(1,1)	$1^-$	(0001)	0.00	0.02	2.39	1.02	1.19
$\omega(1420)$	1.389	2%	(1,1)	$1^-$	(0001)	0.00	0.01	0.85	1.01	0.47
$\omega(1600)$	1.639	1%	(1,1)	$1^-$	(0120)	0.00	1.03	3.55	0.02	1.28
$X(1440)$	1.440		(3,0)	$1^+$	(0011)	0.00	0.02	2.39	1.02	0.90
$X(1440)$	1.440		(0,3)	$1^+$	(0011)	0.00	0.02	2.39	1.02	0.90
$X(797)$	0.797		(2,2)	$0^+$	(0020)	0.00	0.02	3.78	0.02	1.49

Tabla 3.6: Estados mesónicos.  $E_{mod}$  es la energía obtenida con el modelo, %-Error indica la desviación porcentual con respecto al valor experimental usado para el ajuste.  $(\lambda_f, \mu_f)$  es el sabor,  $J$  el espín y  $\pi$  la paridad. El contenido de seniority es indicado por  $(\nu) = (\nu_{00}\nu_{01}\nu_{10}\nu_{11})$ . También se muestra el valor de expectación de los pares bosónicos en los diferentes canales de sabor, espín y paridad  $(0,0) 0^-$  ( $n_{00}$ ),  $(0,0) 1^-$  ( $n_{01}$ ),  $(1,1) 0^-$  ( $n_{10}$ ) y  $(1,1) 1^-$  ( $n_{11}$ ). El número total de pares de gluones con espín 0 está dado por  $n_g$ . Nótese que los últimos tres estados no son reportados en la Tabla 2.1, tales estados corresponden a combinaciones exóticas de hipercarga e isoespín. La partícula  $X(797)$  se interpreta como un estado molecular.

partícula	$E_{mod}$ GeV	%-Error	$(\lambda_m, \mu_m)$	$J_m^\pi$	$(\lambda, \mu)J^\pi$	$(\nu)$	$n_{10}$	$n_{11}$	$n_g$
nucleón	0.95	1%	(0,0)	$0^+$	$(1,1)\frac{1}{2}^+$	(0000)	0.47	0.05	1.40
Roper	1.49	3%	(0,0)	$0^+$	$(1,1)\frac{1}{2}^+$	(0000)	1.91	0.04	1.92
N(1650)	1.51	8%	(1,1)	$0^-$	$(1,1)\frac{1}{2}^-$	(0010)	3.14	0.03	2.81
N(1535)	1.79	17%	(1,1)	$1^-$	$(1,1)\frac{1}{2}^-, \frac{3}{2}^-$	(0001)	0.38	1.00	1.04
$\Theta^+(1540)$	1.51	2%	(1,1)	$0^-$	$(0,3)\frac{1}{2}^-$	(0010)	3.14	0.03	2.81
X(1510)	1.51		(1,1)	$0^-$	$(2,2)\frac{1}{2}^-$	(0010)	3.14	0.03	2.81
$H_1(2451)$	2.45		(1,1)	$1^+$	(0,0), (1,1) (3,0), (0,3) $\frac{1}{2}^+, \frac{3}{2}^+$	(0110)	2.87	0.03	2.27
$H_2(2529)$	2.53		(2,2)	$0^+$	$(4,1), \frac{1}{2}^+$	(0020)	2.73	0.03	1.24

Tabla 3.7: Resonancias Nucleares. La energía teórica es indicada por  $E_{mod}$  y su desviación porcentual del valor experimental es dada por %-Error, donde no se tiene este último valor es porque no hay dato experimental para comparar. El sabor  $(\lambda_m, \mu_m)$  y el espín y paridad  $J_m^\pi$  corresponden al fondo mesónico. El sabor, espín y paridad total son expresados por  $(\lambda, \mu)J^\pi$ , el contenido de seniority por  $(\nu) = (\nu_{00}\nu_{01}\nu_{10}\nu_{11})$ . Se encuentran también, el valor de expectación de los pares bosónicos en los canales de sabor, espín y paridad  $(1,1) 0^-$  ( $n_{10}$ ) y  $(1,1) 1^-$  ( $n_{11}$ ), así como el número total de pares de gluones con espín 0,  $n_g$ . Las últimas cuatro partículas son combinaciones de hipercarga e isospín poco usuales,  $\Theta^+(1540)$  es reportada como un estado de pentaquark. Otro estado de pentaquark es identificado, dentro de este modelo, con X(1510), mientras que los estados  $H_1(2451)$  y  $H_2(2529)$  se refieren a los estados de heptaquark con sabor poco usual a energías más bajas.

### 3.5 Resonancias nucleares

En lo concerniente a las resonancias del nucleón, del ajuste realizado con el programa *fit-bar.f*, las constantes de acoplamiento conseguidas son

$$\begin{aligned} D_1 &= -1.442 \text{ GeV} , \\ D_2 &= -0.439 \text{ GeV} , \end{aligned} \tag{3.26}$$

y los principales resultados obtenidos de este modelo de quarks y gluones constituyentes son resumidos en la Tabla 3.7.

En la primera línea se muestran los contenidos de quarks, antiquarks y gluones para el nucleón. El número promedio de pares  $q\bar{q}$  es aproximadamente de 0.5 en el canal de sabor (1,0), i.e., incluyendo los tres quarks de valencia hay en promedio 3.5 quarks y 0.5 antiquarks en el nucleón. Por otro lado, el contenido de pares de gluones es de 1.4, lo cual se traduce en casi tres gluones presentes. Estos valores implican que un 59% del nucleón está conformado por quarks y antiquarks, mientras que el 41% restante corresponde a gluones, resultado esperado de acuerdo a evidencias previas.

Otro caso representativo del espectro de las resonancias nucleares, es la resonancia Roper que experimentalmente se reporta con una energía de 1.44 GeV, la cual en los resultados del modelo queda bastante cerca, con una energía de 1.49 GeV, y un contenido aproximado de 2 pares  $q\bar{q}$  y 2 pares  $gg$ . Por lo tanto, el modelo da una resonancia Roper con 5 quarks, 2 antiquarks y

más o menos 4 gluones, que en términos de porcentajes implica un 65% de quarks y un 35% de gluones. Esta resonancia en particular presenta varias dificultades en su determinación para muchos modelos, excepto, por ejemplo, en el trabajo [41]. Nótese también que, el contenido de quarks y gluones en la resonancia Roper es más grande con respecto al nucleón, lo cual se refleja en su gran naturaleza colectiva y baja energía.

La primer resonancia de paridad negativa, N(1650), aparece con una energía de 1.51 GeV con sabor y espín de  $(1, 1)_{\frac{1}{2}}^{-}$ . La siguiente, N(1535), tiene una energía de 1.79 GeV y estados degenerados con  $J^{\pi} = \frac{1}{2}^{-}$  y  $\frac{3}{2}^{-}$ . La resonancia N(1650) resulta con un gran número de pares  $q\bar{q}$  del tipo  $(1, 1)0^{-}$ , mientras que la N(1535) es cercana a la configuración  $q^4\bar{q}g^2$ . Lo anterior hace de las resonancias N(1650) y N(1535) buenos candidatos a bariones híbridos.

## 3.6 Estados exóticos: penta- y heptaquarks

Dentro del contexto de este modelo, los estados de pentaquark y heptaquark son interpretados como estados en los que la seniority es 1 y 2 respectivamente. En la Tabla 3.7 también aparecen las configuraciones  $(0,0)_{\frac{1}{2}}^{-}$ ,  $(1,1)_{\frac{1}{2}}^{-}$ ,  $(3,0)_{\frac{1}{2}}^{-}$ ,  $(0,3)_{\frac{1}{2}}^{-}$  y  $(2,2)_{\frac{1}{2}}^{-}$ , las cuales corresponden a los estados de sabor  $(3,0)$ ,  $(0,3)$  y  $(2,2)$  listados en la tabla de mesones y ahora acoplados con los 3 quarks de valencia. De lo anterior, los estados de  $(0,3)_{\frac{1}{2}}^{-}$  y  $(2,2)_{\frac{1}{2}}^{-}$  tienen configuraciones poco usuales de isoespín e hipercarga como  $T = 0, Y = 2$  en  $(0,3)$  and  $T = 1, Y = 2$  en  $(2,2)$ , que no pueden ser obtenidas a través de un esquema de acoplamiento con  $q^3$  solamente. Tales configuraciones pueden ser asociadas con estados de pentaquark como el  $\Theta^{+}(1540)$  [42], cuya posición fue predicha en [43] y que en este modelo puede ser interpretado como el acoplamiento de los tres quarks de valencia en  $(1,1)_{\frac{1}{2}}^{+}$  con el fondo de pares de  $q\bar{q}$  en  $(1,1)0^{-}$ , dando como irrep final  $(0,3)_{\frac{1}{2}}^{-}$ . Al mismo tiempo, el modelo también produce otros estados de pentaquark con los mismos números cuánticos de hipercarga e isoespín que otras resonancias del nucleón. Donde la interpretación de dichos estados como estados de pentaquark está basada en el valor de la seniority de los pares de  $q\bar{q}$  del tipo  $(1, 1)0^{-}$  ( $\nu = 1$ ) a los que todavía deben ser agregados los tres quarks de valencia. Si además el espín orbital  $L$  es incluido en el modelo, estados de pentaquark con paridad positiva pueden existir con  $L = 1$ , sin embargo, al incluirse la excitación orbital las energías se vuelven más altas. Debe resaltarse el hecho de que, el estado de pentaquark de más baja energía tiene paridad negativa en acuerdo con las reglas de suma de la QCD y los cálculos de lattice [44, 45, 46, 47].

Otros resultados dados por el modelo, son aquellos llamados estados de heptaquark, los cuales se encuentran caracterizados por dos pares  $q\bar{q}$  acoplados con los tres quarks de valencia,  $(q\bar{q})^2q^3$ . El estado más bajo con dicha configuración,  $H_1(2451)$ , tiene una energía de aproximadamente 2.5 GeV y tiene un contenido de 2.87 pares  $q\bar{q}$  del tipo  $(1, 1)0^{+}$ , acoplados con los tres quarks de valencia en la configuración  $(1,1)_{\frac{1}{2}}^{+}$ , y 2.27 pares de gluones, lo cual lleva a casi un 70% de quarks y un 30% de gluones para este estado.

Adicionalmente, el modelo también predice otros estados de heptaquark de energías más altas, los cuales son obtenidos a través del acoplamiento de los tres quarks de valencia con las configuraciones de  $q\bar{q}$   $(3, 0)1^{+}$  y  $(0, 3)1^{+}$ . Lo cual conduce a irreps de sabor como  $(4,1)$ ,  $(1,4)$  y  $(3,3)$  con espín  $\frac{1}{2}^{+}$  y  $\frac{3}{2}^{+}$ . El acoplamiento de los tres quarks de valencia con un par  $q\bar{q}$  en la irrep  $(2,2)S=0, 1, 2$  produce irreps de sabor exótico del tipo  $(3,3)$ ,  $(1,4)$  con espín y paridad de  $\frac{1}{2}^{+}$ ,  $\frac{3}{2}^{+}$  y  $\frac{5}{2}^{+}$ . Sin embargo, se debe tener cuidado en que configuraciones son permitidas y cuales no, debido a que se está trabajando en el espacio bosónico. De aquí la importancia de la clasificación

partícula	$E_{mod}$ GeV	%-Error	$(\lambda_m, \mu_m)$	$J_m^\pi$	$(\lambda, \mu)J^\pi$	$(\nu)$	$n_{10}$	$n_{11}$	$n_g$
$\Delta(1232)$	1.248	1%	(0,0)	$0^+$	$(3,0)\frac{3}{2}^+$	(0000)	0.33	0.03	0.67
$\Delta(1600)$	1.57	2%	(0,0)	$0^+$	$(3,0)\frac{3}{2}^+$	(0000)	1.93	0.04	1.60
$\Delta(1620)^*$	1.51	7%	(1,1)	$0^-$	$(3,0)\frac{1}{2}^-$	(0010)	3.14	0.03	2.81
$\Delta(1700)^*$	1.79	5%	(1,1)	$1^-$	$(3,0), \frac{1}{2}^-, \frac{3}{2}^-$	(0001)	0.38	1.00	1.04
$\Delta(1750)^*$	2.49	42%	(1,1)	$0^+$	$(3,0)\frac{1}{2}^+$	(1010)	2.85	0.03	2.19
$\Delta(1900)^*$	2.09	10%	(1,1)	$0^-$	$(3,0)\frac{1}{2}^-$	(0010)	1.40	0.02	0.68
$X(1640)$	1.64		(1,1)	$0^-$	$(4,1), (2,2), \frac{3}{2}^-$	(0010)	3.00	0.03	2.18
$H(2530)$	2.53		(2,2)	$0^+$	$(4,1)\frac{3}{2}^+$	(0020)	2.67	0.02	0.97

Tabla 3.8: Resonancias  $\Delta$ . La energía calculada a través del ajuste numérico es  $E_{mod}$ , el sabor, espín y paridad del fondo mesónico son  $(\lambda_m, \mu_m)$  y  $J_m^\pi$ , respectivamente. El sabor, espín y paridad total son indicados por  $(\lambda, \mu)J^\pi$ . El contenido de seniority, como antes,  $(\nu) = (\nu_{00}\nu_{01}\nu_{10}\nu_{11})$ , el valor de expectación de los pares bosónicos en los canales de sabor, espín y paridad  $(1,1) 0^-$  ( $n_{10}$ ) y  $(1,1) 1^-$  ( $n_{11}$ ), y el número total de pares de gluones con espín 0,  $n_g$ . Las partículas  $X$  y  $H$  son partículas predichas de combinaciones de hipercarga e isoespín poco usuales. Aquí el (\*) significa que el estado es obtenido mediante la combinación con tres quarks de valencia acoplados a  $(1,1)\frac{1}{2}^+$ .

completa, ya solamente con la comparación de los estados en el espacio bosónico y las irreps en el espacio fermiónico se obtienen los posibles estados permitidos.

### 3.7 Resonancias $\Delta$

En forma análoga al tratamiento de las resonancias nucleares, se pueden estudiar las resonancias  $\Delta$ . Con el método numérico utilizado en este proyecto, se determinaron las restantes dos constantes de acoplamiento como:

$$\begin{aligned} E_1 &= -1.187 \text{ GeV}, \\ E_2 &= -0.362 \text{ GeV}. \end{aligned} \tag{3.27}$$

La forma más simple para obtener una resonancia  $\Delta$  es acoplar los tres quarks de valencia con  $(3,0)\frac{3}{2}$  con la parte mesónica de  $(0,0)J$ , donde, en general, más de  $J$  es permitido, dependiendo solamente del estado mesónico. La Tabla 3.8 enlista los resultados del ajuste. Por ejemplo, acoplando  $(3,0)\frac{3}{2}$  con  $(0,0)0^+$  produce la resonancia  $\Delta(1232)$ . Observese que el contenido de pares  $q\bar{q}$  y  $g\bar{g}$  de la resonancia  $\Delta(1232)$  es ligeramente más bajo que el del nucleón.

Similarmente a las resonancias nucleares, para las resonancias  $\Delta$  también se consigue una especie de resonancia Roper, que en este caso es asociada con el estado de 1.57 GeV. Mientras que el primer estado de paridad negativa con sabor  $(3,0)$  y espín  $\frac{3}{2}$  aparece a una energía de 1.79 GeV con un par de  $q\bar{q}$  de sabor y espín  $(1,1)1^-$ . En la misma tabla también se muestran estados adicionales con sabor  $(3,0)$  pero espín  $\frac{1}{2}$ .

Para concluir este capítulo, se muestra una gráfica, Fig. 3.3, que resume los resultados del modelo para los estados de las resonancias nucleares y  $\Delta$ , al igual que los estados de pentaquarks y heptaquarks a energías más bajas con sabor exótico de relevancia física.

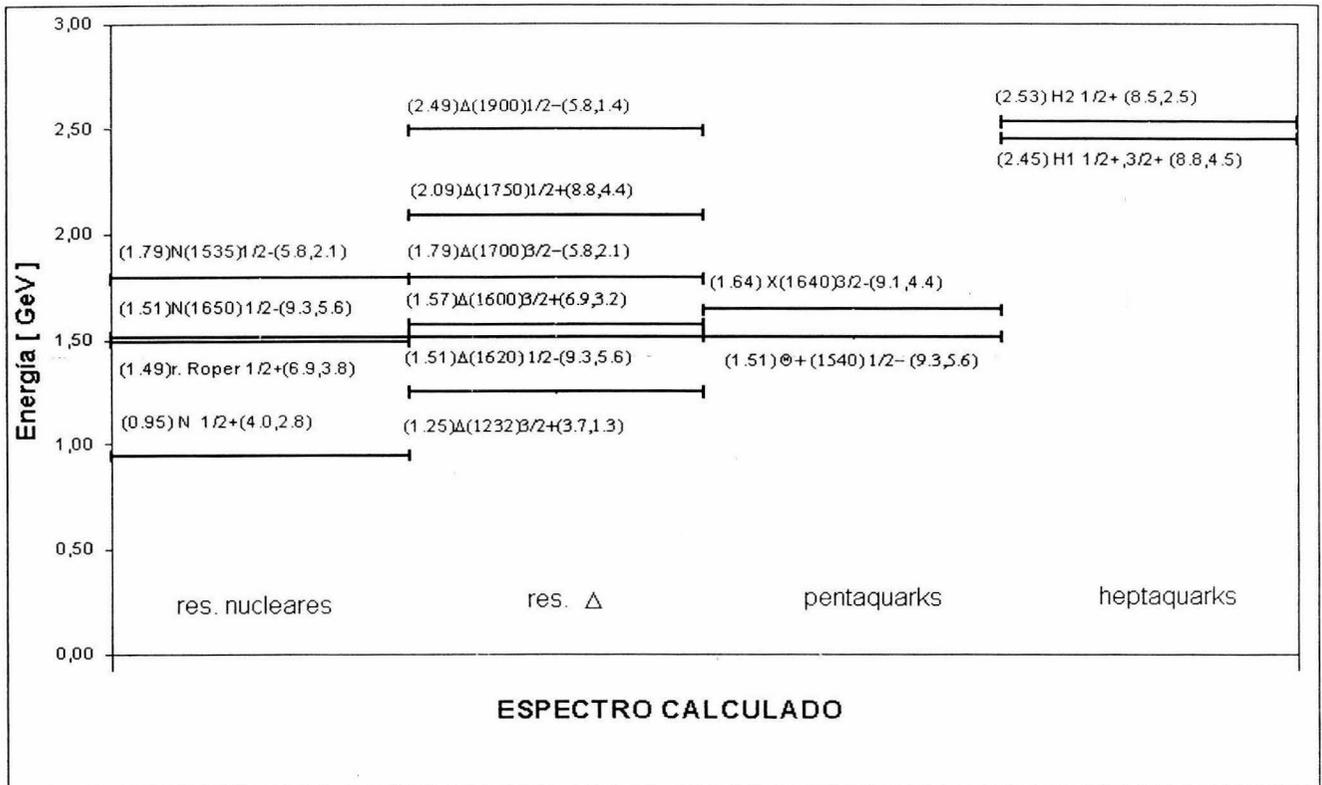


Figura 3.3: Estados bariónicos: Cada estado se encuentra etiquetado con la energía dada por el modelo en GeV, la resonancia, el espín, la paridad y el número total promedio de quarks más antiquarks y gluones, i.e.,  $(E_{mod})_{reson.} J\pi (q + \bar{q}, g)$  (Las líneas de la gráfica solamente indican el nivel sin incertidumbre o error experimental).

### 3.8 Errores y confiabilidad

En esta última sección se hace una breve mención a los errores involucrados para encontrar los valores de las masas bariónicas y mesónicas. Debe hacerse hincapié en que el siguiente análisis es meramente cualitativo, en virtud de que, el modelo trabajado es esquemático y entre sus objetivos nunca figuró el determinar con un grado de precisión dado, el espectro hadrónico. Así, en esta tesis, y en todos los trabajos anteriores, se presentan resultados sin intervalos de error, lo cual, por supuesto, no quiere decir que se trate de resultados “absolutos”, sino más bien que para el modelo no estuvieron considerados. Un análisis estadístico y riguroso podría ser llevado a cabo, no obstante, éste queda reservado para un estudio futuro donde se refinan el modelo y los métodos de ajuste presentados aquí. Lo que sí se puede hacer explícito a este nivel, es el posible origen de los errores que intervienen en el estudio. Primeramente, es fácil ver que uno de los múltiples errores proviene de la elección de los valores experimentales tomados para el ajuste. La Ref. [39] presenta tales datos dentro de un rango experimental, que aquí no se toma en cuenta. Otro error es inducido por el proceso de ajuste mismo, que en este trabajo es realizado por la rutina *minuit* de CERN, que minimiza mediante el método de mínimos cuadrados, del cual sólo se obtienen los resultados sin calcular las desviaciones. Debe señalarse también que, los pesos utilizados en el ajuste son causa de un error que no se puede cuantificar aquí, pues su asignación carece de un método sistemático. Sin embargo, de implementarse una regla para fijar los pesos su error puede volverse manejable.

# Conclusiones

En este trabajo se presentaron los ingredientes esenciales para un modelo fenomenológico de QCD. El modelo original pensado para gluones en la Ref. [11], fue extendido en los trabajos de las Refs. [14, 37, 16]. El resultado fue un modelo consistente de un nivel bosónico, dado por el glueball  $0^{++}$  y dos niveles con energías  $\pm\omega_f$  representando el sector fermiónico, donde partículas con energía positiva son tomadas como quarks y partículas con energía negativa como antiquarks. En este esquema se construye un Hamiltoniano efectivo de interacción con base en el de la QCD, que toma en cuenta la creación y aniquilación de pares  $q\bar{q}$ , correlaciones del vacío y dispersión, lo cual en términos de diagramas de Feynman implicó una simetría respecto al intercambio de líneas fermiónicas y bosónicas, que se tradujo en la misma constante de acoplamiento en todos los casos. Así, con este Hamiltoniano construido, primero se trabajaron los acoplamientos de pares  $q\bar{q}$  a espín y color cero, encontrándose a través de estados coherentes y posterior diagonalización numérica de la matriz hamiltoniana, que el sistema exhibe una transición de fase dependiente de la interacción, en la cual se pasa de una fase perturbada a una condensada donde dominan los pares de  $gg$ . Ya con la consideración de todo tipo de acoplamientos de sabor (0,0) y (1,1) con espín 0 y 1, se tuvo la necesidad de realizar un mapeo bosónico para obtener un Hamiltoniano más manejable en dicho espacio. Con ello, se obtuvo el ajuste al espectro mesónico experimental fijando de esta manera las cuatro constantes de acoplamiento.

En esta tesis, el modelo esquemático de quarks y gluones constituyentes construido primero para gluones y luego para mesones fue ampliado a la descripción de bariones. Para ello se incluyeron tres quarks de valencia que en un principio se manipularon sin interacción con el nivel bosónico, esto llevo a encontrar masas bariónicas sobreestimadas por lo que se incluyeron nuevos términos en el Hamiltoniano que pudieran describir la interacción antes ignorada de los quarks con pares de gluones acoplados a espín cero. Este proceso desembocó en cuatro nuevas constantes para el ajuste del espectro bariónico, dos para las resonancias nucleares y dos para las resonancias  $\Delta$ . Este nuevo Hamiltoniano efectivo, también trabajado en el espacio bosónico y diagonalizado en una base de seniority, permitió desarrollar los programas necesarios en FORTRAN para obtener la diagonalización numérica de la matriz hamiltoniana respectiva y los correspondientes ajustes a los espectros experimentales por medio de tres masas de resonancias nucleares reportadas en la literatura. El trabajo anterior permitió la determinación de las cuatro constantes en juego. Hecho lo anterior, los resultados obtenidos reflejaron que casi el 50% del nucleón está constituido por gluones, que la degeneración de los estados del tipo  $q^{n_1}\bar{q}^{n_2}g^{n_3}$  es removida, aunque aún permanece una asociada a la seniority. Es decir, cuando el espacio de Hilbert fue dividido en subespacios con una seniority dada de los diferentes pares de  $q\bar{q}$  involucrados, los espacios con la misma distribución de seniority, pero diferente sabor y espín resultan degenerados. Esto condujo a la predicción de combinaciones de sabor y espín poco usuales, las cuales no pueden ser obtenidas por medio de par  $q\bar{q}$  o tres quarks solamente. Así mismo se presentó una clasificación completa para los estados de muchos quarks, antiquarks y gluones. Como colofón de este trabajo

se puede decir que, el espectro de las masas bariónicas calculado quedó dentro de un acuerdo razonable con los datos experimentales, y en adición fue posible establecer estados de pentaquark y heptaquarks correspondientes a configuraciones de la forma  $q^3(q\bar{q})$  y  $q^3(q\bar{q})^2$ , respectivamente, donde la seniority desempeña un papel importante para dar el carácter de penta- o heptaquark. En conclusión, esta tesis ha completado el espectro hadrónico, resultando satisfactorio el hecho de que, a través de un modelo de naturaleza esquemática se haya alcanzado a cerrar la descripción de los espectros de mesones y bariones. No obstante, debe observarse que el modelo aún tiene que someterse a más pruebas que den un resultado más concluyente sobre su fiabilidad y credibilidad.

# Bibliografía

- [1] A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, C. B. Thorn and V.F. Weisskopf, Phys. Rev. **D9** (1974), 3471.
- [2] D. Robson, Nucl. Phys. B130 (1977), 328.
- [3] N. Isgur and j. Paton, Phys. Lett. **B124** (1983).
- [4] W.S. Hou and A. Soni, Phys. Rev **D29** (1984), 101.
- [5] J.Y. Cui, J.M. Wu and H.Y. Jin, Phys. Lett. **B424** (1998), 381.
- [6] A. Szczepaniak, E. S. Swanson, C.R. Ji and S.R. Cotanch, Phys. Rev. Lett. **76** (1996), 2011. P. van Ball and J. Koller, Ann. Phys. (N.Y.) **174** (1987), 299.
- [7] A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, C. B. Thorn y V. F. Weisskopf, Phys. Rev. D **9**, 3471 (1974).
- [8] T. H. R. Skyrme, Proc. Roy. Soc. (London) A, **260**, 127 (1961); Nucl. Phys. **31**, 556 (1962); J. Schechter y H. Weigel, arXiv:hep-ph/9907554 (1999).
- [9] L. Ya. Glozman y D.O. Riska, Physics Reports **268** (1996) 263.
- [10] F. Halzen y A. D. Martin, *Quarks and Leptons*, John Wiley & Sons, Estados Unidos (1984).
- [11] P. O. Hess, S. A. Lerma H., J. C. López V., C. R. Stephens and A. Weber, Eur. Phys. J. C **9**, 121 (1999).
- [12] G. S. Bali, K. Schilling, A. Hulsebos, A. C. Irving, C. Michael y P. W. Stephenson, Phys. Lett. B **309**, 378 (1993);  
C. Michael, en *Confinement, Duality, and Nonperturbative Aspects of QCD*, ed. por P. van Baal, NATO ASI Series B 368, Plenum Press, New York (1998); en *Hadron Spectroscopy 1997*, ed. por S.-U. Chung y H. J. Willutzki, AIP Conference Proceedings 432, American Institute of Physics (1998);  
X.-Q. Luo, Q. Chen. S. Guo, X. Fang y J. Liu, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) **53**, 243 (1997).
- [13] S. Lerma, S. Jesgarz, P. O. Hess, O. Civitarese y M. Reboiro, Phys. Rev. C **66**, 045207 (2002).
- [14] S. Lerma H., S. Jesgarz, P.O. Hess, O. Civitarese y M. Reboiro, Phys. Rev. C **67**, 055209 (2003).
- [15] Tesis doctoral de Samuel Jesgarz, Justus-Liebig-Universität, Giessen (2003).

- [16] Tesis de doctorado de Sergio A. Lerma H., UNAM, México (2003).
- [17] Byung-geel Yu, Tae-Deun Choi y Chueng-Ryong Ji. nucle-th/0312075 v1 (2003)
- [18] P.O. Hess and R.D. Viollier, Phys. Rev. **D34** (1986), 258.
- [19] W. Greiner y B. Müller, *Quantum Mechanics, Symmetries*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 4a Edition (2001).
- [20] M. Hamermesh, *Group Theory and its Application to Physical Problems*, Dover Publications, New York (1989).
- [21] M. Lüscher, Phys. Lett. **B118**(1982), 391; Nucl. Phys. **B219** (1983), 233.
- [22] E. Chacón, P. O. Hess and C.R. Sarman, Kinam **4** (1982), 227.
- [23] H. J. Lipkin, N. Meschkov y S. Glick, Nucl. Phys. A **62**, 118 (1965).
- [24] D. Schütte y J. da Providência, Nucl. Phys. A **282**, 518 (1977).
- [25] M. E. Peskin, *Introduction to quantum field theory*, Addison-Wesley, Massachusetts, (1995).
- [26] P. A. M. Dirac, *The principles of quantum mechanics*, Oxford,
- [27] A. Klein y E. R. Marshalek, Rev. Mod. Phys. **63**, 375 (1991).
- [28] J. P. Draayer and Y. Akiyama, Jour. Math. Phys. **14**. 1904 (1973).
- [29] A. R. Edmonds, *Angular Momentum in Quantum Mechanics*, Princeton University Press, New Jersey (1957).
- [30] Jerry P. Draayer, SU2-package, Louisiana State University (1979).
- [31] K. T. Hecht y A. Adler, Nucl. Phys. A **137**, 129 (1969);  
A. Arima, M. Harvey y S. Shimizu, Phs.Lett. B **30**, 517 (1969).
- [32] S. L. Sondhi, S. M. Girvin, J. P. Carini y D. Shahar, Rev. Mod. Phys. **69**, 315 (1997).
- [33] F. Stancu, *Group Theory in Subnuclear Physics*, Oxford University Press, Oxford (1996).
- [34] R. Gupta y K. Maltman, Int. J. Mod. Phys. A **16S1B**, 591 (2001);  
S. Aoki, *et al.*, Colaboración CP-PACS, Phys. Rev. D **67**, 034503 (2003); arXiv:hep-lat/0206009.
- [35] G. 't Hooft, Phys. Rev. D **14**, 3432 (1976); arXiv:hep-th/9903189 (1999).
- [36] Librerías del CERN, rutina MINUIT, manual en:  
[www.info.cern.ch/asdoc/minuit/minmain.html](http://www.info.cern.ch/asdoc/minuit/minmain.html)
- [37] S. Jesgarz, S. Lerma H., P.O. Hess, O. Civitarese y M. Reboiro, Phys. Rev. C **67**, 055210 (2003).
- [38] P. Ring y P. Schuck, *The Nuclear Many-Body Problem*, Springer-Verlag, Heidelberg (1980).

- [39] Particle Data Group, D.E. Groom *et al.*, Eur. Phys. J. C **15**, 1 (2000).
- [40] R. Bijker, M. M. Giannini and E. Santopinto, preprint UNAM (2003)
- [41] R. Bijker, F. Iachello and A. Leviatan, Ann. Phys. (N.Y.) **236** (1994), 69.
- [42] T. Nakano *et al.*, Phys. Rev. Lett. **91** (2003), 012002;  
V. V. Barmin *et al.* (DIANA collaboration), preprint hep-ex/0304040, Yad. Fis. (in press);  
S. Stepanyan *et al.* (CLAS collaboration), preprint hep-ex/0307018;  
J. Barth *et al.* (SAPHIR collaboration), preprint hep-ex/307083, Nucl. Phys. B (in press);  
A. E. Asratyan, A. G. Dolgolenko and M. A. Kubantsev, preprint hep-ex/0309042, submitted to Yad. Fis. (2003).
- [43] D. Diakonov, V. Petrov and M. Polyakov, Z. Phys. A**359** (1997), 305.
- [44] Shin-Lin Zhu, preprint hep-ph/0307345.
- [45] J. Sugiyama, T. Doi and M. Oka, preprint hep-ph/0309271.
- [46] F. Csikor, Z. Fodor, S. D. Katz and T. G. Kovács, hep-lat/0309090.
- [47] S. Sasaki, hep-lat/0310014.