



01181

---

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN INGENIERÍA

***SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL  
COMPORTAMIENTO MECÁNICO DE LA  
MAMPOSTERÍA***

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

**DOCTOR EN INGENIERÍA**  
( Estructuras )

Presenta:

*M. I. Guillermo Martín Roeder Carbo*

Dirigida por:

*Dr. Gustavo Ayala Milián*

Ciudad Universitaria

junio del 2004



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mi madre Estela, a mi esposa Adriana y en especial a la memoria de mi querida abuela  
Enriqueta Tenaud de Carbo, mi esfuerzo final para ustedes con todo mi amor.

## AGRADECIMIENTOS

En primer lugar quiero agradecer profundamente a mi tutor de doctorado y maestro, el Dr. Gustavo Ayala Milián, por su apoyo y preocupación constante en mi formación académica y personal. También deseo reconocer a mi otro maestro y tutor de maestría, el Dr. Roberto Meli Piralla, por sus valiosas opiniones y consejos. Para ellos mi respeto y aprecio por siempre.

Es oportuno también agradecer a los miembros de mi comité doctoral: el Dr. Ismael Herrera Revilla, el Dr. Arturo Tena Colunga, el Dr. Sergio Alcocer Martínez de Castro, el Dr. Francisco Sánchez Sesma y por último al Dr. Paulo Lourenço, quien dio valiosas sugerencias a mi trabajo doctoral.

Estos agradecimientos no pueden ser completos sin mencionar a mis queridos hermanos y, en especial, a mi madre y mi esposa por su apoyo y cariño.

A todos mis amigos mexicanos, colombianos y peruanos, en especial a Eddy Vargas Calle, mi amigo de siempre, descansa en paz.

# Resumen

El enfoque principal de este trabajo de tesis es en mecánica numérica. Dentro de este contexto la meta final del trabajo es el desarrollo de herramientas numéricas para el análisis de estructuras hechas de mampostería y aplicables también a las construidas con concreto.

En la tesis se presentan cinco capítulos, un resumen de ésta y las conclusiones. Además, se han escrito dos apéndices donde se muestran las expresiones algebraicas que se utilizan en la formulación del modelo de plasticidad propuesto en este trabajo y la descripción general del programa de análisis no-lineal utilizando el método de los elementos finitos, elaborado por el autor de esta tesis y su tutor, el cual se denomina *NLFEM*.

El primer capítulo hace una breve reseña de la historia de las estructuras de mampostería. En el segundo capítulo se presentan algunas técnicas de modelado de estructuras de mampostería, describiendo también algunas de las características mecánicas de este material. En el tercer capítulo se hace un resumen de los principales métodos numéricos que se utilizan para resolver sistemas de ecuaciones no-lineales y que han sido implantados en el sistema de elementos finitos *NLFEM*. Además, se exponen algunas nociones de plasticidad computacional. El cuarto capítulo se dedica a la formulación del modelo de plasticidad de Rankine con dos variables internas que miden el deterioro en las direcciones materiales  $x$  e  $y$ . En este capítulo también se evalúa el desempeño de esta relación constitutiva propuesta en la tesis con dos modelos de elementos finitos. En el último capítulo se aplica el modelo de plasticidad Rankine ortotrópico a cuatro problemas de la ingeniería práctica.

La herramienta computacional desarrollada en este trabajo parece ser un aporte trascendente a la mecánica numérica aplicada a la ingeniería estructural que puede ayudar al ingeniero a verificar las reglas de diseño que se utilizan en estas estructuras como un paso importante hacia criterios de diseño basados en la mecánica de fractura.

# Abstract

This Ph.D. dissertation focuses on numerical mechanics. In this context, the development of reliable tools for the analysis of masonry structures, also applicable to concrete structures, is the primary aim.

Five chapters form this dissertation, together with a summary and the conclusions of this. There are also two appendixes, the first shows algebraic expressions which were used in the formulation of the plasticity model proposed and a general description of the nonlinear finite element program, *NLFEM*, designed by the author of this work and his advisor.

The first chapter reviews the history of masonry structures. The second chapter introduces some techniques of modeling masonry structures behavior and also describes some of the mechanical characteristics of this material. In third chapter a numerical techniques summary to solve nonlinear equations is done. These techniques have been implemented in *NLFEM*. Some concepts of computational plasticity are also shown in this chapter. The fourth chapter is devoted to the formulation of the Rankine plasticity model with two internal variables which define the local softening state in the material related to  $x$  and  $y$  material axes. Two finite element models are also evaluated with the Rankine type criterion proposed in this dissertation. In the last chapter the orthotropic Rankine plasticity criterion is applied to four cases which could be found in practical engineering.

The computational tool developed here could be a significant contribution to numerical mechanics and it may assist structural engineers to assess the design rules for masonry constructions as an important step towards fracture-mechanics- based design rules.

# ÍNDICE

<b>1. Introducción.</b>	<b>1</b>
1.1. Breve historia de las construcciones de mampostería.	2
1.1.1. Construcciones paleolíticas, sumerias, egipcias, griegas y romanas.	2
1.1.2. Construcciones de mampostería en América precolombina.	6
1.1.3. Edificaciones en la edad media.	8
1.1.4. Periodo renacentista de las edificaciones de mampostería.	11
1.1.5. La revolución industrial y estructuras contemporáneas.	12
1.2. Modelado numérico de las estructuras de mampostería.	15
1.3. Objetivos y meta del trabajo.	17
<b>2. Comportamiento mecánico de la mampostería.</b>	<b>20</b>
2.1. Modelado de la mampostería.	21
2.1.1. Aproximación al comportamiento mecánico con elementos finitos.	21
2.1.2. Técnicas de homogenización aplicadas a la mampostería.	23
2.1.3. Modelado de sistemas discontinuos-método de los elementos distintos.	25
2.2. Ablandamiento en materiales cuasi-frágiles: mampostería.	25
2.3. Propiedades de los elementos constituyentes.	27
2.3.1. Unidades sólidas y mortero: propiedades mecánicas.	28
2.3.1.1. Unidades sólidas naturales.	29
2.3.1.2. Unidades sólidas artificiales.	29
2.4. Propiedades de la superficie de contacto entre la pieza de ladrillo y el mortero.	31
2.5. Material compuesto, propiedades mecánicas.	34
2.5.1. Comportamiento de la mampostería a compresión.	34
2.5.2. Resistencia a tensión de muretes de mampostería.	37
2.5.3. Comportamiento biaxial de muretes de mampostería.	38
2.6. Sumario.	41
<b>3. Tratamiento de la no-linealidad física y procedimientos avanzados de solución.</b>	<b>42</b>
3.1. Técnicas numéricas para el análisis no-lineal de estructuras.	42
3.1.1. Métodos numéricos para la solución de ecuaciones no-lineales.	43

3.1.1.1. Análisis controlado por incrementos de fuerzas.	44
3.1.1.2. Control directo de desplazamientos.	47
3.1.1.3. Control con procedimientos de arco.	49
3.1.2. Control automático de cargas.	56
3.2. Plasticidad computacional.	57
3.2.1. Integración implícita de Euler.	57
3.3. Sumario.	62
<b>4. Modelo de comportamiento para evaluación del daño por tensión en la mampostería.</b>	<b>63</b>
4.1. Formulación del modelo ortotrópico de Rankine con dos variables internas.	64
4.2. Objetividad de los modelos numéricos.	70
4.3. Validación del modelo de plasticidad propuesto.	72
4.3.1. Modelo de placa sometido a cargas diagonales.	72
4.3.2. Muro de mampostería simple, ETH Zürich.	75
4.4. Sumario.	78
<b>5. Aplicaciones a estructuras de mampostería.</b>	<b>79</b>
5.1. Determinación de la estabilidad estructural en arcos de mampostería.	79
5.2. Modelado del comportamiento no-lineal de estructuras históricas.	84
5.3. Modelado del comportamiento no-lineal de marco de concreto con muro de relleno de mampostería.	90
5.4. Modelado del comportamiento no-lineal de marco de concreto con muro de mampostería de relleno con ventana.	95
5.5. Sumario.	98
<b>Sumario y conclusiones.</b>	<b>99</b>
<b>Apéndices</b>	
<b>A. Expresiones matriciales utilizadas para la integración de las ecuaciones de flujo.</b>	<b>107</b>
A.1. Definición del problema en plasticidad computacional.	107
A.1.1. Proyección de los esfuerzos en la zona continua de la superficie.	108
A.1.2. Proyección de los esfuerzos en la zona discontinua de la superficie.	110
A.2. Expresiones de las derivadas parciales de primer y segundo orden.	113

A.2.1. Gradiente paralelo al flujo plástico.	114
A.2.2. Segunda derivada $\frac{\partial^2 f}{\partial \sigma^2}$ .	115
A.2.3. Derivadas de funciones vectoriales respecto a las variables internas de ablandamiento.	115
A.2.4. Derivada de la función de fluencia respecto a las variables internas de ablandamiento.	115
A.2.5. Derivadas $\frac{\partial \Delta \kappa_1}{\partial \sigma}$ y $\frac{\partial \Delta \kappa_2}{\partial \sigma}$ .	116
A.2.6. Derivadas $\frac{\partial \Delta \kappa_1}{\partial \Delta \lambda}$ y $\frac{\partial \Delta \kappa_2}{\partial \Delta \lambda}$ .	116
A.2.7. Derivadas $\frac{\partial \Delta \kappa_1}{\partial \kappa_1}$ y $\frac{\partial \Delta \kappa_2}{\partial \kappa_2}$ .	116
A.2.8. Derivadas $\frac{\partial \Delta \kappa_1}{\partial \kappa_2}$ y $\frac{\partial \Delta \kappa_2}{\partial \kappa_1}$ .	116
A.3 Sumario.	117
<b>B. Programa de análisis no-lineal basado en el método de los elementos finitos, NLFEM (Non-Linear Finite Element Models).</b>	<b>118</b>
B.1. Revisión del programa.	118
B.1.1 Campo de aplicación del sistema.	119
B.1.2 Organización y desarrollo del sistema.	119
B.1.2.1 Usuarios objetivo.	120
B.1.2.2 Disponibilidad del software.	120
B.1.2.3 Arquitectura del programa y estilo de programación.	121
B.1.2.4 Ejecución del programa.	122
B.2. Catálogo de elementos finitos.	123
B.3. Modelos de comportamiento no-lineal para materiales.	123
B.4. Solución numérica de sistemas no-lineales.	124
B.5. Importancia del sistema para futuras investigaciones.	125
B.6. Algunos ejemplos de validación.	125
B.6.1. Modelo 3D de cilindro de concreto cargado axialmente.	126
B.6.2. Comportamiento de una conexión de elementos de concreto reforzado.	130

B.6.3. Modelo de tanque sometido a condiciones térmicas extremas.	135
B.6.4 Protección contra el impacto para piernas de plataformas marinas.	142
B.7. Consideraciones finales.	147
<b>Bibliografía.</b>	<b>148</b>

# CAPÍTULO 1

## Introducción

La mampostería es un material compuesto por unidades sólidas de piedra, o piezas de arcilla cocida o secada al sol, que están unidas con material aglomerante, y es una de las formas más antiguas de construcción que aún se sigue utilizando. Además, se le considera como uno de los símbolos del desarrollo tecnológico de las distintas civilizaciones que han surgido a través de la historia de la humanidad. Actualmente se puede apreciar, en distintas partes del mundo, una gran cantidad de monumentos antiguos contruidos con este material que han sobrevivido al paso de los años. Gracias a estas edificaciones ha sido posible resolver muchas interrogantes, formuladas por arqueólogos e historiadores, sobre los orígenes de culturas antiguas, pues sobre ellas se narran en grabados, o representaciones pictóricas, los acontecimientos pasados y eventos memorables de las actividades científicas, sociales y religiosas de los distintos grupos culturales a los que estos monumentos pertenecían.

El empleo de la mampostería en la construcción era, y sigue siendo, común, no obstante lo incipiente que era el conocimiento de las propiedades mecánicas de este material; si bien la evaluación de las condiciones estructurales de las edificaciones se hacía en forma empírica, muchas de las construcciones de gran importancia en la historia de la humanidad, erigidas con este material, han resistido sollicitaciones de cargas adversas, sean naturales o

generadas por el mismo hombre, logrando conservar sus condiciones de servicio, inclusive su belleza arquitectónica, lo que sorprende y estimula el deseo de los ingenieros estructuristas de entender su comportamiento y de seguir desarrollando trabajos de investigación con el objetivo de preservar y/o restaurar estas obras de arte de la ingeniería civil.

Actualmente se puede observar que las técnicas de construcción de los distintos tipos de mampostería han evolucionado y también se ha mejorado la calidad de los materiales constituyentes. Pero, a pesar del desarrollo de la mampostería como material de construcción, se mantiene el escepticismo de utilizar métodos avanzados de análisis. Esta desconfianza no se debe a la falta de medios humanos y tecnológicos, sino a la falta de audacia, interés y/o conocimiento para usar procedimientos modernos que permitan entender mejor el comportamiento mecánico de las estructuras construidas con materiales cuasi-frágiles como es la mampostería.

## **1.1 Breve historia de las construcciones de mampostería**

La evolución de la arquitectura de las estructuras a través de los tiempos ha estado subordinada a distintos factores que influyeron para que se desarrollara en un determinado periodo y lugar. Entre ellos se pueden señalar el tecnológico, el cual está ligado al grado de conocimiento y habilidad de los diseñadores y constructores de cada época y que está influido de manera importante por la cantidad y calidad del material para cada realización. Es así que la mampostería toma su lugar en la historia de la ingeniería.

### **1.1.1 Construcciones paleolíticas, sumerias, egipcias, griegas y romanas**

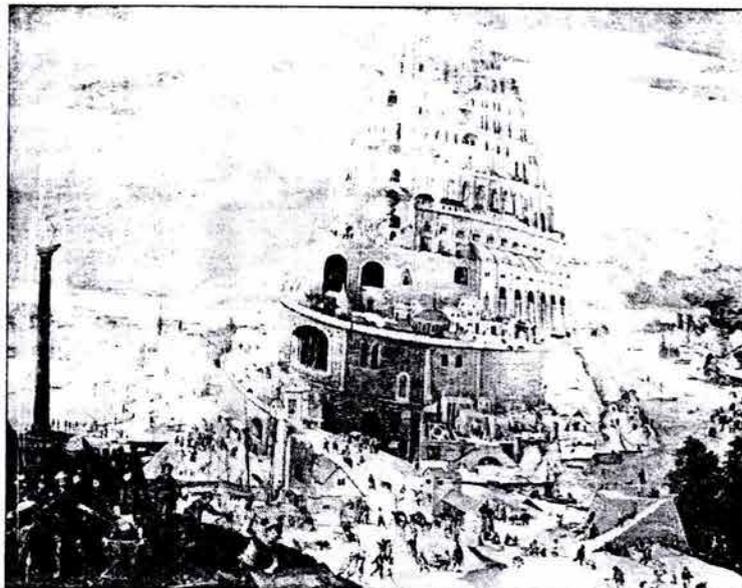
Los primeros grupos humanos paleolíticos y buena parte de los neolíticos eran nómadas, o eran parcialmente sedentarios. Debido al constante movimiento de estos grupos se cree que utilizaban, además de los refugios en cuevas, construcciones efímeras de las que han quedado poquísimos vestigios, con el fin de protegerse contra la intemperie y la acción de los depredadores. De los pocos ejemplos que se han identificado son los restos de viviendas

---

estables en Çatal Hüyük en la actual Turquía (10.000-6.000 a.C.): el material de construcción era fundamentalmente a base de bloques de arcilla secadas al sol; estas viviendas se les puede pensar como las primeras estructuras hechas de elementos fabricados por el hombre.

La necesidad de subsistir en medios agresivos y la escasez de la piedra en las zonas donde se asentaban los grupos humanos o tribus los obligaron a utilizar elementos alternativos de construcción. Un ejemplo destacable son los sumerios, pueblo que se estableció en la baja Mesopotamia desde el siglo V a.C, quienes fueron los primeros en introducir grandes innovaciones en la tecnología de la construcción, utilizando en sus edificaciones unidades moldeadas a mano. Alrededor del tercer milenio a.C. este sistema constructivo evolucionó cuando se comenzó a emplear moldes de madera de formas prismáticas para vaciar la arcilla mezclada con agua; el producto desmoldado luego era secado al sol. La escasa suntuosidad que poseía el material elaborado de esta manera obligaba a revestir los muros con ladrillos cocidos en hornos, los denominados ladrillos cerámicos, que se unían con aglomerantes, como el alquitrán o betún, los cuales todavía son abundantes en la región donde estos pueblos se establecieron. Este tipo de mampostería se hizo fundamental en las grandes construcciones de los primeros Zigurats o templos dedicados sus dioses. En la actualidad se pueden apreciar los restos de algunas de estas construcciones entre las que destacan el Zigurat de la milenaria ciudad de Ur; el Zigurat que está entre los restos de la ciudad de Dur-Karigalzu cerca de la actual ciudad de Bagdad. Esta última construcción era confundida por los antiguos viajeros con la torre de Babel, legendaria edificación descrita en el libro de Génesis del Antiguo Testamento (ver fig. 1.1). Los Zigurats no eran las únicas estructuras construidas con mampostería, también se utilizaba este material en los palacios y las murallas que eran, igualmente, elementos distintivos de las culturas mesopotámicas (Oppenheim, 2003).

El desarrollo del pensamiento matemático permitió identificar las formas geométricas y gracias a la flexibilidad que permite la mampostería en la construcción, se erigieron edificaciones de arquitectura compleja, surgiendo nuevos elementos estructurales como los arcos y las bóvedas que son las principales aportaciones de la arquitectura mesopotámica.

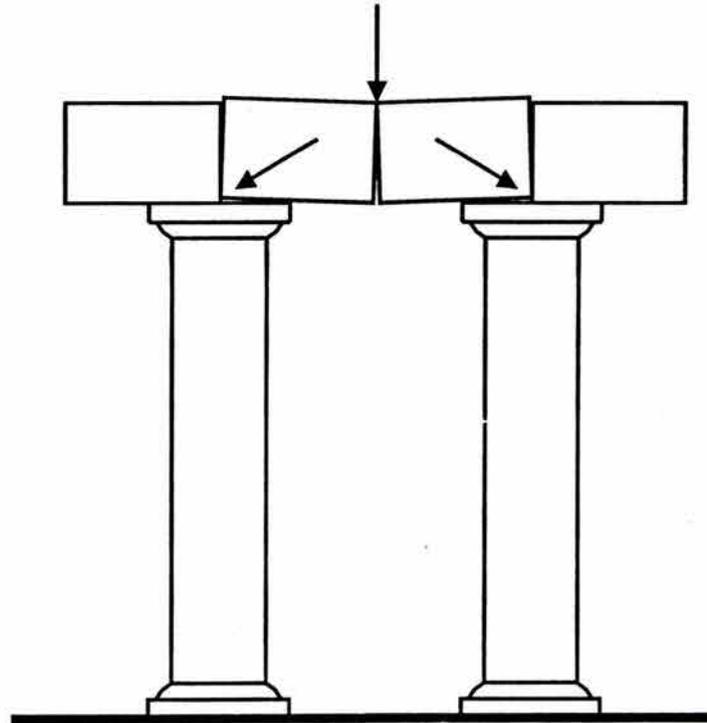


**Figura 1.1** Representación de la famosa torre de Babel de Abel Grimmer (1570-1619)

Por supuesto existían diferencias en el tipo de mampostería que se utilizaba y dependían principalmente de la disponibilidad del material y la arquitectura representativa de las distintas culturas que existían en la antigüedad. Por ejemplo, a diferencia de las sociedades mesopotámicas, los egipcios utilizaron las rocas que traían de las montañas que existen a lo largo del río Nilo. Las construcciones egipcias se caracterizaban por el empleo de estas piedras en grandes sillares perfectamente aparejados para definir sistemas dintelados, o de cubierta plana, con columnas altas y robustas, cuyos capiteles estaban inspirados en motivos vegetales. Esta organización arquitectónica, tomando como elemento básico la columna, es una de las aportaciones esenciales del arte constructivo egipcio, el cual estaba fundado en la belleza y en la razón matemática de las proporciones cuyo concepto fundamental era la monumental grandiosidad que tenía como finalidad trascender las dimensiones humanas (Hornung, 2001).

Los griegos comenzaron a construir en el siglo VII a. C. con roca labrada inspirándose en las piezas monumentales de Egipto y Mesopotamia; por ello la arquitectura griega, al igual que la egipcia, se caracterizó también por ser dintelada de estilo arquitrabado (ver fig. 1.2) Este estilo arquitectónico se utilizó principalmente en los templos y palacios. Los materiales de construcción que empleaban eran básicamente piedra caliza, el mármol y la

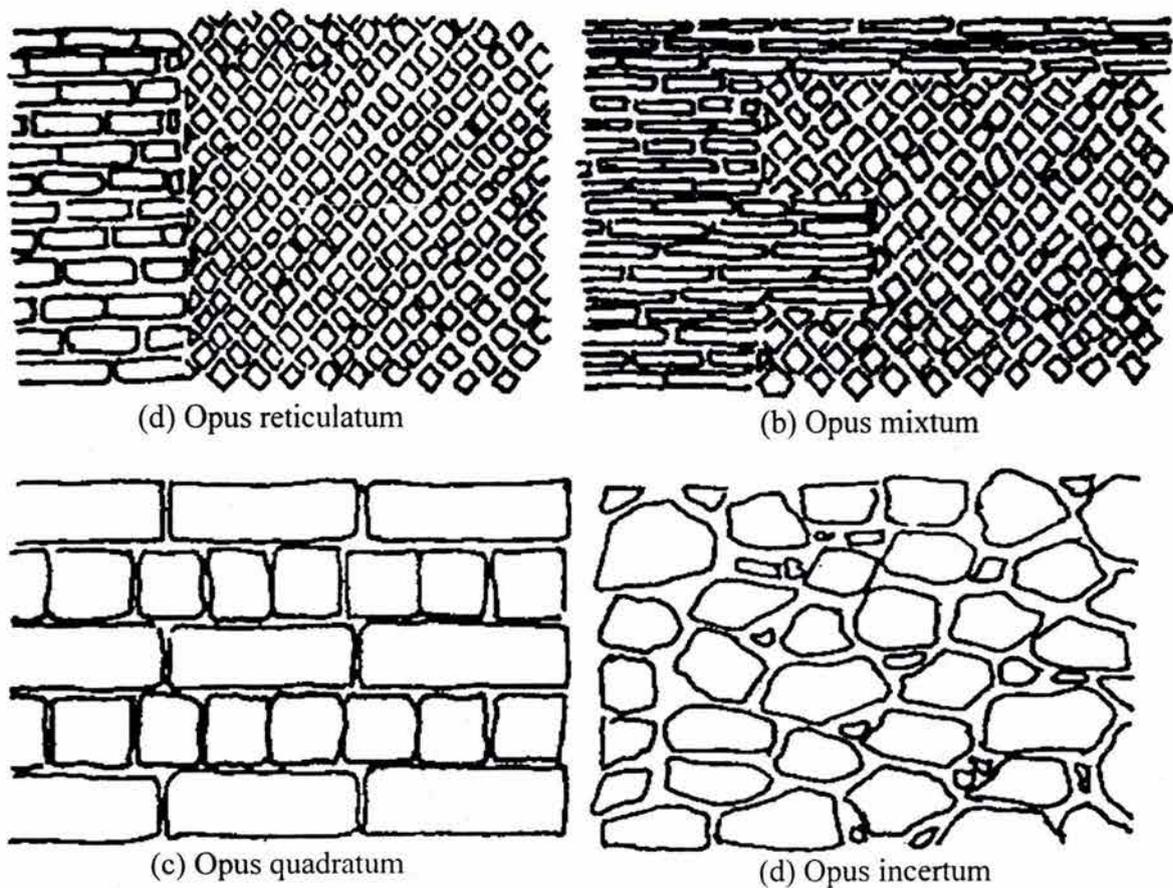
caliza revestida con mármol. La elevación de la arquitectura de los templos (los soportes y cubiertas), se construía siguiendo los denominados órdenes; es decir, una determinada combinación de los elementos que sustentan o de los que son sustentados. Estos órdenes de proporciones entre la altura y la sección eran tres: dórico, jónico, y corintio, clásicos en la arquitectura griega (Amouretti y Ruzé, 1987).



**Figura 1.2** Dintel de roca de poca longitud o arquitrabe con grietas en la zona de tensión; el comportamiento de este tipo de estructura es similar a un arco triarticulado (Gordon, 1978).

La cultura romana también tuvo aportes importantes a la tecnología de las construcciones de mampostería. La política de expansión que aplicaba el imperio romano a lugares donde no se conocía la vida urbana, obligó a la creación de ciudades de nueva planta, lo que potenció el desarrollo de una teoría y una práctica urbanística bastante compleja. Las necesidades de comunicación, de abastecimiento y de dotación de infraestructuras fortalecieron la ingeniería, lo que condujo al uso de materiales no empleados hasta entonces (conglomerados de argamasa y piedra). En cada una de sus edificaciones, donde utilizaron elementos pétreos y materiales cementantes, se puede observar el espíritu práctico de este

pueblo que, sin perder la originalidad artística, impone la combinación del arquitrabado griego con arcos y bóvedas, inherentes del arte arquitectónico romano (Cowan, 1977). Los romanos también desarrollaron diferentes sistemas de construcción de muros (ver fig. 1.3) los cuales eran económicos y fáciles de levantar. Estos sistemas de muros son presentados en el tratado didáctico de Vitrubius (Rowland y Howe, 1999), famoso arquitecto e ingeniero romano (s I d.C.), donde se describen los materiales empleados, así como el proceso constructivo de éstos tipos de muros para uniformizar los modelos arquitectónicos de la época.



**Figura 1.3** Tipos de muros romanos.

### 1.1.2 Construcciones de mampostería en América precolombina

Al igual que en Asia, Europa y partes del continente africano, también los pueblos que se asentaron en el norte, centro y sur del continente americano construyeron grandes ciudades

---

---

con mampostería de piedra y adobe<sup>1</sup> contribuyendo con nuevos estilos arquitectónicos que destacan en sus templos y tumbas. Una muestra de esta última apreciación la ofrecen los vestigios arqueológicos de los mayas. Los mayas alcanzaron un grado de desarrollo en sus construcciones de mampostería de piedra pocas veces igualado por otra civilización americana. La arquitectura de las ciudades ubicadas en la región Puuc, es de una variedad extraordinaria. Ciudades como Palenque, Tikal, Copán, Quiriguá, Yaxilán, Uxmal y Chichén Itzá se enriquecieron con espléndidos monumentos: templos escalonados, juegos de pelota, palacios, patios con columnas, torres, acueductos, puentes, arcos de triunfo, etc. Las estelas conmemorativas talladas en piedra, las cuales estaban decoradas con bellísimos relieves, adornaron sus plazas y templos. Pero la gran contribución de la arquitectura maya fue la falsa bóveda con la cual cubrieron espacios alargados y estrechos (Trejo, 2000).

Otra civilización que se desarrolló al sur del continente americano fue la inca. Esta cultura, la cual poseía una política expansionista de intervención militar rápida y poderosa en la región, se formó a partir de otras culturas prehispánicas más antiguas que se asentaron en el Perú (Cabello, 1999).

Antes de ejecutar cualquier construcción, los incas hacían bocetos, planos, modelos y maquetas utilizando sistemas de medidas basados principalmente en la antropometría<sup>2</sup>. Una demostración de este tipo de planeación de sus edificaciones es la gran cantidad de maquetas encontradas en casi todos los museos arqueológicos del Perú.

Las grandes construcciones incaicas estaban hechas de material lítico de proporciones colosales talladas con una excelente técnica de manera que las piedras se podían empatar precisamente manteniéndose saludables. La realidad sugiere que los quechuas pudieron usar modelos naturales o maquetas hechos con materiales ligeros y quizás la arcilla. Se suponía que esos modelos eran reproducidos exactamente; indudablemente, el uso de este método ayudó a hacer más fáciles los enormes trabajos.

---

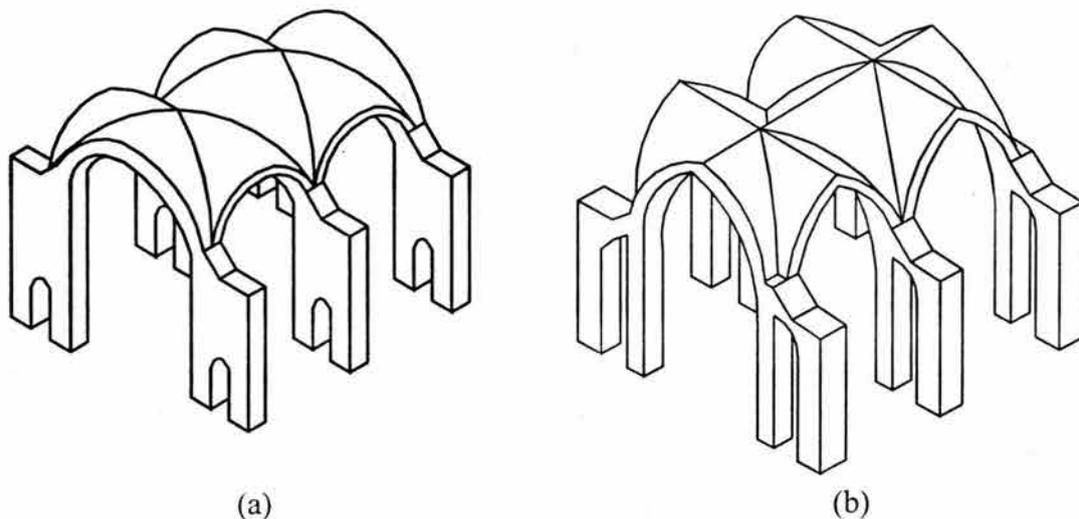
<sup>1</sup> Bloques de arcilla secados al sol que eran unidos con la mezcla de tierra y paja con agua.

<sup>2</sup> Medidas con relación al cuerpo humano: brazos, codos, pies, pasos, palmos, etc.

Otro de los materiales usados en las paredes incas de las construcciones comunes es el adobe (ladrillo de barro). Muchos edificios, e incluso las ciudades enteras en el Tawantinsuyo, eran hechos con este material; éste es el caso de Pachacamaq que aún está de pie al sur de Lima. Para hacer adobes preferentemente se escogía tierra de buena calidad, generalmente arcillosa, que era mezclada con el ichu<sup>3</sup> y en ciertos casos con lana de alpaca. Todos estos materiales estaban mezclados con agua y puestos en moldes rectangulares para ser secados al sol (Mingarro y López de Ascona, 1982). Cabe señalar que la forma clásica de la arquitectura inca es de tipo trapezoidal que ofrece estabilidad y sensación de equilibrio. Es innegable que la estabilidad fue investigada buscando la manera de cómo hacer los edificios eternos e indestructibles a cualquier catástrofe natural; sólo hombres parcialmente deslumbrados por ideologías fanáticas pudieron dañarlos o destruirlos.

### 1.1.3 Edificaciones de la edad media

La cristianización de Europa, posterior al imperio romano, implicó nuevos tipos de templos que pudieran albergar grandes concentraciones de fieles en espacios cubiertos que no estuvieran perturbados por elementos de soporte, como ocurría en los templos egipcios y griegos. A comienzos del siglo XII el lenguaje arquitectónico románico se sustituyó por el gótico (ver fig. 1.4).



**Figura 1.4** Ejemplos de Arquitectura (a) románica y (b) gótica.

---

<sup>3</sup> Planta que crece en la sierra del Perú.

---

Aunque el cambio respondía a la reforma en el seno de la iglesia cristiana, caracterizada por el racionalismo de los teólogos tomistas<sup>4</sup>, también coincide con una serie de avances tecnológicos en las edificaciones de fábrica (Heyman, 1999). Por ejemplo, el proceso de construcción de una bóveda hecha de mampostería requería, en primer lugar, la colocación de una estructura de madera, a la cual se le denomina cimbra, que sostenía el conjunto hasta el cierre de la curva; todos los elementos estaban ligados al secarse el mortero de las juntas. La cimbra de las bóvedas de arista convencionales tenía que ser de una sola pieza para cada crujía y, por tanto, se requería de un andamiaje muy complicado que la hiciese descansar sobre el suelo. Alrededor del año 1100 los constructores de la catedral de Durham, al norte de Inglaterra, y puede que simultáneamente los de San Ambrosio en Milán, inventaron un nuevo método. En primer lugar se construían los arcos perpiaños<sup>5</sup> y los dos arcos cruzados, llamados nervios, sobre el cuadrado de la crujía de una bóveda de arista utilizando una cimbra ligera que se puede sujetar a los cuatro pilares de la base; después se completaba el resto de la bóveda con un material de relleno conocido con el nombre de plementería<sup>6</sup>, que se puede apoyar sobre cuatro cimbras ligeras e independientes. El resultado es un nuevo tipo de bóveda, llamada de crucería o de elementos (ver fig. 1.5), que aporta una serie de ventajas evidentes: el conjunto de la bóveda pesa muchos menos, puesto que los plementos<sup>7</sup> no ejercen casi ninguna función estructural y por tanto pueden ser mucho más ligeros, mientras que las auténticas líneas de tensión se reforzaban con los nervios cruceros. Todos estos factores permitieron elevar la altura de las naves y ensanchar sus luces estructurales (Adam, 1990).

Otras novedades que ya presentaban algunos edificios góticos son los arcos y bóvedas ojivales. La principal ventaja es de tipo compositivo. Las bóvedas de diferentes curvaturas pueden cubrir crujías rectangulares e incluso trapezoidales, de modo que las divisiones de la nave central pueden corresponderse con las de las naves laterales, y las bóvedas pueden

---

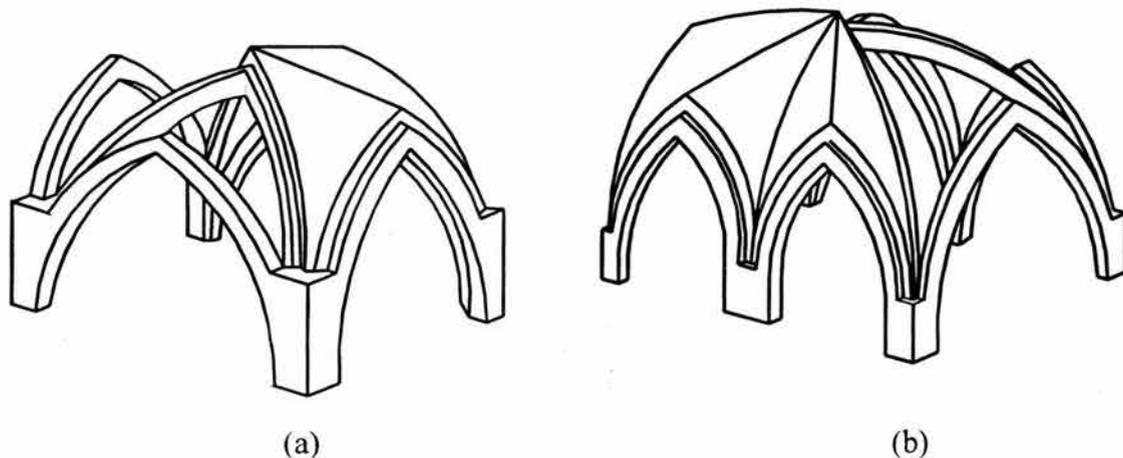
<sup>4</sup> Pensadores religiosos seguidores de las doctrinas de Santo Tomás de Aquino.

<sup>5</sup> Piedra que dispuesta a tizón atraviesa un muro o pared.

<sup>6</sup> Conjunto de plementos que forman una bóveda de crucería.

<sup>7</sup> Paños de mampostería o sillarejos, aparejados por hiladas, que cierran los compartimientos de las bóvedas de crucería, cargando sobre los arcos de osatura (nervios). Para los plementos se elegía, en general, la piedra más ligera posible.

seguir utilizándose en el deambulatorio y en el ábside<sup>8</sup> sin ninguna interrupción. Además, las naves con claristorio<sup>9</sup>, el cual es un anillo con ventanas de claraboya, pueden elevarse hasta la altura máxima de las bóvedas. Posteriormente estas claraboyas se convirtieron en grandes ventanales llamados vidrieras que eran estructuradas mediante tracerías<sup>10</sup> y compuestas por piezas de vidrio coloreado. El espacio de la iglesia adquiere así una nueva luminosidad, que se ha convertido en una de las características intrínsecas de la arquitectura gótica.



**Figura 1.5** Bóvedas góticas: (a) bóveda de crucería simple y (b) de crucería sexpartita.

Los maestros constructores con todos estos avances tecnológicos pudieron erigir estructuras más esbeltas, más altas y más ligeras. Pero esta nueva concepción arquitectónica condujo a problemas tales como el contener los empujes transversales que ejercen las bóvedas que no pueden soportar pilares excesivamente altos. La solución inmediata a este problema fue utilizar el sistema de arbotante<sup>11</sup> y estribo<sup>12</sup>, equivalente a los antiguos contrafuertes adosados al muro, los cuales tendrían que haber alcanzado proporciones gigantescas para aguantar las cargas laterales. El arbotante es un segmento de arco que transmite en diagonal, lejos del pilar de apoyo, las tensiones que ejerce la bóveda, mientras que el

<sup>8</sup> Se llama así a toda cabecera, parte principal de la iglesia donde se encuentra el altar, de una iglesia.

<sup>9</sup> Es un barbarismo de la palabra inglesa *claristory* y se refiere al último piso de las naves góticas ocupado por ventanales. En francés se le denomina *clair étage*.

<sup>10</sup> Decoración arquitectónica formada por combinaciones de figuras geométricas de madera o piedra para rellenar los huecos. Si la tracería es calada se llama crestería.

<sup>11</sup> Arco por tranquil o rampante que transmite en estado pasivo el empuje de una bóveda a un estribo exterior o a un machón.

<sup>12</sup> La fábrica machón que contrarresta el empuje de una bóveda o arco.

---

---

estribo es un pilar sólido que actúa como un contrafuerte aislado, recibiendo el empuje del arbotante y descargándolo definitivamente en el suelo. Todas estas nuevas ideas de distribución de elementos estructurales permitieron explotar las propiedades mecánicas de la mampostería de piedra conocidas en ese tiempo (Heyman, 1999).

La edad media fue un periodo histórico para la arquitectura de las estructuras de mampostería y coincide con un espectacular auge de la población urbana a causa del desarrollo tecnológico y de la concentración de poder en torno a la nobleza y a la realeza, así como por la aparición de nuevas clases sociales agrupadas en torno a los gremios de artesanos y de una incipiente burguesía de nuevos oficios como banqueros y comerciantes. En numerosas regiones florecieron las construcciones hechas de ladrillos, como en Lombardía, en el norte de Alemania, Holanda, Dinamarca y España, donde numerosos alarifes<sup>13</sup> musulmanes permanecieron en el territorio reconquistado por los reinos cristianos, dando lugar a la que se conoce como arquitectura mudéjar. Estos constructores transmitieron a la arquitectura cristiana toda la sabiduría árabe en materia de construcción de ladrillo, con toda su variedad de arcos y los característicos aparejos empleados para componer muros ornamentales (Cowan, 1977).

#### **1.1.4 Periodo renacentista de las edificaciones de mampostería**

La arquitectura de los siglos XV y XVI es quizás la que reciba de una manera más adecuada el calificativo de renacentista. En la arquitectura renacentista se crearon nuevas tipologías para servir a las nuevas funciones, pero volviendo los ojos hacia el pasado. La arquitectura se impregnó del ideal humanista, pero el estudio de lo antiguo no supuso una mimesis. Los órdenes, los arcos, las bóvedas, las columnas o las pilastras se refieren al mundo romano y no configuran propiamente el lenguaje arquitectónico de esta época. Éste es el fruto de las exigencias de las nuevas funciones, de una nueva manera de componer las unidades arquitectónicas, de crear tipologías y también, como es lógico, de una nueva forma de establecer relaciones armónicas entre los elementos constructivos, de concebir el espacio y de crear un nuevo concepto de belleza, el de la belleza unitaria de expresión

---

<sup>13</sup> Perito en algún aspecto de la construcción o arquitecto.

monumental motivada por los poderes sociales emergentes. Los concejos municipales, la iglesia católica, los príncipes y los burgueses convierten las ciudades en instrumento y manifestación de su poder y es entonces cuando se remodelan las casas consistoriales, cuando se concluyen las catedrales, cuando se amplían las viejas iglesias y conventos, cuando los patricios levantan sus palacios, cuando la ciudad toma conciencia de los problemas sanitarios y surgen los grandes hospitales. En la edad media, específicamente en la arquitectura gótica, la belleza unitaria apenas era considerada; las relaciones aritméticas simples se aplicaban a cada elemento arquitectónico y éstos no exigían su presencia en el conjunto de la construcción; en el Renacimiento el módulo, concepto extraído del mundo clásico, afecta tanto al radio de un arco como a las proporciones generales de un edificio. El edificio se entiende como un todo orgánico cuya belleza, basada en la proporción, es absoluta porque se destruye si algo de ese todo varía.

Así, las nuevas expresiones humanísticas influyeron en la arquitectura renacentista, pasando éstas a un primer plano. Esto trajo como consecuencia que la mampostería, como material de construcción, sufra un rezago después del periodo romano cuando se dejó de fabricar ladrillos y de utilizar la tecnología de los morteros de cemento y de concreto empleada por los romanos.

### **1.1.5 La revolución industrial y estructuras contemporáneas**

A partir de la segunda mitad del siglo XVIII la revolución industrial fomentó el rápido crecimiento urbano con características desconocidas hasta ese momento, lo que acrecentó la necesidad de superar los límites de los antiguos núcleos urbanísticos construyendo vías de comunicación efectivas para resolver el problema de enfrentamiento entre la habitabilidad y progreso económico. La estructura política de aquel tiempo mantiene y aumenta el uso los edificios representativos de arquitecturas góticas y barrocas. Socialmente la ciudad europea decimonónica comienza a reflejar una estructura jerarquizada de barrios. Es así que se extendió el uso de la mampostería a base de ladrillos de arcilla.

La revolución industrial, a fines del siglo XIX, generó una pugna entre los métodos de

---

construcción artesanales y los industriales. Ésta fue una época en que imperaron los academicismos, con los estilos neoclasicismo, neogótico o historicismo<sup>14</sup>, donde nació una perfecta mezcla entre arte y técnica impulsada a través de dos ideólogos mundiales: Viollet-le-Duc, con el racionalismo estructural y John Ruskin con su ética medievalista (Pevsner, 1972).

Estas nuevas ideas tuvieron una profunda relación con la nostalgia lo que fomentó el mantenimiento y restauración de monumentos históricos. Por esta razón, los gobiernos europeos de los últimos dos siglos tuvieron un rol importante en la protección del culto al pasado, llevando a cabo diversas acciones de recuperación y conservación de la arquitectura de siglos anteriores.

En aquellos momentos, muchos arquitectos emprendieron tareas de restauración en Italia, donde las ruinas eran clásicas y neoclásicas; pero la arquitectura histórica francesa, predominantemente gótica, les resultaba un problema abstruso. Como consecuencia de su ignorancia, las intervenciones de restauración solían terminar en aparatosos colapsos. A mediados del siglo XIX, y particularmente en Francia, la *teoría de la restauración* tuvo su acta oficial de nacimiento gracias al trabajo del arquitecto Eugène-Emmanuel Viollet-le-Duc.

Aunque muchos de los trabajos de restauración de Viollet-le-Duc se llevaron a cabo en famosas edificaciones (ver fig. 1.6), su fama como restaurador lo evidencia en sus dos obras clásicas de arquitectura: *Dictionnaire raisonné de l'architecture française du XI au XVe siècle*<sup>15</sup>, escrita entre los años 1854 y 1868, y *Dictionnaire raisonné du mobilier français de l'époque Carolingienne à la Renaissance*<sup>16</sup> cuyo texto fue elaborado entre los años 1858 y 1870. En estas obras él reaviva el interés de estudiar rigurosamente la arquitectura gótica con el fin de presentar principios teóricos para la arquitectura del siglo XIX. También empleó materiales contemporáneos, como el hierro, en las obras civiles que le tocó restaurar. En todo su trabajo se refleja la idea de definir la arquitectura como una

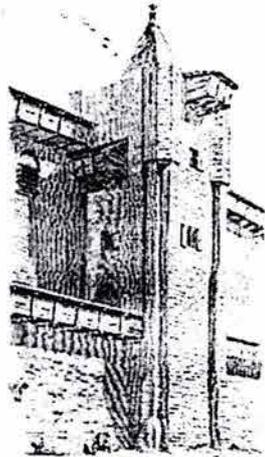
---

<sup>14</sup> Sinónimo de neomedieval donde el estilo gótico es un prototipo.

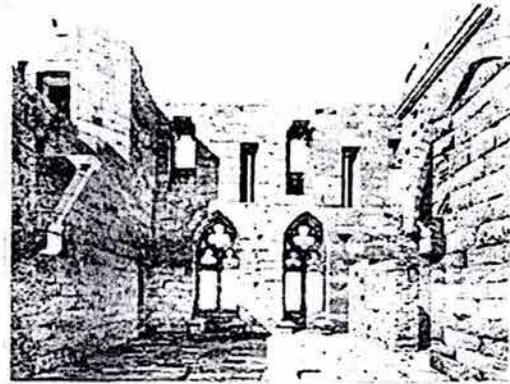
<sup>15</sup> Diccionario de la arquitectura francesa desde siglo XI al siglo XV

<sup>16</sup> Diccionario de mobiliario francés desde la época Carolingia a la renacentista

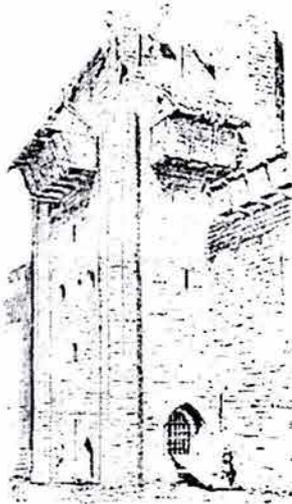
respuesta a los problemas establecidos por las necesidades funcionales. Las conclusiones de Viollet-le-Duc esclarecieron la importancia de utilizar la mampostería de piedra en estructuras góticas, pues las formas de los elementos estructurales de estas edificaciones son las más idóneas para aprovechar las propiedades mecánicas de este material.



(a) Reconstrucción de la torre de San Martín



(b) Puerta de Narbonnais.



(c) Reconstrucción de la defensa de la torre de San Nazario



(d) Perspectiva de las hiladas de fábrica en el arranque de una bóveda gótica.

**Figura 1.6** Trabajos de reconstrucción de Eugène Viollet-le-Duc(1814-1879)

El siglo XIX no sólo representó una nueva época para la ingeniería, en donde se definieron los criterios estructurales de los edificios antiguos como los góticos; también, a finales de

---

este siglo, se construyeron edificios modernos de altura considerable empleando técnicas de análisis y criterios de diseño innovadores, este siglo fue testigo del triunfo de la estructuras de mampostería (Sinha, 2002). El edificio Monadnock de 16 pisos construido en Chicago (1889-1891) es un ejemplo de una estructura de mampostería concebida en aquella época con esta nueva ingeniería (Gallegos, 1989).

En los años 20 del siglo pasado, se comenzaron a diseñar los edificios de mampostería con regulaciones racionales introduciendo técnicas de análisis para predecir cargas de colapso en los miembros estructurales, y en los años 50 se inició el empleo factores de seguridad propios de los métodos que toman en cuenta la resistencia del material cuando se utilizan modelos de edificaciones con cargas de servicio (Drysdale *et al.*, 1994).

Actualmente la mampostería cumple un rol importante en la satisfacción de la necesidad de vivienda a nivel mundial. El empleo racional de normas y regulaciones de diseño se ha convertido en un paradigma de la necesidad de ofrecer construcciones seguras sin perder la competitividad en cuanto al costo, comparado con edificaciones erigidas con materiales como el concreto armado o el acero; pero la comprensión del comportamiento de las propiedades mecánicas de la fábrica aún guarda ciertos rezagos. Las facilidades que ofrece del mundo moderno en cuanto a instrumentos de análisis, de diseño y de construcción, hace necesario aprovechar la oportunidad de explotar aún más las propiedades de este material; por ello es fundamental asistir al diseñador con herramientas de análisis confiables, que tomen en cuenta el comportamiento mecánico no-lineal de la mampostería.

## **1.2. Modelado numérico de las estructuras de mampostería**

Muchas de las estructuras antiguas que aún perduran fueron construidas con el hasta ahora conocido método de ensayo y error<sup>17</sup>. Las reglas y recetas de construcción así aprendidas por los maestros fueron pasadas de generación en generación, mejorándolas cada vez más sin recurrir a herramientas de cómputo, manuales y normas como las que hoy en día gozan los ingenieros estructuralistas. Pero, a pesar de este gran avance tecnológico en la ingeniería

---

<sup>17</sup> También conocido como *prueba de error*.

de estructuras, aún existe un claro prejuicio con respecto al comportamiento de la mampostería como material, cuyo comportamiento mecánico se le suele castigar definiéndolo como totalmente frágil a tensión. Actualmente, gracias a ensayos experimentales, se ha demostrado que tal fragilidad no existe y la realidad muestra que este prejuicio principalmente se debe a la falta de conocimiento y confianza en utilizar métodos avanzados de análisis no-lineal de estructuras. Es por ello que estos analistas limitan el comportamiento mecánico total de la mampostería a uno enteramente elástico con pérdida súbita de resistencia en vez de considerar que existe el ablandamiento del material, o degradación de las propiedades mecánicas. Este fenómeno es una característica importante en materiales como la mampostería y debe ser tomado en cuenta en la solución numérica de las estructuras con signos de deterioro establecido por el agrietamiento en el material.

En la actualidad existen muchas herramientas numéricas con las que se pueden modelar las estructuras de mampostería. Una de ellas, conocida y reconocida por muchos ingenieros, es el método de los elementos finitos; herramienta que ha extendido su uso de manera impresionante gracias a la tecnología de los computadores y es cada vez más accesible a los diseñadores de estructuras. Dentro de este tipo de tecnología, se ha ido incorporando nuevos procedimientos para la solución de sistemas de ecuaciones no-lineales, facilitando la tarea de los investigadores que deseen ampliar el intervalo de comportamiento del material más allá del elástico.

Dentro del marco del método de los elementos finitos se han establecido aproximaciones para representar la mecánica no-lineal del material, dependiendo del nivel de detalle que se requiere en el análisis. Entre ellos se menciona el micro-modelado, donde se discrimina el comportamiento de las unidades sólidas, el mortero de liga y la interfase entre estos materiales. Este tipo de modelado, al igual que simplificaciones de éste, sólo permite caracterizar el comportamiento de estructuras de mampostería de pequeña magnitud. Otra opción, muy atractiva desde el punto de vista ingenieril, es la macro-modelación, en la cual se permite una representación simplificada del comportamiento no-lineal de este material, llevando a que los modelos estructurales sean más manejables desde el punto de vista de cómputo y de procesamiento de resultados. Esta última opción de modelado presenta un

---

---

futuro promisorio, dentro de la tecnología asequible a los diseñadores actuales. Se debe resaltar que también es de amplia aplicación en estudios de estructuras complejas las cuales no han seguido regulaciones de diseño, como por ejemplo las estructuras históricas, y que al ser aplicada con conocimiento constituye una herramienta poderosa de análisis como parte del diseño del proceso de restauración de estas edificaciones.

### 1.3. Objetivos y meta del trabajo

La parte principal de esta tesis se desarrolló dentro de un ámbito estrictamente analítico-numérico, es decir, la modelación aproximada del comportamiento mecánico en el intervalo no-lineal de la mampostería. En este trabajo se ha empleado la teoría de la plasticidad para definir el comportamiento inelástico del material, producto del daño acumulado en éste y, en base a esta teoría, se propone una relación constitutiva para elementos estructurales de mampostería que pueden ser *modelados como planos*. Los análisis realizados en este trabajo se han hecho empleando cargas estáticas de corta duración que se aplican en incrementos de manera monótona.

En esta tesis se tratarán *in extenso* algunos temas relacionados al aspecto numérico de solución de sistemas no-lineales, los cuales son importantes cuando se reproduce la evolución del daño en el material. Así, para este trabajo se plantearon los siguientes objetivos:

- desarrollar un sistema de elementos finitos e implantar técnicas avanzadas para la solución de sistemas estructurales con modelos de comportamiento que simulen el comportamiento no-lineal de la mampostería;
- construir una relación constitutiva basada en la teoría de la plasticidad que capture el comportamiento no-lineal de la mampostería en dos direcciones ortogonales;
- verificar el modelo de plasticidad propuesto con modelos experimentales para establecer las condiciones apropiadas de uso de éste con los procedimientos de solución de sistemas no-lineales;
- demostrar la aplicabilidad del modelo de plasticidad propuesto en problemas de la

ingeniería práctica.

La meta de este trabajo es el desarrollo de una herramienta computacional bajo un sistema robusto para el análisis no-lineal de estructuras de mampostería que también puede ser aplicado a estructuras de concreto simple o reforzado.

El modelo de plasticidad que se propone en este trabajo representa un esfuerzo para capturar el comportamiento ortotrópico de este material. Por las características del modelo, también puede ser aplicado a estructuras de concreto, a problemas de la mecánica de rocas o en cualquier tipo de material donde se considere que el daño por agrietamiento es anisótropo.

A lo largo de este trabajo de investigación, se desarrolló un sistema de análisis usando el método de elementos finitos no-lineales idóneo para la investigación de nuevos modelos constitutivos en la mecánica numérica. Esto parecería un aporte importante dentro del área de la mecánica computacional.

El desarrollo de este trabajo se llevó a cabo en cinco capítulos. En el capítulo dos se explican los tipos de modelado que se pueden aplicar a las estructuras de mampostería y ofrece una breve descripción de las propiedades no-lineales de este material el cual exhibe el fenómeno de ablandamiento de sus propiedades mecánicas con la deformación. Además, se discute qué tipos de parámetros no-lineales son requeridos para el modelado del daño en la fábrica.

Ya que indefectiblemente es necesario presentar los métodos numéricos relacionados a la solución de modelos estructurales con no-linealidades físicas, en el capítulo tres se describen los principales procedimientos para resolver de sistemas ecuaciones no-lineales los cuales han sido implantados en el programa *NLFEM* desarrollado por el autor de esta tesis. Además, se hace un sucinto bosquejo del procedimiento de integración de las ecuaciones de flujo que gobiernan un modelo constitutivo obtenido a partir de la teoría de la plasticidad.

En el capítulo cuatro se desarrolla el modelo constitutivo planteado a partir de la teoría de la plasticidad. También se presentan en este capítulo algunos ejemplos de validación, con la finalidad de observar el desempeño del criterio de fluencia propuesto en problemas prácticos de análisis con este tipo de material.

En el capítulo cinco se aplica el modelo propuesto en este trabajo a algunos ejemplos de carácter ingenieril. El primer ejemplo es un arco de mampostería sometido a desplazamientos horizontales en sus apoyos. En el segundo problema, se estudia una estructura histórica comparando los resultados experimentales con los resultados obtenidos del análisis numérico. Finalmente, en el tercer y cuarto ejemplos se presentan las comparaciones de este modelo de comportamiento con otros modelos constitutivos. Los modelos de análisis son: un marco de concreto reforzado rellenos con muro de mampostería y un marco de concreto reforzado relleno con un muro de mampostería con una ventana.

Al final de este trabajo de tesis se presentan el sumario y las conclusiones que se obtienen de esta tesis.

# **CAPÍTULO 2**

## **Comportamiento mecánico de la mampostería**

En el análisis numérico es primordial reconocer la importancia de las características del material y su influencia en la respuesta estructural. Las características del material se definen con parámetros obtenidos en ensayos de laboratorio y la cantidad de éstos depende del tipo de modelado que se esté considerando. Por ejemplo, en micro-modelos, es necesario tener en cuenta datos para el mortero, la pieza sólida y la interfase entre la pieza y el aglomerante.

En este capítulo se tratarán algunos aspectos importantes de las propiedades de los materiales constituyentes de la mampostería y también las características mecánicas de ésta como material compuesto. Dado que esta tesis se enmarca dentro del análisis numérico, no se cree necesario ser exhaustivo en la descripción de las propiedades de la mampostería; sin embargo se hará mención de las características deseables de los materiales constituyentes en mampostería regular ordenada cíclicamente tomando como referencia a las Normas Técnicas Complementarias para el Diseño y Construcción de Estructuras de Mampostería del Distrito Federal (NTCM, 2004) y al Eurocode 6 (CEN, 1996) relativo a las construcciones con mampostería.

## 2.1. Modelado de la mampostería

La mampostería no es un material isotrópico, pues exhibe propiedades distintas según las direcciones que se esté considerando. Esta anisotropía se debe básicamente a que las juntas de mortero forman planos de debilidad por la baja resistencia a la tensión de éstas (Dhanasekar *et al.*, 1985). Para simular el comportamiento de la mampostería en el intervalo inelástico, es necesario distinguir el grado de precisión de los resultados que se desean y que el modelo numérico sea lo más aproximado a la concepción física del problema.

### 2.1.1. Aproximación al comportamiento mecánico con elementos finitos

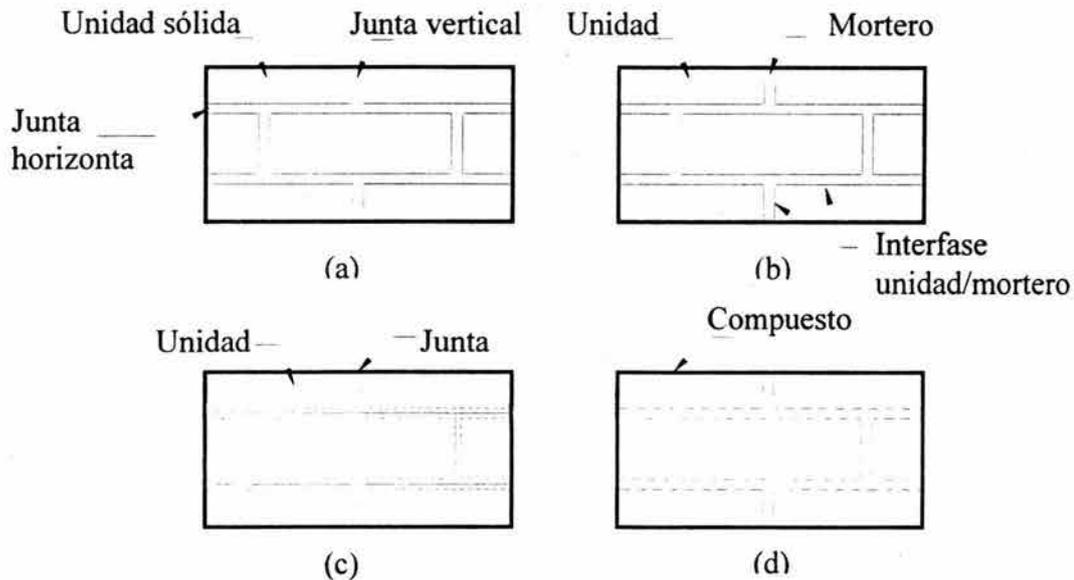
El método de los elementos finitos (MEF) es uno de los procedimientos de solución que ha logrado un lugar importante en la comunidad científica vinculada con la mecánica numérica. Este método ha acelerado su evolución gracias al avance de la tecnología de los computadores. Su estrecha relación con la ingeniería estructural, ha facilitado el estudio de muchos sistemas estructurales complejos y actualmente se emplea con éxito en la evaluación de edificaciones que presentan daño.

El modelado numérico del comportamiento no-lineal de las estructuras de mampostería con elementos finitos es un proceso complejo que debe ser realizado, dependiendo del grado de precisión y recursos duros del computador, contemplando las siguientes estrategias de análisis (Lourenço, 1996a):

- Micro-modelado; en el cual las unidades sólidas y las juntas se definen con elementos continuos, y en las fronteras entre el mortero y las unidades sólidas se utilizan modelos de elementos finitos de interfase, conocidos también como discontinuos;
- Micro-modelado simplificado; en este caso las unidades sólidas se especifican con modelos continuos mientras que las juntas y la frontera entre el mortero y las unidades sólidas se concentran en elementos de interfase;

- Macro modelos: donde las unidades sólidas, las juntas de mortero y las interfases entre éstas últimas y las unidades sólidas se distribuyen como un solo material con propiedades homogeneizadas.

La fig. 2.1 bosqueja la idea de estos tres métodos de modelado.



**Figura 2.1** Estrategias de modelado de estructuras de mampostería: (a) Muestra de mampostería; (b) Micro-modelado detallado; (c) Micro-modelado simplificado; (d) Macro-modelado (Lourenço, 1996a).

Para el modelado de las estructuras de mampostería, utilizando la primera aproximación, se emplean parámetros elásticos en los elementos sólidos y en las juntas, y alternativamente inelásticos; en las interfases se utilizan comúnmente elementos especiales con la finalidad de representar el deslizamiento y separación entre las superficies que delimitan el mortero y las piezas de ladrillo. Este tipo de modelado es muy costoso y es recomendable sólo en estudios detallados del comportamiento inelástico combinado de los materiales constituyentes de la mampostería. Este costo está directamente relacionado a la administración eficientemente de la gran cantidad de información que se genera durante el proceso de análisis, que demanda una excelente sincronización entre la memoria física y las unidades de almacenamiento.

---

La segunda aproximación representa una alternativa menos costosa que la descrita en el párrafo anterior. La idea es simplificar el modelo numérico concentrando el comportamiento de la junta con mortero y el de los planos de contacto de ésta con las piezas sólidas en un solo elemento de interfase. En este caso los elementos sólidos se expanden procurando no alterar la geometría del modelo numérico. Esta simplificación trae consigo algunos efectos de pérdida de precisión que se deben principalmente al hecho de anular el efecto de Poisson en el mortero que rellena las juntas de la mampostería.

Por último, el empleo de los macro-modelos simplifica el comportamiento de cada elemento constituyente al homogenizar las propiedades mecánicas como si se tratase de un solo material. Esta propuesta tiene un sentido más práctico para los ingenieros; además, tiene la ventaja de utilizar menos recursos que los dos tipos de modelados anteriores desde el punto de vista de cómputo.

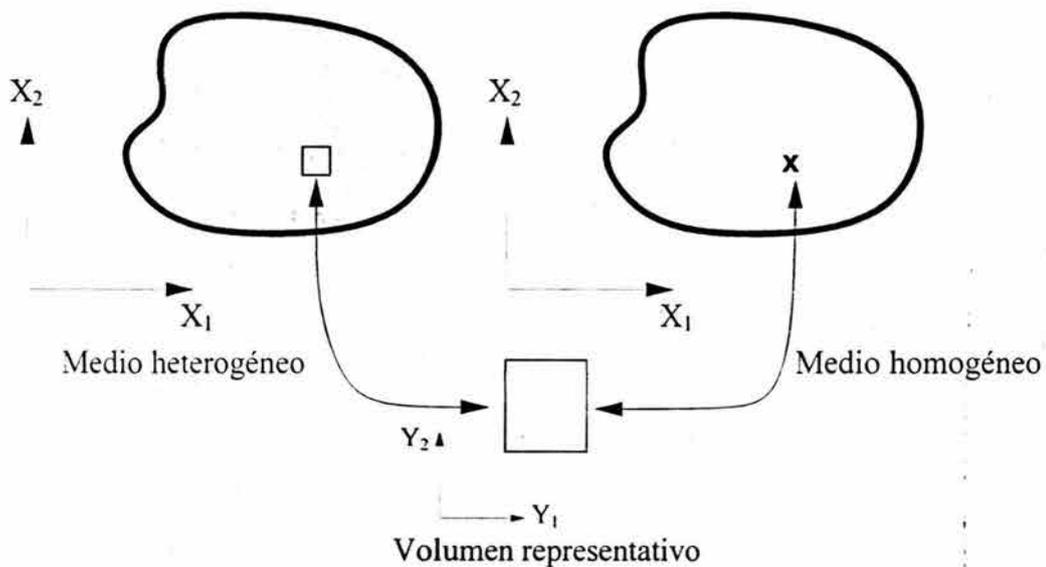
### **2.1.2. Técnicas de homogenización aplicadas a la mampostería**

Como se discutió anteriormente, el modelado detallado, o micro-modelado, de elementos estructurales hechos de mampostería, discrimina cada fase del material. Esta prolijidad en la modelación conduce a una cantidad considerable de información en los modelos numéricos, inclusive en aquellos cuyas geometrías sean relativamente sencillas y, por ende, también se incrementa inevitablemente el esfuerzo de cómputo, especialmente si el análisis es no-lineal. Para sobrellevar esta dificultad computacional, algunos investigadores han propuesto diversas simplificaciones para aproximar el comportamiento anisótropo del material a uno con relaciones constitutivas equivalentes; es decir, homogeneizando las propiedades mecánicas de cada fase del material que compone la mampostería.

La teoría de homogeneización proporciona las hipótesis para definir los procedimientos que permiten sustituir un material fuertemente heterogéneo por un material homogéneo el cual se desea equivalente al precedente dentro del dominio usual de cargas en el continuo (Zalamea *et al.*, 2002). Un material fuertemente heterogéneo contiene, en una muestra de tamaño manipulable, un número considerable de heterogeneidades (granos de tamaños

diferentes, cristales, fibras agujeros grietas, etc.) embebidos dentro de una matriz de propiedades diferentes.

Los medios heterogéneos pueden ser estudiados desde dos puntos de vista. El primer punto de vista, denominado global, considera que las heterogeneidades se pueden despreciar cuando éstas son pequeñas en el medio material; esto define al compuesto como homogéneo y utiliza las mismas propiedades mecánicas referidas a los ejes materiales  $X_i$ , como se aprecia en la fig. 2.2. El segundo punto de vista, denominado local o microscópico, toma en cuenta una porción representativa del medio heterogéneo, que se representa con la escala local  $Y_i$  (ver fig. 2.2), y analiza la estructura interna del compuesto formado por las distintas fases de éste (Sánchez-Palencia, 1987; Zalamea *et al.*, 2002).



**Figura 2.2** Teoría de homogeneización, utilización de dos escalas (Zalamea *et al.*, 2002).

En los últimos años las técnicas de homogeneización han logrado un lugar importante en la comunidad de investigadores de la ingeniería estructural quienes han aplicado rigurosamente las teorías matemáticas de homogeneización en materiales heterogéneos (Anthoine, 1995, 1997); pero, la extensión al comportamiento inelástico del material todavía mantienen serios problemas conceptuales difíciles de resolver (Pietruszczak y Ushaksaraei, 2003). No obstante, existen propuestas interesantes que se desarrollan dentro del contexto del análisis no-lineal utilizando la teoría de homogeneización con el método de

los elementos finitos. Se mencionan los de Lourenço(1996a) y Zalamea *et al.* (2002) quienes realizan experimentos numéricos en muros de mampostería no confinada. También Luciano y Sacco (1997) han utilizado modelos homogeneizados para la evaluación de estructuras históricas implantando un modelo de daño en la formulación de elementos finitos.

### **2.1.3 Modelado de sistemas discontinuos-método de los elementos distintos**

La formulación y desarrollo del método de los elementos distintos han progresado dentro de un periodo de 25 años desde que fue presentado por primera vez por Cundall (1971). En este método los modelos numéricos deben representar el comportamiento de las discontinuidades identificando las zonas de contacto entre los distintos bloques de material sólido, el cual puede ser rígido o deformable. La simulación del comportamiento de los sistemas discontinuos, utilizando modelos numéricos bi- y tri-dimensionales, se basa en la aplicación de relaciones entre las fuerzas y desplazamientos entre las superficies de contacto y la aplicación de la segunda ley de Newton en los bloques sólidos.

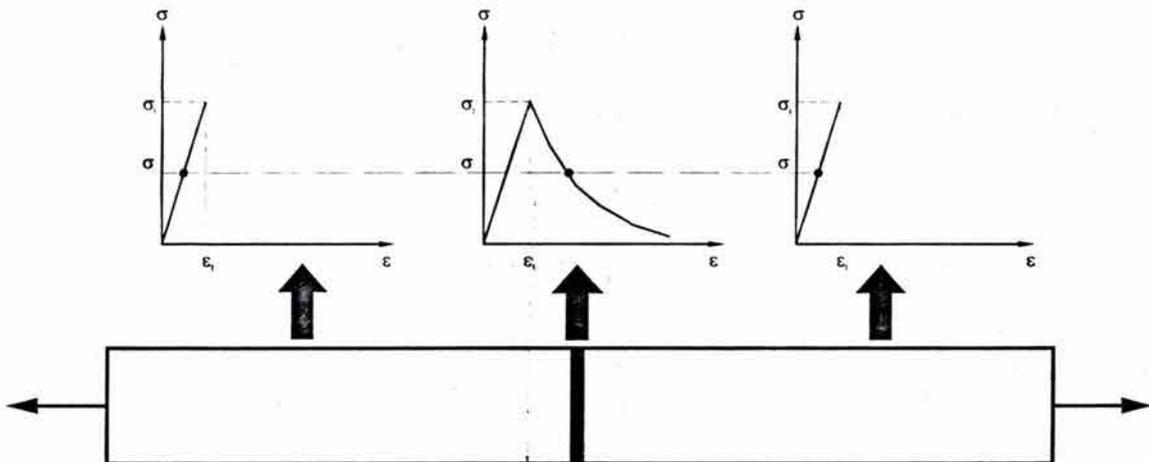
Desde el inicio de su formulación, el método de los elementos distintos fue utilizado para analizar macizos rocosos fracturados y, posteriormente, se ha extendido a: estudios de mecanismos granulares microscópicos (Cundall y Strack, 1983), desarrollo de grietas en medios rocosos (Plesha y Aifantis, 1983) y concreto reforzado (Lorig y Cundall, 1987). Con éste método también se han llevado a cabo estudios en edificios históricos de mampostería utilizando conjuntamente procedimientos de medición avanzados para la identificación de patologías en los elementos estructurales de mampostería (Acary *et al.*, 1999), en el estudio de la respuesta dinámica de estructuras monumentales sometidas a eventos sísmicos (Pegon y Pinto, 1996) y también en estructuras en arco (Bicanic *et al.*, 2002).

## **2.2. Ablandamiento en materiales cuasi-frágiles: mampostería**

El proceso de pérdida gradual de las propiedades mecánicas del material debido a la aparición de imperfecciones se le denomina ablandamiento (Bazant y Planas, 1998). Este

comportamiento es una característica notable en materiales cuasi-frágiles como la mampostería, concreto, cerámicas, rocas, etc, donde existen diversas fases de materiales, imperfecciones, vacíos y grietas. Por ejemplo, el mortero que une las piezas sólidas en la mampostería contiene micro-grietas debido a los vacíos que se incorporan durante el mezclado del cementante y arena con agua, incluyendo también el proceso de hidratación y la contracción por el fraguado. En el caso de las piezas de ladrillo, los defectos se producen también durante el proceso de mezclado, el moldeo de las unidades y su posterior secado en los hornos.

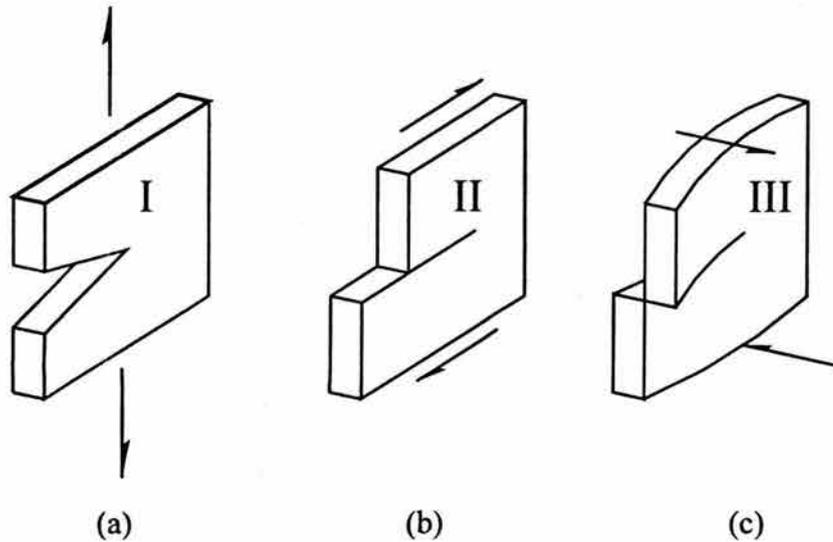
Este fenómeno se produce en un punto material cuando al ir incrementando las deformaciones, la resistencia del material comienza a decaer mientras que en la vecindad del punto se produce la descarga elástica (Planas y Bazant, 1998). Este proceso es compatible con el equilibrio en el continuo.



**Figura 2.3** Proceso de ablandamiento en una barra con una imperfección en el centro.

En la fig. 2.3 se presentan tres gráficas de esfuerzo deformación, dos elásticos que representan la descarga del material y uno inelástico que refleja la pérdida de rigidez en la zona oscura de la barra. Se aprecia que en el equilibrio los valores de deformaciones son distintos en cada zona. El área del diagrama de esfuerzo-deformación (diagrama central de la fig. 2.3) describe la cantidad de energía necesaria para que se desarrolle una grieta de área unitaria. Esta energía, denominada energía de fractura, se supone que es una propiedad del material. Este parámetro permite introducir el comportamiento de ablandamiento

relacionado a los modos de fractura (ver fig. 2.4) dentro de las relaciones constitutivas que modelan el daño en materiales cuasi-frágiles.



**Figura 2.4** Modos básicos de falla por agrietamiento: (a) apertura, (b) cortante en el plano y (c) cortante fuera del plano

En el caso de la mampostería, se presentan los dos primeros modos de falla. El primer modo se manifiesta en las juntas, el mortero comienza a deteriorarse debido a los esfuerzos de tensión en éste. El modo II se manifiesta cuando la interfase entre el mortero y la pieza sólida se desliza por efectos de esfuerzos cortantes. En macro modelos este modo de falla no se incluye, ya que se asume que este comportamiento ya está involucrado al homogeneizar las propiedades del material. Por ello, en este trabajo sólo se incluye el modo de falla I.

### 2.3. Propiedades de los elementos constituyentes

Cualesquiera que sean los modelos utilizados, micro- o macro-modelos, modelos homogeneizados, modelos discontinuos, etc, es necesario definir las propiedades del material que se esté considerando en la simulación numérica de la respuesta estructural.

Existen muchos factores que influyen en la respuesta mecánica de la mampostería. Entre los principales se pueden mencionar las propiedades mecánicas de las unidades sólidas y

las del mortero: también influyen las dimensiones y el arreglo de las unidades sólidas, el espesor de las juntas de mortero, la calidad de la mano de obra, etc. Estos factores en conjunto revelan el comportamiento inelástico del material. Para poder simular éste en un análisis no-lineal con elementos finitos es imprescindible establecer qué relación guardan las deformaciones con los esfuerzos. Actualmente se puede encontrar muchas relaciones constitutivas donde, en muchos casos, el número de parámetros aumenta al ser éstas más complejas. Así, el problema principal es obtener los parámetros del modelo constitutivo escogido que será implantado en un sistema de análisis numérico diseñado en contraposición a las reglas tradicionales de cálculo. Esto tiene la finalidad de simular aproximadamente el comportamiento de las estructuras de configuración compleja construidas con mampostería. Todavía persiste el problema de identificar los parámetros inherentes a los modelos numéricos y esto se debe, entre otras cosas, a la escasa comunicación que existe entre los investigadores que estudian este material, lo que ha llevado a no fijar estándares definitivos para ensayar elementos estructurales de mampostería. Por ejemplo, para fines de diseño, en muchos países es suficiente someter los especímenes de mampostería a ensayos de compresión y de tracción diagonal hasta alcanzar el máximo valor de la resistencia ante estas trayectorias de carga; en otros se reconoce la importancia de seguir obteniendo valores de la resistencia de este material, o de sus elementos constituyentes, cuando éste ha comenzado a ablandarse.

### **2.3.1. Unidades sólidas y mortero: propiedades mecánicas**

En las construcciones de mampostería se distinguen dos categorías: estructuras con mampostería reforzada y estructuras con mampostería sin refuerzo. Dentro de cada una de éstas también existen diferencias establecidas por las características de las unidades sólidas, el tipo de material que se utiliza como aglomerante y la disposición del refuerzo en los elementos estructurales. Por lo anterior es difícil pensar en una descripción completa del comportamiento mecánico de la mampostería. Así, en esta parte del capítulo se describen las características más generales que se presentan en los materiales constituyentes y también las propias de la mampostería como material compuesto.

---

---

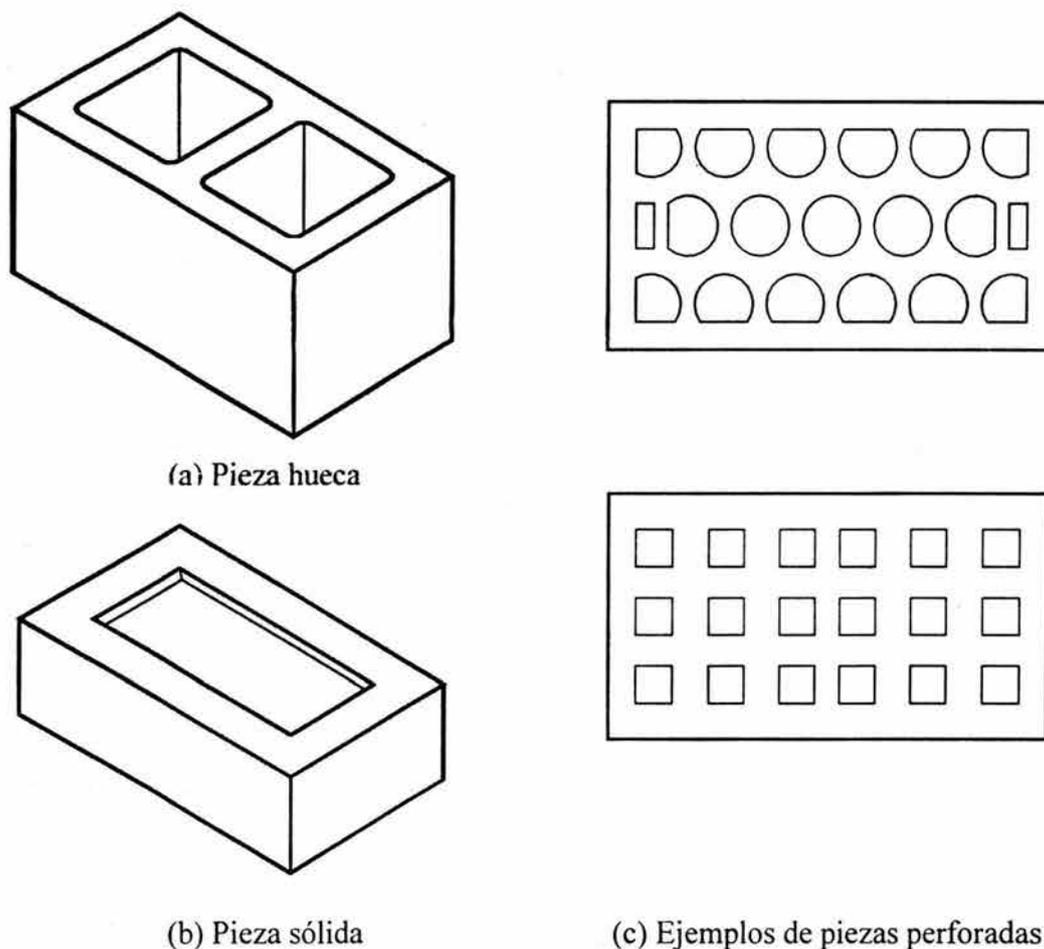
### 2.3.1.1. Unidades sólidas naturales

Por su origen, la mampostería puede ser de piedra natural o de unidades artificiales prismáticas. En México se discriminan los tipos de mampostería hechas de piedras naturales según el modo en que hayan sido labradas las unidades sólidas (NTCM-2004). Para la mampostería de primera se utilizan piezas labradas de tal manera que sean paralelepípedos regulares, con las caras externas aproximadamente rectangulares. En la mampostería de segunda las piedras están labradas de forma de paralelepípedos con dimensiones variables y, por último, la mampostería de tercera en donde se utilizan unidades sólidas completamente irregulares (Vasconcelos y Sánchez, 1999). Las piedras utilizadas generalmente son de propiedades heterogéneas. Lógicamente esta heterogeneidad depende de la orogénesis de los macizos rocosos de donde provienen. De preferencia las rocas ígneas y metamórficas se utilizan mucho en la construcción debido a que poseen mayor solidez.

### 2.3.1.2. Unidades sólidas artificiales

Las unidades de piedras artificiales, macizas o perforadas, generalmente son elaboradas de arcilla cocidas a altas temperaturas, o de concreto que fraguan en moldes. Estas unidades pueden ser macizas o no. Las unidades sólidas regularmente se adaptan a una terminología de acuerdo con las características de las piezas. Las piezas huecas y perforadas cuentan con una amplia variedad de dimensiones y, en el caso de estas últimas, los orificios son de formas geométricas regulares (ver fig. 2.5). El uso de las distintas clases de piezas depende de las consideraciones arquitectónicas, térmicas, acústicas o por las condiciones de carga a las que se someten las estructuras. A manera de ejemplo, en el capítulo cinco de las Normas Técnicas Complementarias para Diseño por Sismo para el Distrito Federal, México (NTCS, 2004) permite considerar que la contribución a la rigidez lateral de los muros de mampostería ligados a la estructura de un edificio, pero las piezas de estos muros deben ser macizas. En la actualidad, la industria del ladrillo ha mejorado la calidad de manufactura de las piezas de ladrillo con mejores maquinarias para la mezcla de los materiales, con hornos de altas temperaturas para la cocción uniforme y controlada de las piezas y máquinas que

perforan las unidades sólidas para producir piezas ligeras y resistentes. Debido a estos nuevos formatos de las unidades sólidas introducidos en el mercado es recomendable seguir criterios para establecer si la pieza es maciza o no con el fin de evitar la falla frágil del elemento<sup>1</sup>.



**Figura 2.5** Forma y terminología de algunas piezas de ladrillo

La resistencia a la compresión de la mampostería está ligada a la resistencia que tiene la pieza a esfuerzos de compresión y, al mismo tiempo, es un indicativo de la calidad de la fábrica. Sin embargo existen algunas observaciones con relación a la capacidad que tiene un espécimen según el tamaño y forma de éste y a las condiciones de frontera que someten al espécimen al momento de obtener de manera cuantitativa las resistencias (Bazant y

<sup>1</sup> Las NTCM(2004) del Distrito Federal considera la pieza perforada como maciza si el área neta es un 75% del área bruta de la sección transversal más desfavorable y las paredes exteriores no tiene espesores menores que 20 mm.

---

---

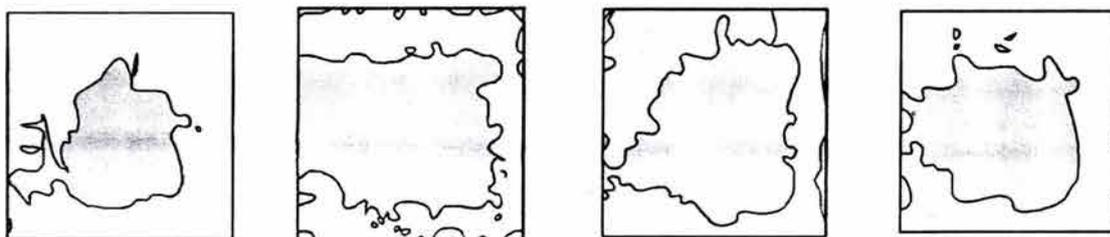
Planas, 1998). Aunque las pruebas estándares de compresión, donde se utilizan placas rígidas de acero, son relativamente sencillas de ejecutar, éstas conducen a resistencias de compresión artificiales debido a que no se considera el efecto de restricción en los extremos de los especímenes (Lourenço, 1996a). Cuando se utilizan unidades de tamaño distinto es necesario minimizar este efecto para obtener las resistencias de compresión de las piezas. Esto último se consigue al multiplicar la resistencia normalizada promedio de referencia obtenidos de especímenes con dimensiones estándares por factores de escala/forma que son relativos a las dimensiones reales de las unidades que se utilizarán en la construcción de los elementos de mampostería (Eurocode 6-CEN, 1996; Tomazevic, 1999). La disponibilidad de datos de ensayos de laboratorio y/o procedimientos de evaluación para obtener la energía de fractura en compresión es escasa y no se ha encontrado en las referencias relacionadas al tema.

La resistencia a tensión del ladrillo no ha sido una variable de mucho interés en los reglamentos y generalmente ésta se desprecia. En este caso las NTCM (2004) no presenta ningún criterio para obtener la resistencia a tensión de las unidades sólidas y tampoco se han encontrado recomendaciones para calcular los valores de energías de fractura a la tensión. Sin embargo, existe información relevante expuesta por Van Der Pluijm (1992), quien presenta valores de la energía de fractura de tensión en la dirección longitudinal de especímenes de arcilla cocida y unidades sílico-calcáreo que varían de 0.06-013 N-mm/mm<sup>2</sup>. Cabe señalar que el comportamiento bi-axial de las unidades sólidas no ha sido de mucho interés; por ello, la disponibilidad de datos de ensayos de laboratorio es prácticamente nula.

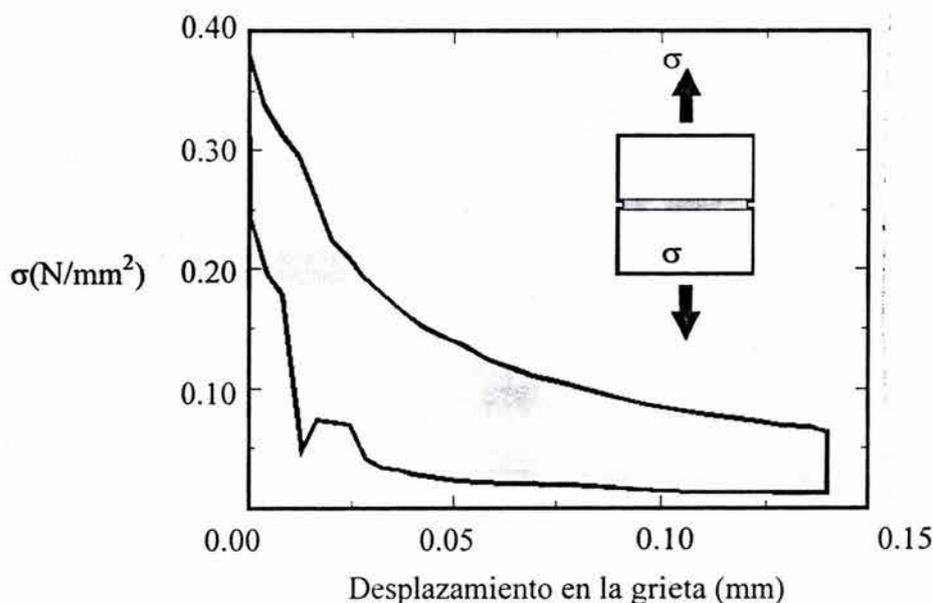
#### **2.4. Propiedades de la superficie de contacto entre mortero y piezas**

En el micro-modelado de elementos estructurales de mampostería es importante definir las características del comportamiento de las interfases entre el mortero y los elementos sólidos los cuales son los eslabones más débiles del compuesto y que directamente está ligado al comportamiento no-lineal de la mampostería. La simulación del modo de fractura I, requiere conocer de antemano la resistencia a tensión del enlace entre el mortero y la pieza

y la energía de fractura que se desarrolla al producirse una grieta de área unitaria. Actualmente existe un número limitado de ensayos de laboratorio para estudiar las propiedades mecánicas en las fases mortero-pieza. Van Der Pluijm (1992) presenta resultados de ensayos de deformación controlada que describen el comportamiento de ablandamiento en la frontera entre el mortero y la pieza sólida en el modo de fractura I. Las observaciones hechas por Van Der Pluijm revelan también que el área de contacto entre pieza y mortero es menor que la superficie bruta del ladrillo como se aprecia en la fig. 2.6. Estos efectos producen la dispersión de valores de la resistencia a la tensión en la interfase, como se observa en la fig. 2.7.



**Figura 2.6** Superficies de enlace por efectos de tensión (Van Der Pluijm, 1992; Lourenço, 1996).

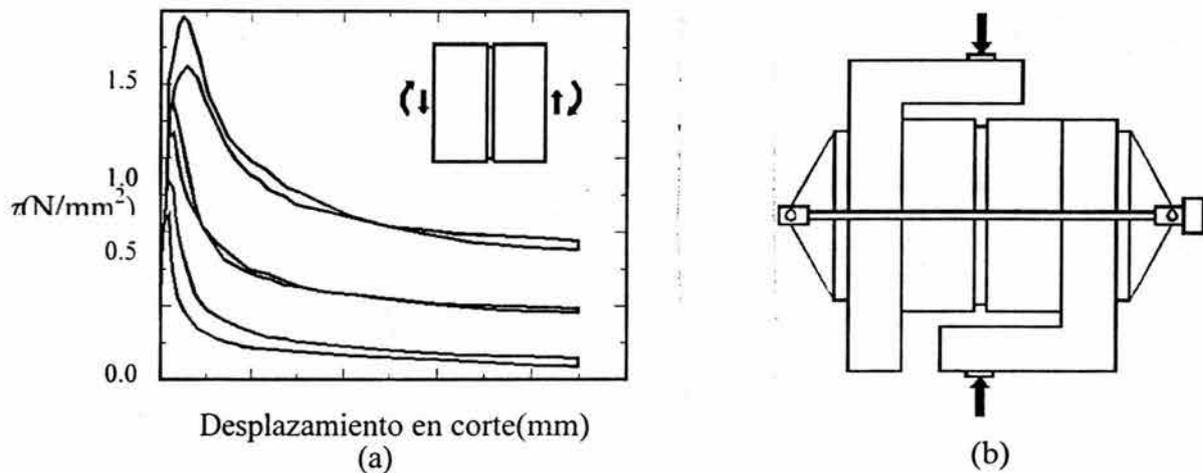


**Figura 2.7** Comportamiento a tensión: diagramas de esfuerzo-desplazamientos en la grieta (Van Der Pluijm, 1992).

Es lógico suponer que estos datos dependen de la forma de las unidades sólidas y de las características del mortero que se utiliza y por ello no se puede hacer una recomendación para obtener los valores de resistencia y energía de fractura a partir de las propiedades de los materiales constituyentes.

A pesar éstas observaciones, muchos investigadores y diseñadores consideran, desde un punto de vista práctico, relevante la resistencia a la compresión y, además, que no existe deslizamiento relativo entre los elementos sólidos (Heyman, 1999). Algunas normas de diseño, como las NTCM (2004), también suponen que la mampostería no posee resistencia a la tensión en dirección perpendicular a las juntas, entendiéndose que el comportamiento en las interfases es frágil.

En el modo de fractura II, la resistencia al corte en la interfase, el ángulo de fricción y el ángulo de dilatación son parámetros necesarios y sus valores están afectados por los mismos factores que los correspondientes al efecto de tensión (Lourenço, 1996a). Van Der Pluijm (1992) también presenta resultados experimentales donde se puede observar el comportamiento típico al corte de la juntas de mortero entre piezas de arcilla con distintos niveles de esfuerzos normales (ver fig 2.8).



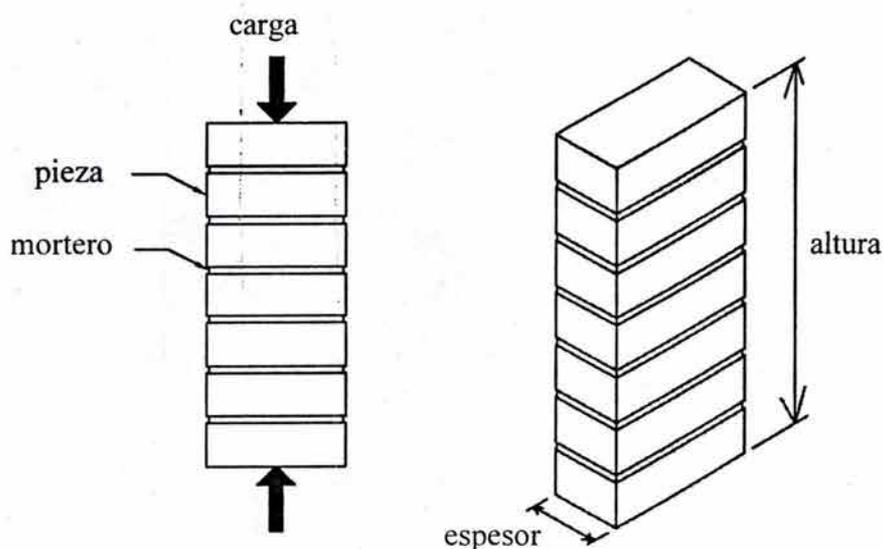
**Figura 2.8** Comportamiento típico de las juntas para piezas de arcilla en cortante (Pluijm, 1992): (a) Diagrama de esfuerzo-desplazamiento, (b) esquema del ensayo de corte en unidades sólidas de arcilla.

## 2.5. Material compuesto, propiedades mecánicas

En esta parte de la tesis se considera el comportamiento uni-axial y bi-axial del material compuesto. Este tipo de comportamiento es relevante en el macro-modelado de elementos de mampostería.

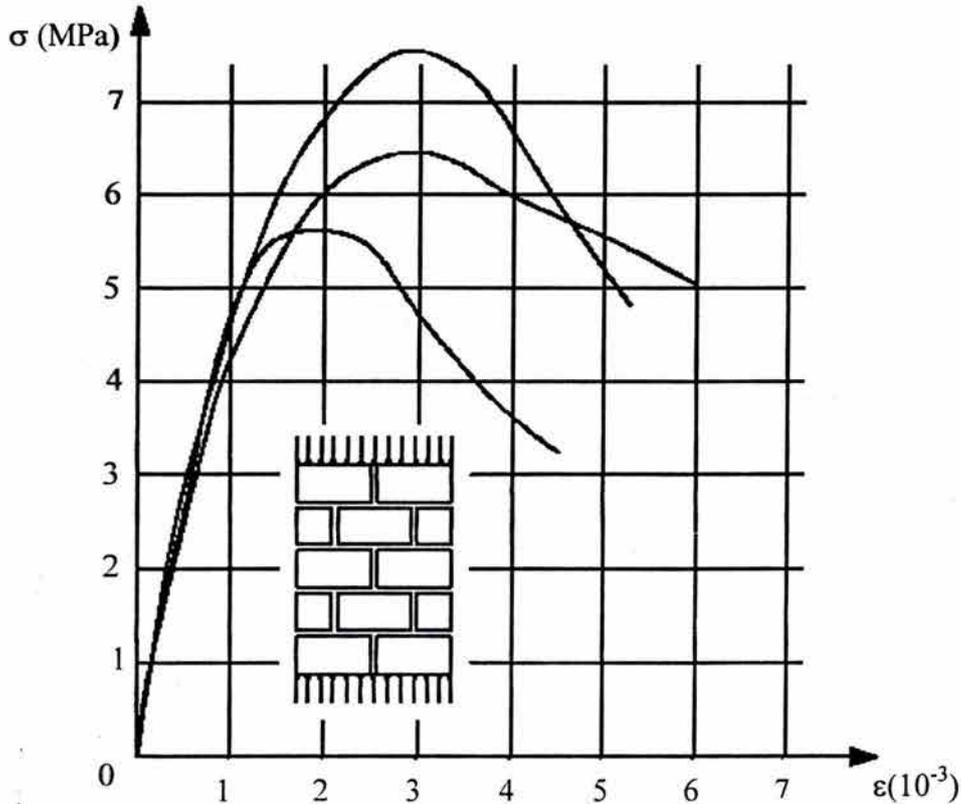
### 2.5.1. Comportamiento de la mampostería a compresión

La resistencia a la compresión de la mampostería se le considera como la propiedad estructural de mayor importancia, pues ésta es un índice de la calidad de este material. Por esta razón la mayoría de códigos de diseño consideran necesario establecer pautas para obtener dicha resistencia. Por ejemplo, se puede obtener la resistencia a compresión: con ensayos con las mismas piezas y morteros que serán utilizados en la construcción de los elementos estructurales, considerando las resistencias de diseño de las piezas y morteros, o el empleo de valores indicativos propuestos generalmente en tablas cuando no se han realizado ensayos de compresión en muretes de mampostería (NTCM, 2004). La prueba estándar para obtener la resistencia a compresión se basa en el ensayo de un prisma de mampostería donde las piezas están unidas con mortero y éstas se colocan una encima de la otra (ver fig. 2.9). Las dimensiones de cada espécimen de prueba varían según el tipo de piezas que se esté utilizando.



**Figura 2.9** Pila de prueba en compresión (NTCM, 2004).

En la fig. 2.10 se pueden apreciar las curvas típicas de la relación esfuerzo-deformación obtenidas de ensayos a compresión en especímenes de mampostería.



**Figura 2.10** Curvas experimentales típicas de la relación esfuerzo-deformación de mampostería a compresión.(Tomazevic, 1999)

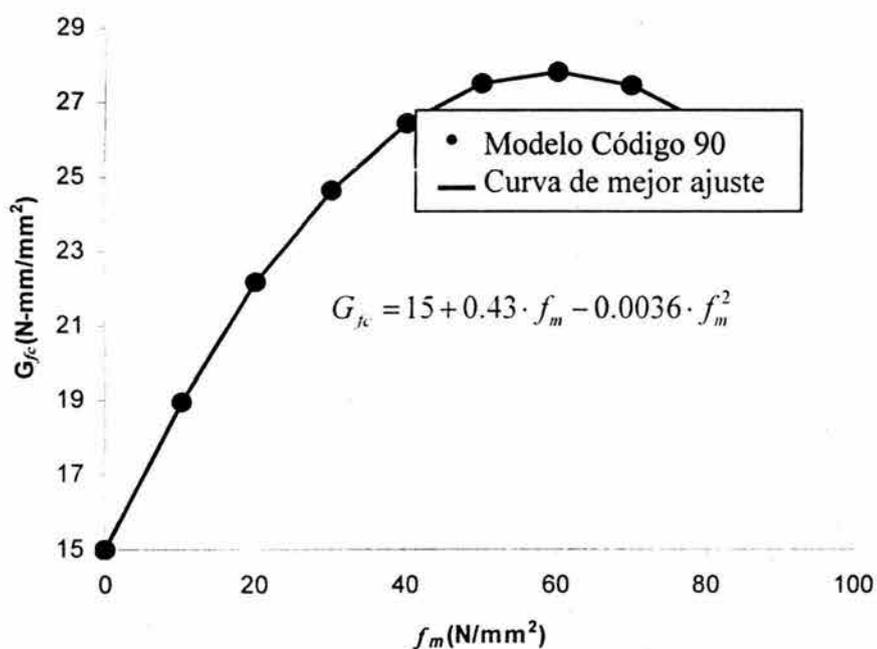
Para obtener la resistencia a compresión en elementos de mampostería las NTCM (2004) especifican que se deben ensayar nueve pilas como mínimo. Para salvar los problemas de efecto de escala y esbeltez, es necesario corregir el promedio de las resistencias obtenidas de cada prueba,  $\bar{f}_m$ , por factores que sean coherentes con la relación que existe entre la altura y el espesor de la pieza (ver tabla 2.1). Este valor corregido se utiliza para obtener la resistencia de diseño a compresión de la mampostería  $f_m^*$ .

<sup>2</sup> Las NTCM(2004) presenta la siguiente expresión:  $f_m^* = \frac{\bar{f}_m}{1 + 2.5 \cdot c_m}$ , donde  $c_m$  es el coeficiente de variación de la resistencia a la compresión de las pilas ( $c_m$  debe ser mayor o igual a 0.15).

En algunos códigos de diseño esta resistencia también se emplea para calcular los módulos de elasticidad y el módulo de corte en ausencia de pruebas experimentales (Eurocode 6-CEN, 1996; NTCM, 2004).

**Tabla 2.1 Factores de corrección para las resistencias en compresión de pilas con diferentes relaciones altura-espesor (NTCM, 2004).**

Relación altura a espesor de la pila	2	3	4	5
Factor correctivo	0.75	0.90	1.00	1.05

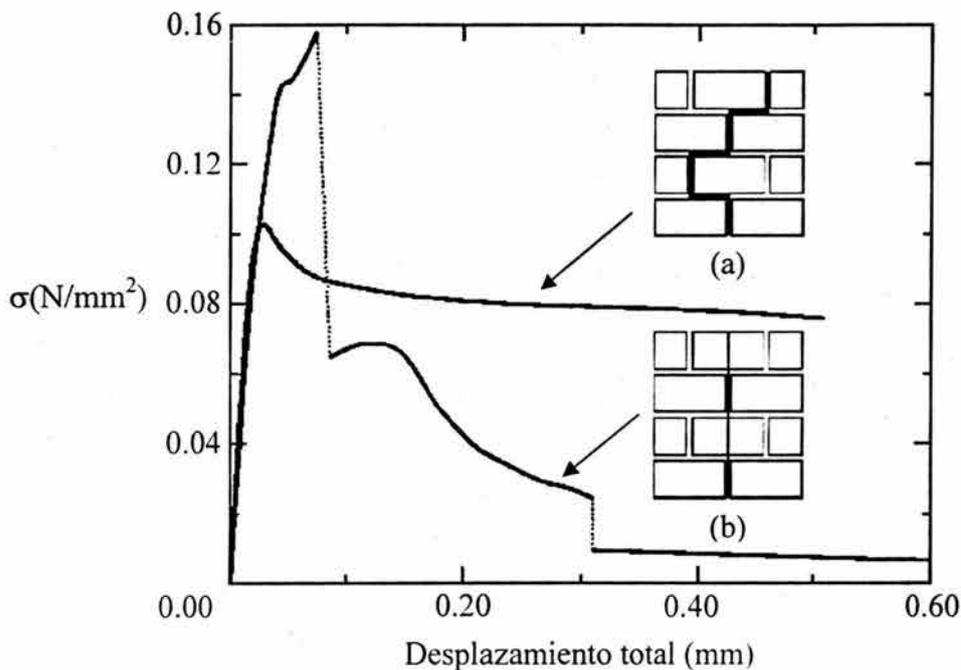


**Figura 2.11** Energía de fractura en compresión de acuerdo al modelo del Código 90(CEB-FIP, 1991; Lourenço, 1996b)

Para el modelado de la falla del material en compresión es necesario utilizar, además de la resistencia en compresión, la energía de fractura por aplastamiento. En este caso existen propuestas que permiten obtener dicha energía a partir de la resistencia en compresión obtenida de ensayos de compresión, como se puede apreciar de la fig. 2.11 (CEB-FIP, 1991; Lourenço, 1996b).

### 2.5.2. Resistencia a tensión de muretes de mampostería

La falla a tensión en los muretes de mampostería se presenta de dos formas. La primera se produce por la pérdida de cohesión entre las interfases del mortero y la pieza; por esto, la resistencia a tensión se debe a la adherencia que existe en dicha interfase. En el segundo caso se produce por la falla en las piezas, debido a que éstas tienen una baja resistencia a tensión, como puede ocurrir en piezas perforadas, y el mortero utilizado es de alta resistencia. La interacción de estos materiales define un mecanismo de anclaje cuando el mortero penetra en los orificios o hendiduras de las piezas. En este caso la resistencia a la tensión del elemento de mampostería se puede suponer igual a la correspondiente de la unidad sólida en la dirección de aplicación de la carga.



**Figura 2.12** Diagramas esfuerzo-deformación típicos de ensayos en tensión para las direcciones paralelas a las juntas de mortero (Lourenço, 1996a): (a) falla en los muretes por debilidad de juntas; (b) falla en los muretes por debilidad de las piezas

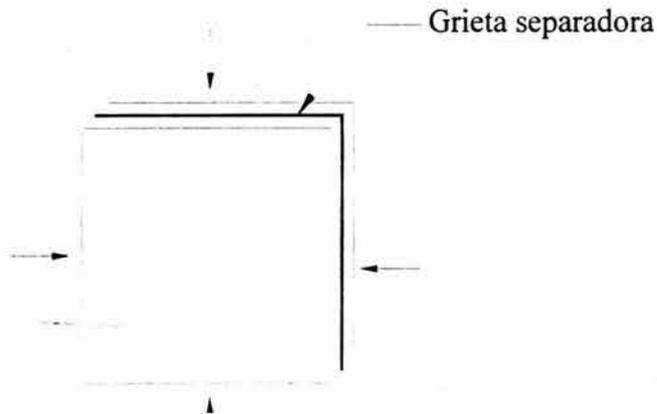
En la fig. 2.12 se presentan resultados experimentales mostrando el comportamiento en los dos mecanismos de falla. En el primer mecanismo de falla en tensión, la trayectoria de la curva post-pico decrece de manera regular hasta alcanzar una zona plana, o platea, que se define al ir incrementándose las deformaciones. Es claro que este tipo de comportamiento post-falla está gobernado en su primera fase por la energía de fractura de las juntas verticales en el modo I y, en la platea siguiente, por el modo de fractura II de las juntas horizontales. En el caso de ladrillos de baja resistencia, el proceso de deterioro sufre cambios abruptos en la trayectoria post-pico del diagrama esfuerzo-deformación que implica una variación repentina de la rigidez, por lo que este mecanismo debe evitarse (Lourenço, 1996a).

### **2.5.3 Comportamiento biaxial de muretes de mampostería**

En estructuras de mampostería es imposible modelar numéricamente el comportamiento de los elementos estructurales utilizando simplemente propiedades mecánicas basadas en estudios experimentales donde se aplican trayectorias de carga paralelas a las juntas de mortero (Lourenço, 1996a). La mampostería es un material anisotrópico que exhibe características distintas según la orientación de las cargas aplicadas, a diferencia de los materiales isotrópicos. Desde el punto de vista de modelado numérico del comportamiento del material, evaluar el estado de daño de la mampostería con solo los esfuerzos principales es poco significativo (Hamid y Drysdale, 1981). Este hecho es evidente si se contempla utilizar una superficie de fluencia para limitar el dominio elástico, como se plantea en la teoría de plasticidad pues, en casos de ortotropía del material, la geometría de este dominio no es simétrica como en medios isotrópicos. Investigar las características de los mecanismos de falla en estados biaxiales en muretes de mampostería, no ha sido hasta el momento trivial. Las configuraciones de falla en diversas situaciones de carga, como las que se observan en la fig. 2.12 hace difícil decidir qué parámetros del material deben ser considerados. Las configuraciones de falla en el plano de los muretes de mampostería bajo este tipo de esfuerzos se pueden describir como sigue (Dhanasekar *et al.*, 1985):

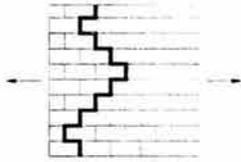
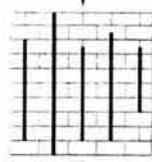
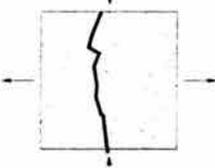
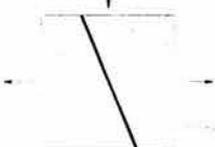
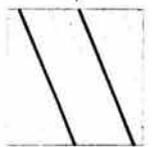
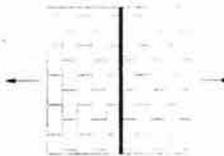
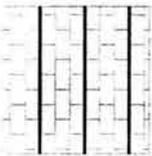
- Falla tipo 1, la separación del mortero de las piezas a lo largo de las juntas horizontales y verticales en líneas rectas, o en líneas escalonadas;
- Falla tipo 2, rompimiento de las unidades sólidas y el desligue de las piezas del mortero en las juntas verticales;
- Falla tipo 3, que se puede suponer como la combinación entre los dos tipos anteriores.

Por ejemplo, en el caso de compresión biaxial, la falla del elemento de mampostería ocurre distintivamente en el plano paralelo a las superficies libres del espécimen localizado en la parte media del espesor; esto sucede sin importar las direcciones de las juntas. Este tipo de falla se produce de forma repentina (ver fig. 2.13).



**Figura 2.13** Falla en muretes de mampostería por compresión biaxial (Dhanasekar *et al.*, 1985).

La fig. 2.14 presenta un resumen de las posibles configuraciones de falla en el plano de los especímenes.

Ángulo	Tensión uniaxial	Tensión/compresión	Compresión
0.0°			
22.5°			
45.0°			
67.5°			
90.0°			

**Figura 2.14** Configuraciones de falla para ensayos de muretes antes esfuerzos biaxiales(Dhanasekar *et al.*, 1985)

## 2.6. Sumario

Al plantear un procedimiento numérico, para estudiar o diseñar una estructura de mampostería, la mayoría de ingenieros estructuristas encuentran que existen una serie de modelos constitutivos que involucran un determinado número de parámetros que influyen en la respuesta lineal y no-lineal de los modelos empleados. En este capítulo se ha tratado de manera somera la relevancia de las propiedades de los elementos constituyentes y de la mampostería, con el fin de entender el problema de modelado.

# CAPÍTULO 3

## **Tratamiento numérico de la no-linealidad física y procedimientos avanzados de solución**

El objetivo en este capítulo es presentar brevemente los procedimientos numéricos que se utilizan para el análisis no-lineal de estructuras construidas con materiales cuasi-frágiles como son la mampostería y el concreto. En esta tesis sólo se consideran modelos planos de esfuerzos con no-linealidades físicas, ignorándose las no-linealidades geométricas en los análisis.

También se cree conveniente mencionar que, para el interés particular de cada lector, durante el desarrollo de este capítulo se señalan las referencias idóneas que profundizan en los temas que se tratan aquí.

### **3.1 Técnicas numéricas para el análisis no-lineal de estructuras.**

El progreso de las técnicas numéricas y el avance científico en la mecánica de sólidos han tenido un fuerte impacto en la ingeniería estructural. Esta nueva visión de la mecánica estructural computacional, una disciplina híbrida producto de la mezcla de métodos para el

análisis numérico y la mecánica de sólidos, permite vislumbrar un futuro tecnológico de mucha relevancia en la ingeniería y ciencias aplicadas (De Bors *et al.*, 1994).

Estos avances tecnológicos se han aplicado al modelado de estructuras de diversos tipos que requieren un tratamiento numérico exclusivo, especialmente en aquellas donde el comportamiento inelástico se le asocia al daño observado.

Generalmente la solución de un problema no-lineal complejo involucra desarrollar una serie de *etapas de análisis* donde cada una de éstas tiene un acoplamiento débil con la etapa anterior; es decir, la solución final de una es el punto de partida para la siguiente. Este proceso de continuación posee una jerarquía de procesos que están compuestos de pasos de carga y fases iterativas durante la aplicación de cada uno de estos pasos (Crisfield, 1991a; Roeder y Ayala, 2002).

Es importante distinguir los criterios que fijan el tamaño de cada incremento de carga y el procedimiento iterativo que resuelve las ecuaciones de equilibrio. Se pueden mencionar, como ejemplos de técnicas que controlan el tamaño del incremento al control de fuerzas, al control directo y a las distintas versiones de procedimientos de restricción con arco, incluyendo el control indirecto de desplazamientos. Como paradigmas de procedimientos iterativos están el método estándar o modificado de Newton Raphson, métodos de iteración usando la rigidez inicial y otros métodos cuasi-Newton. Otros componentes necesarios en las estrategias de solución dentro de un esquema incremento-iteración son los criterios de convergencia y, opcionalmente, las técnicas de aceleración de convergencia, como son las técnicas de búsqueda de línea, y reglas de control automático de cargas (Press *et al.*, 1992; Fusco, 1993; Jirásek y Bazant, 2002).

### **3.1.1 Métodos numéricos para la solución de ecuaciones no-lineales.**

El objetivo del análisis no-lineal es obtener la trayectoria que representa el equilibrio de un sistema estructural sometido a un proceso de cargas que evolucionan con el tiempo. En el contexto de los elementos finitos esto se lleva a cabo utilizando un procedimiento

incremento-iteración. En cada etapa de análisis de la estructura, los agente externos causantes del desequilibrio en el sistema, sean fuerzas o desplazamientos, se aplican en intervalos, comúnmente denominados *incrementos*, que se van acumulando hasta completar sus valores finales. De este procedimiento de solución con incrementos se han derivado dos clases de métodos: métodos puramente de incrementos y métodos correctivos. En el primero de éstos, enteramente de predicción, no se utilizan fases iterativas para corregir el no-equilibrio de fuerzas. En el segundo se suceden una o más fases iterativas, después de la fase de predicción, que en conjunto definen la fase correctiva de la etapa de análisis. La fase correctiva tiene el propósito de eliminar los errores fluctuantes debido al no-equilibrio de fuerzas y, además, evita la pérdida de precisión en los resultados al ir aumentando la carga aplicada (Crisfield, 1991a).

En este trabajo de investigación se han aplicado los métodos de incremento-iteración, presentando, de manera somera, las técnicas numéricas que se utilizan en el análisis no-lineal de estructuras. Estas técnicas se han implantado en el sistema general de análisis no-lineal con elementos finitos *NLFEM* diseñado por el autor de esta tesis (ver apéndice B).

### 3.1.1.1. Análisis controlado por incrementos de fuerzas.

Con la finalidad de comprender de forma natural cómo se desarrolla el análisis aprovechando el control de fuerzas, se plantea primero el problema general de equilibrio al final del incremento  $n+1$  hasta terminar de aplicar las fuerzas externas  $\mathbf{f}_{ext,n+1}$ :

$$\mathbf{f}_{int}(\mathbf{u}_{n+1}) = \mathbf{f}_{ext,n+1} \quad (3.1)$$

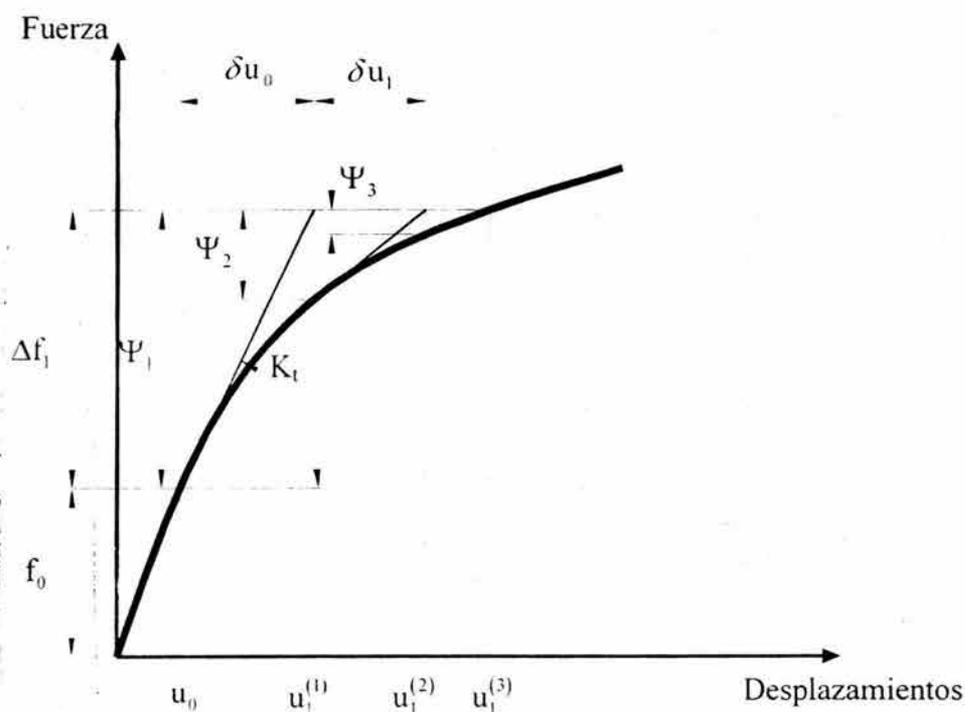
En la ec. (3.1) se considera que el vector de fuerzas internas,  $\mathbf{f}_{int}$ , es función del vector de desplazamientos  $\mathbf{u}_{n+1}$ . Es conveniente reconfigurar esta ecuación exponiéndola de forma compacta mediante el vector de fuerzas no-equilibradas  $\Psi(\mathbf{u}_{n+1})$  (Zienkiewics y Taylor, 2000b):

$$\Psi(\mathbf{u}_{n-1}) = \Psi_{n-1} = \mathbf{f}_{ext,n-1} - \mathbf{f}_{int}(\mathbf{u}_{n-1}) = 0 \quad (3.2)$$

Tomando en cuenta que la solución se obtiene mediante un proceso iterativo, se expande  $\Psi$  en una serie de Taylor en la que se desprecian los términos de órdenes superiores a dos. De esta operación se obtiene la siguiente expresión:

$$\Psi_{n+1} = \Psi_n + \frac{\partial \Psi_n}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} = \Psi_n + \mathbf{K}_T \delta \mathbf{u} \approx 0 \quad (3.3)$$

Así, con las ecs. (3.2) y (3.3) el problema estructural se adapta al patrón de los sistemas de ecuaciones no-lineales. Estas ecuaciones se resuelven con un proceso estándar de Newton-Raphson implantado dentro de un esquema de incremento-iteración como se aprecia en la fig. 3.1 (Crisfield, 1991a).



**Figura 3.1** Esquema del procedimiento de incremento e iteración.

Cuando los modelos son de gran escala, el método estándar se vuelve excesivamente demandante en tiempo de cómputo a causa del cálculo de la matriz jacobiana de rigidez global,  $\mathbf{K}_T$ , que debe ser actualizada con los desplazamientos iterativos, o cuando la solución está cerca de puntos límites y no puede llegar a un resultado final que converja. En

estos casos es conveniente analizar otras opciones. tales como el empleo de métodos modificados como el método de la rigidez lineal. o constante, bajo el mismo esquema del proceso estándar de Newton-Raphson que a la larga pueden exigir mayor número de iteraciones; sin embargo, cuando existen problemas de bifurcación (Marsden y Hughes, 1993) se debe tener cuidado al utilizar éstos (Crisfield, 1991b; Bathe, 1996; Jirásek y Bazant, 2002). Esta técnica de solución se ilustra en el cuadro algorítmico 3.1.

**Cuadro Algorítmico 3.1** Procedimiento general de solución: control por fuerzas.

1. Inicio del paso de solución

$$\mathbf{u}_{n+1}^{(0)} = \mathbf{u}_n, \quad \Psi_n^{(0)} = \mathbf{0}$$

2. Ecuaciones no-lineales

$$\Psi(\mathbf{u}_{n+1}) \equiv \Psi_{n+1} = \mathbf{0}$$

3. Aproximación de la solución en series de Taylor

$$\Psi_{n+1}^{(k+1)} \approx \Psi_{n+1}^{(k)} + \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{u}} \right)_n^{(k)} \delta \mathbf{u}_n^{(k+1)} = \mathbf{0}$$

4. Corrección de la fase de iteración:

$$\Psi_{n+1}^{(k)} = \left( - \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{u}} \right)_n^{(k)} \delta \mathbf{u}_n^{(k+1)} = \mathbf{K}_T^{(k)} \delta \mathbf{u}_n^{(k+1)}$$

$$\delta \mathbf{u}_n^{(k+1)} = \left( \mathbf{K}_T^{(k)} \right)^{-1} \Psi_{n+1}^{(k)}$$

$$\mathbf{u}_n^{(k+1)} = \mathbf{u}_n^{(k)} + \delta \mathbf{u}_n^{(k+1)} = \mathbf{u}_n^{(k)} + \Delta \mathbf{u}_n^{(k+1)}, \quad \Delta \mathbf{u}_n^{(k+1)} = \sum_{i=1}^{k+1} \delta \mathbf{u}_n^{(i)}$$

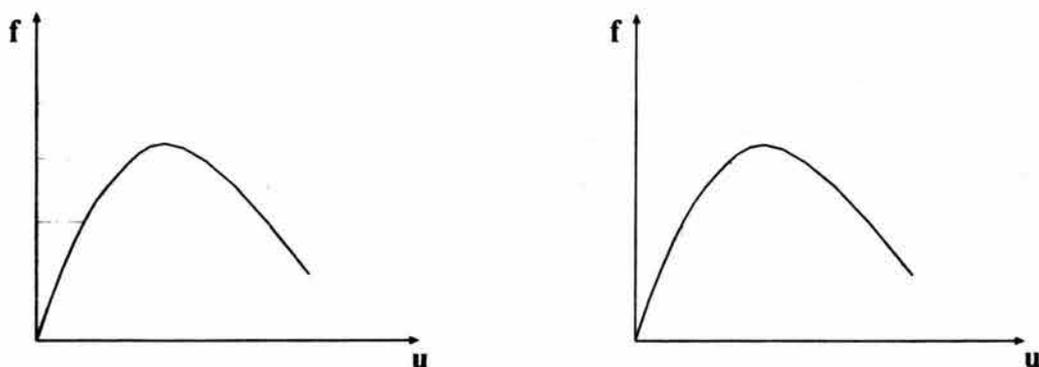
### 3.1.1.2. Control directo de desplazamientos.

Al margen de la selección del algoritmo iterativo, cualquier estrategia de solución colapsa durante un proceso controlado por fuerzas cuando decae la resistencia de la estructura por el ablandamiento del material. Esto causa que las fuerzas internas en el modelo estructural no equilibren las cargas externas aplicadas (ver fig. 3.2). Este problema se hace más evidente en procesos donde la magnitud de las fuerzas aumenta monótonamente. En este caso, cuando la solución se acerca a un punto límite, el control por fuerzas falla al oscilar, o divergir, la solución.

En muchos análisis se suele considerar como los únicos resultados relevantes el valor máximo de la carga que soporta una estructura y el desplazamiento que se alcanza en este máximo. También es común que muchos analistas creen que la divergencia en el proceso iterativo es un indicador de la falla en la estructura y piensan que el último estado convergente proporciona la información deseada. Esta suposición es totalmente incorrecta; en problemas complejos de análisis estructural, las razones de falla del proceso de incremento-iteración se puede deber a una mala decisión cuando se escoge la técnica numérica de solución, lo que propicia una mala estimación de la carga real de colapso de la estructura. Por ello, es recomendable y sano utilizar técnicas numéricas que permitan seguir la trayectoria de equilibrio después de producirse los desplazamientos en el punto límite máximo y, en algunos casos, este esfuerzo adicional permite obtener resultados valiosos y coherentes a la condición física advertida. Por ejemplo, se puede evaluar la ductilidad en estructuras afín al daño que presentan.

A diferencia del control de fuerzas, *el control directo de desplazamientos* considera desplazamientos prescritos, quedando como incógnitas las reacciones en los puntos de aplicación de éstos. En los experimentos numéricos cuasi-estáticos donde se utilizan el control directo de desplazamientos, se puede obtener la capacidad máxima de carga que soporta una estructura. Para aprovechar este tipo de control, es necesario discriminar los grados de libertad relacionados a los de desplazamientos prescritos o controlados y los grados de libertad relativos a los desplazamientos sin control o nudos con libertad de

movimiento del vector de desplazamientos globales (ver ec. 3.4). Esta discriminación de los grados de libertad también se aplica al vector de fuerzas de desequilibrio  $\Psi(\mathbf{u}_{n-1})$ .



(a) Control directo de fuerzas

(b) Control directo de desplazamientos

**Figura 3.2** Comparación entre: (a) control por fuerzas y (b) control directo de desplazamientos

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_l \\ \mathbf{u}_p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_{int} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{int,l} \\ \mathbf{f}_{int,p} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_{ext} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{ext,l} \\ \mathbf{f}_{ext,p} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Los subíndices  $p$  y  $l$  se refieren respectivamente a los grados de libertad para los desplazamientos prescritos y libres o sin control. Reconfigurando la matriz de rigidez global de la estructura de acuerdo a los grados de libertad definidos anteriormente, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ll} & \mathbf{K}_{lp} \\ \mathbf{K}_{pl} & \mathbf{K}_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{u}_l \\ \delta \mathbf{u}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_l \\ \Psi_p \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Con la primera línea de ecuaciones se pueden obtener los desplazamientos en los nudos libres en función de los desplazamientos prescritos con la siguiente expresión:

$$\delta \mathbf{u}_l = (\mathbf{K}_{ll})^{-1} (\Psi_l - \mathbf{K}_{lp} \delta \mathbf{u}_p) \quad (3.7)$$

El desarrollo numérico de este procedimiento se presenta en el cuadro algorítmico 3.2. De este cuadro es importante indicar que en la primera iteración se tiene que

$\delta \mathbf{u}_{p,n+1}^{(1)} = \mathbf{u}_{p,n+1} - \mathbf{u}_{p,n}$  y en el resto de iteraciones  $\delta \mathbf{u}_{p,n+1}^{(k)} = \mathbf{0}$ . Esto implica que se utilice la expresión  $-\mathbf{K}_{pp} \delta \mathbf{u}_p$  sólo en la primera predicción, lo que mejora de manera significativa la convergencia del proceso de iteración (Jirázek y Bazant, 2002).

**Cuadro Algorítmico 3.2** Procedimiento general de solución: control directo de desplazamientos.

1. Inicio del paso de solución

$$\mathbf{u}_{l,n+1}^{(0)} = \mathbf{u}_{l,n}, \quad \mathbf{u}_{p,n+1}^{(0)} = \mathbf{u}_{p,n}, \quad \Psi_n^{(0)} = \mathbf{0}$$

2. Ecuaciones no-lineales

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ll} & \mathbf{K}_{lp} \\ \mathbf{K}_{pl} & \mathbf{K}_{pp} \end{bmatrix}_{n+1}^{(k)} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{u}_l \\ \delta \mathbf{u}_p \end{bmatrix}_{n+1}^{(k+1)} = \begin{bmatrix} \Psi_l \\ \Psi_p \end{bmatrix}_{n+1}^{(k)}$$

3. Solución para los nudos sin desplazamientos prescritos

$$\delta \mathbf{u}_{l,n+1}^{(k+1)} = \left( \mathbf{K}_{ll,n+1}^{(k)} \right)^{-1} \left( \Psi_{l,n+1}^{(k)} - \mathbf{K}_{lp,n+1}^{(k)} \delta \mathbf{u}_{p,n+1}^{(k+1)} \right)$$

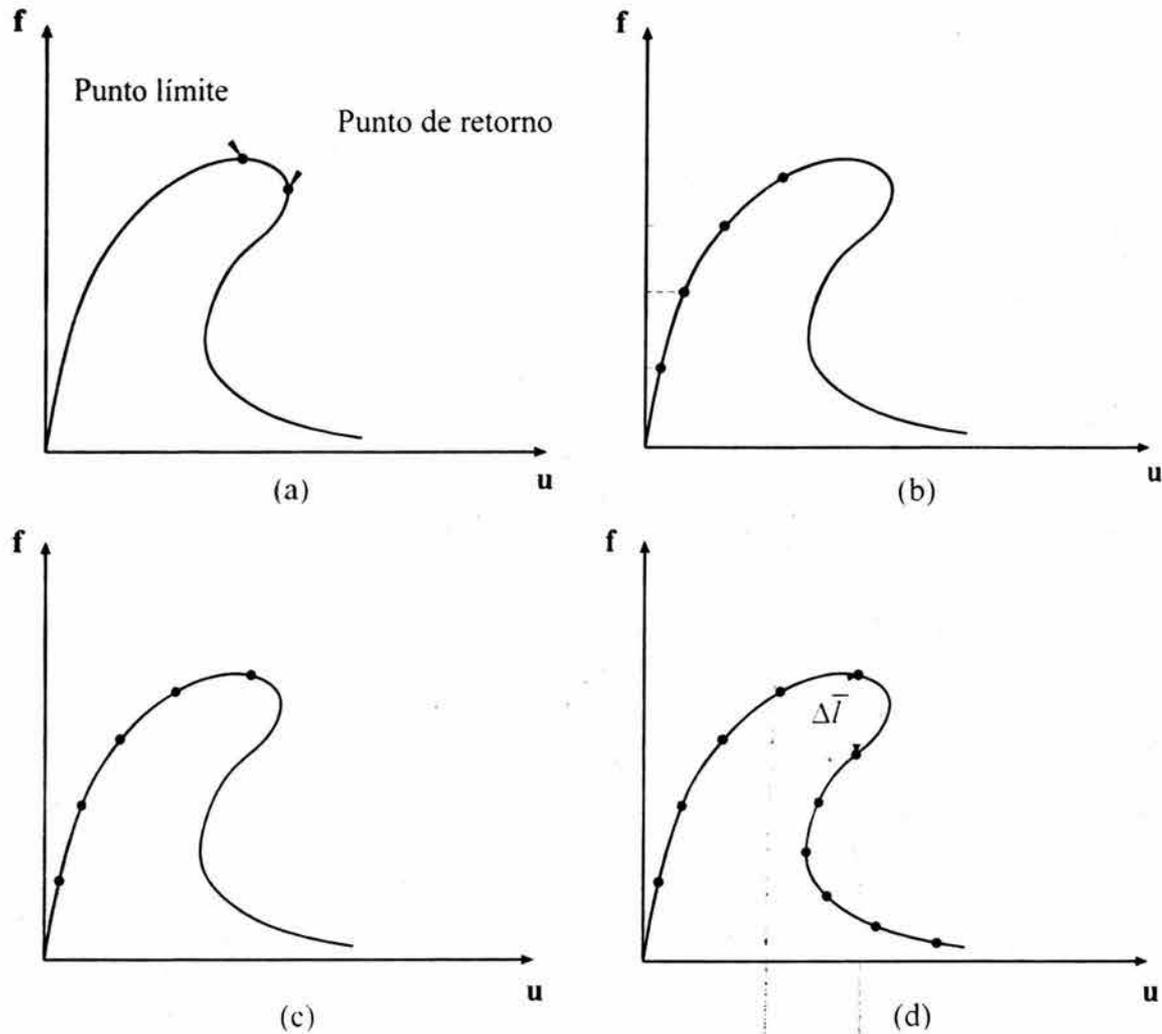
4. Corrección de la fase de iteración:

$$\mathbf{u}_{l,n+1}^{(k)} = \mathbf{u}_{l,n+1}^{(k-1)} + \delta \mathbf{u}_{l,n+1}^{(k)} = \mathbf{u}_{l,n+1}^{(k-1)} + \Delta \mathbf{u}_{l,n+1}^{(k)}, \quad \Delta \mathbf{u}_{l,n+1}^{(k+1)} = \sum_{i=1}^{k+1} \delta \mathbf{u}_{l,n+1}^{(i)}$$

**3.1.1.3. Control con procedimientos de arco.**

El control directo de desplazamientos se puede utilizar en situaciones tales como la aplicación de una carga en un solo punto de la estructura o cuando se aplica una carga sobre una placa rígida, de tal manera que se desplacen simultáneamente todos los puntos de la

estructura que se encuentran en contacto con la placa (Crisfield, 1991b; Jirásek y Bazant, 2002). En estructuras con materiales cuyas características sean cuasi-frágiles es posible que este tipo de control fracase durante el análisis no-lineal, debido a que se puede producir un cambio repentino de signo de la matriz jacobiana tangente<sup>1</sup>(ver fig. 3.3).

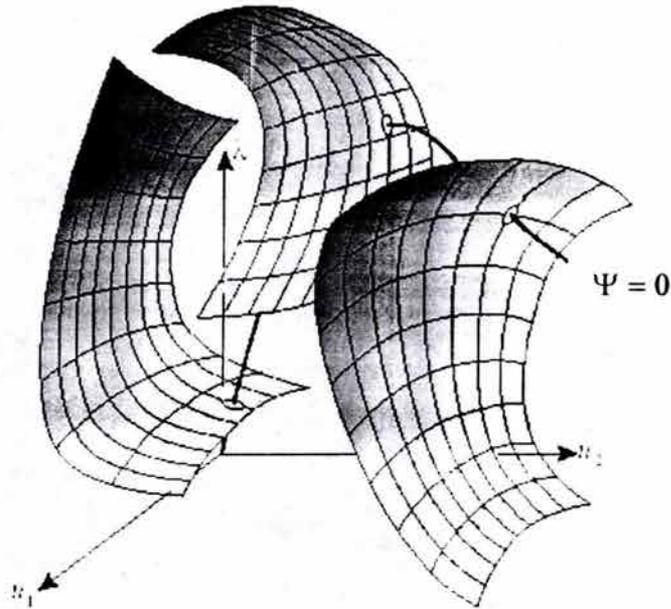


**Figura 3.3** (a) Trayectoria de equilibrio en estructuras cercanamente frágiles, (b) control de fuerzas, (c) control directo de desplazamientos, (d) control de arco.

La idea básica de utilizar técnicas flexibles de control para el incremento de cargas es introducir un factor, que multiplica a un vector de fuerzas que se toma como referencia, al sistema de ecuaciones que involucran los desplazamientos incógnitas interceptando la

<sup>1</sup> Este tipo de comportamiento se le denomina en inglés *snapback*.

trayectoria de equilibrio con una hiper-superficie (ver fig. 3.4) cuyo radio de curvatura se calcula a partir del vector de desplazamientos y el factor multiplicador de la carga.



**Figura 3.4** Diagrama de respuesta con hiper-superficies de restricción: sistemas de dos grado de libertad,  $\theta=1$ .

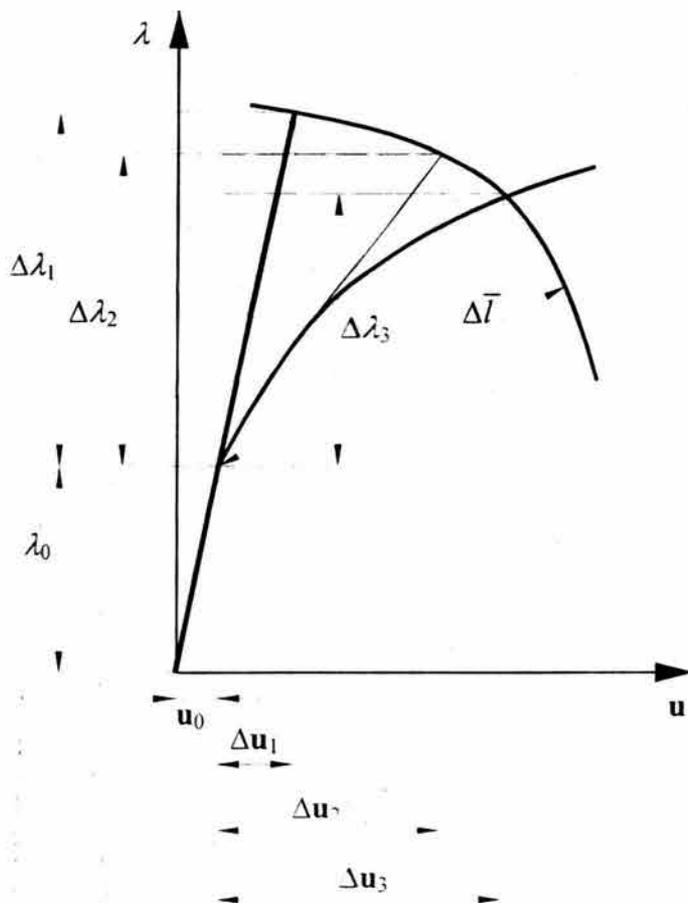
La técnica de trazar un *arco*, como se observa en la fig. 3.5 para el caso de un sistema de un grado de libertad (Crisfield, 1991a, 1991b), puede aparentar cierta simplicidad de empleo; pero no se debe ignorar que el incremento del radio del arco se define a partir de dos variables de características físicas diferentes como son los desplazamientos y el parámetro adimensional que multiplica al vector de fuerzas (ver ec. 3.6).

$$\Delta l = \sqrt{(\Delta \mathbf{u})^T \Delta \mathbf{u} + (\theta \cdot \Delta \lambda)^2} \quad (3.6)$$

El factor de escala  $\Delta \lambda$  establece la contribución de las cargas y  $\theta$  es un parámetro de conversión, necesario cuando se combinan los desplazamientos con un parámetro adimensional. Para ser consistente con la presentación de los procedimientos de arco, se define la siguiente ecuación para la variación de las fuerzas externas:

$$\mathbf{f}_{\text{ext}}(\lambda) = \bar{\mathbf{f}}_0 + \lambda \bar{\mathbf{f}} \quad (3.7)$$

donde  $\bar{\mathbf{f}}_0$  es un vector constante y  $\lambda \bar{\mathbf{f}}$  es la componente variable de la fuerza externa<sup>2</sup>. Es necesario adicionar, durante el proceso de solución, un radio de arco prescrito  $\Delta l = \Delta \bar{l}$ . El desarrollo del análisis se puede apreciar en el cuadro algorítmico 3.3.



**Figura 3.5** Esquema del proceso de restricción con arco: sistema de un grado de libertad,  $\theta=1$ .

La elección de la raíz se hace según la dirección en que van evolucionando los incrementos de los desplazamientos en la trayectoria de equilibrio; es decir, si se cumple la siguiente condición:  $(\Delta \mathbf{u}_{n+1}^{(k)})^T (\delta \mathbf{u}_{n+1}^{(k+1)}) > 0$ .

<sup>2</sup> La fuerza  $\mathbf{f}_0$  puede representar efectos de gravedad y  $\bar{\mathbf{f}}$  efectos de carga dinámica.

**Cuadro Algorítmico 3.3** Procedimiento general de solución: control con restricción de arco.

1. Inicio del paso de solución

$$\mathbf{u}_{n+1}^{(0)} = \mathbf{u}_n, \quad \lambda_{n+1}^{(0)} = \lambda_n, \quad \Psi_n = \mathbf{f}_{ext}(\lambda_n) - \mathbf{f}_{int}(\mathbf{u}_n) = \mathbf{0}.$$

2. Ecuaciones lineales en la i-ésima iteración:

$$\mathbf{K}_T^{(k)} \delta \mathbf{u}_{n+1}^{(k+1)} = \bar{\mathbf{f}}_0 + \lambda_{n+1}^{(k)} \bar{\mathbf{f}} - \mathbf{f}_{int}(\mathbf{u}_{n+1}^{(k)}) + \delta \lambda_{n+1}^{(k+1)} \bar{\mathbf{f}}$$

3. Solución de sistemas de ecuaciones separados y corrección de desplazamientos

$$\mathbf{K}_T^{(k)} \delta \bar{\mathbf{u}}_{n+1}^{(k+1)} = \bar{\mathbf{f}}_0 + \lambda_{n+1}^{(k)} \bar{\mathbf{f}} - \mathbf{f}_{int}(\mathbf{u}_{n+1}^{(k)})$$

$$\mathbf{K}_T^{(k)} \delta \bar{\mathbf{u}}_{n+1}^{(k+1)} = \bar{\mathbf{f}}$$

$$\delta \mathbf{u}_{n+1}^{(k+1)} = \delta \bar{\mathbf{u}}_{n+1}^{(k+1)} + \delta \lambda_{n+1}^{(k+1)} \delta \bar{\mathbf{u}}_{n+1}^{(k+1)}$$

4. Solución de ecuación cuadrática debido a la restricción del radio del arco con  $\delta \lambda_{n+1}^{(k+1)}$  como incógnita

$$\left( \Delta \mathbf{u}_{n+1}^{(k)} + \delta \mathbf{u}_{n+1}^{(k+1)} \right)^T \left( \Delta \mathbf{u}_{n+1}^{(k)} + \delta \mathbf{u}_{n+1}^{(k+1)} \right) + \theta^2 \left( \Delta \lambda_{n+1}^{(k)} + \delta \lambda_{n+1}^{(k+1)} \right)^2 - (\Delta \bar{l})^2 = 0$$

5. Actualización de los valores del factor multiplicador de cargas y de los desplazamientos

$$\Delta \lambda_{n+1}^{(k+1)} = \Delta \lambda_{n+1}^{(k)} + \delta \lambda_{n+1}^{(k+1)}$$

$$\mathbf{u}_{n+1}^{(k+1)} = \mathbf{u}_{n+1}^{(k)} + \delta \mathbf{u}_{n+1}^{(k+1)} = \mathbf{u}_n^{(k)} + \Delta \mathbf{u}_{n+1}^{(k+1)}, \quad \Delta \mathbf{u}_{n+1}^{(k+1)} = \sum_{i=1}^{k+1} \delta \mathbf{u}_{n+1}^{(i)}$$

Como una alternativa a la ecuación cuadrática que se presenta en el cuadro algorítmico 3.3, muchos investigadores han propuesto utilizar una ecuación lineal. Retomando la ec. (3.6) con una longitud de radio de arco prescrita  $\Delta\bar{l}$  se tiene la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} a_{n+1}^{(k+1)} &= \left( \Delta\mathbf{u}_{n+1}^{(k)} + \delta\mathbf{u}_{n+1}^{(k+1)} \right)^T \left( \Delta\mathbf{u}_{n+1}^{(k)} + \delta\mathbf{u}_{n+1}^{(k+1)} \right) + \theta^2 \left( \Delta\lambda_{n+1}^{(k)} + \delta\lambda_{n+1}^{(k+1)} \right)^2 - \left( \Delta\bar{l} \right)^2 = 0 \\ a_{n+1}^{(k+1)} &= a_{n+1}^{(k)} + 2 \left( \Delta\mathbf{u}_{n+1}^{(k)} \right)^T \delta\mathbf{u}_{n+1}^{(k+1)} + 2\theta^2 \left( \Delta\lambda_{n+1}^{(k)} \right) \delta\lambda_{n+1}^{(k+1)} = 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Si se supone que  $a_{n+1}^{(k+1)}$  es igual a cero. Entonces con  $\delta\mathbf{u}_{n+1}^{(k+1)} = \delta\tilde{\mathbf{u}}_{n+1}^{(k+1)} + \delta\lambda_{n+1}^{(k+1)}\delta\bar{\mathbf{u}}_{n+1}^{(k+1)}$  en la ec. (3.8) se obtiene lo siguiente:

$$\delta\lambda_{n+1}^{(k+1)} = \frac{-\frac{a_{n+1}^{(k)}}{2} - \left( \Delta\mathbf{u}_{n+1}^{(k)} \right)^T \delta\tilde{\mathbf{u}}_{n+1}^{(k+1)}}{\left( \Delta\mathbf{u}_{n+1}^{(k)} \right)^T \delta\bar{\mathbf{u}}_{n+1}^{(k+1)} + \theta^2 \left( \Delta\lambda_{n+1}^{(k)} \right)} \quad (3.9)$$

Dependiendo del valor de  $a_{n+1}^{(k)}$  el vector de variación iterativa  $\left[ \delta\mathbf{u}_{n+1}^{(k+1)} \quad \theta\delta\lambda_{n+1}^{(k+1)} \right]^T$  es ortogonal al vector de incremento secante  $\left[ \Delta\mathbf{u}_{n+1}^{(k)} \quad \theta\Delta\lambda_{n+1}^{(k)} \right]^T$  (Ramm, 1981, 1982; Crisfield, 1991a, 1991b).

Las versiones lineales para obtener  $\delta\lambda_{n+1}^{(k+1)}$  son más prácticas y evitan el empleo de un algoritmo de decisión para determinar el valor correcto de la raíz a partir de la ecuación de segundo grado; pero la versión esférica general presentada en el algoritmo 3.3 es más estable para seguir la trayectoria de equilibrio.

Los procedimientos de arco *per se* son adecuados si la estructura presenta una distribución de daño uniforme; pero, cuando la distribución de daño es localizado, estos procedimientos pierden su eficacia. Para estos casos es recomendable emplear *el control indirecto de desplazamientos*. Para aplicar este tipo de control se deben tomar en cuenta unas cuantas componentes de desplazamientos que particularizan el problema. Para definir este tipo de

control, se debe recordar que en estructuras muy frágiles el control directo de desplazamientos conduce al colapso del análisis, como se recuerda en la fig. 3.3. Un aspecto importante, que debe tomarse en cuenta en el deterioro de los materiales, es ser objetivos con el daño observado y aprovechar la evolución de los desplazamientos en la abertura de una grieta, o discontinuidad fuerte, como una alternativa de control al ir aplicando fuerzas, registrando la evolución de los desplazamientos en la grieta como la que ocurre en el modelo experimental. Esto último, permite obtener un proceso estable de solución aun cuando ocurran cambios súbitos de signo en el determinante de la matriz jacobiana que se obtiene de las ecuaciones no-lineales definidas por las fuerzas internas. Este tipo de control utilizado en el análisis no-lineal de estructuras se ha implantado en el programa *NLFEM*. Para la implementación en el sistema de elementos finitos antes mencionado, se toma una combinación lineal de las componentes de desplazamientos que aumentan monótonamente durante el proceso completo hacia el colapso. Con las componentes individuales de la combinación se define un vector,  $\Theta$ , según los grados de libertad donde se prescriben los desplazamientos en las grietas y se proyecta el vector de incremento de los desplazamientos globales  $\Delta \mathbf{u}$  sobre éste. Con esta idea en mente, se puede formular la ecuación de restricción como:

$$\Theta^T \Delta \mathbf{u} = \Delta \bar{I} \quad (3.10)$$

En la ec. (3.10) se incorporan indirectamente los desplazamientos prescritos, ajustando el parámetro de fuerzas para reproducir los desplazamientos deseados. Esta técnica se le denomina *control indirecto de desplazamientos*. Para evitar utilizar la ecuación cuadrática que se presenta en el cuadro algorítmico 3.3, es recomendable utilizar la ecuación lineal en función de  $\delta \lambda_{n+1}^{(k+1)}$  en este tipo de control (ver ec. 3.11).

$$\Theta^T \left( \Delta \mathbf{u}_{n+1}^{(k)} + \delta \mathbf{u}_{n+1}^{(k+1)} \right) - \left( \Delta \bar{I} \right) = 0 \quad (3.11)$$

Si se utiliza  $\delta \mathbf{u}_{n+1}^{(k+1)} = \delta \bar{\mathbf{u}}_{n+1}^{(k-1)} + \delta \lambda_{n+1}^{(k+1)} \delta \bar{\mathbf{u}}_{n+1}^{(k+1)}$  se obtiene el incremento del factor que multiplica el vector de fuerzas:

$$\delta\lambda_{n-1}^{(s+1)} = \frac{\Delta\bar{l} - \Theta^T \Delta\mathbf{u}_{n-1}^{(s)} - \Theta^T \delta\tilde{\mathbf{u}}_{n-1}^{(k+1)}}{\Theta^T \delta\tilde{\mathbf{u}}_{n-1}^{(k+1)}} \quad (3.12)$$

En situaciones particulares se puede utilizar un vector  $\Theta$  con una sola componente no-nula, que se puede presentar de la siguiente forma:

$$\Theta^T = [0 \quad 0 \quad \dots \quad \Delta\Theta_g \quad \dots \quad 0 \quad 0]^T \quad (3.13)$$

donde  $\Delta\Theta_g$  representa el incremento de desplazamientos en la abertura de grieta con el que se controla el análisis en el grado de libertad activo  $g$ . Esto facilita el cálculo de la variación iterativa del parámetro multiplicador de la carga, dado que solo participan en la ec. (3.12) las componentes de los incrementos y variaciones iterativas de desplazamientos relativas al grado de libertad  $g$ .

### 3.1.2. Control automático de cargas.

En todo el desarrollo anterior se ha supuesto que los incrementos de carga son los adecuados, de tal manera que la presentación de los métodos se ha concentrado en el desarrollo del proceso de solución sobreentendiendo que los incrementos tiene valores constantes. El tamaño del incremento de desplazamientos, o de fuerzas, está limitado por las características físicas del problema que, en general, se le asocia a la intensidad con que se presenta el daño durante el análisis de estructuras. Los criterios empleados en este trabajo se han basan en el ajuste de las cargas por medio de las iteraciones y se ha utilizado para el procedimiento con arco, modificando el radio de curvatura del arco en función del número de iteraciones necesarias en un paso previo y el número de iteraciones deseadas (ver ec. 3.14).

$$\Delta l_n = \Delta l_{n-1} \left( \frac{I_d}{I_{n-1}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.14)$$

En la ecuación anterior,  $I_i$  es el número de iteraciones deseadas en el paso actual y  $I_{i-1}$  el número de iteraciones que fueron necesarias en el incremento anterior (Crisfield, 1991a; Fusco, 1993).

### 3.2 Plasticidad computacional.

En esta parte del capítulo se presentan algunos de los aspectos relacionados a la integración implícita de las ecuaciones de flujo que se derivan a partir de la teoría de la plasticidad. Para la revisión de la teoría de la plasticidad se mencionarán algunas referencias importantes a lo largo del siguiente desarrollo.

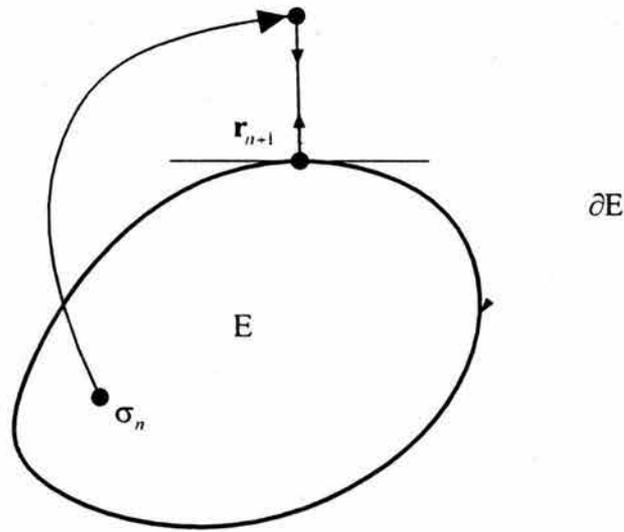
#### 3.2.1 Esquema de integración implícita de Euler.

A continuación se presenta un algoritmo implícito basado en el procedimiento de integración de Euler donde las variables internas y las deformaciones plásticas se calculan al final de la etapa de incremento de deformaciones. También la condición de fluencia se calcula al final de esta etapa. Las ecuaciones de flujo para representar la no-linealidad en el material se escriben como (Simo y Hughes, 1998; Belytschko *et. al.*, 2000):

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} &= \boldsymbol{\varepsilon}_n + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} \\
 \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p &= \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \Delta\gamma_{n+1} \mathbf{r}_{n+1} \\
 \mathbf{q}_{n+1} &= \mathbf{q}_n + \Delta\gamma_{n+1} \mathbf{h}_{n+1} \\
 \boldsymbol{\sigma}_{n+1} &= \mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p) \\
 f_{n+1} &= f(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \mathbf{q}_{n+1})
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

El conjunto de ecuaciones no-lineales mostrado en las ecs. (3.15), permite encontrar las variables  $(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}, \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p, \mathbf{q}_{n+1})$  a partir del paso previo donde se cumplen los requisitos de convergencia. La interpretación geométrica de este esquema se resume en la fig. 3.6. El incremento de deformación plástica está dado por la siguiente expresión:

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p = \Delta\gamma_{n+1} \mathbf{r}_{n+1} \tag{3.16}$$



**Figura 3.6** Interpretación geométrica del esquema de proyección de los esfuerzos sobre la superficie de fluencia.

Sustituyendo la ec. (3.16) en la cuarta ecuación de la ecs. (3.15), donde se define el tensor de esfuerzos  $\sigma_{n+1}$ , se obtiene:

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{tr} - \mathbf{C} : \Delta \epsilon_{n+1}^p = \sigma_{n+1}^{tr} - \Delta \gamma_{n+1} \mathbf{C} : \mathbf{r}_{n+1} \quad (3.17)$$

donde  $\sigma_{n+1}^{tr} = \sigma_n + \mathbf{C} : \Delta \epsilon_{n+1}$  es el esfuerzo de prueba o predictor elástico; la expresión  $-\Delta \gamma_{n+1} \mathbf{C} : \mathbf{r}_{n+1}$  es el corrector plástico. El corrector plástico proyecta el esfuerzo de prueba sobre la superficie de fluencia a lo largo de una dirección especificada por el flujo plástico. El predictor elástico está definido por el incremento de la deformación total y la fase correctiva está asociada al incremento del parámetro plástico  $\Delta \gamma_{n+1}$ . Así, durante la fase de predicción, los valores de las variables internas y la deformación plástica permanecen fijos, mientras que en la fase correctiva las deformaciones totales permanecen constantes. La consecuencia directa de esto se puede apreciar en la ec. (3.17), donde:

$$\Delta \sigma_{n+1} = -\mathbf{C} : \Delta \epsilon_{n+1}^p = -\Delta \gamma_{n+1} \mathbf{C} : \mathbf{r}_{n+1} \quad (3.18)$$

El proceso de solución del conjunto de ecuaciones algebraicas, que establece la fase de corrección plástica se obtiene con un procedimiento de Newton linealizando

sistemáticamente el conjunto de las ecs. (3.15). En la fase correctora, el tensor de deformación total es constante y por ello la linealización se hace sobre el incremento del parámetro plástico  $\Delta\gamma_{n+1}$ .

Para configurar el proceso algorítmico de solución consistente con el método de Newton, se introduce la siguiente notación para la linealización de una ecuación  $g(\Delta\gamma) = 0$ , con  $\Delta\gamma^{(0)}=0$ , en la  $k$ -ésima iteración se escribe lo siguiente:

$$g^{(k)} + \left( \frac{dg}{d\Delta\gamma} \right)^{(k)} \delta\gamma^{(k+1)}, \quad \Delta\gamma^{k+1} = \Delta\gamma^{(k)} + \delta\gamma^{(k+1)} \quad (3.19)$$

En esta última expresión, la variable  $\delta\gamma^{(k+1)}$  representa el incremento de la variable  $\Delta\gamma$  en la  $k+1$ -ésima iteración. Para más claridad en las ecuaciones que a continuación se presentan, se omite en cada una de ellas el subíndice  $n+1$ . Re-escribiendo los términos relacionados a la fase correctiva plástica y la función de fluencia, en las ecs. (3.15), se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= -\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_p + \Delta\gamma \mathbf{r} = \mathbf{0} \\ \mathbf{b} &= -\mathbf{q} - \mathbf{q}_p + \Delta\gamma \mathbf{h} = \mathbf{0} \\ f &= f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Utilizando la ec. (3.18) en la forma  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{p(k)} = -\mathbf{C}^{-1} : \Delta\boldsymbol{\sigma}^{(k)}$  se obtienen las siguientes expresiones para el algoritmo de retorno a la superficie de fluencia.

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^{(k)} + \mathbf{C}^{-1} : \Delta\boldsymbol{\sigma}^{(k)} + \Delta\gamma^{(k)} \Delta\mathbf{r}^{(k)} - \delta\gamma^{(k)} \mathbf{r}^{(k)} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{b}^{(k)} - \Delta\mathbf{q}^{(k)} + \Delta\gamma^{(k)} \Delta\mathbf{h}^{(k)} + \delta\gamma^{(k)} \mathbf{h}^{(k)} &= \mathbf{0} \\ f^{(k)} + f_{\boldsymbol{\sigma}}^{(k)} : \Delta\boldsymbol{\sigma}^{(k)} + f_{\mathbf{q}}^{(k)} \cdot \Delta\mathbf{q}^{(k)} &= 0 \end{aligned} \quad (3.21)$$

Donde

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{r}^{(k)} &= \mathbf{r}_{\boldsymbol{\sigma}}^{(k)} : \Delta\boldsymbol{\sigma}^{(k)} + \mathbf{r}_{\mathbf{q}}^{(k)} \cdot \Delta\mathbf{q}^{(k)} \\ \Delta\mathbf{h}^{(k)} &= \mathbf{h}_{\boldsymbol{\sigma}}^{(k)} : \Delta\boldsymbol{\sigma}^{(k)} + \mathbf{h}_{\mathbf{q}}^{(k)} \cdot \Delta\mathbf{q}^{(k)} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Los subíndices  $\sigma$  y  $q$  denotan la derivada parcial con respecto a estas variables de las funciones  $\Delta \mathbf{r}$  y  $\Delta \mathbf{h}$ . Las ecs. (3.21) son un conjunto de tres ecuaciones cuyas incógnitas son  $\Delta \sigma^{(k)}$ ,  $\Delta q^{(k)}$  y  $\delta \gamma^{(k)}$ . Utilizando las dos primeras ecuaciones en las ecs. (3.21) se tiene lo siguiente:

$$\left[ \mathbf{A}^{(k)} \right]^{-1} \begin{Bmatrix} \Delta \sigma^{(k)} \\ \Delta q^{(k)} \end{Bmatrix} = - \{ \tilde{\mathbf{a}}^{(k)} \} - \delta \gamma^{(k)} \{ \tilde{\mathbf{r}}^{(k)} \} \quad (3.23)$$

La matriz  $\left[ \mathbf{A}^{(k)} \right]^{-1}$  y los vectores  $\{ \tilde{\mathbf{a}}^{(k)} \}$  y  $\{ \tilde{\mathbf{r}}^{(k)} \}$  tienen las siguientes formas:

$$\left[ \mathbf{A}^{(k)} \right]^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{-1} + \Delta \gamma \mathbf{r}_\sigma & \Delta \gamma \mathbf{r}_q \\ \Delta \gamma \mathbf{h}_\sigma & -\mathbf{I} + \Delta \gamma \mathbf{h}_q \end{bmatrix}^{(k)}, \quad \{ \tilde{\mathbf{a}}^{(k)} \} = \begin{Bmatrix} \mathbf{a}^{(k)} \\ \mathbf{b}^{(k)} \end{Bmatrix}, \quad \{ \tilde{\mathbf{r}}^{(k)} \} = \begin{Bmatrix} \mathbf{r}^{(k)} \\ \mathbf{h}^{(k)} \end{Bmatrix} \quad (3.24)$$

El cuadro algorítmico 3.4 resume la aplicación del procedimiento de proyección de los esfuerzos a la superficie de fluencia.

En el contexto de los elementos finitos este procedimiento implícito de retorno, representado por la solución local de las ecuaciones no lineales de flujo, se aplica en cada punto de integración de un elemento para mantener la condición de persistencia (Simo y Huges, 1998).

**Cuadro Algorítmico 3.4** Esquema implícito de retorno de Euler.

1. Inicialización de variables

$$k := 0: \quad \varepsilon^{p^{(0)}} = \varepsilon_n^p, \quad \mathbf{q}^{(0)} = \mathbf{q}_n, \quad \Delta\gamma^{(0)} = 0, \quad \boldsymbol{\sigma}^{(0)} = \mathbf{C} : (\varepsilon_{n-1} - \varepsilon^{p^{(0)}})$$

2. Checar condición de fluencia en la  $k$ -ésima iteración:

$$f^{(k)} = f(\boldsymbol{\sigma}^{(k)}, \mathbf{q}^{(k)}), \quad \{\tilde{\mathbf{a}}^{(k)}\} = \begin{Bmatrix} \mathbf{a}^{(k)} \\ \mathbf{b}^{(k)} \end{Bmatrix}$$

3. Cálculo del parámetro plástico iterativo

$$\delta\gamma^{(k)} = \frac{f^{(k)} - \partial \mathbf{f}^{(k)} [\mathbf{A}^{(k)}] \{\tilde{\mathbf{a}}^{(k)}\}}{\partial \mathbf{f}^{(k)} [\mathbf{A}^{(k)}] \{\tilde{\mathbf{r}}^{(k)}\}}$$

4. Cálculo de los incrementos del tensor de esfuerzos y de los del vector de variables internas

$$\begin{Bmatrix} \Delta\boldsymbol{\sigma}^{(k)} \\ \Delta\mathbf{q}^{(k)} \end{Bmatrix} = -[\mathbf{A}^{(k)}] \{\tilde{\mathbf{a}}^{(k)}\} - \delta\gamma^{(k)} [\mathbf{A}^{(k)}] \{\tilde{\mathbf{r}}^{(k)}\}$$

5. Actualización de las deformaciones plásticas y variables

$$\varepsilon^{p^{(k+1)}} = \varepsilon^{p^{(k)}} + \Delta\varepsilon^{p^{(k)}} = \varepsilon^{p^{(k)}} - \mathbf{C}^{-1} : \Delta\boldsymbol{\sigma}^{(k)}$$

$$\mathbf{q}^{(k+1)} = \mathbf{q}^{(k)} + \Delta\mathbf{q}^{(k)}$$

$$\Delta\gamma^{(k+1)} = \Delta\gamma^{(k)} + \delta\gamma^{(k)}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{(k+1)} = \boldsymbol{\sigma}^{(k)} + \Delta\boldsymbol{\sigma}^{(k+1)} = \mathbf{C} : (\varepsilon_{n-1} - \varepsilon^{p^{(k+1)}})$$

Con los esfuerzos sobre la superficie de fluencia se evalúa el módulo tangente algorítmico, obtenido de la linealización sistemática de las ecuaciones de flujo, para calcular la matriz de rigidez del elemento empleando un esquema de integración definido para dicho elemento (Belytschko *et. al.* 2000). Así, el módulo algorítmico implícito, que es función de los esfuerzos y de las variables internas, se deriva a partir de la siguiente ecuación:

$$\begin{Bmatrix} \Delta\sigma^{(k)} \\ \Delta\mathbf{q}^{(k)} \end{Bmatrix} = \left[ \mathbf{A} - \frac{(\mathbf{A} : \tilde{\mathbf{r}}) \otimes (\partial\mathbf{f} : \mathbf{A})}{\partial\mathbf{f} : \mathbf{A} : \tilde{\mathbf{r}}} \right] : \begin{Bmatrix} d\boldsymbol{\varepsilon} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (3.25)$$

Esta ecuación debe ser condensada para lograr la forma establecida en la definición de módulo tangente que se basa en un esquema inverso de Euler,  $\mathbf{C}^{alg} = \left( \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\boldsymbol{\varepsilon}} \right)_{n-1}$ . También es necesario investigar la simetría de éste módulo algorítmico pues éste influye en el tipo de resolución de los sistemas de ecuaciones producto del ensamble de las matrices de rigidez de los elementos.

### 3.3. Sumario.

Obtener buenos resultados, cuando se realiza el análisis de estructuras con materiales con características cuasi-frágiles, depende del conocimiento de los procedimientos de solución que se aplican en el análisis no-lineal con el método de los elementos finitos. Por esta razón, en este capítulo se ha hecho una descripción de los procedimientos de solución que se emplean de forma general en el análisis no-lineal de estructuras y que se utilizan en este trabajo de tesis. También, se ha presentado el esquema de integración para la implantación del criterio de fluencia que se propone en este trabajo.

# CAPÍTULO 4

## Modelo de comportamiento para evaluación del daño por tensión en la mampostería

El estudio del comportamiento a un nivel constitutivo del material que se encuentra sometido a diversas trayectorias de cargas es un tema de investigación de mucho interés en la mecánica estructural. La idea de modelar materiales como el concreto y la mampostería surgió en los años 60 del siglo pasado; pero las formulaciones que se presentaron en aquel entonces carecían completamente de objetividad pues no se consideraba el daño producido en estos materiales.

Actualmente, se ha dado mayor énfasis a la definición de relaciones constitutivas a partir de ecuaciones de flujo inelástico que describen las condiciones cinemáticas, o de energía, en que se encuentra el medio continuo en el nuevo comportamiento ocasionado por el daño (Belytschko *et al.*, 2000).

El uso de estas relaciones constitutivas no es una cuestión trivial, especialmente en materiales donde el problema de objetividad y la incertidumbre en variables como la energía de fractura son bastante acentuados; pues éstas son sólo simplificaciones matemáticas de un comportamiento físico bastante complejo ante estados de deformaciones

que se producen en el continuo. Aunque no existe un modelo estricto que pueda representar el verdadero comportamiento del material: es importante comprender primero el problema físico que se está estudiando para elegir el modelo matemático de mejor aproximación y, segundo, establecer los procedimientos de solución apropiados que se usarán para resolver el problema numérico según esta elección, especialmente cuando se pierde la elipticidad en las ecuaciones de flujo.

Este capítulo presenta un modelo de plasticidad para la evaluación del daño por esfuerzos de tensión en la mampostería. El modelo ha sido derivado a partir de la superficie de fluencia de Rankine donde se ha incorporado dos variables de estado interno que describen las características mecánicas no-lineales respecto a los ejes materiales  $x$  e  $y$ . Este tipo de modelo trata de representar de manera objetiva la entropía del compuesto que existe en este tipo de material. Este criterio de plasticidad propuesto se ha diseñado para estimar la respuesta estructural en edificaciones de mampostería que pueden ser modeladas como planas. El modelo de Rankine con dos variables internas es uno de los aportes que se presentan en este trabajo; junto con el sistema de elementos finitos *NLFEM* (Roeder y Ayala, 2003) donde éste se ha implantado.

### **4.1. Formulación del modelo ortotrópico de Rankine con dos variables internas.**

A continuación se presenta una extensión al modelo de Rankine estándar donde se utilizan dos parámetros internos de ablandamiento con memoria que consideran la evolución del proceso inelástico en dos direcciones ortogonales y una respuesta de cortante flexible. El potencial plástico está asociado a la superficie de falla. Este modelo fue propuesto inicialmente por Lourenço(1996a) utilizando solo una variable interna que cuantifica el ablandamiento del material. La superficie de fluencia es isotrópica y cinemática (Simo y Hughes, 1998). La evolución de las variables internas,  $\kappa_1$  y  $\kappa_2$ , se establece a partir de la hipótesis general de endurecimiento/ablandamiento por trabajo (Lubliner, 1990; Oller, 2001; Belytschko *et al.*, 2000; Jirásek y Bazant, 2002). El modelo propuesto se utiliza para

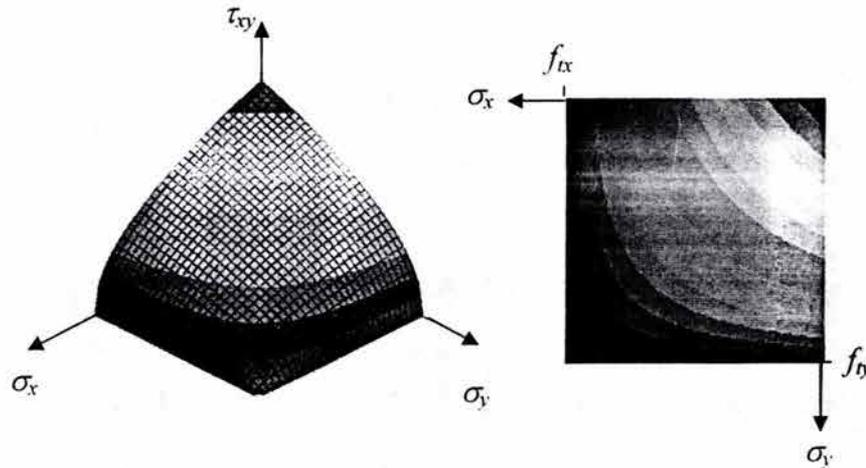
el modelado del daño utilizando relaciones constitutivas, contrario a los modelados discretos para la fractura en el material.

La ecuación de la superficie de fluencia de Rankine ortotrópico con dos variables, cuya superficie de falla que se observa en la fig. 4.1, tiene la siguiente expresión:

$$f(\sigma, \kappa_1, \kappa_2) = \frac{(\sigma_x - \bar{\sigma}_1(\kappa_1)) + (\sigma_y - \bar{\sigma}_2(\kappa_2))}{2} + \sqrt{\left( \frac{(\sigma_x - \bar{\sigma}_1(\kappa_1)) - (\sigma_y - \bar{\sigma}_2(\kappa_2))}{2} \right)^2 + \alpha \tau_u^2} \quad (4.1)$$

Esta tesis utiliza el parámetro  $\alpha$  como lo definió Lourenço(1996a), el cual controla la contribución del esfuerzo cortante durante la falla del material. El valor de  $\alpha$  se evalúa con la ec. 4.2.

$$\alpha = \frac{f_{tx} \cdot f_{ty}}{\tau_u^2} \quad (4.2)$$



**Figura 4.1** Superficie de fluencia de Rankine ortotrópico con dos variables internas

En la ec. (4.2),  $f_{tx}$  y  $f_{ty}$  representan los valores de las resistencias a tensión del material en las direcciones  $x$  y  $y$  respectivamente. El valor  $\tau_u$  representa la resistencia al cortante del material.

Por la formulación del criterio de plasticidad que se propone, en este trabajo se sigue la notación de Voigt (Belytschko *et al.*, 2000) para poder manipular cantidades tensoriales en forma matricial para su tratamiento numérico; así, la función de fluencia se expresa como:

$$f = \left( \frac{1}{2} \xi^T \mathbf{P} \xi \right)^{1/2} + \frac{1}{2} \pi^T \xi \quad (4.3)$$

En esta ecuación, la matriz de proyección  $\mathbf{P}$  y el vector  $\pi$  están definidos en la ecs. (4.4).

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2\alpha \end{bmatrix}, \quad \pi = [1 \ 1 \ 0]^T \quad (4.4)$$

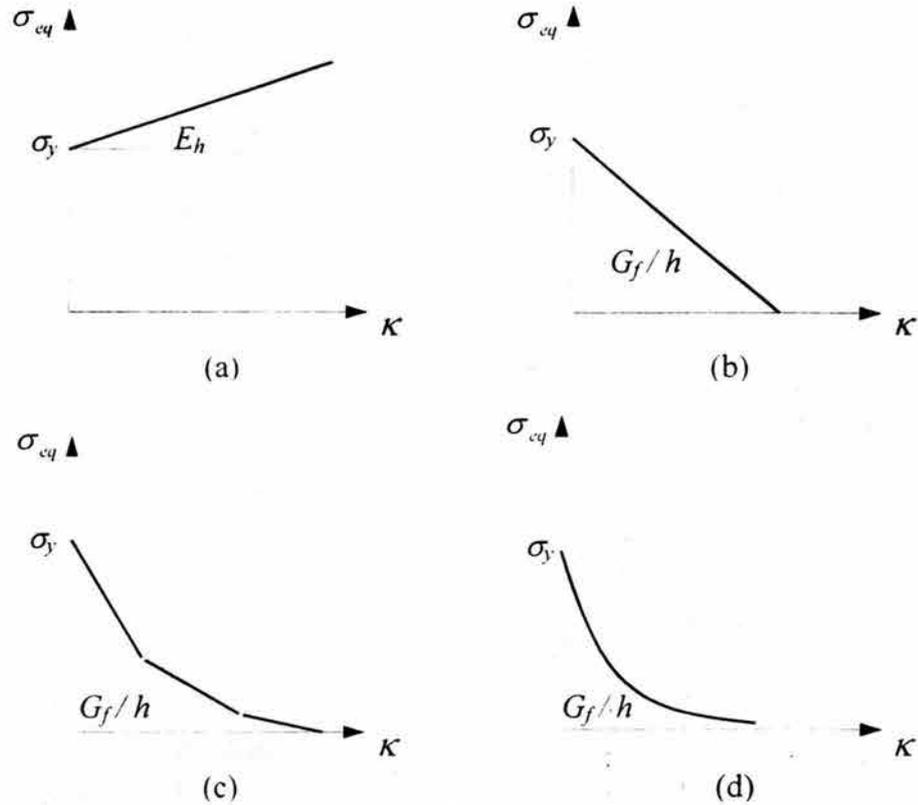
Las siguientes expresiones de los vectores de esfuerzos reducidos  $\xi$  y de esfuerzos de retorno  $\eta$  completan la del criterio de fluencia propuesto.

$$\begin{aligned} \xi &= \sigma - \eta \\ \eta &= [\bar{\sigma}_1 \ \bar{\sigma}_2 \ 0] \end{aligned} \quad (4.5)$$

Los esfuerzos equivalentes  $\bar{\sigma}_1$  y  $\bar{\sigma}_2$  son funciones escalares prescritas que representan el comportamiento de ablandamiento del material en las direcciones  $x$  e  $y$ ; cada una de éstas tiene como variables independientes a las deformaciones equivalentes  $\kappa_1$  y  $\kappa_2$  en las direcciones respectivas. Para cada dirección de ablandamiento, o endurecimiento, se puede asignar el tipo de función prescrita como se puede apreciar en la figs. 4.2 (b-d) que dependen de la energía de fractura en tensión liberada en el material y de la magnitud de la banda de agrietamiento según el tamaño de los elementos finitos utilizados en el modelado.

A diferencia de las funciones prescritas para el endurecimiento del material (ver fig. 4.2a), las funciones de ablandamiento generan que la densidad de trabajo de segundo orden (Hill, 1950) sea negativa. Esta es una cuestión que tiene relación con la unicidad de solución de

las ecuaciones diferenciales que gobiernan el problema y al fenómeno de contractibilidad (Simo y Huges, 1998) que puede producir la pérdida de la elipticidad de las ecuaciones diferenciales parciales.



**Figura 4.2** Esfuerzos equivalentes de post-fluencia: (a) Endurecimiento lineal, (b) ablandamiento lineal. (c) ablandamiento multi-lineal y (d) ablandamiento exponencial.

Para sobrellevar la dificultad que se presenta en materiales inestables, como la mampostería y el concreto, se incorpora implícitamente el tamaño de la malla  $h$  en las relaciones constitutivas utilizando la misma suposición de Hillerborg *et al.* (1976). En este caso la energía de fractura se iguala a la disipación del energía por ablandamiento, de este modo se define la hipótesis general de trabajo por ablandamiento. Con esta hipótesis se puede definir la expresión que evalúa la evolución de las variables internas  $\kappa_1$  y  $\kappa_2$ ; esto significa en términos matemáticos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\Delta\kappa_1 &= \frac{\Delta\gamma}{\bar{\sigma}_1} \sigma^T \mathbf{Q}_1 \frac{\partial f}{\partial \sigma} \\ \Delta\kappa_2 &= \frac{\Delta\gamma}{\bar{\sigma}_2} \sigma^T \mathbf{Q}_2 \frac{\partial f}{\partial \sigma}\end{aligned}\tag{4.6}$$

donde  $\Delta\kappa_1$  y  $\Delta\kappa_2$  representan los incrementos de las deformaciones equivalentes en las direcciones  $x$  e  $y$ .  $\bar{\sigma}_1$  y  $\bar{\sigma}_2$  son los correspondientes esfuerzos efectivos, en los cuales se considera implícitamente la longitud característica  $h$  de la malla empleada, y  $\Delta\gamma$  es el incremento del multiplicador plástico. Para asegurar que se produzca el ablandamiento del material respecto a los ejes  $x$  e  $y$ , se definen las matrices diagonales de proyección,  $\mathbf{Q}_1 = \text{diag}\{1, 0, 1\}$  y  $\mathbf{Q}_2 = \text{diag}\{0, 1, 1\}$ .

La integración del conjunto de ecuaciones no-lineales se dispone de tal forma que sea consistente con el esquema regular de solución de Newton-Raphson (Simons y Powell, 1982; Crisfield(a), 1991; Crisfield(b), 1991; Press *et al.*, 1992; Fusco, 1993; Bittnar y Sejnoha, 1996; Belytschko *et al.* 2000).

$$\begin{aligned}\Delta\varepsilon^e + \Delta\varepsilon^{pl} - \Delta\varepsilon &= 0 \\ f(\sigma, \kappa_1, \kappa_2) &= 0 \\ \frac{\Delta\gamma}{\bar{\sigma}_1} \sigma^T \mathbf{Q}_1 \frac{\partial f}{\partial \sigma} - \Delta\kappa_1 &= 0 \\ \frac{\Delta\gamma}{\bar{\sigma}_2} \sigma^T \mathbf{Q}_2 \frac{\partial f}{\partial \sigma} - \Delta\kappa_2 &= 0\end{aligned}\tag{4.7}$$

Para poder emplear el esquema de integración presentado en el cuadro algorítmico 3.4 del capítulo tres de esta tesis, se definen el vector de variables internas y el vector de incremento como:

$$\mathbf{q}_{n+1} = \begin{bmatrix} \kappa_{1,n+1} & \kappa_{2,n+1} \end{bmatrix}$$

$$\Delta \mathbf{q}_{n+1} = \begin{Bmatrix} \Delta \kappa_{1,n+1} \\ \Delta \kappa_{2,n+1} \end{Bmatrix} = \Delta \gamma_{n+1} \begin{Bmatrix} \frac{1}{\bar{\sigma}_1} \sigma^T \mathbf{Q}_1 \partial f_{\sigma} \\ \frac{1}{\bar{\sigma}_2} \sigma^T \mathbf{Q}_2 \partial f_{\sigma} \end{Bmatrix} = \Delta \gamma_{n+1} \mathbf{h}_{n+1} \quad (4.8)$$

Los símbolos  $\partial f_{\sigma}$  y  $\partial f_{\mathbf{q}}$  indican las derivadas direccionales de la función de fluencia con respecto al vector de esfuerzos,  $\sigma$ , y al vector  $\mathbf{q}$  donde se almacenan las variables internas. Como ya se indicó, el potencial plástico es asociado ( $\mathbf{r} = f_{\sigma}$ ). Este proceso de solución proyecta el tensor de esfuerzos a la superficie de fluencia y al mismo tiempo actualiza las variables internas inherentes al estado termodinámico irreversible ocasionado por el ablandamiento del material.

La formación de las ecuaciones que definen el flujo inelástico en la zona discontinua de la superficie de fluencia ( $\tau_{xy} = 0$ ) es similar al caso de la zona continua de la superficie. Estas ecuaciones no-lineales son:

$$\begin{aligned} \sigma - \eta &= 0 \\ \frac{1}{\bar{\sigma}_1} \sigma^T \mathbf{Q}_1 \Delta \varepsilon^{pl} - \Delta \kappa_1 &= 0 \\ \frac{1}{\bar{\sigma}_2} \sigma^T \mathbf{Q}_2 \Delta \varepsilon^{pl} - \Delta \kappa_2 &= 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

Las expresiones de las derivadas parciales para los casos continuo y discontinuo se presentan en el apéndice A de este trabajo. El procedimiento de solución general se lleva a cabo de la misma manera como se presenta en el cuadro algorítmico 3.4 presentado en el capítulo anterior de esta tesis.

El procedimiento de integración desarrollado en este trabajo en las zonas continua y discontinua de la superficie de fluencia propuesta ha mostrado ser estable ante diversos escenarios de deformaciones (Roeder y Ayala, 2000; Roeder y Ayala, 2002). Este criterio

de plasticidad ya está implantado en el sistema de elementos finitos desarrollado en este trabajo de investigación.

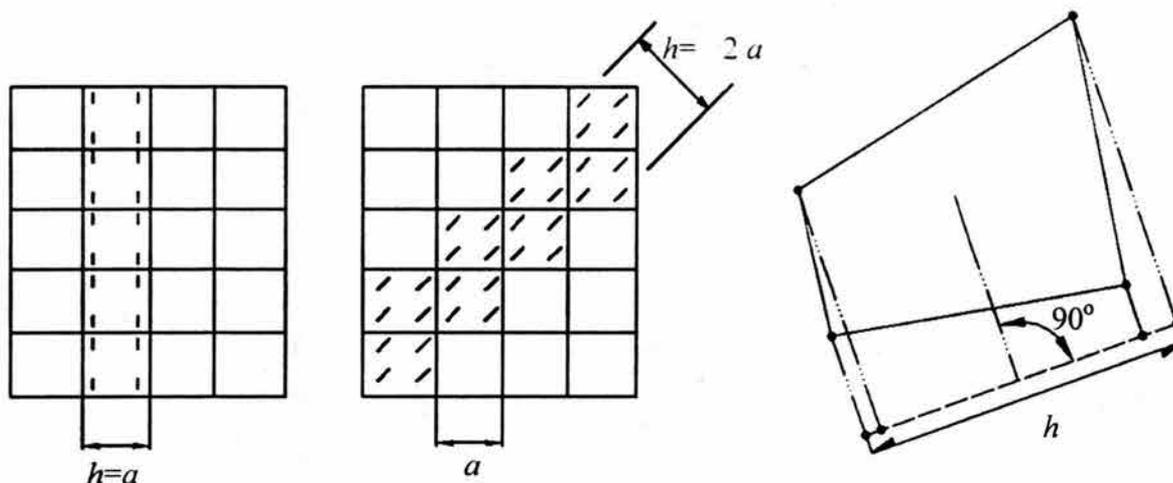
#### **4.2. Objetividad de los modelos numéricos.**

En el análisis de estructuras donde se utilizan modelos constitutivos para simular el daño, la única manera de evitar la sensibilidad patológica de los resultados con el tamaño de los elementos finitos es considerar el daño que se observa en el modelo físico (Jirásek y Bazant, 2002).

Una malla objetiva con el daño observado en el material debe tomar en cuenta la ley constitutiva básica de separación y tensión en una grieta cohesiva, la cual se distribuye posteriormente en una distancia  $h$  que represente una medida característica de la malla de elementos finitos que se esté utilizando.

Existen aproximaciones rigurosas para estimar la medida característica  $h$ , denominada ancho de agrietamiento, que delimita la zona donde se localizan las discontinuidades físicas (Oliver, 1989); pero, en virtud que la resistencia a la tensión y la forma del diagrama de ablandamiento juegan un papel más importante que la energía de fractura y el ancho de agrietamiento en la simulación numérica del comportamiento no-lineal del material (Rots, 1988), se presentan a continuación dos criterios prácticos para asignar un ancho de banda de agrietamiento durante el desarrollo de los modelos de elementos finitos.

El primer criterio presentado por Jirasek y Bazant (2002) se puede emplear en estructuras donde se conoce la localización de la discontinuidad física. En estos casos, el valor de  $h$  se puede estimar de forma razonable proyectando el elemento sobre una recta ortogonal a la grieta embebida en dicho elemento (ver fig. 4.3).



**Figura 4.3** Anchos de agrietamiento. (a) Ancho de agrietamiento paralelo a los lados del elemento, (b) ancho de banda en diagonal y (c) tamaño de ancho de banda equivalente

El segundo criterio ajusta la energía de fractura utilizando la longitud equivalente del ancho de agrietamiento  $h$  que se calcula a partir del área del elemento  $A_e$  (Rots, 1988; Feenstra, 1993; Lourenço, 1996a) como se muestra en la ec. (4.10).

$$h = \alpha_n \quad A_c = \alpha_n \left( \sum_{\xi=1}^{n_\xi} \sum_{\eta=1}^{n_\eta} \det(\mathbf{J}) w_\xi w_\eta \right) \quad (4.10)$$

Este ancho es una variable que depende del polinomio de interpolación del elemento y del esquema de integración del elemento que se esté empleando. A este respecto, en este trabajo se han utilizado elementos cuadriláteros y triangulares lineales con esquemas regulares de integración de Gauß de cuatro y un punto respectivamente. Los elementos de interfase se integran con un esquema de Lobatto de dos puntos. Estos esquemas de integración, además de otros, se han implantado en el programa *NLFEM* (Roeder y Ayala, 2003).

### 4.3. Validación del modelo de plasticidad propuesto.

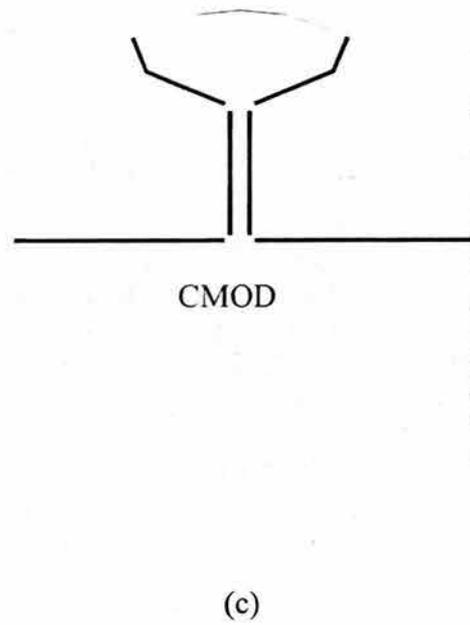
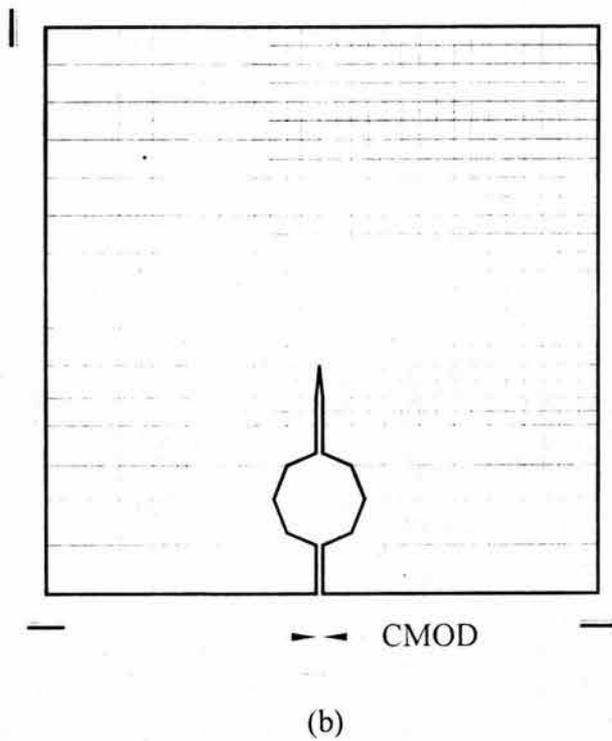
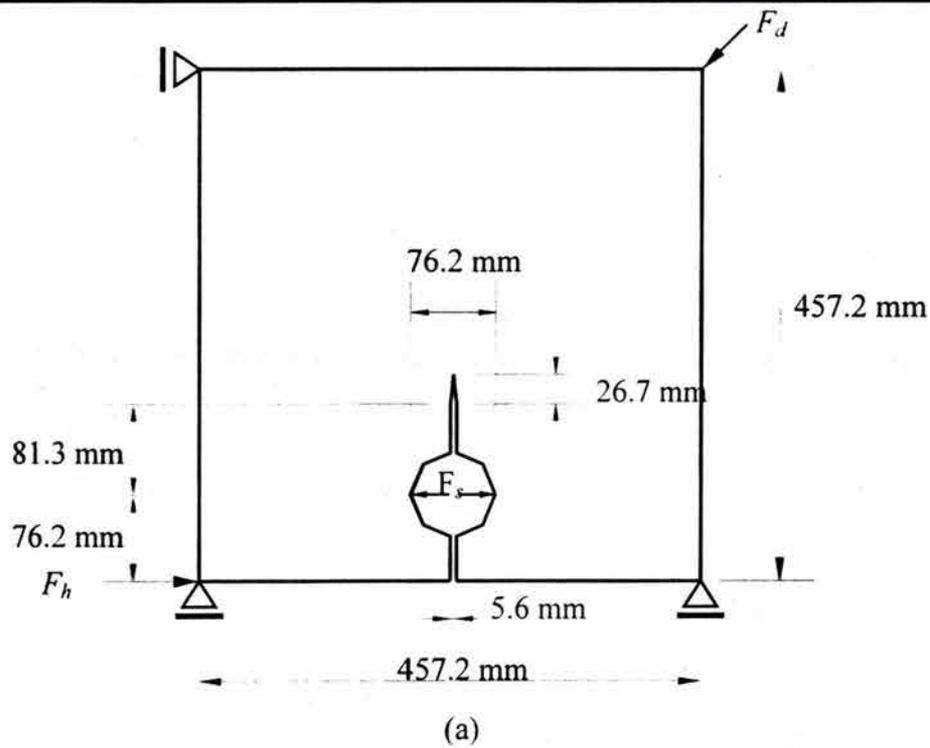
En esta parte de la tesis se considera dos pruebas numéricas para estudiar la eficiencia del modelo de plasticidad propuesto en este trabajo doctoral. En la primera prueba se estudia una placa delgada donde se simula la propagación del agrietamiento en zig-zag. En el segundo modelo de validación, el cual es un muro de mampostería simple, se aplica una carga lateral que se incrementa monótonamente. Todas las simulaciones numéricas se realizan en el programa de elementos finitos *NLFEM* (Roeder y Ayala, 2003).

#### 4.3.1. Modelo de placa sometido a cargas diagonales.

En el siguiente modelo numérico, presentado por Kobayashi *et al.* (1985), Rots (1988), Feenstra (1993) y Lourenço *et al.* (1995), se simula el comportamiento de una placa sometida a fuerzas concentradas como se aprecia en la fig. 4.1. Este estado de cargas hace que la grieta evolucione en modo de fractura I a partir del entalle del modelo.

Para el analizar la placa con modelos de esfuerzos planos, la geometría se definió con elementos finitos cuadriláteros de cuatro nudos y elementos triangulares de tres nudos; el material tiene una resistencia a la tensión de  $f_t = 3 \text{ N/mm}^2$  y una energía de fractura de  $G_f = 0.10 \text{ J/mm}^2$ . El espesor de la placa es de 50.8 mm y los valores del módulo de Young y de Poisson son respectivamente  $35000 \text{ N/mm}^2$  y 0.20.

La fuerza diagonal,  $F_d$ , y la fuerza de separación,  $F_s$ , mantiene una relación constante de 0.6 hasta que  $F_d$  alcanza un valor máximo de aproximadamente 3.92 kN. luego  $F_d$  permanece constante mientras se desarrolla la fuerza  $F_s$ . La fuerza horizontal,  $F_h$ , es igual a  $\sqrt{2} F_d$ .



**Figura 4.4** Modelo de prueba CLWL-DCB. (a) Características del modelo, (b) malla de elementos finitos y (c) detalle con los nudos de control.

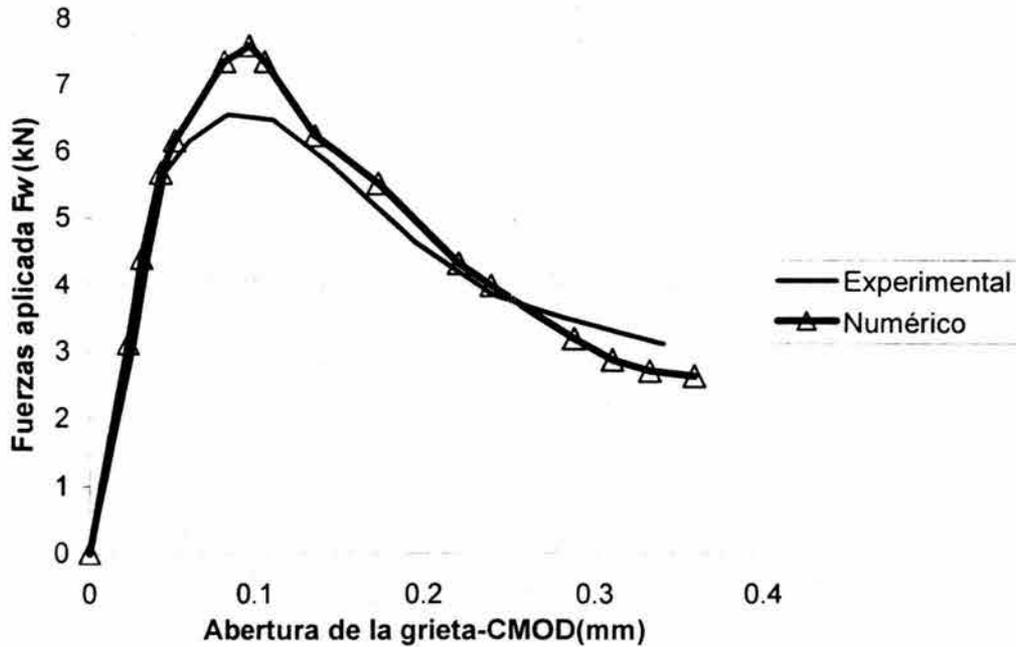
La respuesta de esta estructura se obtuvo utilizando el control por desplazamientos indirectos, siguiendo lo recomendado por De Borst (1987). Para aplicar este control en el modelo numérico, se seleccionaron los desplazamientos de los nudos que se especifican en la fig. 4.4c; el programa *NLFEM* calcula internamente la diferencia de los desplazamientos en la dirección  $x$  en los nudos del entalle señalados,  $CMOD^1$  (Rots, 1988; Feenstra, 1993; Lourenço, 1996). En el modelo de elementos finitos se han utilizado elementos planos de esfuerzos integrados numéricamente con una regla de Gauß de  $2 \times 2$  en los cuadriláteros y los elementos triangulares tienen un esquema de integración de Gauß de un punto. En este problema se han considerado funciones de esfuerzos equivalentes de tipo exponencial en las direcciones  $x$  e  $y$ , como se muestra a continuación:

$$\bar{\sigma}_1 = f_{ix} \exp\left(-\frac{h \cdot f_{ix}}{G_{ix}} \kappa_1\right), \quad \bar{\sigma}_2 = f_{iy} \exp\left(-\frac{h \cdot f_{iy}}{G_{iy}} \kappa_2\right) \quad (4.11)$$

Los resultados numéricos y los experimentales se muestran en la fig. 4.5. Los datos en el eje de las abscisas son las diferencias de desplazamientos en los nudos de control,  $CMOD$ , y en el eje de las ordenadas se muestran los valores de las fuerzas  $F_s$ .

La comparación de la respuesta del modelo numérico muestra una buena concordancia con la del ensayo experimental. También se puede apreciar que el modelo de plasticidad usado hace que el modelo comience su fase de ablandamiento después de alcanzar una carga máxima de aproximadamente 7.6 kN la estructura sea más rígida y a partir de una carga de separación de 0.095 mm mostrando que el modelo numérico ofrece una resistencia ligeramente mayor al del modelo experimental.

<sup>1</sup> En las referencias presentadas sobre este problema las siglas  $CMOD$  vienen de la frase de *Crack Mouth Opening Displacement*.



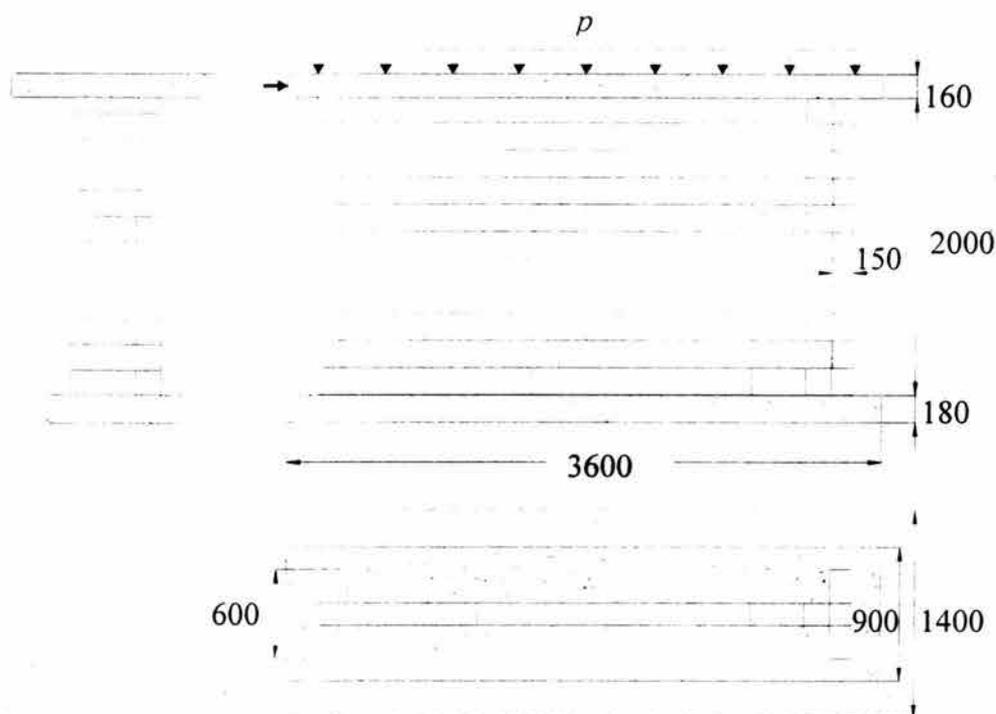
**Figura 4.5** Modelo CWLDCB-Comparación de resultados experimental y numérico.

#### 4.3.2. Muro de mampostería simple, ETH Zürich.

En el modelo que se presenta a continuación (ver fig. 4.6) es la simulación de unas pruebas de carga llevadas a cabo sobre muros de mampostería simple. Lourenço (1996a) realizó una serie de experimentos numéricos aplicando cargas laterales y verticales para validar su modelo de plasticidad compuesto por dos criterios de fluencia. Berto *et al.* (2001) también presentaron esta estructura para validar un modelo de daño ortotrópico en tensión y compresión.

En el experimento numérico que se realiza con este muro se considera sólo el modelo denominado W1 por Lourenço (1996a) donde las cargas verticales son de baja magnitud.

Las propiedades elásticas e inelásticas del material en el régimen en tensión se presentan en la tabla 4.1. En este ejemplo la magnitud del ancho de agrietamiento se ha valorado de acuerdo con la ec. (4.10). Para el modelo del muro se emplearon elementos finitos de 4 nudos.



**Figura 4.6** Geometría y cargas en modelo de muro de mampostería ETH-Zürich.

**Tabla 4.1** Parámetros elásticos e inelásticos del material

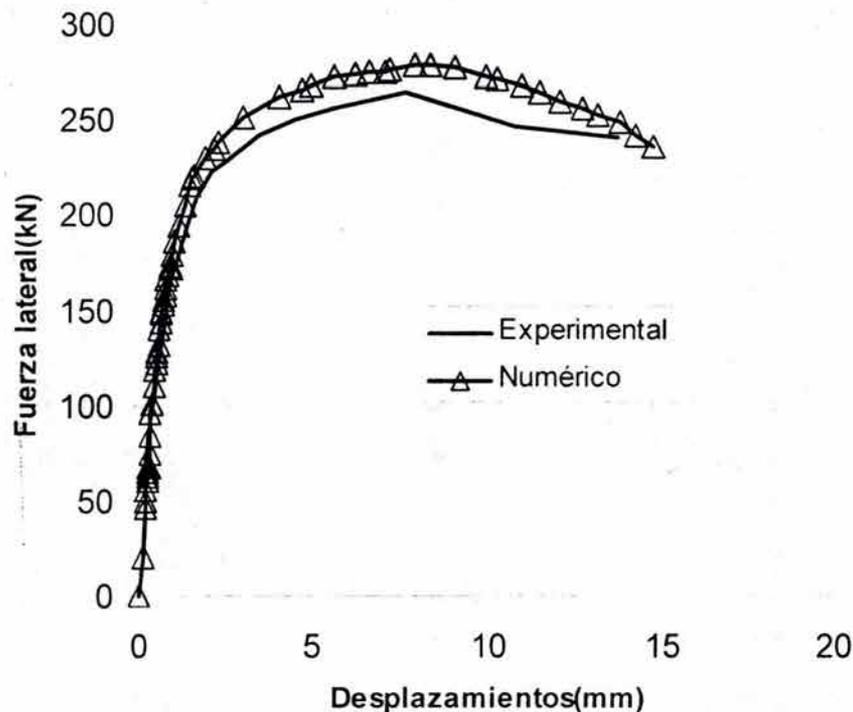
Parámetro	Valor
Módulo de Young en la dirección $x$	2460 N/mm <sup>2</sup>
Módulo de Young en la dirección $y$	5460 N/mm <sup>2</sup>
Relación de Poisson $\nu_{xy}$	0.18
Módulo de Corte en $xy$	1130 N/mm <sup>2</sup>
Resistencia a tensión en la dirección $x$ ( $f_{tx}$ )	0.28 N/mm <sup>2</sup>
Resistencia a tensión en la dirección $y$ ( $f_{ty}$ )	0.05 N/mm <sup>2</sup>
Energía de fractura en la dirección $x$ ( $G_{fx}$ )	0.02 N-mm/mm <sup>2</sup>
Energía de fractura en la dirección $y$ ( $G_{fy}$ )	0.02 N-mm/mm <sup>2</sup>
$\alpha$	1.73

En las alas extremas del muro de mampostería se toma un valor de  $f_{tx}=0.68$  N/mm<sup>2</sup> (Lourenço, 1996a; Berto *et al.*, 2001). Las resistencias a compresión en la dirección  $x$  e  $y$

son respectivamente  $1.87 \text{ N/mm}^2$  y  $7.61 \text{ N/mm}^2$ . El valor de la resistencia a la compresión en las alas se toma igual al presentado por Lourenço (1996a).

Inicialmente el muro está sujeto a una carga vertical de  $p=0.61 \text{ kN/mm}^2$ . Los resultados obtenidos en el ensayo numérico y los resultados experimentales se presentan la fig. 4.7.

En esta figura se puede observar que la respuesta del modelo experimental y el modelo de numérico son similares. Se ha encontrado que, en aproximadamente  $2.51 \text{ mm}$  de desplazamiento horizontal, existe una descarga en el modelo en la primera fase de carga, debido a que el ala de la izquierda se separa del muro. Este comportamiento también es reportado por Lourenço (1996a). Además se aprecia que la carga distribuida que confina el muro de mampostería es esencial para el equilibrio durante el experimento numérico, aunque el daño que se muestra en la estructura se debe principalmente a efectos de tensión como lo pronostica el modelo de plasticidad propuesto.



**Figura 4.7** Resultados experimentales y numéricos del modelo de muro de mampostería ETH-Zürich.

## **Sumario.**

En este capítulo se ha presentado el criterio de fluencia de Rankine Ortotrópico de dos variables internas. Con éste se llevaron a cabo dos experimentos numéricos para observar el comportamiento de éste en situaciones donde se provoca la falla en el material por efectos de tensión. La respuesta obtenida con los modelos numéricos logra una buena concordancia en la respuesta global. Además, el modelo de plasticidad presenta las mismas zonas de influencia de agrietamiento comparado con otros modelos de comportamiento.

# CAPÍTULO 5

## Aplicaciones a estructuras de mampostería

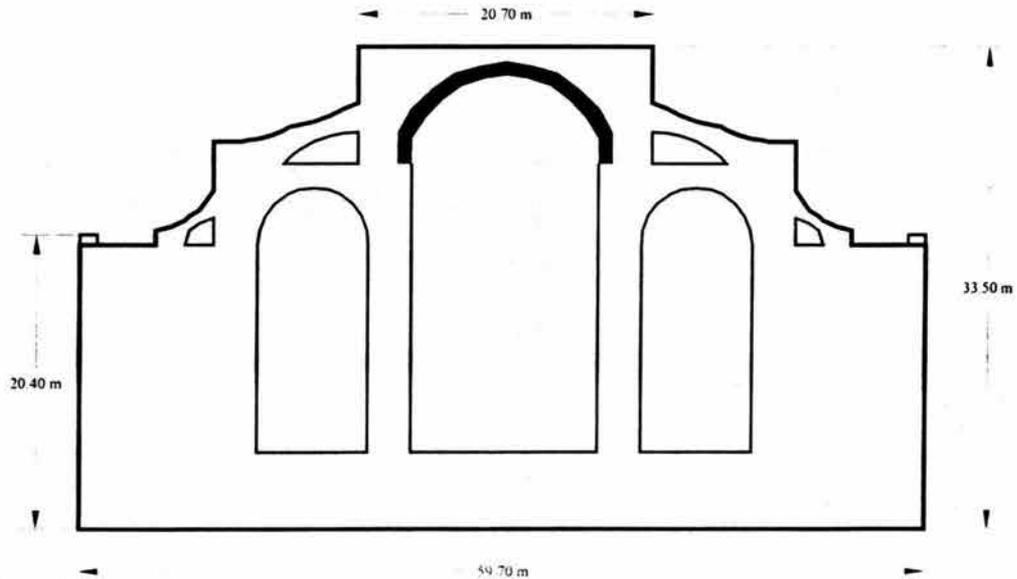
En el capítulo anterior se ha estudiado dos casos con la finalidad de validar el modelo que se muestra en este trabajo. A continuación se presentan cuatro ejemplos de aplicación del modelo de Rankine ortotrópico para observar su desempeño y el potencial de éste en situaciones prácticas o en evaluación de construcciones antiguas.

### 5.1 Determinación de la estabilidad estructural en arcos de mampostería

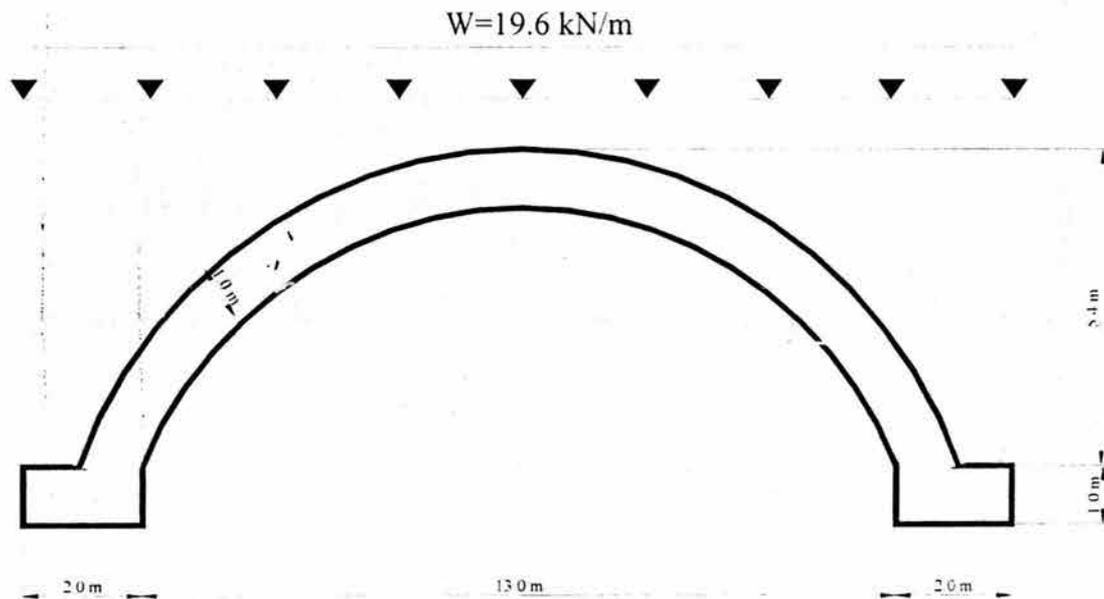
Muchos analistas consideran que la resistencia a tensión de la mampostería es nula. El siguiente ejemplo presenta las limitaciones de esta aproximación cuando se estudia la estabilidad de estructuras de arco (Roeder y Ayala, 2001). Con este objetivo se calcularon las líneas de presión con los resultados obtenidos con el modelo de Rankine ortotrópico y otros dos modelos constitutivos distintos.

El primer modelo de comportamiento que se utilizó fue de agrietamiento distribuido considerando que el material es frágil (Roeder, 1998). El segundo es el modelo de daño propuesto por Mazars (1984) para la evaluación de estructuras de concreto.

Para comparar el desempeño de los tres modelos constitutivos se eligió uno de los arcos, sombreado en la fig. 5.1, que se encuentran en el eje longitudinal de la Catedral Metropolitana de la Ciudad de México.



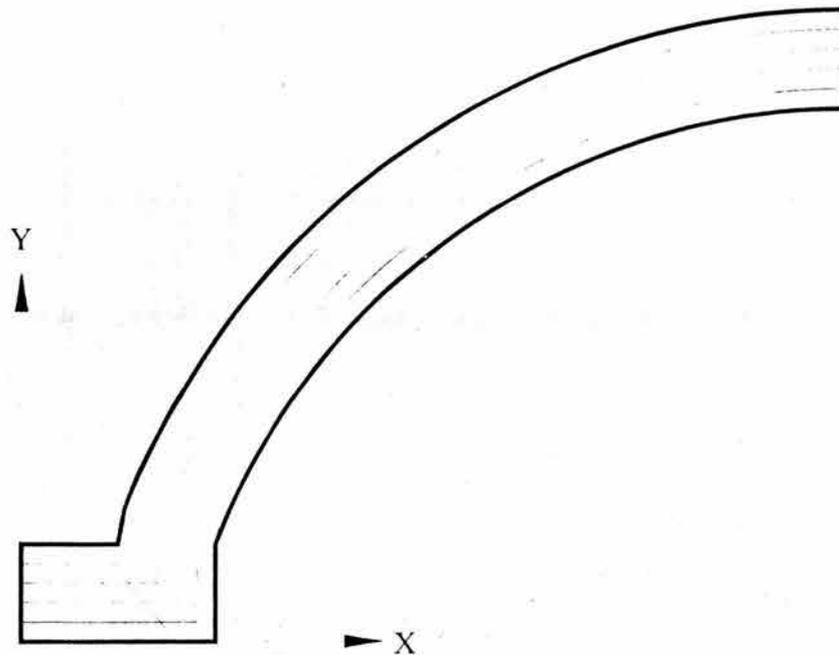
**Figura 5.1** Sección típica de la Catedral Metropolitana de la Ciudad de México (Roeder, 1998; Roeder y Ayala, 2001).



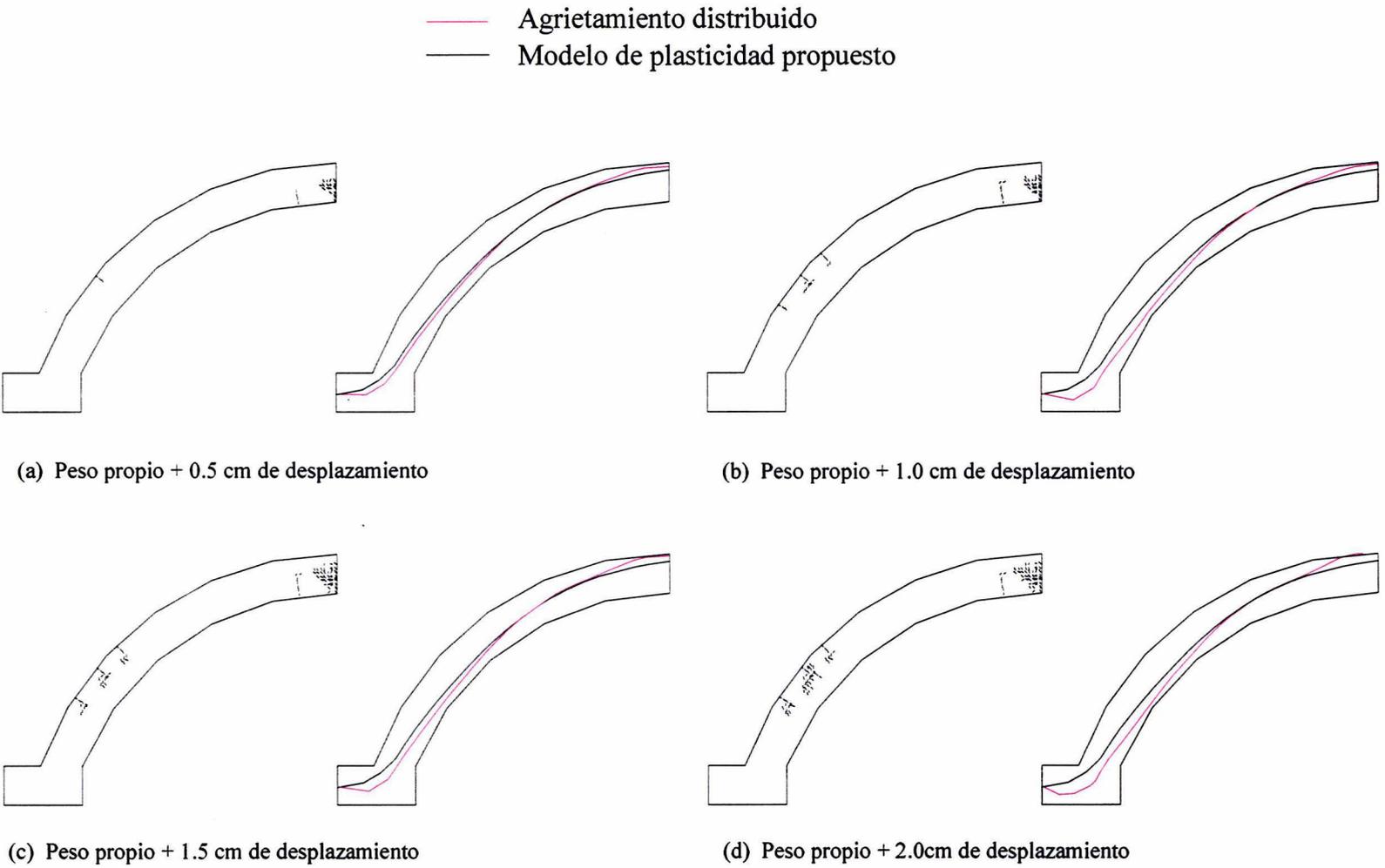
**Figura 5.2** Dimensiones del arco

El arco presenta las características geométricas mostradas en la fig. 5.2. A la estructura se le somete a cargas distribuidas verticales que simulan el peso propio de ésta y, posteriormente, a desplazamientos de apertura en los apoyos hasta alcanzar el valor de 80 mm. Se definió el valor de 80 mm de abertura porque el modelo numérico del arco empleando el concepto de agrietamiento distribuido es estable hasta este desplazamiento cuando se supone que el material es completamente frágil. Para el ablandamiento del material se utilizaron diagramas de esfuerzo-deformación equivalentes que varían linealmente en ambas direcciones respecto a los ejes materiales.

En cuanto a los parámetros mecánicos de la mampostería considerada, los valores del módulo de Young y el de la relación de Poisson son respectivamente  $2.5E6 \text{ kN/m}^2$  y 0.18. La energía de fractura por tensión es de  $1.2E6 \text{ kN-m/m}^2$  y la resistencia a la tensión es de  $280 \text{ kN/m}^2$ . Para este ejemplo se emplea la función lineal de ablandamiento de esfuerzos con una deformación última de agrietamiento de 0.0001 y un valor de  $\alpha$  igual a uno. El modelo numérico está elaborado con elementos finitos cuadriláteros de nueve nudos (ver fig. 5.3).



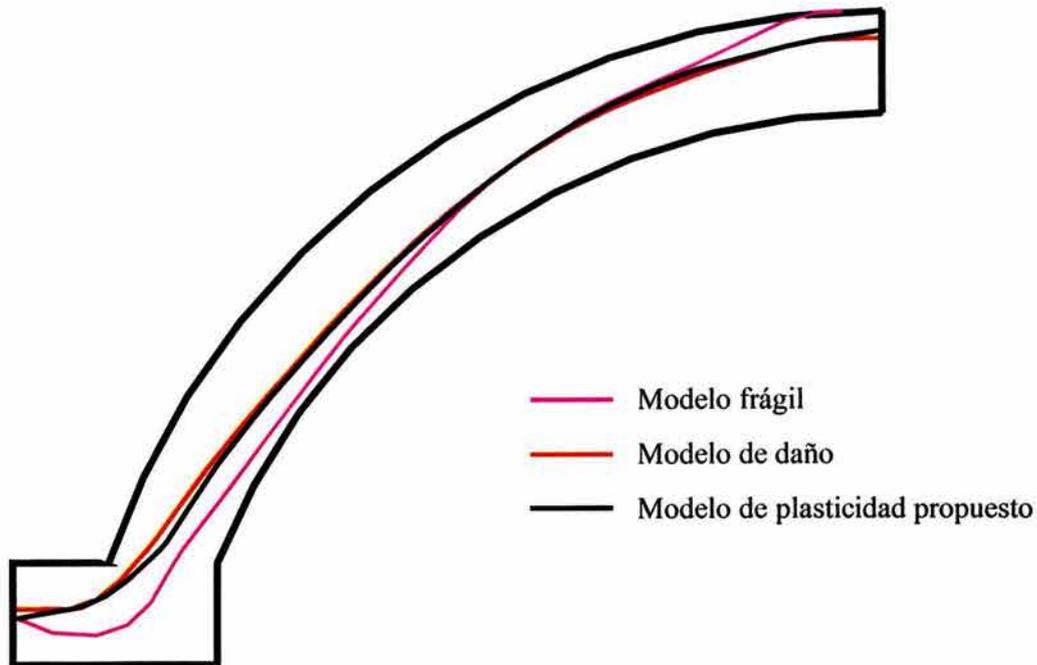
**Figura 5.3** Modelo de elementos finitos del arco de mampostería.



**Figura 5.4** líneas de presiones en distintas etapas de apertura de apoyo

Las fuerzas normales y la posición de éstas en secciones normales al eje del arco se calculan integrando numéricamente los resultados de esfuerzos. En la fig. 5.4 se muestra la localización de deformaciones por agrietamiento al ir aumentando los desplazamientos de apertura en los apoyos del arco. La posición de la línea de presiones calculada con el modelo propuesto varía levemente; por ello, considerando también la escala de la gráfica, no se puede apreciar los cambios de posición de ésta. De otro lado cuando se observa la línea de presiones del arco, cuando se considera que el material es frágil, la posición de ésta cambia repentinamente a pesar que los niveles de desplazamientos son bajos.

Las líneas de presiones resultantes, calculadas a partir de los resultados obtenidos con los tres modelos constitutivos, se pueden apreciar en la fig. 5.5.



**Figura 5.5** Comparación de las líneas de presiones obtenidas con los tres modelos constitutivos

Se puede observar que la línea de presiones calculada con un modelo frágil de agrietamiento distribuido está cerca de los límites de la geometría del arco; por otro lado, que el modelo de plasticidad de Rankine Ortotrópico propuesto en este estudio y el modelo de daño de Mazars presenta una línea de presiones que siguen trayectorias parecidas.

Este ejemplo de aplicación concluye que los modelos frágiles subestiman la capacidad portante de cargas en arcos. Esta observación simple, pero valiosa, resalta la importancia del uso de modelos que utilizan, además de la resistencia a tensión del material, parámetros que amplían la capacidad de modelado de materiales complejos como la mampostería.

Cabe señalar que el modelo de daño de Mazars presenta inconvenientes por el tipo de datos que requiere (Roeder y Ayala, 2001), a diferencia del modelo de plasticidad ortotrópico propuesto en esta tesis, que necesita dos valores para los esfuerzos de tensión en las direcciones, o ejes materiales,  $x$  e  $y$ , junto con las energías de fractura respecto a los mismos ejes materiales.

## 5.2 Modelado del comportamiento no-lineal de estructuras históricas

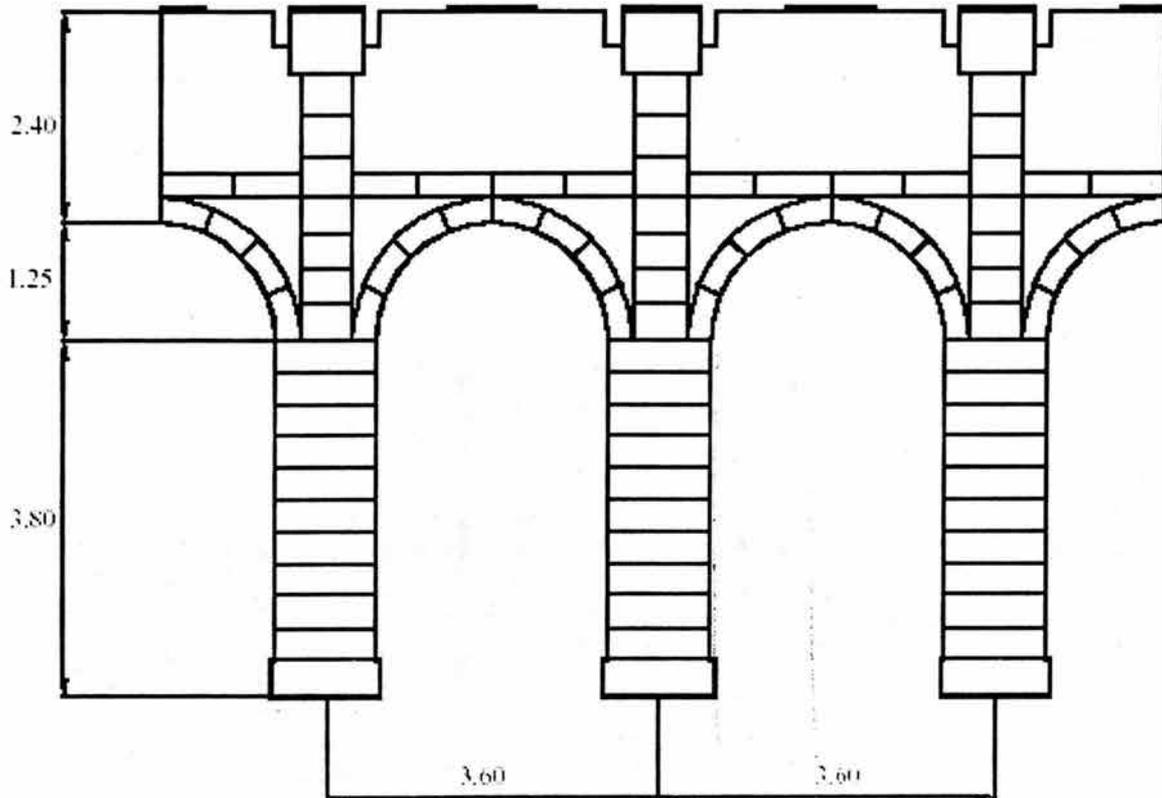
El monasterio de San Vicente de Fora, ejemplo de la arquitectura Portuguesa del siglo XVI, representa el monumento típico de Lisboa. La estructura resistente está conformada por columnas y arcos de bloques de piedra unidos con mortero, combinados con muros de relleno de mampostería. Este monumento, que sobrevivió al sismo de 1755, presenta sin embargo signos aún visibles de los efectos de dicha catástrofe.

Como parte de un programa de investigación, cuyos objetivos fueron la estimación de la vulnerabilidad sísmica del monasterio y la evaluación de soluciones y técnicas de refuerzo de monumentos históricos, en el laboratorio ELSA, del Centro de Investigación Conjunta de la Comisión Europea<sup>1</sup>, se efectuaron una serie de pruebas en un modelo a escala natural de una sección de su fachada interior (Ambrosetti, 1998; Pegon *et al.*, 2001, Giordano *et al.*, 2002). La fig. 5.6 se presenta la geometría del modelo numérico y la fig. 5.7 muestra esquemáticamente las dimensiones del modelo de prueba con la configuración de los actuadores de carga vertical y horizontal. El espécimen ensayado, consta de un arreglo ordenado de bloques de piedra unidos con mortero, en columnas y arcos, así como de mampostería de relleno. El arreglo de bloques y las propiedades del material (ver tabla 5.1) utilizado en el prototipo, reproducen a los de la estructura real. A fin de simular las

---

<sup>1</sup> En inglés se le denomina *Joint Research Center-JRC*

condiciones del sub-ensamble dentro de la estructura completa. la parte superior del modelo fue confinada horizontalmente mediante barras pos-tensionadas, que proporcionaron una carga de 350 y 175 kN. La presencia de pisos superiores se tomó en cuenta aplicando cargas verticales de 400 kN en la parte superior de cada columna y de 100 kN en cada panel de mampostería de relleno. Igualmente se forzó la deformación de cortante restringiendo los desplazamientos verticales en la parte superior de las dos columnas externas. Las acciones sísmicas sobre el modelo se consideraron mediante la aplicación de fuerzas horizontales igualmente distribuidas en la parte superior de las tres columnas a través de un marco de carga. El programa de pruebas consistió de ensayos tanto pseudo-dinámicos, como cuasi-estáticos cíclicos (Ambrosetti, 1998).



**Figura 5.6** Geometría del modelo ensayado.

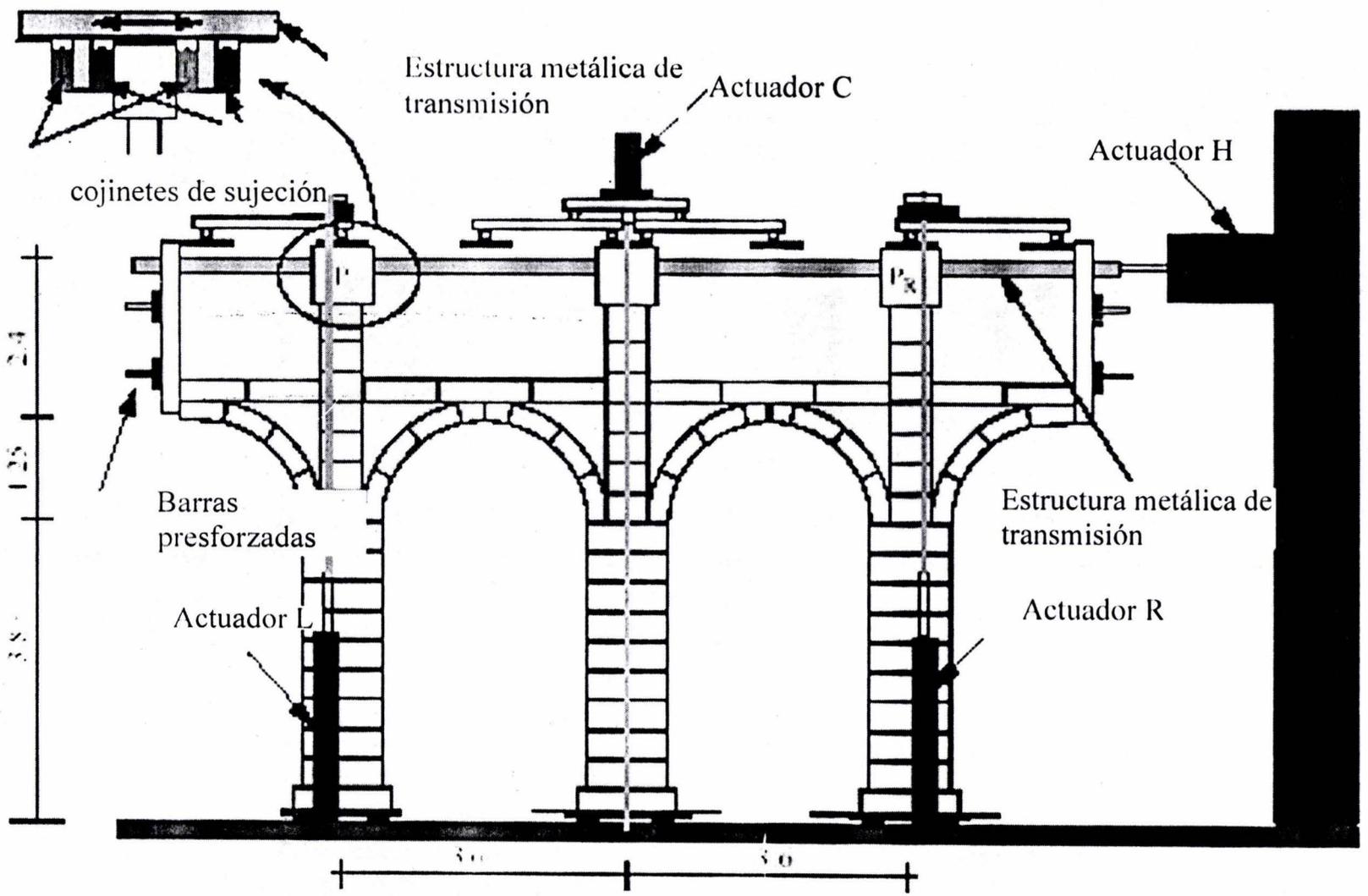
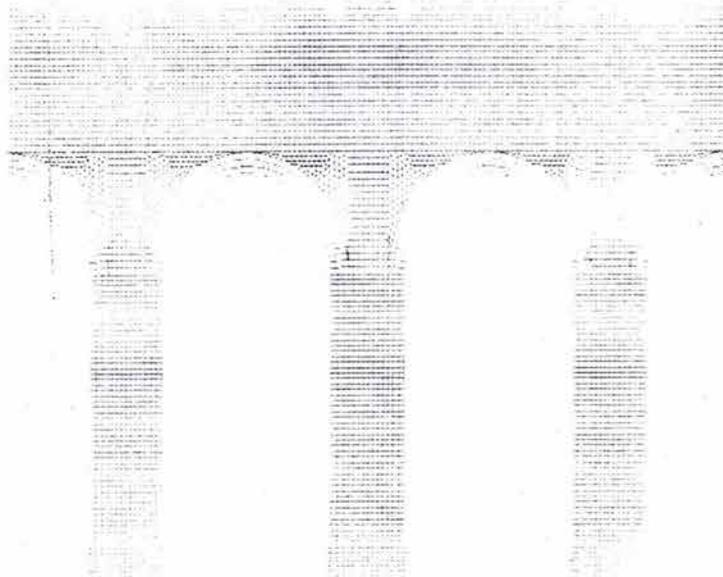


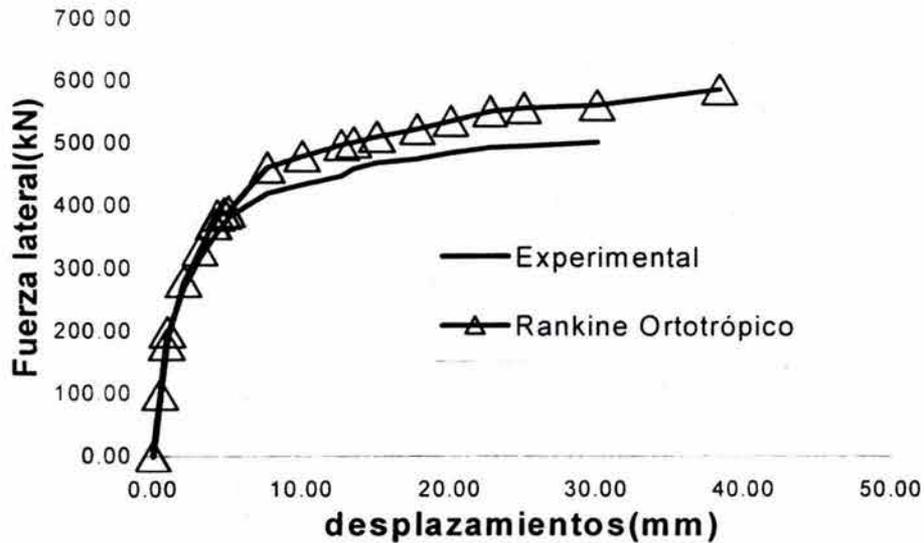
Figura 5.7 Modelo utilizado en el Laboratorio ELSA (Ambrosetti, 1998).

**Tabla 5.1 Parámetros de los materiales (Ambrosetti, 1998; Pegon et al, 2001)**

Material	E (GPa)	$\nu$	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	$\sigma_T$ (MPa)	$\sigma_C$ (MPa)
Bloques	110	0.2	2600	6.60	66.77
Mampostería	1	0.2	1500	2.98	13.52
Junta	2.5	0.2	1800	2.65	23.10

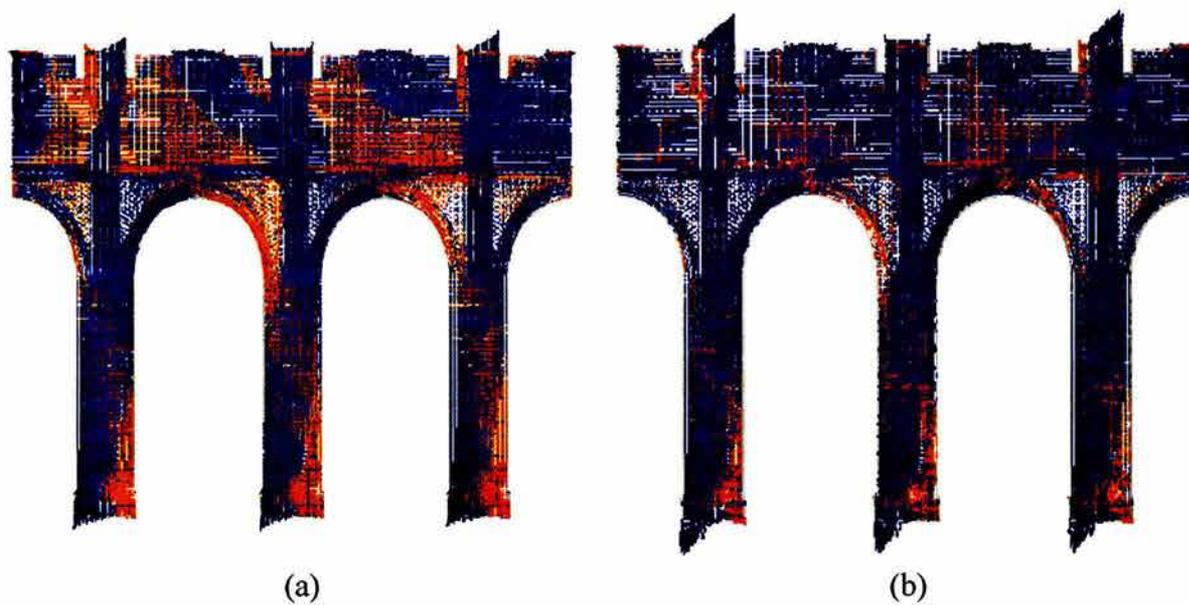
Los valores de módulo de Young de los bloques, la relación de Poisson y resistencia a la tensión de la junta de mortero que se utilizaron en el modelo de elementos finitos se han tomado de la tabla 5.1. El valor de resistencia a la tensión del mortero considera que el material en general tiene un pobre desempeño bajo este efecto. Aunque en las referencias no se presenta la energía de fractura por efectos de tensión como parámetro del material, en este ejemplo se ha adoptado como valor 0.02 N-mm/m<sup>2</sup> para emplear el modelo de plasticidad ortotrópico y el valor de  $\alpha$  se supone igual a uno. Este valor de energía de fractura se ajusta al tamaño de los elementos finitos, triangulares de tres nudos y cuadriláteros de cuatro, que se están utilizando en este ejercicio numérico (ver fig. 5.8). La función de esfuerzos y deformaciones equivalentes que simulan el ablandamiento del material se suponen lineal. Además, dado que la información para la resistencia a cortante no ha sido proporcionada en las referencias, se adopta para este ejemplo un factor  $\alpha$  igual a 1.5 para tomar en cuenta la contribución al corte en el criterio de fluencia.

**Figura 5.8** Modelo de elementos finitos del espécimen.

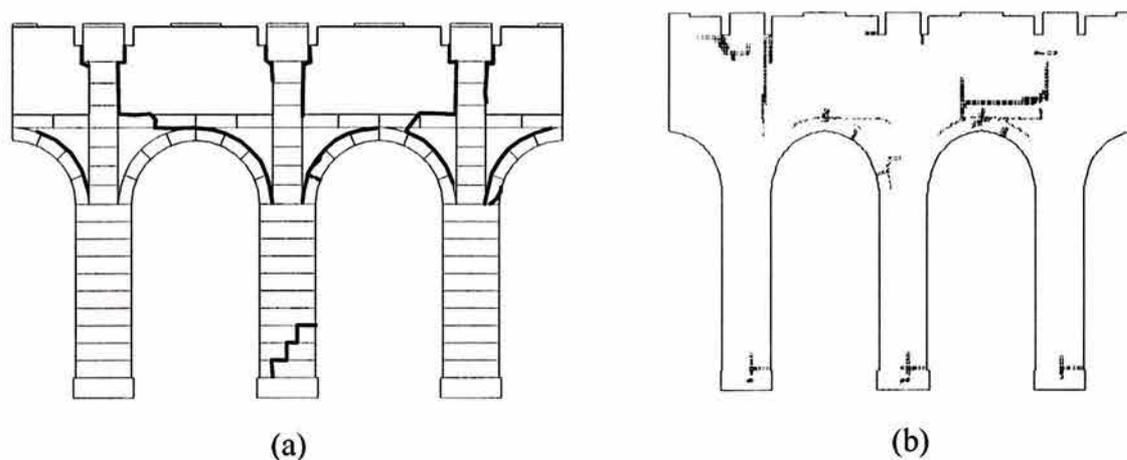


**Figura 5.9** Comparación de resultados obtenidos del ensayo experimental y la simulación numérica.

En la fig. 5.9 se muestran los resultados numéricos y experimentales. En esta última figura se puede observar que, cualitativamente, la tendencia de la curva obtenida a partir del modelo numérico es similar a la del modelo experimental, aunque cuantitativamente ésta presenta una resistencia mayor en la parte final del experimento. Esto se debe a que el comportamiento en compresión comienza a gobernar la respuesta del modelo experimental. Esto último se puede observar de la fig. 5.10 donde se presentan dos distribuciones de esfuerzos principales. En rojo se marcan los esfuerzos principales de tensión y en azul los de compresión. El gráfico de la izquierda se aprecia los resultados obtenidos del análisis, antes de comenzar a localizar el agrietamiento en la estructura, al aplicar una fuerza lateral hasta una magnitud de aproximadamente 200 kN para la cual se presenta un desplazamiento de 0.09 mm. En el gráfico de la derecha se presentan los resultados cuando se aplica, en el modelo numérico, una carga máxima de aproximadamente 587 kN que ocasiona un desplazamiento de 38.2 mm.



**Figura 5.10** Esfuerzos principales (a) antes del agrietamiento y (b) al final de la simulación numérica.



**Figura 5.11** Patrones de agrietamiento en (a) modelo experimental y (b) el modelo numérico (Guzmán *et al*, 2002).

El patrón de agrietamiento se puede observar en la fig. 5.11. En los dos gráficos anteriores muestran que la zona donde se presentan esfuerzos principales de tensión obtenidos con el modelo de Rankine Ortotrópico propuesto y la localización de los agrietamientos de la fig. 5.11 se revelan en las mismas partes de la estructura. Obviamente, la intensidad de los esfuerzos que se obtiene con el modelo es menor debido a que refleja el comportamiento de ablandamiento del material en esas partes de la estructura. A pesar que el modelo de

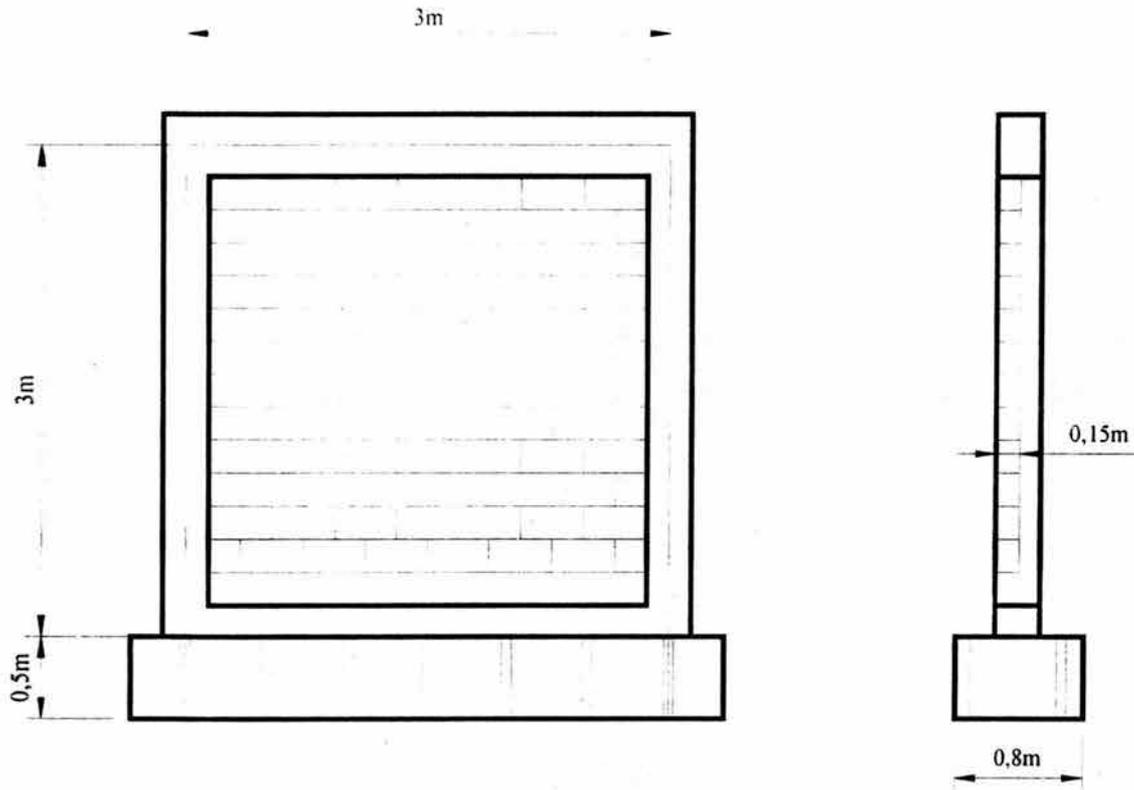
plasticidad se activa ocasionando que se redistribuyan los esfuerzos debido al inicio del comportamiento inelástico del material por efectos de tensión. los esfuerzos principales de compresión mantienen prácticamente la misma distribución. La literatura que estudia esta estructura en particular, reporta que el material de este modelo experimental tiene una resistencia muy alta a compresión, por lo que también la tendencia observada en el modelo experimental y el modelo numérico es bastante similar al nivel de cargas impuesto en la estructura.

Según los resultados obtenidos, la hipótesis de considerar que las juntas de mortero tiene un bajo desempeño en tensión tiene una influencia decisiva en el comportamiento global del espécimen de prueba a través de un modelo de plasticidad. como el presentado en este trabajo que, aunque planteado de manera poco ortodoxa, ha permitido estimar de manera simple las características principales del comportamiento experimental hasta una carga horizontal de 587 kN.

Este experimento numérico es muy valioso, pues permite apreciar que, bajo efectos de esfuerzos compresión de magnitud apreciable, la respuesta de los modelos numéricos que utilizan el criterio de fluencia presentado en esta tesis se desfasa del comportamiento observado en ensayos o con otros modelos numéricos. Esta observación se hace más evidente en el siguiente ejemplo.

### **5.3 Modelado del comportamiento no-lineal de marco de concreto con muro de relleno de mampostería**

En la siguiente aplicación se modela un muro diafragma de mampostería el cual fue ensayado en el laboratorio del Centro Nacional de Prevención de Desastres, CENAPRED (Flores *et al*, 1999). Esta estructura está compuesta por un marco de concreto que envuelve a un muro de relleno construido con unidades de ladrillo hueco (ver fig. 5.12). Los parámetros del material se pueden apreciar en la tabla 5.2.

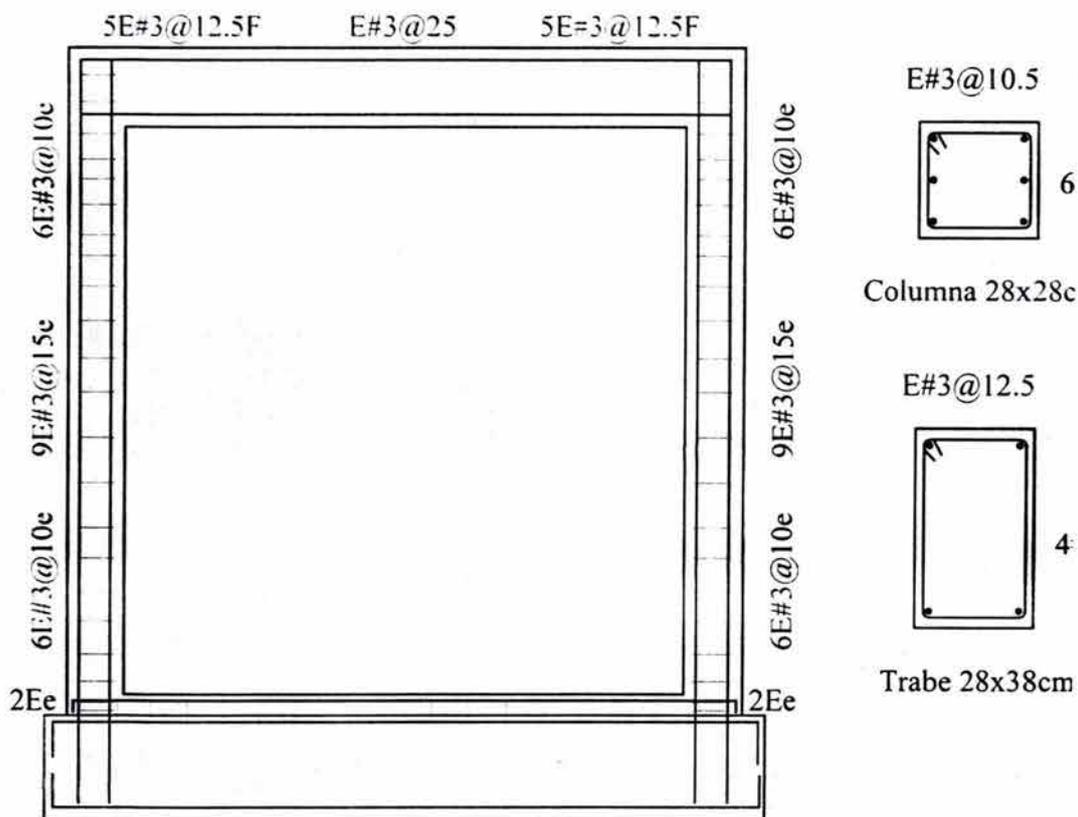


**Figura 5.12** Dimensiones del modelo experimental (Flores *et al.*, 1999).

**Tabla 5.2. Parámetros de los materiales (Araujo, 2000; Larios, 2004)**

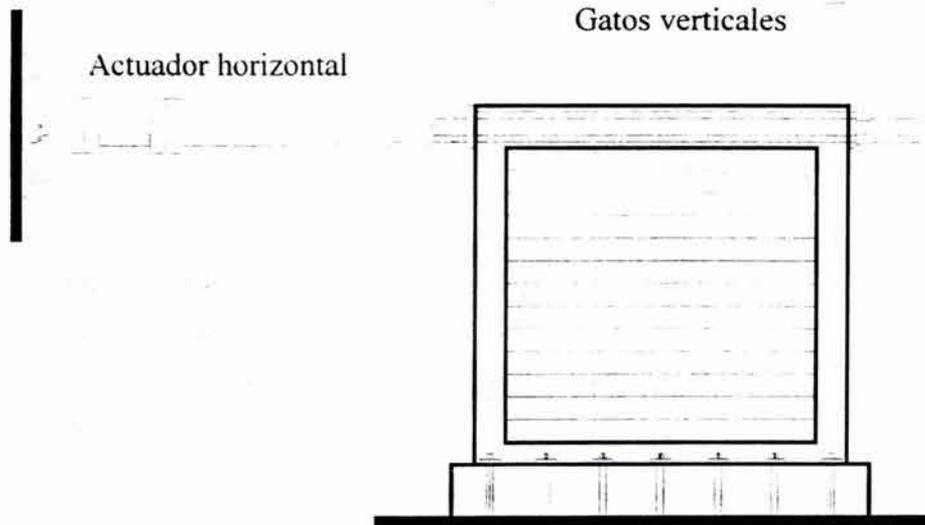
Parámetro	Mampostería	Concreto
Módulo de Young	28000 kg/cm <sup>2</sup>	115220 kg/cm <sup>2</sup>
Módulo de Poisson	0.25	0.20
Resistencia a tensión	2.0 kg/cm <sup>2</sup>	25.0 kg/cm <sup>2</sup>
Resistencia a compresión	40.0 kg/cm <sup>2</sup>	250 kg/cm <sup>2</sup>
Energía de fractura en tensión*	0.005 kg-cm/cm <sup>2</sup>	0.005 kg-cm/cm <sup>2</sup>
Energía de fractura en compresión*	2.000 kg-cm/cm <sup>2</sup>	5.000 kg-cm/cm <sup>2</sup>

\*Los valores de energía de fractura de la mampostería se han definido a partir de los resultados de Van der Pluijm (1993) y los correspondientes al concreto siguiendo recomendaciones de Bazant y Planas (1998).



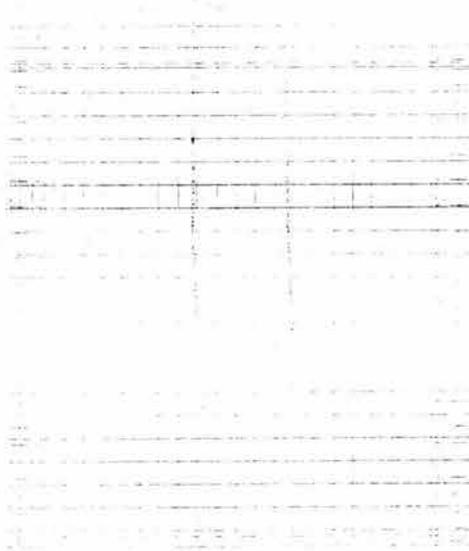
**Figura 5.13** Refuerzo del marco de concreto (Flores *et al*, 1999).

La resistencia al esfuerzo cortante tiene un valor de  $3.5 \text{ kg/cm}^2$ . Así, con esta última resistencia y las resistencias a la tensión en  $x$  e  $y$  se obtiene que el valor de  $\alpha$  es igual a 1.78. La distribución del refuerzo en el marco de concreto se presenta en la fig. 5.13. El acero de refuerzo tiene un módulo de elasticidad de  $2.0E6 \text{ Kg/cm}^2$  y un esfuerzo de fluencia de  $4200 \text{ Kg/cm}^2$ . Al modelo de laboratorio de la estructura se le aplicó una carga horizontal cuya magnitud se incrementaba hasta obtener distorsiones angulares prescritas. Para simular el efecto de carga vertical se aplicaron, mediante dos gatos verticales, dos fuerzas constantes de 37 toneladas en cada columna, según el esquema que se presenta en la fig. 5.14.



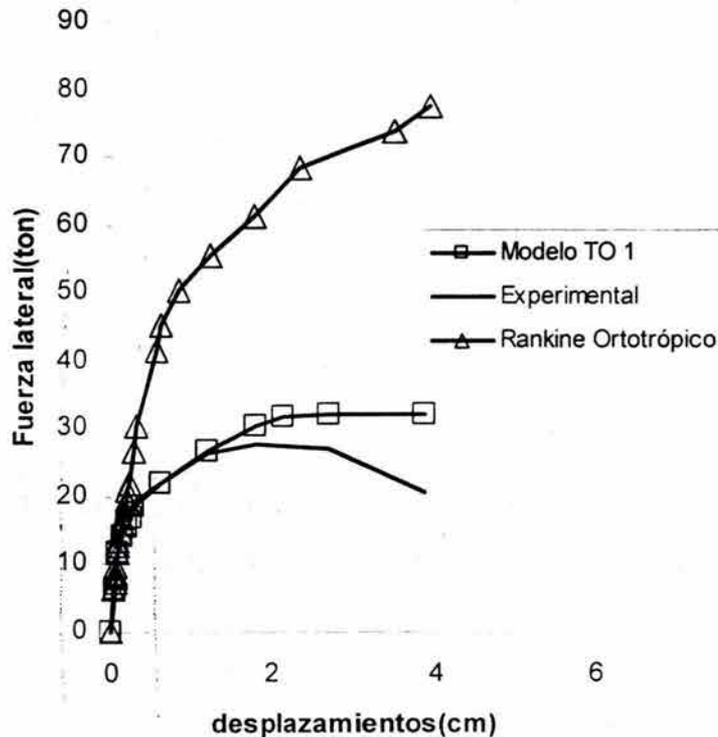
**Figura 5.14** Esquema del ensayo del marco de concreto con muro de mampostería de relleno (Araujo, 2000).

El modelo de elementos finitos, que se muestra en la fig. 5.15, está elaborado con 624 elementos de esfuerzos planos de cuatro nudos utilizados en las zonas de concreto y mampostería y entre los dos tipos de materiales, alrededor de todo el muro de mampostería, se han utilizado 80 elementos de interfase de cuatro nudos, elementos diseñados dentro del programa NLFEM (Roeder y Ayala, 2003).



**Figura 5.15** Modelo de elementos finitos del muro.

Para el estudiar el desempeño del modelo de plasticidad propuesto en esta tesis se realizaron dos experimentos numéricos, cada uno con distintas relaciones constitutivas para la mampostería. En el primer experimento, denominado TO 1, se utiliza para el concreto y la mampostería el modelo de agrietamiento distribuido multidireccional (Rots, 1988) combinado con el criterio de Drücker-Präger para modelos elasto-plásticos, y en el segundo para el concreto se mantuvieron las mismas características del primer experimento y en los elementos donde se define la mampostería se aplica el criterio de fluencia de Rankine Ortotrópico de dos variables internas propuesto en este trabajo. En ambos análisis se utilizó el modelo de plasticidad de Mohr-Coulomb en los elementos de interfase y el modelo de plasticidad de Von Mises para el acero de refuerzo. Los resultados obtenidos de los experimentos numéricos y la envolvente de los desplazamientos que resultan de aplicar la carga horizontal cíclica se pueden apreciar en la fig. 5.16.



**Figura 5.16** Comparación de dos modelos de comportamiento con la envolvente experimental.

Cada modelo numérico muestra diferencias con respecto al modelo experimental. El primer modelo TO 1, ofrece una mejor aproximación debido a que comienza a plastificarse el material por el efecto de la compresión. Los resultados en la parte máxima de la respuesta de este modelo presentan una desviación del 15.3% respecto a la carga máxima registrada

en el ensayo del espécimen. Este resultado es consistente con los resultados obtenidos por Mehrabi *et al.* (1994) quien señala que los marcos de concreto con relleno de muro mampostería que son cargados lateralmente en forma monótona tienen una resistencia mayor en 10% al 17% que los ensayados de manera cíclica. El segundo modelo constitutivo mantiene una tendencia de crecimiento. Este comportamiento del modelo numérico refleja que los esfuerzos de compresión influyen en la respuesta de la estructura. Así, es evidente que el modelo de plasticidad propuesto no considera el daño por efectos de compresión, o aplastamiento del material. Para poder utilizar este modelo en mampostería confinada se debe combinar con otro que permita ablandar el material cuando se produce el aplastamiento de éste.

#### 5.4 Modelado del comportamiento no-lineal de marco de concreto con muro de relleno de mampostería

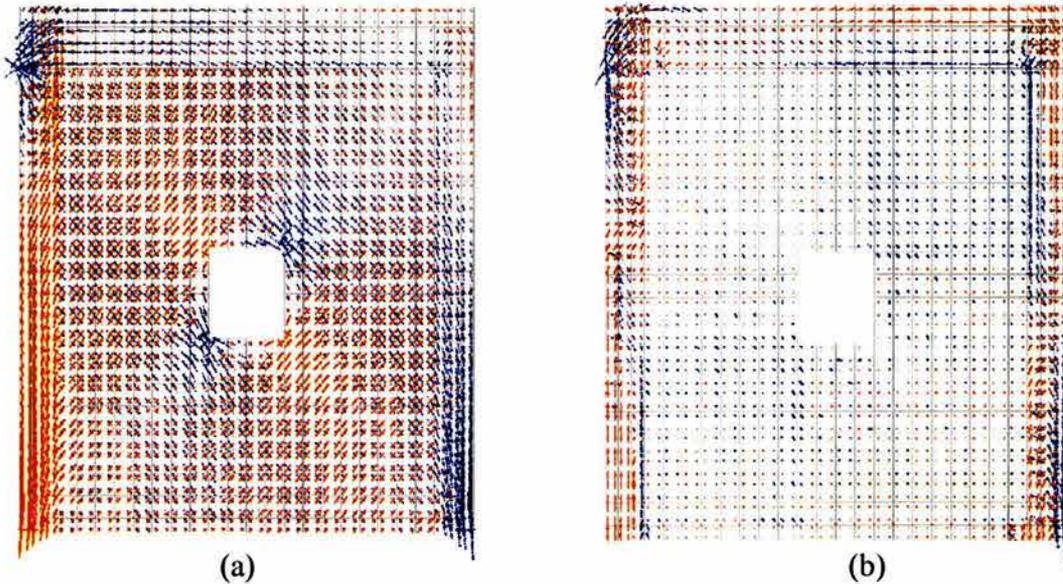
El siguiente ejemplo presenta los resultados de un marco de concreto con muro de mampostería de relleno con una ventana en este último. Los parámetros empleados aquí son idénticos al ejemplo anterior. La malla de elementos finitos se puede apreciar en la siguiente figura.



**Figura 5.17** Modelo de elementos finitos para el marco de concreto reforzado y muro de mampostería de relleno con ventana.

Los resultados de esfuerzos principales en tensión y compresión al inicio del proceso de carga lateral se presentan en la fig. 5.18(a). En esta figura se puede notar la concentración de los esfuerzos de tensión, en rojo, en la parte inferior de la columna izquierda y en la parte de la diagonal que va desde la parte superior de la columna izquierda a la inferior de la columna derecha. Sobre esta diagonal se establecen dos áreas separadas por la ventana.

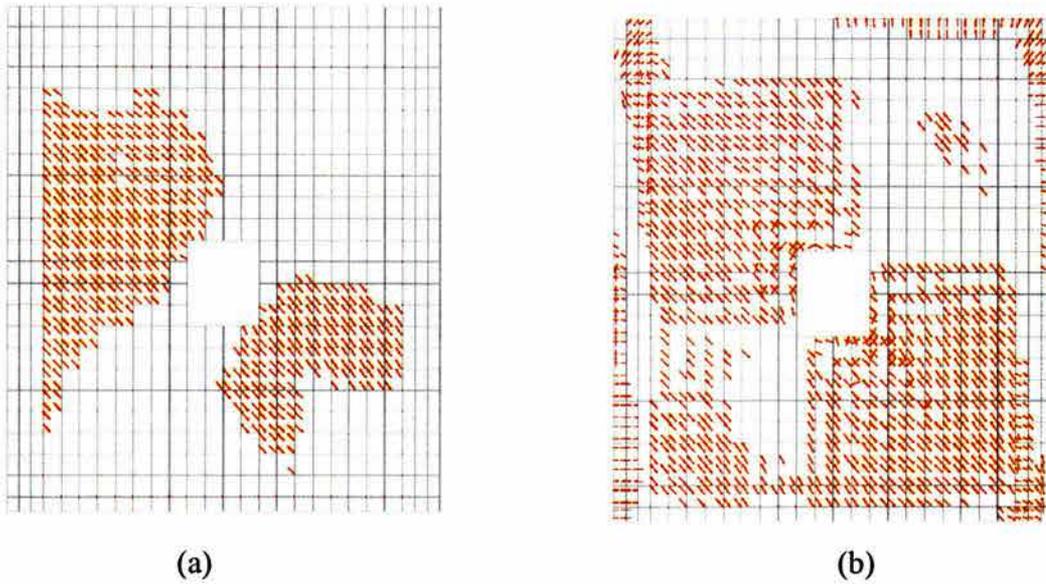
Los esfuerzos de compresión son menos significativos que los de tensión, según se ve en esta misma figura. La fig. 5.18 (b) presenta la relajación de los esfuerzos. Por esta distribución de esfuerzos el muro presenta daño por efectos de agrietamiento por tensión (ver fig. 5.19). Esta observación ratifica que el modelo de plasticidad de Rankine Ortotrópico puede simular aceptablemente este tipo de daño.



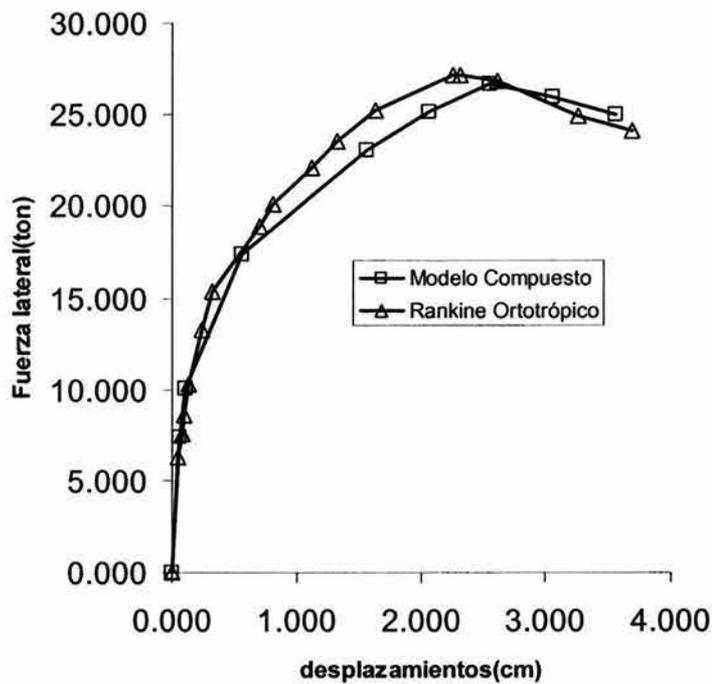
**Figura 5.18** Esfuerzos principales en el muro hueco obtenidos con el modelo propuesto: (a) esfuerzos principales a aproximadamente 0.3 ton de carga lateral y (b) esfuerzos al final de la carga (10.5 ton).

La distribución de esfuerzos debido al daño presentado en el modelo también es concordante con la observada en la localización de las deformaciones por agrietamiento utilizando un modelo compuesto de agrietamiento distribuido multidireccional combinado con el modelo de plasticidad de Drucker-Präger (ver fig 5.19). En la fig. 5.20 se presenta la respuesta global del muro donde se utilizan el modelo de plasticidad propuesto en este

trabajo y el modelo compuesto donde se aprecia la buena concordancia que existe entre ambos modelos numéricos.



**Figura 5.19** Localización de las deformaciones por agrietamiento a (a) 0.3 ton y (b) 10.5 ton.



**Figura 5.20** Resultados de modelo compuesto y modelo de plasticidad propuesto.

#### 5.4. Sumario

En este capítulo se han presentado cuatro modelos numéricos donde se emplea el criterio de plasticidad propuesto en esta tesis. En las dos primeras aplicaciones se ha visto que el modelo refleja la respuesta esperada. En la tercera aplicación, donde los esfuerzos de compresión son de gran magnitud, existe una desviación muy apreciable en relación a modelos que consideran, de alguna forma, el comportamiento no-lineal por aplastamiento del material. En el último modelo numérico, donde la falla del material es básicamente por esfuerzos de tensión, el modelo de plasticidad propuesto tiene una buena concordancia al modelo donde se emplea el concepto de agrietamiento distribuido combinado con el criterio de fluencia de Drücker-Präger que toma en cuenta el daño por efectos de compresión en la mampostería. Estas simulaciones permiten observar que el modelo propuesto en esta tesis es apropiado en estructuras donde la falla del material se debe básicamente a la tensión, como puede ocurrir por efectos sísmicos en muros de mampostería simple donde las cargas verticales sobre éstos son de poca magnitud o en muros que componen una construcción histórica donde, generalmente, los elementos estructurales son robustos y la falla por compresión no es evidente en el daño observado en la estructura.

## **Sumario y conclusiones**

Aplicaciones racionales, económicas y novedosas en la mampostería implican investigación constante en diversos campos del conocimiento aplicados a la ingeniería. En estos campos de conocimiento se encuentran las matemáticas aplicadas, los métodos numéricos, la ingeniería de software y ciencias de los materiales que, combinados, permiten desarrollar herramientas de análisis confiables y robustas. En particular, con el uso de estas herramientas se obtienen información muy valiosa de la respuesta de las estructuras cuando comienza a producirse el daño en éstas.

El perfil de esta tesis tiene como principal característica la simulación numérica del comportamiento mecánico no-lineal de la mampostería. Pero este perfil no es completo sin una plataforma de análisis que sirva de herramienta numérica controlada y confiable que cuente con estrategias de solución robustas que puedan armonizarse dentro de un diseño eficiente de algoritmos donde se operen grandes bases de datos. Así, en este trabajo de tesis se ha logrado combinar todas estas ciencias para alcanzar una herramienta completa de análisis que es aplicable a estructuras construidas con mampostería o con materiales cuasi-frágiles.

## Aspectos computacionales desarrollados

Una cuestión importante a resolver en todo análisis de estructuras es con qué herramienta de cálculo se cuenta y qué grado de resolución de los resultados se desea obtener. En la actualidad el ingeniero estructurista puede considerar diversas posibilidades gracias al desarrollo acelerado de los métodos numéricos que se utilizan para evaluar estructuras sometidas a situaciones de cargas complejas. Dentro de esta diversidad de métodos se pueden encontrar los métodos basados en elementos de frontera, los basados en elementos discretos, o los métodos de análisis basados en la discretización del dominio de los sólidos con elementos finitos. En el caso particular de esta tesis, se ha dado un énfasis a este último método el cual se ha utilizado para elaborar un sistema integral, denominado *NLFEM*, que permite analizar estructuras con modelos planos, como las presentadas en esta tesis, y espaciales construidos con materiales que ostentan diversas características mecánicas bajo formulaciones de pequeñas y grandes deformaciones. Para lograr completar este aspecto trascendente de este trabajo, se implantaron también, dentro de esta herramienta, los procedimientos de solución avanzados de sistemas de ecuaciones no-lineales que se han presentado en el capítulo tres de esta tesis.

Se debe resaltar que el diseño final condujo a una característica particular de *NLFEM* que pocos códigos comerciales poseen. Esta característica es la capacidad de modelar el comportamiento no-lineal ortotrópico de materiales, como es el caso de la mampostería; en el cual además se diseñaron, aparte de los procedimientos de ensamblaje de matrices de rigidez tangente simétricas, los códigos para ensamblar las matrices de rigidez tangentes asimétricas que se obtienen de modelos de plasticidad no-asociada o en modelos constitutivos de más de una variable interna del estado termodinámico del material y cuyas ecuaciones de flujo se integran de manera consistente con el procedimiento de Newton-Raphson.

Desde el punto de vista computacional, esta labor de definir el sistema idóneo de análisis condujo al objetivo fundamental en la tesis, asentar una herramienta robusta de análisis que permite estudiar e implementar relaciones constitutivas no-lineales isotrópicas y

---

ortotrópicas que se pueden aplicar a estructuras de mampostería, o estructuras en general construidas con materiales con características cuasi-frágiles.

### **Aspectos de la simulación del comportamiento del material**

En esta tesis se ha empleado la teoría de la plasticidad para simular numéricamente el comportamiento no-lineal de la mampostería en dos direcciones ortogonales. El criterio de fluencia que se presenta, está basado en la superficie de Rankine que se usa para evaluar el daño por efectos de tensión en estructuras de mampostería. Para simular el comportamiento mecánico no-lineal debido a el ablandamiento del material en las dos direcciones materiales ortogonales  $x$  e  $y$ , se ha reformulado la ecuación de la superficie de fluencia de Rankine introduciendo en ésta dos variables internas que reflejan el daño en las direcciones antes mencionadas. Los algoritmos de solución local del sistema de ecuaciones se han implantado considerando los conceptos modernos de integración de las ecuaciones de flujo consistente con el procedimiento de Newton Raphson para actualizar las variables internas y los esfuerzos en cada punto de integración de los elementos finitos empleados en los modelos numéricos. Por las características de las cargas aplicadas a los modelos estructurales que se presentan en este trabajo, las cuales se incrementan de forma monótona, resulta irrelevante simular el cierre de grietas con este tipo de modelos de comportamiento. Las matrices de rigidez de cada elemento, por el tipo de modelo de plasticidad que se utiliza, son asimétricas por lo debe tenerse en cuenta que las ecuaciones lineales producto del ensamblaje global no son simétricas y se requiere de técnicas de solución para este tipo de sistemas. La técnica de solución que se ha adoptado para los problemas locales como los globales, para resolver las estructuras presentadas en este trabajo, es satisfactoria y esto se demuestra porque se han podido seguir las trayectorias de equilibrio desde la fase elástica, seguida por la fase pre-pico y finalmente la fase de ablandamiento, o post-pico, de la estructura. Por lo expuesto, este modelo cumple con los objetivos propuestos en este trabajo de tesis, por ser parte complementaria de una herramienta de análisis, y es una alternativa atractiva de modelado numérico de materiales cuasi-frágiles como la mampostería dado que puede representar el estado de daño en las dos direcciones materiales  $x$  e  $y$ .

## **Macro-modelado de estructuras de mampostería**

En este trabajo se ha querido hacer énfasis el empleo de un modelo de comportamiento simple que se puede utilizar en el macro-modelado de estructuras de gran envergadura para evaluarlas cuando comienzan a deteriorarse. El empleo de las resistencias a tensión en las direcciones materiales  $x$  e  $y$  y las energías de fractura respecto a las mismas direcciones materiales  $x$  e  $y$  es una de las características que se destacan de este tipo de modelo constitutivo y es suficiente para representar el comportamiento biaxial no-lineal de la mampostería. Aunque no se ha hecho un estudio estricto de la objetividad, se han presentado dos criterios comunes para definir el tamaño de las mallas de elementos finitos en los ejemplos de validación y poder utilizar el modelo de plasticidad propuesto en este trabajo. En el primer modelo de validación, que se presentó en el capítulo cuatro, los resultados numéricos muestran una buena correlación con los obtenidos experimentalmente. Los elementos finitos fueron triangulares de tres nudos y elementos cuadriláteros de cuatro nudos. Para resolver este problema, se utilizó el control por desplazamientos indirectos. En el segundo experimento numérico, un muro de mampostería simple sometido a una carga distribuida y una carga lateral, se pudo representar la trayectoria de equilibrio y, además se pudo observar que los resultados de los esfuerzos obtenidos como consecuencia del ablandamiento del material se localizan en las mismas zonas que las deformaciones por agrietamiento cuando se utiliza un modelo de agrietamiento distribuido multi-direccional.

En general, se adoptó el macro-modelado por la facilidad que se tiene para definir malla y porque ofrece buenos resultados con menos esfuerzo de cómputo en procesos de falla compuesta, que es el caso cuando se utilizan este tipo de criterios de fluencia.

## **Aplicación del modelo a problemas de la ingeniería práctica**

La aplicación a problemas de la práctica profesional de criterios de fluencia, como el presentado en este trabajo de tesis, es un paso importante hacia criterios de diseño basados en mecánica de fractura o en estudios de edificios históricos en los cuales el agrietamiento

---

por efectos de tensión en el material es la causa principal de la falla en los elementos estructurales de éstos.

Para estudiar la versatilidad del modelo de comportamiento propuesto, en el capítulo cinco se presentaron cuatro ejemplos de aplicación a problemas prácticos de la ingeniería. El primer ejemplo estudia la estabilidad de arcos de mampostería utilizando las líneas de presiones. Estas líneas se obtienen cuando se integran los esfuerzos para calcular la resultante y su posición en una sección transversal al eje del arco. Los esfuerzos se evaluaron con tres modelos de comportamiento distintos con fines de comparación. El primer modelo utilizado es de agrietamiento distribuido donde se considera que el material es totalmente frágil. El segundo modelo es el modelo de daño de Mazars y el tercer modelo es el de plasticidad ortotrópica de Rankine de dos variables de estado interno propuesto en esta tesis. Los resultados finales han demostrado la buena concordancia en la posición de las líneas cuando son calculadas con los dos últimos modelos y refleja, con mejor estimación, la capacidad remanente del modelo de comportamiento comparado con los modelos donde se supone que el material es frágil. Este tipo de análisis demuestra utilidad de los modelos de comportamiento inelástico para estimar con mejor precisión la estabilidad de este tipo de estructuras. El segundo ejemplo presenta una estructura histórica, un conjunto de arcos del monasterio San Vicente de Fora en Portugal, donde se aplica este modelo de comportamiento y los resultados obtenidos en la simulación numérica se comparan con los obtenidos experimentalmente. El modelo constitutivo permite estimar el comportamiento de la estructura y, en especial, permite ver la diferencia de magnitudes de los esfuerzos principales antes y después del daño. Las comparaciones realizadas demuestran también que la ubicación de los esfuerzos de ablandamiento es en zonas similares donde se localiza las deformaciones por agrietamiento. Así, este tipo de modelos permiten evaluar, en forma aproximada, el daño que se presenta en estructuras de este tipo. Los dos últimos ejemplos presentados permiten observar la calidad de los resultados en marcos de concreto con muros de mampostería de relleno. Estos modelos utilizaron elementos de cuadriláteros de cuatro nudos, elementos de barra que simulan el acero de refuerzo y elementos de interfase que se emplean entre el concreto y el muro de relleno. La estimación del comportamiento no-lineal de los materiales se hizo con el modelo de

comportamiento propuesto en este trabajo para la mampostería de relleno y el modelo de agrietamiento distribuido junto con el modelo de plasticidad de Drücker-Präger con ablandamiento para modelar el daño del concreto en tensión y compresión respectivamente. Para el acero de refuerzo se usó el modelo de plasticidad perfecta de Von Mises. Los dos ejemplos presentados demuestran que el modelo constitutivo propuesto es competente en situaciones en tensión.

En resumen, las aplicaciones presentadas aclaran las cualidades de predicción y las limitaciones de este modelo de plasticidad que servirá, gracias al soporte de cómputo que se diseñó durante el desarrollo de esta investigación doctoral, como herramienta de cálculo idóneas para acercar al ingeniero de la práctica al diseño de estructuras de mampostería basado en modelos de comportamiento que se aproximan a la mecánica de fractura.

### **Recomendaciones para trabajos a futuro**

Un punto destacable de este trabajo es que se logró alcanzar la meta propuesta, la cual es la herramienta numérica que reúne, además del modelo de plasticidad propuesto en esta tesis, modelos constitutivos no-lineales y un conjunto de procedimientos avanzados para la solución del problema no-lineal utilizando el método de los elementos finitos. Este tipo de herramienta es un código elaborado de tal manera que se pueden implantar modelos de comportamiento ortotrópico no-lineal en éste, como es el caso de la mampostería; esta clase de código es difícil de encontrar, aun en programas comerciales.

Sin embargo, existen aún algunos aspectos relevantes y que es necesario señalar. En primer lugar se debe realizar un esfuerzo adicional para ampliar este criterio de fluencia y poder estimar el daño por aplastamiento en el material debido a los efectos de compresión. Esto último se puede lograr combinando la superficie de fluencia propuesto con otra superficie de falla de las mismas características.

También un aporte de este trabajo es la capacidad con la que se cuenta para incrementar la cantidad de estudios a diversos tipos de estructuras de mampostería, especialmente las

---

edificaciones históricas, para la evaluación y también para reforzar y revisar las reglas de diseño para este tipo de construcciones. Para tal fin, es recomendable mejorar la base de datos experimentales y dirigir la atención a los parámetros inelásticos necesarios en modelos de comportamiento, como los propuestos en este trabajo, para la evaluación del comportamiento no-lineal de la mampostería, pues el futuro de estas herramientas de análisis depende en gran medida de que estos sean más confiables. Esta observación no es novedosa, no obstante, se insiste en que se debe realizar los ensayos más allá de la resistencia máxima del material.

Definitivamente, para muchos analistas de estructuras sería formidable poder modelar las grietas que se producen en las edificaciones de mampostería utilizando la mecánica de fractura y a la vez evitar el remallado de los modelos de elementos finitos. Hoy en día existen muchas formulaciones que conectan la mecánica de la fractura con modelos de continuo, para simular el proceso de fractura en materiales cuasi-frágiles, como el concreto y la mampostería, como es el presentado en esta tesis. Otras nuevas formulaciones permiten simular de la fractura mediante la teoría de las discontinuidades fuertes, donde destaca el trabajo realizado por Oliver en la Universidad Politécnica de Cataluña, o utilizan los denominados métodos de los elementos finitos extendidos, elaborado por el grupo de trabajo de Belytschko y otros colaboradores, que combina la fortaleza del método de los elementos finitos con los métodos libres de mallas o *meshless*. A pesar de estos esfuerzos, aún persisten los inconvenientes en representar más de una grieta o representar la entropía del continuo por el deterioro del material cuando se desarrolla más de una grieta y de proponer criterios inicio de la grieta o cuando la grieta comienza a bifurcar.

En el caso particular de México, se ha logrado un avance notable en investigaciones de edificios de mampostería en general y, por el peligro sísmico que acusa, se ha elaborado un reglamento racional de diseño de estructuras de este tipo. Esta herramienta de análisis servirá como complemento para la revisión de la estabilidad estructural y validar los procedimientos de diseño desde el punto de vista de la mecánica de fractura.

Para el caso de cargas cíclicas, como las que se producen durante un evento sísmico, los modelos de plasticidad, de daño o los basados en conceptos de agrietamiento distribuido, difícilmente pueden capturar la característica principal de la respuesta: el lazo histerético residual. Por ello se cree conveniente hacer hincapié que, para modelar este tipo de respuesta, es necesario acoplar el efecto de fricción interna que existe en las superficies de agrietamiento, que está relacionado al amortiguamiento global de las estructuras, al modelo constitutivo del material (Regueneau *et al.*, 2000). Este efecto no está acoplado en el modelo que se presenta en esta tesis, por lo que no es recomendable utilizarlo para cargas cíclicas.

Se debe reconocer que en nuestro todavía país existe un rezago en la aplicación de procedimientos avanzados de análisis y solo se hace con programas comerciales. Este hecho ha postergado la tarea de difusión del conocimiento que se requiere para aplicar este tipo de tecnología. Por esto se piensa que esta herramienta es un aporte importante para el desarrollo de la mecánica numérica en México.

# APÉNDICE A

## Expresiones matriciales utilizadas para la integración de las ecuaciones de flujo

Para implantar una relación constitutiva en un sistema de elementos finitos primero es necesario definir derivadas, de primer y segundo orden, en expresiones matriciales que permitan su tratamiento dentro del marco computacional. Las expresiones que se presentan a continuación están definidas solo para la integración de las ecuaciones no-lineales que se obtienen del criterio de fluencia propuesto en esta tesis; pero el esquema de integración que se presentará es adaptable a otros tipos de criterios.

### A.1. Definición del problema de plasticidad computacional

En la parte final del capítulo tres de esta tesis se presentó un esquema general de integración de las ecuaciones relacionadas al flujo plástico en el material. En este apéndice se da una descripción detallada de las fórmulas involucradas en la solución del sistema no-lineal de ecuaciones definidas a partir de la superficie de Rankine ortotrópica con dos

variables internas que miden el ablandamiento en las  $x$  e  $y$ , o entropía, de un punto en el continuo.

### A.1.1. Proyección de los esfuerzos en la zona continua de la superficie

Para proyectar los esfuerzos sobre la superficie de fluencia, donde la componente correspondiente al esfuerzo cortante no es nula, es necesario presentar las ecuaciones de flujo de tal manera que sean consistentes con el procedimiento de solución de Newton-Raphson. Por esto, se establece el siguiente conjunto de ecuaciones (Belytschko *et al.*, 2000):

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{n-1} &= -\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{pl} + \boldsymbol{\varepsilon}_n^{pl} + \Delta\lambda_{n-1} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n-1}} = \mathbf{0} \\ \mathbf{b}_{n-1} &= -\mathbf{q}_{n-1} + \mathbf{q}_n + \Delta\lambda_{n-1} \mathbf{h}_{n-1} = \mathbf{0} \\ f_{n-1} &= f(\boldsymbol{\sigma}_{n-1}, \mathbf{q}_{n-1}) = 0 \end{aligned} \tag{A.1}$$

donde el vector de esfuerzos en el paso  $n+1$  es  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{D} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{pl})$  dado que se encuentra dentro del rango elástico limitado por la superficie de fluencia. En el caso de la función de fluencia de Rankine con dos variables internas se pueden reconocer dichas variables y sus incrementos evolutivos se introducen en el esquema de integración de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= [\kappa_1 \quad \kappa_2]^T, \quad \Delta\mathbf{q}_{n-1} = [\Delta\kappa_{1,n-1} \quad \Delta\kappa_{2,n-1}]^T \\ \Delta\mathbf{q}_{n-1} &= \Delta\lambda_{n-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{\bar{\sigma}_1} \boldsymbol{\sigma}^T : \mathbf{Q}_1 : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\ \frac{1}{\bar{\sigma}_2} \boldsymbol{\sigma}^T : \mathbf{Q}_2 : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \end{bmatrix}_{n-1} = \Delta\lambda_{n-1} \mathbf{h}_{n-1} \end{aligned} \tag{A.2}$$

El proceso de solución que se usa consta de dos etapas. La primera etapa predice un valor del vector de esfuerzos  $\boldsymbol{\sigma}_{n-1}^{pr}$ , denominado también vector de predicción inicial de los esfuerzos. El cálculo de este vector inicia la fase de predicción del algoritmo de proyección a la superficie de fluencia. Para establecer la forma de este vector se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}\sigma_{n+1} &= \mathbf{D} : (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^{pl}) = \mathbf{D} : (\varepsilon_n + \Delta\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^{pr} - \Delta\varepsilon_{n+1}^{pl}) \\ \sigma_{n+1} &= \sigma_{n+1}^{pr} - \mathbf{D} : \Delta\varepsilon_{n+1}^{pl} = \sigma_{n+1}^{pr} - \Delta\lambda_{n+1} \mathbf{D} : \left. \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right|_{n+1}\end{aligned}\quad (\text{A.3})$$

Donde  $\sigma_{n+1}^{pr} = \sigma_n + \mathbf{D} : \Delta\varepsilon_{n+1}$  que define la fase de predicción a partir de una estimación elástica. La expresión  $-\Delta\lambda_{n+1} \mathbf{D} : \left. \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right|_{n+1}$  es el corrector plástico que se encarga de proyectar los esfuerzos a la superficie de fluencia. La representación esquemática de la fase de predicción y de corrección se puede ver en la fig 3.12 del capítulo tres de esta tesis.

Para proceder con la solución se utiliza la serie de Taylor, truncada desde los términos de segundo orden y superiores, para linealizar las dos primeras ecuaciones de la ec. (A.1). Esta operación conduce a las ecs. (A.4) que reflejan la evolución de los esfuerzos, las deformaciones plásticas y las variables internas cuando se pasa de la fase iterativa  $k$  a la  $k+1$ , cuando en esta última se obtiene la convergencia al paso  $n-1$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_{n+1}^{(k)} + \left( \mathbf{D}^{-1} - \Delta\lambda \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma^2} \right)_{n+1}^{(k)} : \Delta\sigma_{n+1}^{(k+1)} + \left( \Delta\lambda \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma \partial \mathbf{q}} \right)_{n+1}^{(k)} \cdot \Delta\mathbf{q}_{n+1}^{(k+1)} + \delta\lambda_{n+1}^{(k)} \left. \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right|_{n+1}^{(k)} &= 0 \\ \mathbf{b}_{n+1}^{(k)} + \left( -\mathbf{I} - \Delta\lambda \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{q}} \right)_{n+1}^{(k)} \cdot \Delta\mathbf{q}_{n+1}^{(k+1)} + \left( \Delta\lambda \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \sigma} \right)_{n+1}^{(k)} : \Delta\sigma_{n+1}^{(k+1)} + \delta\lambda_{n+1}^{(k)} \mathbf{h}_{n+1}^{(k)} &= 0 \\ \left[ \mathbf{A}^{-1} \right]_{n+1}^{(k)} \begin{bmatrix} \Delta\sigma \\ \Delta\mathbf{q} \end{bmatrix}_{n+1}^{(k+1)} &= -[\tilde{\mathbf{a}} + \delta\lambda \tilde{\mathbf{r}}]_{n+1}^{(k)}\end{aligned}\quad (\text{A.4})$$

La matriz  $\mathbf{A}^{-1}$  y los vectores  $\tilde{\mathbf{a}}$  y  $\tilde{\mathbf{r}}$  tiene las siguientes expresiones:

$$\left[ \mathbf{A}^{-1} \right]_{n+1}^{(k)} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}^{-1} + \Delta\lambda \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma^2} & \Delta\lambda \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma \partial \mathbf{q}} \\ \Delta\lambda \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \sigma} & -\mathbf{I} + \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{q}} \end{bmatrix}_{n+1}^{(k)}, \quad \tilde{\mathbf{a}}_{n+1}^{(k)} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}_{n+1}^{(k)}, \quad \tilde{\mathbf{r}}_{n+1}^{(k)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \\ \mathbf{h} \end{bmatrix}_{n+1}^{(k)}\quad (\text{A.5})$$

donde  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad de orden dos. El sistema local, que se presenta en la ec. (A.5), posee cinco incógnitas definidas por las componentes del vector incrementos de

esfuerzos en un plano bidimensional  $\Delta\sigma$  y el vector de variación de las variables internas  $\Delta\mathbf{q}$ . Para calcular el valor del incremento de segundo orden del parámetro plástico  $\delta\lambda|_{n-1}^{(k)}$  se utiliza la tercera expresión de la ec. (A.1), la cual linealizada tiene la siguiente forma:

$$f_{n-1}^{(k)} + \left. \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right|_{n-1}^{(k)} : \Delta\sigma_{n-1}^{(k)} + \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \right|_{n-1}^{(k)} \cdot \Delta\mathbf{q}_{n-1}^{(k)} = 0$$

$$\delta\lambda|_{n-1}^{(k)} = \left( \frac{f - \partial f \cdot \mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{a}}}{\partial f \cdot \mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{r}}} \right) \Big|_{n-1}^{(k)}$$
(A.6)

donde

$$\partial \mathbf{f} \Big|_{n-1}^{(k)} = \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T \quad \left( \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \right] \Big|_{n-1}^{(k)}$$
(A.7)

$\partial \mathbf{f}$  es un vector fila de cinco componentes que se define con las derivadas parciales de la superficie de fluencia respecto a las componentes del vector de esfuerzos y las componentes del vector  $\mathbf{q}$ .

Con las ecuaciones anteriores queda determinado el sistema de ecuaciones que se necesita para resolver el problema de retorno de los esfuerzos a la parte continua de la superficie de fluencia siguiendo los pasos del cuadro algorítmico 3.4 del capítulo tres. Para el cálculo del módulo algorítmico se procede según lo expuesto en el capítulo tres de esta tesis.

### A.1.2. Proyección de los esfuerzos en la zona discontinua de la superficie

La proyección de los esfuerzos en la zona discontinua de la superficie, donde los esfuerzos cortantes son cero, se hace de manera sencilla si se introduce un proceso iterativo. Debido a que en esta zona el gradiente de la superficie de fluencia no existe, la deformación plástica se define a partir de la hipótesis de trabajo plástico. El proceso de iteración queda definido de la siguiente manera (Lourenço *et al.*, 1995):

**Cuadro Algorítmico A.1** Procedimiento de proyección de los esfuerzos a la zona discontinua de la superficie de fluencia de Rankine ortotrópico de dos variables internas.

1. Predicción de los esfuerzos

$$\sigma_{n-1}^{pr} = \sigma_n + \mathbf{D} : \Delta \varepsilon_{n-1}$$

2. Calcular el vector de esfuerzos:

$$\sigma_{n-1}^{(k)} = \eta_{n-1}^{(k)}$$

3. Cálculo del incremento plástico:

$$\Delta \varepsilon_{n-1}^{pl} = \mathbf{D}^{-1} : (\sigma_{n-1}^{pr} - \sigma_{n-1}^{(k)})$$

4. Evaluación de los incrementos de las variables internas:

$$\Delta \kappa_{1,n-1}^{(k)} = \frac{1}{\bar{\sigma}_1(\kappa_{1,n-1}^{(k)})} (\sigma_{n-1}^{(k)})^T \mathbf{Q}_1 \varepsilon_{n-1}^{(k)}$$

$$\Delta \kappa_{2,n-1}^{(k)} = \frac{1}{\bar{\sigma}_2(\kappa_{2,n-1}^{(k)})} (\sigma_{n-1}^{(k)})^T \mathbf{Q}_2 \varepsilon_{n-1}^{(k)}$$

Si  $|\Delta \kappa_{j,n-1}^{(k+1)} - \Delta \kappa_{j,n-1}^{(k)}| > TOL_{\Delta \kappa}$ ,  $k \rightarrow k+1$ ; regresar a 2.

El operador tangente consistente con el esquema de integración se plantea a partir de diferenciación de las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{n+1} - \eta_{n+1} &= 0 \\
 \Delta\kappa_{1,n+1} - \frac{1}{\bar{\sigma}_{1,n+1}} \sigma_{n+1}^T \mathbf{Q}_1 \Delta\epsilon_{n+1}^{pl} &= 0 \\
 \Delta\kappa_{2,n+1} - \frac{1}{\bar{\sigma}_{2,n+1}} \sigma_{n+1}^T \mathbf{Q}_2 \Delta\epsilon_{n+1}^{pl} &= 0
 \end{aligned} \tag{A.8}$$

Esta diferenciación da como resultado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\frac{\partial \eta}{\partial \kappa_1} & -\frac{\partial \eta}{\partial \kappa_2} \\ \left( \left( \frac{\partial \Delta \kappa_1}{\partial \epsilon^{pl}} \right)^T \cdot \mathbf{D}^{-1} - \left( \frac{\partial \Delta \kappa_1}{\partial \sigma} \right)^T \right) & 1 - \frac{\partial \Delta \kappa_1}{\partial \kappa_1} & 0 \\ \left( \left( \frac{\partial \Delta \kappa_2}{\partial \epsilon^{pl}} \right)^T \cdot \mathbf{D}^{-1} - \left( \frac{\partial \Delta \kappa_2}{\partial \sigma} \right)^T \right) & 0 & 1 - \frac{\partial \Delta \kappa_2}{\partial \kappa_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\sigma \\ dq \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \left( \frac{\partial \Delta \kappa_1}{\partial \epsilon^{pl}} \right)^T d\epsilon \\ \left( \frac{\partial \Delta \kappa_2}{\partial \epsilon^{pl}} \right)^T d\epsilon \end{bmatrix} \tag{A.9}$$

$$[\mathbf{A}_d]_{5 \times 5}^{-1} \begin{bmatrix} d\sigma \\ dq \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \left( \frac{\partial \Delta \kappa_1}{\partial \epsilon^{pl}} \right)^T d\epsilon \\ \left( \frac{\partial \Delta \kappa_2}{\partial \epsilon^{pl}} \right)^T d\epsilon \end{bmatrix}$$

En la ec. (A.9), la matriz identidad  $\mathbf{I}$  es de tercer orden. A partir de la segunda expresión de esta última ecuación, la matriz modular tangente se obtiene primero premultiplicando  $[\mathbf{A}_d]$  en ambos lados de la ec. (A.9), lo que da como resultado lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} d\sigma \\ dq \end{bmatrix} = [\mathbf{A}_d]_{5 \times 5} \begin{bmatrix} [\mathbf{0}]_{3 \times 1} \\ \left( \frac{\partial \Delta \kappa_1}{\partial \epsilon^{pl}} \right)^T d\epsilon \\ \left( \frac{\partial \Delta \kappa_2}{\partial \epsilon^{pl}} \right)^T d\epsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{3 \times 3}^d & \mathbf{A}_{3 \times 2}^d \\ \mathbf{A}_{2 \times 3}^d & \mathbf{A}_{2 \times 2}^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\mathbf{0}]_{3 \times 1} \\ \left( \frac{\partial \Delta \kappa_1}{\partial \epsilon^{pl}} \right)^T d\epsilon \\ \left( \frac{\partial \Delta \kappa_2}{\partial \epsilon^{pl}} \right)^T d\epsilon \end{bmatrix} \tag{A.10}$$

Realizando las multiplicaciones matriciales respectivas, finalmente el módulo tangente se calcula de la siguiente manera:

$$d\sigma = \mathbf{D}^{pl} : d\epsilon = \left[ \mathbf{A}_{3 \times 2}^d \right] \begin{bmatrix} \left( \frac{\partial \Delta \kappa_1}{\partial \epsilon^{pl}} \right)^T \\ \left( \frac{\partial \Delta \kappa_2}{\partial \epsilon^{pl}} \right)^T \end{bmatrix} d\epsilon \quad (\text{A.11})$$

## A.2. Expresiones de las derivadas parciales de primer y segundo orden

Se presenta a continuación las expresiones de las derivadas necesarias para utilizar la superficie de fluencia que se presenta en esta tesis. Para comodidad se repiten algunas de las expresiones que se encuentran en el capítulo cuatro.

Es esta parte del apéndice se presentan las expresiones para la zona continua. Para la zona discontinua, las expresiones de las derivadas resultan sencillas de obtener a partir de las ecuaciones presentadas en las ecs. (A.8).

La ecuación de la superficie de fluencia en forma matricial tiene la siguiente forma:

$$f = \left( \frac{1}{2} \xi^T \mathbf{P} \xi \right)^2 + \frac{1}{2} \pi^T \xi \quad (\text{A.12})$$

Para completar la definición de la superficie de fluencia se tienen las siguientes ecuaciones para el vector de esfuerzos reducidos  $\xi$  y el vector de esfuerzos de retorno  $\eta$ :

$$\begin{aligned} \xi &= \sigma - \eta \\ \eta &= [\bar{\sigma}_1 \quad \bar{\sigma}_2 \quad 0] \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

La evolución de las variables internas  $\kappa_1$  y  $\kappa_2$  se define si se considera la hipótesis general de endurecimiento por trabajo, como ya se presentó en el capítulo cuatro de esta tesis:

$$\begin{aligned}\Delta\kappa_1 &= \frac{\Delta\lambda}{\bar{\sigma}_1} \sigma^T \mathbf{Q}_1 \frac{\partial f}{\partial \sigma} \\ \Delta\kappa_2 &= \frac{\Delta\lambda}{\bar{\sigma}_2} \sigma^T \mathbf{Q}_2 \frac{\partial f}{\partial \sigma}\end{aligned}\tag{A.14}$$

Con estas ecuaciones se definen las expresiones algebraicas restantes que se utilizan para integrar numéricamente las ecuaciones de flujo del criterio de Rankine ortotrópico.

### A.2.1. Gradiente paralelo al flujo plástico

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right|_{n+1} = \frac{\mathbf{P}\xi_{n+1}}{2\left(\frac{1}{2}\xi_{n+1}^T \mathbf{P}\xi_{n+1}\right)^{1/2}} + \frac{1}{2}\pi\tag{A.15}$$

Donde la matriz  $\mathbf{P}$  y el vector  $\pi$  están definidos como:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2\alpha \end{bmatrix}, \quad \pi = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\tag{A.16}$$

El valor de  $\alpha$  se obtiene de la ec. (A.13).

$$\alpha = \frac{f_{ix} \cdot f_{iy}}{\tau_u^2}\tag{A.17}$$

donde  $f_{ix}$  y  $f_{iy}$  son las resistencias en las direcciones  $x$  e  $y$  respectivamente y  $\tau_u$  es la resistencia al esfuerzo cortante.

**A.2.2. Segunda derivada  $\frac{\partial^2 f}{\partial \sigma^2}$**

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma^2} \right|_{n-1} = \frac{\mathbf{P}}{2 \left( \mathbf{1}_2 \xi_{n-1}^T \mathbf{P} \xi_{n-1} \right)^{3/2}} - \frac{(\mathbf{P} \xi_{n-1})(\mathbf{P} \xi_{n-1})^T}{4 \left( \mathbf{1}_2 \xi_{n-1}^T \mathbf{P} \xi_{n-1} \right)^{5/2}} \quad (\text{A.18})$$

**A.2.3. Derivadas de funciones vectoriales respecto a las variables de ablandamiento**

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial \kappa_1 \partial \sigma} \right|_{n-1} &= - \left. \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma^2} \frac{\partial \eta}{\partial \kappa_1} \right|_{n-1} \\ \left. \frac{\partial^2 f}{\partial \kappa_2 \partial \sigma} \right|_{n-1} &= - \left. \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma^2} \frac{\partial \eta}{\partial \kappa_2} \right|_{n-1} \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

donde:

$$\begin{aligned} \eta_{n-1} &= \left[ \bar{\sigma}_1(\kappa_1) \quad \bar{\sigma}_2(\kappa_2) \quad 0 \right]_{n-1}^T \\ \left. \frac{\partial \eta}{\partial \kappa_1} \right|_{n-1} &= \left[ \frac{\partial \bar{\sigma}_1(\kappa_1)}{\partial \kappa_1} \quad 0 \quad 0 \right]_{n-1}^T \\ \left. \frac{\partial \eta}{\partial \kappa_2} \right|_{n-1} &= \left[ 0 \quad \frac{\partial \bar{\sigma}_2(\kappa_2)}{\partial \kappa_2} \quad 0 \right]_{n-1}^T \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

**A.2.4. Derivadas de la función de fluencia respecto a las variables de ablandamiento**

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f}{\partial \kappa_1} \right|_{n-1} &= - \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T \left. \frac{\partial \eta}{\partial \kappa_1} \right|_{n-1} \\ \left. \frac{\partial f}{\partial \kappa_2} \right|_{n-1} &= - \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T \left. \frac{\partial \eta}{\partial \kappa_2} \right|_{n-1} \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

**A.2.5. Derivadas**  $\frac{\partial \Delta \kappa_1}{\partial \sigma}$  y  $\frac{\partial \Delta \kappa_2}{\partial \sigma}$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \Delta \kappa_1}{\partial \sigma} \right|_{n-1} &= \frac{\Delta \lambda}{\bar{\sigma}_1(\kappa_1)} \mathbf{Q}_1 \left. \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right|_{n-1} + \frac{\Delta \lambda}{\bar{\sigma}_1(\kappa_1)} \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma^2} \mathbf{Q}_1 \sigma \left. \right|_{n-1} \\ \left. \frac{\partial \Delta \kappa_2}{\partial \sigma} \right|_{n+1} &= \frac{\Delta \lambda}{\bar{\sigma}_2(\kappa_2)} \mathbf{Q}_2 \left. \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right|_{n+1} + \frac{\Delta \lambda}{\bar{\sigma}_2(\kappa_2)} \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma^2} \mathbf{Q}_2 \sigma \left. \right|_{n+1} \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

**A.2.6. Derivadas**  $\frac{\partial \Delta \kappa_1}{\partial \Delta \lambda}$  y  $\frac{\partial \Delta \kappa_2}{\partial \Delta \lambda}$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \Delta \kappa_1}{\partial \Delta \lambda} \right|_{n-1} &= \frac{1}{\bar{\sigma}_1(\kappa_1)} \sigma^T \mathbf{Q}_1 \left. \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right|_{n-1} \\ \left. \frac{\partial \Delta \kappa_2}{\partial \Delta \lambda} \right|_{n+1} &= \frac{1}{\bar{\sigma}_2(\kappa_2)} \sigma^T \mathbf{Q}_2 \left. \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right|_{n+1} \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

**A.2.7. Derivadas**  $\frac{\partial \Delta \kappa_1}{\partial \kappa_1}$  y  $\frac{\partial \Delta \kappa_2}{\partial \kappa_2}$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \Delta \kappa_1}{\partial \kappa_1} \right|_{n-1} &= \frac{\Delta \lambda}{\bar{\sigma}_1(\kappa_1)} \sigma^T \mathbf{Q}_1 \left. \frac{\partial^2 f}{\partial \kappa_1 \partial \sigma} \right|_{n-1} - \frac{\Delta \lambda}{\bar{\sigma}_1^2(\kappa_1)} \sigma^T \mathbf{Q}_1 \left. \frac{\partial f}{\partial \sigma} \frac{\partial \bar{\sigma}_1}{\partial \kappa_1} \right|_{n-1} \\ \left. \frac{\partial \Delta \kappa_2}{\partial \kappa_2} \right|_{n+1} &= \frac{\Delta \lambda}{\bar{\sigma}_2(\kappa_2)} \sigma^T \mathbf{Q}_2 \left. \frac{\partial^2 f}{\partial \kappa_2 \partial \sigma} \right|_{n+1} - \frac{\Delta \lambda}{\bar{\sigma}_2^2(\kappa_2)} \sigma^T \mathbf{Q}_2 \left. \frac{\partial f}{\partial \sigma} \frac{\partial \bar{\sigma}_2}{\partial \kappa_2} \right|_{n+1} \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

**A.2.8. Derivadas**  $\frac{\partial \Delta \kappa_1}{\partial \kappa_2}$  y  $\frac{\partial \Delta \kappa_2}{\partial \kappa_1}$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \Delta \kappa_1}{\partial \kappa_2} \right|_{n-1} &= \frac{\Delta \lambda}{\bar{\sigma}_1(\kappa_1)} \sigma^T \mathbf{Q}_1 \left. \frac{\partial^2 f}{\partial \kappa_2 \partial \sigma} \right|_{n-1} \\ \left. \frac{\partial \Delta \kappa_2}{\partial \kappa_1} \right|_{n+1} &= \frac{\Delta \lambda}{\bar{\sigma}_2(\kappa_2)} \sigma^T \mathbf{Q}_2 \left. \frac{\partial^2 f}{\partial \kappa_1 \partial \sigma} \right|_{n+1} \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

---

---

### A.3. Sumario

Estas expresiones se utilizaron para implantar el criterio de fluencia, que se presenta en esta tesis, en el programa de análisis no-lineal con elementos finitos NLFEM. Se hace hincapié que las matrices modulares tangentes son asimétricas. Por esto último es conveniente utilizar procedimientos de solución de ecuaciones lineales asimétricos, tanto para la solución local de las ecuaciones de flujo, como para el sistema global de ecuaciones producto del proceso de ensamblaje de las matrices de los elementos donde se han definido este criterio de fluencia.

# **APÉNDICE B**

## **Programa de análisis no-lineal basado en el método de los elementos finitos, NLFEM (Non-Linear Finite Element Models)**

Este anexo es una introducción general del programa de elementos finitos con que el se ha trabajado en esta tesis. La primera parte hace una breve revisión de la capacidad del programa, describiendo el campo de aplicación, la organización de éste y su potencial para incorporar nuevos desarrollos de modelos de comportamiento y de algoritmos numéricos de solución para la investigación en el campo de la mecánica numérica. Por las características de este anexo, difícilmente se podrá hacer una descripción de la teoría del método de los elementos finitos y se da por entendido que el lector tiene un conocimiento básico de este método.

### **B.1 Revisión del programa**

El programa NLFEM es un software desarrollado en base al método de los desplazamientos. El diseño de éste comenzó en el año de 1999 por el autor de esta tesis doctoral inspirado en programas de uso público, tales como el TOCHNOG, WARP3D,

---

---

FEAP p.v., etc. y comerciales como el programa DIANA, ABAQUS y ANSYS. Este programa se encuentra en constante desarrollo desde el año 2001, cuando se finalizó la etapa de diseño de la base de datos e interfases gráficas. En este apéndice se revisa los campos de aplicación a los que se ha enfocado hasta el momento NLFEM, así como señalar algunas características sobre la arquitectura de este sistema de elementos finitos.

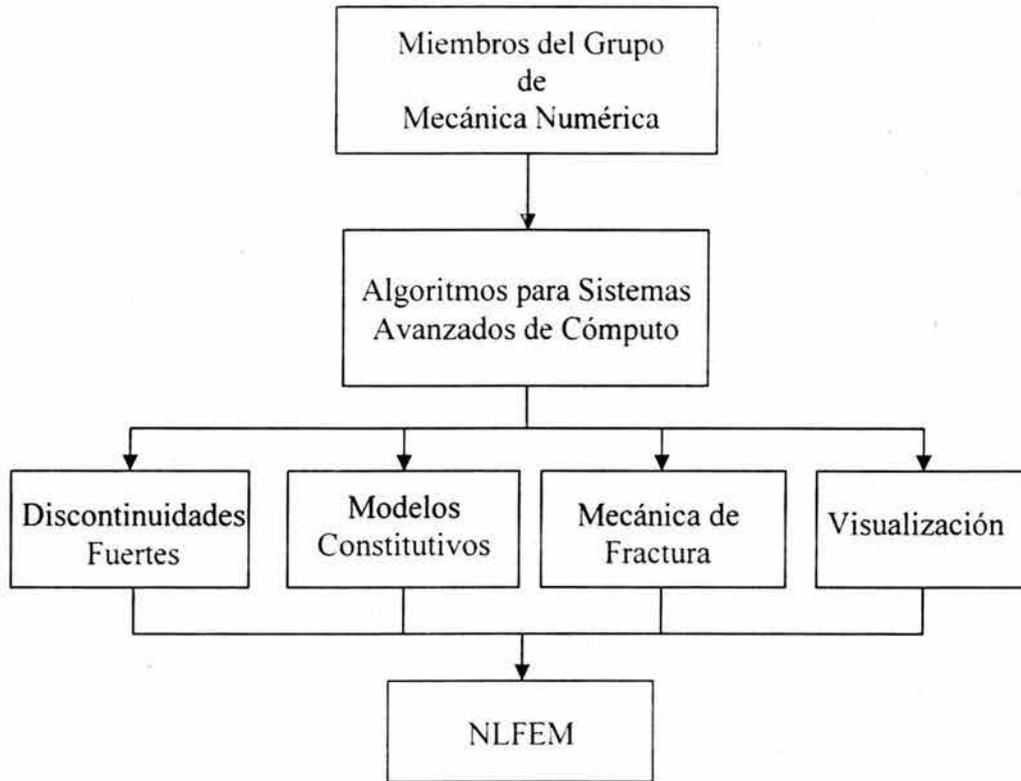
### **B.1.1 Campo de aplicación del sistema**

NLFEM es un programa que permite investigar el comportamiento físico y/o mecánico de una gran variedad de sistemas estructurales gracias a la amplia variedad de tipos de elementos incorporados en él que pueden ser aplicados a estructuras de concreto simple y reforzado, asimismo como a estructuras de mampostería. También se puede realizar modelados de problemas de la mecánica de suelos. Igualmente existe la posibilidad de aplicar elementos especiales que permiten analizar sólidos constituidos por materiales elásticos isotrópicos u ortotrópicos, o hiper-elásticos.

### **B.1.2 Organización y desarrollo del sistema**

En el año de 1999 el autor de esta tesis doctoral y su tutor, integrantes del grupo de Mecánica Numérica del Instituto de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), comenzaron el diseño del programa NLFEM. La idea inicial fue de desarrollar un sistema de análisis propio para trabajos de investigación en la mecánica de sólidos. Gradualmente, debido a la flexibilidad del sistema, el programa se ha extendido para resolver diversos problemas en los distintos campos de investigación de la ingeniería civil. El programa ya se ha empleado con éxito en trabajos de investigación donde participan alumnos de maestría y doctorado de la especialidad de estructuras y geotecnia del Posgrado en Ingeniería de la UNAM.

La evolución de esta herramienta de análisis ha obligado a organizar el grupo de mecánica numérica con la intención de mejorar las opciones y la capacidad del sistema (ver fig. B.1).



**Figura B.1** Diagrama de trabajo del programa NLFEM(IINGEN-UNAM)

### B.1.2.1 Usuarios objetivo

La finalidad del desarrollo de este sistema, es dirigir y divulgar el conocimiento de los procedimientos numéricos avanzados que existen para el análisis no-lineal donde se utiliza el método de los elementos finitos y que están enmarcados dentro de la especialidad de la mecánica numérica. Por tanto, el programa está dirigido hacia los investigadores de la ingeniería civil en las especialidades de la mecánica de estructuras y de la mecánica de suelos. También, NLFEM posee una estructura robusta de programación que permitirá su extensión a problemas de la mecánica de fluidos.

### B.1.2.2 Disponibilidad del software

Con la intención de mantener la calidad del software, se ha creído conveniente establecer grupos de trabajo comprometidos con el desarrollo tecnológico en el área de la mecánica

---

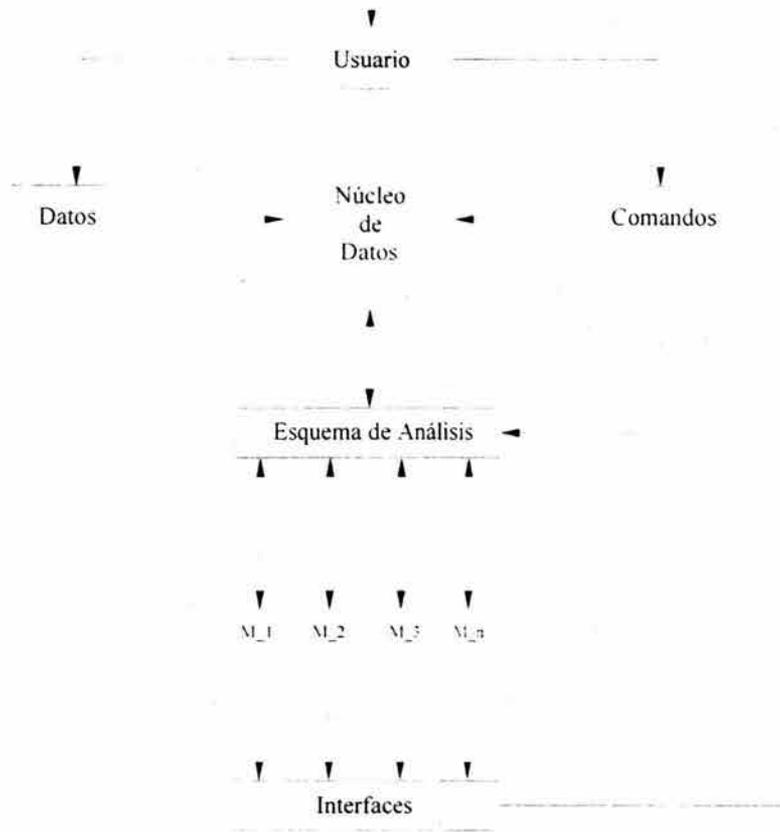
---

computacional en México. Es así que el área de mecánica numérica del Instituto de Ingeniería mantiene un intenso contacto con grupos de investigación financiados por la industria del petróleo, industria metal-mecánica y empresas de ingeniería. También existe una estrecha relación con universidades y otros institutos de investigación del país y del extranjero. El software está disponible a toda institución que desee fomentar el conocimiento de la mecánica computacional y cuyo compromiso sea contribuir con recursos humanos y financieros en forma de becas para estudiantes de maestría y de doctorado, o pago de subvenciones para estancias de trabajo de científicos nacionales y extranjeros. Se señala que el software no es comercial y no se pretende ningún beneficio más que impulsar en México esta tecnología de análisis no-lineal con elementos finitos.

### **B.1.2.3 Arquitectura del programa y estilo de programación**

El programa NLFEM fue escrito dentro del sistema operativo LINUX y es transportable a otros sistemas operativos que cumplan con los estándares POSIX. La programación del sistema se hizo con tres lenguajes: C++, C y FORTRAN 77. El primero se utilizó para explotar la potencia de la filosofía en la cual se fundamenta la programación orientada a objetos, diseñando clases especiales que definen los objetos principales de la base de datos. Las funciones miembro, métodos de la clase principal, se escriben en dos niveles: el primero en C++, donde las rutinas hacen referencia a las funciones escritas en C y que están vinculadas con el sistema operativo y la manipulación de la base de datos del programa.

El programa completo está constituido por otros subprogramas ejecutables escritos en FORTRAN 77 que son llamados entre sí mediante el control de procesos padres a procesos hijos. Utilizando un esquema definido en la base de datos del programa se busca que solo se utilicen los subprogramas, o módulos, que son necesarios durante el desarrollo de la solución del problema considerado. Esto último permite mejorar el desempeño, debido a que se reduce el costo en tiempo de ejecución al utilizar la memoria necesaria en cada aplicación (ver figura B.2). NLFEM está programado también para seguir incorporando subprogramas con el fin de extender su capacidad de análisis para ser empleado en otras especialidades de la ingeniería.



**Figura B.2** Esquema de trabajo del programa y su interacción con el usuario.

#### B.1.2.4 Ejecución del programa

El programa NLFEM trabaja con dos archivos elaborados en formato ASCII. El primer archivo es de datos y en él se definen la geometría, tipos de elementos, materiales y cargas que se aplicaran sobre el modelo numérico. El segundo, le indica al programa, mediante una serie de comandos, el tipo de análisis que se desarrollará y la manera que éste análisis se llevará a cabo. En el caso de realizar un análisis no-lineal este programa tiene la capacidad de guardar los pasos de integración del problema que elija el analista en la unidad de almacenamiento, disco duro en este caso, y también reiniciar el análisis del modelo de elementos finitos a partir de estos archivos guardados. NLFEM también permite visualizar los resultados en tiempo de ejecución ya que cuenta con rutinas gráficas que utilizan las interfases del sistema GKS-starlink.

---

---

## B.2. Librería de elementos finitos

NLFEM cuenta con una amplia librería de elementos finitos para el modelado de estructuras bidimensionales y tridimensionales. Dentro de la librería para el análisis de estructuras se tienen los siguientes elementos:

- Elementos de armadura y elementos de cables en dos y tres dimensiones;
- Elementos de vigas rectas y vigas curvas;
- Elementos para el estado plano de esfuerzos, para el estado plano de deformación y axi-simétricos.
- Elementos de placas en flexión(losas)
- Elementos de cascarones
- Elementos sólidos
- Elementos de interfaces concentrados, lineales y planos

También se pueden modelar estructuras con acero de reforzamiento. Las fuerzas en los elementos de reforzamiento se calculan compatibilizando las deformaciones de los elementos en los que se encuentran embebidos, que pueden ser cualquiera de los antes mencionados, con las deformaciones del elemento de refuerzo.

A cada elemento finito se le puede asignar los esquemas de integración de Lobatto, Gauß o Simpson; aunque, por defecto, cada elemento emplea el esquema más apropiado según recomendaciones que se encuentran en las distintas bibliografías relativas al tema del método de los elementos finitos.

## B.3. Modelos de comportamiento no-lineal para el material

En NLFEM se han implantado diversos modelos de constitutivos que permiten simular las características mecánicas no-lineales de los distintos tipos de materiales que existen en la ingeniería. Los modelos de comportamiento que se han implementado en el sistema son:

- Modelo elásticos e hiperelásticos:
- modelos viso-elásticos, visco-plásticos, creep y shrinkage;
- modelos de Plasticidad:
  - Von Mises
  - Tsai-Hill
  - Hoffman
  - Rankine isotrópico
  - Mohr-Coulomb
  - Drücker-Präger
  - Tresca
  
- Modelos de Agrietamiento Distribuido
  - Dirección de agrietamiento fija.
  - Dirección de agrietamiento variable.
  - Relaciones esfuerzo-deformación establecidos con funciones exponenciales y lineales para simular el ablandamiento del material.

Todos estos modelos se pueden utilizar combinados con análisis que deban incluir la no-linealidad geométrica.

---

#### **B.4. Solución numérica de sistemas no-lineales**

NLFEM cuenta con rutinas de última generación para la solución de sistemas de ecuaciones no-lineales. Los procedimientos que se han introducido son:

- Procedimientos iterativos regulares y modificados de Newton-Raphson combinados con procedimientos incrementales:

- 
- controles de fuerzas, desplazamientos directos, control por métodos de arco y de desplazamientos indirectos;
  - algoritmo de búsqueda lineal para acelerar la convergencia;
  - limitadores de convergencia basados en las normas de la energía, de los desplazamientos y de las fuerzas.

Las rutinas de manipulación de las matrices y vectores están basadas en el paquete LAPACK. Para resolver los sistemas de ecuaciones lineales simétricos y asimétricos se han introducido las últimas versiones de los paquetes especiales SuperLU, UMFPACK y PETS.

### **B.5. Importancia del sistema para futuras investigaciones**

Para resolver un problema estructural donde se involucren la no-linealidad física y/o la geométrica es necesario un sistema fácil de mantener y entender. A pesar que la idea básica de esta tesis era proponer una relación constitutiva para materiales como la mampostería, el desarrollo del trabajo de investigación mostró la necesidad de tener un sistema de elementos finitos estable y robusto donde implementar las relaciones constitutivas aplicadas a materiales cuasi-frágiles, incluyendo la que se propone en esta tesis. Esta herramienta computacional ofrece una alternativa de análisis a los grupos de investigación en la mecánica numérica que existen en México y también es una oportunidad de divulgar las teorías y procedimientos numéricos que existen en la mecánica computacional, una tecnología relativamente nueva en nuestro país y de la que ya se tiene pleno conocimiento que se puede extender a otros campos de la ingeniería.

---

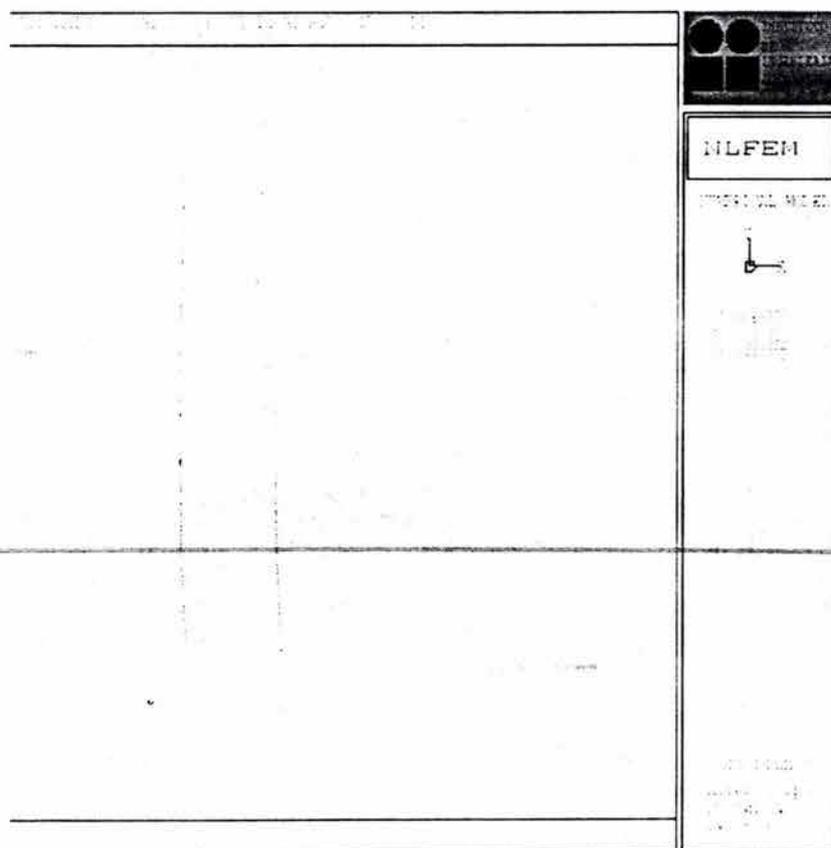
### **B.6. Algunos ejemplos de validación**

En esta parte del apéndice B se trata algunos problemas de la mecánica estructural. La primera aplicación presenta un modelo espacial elástico. El segundo es un ejemplo de análisis de una estructura de concreto reforzado y el último problema presenta la versatilidad del programa NLFEM para modelar materiales hiperelásticos e incompresibles.

### B.6.1 Modelo 3D de cilindro de concreto cargado axialmente

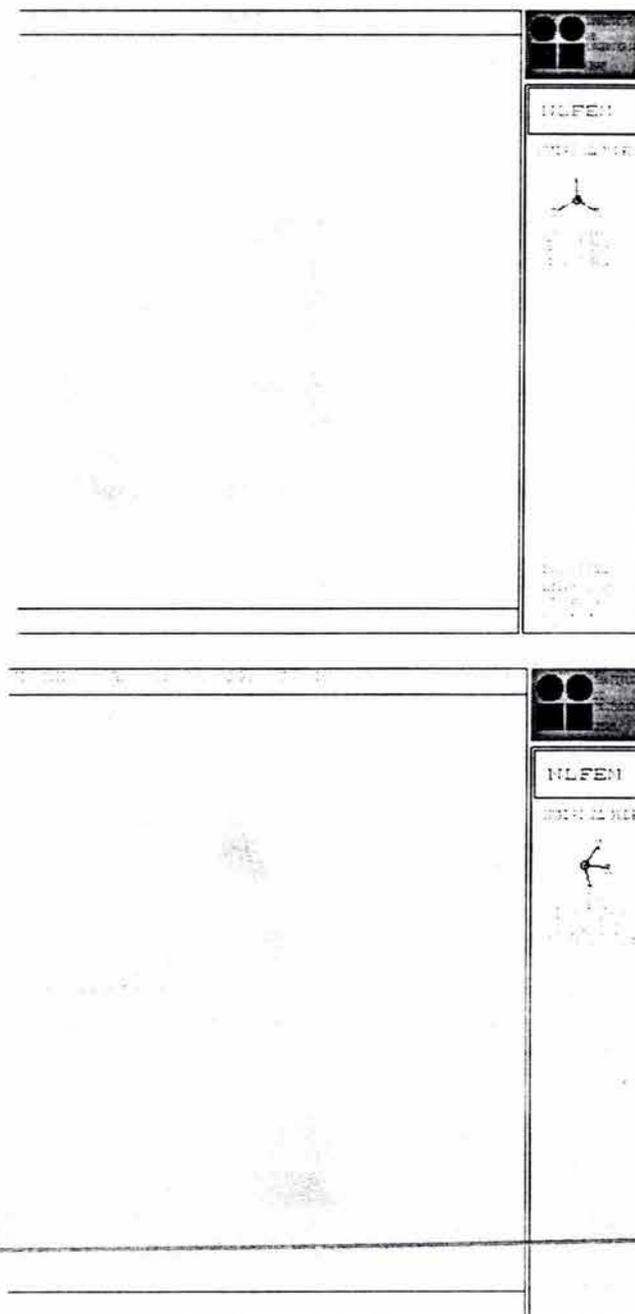
El modelo que se plantea es un cilindro de mampostería que se ha extraído de un estudio elaborado por el Instituto de Ingeniería para la Dirección General de Sitios y Monumentos del Patrimonio Cultural del Consejo Nacional para la Cultura y las Artes (Sánchez *et al.* 2001).

Aunque el análisis lineal no es el tema del trabajo de investigación, se cree conveniente mostrar este ejemplo de análisis lineal elástico. Este tipo de análisis es un paso necesario para desarrollar análisis no-lineal en cualquier tipo de estructura. El modelo experimental utilizado es un espécimen que presenta una sección transversal como la que se observa en la siguiente figura.



**Figura B.1.** Sección transversal de columna corta(Sánchez *et al.* 2001)

Otras perspectivas del modelo numérico se observan en la fig. B.2.



**Figura B.2.** Perspectiva del modelo numérico del cilindro de prueba.

Este espécimen de prueba está sometido a una presión uniforme de  $20 \text{ kg/cm}^2$  en los extremos del eje longitudinal. El modelo está representado por 8720 nudos y 7410 elementos hexaédricos de 8 nudos. El módulo de Young y la relación de Poisson son respectivamente  $100000 \text{ kg/cm}^2$  y 0.25. Como ejercicio numérico se desarrolló un análisis

# Simulación numérica del comportamiento mecánico de la mampostería

elástico y se presentan los resultados en las siguientes líneas. NLFEM ofrece la facilidad de poder imprimir los resultados en determinados nudos, puntos de integración o elementos.

```
NNN   NN LL   FFFFFFFF EEEEEEE MMM   MM
NNNN  NN LL   FFFFFFFF EEEEEEE MMMM  MMM
NNNN  NN LL   FF       EE       MMMM  MMM
NN NN  NN LL   FF       EE       MM MMM MM
NN NN  NN LL   FFFFFF  EEEEE  MM  MM  MM
NN NN  NN LL   FFFFFF  EEEEE  MM  MM  MM
NN NN  NN LL   FF       EE       MM  MM  MM
NN NN  NN LL   FF       EE       MM  MM  MM
NN NN  NN LL   FF       EE       MM  MM  MM
NN NN  NN LL   FF       EE       MM  MM  MM
NN NN  NN LL   FF       EE       MM  MM  MM
```

NON-LINEAR FINITE ELEMENT SYSTEM  
INSTITUTO DE INGENIERIA - INAM  
APPLIED MECHANICS DEPARTMENT  
COMPUTATIONAL MECHANICS GROUP  
SYSTEM PROGRAMMER : G. RCEDER CARBOSSO.

```
.....  
.....  
*** CILINDRO CASO 1: UNITS KG-CM ***  
.....  
.....  
*** NLFEM RELEASE 1.1 LATEST UPDATE: Mon Apr 15 19:23:03 DST 2002 ***  
.....
```

1  
OEXTREME RESIDUAL FORCES:  
\*\*\*\*\*  
LOAD CASE NO. VALUE  
1 0.0000 0.0000E+00

16:01:31 PAGE 1  
NLFEM RELEASE 1.1 INAM-INGEN

17-Jan-04  
CILINDRO CASO 1:

UNITS KG-CM

TOTAL DISPLACEMENTS IN GLOBAL AXES

NODE	LOAD	U_X	U_Y	U_Z	R_X	R_Y	R_Z
1	1	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00			
2	1	1.300E-00	0.000E+00	0.000E+00			
3	1	1.300E-00	0.000E+00	0.000E+00			
4	1	1.300E-00	0.000E+00	0.000E+00			
5	1	1.300E-00	0.000E+00	0.000E+00			
6	1	1.300E-00	0.000E+00	0.000E+00			
7	1	1.300E-00	0.000E+00	0.000E+00			
8	1	1.300E-00	0.000E+00	0.000E+00			
9	1	1.300E-00	0.000E+00	0.000E+00			
10	1	1.300E-00	0.000E+00	0.000E+00			

16:01:31 PAGE 103  
NLFEM RELEASE 1.1 INAM-INGEN

17-Jan-04  
CILINDRO CASO 1:

UNITS KG-CM

TOTAL DISPLACEMENTS IN GLOBAL AXES

NODE	LOAD	U_X	U_Y	U_Z	R_X	R_Y	R_Z
8426	1	1.473E-04	1.973E-04	-1.599E-02			
8426	1	1.433E-04	1.773E-04	-1.599E-02			
8427	1	1.648E-04	1.621E-04	-1.599E-02			
8428	1	1.189E-04	1.283E-04	-1.599E-02			
8429	1	1.189E-04	1.283E-04	-1.599E-02			
8430	1	1.189E-04	1.283E-04	-1.599E-02			
8431	1	1.189E-04	1.283E-04	-1.599E-02			
8432	1	1.189E-04	1.283E-04	-1.599E-02			
8433	1	1.189E-04	1.283E-04	-1.599E-02			
8434	1	1.189E-04	1.283E-04	-1.599E-02			
8435	1	1.189E-04	1.283E-04	-1.599E-02			
8436	1	1.189E-04	1.283E-04	-1.599E-02			
8437	1	1.189E-04	1.283E-04	-1.599E-02			
8438	1	1.189E-04	1.283E-04	-1.599E-02			
8439	1	1.189E-04	1.283E-04	-1.599E-02			
8440	1	1.189E-04	1.283E-04	-1.599E-02			
8441	1	1.189E-04	1.283E-04	-1.599E-02			
8442	1	1.189E-04	1.283E-04	-1.599E-02			
8443	1	1.189E-04	1.283E-04	-1.599E-02			
8444	1	1.189E-04	1.283E-04	-1.599E-02			

16:01:42 PAGE 1514  
NLFEM RELEASE 1.1

27-Jan-84

CILINDRO CASO 1:

UNIDADES KG-CM

CAUCHY STRESS IN LOCAL AXES FOR ELEMENT TYPE HEXA24GL

ELEMEN	IPNT	LOAD	Sxx	Syy	Szz	Sxy	Syz	Szx	Seq
1									
AXES ( 1.00 0.00 0.00 / 0.00 0.00 0.00 / 0.00 0.00 0.00 )									
1	1	1	-5.841E+00	-5.842E+00	-1.835E+01	-2.450E-04	3.242E-02	1.427E-01	1.254E+01
2	1	1	-4.841E+00	-4.844E+00	-1.786E+01	-9.143E-04	3.234E-02	3.378E-01	1.302E+01
3	1	1	-5.821E+00	-5.823E+00	-1.836E+01	-8.047E-05	1.274E-01	1.177E-01	1.254E+01
4	1	1	-4.841E+00	-4.848E+00	-1.787E+01	-3.003E-04	1.264E-01	1.127E-01	1.303E+01
5	1	1	-5.824E+00	-5.823E+00	-1.837E+01	4.354E-04	3.393E-02	4.443E-01	1.257E+01
6	1	1	-4.843E+00	-4.838E+00	-1.788E+01	1.812E-03	3.267E-02	4.394E-01	1.306E+01
7	1	1	-5.825E+00	-5.824E+00	-1.837E+01	7.989E-04	1.277E-01	4.692E-01	1.258E+01
8	1	1	-4.843E+00	-4.839E+00	-1.786E+01	2.982E-03	1.257E-01	4.642E-01	1.307E+01
2									
AXES ( 1.00 0.00 0.00 / 0.00 0.00 0.00 / 0.00 0.00 0.00 )									
1	1	1	-5.820E+00	-5.819E+00	-1.835E+01	-2.451E-04	1.427E-01	1.244E-02	1.254E+01
2	1	1	-4.844E+00	-4.841E+00	-1.786E+01	-9.146E-04	1.274E-01	3.284E-02	1.302E+01
3	1	1	-5.823E+00	-5.824E+00	-1.837E+01	4.853E-04	4.443E-01	3.393E-02	1.257E+01
4	1	1	-4.838E+00	-4.843E+00	-1.788E+01	1.811E-03	4.394E-01	1.267E-02	1.306E+01
5	1	1	-5.823E+00	-5.821E+00	-1.836E+01	-8.054E-05	2.177E-01	1.274E-01	1.254E+01
6	1	1	-4.848E+00	-4.841E+00	-1.787E+01	-3.006E-04	1.264E-01	1.127E-01	1.303E+01
7	1	1	-5.824E+00	-5.825E+00	-1.837E+01	7.988E-04	4.692E-01	2.279E-01	1.258E+01
8	1	1	-4.839E+00	-4.842E+00	-1.788E+01	2.981E-03	4.642E-01	1.267E-01	1.307E+01
3									
AXES ( 1.00 0.00 0.00 / 0.00 0.00 0.00 / 0.00 0.00 0.00 )									
1	1	1	-5.821E+00	-5.821E+00	-1.836E+01	1.203E-03	1.437E-01	1.739E-01	1.255E+01
2	1	1	-4.837E+00	-4.839E+00	-1.787E+01	4.490E-03	1.401E-01	1.688E-01	1.295E+01
3	1	1	-5.823E+00	-5.824E+00	-1.837E+01	1.283E-03	1.257E-01	1.625E-01	1.257E+01
4	1	1	-4.839E+00	-4.843E+00	-1.788E+01	4.787E-03	2.851E-01	1.469E-01	1.306E+01
5	1	1	-5.824E+00	-5.824E+00	-1.838E+01	1.767E-03	1.443E-01	4.869E-01	1.258E+01
6	1	1	-4.839E+00	-4.836E+00	-1.788E+01	6.596E-03	1.304E-01	4.817E-01	1.307E+01
7	1	1	-5.825E+00	-5.825E+00	-1.838E+01	2.042E-03	2.468E-01	3.195E-01	1.259E+01
8	1	1	-4.838E+00	-4.838E+00	-1.789E+01	7.621E-03	2.435E-01	3.047E-01	1.308E+01

16:01:42 PAGE 1515  
NLFEM RELEASE 1.1

27-Jan-84

UNAM-TINGEN

CILINDRO CASO 1:

UNIDADES KG-CM

CAUCHY STRESS IN LOCAL AXES FOR ELEMENT TYPE HEXA24GL

ELEMEN	IPNT	LOAD	Sxx	Syy	Szz	Sxy	Syz	Szx	Seq
7404									
AXES ( 1.00 0.00 0.00 / 0.00 0.00 0.00 / 0.00 0.00 0.00 )									
1	1	1	-2.316E+00	-2.825E+00	-1.923E+01	6.295E-01	-2.382E+00	-4.634E-01	1.727E+01
2	1	1	-5.876E+00	-6.012E+00	-2.092E+01	1.687E-01	-2.357E+00	-4.500E-01	1.559E+01
3	1	1	-2.298E+00	-2.805E+00	-1.919E+01	6.400E-01	-2.653E+00	-4.318E-01	1.736E+01
4	1	1	-5.862E+00	-5.998E+00	-2.064E+01	1.713E-01	-2.617E+00	-4.607E-01	1.568E+01
5	1	1	-2.296E+00	-2.782E+00	-1.920E+01	6.309E-01	-2.453E+00	-4.402E-01	1.740E+01
6	1	1	-5.865E+00	-5.995E+00	-2.049E+01	1.691E-01	-2.391E+00	-4.389E-01	1.571E+01
7	1	1	-2.297E+00	-2.744E+00	-1.911E+01	6.499E-01	-2.707E+00	-4.284E-01	1.745E+01
8	1	1	-5.847E+00	-5.966E+00	-2.073E+01	1.717E-01	-2.604E+00	-4.548E-01	1.574E+01
7405									
AXES ( 1.00 0.00 0.00 / 0.00 0.00 0.00 / 0.00 0.00 0.00 )									
1	1	1	-5.878E+00	-6.030E+00	-2.084E+01	6.433E-01	-2.613E+00	-4.244E-01	1.580E+01
2	1	1	-2.297E+00	-2.734E+00	-1.923E+01	6.714E-01	-2.707E+00	-4.284E-01	1.745E+01
3	1	1	-5.872E+00	-6.039E+00	-2.083E+01	6.413E-01	-2.604E+00	-4.258E-01	1.589E+01
4	1	1	-5.833E+00	-5.954E+00	-2.015E+01	1.828E-01	-2.699E+00	-4.329E-01	1.492E+01
7409									
AXES ( 1.00 0.00 0.00 / 0.00 0.00 0.00 / 0.00 0.00 0.00 )									
1	1	1	-4.914E+00	-4.930E+00	-1.866E+01	5.443E-01	-1.811E+00	-1.401E+00	1.620E+01
2	1	1	-4.947E+00	-5.011E+00	-1.887E+01	1.458E-01	-1.894E+00	-1.594E+00	1.441E+01
3	1	1	-4.944E+00	-4.949E+00	-1.866E+01	5.713E-01	-1.893E+00	-1.613E+00	1.603E+01
4	1	1	-4.933E+00	-4.937E+00	-1.848E+01	1.833E-01	-1.843E+00	-1.614E+00	1.613E+01
7410									
AXES ( 1.00 0.00 0.00 / 0.00 0.00 0.00 / 0.00 0.00 0.00 )									
1	1	1	-1.595E+00	-1.828E+00	-1.807E+01	6.142E-01	-1.960E+00	-1.722E-01	1.677E+01
2	1	1	-5.467E+00	-5.530E+00	-1.996E+01	1.846E-01	-1.412E+00	7.936E-02	1.467E+01
3	1	1	-1.586E+00	-1.665E+00	-1.774E-01	6.436E-01	-2.375E+00	-1.972E-01	1.667E+01
4	1	1	-5.381E+00	-5.402E+00	-1.962E+01	1.724E-01	-1.770E+00	3.558E-01	1.459E+01
5	1	1	-9.689E-01	-1.173E+00	-1.643E+01	5.596E-01	-2.321E+00	-1.210E+00	1.604E+01
6	1	1	-4.913E+00	-4.968E+00	-1.836E+01	1.499E-01	-1.739E+00	-2.048E-01	1.379E+01
7	1	1	-9.879E-01	-1.025E+00	-1.623E+01	5.758E-01	-2.284E+00	-7.196E-01	1.598E+01
8	1	1	-4.971E+00	-4.981E+00	-1.817E+01	1.843E-01	-1.843E+00	-2.183E-02	1.372E+01

16:01:42 PAGE 1516  
NLFEM RELEASE 1.1

27-Jan-84

UNAM-TINGEN

UNIDADES KG-CM

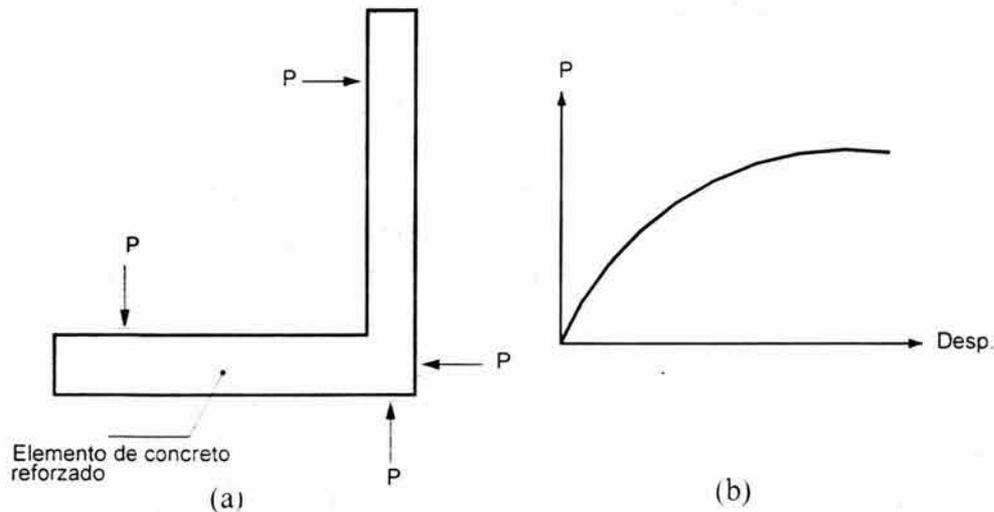
CAUCHY STRESS IN LOCAL AXES FOR ELEMENT TYPE HEXA24GL

ELEMEN	IPNT	LOAD	Sxx	Syy	Szz	Sxy	Syz	Szx	Seq
7409									
AXES ( 1.00 0.00 0.00 / 0.00 0.00 0.00 / 0.00 0.00 0.00 )									
5	1	1	-4.914E+00	-4.930E+00	-1.866E+01	5.443E-01	-1.811E+00	-1.401E+00	1.620E+01
6	1	1	-4.947E+00	-5.011E+00	-1.887E+01	1.458E-01	-1.894E+00	-1.594E+00	1.441E+01
7	1	1	-4.944E+00	-4.949E+00	-1.866E+01	5.713E-01	-1.893E+00	-1.613E+00	1.603E+01
8	1	1	-4.933E+00	-4.937E+00	-1.848E+01	1.833E-01	-1.843E+00	-1.614E+00	1.613E+01
7410									
AXES ( 1.00 0.00 0.00 / 0.00 0.00 0.00 / 0.00 0.00 0.00 )									
1	1	1	-1.595E+00	-1.828E+00	-1.807E+01	6.142E-01	-1.960E+00	-1.722E-01	1.677E+01
2	1	1	-5.467E+00	-5.530E+00	-1.996E+01	1.846E-01	-1.412E+00	7.936E-02	1.467E+01
3	1	1	-1.586E+00	-1.665E+00	-1.774E-01	6.436E-01	-2.375E+00	-1.972E-01	1.667E+01
4	1	1	-5.381E+00	-5.402E+00	-1.962E+01	1.724E-01	-1.770E+00	3.558E-01	1.459E+01
5	1	1	-9.689E-01	-1.173E+00	-1.643E+01	5.596E-01	-2.321E+00	-1.210E+00	1.604E+01
6	1	1	-4.913E+00	-4.968E+00	-1.836E+01	1.499E-01	-1.739E+00	-2.048E-01	1.379E+01
7	1	1	-9.879E-01	-1.025E+00	-1.623E+01	5.758E-01	-2.284E+00	-7.196E-01	1.598E+01
8	1	1	-4.971E+00	-4.981E+00	-1.817E+01	1.843E-01	-1.843E+00	-2.183E-02	1.372E+01

STOP

### B.6.2 Comportamiento de una conexión de elementos de concreto reforzado

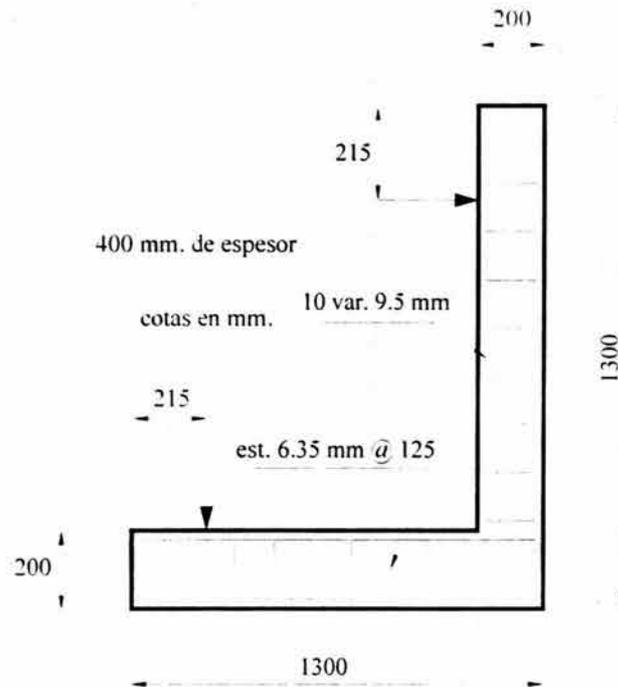
El siguiente ejemplo estudia una conexión de vigas de concreto reforzado (Al-Mahaidi y Hong, 1997) y con fines de ilustración se han comparado los resultados experimentales con los obtenidos con el programa NLFEM. La presentación de este tipo de modelado ofrece una idea sobre la versatilidad de esta herramienta para evaluar la resistencia y los estados límites de servicio de elementos de concreto reforzado. En este problema se presentan dos elementos de concreto reforzado con cuatro cargas concentradas como se aprecia en la figs. B.3. y B.4. Las cargas cerca de la esquina se encuentran a 100 mm de distancia de ésta. El ancho de las vigas en la conexión es de 400 mm. El acero de refuerzo tiene una resistencia a la fluencia de  $48.7 \text{ N/mm}^2$ . Los parámetros para el concreto se presentan en la tabla B.1.



**Figura B.3.** Esquema del problema: (a) definición del sistema a analizar y (b) la trayectoria de equilibrio que se desea representar en el modelo numérico

**Tabla B.1. Propiedades del concreto**

Parámetro	Valor
Resistencia a compresión(concreto)	$36 \text{ N/mm}^2$
Resistencia a tensión(concreto)	$3.6 \text{ N/mm}^2$
Módulo de elasticidad(concreto)	$20594 \text{ N/mm}^2$
Relación de Poisson(concreto)	0.20



**Figura B.4** Conexión de dos elementos de concreto reforzado: geometría, distribución del reforzamiento y de las cargas.

La malla de elementos finitos que se aprecia en la fig. B.5 tiene las siguientes características para el concreto y el acero de refuerzo:

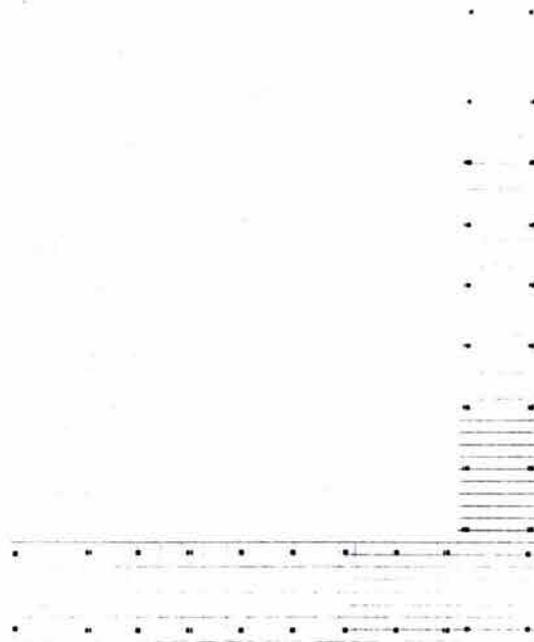
- **Concreto:**

Elementos cuadriláteros de 8 nodos para estado plano de esfuerzos, con 4 puntos de integración Gaussiana. Los elementos triangulares son de 6 nodos para estado plano de esfuerzos, con 3 puntos de integración Gaussiana

- **Acero de refuerzo:**

Elementos de armadura, con 2 puntos de integración Gaussiana

Para modelar el concreto se utilizaron dos relaciones constitutivas. La primera relación constitutiva está basada en el criterio de Drücker-Präger y se empleó en la zona sometida a esfuerzos de compresión con un ángulo de fricción de  $30^\circ$ . El ángulo de dilatación es igual al de fricción. La cohesión en el concreto es de  $10.392 \text{ N/mm}^2$ . El criterio de plasticidad utilizado para el acero de refuerzo es el de Von Mises con un esfuerzo de fluencia de  $487 \text{ N/mm}^2$ . Este modelo es elasto-plástico.



**Figura B.5** Modelo de elementos finitos del Problema

En las regiones de concreto sometidas a esfuerzos de tensión, se modeló el agrietamiento en el concreto utilizando conceptos de agrietamiento distribuido. El esfuerzo de tensión para el inicio del agrietamiento es de  $3.6 \text{ N/mm}^2$  y se empleó un factor de retención de cortante igual a 0.20. El ablandamiento del material se asignó de tipo exponencial y la energía de fractura por tensión tiene un valor de  $0.25 \text{ N-mm/mm}^2$ . Para establecer la magnitud del ancho de agrietamiento se tomó el criterio presentado por Planas y Bazant (1998). Estos investigadores proponen que los valores del ancho de agrietamiento en el concreto debe estar entre  $3d_c$  y  $5d_c$ , donde  $d_c$  es el tamaño máximo del agregado. El valor en este caso se tomó como 56mm.

El proceso de solución se controló por desplazamientos dentro de un esquema incremental iterativo. En los puntos de aplicación de las cargas se alcanzó un desplazamiento máximo de 18 mm que se logró aplicando incrementos de 0.01 (100 pasos de carga). La solución se obtuvo mediante el uso de dos procedimientos de integración. En los primeros 30 pasos se usó el método regular de Newton-Raphson y en los pasos restantes -70 pasos- se hizo con el método de rigidez elástica lineal. Todo el proceso de solución se desarrolló utilizando

---

---

como criterio de convergencia la norma de la energía. La siguiente figura muestra el estado agrietado final.



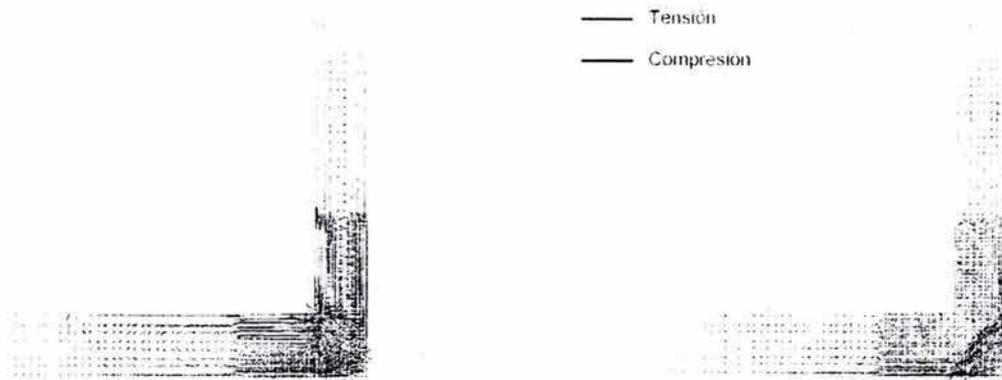
**Figura B.7** Estado final de la localización por deformaciones de agrietamiento del modelo numérico.

En situaciones de ablandamiento siempre es aconsejable observar los resultados de los esfuerzos antes del inicio de la localización de las deformaciones por agrietamiento. La fig. B.8 presenta la diferencia entre los estados de esfuerzos principales al inicio de la localización de la deformación por agrietamiento y el estado de esfuerzos al final de la localización por agrietamiento.

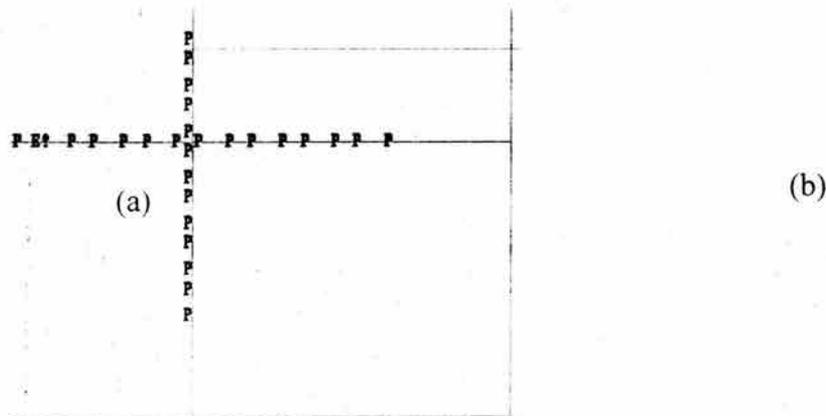
En esta última figura se puede observar que se ha capturado el proceso de ablandamiento del concreto, pues existe menos intensidad de los esfuerzos principales de tensión en la etapa final que en la etapa de inicio donde la distribución de los esfuerzos de tensión, en color rojo, es más notoria. Es importante resaltar que este programa también permite observar gráficamente si el acero de refuerzo está fluyendo, como se aprecia en la fig. B.9, en esta figura se ve que las zonas de fluencia se representan con una letra  $P^1$  cuando se registran zonas plásticas en el refuerzo.

---

<sup>1</sup> También se puede presentar un valor numérico de deformaciones principales o de esfuerzos principales en estos puntos.

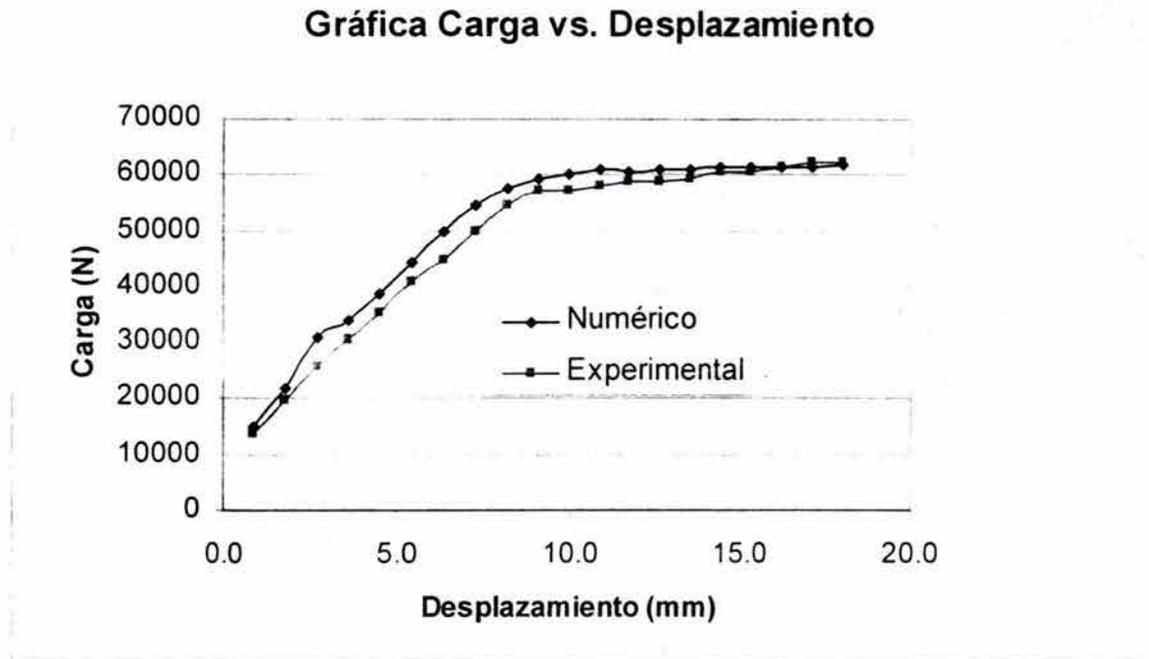


**Figura B.8** Comparación de esfuerzos principales en el (a) estado inicial de localización de agrietamiento y el (b) estado final de localización de agrietamiento.



**Figura B.9** Puntos donde se localiza la fluencia en el acero de refuerzo.

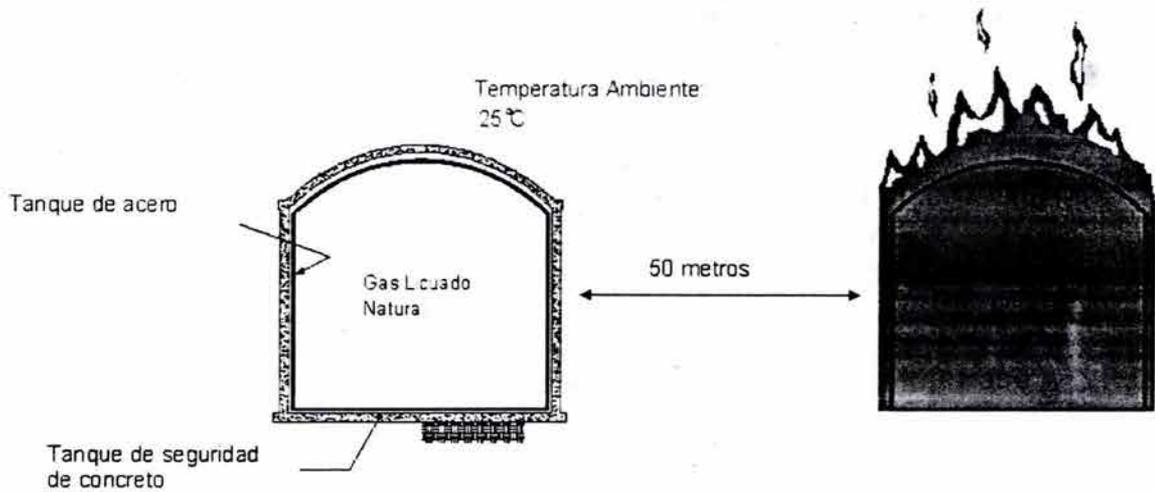
Los resultados finales de este modelo numérico se han comparado con los resultados obtenidos en ensayos de laboratorio. Estos resultados se pueden apreciar en la fig. B.10. De esta observación se observa que el comportamiento del modelo numérico es bastante bueno y muy aproximado a la curva obtenida de los resultados experimentales.



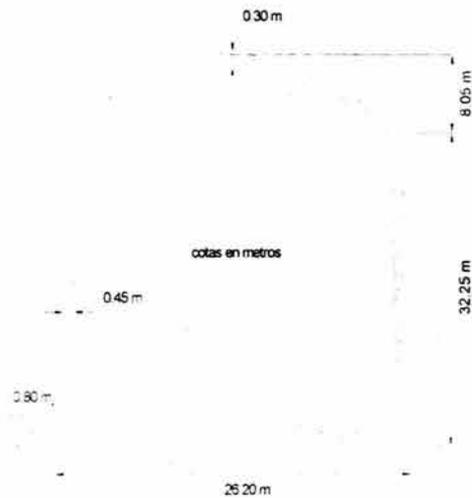
**Figura B.10** Comparación de los resultados obtenidos en la simulación numérica y el ensayo de laboratorio.

### B.6.3 Modelo de tanque sometido a condiciones térmicas extremas

El siguiente ejemplo se ha extraído del manual de análisis no-lineal del programa DIANA (TNO, 1996), tratando de reflejar las mismas condiciones de análisis expuestas en este manual, para comparar los resultados de este programa con los resultados que se obtienen con NLFEM. El ejemplo supone que el tanque se expone a una fuente de calor de  $2000^{\circ}\text{C}$  que se encuentra a una distancia de 50 m. La temperatura ambiente inicial es de  $25^{\circ}\text{C}$ . La fig. B.11 presenta esquemáticamente el problema que se desea analizar y la fig. B.12 la geometría de la estructura.



**Figura B.11** Representación esquemática del problema.



**Figura B.12** Geometría del tanque sometido a acciones térmicas.

Las propiedades del material a la temperatura ambiente de 25° C son como se observan a continuación en las siguientes tablas:

**Tabla B.2 Propiedades del concreto**

Parámetros	Valores
Resistencia a compresión	30 N/mm <sup>2</sup>
Resistencia a tensión	1.8 N/mm <sup>2</sup>
Módulo de Young	17500 N/mm <sup>2</sup>
Relación de Poisson	0.20
Densidad	2.4E-6 kg/mm <sup>3</sup>

**Tabla B.3. Propiedades del acero de refuerzo**

<b>Parámetros</b>	<b>Valores</b>
Esfuerzo de fluencia	400 N/mm <sup>2</sup>
Módulo de Young	210000 N/mm <sup>2</sup>
Relación de Poisson	0.30

**Tabla B.4 Propiedades de los elementos interfase**

<b>Parámetros</b>	<b>Valores</b>
Rigidez normal	6.922E-2 N/mm
Rigidez Tangencial	1.0E-5 N/mm

El modelo de elementos finitos (ver. fig. B.13) está hecho con elementos axisimétricos de 8 nodos con un esquema de integración de Gauß de 3x3. El acero de refuerzo ha sido modelado como parrilla con un esquema de integración de Gauß de 3 puntos y en la frontera entre el concreto y el acero se emplean elementos de interfase cuadráticos con 3 puntos de integración de Gauß.

Los casos de cargas son tres: cargas debido al peso propio de la estructura, donde la aceleración de la gravedad tiene un valor de 9.81 m/seg<sup>2</sup>, el peso del gas licuado sobre el fondo del tanque que ejerce una presión en éste de 0.147 n/mm<sup>2</sup> y por último la carga por efectos térmicos, que se puede suponer inducidos por la combustión de un tanque vecino a 50m de distancia. El tiempo total de combustión se supone de una hora.

En el modelado del comportamiento del concreto bajo esfuerzos de compresión se ha empleado el criterio de fluencia de Drücker- Präger. Así, para este modelo, se tiene una cohesión de 8.66 N/mm<sup>2</sup>, con un ángulo de fricción interna y de dilatancia de 30°. El acero de refuerzo tiene un esfuerzo de fluencia de 400 N/mm<sup>2</sup> y para la evolución del comportamiento inelástico en este material se utiliza el criterio de plasticidad de Von Mises. El comportamiento en tensión en el concreto se simula utilizando modelos de agrietamiento distribuido suponiendo un esfuerzo de inicio de agrietamiento de 1.8 N/mm<sup>2</sup>

con un factor de 0.20 y una función de ablandamiento por efecto de tensión de tipo exponencial.

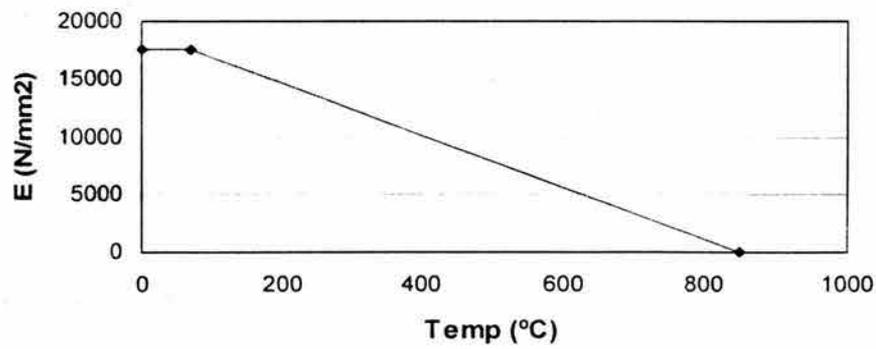
e axisimétrico



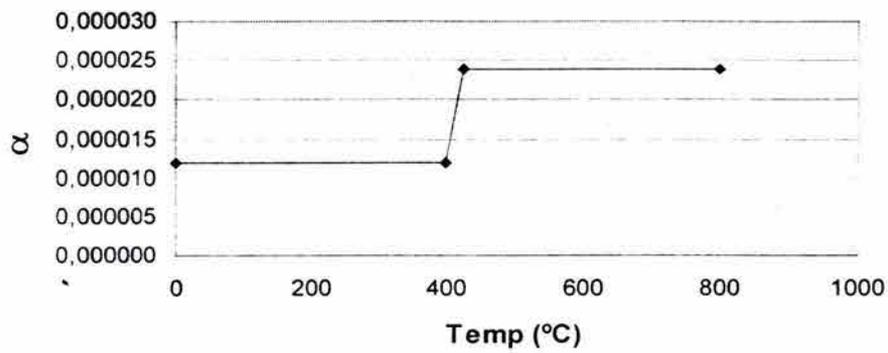
**Figura B.13** Representación del tanque con elementos finitos

Los efectos de relajación por temperatura, denominado *creep* en inglés, afectan los valores de compresión del concreto. En este Caso se asigna un valor de  $30 \text{ N/mm}^2$  a la resistencia de compresión bajo este efecto. El factor de dilatación por temperatura (factor de *creep*) es de 2.35. En las gráficas que se presentan a continuación se muestran las variaciones de las propiedades del concreto y del acero por efecto de la temperatura.

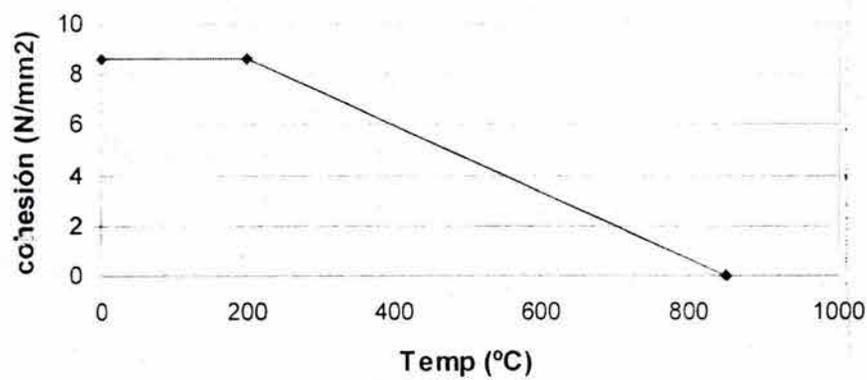
### Módulo de Young vs. Temperatura



### Coef. de exp. térmica vs. Temperatura

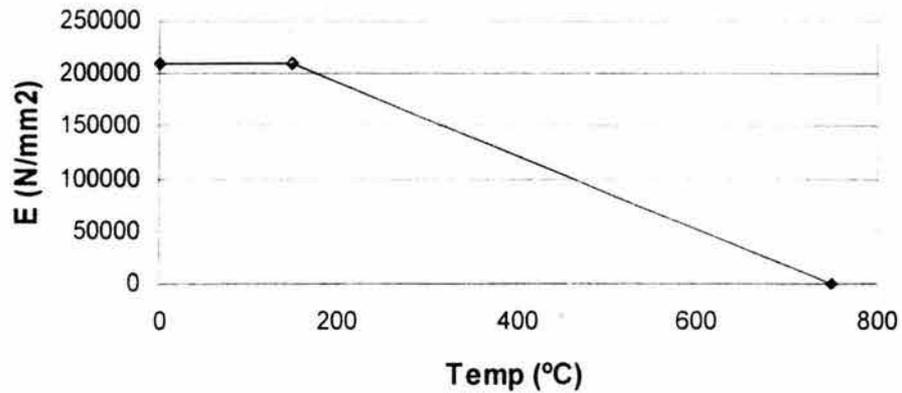


### Cohesión vs. Temperatura

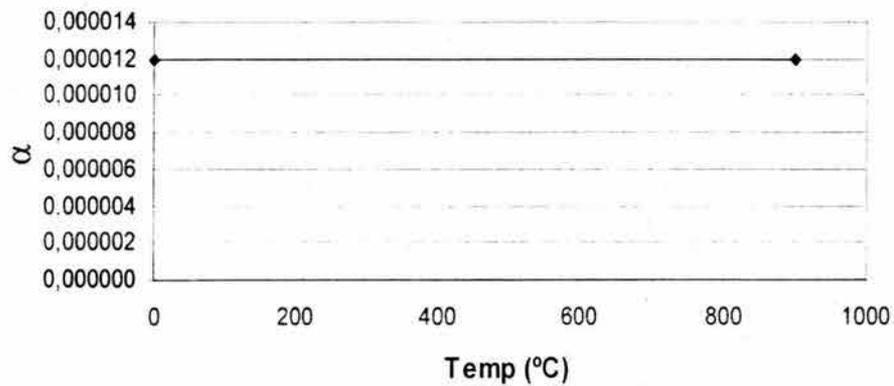


**Figura B.14** Variación de las propiedades del concreto por efectos de temperatura.

### Módulo de Young vs. Temperatura



### Coef. de exp. térmica vs. Temperatura



### Esfuerzo de fluencia vs. Temperatura

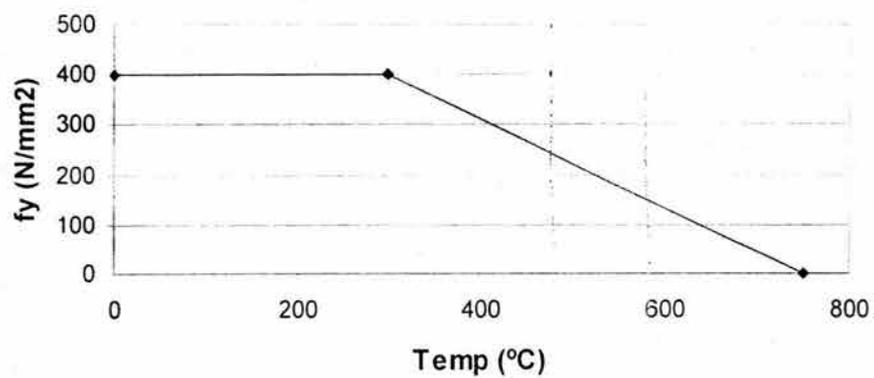


Figura B.15 Variación de las propiedades del acero por efectos de temperatura.

---

Para analizar esta estructura se aplicaron diez pasos de carga. Como primer paso se isó todas las cargas debidas al peso propio y por la carga vertical que actúa en el fondo del tanque. Los siguientes nueve pasos son para el análisis de la estructura sometida a efectos térmicos. La solución se lleva a cabo con el método de Newton regular utilizando como criterio de convergencia la norma de la energía. En los siguientes gráficos se presentan algunos resultados de interés que permiten ver de forma cualitativa la acción de la temperatura sobre el tanque.

**Figura B.16** Desplazamientos en el modelo del tanque: (a) vista general de la deformación del tanque y (b) detalle de la conexión pared-cubierta.

**Figura B.17** Detalle de localización de deformaciones debido al agrietamiento en el tanque.

#### B.6.4 Protección contra el impacto para piernas de plataformas marinas

La operación de estructuras en el mar, tales como muelles y plataformas marinas, implica recibir barcos que las golpean durante las maniobras de atraque, pudiendo ocasionarles daños estructurales y o funcionales. Para reducir este efecto se han diseñado distintos dispositivos de defensa que minimizan el efecto del impacto directo sobre la estructura. En este estudio se compara el desempeño de dos dispositivos de defensa. Estos dispositivos tienen forma de toroide, uno sólido y el otro tiene perforaciones, como se aprecian en las figuras siguientes.



(a)



(b)

**Figura B.18** Disipadores de impacto para piernas de plataformas marinas: (a) disipador toroidal sólido y (b) disipador toroidal con perforaciones.

Ambos dispositivos son libres de girar para transmitir a la pierna de la plataforma, a través de cargas radiales, la energía producida como resultado del empuje de los buques al atracar.

---

Una diferencia importante entre ambos dispositivos radica en que el primero, al ser sólido, es significativamente más rígido que el segundo con perforaciones, por lo que transmite una fuerza mayor al vástago y por ende a la pierna de la plataforma. Este efecto también está presente en las fuerzas tangenciales generadas por fricción cuando el atraque del buque no ocurre en la dirección radial al dispositivo.

El proceso de análisis que se ha efectuado considerando el comportamiento particular del caucho, que es material básico en la fabricación de estos dispositivos, es el usual para materiales hiper-elásticos e incompresibles<sup>2</sup>. Esto último implica observaciones especiales para simular numéricamente el comportamiento mecánico de este tipo de material y que se toman en cuenta en este estudio para llevar a cabo un análisis estructural con la mejor aproximación disponible.

El objetivo final en esta sección es comparar la respuesta de desplazamiento de los dispositivos sujetos a examen, cuando se les aplica una carga concentrada.

A continuación se explicarán de manera sucinta los aspectos más importantes del análisis realizado, presentando además las comparaciones de comportamiento entre los dos tipos de defensas para piernas de plataformas marinas que se estudian.

Debido a las características particulares del material con el que están hechos estos dispositivos, se han utilizado las propiedades de un material hiper-elástico de caucho que posee características incompresibles, para poder establecer el comportamiento mecánico del material que componen a dichas defensas de plataforma. De manera general los materiales hiper-elásticos no pueden considerarse como un material elástico lineal. Por lo tanto, para analizar este tipo de material se debe recurrir a modelos de comportamiento que suponen la existencia de una función de densidad de energía de deformación " $W$ ", o de una función de densidad de energía complementaria de deformación (Zienkiewics y Taylor, 2000; Crisfield, 1991; Roeder y Ayala, 2002), debido a que en tensión se producen grandes deformaciones recuperables en el caucho y en compresión, el cambio volumétrico es

---

<sup>2</sup> Incompresible significa: Material que al someterse a energías de movimiento sufre una deformación sin modificar su volumen.

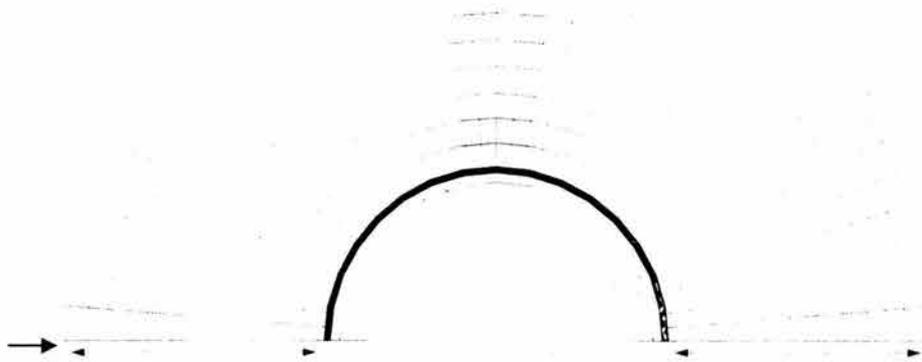
extremadamente pequeño en un punto de este material. Dentro de la literatura dedicada al estudio del comportamiento mecánico del caucho, se encuentra una diversidad de modelos entre los cuales destaca el de Mooney y Rivlin (Bonet y Wood, 1999). Este modelo utiliza la parte desviadora de la función de densidad de energía, " $W_d$ ", que en este caso se expresa de la siguiente manera:

$$W_d = K_1 (J_1 - 3) + K_2 (J_2 - 3) \quad (\text{B.1})$$

Donde  $K_1$  y  $K_2$  son constantes del material que se calculan a partir de resultados experimentales y  $J_1$  y  $J_2$  son los tensores desviadores de deformación Cauchy-Green (Belytschko *et al.*, 2000). Este modelo permite describir la deformación volumétrica constante en materiales hiper-elásticos como los que se estudian.

Para poder introducir los elementos de defensa se debe definir primero el método de análisis que se desea utilizar para obtener los resultados. En este caso se ha empleado el método de los elementos finitos no-lineales (Zienkiewics y Taylor, 2000, Belytschko *et al.*, 2000). El tipo de elemento finito que se ha utilizado es de 9 nodos para el estado plano de deformación modelando solo la mitad de cada uno de los elementos. En el modelo del dispositivo de defensa sólido, se tiene un número de 1863 nodos y 440 elementos finitos. Las condiciones de apoyo se definieron para traslación en dirección horizontal y tangente como se aprecia en la fig. B.19. En el caso del elemento de defensa perforada, se utilizaron 4434 nodos y 972 elementos finitos como se observa en la fig. B.20. Las condiciones de frontera o de apoyo son iguales en ambos modelos. Asimismo, en ambos modelos se aplicó una carga concentrada horizontal de 1000 N en el extremo izquierdo de cada geometría.

Los parámetros para la simulación del comportamiento mecánico del material en ambos dispositivos, según el modelo de Mooney-Rivlin, fueron  $K_1=0.1 \text{ N/mm}^2$  y  $K_2=0.4 \text{ N/mm}^2$ . También se consideró que la variación de deformación volumétrica es lineal y que el módulo de compresibilidad es igual a  $1000 \text{ N/mm}^2$



**Figura B.19** Malla de elementos finitos correspondiente al dispositivo sólido



**Figura B.20** Malla de elementos finitos correspondiente al dispositivo con perforaciones

Los resultados de los análisis se presentan en las figs. B.21, B.22 y B.23. De los resultados en la fig. B.23. se aprecia que en promedio el dispositivo perforado, respecto del dispositivo sólido, se deforma 34 veces más al inicio del primer paso de carga y 8 veces más al finalizar el proceso de carga. Ello demuestra que el dispositivo perforado es más flexible o menos rígido que el dispositivo sólido. En consecuencia, de acuerdo a la teoría de energía de la deformación, la defensa para protección de piernas de plataformas marinas de

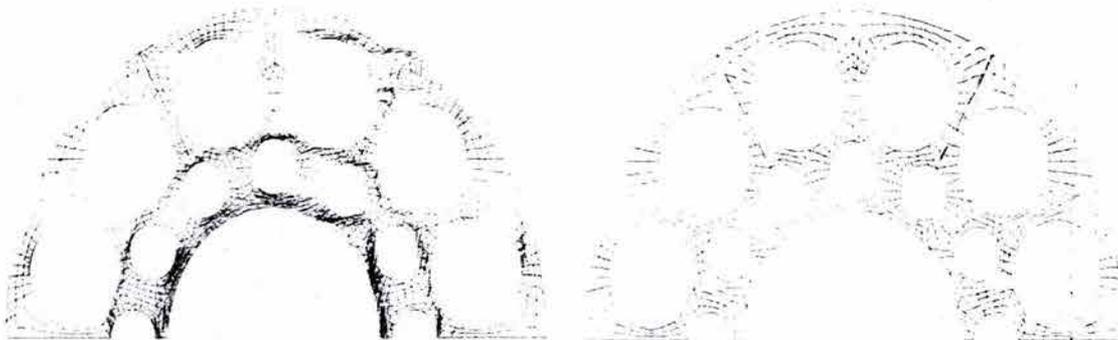
dispositivos perforados. es del orden de ocho veces más eficiente para absorber energía que la defensa con dispositivos sólidos.



(a) Esfuerzos Principales en  
Tensión(rojo) y compresión(azul)

(b) Desplazamientos de los nodos

**Figura B.21** Descripción gráfica de esfuerzos principales y desplazamientos de nodos del dispositivo sólido

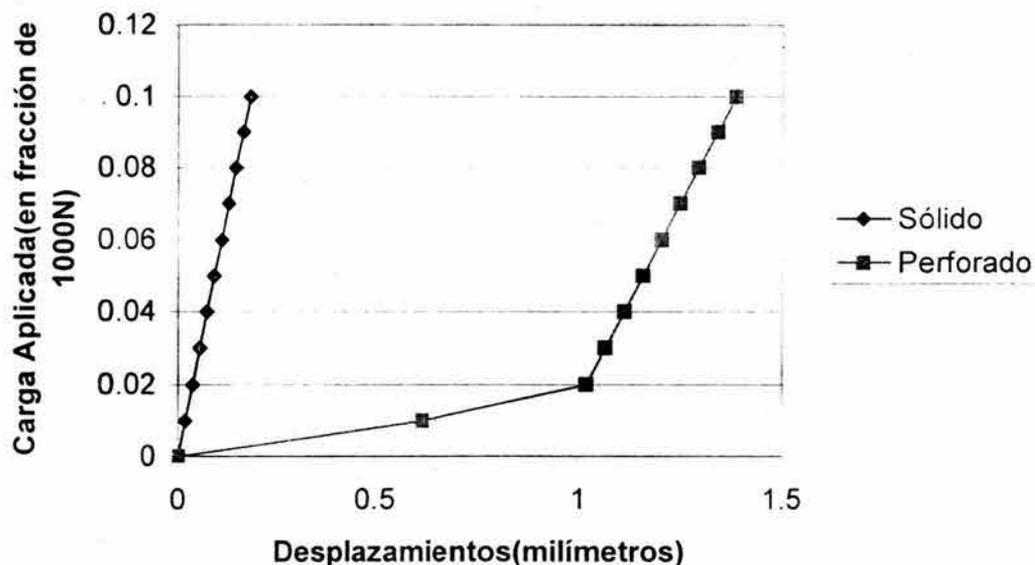


(a) Esfuerzos Principales en  
Tensión(rojo) y compresión(azul)

(b) Desplazamientos de los nodos

**Figura B.22** Descripción gráfica de esfuerzos principales y desplazamientos de nodos del dispositivo perforado

**Diagrama Carga Desplazamiento en el Punto de aplicación de la Carga**



**Figura B.23** Comparación de los desplazamientos en el punto de aplicación de la carga

### B.7. Consideraciones finales

El programa NLFEM reúne el estado del arte de la mecánica estructural y es una tecnología que puede ser extendida a varias especialidades de la ingeniería civil con el propósito final de formar recursos humanos en un área aún inexplorada en México. Por esto, el primer objetivo que se ha planteado el grupo de mecánica numérica dentro del Instituto de Ingeniería es difundir el conocimiento que está detrás de este programa, alternando con instituciones de investigación y entidades educativas con el fin de estimular y apoyar a los investigadores y jóvenes ingenieros interesados en este campo del conocimiento.

NLFEM también plantea la liberación de los programas comerciales costosos, que son de propósitos especiales, que oscurecen el conocimiento en las teorías y métodos que están implicados en los procedimientos avanzados de análisis no-lineal de estructuras.

# Bibliografía

- [1] Amouretti M.C. y Ruzé F. (1987), El mundo griego antiguo, Akal Ediciones, Madrid, 1987
- [2] Acary V., Blaise J.Y., Drap P., Florenzano M., Garrec S., Jean M. y Merad D. (1999), NSCD method applied to mechanical simulation of masonry in historical buildings using MOMA, XVII CIPA-International Committee for Architectural Photogrammetry International Symposium, Olinda, Brasil.
- [3] Adam R. (1990), Classical architecture, a comprehensive handbook to the tradition classical style, Editor Harry Adams, Nueva York. EUA.
- [4] Al-Mahaidi R. y Hong C.Y. (1997), Behaviour and strength prediction of RC corner joints by non-linear finite elements, Segunda conferencia de mecánica computacional-DIANA 97, eds. A. Hendriks *et al.*, A.A. Balkema, Rotterdam, Holanda, pp 33-43
- [5] Ambrosetti C. (2000), Sul comportamento sismico de un modulo strutturale de un di un monumento ad arco: Analisi numerica con modello ad attrito, Tesis de Licenciatura, Politécnico de Milán, Milán, Italia.
- [6] Anthoine A. (1995), Derivation of the in plane elastic characteristics of masonry through homogenization theory, Journal of Solids Structures, Núm. 32 pp 137-163.
- [7] Anthoine A. (1997), Homogeneization of periodic masonry, Journal of Numerical Methods in Engineering, Vol. 13, pp. 319-326.

- [8] Araujo B. (2000). Modelo de análisis no-lineal de marcos de concreto reforzado con muros de relleno de mampostería, Tesis de Grado de Maestro en Estructuras, DEPEFI-UNAM, México.
- [9] Bathe K.J. (1996), Finite element procedures, Prentice Hall New Jersey, EUA.
- [10] Bazant Z. y Planas J. (1998). Fracture and size effect in concrete and other quasi-brittle materials, Boca Raton: CRC Press, EUA.
- [11] Belytschko T., Liu W. K. y Moran B. (2000), Nonlinear finite elements for continua and structures, John Wiley and Sons, LTD, EUA.
- [12] Berto L., Scotta R. y Vitaliani R.V. (2001), An orthotropic damage model for nonlinear masonry walls analysis: Irreversible damage and friction effects , 3rd International Seminar on Historical Constructions, Guimarães, Portugal, pp. 637-646.
- [13] Bicanic N., Stirling G. y Pearce C.J. (2002), Discontinuous modeling of structural masonry. Memorias del Quinto Congreso Mundial de Mecánica Computacional, Editores Mang H.A., Rammerstorfer F.G. y Eberhardsteiner J.. Viena, Austria.
- [14] Binda L. (1995), Restoration of heritage masonry buildings, Seventh Canadian Masonry Symposium, McMaster University, Hamilton-Ontario, Canada, pp. 27-42.
- [15] Bittnar Z. y Sejnoha J. (1996), Numerical methods in structural mechanics, ASCE Press and Thomas Telford, EUA.
- [16] Bonet J. y Wood R.(1997), Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis, Cambridge University Press, Reino Unido.
- [17] de Borst R. (1987), Computation of post-bifurcation and post-failure behavior of strain-softening solids, Journal of Computers and Structures Vol. 25(2). pp. 211-224.

- [18] de Bors R., Camelet J., Pamin J., Sluys L.J. (1994). Some futures directions in computational mechanics. Computational Mechanics:DIANA 94, Editores Kuster M.A, y A.N. Hendriks, Kluwer Academic Publishers, Junio, Holanda, pp 1-12.
- [19] Cabello, P. (1991): Los Incas y el antiguo Perú. 3000 años de historia, Sociedad Estatal Quinto Centenario y Lunweg Editores. S.A. Madrid, España.
- [20] Comité Euro-International du Béton-CEB. (1991), CEB-FIP Model code 1991. Bulletin D' Information N° 203, 204 y 205, Lausanne. Suiza.
- [21] Cowan, H.J. (1977), A history of masonry and concrete domes in building constructions, Journal of Building and Environment. Vol. 12, Pergamon Press, pp. 1-24.
- [22] Crisfield M.A (1991a), Nonlinear finite elements in solids and structures: Vol. 1, John Wiley and Sons, Reino Unido.
- [23] Crisfield M.A (1991b), Nonlinear finite elements in solids and structures: Vol. 2, John Wiley and Sons, Reino Unido.
- [24] Cundall P.A. (1971), A computer model for simulating progressive large scale movements in blocky rock systems, Proceedings of the symposium of the international society for rock mechanics, Vol 1. paper N° II-8, Nancy, Francia.
- [25] Cundall, P. A., and Strack O.D.L. (1983), "Modeling of Microscopic Mechanisms in Granular Material," in Mechanics of Granular Materials: New Models and Constitutive Relations, pp. 137-149. J. T. Jenkins and M. Satake, Eds. Amsterdam: Elsevier Scientific.
- [26] Departamento del Distrito Federal (2004), Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Estructuras de Mampostería- NTCM, Gaceta Oficial del Distrito Federal, México.

- [27] Departamento del Distrito Federal (2004). Normas Técnicas Complementarias para Diseño por Sismo-NTCS. Gaceta Oficial del Distrito Federal, México.
- [28] Dhanasekar M., Kleeman P.W. y Page A.W. (1985), Biaxial stress-strain relations for brick masonry, *Journal of Structural Engineering-ASCE*, Vol. 111, No 5, EUA, pp. 1085-1100.
- [29] Dhanasekar H. Page A.W. y Kleeman P.W. (1985), The failure brick masonry under biaxial stresses, *Proc. Instn. Civ. Engrs. Part 2*, Vol. 79, Universidad de Newcastle, Gales, Reino Unido, pp 295-313.
- [30] Drysdale R. G., Hamid A.A. y Baker L.R. (1994), *Masonry structures: Behavior and design*, Prentice Hall Inc., EUA.
- [31] Europäisches Komitee für Normung-CEN (1996), Eurocode 6 Bemessung und konstruktion von mauerwerksbauten – Teil 1-1: Allgemeine regeln- Regeln für bewertes und bewertes mauerwerk, Bruselas, Bélgica.
- [32] Feenstra P.H. (1993). Computational aspects of biaxial stress in plain and reinforced concrete, Tesis de Doctorado, Universidad de Delft, Holanda.
- [33] Flores A.E., Marcelino J. y Alcocer S.M.(1999), Evaluación experimental del desempeño de marcos de con bloque hueco de concreto reforzados con mallas electrosoldada y recubrimiento de concreto, Informe interno IEG/03/99, Centro Nacional de Prevención de Desastres, Distrito Federal, México.
- [34] Fusco A. (1993), *Numerical analysis for engineers*, Monografía CIMNE Núm. 19, Ediciones de la Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona, España.
- [35] Gallegos H. (1989), *Albañilería estructural*, Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú.

- [36] Giordano A., Mele E. y De Luca A. (2002). Modelling of historical masonry structures: comparison of different approach through a case study, *Journal of Engineering Structures*, V. 24 Elsevier Science Ltd. pp. 1057-1069.
- [37] Gordon, J.E. (1978), *Structures or why things don't fall down*, Penguin Books Ltd. Londres, Reino Unido.
- [38] Guzmán M. Roeder G.M. y Ayala G. (2002), Modelado del comportamiento no lineal de una estructura histórica de mampostería mediante elementos finitos, XIII Congreso Nacional de Ingeniería Estructural. Puebla, México.
- [39] Hamid A.A. y Drysdale R.G. (1981), Proposed failure criteria for concrete block masonry under biaxial stresses. *J. Structural Division-ASCE*. Vol. 107, No ST8, pp 1675-1687.
- [40] Heyman J. (1999), *The stone skeleton*, Cambridge University Press, Londres Reino Unido.
- [41] Hill R. (1950), *The mathematical theory of plasticity*, Oxford University Press, Londres, Reino Unido.
- [42] Hillerborg A., Modéer M. y Petersson P.E. (1976), Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements, *Journal of Cement Concrete Research*, Vol 6. pp. 773-782.
- [43] Hornung, E. (2001); *Historia de Egipto*, primera edición en español, Aldebaran Ediciones S.L., Madrid España.
- [44] Jirásek M. y Bazant Z. (2002), *Inelastic analysis of structures*, John Wiley & Sons Ltd., Reino Unido.

- [45] Kobayashi A.S., Hawkins M.N. Barker D.B. y Liaw B.M. (1985), Fracture process zone of concrete, Application of Fracture Mechanics to Cementitious Composites, Ed. Sha S.P., Martinus Nijhoff Publicatios, Dordrecht, Holanda. pp. 25-50.
- [46] Larios, J.J. (2004), Simulación analítica del comportamiento de muros diafragma de mampostería con aberturas ante carga lateral, Tesis de Grado de Maestro en Estructuras, DEPMI-UNAM (en ejecución), México.
- [47] López J., Oller S. y Oñate E. (1998), Cálculo del comportamiento de la mampostería, mediante elementos finitos, Monografía Cimne Núm. 46, Barcelona, España.
- [48] Lorig, L. J., and Cundall P. A. (1987), "Modeling of Reinforced Concrete Using the Distinct Element Method," in Fracture of Concrete and Rock, S. P. Shah and S. E. Swartz, Eds. Bethel, Conn.: SEM, pp. 459-471.
- [49] Lourenço P.B., Rots. J.G. y Feenstra, P.H. (1995), A tensile Rankine type orthotropic model for masonry. Computer methods in structural masonry-3, eds. G.N. Pande and J. Middleton. Books and Journal International, Swansea, Reino Unido.
- [50] Lourenço P.B. (1996a), Computational strategies for masonry structures, Tesis de Doctorado, Universidad de Tecnología de Delft, Holanda.
- [51] Lourenço P.B. (1996b), A user/programmer guide for the micromodeling of masonry structures, TNO Building and Construction Research-computation mechanics, Delft, Holanda.
- [52] Lourenço P. (2002), Computations on historic masonry structures, Journal of Progress in Structural Engineering and Materials, Vol. 4, Issue 3 John Wiley and Sons Ltd. pp 301-319.
- [53] Lubliner J. (1990), Plasticity theory, Macmillan Publishing Company, EUA.

- [54] Lucciano R. y Sacco E. (1997). Homogenization technique and damage model for old masonry material, *International Journal of Solids and Structures*, Núm. 34 pp 3191-3208.
- [55] Marsden J.E. y Hughes T.J.R. (1993), *Mathematical foundations of elasticity*, Dover Publications, Nueva York, EUA.
- [56] Mazars J. (1984), A model for unilateral elastic damageable material and its application to concrete, In *Fracture Toughness and Fracture Energy of Concrete*, ed. F. Wittmann, Elsevier Science Ltd. Amsterdam, Holanda. pp 61-71.
- [57] Mehrabi A.B., Shing P.B., Schuller M.P. y Noland J.L. (1994), Performance of masonry-infilled R/C frames under in plane lateral loads, Reporte CU/SR-94/6, Departamento de Ingeniería Civil, Ambiental y Arquitectónica, Universidad de Colorado en Boulder, EUA.
- [58] Mingarro, M y López de Ascona M, (1982), Petrología arqueológica de Pachacamac, Perú: materiales de construcción y cerámicas. *Revista Española de Antropología Americana*. Vol. XII. Universidad Complutense. Madrid, España, pp 29-43.
- [59] Oliver J. (1989), A consistent characteristic length for smeared cracked models, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 28 pp. 461-474.
- [60] Oller S. (2001), *Fractura mecánica-Un enfoque global*, Ediciones de la Universidad politécnica de Cataluña, Barcelona, España.
- [61] Oppenheim, L. (2003); *La Antigua Mesopotamia, retrato de una civilización extinguida*, primera edición en español, Editorial Gredos S.A., Madrid España.

- [62] Pegon P., Pinto A. y Géradin M. (2001), Numerical modelling of stone block monumental structures, *Journal of Computer and Structures* Vol. 79, Elsevier Science Ltd. pp. 2165-2181.
- [63] Pevsner, N. (1972), *Some architectural writers of the nineteenth century*, Oxford: Clarendon Press, Londres, Inglaterra.
- [64] Pietruszczak S. y Ushaksaraei R. (2003), Description of inelastic behaviour of structural masonry, *International Journal of Solids and Structures*, Núm. 40 pp 4003-4019.
- [65] Plesha M.E. y Aifantis E.C. (1983), On the modelling of Rocks with microstructures, 24 th U.S. Symposium on Rock Mechanics, Ed. E.R. Hoskins, pp. 27-35, ASTM., EUA.
- [66] Pluijm R. (1992), Material properties of masonry and its components under tension and shear, *Sexto Simposio Canadiense de Mampostería*, V.V. Neis Saskatoon eds., Saskatchewan, Canada, pp. 675-686.
- [67] Press W.H., Teukolsky W.T., Vetterling W.T. y Flanery B.P. (1992), *Numerical recipes in C*, Segunda Edición, Cambridge University Press, Gran Bretaña.
- [68] Ramm E. (1981), Strategies for tracing the non-linear response near limit points, *Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics*, Ed. W. Wunderlich, Springer-Verlag, Berlin, Alemania. pp. 63-89.
- [69] Ramm E. (1982), The Risk/Wempner approach- an extension of the displacement control method in non-linear analysis, *Nonlinear Computational Mechanics*, Ed. Hinton *et al.* Pineridge, Swansea, Reino Unido. pp. 63-86.

- [70] Ragueneau F., La Borderie Ch. y Mazars J. (2000), Damage model for concrete-like materials coupling cracking and friction, contributions towards structural damping: first uniaxial applications, *Journal of mechanics of cohesive-frictional materials*, Vol. 5, John Wiley and sons Ltd., pp. 607-625
- [71] Roeder G. (1998), Métodos de análisis de estructuras de mampostería en edificios históricos, Tesis de Grado de Maestro en Estructuras, DEPMI-UNAM, México.
- [72] Roeder G.M. y Ayala A.G.(2000), Avances recientes en inelasticidad computacional, XII Congreso Nacional en Ingeniería Estructural, León-Guanajuato, México.
- [73] Roeder G.M. y Ayala A.G.(2001), An evaluations of methods for the determination of the structural stability of historic masonry arches, 3rd International Seminar on Historical Constructions, Guimarães, Portugal, noviembre 7-9, pp. 557-565.
- [74] Roeder, G.M. y Ayala, A.G.(2002), "Integración consistente de ecuaciones de flujo basadas en teorías de plasticidad y daño", II Congreso Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería y Ciencias Aplicadas, Guanajuato, México, enero 17-19, pp. 795-805.
- [75] Roeder G.M. y Ayala A.G. (2003), NLFEM-NonLinear Finite Elements Models, Programa de Elementos finitos no-lineales, Grupo de Mecánica Numérica IIUNAM, México.
- [76] Rots J.G. (1988), "Computational modeling of concrete fracture", Tesis de Doctorado, Universidad de Tecnología de Delft, Holanda.
- [77] Sánchez R., Meli R. y Torres R. (2001), Evaluación analítica y experimental de una propuesta para el refuerzo estructural de las columnas de la catedral, Estudio realizado para la Dirección General de Sitios y Monumentos del Patrimonio-CONACULTA, Instituto de Ingeniería, UNAM, México.

- [78] Simo J.C. y Hughes T.J.R. (1998), Computational inelasticity. Interdisciplinary Applied Mechanics, Vol. 7. Springer, EUA.
- [79] Simons J. y Powell G.H. (1982), Solution strategies for statically loaded nonlinear structures. University of California, EERC-82/22, Berkeley, EUA.
- [80] Sánchez-Palencia E. (1987), Homogenization techniques for composite media, capítulo Boundary layers and edges effects in composites, Spring Verlag, Berlín, Alemania, pp 121-192.
- [81] Sihna, B.P. (2002), Development and potential of structural masonry, Livro de actas-Paredes de alvenaria: Situação actual e novas tecnologias, Eds. P. Lourenço y H. de Souza, Guimaraes, Portugal.
- [82] TNO Building and Construction Research(1996), User's Manual, Eds. C. Frits y P. Nauta, Departamento de Ingeniería Mecánica e Información Tecnológica, Delft, Holanda.
- [83] Tomacevic M. (1999), Earthquake resistant design of masonry buildings, Series on Innovation in Structures and Construction-Vol I, Editores A.S. Elnashai y P.J. Dowling, Imperial College Press, Londres, Reino Unido.
- [84] Trejo, S. (2000): Arquitectura e ideología de los antiguos mayas. CONACULTA, INAH, México D.F., México.
- [85] Vasconcelos D. y Sánchez T. (1999), Materiales, Edificaciones de mampostería para vivienda, Fundación ICA A.C., Distrito Federal, México.
- [86] Vitruvius: Diez libros de sobre arquitectura, editado por Ingrid D. Rowland y Thomas Noble Howe; Cambridge University Press, 1999, EUA.

- [87] Zalamea F., Canet J.M. y Oller S. (2002), Tratamiento numérico de materiales compuestos mediante la teoría de homogeneización, Monografía Cimne Num. 64, Barcelona, España.
- [88] Zienkiewics O.C.y Taylor R.L.(2000a), The finite elements methods-The basis, Vol. 1. Editorial Betterworth-Heinemann(BH), Oxford, EUA.
- [89] Zienkiewics O.C.y Taylor R.L.(2000b), The finite elements methods-Solid Mechanics, Vol. 2. Editorial Betterworth-Heinemann(BH), Oxford, EUA.