

00365



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

# POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

## FACULTAD DE CIENCIAS

EL GRUPO FIJO DE UN AUTOMORFISMO  
DE UN GRUPO DE PALABRAS  
HIPERBÓLICO

### TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE  
MAESTRA EN CIENCIAS ( MATEMÁTICAS )

PRESENTA

ROCÍO GONZÁLEZ SÁNCHEZ

DIRECTOR DE TESIS: DOCTOR SANTIAGO ALBERTO  
VERJOVSKY SOLA

MÉXICO, D.F.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

MAYO, 2004



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



*“La ciencia es comprensible sólo a través de la  
belleza; y la belleza sólo se explica a través de  
la ciencia”.*

*Ernest Peter Fischer*

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la  
UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el  
contenido de mi trabajo recepcional.

NOMBRE: Rocio González

Sánchez

FECHA: 4 de Junio 2004

FIRMA: 

# Introducción

Son bastante conocidos los problemas de intercambio entre las disciplinas. En todos los campos de investigación nos enfrentamos a una enorme acumulación cuantitativa de información sin tener suficientes herramientas cognitivas y términos entendibles para procesarlas. Así, crecen terminologías y metodologías hiperespecializadas que nadie entiende fuera del área de investigación específica. Por eso en este trabajo comenzamos dibujando un grupo, rescatando la importancia de las investigaciones estéticas para entender algunas facetas de los paradigmas científicos. Refiriéndonos a estética en su significado original, *la percepción de los datos sensoriales*.

Casi todos los resultados de la investigación científica pasan por el filtro de la expresión y la presentación visual, en gráficas ilustrativas, en fotografías microscópicas o en configuraciones matemáticas en la pantalla de la computadora. Como veremos una *gráfica de Cayley* representará un grupo, estudiaremos estos grupos *a la Gromov*, viendo las relaciones que existen entre éste y sus gráficas. Veremos también que la geometría hiperbólica será la adecuada para tratarlos. Tales mediadores visuales de la ciencia no sólo ilustran los contenidos de la investigación, sino los enfocan, aclaran, agudizan y aun manipulan. La imagen científica es un catalizador con estructuras propias.

Sea  $G$  un grupo de palabras hiperbólico y  $\phi$  un automorfismo de  $G$ . Mostraremos que el grupo fijo  $G^\phi$  es un subgrupo racional de  $G$ . Esto responde a la pregunta de Gestern y Short. La noción de subgrupo racional implica presentación finita, pero es más fuerte. Por ejemplo, subgrupos racionales de grupos de palabras hiperbólicos son también de palabras hiperbólicos, intersección de subgrupos racionales es de nuevo racional y para subgrupos de un grupo cocompacto discreto de isometrías del espacio hiperbólico  $H^n$ , racionalidad es equivalente a finitud geométrica.



# Índice general

|   |            |
|---|------------|
| <b>Introducción</b>                                 | <b>III</b> |
| <b>1. Preliminares</b>                              | <b>1</b>   |
| 1.1. Grupos Libres . . . . .                        | 1          |
| 1.2. Presentaciones de Grupos . . . . .             | 5          |
| 1.3. Gráfica de Cayley . . . . .                    | 7          |
| 1.4. Grupos Hiperbólicos de Palabras . . . . .      | 23         |
| 1.5. Complejos Celulares . . . . .                  | 25         |
| 1.6. Espacios Cubrientes . . . . .                  | 29         |
| <b>2. Autómatas Finitos</b>                         | <b>39</b>  |
| 2.1. Autómatas Finitos No Determinísticos . . . . . | 43         |
| <b>3. Automorfismos</b>                             | <b>49</b>  |
| <b>Referencias</b>                                  | <b>55</b>  |





# Capítulo 1

## Preliminares

En este capítulo veremos algunos conceptos y definiciones importantes para entender la Teoría Geométrica de Grupos, tales como, grupos libres, presentaciones de grupos, gráfica de Cayley y el teorema fundamental de este tema.

### 1.1. Grupos Libres

Sea un conjunto  $X = \{x_i\}$ ,  $i \in I$  consideramos  $X$  como un *alfabeto* y las  $x_i$  como *letras* del alfabeto. Cualquier símbolo de la forma  $x_i^n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  es una *sílaba* y una cadena finita  $w$  de sílabas escritas en yuxtaposición es una *palabra*. Consideraremos a la palabra vacía, como la identidad 1. Un *lenguaje (formal)* es un conjunto de palabras de algún alfabeto. El conjunto vacío y el conjunto  $\{1\}$  son lenguajes distintos. Otro lenguaje es el conjunto de todas las palabras sobre un alfabeto fijo  $X$ , denotamos este lenguaje por  $X^*$ . Por ejemplo si  $X = \{a\}$ , entonces  $X^* = \{1, a, aa, aaa, \dots\}$ . Si  $X = \{0, 1\}$ , entonces  $X^* = \{1', 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, \dots\}$ , hemos denotado aquí la palabra vacía como  $1'$ .

Las palabras podremos escribirlas de una manera reducida por medio de las siguientes *contracciones elementales*:

(i) Reemplazar  $x_i^m x_i^n$  en una palabra, por  $x_i^{m+n}$ .

(ii) Reemplazar  $x_i^0$  en una palabra por 1, esto es quitarla de la palabra.

Mediante un número finito de contracciones elementales, toda palabra se puede cambiar por una *palabra reducida*, para la cual no es posible efectuar más contracciones elementales.

Si  $w = x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_m^{n_m}$  es una palabra reducida, decimos que la *longitud* de  $w$  es  $n_1 + n_2 + \cdots + n_m$  y la denotaremos  $l(w)$ .

Consideraremos a  $F[X]$  como el conjunto de todas las palabras reducidas formadas

con nuestro alfabeto  $X$ .  $F[X]$  dotado de la operación,  $w_1 \cdot w_2$  como la forma reducida de la palabra obtenida por la yuxtaposición de las palabras  $w_1, w_2 \in F[X]$ , forma un grupo de manera natural. Dada una palabra reducida  $w \in F[X]$ , a partir de ésta formamos  $w^{-1}$  escribiendo primero las sílabas de  $w$  en orden opuesto y después reemplazando cada  $x_i^n$  por  $x_i^{-n}$  y así la palabra resultante  $w^{-1}$  es también una palabra reducida tal que  $w \cdot w^{-1} = w^{-1} \cdot w = 1$ .

El grupo  $F[X]$  antes descrito es el *grupo libre generado* por  $X$ .

**Definición 1.1.1** Si  $G$  es un grupo,  $i \in I$ ,  $x_i \in G$  con el conjunto  $X = \{x_i\}$ , un conjunto de generadores, es decir  $G$  es el menor subgrupo de  $G$  que contiene a  $x_i \forall i \in I$ , y si  $G$  es isomorfo a  $F[X]$  bajo una transformación  $\varphi : G \rightarrow F[X]$  tal que  $\varphi(x_i) = x_i$ , entonces decimos que  $G$  es *libre en  $X$*  y las  $x_i$  son los *generadores libres de  $G$* . Un grupo es *libre* si es libre en algún conjunto  $X$  no vacío.

Otra manera de definir un grupo libre, con la propiedad universal, es la siguiente: Un grupo  $G$  se dice *libre* en un subconjunto  $X \subseteq G$  si dado cualquier grupo  $G'$  y cualquier función  $\theta : X \rightarrow G'$ , existe un único homomorfismo  $\theta' : G \rightarrow G'$  que extiende a  $\theta$ , es decir, tenemos la propiedad que  $\theta'(x) = \theta(x)$  para toda  $x \in X$ . Tenemos entonces que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & G \\ \theta \downarrow & \swarrow \theta' & \\ G' & & \end{array}$$

$X$  es llamado una *base* de  $G$  y  $|X|$  el rango de  $G$ , que denotaremos  $r(G)$ .

**Definición 1.1.2** Decimos que un grupo  $G$  es *libre abeliano* con base  $X$  si cada elemento de  $G$  se expresa de manera única en la forma  $\sum_{i=1}^n k_i x_i$ , con  $k_i \in \mathbb{Z}$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

Esta expresión es llamada una  *$\mathbb{Z}$ -combinación lineal*, y tenemos un isomorfismo como sigue

$$G \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \dots \oplus \mathbb{Z}$$

$$\sum k_i x_i \mapsto (k_1, k_2, \dots, k_n)$$

Notemos que la única diferencia conceptual entre un grupo libre abeliano de rango  $n$  y un espacio vectorial de dimensión  $n$  es que en el grupo los coeficientes no forman un campo.

Algunos resultados importantes sobre grupos libres son los siguientes.

**Lema 1.1.3** Si  $G$  es libre en  $X$ , entonces  $X$  genera a  $G$ .

**Demostración:** Si  $G$  es libre en  $X$ , entonces por definición  $X$  es una base para  $G$   $\square$

**Proposición 1.1.4** Un grupo  $G$  es libre en un subconjunto  $X$  si y sólo si:

(i)  $X$  genera a  $G$

(ii) Ninguna palabra reducida en  $\{X, X^{-}\}$ , es decir los generadores de  $G$  junto con sus inversos, de longitud positiva es igual a 1.

**Demostración:** Sea  $\theta' : F[X] \rightarrow G$  un homomorfismo que extiende la inclusión  $\theta : X \hookrightarrow G$ . Entonces (i),(ii) son respectivamente equivalentes a la afirmación de que  $\theta'$  es suprayectiva e inyectiva.

Por otra parte, si  $G$  es libre en  $X$ , la extensión  $\phi' : G \rightarrow F[X]$  de la inclusión  $\phi : X \rightarrow F[X]$  es por el lema anterior un inverso de  $\theta'$  el que debe ser un isomorfismo, y la libertad es un invariante bajo isomorfismos. Así,  $G$  es libre en  $X \Leftrightarrow \theta'$  es una biyección  $\Leftrightarrow$  (i) y (ii) se cumplen.  $\square$

Recordemos algunos conceptos para entender una proposición importante de grupos libres.

**Definición 1.1.5** Si  $N$  es un subgrupo normal de un grupo  $G$ , el grupo de las clases laterales de  $N$  bajo la operación inducida es el *grupo factor* ó *grupo cociente de  $G$  módulo  $N$*  y se denota por  $G/N$ . Las clases laterales son las *clases residuales de  $G$  módulo  $N$* .

Consideremos por ejemplo las clases laterales, que en este caso serán residuales, de  $3\mathbb{Z}$  como subgrupo normal de  $\mathbb{Z}$  bajo la suma, éstas son  $\{0+3\mathbb{Z}, 1+3\mathbb{Z}, 2+3\mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ .

Nótese que al formar el grupo cociente de  $G$  módulo un subgrupo  $N$ , esencialmente se están haciendo todos los elementos de  $G$  que están en  $N$  iguales a la identidad, así,  $N$  forma la nueva identidad en el grupo factor. Además como tenemos información completa acerca de la estructura de todos los grupos abelianos suficientemente pequeños, por el Teorema Fundamental de los Grupos Abelianos Finitamente Generados, es de interés formar un grupo abeliano lo más parecido a  $G$  requiriendo que  $ab = ba$  para todas las  $a$  y  $b$  en la nueva estructura de grupo. Que  $ab = ba$  es pedir que en el nuevo grupo  $aba^{-1}b^{-1} = 1$ . Un elemento  $aba^{-1}b^{-1}$  en un grupo, es un *conmutador del grupo*. Así tratamos de formar una versión abelianizada de  $G$ , reemplazando todo conmutador de  $G$  por la identidad 1.

En el siguiente teorema formaremos el grupo cociente de  $G$  módulo el menor subgrupo normal que hallemos y que contenga a todos los conmutadores de  $G$ .

**Teorema 1.1.6** *El conjunto de todos los conmutadores  $aba^{-1}b^{-1}$  de un grupo  $G$  genera un subgrupo normal  $G'$ , que llamaremos el subgrupo conmutador de  $G$  y  $G/G'$  es abeliano. Más aún,  $G/N$  es abeliano si y sólo si  $G' \leq N$ .*

**Demostración:** Los conmutadores generan un subgrupo  $G'$ ; debemos mostrar que es normal en  $G$ . Nótese que el inverso  $(aba^{-1}b^{-1})^{-1} = bab^{-1}a^{-1}$  de un conmutador es otra vez un conmutador. Además  $e = eee^{-1}e^{-1}$  es un conmutador, entonces  $G'$  consta precisamente de todos los productos finitos de conmutadores. Para  $x \in G'$  debemos mostrar que  $g^{-1}xg \in G'$ , para todas las  $g \in G$ , o que si  $x$  es un producto de conmutadores también lo es  $g^{-1}xg$  para todas las  $g \in G$ . Insertando  $e = gg^{-1}$  entre cada producto de conmutadores que se presente en  $x$  vemos que es suficiente mostrar para cada conmutador  $cdc^{-1}d^{-1}$ , que  $g^{-1}(cdc^{-1}d^{-1})g$  está en  $G'$ . Pero

$$\begin{aligned} g^{-1}(cdc^{-1}d^{-1})g &= (g^{-1}cdc^{-1})(e)(d^{-1}g) = (g^{-1}cdc^{-1})(gd^{-1}dg^{-1})(d^{-1}g) \\ &= [(g^{-1}c)d(g^{-1}c)^{-1}d^{-1}][dg^{-1}d^{-1}g] \end{aligned}$$

lo cual está en  $G'$ . Así,  $G'$  es normal en  $G$ .

Además  $G/G'$  es abeliano, pues

$$(aG')(bG') = abG' = ab(b^{-1}a^{-1}ba)G' = (abb^{-1}a^{-1})baG' = baG' = (bG')(aG')$$

Más aún si  $G/N$  es abeliano, entonces  $(a^{-1}N)(b^{-1}N) = (b^{-1}N)(a^{-1}N)$ , esto es  $aba^{-1}b^{-1}N = N$ , de modo que  $aba^{-1}b^{-1} \in N$  y  $G' \leq N$ . Por último, si  $G' \leq N$ , entonces

$$(aN)(bN) = abN = ab(b^{-1}a^{-1}ba)N = (abb^{-1}a^{-1})baN = baN = (bN)(aN). \square$$

**Teorema 1.1.7** *Si  $G$  es el producto interno directo de los subgrupos  $H$  y  $K$ , entonces  $H$  y  $K$  son subgrupos normales de  $G$ . Además,  $G/H$  es isomorfo a  $K$  de manera natural.*

**Demostración:** Recordemos que  $G$  es el producto interno directo de  $H$  y  $K$  si la transformación

$$\phi: H \times K \longrightarrow G$$

dada por  $\phi(h, k) = hk$  es un isomorfismo.

Mostraremos que  $\bar{H} = \{(h, e) \mid h \in H\}$  es normal en  $H \times K$  y que  $(H \times K)/\bar{H}$  es isomorfo a  $\bar{K} = \{(e, k) \mid k \in K\}$ .

Para la normalidad es necesario que  $(h, k)^{-1}\bar{H}(h, k) = \bar{H}$  para todas la  $(h, k) \in H \times K$ , pero

$$(h, k)^{-1}(h_1, e)(h, k) = (h^{-1}, k^{-1})(h_1, e)(h, k) = (h^{-1}h_1h, k^{-1}ek) = (h^{-1}h_1h, e)$$

y  $(h^{-1}h_1h, e) \in \bar{H}$ . Así  $\bar{H}$  es normal en  $H \times K$ . Es claro que todas las clases laterales de  $\bar{H}$  son de la forma  $(e, k)\bar{H}$  para  $k \in K$ . Es obvio que la transformación

$$\phi : \bar{K} \rightarrow (H \times K)/\bar{H}$$

dada por  $\phi(e, k) = (e, k)\bar{H}$  es un isomorfismo.  $\square$

**Proposición 1.1.8** *Todo grupo es isomorfo a un grupo cociente de algún grupo libre.*

**Demostración:** Dado un grupo  $G$ , sea  $X$  un conjunto de generadores para  $G$ , el cual siempre existe, tomemos por ejemplo  $X = G$ . Entonces sea  $\theta' : F[X] \rightarrow G$  la extensión de la inclusión  $\theta : X \rightarrow G$ . Tenemos que  $\text{Im } \theta' = G$ , pues  $\langle X \rangle = G$ , así que si  $K = \ker \theta'$ , entonces,  $G = \text{Im } \theta' \cong F[X]/K$ , por el primer teorema de isomorfismos.  $\square$

## 1.2. Presentaciones de Grupos

La idea de *presentación de un grupo*, es formar un grupo y ciertas ecuaciones o relaciones que deseamos que satisfagan los generadores. Se desea que el grupo sea tan libre como sea posible en los generadores sujetos a estas relaciones.

Por ejemplo, supóngase que  $G$  tiene generadores  $x$  y  $y$ , y es libre excepto por la relación  $xy = yx$ , lo cual se puede expresar como  $xyx^{-1}y^{-1} = 1$ . Es claro que la condición  $xy = yx$  es precisamente la requerida para que  $G$  sea conmutativo, aunque  $xyx^{-1}y^{-1}$  sea sólo uno de los muchos conmutadores posibles del grupo libre  $F$  con generadores  $x$  y  $y$ . Así  $G$  es abeliano libre en dos generadores y es isomorfo a  $F$  módulo su subgrupo conmutador. Este subgrupo conmutador de  $F$ , es el menor subgrupo normal que contiene a  $xyx^{-1}y^{-1}$ , da lugar a un grupo cociente abeliano, de modo que, por el teorema 1.1.6, contiene el subgrupo conmutador.

**Definición 1.2.1** Sean  $X$  un conjunto de generadores de  $F$  un grupo libre, y  $\{r_i\} \subseteq F[X]$ . Sea  $R$  la *cerradura normal* de las  $\{r_i\}$  en  $F$ , i.e. el menor de los subgrupos normales que contiene las  $\{r_i\}$ . Una *presentación libre* o simplemente una *presentación* de  $G$  es un isomorfismo  $\Phi$  de  $F[X]/R$  sobre el grupo  $G$ . Los elementos de  $X$  son llamados los *generadores de la presentación* y cada  $r_i$  es un *conector*. Un grupo  $G$  es llamado *finitamente presentado* si tiene una presentación, con  $X$  y  $\{r_i\}$  conjuntos finitos.

Si una presentación de un grupo tiene generadores  $x_j$  y los conectores  $r_i$  usaremos la notación  $\langle x_j | r_i \rangle$  para denotar la presentación del grupo.

Algunas veces es conveniente reemplazar  $R$  por el conjunto de ecuaciones  $R = 1$ , esto es  $\{r = 1 | r \in R\}$ , el *conjunto de relaciones* para  $G$ . Una relación definida puede tomar la forma  $u = v$  con  $u, v \in F(X)$ , que corresponde al conector  $uv^{-1}$ .

En el ejemplo  $\{x, y\}$  es el conjunto de generadores y  $xyx^{-1}y^{-1} = 1$  ó  $xy = yx$  es una relación.

**Proposición 1.2.2** *Todo grupo tiene una presentación, y todo grupo finitamente generado es finitamente presentado.*

Veremos más adelante la demostración de este teorema.

Considere la presentación de grupo con  $X = x$  y  $\{r_i\} = \{x^6\}$ , esto es la presentación

$$\langle x | x^6 = 1 \rangle$$

Este grupo, definido por un generador  $x$ , con la relación  $x^6 = 1$ , es claramente isomorfo a  $\mathbb{Z}_6$ .

Consideremos ahora al grupo definido por dos generadores  $x, y$ , con  $x^2 = 1$ ,  $y^3 = 1$  y  $xy = yx$ , esto es, el grupo con presentación,

$$\langle x, y | x^2, y^3, xyx^{-1}y^{-1} \rangle$$

De la condición  $x^2 = 1$  obtenemos  $x^{-1} = x$ . También de  $y^3 = 1$  da  $y^{-1} = y^2$ . Así todo elemento en este grupo puede escribirse como un producto de potencias no negativas de  $x$  y  $y$ . La relación  $xyx^{-1}y^{-1} = 1$ , esto es  $xy = yx$ , nos permite escribir primero todos los factores con  $x$  y después todos los factores con  $y$ . De aquí que todo elemento del grupo es igual a algún  $x^m y^n$ . Pero  $x^2 = 1$  y  $y^3 = 1$  muestran que sólo hay seis elementos distintos

$$1, y, y^2, x, xy, xy^2$$

Por tanto, esta presentación también da un grupo de orden seis que es abeliano y por tanto cíclico, generado por  $xy$ , e isomorfo a  $\mathbb{Z}_6$ .

Este ejemplo ilustra que presentaciones diferentes pueden dar grupos isomorfos. Cuando esto sucede tenemos *presentaciones isomorfas*. Puede ser muy difícil determinar si dos presentaciones son isomorfas. Se ha demostrado, que muchos de problemas relacionados con esta teoría no son solubles en general, es decir no existe

un algoritmo ni una manera bien definida para descubrir una solución en todos los casos. Estos problemas no solubles incluyen el problema de decidir cuándo un grupo dado por una presentación es finito, libre, abeliano o trivial, y el famoso *problema de la palabra*.

### 1.3. Gráfica de Cayley

En general estamos acostumbrados a asignar una estructura algebraica a un objeto geométrico y muchos de los problemas de la Geometría se resuelven por herramientas algebraicas. En esta sección veremos que el sentido inverso es también fructífero, dado un problema algebraico llevémoslo a la geometría para tener de éste una nueva visión.

Asignemos a un grupo finitamente generado una estructura geométrica discreta: la Gráfica de Cayley, que más adelante veremos será un espacio métrico geodésico. Además esta estructura, introducida por Cayley en 1878, nos ayudará a decidir si un grupo en particular es finitamente generado.

**Definición 1.3.1** Sea  $G$  un grupo,  $X$  su conjunto finito de generadores, la *gráfica de Cayley* de  $G$  con respecto a los generadores  $X$ , está formada por  $G$  el conjunto de vértices y las aristas orientadas tendrán etiquetas en el conjunto de generadores, donde los vértices  $g_1, g_2$  están unidos por una arista si y sólo si  $g_1^{-1}g_2 \in X$ . Denotaremos a esta gráfica  $\Gamma_X(G)$ .

El grupo  $G$  actúa en  $\Gamma_X(G)$  por multiplicación a la izquierda (mandando así el punto final de una arista a otro punto final). El elemento  $g \in G$  define un automorfismo

$$\phi_g : \Gamma_X(G) \longrightarrow \Gamma_X(G)$$

$$g' \longrightarrow gg'$$

es decir manda un vértice  $g' \in \Gamma_X(G)$  al vértice  $gg'$ .

Decimos que cada arista es de longitud 1 y definimos la distancia entre dos puntos la mínima longitud de las trayectorias que los unen.

**Definición 1.3.2** Definimos la *longitud* de un elemento  $g \in G$ , con respecto a los generadores  $X$  y lo escribimos,

$$|g|_X = \text{mín} \{l(w) | w \in F[X], \mu(w) = g\}$$

con  $\mu : F[X] \rightarrow G$  la suprayección natural.

La distancia entre dos vértices digamos  $g, g' \in G$  es entonces

$$d(g, g') = |g^{-1}g'|_X$$

Y es llamada una *métrica de palabras* en  $G$ .

Con esta métrica la acción izquierda de  $\Gamma_X(G)$  es por isometrías y podemos ver a  $G$  como un espacio métrico arco conexo. La inclusión natural  $G \subset \Gamma_X(G)$  es una isometría.

A un grupo  $G$ , junto con un conjunto finito de generadores  $X$  le corresponde una función de crecimiento, la cual es submultiplicativa. Definiremos tres tipos de grupos, de crecimiento exponencial, polinomial e intermedio.

**Definición 1.3.3** Sea  $G$  un grupo finitamente generado por  $X$ , la función  $\beta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , dada por

$$\beta(n) = \text{card} \{g \in G \mid |g|_X \leq n\}$$

se llama la *función de crecimiento* de  $G$  relativa a  $X$ .

Las funciones de crecimiento, para algún conjunto finito de generadores, podemos clasificarlas de la siguiente manera.

**Definición 1.3.4** Dado un entero  $d \geq 0$ , decimos que  $G$  es de *crecimiento polinomial de grado  $d$  relativa a  $X$*  si existen constantes  $c_1, c_2 > 0$  tales que  $\forall n \in \mathbb{N}$

$$c_1 n^d \leq \beta(n) \leq c_2 n^d$$

Decimos que  $G$  es de *crecimiento exponencial* si existen dos constantes  $c > 0, v > 1$  tales que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,

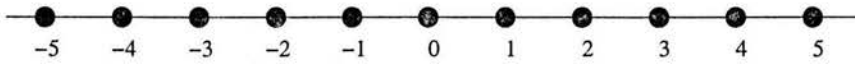
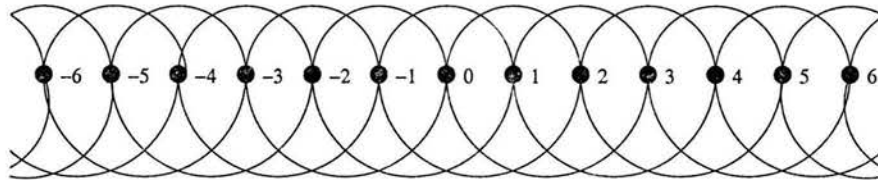
$$\beta(n) > cv^n$$

Si  $G$  no es de crecimiento polinomial ni de crecimiento exponencial, decimos que  $G$  es de *crecimiento intermedio*.

Algunos ejemplos de estas gráficas

1.  $G = \mathbb{Z}, X = \{-1, 1\}$ . (Ver figura 1.1)
2.  $G = \mathbb{Z}, X = \{-2, 2, -3, 3\}$  (Ver figura 1.2)
3.  $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, X = \{(1, 0), (-1, 0), (0, 1), (0, -1)\}$  (Ver figura 1.3)



Figura 1.1:  $\Gamma_{\{-1,1\}}(\mathbb{Z})$ .Figura 1.2:  $\Gamma_{\{-2,2,-3,3\}}\mathbb{Z}$ .

4.  $G = \mathbb{F}_2 =$  grupo libre en dos generadores digamos  $a, b$ , así  $X = \{a, -a, b, -b\}$ , pues recordemos que consideramos los generadores con sus inversos. (Ver figura 1.4)

Más generalmente, si  $G$  es un producto libre de  $p$  grupos de orden dos y  $q$  grupos cíclicos infinitos, con  $X$  el conjunto natural de  $p + q$  generadores, entonces la gráfica de Cayley es un árbol regular de grado  $p + 2q$ .

Observemos que en los ejemplos antes vistos, los grupos finitos y los grupos libres abelianos son de crecimiento polinomial, mientras que los grupos libres no abelianos son de crecimiento exponencial.

Aunque las gráficas de Cayley son en algún sentido buenas imágenes de un grupo, es cierto que diferentes grupos pueden tener graficas de Cayley isomorfas.

Si un grupo  $G$  es finitamente generado y contiene a  $\mathbb{F}_2$  como subgrupo, entonces  $G$  es de crecimiento exponencial, ya que si  $S$  es un conjunto de generadores de  $G$  que incluye los generadores  $X = -a, a, -b, b$  de  $\mathbb{F}_2$  tenemos que

$$\{g \in \mathbb{F}_2 \mid |g|_X \leq n\} \subseteq \{g \in G \mid |g|_S \leq n\}$$

entonces si  $\beta'(n) = \text{card} \{g \in G \mid |g|_S \leq n\}$ , tenemos que  $\beta'(n) \geq \beta(n) > 3^n$ , para toda  $n \in \mathbb{N}$ , es decir  $G$  es de crecimiento exponencial.

Igualmente si  $G$  contiene un subgrupo de crecimiento polinomial de grado  $d$  entonces  $G$  es de crecimiento polinomial de grado  $d$ .

**Definición 1.3.5** Sean  $(E, d)$  y  $(E, d')$  dos espacios métricos. Una función  $f : E \rightarrow$

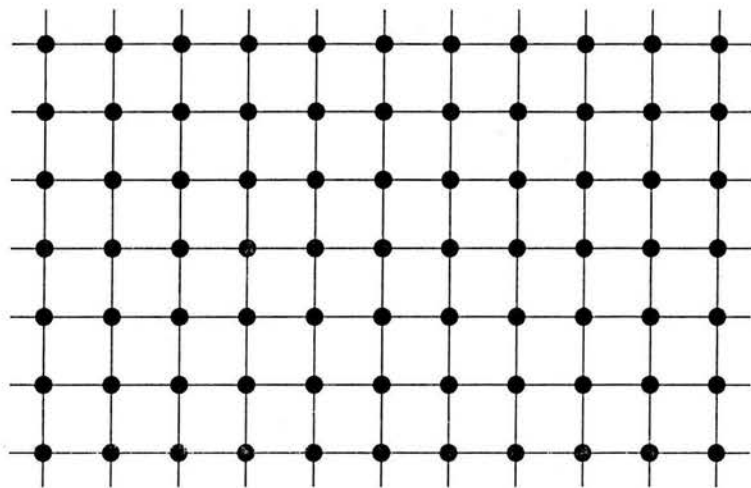


Figura 1.3: Gráfica de Cayley de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ .

$E'$  es una *casi isometría* si existen constantes  $\lambda > 0$ ,  $C \geq 0$  tales que

$$\frac{1}{\lambda}d(x, y) - C \leq d'(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y) + C$$

para toda  $x, y \in E$ . Los espacios  $(E, d)$  y  $(E', d')$  son *casi isométricos* si existe una casi isometría  $f : E \rightarrow E'$  y una constante  $D \geq 0$  tal que  $d'(f(E), x') \leq D$  para toda  $x' \in E'$ .

Notemos que  $f$  no es necesariamente continua. Por ejemplo  $\mathbb{R}$  y  $\mathbb{Z}$  son casi isométricos con la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ , que asigna a cada real su parte entera.

Recordemos la definición de isometría y notemos la diferencia con casi isometría.

**Definición 1.3.6** Una función  $\phi : E \rightarrow E'$  tal que  $d'(\phi(x), \phi(y)) = d(x, y)$  para todo  $x, y \in E$  es un *encaje isométrico*. Es una *isometría* si es suprayectiva, así los espacios  $E$  y  $E'$  son entonces isométricos. Equivalentemente  $E$  y  $E'$  son isométricos si existen encajes isométricos  $\phi : E \rightarrow E'$  y  $\psi : E' \rightarrow E$  tales que  $\psi \circ \phi = id_E$  y  $\phi \circ \psi = id_{E'}$ .

Veamos algunas maneras alternativas de ver cuándo dos espacios son casi isométricos.

**Proposición 1.3.7** Dos espacios métricos  $(E, d)$  y  $(E', d')$  son casi isométricos si y sólo si existen funciones  $f : E \rightarrow E'$  y  $g : E' \rightarrow E$  y dos constantes  $\lambda > 0$ ,  $C \geq 0$  tales que para todo  $x, y \in E$  y  $x', y' \in E'$

- (1)  $d'(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y) + C$
- (2)  $d(g(x'), g(y')) \leq \lambda d'(x', y') + C$
- (3)  $d'(f(g(x')), x') \leq C$
- (4)  $d(g(f(x)), x) \leq C$

Además ser casi isométrico es una relación de equivalencia entre espacios métricos.

**Proposición 1.3.8** Sean  $X$  y  $X'$  dos conjuntos finitos de generadores para un grupo  $G$ , y sean  $d$  y  $d'$  las distancias definidas en  $G$  para  $X$  y  $X'$  respectivamente. Entonces  $(G, d)$  y  $(G, d')$  son casi isométricos.

**Demostración:** Sea  $f : (G, d) \rightarrow (G, d')$  que denote la transformación identidad de  $G$ . Sea  $\lambda = \max \{d'(x, e) \mid x \in X\}$  y  $\lambda' = \max \{d(x', e) \mid x' \in X'\}$ . Por inducción en  $d(g, h)$  para todo  $g, h \in G$ , tenemos que  $d'(f(g), f(h)) \leq \lambda d(g, h)$ . De manera similar tenemos  $d(f^{-1}(g), f^{-1}(h)) \leq \lambda' d'(g, h)$ . Teniendo así la proposición.  $\square$

Esta proposición nos dice que el espacio métrico  $(G, d_X)$  está bien definido por el grupo  $G$  solamente, salvo casi isometría. Así cualquier propiedad invariante por casi isometría del espacio métrico  $(G, d_X)$  es una propiedad del grupo  $G$ , sin referencia a  $X$ .

Dados dos grupos  $G$  y  $H$  uno se pregunta si son o no casi isométricos. Por ejemplo un espacio métrico es casi isométrico a un punto si y sólo si su diámetro es finito. En particular, el espacio métrico  $\Gamma_X(G)$  es casi isométrico a un punto si y sólo si el grupo  $G$  es finito. Dicho de otra manera la clase de casi isometría de un grupo  $\{e\}$  es precisamente la clase de los grupos finitos.

Veamos algunos ejemplos de casi isometrías.

1. Sea  $G$  un grupo y  $X$  un conjunto de generadores. Entonces la inclusión natural  $G \hookrightarrow \Gamma_X(G)$  es una casi isometría.

En particular la gráfica de Cayley de  $\mathbb{Z}$  es casi isométrica a la línea real.

2. Sea  $G$  un grupo dado por  $\pi : F[X] \rightarrow G$  y también por  $\pi' : F[X'] \rightarrow G$ , donde  $X$  y  $X'$  son conjuntos finitos. Sean  $d, d'$  las correspondientes métricas en  $G$  y sea  $\phi : (G, d) \rightarrow (G, d')$  la función identidad de  $G$ . Así  $\phi$  es una casi isometría.

De hecho considerando,

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \max\{d'(\pi(x), 1) \mid x \in X\} \\ \lambda_2 &= \max\{d(\pi'(x'), 1) \mid x' \in X'\} \\ \lambda &= \max\{\lambda_1, \lambda_2\} \end{aligned}$$

tenemos que

$$\frac{1}{\lambda}d(g_1, g_2) \leq d'(\phi(g_1), \phi(g_2)) \leq \lambda d(g_1, g_2)$$

para todo  $g_1, g_2 \in G$ .

3. Sean  $\pi : F[X] \rightarrow G$ ,  $d$  como en el ejemplo anterior y  $\alpha$  un automorfismo de  $G$ . En general  $\alpha(\pi(X)) \neq \pi(X)$ , y  $\alpha$  no es una isometría con respecto a  $d$ . Pero  $\alpha$  es una casi isometría. Considerado

$$\lambda = \max_{x \in X} l_X(\alpha(\pi(x)))$$

tenemos

$$\frac{1}{\lambda}d(g_1, g_2) \leq d(\alpha(g_1), \alpha(g_2)) \leq \lambda d(g_1, g_2)$$

para todo  $g_1, g_2 \in G$ .

4. En una variedad compacta  $M$ , dos funciones de distancia correspondiendo a dos métricas Riemmanianas son necesariamente casi isométricas. Esto se tiene de que en una cubierta conexa de  $M$  ó en una hoja de una foliación en  $M$ , hay una función distancia que está bien definida salvo casi isometría.
5. Sean  $M_1$  y  $M_2$  dos variedades de dimensión  $n$  cerradas, con la misma variedad de cubierta universal  $M$ . Considere una métrica Riemmaniana en  $M_1$  y la correspondiente métrica en  $M$ , así que en particular  $M$  es un espacio métrico. Sea  $F : M_1 \rightarrow M_2$  una equivalencia homotópica. Entonces cualquier levantamiento  $f : M \rightarrow M$  de  $F$  es una casi isometría.

Si  $M_1, M_2$  son variedades Riemmanianas de curvatura constante negativa, entonces  $M$  puede ser identificada con el espacio hiperbólico  $H^n$ . La casi isometría  $f$  induce una transformación frontera  $\delta f$  de la esfera al infinito de  $H^n$ .

**Definición 1.3.9** Un *espacio métrico* es *propio* si las bolas cerradas de radio finito son compactas.

- Proposición 1.3.10** i) *En un grupo finitamente generado, la métrica de palabras es única salvo casi isometría.*  
 ii) *Para grupos finitamente generados existe una noción bien definida de casi isometría.*  
 iii)  *$(G, d)$  un grupo finitamente generado con una métrica, es un espacio métrico propio.*

**Demostración:** i) Vease el segundo de los ejemplos anteriores.

ii) Si  $G_1$  y  $G_2$  son dos grupos casi isométricos con respecto a los conjuntos finitos de generadores  $X_1$  y  $X_2$ , respectivamente. Entonces  $G_1$  y  $G_2$  son casi isométricos respecto a cualquier conjunto finito de generadores.  $\square$

**Definición 1.3.11** Sea  $G$  un grupo actuando por homeomorfismos en un espacio localmente compacto  $E$ . La acción es *propia* o decimos que  $G$  *actúa propiamente* si para cada subespacio compacto  $K$  de  $E$ , el conjunto  $\{g \in G \mid gK \cap K \neq \emptyset\}$  es finito. Para tal acción, el espacio de órbitas  $E/G$  es Hausdorff y localmente compacto.

Veremos ahora algunas nociones de hiperbolicidad.

**Definición 1.3.12** Un *segmento geodésico* entre dos puntos  $x, y \in E$  es la imagen de un encaje isométrico  $\phi$  del intervalo  $[0, L]$  de la línea real a  $E$ , tal que  $\phi(0) = x$  y  $\phi(L) = y$ , donde  $L = d(x, y)$ . Decimos que un espacio métrico  $(E, d)$ , es un *espacio métrico geodésico* si para todo punto  $x, y \in E$ , existe al menos un segmento geodésico que los una.

Denotaremos la imagen de esa isometría por  $[xy]$ , y la llamaremos *geodésica* de  $x$  a  $y$ , y usaremos  $d(w, [xy])$  para denotar la distancia del punto  $w$  a una geodésica  $[xy]$ . Sea  $\alpha : [0, n] \rightarrow E$  una curva en  $E$ , tal que  $\alpha : [0, n] \rightarrow \alpha([0, n])$  es una isometría, denotaremos por  $l(\alpha) = n$  la longitud de  $\alpha$ . Así tenemos que  $l([xy]) = d(x, y)$  para geodésicas  $[xy]$ .

Notemos que pueden existir varios segmentos geodésicos entre dos puntos dados, lo que se ejemplifica en la siguiente gráfica de Cayley.

Un espacio propio es localmente compacto y completo. Existe un resultado recíproco parcial, un espacio métrico compacto, completo y geodésico es necesariamente propio.

Algunos ejemplos de espacios geodésico son,

1. El espacio euclidiano con la métrica usual. Notemos que éste no lo será si quitamos un punto.
2. Una variedad riemanniana completa es geodésica y propia.
3. Un ejemplo en el que tendremos especial interés es la gráfica de Cayley de un grupo  $G$  finitamente generado.

Dado el cociente  $\pi : F[X] \rightarrow G$ , del grupo libre en un conjunto finito de generadores  $X$ . Una geodésica de  $g$  a  $g'$  en  $\Gamma_X(G)$  es una trayectoria simple,

que pasa a través de los vértices  $g_0 = g, g_1, g_2, \dots, g_n = g'$ , con  $n = l_X(g^{-1}g')$ , tal que  $g_{j-1}^{-1}g_j \in \pi(X \cup X^{-1}) \setminus \{1\}$  para  $j \in \{1, \dots, n\}$ . En general hay varios segmentos geodésicos que conectan a 1 con  $g$ .

El espacio  $\Gamma_X(G)$  es geodésico y propio. (Si  $\pi(X)$  fuera infinito, el espacio podría ser geodésico pero no propio.)

Una manera de caracterizar la geometría hiperbólica es considerar rayos infinitos emanando de un punto que diverge. En el espacio euclidiano, los rayos divergen línealmente, mientras en el espacio hiperbólico, éstos divergen exponencialmente. Consideremos dos personas caminando a lo largo de dos rayos geodésicos a velocidad unidad, comenzando en el mismo punto. La distancia entre ellos al tiempo  $t$  es a lo más  $2t$  en cualquier espacio métrico, por la desigualdad del triángulo. Pero nuestro interés es conocer la distancia entre ellos siguiendo una trayectoria la cual está fuera de la bola de radio  $t$  alrededor del punto inicial. Lo que caracteriza el espacio hiperbólico es que una vez que la distancia entre los dos viajeros cruza cierto límite, la longitud de la curva fuera de la bola de radio  $t$  crece exponencialmente en  $t$ .

Ahora daremos una definición detallada. Sean  $\rho > 0$  y  $e \in E$ ,  $B_\rho(e)$  la bola en  $E$  de radio  $\rho$  con centro en  $e$ . Consideramos  $\alpha \in E$ , una curva de longitud  $l(\alpha)$  como una isometría local  $\alpha : [0, l(\alpha)] \rightarrow E$ .

**Definición 1.3.13** Decimos que  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  es una *función de divergencia* para  $E$ , si para cualquier punto  $e \in E$  y las geodésicas  $\gamma = [ey]$ ,  $\gamma' = [ez]$ , la función  $f$  satisface la siguiente condición. Para todo  $R, r \in \mathbb{N}$  tales que

$$R + r < \min(l([ey]), l([ez])),$$

si  $d(\gamma(R), \gamma'(R)) > f(0)$ , y  $\alpha$  es una curva en  $\overline{E - B_{R+r}(e)}$  de  $\gamma(R+r)$  a  $\gamma'(R+r)$ . Entonces tenemos que  $l(\alpha) > f(r)$ .

Decimos que las *geodésicas divergen exponencialmente* si existe una función exponencial de divergencia.

En el plano euclidiano, existe una función lineal de divergencia, sin embargo no tiene una función exponencial de divergencia.

El siguiente teorema es la observación fundamental de la teoría geométrica de grupos.

**Teorema 1.3.14** Sea  $E$  un espacio métrico geodésico y propio, sea  $G$  un grupo y  $G \times E \rightarrow E$  una acción izquierda por isometrías la cual es propia y el cociente  $E/G$  es compacto.

Entonces el grupo  $G$  es finitamente generado y casi isométrico a  $E$ , es decir para  $e \in E$ , la función  $G \rightarrow E$  dada por  $g \mapsto ge$  es una casi isometría.

**Demostración:** Sea  $\pi : E \rightarrow E/G$  la proyección canónica. El espacio  $E/G$  tiene la métrica canónica definida por,

$$d(p, q) = \inf\{d(e_1, e_2) \mid e_1 \in \pi^{-1}(p), e_2 \in \pi^{-1}(q)\}$$

Notemos que la hipótesis de que  $E$  sea propio indica que si  $d(p, q) = 0$  entonces  $p = q$ . Como  $E/G$  es compacto, su diámetro

$$R = \sup\{d(p, q) \mid p, q \in E/G\}$$

es finito. Escojamos un punto base  $e_0 \in E$ , definamos

$$B = \{e \in E \mid d(e_0, e) \leq R\}$$

Observemos que  $(gB)_{g \in G}$  es una cubierta de  $E$ . Sea

$$S = \{s \in G \mid s \neq 1 \text{ y } sB \cap B \neq \emptyset\}$$

Notemos que  $S^{-1} = S$  y que  $S$  es un conjunto finito pues la acción es propia. Finalmente consideremos,

$$r = \inf\{d(B, gB) \mid g \in G, g \notin S \cup \{1\}\}$$

donde  $d(B, gB)$  está definida como el mínimo de las distancias  $d(x, y)$  para  $x \in B$  y  $y \in gB$ . Sea

$$\lambda = \max_{s \in S} d(e_0, se_0)$$

*Afirmación 1:*  $r = \min\{d(B, gB) \mid g \in G, g \notin S \cup \{1\}\} > 0$ .

En efecto, elijamos  $g' \in G$ ,  $g' \notin S \cup \{1\}$  y definamos  $r' = d(B, g'B)$ . Tenemos que  $r' > 0$ , por la definición de  $S$  y por la compacidad de  $B$ . Sea

$$T = \{g \in G \mid g \notin S \cup \{1\}, d(B, gB) \leq r'\}$$

Así  $T$  es no vacío, contiene a  $g'$ , y finito pues  $G$  actúa propiamente en  $E$ . Como  $r$  es el ínfimo de los números estrictamente positivos  $d(B, gB)$  para  $g$  en el conjunto finito  $T$ , la afirmación se tiene. Se puede mostrar también que  $r \leq 2R$ .

*Afirmación 2:*  $S$  genera a  $G$  y

$$\frac{1}{\lambda}d(e_0, ge_0) \leq d_S(1, g) \leq \frac{1}{r}d(e_0, ge_0) + 1 \quad (1)$$

para toda  $g \in G$ .

En efecto, elegimos  $g \in G$ , podemos asumir que  $g \notin S \cup \{1\}$ , de otro modo (1) es clara. Sea  $k$  un entero definido por,

$$R + (k - 1)r \leq d(e_0, ge_0) < R + kr \quad (2)$$

Si  $g \notin S \cup \{1\}$  tenemos que  $d(e_0, ge_0) > R$  y por lo tanto  $k \geq 1$ . Como  $E$  es geodésico, podemos elegir  $e_1, \dots, e_k, e_{k+1} = ge_0 \in E$  tales que  $d(e_0, e_1) < R$  y  $d(e_i, e_{i+1}) < r$  para  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Como las  $G$  translaciones de  $B$  cubren  $E$ , podemos elegir  $g_0 = 1, g_1, \dots, g_{k-1}, g_k = g$  en  $G$  tales que  $e_i \in g_{i-1}B$  para  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Sea  $s_i = g_{i-1}^{-1}g_i$ , tenemos  $g = s_1 s_2 \cdots s_k$ . Con  $s_i \in S \cup \{1\}$ , pues

$$d(B, s_i B) \leq d(g_{i-1}^{-1}e_i, s_i g_{i-1}^{-1}e_{i+1}) = d(e_i, e_{i+1}) < r$$

La definición de  $r$  y lo anterior implican que  $d(B, s_i B) = 0$ , es decir que  $B \cap s_i B \neq \emptyset$ . Así tenemos que  $S$  genera a  $G$ . Más aún, usando la primera desigualdad en (2) tenemos,

$$d_S(1, g) \leq k \leq \frac{1}{r}d(e_0, ge_0) + 1 - \frac{R}{r}$$

y la segunda desigualdad de (1) se sigue. La primera desigualdad de (1) se comprueba por inducción sobre  $d_S(1, g)$ .

Observemos que  $\{g \in G \mid ge_0 = e_0\}$  es un subgrupo finito de  $G$ , el cual no necesita ser reducido a  $\{1\}$  (este subgrupo está dentro de  $S \cup \{1\}$ ). Se sigue entonces que la constante  $+1$  en la ecuación (1) no puede ser borrada.

*Afirmación 3:* la función

$$f : (G, d_S) \longrightarrow (E, d)$$

dado por  $f(g) = ge_0$ , es una casi isometría.

En efecto, como las dos métricas son invariantes izquierdas y por la afirmación 2, tenemos

$$\frac{1}{\lambda}d(f(g_1), f(g_2)) \leq d_S(g_1, g_2) \leq \frac{1}{r}d(f(g_1), f(g_2)) + 1$$

para todo  $g_1, g_2 \in G$ . Tenemos también que  $d(f(G), e) \leq R$  para toda  $e \in E$ , pues  $(gB)_{g \in G}$  es una cubierta de  $E$ .  $\square$

**Corolario 1.3.15** 1. Sea  $G$  un grupo finitamente generado y  $G'$  un subgrupo de índice finito en  $G$ . Entonces  $G'$  es finitamente generado y casi isométrico a  $G$ .



2. Sea  $1 \rightarrow G' \rightarrow G \rightarrow G'' \rightarrow 1$  una sucesión exacta corta de grupos, con  $G'$  finito y  $G''$  finitamente generado. Entonces  $G$  es finitamente generado y casi isométrico a  $G''$ .
3. Sea  $G$  el grupo fundamental de una variedad riemanniana compacta  $Y$ . Entonces  $G$  es casi isométrica a la variedad riemanniana que es cubierta universal de  $Y$ . En particular, el grupo fundamental de una superficie cerrada orientable de género al menos dos, es casi isométrica al plano hiperbólico.
4. Generalmente tenemos que cualquier grupo finitamente presentado es casi isométrico a alguna variedad riemanniana suave de dimensión cuatro.
5. Sea  $\Gamma$  un grupo de Lie real y conexo y sea  $G$  una retícula uniforme en  $\Gamma$ , llamémoslo un subgrupo discreto de  $\Gamma$ , tal que el espacio cociente  $\Gamma/G$  es compacto. Entonces  $G$  es finitamente generado, más aún  $G$  es casi isométrico a  $\Gamma$ , visto como espacio métrico para alguna métrica riemanniana invariante izquierda.

Veamos aquí algunos ejemplos.

1. Sean enteros  $k, l \geq 2$ , los grupos libres de rango  $k$  y  $l$  son casi isométricos, pues  $F_2$  tiene un subgrupo de índice finito isomorfo a  $F_k$ , y también uno isomorfo a  $F_l$ .  
Denotemos por  $\Gamma_g$  el grupo fundamental de una superficie cerrada orientable de género  $g$ , denotada por  $\Sigma_g$ . Similarmente para dos enteros  $g, h \geq 2$ , los grupos  $\Gamma_g$  y  $\Gamma_h$  son casi isométricos, pues son ambos grupos de índice finito, respectivamente  $g - 1$  y  $h - 1$ , en  $\Gamma_2$ .
2. Para un grupo finito  $F$  de orden  $k \geq 2$ , los productos libres  $\mathbb{Z} * F$  y  $\mathbb{Z} * (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  son casi isométricos. De hecho, cada uno contiene un grupo no abeliano libre finitamente generado de índice finito.
3. El grupo modular  $PSL(2, \mathbb{Z}) \approx (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  es casi isométrico al grupo libre en dos generadores, pues  $F_2$  es un subgrupo de índice seis en el grupo modular. Más generalmente, un producto libre no trivial de un número finito de grupos finitos es casi isométrico a  $F_2$ .  
Consideramos un producto libre de grupos  $G_1 * \cdots * G_k$ , como no trivial si  $k \geq 2$  y  $\sum_{j=1}^k (|G_j| - 1) > 2$ .
4. Sean  $M_1$  y  $M_2$  dos variedades riemannianas compactas de curvatura constante  $-1$  y de la misma dimensión. Entonces los grupos fundamentales de  $M_1$  y  $M_2$  son casi isométricos. Este es un caso particular del corolario anterior en la

parte 3, pues las cubiertas universales de  $M_1$  y  $M_2$  son ambas isométricas al espacio hiperbólico  $H^n$ , con  $n$  la dimensión de estas variedades.

Queremos ahora en un espacio métrico geodésico ver, de alguna manera, como opera el concepto de ortogonalidad para un espacio euclidiano, en el que el producto interno de dos vectores es cero si y sólo si son ortogonales. Definamos ahora para un grupo hiperbólico el producto interno dado por Gromov.

**Definición 1.3.16** Dado un punto base  $w \in E$ , definimos el *producto interno* en  $E$  por

$$(x.y)_w = \frac{1}{2} (d(x, w) + d(w, y) - d(x, y))$$

Si existe una constante  $\delta \geq 0$  tal que para todo  $x, y, z \in E$

$$(x.y)_w \geq \text{mín} \{(x.z)_w, (z.y)_w\} - \delta$$

decimos que el producto interno es  $(\delta)$  *hiperbólico*.

Notemos que

- el  $\delta$  de la definición no es necesariamente un número pequeño.
- en un *árbol*, una gráfica acíclica conexa, (un ejemplo de árbol se ilustra en la gráfica de Cayley de un grupo libre), podemos definir un producto interno (0) hiperbólico.
- la definición anterior es independiente del punto base, es decir si el producto interno es  $(\delta)$  hiperbólico con respecto a un punto base, entonces es a lo más  $(2\delta)$  hiperbólico con respecto a otro punto base.

En el plano hiperbólico  $\mathbb{H}^2$ , los triángulos no se comportan de la misma manera que en el plano euclidiano, a continuación daremos una definición que nos dará idea del tipo de triángulos que encontraremos en un espacio hiperbólico.

**Definición 1.3.17** Dados puntos  $x, y, z \in E$ , decimos que el triángulo  $xyz$ , de geodésicas que unen estos tres puntos, es  $\delta$ -delgado, si para todo punto  $w \in [xy]$  tenemos que

$$\text{mín} \{d(w, [xz]), d(w, [yz])\} \leq \delta$$

Decimos que los triángulos son *delgados* en  $E$ , si existe una constante  $\delta$  tal que todos los triángulos geodésicos en  $E$  son  $\delta$ -delgados.

Queremos ahora llevar un triángulo hiperbólico a un triángulo euclidiano, para ésto damos la siguiente construcción.

Consideremos un triángulo delgado definido por los puntos  $x, y, z$ , sean

$$N^+ = \{p \in [xz] \mid d(p, [xy]) \leq \delta\}$$

$$N^- = \{q \in [xz] \mid d(q, [zy]) \leq \delta\}$$

Estos dos conjuntos cerrados cubren a  $[xz]$ , así que existe un punto  $y' \in N^+ \cap N^-$ . Entonces existen puntos  $z' \in [xy]$ ,  $x' \in [yz]$  tales que  $d(y', z') \leq \delta$  y  $d(y', x') \leq \delta$ . El conjunto  $\{x', y', z'\}$  tiene diámetro a lo más  $2\delta$ . Así consideramos la siguiente definición.

**Definición 1.3.18** Sea  $xyz$  un triángulo geodésico y sean  $x', y', z'$  puntos en  $xyz$ , con  $x'$  en el lado opuesto del vértice  $x$  y de la misma manera para  $y'$  y  $z'$ . Definimos la *talla minimal* del triángulo  $xyz$ , como

$$\text{minsize}(xyz) = \inf \text{diám} \{x', y', z'\}$$

donde el ínfimo es tomado sobre todas las triplas de puntos  $\{x', y', z'\}$ .

De esta manera, si todos los triángulos geodésicos son  $\delta$ -delgados, entonces todos tienen talla minimal  $\leq 2\delta$ .

**Definición 1.3.19** Dado un triángulo geodésico  $xyz \in E$ , que denotaremos por  $\Delta$ , y  $\Delta' = x'y'z'$  la comparación euclidiana con lados de la misma longitud, es decir, si  $d_E$  es la métrica euclidiana y  $d$  es la distancia definida en el espacio  $E$ ,  $d_E(x', y') = d(x, y)$ . Hay una identificación natural  $f : \Delta \rightarrow \Delta'$ . En el círculo máximo inscrito en  $\Delta'$ , como lo vemos en la figura, los puntos  $c_x, c_y, c_z$  son los puntos de intersección del círculo con  $[y'z'], [x'z'], [x'y']$  respectivamente. Los llamamos *puntos internos* de  $xyz$  y son tales que

$$d(x', c_z) = d(x', c_y), \quad d(y', c_x) = d(y', c_z) \quad \text{y} \quad d(z', c_y) = d(z', c_x)$$

Notemos que

$$d(x', c_z) = \frac{1}{2} (d(x', c_z) + d(x', c_y)) = \frac{1}{2} (d(x', z) + d(x', y) - d(z', y))$$

Existe una única isometría  $t_\Delta$  del triángulo  $\Delta'$ , en el *trípode*  $T_\Delta$ , un árbol con un vértice  $w$  de grado 3, y vértices  $x'', y'', z''$ , cada uno de grado uno y tales que  $d(w, z'') = d(z, c_y) = d(z, c_x)$  y de manera similar para  $d(w, y'')$  y  $d(w, x'')$ .

Sea  $f_\Delta = t_\Delta \circ f : \Delta \rightarrow T_\Delta$ , decimos que el triángulo  $xyx$  es  $\delta$ -fino si para todo  $p, q \in \Delta$ ,

$$f_\Delta(p) = f_\Delta(q) \Rightarrow d(p, q) \leq \delta$$

Dicho de otra manera si las fibras de  $f_\Delta$  tienen diámetro a lo más  $\delta$  en  $E$ .  
Decimos que los triángulos son *finos* si existe una constante  $\delta$  tal que todos los triángulos geodésicos en  $E$  son  $\delta$ -finos.

**Definición 1.3.20** Definimos la *talla interna* del triángulo  $xyz$  como

$$\text{insize}(xyz) = \text{diám} \{c_x, c_y, c_z\}$$

Observemos que  $\text{minsize}(xyz) \leq \text{insize}(xyz)$ , además que si un triángulo es  $\delta$ -delgado entonces su *insize* es  $\leq \delta$ .



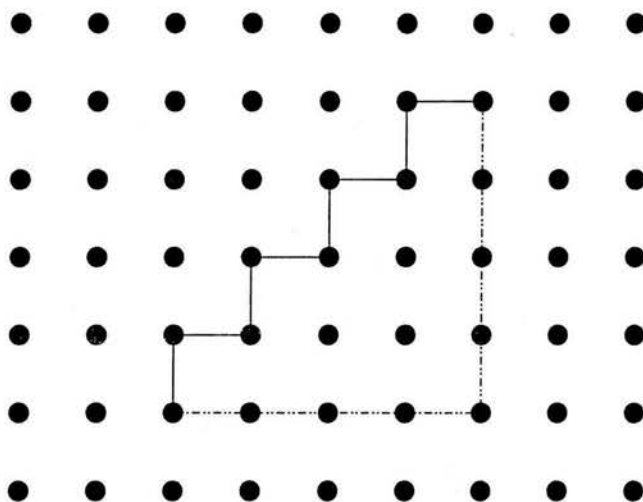


Figura 1.5: Dos geodésicas que unen dos puntos.

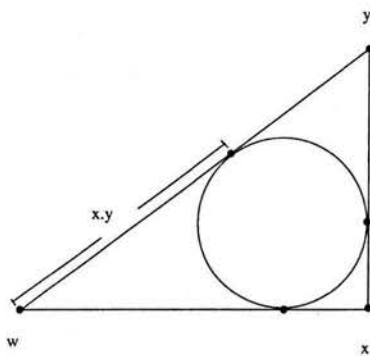


Figura 1.6: Producto interno.

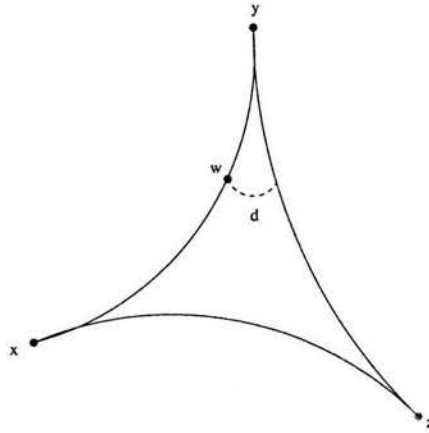


Figura 1.7: Triángulo  $\delta$  delgado.

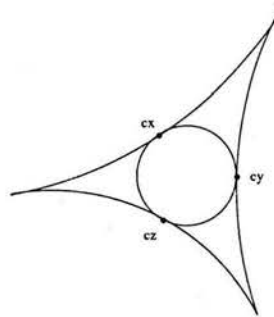


Figura 1.8:

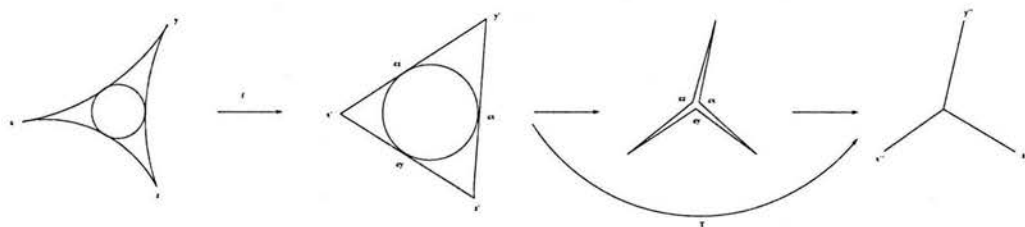


Figura 1.9:

## 1.4. Grupos Hiperbólicos de Palabras

**Definición 1.4.1** Un espacio métrico geodésico  $E$  es hiperbólico si existe una constante  $\delta > 0$ , tal que dados tres puntos  $x, y, z \in E$  y tres segmentos geodésicos entre ellos, denotados respectivamente por  $[x, y]$ ,  $[y, z]$  y  $[x, z]$  y

$$\mathcal{N}_\delta(Y) := \{e \in E \mid d(e, Y) \leq \delta\},$$

tenemos

$$[x, z] \subseteq \mathcal{N}_\delta([x, y] \cup [y, z])$$

El valor exacto de  $\delta$  es irrelevante para nuestros propósitos.

Ejemplos de esto son los árboles métricos y reales. Un ejemplo trivial son los espacios de diámetro finito. Para  $n \geq 2$ , el espacio Euclidiano  $\mathbb{R}^n$  no es hiperbólico.

Un hecho importante, cuya demostración no es trivial y no veremos aquí, es que un espacio geodésico casi isométrico a un espacio hiperbólico es también hiperbólico. Por lo que tiene sentido definir un grupo hiperbólico como un grupo finitamente generado cuya gráfica de Cayley es geodésica. La invarianza de la hiperbolicidad por casi isometrías implica que el conjunto de generadores usados para definir la gráfica es irrelevante.

**Definición 1.4.2** Decimos que un grupo  $G$  es un *grupo hiperbólico de palabras* o simplemente *grupo hiperbólico*, si tiene un conjunto finito de generadores  $X$  tal que la correspondiente gráfica de Cayley  $\Gamma_X(G)$  es un espacio métrico geodésico con un producto interno  $\delta$  hiperbólico, para algún  $\delta$ .

Hay ejemplos obvios de grupos hiperbólicos, como los grupos finitos, grupos cíclicos finitos y en general grupos finitamente generados, que son casi isométricos a  $\mathbb{Z}$ , o equivalentemente que contienen un subgrupo cíclico infinito, de índice finito. Estos son llamados *elementales*.

Un ejemplo de un grupo hiperbólico no elemental, es el grupo fundamental de una variedad riemanniana compacta de curvatura escalar  $K > 0$ , lo cual es consecuencia del teorema principal para la teoría geométrica de grupos. Es fácil verificar que el producto libre de dos grupos hiperbólicos es también hiperbólico.

Otra diferencia entre geometría hiperbólica y euclidiana, es la proporción de área de una circunferencia de un círculo, o polígono. En el plano euclidiano, el área es una función cuadrática de la circunferencia, mientras que en el plano hiperbólico es



una función lineal. Esto nos da una caracterización de un grupo hiperbólico, una vez que formulemos el concepto de área en un grupo.

**Definición 1.4.3** Sea  $\langle X | R \rangle$  una presentación finita del grupo  $G$ . Si  $w$  es una palabra libremente reducida en  $F[X]$ , de longitud  $l(w)$ , y  $\bar{w} = 1$ , la clase de todas las palabras en  $G$  que bajo los conectores  $R$  son la identidad, entonces hay palabras  $p_i \in F[X]$ , conectores  $r_i \in R$ , y  $\epsilon = \pm 1$  tales que

$$w = \prod_{i=1}^N p_i r_i^{\epsilon_i} p_i^{-1} \in F[X]$$

Si existe una constante  $K$  tal que para toda palabra  $w$ , se tiene que  $N < K \cdot l(w)$ , decimos que  $G$  satisface una *desigualdad isoperimétrica lineal*.

Restringimos la definición al caso finitamente presentado, pues de otra manera uno podría añadir como conectores de la presentación, todas las palabras en  $F[X]$  que representan el elemento trivial de  $G$ . Dándonos una desigualdad isoperimétrica trivial.

**Definición 1.4.4** Dada una presentación finita  $\mathcal{P} = \langle X | R \rangle$ , denotemos por  $\mathcal{R}$  la cerradura cíclica de  $R$ , es decir el conjunto de los elementos conjugados cíclicos de  $R$  y sus inversos. Una *pieza* es una palabra no trivial  $v \in F[X]$  tal que hay dos diferentes conectores  $r_1, r_2 \in \mathcal{R}$  y tales que  $r_1 = vr'_1$  y  $r_2 = vr'_2$ .

Decimos que  $\mathcal{P}$  satisface la condición  $C(p)$  si ningún elemento de  $\mathcal{R}$  es producto de menos que  $p$  piezas.  $\mathcal{P}$  satisface la condición  $C'(1/p)$  si para cada pieza  $v$  que se encuentra en el conector  $r$ ,  $p \cdot l(v) < l(r)$ . Así si la condición  $C'(1/p)$  se cumple, entonces también lo hará la condición  $C(p+1)$ .

Consideremos como ejemplo la superficie de un grupo de género  $g > 1$ , la cual tiene presentación,

$$\langle a_1, \dots, a_g, b_g \dots \prod_{i=1}^{i=g} a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1} \rangle$$

**Definición 1.4.5** Una *presentación de Dehn* para el grupo  $G$ , es una presentación finita  $\langle X | R \rangle$  tal que toda palabra no trivial en  $F[X]$ , la cual representa el elemento identidad de  $G$  contiene más de la mitad de alguna palabra en  $R$ . Esto es, si  $w \in F[X]$  es una palabra reducida y  $\mu(w) = 1$  en  $G$ , entonces hay una relación  $r = r_1 r_2 \in R$  con  $l(r_1) > l(r_2)$ , tal que  $w = w_1 r_1 w_2$ .

Un grupo se dice que tiene el *Algoritmo de Dehn*, si tiene una presentación de Dehn.

Observemos que un grupo con un Algoritmo de Dehn satisface la desigualdad isoperimétrica, con constante multiplicativa 1.

**Proposición 1.4.6** *Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un espacio métrico geodésico  $X$ .*

- (1) *Los triángulos son delgados.*
- (2) *Los triángulos son finos.*
- (3) *Existe una cota global en la talla interna de los triángulos geodésicos.*
- (4) *Existe una cota global en la talla mínima de los triángulos geodésicos.*
- (5) *El producto interno en  $X$  es hiperbólico para cualquier elección de punto base.*

*Un espacio métrico es hiperbólico si satisface alguna de las afirmaciones anteriores.*

**Proposición 1.4.7** *Si  $X$  es un espacio  $\delta$ -hiperbólico con un producto interno basado en el punto  $w \in X$ , sea  $t \in X$ , entonces  $X$  es  $2\delta$ -hiperbólico, con producto interno basado en  $t$ .*

Recordemos ahora algunas nociones básicas sobre complejos celulares, las que serán útiles para ver una gráfica dentro del marco de la Topología Algebraica.

## 1.5. Complejos Celulares

**Definición 1.5.1** Denotemos como *1-complejo*,  $C^1$ , a un conjunto de vértices  $V$  y aristas  $A$ , es decir una gráfica como las que hemos tratado anteriormente. Además consideremos las siguientes funciones,

$\alpha : A \rightarrow V$ , tal que  $\alpha(a) =$  punto inicial de la arista  $a \in A$ .

$\omega : A \rightarrow V$ , tal que  $\omega(a) =$  punto final de la arista  $a \in A$ .

$\eta_1 : A \rightarrow A$ , tal que  $\eta_1(a) = a^{-1} =$  arista con dirección contraria,  $\forall a \in A$ .

Decimos que la arista  $a$  va de  $\alpha(a)$  en  $\omega(a)$ .

Notemos que en general necesitamos que cada arista contenga su inverso, así que consideramos *gráficas no dirigidas*, es decir aquellas en las que identificamos  $\{a, a^{-1}\}$ .

**Definición 1.5.2** Definimos una *curva ó trayectoria* en  $C^1$  es una sucesión finita de aristas y la denotamos por  $t = a_1 \cdots a_n$  con  $n \geq 1$  tal que para  $1 \leq i \leq n$ ,  $a_{i+1}$

comienza donde  $a_i$  termina. Decimos que  $t$  comienza en  $\alpha(t) := \alpha(a_1)$ , y termina en  $\omega(t) := \omega(a_n)$ . La *longitud* de  $t := |t| = n$ .

Decimos que  $t$  es una *trayectoria cerrada* o un *lazo*, si  $\alpha(t) = \omega(t)$ . Escribiremos  $1_v$  el lazo de longitud 0.

La *trayectoria inversa* de  $t$  será  $t^{-1} := a_n^{-1} \cdots a_1^{-1}$ .

Si  $t = a_1 \cdots a_n$  es un lazo, llamaremos una *permutación cíclica* al lazo  $t' = a_i \cdots a_n a_1 \cdots a_{i-1}$  y al conjunto de todas estas permutaciones cíclicas como una *trayectoria cíclica* o *ciclo*.

Un ciclo o trayectoria es *reducido* si no contiene algún  $aa^{-1}$ , y llamaremos *trayectoria cíclicamente reducida* si  $a_1 \neq a_n^{-1}$ .

Una trayectoria es *simple* si para  $i \neq j$  tenemos  $\alpha(a_i) \neq \alpha(a_j)$  y  $\omega(a_i) \neq \omega(a_j)$ .

**Definición 1.5.3** Un 2-complejo  $C^2$  consiste de un 1-complejo  $C^1$  que llamaremos su 1-esqueleto, junto con un conjunto  $F$  de 2-celdas o *caras*, y las funciones:

$\delta : F \rightarrow C^1$  el *operador frontera* dado por  $\delta(D) =$  ciclo reducido en  $C^1$ ,  $\forall$  cara  $D \in F$ .

$\eta_2 : F \rightarrow F$ , dada por  $\eta_2(D) = D^{-1} =$  cara con orientación contraria a la de  $D$ .

Así  $\delta(D^{-1}) =$  inverso en la orientación de  $\delta(D)$ .

**Definición 1.5.4** Una *trayectoria límite* para  $D$  en  $v$ , es cualquier lazo en el ciclo  $\delta(D)$  que comienza en  $v$ .

En general usaremos que  $\delta(D)$  es *simple*, es decir existe una única trayectoria límite para  $D$  en cada vértice.

Notemos que un 1-complejo es un 2-complejo con un conjunto vacío de caras.

Una curva en un 2-complejo  $C$  significa una curva en su 1-esqueleto. El conjunto  $\Pi(C)$  está formado de todas las clases de curvas en  $C$ .

Definimos el producto  $pq$  de dos curvas tales que  $\omega(p) = \alpha(q)$ , por yuxtaposición. Esta multiplicación es asociativa, si  $p(qr)$  y  $(pq)r$  está definido, el otro está también definido y son iguales. Tenemos

$$1_{\alpha(p)}p = p$$

y

$$p \mathbf{1}_{\omega(p)} = p$$

Si  $pq$  está definido

$$(pq)^{-1} = q^{-1}p^{-1}$$

Definimos una 1-relación de equivalencia entre curvas  $p$  y  $p'$ , y escribimos  $p \sim_1 p'$ , la cual se tiene si y sólo si podemos pasar de  $p$  a  $p'$  por una sucesión de pasos que consisten de insertar ó borrar partes de la forma  $ee^{-1}$ . Esto es claramente una relación de equivalencia y de hecho una congruencia en  $\Pi(C)$ , en el sentido que si  $p \sim_1 p'$  y  $q \sim_1 q'$  y  $pq$  está definido, entonces  $p'q'$  está definido y  $pq \sim_1 p'q'$ , y que  $p \sim_1 p'$  implica que  $p^{-1} \sim_1 p'^{-1}$ . Así podemos pasar al cociente  $\Pi^1(C)$ , de  $\Pi(C)$  por su relación de equivalencia. Como  $pp^{-1} \sim_1 1_{\alpha(p)}$ ,  $\Pi^1(C)$  es una estructura con inversos, siendo entonces un grupoide.

Es fácil ver, exactamente como en palabras de reducidos de grupos libres, que cada curva es 1-equivalente a una única curva reducida. En particular, un lazo no trivial reducido en  $\Pi(C)$ , no se mandará en uno de los elementos neutros (idempotentes) en  $\Pi^1(C)$ .

Definimos una 2-relación de equivalencia entre curvas  $p$  y  $p'$  y escribimos  $p \sim p'$ , si es posible pasar de una a otra por una sucesión de inserciones y eliminaciones de elementos de la forma  $ee^{-1}$  ó de la forma  $q$ , donde  $q$  es una curva frontera de algún punto para la cara  $D$ . Evidentemente ésta es también una congruencia en  $\pi(C)$ , y el cociente por esta relación,  $\Pi^1(C)$  es también un grupoide, el *grupoide fundamental*  $\Pi(C)$  del complejo  $C$ . Además tenemos que  $\Pi^1(C) = \Pi^1(C^1) = \pi(C^1)$ , el grupoide fundamental de un 1-esqueleto  $C^1$  de  $C$ , y  $\pi(C)$  es naturalmente la imagen homomorfa de  $\pi(C^1)$ .

Observemos que para cualquier vértice  $v$ , el subconjunto  $\Pi(C, v)$  de  $\Pi(C)$ , que consiste de todos los lazos de  $v$ , es un semigrupo y que la imagen  $\pi(C, v)$  en  $\pi(C)$  es un grupo, el *grupo fundamental* de  $C$  en el punto  $v$ . Es familiar, que en el caso en el que  $C$  es conexo, todos sus grupos fundamentales en varios puntos son conjugados y por tanto isomorfos, aunque ordinariamente no por cualquier isomorfismo natural. La teoría de los grupoideos fundamentales es una herramienta elegante de la topología que es usada en la Teoría Geométrica de Grupos, especialmente por Higgins.

Estudiamos ahora ciertos complejos asociados con grupos o presentaciones de grupos.

**Proposición 1.5.5** *Si  $C$  es un 1-complejo y  $v$  es un vértice de  $C$ , entonces  $\pi(C, v)$  es un grupo libre.*

**Demostración:** Como  $\pi(C, v)$  coincide claramente con  $\pi(C_v, v)$ , donde  $C_v$  es la componente conexa de  $C$  que contiene a  $v$ , podemos también asumir que  $C$  es conexo. Un árbol es un 1-complejo sin ciclos triviales. Por el lema de Zorn,  $C$  contiene un árbol maximal  $T$ . Entonces  $T$  debe contener todo vértice  $x$ , junto con una única curva reducida  $\overline{vx}$  en  $T$  de  $v$  a  $x$ . Con cada arista  $e$ , del vértice  $x$  al vértice  $y$ , asociamos el lazo  $\tilde{e} = \overline{vx}.e.\overline{vy}^{-1}$ , siendo  $\tilde{e}$  la clase de equivalencia de  $e$  en  $G = \pi(C, v)$  y sea  $X$  el conjunto de todos los  $\tilde{e} \neq 1$ . Si  $p = e_1 \cdots e_n$  es cualquier lazo en  $v$ , evidentemente  $p \sim \tilde{e}_1 \cdots \tilde{e}_n$ , con  $n > 0$  y cada  $\tilde{e}_i$  en  $X$  y ningún  $\tilde{e}_i \tilde{e}_{i+1} = 1$ , entonces  $w \neq 1$ .

Sea  $p = \tilde{e}_1 \cdots \tilde{e}_n$ , debemos mostrar que la forma reducida de  $p$ , como una palabra en las aristas  $e_j$  es no trivial. De la definición de  $p = \overline{vx_i}.e_1 \cdots e_n.\overline{vy_n}^{-1}$ , ésta es reducida, pues  $\tilde{e}_i \tilde{e}_{i+1} \neq 1$ . De la unicidad de la forma reducida en  $\pi(C)$ , concluimos que  $p \approx 1$ , y por tanto  $w \neq 1$ .  $\square$

**Proposición 1.5.6** *Sea  $C$  un 1-complejo finito y conexo,  $v$  un vértice. Si  $\gamma_0$  es el número de vértices en  $C$  y  $\gamma_1$  es el número de aristas no dirigidas, entonces  $\pi(C, v)$  es un grupo libre de rango  $\gamma_1 - \gamma_0 + 1$ .*

**Demostración:** Continuando con la notación del resultado anterior. Notemos que si la arista  $e$  está en  $T$ , entonces  $\tilde{e} \sim 1$ , pues de otro modo  $\tilde{e}$  es reducido y no trivial. Así  $X$  consiste de los  $\tilde{e}$  en correspondencia uno a uno con las aristas  $e$  que no están en  $T$ , donde el rango de  $\pi(C, v)$  es  $\gamma_1 - \tau$ ,  $\tau$  es el número de aristas no dirigidas en  $T$ . Como  $T$  es un árbol con  $\gamma_0$  vértices, tenemos que  $\gamma_0 = \tau + 1$ . Y así tenemos el resultado.  $\square$

Con cada presentación  $G = \langle X | R \rangle$ , con  $r \in R$  cíclicamente reducido, podemos asociar un complejo especial  $K = \langle X | R \rangle$  con un solo vértice. Notemos que  $K$  tiene un sólo vértice  $v$ , y una arista  $\tilde{x}$  de  $v$  a  $v$ , para cada elemento  $x$  de  $X$ , junto con su inverso  $\tilde{x}^{-1}$ . Así cada curva en  $K$  es un lazo. Además si  $r = x_1^{e_1} \cdots x_n^{e_n} \in R$ , donde todo  $x_i \in X$ ,  $e_i = \pm 1$ , introducimos una cara  $D$  con frontera la curva en  $v$ ,  $\tilde{x}_1^{e_1} \cdots \tilde{x}_n^{e_n}$ , junto con  $D^{-1}$ .

**Proposición 1.5.7** *Si  $G = \langle X | R \rangle$  y  $K = K \langle X | R \rangle$  es una presentación asociada como lo vimos anteriormente, entonces  $\pi(K, v) \cong G$ .*

**Demostración:** Sea  $F$  el grupo libre con base en  $X$  y  $\phi : F \rightarrow \pi(K^1)$  la función que manda cada  $x \in X$  en la clase de equivalencia del lazo  $\tilde{x}$ . Como  $\{v\}$  es un árbol maximal en  $K^1$ , el argumento anterior nos dice que  $\phi$  es un isomorfismo de

$F$  a  $\pi(K^1)$ . Sea  $K$  la función natural de  $\pi(K^1)$  en  $\pi(K)$ , claramente tenemos que  $\phi(R)$  es el kernel de  $K$ . Por otra parte, es fácil ver que si dos lazos  $p$  y  $p'$ , tales que  $p \sim p'$ , entonces sus clases de equivalencia en  $\pi(K^1)$  son congruentes módulo  $\phi(R)$ .  $\square$

Si la presentación  $G = \langle X | R \rangle$  es finita, entonces  $K = \langle X | R \rangle$  es finita. Si  $G = \langle X | R \rangle$  es una presentación de la tabla de multiplicación, en la cual todo elemento de  $R$  tiene longitud 3, entonces toda cara de  $K = \langle X | R \rangle$  es un triángulo y  $K$  es simplicial. Toda presentación  $G = \langle X | R \rangle$  puede ser convertida a una en la que sus relaciones tengan longitud 3, esencialmente por triangulación de cada cara. Si la presentación original era finita, la nueva también lo será.

## 1.6. Espacios Cubrientes

Una función  $f$  de un 2-complejo  $C'$ , en otro 2-complejo  $C$ , debe preservar dimensión e incidencia, veremos aquí que un cubriente  $f$  debe ser inyectivo, suprayectivo en el conjunto de aristas y caras incidentes con cada vértice. Además esta teoría nos servirá para demostrar un resultado importante, todo subgrupo de un grupo libre es libre.

**Proposición 1.6.1** *Si  $f : C' \mapsto C$  es un cubriente y  $v'$  un vértice de  $C'$ , entonces  $f$  induce un monomorfismo  $f^*$  de  $\pi(C', v')$  en  $\pi(C, v'f)$ .*

**Demostración:** Si  $p'$  es un lazo en  $C'$  basado en  $v'$ , evidentemente su imagen  $p = f(p')$  en  $C$  es un lazo basado en  $v = f(v')$ . Sean  $p'_1$  y  $p'_2$  lazos en  $C'$  basados en  $v'$  inmediatamente equivalentes, es decir  $p'_1 = u'q'_1v'$  y  $p'_2 = u'q'_2v'$ , donde  $q'_1q'^{-1}_2$  es la frontera de una cara  $D'$  en  $C'$ . Entonces la imagen  $q_1q^{-1}_2$  es la frontera de una cara  $D$  en  $C$ , y las imágenes  $p_1 = uq_1v$  y  $p_2 = uq_2v$  de  $p'_1$  y  $p'_2$  son equivalentes en  $C$ . Así  $f$  induce un homomorfismo  $f^*$  de  $\pi(C', v')$  en  $\pi(C, v)$ . Ahora una función cubriente es inyectiva en el conjunto de las aristas incidentes con cualquier vértice fijo.

Por inducción en la longitud de una trayectoria reducida  $p$ , tenemos que si  $p$  comienza en un vértice  $v$  y  $f(v') = v$ , entonces hay una única curva reducida  $p'$  en  $C'$ , la cual comienza en  $v'$  y  $f(p') = p$ . Supongamos que  $p'$  es un lazo en  $C'$  y que  $f(p')$  toca una cara  $D$  en  $C$ . Como  $f$  es sobre, hay una cara  $D'$  en  $C'$ , tal que  $f(D') = D$ . Entonces  $f$  manda la frontera de  $D'$  en  $f(p')$  y por la propiedad de unicidad, se tiene que  $p'$  debe tocar  $D'$ . Esto implica que  $f^*$  es un monomorfismo.  $\square$

**Proposición 1.6.2** *Sea  $C$  un 1-complejo conexo,  $v$  un vértice de  $C$  y  $H$  un subgrupo de  $\pi(C, v)$ . Entonces existe un 1-complejo conexo  $C'$  y una función cubriente  $f : C' \mapsto C$ , que manda un vértice  $v'$  de  $C'$  en  $v$ , e induce un isomorfismo  $f^*$  de  $\pi(C', v')$  en el subgrupo  $H$  de  $\pi(C, v)$ .*

**Demostración:** Sea  $T$  un árbol maximal en  $C$ . Entonces, para cada vértice  $x$  de  $C$ , existe una única trayectoria  $\overline{v\bar{x}}$  en  $T$ , de  $v$  a  $x$ . Si  $e$  es una arista de  $C$ , de un vértice  $x$  a un vértice  $y$ ,  $\tilde{e}$  es un elemento de  $\pi(C, v)$  determinado por el lazo  $\overline{v\bar{x}e\bar{v}y}^{-1}$  en  $v$ . Sea  $W$  el conjunto de clases  $Hg$  de  $H$  en  $\pi(C, v)$ . Para el conjunto de vértices de  $C'$  consideramos el conjunto  $V' = V \times W$ , donde  $V$  es el conjunto de vértices de  $C$ . Para el conjunto de aristas de  $C'$ , consideramos el conjunto  $E' = E \times W$ , donde  $E$  es el conjunto de aristas de  $C$ . Si  $e' = (e, Hg)$  es una arista en  $C'$ , donde la arista  $e$  en  $C$  va de  $x$  a  $y$ , decimos que  $e'$  va del vértice  $x' = (x, Hg)$  en  $C'$ , al vértice  $y' = (y, Hg\tilde{e})$ . Es fácil ver que  $C'$  es un complejo. Las proyecciones de  $V'$  en  $V$  y de  $E'$  en  $E$  definen una función cubriente  $f : C' \mapsto C$ .

Elegimos, en  $C'$ , como punto base  $v' = (v, H)$ , claramente  $v'f = v$ . Afirmamos que la imagen de  $\pi(C', v')$  bajo  $f^*$  está contenida en  $H$ . Sea  $p' = e'_1 \cdots e'_n$  una trayectoria en  $C'$  comenzando en  $v'$ . Si cada  $e'_i = (e_i, Hg_i)$ , entonces  $f(p') = p = e_1 \cdots e_n$ . Como  $p'$  es una trayectoria en  $C'$ , tenemos que  $Hg_{i+1} = Hg_i\tilde{e}_i$  para cada  $i$ , tal que  $1 \sim i$ , con  $i \leq n$ . Así  $p'$  termina en  $y' = (y, H\tilde{e}_1 \cdots \tilde{e}_n)$ , donde  $y$  es el punto final de  $p$ . Si  $p'$  es cerrado, tenemos  $y = v$  y  $H\tilde{e}_1 \cdots \tilde{e}_n = H$ , y por consecuencia  $\tilde{e}_1 \cdots \tilde{e}_n \in H$ . Esto implica que el lazo  $p$  en  $C$  representa el elemento  $\tilde{e}_1 \cdots \tilde{e}_n$  de  $H$ . Hemos mostrado que si  $p'$  es un lazo en  $v'$ , representando un elemento  $g'$  de  $\pi(C', v')$ , entonces  $p'f$  representa un elemento  $f^*(g')$  de  $\pi(C, v)$ , que cae en  $H$ .

Veamos ahora que la imagen de  $\pi(C', v')$  bajo  $f^*$  es todo  $H$ . Sea  $p = e_1 \cdots e_n$  un lazo en  $C$  basado en  $v$ , que representa el elemento  $g$  de  $H$ . Entonces  $\tilde{e}_1 \cdots \tilde{e}_n$  también representa a  $p$ . Como  $\tilde{e}_1 \cdots \tilde{e}_n \in H$ , la trayectoria  $p' = e'_1 \cdots e'_n$  en  $C'$  basada en  $v'$ , donde  $e'_i = (e_i, H\tilde{e}_1 \cdots \tilde{e}_i)$  es un lazo en  $C'$  basado en  $v'$  que representa el elemento  $g'$  de  $\pi(C', v')$ , tal que  $f^*(g') = g$ .  $\square$

**Proposición 1.6.3** *Todo subgrupo de un grupo libre es libre.*

**Demostración:** Sea  $f = \langle X | \emptyset \rangle$  un grupo libre y  $H$  un subgrupo de éste. Entonces existe un 1-complejo  $C$ , por ejemplo  $K = \langle X | \emptyset \rangle$ , tal que el grupo fundamental  $\pi(C, v)$  en cualquier vértice  $v$  es isomorfo a  $F$ . Consideremos  $H$  un subgrupo de  $\pi(C, v)$ , por el teorema anterior existe un 1-complejo  $C'$ , tal que  $\pi(C', v')$  es isomorfo a  $H$ . Como  $C'$  es un 1-complejo,  $\pi(C', v')$  es un grupo libre, de dónde  $H$  también es libre.  $\square$

Extendamos ahora un resultado para 2-Complejos.

**Proposición 1.6.4** *Sea  $C$  un 2-complejo,  $v$  un vértice de  $C$  y  $H$  un subgrupo de  $\pi(C, v)$ . Entonces existe un 2-complejo conexo y una función cubriente  $f : C' \mapsto C$*

que manda un vértice  $v'$  de  $C'$  en  $v$ , que induce un isomorfismo  $f^*$  de  $\pi(C', v')$  en un subgrupo  $H$  de  $\pi(C, v)$

**Demostración:** Por podemos construir una función cubriente  $f^1$ , de el 1-esqueleto  $C'^1$ , de un espacio  $C'$  en el 1-esqueleto  $C^1$  de  $C$ , tal que  $f^1$  manda  $\pi(C'^1, v')$  en la preimagen  $H'$  de  $H$  en  $\pi(C, v)$ . Extendemos  $C'^1$  a un 2-complejo  $C'$  y  $f$  a una función de  $C'$  en  $C$ , de la siguiente manera. Si  $p'$  es cualquier trayectoria cerrada en  $C'$  cuya imagen  $p$  en  $C$  toca una cara  $C$  en  $C$ , introducimos una cara  $D'$  en  $C'$ , con frontera  $p'$ , y definimos  $f(D') = D$ . Esto hace a  $f$  una función cubriente de  $C'$  en  $C$ .

Sea  $p$  un lazo en  $C$  basado en  $v$ , representando un elemento  $h$  del subgrupo  $\pi(C, v)$  y sea  $p'$  representando el elemento  $\tilde{h}$  de la preimagen  $H'$  de  $H$  en  $\pi(C^1, v)$ . Entonces  $f^{1*}$  manda un elemento  $h'$  de  $\pi(C'^1, v')$  en  $\tilde{h}$ , donde  $f^*$  manda  $\pi(C', v')$  en  $H$ . Así  $f^*$  es un monomorfismo.  $\square$

**Definición 1.6.5** Dados dos grupos, definimos su *producto libre* por,

$$G * H = \langle F[G \sqcup H] \mid g_1 g_2 g_2^{-1} g_1^{-1}, h_1 h_2 h_2^{-1} h_1^{-1} \rangle$$

con  $g_1, g_2 \in G, h_1, h_2 \in H$

**Definición 1.6.6** Sean  $G_1, G_2, H$  grupos y dos homomorfismos  $\theta_1 : H \rightarrow G_1, \theta_2 : H \rightarrow G_2$ . Definimos el *producto libre amalgamado* por

$$G_1 *_H G_2 = \langle G_1 * G_2 \mid \theta_1(h) \theta_2^{-1}(h) \rangle \quad \forall h \in H$$

Podemos ver este producto amalgamado como la propiedad universal ilustrada a continuación

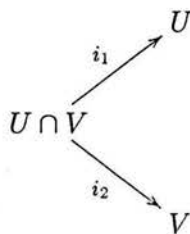
$$\begin{array}{ccc} G_1 & \hookrightarrow & G_1 * G_2 \\ & \searrow j_1 & \downarrow \pi \\ & & G_1 *_H G_2 \end{array}$$

Este diagrama induce lo siguiente:

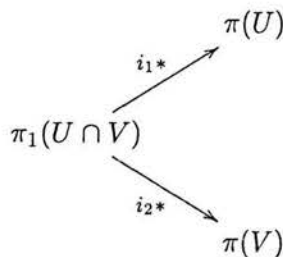
$$\begin{array}{ccccc} H & \xrightarrow{\theta_2} & G_2 & & \\ \downarrow \theta_1 & & \downarrow j_2 & \searrow \psi_2 & \\ G_1 & \xrightarrow{j_1} & G_1 * G_2 & \xrightarrow{\phi} & K \\ & \searrow \psi_1 & & & \end{array}$$



**Teorema 1.6.7** Sea  $X$  un espacio topológico conectable por trayectorias. Supongamos que  $X = U \cup V$ , donde  $U$  y  $V$  son abiertos no vacíos y conectables por trayectorias. Supongamos además que  $U \cap V$  es también no vacío y conectable por trayectorias. Las inclusiones  $i_1, i_2$  de  $U \cap V$  en  $U$  y  $V$  respectivamente, inducen  $i_1^*, i_2^*$ , como se ilustra en el siguiente diagrama



que induce



Entonces  $\pi_1(X) \cong \pi_1(U) *_{\pi_1(U \cap V)} \pi_1(V)$ .

Este teorema es muy útil para calcular el grupo fundamental de algunas superficies. Veamos algunos ejemplos.

- $X = S^1 \vee S^1$  consideraremos a  $U$  y  $V$  (del teorema) como sigue:  
Así  $\pi_1(U) = \pi_1(V) = \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$  y  $\pi_1(U \cap V) = \{e\}$ .  
Entonces  $\pi_1(S^1 \vee S^1) \cong \pi_1(U) * \pi_1(V) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = F[a, b]$ , con  $a = [\alpha]$ ,  $b = [\beta]$ .
- Usando inducción es fácil probar que:

$$\pi_1(S^1 \vee \dots \vee S^1) \cong F[x_1, \dots, x_n]$$

con  $x_1 = [\alpha_1]$ ,  $x_2 = [\alpha_2], \dots, x_n = [\alpha_n]$ .

- El toro  $T = S^1 \times S^1$ , con

$$\pi_1(T) = \pi_1(S^1 \vee S^1) = F[a, b]$$

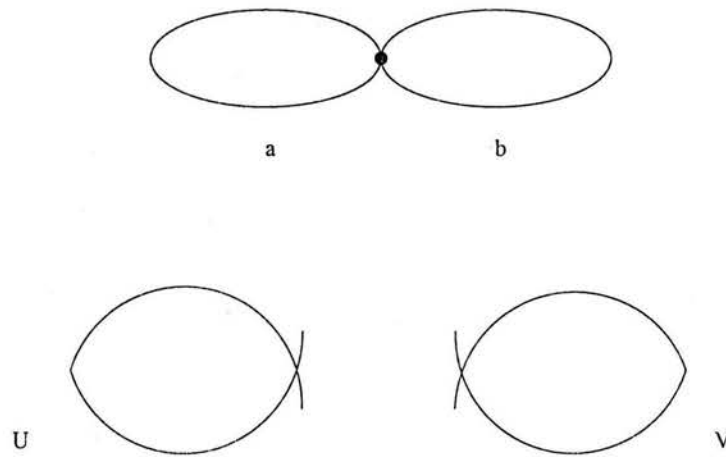
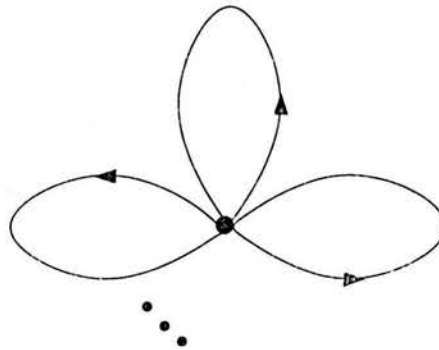


Figura 1.10:

Figura 1.11:  $S^1 \vee \dots \vee S^1$ .

$$\pi_1(V) = \{e\}$$

$$\pi_1(U \cap V) = \mathbb{Z} \cong \langle x \rangle$$

$$\pi_1(U \cap V) \rightarrow \pi_1(U)$$

$$x \mapsto aba^{-1}b^{-1} = [a, b]$$

$$\pi_1(S^1 \times S^1) = \langle a, b \rangle * \{e\} = \langle a, b \mid [a, b] \rangle \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

- Otra aplicación importante de este teorema es el siguiente resultado.

**Proposición 1.6.8** *Todo grupo con presentación finita puede ser el grupo fundamental de una 4-variedad compacta.*

**Proposición 1.6.10** *Sea  $G$  el producto libre de los grupos  $G_i$ , con  $i$  corriendo sobre el conjunto de índices  $I$ . Sea  $H$  un subgrupo de  $G$ , entonces  $H$  es el producto libre de un grupo libre y grupos que son los conjugados de subgrupos de los factores libres  $G_i$  de  $G$ .*

**Demostración:** Tenemos que para cada  $G_i$  existe un complejo conexo  $C_i$ , con un vértice  $v_i$  tal que  $G_i \cong \pi(C_i, v_i)$ . Formamos un complejo  $C$  adjuntando a la unión disjunta de los  $C_i$ , aristas  $e_i$  uniendo los  $v_i$  a un vértice común  $v$ .  $G \cong \pi(C, v)$  es isomorfo a  $\pi(C', v)$ , donde  $C' = C \cup e_i$ . Por un resultado anterior tenemos que  $\pi(C, v) = * \pi(C', v)$ , y podemos suponer que  $G = \pi(C, v)$  con cada  $G_i = \pi(C'_i, v)$ .

Por si  $H$  es un subgrupo de  $G$ , existe una función cubriente  $f$  de un complejo  $\tilde{C}$  en  $C$ , que induce un isomorfismo  $f^*$ , de  $H = \pi(\tilde{C}, \tilde{v})$  en  $H$ , donde  $f(\tilde{v}) = v$ . Los componentes  $K_j$  de los subcomplejos  $f^{-1}(C_i)$  en  $\tilde{C}$  son disjuntos y  $\tilde{C}$  es la unión de estos  $K_j$ , junto con un 1-complejo  $L = \cup f^{-1}(e_i)$ , que tiene sólo vértices en común con los  $K_j$ . Sea  $T_j$  un árbol maximal elegido en cada  $K_j$ , extendemos la unión de los  $T_j$  al árbol maximal  $T$  en  $\tilde{C}$ . Sea  $\tilde{v}$  un vértice en  $\tilde{C}$ , con  $f(\tilde{v}) = v$ . Como antes consideremos  $F = \pi(\tilde{C}^{-1}, v)$  es un grupo libre con una base  $X$  de elementos  $x = \tilde{e}$ , correspondiendo a los pares  $\{e, e^{-1}\}$  de aristas de  $C$  no contenidas en  $T$ . Así  $X$  puede dividirse en conjuntos  $X_j$ , junto con el conjunto  $X_L$ , dependiendo si  $e$  está en algún  $K_j$  ó está en  $L$ .

Sea ahora  $\tilde{H} = F/N$ , donde  $N$  es la cerradura normal de el conjunto de las etiquetas  $r$  en lazos  $p = sqs^{-1}$ , basados en  $\tilde{v}$  en  $\tilde{C}$ . Remplazando  $r$  por un conjugado, podemos suponer que  $s$  está en  $T$ , de donde es una palabra en  $x = \tilde{e}$ , para aristas  $e$  en la curva frontera  $q$  de  $D$ . Como  $D$  debe caer en algún  $K_j$ , los  $x$  deben estar en  $X_j$ . Así  $N$  es la cerradura normal de la unión de los conjuntos  $R_j$  de los  $X_j$ . Se tiene entonces que  $\tilde{H}_j$  es el producto libre de los grupos  $\tilde{H}_j = \langle X_j | R_j \rangle$ , junto con un grupo libre  $\tilde{H}_L = \langle X_L | \emptyset \rangle$ .

Identifiquemos ahora  $\tilde{H}_j$ . Sea  $K_j$  una componente de  $f^{-1}(C_i)$ , y sea  $s$  una trayectoria en  $T$ , de  $v$  a un vértice  $w$  en  $K_j$ , tal que  $f(w) = v$ . Entonces  $f(s)$  es un lazo en  $C$ , basado en  $v$ , representando algún elemento  $h$  de  $G$ . Ahora cada  $x = \tilde{e} \in X_j$  es representado por un lazo  $p = sqs^{-1}$  en  $\tilde{C}$ , basado en  $\tilde{v}$ , donde  $q$  es un lazo en  $K_j$ , basado en  $w$ . Así  $f(q)$  es un lazo en  $C'$ , basado en  $v$ , que representa algún elemento  $g$  de  $G_i$  y  $f(p)$  representa el elemento  $hgh^{-1}$ . Por tanto  $H$  es isomorfo a  $\tilde{H}$ , que es el producto libre de los subgrupos  $f^*(\tilde{H}_j)$  de los  $hG_ih^{-1}$ , junto con el grupo libre  $f^*(\tilde{H}_L)$ .  $\square$



Figura 1.12:

Daremos sólo un esbozo de la demostración.

Observemos primero que el grupo fundamental de  $S^1 \times S^3$  es cíclico infinito. Por consiguiente, formando la suma conexa de  $n$  ejemplares de  $S^1 \times S^3$  obtenemos una 4-variedad compacta orientable cuyo grupo fundamental es un grupo libre de  $n$  generadores, pues el grupo fundamental de la suma conexa de  $n$ -variedades conexas, con  $n > 2$ , es el producto libre de los grupos fundamentales de cada  $n$ -variedad.

Supongamos ahora que  $M$  es una 4-variedad compacta orientable y  $C$  una curva cerrada simple suficientemente regular en  $M$ ; puede demostrarse que toda vecindad tubular  $N$  de  $C$ , suficientemente pequeña es homeomorfa a  $S^1 \times D^3$ , con  $D^3$  el disco de dimensión 3, esto es debido a que  $M$  es orientable. Por tanto el borde de  $N$  es homeomorfo a  $S^1 \times S^2$ . Pero  $S^1 \times S^2$  es también el borde de  $D^2 \times S^2$ , que es una variedad 4 dimensional con borde.

Designemos  $M_1$  el espacio cociente de  $M' \cup (D^2 \times S^2)$  obtenido identificando puntos correspondientes del borde de  $N$  y del borde de  $D^2 \times S^2$ . Entonces se ve fácilmente que  $M_1$  es también una 4-variedad compacta orientable. El proceso seguido para obtener  $M_1$  a partir de  $M$  se llama a menudo "cirugía".

Para calcular el grupo fundamental de  $M_1$ , debemos aplicar el teorema de Van Kampen. En primer lugar,  $M = M' \cup N$ , y  $M' \cap N$  es homeomorfo a  $S^1 \times S^2$ . Se ve fácilmente que el homomorfismo  $\pi(M' \cap N) \rightarrow \pi(N)$ , el inducido por la inclusión, es un isomorfismo, por tanto el homomorfismo  $\pi(M') \rightarrow \pi(M)$  es también un isomorfismo.

En segundo lugar  $M_1 = M' \cup (D^2 \times S^2)$  y  $M' \cap (D^2 \times S^2) = M' \cap N$ . Puesto que  $D^2 \times S^2$  es simplemente conexo, podemos utilizar una de las versiones del teorema de Van Kampen para deducir que  $\pi(M') \rightarrow \pi(M_1)$  es un epimorfismo y su kernel es el mínimo subgrupo normal que contiene la imagen de  $\pi(M' \cap N) \rightarrow \pi(M')$ , pero se ve que las imágenes de  $\pi(M' \cap N) \rightarrow \pi(M')$  y  $\pi(C) \rightarrow \pi(M)$  son equivalentes.

En resumen tenemos que  $\pi(M_1)$  es naturalmente isomorfo al grupo cociente de  $\pi(M)$  respecto al mínimo subgrupo normal que contenga la imagen de  $\pi(C) \rightarrow \pi(M)$ . En otras palabras, hemos eliminado el elemento  $\alpha$  de  $\pi(M)$  representado por el camino cerrado  $C$ . Si el subgrupo  $\pi(M)$  está presentado por generadores y rela-

ciones, entonces  $\pi(M_1)$  admite una presentación con los mismos generadores y con una relación adicional, a saber  $\alpha$ .

No es difícil demostrar que todo elemento  $\alpha \in \pi(M)$  puede representarse por una curva cerrada suficientemente regular  $C$  sin puntos dobles, como hemos utilizado en el razonamiento anterior. En efecto, esto es cierto para toda variedad orientable  $M$ , supuesto que  $n \geq 3$ . En una variedad de dimensión  $\geq 3$  hay suficiente "espacio" para deshacerse de los puntos dobles de cualquier camino cerrado por medio de pequeñas deformaciones.

Sea ahora  $G$  un grupo que admita una presentación con  $n$  generadores  $x_1, \dots, x_n$  y  $k$  relaciones  $r_1, \dots, r_k$ . Sea  $M$  la suma conexa de  $n$  ejemplares de  $S^1 \times S^3$ , entonces  $\pi(M)$  es un grupo libre con  $n$  generadores, que podemos designar por  $x_1, \dots, x_n$ . Hacemos ahora  $k$  veces la cirugía en  $M$  eliminando sucesivamente los elementos  $r_1, \dots, r_k$ . El resultado será una 4-variedad orientable compacta  $M_k$ , tal que  $\pi(M_k) \cong G$ , como deseábamos.  $\square$

A continuación veremos una débil versión combinatoria del Teorema de Seifert-van Kampen, que nos da el grupo fundamental de la unión de espacios.

**Proposición 1.6.9** *Sea  $C$  un 2-complejo formado de la unión de subcomplejos  $C_i$ , para  $i$  corriendo sobre un conjunto de índices  $I$ , sea  $v$  un vértice común a todo  $C_i$ , con distintos  $C_i$  con un sólo vértice en común. Entonces  $\pi(C, v) = \ast_{i \in I} \pi(C_i, v)$  es un producto libre.*

**Demostración:** Sea  $T_i$  un árbol maximal en  $C_i$  para cada  $i \in I$ . Entonces  $T_i$  tiene sólo el punto  $v$  en común, y su unión  $T$  es un árbol maximal en  $C$ . Como antes hay una única trayectoria  $\overline{vx}$  en  $T$ , para cada vértice  $x$  de  $C$ , y con una arista  $e$  de un vértice  $x$  a un vértice  $y$ . Asociamos el elemento  $\tilde{e} = \overline{vx}e\overline{vy}^{-1}$  de un grupo  $F = \pi(C^1, v)$ . Si  $e \in T$ , evidentemente  $e = 1$ , el restante  $\tilde{e}$  da una base  $L = X \cup X^{-1}$  para el grupo libre  $F$ . Si  $L_i$  es el conjunto de estos  $\tilde{e}$  para los  $e$  en  $C_i$ , entonces  $L$  es la unión disjunta de los  $L_i$  y cada  $L_i$  es una base para  $F_i = \pi(C^1, v)$  visto como un subgrupo de  $F$ .

Resta mostrar que  $N$ , el kernel de la función natural de  $F = \pi(C^1, v)$  en  $G = \pi(C, v)$ , es la cerradura normal de un conjunto  $R$  de elementos en  $F$  cada uno de los cuales cae en  $F_i$ .  $N$  es por definición, la cerradura normal de los elementos  $r$  de  $\pi(C^1, v)$ , determinada por lazos  $p$ , basados en  $v$ , de la forma  $p \in qsq^{-1}$ , donde  $q$  es una trayectoria de  $v$  a un vértice  $v'$ , y  $s$  es la frontera, comenzando en  $v'$  sobre alguna cara  $D$  de  $C$ . Reemplazando  $r$  por un conjugado, podemos suponer a  $q$  minimal, entonces por nuestra suposición en  $C$ ,  $p$  debe caer enteramente en algún  $C_i$ . Si  $p = e_1 \cdots e_n$ , entonces todos los  $e_j$  caen en  $C_i$  y  $r = \tilde{e}_1 \cdots \tilde{e}_n$ , donde todos los  $\tilde{e}_j$  están en  $L_i$ . Por tanto  $G = \pi(C, v)$  es el producto libre descrito.  $\square$

En 1878 Cayley mostró que un grupo, que satisface los conjuntos usuales de axiomas, es isomorfo a un grupo de permutaciones. De hecho, la representación regular correcta  $\Delta$ , manda isomorfamente un grupo  $G$ , en un grupo de permutaciones de sus propios elementos. Cada  $g \in G$  corresponde a la permutación  $g\Delta$  que manda  $h$  en  $hg$ .

No tenemos indicación que Cayley vio las permutaciones  $g\Delta$  como el conjunto de pares ordenados, pero ésto nos da una aproximación a otro descubrimiento de Cayley, el *diagrama de grupo* ó *Gruppenbild*.

Si consideramos a  $g\Delta$  como el conjunto  $\{(h, hg) | h \in G\}$ , de pares ordenados, es natural representar a  $g\Delta$ , por una gráfica con conjunto de vértices  $V = G$  y aristas dirigidas de  $h$  a  $hg$ , para cada par ordenado  $(h, hg)$  en  $g\Delta$ . Si consideramos diferentes  $g\Delta$ , es natural distinguirlos etiquetando las aristas de cada  $g\Delta$ , con diferentes colores. Esto es esencialmente el *diagrama de Cayley*, relativo al conjunto  $X$  de todos aquellos  $g$  considerados. El diagrama es evidentemente conexo, en el caso que  $X$  genere a  $G$ .

## Capítulo 2

# Autómatas Finitos

El automata finito es un modelo matemático de un sistema, con entradas y salidas discretas. El sistema puede estar en cualquiera del número finito de configuraciones internas o “estados”. El estado del sistema resume la información concerniente a las entradas anteriores que son necesarias para determinar el comportamiento del sistema en las siguientes entradas. El mecanismo de control de un elevador es un buen ejemplo de un sistema de estados finitos. Este mecanismo no recuerda todas las peticiones anteriores para el servicio sólo las del piso en el que se encuentra, la dirección de movimiento, arriba o abajo, y la colección de peticiones aún no cumplidas.

Para el estudio de los sistemas finitos de estados veamos algunas definiciones básicas.

**Definición 2.0.11** Un *automata finito*  $AF$  consiste de un conjunto finito de estados y un conjunto de transiciones de un estado a otro estado, que ocurren en símbolos de entrada elegidos de un alfabeto  $\Sigma$ . Para cada símbolo de entrada existe exactamente una transición de cada estado (posiblemente pueda regresar a él mismo). Un estado, usualmente denotado  $q_0$ , es el estado inicial, en el cual el automata comienza. Algunos estados son designados como finales o estados aceptado. Una gráfica dirigida, llamada un *diagrama de transición*, está asociada a un  $AF$  como sigue. Los vértices de la gráfica corresponden a los *estados* del  $AF$ . Si hay una transición del estado  $q$  al estado  $p$ , con una entrada  $a$ , entonces hay una arista etiquetada con  $a$  del estado  $q$  al estado  $p$  en el diagrama de transición. El  $AF$  acepta una palabra  $x$  si la secuencia de transiciones correspondientes a los símbolos de  $x$  lleva del estado inicial a un estado aceptado.

**Ejemplo** El diagrama de transición de un  $AF$  ilustrado en la figura

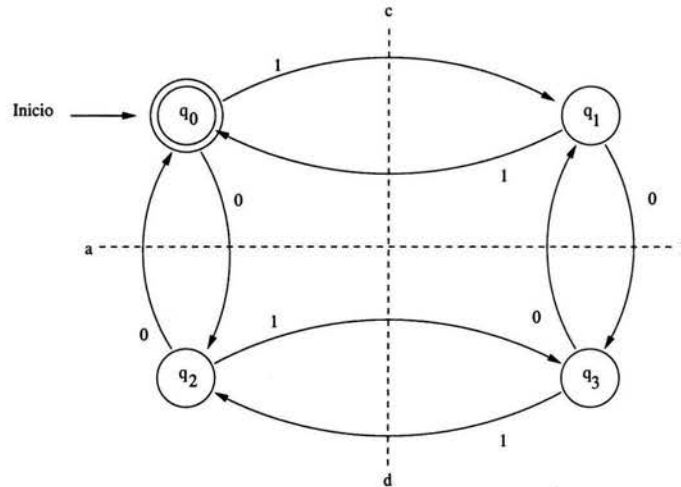


Figura 2.1: El diagrama de transición de un autómata finito.

El estado inicial  $q_0$  está indicado como “inicio”, en este caso, hay sólo un estado final, también  $q_0$ , indicado con un círculo doble. El  $AF$  acepta todas las palabras de 0's y 1's, en el cual el número de ceros y el número de unos es par. Para ver ésto consideremos un “curso o trayectoria”, como el viaje de un estado a otro en el diagrama. El curso comienza en  $q_0$  y debe terminar en  $q_0$  si la secuencia de entradas es aceptada. Cada entrada 0 hace que el curso cruce la línea horizontal  $a-b$ , mientras la entrada 1 no. Así el curso está en un estado sobre la línea  $a-b$  si y sólo si la vista de salida hasta ahora contiene un número par de 0's. Similarmente el curso está a la izquierda de la línea vertical  $c-d$  si y sólo si la entrada contiene un número par de 1's. Así el curso está en  $q_0$  si y sólo si hay un número par de ceros y un número par de unos en la entrada. Notemos que el  $AF$  usa su estado sólo para grabar la paridad del número de ceros y el número de unos, no los números actuales, lo cual requeriría un número infinito de estados.

**Definición 2.0.12** Formalmente denotamos a un *autómata finito* como una quintupla  $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ , donde  $Q$  es un conjunto finito de *estados*,  $\Sigma$  es el *alfabeto de entrada*,  $q_0 \in Q$  es el *estado inicial*,  $F \subseteq Q$  es el conjunto de los *estados finales* y  $\delta$  es la función de transición de  $Q \times \Sigma$  a  $Q$ , es decir  $\delta(q, a)$  es un estado, para cada estado  $q$  y un símbolo de entrada  $a$ .

**Definición 2.0.13** Si  $G$  es un grupo generado por un conjunto  $X$ , consideremos el lenguaje  $X^*$ , definido en la sección de Grupos Libres. Un subconjunto de  $X^*$  es llamado un *lenguaje regular*, si es el conjunto de palabras aceptadas o reconocidas por un autómata finito determinístico.



Cuando  $L$  es un lenguaje regular en  $X^*$  y tal que  $\mu(L) = G$ ,  $\mu$  la proyección natural, decimos que  $(X, L)$  es una estructura racional para el grupo  $G$ .

Dibujamos un  $AF$  como un *curso finito*, el cual está en algún estado de  $Q$  considerando una secuencia de símbolos de  $\Sigma$  escritos en una cinta como se muestra en la figura.

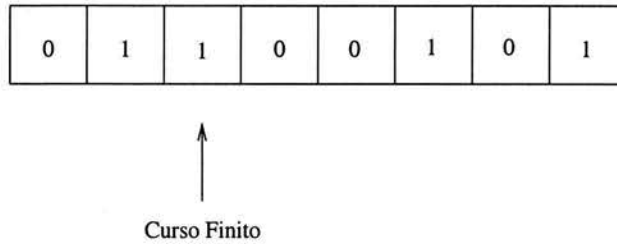


Figura 2.2: Un autómata finito.

En un movimiento el  $AF$  en estado  $q$  lee el símbolo  $a$ , entra al estado  $\delta(q, a)$  y se mueve un símbolo a la derecha. Si  $\delta(q, a)$  es un estado aceptado, entonces el  $AF$  considera aceptar la palabra escrita en su cinta de entrada, pero sin incluir la posición a la cual la cabeza acaba de moverse. Si la cabeza se ha movido hacia el final derecho de la cinta, entonces es aceptada la cinta completa. Notemos que como un  $AF$  lee una palabra, este puede aceptar diferentes prefijos.

Para describir formalmente el comportamiento de un  $AF$  en una palabra, debemos extender la función de transición  $\delta$  para aplicar a un estado y a una palabra, más que a un estado y un símbolo.

**Definición 2.0.14** Definimos  $\hat{\delta}$  de  $Q \times \Sigma^*$  a  $Q$ , donde  $\Sigma^*$  es un lenguaje del alfabeto  $\Sigma$ . La intención es que  $\hat{\delta}(q, w)$  es el estado en el que el  $AF$  estará después de leer  $w$  comenzando en el estado  $q$ . De otra manera,  $\hat{\delta}(q, w)$  es el único estado  $p$  tal que hay una trayectoria en el diagrama de transición de  $q$  a  $p$ , etiquetada  $w$ . Formalmente definimos

1.  $\hat{\delta}(q, 1') = q$ .  
Denotamos aquí  $1'$  como la palabra vacía para evitar confusión con el ejemplo.
2. para toda palabra  $w$  y símbolos de entrada  $a$ ,

$$\hat{\delta}(q, wa) = \delta(\hat{\delta}(q, w), a)$$

De (1) entendemos que, sin leer un símbolo de entrada el  $AF$  no puede cambiar de estado, y (2) nos dice como encontrar el estado después de leer una palabra no vacía de entrada  $wa$ . Es decir encontrar el estado  $p = \hat{\delta}(q, w)$  después de leer  $w$ , entonces calculamos el estado  $\delta(p, a)$ .

Como  $\hat{\delta}(q, a) = \delta(\hat{\delta}(q, 1'), a) = \delta(q, a)$  (haciendo  $w = 1'$  en la regla (2)), no hay desacuerdo entre  $\delta$  y  $\hat{\delta}$  en argumentos, por lo que ambos están definidos. Así podemos usar a nuestra conveniencia  $\delta$  en lugar de  $\hat{\delta}$ .

**Definición 2.0.15** Una palabra  $x$  se dice *aceptada* por un autómata finito  $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$  si  $\delta(q_0, x) = p$  para algún  $p \in F$ . El *lenguaje aceptado* por  $M$ , designado por  $L(M)$ , es el conjunto  $\{x \mid \delta(q_0, x) \in F\}$ . Un lenguaje es *regular* si es el conjunto aceptado por algún autómata finito. Notemos que cuando hablamos de un lenguaje aceptado por un autómata finito  $M$ , nos referimos al conjunto específico  $L(M)$ , no sólo a cualquier conjunto de palabras que suceden para ser aceptadas por  $M$ .

**Ejemplo** Consideremos el diagrama de transición de la figura . En la notación formal este  $AF$  es denotado por  $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ , donde  $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ ,  $\Sigma = \{0, 1\}$ ,  $F = \{q_0\}$ , y  $\delta$  está dado como sigue,

| Estados | Entradas |       |
|---------|----------|-------|
|         | 0        | 1     |
| $q_0$   | $q_2$    | $q_1$ |
| $q_1$   | $q_3$    | $q_0$ |
| $q_2$   | $q_0$    | $q_3$ |
| $q_3$   | $q_1$    | $q_2$ |

Figura 2.3:  $\delta(q, a)$  para el  $AF$  del ejemplo.

Supongamos 110101 es una entrada de  $M$ . Notemos que  $\delta(q_0, 1) = q_1$  y  $\delta(q_1, 1) = q_0$ , así.

$$\delta(q_0, 11) = \delta(\delta(q_0, 1), 1) = \delta(q_1, 1) = q_0$$

Notamos así que 11 está en  $L(M)$ , pero estamos interesados en 110101. Además  $\delta(q_0, 0) = q_2$ . Tenemos entonces,

$$\delta(q_0, 110) = \delta(\delta(q_0, 11), 0) = \delta(q_0, 0) = q_2$$

Continuando de esta manera encontramos que  $\delta(q_0, 1101) = q_3$ ,  $\delta(q_0, 11010) = q_1$ , y finalmente que  $\delta(q_0, 110101) = q_0$ .

La sucesión completa de estados para 110101 es,  $q_0q_1q_0q_2q_3q_1q_0$ . Así 110101 está en  $L(M)$ , que como habíamos dicho, es el conjunto de palabras con un número par de ceros y unos.

## 2.1. Autómatas Finitos No Determinísticos

Introducimos ahora la notación de un autómata finito no determinístico, veremos que cualquier conjunto aceptado por un autómata finito no determinístico, puede también ser aceptado por un autómata finito determinístico. Sin embargo, el concepto de autómata finito no determinístico es muy útil para probar algunos teoremas. También el concepto de no determinístico juega un papel central en la teoría de lenguajes y en la teoría de computación, además de ser útil para entender completamente la definición en un contexto inicial.

Consideraremos, modificando el modelo de autómata finito, permitir cero, uno y más transiciones de un estado en el mismo símbolo de entrada. Este modelo es llamado *autómata finito no determinístico*, abreviamos *AFN*. Observemos en la siguiente figura, un diagrama de transición para un autómata finito no determinístico.

Observemos que hay dos aristas etiquetadas con 0, saliendo del estado  $q_0$ , una que regresa al estado  $q_0$  y otra que llega al estado  $q_3$ .

Una sucesión de entrada  $a_1a_2 \dots a_n$  es aceptada por un autómata finito no determinístico, si existe una sucesión de transiciones, correspondientes a la sucesión de entrada, que lleva del estado inicial a algún estado final. Por ejemplo, 01001 es aceptado por el *AFN* de la figura anterior, pues hay una sucesión de transiciones a través de los estados  $q_0, q_0, q_0, q_3, q_4, q_4$  etiquetado 0,1,0,0,1.

En particular este *AFN* acepta todas las palabras con dos ceros o unos consecutivos, notemos que el *AF* determinístico, o *AFD* para enfatizar, definido en la sección anterior, es un caso especial del *AFN*, en el cual para cada estado hay una única transición en cada símbolo. Así en un *AFD*, para una palabra de entrada  $w$  y un estado  $q$ , habrá exactamente una trayectoria etiquetada por  $w$  comenzando en  $q$ . Para determinar si una palabra es aceptada por un *AFD*, es suficiente verificar esta trayectoria. Para un *AFN* puede haber varias trayectorias etiquetadas por  $w$ , y todas deben ser verificadas para ver si una o más terminan en un estado final.

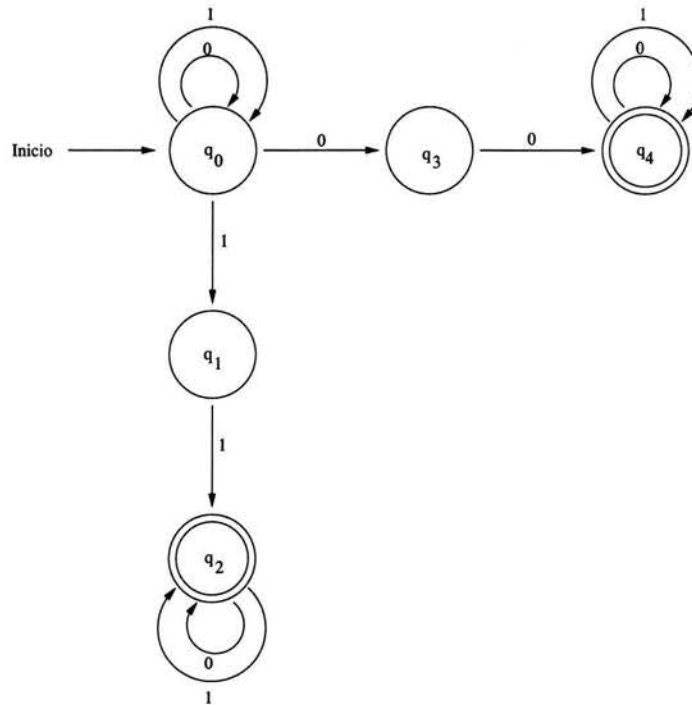


Figura 2.4: Diagrama de transición para un AFN.

En términos de la figura con un curso finito leído en una cinta de entrada, podemos ver el *AFN*, como también leyendo una cinta de entrada. Sin embargo, el curso finito en cualquier tiempo puede estar en cualquier número de estados. Cuando una elección del próximo estado puede ser hecha, como en el estado  $q_0$  con entrada 0, como en la figura anterior, podemos imaginarnos que las copias duplicadas del autómata están hechas. Para cada posible próximo estado hay una copia del autómata cuyo curso finito está en ese estado.

Esta proliferación es exhibida en la siguiente figura para el *AFN*, de la figura 2.1 con entrada 01001.

**Definición 2.1.1** Formalmente denotamos un autómata finito no determinístico por una quintupla  $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ , donde  $Q$ ,  $\Sigma$ ,  $q_0$  y  $F$ , estados, entradas, estado inicial, y estados finales, respectivamente, tienen el mismo significado que para un *AFD*, pero  $\delta$  es una función de  $Q \times \Sigma$  a  $2^Q$ , con  $2^Q$  el conjunto potencia de  $Q$ . Así  $\delta(q, a)$  es el conjunto de todos los estados  $p$ , tales que hay una transición etiquetada por  $a$  de  $q$  a  $p$ .

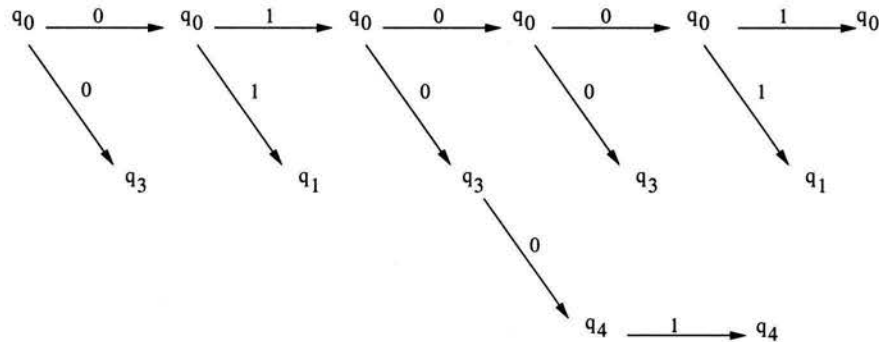


Figura 2.5: Proliferación de estados de un AFN.

La función  $\delta$  puede ser extendida a la función  $\hat{\delta}$  que va de  $Q \times \Sigma^*$  a  $2^Q$  y da sucesiones de entradas como sigue,

1.  $\hat{\delta}(q, 1') = \{q\}$ .  
Nuevamente  $1'$  denota la palabra vacía.
2.  $\hat{\delta}(q, wa) = \{p \mid \text{para algún estado } r \in \hat{\delta}(q, w), p \in \delta(r, a)\}$

La condición (1) rechaza un cambio en un estado sin una entrada y la (2) indica que comenzar en el estado  $q$  y leer la palabra  $w$  seguida por el símbolo de entrada  $a$ , podemos pasar al estado  $p$  si y sólo si un posible estado en el que podemos estar después de leer  $w$  es  $r$ , y de  $r$  podemos ir a  $p$  leyendo  $a$ .

Notemos que  $\hat{\delta}(q, a) = \delta(q, a)$ , para  $a$  un símbolo de entrada. Así podemos usar de nuevo  $\delta$  en lugar de  $\hat{\delta}$ . Es también útil extender a  $\delta$  en  $2^Q \times \Sigma^*$  por,

3.  $\delta(P, w) = \cup_{q \in P} \delta(q, w)$

Para cada conjunto de estados  $P \subseteq Q$ .  $L(M)$ , donde  $M$  es el AFN  $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ , es el conjunto  $\{w \mid \delta(q_0, w) \text{ contiene un estado en } F\}$

**Ejemplo** Sigamos considerando el AFN anterior, cuya función de transición  $\delta$  está dada en la figura 2.1.

Consideremos la entrada 01001,

$$\delta(q_0, 0) = \{q_0, q_3\}$$

$$\delta(q_0, 01) = \delta(\delta(q_0, 0), 1) = \delta(\{q_0, q_3\}, 1) = \delta(q_0, 1) \cup \delta(q_3, 1) = \{q_0, q_1\}$$

| Estados | Entradas       |                |
|---------|----------------|----------------|
|         | 0              | 1              |
| $q_0$   | $\{q_0, q_3\}$ | $\{q_0, q_1\}$ |
| $q_1$   | $\emptyset$    | $\{q_2\}$      |
| $q_2$   | $\{q_2\}$      | $\{q_2\}$      |
| $q_3$   | $\{q_4\}$      | $\emptyset$    |
| $q_4$   | $\{q_4\}$      | $\{q_4\}$      |

Figura 2.6: Función  $\delta$  para el *AFN* del ejemplo.

Similarmente calculamos,

$$\delta(q_0, 010) = \{q_0, q_3\}, \quad \delta(q_0, 0100) = \{q_0, q_3, q_4\}, \quad \delta(q_0, 01001) = \{q_0, q_1, q_4\}.$$

### La equivalencia entre un *AFD* y un *AFN*

Como todo *AFD* es un *AFN*, es claro que la clase de lenguajes aceptados por un *AFN* incluye los lenguajes regulares. Sin embargo, estos lenguajes serán los únicos aceptados por el *AFN*. La prueba de esto se basa en mostrar que un *AFD* puede simular un *AFN*, es decir, para cada *AFN* podemos construir un *AFD* equivalente, el cual acepte el mismo lenguaje. El modo en el que el *DFA* simula el *AFN*, es permitir a los estados del *AFD* corresponder a los conjuntos de estados del *AFN*. El *AFD* construido sigue con atención el curso finito de todos los estados que el *AFN* pudiera estar después de leer la misma entrada que el *AFD* ha leído. La construcción formal de este teorema puede verse en

**Teorema 2.1.2** *Sea  $L$  un conjunto aceptado por un autómata finito no determinístico, entonces existe un autómata finito determinístico que acepta a  $L$ .*





## Capítulo 3

# Automorfismos

Veamos ahora nuestro principal resultado. Sea  $G$  un grupo de palabras hiperbólico y  $\phi$  un automorfismo de  $G$ . Mostraremos que el grupo fijo  $G^\phi$  es un subgrupo racional de  $G$ .

$$G^\phi := \{x \in G \mid \phi(x) = x\}$$

La noción de subgrupo racional implica presentación finita, pero es más fuerte. Por ejemplo, subgrupos racionales de grupos de palabras hiperbólicos son también de palabras hiperbólicos, intersección de subgrupos racionales es de nuevo racional y para subgrupos de un grupo cocompacto discreto de isometrías del espacio hiperbólico  $H^n$ , racionalidad es equivalente a finitud geométrica.

Que el grupo fijo de un automorfismo es finitamente generado fue probado primero, en 1982, para grupos libres  $G$  por Gestern. Esto fue probado para grupos de palabras hiperbólicos por Paulin y Cooper.

Sea  $X = X^{-1}$  un conjunto finito de generadores para  $G$  y  $\Gamma = \Gamma_X(G)$  la gráfica de Cayley. Consideremos en  $X$  la métrica simplicial con todas las aristas de longitud 1, así inducimos la métrica en el conjunto de vértices como la métrica de palabras para  $G$  con respecto a  $X$ .

Denotamos el mapeo natural del monoide libre  $X^*$  a  $G$  dado por  $w \mapsto \bar{w}$ . Cada palabra  $w \in X^*$  define una trayectoria en  $\Gamma$  de 1 a  $\bar{w}$ . Llamamos a la palabra una palabra geodésica si la curva es geodésica. Sea  $L$  que denote el conjunto de palabras geodésicas, entonces  $L$  es un lenguaje regular.

**Definición 3.0.3** Un subgrupo  $H$  de  $G$  es *racional* si el conjunto  $L_H = \{w \in L \mid \bar{w} \in H\}$  es un sublenguaje regular de  $L$ . El subgrupo es *casi convexo* si hay una cota  $N$  tal que la  $N$  vecindad de  $H$  contiene toda trayectoria definida por un elemento de  $L$  de 1 a un punto de  $H$ .

Mostraremos que  $G^\phi$  es casi convexo. Se prueba que racionalidad y casi convexidad son condiciones equivalentes para subgrupos.

Necesitaremos tres lemas. Los primeros dos se tienen para cualquier espacio  $\delta$  hiperbólico y cualquier casi isometría  $\phi$ . Un automorfismo de un grupo de palabras hiperbólico es una casi isometría. El tercer lema no necesita hiperbolicidad, éste se tiene para cualquier grupo.

**Definición 3.0.4** Si  $a$  y  $b$  son dos elementos de  $G$  denotamos por  $[a, b]$  alguna elección de una geodésica en  $\Gamma$  entre ellos. Si  $S$  es cualquier subconjunto de  $\Gamma$  y  $g \in G$  denotamos por  $pr_S(g)$  el conjunto de los  $s \in S$  más cercanos a  $g$  y los llamamos la *proyección* de  $g$  en  $S$ . Denotamos la distancia en  $\Gamma$  por  $d(,)$ .

**Lema 3.0.5** Si  $S$  es un subconjunto convexo de  $\Gamma$  y  $a, b \in \Gamma$  y  $a' \in pr_S(a)$  y  $b' \in pr_S(b)$  entonces

$$d(a', b') \leq d(a, b) + 5\delta + 2$$

**Lema 3.0.6** Existe una cota  $P$  tal que si  $a, b, g \in G^\phi$  además  $y \in pr_{[a, b]}(g)$  entonces  $d(y, \phi(y)) \leq P$ .

**Lema 3.0.7** Para cualquier  $P > 0$  existe  $N = N(P, \phi)$  tal que si  $y \in G$  satisface  $d(y, \phi(y)) \leq P$  entonces  $d(y, G^\phi) \leq N$ .

Primero usemos estos lemas para probar nuestro resultado principal. Por  $P$  tenemos que  $G^\phi$  es finitamente generado. Elijamos generadores de  $G^\phi$  y sea  $M$  la longitud del más largo. Si escribimos a  $g \in G^\phi$  como una palabra en estos generadores y tomamos segmentos iniciales dando una sucesión de puntos  $g_i \in G^\phi$  que van de 1 a  $g$  y tales que los consecutivos están separados a lo más  $M$ . Proyectando estos puntos  $g_i$  en una curva geodésica de 1 a  $g$ . Obtenemos una sucesión de puntos a lo largo de la geodésica que están, a lo más, separados por  $M + 5\delta + 2$  (por el primer lema) y cada movimiento es de distancia a lo más  $P$  por  $\phi$  (por el segundo lema). Por el tercer lema, cada uno de estos puntos está a distancia a lo más  $N$  de un punto fijo, así cualquier punto en la geodésica de 1 a  $g$  está a lo más a distancia  $\frac{M+5\delta+2}{2} + N$  de un punto fijo. Esto prueba la casi convexidad.  $\square$

**Demostración del primer lema:** Elegimos una curva geodésica  $[a', b']$ . Entonces  $a'$  es el punto más cercano en  $[a', b']$  a  $a$  y  $b'$  es un punto cercano en  $[a', b']$  a  $b$ .

*Caso 1.* Si  $b = b'$ . Esto es tenemos un triángulo  $(a, a', b)$  con  $a'$  un punto cercano a  $a$  en  $[a', b]$ . En este caso afirmamos que existe un punto  $g'$  en  $[a, b]$  a distancia a lo más  $2\delta + 1$  de  $a'$ , de donde  $d(a', b') \leq d(a, b) + 2\delta + 1$ . De hecho, si  $d(a, a') \leq \delta$

consideramos  $g' = a$ . De otro modo elegimos un punto  $g$  a distancia  $\delta + 1$  de  $a'$  a lo largo de  $[a', a]$ . Como nuestro triángulo es  $\delta$  delgado,  $g$  está a distancia a lo más  $\delta$  de algún punto  $g'$  de  $[a, b]$ .

*Caso general.* El argumento del caso 1 nos da un punto  $g'$  en  $[a, b']$  a distancia a lo más  $2\delta + 1$  de  $a'$ . Como el triángulo  $(a, b, b')$  es  $\delta$  delgado este punto está a distancia a lo más  $\delta$  de un punto  $g$  en  $[b, b']$  o  $[a, b]$ . En el primer caso podemos aplicar el caso 1 para el triángulo  $(a', g, b')$  para ver que  $d(a', b') \leq 5\delta + 2$ . En el segundo caso la distancia  $d(a', b)$  es a lo más  $d(a, b) + 3\delta + 1$  así que aplicando el caso 1 al triángulo  $(b, b', a')$  tenemos  $d(a', b') \leq d(a, b) + 5\delta + 2$ .  $\square$

**Demostración del segundo lema:** La cota  $P$  sólo depende de  $\delta$  y la extensión de  $\phi$ . Bosquejamos el argumento para la completez.

Aplicando el argumento del Caso 1 para cada triángulo  $(g, y, a)$  y  $(g, y, b)$  tenemos que  $y$  está a distancia a lo más  $2\delta + 1$  de  $[a, g]$  y  $[b, g]$ . Esto es,  $y$  está a distancia acotada de los tres lados del triángulo  $(a, b, g)$ . Como  $\phi$  es una casi isometría,  $\phi(y)$  está a distancia acotada de la imagen bajo  $\phi$  de cada lado del triángulo.

Como una casi isometría de un espacio  $\delta$  hiperbólico manda geodésicas en casi geodésicas,  $\phi(y)$  está a distancia acotada de cada lado del triángulo  $(a, b, g)$ . Pero en cualquier espacio métrico geodésico, dos puntos que están a distancia a lo más  $K$  de los tres, lados de triángulo dado, están separados a distancia a lo más  $4K$  esto lo veremos un poco más adelante, así obtenemos una cota en  $d(y, \phi(y))$ .  $\square$

**Demostración del tercer lema:** Para cada  $z \in G$  con  $d(1, z) \leq P$  elegimos un  $y_z$  con  $z = y_z^{-1}\phi(y_z)$ , si éste existe. Sea  $N$  la longitud del más largo de estos  $y_z$ . Si  $d(y, \phi(y)) \leq P$  pongamos  $z = y^{-1}\phi(y)$ . Entonces  $yy_z^{-1}$  está fijado por  $\phi$  y está a distancia a lo más  $N$  de  $y$ .  $\square$

Para la completez, damos una prueba geométrica de que  $G^\phi$  es finitamente generado.

En efecto, supongamos que  $G^\phi$  no es finitamente generado. Sea  $w_0 = 1$  y para  $n > 0$  elegimos  $w_n \in L$ , inductivamente como la palabra más corta representando un elemento de  $G^\phi$ , ésta no está en el subgrupo generado por  $\overline{w_0}, \dots, \overline{w_{n-1}}$ . Como hay sólo una cantidad finita de palabras de cualquier longitud dada, podemos encontrar  $i \ll j$ , así que  $w_i$  y  $w_j$  tienen un segmento inicial  $w$  en común.

Sea  $S \subset \Gamma$  la curva definida por  $w_j$  y elegimos  $g \in pr_S(w_i)$ . Entonces trivialmente  $d(1, \overline{w} \leq d(1, g)$ , y por el primer lema,  $d(1, g) \leq d(1, \overline{w_i}) + 5\delta + 2$ . El segundo y tercer lema nos dan un elemento  $h$  de  $G^\phi$  cercano a  $g$ . Esto da un  $h \in G^\phi$  con  $d(1, h) < d(1, \overline{w_j})$  y  $d(1, h^{-1}\overline{w_j}) < d(1, \overline{w_j})$ . Por la suposición en la minimalidad de

$w_j, h$  y  $h^{-1}\overline{w_j}$  ambos están en el subgrupo generado por  $\overline{w_0}, \dots, \overline{w_{j-1}}$ , por tanto  $\overline{w_j}$  también está, lo cual es una contradicción.  $\square$

**Teorema 3.0.8** *Si  $\phi, \psi : G \rightarrow G_1$  son homomorfismos casi isométricos de grupos de palabras hiperbólicos, entonces  $\{g \in G \mid \phi(g) = \psi(g)\}$  es un subgrupo racional.*

La demostración de este teorema es casi la misma que la prueba anterior.

Para la prueba del segundo lema, requerimos el siguiente resultado.

**Lema 3.0.9** *Si dos puntos están a lo más a distancia  $K$  de los tres lados de un triángulo dado en un espacio métrico geodésico, entonces éstos están a lo más a distancia  $4K$ .*

**Demostración:** Sean los vértices del triángulo denotados por  $a_1, a_2$  y  $a_3$ . Para  $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ , sea  $a_{ij}$  el punto a distancia  $\frac{1}{2}(d(a_i, a_j) + d(a_i, a_k) - d(a_j, a_k))$  para  $a_i$  a lo largo de la arista de  $a_i$  a  $a_j$ . Entonces  $a_{ij} = a_{ji}$  y  $d(a_i, a_{ij}) = d(a_i, a_{ik})$ .

Ahora sean  $y, z$  puntos que están a distancia a lo más  $K$  de los tres lados del triángulo. Sean  $y_{ij}$  y  $z_{ij}$  los puntos más cercanos a  $y$  y  $z$  en el lado de  $a_i$  a  $a_j$ . Consideraremos los índices módulo 3. Para  $i = 1, 2, 3$ , sea  $Y_i$  la distancia dirigida de  $a_{i,i+1}$  a  $y_{i,i+1}$  en la dirección de  $a_{i+1}$  (así  $Y_i$  es negativo, si  $y_{i,i+1}$  cae entre  $a_{i,i+1}$  y  $a_i$ ).

Sea  $Z_i$  definido similarmente. Observemos primero que

$$Y_i > K \Rightarrow |Y_{i-1}| < K \quad (1)$$

De hecho si  $Y_{i-1} \geq K$ , entonces la distancia de  $a_i$  a  $a_{i+1}$  vía  $y_{i-1,i}$ ,  $y$  y  $Y_{i,i+1}$  sería lo más  $(d(a_i, a_{i-1,i}) - Y_{i-1}) + K + K + (d(a_{i+1}, a_{i,i+1}) - Y_i)$ . Esto es menos que  $d(a_i, a_{i-1,i}) + d(a_{i+1}, a_{i,i+1}) = d(a_i, a_{i,i+1}) + d(a_{i+1}, a_{i,i+1}) = d(a_i, a_{i+1})$  lo cual es una contradicción.

Similarmente si  $Y_{i-1} \leq -K$  entonces la distancia de  $a_{i-1}$  a  $a_{i+1}$  vía  $y_{i-1}$ ,  $y$  y  $y_{i,i+1}$  sería menos que  $d(a_{i-1}, a_{i+1})$ . Similarmente

$$Y_i < -K \Rightarrow |Y_{i+1}| < K \quad (2)$$

y la implicación análoga se tiene en (1) y (2) para los  $Z_i$ .

Supongamos que la distancia de  $y$  a  $z$  es mayor que  $4K$ . Entonces  $|Y_1|$  y  $Z_1$  son mayores que  $K$ , de otra manera la distancia de  $y$  a  $z$  vía  $y_{12}, a_{12}$  y  $z_{12}$  es a lo más  $K + K + K + K$ . Renombrando los puntos es necesario asumir que  $Y_1 > K$ .

Entonces por (1) tenemos que  $|Y_3| < K$ . Entonces  $|Z_3| > K$ , de otra manera la distancia de  $y$  a  $z$  via  $y_{31}, a_{31}$  y  $z_{31}$  sería menos que  $K + K + K + K$ . De hecho  $Z_3 > K$ , pus si  $Z_3 < -K$  entonces (2) aplicada a los  $Z_i$  daría  $|Z_1| < K$  y la distancia de  $y$  a  $z$  via  $y_{12}, a_{12}$  y  $z_{12}$  sería menos que  $K + K + K + K$ . Hemos mostrado que  $Y_1 > K \Rightarrow Z_3 > K$ . Similarmente  $Z_3 > K \Rightarrow Y_2 > K$ ,  $Y_2 > K \Rightarrow Z_1 > K$ , y  $Z_1 > K \Rightarrow Y_3 > K$ , así que  $Y_3 > K$ . Pero habíamos mostrado que  $|Y_3| < K$ .

□



# Bibliografía

- [1] G. Baumslag, A.G. Myasnikov, V. Shpilrain, *Open problems in combinatorial group theory*. Contemp. Math., 250, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
- [2] N. Biggs, *Algebraic Graph Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [3] Bridson, Martin R.; Haefliger, André. *Metric Spaces of Non-Positive Curvature*, Springer, 1991.
- [4] B. Fine, G. Rosenberg, *Algebraic Generalizations of Discrete Groups*, Marcel Dekker, Inc. 1999.
- [5] J.B. Fraleigh, *Algebra Abstracta*, Addison-Wesley Iberoamericana, 1987.
- [6] Gestern, S.M.; Stallings, John R. *Combinatorial Group Theory and Topology*, Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, 1987.
- [7] S.M. Gestern, H.B. Short. *Rational subgroups of biautomatic groups*, Ann. Math. 134, 125-158, 1991.
- [8] Ghys, Etienne; de la Harpe, Pierre. *Infinite groups as geometric objects (after Gromov)*. Ergodic theory, symbolic dynamics, and hyperbolic spaces, Oxford Univ. Press, New York, 1991.
- [9] Ghys, E.; Haefliger, A.; Verjovsky, Alberto. *Group theory from a geometrical viewpoint. Proceedings of the workshop held in Trieste*, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1991.
- [10] Ghys, E.; de la Harpe, P. *Sur les Groupes Hyperboliques d'après Mikhael Gromov*, Birkhauser, Boston 1990.
- [11] de la Harpe, Pierre. *Topics in Geometric Group Theory*, Chicago Lectures in Mathematics 2000.

- [12] J. E. Hopcroft, J. D. Ullman, *Introduction to Automata Theory Languages and Computation*, Addison-Wesley, Reading, 1979.
- [13] N. Jacobson, *Basic Algebra I*, Second Edition, W. H. Freeman Company, 1989.
- [14] Johnson, D.L. *Presentations of Groups*, London Mathematical Society, Student Texts 15, 1990.
- [15] Kurosh, A.G. *The Theory of Groups*, Vol. I, Vol.II, Chelsea Publishing Company, New York, N.Y., 1960.
- [16] Lyndon, Roger C.; Schupp, Paul E. *Combinatorial Group Theory*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2001.
- [17] Magnus, Wilhelm; Karrass, Abraham; Solitar, Donald *Combinatorial group theory. Presentations of groups in terms of generators and relations*, Dover Publications, Inc., New York, 1976.
- [18] Neumann, Walter D. *The fixed group of an automorphism of a word hyperbolic group is rational*, Invent. Math. 110, 147-150, 1992.
- [19] Jean-Pierre Serre. *Trees*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1980.
- [20] A. Verjovsky, *Introducción a la Geometría y Variedades Hiperbólicas*, Sexta Escuela Latinoamericana de Matemáticas, CINVESTAV-IPN, 1999.