

01162



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

***“ESTUDIO SOBRE LA PRESENCIA Y ELIMINACIÓN DE  
VÓRTICES DURANTE LA DESCARGA EN  
LAS COMPUERTAS DE UN VERTEDOR”***

**T E S I S**

Para obtener el grado de:

***MAESTRO EN INGENIERÍA HIDRÁULICA***

P R E S E N T A:

**FIDEL SÁNCHEZ CRUZ**

Director de tesis:

**DR. JESÚS GRACIA SÁNCHEZ**



MÉXICO, D.F.

FEBRERO 2004



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## *Agradecimientos*

*La realización de éste trabajo se debe sin duda a la participación en diversos grados y formas de varias personas, a quienes sinceramente agradezco.*

*En primer lugar, gracias al Creador , quien me dio la oportunidad o la "casualidad" de existir, de ser parte de este Universo, ese polvo estelar estructurado (que llamamos ser vivo) y que es además, capaz de contemplarse a si mismo, de tener conciencia ...*

*A mis padres por ser los responsables de la consolidación de esa casualidad , pero sobre todo de ser en buena parte lo que soy, gracias de corazón.*

*Igualmente importantes en mi vida y formación son mis hermanos y familiares. Gracias a ustedes por los gratos y no tan gratos momentos compartidos, pero sobretodo a su amistad plena e incondicional.*

*En el aspecto académico y en buena parte de mi formación como ser humano, es relevante el papel de la Universidad Nacional Autónoma de México, mi alma mater, así como de su Instituto de Ingeniería y su Centro Integral de investigadores, técnicos académicos, becarios, administrativos, y trabajadores*

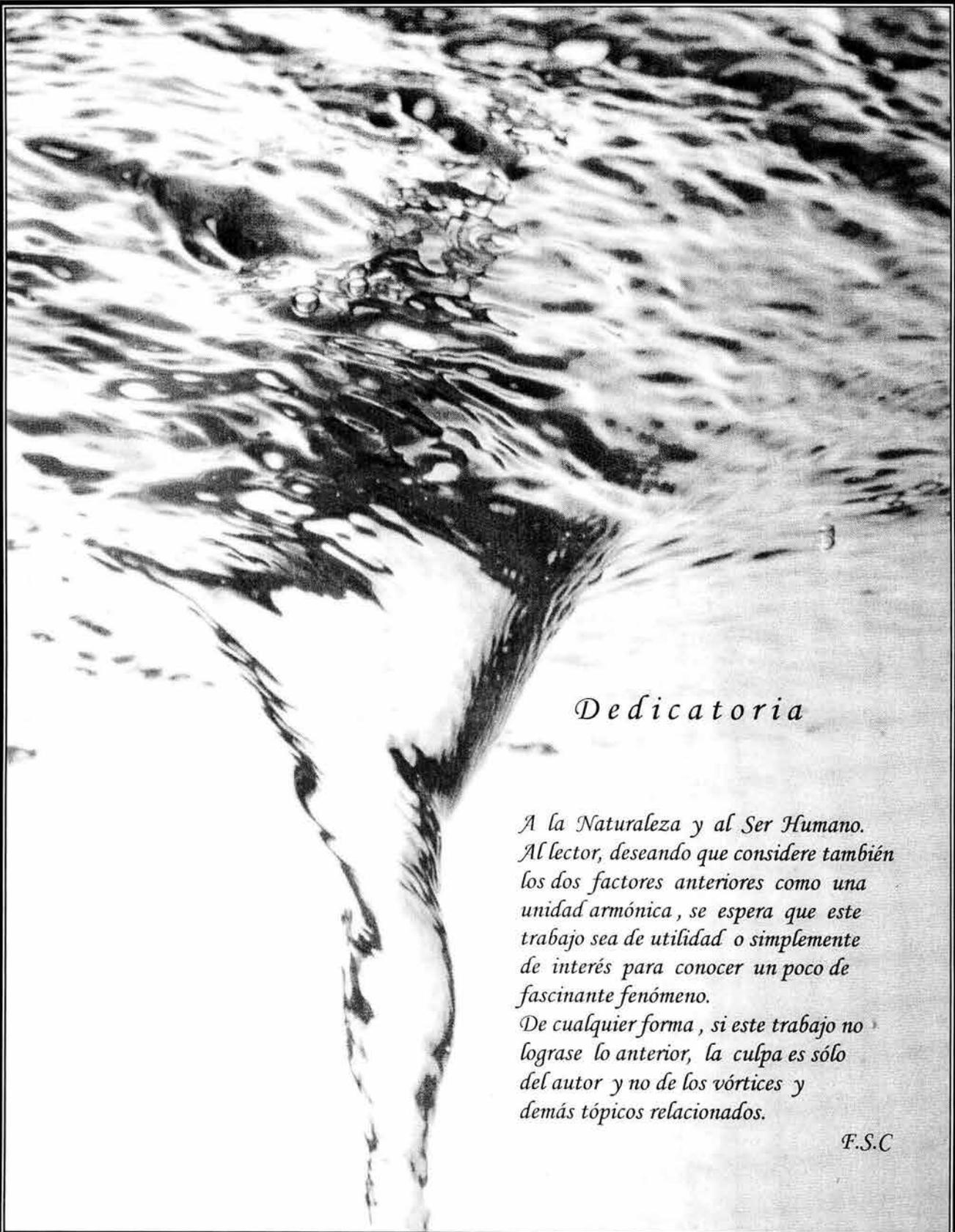
*También, dentro del personal del Instituto, quiero mencionar al apreciado (sino por todos, sí por la mayoría) Coordinador de la Sección de Hidráulica: Victor Franco, por su amistad, valioso apoyo e inestimables consejos*

*Al Dr. Jesús Gracia S. , quien dirigió este trabajo. Gracias por la amistad brindada así como a la confianza depositada en mí. Sin la libertad otorgada en la realización de este trabajo, limitada esta última por el tiempo y mi capacidad.*

*Expreso mi gratitud a los profesores de la D.E.P.F.I. por sus conocimientos y experiencias compartidas. Por citar algunos de ellos, a mis simodales: Dr. Oscar A. Fuentes M., Dr. Rafael B. Carmona P. y al Dr. Carlos A. ... (este último siendo yo un alumno de educación "a distancia").*

*Desde luego, son significativos mis amigos por su ayuda, consejos o simplemente su compañía, que hace todavía mas grata la vida. Por no incurrir en una omisión involuntaria de nombres, (ustedes saben quienes son) solo digo a mis amigos de la F.I., D.E.P.F.I., C.U.C., C.E.L.E., D.G.S.C.A. y demás ámbitos. Gracias camaradas.*

*F.S.C..*



*Dedicatoria*

*A la Naturaleza y al Ser Humano.  
Al lector, deseando que considere también  
los dos factores anteriores como una  
unidad armónica, se espera que este  
trabajo sea de utilidad o simplemente  
de interés para conocer un poco de  
fascinante fenómeno.*

*De cualquier forma, si este trabajo no  
lograse lo anterior, la culpa es sólo  
del autor y no de los vórtices y  
demás tópicos relacionados.*

*F.S.C*

# **Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor**

---

## **Resumen**

En esta tesis se presentan los resultados de un estudio experimental llevado a cabo en un modelo físico de la presa La Angostura (México), así como los de una simulación numérica del prototipo de la misma. El objetivo principal de este trabajo fue el de encontrar un dispositivo para evitar la formación de vórtices en frente de las compuertas durante la descarga del vertedor. En una fase experimental preliminar se analizó cualitativamente la magnitud de los vórtices en el tiempo y espacio, donde se estudió el comportamiento de vórtices con aberturas de compuertas, excentricidad del canal de llegada y variación de niveles en el vaso de almacenamiento. Dicho análisis permitió también diseñar un plan de pruebas más específico para la ejecución de una segunda fase experimental, ahora cuantitativa, en la cual se realizaron análisis de turbulencia, de correlaciones y espectrales de las presiones dinámicas, medidas con transductores de presión, en el flujo con y sin dispositivos supresores. El efecto de tales dispositivos fue el de incrementar la turbulencia del flujo para destruir la formación de vórtices. Diferentes dispositivos fueron probados y se concluye que las rejillas fueron los mejores sistemas para eliminar los vórtices. El efecto de la rejilla en la modelación numérica fue el de cambiar la hidrodinámica característica de un vórtice. Sin embargo, tal modelo empleado debe ser calibrado con mediciones tridimensionales del campo de velocidades para obtener resultados mas acordes con la realidad del campo de flujo así como del efecto que tiene la rejilla en los vórtices.

## **Summary**

In this thesis the results of an experimental study carried out in a physical model of the La Angostura dam spillway (México) are presented as well as those of a numerical simulation of the prototype of the same one. The main objective of this work was to find a device to avoid vortices formation in front of gates during the discharge of the spillway. In a preliminary experimental phase it was analyzed qualitatively the magnitude of the vortices in the time and space at operating conditions as gates openings, channel of approach and variation of reservoir levels. This analysis also allowed to design a more specific plan of tests to achieve a second experimental phase, in a quantitative way, in which were executed turbulence, correlation and spectral analysis of the dynamic pressures, which were measured by pressure transducers in the flow with and without suppressive devices. The effect of such devices was to increase the flow turbulence to destroy the vortex formation. Different devices were tested and it was concluded that grids are the best system to eliminate such vortices. The effect of the grid in the numerical simulation was to change the vortex hydrodynamic characteristics. However, the numerical model used should be gauged with three-dimensional speed measurements to obtain results in accordance with the true flow field as well as the grid effect on the vortices.

# Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

---

## INDICE

1. Introducción	1
2. Planteamiento del problema	5
2.1 Los vórtices en estructuras hidráulicas, en especial en compuertas	7
2.2 Estructuras disipadoras de vórtices	16
3. Estado del arte	19
3.1 Causas que generan los vórtices	20
3.2 Clasificación de las estructuras de entrada	22
3.3 Tipos de vórtices. Clasificación	23
3.4 Resultados teórico-experimentales básicos sobre vórtices	24
3.5 El efecto de escala	24
3.6 La Sumergencia en vórtices	26
4. Muestreo y análisis experimental	31
4.1 Modelo físico: Presa <i>La Angostura, Chis.</i>	32
4.2 Clasificación de la fuerza de un vórtice	34
4.2.1 Método visual de clasificación de la fuerza de un vórtice según el ARL	35
4.3 Definición del universo muestral	37
4.4 Vórtices en el dominio del tiempo (Fase preliminar)	39
4.4.1 Plan de pruebas experimentales	40
4.4.2 Equipo de medición preliminar	42
4.4.3 Análisis de vórtices en el dominio del tiempo	43
4.4.3.1 Con la variación en las aberturas de compuertas	48
4.4.3.2 Con la excentricidad del flujo de llegada	51
4.4.3.3 Con la variación de niveles en el vaso de almacenamiento	53
4.4.4 Análisis de sumergencia	55
4.5 Análisis espacial de vórtices	57
4.5.1 Plan de pruebas experimentales	58
4.5.2 Análisis de vórtices en el espacio	58
4.6 Vórtices en el dominio del tiempo	63
4.6.1 Plan de pruebas experimentales	64
4.6.2 Estructuras disipadoras experimentales	66
4.6.3 Sistema de medición. Adquisición de datos	67
4.6.4 Relación voltaje de la señal – presión dinámica	71
4.6.5 Análisis de vórtices en el dominio del tiempo	75
4.6.5.1 Análisis de turbulencia	76
4.6.5.2 Análisis probabilístico	80

# Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

---

4.6.5.3	Análisis de valores extremos	89
4.6.5.4	Análisis de correlación	91
4.7	Vórtices en el dominio de la frecuencia	102
4.7.1	Plan de pruebas experimentales	102
4.7.2	Sistema de medición.	103
4.7.3	Análisis de vórtices en el dominio de la frecuencia	103
5.	Simulación numérica de vórtices del caso en estudio	117
5.1	Modelo numérico de vórtices	118
5.2	Discretización del espacio de análisis	124
5.3	Condiciones de frontera	127
5.4	Presentación de resultados	129
6.	Conclusiones y recomendaciones	137
6.1	Del análisis experimental	137
6.2	Del análisis numérico	140

## APÉNDICE

Apéndice A	Procesos físicos. Generalidades	i
A.1	Proceso determinista	i
A.1.1	Procesos periódicos simples (sinusoidales)	ii
A.1.2	Procesos periódicos complejos	ii
A.1.3	Procesos casi periódicos	iii
A.1.4	Procesos transitorios	iii
A.2	Proceso no determinista, aleatorio o estocástico	iii
A.2.1	Descripción de un proceso estocástico	iv
A.2.2	Proceso estocástico estacionario	vi
A.2.3	Proceso estocástico estacionario ergódico	vi
Apéndice B	El análisis de Fourier	I
B.1	Espacios vectoriales	II
B.1.1	Combinación lineal	II
B.1.2	Espacios con producto interno	III
B.1.3	Ortogonalidad	IV
B.2	Serie de Fourier	V
B.2.1	Función periódica	VII
B.2.2	Condiciones de Dirichlet	VIII
B.2.3	Forma compleja de la serie de Fourier	IX
B.2.4	Espectros de una función periódica	X

# Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

---

<b>B.3 La transformada de Fourier</b>	<b>XI</b>
<b>B.4 La transformada discreta de Fourier</b>	<b>XIV</b>
<b>B.4.1 Transformada discreta de Fourier. Definición</b>	<b>XVI</b>
<b>B.5 La transformada rápida de Fourier</b>	<b>XVII</b>
<b>B.5.1 La transformada rápida de Fourier base 2</b>	<b>XIX</b>
<b>B.5.2 La transformada rápida de Fourier general</b>	<b>XXI</b>
<b>Apéndice C Programas</b>	<b>c1</b>
<b>Apéndice D Fotografías</b>	<b>a</b>
<b>Apéndice E Planos</b>	
<b>E.1 Planta General de la obra de excedencias de la P.H. La Angostura</b>	<b>E1</b>
<b>E.2 Perfil de la zona de compuertas de la obra de excedencias de la P.H. La Angostura</b>	<b>E2</b>

# Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

## Índice de Figuras

<i>Figura</i>		<i>página</i>
1.1	<i>Galaxia de Andrómeda (M31).</i>	1
2.1	<i>Planta Hidroeléctrica Belisario Domínguez, "La Angostura", Chis., México. Secretaría de Agricultura y Recursos Hidráulicos (1976).</i>	6
2.1.1	<i>Planta de una de las obras de toma, presa Glen Canyon, AZ. E.U.A, U.S.B.R., Vermeyen B.T. (1999).</i>	8
2.1.2	<i>Geometría típica de cárcamos de bombeo. Tuberías de succión horizontales. M. Padmanabhan (1984).</i>	9
2.1.3	<i>Análisis espectral de presiones a 40 mm de la salida del tubo de aspiración de la turbina, P.H. La Angostura (modelo). Guarga F. R. et al (1985a).</i>	11
2.1.4	<i>Canal de aproximación tangente a la estructura de entrada. Jain C. S., (1984).</i>	11
2.1.5	<i>Transporte, depósito y zona de vórtices en un modelo del tanque amortiguador de la presa Álvaro Obregón Levi L. E., (1991).</i>	12
2.1.6	<i>Planta general del sistema hidroeléctrico Mayfield MN. U.S.A. Herstrom L. A. et al (1982).</i>	13
2.1.7	<i>Vista aérea de la Presa Folsom CA, U.S.A., U. S. B. R., Higgs A. J. (1997).</i>	13
2.1.8	<i>Vórtices con embudo de aire, observados aguas arriba de las compuertas de la presa Folsom CA. U.S.A., U. S. B. R. Higgs A. J. (1997).</i>	14
2.1.9	<i>Planta y sección longitudinal de los túneles del sistema de irrigación Urfa, Turquía. Bayazit M., Avci I., (1990).</i>	15
2.1.10	<i>Planta y sección longitudinal, de la obra de toma de la presa El Cajón, Honduras. VAW, Schulthness D., (1985).</i>	16
2.1.11	<i>Supresor (inyector) de vórtices de la P.H. Reuss, Bremgarten, Suiza. VAW, Bizaz E. et al., (1976).</i>	17
2.1.12	<i>Supresor (inyector) de vórtices de la P.H. Mayfield, Min. U.S.A.. Herstrom et al., (1982).</i>	18
2.1.13	<i>Geometría modificada de pilas para aminorar la magnitud de vórtices en la presa Folsom CA. U.S.A., U.S.B.R., Higgs J. A., (1997).</i>	18
3.1.1	<i>Causas de vorticidad: (a) Toma lateral (b) Gradientes de velocidad, (c) obstrucción (Durgin y Hecker, 1978).</i>	20
3.1.2	<i>Flujo rotacional causado por asimetría (a) y cambio de dirección (b) de las fronteras (Denny y Young, 1957). (c) causado por asimetría, cambio dirección de las fronteras: descarga por medio de compuertas.</i>	21
3.1.3	<i>Estructuras de estrada propensas a la formación de vórtices (Anwar, 1968)</i>	21
3.1.4	<i>Varios ejemplos de formación de vórtices en condiciones del flujo de aproximación (Knauss, 1972)</i>	21

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

<i>Figura</i>	<i>página</i>
3.2.1 <i>Características generales de una estructura de entrada.</i>	22
3.2.2 <i>Tipos de estructuras de entrada respecto a su diseño, Knauss J., (1987).</i>	22
3.3.1 <i>Tipos de vórtices por la ubicación donde ocurren y la forma adoptada por éstos, Knauss J., (1987).</i>	23
3.6.1 <i>Definición de la dirección de la estructura de entrada (<math>\phi</math>) y la sumergencia (hs). Knauss J., (1987).</i>	26
3.6.2 <i>Sumergencia recomendada para estructuras de entrada, sin considerar dispositivos supresores de vórtices Knauss J., (1987).</i>	28
3.6.3 <i>Medio cuerpo de Rankine y la formación de un vórtice Yildirim N., Kocabaş (1995).</i>	28
4.2.1.1 <i>Clasificación de la fuerza de un vórtice, según el método del ARL.</i>	35
4.4.1.1. <i>Curva de descarga del vertedor izquierdo de la P.H. La Angostura</i>	42
4.4.1.2 <i>Ecuaciones de las curvas experimentales Elev.-Q del vertedor para diferentes aberturas de compuertas</i>	42
4.4.3.1 <i>Serie de tiempo de vórtices con aberturas en compuertas: <math>a_1=0</math> m, <math>a_2 \rightarrow \infty</math>, <math>a_3=0</math> m y NAME = 539.6 m.s.n.m. Registro en compuerta <math>C_3</math>.</i>	44
4.4.3.2 <i>Serie de tiempo de vórtices con aberturas en compuertas: <math>a_1=0</math> m, <math>a_2 \rightarrow \infty</math>, <math>a_3=1</math> m y NAME = 539.6 m.s.n.m. Registro en compuerta <math>C_3</math>.</i>	44
4.4.3.3 <i>Serie de tiempo de vórtices con aberturas en compuertas <math>a_1=0</math> m, <math>a_2 \rightarrow \infty</math>, <math>a_3=2</math> m y NAME = 539.6 m.s.n.m. Registro en compuerta <math>C_3</math>.</i>	45
4.4.3.4 <i>Serie de tiempo de vórtices con aberturas en compuertas <math>a_1=0</math> m, <math>a_2 \rightarrow \infty</math>, <math>a_3=4</math> m y NAME = 539.6 m.s.n.m. Registro en compuerta <math>C_3</math>.</i>	45
4.4.3.5 <i>Serie de tiempo de vórtices con aberturas en compuertas <math>a_1=0</math> m, <math>a_2 \rightarrow \infty</math>, <math>a_3=6</math> m y NAME = 539.6 m.s.n.m. Registro en compuerta <math>C_3</math>.</i>	46
4.4.3.6 <i>Serie de tiempo de vórtices con aberturas en compuertas <math>a_1=0</math> m, <math>a_2 \rightarrow \infty</math>, <math>a_3=8</math> m y NAME = 539.6 m.s.n.m. Registro en compuerta <math>C_3</math>.</i>	46
4.4.3.7 <i>Registro de la magnitud de vórtices para determinar la duración de muestreo</i>	47
4.4.3.1.1 <i>Histogramas de frecuencias acumuladas de vórtices, condición 1 del plan de pruebas. Registro en compuerta <math>C_3</math>.</i>	49
4.4.3.1.2 <i>Histogramas de frecuencias acumuladas de vórtices, condición 6 del plan de pruebas. Registro en compuerta <math>C_3</math>.</i>	50
4.4.3.1.3 <i>Histogramas de frecuencias acumuladas de vórtices, condición 9 del plan de pruebas. Registro en compuerta <math>C_3</math>.</i>	50
4.4.3.2.1 <i>Serie de tiempo de vórtices con aberturas en compuertas: <math>a_1=0</math> m, <math>a_2 \rightarrow \infty</math>, <math>a_3=0</math> m y NAME = 539.6 m.s.n.m. Registro en compuerta <math>C_1</math>.</i>	51
4.4.3.2.2 <i>Histogramas de frecuencias acumuladas en el tiempo de vórtices, condición 1 del plan de pruebas. FVT1 registrado en compuerta <math>C_3</math> y FVT5 en compuerta <math>C_1</math>.</i>	52

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

<i>Figura</i>	<i>página</i>
4.4.3.2.3 <i>Serie de tiempo de vórtices con aperturas en compuertas: <math>a_1=0</math> m, <math>a_2 \rightarrow \infty</math>, <math>a_3 = 0</math>m y NAME = 539.6 m.s.n.m. Registro en compuerta <math>C_3</math>.</i>	52
4.4.3.3.1 <i>Serie de tiempo de vórtices con aperturas en compuertas: <math>a_1=0</math> m, <math>a_2 \rightarrow \infty</math>, <math>a_3 = 2</math>m y NAME = 537.6 m.s.n.m. Registro en compuerta <math>C_3</math>.</i>	54
4.4.3.3.2 <i>Histogramas de frecuencias acumuladas en el tiempo de vórtices, condiciones 6 y 22 del plan de pruebas. Registros en compuerta <math>C_3</math>.</i>	54
4.4.4.1 <i>Comparación de las sumergencias teóricas según Knauss et al, Yildirim y Kokabaş y las experimentales obtenidas del modelo, P.H. La Angostura al NAME = 539.6 m.s.n.m.</i>	56
4.4.4.2 <i>Áreas hidráulicas obtenidas del ajuste en el radio hidráulico de la compuerta.</i>	57
4.4.4.3 <i>Perímetros hidráulicos obtenidos del ajuste en el radio hidráulico de la compuerta.</i>	57
4.5.2.1 <i>Localización de vórtices en el modelo. Condición: al N.A.M.E. compuertas <math>C_1</math> y <math>C_3</math> cerradas, compuerta <math>C_2</math> completamente abierta. Condición 1 del Plan de pruebas</i>	59
4.5.2.2 <i>Localización de vórtices en el modelo. Condición: al N.A.M.E. compuertas <math>C_1</math> y <math>C_3</math> cerradas, compuerta <math>C_2</math> completamente abierta. Condición 4 del Plan de pruebas</i>	59
4.5.2.3 <i>Localización de vórtices en el modelo. Condición: al N.A.M.E. compuertas <math>C_1</math> cerrada, apertura de compuerta <math>C_3</math> de 2m, compuerta <math>C_2</math> completamente abierta. Condición 6 del Plan de pruebas</i>	60
4.5.2.4 <i>Localización de vórtices en el modelo. Condición: al N.A.M.E. compuertas <math>C_1</math> cerrada, Apertura de compuerta <math>C_3</math> de 4m, compuerta <math>C_2</math> completamente abierta. Condición 8 del Plan de pruebas.</i>	61
4.5.2.5 <i>Localización de vórtices en el modelo. Condición: al N.A.M.E. compuertas <math>C_1</math> cerrada, apertura de compuerta <math>C_3</math> de 6m, compuerta <math>C_2</math> completamente abierta. Condición 9 del Plan de pruebas.</i>	61
4.5.2.6 <i>Localización de vórtices en el modelo. Condición: al N.A.M.E. compuertas <math>C_1</math> cerrada, apertura de compuerta <math>C_3</math> de 8m, compuerta <math>C_2</math> completamente abierta. Condición 10 del Plan de pruebas</i>	62
4.5.2.7 <i>Localización de vórtices en el modelo. Condición: al N.A.M.E. compuertas <math>C_3</math> cerrada, apertura e compuerta <math>C_1</math> de 2m, compuerta <math>C_2</math> completamente abierta. Condición 15 del Plan de pruebas</i>	62
4.6.2.1 <i>Dispositivos supresores experimentales empleadas para la disipación de vórtices.</i>	66
4.6.3.1 <i>Proceso del muestreo experimental empleado para el análisis de vórtices en el dominio del tiempo.</i>	67
4.6.3.2 <i>Características de los transductores de presión empleados en el proceso de medición de vórtices</i>	68
4.6.3.3 <i>Localización de los transductores de presión en el vertedor</i>	69

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

---

<i>Figura</i>	<i>página</i>
4.6.3.4 <i>Programa Small DAQ 1.0 empleado para la visualización y Registro de las señales muestreadas.</i>	70
4.6.4.1 <i>Señales eléctricas de las fluctuaciones de presión. Condición c1, "sólo oleaje" del plan de pruebas experimentales (Tabla 4.6.1.1)</i>	71
4.6.4.2 <i>Fetchs calculados en el vaso de almacenamiento de la P.H. La Angostura.</i>	73
4.6.4.3 <i>Señales piezométricas de las fluctuaciones de presión. Condición número 1 del plan de pruebas experimentales (Tabla 4.6.1.1)</i>	74
4.6.5.1.1 <i>Señales y sistemas del problema de estudio.</i>	76
4.6.5.1.2 <i>Valores r.m.s. e IT de las fluctuaciones de presión superiores e inferiores correspondientes a las condiciones 1, 6 a 9 del plan de pruebas experimentales (Tabla 4.6.1.1)</i>	78
4.6.5.1.3 <i>Valores r.m.s. de las fluctuaciones de presión superiores más inferiores, correspondientes a las condiciones 1, 6 a 9 del plan de pruebas experimentales (Tabla 4.6.1.1)</i>	79
4.6.5.2.1 <i>Interpretación gráfica de la probabilidad de la presión dinámica aleatoria en cuanto a su tiempo de aparición. El ejemplo mostrado corresponde a la señal de las presiones superiores de la condición 1 ó c1 del plan de pruebas experimentales (Tabla 4.6.1.1) en 10 segundos de registro.</i>	80
4.6.5.2.2 <i>FDDP de las presiones superiores e inferiores de la condición 1 ó c1 del plan de pruebas.</i>	81
4.6.5.2.3 <i>FDDP de las presiones superiores e inferiores de la condición 6 ó b1 del plan de pruebas.</i>	81
4.6.5.2.4 <i>FDDP de las presiones superiores e inferiores de la condición 7 ó b2 del plan de pruebas.</i>	82
4.6.5.2.5 <i>FDDP de las presiones superiores e inferiores de la condición 8 ó b3 del plan de pruebas.</i>	82
4.6.5.2.6 <i>FDDP de las presiones superiores e inferiores de la condición 9 ó b4 del plan de pruebas.</i>	82
4.6.5.2.7 <i>Intervalo de probabilidad de la FDP de las presiones superiores e inferiores de la condición 6 ó b1 del plan de pruebas.</i>	83
4.6.5.2.8 <i>Coefficientes de asimetría para las FDDP de las presiones superiores del plan de pruebas.</i>	85
4.6.5.2.9 <i>Coefficientes de curtosis para las FDDP de las presiones superiores del plan de pruebas.</i>	85
4.6.5.2.10 <i>Coefficientes de asimetría para las FDDP de las presiones inferiores del plan de pruebas.</i>	85
4.6.5.1.11 <i>Coefficientes de curtosis para las FDDP de las presiones inferiores del plan de pruebas.</i>	85

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

<i>Figura</i>	<i>página</i>
4.6.5.2.12 <i>FDDP(p')</i> de las fluctuaciones de presión superiores. Condiciones establecidas en el Plan de pruebas experimentales (Tabla 4.6.1.1.)	87
4.6.5.2.13 <i>FDDP(p')</i> de las fluctuaciones de presión inferiores. Condiciones establecidas en el Plan de pruebas experimentales (Tabla 4.6.1.1.)	88
4.6.5.3.1 <i>Máximos de las FDDP de las presiones superiores. Condiciones 1,6,7,8 y 9 del Plan de pruebas experimentales (Tabla 4.6.1.1.)</i>	89
4.6.5.3.2 <i>Máximos de las FDDP de las presiones inferiores. Condiciones 1,6,7,8 y 9 del Plan de pruebas experimentales (Tabla 4.6.1.1.)</i>	90
4.6.5.4.1 <i>FCC entre las presiones superiores de las condiciones experimentales c1 y b2</i>	92
4.6.5.4.2 <i>FCC entre las presiones inferiores de las condiciones experimentales c1 y b2</i>	92
4.6.5.4.3 <i>FCC entre las presiones superiores de las condiciones experimentales c1 y b3</i>	93
4.6.5.4.4 <i>FCC entre las presiones inferiores de las condiciones experimentales c1 y b3</i>	93
4.6.5.4.5 <i>FCC entre las presiones superiores de las condiciones experimentales c1 y b4</i>	93
4.6.5.4.6 <i>FCC entre las presiones inferiores de las condiciones experimentales c1 y b4</i>	94
4.6.5.4.7 <i>Acercamiento para la identificación de seudoperiodos grandes en la FCC entre las presiones superiores de las condiciones experimentales c1 y b3.</i>	94
4.6.5.4.8 <i>Acercamiento para la identificación de seudoperiodos pequeños en la FCC entre las presiones inferiores de las condiciones experimentales c1 y b2.</i>	95
4.6.5.4.9 <i>FCC entre las fluctuaciones presiones , condiciones experimentales c1 y b1</i>	96
4.6.5.4.10 <i>FCC entre las fluctuaciones presiones , condiciones experimentales c1 y b3</i>	97
4.6.5.4.11 <i>FCC entre las fluctuaciones presiones , condiciones experimentales c1 y b4</i>	97
4.6.5.4.12 <i>FAC de la señal de presiones inferiores , condición experimental b3.</i>	98
4.6.5.4.13 <i>FAC de la señal de presiones superiores , condición experimental b4.</i>	98
4.6.5.4.14 <i>FAC de las fluctuaciones de presiones,, condición experimental b1.</i>	99
4.6.5.4.15 <i>FCCN de las presiones superiores , condiciones experimentales b1 y b2.</i>	100
4.6.5.4.16 <i>FCCN de las presiones inferiores , condiciones experimentales b1 y b3.</i>	101
4.6.5.4.17 <i>FCCN de las presiones superiores , condiciones experimentales b1 y b4.</i>	101
4.7.3.1 <i>FDPE. Condición experimental c1 del plan de pruebas experimentales. Tabla 4.6.1.1</i>	106
4.7.3.2 <i>FDPE. Condición experimental b1 del plan de pruebas experimentales. Tabla 4.6.1.1</i>	106
4.7.3.3 <i>FDPE-r.m.s. , Condición experimental c1 del plan de pruebas, tabla 4.6.1.1</i>	108
4.7.3.4 <i>FDPE-r.m.s. , Condición experimental b4 del plan de pruebas, tabla 4.6.1.1</i>	108
4.7.3.5 <i>FDPE-r.m.s original, obtenida con el analizador de espectros. Condición experimental c1 del plan de pruebas, tabla 4.6.1.1</i>	109

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

<i>Figura</i>		<i>página</i>
4.7.3.6	<i>FDPE-r.m.s., obtenida con el analizador de espectros. Condición experimental b1 del plan de pruebas, tabla 4.6.1.1</i>	110
4.7.3.7	<i>FDPE-r.m.s., obtenida con el analizador de espectros. Condición experimental b2 del plan de pruebas, tabla 4.6.1.1</i>	110
4.7.3.8	<i>FDPE-r.m.s., obtenida con el analizador de espectros. Condición experimental b3 del plan de pruebas, tabla 4.6.1.1</i>	111
4.7.3.9	<i>FDPE-r.m.s., obtenida con el analizador de espectros. Condición experimental b4 del plan de pruebas, tabla 4.6.1.1</i>	111
4.7.3.10	<i>Ancho de banda de la FDPE-r.m.s. Condición experimental b1 del plan de pruebas, tabla 4.6.1.1.</i>	113
4.7.3.11	<i>Ancho de banda de la FDPE-r.m.s. Condición experimental b2 del plan de pruebas, tabla 4.6.1.1.</i>	113
4.7.3.12	<i>Ancho de banda de la FDPE-r.m.s. Condición experimental b4 del plan de pruebas, tabla 4.6.1.1.</i>	114
4.7.3.13	<i>Cantidad de energía en el A.B.E. de las FDPE depresiones superiores. Condiciones experimentales del plan de pruebas, tabla 4.6.1.1.</i>	114
4.7.3.14	<i>Cantidad de energía en el A.B.E. de las FDPE de presiones inferiores. Condiciones experimentales del plan de pruebas, tabla 4.6.1.1.</i>	115
5.1	<i>Molécula de cálculo 3D.</i>	121
5.2	<i>Molécula de cálculo 3D de un punto adyacente a una frontera curva</i>	123
5.3	<i>Molécula de cálculo 3D en un punto de una frontera</i>	124
5.4	<i>Perfil de la malla semicomprimida del caso de estudio</i>	125
5.5	<i>Vista en planta de la malla semicomprimida del caso de estudio</i>	126
5.6	<i>Sección transversal de la malla semicomprimida del caso de estudio</i>	126
5.7	<i>Ejecución del programa en un sistema UNIX</i>	128
5.8	<i>Patrón de flujo en el canal de llegada del caso de estudio. Plano horizontal A-A'</i>	129
5.9	<i>Patrón de flujo en el canal de llegada del caso de estudio. Plano horizontal B-B'</i>	130
5.10	<i>Patrón de flujo en el canal de llegada del caso de estudio. Plano vertical C-C'</i>	130
5.11	<i>Patrón de flujo en el canal de llegada del caso de estudio. Plano vertical D-D'</i>	131
5.12	<i>Patrón de flujo en el canal de llegada del caso de estudio. Plano vertical E-E'</i>	131
5.13	<i>Patrón de flujo en el canal de llegada con rejilla. Plano horizontal A-A'</i>	132
5.14	<i>Patrón de flujo en el canal de llegada con rejilla. Plano horizontal B-B'</i>	133
5.15	<i>Patrón de flujo en el canal de llegada con rejilla. Plano horizontal C-C'</i>	133
5.16	<i>Patrón de flujo en el canal de llegada con rejilla. Plano vertical D-D'</i>	134
5.17	<i>Patrón de flujo en el canal de llegada con rejilla. Plano vertical E-E'</i>	134

# Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

---

<i>Figura</i>		<i>página</i>
A2.1	<i>Representación de los procesos físicos. Clasificación</i>	ii
A1.3.1	<i>Espectro de amplitudes de una función casi periódica</i>	iii
A2.1	<i>Proceso estocástico: señales de fluctuaciones de presión</i>	iv
B.1	<i>Ejemplos de funciones periódicas</i>	VII
B.2	<i>Grados de aproximación de una función mediante series de Fourier</i>	VIII
B.3	<i>Espectros discretos de una función periódica</i>	X
B4	<i>Espectro de una función no periódica</i>	XII
B5	<i>Diagrama de Argand</i>	XVIII
B.6	<i>Comparación entre la TDF y la FFT en el número de operaciones realizadas</i>	XXI

## Indice de Tablas

<i>Tabla</i>		<i>página</i>
4.4.1.1	<i>Plan de pruebas para el estudio espacio tiempo de vórtices en compuertas de un vertedor</i>	41
4.4.2.1	<i>Ejemplos de registros: tiempos de aparición-duración de los estados de un vórtice para las condiciones 4, 5 y 7 del plan de pruebas</i>	43
4.6.1.1	<i>Plan de pruebas experimentales para el análisis de vórtices en el dominio del tiempo</i>	65
4.6.5.2.1	<i>Probabilidades de ocurrencia de las presiones superiores e inferiores del plan de pruebas experimentales</i>	84

## Indice de Fotos

<i>Foto</i>		<i>página</i>
4.1.1	<i>Modelo físico de la P.H. La Angostura</i>	32
4.1.2	<i>Vaso de almacenamiento del modelo físico de la P.H. La Angostura</i>	33
1	<i>Estructura de control (compuertas) y canales de descarga (rápidas).</i>	a
2	<i>Vórtices aguas arriba de las compuertas derecha (c1) e izquierda (c3)</i>	b
3	<i>Dispositivo de rejilla frente a la compuerta izquierda (c3) y vórtice en compuerta derecha (c1). Vista de aguas arriba hacia aguas abajo.</i>	b

# Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

---

## Indice de Fotos

<i>Foto</i>		<i>página</i>
4	<i>Dispositivo de rejilla frente a la compuerta izquierda (c3) y vórtice en compuerta derecha (c1). Vista de aguas abajo hacia aguas arriba.</i>	<i>c</i>
5	<i>Vista de conjunto del modelo experimental.</i>	<i>c</i>
6	<i>Dispositivo propelas redondeadas con transductor de presión.</i>	<i>d</i>
7	<i>Vista de planta del dispositivo propelas rectas aguas arriba de la compuerta derecha.</i>	<i>d</i>
8	<i>Vórtice aguas arriba de una compuerta con transductor de presión</i>	<i>e</i>
9	<i>Vista en planta de un vórtice ocurrido aguas arriba de la compuerta derecha (c1) y rejilla instalada en la compuerta izquierda (c3).</i>	<i>e</i>

## Indice de Planos

<i>Plano</i>		<i>página</i>
E.1	<i>Planta general de la obra de excedencias de la P.H. La Angostura</i>	<i>A</i>
E.2	<i>Planta y perfiles de la zona de compuertas de la P.H. La Angostura</i>	<i>B</i>

# Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

---

## Nomenclatura

$Re, Re$	: Número de Reynolds, adimensional.
$hs$	: sumergencia en estructuras de entrada, en m
$d$	: diámetro de la estructura de entrada (circular), en m
$hr$	: sumergencia relativa en una estructura de entrada, adimensional.
$Rh$	: radio hidráulico de la estructura de entrada, en m
$\varphi, \phi$	: dirección de la estructura de entrada, en radianes.
$Ve$	: Velocidad de entrada (en la estructura de control), en $m/s$ .
$Q$	: caudal en la estructura de entrada, en $m^3/s$ .
$Fr$	: Número de Froude, adimensional.
$We$	: Número de Weber, adimensional.
$\nu$	: Viscosidad cinemática, en $m^2/s$ .
$\rho$	: densidad de un fluido en
$Nc$	: Número de circulación, en $m^2$ .
$c$	: Constante de circulación, $m^2/s$ .
$v_t$	: Velocidad tangencial en la estructura de entrada, en $m/s$ .
$U_x$	: Velocidad uniforme en la estructura de aproximación, en $m/s$ .
$hs_c$	: Sumergencia crítica en la estructura de entrada, en m.
$C_d$	: coeficiente de descarga de la estructura de entrada con flujo uniforme en el canal de aproximación, adimensional
$H$	: carga hidráulica n el vertedor, en m
$\sigma$	: Fuerza de tensión superficial por unidad de longitud en $N/m$
$L$	: Ancho de la cresta de un cimacio, en m
$D_c$	: Distancia más corta del labio inferior de una compuerta al cimacio, en m
$g$	: Aceleración de la gravedad, en $m/s^2$
$H_d$	: Carga hidráulica al centro de la compuerta abierta, incluye carga de velocidad de aproximación, en m (fórmula 4.1)
$FV$	: Frecuencia acumulada de un tipo de vórtice igual o menor que un tipo dado, en %
$FVT$	: Frecuencia acumulada del tiempo de aparición de un tipo de vórtice (VT) menor o igual a uno dado, en %
$a$	: Abertura de una compuerta, en m
$Ti$	: Magnitud de la fuerza de un vórtice, $i = 1, 2 \dots 8$

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

---

<b><math>\alpha</math></b>	: ángulo de remolino en la estructura de entrada, en grados.
<b><math>V_a</math></b>	: Velocidad axial de un vórtice, en $m/s$
<b><math>htr_1</math></b>	: Sumergencia del transductor superior, en $m$
<b><math>Htr_2</math></b>	: Sumergencia del transductor inferior, en $m$
<b><math>bp</math></b>	: Ancho de la sección cuadrada de la propela de aspas rectas, en $m$
<b><math>lp</math></b>	: Longitud de las aspas rectas de una propela, en $m$
<b><math>dv</math></b>	: Diámetro del vástago de las propelas, en $m$
<b><math>S_M</math></b>	: Semieje mayor de la propela redondeada, en $m$
<b><math>S_m</math></b>	: Semieje menor de la propela redondeada, en $m$
<b><math>r_p</math></b>	: Radio del arco de enlace de la propela redondeada, en $m$
<b><math>br</math></b>	: Lado de la rejilla cuadrada, en $m$
<b><math>Pe</math></b>	: Peralte de la rejilla, en $m$
<b><math>e_r</math></b>	: Espesor de la rejilla, en $m$
<b><math>Hs_{m\acute{a}x}</math></b>	: Altura de la ola máxima en el vaso de almacenamiento, en $m$
<b><math>Hs</math></b>	: Altura de la ola significativa en el vaso de almacenamiento, en $m$
<b><math>F</math></b>	: Longitud del fetch efectivo en el vaso de almacenamiento, en $m$
<b><math>X_i</math></b>	: Longitud efectiva de cada radial con respecto al fetch, en $m$
<b><math>U_m</math></b>	: Velocidad media del viento, en $m/s$
<b><math>hps</math></b>	: Carga piezométrica del transductor superior en $m$
<b><math>hpi</math></b>	: Carga piezométrica del transductor inferior en $m$
<b><math>V</math></b>	: Voltaje de las señales eléctricas, en $V$
<b><math>m.c.a.</math></b>	: Carga de presión en metros de columna de agua.
<b><math>r.m.s.</math></b>	: Desviación estándar de la turbulencia, sus dimensiones son iguales a las de la variable en estudio. En el caso de las fluctuaciones de presión son $Pa$ o $m.c.a.$
<b><math>p</math></b>	: Presión dinámica, en $Pa$ o $m.c.a.$
<b><math>P'</math></b>	: Fluctuaciones de presión dinámica, en $Pa$ o $m.c.a.$
<b><math>\bar{p}</math> ó <math>\mu_p</math></b>	: Presión dinámica media, en $Pa$ o $m.c.a.$
<b><math>I.T.</math></b>	: Intensidad de la turbulencia de la variable en estudio, adimensional.
<b><math>a</math></b>	: Abertura de una compuerta, en $m$
<b><math>I.T.</math></b>	: Magnitud de la fuerza de un vórtice, $i = 1, 2 \dots 8$
<b><math>T</math></b>	: Tiempo de registro, en $s$

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

---

$T_a$	: Intervalo de tiempo en el que se encuentra una variable aleatoria, en $s$
$FDDP$ ( $var$ )	: Función de distribución de densidad de probabilidad de una variable aleatoria dada ( $var$ ), adimensional
$FDP$ ( $var$ )	: Función de distribución de probabilidad de una variable aleatoria dada ( $var$ ), adimensional
$as_3$	: Coeficiente de asimetría de una $FDDP(var)$ , adimensional
$cu_4$	: Coeficiente de curtosis de una $FDDP(var)$ , adimensional
$\sigma_{var}^n$	: Momento de orden $n$ respecto a la media $m_{var}$ de la esperanza matemática, cuya función es la desviación $(var - \mu_{var})^n$ de una variable aleatoria ( $var$ ); en unidades de la variable aleatoria considerada elevadas al orden correspondiente.
$R_{x,y}(\tau)$	: Función de correlación cruzada entre 2 señales (funciones) $x(t)$ y $y(t)$ ; las unidades son las correspondientes a las funciones en cuestión al cuadrado. Ej. $Pa^2$ ó $m.c.a.^2$
$R_{x,x}(\tau)$	: Función de autocorrelación entre una señal (función) $x$ ; las unidades son las correspondientes a las función en cuestión al cuadrado. Ej. $Pa^2$ ó $m.c.a.^2$
$\tau$	: Incremento de tiempo de las funciones de correlación, en $s$
$RN_{x,y}(\tau)$	: Función de correlación cruzada normalizada entre 2 señales (funciones) $x(t)$ y $y(t)$ , adimensional.
$\mathcal{F}$	: Operador de la transformada de Fourier
$S_{x,y}(\omega)$	: Función de densidad espectral cruzada (de dos lados) entre 2 señales (funciones) $x(\omega)$ y $y(\omega)$ ; las unidades son las correspondientes a las funciones en cuestión al cuadrado. Ej. $Pa^2$ ó $m.c.a.^2$
$S_{x,x}(\omega)$	: Función de densidad de potencia espectral (de dos lados) de una señal (función) $x(\omega)$ ; las unidades son las correspondientes a la función en cuestión al cuadrado. Ej. $Pa^2$ ó $m.c.a.^2$
$G_{x,y}(\omega)$	: Función de densidad espectral cruzada (de un lado) entre 2 señales (funciones) $x(\omega)$ y $y(\omega)$ ; las unidades son las correspondientes a las funciones en cuestión al cuadrado. Ej. $Pa^2$ ó $m.c.a.^2$
$G_{x,x}(\omega)$	: Función de densidad de potencia espectral (de un lado) de una señal (función) $x(\omega)$ ; las unidades son las correspondientes a la función en cuestión al cuadrado. Ej. $Pa^2$ ó $m.c.a.^2$
$T_m$	: Tiempo total de muestreo, en $s$
$\Delta t$	: Incremento (intervalo) de tiempo, en $s$
$N$	: Número total de datos de la señal muestreada
$Ab$	: Ancho de banda de la señal muestreada, en $Hz$
$\Delta\omega$	: Incremento de frecuencia, en $Hz$
$\Delta E$	: Cantidad de energía contenida en una señal en un rango de frecuencia dado, las unidades son las de la señal elevadas al cuadrado por segundo. Ej. $Pa^2 s$

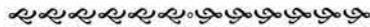
## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

---

- $q$  : Magnitud de la velocidad total de una partícula del campo de flujo, en  $m/s$
- $u, v, w$  : Componentes de velocidad de una partícula del campo de flujo en las direcciones  $x, y$  y  $z$  (sistema cartesiano), respectivamente, en  $m/s$ .
- $\phi(x,y,z)$  : Función potencial (tridimensional) de un fluido (irrotacional), en  $m^2/s$
- $\gamma$  : Peso específico de un fluido, en  $Nw/m^3$
- $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  : Incremento (intervalo) de distancia en las direcciones  $x, y$  y  $z$  (sistema cartesiano), respectivamente, en  $m$
- $Cb, Ca, Cu, Cd, Cl, Cr$  : Coeficientes de superposición que rodean a una molécula de flujo con coeficiente de superposición central  $Cc$  para una malla estructurada regular, adimensionales.
- $r$  : Distancia en un plano de una partícula de flujo respecto al eje de un vórtice, en  $m$
- $\Delta x\xi, \Delta y\xi, \Delta z\xi$  : Longitud de los incrementos comprimidos en las direcciones  $x, y, z$ , respectivamente, en  $m$
- $n, m, s$  : Factores de compresión de una malla estructurada regular en las direcciones  $x, y, z$ , respectivamente, adimensionales.

# Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

---

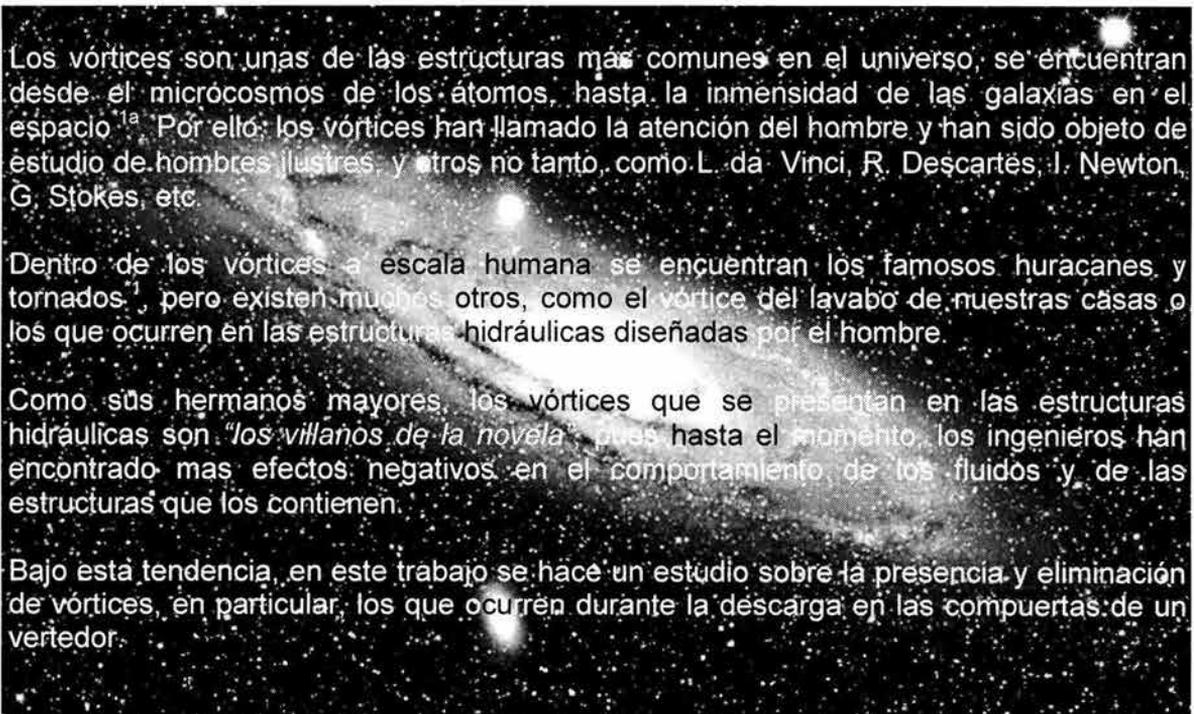


*Con decisión aférrate a tu sueño, pues si de ti lograra él escapar, tu existencia sería como una ave herida, incapaz de volar.*

*Langston Hughes*



## 1 Introducción



Los vórtices son unas de las estructuras más comunes en el universo, se encuentran desde el micrócosmos de los átomos, hasta la inmensidad de las galaxias en el espacio<sup>1a</sup>. Por ello, los vórtices han llamado la atención del hombre y han sido objeto de estudio de hombres ilustres, y otros no tanto, como L. da Vinci, R. Descartes, I. Newton, G. Stokes, etc.

Dentro de los vórtices a escala humana se encuentran los famosos huracanes y tornados<sup>1</sup>, pero existen muchos otros, como el vórtice del lavabo de nuestras casas o los que ocurren en las estructuras hidráulicas diseñadas por el hombre.

Como sus hermanos mayores, los vórtices que se presentan en las estructuras hidráulicas son "los villanos de la novela", pues hasta el momento, los ingenieros han encontrado mas efectos negativos en el comportamiento de los fluidos y de las estructuras que los contienen.

Bajo esta tendencia, en este trabajo se hace un estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices, en particular, los que ocurren durante la descarga en las compuertas de un vertedor.

<sup>1a</sup> En la foto de fondo: La galaxia de Andrómeda (M31) de la constelación del mismo nombre, es una gigante colección en espiral de más de 300 billones de estrellas. Es probablemente el objeto más lejano que puede verse a simple vista. Véase en referencias electrónicas: Astrojan Astronomical Picture Collection, (2004).

<sup>1</sup> Véase en referencias electrónicas: Rhoden G., Rhoden K. (2003).

## **Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor**

---

Así, en el capítulo 2 (Planteamiento del problema), se empieza por describir el problema que dió origen a este trabajo: la posibilidad de que pudieran ocurrir vórtices al abrir las compuertas de la P. H. Angostura, Chis. México. Para destacar la importancia del problema de los vórtices en las estructuras hidráulicas, en este capítulo se hace, a partir de la literatura técnica, una breve reseña sobre diferentes estructuras hidráulicas en las que ocurren vórtices y sus efectos en ellas; así como de los dispositivos que han sido empleados para tratar de suprimirlos.

Para asentar el marco de estudio de este trabajo, el capítulo 3 (Estado del Arte) describe un breve panorama de los aspectos más importantes acerca de los vórtices en las estructuras hidráulicas; donde se mencionan las principales causas que producen a los vórtices. También se dan algunas clasificaciones de vórtices y de las estructuras llamadas "de entrada", en las que puede ocurrir este fenómeno.

Finalmente se mencionan algunos tópicos básicos acerca de las investigaciones teórico-experimentales sobre vórtices, que serán de utilidad en los siguientes capítulos. Por ejemplo, el nombrado "efecto de escala" en el estudio de modelos experimentales, y la sumergencia crítica de vórtices, para intentar evitar su formación en el diseño de estructuras hidráulicas.

Así como el embudo o "corazón" de aire es uno de los aspectos más interesantes e importantes de un vórtice; el capítulo 4 (Resultados y análisis experimental) es la parte central (corazón) de este trabajo. Ya que en los modelos teóricos sobre vórtices disponibles actualmente, no es posible tomar en cuenta todos los factores que causan e interactúan en el fenómeno de vórtices y, sobre todo, a que no se conoce de manera satisfactoria el comportamiento dinámico del mismo. El análisis experimental es crucial para tener una comprensión más satisfactoria de la realidad.

En consecuencia, el capítulo 4 inicia con la descripción del modelo físico empleado en la etapa experimental. Se complementa el método de clasificación de la fuerza de un vórtice propuesta por el ARL<sup>2</sup> para que, junto a las hipótesis consideradas, quede definido el número de pruebas (muestras) experimentales en su primera fase (preliminar).

En esta primera fase experimental se describe el plan de pruebas llevado a cabo para hacer el análisis cualitativo de la variación en la magnitud de los vórtices en el tiempo y espacio, empleando el método ARL. Estos resultados, presentados en series de tiempo e histogramas de frecuencias acumuladas, describen el comportamiento de los vórtices respecto a la excentricidad del canal de llegada, variación de niveles en el vaso de almacenamiento y a las aberturas de las compuertas del vertedor. También en esta etapa se probaron los dispositivos supresores de vórtices propuestos.

---

<sup>2</sup> Alden Research Laboratory of Massachusetts, véase en referencias electrónicas: ARL(2000).

## **Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor**

---

pruebas más específico y de menor tamaño. El análisis realizado en esta etapa, ahora cuantitativo, se lleva a cabo a partir de los registros de las fluctuaciones de presión dinámicas de los vórtices sobre las compuertas, por medio de transductores piezoeléctricos.

Se realiza un análisis de turbulencia de las señales registradas del plan de pruebas, que considera el oleaje puro, la ocurrencia de vórtices (sin dispositivos) y cada uno de los dispositivos supresores considerados. Por medio de un análisis probabilístico se hace énfasis de los resultados obtenidos cuando ocurre un vórtice, para hacer clara la distinción cuando no ocurren por efecto de los dispositivos. Permaneciendo en el dominio del tiempo, más familiar para el ingeniero civil, al final del subcapítulo 4.6.5 se realiza un análisis de correlación para identificar las similitudes entre las señales muestreadas. Este análisis se realiza para aclarar algunos resultados obtenidos en las secciones anteriores. En este subcapítulo se identifica al dispositivo de rejilla como la mejor opción para suprimir a un vórtice. Sin embargo, no se ve clara distinción del efecto de la rejilla en la profundidad, así como la efectividad de los demás dispositivos empleados (propelas).

Por lo anterior, en el subcapítulo 4.7 se presenta un análisis en el dominio de la frecuencia de las señales anteriores para conocer la forma en que la energía de presión es distribuida de acuerdo a las distintas frecuencias. Lo anterior se consigue al calcular las Funciones de Densidad de Potencia Espectral (FDPE) de dichas señales. Los conceptos básicos del Análisis de Fourier empleado para realizar los cálculos en este subcapítulo, se mencionan brevemente en el apéndice B. Para decidir cual de los dispositivos de las propelas es el menos eficiente, se presentan las gráficas de los contenidos de energía de las FDPE en el ancho de banda determinado previamente.

Para conocer el grado de aproximación que tiene un modelo matemático en el fenómeno de vórtices, en el capítulo 5 se lleva a cabo una simulación numérica tridimensional de vórtices aguas arriba de las compuertas de un vertedor, conforme a la teoría del flujo con potencial.

Se exponen los motivos para la utilización del modelo mencionado y se describen las ecuaciones base de simulación, derivadas de las ecuaciones de Navier-Stokes. Dichas ecuaciones base se representan en esquemas de diferencias finitas para su solución numérica, considerando también coeficientes de superposición para considerar varios flujos potenciales elementales que tiene el flujo en estudio.

Conforme a la geometría del vertedor considerada, se establecen las condiciones de frontera y la forma de discretizar el dominio considerado (generación de mallas) para su cálculo. Así también, se menciona las formulaciones adicionales hechas al modelo matemático, para considerar el dispositivo óptimo de supresión de vórtices determinado en el capítulo anterior, es decir, la rejilla.

## **Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor**

---

Se presentan en forma gráfica los resultados obtenidos de la simulación ejecutando un programa de cómputo. Se comentan los patrones de flujo obtenidos en la condición de "sólo vórtice" y los resultantes al instalar la rejilla.

Finalmente, en el capítulo 6 se mencionan las conclusiones y recomendaciones finales del estudio realizado. Y en los apéndices se muestra información complementaria a éste trabajo.

# Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

---



*Un problema es la oportunidad que se te presenta de dar tu máximo esfuerzo.*

*Duke Ellington*



## 2 Planteamiento del Problema

El fenómeno de vórtices es muy diverso en la naturaleza. Este fenómeno está íntimamente ligado al de la turbulencia<sup>\*1</sup>, de ahí que sea bastante complejo su estudio. No obstante, por esa dificultad su estudio quizá no se haría con tanto ahínco, de no ser porque el fenómeno de vórtices tiene consecuencias fundamentales en el comportamiento de los fluidos, y de ello se tengan efectos positivos o negativos para el hombre. Particularmente en el caso de las estructuras hidráulicas, los ingenieros hasta el momento han encontrado mas efectos negativos de los vórtices.

Durante la época de avenidas de 1999<sup>\*2</sup>, las adversas condiciones climatológicas provocaron un nuevo desbordamiento del río Usumacinta, con lo cual el número de damnificados aumentó a 153 mil 230. Las afectaciones a cultivos y a otras actividades productivas ascendieron a 278 mil 270 hectáreas.

Por si fuera poco, las presas del Sistema Grijalva estaban alcanzando su límite máximo y el embalse más extenso de dicho sistema, esto es, el de la presa La Angostura podría derramarse ya que el nivel del agua aumentaba en promedio dos centímetros cada hora. Esto podría agravar la situación de todas las comunidades en la zona.

---

<sup>\*1</sup> Uno de los mas grandes y viejos desafíos de la física.

<sup>\*2</sup> Véase referencia: Marengo M. H., Salinas V.O., (2003) y referencia electrónica: Información de prensa.

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

---

Según un reporte de la Comisión Federal de Electricidad de México (CFE), el nivel de la presa La Angostura (véase figura 2.1) alcanzó un nivel de 537.8 m.s.n.m. cuando su capacidad es de 539.6 m.s.n.m., equivalente a una retención de 19 mil millones de metros cúbicos.

Ante tal situación, se empezaron a “remendar” las compuertas para agregar 1.5 m de altura; aunque si la lluvia continuaba, habría la necesidad de abrir las compuertas para desfogar la presa.



*Figura 2.1. Planta Hidroeléctrica Belisario Domínguez, “La Angostura”, Chis., México. Secretaría de Agricultura y Recursos Hidráulicos (1976).*

Como en la literatura técnica se ha reportado la formación de vórtices cerca de las compuertas del vertedor de una presa y éstos pueden producir vibraciones que pueden llegar a provocar deformaciones y fractura de los elementos estructurales de estas obras, mas aún teniendo en cuenta que las compuertas del vertedor de la P.H. son esbeltas (8.33 m de ancho y 23 m de altura) y el sistema de levantamiento es por medio de malacates. Por lo cual era importante analizar los problemas que podrían ocurrir al abrir las compuertas del vertedor de la presa La Angostura, así como la forma de resolverlos.

## **Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor**

---

El tipo de vórtices que interesa en este trabajo son los de tipo superficial, de eje vertical con embudo de aire<sup>3</sup>; particularmente los que ocurren aguas arriba de las compuertas de un vertedor durante su descarga.

Este es un caso poco estudiado, pues la mayor cantidad de reportes y estudios que existen en la literatura técnica sobre el tema son los que tratan vórtices en almacenamientos de agua con nulas o pequeñas velocidades del agua circundante a una estructura de entrada.

Después del paso del flujo en dicha estructura, el flujo adquiere mayor velocidad y se desarrolla dentro de un conducto cerrado<sup>4</sup>; mientras que en el caso de estudio el flujo aguas debajo de la estructura de entrada (compuertas) es a superficie libre a través de una rápida. Pero sobre todo, a que el área hidráulica de la estructura de entrada es variable, y en consecuencia, existe una mayor sensibilidad en la sumergencia<sup>5</sup> de la estructura y con ello en la frecuencia y magnitud de los vórtices ocurridos. Sin embargo, varios de éstos estudios teóricos y experimentales son aplicables al caso de estudio. En este capítulo se hace una breve reseña de la literatura técnica sobre diferentes estructuras hidráulicas (descritas en la sección 3.2 del capítulo siguiente), en las que ocurren vórtices, así como de los dispositivos empleados para destruirlos o aminorar sus efectos nocivos.

### **2.1 Los vórtices en las Estructuras Hidráulicas**

Las características de un flujo con presencia de vórtices, son un incremento en el remolino de sus partículas así como la entrada abundante de otro flujo en otro estado material, es decir, el aire.

Lo anterior trae consigo dos problemas clave en las estructuras hidráulicas: un impacto hidráulico desfavorable en el funcionamiento de maquinas hidráulicas, y efectos hidroneumáticos peligrosos en los conductos próximos a la estructura de entrada. Estos últimos problemas se han presentado, por ejemplo, en varias obras de toma en presas como la Hirfanli, en Turquía [Weller, J. A. (1975)], la Harspranget en Suecia o la de Kariba en Zambia [Amphlett M. B. (1966)]

En estas obras se observó un incremento en las pérdidas de carga debido al la presencia de vórtices, así como una reducción en el caudal por la presencia en sí del fenómeno o por ajustes en las condiciones de operación para disminuir los problemas del flujo en remolino.

---

<sup>3</sup> Véase Estado del arte, sección 3.3.

<sup>4</sup> Véase: Estado del arte, sección 3.2.

<sup>5</sup> Véase : Estado del arte, sección 3.4.

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

Varios investigadores han reportado reducciones en la descarga por la estructura de entrada debida a los vórtices hasta de un 80 % [Amphlett M. B. (1966)], [Daggett L.L., Keulegan G.H. (1974)]. Bajo tales condiciones extremas, durante el paso de una avenida, la deficiencia en la descarga por el vertedor causada por los vórtices, puede causar el desborde de una presa.

A la inversa, el problema de vórtices fuertes adquiere mayor importancia en los lugares con clima tropical, donde al final del verano la demanda es alta y el nivel en el vaso de almacenamiento es bajo; con lo cual la sumergencia en la obra de toma es baja y la ocurrencia de este tipo de vórtices es mayor.

También se han presentado vórtices en obras de toma más complejas, como por ejemplo, en la obra de toma multinivel, de la presa Glen Canyon [Vermeyen T. B. (1999)] (véase figura 2.1.1). Esta estructura, modificación de la obra de toma original, fue hecha para derivar de forma selectiva agua con diferentes temperaturas para restablecer la ictiología del lugar. Tanto en los estudios de modelo como de prototipo se observó la presencia de vórtices, cuya magnitud variaba según la sumergencia y la descarga.

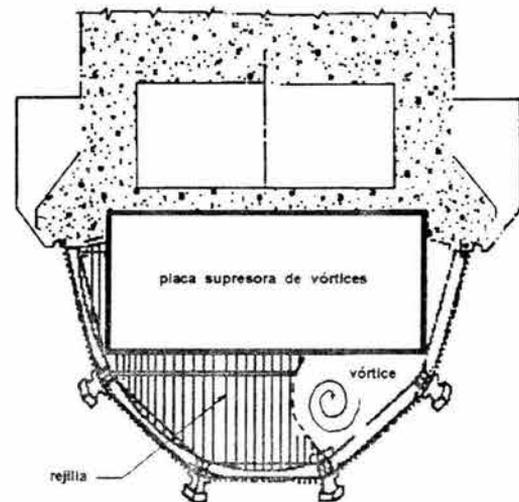


Figura 2.1.1 Planta de una de las obras de toma, presa Glen Canyon, AZ, E.U.A., U.S.B.R., Vermeyen B.T. (1999).

Así se presentaron vórtices del tipo 1<sup>6</sup> al tipo 5. En este caso hubo buena concordancia con los resultados obtenidos al respecto: la magnitud de un vórtice aumenta en relación directa al caudal y, de manera inversa con la sumergencia, concepto que se verá en los capítulos siguientes.

Para estas obras de toma, varios investigadores han propuesto algunas directivas para el diseño con el fin de evitar la formación de vórtices en ellas. Algunas de las sugerencias más prácticas especifican la sumergencia requerida en términos del diámetro de la estructura de entrada [Prosser M. J. (1977)], el caudal [Hydraulic Institute Standards for Centrifugal (1975)], la velocidad [Gordon J. L. (1970)] o el número de Froude [Quick M. C. (1972)] [Pennino B. J. and Hecker G. E. (1979)] en tal estructura. Pero tales directivas de diseño han mostrado en muchos casos ineficacia, como las que mencionan Pennino B. J. y Hecker G. E. (1979)] así como Dillon G. S. (1979).

<sup>6</sup> Según la clasificación del Alden Research Laboratory [Hecker, G. E. (1981)]

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

También se ha reportado la ocurrencia de vórtices cerca de sifones durante los desfogues de almacenamientos en temporada de lluvias. Resultado del flujo rotacional, la frecuencia y magnitud de vórtices es mas importante cuando la altura del nivel del agua sobre la entrada del sifón es igual o menor a la sumergencia crítica [Reddy Y. R., Pickford J., (1974)].

Como se mencionó anteriormente, otro problema causado por los vórtices es el impacto hidrodinámico perjudicial en el funcionamiento de máquinas hidráulicas. En efecto, uno de los problemas más importantes que causan los vórtices en los sistemas de bombeo es la ingestión de aire en las tuberías de succión (véase figura 2.1.2). Aún con pequeñas cantidades de aire entrante, se ha evaluado que tiene efectos adversos en el funcionamiento de bombas [Florajancic D. (1970)].

La acción de los vórtices puede provocar vibraciones y cavitación, dañando elementos sensibles de la bomba como los álabes del impulsor o las chumaceras de soporte o algún otro elemento importante de la instalación.

Además de producir ruido, Denny, D. F. (1956) ha reportado que la cantidad (por volumen) de aire de los vórtices pueden provocar hasta un 15 % en la reducción en la eficiencia en bombas centrífugas. Adicionalmente puede incrementarse la susceptibilidad de daño por cavitación y el flujo en remolino en tuberías que causa un incremento en las pérdidas de energía. Las bombas de flujo axial son las mas sensibles a la ingestión de aire que las bombas centrífugas [Chang Y. N., (1979)].

Volúmenes de aire hasta del 3 ó 4 % puede provocar un pequeño pero continuo decremento en la eficiencia de las bombas. Cantidades de aire mayores al margen anterior, normalmente resultan en una caída súbita en la eficiencia. Para una interrupción en la operación de bombas, son suficientes cantidades de aire cerca del 7 hasta 20 %.

Las condiciones de operación críticas varían de acuerdo al tipo y criterio de operación característico de la bomba. Básicamente, para un 1 % de caída en la eficiencia solo una pequeña cantidad de aire atrapado es necesario.

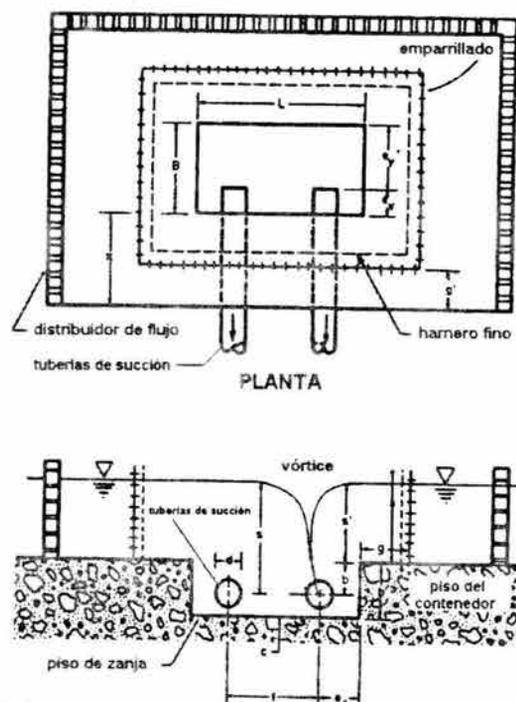


Figura 2.1.2 Geometría típica de cárcamos de bombeo. Tuberías de succión horizontales.  
M. Padmanabhan (1984).

## **Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor**

---

Pero una pérdida en la eficiencia por esta pequeña cantidad (1 %), puede llevar a pérdidas en los beneficios, lo cual, en unos cuantos años puede exceder a los costos de capital iniciales de la bomba [Chang Y. N., (1979a)].

Este problema se vuelve crítico en los grandes sistemas de bombeo para abastecimiento de agua potable o en los sistemas de refrigeración en las centrales nucleares<sup>7</sup>. Por ello, es importante el estudio de vórtices desde la etapa de diseño de un sistema de bombeo, como en el proyecto Ludington [Comninellis E. (1973)], debido a que dicha obra poseía varias características no convencionales como las condiciones geológicas del lugar a ser construida.

Resultado de varias geometrías analizadas en cárcamos de bombeo, tanto para tubería de succión vertical como horizontal así como para diferentes caudales y sumergencias, Padmanabhan M. (1984) a reportado que la notable ingestión de aire debida a los vórtices fuertes con embudo (corazón) de aire esta asociada a una circulación grande inducida por perturbaciones en el flujo de aproximación, así como al número de Froude. No se observaron vórtices con embudo de aire en pruebas con números de Foude menores a 0.25, el cual es un valor cercano al propuesto por Pennino y Hecker (1979) en sus estudios. De esta manera, este investigador propone unas gráficas de líneas envolventes para obtener un límite superior de probable ingestión de aire por vórtices en sistemas de bombeo con geometrías y flujo similares a las condiciones analizadas por este investigador.

También el funcionamiento de turbinas es sensible al flujo en remolino y ni que decir de los vórtices. Su acción en tales máquinas resulta en una operación fuera de diseño, debido al desbalance de carga en los rodetes por el flujo en remolino y a la distribución desigual de éste. De esta forma se tiene una pérdida de eficiencia, y posiblemente en cavitación y vibración.

La manifestación de los vórtices en turbinas hidráulicas ocurre en la tubería de aspiración de las mismas [Nishi M. et al (1982)], [Guarga R. (1985)]. Si bien la longitud de la tubería es suficientemente larga, la fricción de pared puede eliminar remolinos pequeños antes de que este alcance a la turbina [Baker D. W. y Sayre C. L. (1974)] [Hecker G. E., Larson J. (1983)], es importante, por lo menos, disminuir la fuerza de los vórtices, ya que puede presentarse, como en otras estructuras de entrada que descargan a un conducto cerrado, condiciones de flujo lento dentro de la tubería debido a la acumulación de aire atrapado. Así también suelen ocurrir pulsaciones del flujo por la formación de grandes bolsas de aire.

Generalmente las oscilaciones de presión causadas por los vórtices y el flujo en remolino en la tubería de aspiración de las turbinas hidráulicas son mucho más rápidas que en otras estructuras hidráulicas, debido a las altas velocidades del flujo ahí desarrolladas.

---

<sup>7</sup> Véase referencia electrónica: Alden Research Laboratory, (2000).

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

De esta manera, de un análisis espectral de presiones experimentales las amplitudes máximas (r.m.s.) características de un vórtice en la tubería de aspiración van de los 6 a los 16 Hz [Guarga *et al* (1985a)], como se muestra, por ejemplo, en la figura 2.1.3.

En las estructuras de entrada de turbinas de bulbo en estaciones de fuerza sin almacenamiento, ocurren corrientes de recirculación y zonas de estancamiento; lo cual produce un inadecuado transporte del material flotante aguas arriba de la rejilla de la obra de captación de la casa de máquinas. Entonces, cuando ocurren vórtices con embudo de aire pueden succionar gran cantidad de basura hacia la estructura de entrada de la turbina. Esta basura (como bolsas de plástico) se alojan en los rodetes, lo cual perjudica el movimiento uniforme de la turbina como lo reporta Bizaz E. *et al.* (1976) en la hidroeléctrica Reuss cerca de Bremgarten Zufikon, Suiza.

En muchas estructuras hidráulicas tales como compuertas de vertedores (como el caso de estudio), compuertas en esclusas, canales de aproximación hacia turbinas hidráulicas; existe un flujo de aproximación por un canal de acceso o de alimentación, donde el efecto de la circulación del flujo sobre la estructura de entrada es difícil de determinar [Brochard (1983)].

Gulliver J.S. y Rindels A. (1987) han estudiado el efecto de un canal de acceso sobre los vórtices que se presentan en una estructura de entrada vertical (figura 2.1.4). La circulación del flujo de llegada, dicen éstos investigadores, es función del ángulo de aproximación y de la relación largo-ancho del canal de llegada; por lo que han propuesto una expresión para determinar la sumergencia crítica para evitar tener vórtices débiles (tipo 3<sup>8</sup>).

<sup>8</sup> Véase sección 4.2

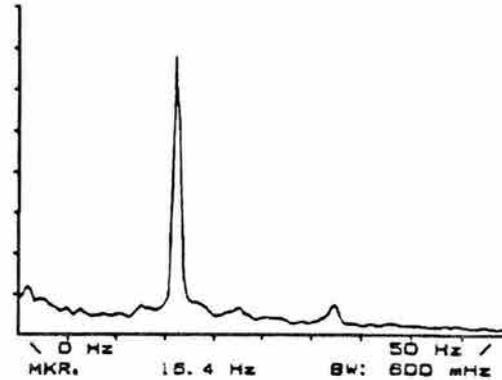


Figura 2.1.3 Análisis espectral de presiones a 40 mm de la salida del tubo de aspiración de la turbina, P.H. La Angostura (modelo). Guarga F. R. *et al* (1985a).

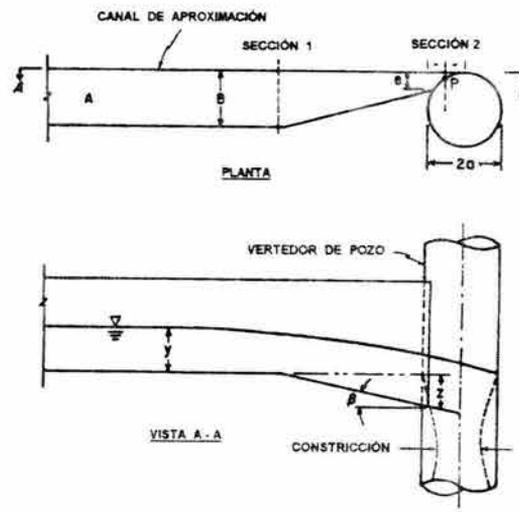


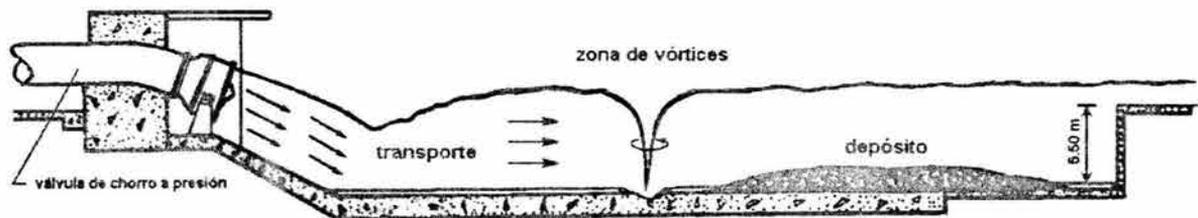
Figura 2.1.4 canal de aproximación tangente a la estructura de entrada. Jain C. S., (1984).

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

Una variante de los canales de acceso, son los canales de aproximación tangentes a las estructuras de entradas tangenciales, como en los sistemas de captación de aguas en línea [Jain S.C. (1984)] como puede verse en la figura 2.1.4. Estas estructuras son bastante efectivas en producir vórtices en estructuras de entrada verticales, como en las obras de toma o en los vertedores de pozo o embudo, donde producen diversos problemas en la eficiencia de descarga, debido a la entrada notable de aire que tiene el fenómeno [Jevdjevich V., Levin L. (1953)] [Slisky S.M., Kuznetsova E.V. (1979)].

Jain S.C. (1984) determinó una relación carga-descarga para estas estructuras a fin de evitar vórtices, así como el diámetro de la estructura de entrada, para que el corazón de aire de un vórtice formado en ella sea máximo permisible (25 % del área de la estructura de entrada). La primera verificada satisfactoriamente con datos experimentales, no así la segunda, en la que interviene aire en el fenómeno.

En el fenómeno de vórtices se ha observado que en muchos casos va acompañado de chorros del flujo, por ejemplo, durante la descarga de agua por medio de válvulas de chiflón en tanques amortiguadores, como fue el caso ocurrido en la presa Alvaro Obregón, Son. México [Levi E. L. (1990) (véase figura 2.1.5)].



*Figura 2.1.5 Transporte, depósito y zona de vórtices en un modelo del tanque amortiguador de la presa Alvaro Obregón Levi L. E., (1991).*

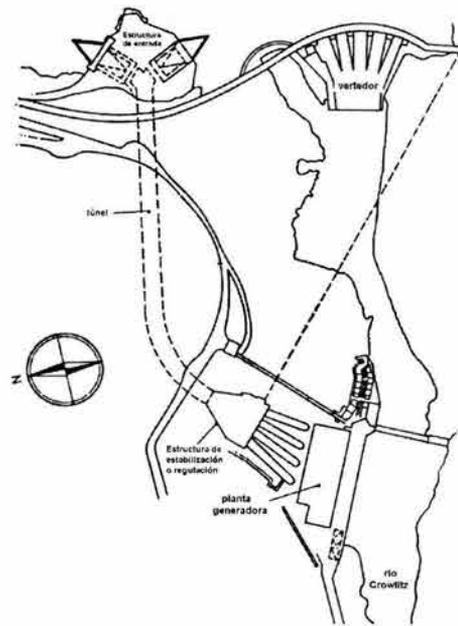
Donde por efecto de la geometría de la estructura y por la disposición de sedimento en el tanque amortiguador, se esperaban vórtices horizontales, sin embargo, éstos fueron de eje vertical, cuya acción causó la falla en el revestimiento de concreto en el tanque amortiguador en la zona donde los vórtices se presentaron y donde casi un metro de profundidad del piso del tanque fue socavado.

Así como se pueden presentar vórtices en régimen subcrítico aguas arriba de una estructura de entrada, que descarga el flujo en régimen supercrítico (figura 3.2.1) a un conducto cerrado, como ocurre aguas arriba de compuertas en sistemas hidroeléctricos [Herstrom et al (1982)]; donde las compuertas descargan el flujo hacia los túneles de fuerza que alimentan las turbinas (véase figura 2.1.6). Este también es el caso de las compuertas de un vertedor de excedencias (el caso de estudio).

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

A diferencia de los reportes y estudios sobre vórtices en estructuras de entrada fijas (obras de toma, vertedores de pozo o cárcamos de bombeo, etc) encontrados en la literatura técnica; los estudios acerca de la ocurrencia de vórtices aguas arriba de las compuertas de un vertedor son escasos. Posiblemente se deba a que ocurren con menor frecuencia en estas obras o que los daños sean menores o porque este problema es mas complejo que las obras hidráulicas citadas.

Un caso sobre la presencia de vórtices aguas arriba de compuertas, fue el reportado en la presa Folsom, CA, U.S.A. [Higgs J. A. (1999)] (véase figura 2.1.7). El vertedor servicio ordinario de la presa tiene 5 compuertas radiales de 12.8 m de ancho por 15.3 m de alto. Como consecuencia de una falla parcial de la compuerta número 3 en 1995, se construyeron vigas horizontales guía y un muro de cierre para revisar y reparar la compuerta dañada.



*Figura 2.1.6 Planta general del sistema hidroeléctrico Mayfield MN, U.S.A. Herstrom L. A. et al (1982).*



*Figura 2.1.7 Vista aérea de la Presa Folsom CA, U.S.A., U. S. B. R., Higgs A. J. (1997).*

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

---

Esta condición de operación asimétrica en las compuertas incrementó la ocurrencia y magnitud de los vórtices, aún con una apertura pequeña (0.9 m) y carga de 8.5 m en las compuertas operadas. Y fue mayor la magnitud de los vórtices (con corazón de aire) conforme la carga era mayor (12.8 m) así como la abertura (3 m) de las compuertas.

En este último caso, se reportaron vórtices de casi 2 m de diámetro adyacentes a las pilas a unos 3.7 m aguas arriba de las compuertas véase figura 2.1.8. También se reportó ruido fuerte debido las pulsaciones del corazón de aire de los vórtices y vibraciones en las vigas de las compuertas. Debido a la extensión del embudo de aire hasta la abertura de la compuerta provocó una descarga dispersa e irregular hacia aguas debajo de la compuerta, conocida como “cola de gallo”.

Para complicar más las cosas, en las estructuras hidráulicas pueden producirse vórtices subsuperficiales<sup>9</sup>, los cuales pueden ser igual o mas grandes que los superficiales Sweeney C. E. *et al* (1982). Este tipo de vórtices también llamados vórtices sumergidos o “de pared” involucran un patrón de remolino coherente entre una frontera (una pared o el piso) y la estructura de entrada.

A diferencia de la presión en el embudo de los vórtices superficiales, la que ocurre en el embudo de los vórtices sumergidos, suele ocurrir por debajo de la presión atmosférica con valores grandes de circulación del flujo.

Los vórtices sumergidos generan igual o una mayor cantidad de remolino en la estructura de entrada que los vórtices superficiales. Ambos tipos de vórtices pueden ocurrir simultáneamente, en cuyo caso la cantidad de remolino debida al vórtice sumergido puede ser ocultada por la correspondiente al vórtice superficial, ya que el primero es más difícil de detectar.



*Figura 2.1.8 Vórtices con embudo de aire, observados aguas arriba de las compuertas de la presa Folsom CA. U.S.A., U. S. B. R. Higgs A. J. (1997).*

---

<sup>9</sup> Véase capítulo 3.

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

Cabe destacar que en el caso de estudio también se presentaron este tipo de vórtices, como se menciona en el capítulo 4, los cuales salen del alcance de este trabajo.

También se presentan vórtices en compuertas de tambor o abatibles en vertedores que operan con cargas aguas abajo y aguas arriba simultáneamente [Naudascher E. (1961)]. Este tipo de vórtices se origina principalmente por la caída del agua sobre el cimacio, que causa la recirculación del flujo debajo de la vena líquida de caída. Este fenómeno causa violentas vibraciones, las cuales se deben a la conjunción de dichos vórtices y a la caída y choque del agua. Lo que causa un cambio periódico del patrón de flujo que ocurre aguas abajo en la descarga.

Un caso de lo anterior se tiene en el estudio (en modelo 1:20) del comportamiento dinámico en compuertas radiales, que regulan la descarga de los túneles del sistema de irrigación de Urfa, Turquía, que se ilustra en la figura 2.1.9. Donde el rango de frecuencias dominantes (considerando rígidas las compuertas), con grandes aperturas y descarga sumergida en el tanque amortiguador fueron frecuencias bajas (menores a 1 Hz) mientras que para aperturas pequeñas las frecuencias dominantes estuvieron en el rango de 1 a 4 Hz [Bayazit M., Avci I., (1990)].

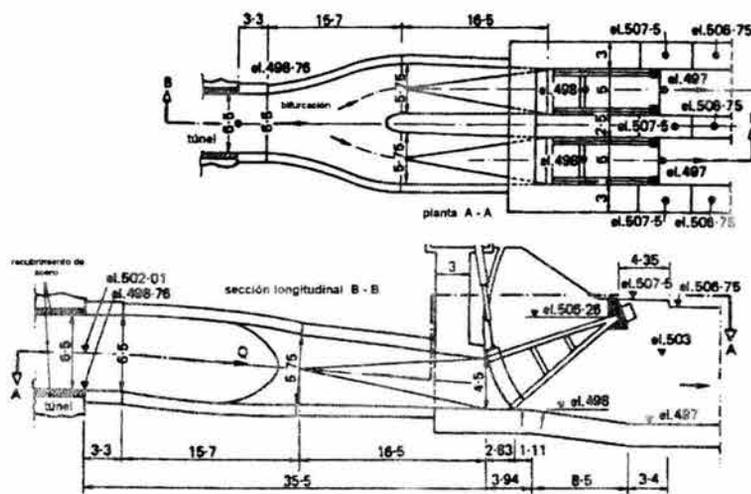


Figura 2.1.9 Planta y sección longitudinal de los túneles del sistema de irrigación Urfa, Turquía. Bayazit M., Avci I., (1990).

Un caso de vórtices más complejo que el que ocurre en las compuertas de un vertedor, es el que se puede presentar en las compuertas de las esclusas de los sistemas de navegación en ríos, en donde se tiene una gran cantidad de factores interactuantes en el cauce, incluidos los vórtices de eje vertical y los trenes de vórtices, que pueden producir fuertes vibraciones provocando así la falla por fatiga de varios elementos estructurales de las compuertas, como el caso reportado en el sistema de navegación fluvial McClellan-Kerr, Ark., U.S.A. [Schmidgall T. (1972)].

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

Aunque en este caso los daños eran provocados principalmente por la separación de la capa límite y los trenes de vórtices producidos aguas debajo de labio inferior de las compuertas, como consecuencia de aberturas pequeñas de éstas.

### 2.2 Estructuras Disipadoras de Vórtices

Aunque en la etapa de diseño de una obra hidráulica se contemple impedir la formación de vórtices, en muchos casos, no es posible evitarla. En estos casos se han empleado diversos dispositivos para tal fin.

La mayor parte de los dispositivos supresores de vórtices se han hecho para estructuras de entrada fijas, es decir dónde el área de descarga (vertedores de pozo o embudo, obras de toma, turbinas, tubos verticales [Borghesi S.M. (2000)], etc.) o de succión (sistemas de bombeo) es constante.

Así, por ejemplo, en el laboratorio de Hidráulica, Hidrología y Glaciología del Instituto Federal de tecnología [VAW(2003)] en Zurich, Suiza; se han diseñado y puesto en servicio diferentes dispositivos supresores de vórtices en este tipo de estructuras de entrada como en la presa El Cajón, Honduras, en donde se empleó una torre para estabilizar los vórtices y reducir la rotación de los mismos al succionar agua de la zona muerta próxima a la entrada [Schulthess D. (1985)], como se muestra en la figura 2.1.10.

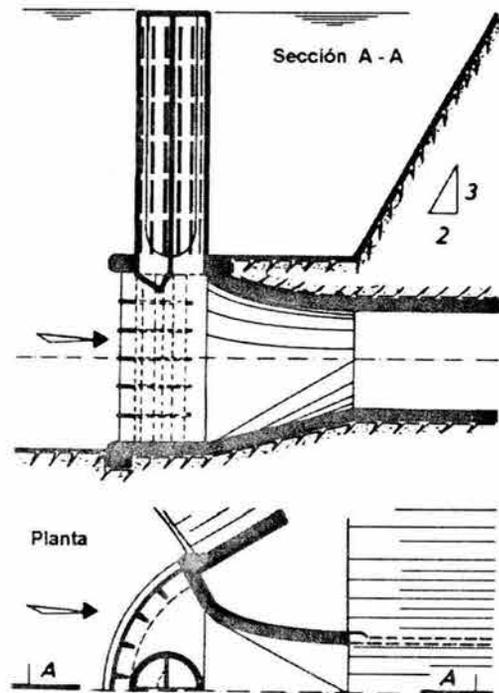


Figura 2.1.10 Planta y sección longitudinal, de la obra de toma de la presa El Cajón, Honduras. VAW, Schulthess D., (1985).

En la presa de la hidroeléctrica Reuss Bremgarten, Suiza [Bizaz E. *et al.* (1976)], se construyó un dispositivo llamado inyector, el cual tiene varias funciones y consiste en un pozo formado en la cara aguas arriba de la estructura de entrada y un tablero instalado también en la cara aguas arriba de la estructura (véase figura 2.1.11).

El efecto de succión se logra mediante el incremento en la carga de velocidad en la zona del inyector, lo cual provoca una corriente cerca de la superficie de agua hacia el frente de la cara, aguas arriba de la estructura de entrada.

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

Esto asegura un movimiento seguro de los objetos flotantes lejos de la cara de la rejilla en la entrada del inyector; además de ser una medida efectiva que evita la formación de vórtices.

En la hidroeléctrica Luddington, U.S.A., [ Comninellis, (1973) ] el dispositivo construido logra suprimir los vórtices mediante la elongación de las líneas de corriente y la eliminación de zonas muertas, por medio de una pared deflectora con 36 perforaciones .

En la presa Grand Coulee, WA, U.S.A. [Dexter y Zeigler (1978) ] se redujo la magnitud de los vórtices al producir un aumento de pérdidas y eliminar las zonas muertas de agua, empleando una reja semicilíndrica empotrada en la obra de toma

En el proyecto de la obra de toma multinivel de la presa Glen Canyon [Vermeyen T. B. (1999)] se probaron diferentes dispositivos supresores de vórtices: una tapa de baja porosidad, una balsa sólida flotante semicircular con el mismo radio de la rejilla superior de la toma, paneles rectangulares cubriendo una parte de la rejilla de la toma instalados en las vigas de cierre y una tapa semicircular sólida, siendo esta última la mejor alternativa (véase figura 2.1.1). Con dicha estructura se presentaron vórtices más débiles que aquellos ocurridos en la toma sin dispositivo, sin embargo, con tal dispositivo se reduce el área de captación de la estructura.

Los dispositivos disipadores de vórtices empleados en estructuras de entrada móviles son menos numerosos, por no decir escasos.

Algunos de ellos se han empleado en compuertas que descargan hacia los túneles de fuerza de las plantas hidroeléctricas, como el caso de proyecto hidroeléctrico Mayfield MN. U.S.A.; donde se probaron diferentes dispositivos supresores de vórtices.

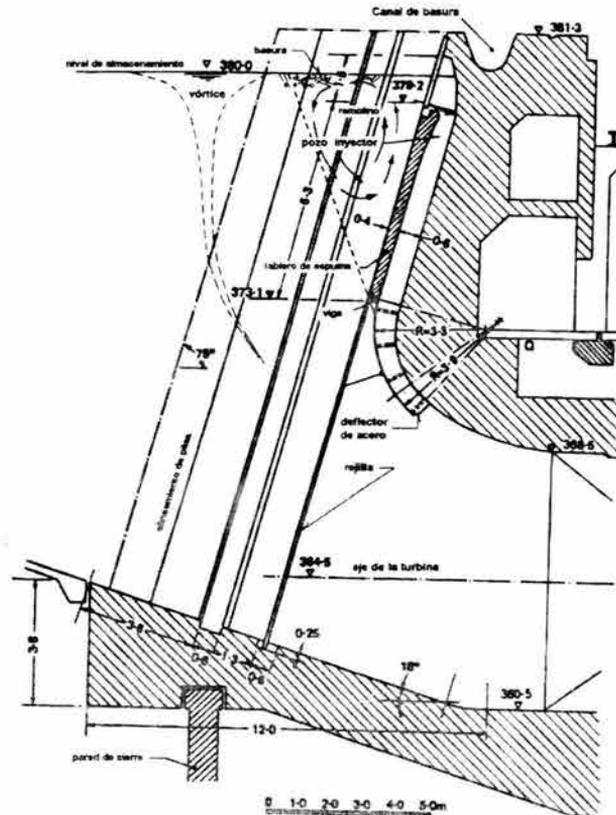


Figura 2.1.11 Supresor (inyector) de vórtices de la P.H. Reuss, Bremgarten, Suiza. VAW, Bizaz E. et al., (1976).

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

Siendo el más efectivo y además uno de los más compatibles con el arreglo de compuertas (véase figura F2.1.12) una pared vertical en forma de cuña, la cual sería construida aguas arriba de cada estructura de entrada [Herstrom et al (1982)].

En el caso de la presa Folsom, CA, U.S.A. [Higgs J. A. (1997)], comentada en la sección anterior, para evitar las vibraciones y efectos colaterales en las compuertas del vertedor, se investigó la manera de eliminar o reducir los vórtices modificando la geometría de la nariz de las pilas. Para tal fin se empleó un programa computacional de dinámica de fluidos (CFD) para probar diferentes geometrías. Los efectos negativos producidos por los vórtices fueron reducidos con un cono de nariz elíptico de 1.1 m por 2.8 m en las pilas (véase figura 2.1.13). Sin embargo, los vórtices no se eliminaron completamente para todas las condiciones de flujo con la modificación propuesta.

Por lo mencionado anteriormente, se puede decir que existen tantas variedades de dispositivos disipadores, como situaciones en donde ocurren vórtices.

Actualmente, en algunas estructuras hidráulicas se considera la formación de vórtices desde la etapa de diseño, como en el diseño final de las compuertas del vertedor de la central hidroeléctrica Langkampfen, Austria [VAW, (2003)]. Donde se analiza la respuesta estructural de varios dispositivos, como paneles y celdas, ante la acción de los vórtices.

En este trabajo se proponen dispositivos disipadores semifijos (propelas) y uno flotante, este último inspirado en la costumbre de colocar barcasas en las hidroeléctricas [Reddy Y. R., Pickford J., (1974)] o tambos, aguas arriba de las compuertas para intentar destruir los vórtices.

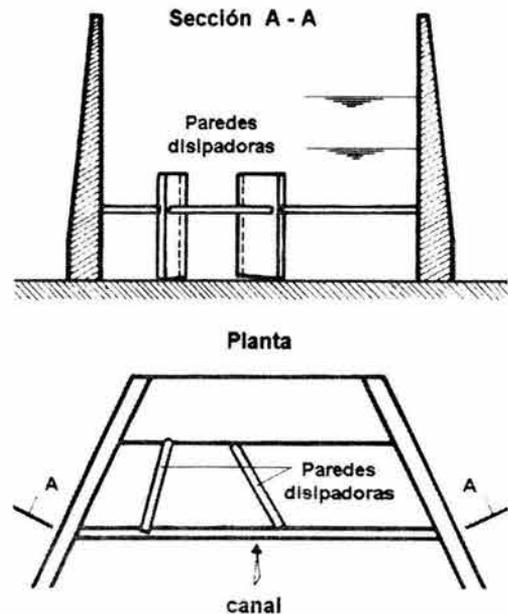


Figura 2.1.12 Supresor (inyector) de vórtices de la P.H. Mayfield, Min. U.S.A.. Herstrom et al., (1982).

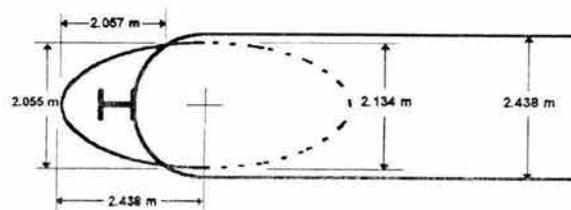


Figura 2.1.13 Geometría modificada de pilas para aminorar la magnitud de vórtices en la presa Folsom CA. U.S.A., U.S.B.R., Higgs J. A., (1997).

# Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

---



## 3 Estado del arte

En este capítulo se presenta de manera breve algunos de los tópicos más importantes acerca de los vórtices presentes en fluidos densos (líquidos), especialmente en agua. Se comentan las condiciones en las que se producen los vórtices, así como una descripción de los mismos. Se enuncia una clasificación general de los vórtices y de las estructuras llamadas de entrada propensas a la aparición de este fenómeno. Se mencionan algunos aspectos básicos acerca de las investigaciones teórico-experimentales sobre el tema, que se emplean en este trabajo, incluido el importante aspecto del efecto de escala en la modelación de vórtices.

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

### 3.1 Causas que generan a los vórtices

Se ha observado que la causa más frecuente que genera vórtices en una estructura hidráulica es una excentricidad del flujo de aproximación relativa a la obra de entrada y la conectada a ella, que bien puede ser un conducto cerrado<sup>1</sup> o abierto. Esta excentricidad es provocada por la dinámica del flujo de aproximación, el confinamiento de éste por la geometría de las fronteras de la obra de entrada y de la obra adyacente a ésta.

Durgin y Hecker (1978) definen tres causas fundamentales que producen vórtices, que son:

- 1 Flujo de aproximación o de llegada no uniforme a la estructura de entrada debido a la orientación geométrica del canal de aproximación (véase figura 3.1.1(a)) o debido a los patrones de las líneas de corriente del flujo generadas por obstrucciones, por ejemplo, pilas.
- 2 Existencia de esfuerzos cortantes debidos a fuertes gradientes de velocidad, incluyendo separación de capas límite, las cuales son inherentemente rotacionales (véase figura 3.1.1(b)).
- 3 Olas rotacionales generadas por objetos u obstrucciones en el camino del flujo de aproximación a la estructura de entrada (figura F3.1.1(c)).

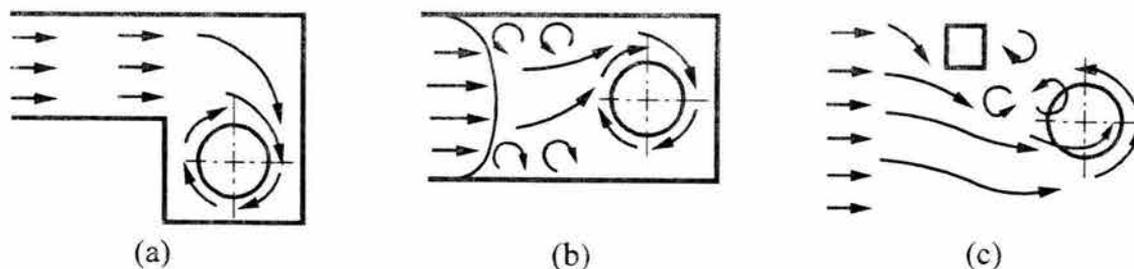


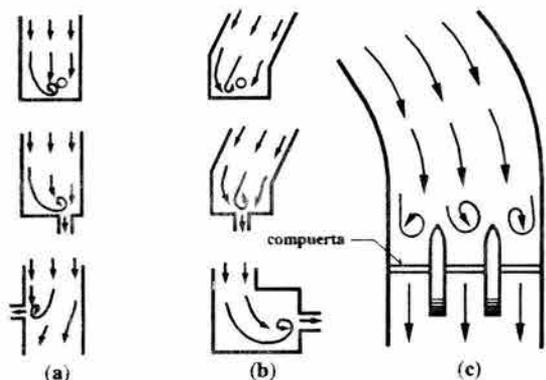
Figura 3.1.1 Causas de vorticidad: (a) Toma lateral (b) Gradientes de velocidad, (c) obstrucción (Durgin y Hecker, 1978).

Existen otras causas diversas, por ejemplo, la orientación de la obra de entrada relativa a un flujo de aproximación simétrico, condiciones del flujo de aproximación asimétricas debidas a irregularidades en el acabado de las fronteras, efectos desfavorables debidos a obstrucciones, (pilas o paredes divisorias), distribución no uniforme de velocidades causadas por separación de la capa límite, la acción del viento, oleaje, contracorrientes y otras razones, algunas de ellas todavía desconocidas, debido a la complejidad del fenómeno.

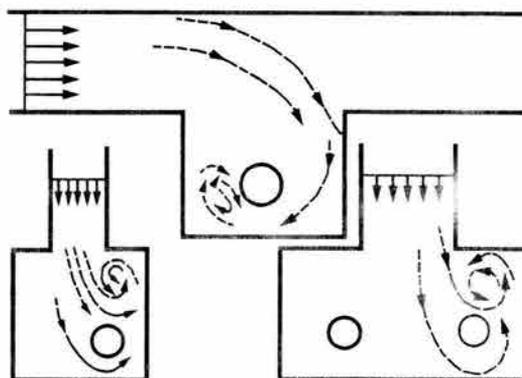
<sup>1</sup> Como se tiene en la mayoría de los casos y, hasta el momento, es el más estudiado.

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

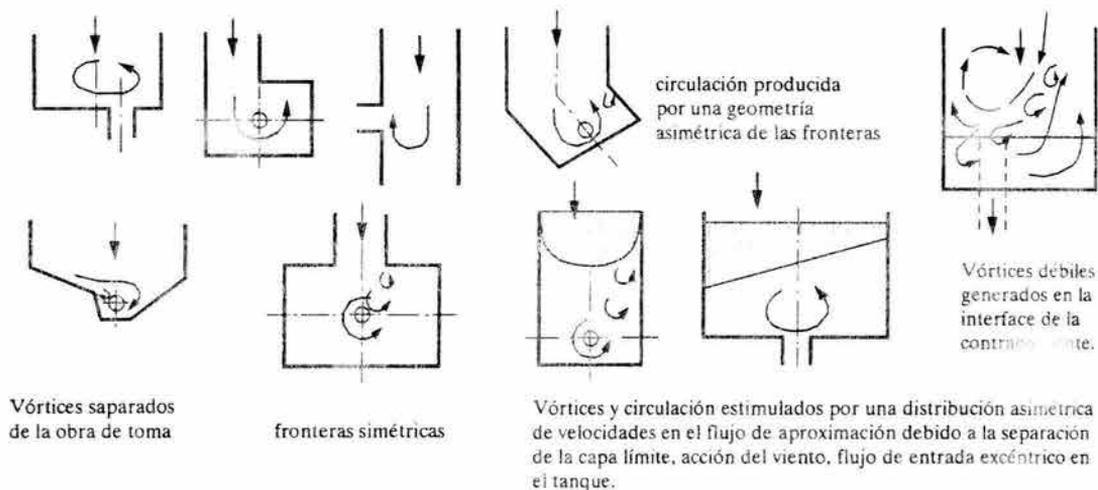
En la literatura se encuentran muchas ilustraciones esquemáticas, que muestran ejemplos de obras de entrada propensas a la formación de vórtices, como se muestra en las figuras 3.1.2 a la 3.1.4.



**Figura 3.1.2** Flujo rotacional causado por asimetría (a) y cambio de dirección (b) de las fronteras (Denny y Young, 1957). (c) causado por asimetría, cambio de dirección de las fronteras: descarga por medio de compuertas.



**Figura 3.1.3** Estructuras de estrada propensas a la formación de vórtices (Anwar, 1968)



**Figura 3.1.4** Varios ejemplos de formación de vórtices en condiciones del flujo de aproximación (Knauss, 1972)

# Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

## 3.2 Clasificación de las Estructuras de Entrada

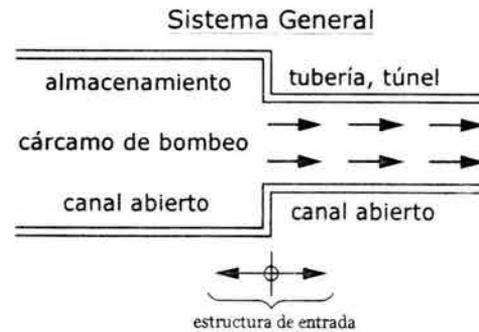
La figura 3.2.1 muestra las características generales de un sistema hidráulico de entrada. Con la "entrada" las condiciones de flujo pueden cambiar, de trabajar a superficie libre a presión<sup>1</sup>, o bien pueden permanecer trabajando como canal, como es el caso de los vertedores de cresta controlada.

Una clasificación breve de estas estructuras las divide en dos: las estructuras de entrada, propiamente dichas y las estructuras confinantes (cárcamos) de bombeo (figura 3.2.1).

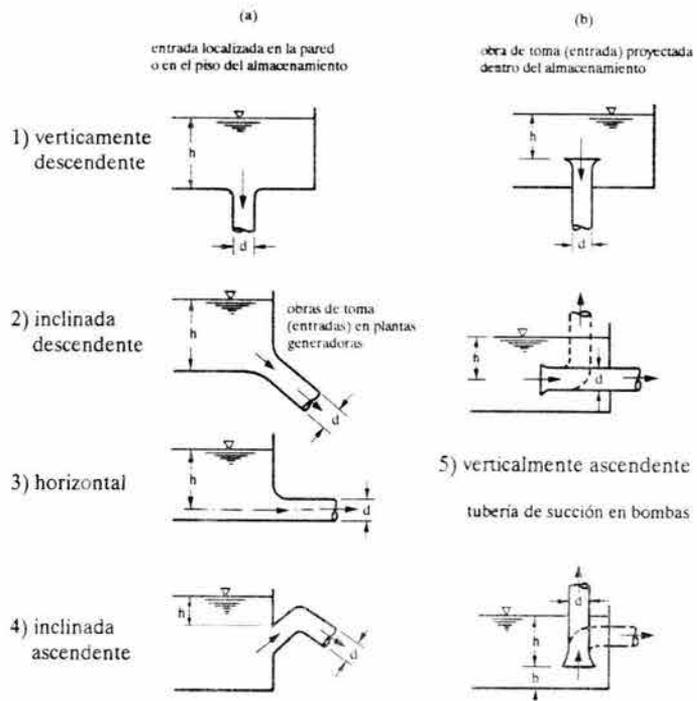
Las estructuras de entrada están asociadas con las plantas generadoras de energía eléctrica, especialmente en sistemas de almacenamiento o con diversas estructuras hidráulicas en presas, como son, por ejemplo, la obra de descarga de fondo o ciertos tipos de vertedores de cresta libre: vertedores de sifón, de pozo o embudo.

También se tiene una estructura de entrada en los vertedores de cresta controlada en las compuertas y en estructuras adyacentes a estas. Este último caso es el objeto de estudio en este trabajo.

En la figura 3.2.2 se muestra una subclasificación en base a dos elementos de diseño típicos.



*Figura 3.2.1 Características generales de una estructura de entrada*



*Figura 3.2.2 Tipos de estructuras de entrada respecto a su diseño, Knauss J., (1987).*

<sup>1</sup> Que es el caso más estudiado

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

El primero es una distinción relacionada, con la dirección u orientación de la estructura de entrada (Figura 3.2.2(a)). El segundo considera un arreglo estructural de la "entrada", ya sea que se encuentre localizado en el piso o las paredes de un tanque, o bien sea proyectado dentro del almacenamiento o cárcamo (Figura 3.2.2(b)).

### 3.3 Tipos de vórtices. Clasificación

En literatura existen diversas clasificaciones de vórtices sobre la base de determinadas especificaciones y descripciones. Entre las clasificaciones más representativas de vórtices son las que toman en cuenta:

- 1 La localización de la formación del vórtice con respecto a la estructura de entrada. Este criterio clasifica los vórtices en **1.a)** vórtices superficiales, los cuales comienzan y se presentan en la superficie libre de agua; son los responsables de posible entrada de aire así como de generar remolinos en el flujo (figura 3.3.1(a)). **1.b)** Vórtices sumergidos<sup>2</sup>, los cuales comienzan en el piso o las paredes del tanque aguas arriba y permanecen dentro del flujo; son responsables principales de la intrusión de remolino (figura 3.3.1(b)).
- 2 Dependencia del tiempo de la formación del vórtice. Existen **2a)** vórtices permanentes o estables, su formación es independiente del tiempo, por lo que la producción de remolinos en el campo del flujo de aproximación es establecida. **2b)** vórtices transitorios o inestables, su formación depende del tiempo y por ello resultan de un suministro no establecido de remolinos. Un ejemplo típico de este tipo de vórtices, es el que se presenta aguas arriba de las compuertas de un vertedor.

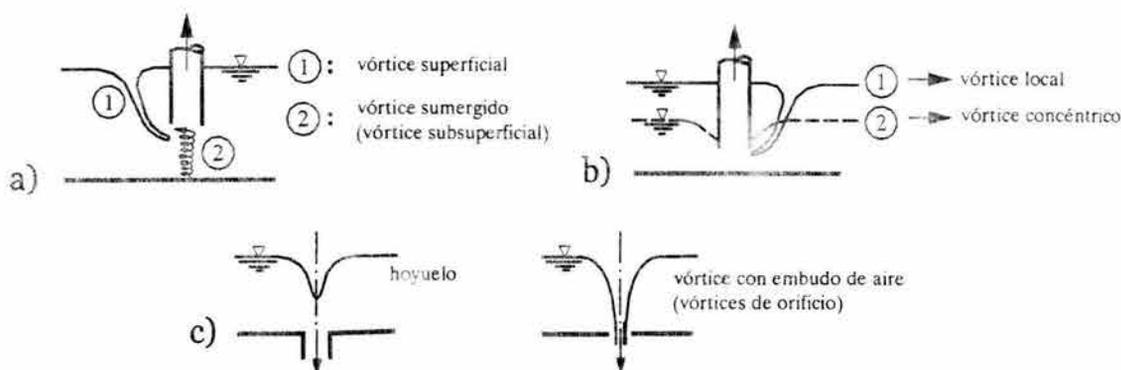


Figura 3.3.1 Tipos de vórtices por la ubicación donde ocurren y la forma adoptada por éstos, Knauss J., (1987).

<sup>2</sup> Llamados también vórtices subsuperficiales

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

---

### 3.4 Resultados teórico-experimentales básicos sobre vórtices

Debido a que la ocurrencia de vórtices sucede en una amplia variedad de condiciones en el flujo y geometrías en sus fronteras, causa también, por parte de los investigadores, una cantidad de opiniones encontradas y malas interpretaciones de resultados.

La mayor parte de las investigaciones experimentales realizadas sobre vórtices se han realizado en almacenamientos cilíndricos, en donde la estructura de entrada se encuentra al centro o en el piso con una circulación dada, por citar sólo algunos estudios: [Dagget y Keulegan (1974), [Jain (1978)], [Levi E. (1981)].

Algunos resultados obtenidos de tales estudios son empleados para geometrías y condiciones más complejas del flujo vorticoso, como se hace en este trabajo.

Se ha realizado el estudio de vórtices con diversos parámetros en forma dimensional o adimensional que describen la formación de éstos [Hebaus (1979), Odgaard (1986)], pero aún está en debate cuales son los más representativos del fenómeno.

Además, en muchos casos tales parámetros son difíciles de medir, ya no se diga en prototipos, sino en modelos, como el de la P.H. La Angostura; empleado en este trabajo y que se menciona en la sección 4.1.

Por lo anterior, en este trabajo se emplean sólo algunos de dichos resultados teórico-experimentales, principalmente los referentes a los efectos de escala y sumergencia, que se citan a continuación.

### 3.5 El efecto de escala

Aunque el predominio de las fuerzas inerciales y gravitatorias se reduce en forma similar en modelos escalados con base en el número de Froude; cuando las escalas son pequeñas, las fuerzas viscosas y las de tensión superficial no se reducen de forma similar. Así, la influencia extra de dichas fuerzas en el modelado de vórtices (sobretudo con corazón de aire) es llamado "*Efecto de escala*", del cual se han realizado numerosos estudios y propuestas para aminorar tales efectos.

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

---

Por ejemplo, para evitar los efectos de escala, es importante que el número de Reynolds ( $Re$ ) sea suficientemente grande. Anwar H. O. y Weller J. A. (1978), así como Daggett L. L. y Keulegan G. H. (1974), proponen un valor mínimo de  $Re = 3 \times 10^4$ ; como se verá en el capítulo 4.3, el modelo físico empleado en este trabajo cumplió con esta condición.

Considerando lo anterior, algunos investigadores como Zajdlik M., (1977), han propuesto incrementar las velocidades de aproximación de varias formas, hasta usar velocidades del prototipo en el modelo. Sin embargo, alterando la similitud hidráulica de esta forma pueden producirse vórtices exagerados que no son compatibles con las observaciones hechas con el prototipo, como lo demuestran Dillon G. S. (1979) y Linford A. (1965) en su estudio en un modelo de la presa Kariba.

Ante las dificultades mencionadas, la última prueba para conocer la capacidad de un modelo hidráulico para predecir fielmente las características de los vórtices, es comparar los datos obtenidos en el modelo con las observaciones correspondientes al prototipo.

En cuanto a la demostración de la influencia que tiene la tensión superficial (número de Weber) en las características de un vórtice es aún más difícil de probar. Según estudios de Daggett L. L. y Keulegan G. H. (1974) y Jain *et al* (1978) los cambios en un flujo con vórtices con corazón de aire (coeficiente de descarga) varían poco ante variaciones en la tensión superficial del fluido. En cambio, otros investigadores como Yildirim N. y Jain S. C., (1981) sostienen que el efecto de la tensión superficial puede no ser despreciable.

Por lo mencionado anteriormente, el problema de la influencia de la tensión superficial en los vórtices aún se considera no resuelta.

Sirva de consuelo mencionar que Hecker G.E. (1981) analizó y seleccionó de una gran base de datos, adecuadas comparaciones modelo-prototipo de vórtices superficiales en varias obras hidráulicas. Las escalas de los modelos seleccionados fueron desde 1/22 hasta 1/122. En general los modelos diseñados y escalados con base en el número de Froude no distorsionados que tuvieron vórtices débiles o fuertes, presentaron vórtices débiles o fuertes, respectivamente, en el prototipo correspondiente.

# Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

## 3.6 La sumergencia en vórtices

Este es uno de los aspectos fundamentales en la formación de los vórtices en estructuras hidráulicas. La sumergencia crítica es la profundidad a la que debe encontrarse la estructura de entrada para evitar la entrada de aire excesiva debido a los vórtices superficiales, así como para reducir la producción de los llamados vórtices sumergidos.

Dado que la presencia de un corazón de aire en un vórtice es un indicativo de la magnitud de éste, la sumergencia crítica permite, en alguna medida, evitar tener vórtices fuertes.

Hasta el momento la determinación del valor crítico de la sumergencia es inexacta, pese a que existen diversos métodos que intentan resolver el problema. En general, estos métodos analizan el comportamiento del flujo en la estructura de entrada ante diversas cargas, por medio del uso combinado de números adimensionales de variables representativas del fenómeno.

Estos métodos consideran la influencia que tiene la estructura de entrada, en especial su orientación como se muestra en la figura 3.6.1. En dicha figura el parámetro es el ángulo formado por el flujo principal inmediatamente antes y después de la estructura de entrada. También se observa cómo esta definida la sumergencia ( $h_s$ ). La combinación de  $h_s$  junto con el diámetro ( $d$ ), en caso de una estructura de control circular, o una dimensión lineal típica para una sección de entrada no circular, define la sumergencia relativa ( $h_r = h_s/d$ ). En este trabajo se considera que  $d = 4.57R_h$ , donde  $R_h$  es el radio hidráulico de la abertura de la compuerta, como se menciona más adelante.

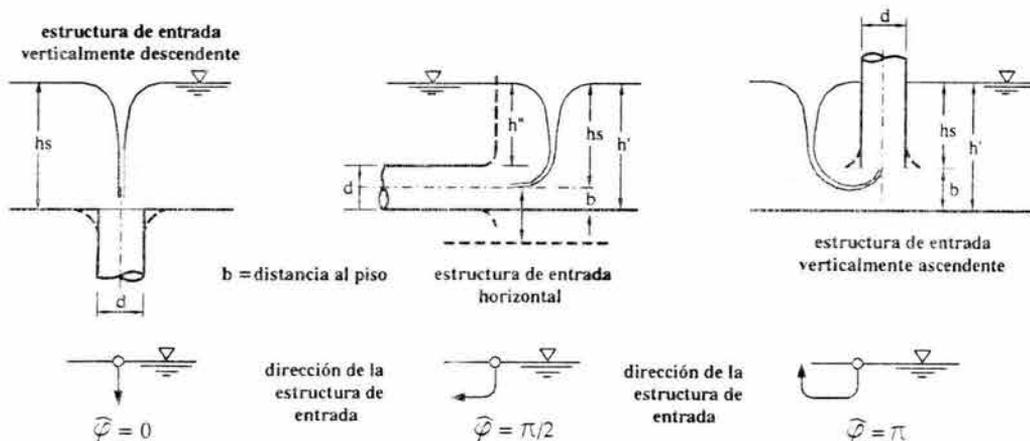


Figura 3.6.1 Definición de la dirección de la estructura de entrada ( $\hat{\varphi}$ ) y la sumergencia ( $h_s$ ). Knauss J., (1987).

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

---

Siendo la velocidad de entrada  $v_e = \frac{4Q}{d^2 \cdot \pi}$ , entonces los números adimensionales

número de Froude, número de Reynolds y número de Weber, quedan respectivamente:

$$Fr = \frac{v}{\sqrt{g \cdot d}} \quad (3.6.1)$$

$$Re = \frac{v \cdot d}{\nu} \quad (3.6.2)$$

$$We = \sqrt{\frac{\rho \cdot d}{\sigma}} \quad (3.6.3)$$

Además para describir la influencia de la circulación se emplea el "número de circulación", es decir:

$$N_c = \frac{c}{v \cdot d} \quad (3.6.4)$$

donde

$c = v_t \cdot r$  constante de circulación.  $V_t$  es la velocidad tangencial en la entrada de la estructura.

De esta manera las ecuaciones disponibles en la literatura técnica son de la forma:

$$(hs/d)_{cr} = f(\phi, Fr, N_c, Re, We)$$

J. Knauss(1987) propone, con base en los estudios realizados en prototipos por Gordon (1970), Pennino y Hecker (1979), Hecker(1981), que para estructuras de entrada pequeñas y medianas donde  $Fr \geq 1/3$ , se use la ecuación

$$\frac{hs}{d} = 2 \cdot Fr + \frac{1}{2} \quad (3.6.5)$$

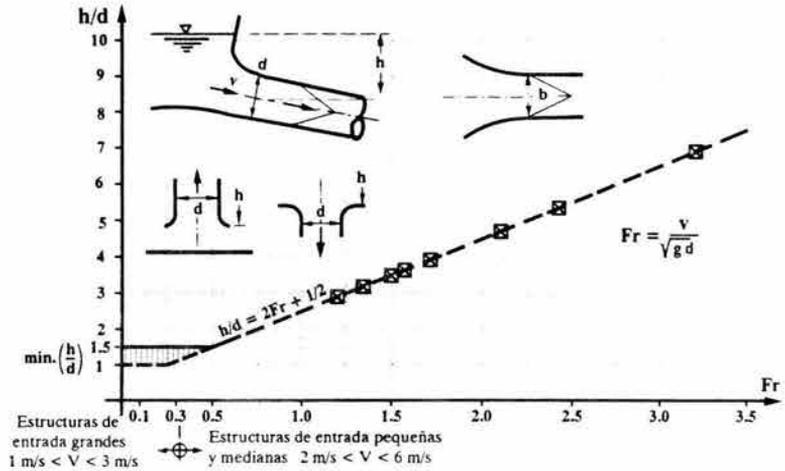
Para estructuras de entrada grandes donde  $Fr \leq 1/3$  en plantas generadoras de energía eléctrica, especialmente en sistemas de almacenamiento por bombeo, Knauss recomienda una sumergencia de 1 hasta de 1.5 veces la altura de la entrada.

La dirección de la estructura de entrada influye en la longitud de vórtice en condiciones críticas, como se ilustra en la figura 3.6.1. Donde la circulación y la longitud del vórtice se

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

incrementa de izquierda a derecha, contrario al valor de la sumergencia debido al largo recorrido de las líneas de corriente vorticosas que dificulta su desarrollo.

Knauss (1987) reunió algunas de las expresiones obtenidas por Daggett y Keulegan (1974), Jain *et al* (1978), Anwar *et al* (1978) y Anwar y Amphlett (1980), para el cálculo de la sumergencia crítica para diferentes direcciones de la estructura de control. Estas comparaciones se resumen en la figura 3.6.2, en donde se corrobora la influencia que tiene la dirección de la estructura de entrada.



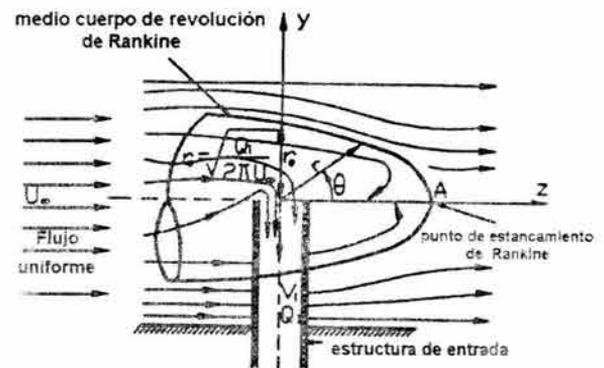
**Figura 3.6.2 Sumergencia recomendada para estructuras de entrada, sin considerar dispositivos supresores de vórtices Knauss J., (1987).**

Existen otras formulas mas sofisticadas, por ejemplo,

las que proponen Odgaard (1986) para calcular la sumergencia crítica en estructuras de entrada en almacenamientos (al igual que las fórmulas mostradas en la figura anterior) o en terminaciones ciegas de canales [Gulliver y Rindels (1987)]. Sin embargo, estas fórmulas involucran la circulación de entrada, la viscosidad o la tensión superficial, lo cual las vuelve complicadas y difíciles de usar.

A diferencia de las fórmulas anteriores, Yildirim y Kocabaş (1995) en sus investigaciones analíticas y experimentales proponen una expresión simple para el cálculo de la sumergencia crítica en un canal con flujo uniforme con varias estructuras de entrada (tipo vertedores de pozo), condiciones más parecidas al flujo a través de compuertas.

La solución que dan estos autores se basa en el análisis del flujo potencial de la superposición de un sumidero y un flujo uniforme, que da como resultado el llamado *ovoide* de Rankine, que divide el flujo en dos regiones: la región del flujo que entra en la estructura de entrada, y la que no lo hace (véase figura 3.6.3).



**Figura 3.6.3 Medio cuerpo de Rankine y la formación de un vórtice Yildirim N., Kocabaş (1995).**

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

---

Los experimentos realizados por Yildirim y Kocabaş han mostrado que la sumergencia crítica se alcanza cuando la frontera límite del ovoide o cuerpo de Rankine alcanza la superficie libre del agua directamente arriba del centro de la estructura de entrada. Esta distancia es el radio de lo que los autores llaman *superficie esférica crítica de sumidero* (CSSS), que es una simplificación del ovoide de Rankine.

Para un fluido real el valor de la sumergencia crítica teórica calculada por estos investigadores, la incrementan en un 10% , quedando la ecuación:

$$\frac{hs_c}{d_i} = 0.55 \sqrt{C_d \cdot \frac{v_e}{U_\infty}} \quad (3.6.6)$$

La aplicabilidad de la ecuación anterior esta acotada de la manera siguiente: el límite inferior, es decir, para velocidades altas en las que la teoría ya no funciona bien si:

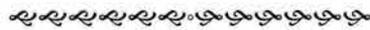
$$\frac{hs_c}{d_i} < 0.5 \quad \text{y} \quad \frac{C_d \cdot v_e}{U_\infty} < 2$$

Mientras que en el límite superior no hay problema, pues esta expresión tiene buenos resultados para estructuras de entrada en almacenamientos estáticos de agua, según Yildirim y Kocabaş (1998).

Aunque la sumergencia crítica es un parámetro que ayuda a evitar tener vórtices fuertes, existen otros factores (como los mencionados al inicio de la sección 3.1), que proporcionando las condiciones adecuadas al flujo, pueden ser, en algunas ocasiones, mas efectivas que la sumergencia.

# Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

---



*Son vanas y están plagadas de errores las ciencias que no han nacido del experimento, madre de toda certidumbre.*

*Leonardo Da Vinci*



## 4 Resultados y Análisis Experimental

Como se ha mencionado en el capítulo 3, la aparición de vórtices aguas arriba de las compuertas de un vertedor es un fenómeno completamente tridimensional, que requiere de considerar esta dimensión para su adecuado estudio. Sin embargo, con los modelos teóricos actuales implementados a modelos numéricos 3D no es posible tomar en cuenta todos los factores que causan e interactúan durante el fenómeno de los vórtices, ni siquiera se conoce satisfactoriamente el comportamiento dinámico del mismo. Razón por la cual es de valiosa importancia el análisis experimental para tener una comprensión más cabal de la realidad.

En este estudio la evidencia experimental constituye una parte muy valiosa, pues se utilizó para lograr resolver el problema planteado en este trabajo (capítulo 2): intentar suprimir o, por lo menos, reducir la magnitud de los vórtices que se pueden presentar aguas arriba de las compuertas de un vertedor.

En primer lugar, se emplea un método visual para clasificar la fuerza de un vórtice en las pruebas experimentales, y de esta manera cuantificar en primera instancia la magnitud del fenómeno. Así también con este método indirecto se busca simplificar el análisis de los vórtices en el tiempo y en el espacio. Estos análisis junto a las hipótesis consideradas y a las experiencias obtenidas por diversos investigadores en el tema, permiten acotar el espacio muestral de análisis.

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

Con base en los resultados anteriores y tomando en cuenta algunas consideraciones en el estudio, se plantea y realiza el plan de pruebas experimentales. Se analizan los resultados experimentales de algunas de las variables más importantes del fenómeno con diferentes condiciones de operación en el vertedor. Se realiza el análisis estadístico y de correlación en el tiempo del conjunto de mediciones de la presión dinámica de los vórtices sobre las compuertas de un modelo físico.

Posteriormente se realiza una segunda etapa de análisis, esta vez en el dominio de las frecuencias de las señales obtenidas. En esta etapa, según los resultados obtenidos del Análisis de Fourier, es la que permite obtener resultados complementarios satisfactorios del estudio experimental.

Para comenzar, se describe la instalación y el modelo físico empleado para llevar a cabo la experimentación.

### 4.1 Modelo físico : Presa La Angostura Chis.

Para los trabajos experimentales se empleó un modelo físico escala **1:50**, ya existente en el Instituto de Ingeniería, UNAM, de la P.H. La Angostura (figura 4.1.1). Este modelo fue construido para el diseño de la presa en 1968.

Aparte del aspecto económico, se decidió emplear el modelo citado porque se consideró de suma importancia tomar en cuenta una gran cantidad de factores posibles que inciden en la dinámica de los vórtices, no solo en la región próxima aguas arriba de las pilas, sino aún más lejos: el oleaje en el flujo dentro del vaso de almacenamiento y su entrada a los canales de acceso, los cuales son curvos, que según se mencionó en el capítulo 3, modifican diversos aspectos del flujo propiciando la formación de vórtices. Así, en el caso de estudio se observaron vórtices en la zona de pilas y aún más allá: la formación de pequeños trenes de vórtices a lo largo de los canales de acceso.

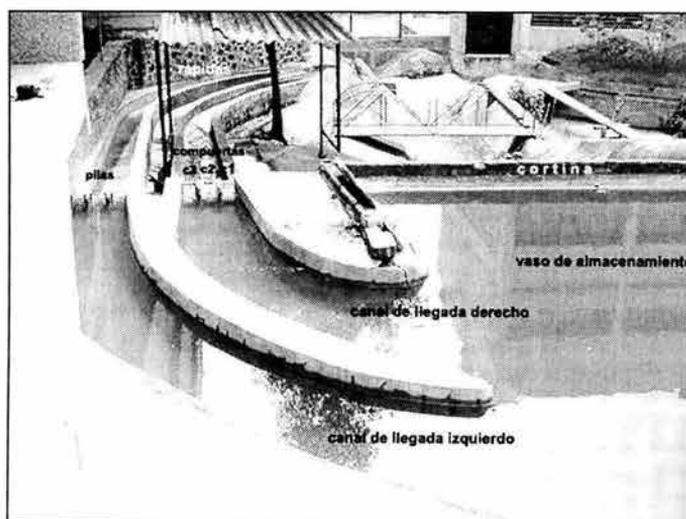


Figura 4.1.1 Modelo físico de la P.H. La Angostura

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

No obstante, dicha elección tuvo algunas desventajas; la más importante fue la reducción de tamaño de la región próxima a la estructura de control del vertedor de la presa, que repercute en la sensibilidad de los dispositivos para la medición de variables del fluido, como se verá mas adelante; así como la pérdida de visibilidad en perfil del fenómeno, pues el modelo es de concreto.

La instalación para el abastecimiento de agua está formada por 3 bombas de eje vertical y un solo paso de impulsión de 50 HP de potencia cada una. Con una de estas bombas es suficiente para satisfacer el caudal máximo requerido en las pruebas de  $Q = 235.15 \text{ dm}^3/\text{s}$  ( $4156.88 \text{ m}^3/\text{s}$ , prototipo), correspondiente al NAME (cota prototipo 539.6 msnm). Estas bombas succionan el agua almacenada en una cisterna, que se encuentra debajo de la instalación del modelo y la entregan a un tanque de regulación, que distribuye el caudal por medio de compuertas rectangulares a varios modelos.

El tanque de regulación descarga el agua en caída libre a un depósito limitado por una barrera de aquietadores de ladrillo. En este depósito se encuentran apilados montículos de roca para disipar la energía del flujo debida a su caída. Para reducir en lo posible la acción del oleaje, se construyó otra barrera aquietadora, esta vez de roca suelta, la cual se encuentra a 17 m aguas arriba del canal umbral de acceso del vertedor. Lo mencionado anteriormente puede observarse en la figura 4.1.2.



*Figura 4.1.2 Vaso de almacenamiento del modelo físico de la P.H. La Angostura*

La topografía del vaso se configuró con material grueso en las capas mas profundas, arena y una capa de concreto como exterior.

La obra de excedencias de la P. H. La Angostura está situada en la margen izquierda del río Grijalva y está formada por dos canales a cielo abierto, los cuales inician de un solo canal umbral (ver figura 4.1.1). Cada uno de estos canales constan de un tramo de acceso con sección trapecial, cimacio con dos pilas sección ojiva y tres compuertas radiales, como estructura de control; para este trabajo, las compuertas fueron construidas de acrílico transparente para permitir la visualización de perfil frontal de los vórtices. Como estructura de descarga, cada canal tiene una rápida de sección rectangular y cubeta de lanzamiento.

## **Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor**

---

Los bordes del vertedor se construyeron con muros de tabique rojo. Toda la superficie exterior de la obra de excedencias, incluidas las pilas, se hizo de concreto y una capa de lechada de cemento pulido para reducir en lo posible la rugosidad del modelo.

Como características particulares, que repercuten directamente en la formación de vórtices (según lo mencionado en la sección 3.1), cabe mencionar que para cada canal la sección es trapecial con ancho de plantilla de 30.00 m (prototipo) en la zona de acceso, misma que va disminuyendo (al contrario que los taludes) hasta tener una sección rectangular de 25.00 m de ancho en la zona de pilas, además, estos canales tienen curvatura horizontal. Lo anterior puede apreciarse con detalle en el plano E2 del Apéndice E).

Descrito el dispositivo experimental empleado, a continuación se presenta una descripción de una característica básica de interés de un vórtice: su fuerza, la cual permite hacer un análisis preliminar del caso en estudio.

### **4.2 Clasificación de la fuerza de un vórtice**

Una de las características más significativas de un vórtice es la depresión que presenta la superficie libre del agua, es decir, una reducción de la presión hidrostática local, debido a un incremento en la carga de velocidad asociada con una rotación del flujo. Dicha caída de la superficie libre se presenta en diversos grados de intensidad, desde una leve depresión, u "hoyuelo", hasta un gran embudo de aire abierto o corazón, el cual puede llegar hasta la estructura de entrada; este último caso es el resultado de una fuerte circulación.

Actualmente no existe una explicación satisfactoria de las diferentes etapas de un vórtice debidas a su fuerza, ya que no se cuenta aún con una técnica estándar. Pese a lo anterior, existen varias técnicas que permiten hacer una clasificación de los vórtices. Dichas técnicas son de dos tipos: objetivas y subjetivas.

Las primeras consisten en hacer la medición de alguna cantidad directa o indirectamente dependiente de la fuerza de los vórtices como son, por ejemplo, cambios en el coeficiente de pérdidas por entrada (o coeficiente de descarga), la magnitud del remolino en el conducto de entrada o la determinación de la ingesta de aire. Estos métodos también permiten conocer directamente las características del flujo de entrada, y como éstas pueden afectar las condiciones del fluido hacia aguas abajo. Mas adelante se realiza el análisis de las fluctuaciones de presión debidas a los vórtices, que pertenece a estas técnicas.

Los métodos subjetivos son técnicas visuales para evaluar la magnitud de los vórtices en el campo de flujo, observando su geometría y fuerza. Aunque estos métodos dependen del observador, son una forma significativa de clasificación básica del fenómeno.

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

En este trabajo se emplea como método subjetivo el sistema de clasificación visual desarrollado en el Alden Research Laboratory (ARL)<sup>3</sup>. Este método fue consistente con las observaciones hechas en el modelo físico del vertedor de la presa Angostura, excepto para el límite superior de clasificación. Ya que el método ARL no tiene vórtices de mayor magnitud, pues este se realizó en obras de toma fijas inmersas en un almacenamiento (estático). Razón por la cual este método es modificado ligeramente para ajustarse mejor al caso de estudio.

### 4.2.1 Método visual de clasificación de la fuerza de un vórtice según el Alden Research Laboratory (ARL)

Este método se basa en la identificación de las distintas características del flujo que indican un cambio gradual de la fuerza de un vórtice. La idea básica es que ha mayor fuerza de un vórtice es necesaria una mayor ingesta de aire, así como de material flotante. Este material puede tener diferentes densidades: como la de sólidos que flotan sobre la superficie del agua, densidad nula (tinta) o una densidad relativa menor (aire). En la figura 4.2.1.1 muestra este sistema, el cual tiene los siguientes estados de un vórtice:

**Tipo 1 (T1)**, remolino superficial. Se observa claramente el patrón espiral característico de las líneas de corriente a través de la tinta y de pequeño material flotante. No existe depresión en la superficie libre de agua.

**Tipo 2 (T2)**, igual que T1 pero además presenta una ligera depresión de la superficie libre de agua (hoyuelo). En este estado la vorticidad se encuentra relativamente dispersa.

**Tipo 3 (T3)**, las líneas de corriente (en tinta) presentan ya la estructura de vórtice,

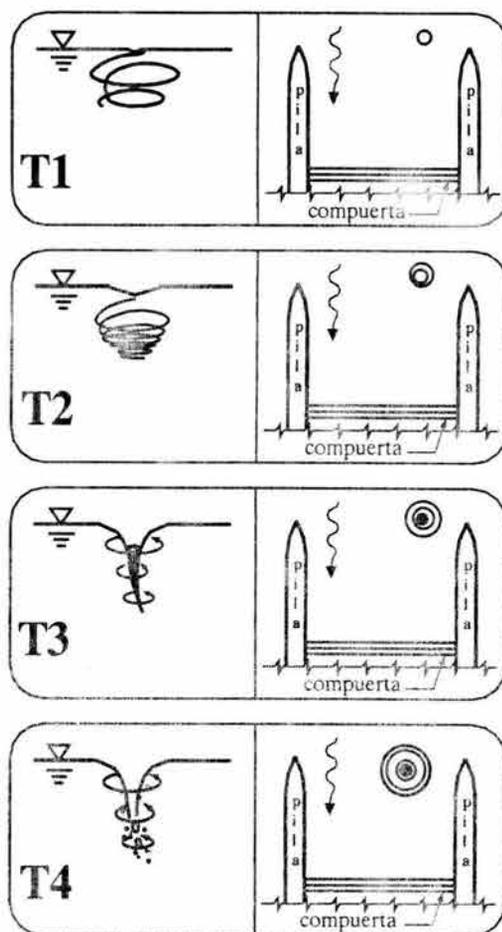


Figura 4.2.1.1 Clasificación de la fuerza de un vórtice, según el método del ARL.

<sup>3</sup> Del Worcester Polytechnic Institute (WPI) Holden, Massachusetts. Véase ref. electrónica: Alden Research Laboratory, (2000).

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

es decir, el flujo se mueve en espiral a través de una columna de fluido (agua). El embudo o corazón es de tinta y puede llegar hasta la estructura de entrada. La depresión de la superficie libre es mayor que en T2. Este vórtice es la frontera entre un remolino general (tipos T1 y T2) y una vorticidad concentrada de la superficie a la estructura de entrada, que se puede decir es el vórtice propiamente dicho.

**Tipo 4 (T4)**, la depresión de la superficie libre es mayor que en T3, al igual que la vorticidad, de tal manera que este vórtice enguete material flotante (no aire).

**Tipo 5 (T5)**, vórtice con corazón de aire parcial, debido a que empieza la succión de aire.

**Tipo 6 (T6)**, vórtice con corazón de aire desde la superficie a la estructura de entrada, es decir, es total. El estrechamiento del embudo es continuo y gradual.

En el caso de vertedores de cresta controlada, se observó que a medida que la apertura de una compuerta se incrementaba cada vez más, la fuerza de un vórtice aumenta al igual que la turbulencia, de tal manera que éste último fenómeno provocaba la paulatina destrucción del vórtice.

Por lo tanto, para este estudio se proponen los siguientes tipos adicionales de vórtices al método propuesto por el WPI y que se ilustran en la figura 4.2.1.1.

**Tipo 7 (T7)**, este vórtice al ser más fuerte que T6, enguete una mayor cantidad de aire, que aunado a la turbulencia, se produce un aumento en el grosor del embudo de aire, que comienza a tener una forma irregular. Este embudo comienza a romperse en su extremo inferior, resultado del rebote del flujo con el labio inferior de la compuerta formando burbujas de aire.

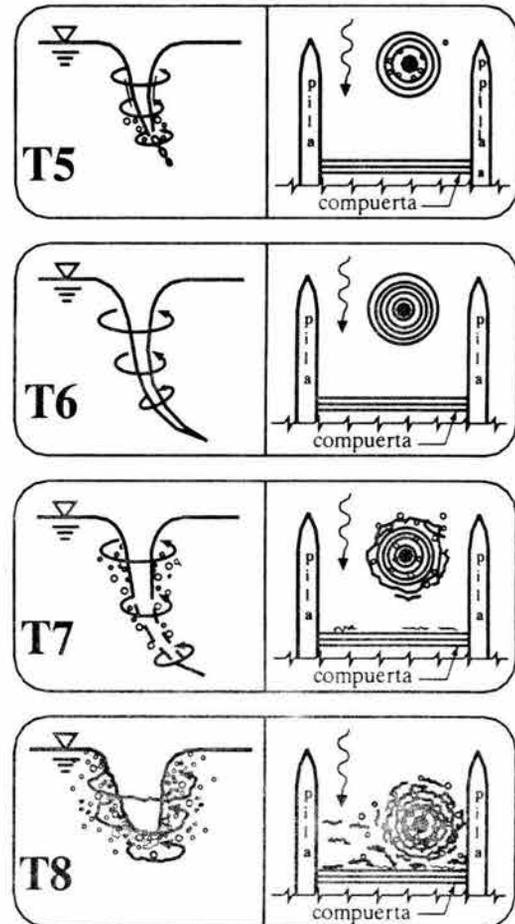


Figura 4.2.1.1 Clasificación de la fuerza de un vórtices, según el método del ARL.

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

---

**Tipo 8 (T8)**, la longitud del embudo de aire del vórtice es menor que el de T7, pero el grosor es mayor. Este vórtice está acompañado de gran turbulencia, mezcla de fluido (agua) y aire, por ello tiene forma bastante irregular.

Antes de aplicar el método visual ARL mencionado, se establecen las principales consideraciones para un acotamiento inicial de las pruebas experimentales a realizar en este trabajo.

### 4.3 Definición del universo muestral

Ante la infinidad de factores que inciden en la formación de vórtices aguas arriba de las compuertas de un vertedor, se establecen las consideraciones siguientes de las muestras a llevar a cabo.

- a) Las variables de control del proceso experimental son las aberturas de las compuertas ( $a$ ) y las cargas hidráulicas ( $H$ ).
- b) Una variable de gran interés es la fuerza del vórtice. Empleando el método del ARL, la fuerza de un vórtice es una variable discreta que, según se mencionó en la sección anterior, tiene valores de 1 a 8. Esta cuantificación del fenómeno permite analizar en forma sencilla su variación espacial y temporal como se verá en la sección siguiente. Como se menciona más adelante, también es variable de estudio la presión dinámica total del flujo sobre las compuertas debidas a los vórtices. Esta magnitud es medida mediante transductores de presión.
- c) Las demás variables como el oleaje, cambios de temperatura, concentración de sólidos en el agua, etc, afectan de manera uniforme a todas las pruebas realizadas.
- d) Sólo se toma en cuenta la operación de las compuertas correspondientes al vertedor derecho de la presa (véase figura 4.4.1.1 y plano E-1), debido a que las descargas realizadas con el otro vertedor producen considerable socavación en las laderas adyacentes a la cubeta de lanzamiento de este vertedor, según el estudio del funcionamiento hidráulico de los canales de descarga (rápidas) de la P.H. La Angostura [Franco V. *et al* (1995)].
- e) Se toma en cuenta un cierto número en las combinaciones de operación de las tres compuertas del vertedor derecho. No se analizan aperturas únicas de la compuerta 1 ó 3 (véase plano E-1), debido a las sobre elevaciones excesivas de los tirantes que éstas producen ocasionando la erosión de las paredes del canal de descarga o rápida del vertedor, resultado de la asimetría del flujo y a las ondas de Mach.

Los casos de interés corresponden al NAME en el vaso de almacenamiento y a niveles próximos a él. Acorde con el estudio del funcionamiento y operación de las presas del sistema Grijalva [Sánchez B. J. L. *et al* (2000)], se considera en primer

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

---

término el estudio de la apertura total de la compuerta dos. Para las condiciones mas desfavorables se analizan aperturas parciales de las compuertas 1 ó 3, ambas con la compuerta 2 totalmente abierta.

- f) Las características de la fuerza de un vórtice son independientes de la viscosidad del fluido (agua). Las investigaciones de Anwar *et al* (1978) establecen que el valor crítico de  $R_e^{*1}$  es de  $3 \times 10^4$ ; y como en todas las pruebas realizadas en este estudio el valor de  $R_e$  calculado estuvo por arriba de  $1 \times 10^5$ , mayor al valor crítico, se verifica esta suposición.
- g) De igual forma se considera que los efectos de las fuerzas de tensión superficial sobre los vórtices son despreciables. Aunque una demostración de tales efectos es difícil de probar, pruebas realizadas por Daggett y Keulegan (1974), Anwar *et al* (1978) y Jain *et al* (1978), han demostrado que la tensión superficial tiene efectos mínimos en vórtices para  $We > 10^4$ <sup>2</sup>. Los valores de  $We$  calculados en las pruebas realizadas en el modelo estuvieron por debajo de dicho límite. Sin embargo, a diferencia de las estructuras de entrada típicas más estudiadas actualmente (obras de toma, sifones, vertedores de embudo, etc), donde las velocidades del flujo en la vecindad de la estructura de entrada son pequeñas; las características del flujo en una estructura de control de un vertedor están mas influenciadas por la turbulencia, debido a una corriente dominante del flujo afectada por la curvatura de los canales de acceso, el rebote de la vena líquida sobre las paredes de las compuertas, remolinos en el labio inferior de las mismas, etc; por lo que el efecto de las fuerzas de tensión superficial son despreciables en el modelo.
- h) La apertura mínima de una compuerta será aquella en la cual no puedan producirse altas velocidades que provoquen pulsaciones del flujo en el labio inferior de la compuerta y la consiguiente vibración de esta. Hardwick (1974) propone que dichas aperturas pequeñas sean mayores al espesor de la compuerta. Aunque esta recomendación es hecha para compuertas planas deslizantes con sección del labio inferior rectangular (geometría poco hidrodinámica), y cuya descarga es sumergida; este criterio es aceptado ya que es conservador para el caso en estudio.

---

<sup>1</sup> Número de Reynolds radial  $R_e = \frac{Q}{\nu \cdot h_s}$  donde  $Q$ : Caudal de descarga,  $\nu$ : viscosidad cinemática del fluido,  $h_s$ : sumergencia de entrada..

<sup>2</sup> Número de Weber  $We = v \cdot \sqrt{\frac{\rho \cdot d}{\sigma}}$  donde  $\rho$  es la densidad del fluido,  $\sigma$ : fuerza de tensión superficial por unidad de longitud,  $v$ : velocidad del fluido y  $d$ : diámetro de la estructura de entrada.

## **Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor**

---

- i) La apertura máxima de una compuerta será aquella en la que, si bien no es posible destruir los vórtices, por lo menos estos pueden ser aminorados significativamente. Esto es, en donde la influencia de la turbulencia no sea demasiado grande que provoque un rebote violento del flujo contra la estructura disipadora que pueda dañarla. Posteriormente se establece, como resultado del análisis preliminar en el tiempo de los vórtices, el límite superior de la apertura de compuertas del modelo consideradas, que permitió acotar el espacio muestral para el análisis de la presión dinámica, que se presenta más adelante.

### **4.4 Análisis de vórtices en el dominio del tiempo (Fase preliminar)**

La mayoría de los vórtices presentes en las estructuras de entrada son transitorios, es decir, varían sus características físicas en el tiempo. Existe una gran cantidad de factores, algunos de los cuales se mencionan en la sección 3.1, que interactúan de tal manera, que producen en los vórtices esas características.

La formación de vórtices aguas arriba de compuertas en presas durante una descarga, es uno de los casos más claros de la variabilidad del fenómeno. Para una condición establecida de descarga, en la que se mantiene fijo el nivel del agua, al igual que una apertura en las compuertas, se presentan de manera aleatoria diversos tipos (estados) de la fuerza de un vórtice, o bien la ausencia total de éstos.

Estas diferencias con respecto a otras estructuras de entrada se deben, principalmente, a que el patrón o trayectoria del flujo dominante es casi perpendicular a la columna de agua en torno a la cual se concentra la vorticidad. Además, existen otras diferencias, tales como la formación de remolinos aguas abajo del labio inferior de la compuerta, debidos a la fluctuación periódica del flujo según las investigaciones hechas por Hardwick (1974), trenes de vórtices en el canal de llegada, etc., los cuales inciden en el comportamiento de vórtices en estas estructuras.

Por lo tanto, para un estudio de vórtices se requiere conocer la ubicación de los mismos y la variación de su magnitud en el tiempo. Esto permitirá una apropiada especificación de las características de los tipos de vórtices ocurridos.

Con lo anterior se pretende diseñar una estructura de control o bien, adaptar una estructura ya existente para eliminar los vórtices.

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

---

### 4.4.1 Plan de pruebas experimentales

Acorde con los incisos mencionados en la acotación del intervalo muestral, se elaboró un plan de pruebas para el estudio de la variación espacio-tiempo de los vórtices, y analizar los casos de mayor interés, según se estableció en la sección 4.3. Se analizaron niveles en el vaso correspondientes al N.A.M.E. y a cada dos metros menor a éste, hasta el nivel 535.6 m.s.n.m.. En la tabla 4.4.1.1 se muestra el plan de pruebas correspondiente a los primeros dos niveles mencionados. En dicha tabla se muestran los ensayos de mayor interés (ver inciso e, de la sección 4.3). En la segunda columna se muestran los caudales de descarga,  $Q_d$  (modelo-prototipo) obtenidos al operar las compuertas 1 ó 3 con la compuerta 2 totalmente abierta. Las ecuaciones que representan a tales gastos se obtuvieron al estimar curvas de regresión polinómica de datos experimentales (véase figura 4.4.1.1), obtenidos de un estudio del comportamiento hidráulico del vertedor del P.H. Angostura [Franco V. *et al*, (1995)]. Estas ecuaciones se muestran en la tabla 4.4.1.2.

Los caudales correspondientes a las aperturas de 2 y 3 metros fueron obtenidas de manera teórica, dado que no se obtuvo información experimental de estas condiciones. De esta forma se empleó la ecuación que calcula la descarga de un vertedor controlado por compuertas que propone el USBR<sup>2</sup> (1985), es decir

$$Q = C_d \cdot D_c \cdot L \cdot \sqrt{2g \cdot H_d} \quad (4.1)$$

donde

$H_d$  Carga al centro de la compuerta abierta, incluye la velocidad de aproximación, en m.

$D_c$  La distancia más corta del labio de la compuerta al cimacio, en m.

$L$  Ancho de la cresta, en m.

$C_d$  coeficiente de descarga, adimensional. Este coeficiente se determina empleando la figura 9-31 de la referencia citada.

En la columna 3 de la tabla 4.4.1.1 se muestra la sumergencia,  $h_s$  (modelo-prototipo) (sección 4.4.4) resultante de la apertura de las compuertas 1 ó 3 (modelo-prototipo), que se muestran en las columnas 4 y 5 respectivamente.

Los tipos de vórtices que se presentaron empleando el método del ARL y la modificación hecha al mismo (sección 4.2.1), se muestran en las últimas dos columnas.

---

<sup>2</sup> Bureau of Reclamation, United States Department of the Interior. Véase en referencias electrónicas USBR.

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

NAME: 539.6 m.s.n.m.

H = 20 m (40 cm)

Compuerta 2 totalmente abierta:  $a \rightarrow \infty$

condición número	Gasto de descarga $Q_d$ ( $dm^3/s$ ) - ( $m^3/s$ )	sumergencia $hs$ (cm) - (m)	Abertura (a) de compuerta $c_i$		Tipos de vórtices presentados en compuertas	
			$c_1$	$c_2$	$c_1$	$c_2$
			a (cm) - (m)	a (cm) - (m)		
1	81.220 -- 1435.7816	-	0.00	0.00	T1 - T2	T1 - T3
2	81.220 -- 1435.7816	-	0.00	0.00	T1	T1 - T4
3	81.220 -- 1435.7816	-	0.00	0.00	T1 - T3	T1 - T4
4	81.220 -- 1435.7816	-	0.00	0.00	T1 - T2	T1 - T3
5	87.9542 -- 1554.8259	39.0 (19.50)	0.00	2.0 - (1.00)	T1 - T3	T1 - T4
6	94.9323 -- 1678.1813	38.0 (19.00)	0.00	4.0 - (2.00)	T1 - T2	T1 - T5
7	101.878 -- 1800.970	37.0 (18.50)	0.00	6.0 - (3.00)	T1 - T2	T1 - T6
8	106.309 -- 1879.289	36.0 (18.00)	0.00	8.0 - (4.00)	T1 - T2	T2 - T6
9	118.624 -- 2096.990	34.0 (17.00)	0.00	12.0 - (6.00)	T1 - T3	T3 - T7
10	124.784 -- 2205.890	32.0 (16.00)	0.00	16.0 - (8.00)	T1 - T2	T4 - T8
11	129.492 -- 2289.123	31.0 (15.50)	0.00	18.0 - (9.00)	T1 - T3	T6 - T8
12	133.531 -- 2360.510	30.0 (15.00)	0.00	20.0 - (10.00)	T1 - T3	T8 -
13	141.658 -- 2504.175	-	0.00	24.0 - (12.00)	T1 - T3	-
14	87.954 -- 1554.826	39.0 (19.50)	2.0 - (1.00)	0.00	T1 - T2	T1
15	94.932 -- 1678.181	38.0 (19.00)	4.0 - (2.00)	0.00	T1 - T3	T1
16	106.309 -- 1879.289	36.0 (18.00)	8.0 - (4.00)	0.00	T2 - T5	T1 - T2
17	118.624 -- 2096.990	34.0 (17.00)	12.0 - (6.00)	0.00	T3 - T7	T1 - T2
18	124.784 -- 2205.890	32.0 (16.00)	16.0 - (8.00)	0.00	T3 - T8	T1 - T2

NAME: 537.6 m.s.n.m.

H = 18 m (36 cm)

Compuerta 2 totalmente abierta:  $a \rightarrow \infty$

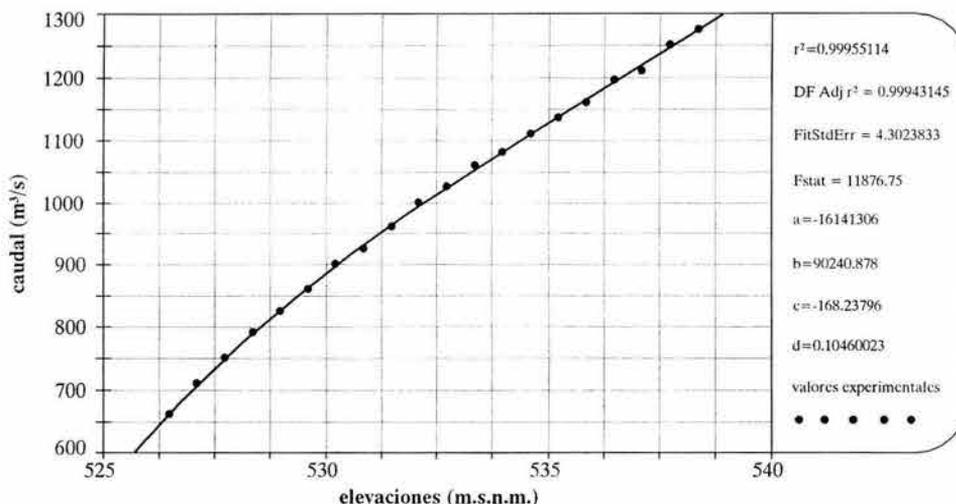
condición número	Gasto de descarga $Q_d$ ( $dm^3/s$ ) - ( $m^3/s$ )	sumergencia $hs$ (cm) - (m)	Abertura (a) de compuerta $c_i$		Tipos de vórtices presentados en compuertas	
			$c_1$	$c_2$	$c_1$	$c_2$
			a (cm) - (m)	a (cm) - (m)		
19	69.2211 -- 1223.668	-	0.00	0.00	T1	T1 - T3
20	69.2211 -- 1223.668	-	0.00	0.00	T1	T1 - T4
21	75.7856 -- 1339.713	39.0 (19.50)	0.00	2.0 - (1.00)	T1	T1 - T5
22	82.5871 -- 1459.947	38.0 (19.00)	0.00	4.0 - (2.00)	T1 - T2	T2 - T6
23	89.3589 -- 1579.657	37.0 (18.50)	0.00	6.0 - (3.00)	T1 - T2	T2 - T6
24	92.5945 -- 1636.854	36.0 (18.00)	0.00	8.0 - (4.00)	T1 - T2	T3 - T6
25	104.433 -- 1846.138	34.0 (17.00)	0.00	12.0 - (6.00)	T1 - T2	T4 - T7
26	109.564 -- 1936.839	32.0 (16.00)	0.00	16.0 - (8.00)	T1 - T2	T5 - T8
27	118.243 -- 2090.257	30.0 (15.00)	0.00	20.0 - (10.00)	T1 - T3	-
28	125.395 -- 2216.697	-	0.00	24.0 - (12.00)	T1 - T3	-
29	75.7856 -- 1339.713	39.0 (19.50)	2.0 - (1.00)	0.00	T1 - T3	T1
30	82.5871 -- 1459.947	38.0 (19.00)	4.0 - (2.00)	0.00	T1 - T4	T1
31	92.5945 -- 1636.854	36.0 (18.00)	8.0 - (4.00)	0.00	T2 - T5	T1 - T2
32	104.433 -- 1846.138	34.0 (17.00)	12.0 - (6.00)	0.00	T4 - T7	T1 - T2
33	109.564 -- 1936.839	32.0 (16.00)	16.0 - (8.00)	0.00	T5 - T8	T1 - T2

Tabla 4.4.1.1 Plan de pruebas para el estudio espacio tiempo de vórtices en compuertas de un vertedor.

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

Curva experimental del vertedor Elev-Q con abertura de compuertas  $a = 4\text{ m}$

Rank 268 Eqn 2040  $y = a + bx + cx^2 + dx^3$



*Figura 4.4.1.1. Curva de descarga del vertedor izquierdo del P.H.*

abertura $a_i$ (m)	ecuación	a	b	c	d	e
4	Rank 268 Eqn 2040 $y = a + bx + cx^2 + dx^3$	-16141306	90240,878	-168,23796	0,10460023	
6	Rank 154 Eqn 4769 $y = a + bx + cx^3 + d/x + ex^2$	1,0809296e+10	-1011,5723	3,5432631	0,102342	6,1703e+14
8	Rank 154 Eqn 428 $y = a + bx + cx^2 + dx^3$	-25977254	-145501,9	-271,78508	0,16931555	
10	Rank 616 Eqn 2183 $y = a + bx + c/x + d/x^2$	2,5536002e+08	-158850,76	-1,36802e+11	2,4424e+13	
12	Rank 107 Eqn 1203 $y = a + b/x + c/x^2$	-881174,86	9,8532e+08	-2,7417e+11		

*Figura 4.4.1.2 Ecuaciones de las curvas experimentales Elev.-Q del vertedor para diferentes aberturas de compuertas*

### 4.4.2 Equipo de medición preliminar

Con base en el plan anterior, se realiza la descripción de vórtices ante los cambios en las variables de control, registrando la secuencia de estados de su fuerza en el tiempo conforme al método ARL (sección 4.2.1), empleando una grabadora digital. Para obtener una mayor precisión (fracciones de segundo) en los tiempos de registro, debido a que, como se muestra mas adelante, los tiempos de variación de los estados de un vórtice son pequeños, (sobre todo para aberturas medianas y grandes de las compuertas) se

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

realizaron con la hora del sistema (TICKS)<sup>3</sup> de una calculadora digital HP48 al inicio de voz (número de estado del vórtice). La duración de un vórtice dado es la diferencia de la hora del sistema al inicio de un vórtice dado y la del final de este, que es el comienzo del estado de otro vórtice o bien, una ausencia de éste.

Dado que los registros así obtenidos son números binarios, primero son procesados para obtener registros como los que se muestran en la tabla 4.4.2.1; en este caso se trata de las condiciones (pruebas) 1, 5 y 7 de la tabla 4.4.2.1.

Condición 1			Condición 5			Condición 7		
tipo de vórtice	Duración del vórtice (s)	Aparición del vórtice (s)	tipo de vórtice	Duración del vórtice (s)	Aparición del vórtice (s)	tipo de vórtice	Duración del vórtice (s)	Aparición del vórtice (s)
0	0.00000000	0.00000000	0	0.00000000	0.00000000	0	0.00000000	0.00000000
0	2.899291992	2.899291992	0	4.31652832	4.31652832	3	4.234008789	4.234008789
1	10.91137695	13.81066895	2	0.92590332	5.242431641	4	2.423217773	6.657226563
0	2.579345703	16.39001465	3	2.241699219	7.484130859	3	4.385742188	11.04296875
1	10.92712402	27.31713867	2	2.316650391	9.80078125	4	1.41796875	12.4609375
2	6.607543945	33.92468262	2	0.965576172	10.76635742	3	0.814697266	13.27563477
3	4.875366211	38.80004883	3	0.788696289	11.55505371	4	1.129516602	14.40515137
2	3.06237793	41.86242676	4	1.458129883	13.01318359	3	1.494384766	15.89953613
1	1.496582031	43.35900879	2	3.131958008	16.1451416	4	1.543212891	17.44274902
0	3.552856445	46.91186523	3	1.526733398	17.671875	3	2.047119141	19.48986816
...	...	...	...	...	...	...	...	...
1	1.343017578	577.2237549	3	0.630493164	591.4238281	3	2.184936523	593.1573486
0	2.592773438	579.8165283	4	1.382202148	592.8060303	4	0.92956543	594.0869141
1	1.91149902	581.7280273	3	3.32836914	596.1343994	3	2.74414063	596.8310547
0	9.731933594	591.4599609	4	1.286865234	597.4212646	3	0.618164063	597.4492188
1	2.437744141	593.8977051	3	0.655517578	598.0767822	4	0.920288086	598.3695068
0	5.357177734	599.2548828	0	2.84753418	600.9243164	3	1.840332031	600.2098389

*Tabla 4.4.2.1 Ejemplos de registros: tiempos de aparición-duración de los estados de un vórtice para las condiciones 4, 5 y 7 del plan de pruebas.*

### 4.4.3 Análisis de vórtices en el dominio del tiempo.

Una cuidadosa descripción de la presencia de vórtices aguas arriba de las compuertas de un vertedor requiere que la dependencia del tiempo de su fuerza (estados o tipos) sea registrada.

Así, para comenzar el análisis de los datos experimentales obtenidos, se determinaron las gráficas de las series de tiempo de todas las condiciones del plan de pruebas mencionado en la sección 4.4.1. En las figuras 4.4.3.1 a la 4.4.3.6 se muestran algunas de éstas gráficas, donde la magnitud de un vórtice dado está representada por la altura de su barra, el tiempo de aparición de un vórtice es el tiempo transcurrido desde el inicio (origen) del muestreo al inicio de dicha barra y la duración del vórtice es el ancho de la misma.

<sup>3</sup> La hora del sistema es un entero binario en unidades de 1/8192 segundos, para más detalles véase HP 48SX(1990).

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

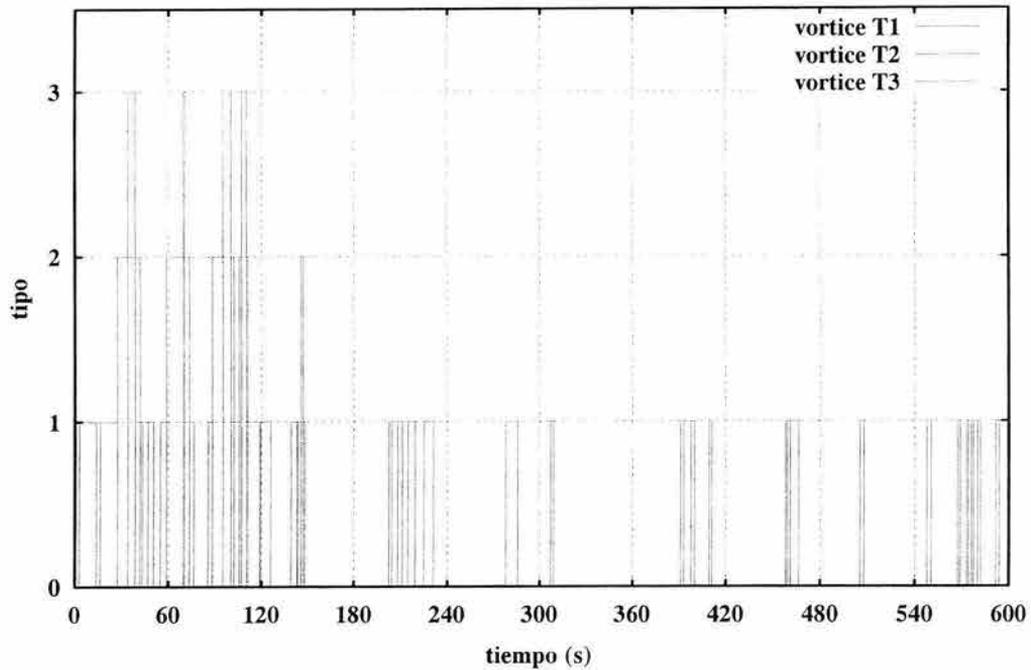


Figura 4.4.3.1 Serie de tiempo de vórtices con aberturas en compuertas:  $a_1=0$  m,  $a_2 \rightarrow \infty$ ,  $a_3 = 0$  m y NAME = 539.6 m.s.n.m. Registro en compuerta  $C_3$ .

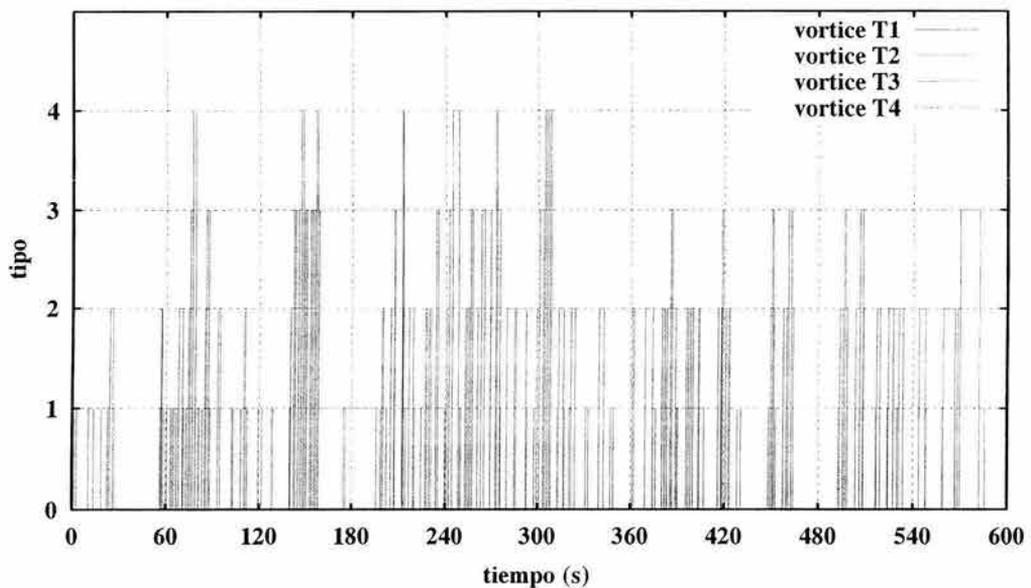
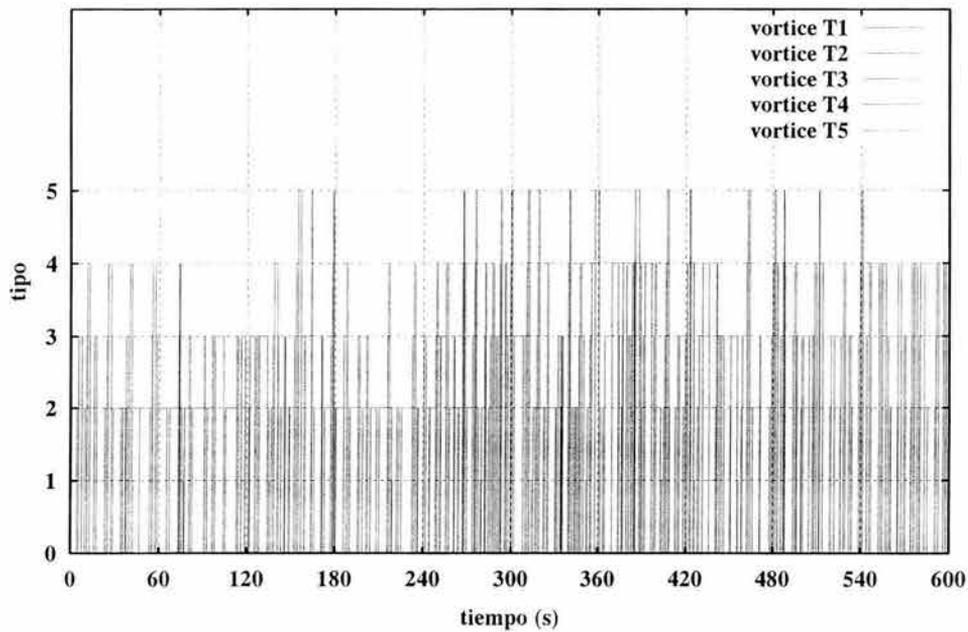
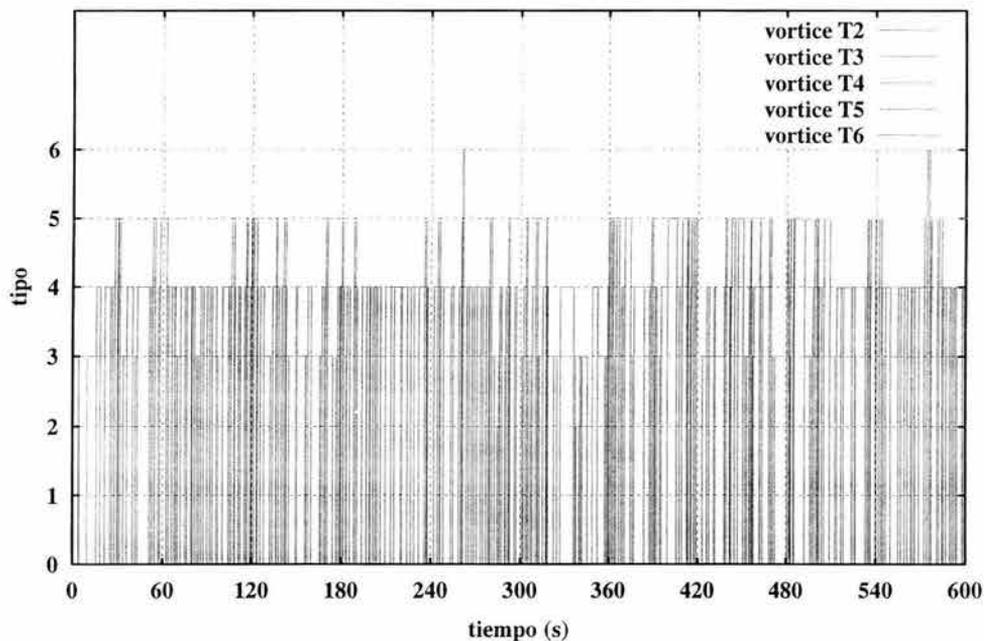


Figura 4.4.3.2 Serie de tiempo de vórtices con aberturas en compuertas:  $a_1=0$  m,  $a_2 \rightarrow \infty$ ,  $a_3 = 1$  m y NAME = 539.6 m.s.n.m. Registro en compuerta  $C_3$ .

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor



4.4.3.3 Serie de tiempo de vórtices con aberturas en compuertas  $a_1=0$  m,  $a_2 \rightarrow \infty$ ,  $a_3 = 2$  m y  $NAME = 539.6$  m.s.n.m. Registro en compuerta  $C_3$ .



4.4.3.4 Serie de tiempo de vórtices con aberturas en compuertas  $a_1=0$  m,  $a_2 \rightarrow \infty$ ,  $a_3 = 4$  m y  $NAME = 539.6$  m.s.n.m. Registro en compuerta  $C_3$ .

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

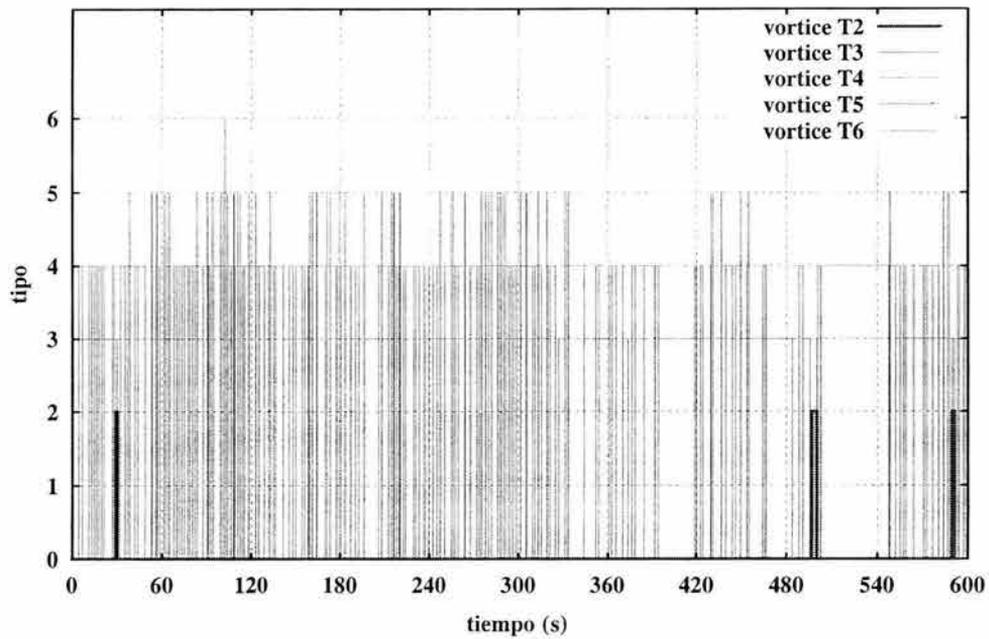


Figura 4.4.3.5 Serie de tiempo de vórtices con aberturas en compuertas  $a_1=0$  m,  $a_2 \rightarrow \infty$ ,  $a_3 = 6$  m y NAME = 539.6 m.s.n.m. Registro en compuerta  $C_3$ .

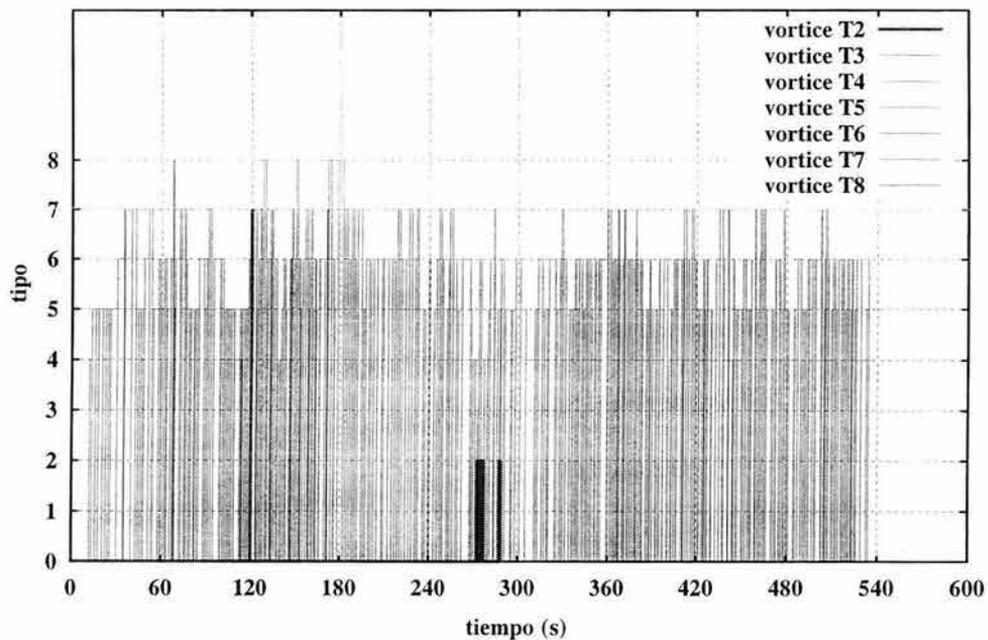


Figura 4.4.3.6 Serie de tiempo de vórtices con aberturas en compuertas  $a_1=0$  m,  $a_2 \rightarrow \infty$ ,  $a_3 = 8$  m y NAME = 539.6 m.s.n.m. Registro en compuerta  $C_3$ .

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

Estas gráficas corresponden a vórtices ocurridos aguas arriba de la compuerta izquierda ( $c_3$ ) del vertedor derecho (véase plano E1, del Apéndice E).

Los tiempos necesarios para lograr el incremento (decremento) en la fuerza de un vórtice, o bien, para su generación (disipación) son variables y dependen de varios factores. Entre los más importantes y de fácil modelación se encuentran el nivel del agua en el vaso de almacenamiento y la abertura de compuertas. Estas fueron las variables de control de los experimentos llevados a cabo.

Para una determinada condición de prueba con las variables de control fijas, en general, los tiempos de aparición-duración-disipación de los vórtices son aleatorios.

En consecuencia, cada serie de tiempo (señal muestreada) fue única, aún aplicando el criterio del A.R.L. (discreto) para clasificar la magnitud de los vórtices.

Cabe aclarar que los tiempos de muestreo fueron de 10 minutos, lo suficiente para registrar toda la gama de estados para la condición de aberturas pequeñas en las compuertas, que como se menciona en la sección siguiente, son las que presentaron los tiempos de ausencia-ocurrencia mayores.

Dicho intervalo de muestreo se determinó empleando un registro de tiempo suficientemente largo (30 minutos) al N.A.M.E., compuerta dos totalmente abierta y demás compuertas cerradas. En este registro se identificó los lapsos de mayor ausencia y el lapso en el que se presentan apariciones alternadas consecutivas de vórtices (de magnitudes superiores a uno) aguas arriba de la compuerta izquierda ( $c_3$ ), como se muestra en la figura 4.4.3.7.

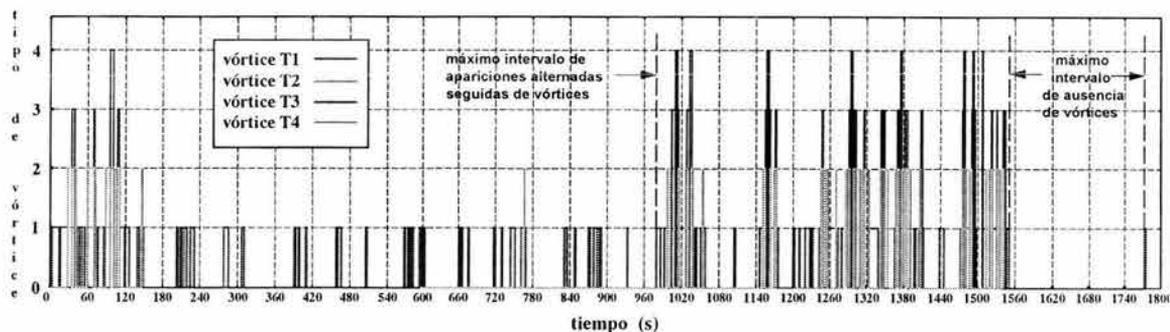


Figura 4.4.3.7 Registro de la magnitud de vórtices para determinar la duración de muestreo

En dicho registro de la magnitud de los vórtices se realizó empleando el método del A.R.L. descrito anteriormente.

## **Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor**

---

Como se mencionó en el capítulo 3.1, existen diversos factores que también fueron observados en los experimentos, por ejemplo, la compuerta izquierda *c3* fue ligeramente más propensa a la formación de vórtices que la compuerta derecha *c1*. En las siguientes secciones, se detallan tales resultados.

### **4.4.3.1 Comportamiento de vórtices debido a las aberturas de las compuertas.**

Entre las variables gobernantes más significativas en el estudio de la sumergencia de los vórtices se encuentra una dimensión lineal típica de la estructura de entrada Knauss(1987), como es el diámetro en estructuras de entrada circular, la otra variable es la carga de agua sobre la misma; en el caso de compuertas, la primera es variable y cambia sus valores con mayor frecuencia durante la operación de éstas.

Para un nivel fijo en el vaso de almacenamiento, la sumergencia relativa decrece con un aumento en la abertura de una compuerta y con ello una mayor propensión a la formación de vórtices aguas arriba de ésta.

De esta manera se observó, por ejemplo, que aún con cargas constantes y dejando una abertura pequeña en una compuerta, los tiempos de aparición de vórtices ocurridos aguas arriba de ésta son mayores a los correspondientes para aberturas mayores. Mientras que, generalmente, los tiempos de duración de los vórtices para aberturas pequeñas son similares a los que se tienen con aberturas grandes. Lo anterior se puede observar en los registros de la tabla 4.4.2.1 y en las gráficas de las series de tiempo mencionadas en la sección anterior.

A medida que se incrementó la abertura de una compuerta, también se observó un aumento en la fuerza de los vórtices ocurridos aguas arriba de ella. De esta manera se pudo observar que en un estado de gran turbulencia, que ocurre con grandes aberturas, la permanencia de los vórtices es casi establecida, es decir, existe una alternancia inmediata entre vórtices fuertes.

Lo anterior indica que factores como una circulación intensa y la turbulencia, son importantes para estas condiciones de operación.

En cambio, para aberturas pequeñas en las compuertas, la rapidez en la alternancia entre estados de vórtices fue menor así como la magnitud de éstos. Los tiempos mayores de ausencia de vórtices también correspondieron a estas condiciones de operación.

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

La frecuencia de aparición se observa en una menor o mayor densidad de las barras en las gráficas correspondientes a aberturas pequeñas y grandes, respectivamente (figuras 4.4.3.1 a la 4.4.3.6).

Las gráficas de las series de tiempo de los vórtices registrados permitieron una definición cuidadosa de los tipos característicos presentados para cada condición (muestra) experimental. Por ejemplo, se pudo determinar el verdadero vórtice promedio así como histogramas de frecuencia de vórtices. En las figuras 4.4.3.1.1 a la 4.4.3.1.3 se muestran algunos de estos resultados.

En estas figuras se muestran el histograma de frecuencia acumulada (en %) del número de apariciones de cada tipo de vórtices (FV) y el histograma de frecuencia acumulada del tiempo de persistencia de éstos (FVT) para las condiciones 1, 7 y 12 del plan de pruebas.

Se puede observar que los tipos de vórtices (VT) que tuvieron la mayor frecuencia, tanto de aparición como de tiempo de persistencia, fueron aquellos que tienen las pendientes mas pequeñas del histograma.

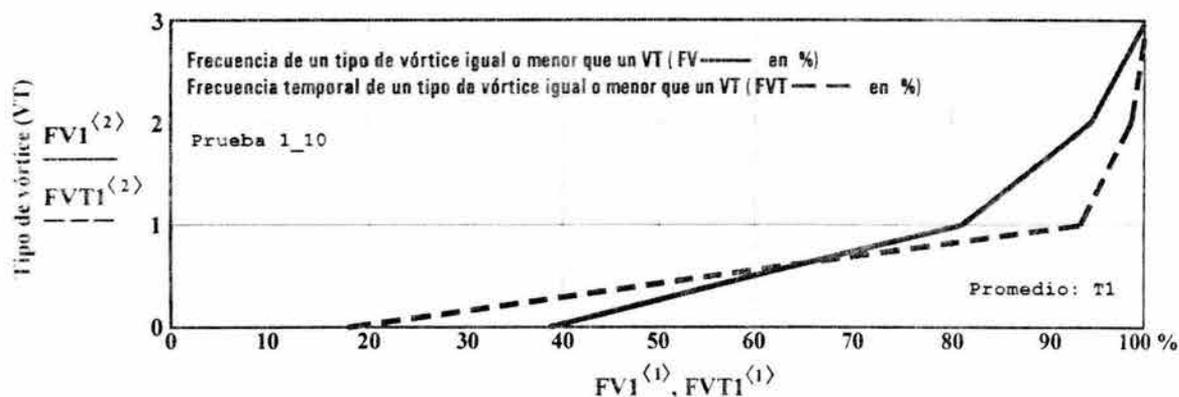
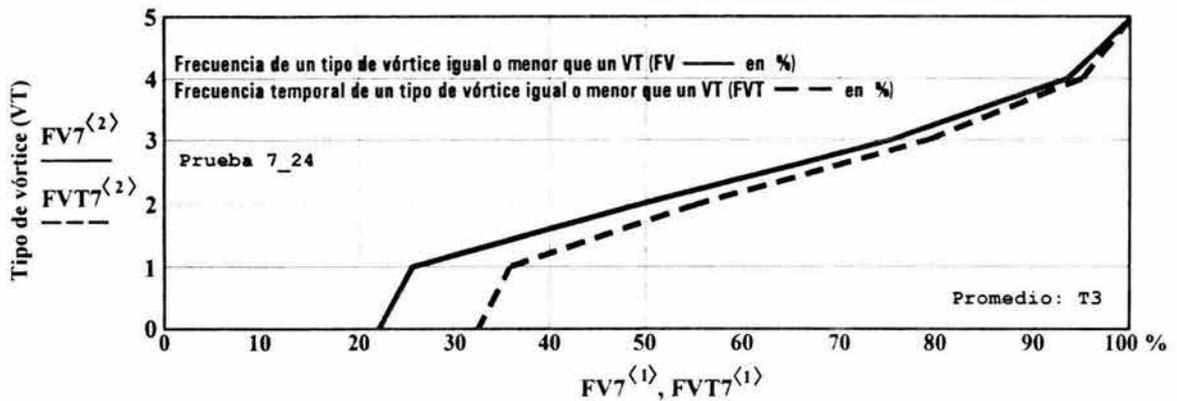


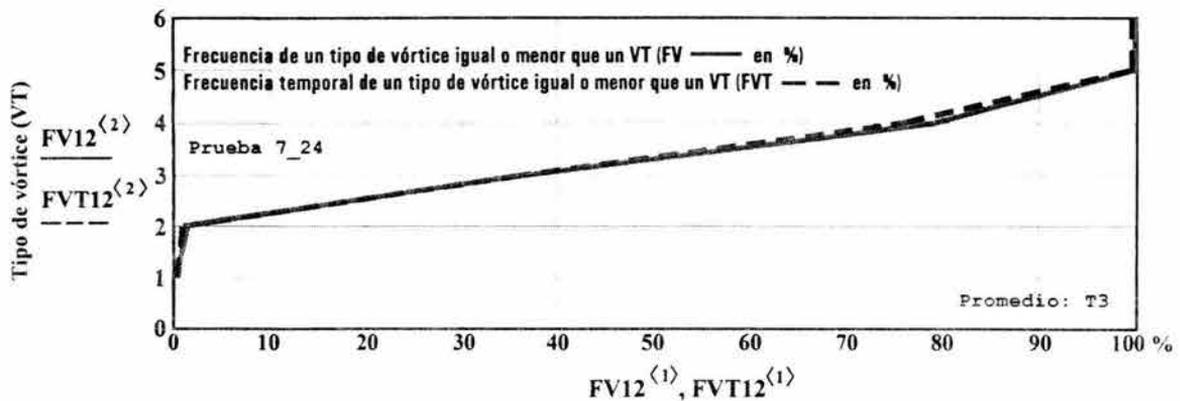
Figura 4.4.3.1.1 Histogramas de frecuencias acumuladas de vórtices, condición 1 del plan de pruebas. Registro en compuerta  $C_3$ .

Es importante mencionar que ambos histogramas fueron muy parecidos, especialmente en condiciones de operación donde las aberturas de compuertas son grandes (véase figura 4.4.3.1.3). Lo anterior está acorde con lo mencionado acerca de estas condiciones de operación, donde la alternancia entre los diferentes tipos de vórtices, generalmente fuertes, es casi inmediata. En consecuencia, dado que los tiempos de duración de los distintos tipos de vórtices son similares, la frecuencia de ocurrencia es casi igual a la de persistencia en el tiempo, cosa que no se presentó, sobretodo con aberturas pequeñas de las compuertas.

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor



*Figura 4.4.3.1.2 Histogramas de frecuencias acumuladas de vórtices, condición 6 del plan de pruebas. Registro en compuerta C<sub>3</sub>.*



*Figura 4.4.3.1.3 Histogramas de frecuencias acumuladas de vórtices, condición 9 del plan de pruebas. Registro en compuerta C<sub>3</sub>.*

La ocurrencia de los estados de un vórtice fue consecutiva, esto es, para una condición dada, el aumento o la disminución de la fuerza de un vórtice fue gradual. También, se puede ver en las figuras de las series de tiempo o en los histogramas de frecuencias mencionados, que para una cierta condición de operación, sólo pueden ocurrir vórtices, dentro de un cierto rango. Es por esto que en las columnas 6 y 7 de la tabla 4.4.1.1 se muestra los tipos de vórtices ocurridos en un intervalo, por ejemplo, T2-T5 quiere decir que ocurrieron vórtices, en cualquier orden, pero sólo los tipos T2, T3, T4 y T5.

Hasta aquí todos los vórtices mencionados ocurrieron aguas arriba de la compuerta que era manipulada. Sin embargo, de manera simultánea a los vórtices anteriores, también ocurrieron vórtices aguas arriba de la compuerta (c1) del otro extremo del vertedor derecho, la cual permaneció cerrada.

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

Esto se debe a la geometría de la estructura en estudio (sección 4.1), que provoca una excentricidad en el flujo de llegada, por lo que el comportamiento de vórtices aguas arriba de una compuerta ante aberturas de la otra compuerta extremo del vertedor se menciona en la sección siguiente.

### 4.4.3.2 Comportamiento de vórtices con la excentricidad del flujo de llegada

Como ya se mencionó en la sección 3.1, existen varias causas que generan vórtices en las estructuras de entrada, varias de las cuales se presentaron en el caso de estudio, por ejemplo, los efectos desfavorables de obstrucciones como son las pilas y paredes divisorias (Knauss, 1987), que en este caso serían, en parte, las compuertas.

Pero además, es un factor importante en la formación de vórtices la excentricidad entre el flujo de llegada y la estructura de entrada [Durgin y Hecker, (1978)], que en este trabajo se puso de manifiesto debido a la curvatura de los canales de acceso (ver plano E-1 del apéndice E). El efecto de tal curvatura se pudo observar claramente en varias situaciones: en los trenes de vórtices que a veces se presentaron en dichos canales del modelo, a unos 2 m aguas arriba de las compuertas; así como en los vórtices ocurridos simultáneamente aguas arriba de las compuertas ubicadas en los extremos del vertedor.

En efecto, otra de las características peculiares del fenómeno de vórtices observadas en el modelo fue que se presentaron vórtices frente a las dos compuertas extremo, derecha ( $c_1$ ) e izquierda ( $c_3$ ) del vertedor derecho (véase plano E2, del Apéndice E), estando ambas completamente cerradas, como se muestra en las gráficas de las series de tiempo de las figuras 4.4.3.1 y 4.4.3.2.1, las cuales corresponden a la condición experimental número 1 de la tabla 4.4.1.1.

En ellas se muestra que los tiempos de aparición de los vórtices son grandes y que la magnitud y cantidad de éstos ocurridos aguas arriba de la compuerta derecha ( $c_1$ ) fueron menores a los que ocurrieron en la compuerta izquierda ( $c_3$ ).

Puede apreciarse en los histogramas de frecuencias acumuladas en el tiempo de las series de tiempo mencionadas (figura 4.4.3.2.2) que la cantidad de vórtices T1 ocurridos fueron

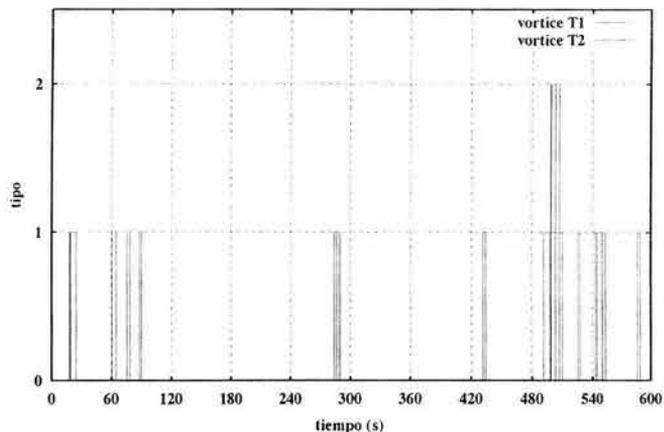
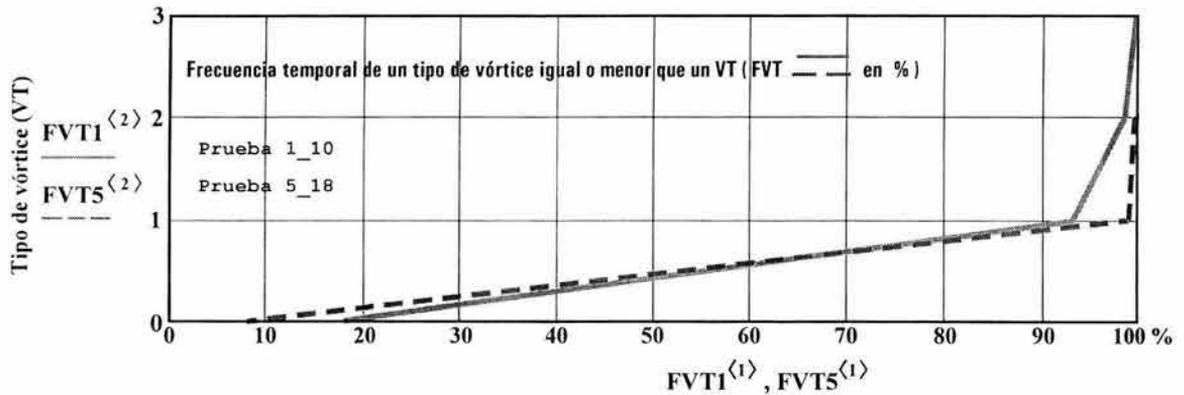


Figura 4.4.3.2.1 Serie de tiempo de vórtices con aberturas en compuertas:  $a_1=0$  m,  $a_2 \rightarrow \infty$ ,  $a_3 = 0$  m y NAME = 539.6 m.s.n.m. Registro en compuerta  $C_1$ .

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

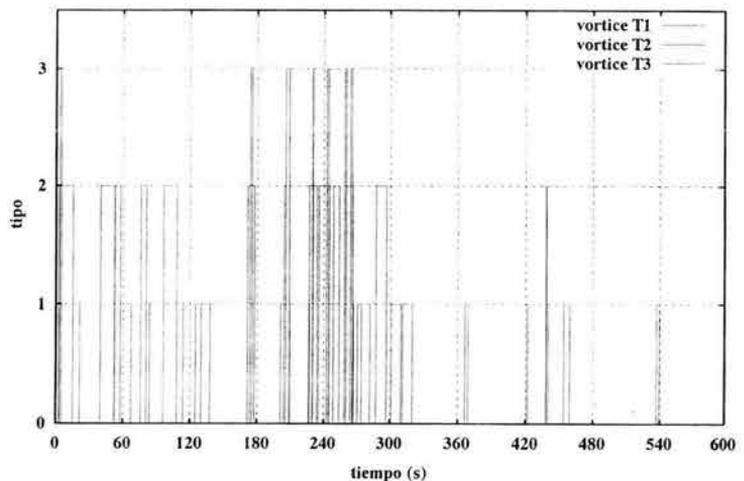
similares en ambas, pero hubo un aumento en las ocurrencias en vórtices tipo 2 en la compuerta izquierda ( $c_3$ ) además de ocurrir algunos vórtices tipo 3 en ella.



*Figura 4.4.3.2.2 Histogramas de frecuencias acumuladas en el tiempo de vórtices, condición I del plan de pruebas. FVT1 registrado en compuerta  $C_3$  y FVT5 en compuerta  $C_1$ .*

Más aún, a medida que se incrementaba la apertura de una compuerta, no sólo aumentaba la magnitud del vórtice ocurrido aguas arriba de ella como ya se mencionó en la sección anterior, sino también la magnitud del vórtice de la compuerta del otro extremo, permaneciendo ésta última cerrada. Este incremento fue marginal, aunque notorio con aperturas grandes de la compuerta extremo.

Para ilustrar lo anterior, compárese el registro de la figura 4.4.3.2.1 con la figura 4.4.3.2.3 que muestra la serie de tiempo de vórtices ocurridos aguas arriba de la compuerta derecha  $c_1$  cerrada totalmente y la compuerta izquierda con apertura de 6m (condición nueve del plan de pruebas). Nótese que, aparte de aumentar la magnitud, también aumentó la frecuencia de apariciones de vórtices.



*Figura 4.4.3.2.3 Serie de tiempo de vórtices con aperturas en compuertas:  $a_1=0\text{ m}$ ,  $a_2 \rightarrow \infty$ ,  $a_3 = 0\text{ m}$  y  $NAME = 539.6\text{ m.s.n.m.}$  Registro en compuerta  $C_3$ .*

De las pruebas realizadas, frecuentemente se pudo observar que los vórtices

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

---

ocurridos aguas arriba de la compuerta izquierda ( $c_3$ ) con apertura  $a$ , y la compuerta derecha ( $c_1$ ) cerrada totalmente, fueron ligeramente más intensos que los vórtices registrados aguas arriba de la compuerta derecha ( $c_1$ ) con la misma apertura  $a$  y la compuerta izquierda cerrada totalmente.

Por ejemplo, en varias condiciones se observó que con una apertura  $a$  en la compuerta izquierda, el rango de vórtices ocurridos aguas arriba de ésta fue aproximadamente un grado mayor al tipo de vórtice más fuerte correspondiente a la compuerta derecha con la misma apertura. Lo anterior se muestra, por ejemplo, al comparar los tipos de vórtices registrados (columnas 6 y 7) entre las condiciones (columna 1) 6, 15 y 7 y 16 de la tabla 4.4.1.1.

También la frecuencia de vórtices de magnitud media y grande fueron mayores en los registros correspondientes a la compuerta izquierda  $c_3$  que los de la compuerta derecha  $c_1$ .

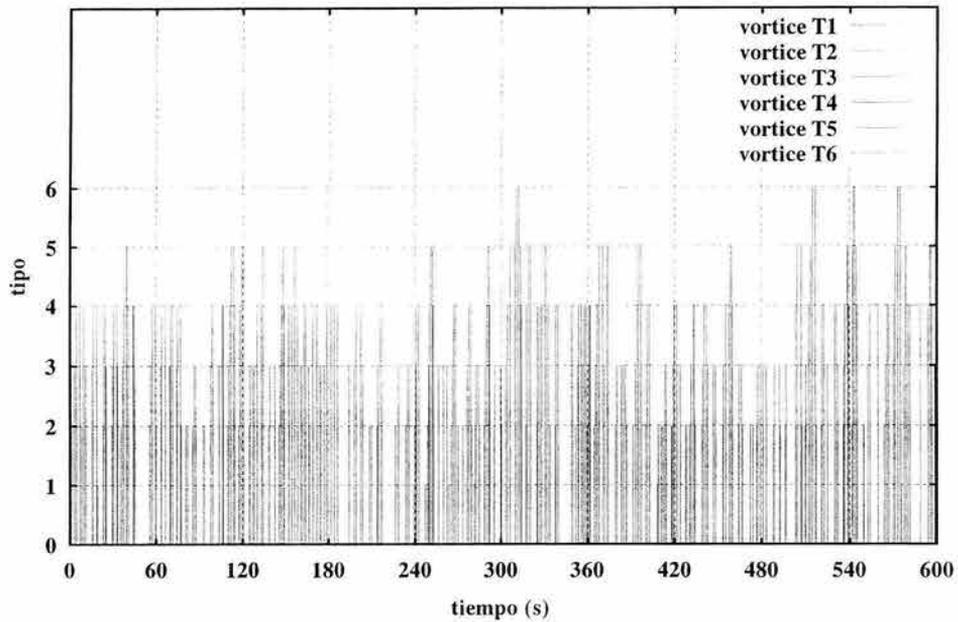
### 4.4.3.3 Comportamiento de vórtices con respecto a la variación de niveles en el vaso de almacenamiento

El nivel de agua en el vaso de almacenamiento es otro parámetro que define la sumergencia relativa (sección 3.4). En este análisis preliminar sólo se analizaron el N.A.M.E. (539.6 m.s.n.m.) y niveles próximos a él (537.6 m.s.n.m. y 535.6 m.s.n.m.), según los requerimientos de estudio de la P.H. La Angostura (véase definición del universo muestral de la sección 4.3).

No obstante lo anterior, fue posible constatar en las pruebas realizadas una mayor susceptibilidad del flujo para formar vórtices ante una disminución del nivel en el vaso de almacenamiento. Un ejemplo de lo anterior se muestra en la figura 4.4.3.3.1 de la serie de tiempo de los vórtices ocurridos aguas arriba de la compuerta izquierda ( $c_3$ ) con apertura  $a_3 = 2 \text{ m}$  y nivel en el vaso de almacenamiento de 537.6 m.s.n.m., correspondiente a la condición 22 del plan de pruebas.

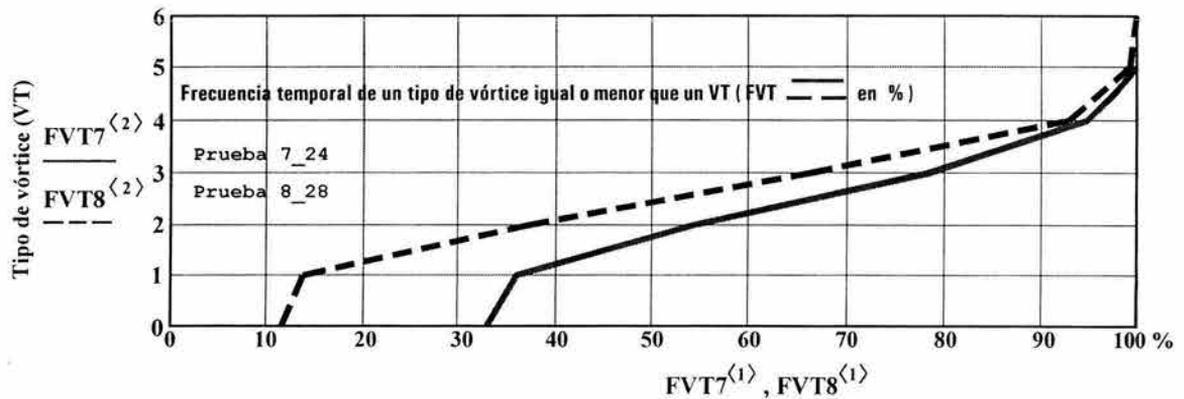
Compárese esta serie de tiempo (figura 4.4.3.3.1) con la perteneciente a la condición 6 del plan de pruebas (figura 4.4.3.3 de la sección 4.4.3), la cual corresponde a las mismas condiciones de operación de la condición 22, excepto que el nivel de agua en el vaso es el N.A.M.E. Pese a la pequeña diferencia de niveles, se pudo apreciar un ligero incremento en la aparición de vórtices tipo 4 en dicha condición 22.

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor



*Figura 4.4.3.3.1 Serie de tiempo de vórtices con aperturas en compuertas:  $a_1=0\text{ m}$ ,  $a_2 \rightarrow \infty$ ,  $a_3 = 2\text{ m}$  y  $NAME = 537.6\text{ m.s.n.m}$ . Registro en compuerta  $C_3$ .*

Para analizar mejor lo anterior en la figura 4.4.3.3.2 se muestra los histogramas de frecuencias de aparición en el tiempo de la serie de tiempo de la figura F4.4.3.3.1 (FVT8) y el de la condición 6 del plan de pruebas (FVT7).



*Figura 4.4.3.3.2 Histogramas de frecuencias acumuladas en el tiempo de vórtices, condiciones 6 y 22 del plan de pruebas. Registros en compuerta  $C_3$ .*

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

---

Con una disminución en el nivel de agua en el vaso de almacenamiento la propensión a la formación de vórtices fue mayor. Obsérvese que aunque la frecuencia de vórtices tipo 1, 2 y 3 fue similar en ambas condiciones, ocurrió un aumento en los tiempos de ocurrencia de vórtices para la condición con el nivel de agua en el vaso 2 m abajo del N.A.M.E.

Igualmente se presentó un aumento en la cantidad de vórtices del tipo 4 y 5 (menores pendientes de estos tipos en el histograma FVT8), e Incluso, para esta condición aparecieron unos cuantos vórtices del tipo 6.

### 4.4.4 Análisis de sumergencia

Los resultados obtenidos del análisis preliminar de vórtices en el dominio del tiempo (sección 4.4.3) estuvieron acordes con lo comentado sobre la semergencia de la sección 3.6. Para una carga constante, el incremento en la apertura de una compuerta se traduce en una reducción en la sumergencia y con ello, un aumento en la ocurrencia y magnitud de los vórtices.

A diferencia de la mayor parte de las estructuras de entrada que se han empleado para el estudio de este parámetro; en el caso de vertedores controlados por compuertas, la sumergencia es variable aún manteniendo una carga constante, puesto que cambia el área hidráulica de la estructura de entrada con la apertura de una compuerta.

Por ejemplo, las mayores sumergencias críticas calculadas para las distintas condiciones de prueba contempladas en este trabajo, es decir, al NAME y aperturas de compuertas pequeñas (1m y 2m), no fueron suficientes para evitar tener vórtices mas o menos fuertes (a partir del tipo 4<sup>\*\*</sup>).

En la figura 4.8.1 se muestran valores de la sumergencia propuestos por Knauss (1987), que son el resultado de la evaluación de sumergencias registradas en varios prototipos hechas por Gordon (1970), Pennino y Hecker (1979), Hecker (1981), Knauss (1983). También se muestra la evaluación de la sumergencia que proponen Yildirim y Kocabaş (1995); todas ellas evaluadas para el NAME y abertura de compuerta  $a = 1 m$  y  $a = 2 m$ , condiciones de interés en el modelo del vertedor de la P.H. La Angostura.

El coeficiente de descarga  $C_d$  de la ecuación obtenida por Yildirim y Kocabaş ecuación 3.6.6.) se obtuvo de los valores propuestos por Gentilini<sup>2</sup>.

---

<sup>2</sup> Clasificación ARL (sección 4.2.1)

<sup>2</sup> Véase en bibliografía: Naudascher E., (2001), figura 3.23.

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

En la figura 4.4.4.1 se observa se observa que la sumergencia máxima obtenida en el modelo, es decir, al N.A.M.E. y apertura de compuerta (inicial) de un metro, fue mayor, inclusive al valor que propone Knauss ( casi en un 20 % ), no obstante se presentaron vórtices mas o menos fuertes. En todos los demás casos la sumergencia propuesta por Knauss fue mayor que la experimental y, por lo tanto, la ausencia de vórtices fuertes no fue posible. En efecto, manteniendo fijo el N.A.M.E. y con aperturas mayores a la inicial (1m) se tiene una sumergencia menor, que permite la formación de vórtices regulares y fuertes, como se muestra en las mediciones realizadas (tabla 4.4.1.1 o las figuras 4.4.3).

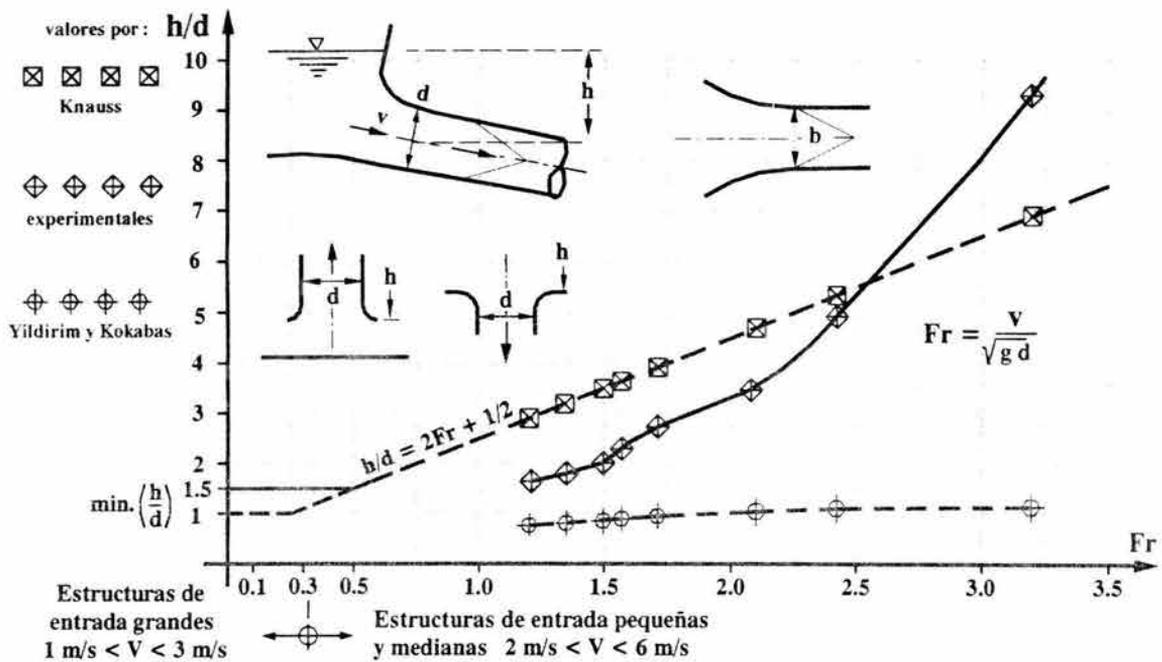


Figura 4.4.4.1 Comparación de las sumergencias teóricas según Knauss et al, Yildirim y Kokabaş y las experimentales obtenidas del model; P.H. La Angostura al NAME = 539.6 m.s.n.

También de la figura 4.4.4.1 se observa que en todos los casos analizados, las sumergencias propuestas por Yildirim y Kocabaş fueron bastante menores a las experimentales. En un inicio se pensó que dichos valores serían mayores a los propuestos por Knauss, dado que el modelo matemático de los primeros autores se apega mas al flujo que existe en compuertas (véase sección 3.6).

La incongruencia de tales resultados con respecto a los valores experimentales se debió a las velocidades considerables que se tienen en el canal de acceso del vertedor. De esta manera se obtuvieron valores cercanos al límite inferior del método (sección 3.6) e incluso menores, como en el caso de la apertura de 8 m.

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

Por los resultados anteriores, se puede decir que la sumergencia propuesta por Knauss para evitar tener vórtices puede ser aceptable para aberturas no pequeñas en las compuertas, ya que aún para aberturas pequeñas se presentaron vórtices considerables, esto es, del tipo 4 y 5.

En consecuencia, el flujo a través de compuertas analizado, produce vórtices de manera más efectiva que otras estructuras de entrada, tales como obras de toma, cárcamos de bombeo, vertedores de embudo, pozos en canales de irrigación, etc; de las cuales se obtuvieron las fórmulas empleadas.

Cabe mencionar que la dimensión lineal típica  $d$ , que para estructuras de entrada circulares es el diámetro, en los cálculos realizados para construir la figura F4.4.4.1, se considera un diámetro equivalente, el cual es un poco mayor a cuatro veces el radio hidráulico  $R_h$  de la sección rectangular, es decir, ligeramente superior al diámetro para entradas circulares en donde  $d = 4 \cdot R_h$ . Este valor fue ajustado de modo que el área hidráulica de una entrada rectangular ( $A_{rect}$ ), como el caso de estudio, sea casi igual a la correspondiente para una geometría circular ( $A_{cir}$ ) y el perímetro hidráulico de la apertura de la compuerta ( $P_{rect}$ ) fuera algo mayor al perímetro circular ( $P_{cir}$ ) con este diámetro equivalente; todo ello para el rango de aberturas analizado en este estudio (véase Figuras 4.4.4.2 y 4.4.4.3).

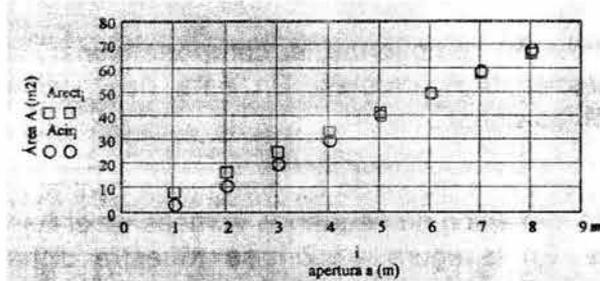


Figura 4.4.4.2 Áreas hidráulicas obtenidas del ajuste en el radio hidráulico de la compuerta.

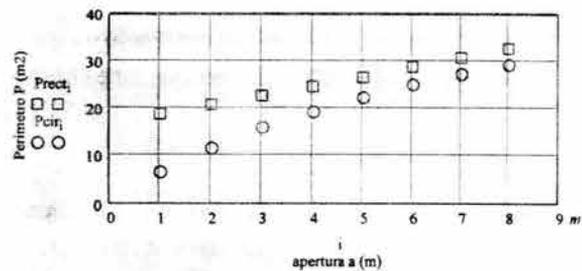


Figura 4.4.4.3 Perímetros hidráulicos obtenidas del ajuste en el radio hidráulico de la compuerta.

### 4.5 Análisis espacial de vórtices

Generalmente, la generación, secuencia de estados y disipación de vórtices ocurre en diferentes lugares de la estructura de entrada. En el caso de las compuertas de un vertedor, al cambiar el área de entrada y, en consecuencia, de la sumergencia durante la operación de éstas, tiene como consecuencia una mayor variación de la región de ocurrencia de vórtices de la que ocurre en otras estructuras de entrada, como se menciona en la segunda sección siguiente.

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

---

### 4.5.1 Plan de pruebas

Gracias a los resultados obtenidos en el análisis preliminar en el tiempo de la sección 4.4, se consideró una reducción en el plan de pruebas para el estudio de la ubicación de vórtices. En particular, sólo se analizó las condiciones de operación correspondientes al N.A.M.E., como se indica en la primera parte de la tabla 4.4.1.1.

Como se mencionó en la sección anterior, con un nivel de agua en el vaso de almacenamiento menor al N.A.M.E., la propensión a la formación de vórtices fue mayor, de tal forma que pudo observarse en los experimentos, por ejemplo, que la magnitud y frecuencia de vórtices ocurrida para una condición de operación dada con un nivel  $2m$  menor al N.A.M.E. ( $537.6 \text{ m.s.n.m.}$ ) fue aproximadamente equivalente a una condición al N.A.M.E. con una apertura en las compuertas de 1 ó 2 metros mayor que las aperturas correspondientes a la primera condición (N.A.M.E.).

En forma análoga a lo anterior, ocurrió con el comportamiento espacial de vórtices con la disminución de niveles en el vaso de almacenamiento, por este motivo se consideró pertinente la reducción del plan de pruebas mencionado.

### 4.5.2 Análisis de vórtices en el espacio

Al igual que el análisis en el tiempo de vórtices en compuertas, el comportamiento de éstos en el espacio también presentó características propias. En esta descripción espacial de vórtices también se empleó el método visual del ARL.

Cerradas completamente las compuertas derecha  $c_1$  e izquierda  $c_3$ , compuerta central  $c_2$  abierta totalmente y al N.A.M.E., se observó la formación de pequeños vórtices en el flujo de aproximación aguas arriba de las pilas. En la figura 4.5.2.1 se muestra dicha condición de operación en 180 segundos de registro en la compuerta izquierda ( $c_3$ ).

Obsérvese la aparición de unos cuantos vórtices pequeños en la nariz de la pila así como algunos vórtices cercanos a la compuerta y a la pared del canal de acceso.

En dichas condiciones de operación, la cantidad de vórtices que se presentó aguas arriba de la compuerta derecha fue todavía menor que en la compuerta izquierda (compárese figuras 4.5.2.1 y 4.5.2.2) además los vórtices se presentaron en el último tercio aguas arriba de la pila (a partir de la ubicación de la compuerta), próximos a la pared del canal de acceso.

A medida que se incrementaba la apertura de una compuerta ( $c_1$  ó  $c_3$ ) el flujo espiral era más intenso en la proximidad de la misma, con lo cual la frecuencia de aparición así como la magnitud de los vórtices fue mayor en tal zona.

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

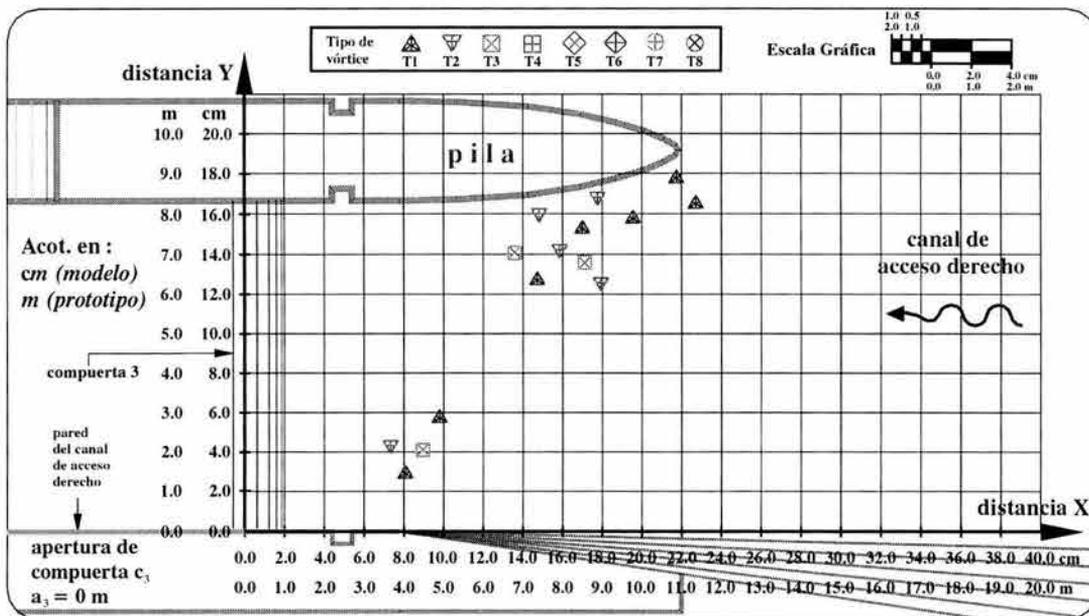


Figura 4.5.2.1 Localización de vórtices en el modelo. Condición: al N.A.M.E. compuertas  $C_1$  y  $C_3$  cerradas, compuerta  $C_2$  completamente abierta. Condición 1 del Plan de pruebas

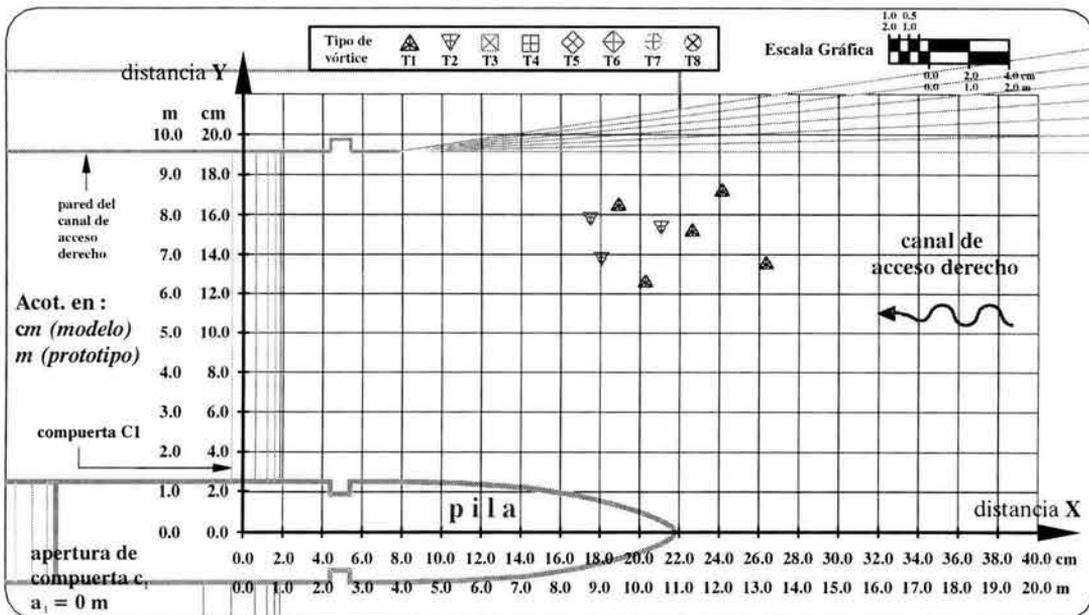


Figura 4.5.2.2 Localización de vórtices en el modelo. Condición: al N.A.M.E. compuertas  $C_1$  y  $C_3$  cerradas, compuerta  $C_2$  completamente abierta. Condición 1 del Plan de pruebas

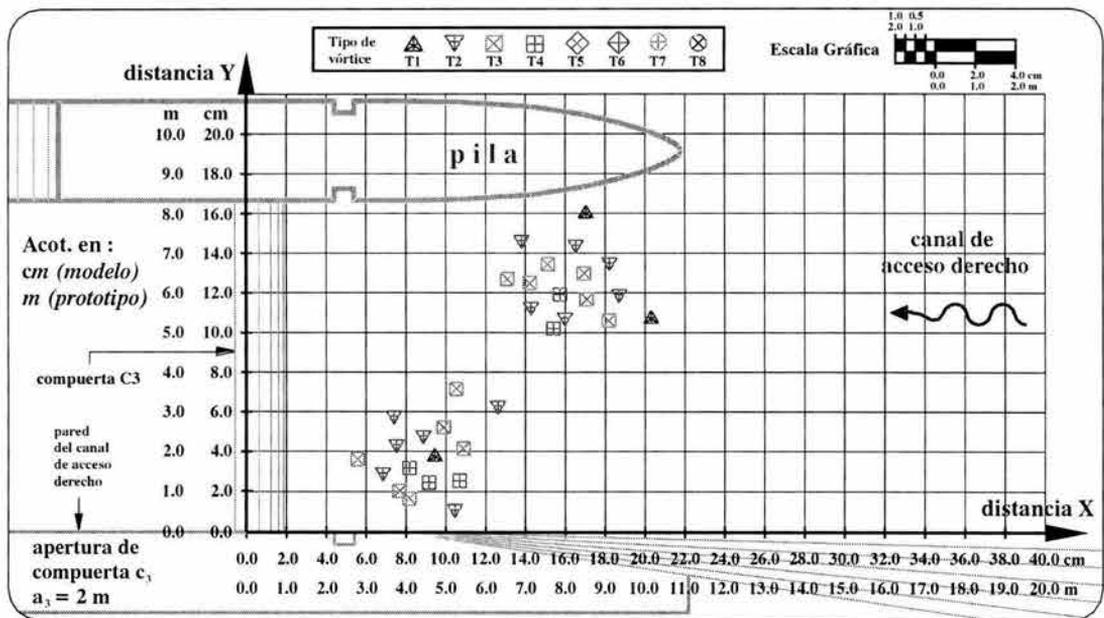
## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

De esta forma, para una apertura de  $2\text{ m}$  en la compuerta izquierda (véase figura 4.5.2.3), la magnitud y frecuencia de los vórtices aumentó, pero todavía se presentaron las dos regiones de formación de vórtices aguas arriba de ella, mencionadas para el caso de apertura nula de las compuertas (figura 4.5.2.1).

Con una apertura de  $4\text{ m}$  en la compuerta izquierda, la región de ocurrencia fue sólo una, más amplia y cercana a la compuerta (figura 4.5.2.4), resultado de la unión de las dos regiones mencionadas en la condición 1 del plan de pruebas.

Paulatinamente, con aperturas mayores en una compuerta, la región de ocurrencia de vórtices aguas arriba de ella fue reduciéndose a la vez que era más próxima a dicha compuerta. En las figuras 4.5.2.5 y 4.5.2.6 se muestra este proceso registrado en la compuerta izquierda; se puede ver que la región de ocurrencia quedó completamente definida: en el primer tercio aguas arriba de la pila (a partir de la ubicación de la compuerta).

Nótese también, de las figuras mencionadas, que la magnitud de los vórtices ocurridos fueron cada vez mayores así como la densidad de la región de ocurrencia, que se manifiesta por el incremento en la frecuencia de aparición de vórtices, como se mencionó anteriormente en el análisis preliminar en el tiempo.



**Figura 4.5.2.3** Localización de vórtices en el modelo. Condición: al N.A.M.E. compuertas  $C_1$  cerrada, apertura de compuerta  $C_3$  de  $2\text{ m}$ , compuerta  $C_2$  completamente abierta.  
Condición 6 del Plan de pruebas

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

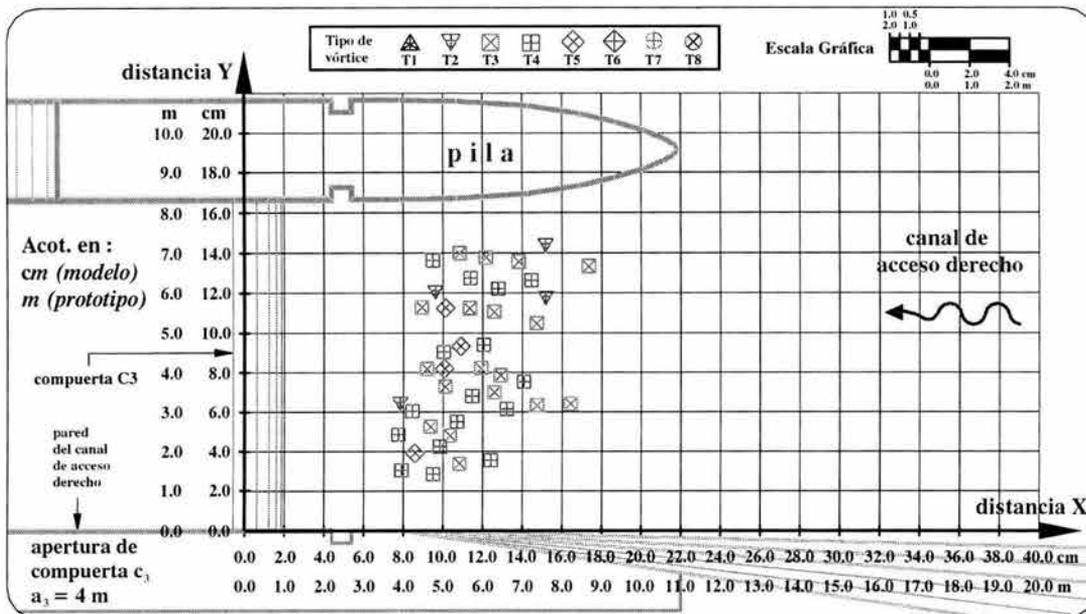


Figura 4.5.2.4 Localización de vórtices en el modelo. Condición: al N.A.M.E. compuertas  $C_1$  cerrada, Apertura de compuerta  $C_3$  de 4m, compuerta  $C_2$  completamente abierta. Condición 8 del Plan de pruebas.

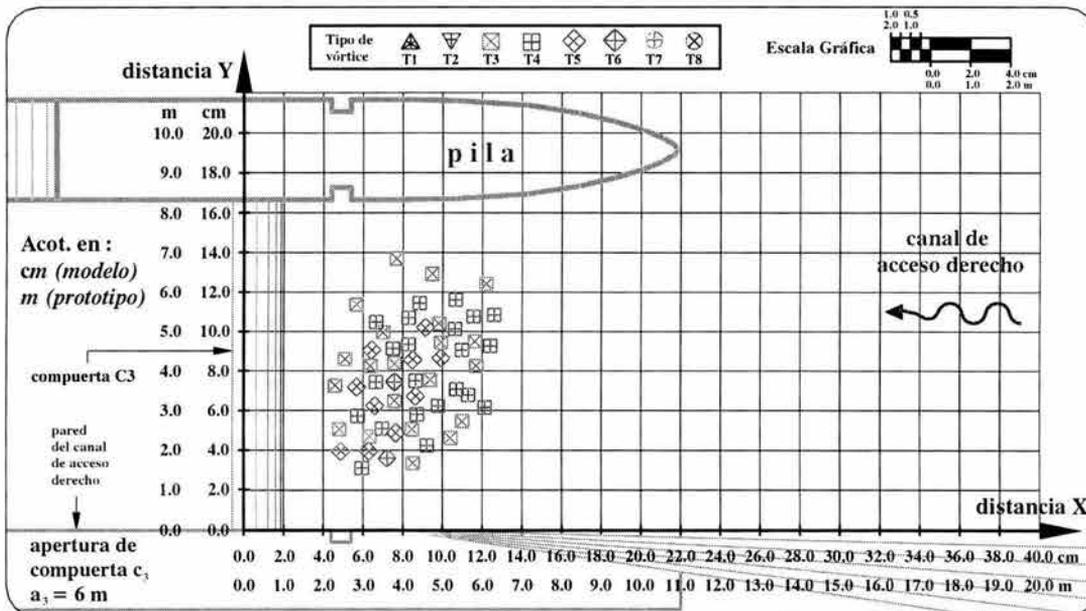
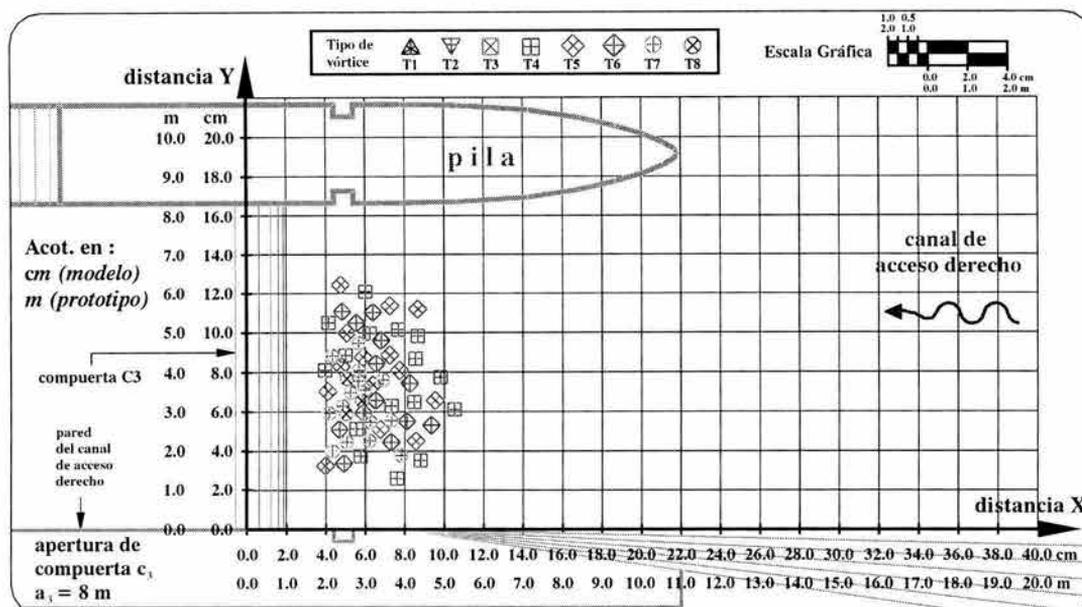
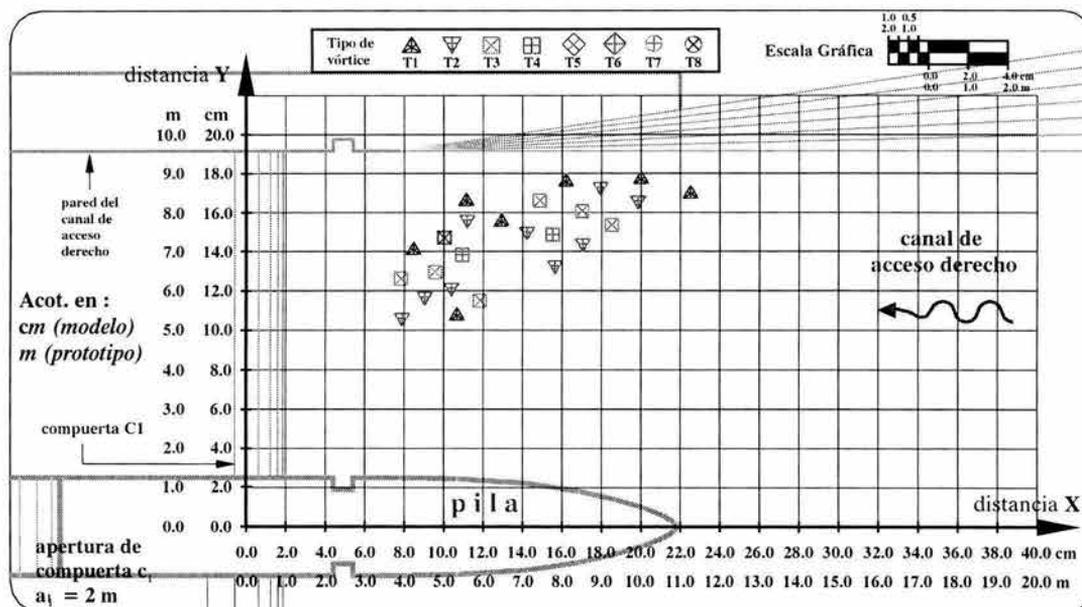


Figura 4.5.2.5 Localización de vórtices en el modelo. Condición: al N.A.M.E. compuertas  $C_1$  cerrada, apertura de compuerta  $C_3$  de 6m, compuerta  $C_2$  completamente abierta. Condición 9 del Plan de pruebas.

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor



**Figura 4.5.2.6** Localización de vórtices en el modelo. Condición: al N.A.M.E. compuertas  $C_1$  cerrada, apertura de compuerta  $C_3$  de 8m, compuerta  $C_2$  completamente abierta. Condición 10 del Plan de pruebas



**Figura 4.5.2.7** Localización de vórtices en el modelo. Condición: al N.A.M.E. compuertas  $C_3$  cerrada, apertura de compuerta  $C_1$  de 2m, compuerta  $C_2$  completamente abierta. Condición 15 del Plan de pruebas

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

---

El comportamiento espacial de los vórtices que ocurrió aguas arriba de la compuerta derecha  $c_1$  con manipulación de ésta, fue similar a lo descrito para la compuerta izquierda. Salvo que con una abertura nula o aberturas pequeñas de la compuerta, la región de ocurrencia en el primer tercio aguas arriba de la pila, no fue en la nariz de esta estructura, sino en la cercanía de la pared del canal de acceso como se puede observar en la figura 4.5.2.2 ya mencionada y en la figura 4.5.2.7, que se presenta una abertura de  $2m$  en la compuerta  $c_1$ .

Aunque la ubicación de los vórtices queda definida para grandes aberturas de las compuertas, los casos que interesan en el diseño y operación de compuertas son para aberturas menores, en donde, como se muestra más adelante, es posible suprimir o por lo menos reducir la fuerza del vórtice, de manera que no causen vibraciones nocivas que afecten la estructura de control.

### 4.6 Vórtices en el dominio del tiempo

Durante la etapa de muestreo que sirvió para el análisis de vórtices en el tiempo en su fase preliminar (sección 4.4.) se probaron diversas geometrías de estructuras disipadoras, cuyos detalles se explican en la sección 4.6.2. Todas ellas cumplieron a simple vista con el propósito deseado: el de romper o por lo menos aminorar la magnitud de los vórtices ocurridos.

Las estructuras ensayadas lograron romper el patrón de flujo espiral característico del fenómeno en estudio, de tal forma que ni siquiera se observaron vórtices tipo 1 y, en consecuencia, el método del ARL dejó de aplicarse.

Por este motivo, no sólo era importante probar el diseño de la estructura disipadora de vórtices mas eficiente, sino más importante aún, era probar si efectivamente los vórtices eran destruidos con tales estructuras.

Para lograrlo fue indispensable el empleo de una técnica objetiva, en la cual se realizara la medición de alguna cantidad directa o indirectamente dependiente de la magnitud de un vórtice.

Dada las cualidades especiales del fenómeno de vórtices vistas en las secciones anteriores y a las características del modelo físico empleado (sección 4.1), fueron descartadas varias alternativas en cuanto a la variable de medición. Por ejemplo, dada la inestabilidad espacial de los vórtices (analizada en la sección 4.5.2), variables directamente relacionadas como la profundidad del corazón de aire, son difíciles de medir. El empleo de métodos ópticos para conocer el campo de velocidades de vórtices [Chang E., (1979), Anwar H.O., Amphlett M.B.,(1980), Rajendran V.P., Constantinescu S.

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

---

G., (1999)], si bien son excelentes para calcular la circulación de un vórtice, ya que no alteran las condiciones del flujo, fueron descartadas, pues las fronteras del modelo (excepto compuertas) eran opacas. El rotámetro, para medir la velocidad tangencial de un vórtice así como el ángulo de remolino  $\alpha^{*1}$ , que permite cuantificar la cantidad de remolino que entra a una estructura de entrada [Nathan W. (1981), Padmanabhan M., (1982)], también se descartó debido a que la sensibilidad de los vórtices estudiados fue tal que podrían romperse, sino distorsionarse notablemente con el uso de este instrumento.

Existen otros métodos que pudieron adaptarse al modelo en estudio y que dan buenas mediciones del campo de velocidades del flujo con vórtices, por lo que permiten ser referencia para validar simulaciones numéricas, tal es el caso del velocímetro Doppler acústico probado por Ansar M. y Nakato T., (2001). Dada la sofisticación de dichos equipos y, en consecuencia su alto costo, no fue posible emplearlos.

Por lo tanto, se decidió emplear transductores de presión para medir la presión dinámica que ejerce el flujo ante la presencia de vórtices sobre una compuerta.

Esta alternativa de medición permite conocer directamente una de las características del flujo (presión) de entrada a la compuerta. Aunque tal característica es global, pues incluye además de la acción de los vórtices mismos, el oleaje, zonas de circulación, rebote de la vena líquida sobre la compuerta y, en general, la turbulencia del fluido; se espera que sea representativa, al compararla con una prueba en estado de ausencia de vórtices "equivalente". Es decir, una prueba donde no se existen vórtices, pero los efectos en el flujo debidos a los demás factores mencionados sean aproximadamente los mismos a los de las pruebas donde hay vórtices.

### 4.6.1 Plan de pruebas experimentales

Tomando en cuenta las consideraciones para la acotación del universo muestral hechas en el capítulo 4.3 y a los resultados obtenidos de los análisis preliminar en el tiempo y espacial de vórtices realizados en las secciones anteriores, fue posible diseñar un plan de pruebas más específico.

Efectivamente, gracias a tales resultados fue posible reducir el plan de pruebas mencionado en la sección 4.4.1 y con ello, reducir la cantidad de trabajo, pues se consideró que en esta nueva etapa experimental ahora interviene un nuevo parámetro: las diferentes geometrías de las estructuras disipadoras de vórtices propuestas.

Las consideraciones que permitieron acotar el nuevo universo muestral de pruebas fueron:

---

\*1  $\alpha = \arctan v_t / v_a$ , donde  $v_t$  es la velocidad tangencial y  $v_a$  es la velocidad axial de un vórtice.

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

- Acorde con el inciso e de la sección 4.3 y a la similitud de comportamiento de vórtices entre el efecto de disminución del nivel de agua en el vaso de almacenamiento e incremento en la abertura de compuerta (sección 4.5.1), el único nivel en el vaso de almacenamiento considerado fue el N.A.M.E.
- La medición de las fluctuaciones de presión de vórtices se efectuó aguas arriba de la compuerta que se manipuló, pues los vórtices simultáneos que ocurren en la compuerta extremo fueron pequeños, en comparación con los primeros (sección 4.4.3.2).
- También como consecuencia de la excentricidad del flujo de llegada, los vórtices ocurridos aguas arriba de la compuerta izquierda  $c_3$ , que era manipulada, fueron ligeramente más intensos que los correspondientes a la compuerta derecha  $c_1$ . Por lo tanto, se registraron los vórtices ocurridos aguas arriba de la compuerta  $c_3$ , que correspondieron al caso más severo.
- En la fase experimental preliminar se observó que con grandes aberturas en una compuerta, los vórtices eran muy fuertes y que las estructuras disipadoras probadas no cumplían bien con su función. Es más, debido a la gran turbulencia, se presentaba un choque violento del flujo sobre estas estructuras. Por lo que se estableció una abertura máxima de compuerta de 4 m, con lo cual queda definido el inciso i del universo muestral mencionada en la sección 4.3.

Por lo mencionado anteriormente y tomando en cuenta las estructuras disipadoras probadas en este estudio, que se detallan en la sección siguiente, se elaboró el plan de pruebas que se muestra en la tabla 4.6.1.1.

NAME: 539.6 m.s.n.m.

H = 40 cm - 20 m

Compuerta central  $c_1$  totalmente abierta:  $a_1 \rightarrow \infty$

Compuerta derecha  $c_2$  cerrada:  $a_2 = 0$

condición número	Gasto de descarga $Q_1$ ( $dm^3/s$ ) - ( $m^3/s$ )	sumergencia $hs$ (cm) - (m)	Abertura de	Sumergencia de transductores		Presencia de vórtices	Tipo de dispositivo disipador de vórtices
			compuerta $c_1$ $a_1$ (cm) - (m)	superior $htr_1$ (cm) - (m)	inferior $htr_2$ (cm) - (m)		
1 ó c1	81.220 - 1435.7816	-	0,00	13,80 - 6,90	28,0 - 14,00	no	-
2	81.220 - 1435.7816	-	0,00	13,80 - 6,90	28,0 - 14,00	si	-
3	81.220 - 1435.7816	-	0,00	13,80 - 6,90	28,0 - 14,00	si	propela redondeada
4	81.220 - 1435.7816	-	0,00	13,80 - 6,90	28,0 - 14,00	si	rejilla
5	81.220 - 1435.7816	-	0,00	13,80 - 6,90	28,0 - 14,00	si	propela recta
6 ó b1	94.9323 - 1678.1813	38,0 (19,00)	4,0 - 2,00	9,80 - 4,90	24,00 - 12,00	si	-
7 ó b2	94.9323 - 1678.1814	38,0 (19,00)	4,0 - 2,00	9,80 - 4,90	24,00 - 12,00	si	propela redondeada
8 ó b3	94.9323 - 1678.1815	38,0 (19,00)	4,0 - 2,00	9,80 - 4,90	24,00 - 12,00	si	rejilla
9 ó b4	94.9323 - 1678.1816	38,0 (19,00)	4,0 - 2,00	9,80 - 4,90	24,00 - 12,00	si	propela recta
10	106.309 - 1879.289	36,0 (18,00)	8,0 - 4,00	5,80 - 2,90	20,00 - 10,00	si	-
11	106.309 - 1879.289	36,0 (18,00)	8,0 - 4,00	5,80 - 2,90	20,00 - 10,00	si	propela redondeada
12	106.309 - 1879.289	36,0 (18,00)	8,0 - 4,00	5,80 - 2,90	20,00 - 10,00	si	rejilla
13	106.309 - 1879.289	36,0 (18,00)	8,0 - 4,00	5,80 - 2,90	20,00 - 10,00	si	propela recta

Tabla 4.6.1.1 Plan de pruebas experimentales para el análisis de vórtices en el dominio del tiempo.

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

En la columna número 8 de la tabla anterior se mencionan los dispositivos disipadores de vórtices probados. Los detalles de éstos, se citan en la sección siguiente.

En las columnas 5 y 6 se indican las sumergencias del transductor superior  $htr_1$  e inferior  $htr_2$ , (en  $cm$ , modelo y en  $m$ , prototipo) respectivamente, como resultado de abrir la compuerta izquierda  $c_3$ .

### 4.6.2 Estructuras disipadoras experimentales

Las estructuras disipadoras de vórtices probadas en los análisis preliminares, como se mencionó en la sección anterior, ahora constituyen nuevos parámetros en esta etapa experimental.

Se ensayaron tres tipos de estructuras a saber:

- 1 **Propela de 6 aspas rectas** (ver figura 4.6.2.1 y apéndice D). Las aspas son de sección cuadrada de lado ( $bp$ )  $1.2\text{ cm}$  y largo ( $lp$ ) de  $6.5\text{ cm}$ . La propela está unida a un vástago de  $45.0\text{ cm}$  de altura y sección circular de  $0.5\text{ cm}$  de diámetro ( $dv$ ), de tal forma que éstos puedan girar y de esta forma disipar amortiguadamente a los vórtices. El vástago está apoyado en el puente de maniobras del vertedor, el cual tiene en su claro medio un orificio cuyo diámetro es ligeramente mayor al del vástago para que éste último pueda girar. Este dispositivo tiene 2 propelas, una ubicada inmediatamente debajo del nivel de agua en el vaso y otra a la mitad de dicho nivel.

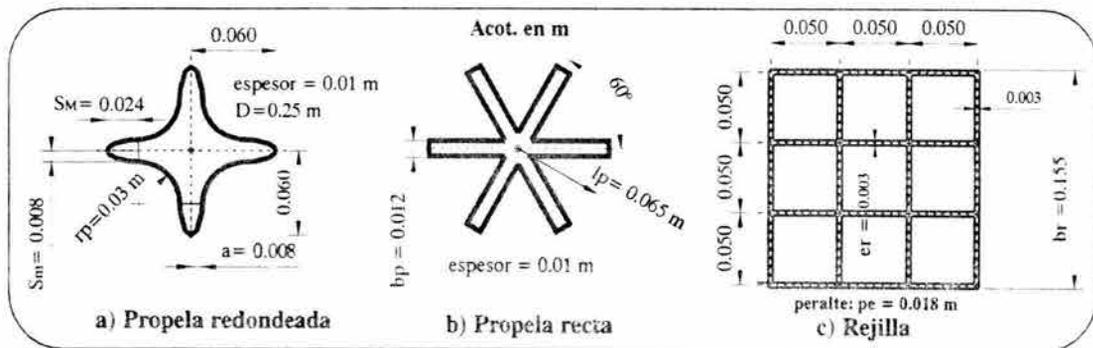


Figura 4.6.2.1 Dispositivos supresores experimentales empleados para la disipación de vórtices.

- 2 **Propela de 4 aspas redondeadas** (ver figura 4.6.2.1 y Apéndice D). Este dispositivo es similar al anterior, salvo que este tiene cuatro aspas, las cuales están formadas por elipses con semiejes mayor ( $S_M$ ) y menor ( $S_m$ ) de  $2.4\text{ cm}$  y  $0.8\text{ cm}$ , respectivamente. Estas aspas están unidas mediante arcos circulares de  $3.0\text{ cm}$  de radio ( $r_p$ ).

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

- ③ **Rejilla** (ver figura 4.6.2.1 y Apéndice D). Consistió en un marco cuadrado de 15.4 cm de lado ( $b_r$ ), peralte ( $p_e$ ) de 1.8 cm y espesor ( $e_r$ ) de 0.34 cm., el cual estuvo dividido a lo largo y ancho en tres tramos iguales. Este marco estuvo apoyado por cuatro pernos empotrados en la pared y la pila del vertedor derecho, de tal forma que éste permaneció inmediatamente abajo del nivel de agua en el vaso como se muestra en el apéndice D.

Los tres dispositivos anteriores fueron contruidos con madera, cubierta con barniz para protegerlos del agua. El vástago fue una barra de acero.

Descrito el medio de medición y las estructuras disipadoras empleadas, a continuación se menciona el equipo de medición empleado en esta etapa así como el proceso de adquisición y análisis de los datos medidos.

### 4.6.3 Sistema de Medición. Adquisición de datos

La descripción del proceso de adquisición de datos de las señales correspondientes a la fluctuación de presiones debidas a la presencia de vórtices, la presentación numérica y gráfica de los mismos, así como del equipo utilizado para ello, se describe a continuación mediante las etapas que forman el sistema de medición empleado.

En la figura 4.6.3.1 se muestra esquemáticamente el proceso de muestreo experimental a comentar (hasta el número de proceso 5).

1. El **medio de medición**, en este caso es el agua que llega del vaso de almacenamiento a las compuertas del vertedor.
2. **Instrumento sensor** de la magnitud de interés. Son las celdas de presión o transductores, los cuales están en contacto con el agua mediante el diafragma.

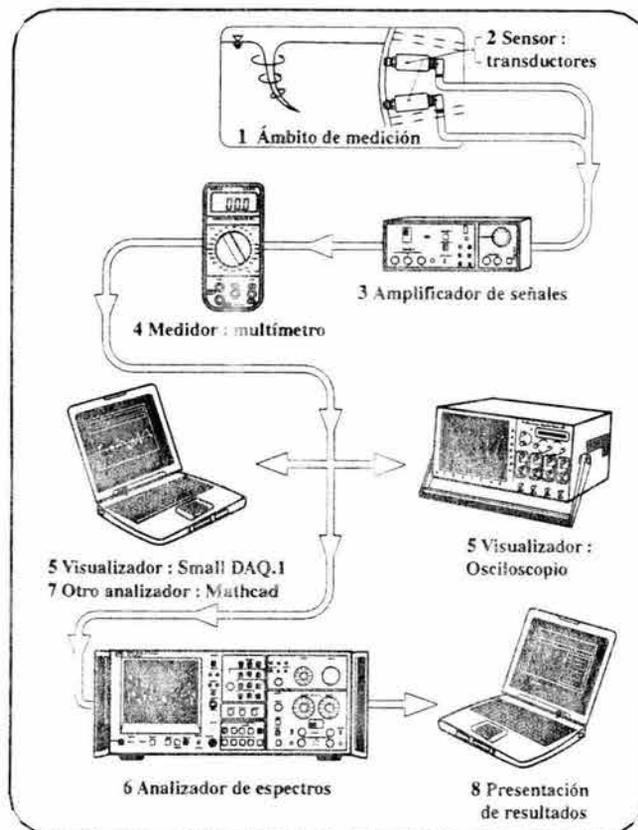
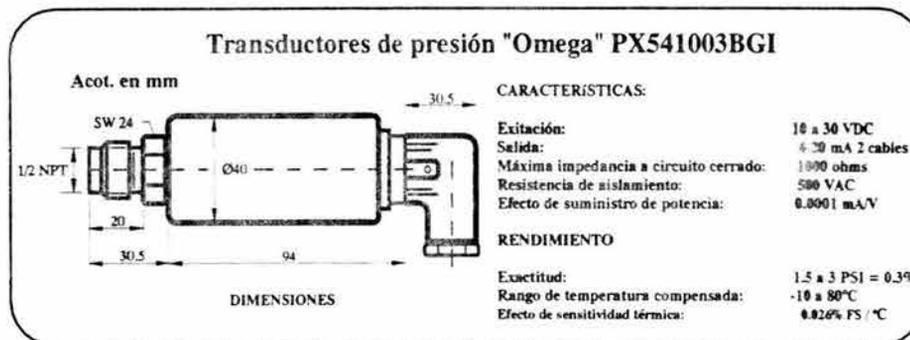


Figura 4.6.3.1 Proceso del muestreo experimental empleado para el análisis de vórtices en el dominio del tiempo.

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

En las condiciones de operación más importantes en este estudio establecidos en el inciso e) de la definición del universo muestral (sección 4.3), ocurrieron vórtices pequeños y medianos en magnitud, según el estudio preliminar de vórtices en el tiempo. Además, del estudio espacial de vórtices se observó que la ubicación de éstos no fue tan próxima a las compuertas como la de los vórtices fuertes.

Por estos motivos fue importante disponer de transductores de baja carga ultrasensibles para poder detectar la influencia de los vórtices en la presión total del agua que actuó sobre las compuertas; ya que se ha observado en algunos casos [(Murakami M. et al (1969) y Florajancic D., (1970)] que aún con vórtices con corazón de aire cuyo diámetro es pequeño con respecto a la estructura de entrada, no producen efectos que puedan ser medidos significativamente. Además, otro problema de los métodos directos de medición de vórtices, es que la correlación entre el vórtice y su parámetro (dependiente) seleccionado puede ser baja [Padmanabhan M., (1982)] y variable con otros parámetros. En consecuencia, se emplearon transductores "Omega" modelo PX541-003BGI<sup>1</sup>. Estas celdas operan con cargas de agua de hasta  $\pm 2.109$  m. Otras características de este instrumento se muestran en la figura 4.6.3.2.



*Figura 4.6.3.2 Características de los transductores de presión empleados en el proceso de medición de vórtices*

Estas celdas también son un instrumento **convertidor**, pues al recibir presión el diafragma, este se deforma (energía mecánica) y posteriormente se convierte en una señal eléctrica, que es más fácil para su transmisión y procesamiento. Se instalaron dos celdas de presión al centro de la compuerta tres (véase apéndice D). El transductor superior  $tr_1$  se encuentra a una distancia  $dtr_1$  de 26 cm (modelo) del labio inferior de la compuerta, como se muestra en la figura 4.6.3.3. Mientras que el transductor inferior  $tr_2$  se encuentra a una distancia  $dtr_2$  de 12 cm (modelo), del labio inferior de la compuerta (ver figura anterior). De este modo se registraron fluctuaciones de presión a distintas profundidades. Con ambas posiciones de las celdas se garantizó tener un tirante de agua sobre ellas, para

<sup>1</sup> Véase en referencias electrónicas: Omega Transducers, (2003).

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

las aberturas de compuerta probadas, como se puede observar en las sumergencias del transductor superior de la tabla 4.6.1.1.

3. El **amplificador de señales** es un elemento **manipulador** que aumenta la magnitud de la señal eléctrica, que recibe de los transductores, lo suficiente para poder registrarla en los dispositivos de captura y análisis de señales eléctricas. Se empleó un amplificador de señales "Pelican" 1120 Case.

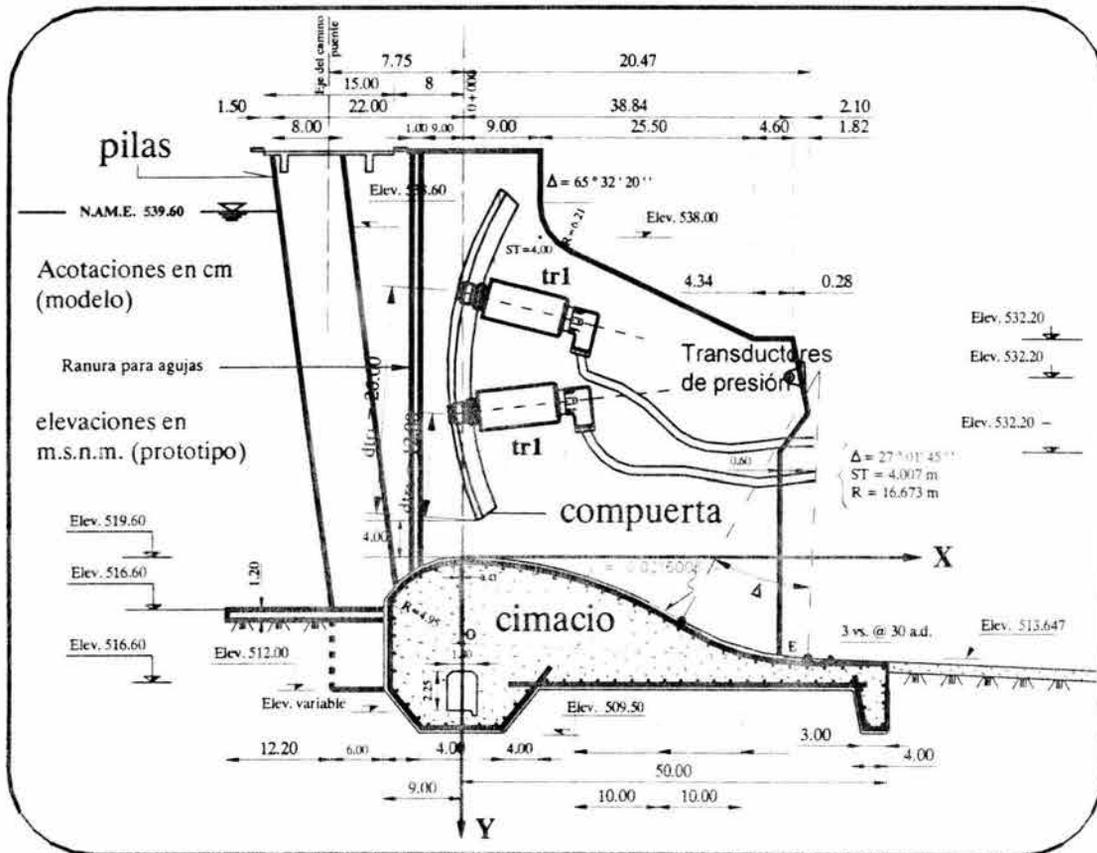


Figura 4.6.3.3 Localización de los transductores de presión en el vertedor

4. **Medidor** de la magnitud de las señales. Una vez registrada la señal muestreada se empleó un multímetro "Extech" 380602, para conocer los voltajes de la misma. Con estos instrumentos la señal se calibra registrando diferentes valores de energía en *Volts* para obtener una relación entre la presión actuante y el voltaje registrado.

Desafortunadamente, debido al registro de otras señales ajenas al fenómeno estudiado y a la sensibilidad de los transductores de presión, no se tuvo un

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

escalamiento preciso de la señal, sin embargo, el valor estimado si es del orden de las fluctuaciones de presión debidas al oleaje. Esto se menciona más adelante.

5. **Visualizador** de las señales eléctricas. Para ello se empleó una computadora personal con el software Small DAQ 1.0, que captura la información que va enviando el multímetro para procesarla y desplegarla en el monitor en una gráfica ( $t - V$ ) que muestra la variación de la intensidad de la señal, (en *Volts, V*), en el tiempo (en *segundos, s*) de forma continua en el lapso de prueba, como se muestra en la figura 4.6.3.4. En dicho programa se emplean dos de los cuatro canales de registro disponibles, que corresponden a las dos celdas mencionadas anteriormente.

El amplificador de señales se reguló de tal forma que permitiera una clara presentación de las dos señales simultáneas (de las dos celdas) en el visualizador, es decir, que fueran completamente visibles, pero procurando que se mantuvieran separadas (sin intersecciones) durante su registro para facilitar su análisis, como se puede observar en la figura anterior. Los valores graficados son almacenados en archivos de texto extensión .dat.

Para comprobar la correcta graficación de las señales del Small DAQ, se empleó un osciloscopio "Nicolet" 120, el cual reproduce directamente la gráfica  $t-V$  en la pantalla del mismo mediante un haz de luz.

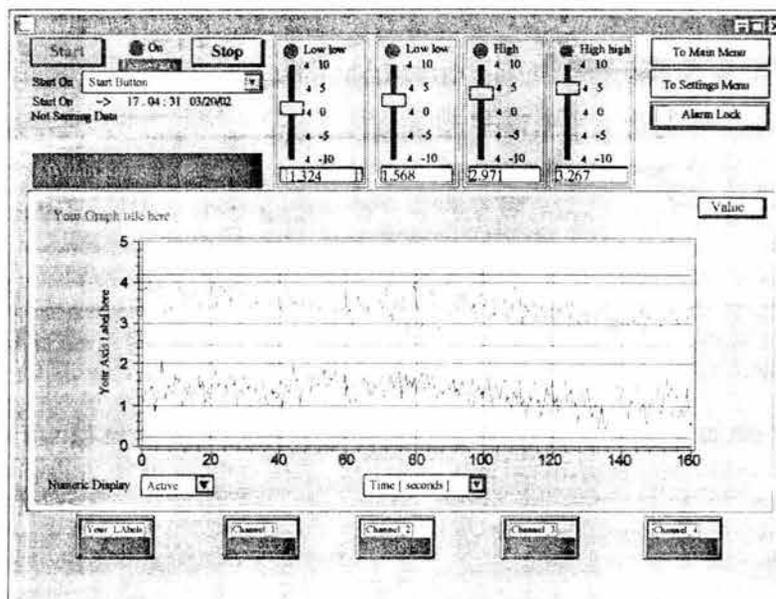


Figura 4.6.3.4 Programa Small DAQ 1.0 empleado para la visualización y Registro de las señales muestreadas.

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

**7 Analizador.** Con el software Mathcad<sup>1</sup> se analizó parte de los datos muestreados. Así mismo, mediante valores numéricos o la representación gráfica de éstos, que permite hacer este programa, se obtuvo la presentación de resultados. Mathcad es un programa matemático de uso global.

En general, a mayor flexibilidad, adaptabilidad, características y potencia de cálculo de un programa de aplicación, su complejidad aumenta y, en consecuencia, el tiempo de aprendizaje del mismo es mayor. Un ejemplo de esto es el programa Mathematica<sup>2</sup>. Se seleccionó Mathcad para analizar los datos muestreados porque equilibra adecuadamente la potencia del cálculo matemático con la facilidad de utilización. Además contiene una amplia librería de aplicaciones que se han desarrollado y está disponible en diversos sitios de Internet. También permite desarrollar e interactuar con lenguajes como C o C++ para analizar problemas más complejos.

El análisis de las señales obtenidas durante el proceso de medición descrito, se menciona en la sección siguiente.

### 4.6.4 Relación voltaje de la señal-presión dinámica

Las señales obtenidas por el visualizador, que representan la variación de presiones del flujo sobre la compuerta  $c_3$ , son señales eléctricas que varían su intensidad, en Volts, en el tiempo (figura 4.6.4.1). Por lo que fue necesario obtener la relación entre la presión actuante y el voltaje registrado.

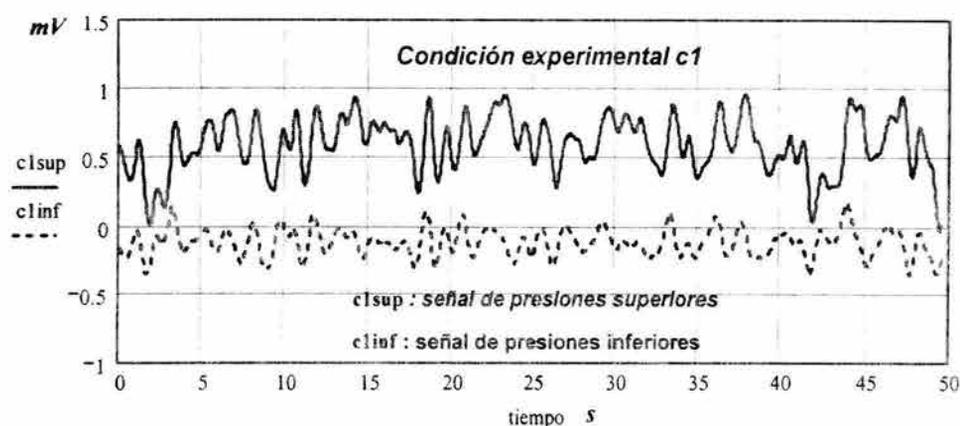


Figura 4.6.4.1 Señales eléctricas de las fluctuaciones de presión. Condición c1, "sólo oleaje" del plan de pruebas experimentales (Tabla 4.6.1.1)

<sup>1</sup> Es una marca registrada de MathSoft, Inc. Véase referencia electrónica: MathCad. Mathsoft Engineering & Education Inc.

<sup>2</sup> Es una marca registrada de Wolfram Research, Inc. Véase en referencia electrónica: Wolfram Research Inc..

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

---

Desafortunadamente, debido a la sensibilidad de los transductores de presión, no fue posible establecer una calibración directa, sin embargo, fue posible estimar tal relación de estas magnitudes, como se describe a continuación.

Para tener una aproximación de la presión registrada se consideró que el valor medio de la señal del oleaje de la condición de prueba 1, tabla 4.6.1.1, corresponde al nivel (estático) del N.A.M.E. y que la fluctuación máxima de dicha señal equivale a una ola específica en la que el porcentaje de las olas mayores a ésta es menor al 0.4 %<sup>1</sup>.

De esta forma, la relación entre la altura de ola específica, considerada como máxima ( $H_{m\acute{a}x}$ ) y la ola significativa en el vaso ( $H_s$ )<sup>1b</sup> fue de 1.844.

En el cálculo de la ola significativa se empleó el criterio propuesto por el Beach Erosion Board<sup>3</sup> mediante

$$\frac{g \cdot H_s}{U^2} = 0.0026 \left( \frac{g \cdot F}{U^2} \right)^{0.47} \quad (4.6.4.1)$$

donde

- $F$  longitud del Fetch efectivo, en  $m$
- $H_s$  altura de la ola significativa, en  $m$
- $g$  aceleración de la gravedad en  $m/s^2$
- $U$  velocidad del viento integrado, en  $m/s$

El método empleado para el cálculo del fetch efectivo considera que el ancho de este establece una restricción importante sobre su longitud<sup>2</sup>.

En la figura 4.6.4.2 se muestran las longitudes secundarias (radiales) del fetch a cada 5° respecto a la longitud mayor que puede recorrerse sobre el vaso de la P.H. La Angostura al N.A.M.E., en la dirección del viento medio de la zona.

El viento dominante en casi todo Chiapas, aparte de los vientos locales, es el alisio del noroeste<sup>5</sup>, por lo tanto, se consideró ésta dirección para el cálculo del fetch efectivo. Además, con esta dirección se presentaban longitudes mayores de fetchs secundarios que con otras direcciones de vientos más rápidos.

---

<sup>1</sup> Con base en las relaciones entre alturas de ola que ocurren en una secuencia continua y condiciones cercanas a un estado uniforme. Para mayor detalle véase la referencia: Frías V. A., Moreno C. G., (1986)

<sup>1b</sup> Referencia: Moreno G., Frías A. (1986).

<sup>2</sup> Referencia: Saville T., (1954).

<sup>5</sup> Referencia electrónica: Sagarpa(2000).

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

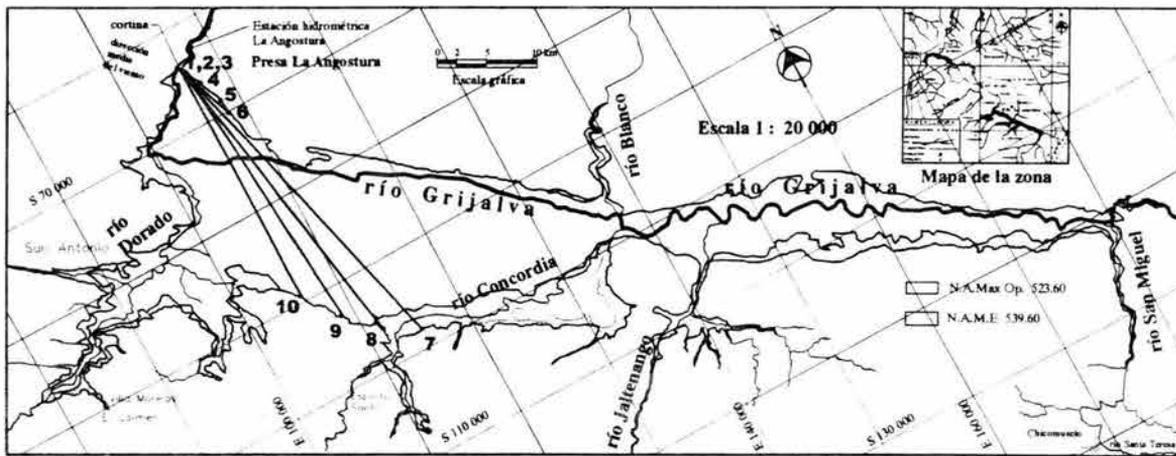


Figura 4.6.4.2 Fetchs calculados en el vaso de almacenamiento de la P.H. La Angostura.

La longitud efectiva de cada radial es la componente de su longitud medida en la dirección paralela a la radial central, entonces

$$F = \frac{\sum x_i \cdot \cos \alpha_i}{\sum \cos \alpha_i} \quad (4.6.4.2)$$

donde:

- $F$  longitud del fetch efectivo, en  $m$
- $x_i$  longitud efectiva de cada radial, en  $m$
- $g$  aceleración de la gravedad, en  $m/s^2$
- $H_s$  altura de la ola significativa, en  $m$
- $U$  velocidad integrada del viento, en  $m/s$

De esta forma el fetch efectivo calculado fue de 2132  $m$ . La magnitud de la velocidad media del viento ( $Um$ ) considerada fue de 5.383  $m/s$ , según los registros de la estación meteorológica con el mismo nombre<sup>6</sup>.

Para el cálculo de la velocidad integrada del viento  $U$ , se ajusta la velocidad media del viento  $Um$  al tomar en cuenta factores como la altura del anemómetro (10  $m$ ) y su ubicación (al fondo de un valle algo profundo), según el método de Braslavskov<sup>7</sup>. Además, considerando que la estación meteorológica esta en un bosque y que el ancho del embalse es mayor a 500  $m$ , se obtuvo una velocidad integrada del viento  $U$  de 19.926  $m/s$ .

<sup>6</sup> Referencia: de los Boletines del Instituto Geológico Minero y Meteorológico, México.

<sup>7</sup> Referencia: Maza A. J., Sánchez B., J. L., (1966).

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

Con los resultados anteriores, al evaluar la expresión 4.6.4.1. se tiene que la altura de la ola significativa  $H_s$ , es de  $0.678\text{ m}$  y, como se mencionó anteriormente, la altura de la ola máxima  $H_{m\acute{a}x}$  considerada fue  $1.844 H_s$ , en consecuencia, la altura de la ola máxima fue de  $1.25\text{ m}$  ( $2.5\text{ cm}$ , modelo), la cual se hizo corresponder a la máxima fluctuación registrada de la prueba con oleaje solamente (condición 1 de la tabla 4.6.1.1).

Para el registro del transductor inferior se considera que la máxima fluctuación es linealmente proporcional a la correspondiente a la señal registrada en el transductor superior.

De manera análoga, se procedió a calcular la relación de las magnitudes anteriores para las demás pruebas. Los valores de las ecuaciones de conversión que relacionan linealmente<sup>8</sup> las voltajes-cargas piezométricas fueron muy similares en todas las pruebas. Promediando los valores de los coeficientes obtenidos (pendiente y ordenada a origen) se obtuvieron las siguientes ecuaciones de conversión:

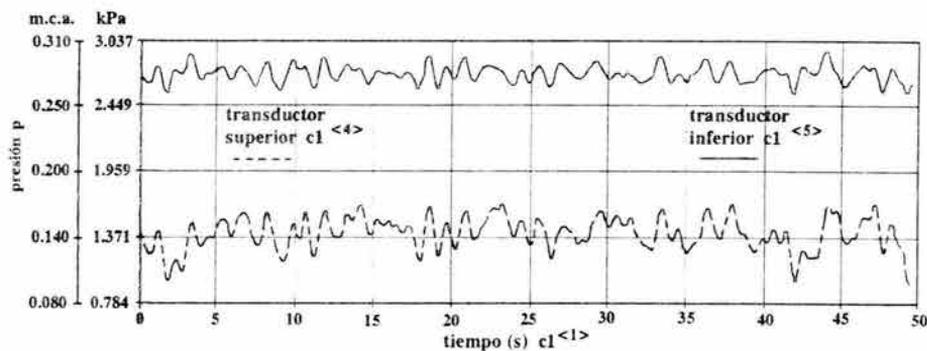
$$\text{Transductor superior} \quad hp_s(V) = 0.070 \cdot V + 0.143 \quad (4.6.4.3)$$

$$\text{Transductor inferior} \quad hp_i(V) = 0.070 \cdot V + 0.288 \quad (4.6.4.4)$$

donde

$hp_s$       carga piezométrica en el transductor superior, en  $m$   
 $hp_i$       carga piezométrica en el transductor inferior, en  $m$   
 $V$          voltaje de la señal eléctrica, en  $V$

Estas relaciones permitieron obtener las señales piezoeléctricas de las condiciones del plan de pruebas citado, como se muestra, por ejemplo, en gráfica  $t$ - $hp$  de la condición "sólo oleaje" en la figura 4.6.4.3



*Figura 4.6.4.3 Señales piezométricas de las fluctuaciones de presión. Condición número 1 del plan de pruebas experimentales (Tabla 4.6.1.1)*

<sup>8</sup> Ver referencia: Echávez A. G. (1996).

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

---

Por las razones dadas al inicio de la sección siguiente (4.6.5), no fue posible obtener señales para todas las condiciones establecidas en el plan de pruebas experimentales de la sección 4.6.1. Por lo que se eligieron las condiciones intermedias de operación de compuertas del plan definido en 4.6.1, esto es, apertura de 2m (prototipo) en la compuerta izquierda c3 que corresponden a las condiciones 6 a 9 de la tabla 4.6.1.1; así como a la condición de "sólo oleaje" (condición 1 ó c1) de la tabla mencionada.

### 4.6.5 Análisis de Vórtices en el dominio del tiempo

En términos generales, la predicción de las características de los vórtices formados aguas arriba de compuertas como son, por ejemplo, la circulación, velocidad, presión dinámica y localización, son de carácter aleatorio. Así, para el caso en estudio, fue única cada señal o muestra de las fluctuaciones de presión  $f_i(t)$  registrada en el tiempo, obtenidas con el sistema de adquisición de datos empleado (sección 4.6.3).

Debido a que no puede establecerse, como en los procesos deterministas<sup>\*1</sup> una expresión matemática explícita para los registros en el tiempo de un fenómeno aleatorio, procedimientos estadísticos se emplean para definir las propiedades descriptivas de los datos<sup>\*1</sup>. La cantidad de datos debe ser suficientemente grande para que éstos sean representativos del fenómeno en estudio.

Es importante mencionar que no fue posible tener un conjunto amplio de señales (o funciones) de las fluctuaciones de presión medidas, para poder determinar su estadística y sus respectivas medidas de probabilidad para que dicho conjunto o ensamble del proceso estocástico en estudio quedara definido [Bendat y Piersol, 1986)]. Esto se debió a varios factores como la variación en la intensidad de la corriente eléctrica en la instalación del modelo, que provocaba un mal funcionamiento o la inhabilitación del equipo de medición. Las membranas ultrasensibles de los transductores de presión, que iban deformándose permanentemente en cada uso, lo cual en un cierto lapso, provocaría una distorsión importante en la medición de la señal de salida. Debido a la longevidad del modelo físico empleado, el cárcamo de alimentación presentó importantes fugas de agua, lo cual fue otra limitante para emplear el modelo físico por tiempos prolongados.

No obstante lo anterior, en este estudio fue posible hacer ciertas consideraciones apoyadas en la evidencia experimental para lograr hacer el análisis. En efecto, considerando las ventajas que presenta un proceso estocástico estacionario ergódico<sup>\*2</sup> para su estudio, en este trabajo se considera como tal a la variación en el tiempo de las fluctuaciones de presión. Dicha suposición no es tan aventurada si se tiene en cuenta que, generalmente, en el estudio de la turbulencia se acepta como válida la hipótesis de ergodicidad.

---

\*1 Véase sección A.1: Procesos deterministas del apéndice A.

\*2 Véase sección A.2 : Procesos estocásticos del apéndice A.

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

### 4.6.5.1 Análisis de Turbulencia

Muchos de los problemas de la Ingeniería, como el caso de estudio, involucran el conocimiento parcial de sistemas y de señales de entrada. Frecuentemente se recomienda dividir el problema en subsistemas para facilitar su estudio.

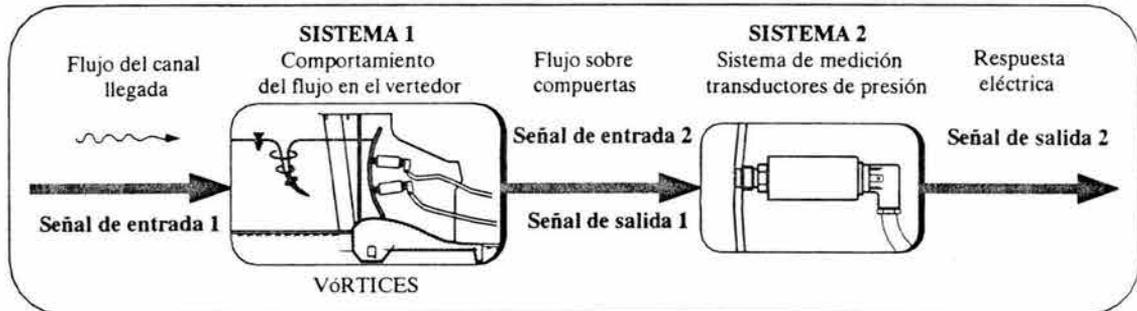


Figura 4.6.5.1.1 Señales y sistemas del problema de estudio.

El problema tratado en este estudio, que es un sistema en serie (véase figura 4.6.5.1.1), se subdividió en dos subsistemas principales.

El primero tiene que ver con el problema en sí, es decir, con el estudio de la interacción entre el flujo y sus fronteras (compuertas, pilas, paredes del canal) que, entre los diversos fenómenos hidráulicos que ocurren en un vertedor, en el caso de estudio incluye la formación de vórtices así como su disipación con o sin dispositivos.

En este sistema se considera al flujo proveniente del canal de llegada como la señal de entrada. Dicho flujo, después de su paso por el sistema, incide sobre los transductores instalados en la compuerta izquierda y se considera la señal de salida, que es estudiada para inferir algunas características de interés de este sistema. Por lo anterior, se dice que el problema en estudio es de tipo inverso<sup>1</sup>. En esta sección y la siguiente se realizarán análisis de este tipo para las señales de salida obtenidas durante el muestreo experimental.

El segundo sistema (figura 4.6.5.1.1) tiene que ver con el sistema de medición empleado (sección 4.6.3). En el caso de estudio, el sistema (transductores de presión) transforma la energía de entrada (presión) en otra forma de energía (eléctrica). En dicho sistema el problema fue el cálculo de la verdadera señal (presión), la cual fue calculada por deconvolución<sup>2</sup> con las características del transductor, que se realizó en la sección 4.6.4.

<sup>1</sup> Sistemas donde la señal de salida es conocida, pero la de entrada o las características del sistema son desconocidas. Véase en bibliografía: Santamaría C., Fratta D. (1998).

<sup>2</sup> Es decir, la convolución de la señal de salida con las características del sistema.

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

El flujo del caso en estudio es no establecido, como puede verse en la aleatoriedad de las señales de presión  $p$  mostradas en la sección anterior, sin embargo, dado su carácter permanente en sus características promedio,<sup>3</sup> fue posible realizar un análisis estadístico sólo de la segunda componente o componente turbulenta del flujo.

Ahora bien, considerando ergódico al proceso en estudio, el análisis de los procesos estocásticos (por ejemplo, su probabilidad y estadística) establecidos en las condiciones del plan de pruebas de la tabla 4.6.1.1, pueden ser determinados de una sola señal registrada para cada condición de prueba.

Así, en primer lugar se cuantificó la magnitud de las fluctuaciones de presión  $p'$  de cada condición de prueba por medio de un parámetro, establecido por Dryden y Kuethe<sup>4</sup>, que es

$$r.m.s. = \sqrt{\overline{p'^2}} = \left[ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (p')^2 \cdot dt \right]^{1/2} \quad (4.6.5.1.1)$$

donde

$$p' = p - \mu_p = p - \bar{p} \quad (4.6.5.1.1a)$$

en la que  $p$  es una presión cualquiera, perteneciente a la muestra (señal)  $f_p(t)$ , y  $\mu_p$  ó  $\bar{p}$  es la media de presiones de la muestra citada, que se define en el párrafo siguiente.

Así también se calculó la magnitud de esas fluctuaciones  $p'$  en el lapso  $T$  con respecto a la presión dinámica media  $\bar{p}$ , que es llamada *intensidad de la turbulencia IT*, es decir

$$IT = \frac{r.m.s.}{\bar{p}} \quad (4.6.5.1.2)$$

donde

$$\mu_p = \bar{p} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T p \cdot dt \quad (4.6.5.1.3)$$

Obviamente por razones prácticas  $T$  es un intervalo finito, sin embargo, el tiempo de registro debe ser suficientemente largo con respecto a la escala de tiempo de la turbulencia. En este trabajo se consideró un tiempo de registro  $T$  de 60 segundos, suficiente para que se desarrolle y se disipe un vórtice tipo 5 (véase sección 4.4.3); y consecuentemente, fue bastante mayor a los tiempos que correspondieron a los seudoperiodos de las fluctuaciones.

<sup>3</sup> En flujo turbulentos conocida como primera componente del flujo, que es constante en flujos establecidos.

<sup>4</sup> Es conocida también como desviación estándar de la turbulencia. Véase en referencias: Hinze, J. O., (1960).

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

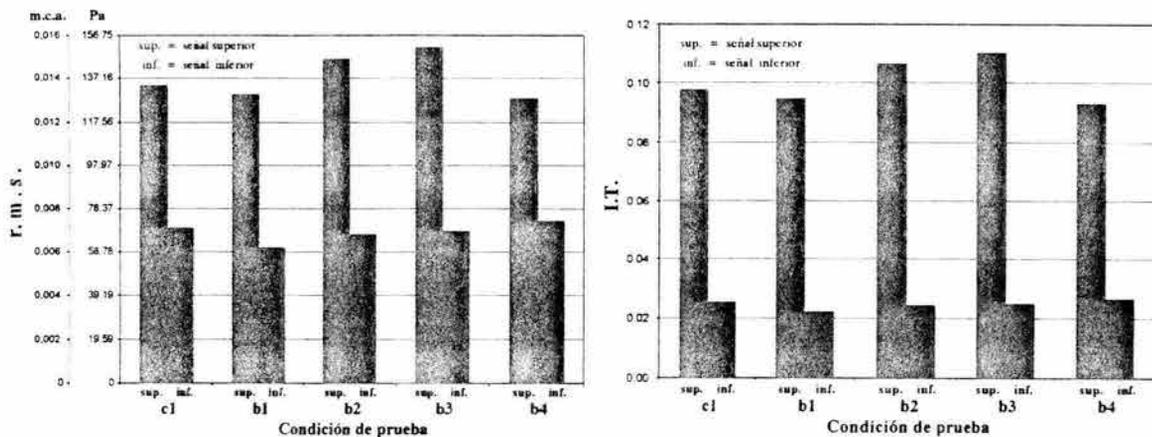
Además, en la práctica se recomienda que  $T$  debe ser suficiente para que estadísticamente de el mismo efecto para tiempos mayores en las correlaciones de las señales<sup>5</sup> (como se analiza mas adelante); por lo que conviene que el lapso de registro de la señal  $\Delta t$  sea tal que

$$\Delta t < 0.1 \cdot T \quad \text{ó también} \quad T > \frac{\Delta t}{0.1} \quad (4.6.5.1.4)$$

El lapso de muestreo empleado fue de  $0.05 \text{ s}$  por lo que  $T > 0.5 \text{ s}$ , por tanto, se cumple con tal condición.

Debe mencionarse que las ecuaciones empleadas en esta sección y algunas de las siguientes, se muestran en su definición clásica, esto es, en forma continua, aunque en este trabajo todos los procedimientos empleados fueron para señales digitales, donde las ecuaciones empleadas son representadas y evaluadas en forma discreta.

En las figura 4.6.5.1.2 se muestran la *r.m.s.* y la *IT* para las condiciones intermedias del plan de pruebas definido en la sección 4.6.1.



*Figura 4.6.5.1.2 Valores r.m.s. e IT de las fluctuaciones de presión superiores e inferiores correspondientes a las condiciones 1, 6 a 9 del plan de pruebas experimentales (Tabla 4.6.1.1)*

Obsérvese que, en general, la magnitud de las fluctuaciones registradas en el transductor superior fueron mayores a las correspondientes registradas en el transductor inferior. Salvo las condiciones de prueba c1 (sólo oleaje) y b4 (propela recta), dichas fluctuaciones medias en el transductor superior fueron de mas del doble de magnitud al de las fluctuaciones medidas en el transductor inferior.

<sup>5</sup> ver en bibliografía Echávez, A. G., (1996).

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

Este incremento notable en las fluctuaciones superiores (medidas con el transductor superior), es mas evidente en la intensidad (relativa) de la turbulencia *IT*, donde la magnitud de la turbulencia es cuantificada con relación a la presión media en cada transductor, de este modo, este incremento es del orden del 350% aproximadamente respecto a la *IT* de las fluctuaciones inferiores (medidas con el transductor inferior), como se aprecia en la figura anterior.

Es importante mencionar que la condición que presentó los valores mas pequeños tanto en la *r.m.s.* como en la *IT* fue la que tuvo presencia de vórtices sin dispositivos disipadores (condición b1). Sólo los valores (*r.m.s.* e *IT*) de las fluctuaciones superiores de la condición b4 (propela recta) fueron ligeramente menores. Aún mas, si se toma en cuenta los valores totales de la *r.m.s.*, es decir, la suma de los valores medios de las fluctuaciones superior e inferior, la condición b1 (sólo vórtices) tuvo los valores mas pequeños (véase figura 4.6.5.1.3).

Mientras que, de la gráfica anterior, se aprecia que la condición de prueba b3 (rejilla) fue la que tuvo las intensidades de fluctuaciones totales (superiores e inferiores) mayores.

La propela de puntas rectas (condición de prueba **b4**) tuvo las magnitudes de las fluctuaciones medias mas parecidas a la condición de oleaje (condición de prueba **c1**) que los otros dispositivos. Si bien esta condición de prueba (**b4**), al igual que las otras con

los demás dispositivos supresores de vórtices, visualmente no se presentó vórtice alguno, la propela con puntas rectas giraba (en el sentido del vórtice), y aún más rápido que la propela de puntas redondeadas (condición **b2**).

Por los resultados anteriores, parece ser que al provocar una mayor turbulencia los dispositivos evitaron la formación de vórtices. Este incremento en la turbulencia debida a los dispositivos fue mayor, según se analizó, a niveles superiores en el canal de llegada del vertedor.

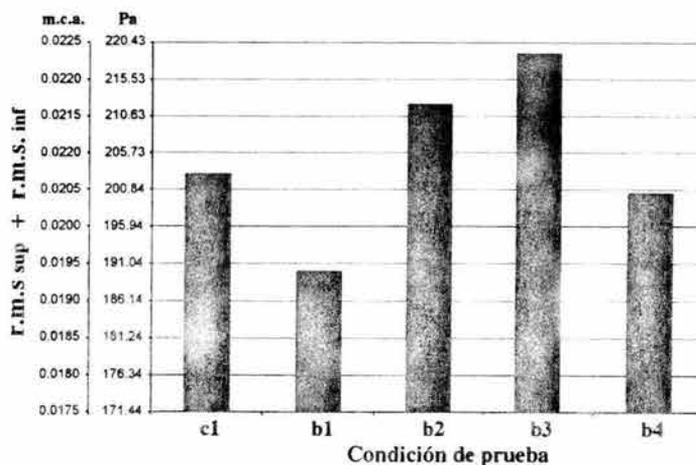


Figura 4.6.5.1.3 Valores *r.m.s.* de las fluctuaciones de presión superiores más inferiores, correspondientes las condiciones 1, 6 a 9 del plan de pruebas experimentales (Tabla 4.6.1.1)

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

### 4.6.5.2 Análisis Probabilístico

Con el fin de conocer la distribución de ocurrencias de aparición de las magnitudes de las fluctuaciones de presión que se presentan en presencia o ausencia de vórtices (con y sin dispositivos), se analizó la repetición aleatoria de las fluctuaciones de presión dinámica para cada condición de prueba por medio de su *función de distribución de densidad de probabilidad (FDDP)*.

La FDDP expresa la probabilidad  $\delta Prob$  que la variable aleatoria de presión dinámica  $p$  se encuentre entre los límites  $p_a$  y  $p_a + \delta p$ , cuando dicho intervalo puede ser tan pequeño como se quiera, es decir

$$FDDP(p) = \lim_{\delta p \rightarrow 0} \frac{\delta Prob(p)}{\delta p} = \frac{d[Prob(p)]}{dp} \quad (4.6.5.2.1)$$

donde

$$\delta Prob(p) = \delta Prob(p_a < p < p_a + \delta p) = \frac{T_a}{T}$$

Así, la probabilidad  $\delta Prob$  de la presión se obtuvo de un registro "continuo", donde en lugar del número de mediciones que caen dentro del intervalo especificado, es el periodo de tiempo  $T_a$ , durante el cual la variable aleatoria  $p$  se encuentra dentro de dicho intervalo (véase figura 4.6.5.2.1), y  $T$  es, como ya se dijo, el tiempo total de registro <sup>8</sup>.

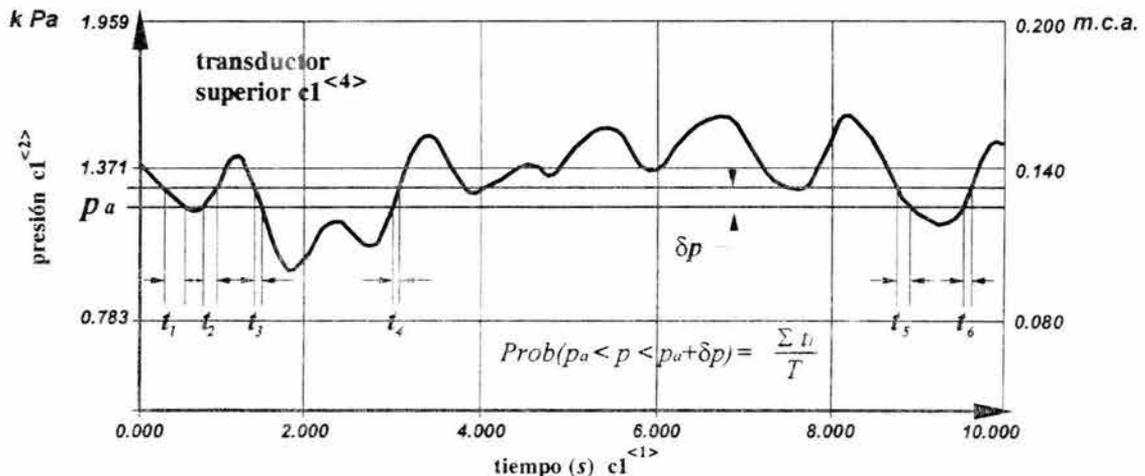


Figura 4.6.5.2.1 Interpretación gráfica de la probabilidad de la presión dinámica aleatoria en cuanto a su tiempo de aparición. El ejemplo mostrado corresponde a la señal de las presiones superiores de la condición 1 ó c1 del plan de pruebas experimentales (Tabla 4.6.1.1) en 10 segundos de registro.

<sup>8</sup>  $T$  de la forma discreta es el total de mediciones hechas de la variable aleatoria

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

Tomando en cuenta la precisión de los transductores<sup>9</sup>, en promedio se obtuvo un total de 12 intervalos o clases  $\delta p$  para calcular la FDDP de las señales obtenidas con el transductor superior (señal superior). Mientras que, como se mencionó anteriormente y se verá con mas detalle mas adelante, dada una menor variación que tuvieron las fluctuaciones inferiores, el número de intervalos promedio de la FDDP de estas señales fue de 6.

En las figuras 4.6.5.2.2 a la 4.6.5.2.6 se muestran las curvas de la FDDP de las señales superior e inferior de la presión dinámica de cada condición de prueba empleando la ecuación (4.6.5.2.1).

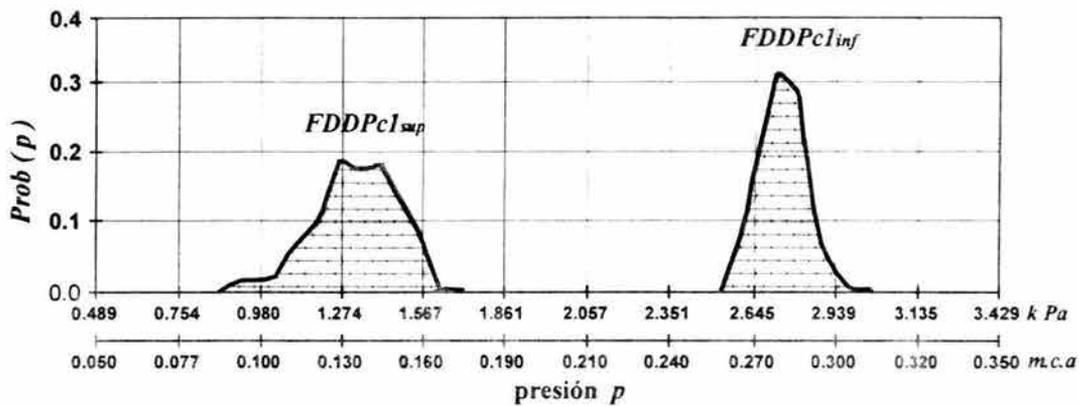


Figura 4.6.5.2.2 FDDP de las presiones superiores e inferiores de la condición 1 ó c1 del plan de pruebas.

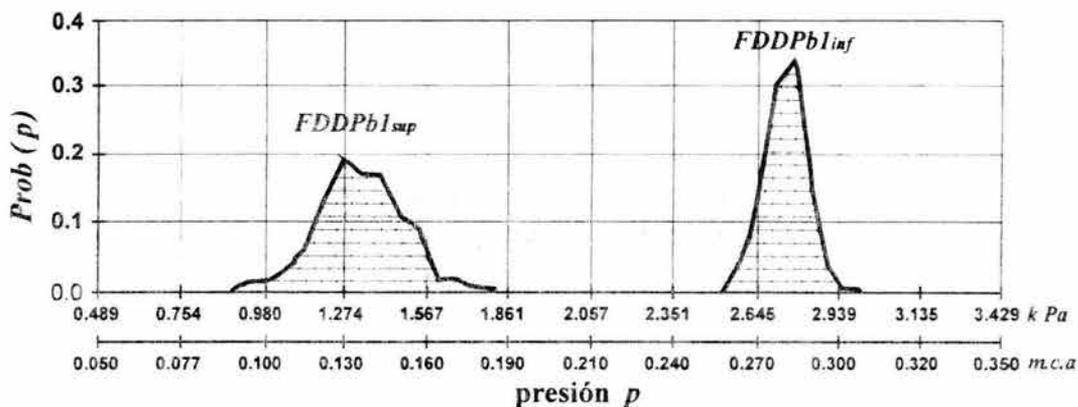


Figura 4.6.5.2.3 FDDP de las presiones superiores e inferiores de la condición 6 ó b1 del plan de pruebas.

<sup>9</sup> Véase sección 4.6.3.

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

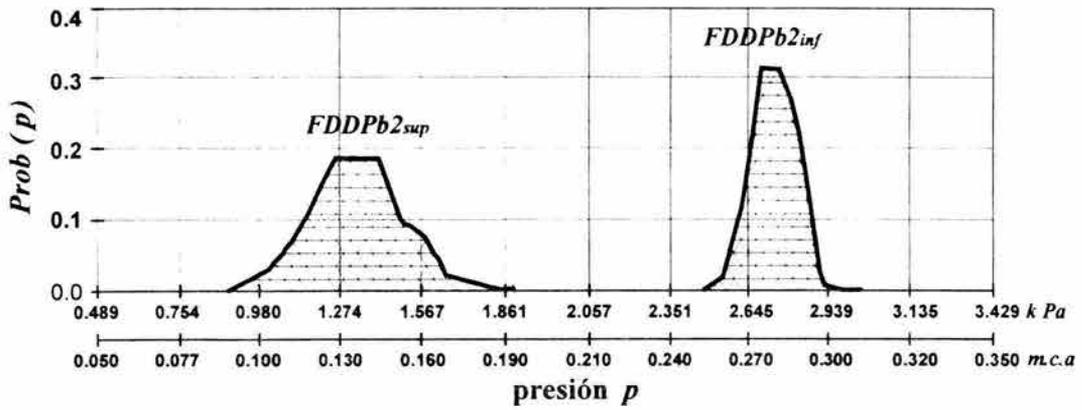


Figura 4.6.5.2.4 FDDP de las presiones superiores e inferiores de la condición 7 ó b2 del plan de pruebas.

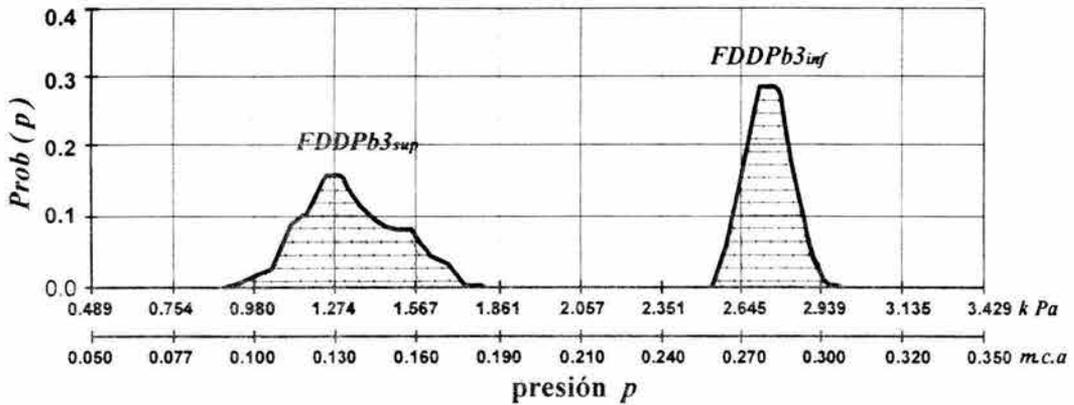


Figura 4.6.5.2.5 FDDP de las presiones superiores e inferiores de la condición 8 ó b3 del plan de pruebas.

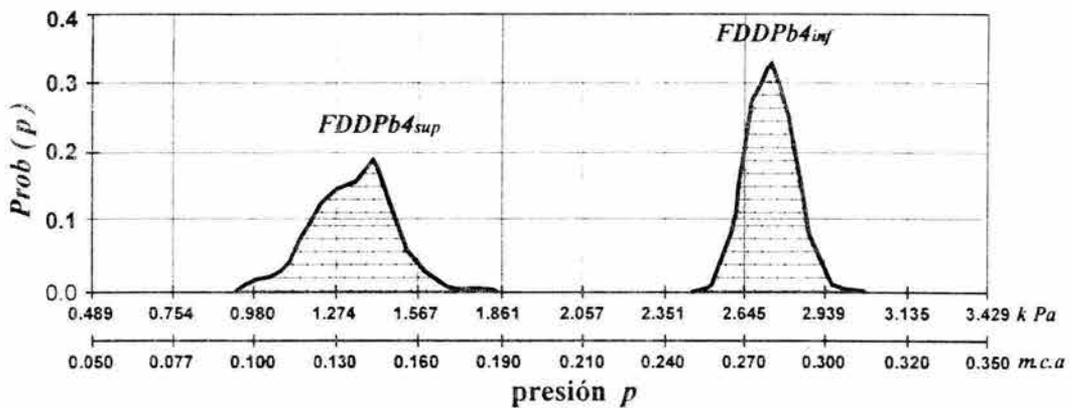


Figura 4.6.5.2.6 FDDP de las presiones superiores e inferiores de la condición 9 ó b4 del plan de pruebas.

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

Nótese que en todas las pruebas realizadas las señales inferiores tuvieron las probabilidades de ocurrencia más altas que la de su señal vecina, la señal superior. Así también se puede observar que las curvas de la FDDP de las señales inferiores fueron de forma puntiaguda y angosta. Lo contrario ocurrió con las curvas FDDP de las presiones dinámicas superiores que presentaron una variación mayor en las presiones (curvas aplanadas). Efectivamente, como la FDDP determina la razón de cambio de probabilidad en la magnitud de las presiones, esta fue mayor en las presiones inferiores.

Como consecuencia de lo anterior, para un mismo tamaño del intervalo de variación de presiones tanto superiores como inferiores, la probabilidad de ocurrencia de éstas últimas fue siempre mayor al de las primeras (véase figura 4.6.5.2.7).

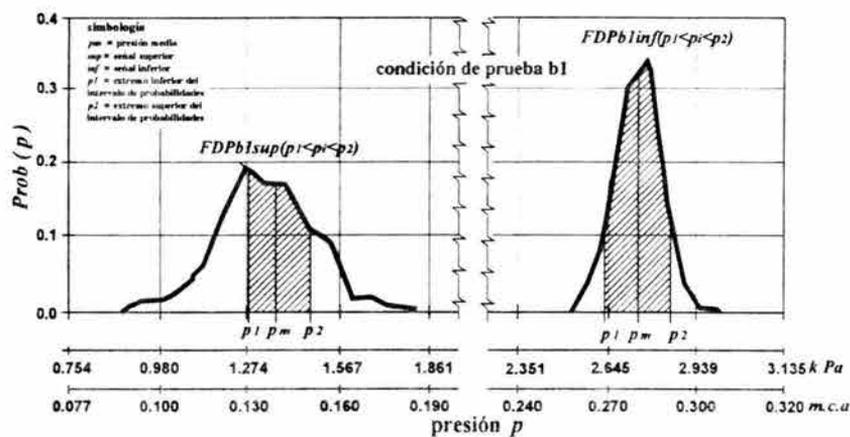


Figura 4.6.5.2.7 Intervalo de probabilidad de la FDP de las presiones superiores e inferiores de la condición 6 ó b1 del plan de pruebas.

En efecto, el valor de la Función de Distribución de Probabilidad (FDP) de que una presión dada  $p_i$  se encuentre en el rango de  $p_1$  a  $p_2$  está dado por

$$FDP(p_1 < p_i(t) < p_2) = Prob[p_1 < p_i(t) < p_2] = \int_{p_1}^{p_2} FDDP(p) \cdot dp \quad (4.6.5.2.2)$$

Empleando la ecuación anterior se pudo verificar numéricamente lo mencionado en el párrafo anterior. Estos resultados se muestran en la tabla 4.6.5.2.1 donde se puede observar que los porcentajes respecto a la media de presiones que son los extremos de los intervalos de probabilidad, no son iguales.

Buscando exactitud en las probabilidades calculadas, tales extremos corresponden a los valores discretos de los datos (extremos de clase) y las FDDP no se ajustaron a una ecuación para definir intervalos de clase iguales. Sin embargo, el tamaño de los intervalos de presiones tanto superiores como inferiores evaluados en todas las señales fueron del orden de 97.969 Pa (0.01 m.c.a.).

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

Condición de prueba	Porcentajes (%) respecto a la presión media (señal superior)		Probabilidad	Porcentajes (%) respecto a la presión media (señal inferior)		Probabilidad
	% inferior	% superior	prob( $p_{sup}$ )	% inferior	% superior	prob( $p_{inf}$ )
<i>c1</i>	6.64	8.06	0.6889	3.88	4.99	0.9303
<i>b1</i>	6.57	6.70	0.6411	4.08	4.06	0.9570
<i>b2</i>	8.14	7.84	0.6596	4.99	4.50	0.9808
<i>b3</i>	8.91	7.92	0.6069	3.91	4.28	0.9324
<i>b4</i>	5.84	6.66	0.6240	3.52	3.80	0.9010

*Tabla 4.6.5.2.1 Probabilidades de ocurrencia de las presiones superiores e inferiores del plan de pruebas experimentales.*

Nótese de la tabla anterior, que fue grande la probabilidad (94% promedio) de que las presiones inferiores se presentasen en dicho intervalo respecto a su tendencia central. En cambio, dada una menor razón de cambio de probabilidades que presentaron las señales superiores, su probabilidad de ocurrencia fue menor (64 % promedio).

Con el fin de comparar las FDDP de las señales en cuanto a sus probabilidades de ocurrencia máximas, así como a la distribución de probabilidad respecto a una distribución Gaussiana, se determinó el coeficiente de asimetría  $as_3$  para cada condición de prueba, esto es

$$as_3 = \frac{\sigma_p^3}{\sqrt{(\sigma_p^2)^3}} \quad (4.6.5.2.3)$$

y el coeficiente de curtosis  $cu_4$

$$cu_4 = \frac{\sigma_p^4}{(\sigma_p^2)^2} - 3 \quad (4.6.5.2.4)$$

donde

$$\sigma_p^n = E[(p - \mu_p)^n] = \int_{-\infty}^{\infty} (p - \mu_p)^n \cdot FDDP(p) \cdot dp \quad (4.6.5.2.5)$$

es el momento de orden  $n$  con respecto a la media  $\mu_p$  de la esperanza matemática cuya función es la desviación  $(p - \mu_p)^n$ .

En las figuras 4.6.5.2.8 a la 4.6.5.2.11 se muestra una representación gráfica de tales coeficientes de las FDDP en estudio.

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

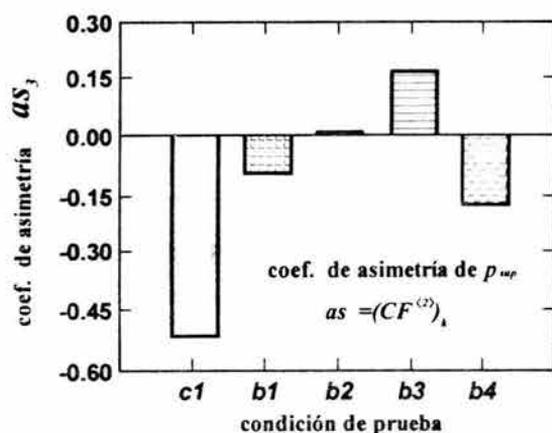


Figura 4.6.5.2.8 Coeficientes de asimetría para las FDDP de las presiones superiores del plan de pruebas.

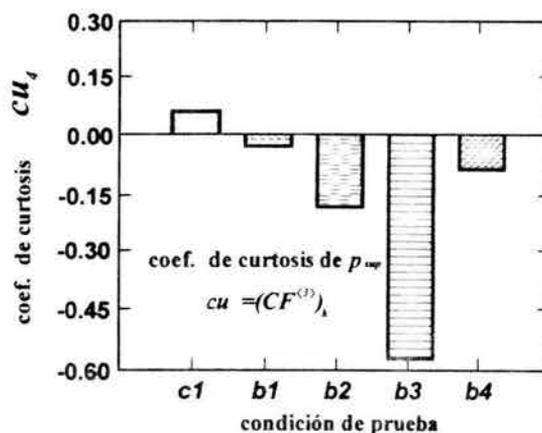


Figura 4.6.5.2.9 Coeficientes de curtosis para las FDDP de las presiones superiores del plan de pruebas.

De los resultados de la figura 4.6.5.2.8 se puede decir que a niveles superiores del flujo en el canal de llegada el efecto de los dispositivos supresores de vórtices fue el de aumentar la ocurrencia de presiones por arriba de la presión media, por lo que se observa una tendencia hacia la asimetría positiva de las FDDP de las señales superiores. Sólo la condición **b4**, la que tiene la propela recta, mostró asimetría negativa, por lo que se piensa que tal dispositivo es el menos eficiente para disipar los vórtices.

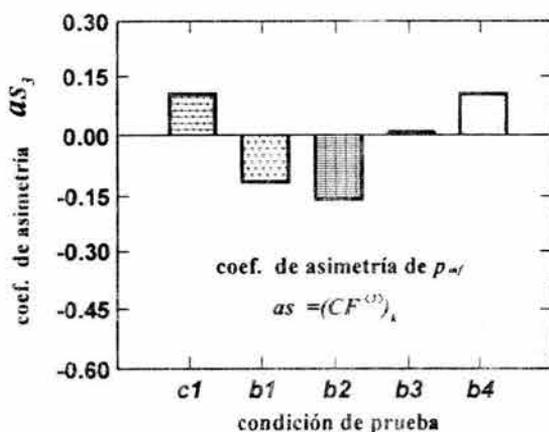


Figura 4.6.5.2.10 Coeficientes de asimetría para las FDDP de las presiones inferiores del plan de pruebas.

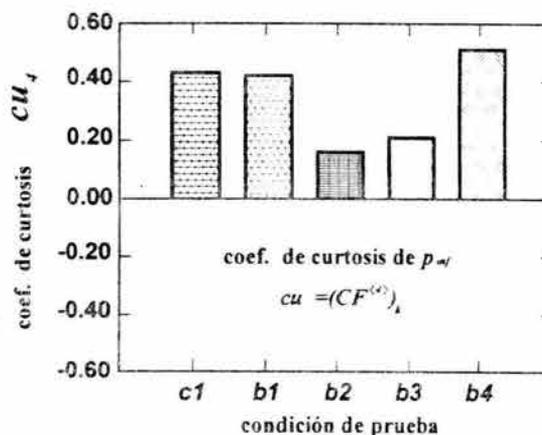


Figura 4.6.5.1.11 Coeficientes de curtosis para las FDDP de las presiones inferiores del plan de pruebas.

Cabe mencionar que la condición base de comparación **c1** (sólo oleaje) mostró una notable asimetría negativa en su FDDP.

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

---

En cuanto a la asimetría de las FDDP de las señales inferiores (figura 4.6.5.2.10) sólo la condición con el dispositivo de la propela redondeada (condición **b2**) mostró una asimetría negativa, mientras que los demás dispositivos también mostraron la tendencia comentada para las señales superiores.

Cabe destacar que la condición de prueba b1 (sólo vórtices) tuvo una mayor tendencia de ocurrencia de presiones inferiores a la presión media, tanto en los registros de presiones superiores como inferiores, posiblemente debida al embudo de aire, donde las velocidades tangenciales se incrementan con la profundidad.

Lo anterior está acorde con los resultados obtenidos de los valores promedio en el tiempo (*r.m.s.* e *IT*) obtenidos para cuantificar la magnitud de la turbulencia.

Dado que, en general, los coeficientes de asimetría de las señales estudiadas fueron bajos, se escogió un mismo tamaño del intervalo superior e inferior con respecto a la media para el cálculo y comparación entre las condiciones de prueba mencionadas anteriormente.

En cuanto al grado de apuntamiento de las FDDP de las presiones en el nivel superior del flujo del canal de llegada (figura 4.6.5.2.9), se pudo ver claramente que otro de los efectos de los dispositivos supresores de vórtices fue el distribuir la frecuencia de ocurrencia de presiones en un rango más amplio, de tal forma que la FDDP tiende a ser aplanada (distribución platicúrtica). Al respecto, la condición de prueba que mejor cumplió con lo anterior fue la **c3** (rejilla), que tuvo el valor de curtosis más pequeño.

La condición **b1** (sólo vórtices) tuvo una FDDP casi similar a una FDDP normal estándar (distribución mesocúrtica) en las FDDP de presiones superiores. De manera casi similar a lo anterior se presentaron las curtosis de las señales inferiores (figura 4.6.5.2.11), sólo que la forma predominante de dichas FDDP fue de un apuntamiento marcado (distribuciones leptocúrticas), como se afirmó anteriormente por medio de una inspección visual de las FDDP. La condición b3 (rejilla) tuvo el menor apuntamiento, sólo detrás de la condición b2 (propela recta).

Obsérvese que el valor de curtosis más grande de todas las FDDP de las presiones inferiores, fue la condición b4 (propela recta), por lo cual se puede decir que, a niveles más profundos, ésta no distribuyó a un rango más amplio de presiones la ocurrencia de éstas.

Por su ubicación física, el transductor inferior tiene una carga estática del doble a la del transductor superior y como las velocidades en el canal de llegada en la zona de pilas del modelo eran relativamente pequeñas (velocidad media de  $0.863 \text{ m/s}$ ), la energía total de presión del flujo es mayor en la señal inferior que la superior. No obstante lo anterior, la magnitud de presión dinámica debido a las fluctuaciones fue mayor en niveles superiores próximos a la superficie libre del agua, como se pudo apreciar en el análisis de las señales realizado anteriormente.

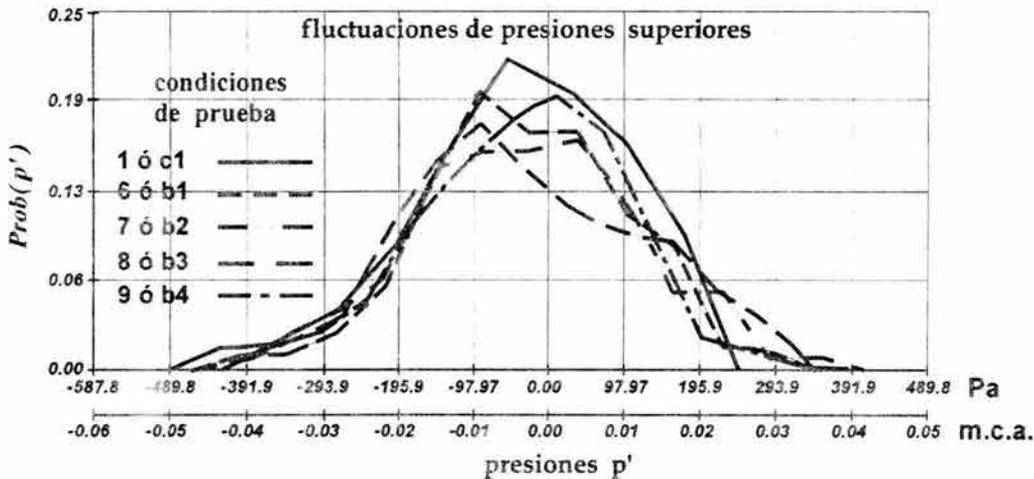
## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

De esta manera, aunque las fluctuaciones turbulentas de presión son secundarias en magnitud comparadas con la presión dinámica total media, éstas tienen un efecto muy importante sobre las características medias del flujo<sup>9</sup>, y en el caso de estudio se piensa que son importantes en la producción o eliminación de vórtices.

La influencia de las fluctuaciones de presión sobre las señales de presión total se puede verificar empleando la FDDP solamente para dichas fluctuaciones, es decir

$$FDDP(p') = \lim_{\delta p' \rightarrow 0} \frac{\delta Prob(p')}{\delta p'} = \frac{d[Prob(p')]}{dp'} \quad (4.6.5.2.6)$$

En las figuras 4.6.5.2.12 y 4.6.5.2.13 se muestran estos resultados. En la primera figura se muestran las curvas de la función de distribución de densidad de probabilidad de las fluctuaciones de presión  $FDDP(p')$  para las presiones superiores del plan de pruebas realizado, mientras que en la segunda figura se muestran las curvas de FDDP correspondientes a las fluctuaciones de presión de las señales inferiores.



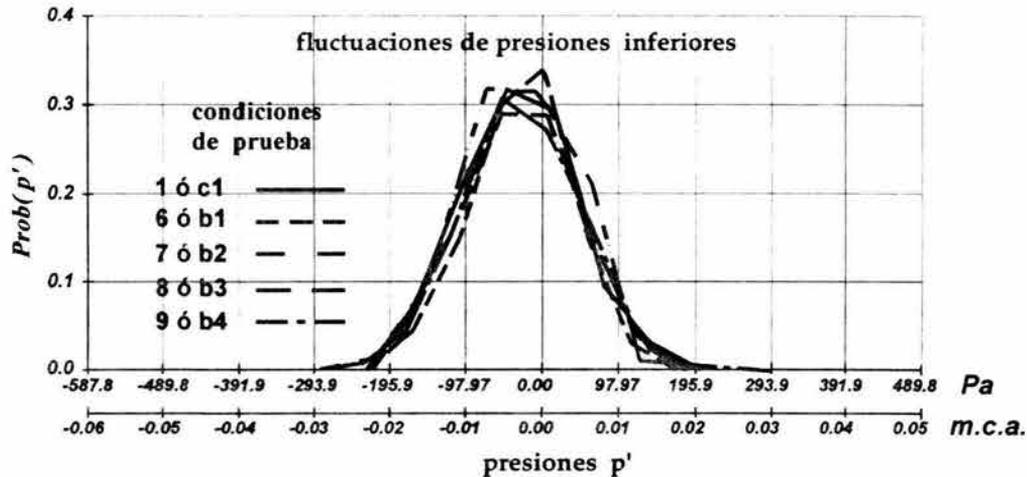
*Figura 4.6.5.2.12 FDDP(p') de las fluctuaciones de presión superiores. Condiciones establecidas en el Plan de pruebas experimentales (Tabla 4.6.1.1.)*

En dichas figuras se muestra que para todas las condiciones experimentales, el rango de variación en la magnitud de las fluctuaciones superiores que pudieran presentarse fue de casi el doble del rango correspondiente a las fluctuaciones inferiores.

<sup>9</sup> Véase bibliografía: Landweber L. et al (1960).

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

Así también, las frecuencias de ocurrencia máxima de las fluctuaciones inferiores estuvieron en torno al 30 %, es decir, un 57 % mayor a la frecuencia de ocurrencia máxima de las fluctuaciones superiores, que fue de un 18 % como valor promedio.



*Figura 4.6.5.2.13 FDDP(p') de las fluctuaciones de presión inferiores. Condiciones establecidas en el Plan de pruebas experimentales (Tabla 4.6.1.1.)*

Tales FDDP de las fluctuaciones de presión son similares a las obtenidas con las señales de presión totales, de ahí la influencia e importancia que tuvieron las primeras en este estudio.

Cabe mencionar que debido a que toda las mediciones fueron incluidas en el análisis de la FDDP para una condición experimental dada, el área bajo dicha curva es unitaria, esto es

$$\int_0^T FDDP(p) dp = 1 \quad (4.6.5.2.7)$$

También es útil mencionar que entre las propiedades de la FDDP se encuentran algunas muy importantes en el análisis estocástico de la turbulencia, que son directamente análogas a los momentos empleados para describir la distribución de materia (masa). Específicamente, dado un cuerpo con una función de densidad de masa, que para el caso de estudio no es sino la FDDP, el centro de gravedad (C.G.) es

$$C.G. = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} p \cdot FDDP(p) \cdot dp}{\int_{-\infty}^{\infty} FDDP(p) \cdot dp} \quad (4.6.5.2.8)$$

mientras que el radio de giro al cuadrado respecto al C.G. de la FDDP es

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

$$K_0^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (p - C.G.)^2 \cdot FDDP(p) \cdot dp}{\int_{-\infty}^{\infty} FDDP(p) \cdot dp} \quad (4.6.5.2.9)$$

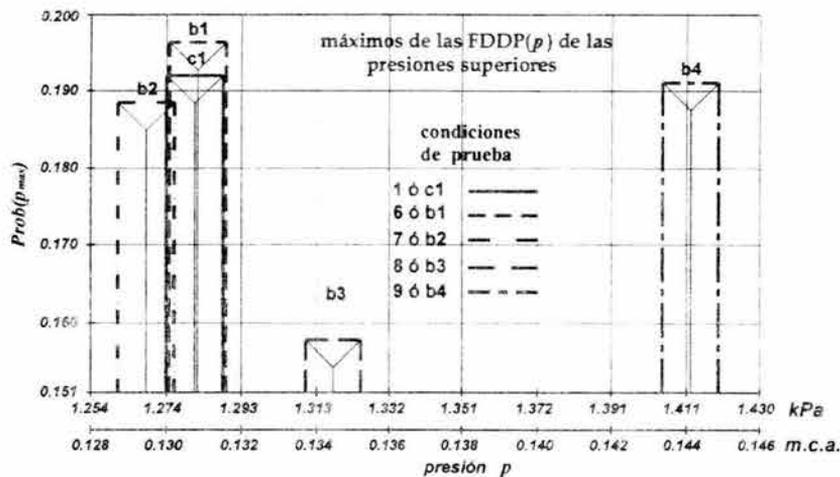
del cual  $r.m.s. = \sqrt{K_0^2}$ , que son parámetros que fueron obtenidos y analizados en la sección anterior.

Otras aplicaciones más allá de la descripción probabilística de los procesos estocásticos son, por ejemplo, la evaluación de la normalidad, la determinación de efectos no lineales y el análisis de valores extremos. Este último caso se trata brevemente en la sección siguiente al analizar los máximos de las FDDP de las señales en estudio.

### 4.6.5.3 Análisis de valores extremos

Analizando los valores extremos de las FDDP de las señales consideradas en la sección anterior, también se obtuvieron resultados interesantes. El valor más grande de los máximos de las funciones de distribución de densidad de probabilidad FDDP de las presiones dinámicas  $FDDP(p)$  superiores correspondió a la condición de vórtice sin disipadores (condición experimental 6 o **b1**), como puede apreciarse en la figura 4.6.5.3.1.

Esta presión superior con mayor probabilidad de ocurrencia de la condición **b1** tuvo influencia de fluctuaciones de presiones negativas, resultado de ello es su valor de 1.281 kPa (0.1308 m.c.a.), que fue menor al valor medio de presión para esa condición, esto es, 1.372 kPa (0.140 m.c.a.). Igualmente el máximo maximorum<sup>\*1</sup> de la FDDP de las



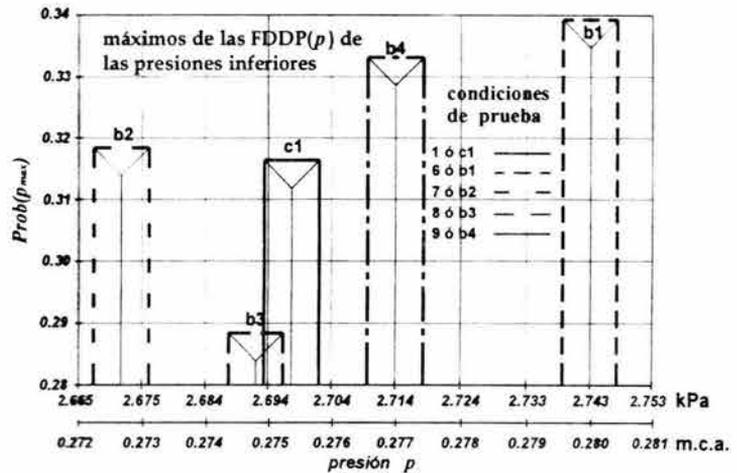
*Figura 4.6.5.3.1 Máximos de las FDDP de las presiones superiores. Condiciones 1,6,7,8 y 9 del Plan de pruebas experimentales (Tabla 4.6.1.1.)*

\*1 el valor más grande entre los máximos.

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

presiones dinámicas inferiores correspondió a esta condición experimental **b1** (véase figura 4.6.5.3.2).

Al contrario del caso anterior, el valor máximo maximum de las FDDP de las presiones dinámicas inferiores fue una presión de 2.742 kPa (0.279 m.c.a.) ligeramente mayor a la presión media de la condición de prueba **b1** (sólo vórtice) de 2.743 kPa (0.280 m.c.a.), lo que implica que a niveles mas profundos el flujo era menos alterado, como ya se ha mencionado.



**Figura 4.6.5.3.2** Máximos de las FDDP de las presiones inferiores. Condiciones 1,6,7,8 y 9 del Plan de pruebas experimentales (Tabla 4.6.1.1.)

Estos hechos así como los mencionados en las 2 secciones anteriores muestran que la aparición

de un vórtice implica el consumo de una parte importante de energía del flujo para su formación y mantenimiento. Ya que durante la presencia del fenómeno tal demanda de energía se manifestó en los diversos resultados mencionados en las secciones anteriores.

Igualmente se puede decir que la acción de los dispositivos disipadores fue la dispersión de energía, acción que también se manifestó en los máximos de las FDDP de las presiones de las condiciones de prueba, que representaron cada dispositivo considerado en este trabajo. Así, las máximas ocurrencias de probabilidad de las presiones (señales) de los dispositivos fueron menores a la condición **c1** (sólo oleaje); excepto las condiciones **b2** (propela redondeada) y **b4** (propela recta) que tuvieron valores mayores a la condición **c1** en las presiones inferiores.

Aún mas, el valor menor de los maximum de las FDDP de las presiones, tanto superiores como inferiores, fueron de la condición experimental **b3** (rejilla); como se puede observar en las figuras anteriores (figuras 4.6.5.3.1 y 4.6.5.3.2) de manera mas notable que en el caso de los valores máximos maximum citados.

De los resultados obtenidos a partir del capítulo 4.6.5.1 (análisis de turbulencia) hasta el capítulo presente, se puede decir que al incrementar la turbulencia del flujo, los dispositivos disipadores evitan la formación de vórtices. Sobre todo si este aumento en la turbulencia se produce a niveles próximos de la superficie libre del agua. Ya que al

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

---

presentarse un vórtice con corazón de aire, el embudo de éste se alimenta con aire y material flotante desde la superficie [Padmanabhan M., (1984)].

Como la magnitud de la turbulencia (sobre todo a niveles superiores del flujo) lograda con los dispositivos disipadores fue mayor a la del vórtice, en este aspecto se puede decir que tales dispositivos cumplieron con su cometido, además como se mencionó en el capítulo 4.4, visualmente en tales condiciones no se presentó vórtice alguno. Así, acorde con los resultados mencionados anteriormente, el dispositivo disipador de rejilla fue el mas efectivo para destruir los vórtices.

Sin embargo, algunos resultados correspondientes a las propelas, que fueron mencionados en éste y capítulos anteriores, no correspondieron completamente a la acción de un disipador citada anteriormente. Es más, como ya se mencionó (sección 4.6.5.1), en condiciones de operación de la compuerta izquierda (c3) en las cuales se producían vórtices, las propelas giraban en el sentido de éste.

Para analizar y explicar lo anterior, fue necesario encontrar relaciones (lineales<sup>\*3</sup>) entre las series de datos aleatorios muestreados. Tales relaciones son obtenidas comúnmente en términos de una función de correlación o su transformada de Fourier, que de manera arreglada es la llamada Función de Densidad Espectral, y que es lo que se trata en las dos secciones siguientes.

### 4.6.5.4 Análisis de Correlación

Con el propósito de identificar las similitudes entre dos señales en cuanto a la distribución y variación de sus magnitudes de presión a todo lo largo del tiempo de muestreo, se efectuó un análisis de correlación cruzada entre las señales registradas.

La detección de características entre señales, que permite realizar este método matemático, puede realizarse aún en presencia de ruido en las señales correlacionadas, que en el caso de estudio, éste no fue significativo, como se verá en ésta sección.

Si  $\{p_i(t)\}$  y  $\{p_{i+1}(t)\}$  son dos procesos estocásticos, que en el caso de estudio, son dos señales de presión; la *Función de Correlación Cruzada (FCC)* para un incremento de tiempo  $\tau$ , se define como

$$R_{xy}(\tau) = R_{p_i, p_{i+1}}(\tau) = E[p_i(t) \cdot p_{i+1}(t + \tau)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T p_i(t) \cdot p_{i+1}(t + \tau) \cdot dt \quad (4.6.5.4.1)$$

Dado que en el cálculo de la FCC una señal es desplazada en el tiempo en relación a la señal base, en el caso de estudio, los valores siguientes a los extremos son considerados los valores iniciales de la señal desplazada, es decir, se considera

---

\*3 generalmente las mas fáciles de determinar.

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

periodicidad en las señales gracias a que el tiempo de muestreo fue bastante grande en relación a los tiempos de los patrones de turbulencia y al tiempo de evolución de un vórtice analizados en esta y secciones anteriores. Sin embargo, también se consideró que los valores fuera de los rangos medidos son nulos en las FCC de las fluctuaciones de presión, como a menudo se considera en los análisis de esta función y que se presenta mas adelante en las FCC de las fluctuaciones de presión de las señales en estudio.

Puesto que el objetivo fue destruir el vórtice por medio de dispositivos disipadores de tal forma que el estado resultante de lo anterior sea similar a la condición experimental de "sólo oleaje" ó  $c1$ ; la señal base de comparación en el cálculo de la FCC fue precisamente la correspondiente a dicha condición  $c1$ <sup>\*1</sup>, con respecto a las señales correspondientes a los diferentes dispositivos disipadores considerados en este trabajo. En las figuras 4.6.5.4.1 a la 4.6.5.4.6 se muestran las gráficas de la FCC de la condición  $c1$  respecto a las condiciones experimentales que representan los diferentes dispositivos, que fueron establecidas en la sección 4.6.1.

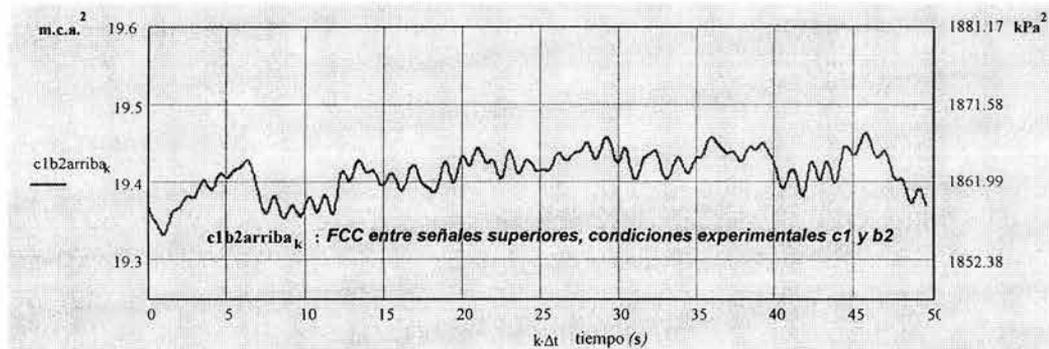


Figura 4.6.5.4.1 FCC entre las presiones superiores de las condiciones experimentales  $c1$  y  $b2$

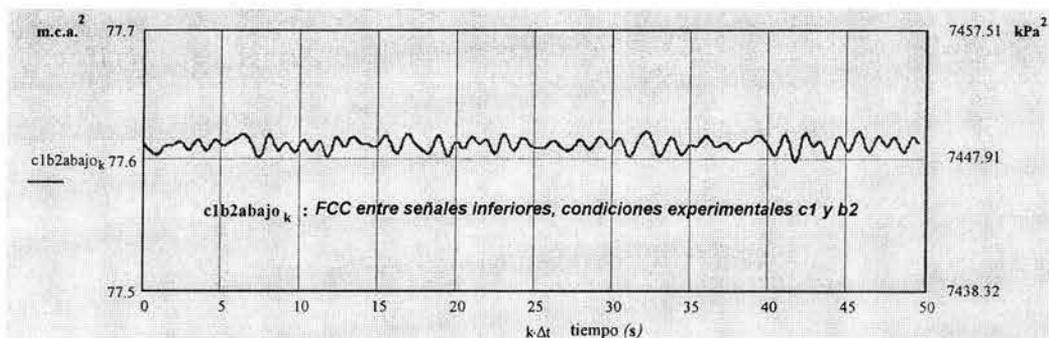
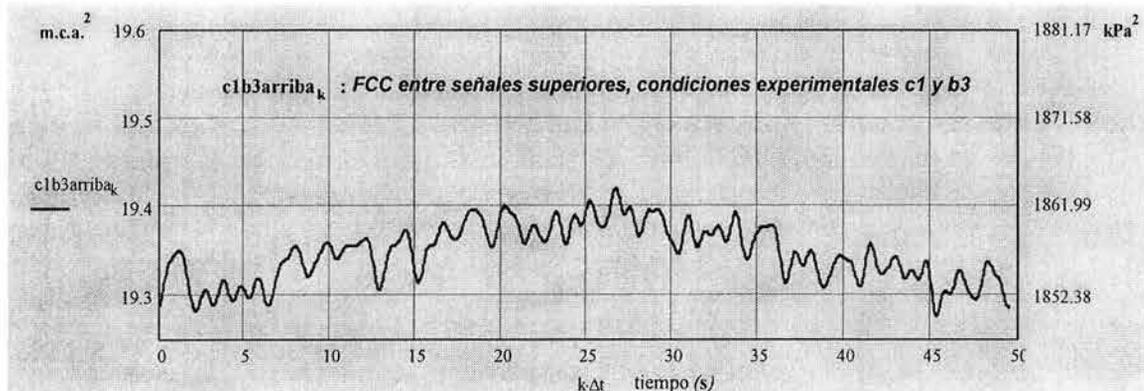


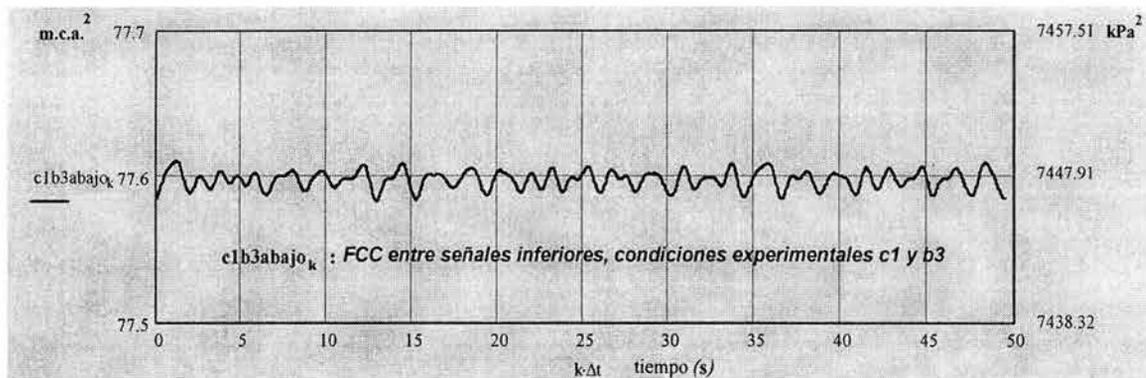
Figura 4.6.5.4.2 FCC entre las presiones inferiores de las condiciones experimentales  $c1$  y  $b2$

\*1 esto es a  $p_i(t)$  en la ecuación 4.6.5.4.1

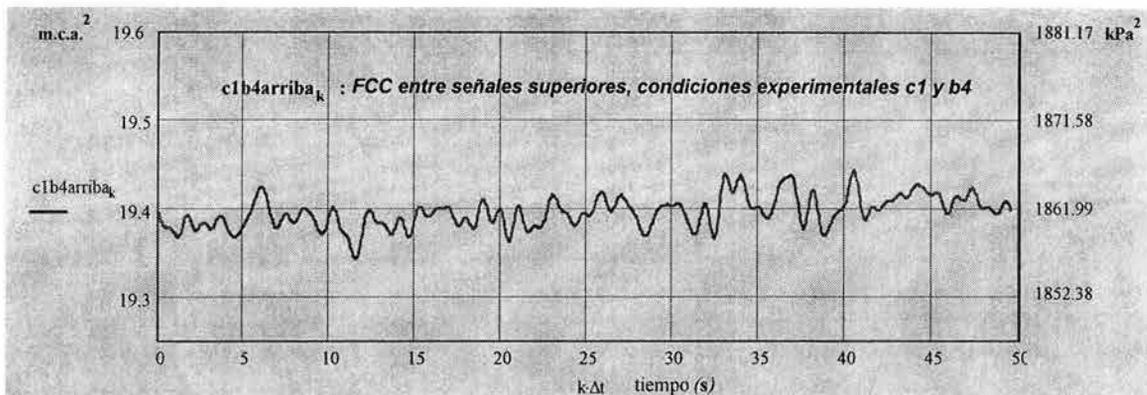
## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor



*Figura 4.6.5.4.3 FCC entre las presiones superiores de las condiciones experimentales c1 y b3*

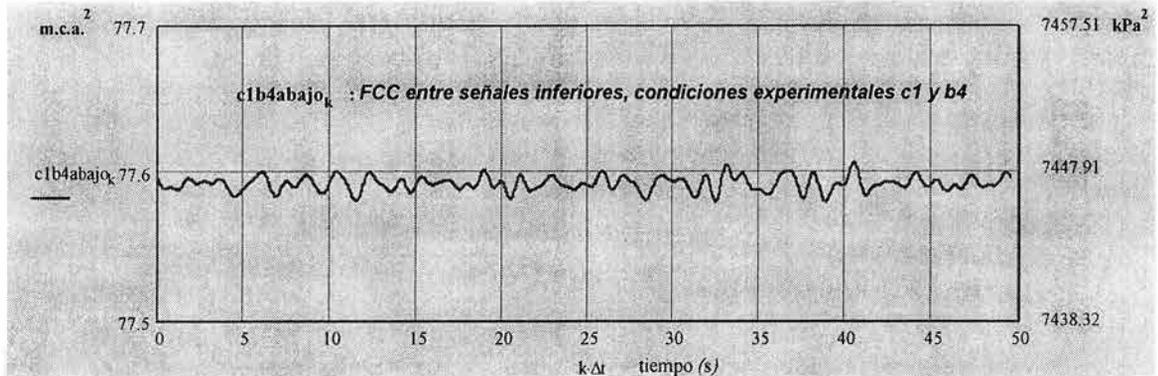


*Figura 4.6.5.4.4 FCC entre las presiones inferiores de las condiciones experimentales c1 y b3*



*Figura 4.6.5.4.5 FCC entre las presiones superiores de las condiciones experimentales c1 y b4*

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

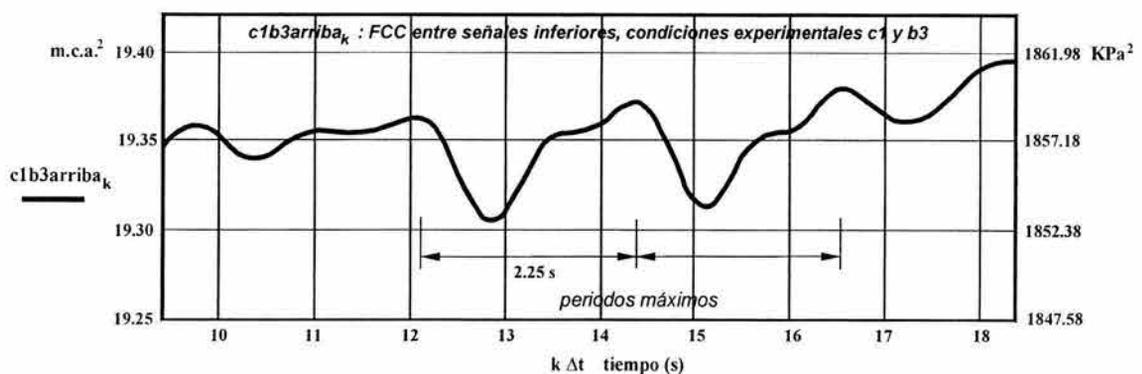


*Figura 4.6.5.4.6 FCC entre las presiones inferiores de las condiciones experimentales c1 y b4*

Debido a que se trabajó con las señales (convertidas) de presión en lugar de las señales directas entregadas por los transductores, todas las señales tuvieron polaridad positiva y, por lo tanto, no se presentaron valores negativos en las FCC.

Se puede apreciar de las figuras anteriores que las variaciones de la FCC entre señales de presión superiores fueron mayores que las inferiores, como era de esperarse, pues como se mencionó anteriormente, fue más violenta la magnitud de las fluctuaciones de presión superiores.

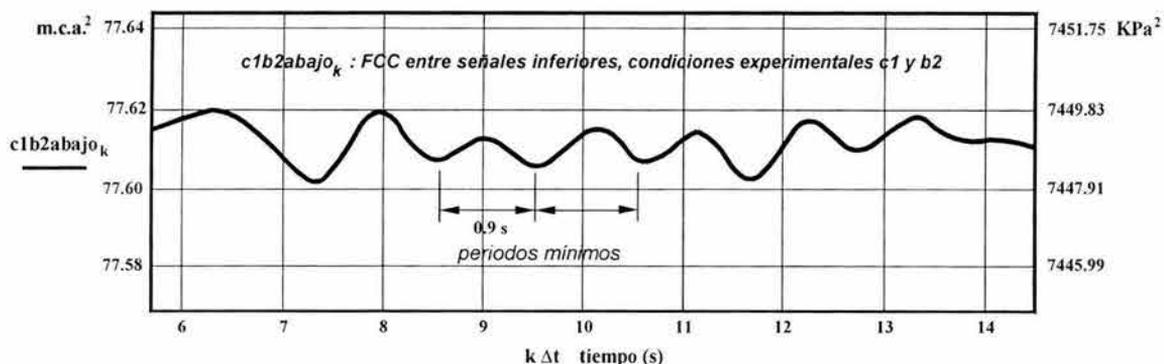
Analizando las FCC se obtuvo los periodos de las señales de presión que fueron comunes entre la condición c1 y las demás condiciones experimentales. La duración de éstos fue de uno a tres segundos para los patrones de onda más grandes, como se puede observar sobre todo en las señales de presión superiores correlacionadas (figura 4.6.5.4.7).



*Figura 4.6.5.4.7 Acercamiento para la identificación de pseudoperiodos grandes en la FCC entre las presiones superiores de las condiciones experimentales c1 y b3.*

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

Mientras que los periodos mas pequeños calculados fueron de poco menos de un segundo (figura 4.6.5.4.8). En consecuencia, la FCC de la condición de prueba c1 con cada una de las demás condiciones experimentales mencionadas, dio componentes de frecuencia relativamente baja<sup>2</sup>. De este manera se obtuvieron valores de 0.2 a 1.1 Hz como el rango de frecuencias características del fenómeno en estudio.



**Figura 4.6.5.4.8 Acercamiento para la identificación de seudoperiodos pequeños en la FCC entre las presiones inferiores de las condiciones experimentales c1 y b2.**

Las demás componentes de frecuencia no comunes entre las señales tienden a cancelarse en el proceso de suma de la FCC. Por esta razón y, como se mencionó anteriormente, el tiempo de muestreo fue suficientemente amplio<sup>3</sup>, no se presentó ruido significativo en las señales, pues en ninguna FCC de las presiones dinámicas se presentó una continua disminución o tendencia de la señal a cero.

Un resultado importante obtenido en el análisis de similitud de señales que permite la FCC, fue la presencia de un máximo maximorum en la FCC entre señales de presión superiores correspondientes al dispositivo de rejilla (condición b3), que se muestra en la figura 4.6.5.4.3. Obsérvese la secuencia de ondas (debido a las fluctuaciones de presión) ascendentes hasta llegar al máximo mencionado y luego el decremento, también por ondas, de la señal correlacionada.

Entonces se puede decir que la señal de presiones de la condición de prueba b3 fue como una seudoréplica de la condición c1 y que el tiempo de "retraso" entre dichas señales fue de 27 segundos (tiempo de pico de la figura 4.6.5.4.3).

<sup>2</sup> A comparación de otros fenómenos hidráulicos como las resonancia en tuberías, golpe de ariete, cavitación en turbinas, etc.

<sup>3</sup> Lo cual indica que hubo suficientes términos en la sumatoria del proceso de la FCC, lo cual provocaría la completa cancelación de términos si la señal tuviese ruido aleatorio.

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

Dicho tiempo de “retraso” corresponde mas bien, para este caso, al tiempo de propagación de la mayor parte de la energía de la señal debido a diferentes componentes de frecuencia del medio y a la dinámica del flujo<sup>4</sup>.

En términos generales se puede decir que no existió una relación significativa entre los dispositivos de las propelas y la condición c1 (sólo oleaje).

Del análisis anterior, se destaca que las señales de presiones superiores no sólo fueron decisivas para obtener los periodos mayores, comunes entre las señales analizadas, sino que permitió identificar similitudes en la distribución de presiones superiores (energía) entre las diferentes señales.

Los resultados anteriores se ratificaron al emplear la FCC para las fluctuaciones de presión entre la señal base (sólo oleaje, condición c1) y las demás señales ya mencionadas<sup>5</sup> (figuras 4.6.5.4.9 a la 4.6.5.4.11). En el proceso de cálculo de estas correlaciones convino asumir la nulidad de los valores fuera de los rangos medidos.

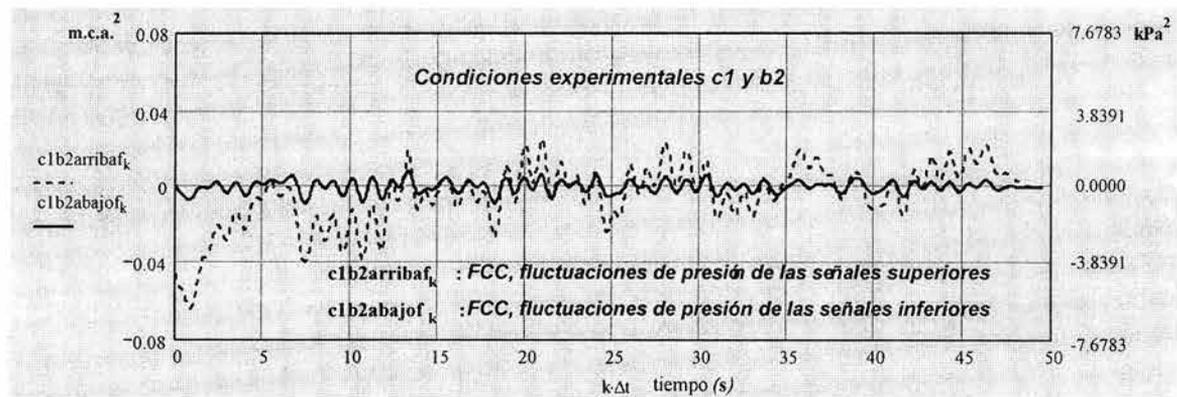


Figura 4.6.5.4.9 FCC entre las fluctuaciones presiones, condiciones experimentales c1 y b1

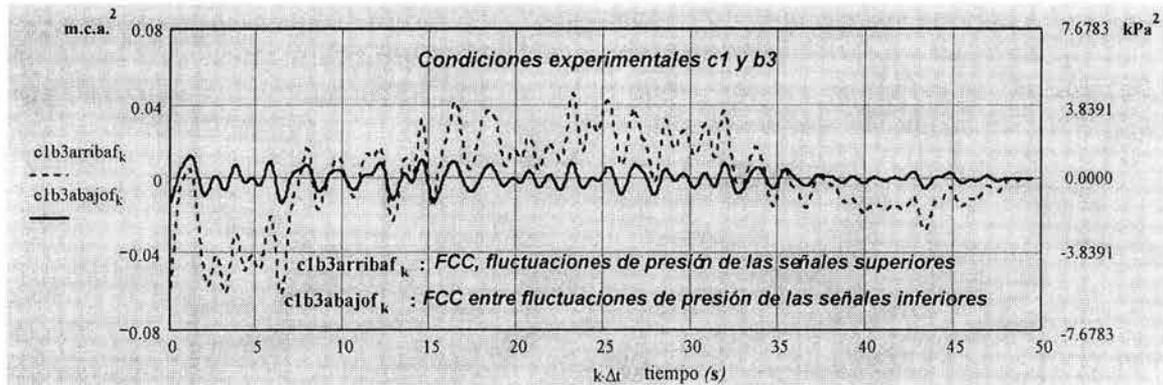
Aunque en la gráfica 4.6.5.4.10 no aparece un máximo maximorum tan evidente como en la gráfica de las señales de presiones totales de la rejilla (figura 4.6.5.4.3), si se puede apreciar, para este dispositivo, que es la FCC de fluctuaciones que presenta los valores correlacionados, tanto negativos como positivos, mas grandes.

En estos casos, dado que se trata de fluctuaciones, se presentan ambas polaridades en las señales correlacionadas. En este análisis se pudo identificar correlación espacial entre las señales superiores e inferiores, que se menciona a continuación.

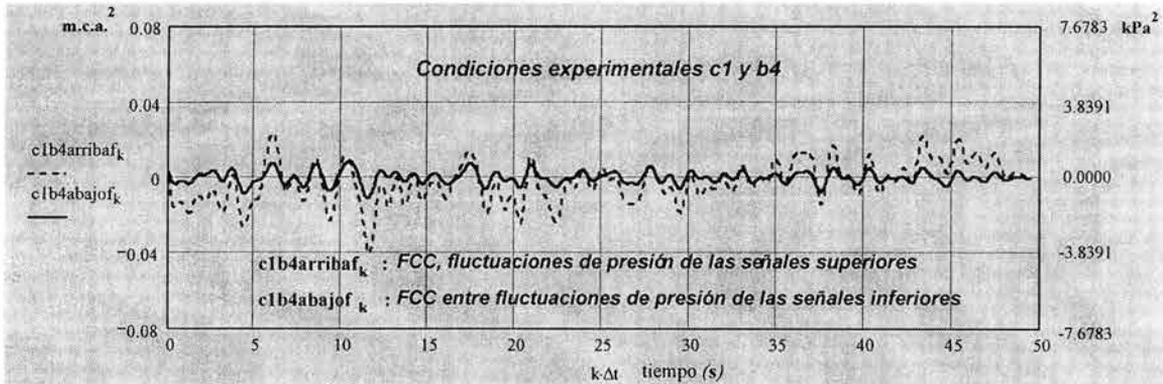
<sup>4</sup> Bui, H.P. (1994).

<sup>5</sup> Matemáticamente equivale a una covarianza de las señales de presión totales. Véase en bibliografía: Bendat y Piersol (1993).

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor



**Figura 4.6.5.4.10** FCC entre las fluctuaciones presions, condiciones experimentales c1 y b3



**Figura 4.6.5.4.11** FCC entre las fluctuaciones presiones, condiciones experimentales c1 y b4

La FCC se empleó también para verificar la suficiencia del tiempo de muestreo mencionado anteriormente, así como del defasamiento en el tiempo  $\tau$ .

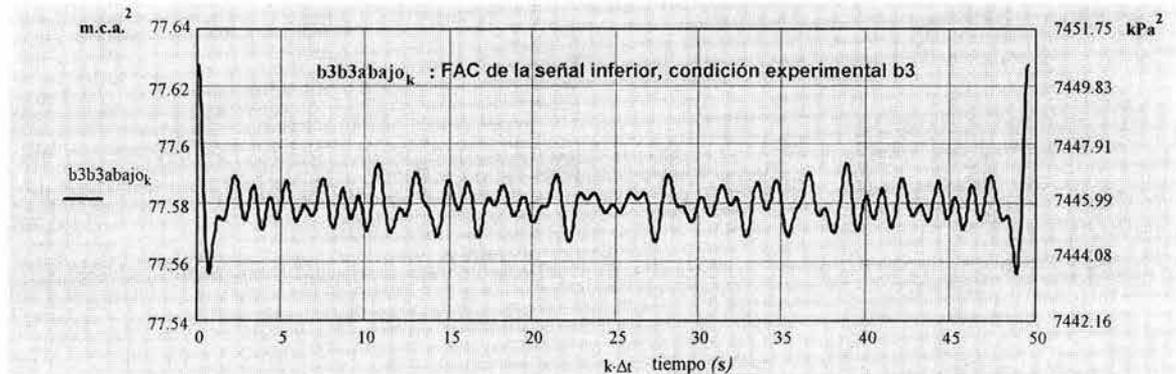
Para tal efecto se empleó la FCC de una señal  $p_i$  consigo misma, es decir, la Función de Autocorrelación **FAC** de dicha señal, expresada por

$$R_{xx}(\tau) = R_{p_i, p_i}(\tau) = E[p_i(t) \cdot p_i(t + \tau)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T p_i(t) \cdot p_i(t + \tau) \cdot dt \quad (4.6.5.4.2)$$

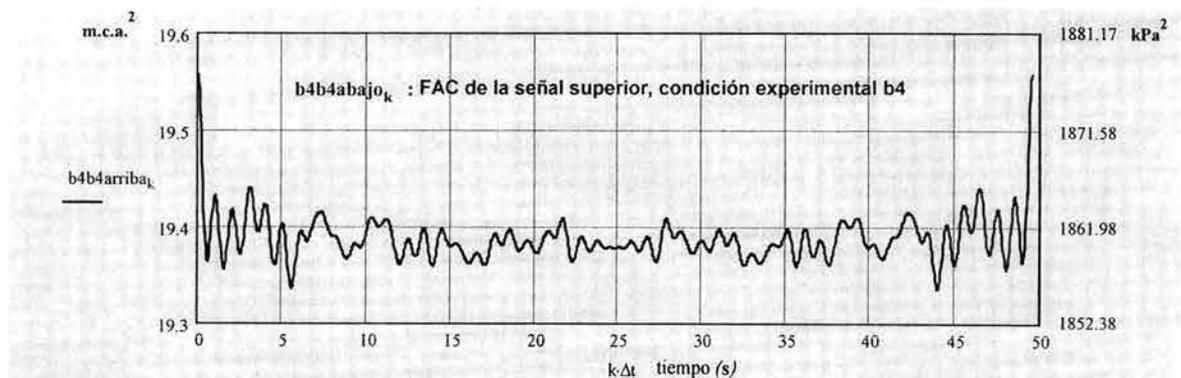
En las figuras 4.6.5.4.12 y 4.6.5.4.13 se muestra en forma gráfica las FAC de algunas condiciones de prueba. Dado que se trata de una FCC de una señal consigo misma (por definición) y asumiendo la periodicidad en los valores fuera de rango en el proceso de cálculo, estas señales fueron simétricas.

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

Puesto que con la FAC de una señal se pueden identificar escalas de tiempo, una vez calculada la FAC para cada señal, en forma conservadora se determinó el valor límite del defasamiento en el tiempo  $\tau$  al considerar un promedio del periodo de las ondas simples mas pequeñas de las señales autocorrelacionadas



*Figura 4.6.5.4.12 FAC de la señal de presiones inferiores, condición experimental b3.*



*Figura 4.6.5.4.13 FAC de la señal de presiones superiores, condición experimental b4.*

De esta forma se obtuvo un lapso  $\Delta t$  alrededor de 1.2 segundos, el cual es mayor que el valor de  $\tau$  considerado en los cálculos ( $\tau = 0.05 \text{ s}$ ). Considerando lo anterior y de la ecuación 4.6.5.1.4 se tiene que

$$T = 60s > \frac{\Delta t}{0.1} = \frac{1.2}{0.1} \quad \rightarrow \quad T = 60s > 12s$$

por lo tanto  $T$  fue suficiente, con lo que, estadísticamente, dará el mismo efecto para tiempos mayores de  $\tau$ .

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

En adición, al calcular la función de autocorrelación de las fluctuaciones de presión  $FAC(p')$  de cada señal muestreada, cuya representación gráfica de una de ellas se muestra en la figura 4.6.5.4.14, permitieron determinar que existe una relación notable entre la señales de las fluctuaciones de presión superiores e inferiores para una condición experimental dada.

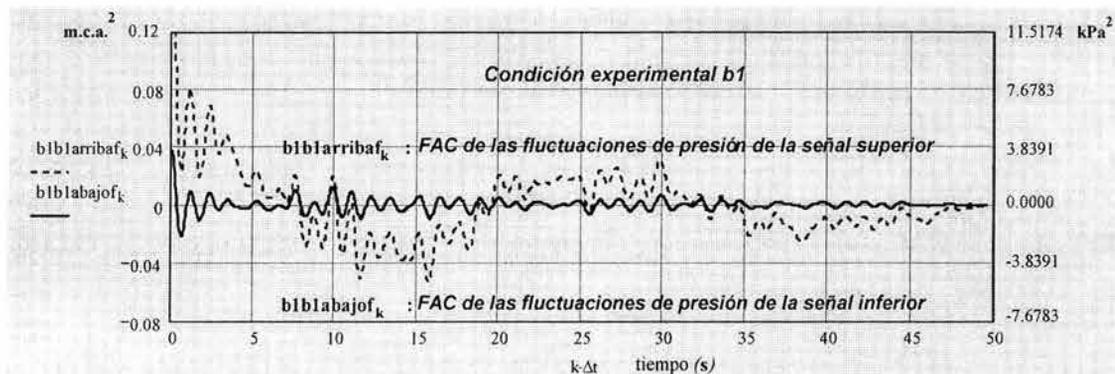


Figura 4.6.5.4.14 FAC de las fluctuaciones de presiones, condición experimental b1.

Nótese en todas las figuras anteriores, dado que se trata de fluctuaciones de presión (aleatorias) de una señal consigo misma, conforme el defasamiento  $\tau$  es mayor en el tiempo, dichas señales correlacionadas tienden a anularse.

Se pudo apreciar en las  $FAC(p')$  que ambas señales, superior e inferior, tienen similitud en cuanto a defasamiento y frecuencias de onda para un tiempo  $t_i$  de registro.

En general, para una condición experimental dada, la amplitud de onda en la señal de presión superior fue mayor al de la señal de presión inferior. Esto mismo se puede observar en las FCC de las fluctuaciones de presión  $FCC(p')$  (figuras 4.6.5.4.9 a la 4.6.5.4.11). Con lo cual se puede decir que existió relación en la forma de excitación del fenómeno en estudio sobre los transductores superior e inferior; resultado obtenido sin haber tenido que determinar una Función de Correlación Cruzada Espacial  $FCCE^6$ .

En esta sección se ha verificado la aseveración hecha en las secciones anteriores: la similitud entre la señal correspondiente a la condición de sólo oleaje y la del dispositivo de rejilla. Mientras que tal relación con las señales pertenecientes a las propelas no fue relevante. Es más, como se dijo en las secciones anteriores, para ciertas características de la distribución de presiones del flujo ante tales dispositivos, correspondieron más bien a la condición experimental (b1) de "solo vórtices".

<sup>6</sup> Para lo cual se hubiera tenido que instalar varios transductores a diferentes profundidades en la compuerta.

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

Por tal motivo se calculó la FCC entre las señales pertenecientes a los distintos dispositivos empleados, considerando ahora como la señal base de comparación a la condición b1.

Dado que al emplear la ecuación 4.6.5.4.1 entre los distintos pares de señales, el rango de variación de los valores correlacionados fue mayor al obtenido con la señal base c1 (sólo oleaje); lo cual hacía más difícil la detección de detalles en las señales debido al aumento de la escala de comparación, se empleó una FCC normalizada (FCCN)<sup>7</sup> definida como

$$RN_{xy}(\tau) = RN_{p_i p_{i+1}}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{\int_0^T [p_i(t) - \mu_{p_i}] \cdot [p_{i+1}(t + \tau) - \mu_{p_{i+1}}] \cdot dt}{r.m.s.(p_i) \cdot \sqrt{\int_0^T [p_{i+1}(t + \tau) - \mu_{p_{i+1}}]^2 \cdot dt}} \quad (4.6.5.4.3)$$

donde

$\mu_{p_i}$  y  $\mu_{p_{i+1}}$  son las presiones medias de las señales  $p_i(t)$  y  $p_{i+1}(t)$ , respectivamente. El término  $r.m.s.(p_i)$  está determinado al aplicar a la señal  $p_i(t)$  la ecuación 4.6.5.1.1.

En las figuras 4.6.5.4.15 a la 4.6.5.4.17 se muestran en forma gráfica algunos de los resultados obtenidos con la ecuación anterior, particularmente para las señales superiores.

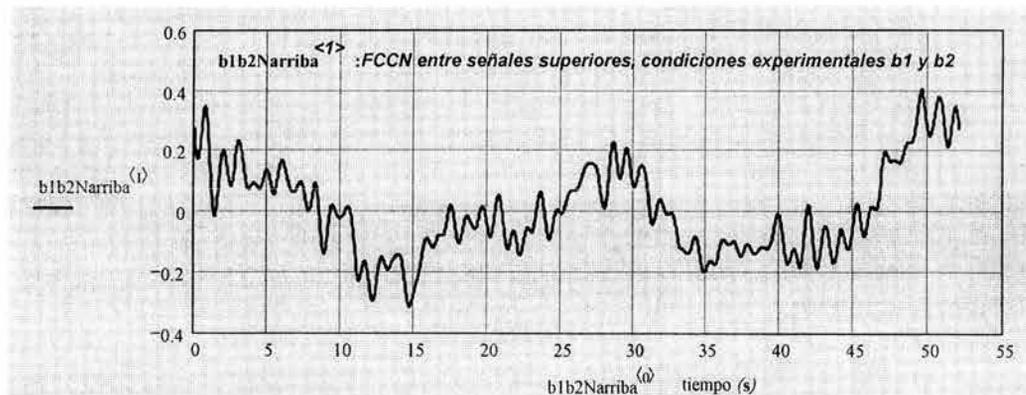


Figura 4.6.5.4.15 FCCN de las presiones superiores, condiciones experimentales b1 y b2.

<sup>7</sup> Véase en referencias electrónicas: Paul Bourke (1996).

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

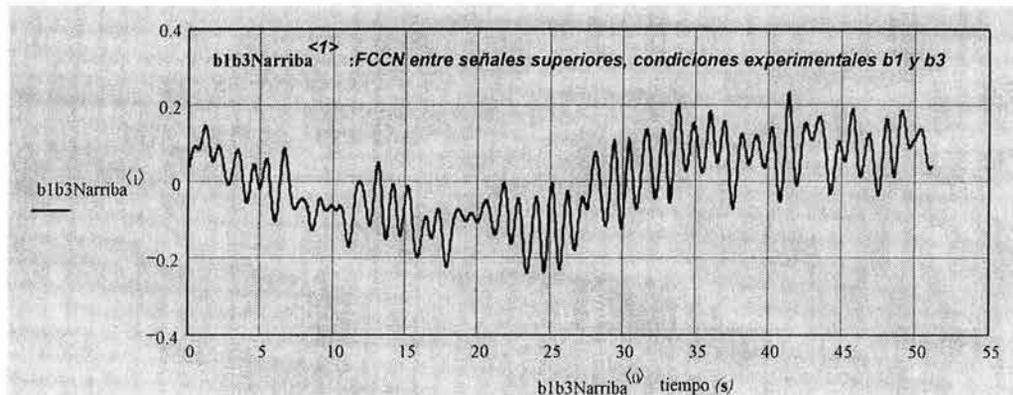


Figura 4.6.5.4.16 FCCN de las presiones inferiores, condiciones experimentales b1 y b3.

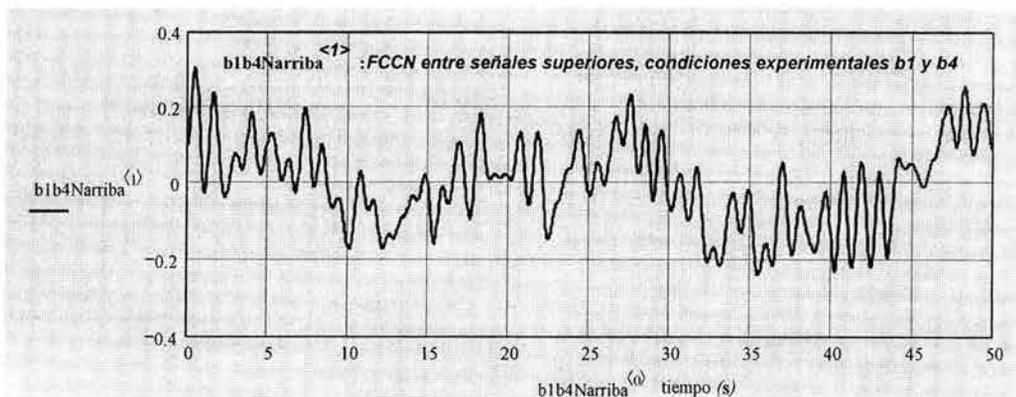


Figura 4.6.5.4.17 FCCN de las presiones superiores, condiciones experimentales b1 y b4.

Se puede observar buena similitud entre la condición “sólo vórtice” y las condiciones correspondientes a los dispositivos de propelas en las presiones superiores. Además tales señales son similares en la fase y periodo de onda en varios instantes del registro.

Sin embargo, la correlación normalizada de la propela redondeada (figura 4.6.5.4.16) presenta adicionalmente valores de correlación negativos mínimos en 10 a 15 segundos del registro, por lo que es esta última condición es la más parecida a la b1 (sólo vórtice). La condición de rejilla fue la menos relacionada a la condición b1, como se esperaba.

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

---

### 4.7 Vórtices en el dominio de la frecuencia

Las funciones de correlación y la densidad espectral proporcionan básicamente la misma información. No obstante, en ciertas aplicaciones, con las funciones de correlación se obtiene la información deseada en forma más conveniente, como lo fue en la sección anterior al determinar las similitudes entre señales y los periodos de onda, el tiempo de conducción de la mayor parte de energía de una señal "réplica". Así también se emplearon las FCC en la identificación de escalas de tiempo dentro de patrones de onda más o menos repetitivos, para determinar las suficiencias del defasamiento  $\tau$  y del tiempo de muestreo  $T$ .

Según Taylor y Von Kármán<sup>\*1</sup>, la turbulencia consiste en la superposición transitoria de muchos movimientos vorticosos periódicos, los cuales poseen cierta energía cinética y de presión. En el caso de los vórtices tratados en este trabajo, por sus características analizadas en las secciones anteriores, se puede decir que son una manifestación de la turbulencia del flujo. Se puede considerar como un patrón característico del flujo a una escala espacial grande de turbulencia<sup>\*\*2</sup>.

Además, como se analizó anteriormente, la presencia de un vórtice causó la menor dispersión de las fluctuaciones de presión (valores *r.m.s.*), lo cual se manifestó en una probabilidad de ocurrencia grande en ciertas magnitudes de presiones, además la condición experimental de vórtices presentó los valores extremos mas grandes en las FDDP analizadas en las secciones anteriores.

Por todo lo anterior, fue menester conocer cómo la energía de la turbulencia era distribuida acorde a las distintas frecuencias presentes en el flujo con y sin vórtices, así como en los diferentes dispositivos disipadores considerados.

Como todo flujo turbulento, las frecuencias del fenómeno de vórtices considerado son aleatorias, aunque es posible obtener valores medios para asignar una cierta cantidad de la energía total a las distintas frecuencias del fenómeno como se hace en esta sección.

#### 4.7.1 Plan de pruebas experimentales

El plan de pruebas para el análisis de vórtices en el dominio de la frecuencia es el mismo al empleado a partir del análisis de turbulencia, mencionado de la sección anterior. Por lo que las condiciones definidas en la tabla 4.6.1.1 (en su parte central) fueron también consideradas en esta sección.

---

\*1 Véase en referencias: Hinze, J. O., (1960).

\*\*2 Escalas de turbulencia mas o menos próximas a la escala espacial máxima de turbulencia de un fenómeno de vórtices, determinada ésta última, para el caso aquí tratado, por las dimensiones de la estructura de entrada.

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

---

### 4.7.2 Sistema de Medición. Analizador de espectros

El sistema de medición utilizado para el análisis de vórtices en el dominio del tiempo (sección 4.6.3), lo fue de igual manera para el análisis en el dominio de la frecuencia del fenómeno en estudio, salvo que, en adición, se empleó un analizador de espectros para tal fin (véase figura 4.6.3.1). De esta forma, se añade al sistema de medición descrito en la sección 4.6.3 lo siguiente:

7. **Analizador de espectros.** Por las razones que se dan al inicio de la sección 4.7, fue necesario la determinación de los espectros de las señales muestreadas. Para ello se empleó un analizador de espectros Hewlett Packard modelo 3582. Este aparato recibe las señales amplificadas, las muestrea y las procesa para obtener en pantalla sus espectros de energía, por lo que también es un aparato presentador de resultados.
8. **Otro Analizador.** Para verificar que los resultados dados por el analizador de espectros fueran correctos, se empleó el software Mathcad el cual utiliza como entrada los datos de las señales registradas, que son los archivos extensión **.dat** del programa Small DAQ 1.0 (inciso 5 de la sección 4.6.3), para calcular el espectro de energía empleando como base la transformada rápida de Fourier general o bien en base dos. En la secciones B.5.1 y B5.2 del **Apéndice B**, se describen estos procesos matemáticos.

### 4.7.3 Análisis de Vórtices en el dominio de la frecuencia

Como se dijo al final de la sección anterior, en esta, la idea de aplicar el análisis de Fourier a las señales muestreadas fue la de descomponer las fluctuaciones de presión medidas en componentes senosoidales o exponenciales complejas<sup>1</sup> y estudiar la distribución de energía entre las diferentes componentes en su magnitud (amplitud) y su evolución en el tiempo<sup>2</sup>.

Como se menciona en el paso número 8 del proceso de muestreo y análisis experimental de la sección 4.7.2, se empleó un software para verificar los espectros obtenidos de manera directa con el analizador de espectros. Además, como la transformada de Fourier (TF) de una señal es una parte del proceso de cálculo para la obtención del espectro de densidad de potencia (EDP)<sup>3</sup> de una señal y el software anterior no posee una función interconstruida para calcular el espectro en un solo paso; en primer lugar, en esta sección se describe brevemente los tópicos matemáticos de dicho proceso de cálculo empleado para hacer el análisis en el dominio de la frecuencia del fenómeno en estudio.

---

<sup>1</sup> En general, tal es el significado técnico de "espectro".

<sup>2</sup> Véase en Referencias: Mathieu J. , Scott, J. (2000),.

<sup>3</sup> También llamado función de densidad de potencia espectral (FDPE).

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

El EDP puede verse desde varios puntos de vista, por ejemplo, en términos del Análisis de Fourier generalizado, operaciones de filtrado de señales o como la TF de una función de correlación cruzada (FCC); siendo éste último el adoptado en este trabajo, por considerarlo mas relacionado con las FCC analizadas en la sección anterior y con lo que se menciona en el Apéndice B.

La Función de Densidad Espectral (FDE) entre dos registros  $p_i$  y  $p_{i+1}$  en el tiempo, que representan a los procesos aleatorios ergódicos estacionarios<sup>4</sup>  $\{ p_i \}$  y  $\{ p_{i+1} \}$ , respectivamente, se obtiene al aplicar la T.F. establecida en la ecuación B25 del Apéndice B y expresando la frecuencia en radianes, a la FCC entre ambos registros, es decir

$$\mathcal{F}[S_{xy}(\tau)] = S_{xy}(\omega) = S_{p_i p_{i+1}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{p_i p_{i+1}}(\tau) e^{i2\pi\omega\tau} d\tau \quad (4.7.3.1)$$

donde:

$R_{p_i p_{i+1}} = R_{xy}$  es la FCC establecida en la ecuación 4.6.5.4.1. de la sección anterior. A la ecuación 4.7.3.1 se le conoce como la función de densidad espectral cruzada (FDEC) entre  $p_i(t)$  y  $p_{i+1}(t)$ .

Para el caso en que la FCC de una señal  $p_i(t)$  sea consigo misma, es decir, sea una Funcion de Autocorrelación (FAC), se tiene

$$\mathcal{F}[S_{xx}(\tau)] = S_{xx}(\omega) = S_{p_i p_i}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{p_i p_i}(\tau) e^{i2\pi\omega\tau} d\tau \quad (4.7.3.2)$$

La FAC  $R_{p_i p_i}$  esta definida en la ecuación 4.6.5.4.2 de la sección anterior. A la ecuación 4.7.3.2 se le llama Función de Densidad Autoespectral (FDAE) o también Función de Densidad de Potencia Espectral (FDPE), este último nombre, es debido a que dicha función tiene un resultado equivalente al emplear el llamado *Teorema de Parseval* o de Rayleigh<sup>5</sup> que sirve para cuantificar la energía o la potencia por unidad de tiempo de una onda<sup>6</sup>.

Como las FDE establecidas en las ecuaciones anteriores, están definidas en todas las frecuencias (positivas y negativas) se dice que son espectros de dos lados para enfatizar este hecho. En la práctica conviene trabajar sólo con frecuencias positivas, que resultan de duplicar los valores de las ecuaciones de las FDE anteriores, es decir

$$G_{xy}(\omega) = G_{p_i p_{i+1}}(\omega) = 2S_{xy}(\omega) = 2S_{p_i p_{i+1}}(\omega) \quad (4.7.3.5)$$

$$G_{xx}(\omega) = G_{p_i p_i}(\omega) = 2S_{xx}(\omega) = 2S_{p_i p_i}(\omega) \quad (4.7.3.6)$$

<sup>4</sup> Véase sección A.2.3 del Apéndice A.

<sup>5</sup> En teoría electromagnética se le conoce como el Teorema de Poynting.

<sup>6</sup> Véase en bibliografía: Morrison N., (1994).

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

---

y se llaman FDEC y FDPE de un lado, respectivamente.

Contrariamente, si se emplea la Transformada Inversa de Fourier (TIF) (véase ecuación B26 del apéndice B) a la ecuación 4.7.3.2 se obtiene la FAC, esto es

$$R_{xx}(\tau) = \mathcal{F}^{-1} [S_{xx}(\omega)] = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega) \cdot e^{i2\pi\omega\tau} d\omega \quad (4.7.3.7)$$

si  $\tau = 0$  en la FAC (ecuación 4.6.5.4.2), entonces

$$R_{xx}(0) = R_{p_i p_i}(0) = E[p_i(t)^2] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_0^T [p_i(t)]^2 \cdot dt = \varphi^2 \quad (4.7.3.8)$$

por lo que, en este caso, igualando la ecuación 4.7.3.7 y 4.7.3.8, se tiene

$$\varphi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega) \cdot e^{i2\pi\omega\tau} \cdot d\omega \quad (4.7.3.9)$$

Lo cual significa que el área bajo la FDPE es la media cuadrática  $\varphi^2$  (segundo momento). Si la media  $\mu_p$  de  $p_i(t)$  es cero. Entonces dicha área es igual a la varianza  $\sigma_p$ , como es el caso de las fluctuaciones de presión  $P_i'(t)$ .

Ahora bien, el proceso matemático de correlación tiene relación con la T.F. (ecuación B25 del apéndice B) por el llamado *Teorema de Correlación*, el cual establece: si  $x(\omega)$  y  $y(\omega)$  son las T.F. de las señales  $x(t)$  y  $y(t)$ , respectivamente, la FCC (en el dominio de la frecuencia) entre ambas es

$$\mathcal{F} [R_{xy}(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{i2\pi\omega\tau} dt = y(\omega) \cdot x(\omega)^* \quad (4.7.3.10)$$

Donde el término de la FCC,  $R_{xy}(\tau)$ , está definido por la ecuación 4.6.5.4.1 y  $x(\omega)^*$  es el conjugado complejo de  $x(\omega)$ . Empleando el teorema anterior a la FDPE (ecuación 4.7.3.2) se tiene

$$S_{p_i p_i} = \int_{-\infty}^{\infty} R_{p_i p_i}(\tau) \cdot e^{i2\pi\omega\tau} dt = p_i(\omega) \cdot p_i(\omega)^* = |p_i(\omega)|^2 \quad (4.7.3.11)$$

Por lo cual cada valor de la FDPE  $\in \mathcal{R}$ , pues el módulo de  $p_i(\omega) \in \mathbb{C}$  siempre es un número real. Para una FDPE de un solo lado el resultado es  $2 \cdot |p_i(\omega)|^2$ .

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

Con lo expuesto anteriormente queda definida una FDEC en su forma general y la FDPE como un caso particular de ésta. Siendo esta última función, en su forma de espectro de un solo lado (ecuación anterior), la utilizada en este trabajo. En las figuras 4.7.3.1 y 4.7.3.2 se muestran algunas de las FDPE de las señales de presiones superiores e inferiores calculadas para todas las condiciones experimentales establecidas el subcapítulo 4.7.1.

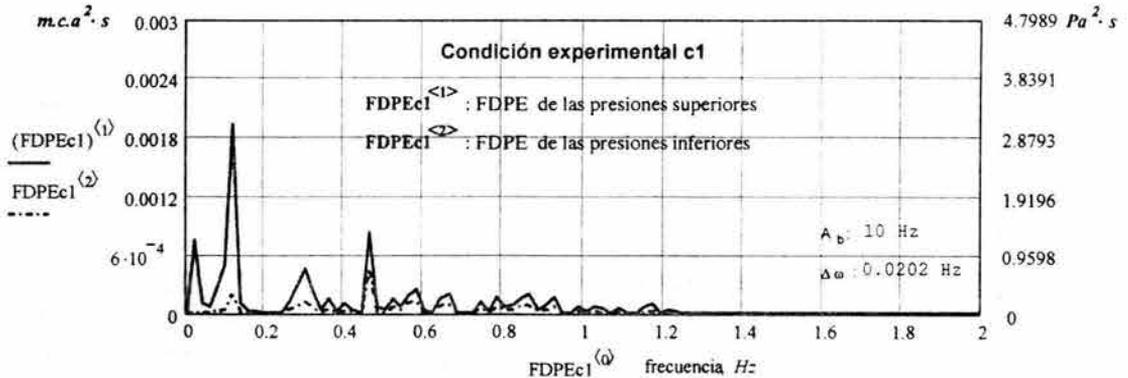


Figura 4.7.3.1 FDPE. Condición c1 del plan de pruebas experimentales. Tabla 4.6.1.1

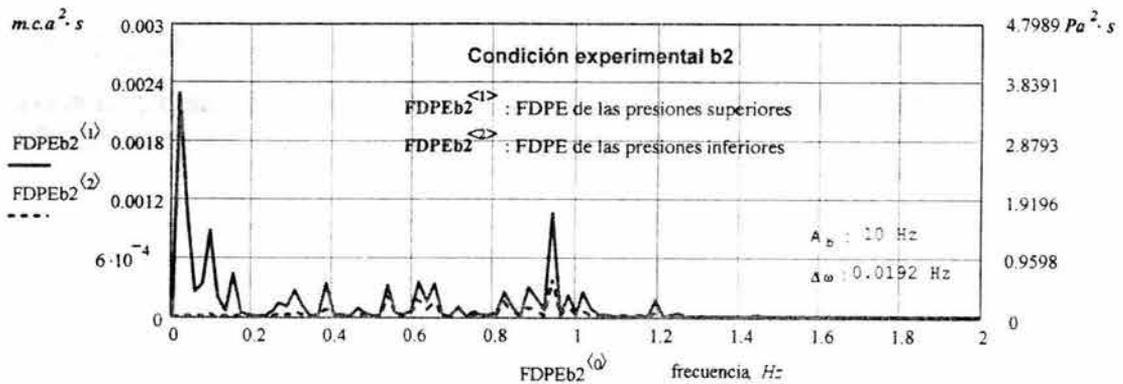


Figura 4.7.3.2 FDPE. Condición b2 del plan de pruebas experimentales. Tabla 4.6.1.1

Sin embargo, existen variantes de la FDPE, como es la que calcula el analizador de espectros empleado en este trabajo. Tal variante se basa en la relación que existe entre la T.F., la amplitud de la FDPE  $|p_i(\omega)|$  y la raíz cuadrada de la media cuadrática  $\psi^2$  (ecuación 4.7.3.9), cuando esta última es igual a su varianza, es decir, la r.m.s., parámetro empleado en la sección 4.6.5.1 para cuantificar la magnitud de la turbulencia del flujo. Esta relación para la FDPE (de un solo lado) es<sup>9</sup>

<sup>9</sup> Véase referencia: CFE, (1988), Análisis espectral del oleaje. Unidad de estudios de ingeniería civil.

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

---

$$r.m.s. = \frac{2 \cdot |p_i(\omega)|}{\sqrt{2}} \quad (4.7.3.12)$$

De esta forma el analizador de espectros calcula y grafica la *r.m.s.* (en *V*) contra la frecuencia (en *Hz*).

Acorde con el plan de pruebas experimentales definido en la sección 4.7.1, se obtuvieron los espectros de potencia de las señales muestreadas obtenida con la metodología descrita en la sección anterior. Así, por ejemplo, para la verificación de los espectros de una señal  $p_i(t)$  que representa una condición experimental, a partir del tiempo total de muestreo ( $T_m$ ) y el intervalo de muestreo ( $\Delta t$ ) elegido<sup>\*10</sup>, el número de datos de la señal (discretizada) está dado por

$$N = \frac{T_m}{\Delta t} \quad (4.7.3.11)$$

El intervalo de frecuencia que corresponde al tiempo de muestreo, llamado ancho de banda ( $A_b$ ), que equivale al  $T_m$  en el dominio del tiempo, es

$$A_b = \frac{N}{T_m} = \frac{1}{\Delta t} \quad (4.7.3.12)$$

por lo que el incremento de frecuencia ( $\Delta\omega$ ) es

$$\Delta\omega = \frac{1}{T_m} = \frac{A_b}{N} \quad (4.7.3.13)$$

El software MathCad permite calcular la Transformada Discreta de Fourier (TDF) de una señal o función  $f_N$  directamente de su definición (véase ecuación B34 del Apéndice B), o bien empleando la Transformada Rápida de Fourier (FFT) base dos o general, procesos de cálculo descritos brevemente en el apéndice B.

Dado que el número de datos muestreados de las señales no fueron potencia de 2 ( $N=2^n$ ) y sobre todo a que era importante considerar todos los datos medidos, se empleó la FFT general. Así, el argumento dado a la función  $CFFT()$ <sup>\*11</sup> fue un vector de las fluctuaciones de presión, mientras que el resultado fue una función discreta (vector)  $F_N$  de  $N$  elementos.

---

\*10 Especificando dicho intervalo de tiempo al programa adquisidor de datos Small DAQ.

\*11 Véase en referencias: Mathcad 2001 Professional (2001).

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

Con las ecuaciones 4.7.3.6, 4.7.3.10 y 4.7.3.12 se determinaron las FDPE de un solo lado en términos de la *r.m.s.*. En las figuras 4.7.3.3 y 4.7.3.4 se muestra en forma gráfica las FDPE para algunas de las condiciones experimentales establecidas en la sección 4.7.1.

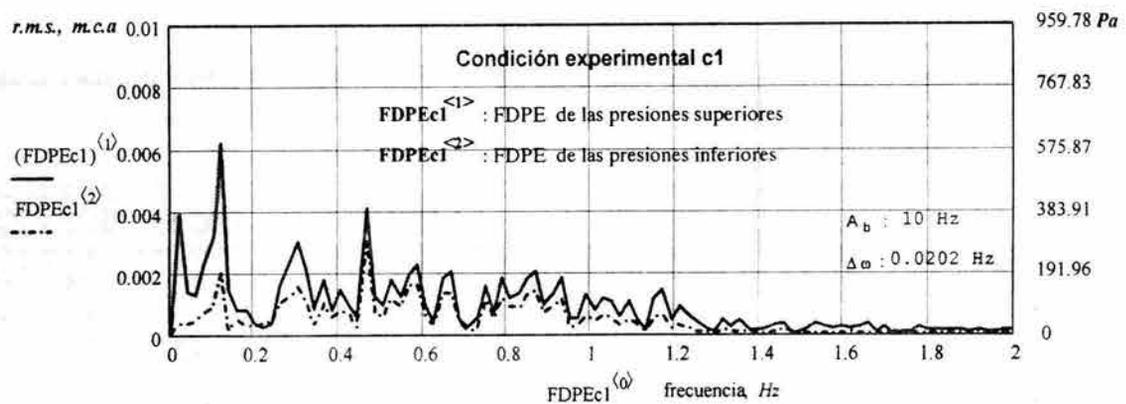


Figura 4.7.3.3 FDPE-*r.m.s.* , Condición experimental c1 del plan de pruebas, tabla 4.6.1.1

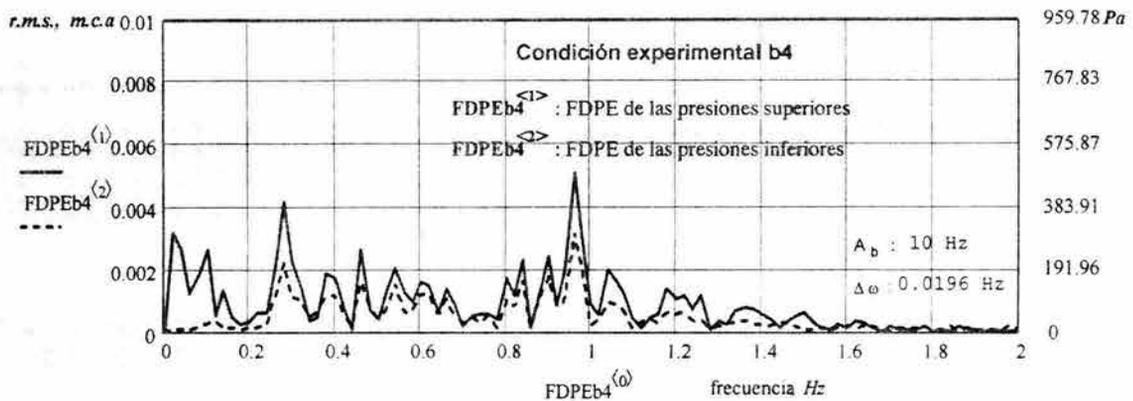


Figura 4.7.3.4 FDPE-*r.m.s.* , Condición experimental b4 del plan de pruebas, tabla 4.6.1.1

Con el analizador de espectros se obtuvieron de manera directa las FDPE en términos de la *r.m.s.* en *V-Hz*, no obstante, con las ecuaciones 4.6.4.3 y 4.6.4.4 para la conversión del voltaje registrado a unidades de presión actuante obtenidas en la sección 4.6.4, fue posible expresar los espectros en unidades de presión (en *Pa* ó *m.c.a.*).

Como en las FDPE en términos de la *r.m.s.* se trata de la distribución de energía de las amplitudes de las fluctuaciones de presión, se anula la ordenada al origen en las ecuaciones de conversión mencionadas; además éstas últimas se emplearon directamente a los valores de las señales eléctricas entregadas por el analizador de

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

espectros, dadas las unidades de este tipo de FDPE<sup>\*12</sup>. En las figuras 4.7.3.5 a la 4.7.3.9 se muestran las gráficas de las FDPE obtenidas mediante el analizador de espectros, en las cuales la *r.m.s.* se encuentra en unidades de presión.

Cabe aclarar que las gráficas de las FDPE calculadas fueron graficadas hasta los 2 Hz de frecuencia, a pesar de que en el cálculo numérico de las mismas su rango fue hasta los 10 Hz, es decir, un ancho de banda ( $A_b$ ) de 10 Hz, como se indica en tales gráficas.

Lo anterior se hizo porque los valores de las FDPE más allá de los 2 Hz fueron valores prácticamente nulos y, sobretodo, para facilitar la comparación con las FDPE obtenidas con el analizador de espectros cuyo ancho de banda fue de 2.032 Hz, que se menciona más adelante.

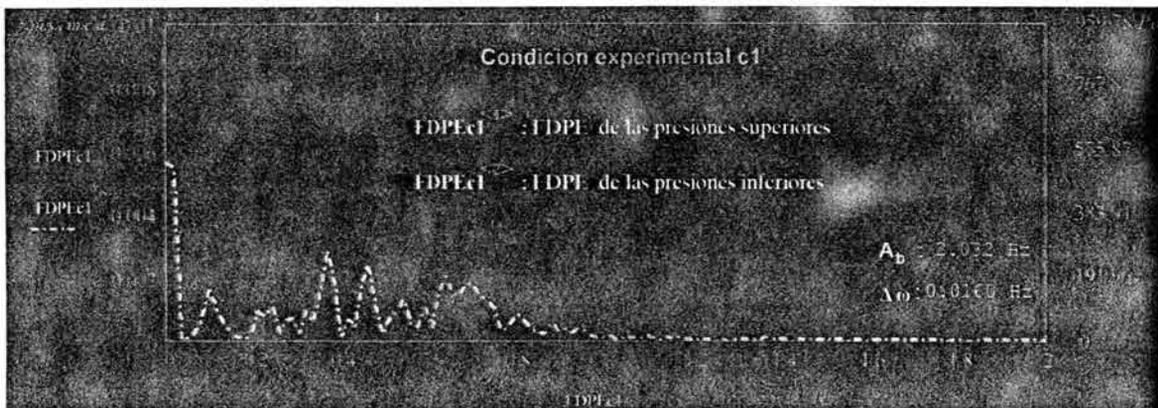


Figura 4.7.3.5 FDPE-*r.m.s* original, obtenida con el analizador de espectros.  
Condición experimental c1 del plan de pruebas, tabla 4.6.1.1

Para cada condición experimental considerada, se puede apreciar las similitudes en la distribución de energía (amplitudes) de las fluctuaciones de presión de las FDPE, FDPE en términos de la *r.m.s.* y las FDPE obtenidas con el analizador de espectros.

Por ejemplo, se pueden distinguir componentes dominantes de energía durante la ocurrencia de vórtices en los 0.8 y 1.1 Hz en las FDPE y FDPE versión *r.m.s.*, mientras que en las FDPE obtenidas con el analizador de espectros, éstas estuvieron entre 0.65 Hz y 0.8 Hz. De las figuras anteriores puede apreciarse que, en general, hubo una mayor cantidad de energía generada en las señales de presiones superiores que en las inferiores, pero la variación de dicha energía en ambas señales, para una condición experimental dada, fue semejante. Estos resultados también fueron obtenidos en el análisis de correlaciones llevado a cabo en la sección anterior.

\*12 las cuales son iguales a las de los datos del registro, en este caso Pa o m.c.a.

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

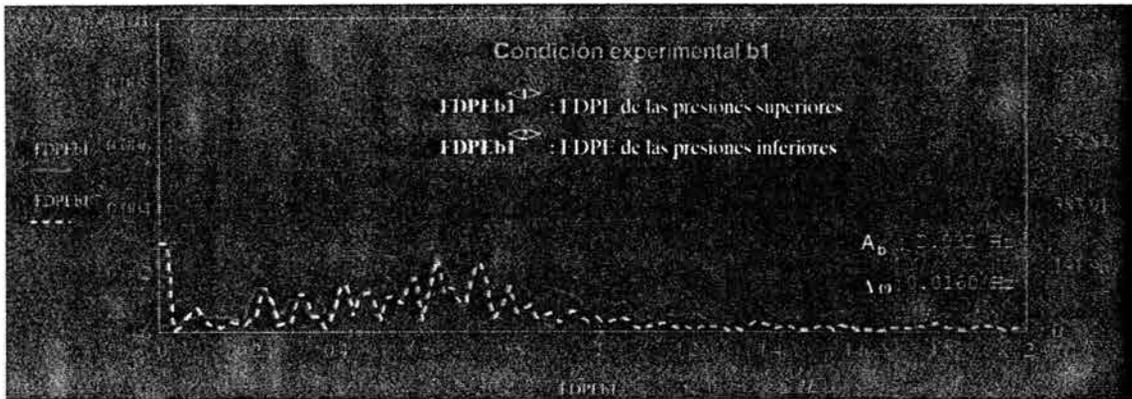


Figura 4.7.3.6 *FDPE-r.m.s. obtenida con el analizador de espectros.*  
*Condición experimental b1 del plan de pruebas, tabla 4.6.1.1*

Por lo anteriormente mencionado, la verificación de las FDPE obtenidas con el analizador de espectros fue satisfactoria, a pesar de que el ancho de banda ( $A_b$ ) en las FDPE calculadas numéricamente fue mayor (10 Hz) que el correspondiente a las FDPE del analizador (2.032 Hz). Esta diferencia de anchos de banda fue con la finalidad de que, en su comparación, todas las FDPE tuvieran resoluciones de frecuencia ( $\Delta\omega$ ) similares<sup>\*13</sup>.

Aunque el número de datos muestreados por el analizador de espectros se redujo a 128 por cada señal, debido a que se emplearon los dos canales del mismo (para los transductores superior e inferior), el convertidor analógico muestrea los datos a 102.4 Hz (9.766  $\mu$ s), velocidad que le permite operar de forma continua o promediar varias muestras por medio de funciones de promediado (RMS y TIME)<sup>\*14</sup> que posee el analizador, las cuales se emplearon durante la etapa experimental de muestreo.

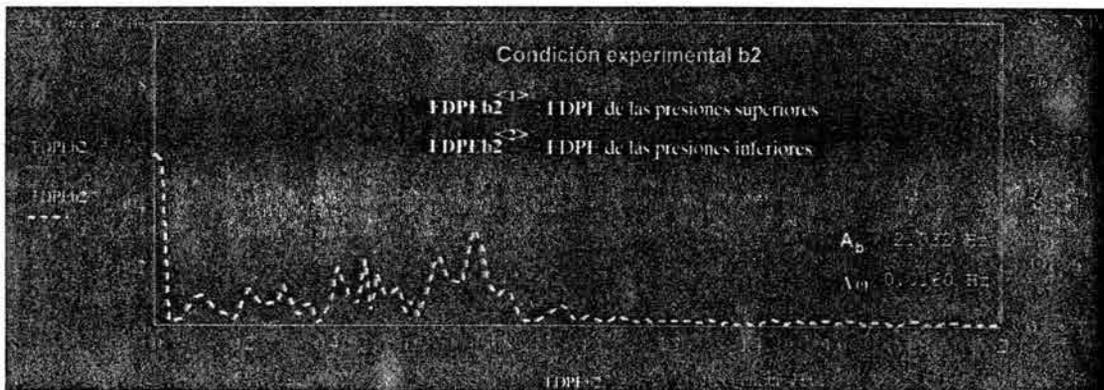
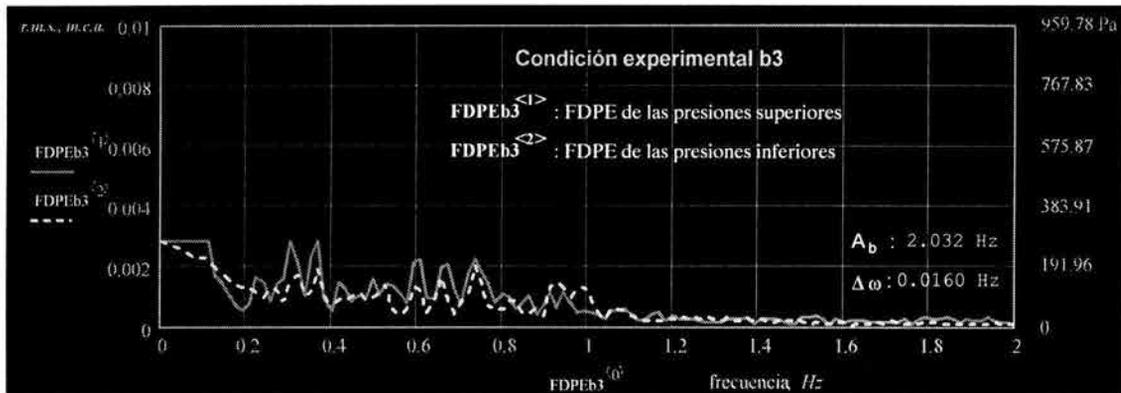


Figura 4.7.3.7 *FDPE-r.m.s. obtenida con el analizador de espectros.*  
*Condición experimental b2 del plan de pruebas, tabla 4.6.1.1*

\*13 Véase en bibliografía: Santamarina J. C., Fratta D., (1998).

\*14 Véase en referencias: Spectrum Analyzer HP 3582A, (1981), Operating Manual

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

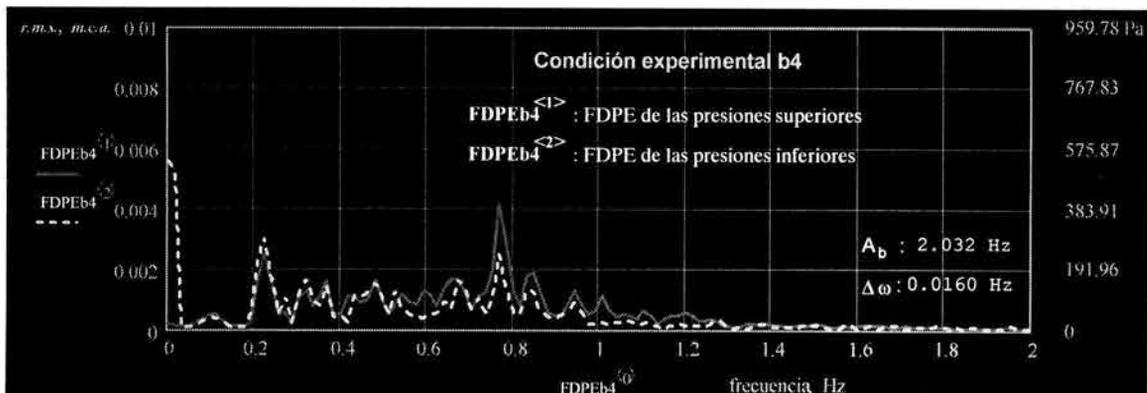


*Figura 4.7.3.8 FDPE-r.m.s. obtenida con el analizador de espectros.  
 Condición experimental b3 del plan de pruebas, tabla 4.6.1.1*

Por lo que las FDPE obtenidas mediante el analizador de espectros se consideran como referencia principal en el análisis hecho en este capítulo.

En primer lugar, se puede apreciar en todas las figuras anteriores que el contenido de energía en casi todo el rango de frecuencias calculado, fue mayor en las señales de presiones superiores que las inferiores. Resultado también obtenido al calcular la *r.m.s.* y la *I.T.* (sección 4.6.5.1) así como en el análisis de correlaciones realizado anteriormente (sección 4.6.5.4).

Se puede observar al comparar la figura 4.7.3.8, que corresponde a la FDPE de la condición c3 (rejilla), con las demás figuras correspondientes a las demás condiciones experimentales que fue el dispositivo que distribuye la energía de presión en un mayor número de frecuencias, de tal forma que la amplitud de las presiones fuera menor a  $0.259 \text{ kPa}$  ( $0.0027 \text{ m.c.a.}$ ), incluso un poco más que la condición c1 (“sólo oleaje”).



*Figura 4.7.3.9 FDPE-r.m.s. obtenida con el analizador de espectros.  
 Condición experimental b4 del plan de pruebas, tabla 4.6.1.1*

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

---

Esta distribución de frecuencias, fue desde las más pequeñas (0.1 Hz) hasta las más grandes del fenómeno en estudio (1 Hz), incluyendo también las frecuencias dominantes de un vórtice, que estuvieron en el rango de 0.6 Hz a 0.9 Hz.

Los resultados anteriores del dispositivo de rejilla están acorde con los parámetros *r.m.s.* y la *I.T.* calculados en la sección 4.6.5.1, donde este dispositivo tuvo los valores mas grandes. Así mismo, la condición experimental b3 (rejilla) presentó las FDDP más amplias (sección 4.6.5.2) y los valores extremos de la mismas más pequeños (sección 4.6.5.3).

Durante la aparición de un vórtice se registraron frecuencias que tuvieron grandes amplitudes en las fluctuaciones de presión (frecuencias dominantes), las cuales se presentaron entre un rango de 0.6 y 0.9 Hz. Se puede decir que la concentración de energía que se presentó en el rango de frecuencias mencionado es característica cuando ocurre un vórtice. Además, Sánchez B. J. L *et al* (2003) muestra que con aberturas parciales en una compuerta, las frecuencias dominantes anteriores se mantienen y es la amplitud (de las fluctuaciones de presión) la que aumenta proporcionalmente con la abertura. Por ello se puede explicar porqué los valores extremos mas grandes de las FDDP analizadas en la sección 4.6.5.3, fueran precisamente los de la condición experimental b1 (“sólo vórtices”).

Comparando las FDPE de las propelas (figuras 4.7.3.7 y 4.7.3.9) con la FDPE de la condición b1 (“sólo vórtice”, figura 4.7.3.6), se puede ver que tienen una similitud mayor en la distribución de energía de presión que la que tienen con la condición c1 (“sólo oleaje”). También se puede observar que en las propelas existe una concentración de energía en el rango de 0.6 Hz y 0.9 Hz. Más aún, la amplitud de las fluctuaciones de presión superior e inferior máxima de la condición b2 (propela redondeada) son casi iguales a los de la condición b1, al igual que las frecuencias en que éstas se presentan. Mientras que la amplitud de presión superior máxima de la condición experimental b4 (propela recta), cuyo valor fue de 0.4031 kPa (0.0042 *m.c.a.*), es mayor que las amplitudes máximas de las condiciones b1 y b2; la frecuencia de dicha amplitud máxima es igual a la correspondiente a la condición b2 (0.768 Hz).

Lo anterior explica el porqué de ciertos resultados inesperados obtenidos con los dispositivos de propelas mencionados en las secciones anteriores, por ejemplo, la dispersión de las fluctuaciones superiores e inferiores (valor *r.m.s.* total) de la condición b4 (propela recta) que fue menor a la correspondiente de la condición c1 (“sólo oleaje”) cuando se esperaba lo contrario, debido a la acción difusora de turbulencia, que se pensaba, tenían los dispositivos probados.

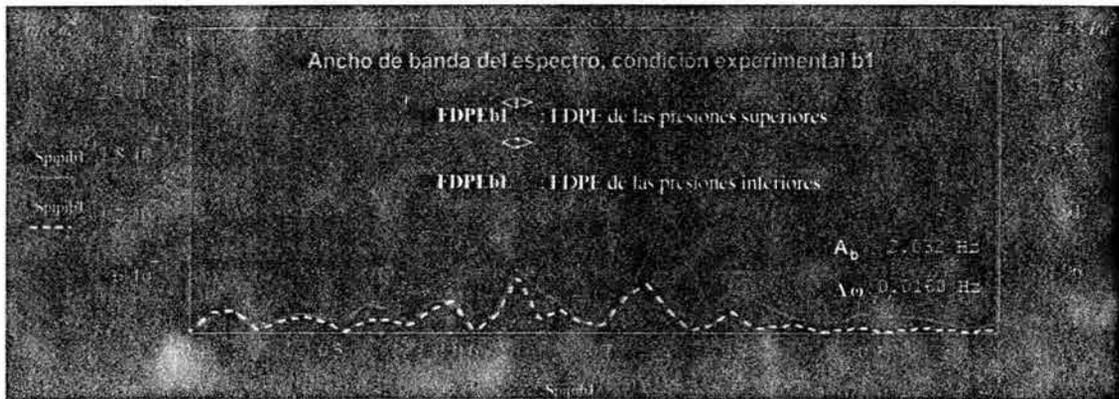
El apuntamiento (grado de estrechamiento) de la FDDP de las presiones inferiores de la condición b4 que fue mayor al presentado en la FDPE de la condición b1 (“sólo vórtices”). Tal semejanza entre las FDPE de los dispositivos de propelas con la FDPE de la condición “sólo vórtices” (b1) también se mencionó en el análisis de correlaciones.

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

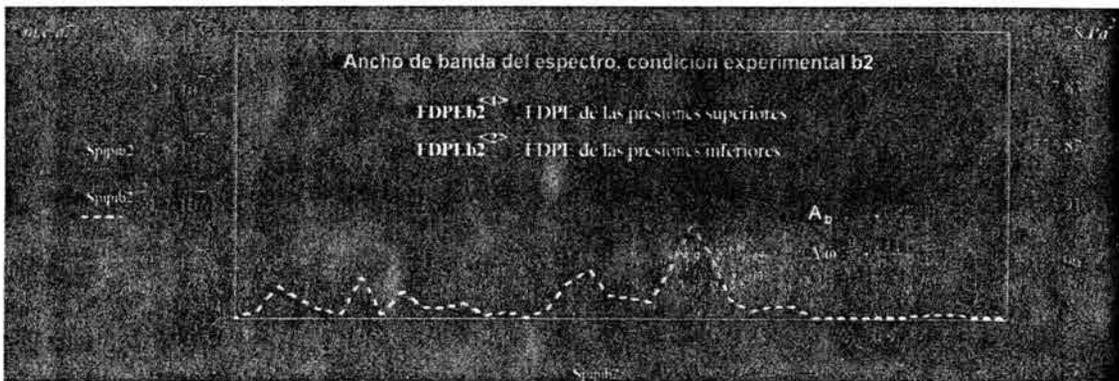
Para determinar cual de los dispositivos de propelas se parece más a la condición de vórtices (b1), se determinó el contenido de energía ( $\Delta E$ ) de cada FDPE (ecuación 4.7.3.11) a partir de las FDPE obtenidas con el analizador de espectros, en el rango de frecuencias donde concentra más energía el fenómeno en estudio<sup>\*15</sup>, es decir, entre 0.6 Hz y 0.9 Hz (véase figuras 4.7.3.10 a la 4.7.3.12).

Así, la energía ( $\Delta E$ ) contenida en un pulso, en el rango de frecuencias  $\omega_1 < \omega < \omega_2$  está dado por<sup>\*16</sup>

$$\Delta E = 2 \int_{\omega_1}^{\omega_2} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{R}_{p_i p_i}(\tau) \cdot e^{i2\pi\omega\tau} dt \cdot d\omega = 2 \int_{\omega_1}^{\omega_2} p_i(\omega) \cdot p_i(\omega)^* d\omega = 2 \int_{\omega_1}^{\omega_2} |p_i(\omega)|^2 d\omega \quad (4.7.3.14)$$



**Figura 4.7.3.10** Ancho de banda de la FDPE-r.m.s. Condición experimental b1 del plan de pruebas, tabla 4.6.1.1.

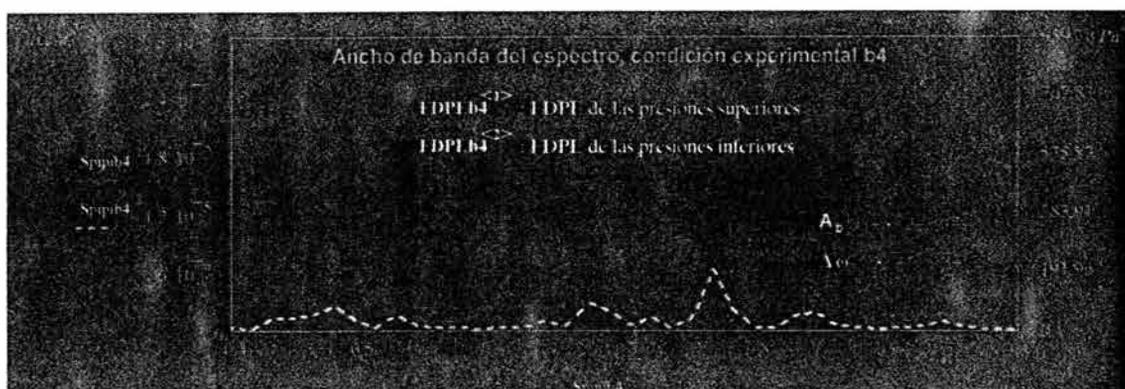


**Figura 4.7.3.11** Ancho de banda de la FDPE-r.m.s. Condición experimental b2 del plan de pruebas, tabla 4.6.1.1.

\*15 Llamado Ancho de Banda del Espectro (A.B.E.)

\*16 Véase Fourier Análisis de Morrison.

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor



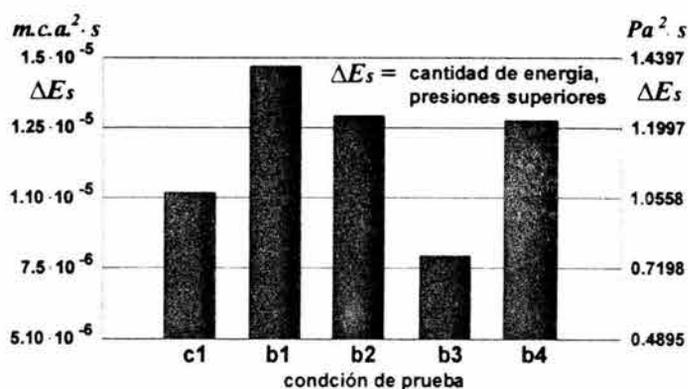
**Figura 4.7.3.12** Ancho de banda de la FDPE-r.m.s. Condición experimental b4 del plan de pruebas, tabla 4.6.1.1.

Empleando la ecuación anterior se obtuvieron los resultados que se muestran en forma gráfica en las figuras 4.7.3.13 y 4.7.3.14.

Entre las FDPE de las señales de presiones superiores (figura 4.7.3.13) la condición experimental (b1) del vórtice sin dispositivos disipadores tuvo la mayor cantidad de energía en el *Ancho de Banda del Espectro* (A.B.E.) considerado.

Aunque los dispositivos disipadores tienden a dispersar la energía en el A.B.E. a niveles superiores del flujo, se puede observar de la figura anterior, que las de las propelas son similares a la del vórtice. La energía de la condición experimental b2 (propela redondeada) es ligeramente mayor a la correspondiente de la condición 4b (propela recta).

Como referencia, se calcularon también los contenidos de energía de las condiciones c1 ("sólo oleaje") y b3 (rejilla) en el A.B.E. mencionado. Puede observarse que la rejilla tuvo la menor cantidad de energía, consecuencia del valor mayor de su *r.m.s.* respecto a las demás condiciones experimentales que fueron analizadas en la sección 4.6.5.1.



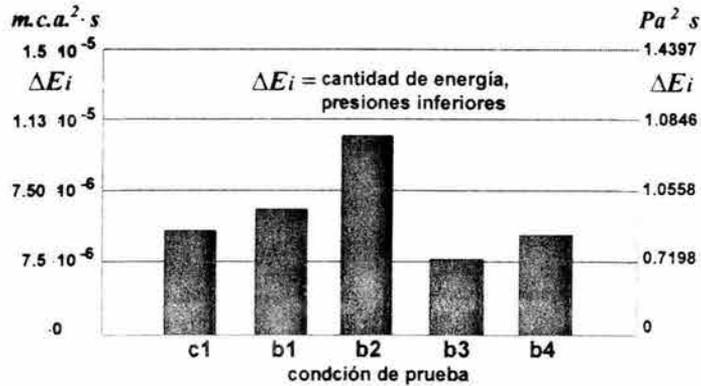
**Figura 4.7.3.13** Cantidad de energía en el A.B.E. de las FDPE de presiones superiores. Condiciones experimentales del plan de pruebas, tabla 4.6.1.1.

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

En cuanto a las FDPE de las presiones inferiores (Figura 4.7.3.14), la condición de propela redondeada (b2) fue la que tuvo la mayor cantidad de energía, seguida de la condición b1 ("sólo oleaje"), mientras que la de la propela recta fue menor a la de ésta última.

De nuevo, la condición b3 (rejilla) fue la que tuvo menor cantidad de energía, pues en la gráfica de su FDPE (figura 4.7.3.8) se puede ver que en el A.B.E. no aparecen las amplitudes dominantes (picos), característicos de la presencia de un vórtice.

Por todo lo anterior, puede decir que la rejilla fue el dispositivo que mejor disipó a los vórtices, como también se determinó en el análisis de correlaciones. Los dispositivos de propelas no destruyen a un vórtice, como se determinó también en el análisis de correlación, considerando como la señal base la condición experimental (b1) de "sólo vórtices", realizado en la sección anterior.



*Figura 4.7.3.14 Cantidad de energía en el A.B.E. de las FDPE de presiones inferiores. Condiciones experimentales del plan de pruebas, tabla 4.6.1.1.*

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

---



### 5 Simulación Numérica de Vórtices del caso en estudio

Como la realidad supera la fantasía y la complejidad imaginable por el ser humano, éste se vale de simplificarla para extraer algunas características principales de interés y así poder "entenderla". Bajo este proceder, el estudio teórico de los vórtices no es la excepción.

Los primeros modelos matemáticos para describir a los vórtices datan del siglo XIX; principalmente con las aportaciones de la Teoría Hidrodinámica Clásica. A partir de entonces, se han derivado de las ecuaciones de Navier-Stokes, varios modelos en los que se considera la simetría del flujo radial, su compresibilidad y permanencia.

Así, entre los primeros modelos, está, por ejemplo, el de Holtorff (1964) que considera las suposiciones anteriores, además de reducir el flujo radial cerca de la estructura de entrada para calcular la depresión de la superficie de agua cerca del embudo de aire. Resultado de mediciones experimentales, es ésta zona (del embudo de aire) donde las predicciones de los modelos analíticos y numéricos es cuestionable.

## **Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor**

---

A pesar de que existen modelos que parecen dar descripciones realistas del flujo con vórtices, como los modelos analíticos tridimensionales (3D) de Lewellen (1962) y Granger (1966), su complejidad matemática es excesiva al cumplir ciertos requerimientos, como variables de referencia o condiciones de frontera del campo de un flujo real. Otra dificultad adicional son los efectos locales que no pueden ser incluidos en estos modelos, tales como los producidos por las geometrías asimétricas y por los dispositivos supresores de vórtices.

Si no existe un buen conocimiento del campo de flujo cerca de la estructura de entrada, los modelos analíticos de vórtices disponibles actualmente no pueden predecir si ocurre o no un vórtice. Esta limitante es salvada empleando otras técnicas como la experimental en modelos físicos y otras herramientas matemáticas para estudiar el flujo vorticoso como son los modelos en Diferencias Finitas o del Elemento Finito, de las cuales, la primera de ellas es empleada en este trabajo.

De ambos modelos, la mayor parte de éstos se han hecho para flujo bidimensional, ya sea en planos horizontales como el de Brocard (1982) o en planos verticales [Montes J. S. (1997)]. De la dinámica de fluidos computacional (CFD) también se han desarrollado algunos modelos tridimensionales (3D) como los llamados de Turbulencia, que se formulan con base en las ecuaciones de Reynolds para flujos turbulentos, como el de Constantinescu G. S. y Patel V.C. (1998), en el que se simulan vórtices en el flujo de llegada a las tuberías de succión en cárcamos de bombeo.

También se han desarrollado modelos 3D para analizar la interacción del flujo (con vórtices) con las estructuras de entrada, incluyendo o no, dispositivos supresores. La respuesta de tales estructuras consiste principalmente en vibraciones que los vórtices pueden producir. Ejemplo de esto es el modelo Hidroelástico empleado en el diseño de las compuertas del vertedor de la P.H. Langkampfen, Austria (VAW, 2003).

En este capítulo se describe el modelo numérico de vórtices 3D empleado en este trabajo, en el que se considera de primordial importancia la hidrodinámica de la geometría de la conducción del flujo y de los dispositivos supresores, y la influencia que tienen éstos en la ocurrencia de vórtices.

### **5.1 Modelo Numérico de Vórtices**

La hidrodinámica del flujo aguas arriba de las compuertas de un vertedor es muy importante en la formación de vórtices, como se mencionó en la sección 3.1 del estado del arte y en la 4.1 del modelo físico de la P.H. Angostura; donde fue decisivo el estudio experimental del flujo proveniente desde el canal de llegada, el cual tiene varias características que vuelven más propensa a la estructura a la formación de vórtices aguas arriba de las compuertas.

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

---

Además, la mayoría de las características del flujo en compuertas se pueden predecir con buena exactitud por modelos matemáticos basados en la teoría del flujo con potencial, resultado de muchos trabajos realizados al respecto<sup>1</sup>, por citar algunos: Lewis T. (1977), Jacob H. *et al* (1985) y Montes J.S. (1997). Ya que se puede presentar en un flujo real cierta irrotacionalidad, si el movimiento es el resultado de fuerzas de presión y de gravedad o existen zonas del flujo donde los efectos viscosos carecen de importancia, como en el caso de los flujos a superficie libre. Esta irrotacionalidad del flujo también se presenta cuando el flujo es convergente y acelerado [Sotelo A.G. (1974)], como es el caso de los vertedores de cresta libre o controlada.

Por los motivos anteriores, el fluido (real) viscoso y turbulento en estudio se considera suficientemente bien representado por un flujo invíscido e irrotacional. También se considera que el flujo es incompresible y permanente.

Adicionalmente, dado que el fenómeno de vórtices es totalmente tridimensional, en ésta dimensión es considerado el flujo para su análisis numérico basado en la teoría del flujo con potencial.

El modelo matemático del flujo con potencial se basa en la existencia de una función escalar  $\phi(x,y,z)$  con primera y segunda derivadas continuas, en la que, por una identidad vectorial fundamental, se tiene que

$$\text{rot}(\text{grad}\phi) = \nabla \times (\nabla\phi) = 0 \quad (5.1)$$

Por lo que en un flujo irrotacional con velocidad  $\hat{q}$ , se cumple

$$\nabla \times \hat{q} = \hat{0} \quad (5.2)$$

Con lo que el gradiente de dicha función potencial  $\phi$  es igual al vector velocidad  $\hat{q}$ , esto es

$$\text{grad}(\phi) = \nabla\phi = \hat{q} \quad (5.3)$$

Por ello se dice que es la *función potencial de velocidades*, y el flujo irrotacional es frecuentemente nombrado como *flujo potencial*.

Si el flujo irrotacional es incompresible, cumple con la ecuación de conservación de masa (continuidad) siguiente

$$\text{div}(\hat{q}) = \nabla \cdot \hat{q} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (5.4)$$

---

<sup>1</sup> Dada la importancia práctica de una compuerta como dispositivo de control del flujo. Así pues, la predicción de las características del flujo en esta estructura es un problema clásico de la Hidrodinámica.

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

---

Y como se mencionó, dicho flujo potencial tiene asociada una función potencial  $\phi$  (ecuación 5.3), por lo tanto

$$\text{div}(\hat{q}) = \text{div}(\text{grad } \phi) = \nabla \cdot (\nabla \phi) = \nabla^2 \phi = 0 \quad (5.5)$$

Esto es, cumple con la ecuación de Laplace, que en coordenadas cartesianas es

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0 \quad (5.5a)$$

Si la condición de movimiento irrotacional (ecuación 5.2) se sustituye en la ecuación (vectorial) de Navier-Stokes para fluidos incompresibles, se tiene

$$\rho \cdot \hat{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \cdot \hat{q} + \frac{\mu}{3} \nabla (\nabla \cdot \hat{q}) = \rho \frac{\partial \hat{q}}{\partial t} + \rho (\hat{q} \cdot \nabla) \hat{q} \quad (5.6)$$

Considerando la viscosidad ( $\mu$ ) constante, en la ecuación anterior, da

$$\frac{\partial \hat{q}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \hat{q}^2 = -\hat{g} \nabla h - \frac{1}{\rho} \cdot \nabla p + \frac{\mu}{\rho} \nabla (\nabla \cdot \hat{q}) \quad (5.7)$$

ya que  $q^2 = u^2 + v^2 + w^2$  y considerando la ecuación de continuidad (ecuación 5.4) en la ecuación 5.7, se tiene

$$\frac{\partial \hat{q}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \hat{q}^2 = -\hat{g} \nabla h - \frac{1}{\rho} \cdot \nabla p \quad (5.8)$$

Agrupando términos respecto a  $\nabla$  y empleando el potencial de velocidades (ecuación 5.3) e integrando<sup>2</sup>, se llega a

$$-\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{q^2}{2} + gh + \frac{p}{\rho} = F(t) \quad (5.8)$$

Como se mencionó anteriormente, si el flujo (irrotacional) es permanente e incompresible, al dividir la ecuación anterior por la aceleración de la gravedad se tiene para dos puntos cualquiera del campo de fluido, que

$$\frac{p_i}{\gamma} + h_i + \frac{q_i^2}{2g} = \frac{p_j}{\gamma} + h_j + \frac{q_j^2}{2g} = H \quad (5.9)$$

---

<sup>2</sup> Para mas detalles de esta deducción , véase por ejemplo, la bibliografía: Daily W. J., Harleman R. F. D., (1981)

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

Donde  $H$  es la energía total (en forma carga) del flujo en un punto cualquiera. La ecuación 5.9 es la forma tridimensional de la ecuación (unidimensional) de Bernoulli. Nótese que la ecuación anterior es válida para flujos viscosos o no viscosos si se cumplen las otras condiciones antes mencionadas, pues se anula el término el término relativo a la viscosidad al considerar la continuidad del flujo ( $\nabla \cdot \hat{q} = \hat{\theta}$ ).

Las ecuaciones 5.4, 5.5 y 5.9 son las ecuaciones base del modelo numérico de vórtices considerado en este trabajo.

La ecuación de Laplace (ecuación 5.5a) es resuelta en todo el dominio 3D del flujo, aproximado las segundas derivadas mediante diferencias finitas centrales para una geometría rectangular (figura 5.1). Estas diferencias centrales se obtuvieron mediante las diferencias hacia atrás y hacia delante de la segunda derivada  $f''_{i,j,k}$  utilizando el desarrollo de la serie de Taylor, donde se desprecian los términos superiores al de segundo orden.

La longitud de los intervalos en las direcciones  $x, y, z$  se denotan por  $\Delta x, \Delta y$  y  $\Delta z$ , respectivamente. Así, la derivada segunda, por ejemplo, en la dirección  $X$  de un punto  $P_{i,j,k}$ , es

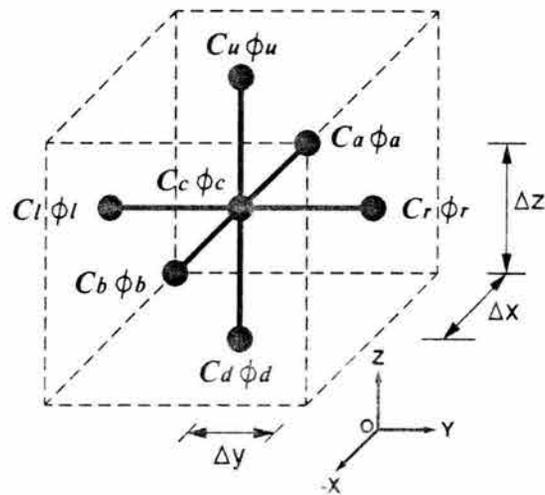


Figura 5.1 Molécula de cálculo 3D.

$$\left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_{i,j,k} = \frac{\phi_{i-1,j,k} - 2\phi_{i,j,k} + \phi_{i+1,j,k}}{\Delta x^2} \quad (5.10)$$

Se pueden obtener aproximaciones a la segunda derivada empleando una mayor cantidad de puntos vecinos para mejorar la exactitud por medio de un algoritmo genérico, como el propuesto por Nakamura S. (1992).

En forma análoga se obtienen los términos en diferencias en las otras direcciones, de forma que, sustituidos en la ecuación de Laplace, se tiene

$$\frac{\phi_{i-1,j,k} - 2\phi_{i,j,k} + \phi_{i+1,j,k}}{\Delta x^2} + \frac{\phi_{i,j-1,k} - 2\phi_{i,j,k} + \phi_{i,j+1,k}}{\Delta y^2} + \frac{\phi_{i,j,k-1} - 2\phi_{i,j,k} + \phi_{i,j,k+1}}{\Delta z^2} = 0 \quad (5.11)$$

Que es la ecuación en diferencias para un punto  $P_{i,j,k}$  de la retícula situada dentro de las fronteras.

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

Dado que la ecuación de Laplace es lineal, es válido el principio de superposición. Por lo tanto, se considera al flujo (con vórtices) aguas arriba de las compuertas de un vertedor con función potencial  $\phi_t$ , que está formado por las funciones potenciales 3D  $\phi_u$ ,  $\phi_{si}$ , y  $\phi_{vl}$ , que corresponden a un flujo uniforme, un sumidero<sup>3</sup> y un vórtice libre, respectivamente. Con lo cual el flujo resultante con esta superposición es

$$\phi_t = \phi_{nu} + \phi_{si} + \phi_{vl} \quad (5.12)$$

La cual es también es una función armónica. Para llevar a cabo dicha superposición la ecuación 5.11 es modificada mediante coeficientes de superposición en cada una de las tres direcciones de los puntos del dominio (véase figura 5.1) donde se presentaron los vórtices, según se mencionó en la sección 4.5. De esta forma la ecuación 5.11, queda

$$\frac{C_b \cdot \phi_{i-1,j,k} - 2C_c \cdot \phi_{i,j,k} + C_a \cdot \phi_{i+1,j,k}}{\Delta x^2} + \frac{C_l \cdot \phi_{i,j-1,k} - 2C_c \cdot \phi_{i,j,k} + C_r \cdot \phi_{i,j+1,k}}{\Delta y^2} + \frac{C_d \cdot \phi_{i,j,k-1} - 2C_c \cdot \phi_{i,j,k} + C_u \cdot \phi_{i,j,k+1}}{\Delta z^2} = 0 \quad (5.13)$$

En consecuencia, la relación de energías entre dos puntos  $P_{i,j,k}$  y  $P_{i+p,j+q,k+r}$  del campo de flujo está dada por

$$Z_{i,j,k} + \frac{P_{i,j,k}}{\gamma} + \frac{q_{i,j,k}^2}{2g} = Z_{i+p,j+q,k+r} + \frac{P_{i+p,j+q,k+r}}{\gamma} + \frac{q_{i+p,j+q,k+r}^2}{2g} = H \quad (5.14)$$

Las componentes de la velocidad  $q$  están dadas por la ecuación 5.3 en términos de  $\phi$ , que expresadas en diferencias finitas (hacia atrás) de cada componente y considerando los coeficientes de superposición, se tiene

$$\frac{\partial \phi_C}{\partial x} = u_{i,j,k} = \frac{C_C \cdot (\phi_{i,j,k} - \phi_{i-1,j,k})}{2\Delta x} \quad \frac{\partial \phi_C}{\partial y} = v_{i,j,k} = \frac{C_C \cdot (\phi_{i,j,k} - \phi_{i,j-1,k})}{2\Delta y}$$

$$\frac{\partial \phi_C}{\partial z} = w_{i,j,k} = \frac{C_C \cdot (\phi_{i,j,k} - \phi_{i,j,k-1})}{2\Delta z} \quad (5.15)$$

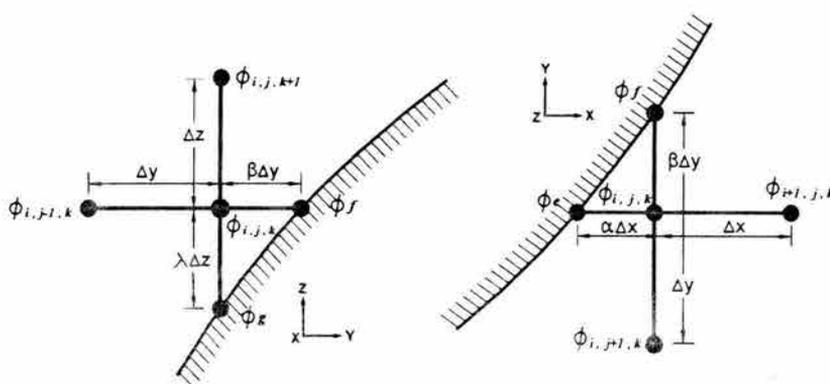
Como se mencionó al inicio de esta sección, la geometrías de la conducción del flujo y de la estructura de entrada son relevantes. Por lo cual se consideran como son tales geometrías, excepto la curvatura del canal de llegada, en consecuencia, las fronteras del dominio en estudio tienen geometrías curvas.

<sup>3</sup>sink.

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

En la simulación numérica del flujo en compuertas se han empleado varias técnicas para abordar estas geometrías, por mencionar algunas, las transformaciones matemáticas de coordenadas [Jacob H. (1985)], mallas adaptables [Riemslog K, Dick E. (1995)], coordenadas curvilíneas, el mapeo conforme en el flujo potencial-real [Montes J.S. (1997)] o el empleo del método del Elemento Finito [Chan T. S. *et al* (1973)], [Isaacs T. L. (1979)].

Por mayor sencillez y conservando la retícula rectangular mencionada anteriormente, en este trabajo se realiza un ajuste a las ecuaciones en diferencias para los puntos de la retícula adyacentes a la frontera. Este ajuste es función de las distancias entre dichos puntos y los de la frontera [Nakamura (1986)] como se muestra en la figura 5.2.



*Figura 5.2 Molécula de cálculo 3D de un punto adyacente a una frontera curva*

Considerando lo anterior, así como los coeficientes de superposición, la ecuación 5.5 queda, por ejemplo, para las fronteras de la figura 5.2, de la forma siguiente

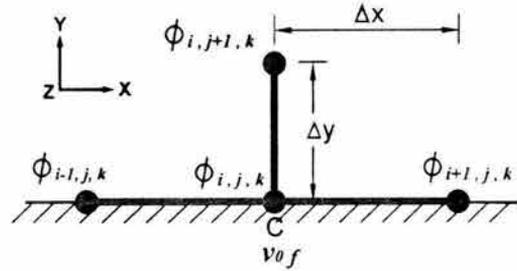
$$\begin{aligned}
 & \frac{\phi_b - C_c \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \cdot \phi_{i,j,k} + C_a \cdot \phi_{i+1,j,k}}{\frac{1}{2}(1 + \alpha) \cdot \Delta x^2} + \frac{C_l \cdot \phi_{i,j-1,k} - C_c \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \cdot \phi_{i,j,k} + \frac{\phi_f}{\beta}}{\frac{1}{2}(1 + \beta) \cdot \Delta y^2} + \\
 & + \frac{\frac{\phi_g}{\gamma} - C_c \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) \cdot \phi_{i,j,k} + C_u \cdot \phi_{i,j,k+1}}{\frac{1}{2}(1 + \lambda) \cdot \Delta z^2}
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

Donde  $\phi_b$ ,  $\phi_f$  y  $\phi_g$  están dadas por las condiciones de frontera.

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

En las fronteras exactas, esto es, donde las moléculas de cálculo no tienen brazos, como se muestra en la figura 5.3, las diferencias finitas para un punto  $C$  se calcula, por ejemplo, en la dirección  $Y$ , mediante

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\right)_{i,f,k} = \frac{2\phi_{i,2,k} - 2\phi_{i,f,k}}{\Delta y^2} - 2\frac{v_0}{\Delta y} \quad (5.17)$$



**Figura 5.3 Molécula de cálculo 3D en un punto de una frontera**

donde

$v_0$  es la segunda componente de la velocidad en el punto  $f$  de la frontera

Para considerar la influencia de la rejilla en el flujo, se considera que su efecto local es proporcional al peralte de esta estructura  $Pe$ , modifica a los coeficientes  $C_{i,j,k}$  de superposición, de tal manera que ahora su valor sea

$$C_{R i,j,k} = C_{c i,j,k} (1 - Pe) \quad (5.18)$$

De tal forma que la diferencia  $\Delta C_{R i,j,k} = C_{c i,j,k} - C_{R i,j,k}$  se distribuya en los niveles inferiores, disminuyendo con la profundidad y modificando así los coeficientes de superposición. Además, considerando que dicho coeficiente también varía con la distancia ( $r$ ) en un nivel dado (plano) se tiene que

$$C_{R i,j,k} = \frac{Pe^{1/r}}{z} \quad (5.19)$$

donde  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Las variables  $x$ ,  $y$ , y  $z$  son precisamente las coordenadas del punto en cuestión, respecto al punto superior del eje del vórtice. De esta forma se tendría que cuando no hubiese rejilla, se escogería un peralte  $Pe$  igual a cero con lo que, de la ecuación 5.18, se tendrían los coeficientes de superposición originales del flujo de vórtices.

### 5.2 Discretización del Espacio de Análisis

La aproximación por diferencias finitas de la ecuación de Laplace (ecuación 5.11) fue hecha para una discretización rectangular del dominio en estudio. Por lo tanto, se trata de una malla estructurada regular<sup>4</sup>.

<sup>4</sup> Para más información sobre la generación de mallas, puede verse la referencia: Thompson J. F., (1982)

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

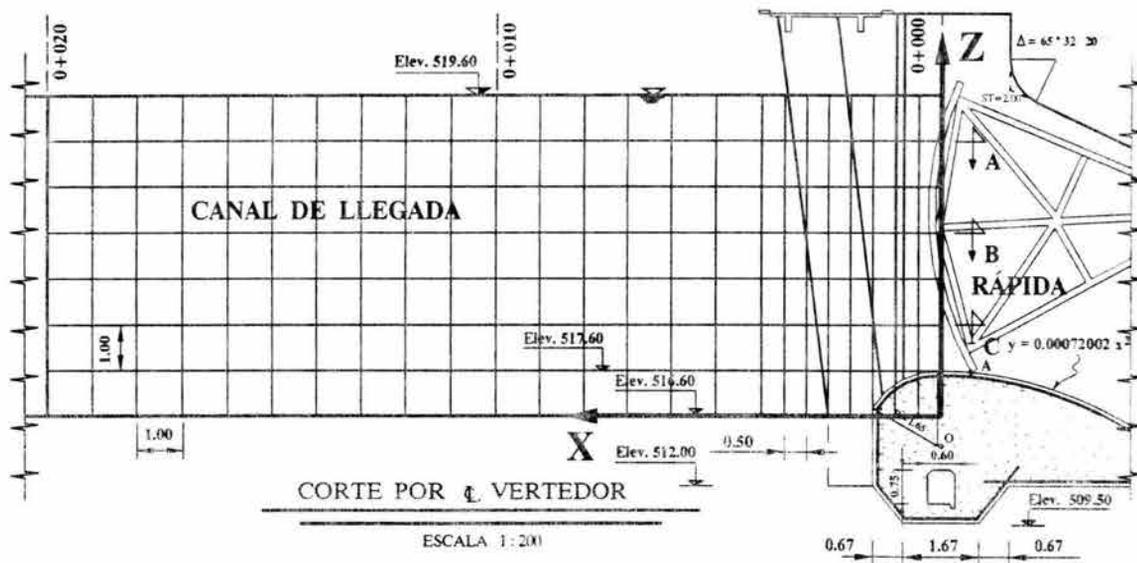
Para lograr una adecuada exactitud al emplear una malla rectangular uniforme en las fronteras curvas se puede, además de reducir los intervalos  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  y  $\Delta z$  de la malla regular, comprimir la malla en una o mas direcciones para conocer con mayor precisión las zonas de interés.

De esta forma los factores de compresión en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$ , son respectivamente

$$n = \frac{\Delta x \xi}{\Delta x} \quad m = \frac{\Delta y \xi}{\Delta y} \quad s = \frac{\Delta z \xi}{\Delta z} \quad (5.17)$$

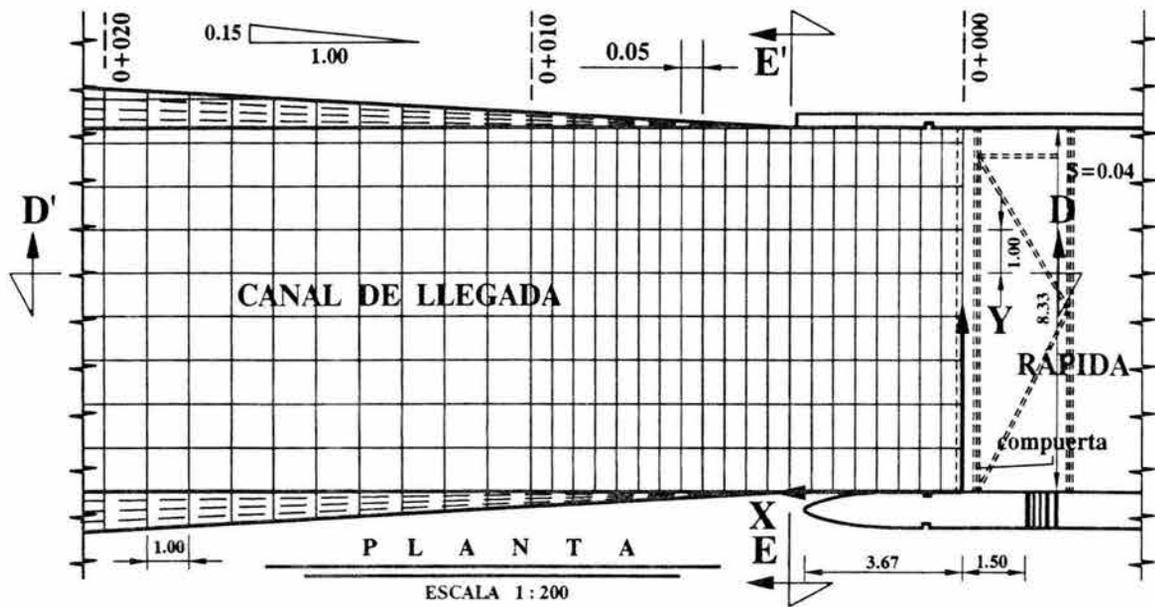
Donde  $\Delta x \xi$ ,  $\Delta y \xi$  y  $\Delta z \xi$  son la longitud de los incrementos comprimidos en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente.

En este trabajo se empleó el factor de compresión  $n$ , ya que es la dirección ( $X$ ) donde la influencia de las fronteras curvas (compuerta y cimacio) es más notable, como se muestra en la figura 5.4.



*Figura 5.4 Perfil de la malla semicomprimida del caso de estudio*

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor



*Figura 5.5 Vista en planta de la malla semicomprimida del caso de estudio*

Lejos de las fronteras, la malla es uniforme. No obstante, como están planteadas las ecuaciones 5.13 y 5.16 con longitudes distintas de los intervalos en las tres direcciones ( $\Delta x$ ,  $\Delta y$  y  $\Delta z$ ) se puede implementar la compresión en las otras direcciones en un programa de cómputo.

El dominio en estudio está formado por la geometría del vertedor de la P. H. Angostura, como se muestra en las figuras 5.3, 5.4 y 5.5; donde se puede observar que no se considera la curvatura del canal de llegada y, dado que se considera una sola compuerta en el canal de llegada, la altura del canal considerado es proporcional (1/3) a la del canal real.



*Figura 5.6 Sección transversal de la malla semicomprimida del caso de estudio*

Así mismo, en las figuras anteriores se muestra el origen y las direcciones del sistema coordenado de referencia.

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

---

El plano Y-Z del sistema coordenado, coincide con la sección transversal de cadenamiento 0+000 (cresta del cimacio), como se muestra en la figura anterior y en el plano P-1 de la planta general del vertedor de la P.H. Angostura en el Apéndice. De manera que el sentido positivo de la dirección X coincide con el incremento en el cadenamiento.

### 5.3 Condiciones de Frontera

En el dominio de análisis comentado en la sección anterior, se determina en cada punto el valor de la función potencial  $\phi$  teniendo en cuenta las condiciones de frontera, que consisten en evaluar la función potencial a cero ( $\phi = 0$ ) en las paredes y plantilla del canal así como en la compuerta. Este es el llamado problema de Dirichlet.

En el plano de frontera YZ en el cadenamiento 0+000, esto es, en la abertura de la compuerta (véase figura 5.4) se supone un flujo uniforme. Igualmente se considera que las perturbaciones provocadas por la geometría del canal no tienen influencia en el plano final (YZ) de cálculo (cadenamiento 0+020), y el flujo es también uniforme.

Al determinar el potencial en el interior de la región en estudio, de acuerdo a los valores prescritos de la derivada de  $\phi$  en la dirección normal a la frontera, se tiene el llamado problema de Neumann; como fue el caso mencionado en el párrafo anterior, así como en la superficie libre en la cual se satisfacen las condiciones llamadas del gradiente normal nulo<sup>\*1a</sup>, es decir

$$\frac{\partial \phi}{\partial nr} = \frac{\partial \phi}{\partial st} = 0 \quad (5.18)$$

donde  $nr$  y  $st$  son las direcciones normal y tangencial a la superficie.

De esta forma, por ejemplo, para una celda  $c$  (figura 5.1) adyacente a la frontera mencionada en el párrafo anterior y con velocidad (uniforme) de ingreso  $u_0$ , en la celda  $b$  la función potencial sería  $\phi_b = u_0 \cdot \phi_c$ .

Conforme al modelo numérico descrito anteriormente, se elaboró un programa de cómputo en C++<sup>\*1 \*1b</sup>.

---

\*1a Véase bibliografía: Sotelo A. G., (1974).

\*1 Un lenguaje C "mejorado", orientado a la llamada programación orientada a objetos (OOP). Para más información véase, por ejemplo, en bibliografía F.Dietel, J. Dietel, (2000), How to Program in C++, Prentice Hall, USA.

\*1b Para más detalles, dirigirse al autor a fsc@pumas.iingen.unam.mx.

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

Al ejecutar el programa principal (simulavor.exe) en UNIX<sup>2</sup> o en LINUX<sup>3</sup>, como se muestra en la figura 5.6, se genera un archivo de coordenadas de cada punto de la retícula (nodo), conforme al tamaño de los incrementos  $\Delta x$  y  $\Delta x \xi$  seleccionados.

```
Last login: Wed Jan  4 18:04:49 2004 from 132.248.155.79
+---+---+---+---+---+---+
|b|e|r|e|i|n|i|c|i|e|8|   SISTEMA CRAY ORIGIN 2000 (8 PROCESADORES)
+---+---+---+---+---+---+   Mantenimiento: Lunes 8:00 - 12:00 hrs.
=====
Atencion a usuarios: ayuda@super.unam.mx
Administracion:      admsuper@super.unam.mx
=====
El RESPALDO de informacion es RESPONSABILIDAD del USUARIO
=====
news: GAMESS NWChem optdev

berenice8 1% ls
Makefile          ajustecurvas.h   ajustecurvas.cpp  busca_Cf.cpp
condfront.cpp     conver.cpp      gen_Mesh.cpp      gen_Mesh.h
genMoleculas.cpp genMoleculas.h  Pruebas           readfile.cpp
relax.cpp         relax.h         simulavor.cpp     simulavor.exe
wrtfile.cpp
berenice8 7% ./simulavor.exe
```

Figura 5.7 Ejecución del programa en un sistema UNIX

También en dicho archivo se imprimen los coeficientes de superposición correspondientes a cada punto, que en primera instancia son unitarios.

Así el programa permite modificar, si se desea, los coeficientes de superposición para obtener un flujo que cumpla las características de cada flujo base del que está formado el flujo de vórtices en estudio, según se mencionó anteriormente.

Los problemas que involucra la solución de las ecuaciones diferenciales parciales (EDP) elípticas, como la ecuación de Laplace, son llamados de “equilibrio”<sup>4</sup>, debido a que la solución de cada punto dentro del dominio está influenciado por todos los demás puntos incluyendo los de las fronteras. Por lo que la solución en cada punto se debe llevar a cabo de forma simultánea con la solución de todos los demás puntos del dominio.

En consecuencia, el sistema de ecuaciones lineales obtenido al emplear el esquema en diferencias finitas descrito, fue resuelto empleando el método de sobre relajación (SOR). El programa relax.cpp, que es controlado por el programa principal (simulavor.cpp), realiza el análisis de convergencia del sistema de ecuaciones obtenido; si éste es convergente, para su solución se realiza la optimización del factor de sobre-relajación, conforme a la bibliografía 5<sup>5</sup>, para su solución. El programa entrega los resultados en un archivo de texto (valoresBernoulli.txt) de las componentes de velocidad y presiones del campo de flujo.

<sup>2</sup> Un sistema operativo. Para mayor información véase, por ejemplo, en bibliografía: Moritsugu D, (2001).

<sup>3</sup> Un sistema operativo libre tipo UNIX. Para mayor información véase en referencias electrónicas: Linux Online.

<sup>4</sup> Véase en bibliografía: Wendt J. (1996).

<sup>5</sup> Véase en referencias Hirsch Ch. (1998).

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

### 5.4 Presentación de Resultados

En las figuras 5.8 a la 5.12 se muestran los patrones de flujo obtenidos con el programa mencionado en la sección anterior al emplear un software para graficar como Mathcad o Mathematica, en 3 niveles, en secciones longitudinal y transversal al centro del vórtice como se indica en las líneas de corte. En donde se consideró una velocidad uniforme de  $3 \text{ m/s}$  al inicio del canal de llegada.

En las figuras 5.8 a la 5.10 puede observarse la uniformidad del flujo radial y que la circulación del vórtice es continua y en sentido contrario a del reloj, como se observó en el modelo físico. Dicha circulación es congruente con el flujo que alimenta al vórtice, lo que podría explicar un movimiento de precedencia.

También puede observarse que las velocidades tangenciales del vórtice aumentan hacia el fondo, por lo que resulta que el diámetro del vórtice se reduce al descender.

En la región adyacente a la compuerta pueden observarse velocidades pequeñas, lo cual está acorde con el estancamiento y la circulación que se ha reportado en dicha zona [Montes S. (1997)].

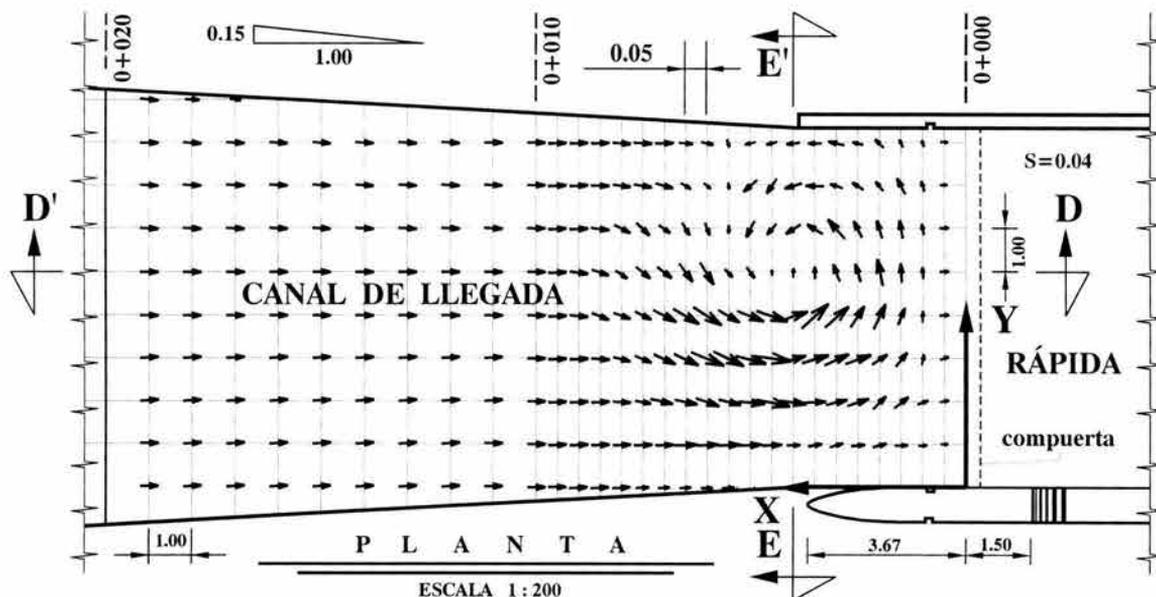


Figura 5.8 Patrón de flujo en el canal de llegada del caso de estudio. Plano horizontal A-A'

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

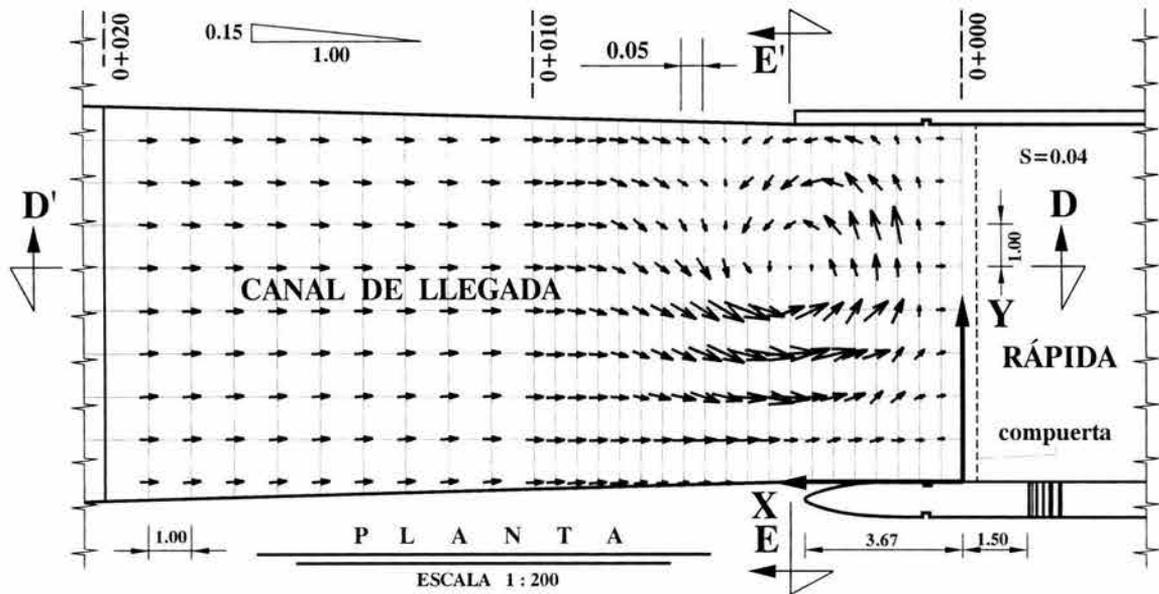


Figura 5.9 Patrón de flujo en el canal de llegada del caso de estudio. Plano horizontal B-B'

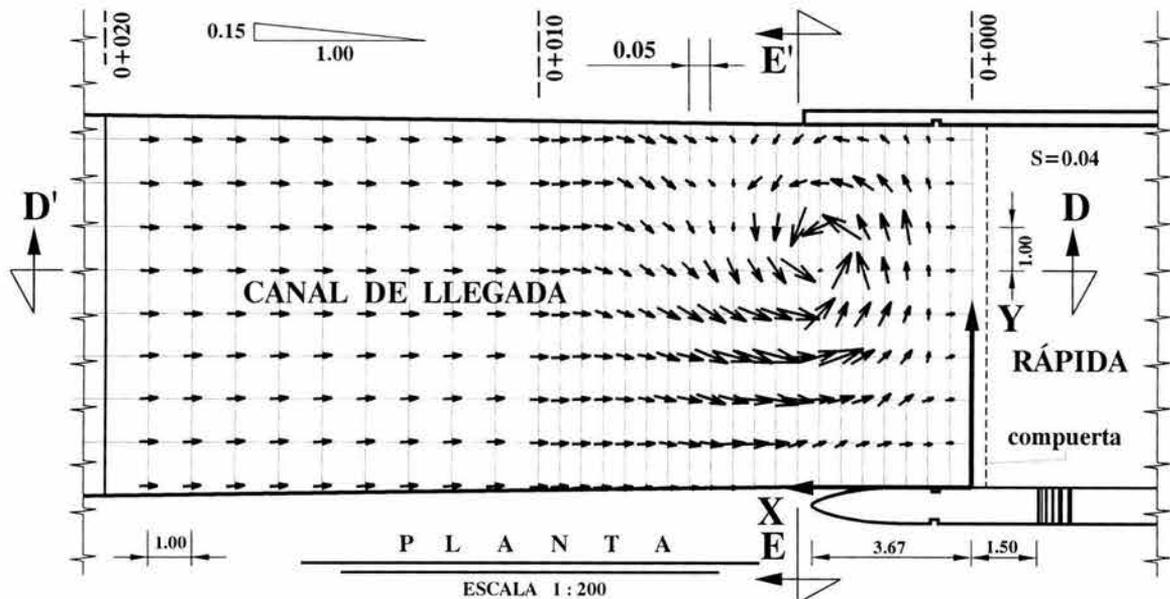
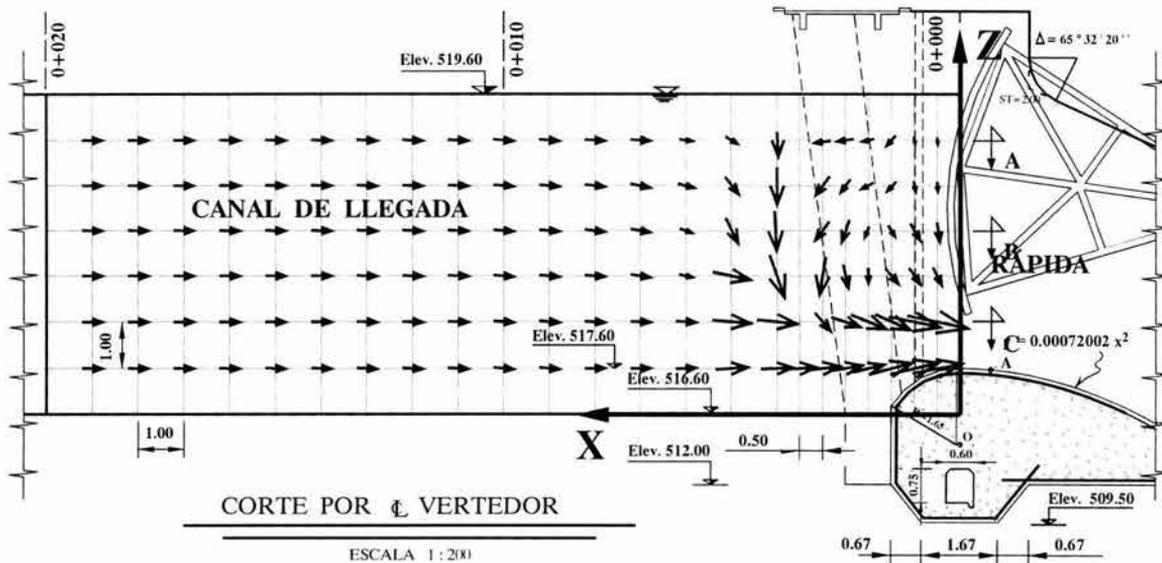


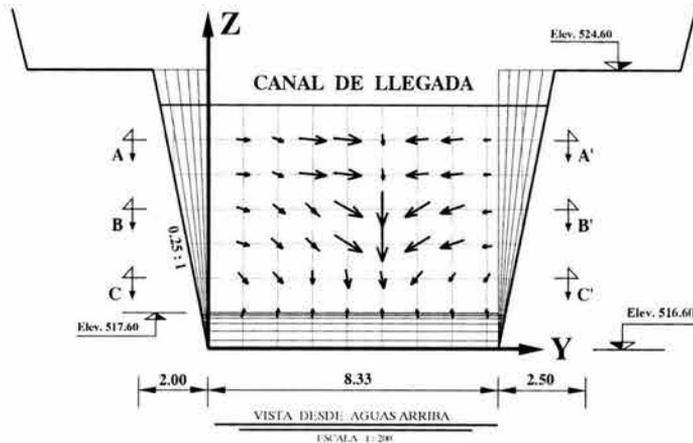
Figura 5.10 Patrón de flujo en el canal de llegada del caso de estudio. Plano vertical C-C'

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor



*Figura 5.11 Patrón de flujo en el canal de llegada. Plano vertical D-D'*

Por otro lado, en las figuras 5.11 y 5.12, puede observarse que la componente vertical de velocidades al centro del vórtice tiende a incrementarse hacia abajo del nivel A. A partir del nivel C dicha componente disminuye, como resultado de la desviación del flujo hacia la salida de la compuerta.



*Figura 5.12 Patrón de flujo en el canal de llegada del caso de estudio. Plano vertical E-E'*

Lejos de la zona de influencia del vórtice puede observarse un flujo gradualmente convergente hacia la abertura de la compuerta (figura 5.11).

Por lo anterior, puede decirse que el modelo matemático representa aproximadamente bien el flujo espiral característico de los vórtices. Sin embargo, como éste modelo representa un flujo ideal (sin fricción), también se simuló con dicho modelo un vórtice ideal, en cuanto a la simetría del flujo radial, la continuidad en la circulación y demás características mencionadas anteriormente.

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

Por lo que este modelo debe calibrarse con mediciones experimentales en las tres dimensiones del campo de flujo, para que éste pueda representar mejor una situación real del flujo con vórtices. Además, las mediciones deben realizarse, no sólo en la región del vórtice, sino también en las fronteras, especialmente al inicio del canal de llegada. Donde se tiene una distribución asimétrica de velocidades, no la supuesta distribución uniforme, debido a la curvatura del canal de llegada. Esto último es un factor importante en la formación de vórtices.

En la simulación de los dispositivos supresores se considera las mismas condiciones del flujo anterior, pero ahora se considera la rejilla, que fue el dispositivo más efectivo para suprimir a un vórtice, como se determinó en el capítulo anterior.

De esta manera, para simular el campo de velocidades del flujo con la rejilla, en el programa anterior (simulavor.cpp) se indica la presencia de tal dispositivo, para que éste considere sus fronteras, así como la modificación de los coeficientes de superposición mencionados en la sección anterior.

En la simulación se consideró una rejilla de  $8.3m$  por  $4m$  y un peralte de  $0.5m$ . Los patrones de flujo obtenidos para esta condición se muestran en las figuras 5.13 a la 5.15, para los tres niveles (A, B y C). En las figuras 5.16 y 5.17 se muestran dichos patrones de flujo, pero en secciones longitudinal (D) y transversal (E), respectivamente.

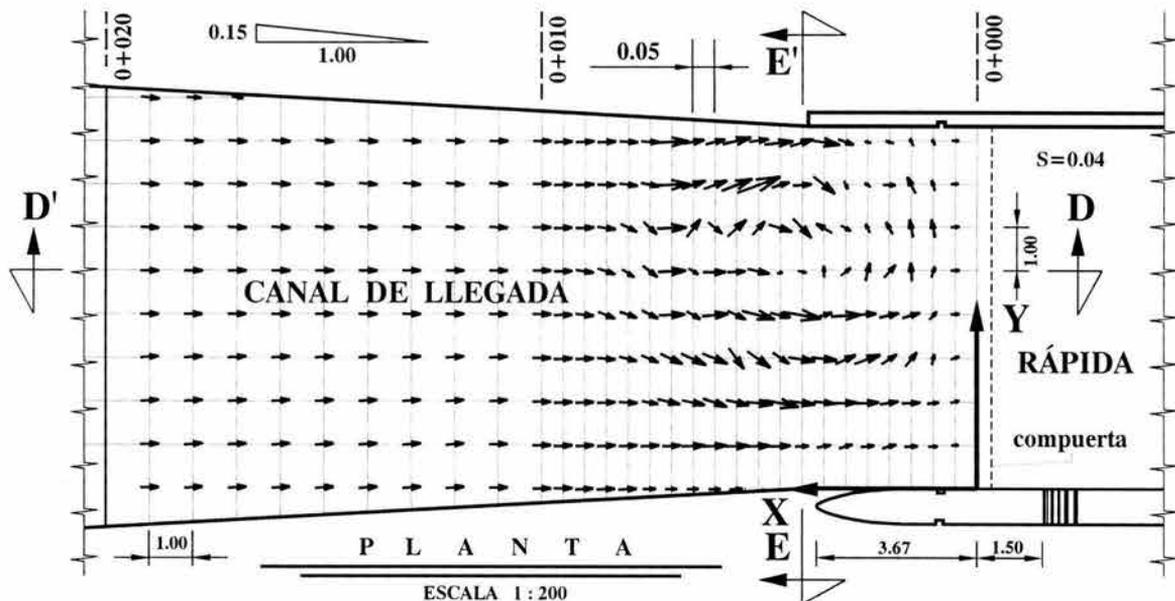


Figura 5.13 Patrón de flujo en el canal de llegada con rejilla. Plano horizontal A-A'

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

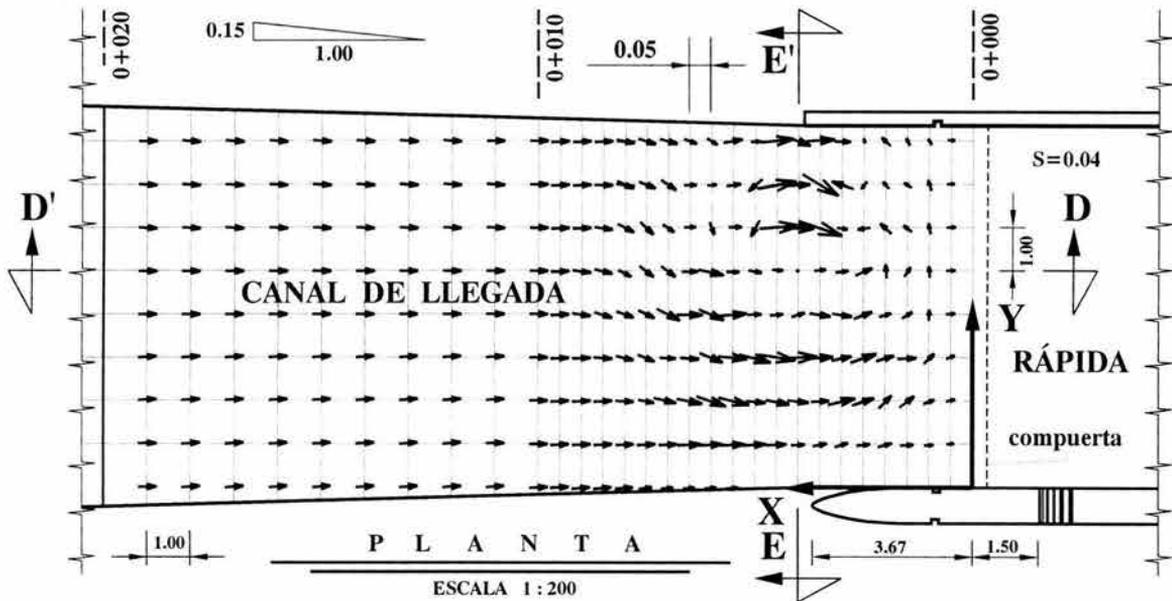


Figura 5.14 Patrón de flujo en el canal de llegada con rejilla. Plano horizontal B-B'

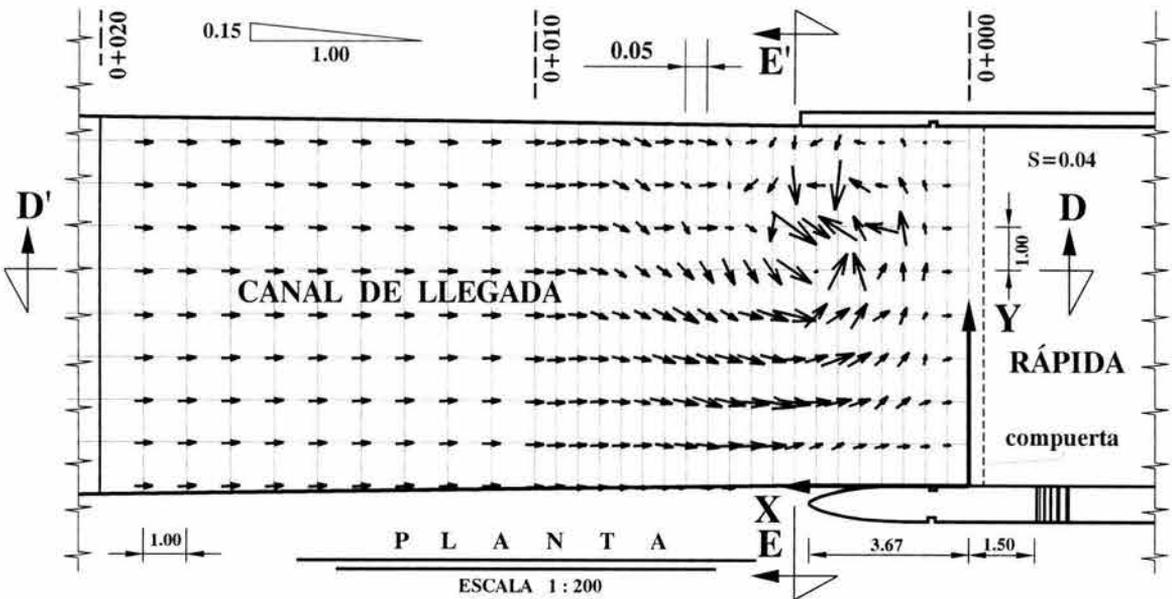
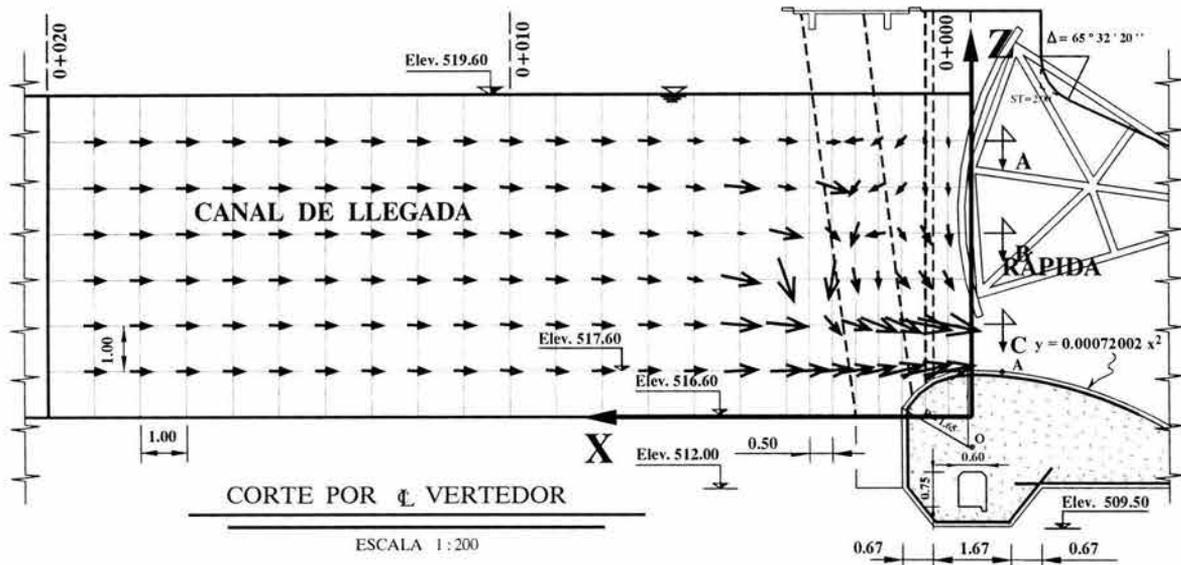


Figura 5.15 Patrón de flujo en el canal de llegada con rejilla. Plano horizontal C-C'

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

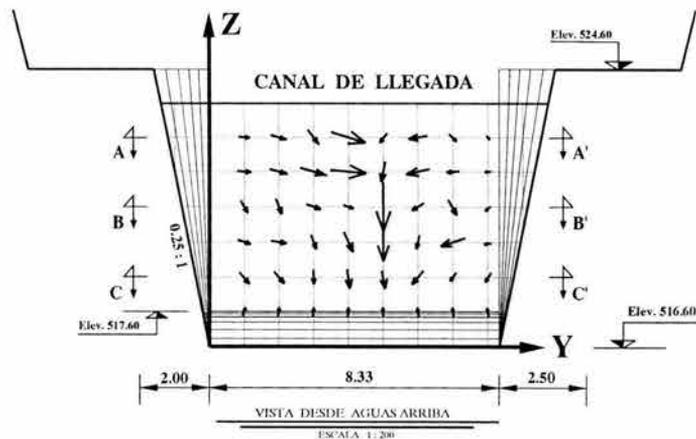


*Figura 5.16 Patrón de flujo en el canal de llegada con rejilla. Plano vertical D-D'*

Cuando se instala la rejilla puede observarse, en las figuras 5.13 a la 5.15, que el flujo radial del vórtice ya no es uniforme. El flujo de llegada tiende a desviarse a ambos lados de la rejilla, por lo que deja de haber continuidad en la circulación del vórtice. En consecuencia, la alimentación del vórtice se anula o, por lo menos, disminuye notablemente.

En la intersección del flujo desviado por la rejilla, hacia la pared derecha (según el sistema de coordenadas), con el vórtice, la corriente presenta un patrón incongruente en esta zona de “choque”.

Mientras que en la región cercana a la salida de la compuerta el patrón de flujo no se ve alterado. Así también, en la figura 5.16, se puede observar que las velocidades al centro del vórtice, entre los niveles **A** y **B** ya no son verticales, como en la figura 5.11.



*Figura 5.17 Patrón de flujo en el canal de llegada con rejilla. Plano vertical E-E'*

## **Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor**

---

Además, el flujo convergente de la sección transversal E-E', de la figura 5.17, ya no es simétrico, como el de la figura 5.12.

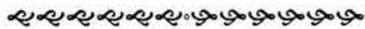
De acuerdo con lo anterior, el movimiento del vórtice "ideal" se habría modificado con la rejilla, de tal forma que este habría sido suprimido.

Es importante mencionar que, al igual que la condición de "sólo vórtices", es indispensable obtener una calibración del modelo con base en mediciones experimentales (velocidades y presiones) del flujo; para obtener una simulación más acorde con la realidad del efecto hidrodinámico que tiene la rejilla en el flujo con vórtices.

Adicionalmente, con dichas mediciones se ajustaría la parte (supuesta) del modelo correspondiente a la modificación de los coeficientes de superposición por efecto de la rejilla.

# Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

---



*Las verdades que revela la ciencia superan siempre  
a los sueños que destruye.*

*Renan, Joseph Ernest*



## 6 Conclusiones y Recomendaciones

El problema de los vórtices de eje vertical que ocurren aguas arriba de las compuertas de un vertedor durante su descarga, es un caso poco abordado en la literatura técnica, a diferencia de los que suceden en estructuras hidráulicas de entrada fijas (obras de toma, sifones, vertedores de pozo o embudo, cárcamos de bombeo, etc.). Más aún, en gran parte de esos casos en los que ha sido tratado este problema, los métodos y dispositivos empleados para suprimir a los vórtices son de tipo empírico.

Por ello es importante llevar a cabo, en lo posible, un análisis analítico y experimental del problema para darle una solución más racional y satisfactoria. Así, en este trabajo sobre la presencia y eliminación de vórtices durante las descargas en las compuertas de un vertedor, se establecen las conclusiones siguientes.

### 6.1 Del Análisis experimental

Del análisis de vórtices en el dominio del tiempo en la fase preliminar, se puede decir que la ocurrencia (aleatoria) y magnitud de un vórtice se incrementa ante un aumento en las aperturas de las compuertas y, de forma inversa, con una disminución en la carga hidráulica.

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

---

De manera que éstos resultados están acordes con el concepto de sumergencia crítica empleado en estructuras hidráulicas de entrada fija. Sin embargo, en el caso de compuertas, además de que la sumergencia es variable, es también más sensible a la ocurrencia de vórtices, sobre todo si existe una excentricidad en el flujo de llegada (como se presentó en el modelo físico empleado, debido a la curvatura del canal de aproximación), de tal forma que aún con las compuertas cerradas (sumergencia relativa infinita) se presentan vórtices aguas arriba de éstas. De ahí la importancia que tienen éstas estructuras altamente propensas a la formación de éste fenómeno.

En consecuencia, las sumergencias críticas propuestas por diferentes autores, que fueron consideradas en el análisis de sumergencia, no son suficientes para evitar que ocurran vórtices con aberturas pequeñas (1m ó 2 m) en las compuertas.

Por otra parte, la región de ocurrencia de vórtices en compuertas, es más variable que la de otras estructuras de entrada, debido al cambio del área hidráulica y la sumergencia en la abertura de las compuertas. Los vórtices tienden a acercarse a las compuertas a medida que la abertura de éstas es mayor o la carga hidráulica menor, es decir, cuando la sumergencia disminuye.

Del análisis de vórtices en el dominio del tiempo (segunda fase) realizado, se concluye que la acción de los dispositivos empleados fue la de provocar un incremento en la turbulencia en el flujo (fluctuaciones de presión), para destruir o al menos reducir la magnitud de los vórtices.

Específicamente, según el análisis probabilístico realizado, dicho aumento se manifiesta en el aumento en las probabilidades de ocurrencia de presiones por arriba de la presión media (asimetría positiva de las FDDP<sup>\*1</sup>). Así también, a niveles superiores del flujo, el efecto de los dispositivos supresores fue el de distribuir la probabilidad de ocurrencia de presiones a un rango más amplio (FDDP mesocúrticas). Acorde con estos resultados, el dispositivo de rejilla lleva a cabo de forma más efectiva la disipación de los vórtices. A pesar de ello, en algunos casos, sobre todo en las señales inferiores<sup>\*2</sup> de las propelas, parecían contradecir lo anterior.

Por este motivo, con base en el análisis de correlación realizado, se puede decir que, en términos generales, no existe relación significativa entre los dispositivos de las propelas y la condición del oleaje puro (ausencia de vórtices); contrario a lo ocurrido con el dispositivo de rejilla, con lo cual se verifica la efectividad de éste último dispositivo en la disipación de vórtices.

---

\*1 Funciones de distribución de densidad de probabilidad.

\*2 Aquellos registros medidos con los transductores piezoeléctricos instalados en el nivel inferior de la compuerta.

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

---

También del análisis de correlación realizado en las señales superiores de las propelas, considerando ahora como la señal base de comparación a la condición de vórtices, se tiene que el comportamiento del flujo con estos dispositivos es similar al estado del flujo con vórtices. Por lo tanto, estos dispositivos no logran destruir los vórtices.

Gracias al análisis en el dominio de la frecuencia, concretamente, el cálculo de las FDPE<sup>3</sup>, se verifica lo mencionado anteriormente. En efecto, la concentración de energía (presión) en el rango de frecuencias de 0.6 Hz a 0.9 Hz que ocurre durante el fenómeno de vórtices, es también parecida a la que ocurre con los dispositivos de las propelas. En cambio, la distribución de energía que ocasiona el dispositivo de rejilla, es parecida a la que se presenta en la condición de oleaje puro.

Por todo lo anterior, para evitar tener vórtices aguas arriba de compuertas debe tomarse en cuenta los factores que los producen (que son mencionados en este trabajo), pero como no siempre es posible evitarlos, se recomienda emplear el dispositivo de rejilla para suprimirlos.

Así como en el caso de estudio fueron empleados varios de los resultados teórico-experimentales sobre la ocurrencia de vórtices en diferentes estructuras de entrada; el dispositivo de rejilla puede ser utilizado también en tales estructuras. Pues tiene la ventaja de ser una estructura sencilla y económica. El peralte de este dispositivo es pequeño, del orden de 8% del ancho del mismo.

Además el dispositivo de rejilla tiene la cualidad de flotar, lo que le permite situarse en el nivel de agua que tenga la estructura en cuestión. Para evitar que la rejilla se mueva hacia otro lugar, ésta puede fijarse mediante cables.

Adicionalmente, en el caso de compuertas debe cuidarse que las aberturas máximas deban ser tales que la sumergencia relativa sea mayor a tres; ya que de lo contrario, la turbulencia es grande y provoca un rebote violento del flujo contra las compuertas y la rejilla, lo cual puede dañarlas. Así también, la abertura mínima de una compuerta debe ser mayor al espesor de la misma, para evitar la vibración de ésta, debido a las altas velocidades y pulsaciones del flujo que ocurren en el labio inferior de la misma<sup>4</sup>.

---

<sup>3</sup> Funciones de densidad de potencia espectral.

<sup>4</sup> Véase en referencias: Hardwick D., (1974).

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

---

### 6.2 Del Análisis Numérico

En cuanto a los resultados obtenidos en la simulación numérica de vórtices, se puede concluir que éstos son sólo una primera aproximación (burda) del flujo de vórtices. Ya que, además de las limitaciones propias del modelo matemático empleado (flujo con potencial); muchas de las consideraciones realizadas no están respaldadas por mediciones, es decir, el modelo no está calibrado.

Así por ejemplo, se consideró que la velocidad inicial en el canal de llegada (condición de frontera) es uniforme, mientras que en la realidad existe una distribución de velocidades asimétrica debido a la excentricidad del canal de llegada, factor importante en la formación de vórtices, como ya se mencionó. La selección de los coeficientes de superposición fue con base en obtener una simetría en el flujo radial y una circulación uniforme en el vórtice y no sustentadas por mediciones del campo de velocidades real (3D), como deben determinarse.

Lo mismo puede decirse de la simulación numérica del dispositivo de rejilla; se deben hacer mediciones de varias características del campo de flujo real, tales como velocidades y presiones, que existen cuando este dispositivo está instalado.

Pero además, tales mediciones son cruciales para obtener una representación teórica más cabal con la variación real (en el espacio) de la influencia de la rejilla en el flujo, que la propuesta en el modelo mencionado.

Para tristeza de los vórtices y alegría nuestra el haberlos disipado, parecería que todo el estudio realizado en este trabajo también se ha disipado como su protagonista. Sin embargo, esta información puede ser de ayuda para quienes quieran entender más sobre este fenómeno, del que hay muchas cosas por ser estudiadas.

Aunque ejemplos sobran, se puede mencionar al escurridizo vórtice sumergido, pariente del vórtice de eje vertical con embudo de aire (también observado en el modelo experimental), que injustamente, por las limitaciones del autor, quedó fuera del alcance de este trabajo.

También pueden estudiarse otros diseños de dispositivos supresores, seguramente más eficientes, pues aún del dispositivo de rejilla falta por investigar sus efectos en el comportamiento de los vórtices debidos a la reducción de su tamaño, sobre todo en el peralte, la posición de la misma dentro del flujo (nivel de sumergencia) y al número de celdas de la rejilla.

De cualquier forma, dejando a un lado la utilidad que el estudio realizado en este trabajo pueda tener, siempre habrá quienes quieran saber y entender más acerca del fenómeno de vórtices, temible muchas veces, pero sobre todo fascinante estructura del universo.

# Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

---



*La felicidad existe sobre la tierra; y se la conquista con el ejercicio prudente de la razón, el conocimiento de la armonía del universo, y la práctica constante de la generosidad.*

*José Martí*



## A Procesos físicos. Generalidades

Se puede decir, en general, que toda variable que represente algún aspecto de un fenómeno físico puede clasificarse como:

### A.1 Proceso determinista

Son aquellos procesos que se pueden describir mediante una relación matemática explícita, resultado de leyes fundamentales o de observaciones repetidas. Por ejemplo, el movimiento de un péndulo, la descarga de voltaje de un capacitor a través de una resistencia, el cambio de temperatura del agua en un recipiente conforme se le aplica calor, etc.

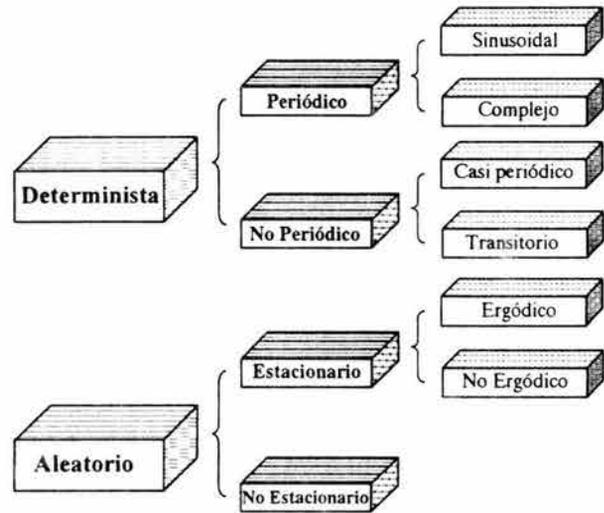
### A.2 Proceso no determinista, aleatorio o estocástico

En estos procesos no es posible establecer una relación matemática explícita entre las variables que gobiernan el fenómeno. Por tanto, es imposible predecir un valor exacto de las variables para un instante futuro si la variable independiente es el tiempo. Se dice que las variables son aleatorias y que solo se pueden describir en términos probabilísticos y promedios estadísticos.

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

Ejemplos típicos de estos fenómenos son, sin duda, la velocidad, la presión y la temperatura en un flujo turbulento.

A su vez, estos procesos se dividen en otros tipos, atendiendo a las características de las representaciones matemáticas de estos fenómenos como se muestran en el cuadro de la figura A2.1.



*Figura A2.1 Representación y clasificación de los procesos físicos.*

### A1.1 Procesos periódicos simples (senosoidales)

El fenómeno se puede representar matemáticamente mediante una función seno (de ahí el nombre) del tipo:

$$f(t) = k \cdot \text{sen}(2\pi \cdot \omega_0 \cdot t + \theta) \quad (\text{A1.1.1})$$

donde:

- $f(t)$  valor instantáneo de  $f$  en el tiempo  $t$ .
- $k$  amplitud
- $\omega_0$  frecuencia en ciclos por segundo
- $\theta$  ángulo de fase en radianes

Para una revisión de las demás características de esta función como son el periodo, la frecuencia fundamental y su representación en el dominio del tiempo así como en la frecuencia de  $f(t)$ , se pueden consultar las secciones B.6 y B.9 del apéndice B. Para esta función el espectro está constituido por una sola línea o pulso, que corresponde a la única frecuencia  $\omega_0$ .

### A1.2 Procesos periódicos complejos

Son los fenómenos que pueden ser representados por funciones periódicas  $f_p(t)$ , es decir, cuyos valores se repiten a intervalos regulares:

$$f(t) = f(t+T) \quad T \neq 0 \quad (\text{A1.2.1})$$

# Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

Estas funciones se pueden representar en series de Fourier como se expone en B.5, B.6 y B.8 del **apéndice B**, en donde se menciona que los armónicos son múltiplos enteros de  $\omega_0$ , como se puede observar en el espectro de amplitud-frecuencia (ver figura B.3 del mencionado apéndice).

## A1.3 Procesos casi periódicos

Son aquellas funciones, generalmente no periódicas, compuestas de dos o más frecuencias arbitrarias. De manera que todos los cocientes posibles de formar entre pares de frecuencia de las componentes no son números racionales. Matemáticamente están representados por

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cdot \text{sen}(2\pi \cdot \omega_n \cdot t + \theta_n) \quad (\text{A1.3.1})$$

Donde  $\omega_n / \omega_m$  es irracional. Un ejemplo donde se presenta este tipo de función lo constituyen las vibraciones de una hélice de un avión cuando los pistones del motor están fuera de sincronización. La figura A1.3.1 muestra el espectro de amplitud-frecuencia para un fenómeno de este tipo.

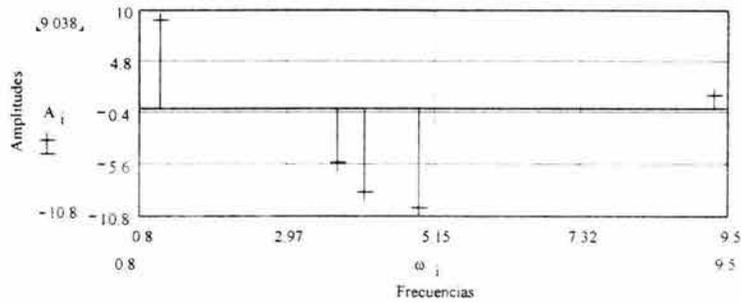


Figura A1.3.1 Espectro de amplitudes de una función casi periódica

## A1.4 Procesos transitorios

Estos procesos deterministas son los más frecuentes en la práctica, por ello son de gran importancia. Ellos se representan por una función de tipo transitorio, por ejemplo, las vibraciones amortiguadas de un sistema mecánico cuando se ha dejado de aplicar la fuerza de excitación. En este caso no es posible descomponer la función en series de Fourier. Sin embargo, en casi todos los casos se puede obtener una representación espectral mediante el uso de la transformada de Fourier como se menciona a partir de la sección B.10 del **apéndice B**.

## A2 Proceso aleatorio o estocástico

En estos procesos cada observación del fenómeno es única. El concepto de proceso estocástico es una extensión del de variable aleatoria. En efecto, se recordará de los conceptos de probabilidad que al definir una **variable aleatoria**, se acostumbra asociar a

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

cada posible resultado aleatorio de un experimento un **número** de acuerdo con una regla determinada. En cambio para un **proceso estocástico** se asocia una **señal** o **función**  $f_n(t)$ , respecto a una variable independiente de interés como el tiempo  $t$ , a cada posible resultado del experimento. Al conjunto o ensamble de funciones  $f_n(t)$ , junto con ciertas medidas de probabilidad se le llama **proceso aleatorio** o **estocástico**. Cada una de las señales o funciones es una función-muestra del proceso estocástico.

Citando como ejemplo de proceso estocástico al caso de estudio tratado en este trabajo: la señal  $f_i(t)$  registrada de las fluctuaciones de presión en el sistema electrónico de adquisición de datos en el tiempo y para las variables experimentales de control fijas. El conjunto o ensamble del proceso estaría formado por todos los registros en el tiempo

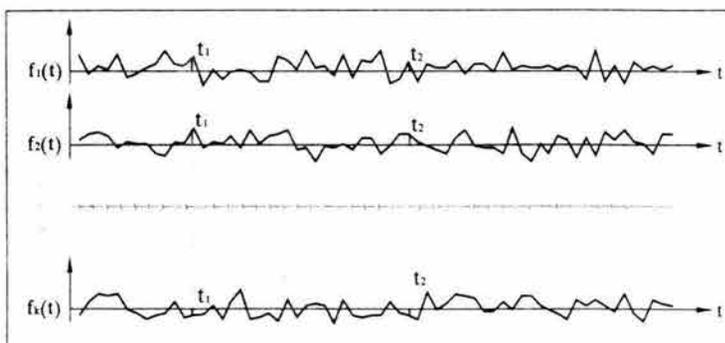


Figura A2.1 Proceso estocástico: señales de fluctuaciones de presión

$\{f_1(t), f_2(t), \dots, f_i(t), \dots, f_n(t)\}$  hechos en el sistema electrónico de adquisición de datos empleado, cada vez que se le ponga a funcionar<sup>1</sup> manteniéndose constantes las variables de control (véase figura A2.1).

La aleatoriedad involucrada en un proceso estocástico se refiere a la ocurrencia de un registro  $f_i(t)$  en particular. El registro de  $f_i(t)$  en sí misma puede o no ser aleatoria.

Por lo anterior resulta difícil obtener un universo muestral representativo, pues ello implica una gran cantidad de registros históricos.

### A2.1 Descripción de un proceso estocástico

Como se mencionó anteriormente, un proceso estocástico sólo se puede describir en términos de proposiciones probabilísticas y promedios estadísticos; también estos parámetros nos permiten conocer de qué tipo de proceso estocástico se trata. Del conjunto de procesos o funciones  $f_i(t)$  se puede obtener su probabilidad y estadística con respecto a la ocurrencia en sí de éstas con respecto al tiempo.

<sup>1</sup> O también puede ser el conjunto de todos los registros que se pueden tener en un número igual de sistemas electrónicos de adquisición de datos idénticos, lo cual es económicamente imposible.

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

---

Para el primer caso considérese el proceso  $f_i(t)$  del a figura A2.1; para un valor fijo de la variable independiente  $t=t_1$ , el conjunto de número  $f_i(t_1)$  constituye una variable aleatoria, la cual tiene una cierta distribución de probabilidades (DP). Lo mismo puede decirse ahora para la variable  $f_i(t_2)$  formada por todos los valores muestra  $f_i(t)$  para  $t=t_2$ , esta tendría asociada también una DP. De esta manera se podría formar un conjunto infinito de variables aleatorias  $f_i$  con sus respectivas DP, correspondientes a todos los valores que  $t$  puede tener.

Las medidas estadísticas de cada una de estas variables aleatorias, tomadas individualmente, se les llama *estadística de primer orden del proceso estocástico*. Así, esta estadística queda completamente determinada por la DP o por su funciones de densidad de probabilidades (FDP)  $p(f;t)$  de las variables aleatorias para cada valor de  $t$ , pues de ellas se pueden obtener los demás parámetros probabilísticos como el valor medio y el valor medio cuadrado.

Ahora, si se realiza la estadística conjunta de dos variables aleatorias con sus respectivas funciones de densidad conjunta de probabilidades (FDCP), que se le llama estadística de segundo orden del proceso, nos da información acerca de la correlación entre valores del proceso  $f_i(t)$  para varios intervalos. Esto es útil para conocer el contenido de frecuencia de un proceso<sup>3</sup>.

En general la estadística de  $n$  variables aleatorias tomadas a la vez se le llama *estadística de orden  $n$  del proceso estocástico*. En rigor, un proceso estocástico queda completamente especificado si se conoce la FDCP, simbólicamente  $p(\sigma, \eta, \dots, \xi; t_1, t_2, \dots, t_n)$ , para cualquier grupo finito de instantes de observación  $t_1, t_2, \dots, t_n$ . Sin embargo, en la práctica solamente es necesario obtener hasta la estadística de segundo orden<sup>4</sup> junto con sus respectivas medidas de probabilidad. Dos de ellas muy útiles en el estudio de los procesos estocásticos, y son:

El **valor medio** de la variable aleatoria  $x(t)$ , es el promedio estadístico o promedio de ensamble o de esperanza de las muestras  $f_i(t)$  para un valor específico  $t=t_1$ , es decir

$$\overline{f(t_1)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t_1) \cdot p(f;t) df = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i(t_1) \right] \quad (\text{A2.1.1})$$

y definiendo como función de autocorrelación del proceso estocástico  $\{f(t)\}$ , al promedio estadístico del producto estadístico de dos variables aleatorias muestra  $\sigma = f(t_1)$  y  $\eta = f(t_2)$  en dos instantes específicos  $t=t_1$  y  $t=t_2$ , esto es:

---

<sup>3</sup> Véase bibliografía: Hinze, J. O., (1960).

<sup>4</sup> Véase bibliografía: Bendat S. J., Bendat G. A., (2000).

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

---

$$R_f(t_1, t_2) = \overline{\sigma \cdot \eta} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma \eta(\sigma, \eta; t_1, t_2) d\sigma d\eta = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i(t_1) \cdot f_i(t_2) \right] \quad (\text{A2.1.2})$$

### A2.2 Proceso estocástico estacionario

Un proceso estocástico es estacionario si toda su estadística, FDCP de todos los ordenes, es independiente del tiempo  $t$ ; del lo contrario, se dice que es no estacionario; si para este último solo el valor medio  $\overline{x(t)}$  (ecuación A2.1.1) y la autocorrelación  $R_f(t_1, t_2)$  (ecuación A2.1.2) son independientes de  $t$ , se dice *débilmente estacionario*.

### A2.3 Proceso estocástico estacionario ergódico

Para dar la definición de un proceso estocástico ergódico es necesario definir dos medidas de probabilidad: el valor medio y correlación, de forma similar como se hizo en la sección anterior, pero ahora con respecto al tiempo.

En diversos casos de interés práctico se pueden determinar las propiedades del proceso calculando promedios temporales sobre determinadas muestras del proceso. Así para una función muestra  $i$ -ésima su valor medio en el lapso  $T$  es

$$\mu_f(i) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f_i(t) dt \quad (\text{A2.3.1})$$

y su correlación es

$$R_f(\tau, i) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f_i(t) \cdot f_i(t + \tau) dt \quad (\text{A2.3.2})$$

Se dice que un proceso estacionario  $\{f(t)\}$  es ergódico si los valores de la media (ecuación A.2.3.1) y la correlación (ecuación A.2.3.2) respecto al tiempo son iguales a sus parámetros estadísticos correspondientes (ecuaciones A2.1.1 y A2.1.2 respectivamente) con respecto al conjunto o ensamble de funciones muestra  $f_i(t)$ <sup>5</sup>.

Los procesos ergódicos resultan ser una clase muy importante de los procesos aleatorios, ya que todas sus propiedades pueden determinarse mediante promedios temporales en una sola función muestra. Generalmente, en la práctica un proceso aleatorio estacionario es ergódico y su tratamiento es, por lo tanto, más fácil.

---

<sup>5</sup> Véase en referencias: Bendat, J.S., Piersol, A.G. (1993)

# Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

---



*La naturaleza esta constituida de tal manera que es experimentalmente imposible determinar sus movimientos absolutos.*

*Albert Einstein*



## **B Breviario de análisis de Fourier. Introducción**

La ingeniería eléctrica aún no existía formalmente cuando J.B.J. Fourier envió su célebre tratado "La teoría analítica del calor" a la Academia de Ciencias de Paris en 1807, que no fue publicado sino hasta 1822. También es cierto que ni él ni ninguno de sus tres árbitros Lagranje, Laplace y Legendre pudieron haber concebido que su (y sus) descubrimiento(s) algún día llegarían a ser uno de los fundamentos de la ingeniería. Hoy los descubrimientos, en particular, de Fourier y Laplace forman la base de los que llamamos **Análisis de Fourier** (AF) Algunos de los tópicos en ingeniería que requieren del AF son, por ejemplo:

*Circuitos electrónicos*

*Redes eléctricas*

*Ingeniería de telecomunicaciones*

*Procesamiento de imágenes*

*Ingeniería biomédica*

*Acústica submarina*

*Ingeniería de sistemas de radar*

*Comunicación digital*

*Procesamiento de señales*

*Mediciones electrónicas*

Estos dos últimos ejemplos son los que ligan el análisis de Fourier, en especial el espectro de frecuencia, con este trabajo. En efecto, como se menciona en el capítulo 4, al hacer uso de un modelo hidráulico para atacar el problema de los vórtices en compuertas, se realizaron diferentes mediciones empleando celdas de presión. Estos dispositivos, como todo sistema de medición compuesto, están formadas por un convertidor que transforma la señal (desplazamiento) de la membrana (sensor) en una señal eléctrica que es más adecuada para su transmisión y procesamiento.

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

---

Prácticamente cualquier tipo de señal de entrada en una medición se puede descomponer en una función formada por una suma de senos, cosenos o ambos, de diferentes frecuencias; si se puede representar así, entonces la señal de salida, la señal eléctrica, será una función del mismo tipo y con las mismas frecuencias, salvo que estas son amortiguadas, amplificadas y defasadas, dependiendo de las frecuencias registradas y de las características del instrumento.

Para estudiar el AF es necesario conocer diversos tópicos matemáticos tales como funciones, sucesiones, series, espacios vectoriales, límites, continuidad, convergencia, teorías de integración y de distribución. En este apéndice se hace un breve repaso de algunos de estos conceptos los cuales se emplean al analizar los diferentes conceptos del análisis de Fourier que interesan en las aplicaciones realizadas en este trabajo.

Una forma de abordar rápidamente los conceptos del AF es mediante la aplicación de la teoría de los *Espacios Vectoriales* (EV) dado que el AF es un caso particular de los mismos.

### B.1 Espacios Vectoriales

Un espacio vectorial (EV) es conjunto  $V$  de elementos  $\bar{v}$  llamados vectores, que junto con otro conjunto  $(K, +, \cdot)$ <sup>A3</sup>; están definidas las leyes de la adición y multiplicación por un escalar que les da un gran número de propiedades algebraicas, esto es, poseen una estructura común. Esta estructura es la que les da el nombre de EV<sup>A4</sup>.

Quizá el conjunto de vectores más conocido por un ingeniero común es el de las ternas ordenadas de números reales. Sin embargo, en muchas ramas de las matemáticas se presentan otros vectores que son de muy diversa naturaleza tales como, por ejemplo, los polinomios, las matrices y las funciones. Dentro del universo de funciones, las de tipo periódico, son las que interesan en primer lugar. Posteriormente se analizan mas detalles de estas funciones. Otros conceptos de EV se mencionan a continuación.

#### B.1.1 Combinación lineal

Es la adición de vectores  $\bar{v}_{i+n} \in V$  y la multiplicación de escalares  $k_{i+n} \in K$  que da como resultado otro vector  $\bar{v}_i$  que pertenece al espacio  $V$ .

$$\bar{v}_i = k_{i+1} \cdot \bar{v}_{i+1} + k_{i+2} \cdot \bar{v}_{i+2} + \dots + k_{i+n} \cdot \bar{v}_{i+n} \quad (\text{B.1})$$

---

<sup>A3</sup> Este conjunto debe poseer la estructura de campo.

<sup>A4</sup> También llamados espacios lineales

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

---

A una expresión como la B.1 se le denomina combinación lineal y se dice que el vector  $\bar{v}_i$  queda expresado como una combinación lineal de los vectores  $\bar{v}_{i+1}, \bar{v}_{i+2} \dots \bar{v}_{i+n}$ . De la expresión anterior se observa que se puede obtener el vector  $\bar{0}$  como una combinación lineal. De manera general

$$\bar{0} = k_i \cdot \bar{v}_i + k_{i+1} \cdot \bar{v}_{i+1} + \dots + k_{i+n} \cdot \bar{v}_{i+n} \quad (\text{B.2})$$

A esta ecuación se le conoce como la ecuación general de dependencia lineal. Un conjunto de vectores  $S = \{\bar{v}_i, \bar{v}_{i+1}, \dots, \bar{v}_{i+n}\} \in V$  es linealmente dependiente si existen escalares  $k_i, k_{i+1}, \dots, k_{i+n}$  no todos iguales a cero tales que se pueda establecer la ecuación B.2. De lo contrario, si la igualdad anterior sólo se satisface con  $k_i = k_{i+1} = \dots = k_{i+n} = 0$ , entonces  $S$  es linealmente independiente.

Cuando todos los vectores de un espacio  $V$  pueden obtenerse mediante combinaciones lineales  $L(G)$  de un conjunto finito  $S$ , se dice que este conjunto es un generador de  $V$ , por tanto  $V = L(G)$ . Si, además, el conjunto  $S$  es linealmente independiente, entonces se dice que es una base  $B$  del espacio vectorial  $V$ .

Si  $V$  es un espacio vectorial sobre  $K$  y  $B = \{\bar{v}_i, \bar{v}_{i+1}, \dots, \bar{v}_n\}$  una base de  $V$ , se dice que  $V$  es de dimensión  $n$ , lo cual se denota como  $\dim V = n$ .

### B.1.2 Espacios con producto interno

El producto interno es una operación adicional a la suma y la multiplicación por un escalar en los espacios vectoriales. Esta operación es la generalización, a un espacio vectorial cualquiera del producto escalar<sup>\*A5</sup> en  $\mathcal{R}^n$ . Cuatro de sus propiedades fundamentales se emplean como los axiomas que debe satisfacer una función para ser considerada producto interno. Si  $V$  es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{C}$ . El producto interno es una función de  $V \times V$  en  $\mathbb{C}$  que asigna a cada pareja ordenada de vectores  $(\bar{u}, \bar{v}) \in V$  un escalar  $(\bar{u} | \bar{v}) \in \mathbb{C}$ , llamado el producto de  $\bar{u}$  y  $\bar{v}$ , que satisface las propiedades siguientes

- 1)  $(\bar{u} | \bar{v}) = \overline{(\bar{u} | \bar{v})}$
- 2)  $(\bar{u} | (\bar{v} + \bar{w})) = (\bar{u} | \bar{v}) + (\bar{u} | \bar{w})$
- 3)  $(k \bar{u} | \bar{v}) = k (\bar{u} | \bar{v})$
- 4)  $(\bar{u} | \bar{u}) > 0$  si  $\bar{u} \neq \bar{0}$

---

\*A5 También llamado producto punto

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

---

Para el caso de funciones el producto interno entre 2 funciones  $f(t)$  y  $g(t)$  en un intervalo  $(a,b)$  se define como

$$(f(t) | g(t)) = \int_a^b f(t) \cdot g(t) dt \quad (\text{B3})$$

### B.1.3 Ortogonalidad

Gracias a la definición anterior se puede generalizar el concepto de perpendicularidad a un espacio vectorial cualquiera.

Sea  $V$  un espacio vectorial con producto interno, se dice que dos vectores  $\bar{u}, \bar{v} \in V$  son ortogonales si su producto interno es nulo, es decir

$$(\bar{u} | \bar{v}) = 0 \quad (\text{B4})$$

Si en el espacio  $V$  anterior se tiene  $S = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n\}$ , se dice que  $S$  es un conjunto de vectores ortogonal si

$$(\bar{v}_i | \bar{v}_j) = 0 \quad \forall i \neq j$$

si además  $\|\bar{v}_i\| = 1 \quad \forall i$  el conjunto  $S$  es ortonormal.

En muchos problemas relacionados con los espacios vectoriales la elección de una base adecuada puede simplificar la solución de estos. Generalmente la mejor elección es una base de tipo ortonormal. Las coordenadas de un vector en base ortonormal tienen una expresión muy simple en términos del producto interno de dicho vector por cada uno de los elementos de la base, esto es

Si  $V$  es un espacio con producto interno y  $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$  una base ortogonal. Entonces  $\forall \bar{v} \in V$

$$(\bar{v})_B = (k_i), \text{ donde } k_i = \frac{(\bar{v} | \bar{e}_i)}{(\bar{e}_i | \bar{e}_i)} \quad (\text{B5})$$

en particular, si  $B$  es ortonormal

$$k_i = (\bar{v} | \bar{e}_i) \quad (\text{B6})$$

Donde se dice que  $k_i$  es la componente  $\bar{v}$  sobre  $\bar{e}_i$ .

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

---

### B.2 Series de Fourier

Para entender los conceptos manejados en el análisis de Fourier, que son en buena medida conceptos de espacios vectoriales, se establece una útil analogía entre las funciones periódicas con periodo  $T$  y un espacio familiar, es decir, el espacio en  $\mathcal{R}^3$  o de ternas, con lo que se tiene:

1. Espacio  $\mathcal{R}^3$

2. Conjunto de vectores

ortogonales:  $B_v = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$

3.  $\forall \bar{v} \in \mathcal{R}^3$

$$\bar{v} = k_1 \bar{e}_1 + k_2 \bar{e}_2 + k_3 \bar{e}_3$$

4.  $k_i$  es la componente del vector  $\bar{v}$

sobre el vector base  $\bar{e}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

1.  $F = \{\text{funciones periódicas con periodo } T\}$

2. Conjunto de funciones ortogonales:

$$B_F = \{1, \cos \omega_0 t, \cos 2\omega_0 t, \dots, \sin \omega_0 t, \sin 2\omega_0 t, \dots\}$$

3.  $\forall f(t) \in F$

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_0 t)$$

4.  $a_0$  componente de  $f(t)$  sobre la función  $1$

$a_n$  componente de  $f(t)$  sobre la función  $\cos(n\omega_0 t)$   $n = 1, 2, 3, \dots$

$b_n$  componente de  $f(t)$  sobre la función  $\sin(n\omega_0 t)$   $n = 1, 2, 3, \dots$

Pero también existen algunas diferencias: el número de elementos de una base en  $\mathcal{R}^3$  es finito, mientras que la base de  $F$  es infinita. El obtener un vector de  $\mathcal{R}^3$  mediante combinaciones lineales es directa, no así la de una función  $f(t)$  ya que se trata de series infinitas. Para ello se usa el concepto de convergencia.

Se puede demostrar, pero en este trabajo no se hace, que  $T = 2\pi / \omega_0$  es un período común para el conjunto  $B_F$  y que este es ortogonal. A esta base del espacio  $F$  se le conoce como el Sistema trigonométrico Básico.

La importancia de estudiar los vectores de una base de un espacio vectorial determinado, que para el Análisis de Fourier es el Sistema trigonométrico Básico, es que todas las propiedades que tengan sus vectores se heredan al resto de los vectores del espacio.

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

---

Retomando la ecuación que expresa una función periódica como una combinación lineal del sistema trigonométrico básico

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n \cdot \omega_0 \cdot t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(n \cdot \omega_0 \cdot t) \quad (\text{B7})$$

Los escalares  $a_0$ ,  $a_n$  y  $b_n$  de la expresión anterior se pueden determinar de manera directa aplicando los productos internos de  $f(t)$  dada por B7, por cada una de las funciones tipo de  $B : 1$ ,  $\cos(n \cdot \omega_0 \cdot t)$  y  $\operatorname{sen}(n \cdot \omega_0 \cdot t)$ , empleando la definición de producto interno (ecuación B3), es decir realizando  $(f(t) | 1)$ ,  $(f(t) | \cos(n \cdot \omega_0 \cdot t))$  y  $(f(t) | \operatorname{sen}(n \cdot \omega_0 \cdot t))$  en un intervalo  $(d, d+T)$ , obteniéndose

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_d^{d+T} f(t) dt \quad (\text{B8})$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_d^{d+T} f(t) \cos(n \omega_0 t) dt \quad n = 1, 2, \dots \quad (\text{B9})$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_d^{d+T} f(t) \operatorname{sen}(n \omega_0 t) dt \quad n = 1, 2, \dots \quad (\text{B10})$$

La expresión B7 cuyos coeficientes están definidos por B8, B9 y B10 es la llamada **serie de Fourier (SF)**. Si la ecuación B7 se escribe como

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n \cdot \omega_0 \cdot t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(n \cdot \omega_0 \cdot t) \quad (\text{B11})$$

entonces las expresiones generales para obtener los coeficientes  $a_n$  y  $b_n$  se reducen, prescindiendo de la ecuación B8, obteniendo

$$a_n = \frac{2}{T} \int_d^{d+T} f(t) \cos(n \omega_0 t) dt \quad n = 1, 2, \dots \quad (\text{B12})$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_d^{d+T} f(t) \operatorname{sen}(n \omega_0 t) dt \quad n = 1, 2, \dots \quad (\text{B13})$$

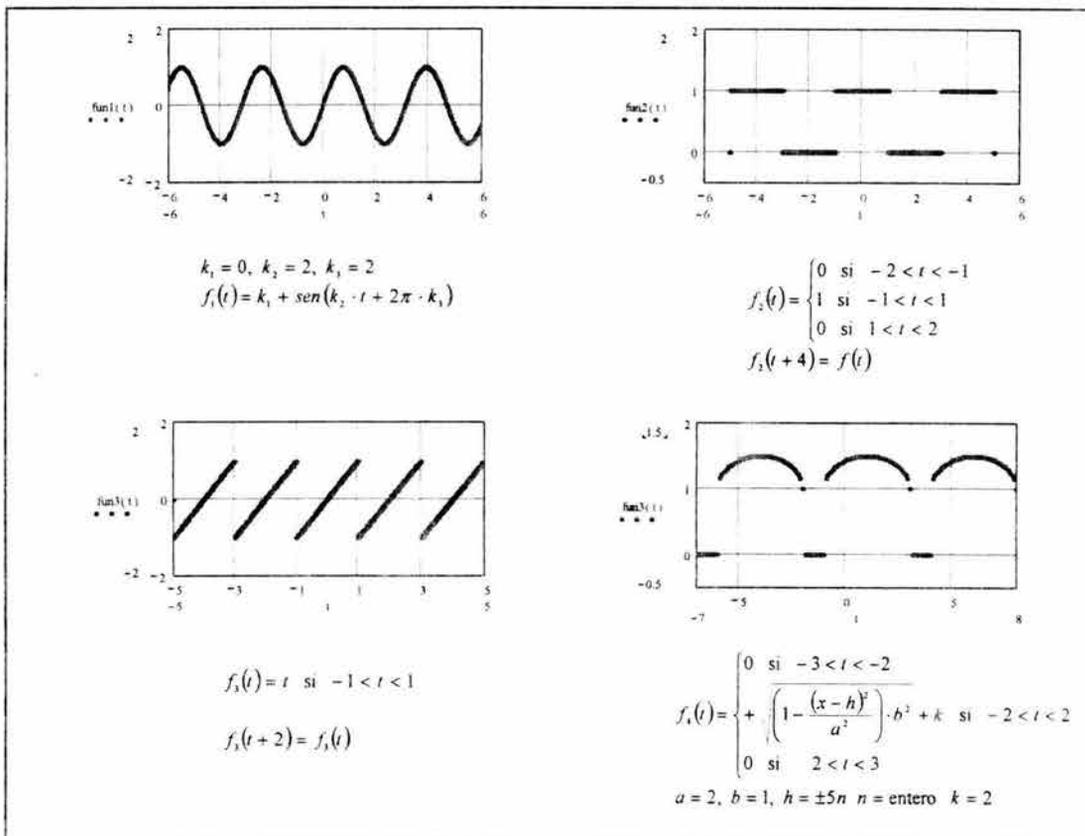
De las expresiones anteriores se observa que la representación en series de Fourier de una función periódica, se representa como una suma de componentes senosoidales que tienen diferentes frecuencias.

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

La componente sinusoidal de frecuencia  $\omega_n = n\omega_0$  se denomina enésima armónica de la función periódica. Cuando  $n=1$  se trata de la primera armónica o componente fundamental porque tiene el mismo periodo  $T$  de la función. El valor  $\omega_0 = 2\pi/T$  es la frecuencia angular fundamental. Por lo anterior a los coeficientes  $C_n$  se le conocen como amplitudes armónicas. También son importantes para el AF algunos conceptos de las funciones periódicas y la convergencia de series por los motivos dados anteriormente.

### B.2.1 Función periódica

Sea  $f(t)$  una función real. Se dice que  $f(t)$  es una función periódica con periodo  $T$  ( $T \neq 0$ ) si  $f(t+T) = f(t) \forall t$ . Al valor mínimo de  $T$  que satisface la igualdad anterior se le llama periodo fundamental. Esto significa geoméricamente, que la función se repite a intervalos con la misma longitud; mientras que la longitud mínima del intervalo en donde se observa esta repetición es el periodo fundamental. Algunas gráficas de estas funciones son como las mostradas en la figura B.1.



*Figura B.1 Ejemplos de funciones periódicas*

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

Si  $f(t)$  es una función periódica con periodo fundamental  $T$ , la frecuencia fundamental  $\omega_0$  se define como:

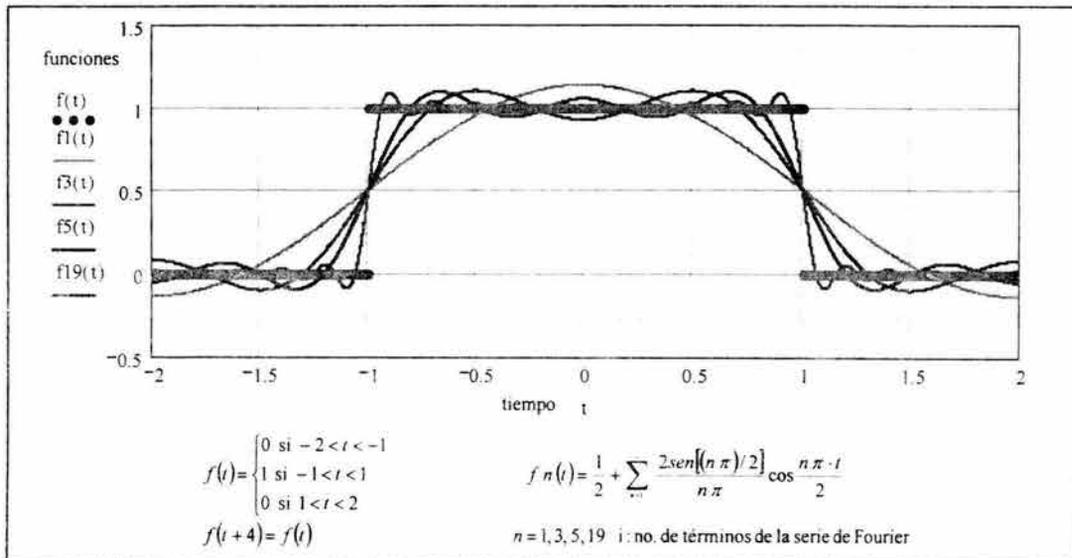
$$\omega_0 = 2\pi / T \quad (\text{B14})$$

este número indica, en una gráfica de  $f(t)$ , "el número de veces que esta se repite" en un intervalo de longitud  $2\pi$ .

### B.2.2 Condiciones de Dirichlet

Estos requisitos son muy importantes ya que nos dicen si una serie de Fourier de una función  $f(t)$  converge a  $f(t)$  en todo el intervalo donde es continua. La función periódica  $f(t)$  debe estar acotada en todo periodo  $f(t)$ , es decir existe un límite  $M$  tal que  $|f(t)| \leq M \forall t$ .

La función  $f(t)$  debe tener un número finito de máximos y mínimos locales así como de discontinuidades, esto es para asegurar que basta tomar un número finito de términos de la serie de Fourier obtenida para aproximarse a la función. Las discontinuidades deben ser de tipo local y no esencial. De esta manera, si existen las primeras discontinuidades, la serie de Fourier asigna un valor a cada una de tales discontinuidades, que es el promedio de los límites laterales en el punto de discontinuidad. Lo anterior se muestra en la figura B.2 donde se muestra la grafica una función dada para su cálculo en serie de Fourier considerando diferentes número de términos en la aproximación.



*Figura B.2 Grados de aproximación de una función mediante series de Fourier*

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

---

### B.2.3 Fórmula compleja de la serie de Fourier

Si se considera la relación siguiente<sup>A5</sup>

$$e^{i \cdot n \cdot \omega_0 \cdot t} = \cos(n \omega_0 \cdot t) + i \operatorname{sen}(n \omega_0 \cdot t) \quad \text{o que es lo mismo:}$$

$$\cos(n \cdot \omega_0 \cdot t) = \frac{e^{i \cdot n \cdot \omega_0 \cdot t} + e^{-i \cdot n \cdot \omega_0 \cdot t}}{2} \quad \operatorname{sen}(n \cdot \omega_0 \cdot t) = \frac{e^{i \cdot n \cdot \omega_0 \cdot t} - e^{-i \cdot n \cdot \omega_0 \cdot t}}{2i}$$

y se sustituyen en la serie trigonométrica de Fourier (ecuación B11), además de considerar

$$C_n = \frac{a_n - i \cdot b_n}{2} \quad C_{-n} = \frac{a_n + i \cdot b_n}{2} \quad C_0 = \frac{a_0}{2} \quad \text{B15)}$$

donde  $n = 1, 2, 3, \dots$  Haciendo manipulaciones algebraicas se llega a

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} C_n \cdot e^{i \cdot n \cdot \omega_0 \cdot t} \quad \text{B16)}$$

Los coeficientes  $C_0$ ,  $C_n$  y  $C_{-n}$  se obtienen sustituyendo los valores de los coeficientes  $a_0$ ,  $a_n$  y  $b_n$  de la serie trigonométrica de Fourier (ecuaciones B12 y B13) en las expresiones dadas por B15; simplificando se obtienen 3 ecuaciones, una para cada coeficiente, mismas que tienen una forma general, la cual es

$$C_n = \frac{1}{T} \int_d^{d+T} f(t) \cdot e^{-i \cdot n \cdot \omega_0 \cdot t} \cdot dt \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad \text{B17)}$$

La expresión B16 con la B17 es la llamada forma compleja (o exponencial) de la serie de Fourier.

Obsérvese que a partir de las ecuaciones B12, B13 y B15 se puede concluir que:

- si la función  $f(t)$  es par los coeficientes  $C_n$  son reales;
- si la función  $f(t)$  es impar los coeficientes  $C_n$  son imaginarios;
- si la función  $f(t)$  es no es par ni impar los coeficientes  $C_n$  son complejos.

---

<sup>A5</sup> Establecida por Leonhard Euler en el siglo XVIII.

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

### B.2.4 Espectros de una Función periódica

En la serie trigonométrica de Fourier se definieron los coeficientes  $a_n$  y  $b_n$ , los cuales representan las amplitudes o componentes que tiene una función periódica  $f_p(t)$  respecto a las funciones  $\cos(n \cdot \omega_0 \cdot t)$  y  $\sin(n \cdot \omega_0 \cdot t)$ . De igual manera los coeficientes  $C_n$  y  $C_{-n}$ , que son complejos conjugados, representan la componente de  $f_p(t)$  en las frecuencias angulares  $n\omega_0$  y  $-n\omega_0$ . La norma de  $C_n$ ,  $\|C_n\|$ , representa la amplitud que tiene  $f_p(t)$  en la frecuencia  $n\omega_0$ . La gráfica de  $\|C_n\|$  contra  $n\omega_0$  es llamada **espectro de amplitud** de la función periódica  $f_p(t)$ . Como los coeficientes  $C_n$  son complejos a cada uno de ellos se le puede asignar un ángulo o fase  $\phi_n = \tan^{-1}(b_n / a_n)$  ( $\phi_n$  se expresa en radianes); la gráfica de  $\phi_n$  contra  $n\omega_0$  es llamada **espectro de frecuencias o de fase** de  $f_p(t)$ . Como  $n$  solo toma valores enteros, los espectros no son curvas continuas por ello se les denomina **Espectros discretos o de líneas**. En la figura B.3 se muestran los espectros citados para la función mostrada.

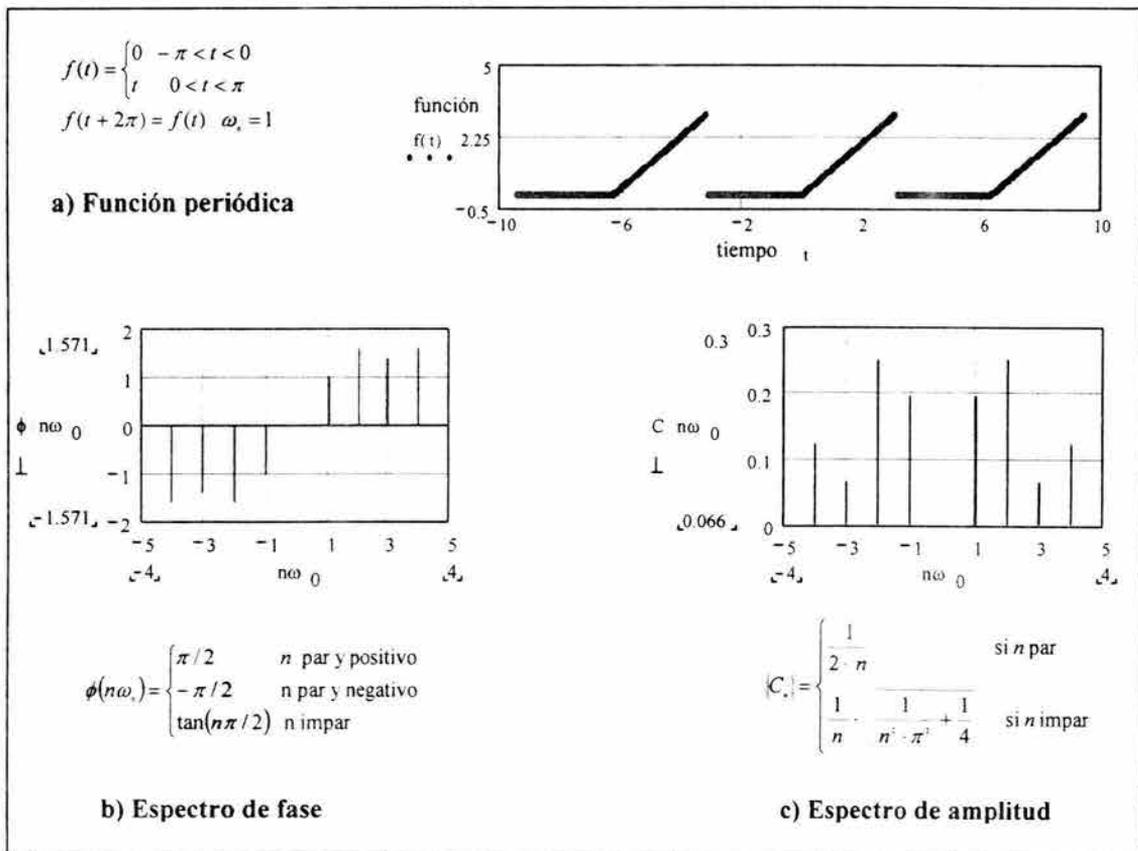


Figura B.3 Espectros discretos de una función periódica

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

---

### B.3 La Transformada de Fourier

La transformada de Fourier (TF) se desarrolló después que las series de Fourier, sin embargo ha adquirido mayor importancia debido a que son más manejables para el cálculo, pero sobre todo porque son aplicables no sólo a funciones periódicas sino a funciones más generales. La interpretación matemática conveniente de una función dada mediante su integral, que es lo que nos dice, grosso modo, la transformada de Fourier, está dada por la teoría de distribuciones, la cual sale de los límites de este trabajo. Por ello se expone un breve desarrollo con algunas deducciones de carácter intuitivo que permiten introducir de forma sencilla el concepto de la TF.

Si  $f_p(t)$  es una función periódica que satisface las condiciones de Dirichlet y tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f_p(t)| \cdot dt < \infty \quad \text{B18)}$$

es decir  $f_p(t)$  es absolutamente integrable, entonces su serie de Fourier compleja es

$$f_p(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n \cdot e^{i n \omega_s t} \quad \text{B19)}$$

$$C_n = \frac{1}{T} \cdot \int_d^{d+T} f(t) \cdot e^{-i n \omega_s t} \cdot dt \quad \text{B20)}$$

en la ecuación anterior si se hace  $d=T/2$  también se conserva el límite de integración, el cual por condición de las SF debe tener una longitud  $T$ . Además empleando la variable  $\tau$  en lugar de  $t$  para distinguirla, ya que esta toma valores finitos en el intervalo de integración, contrario a lo que sucede con  $t$  en la ecuación B19, se tiene

$$C_n = \frac{1}{T} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) \cdot e^{-i n \omega_s \tau} \cdot d\tau \quad \text{B20.1)}$$

sustituyendo B20.1 en B19 da

$$f_p(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{T} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) \cdot e^{-i n \omega_s \tau} \cdot d\tau \right] \cdot e^{i n \omega_s t} \quad \text{B21)}$$

Ahora, se trata de obtener una representación de Fourier para una función no periódica  $f(t)$ . Esto se consigue al hacer que el periodo  $T$  de la función periódica  $f_p(t)$  tienda a infinito, con ello la función resultante deja de ser periódica, es decir  $\lim_{T \rightarrow \infty} f_p(t) = f(t)$ .

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

Por lo tanto, para evitar que se anule el valor de  $C_n$  dado por B20.1 cuando  $T \rightarrow \infty$ , se hacen las siguientes transformaciones y consideraciones de carácter intuitivo<sup>A6</sup>.

De la definición dada por la ecuación B14 se tiene  $1/T = \omega_0 / 2\pi$ , por tanto de la ecuación anterior se obtiene

$$f_p(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) \cdot e^{-i \cdot n \cdot \omega_0 \cdot \tau} \cdot d\tau \right] \cdot \omega_0 \cdot e^{i \cdot n \cdot \omega_0 \cdot t} \quad \text{B21.1)}$$

la diferencia  $\Delta\omega$  entre dos armónicos adyacentes cualquiera, los cuales son múltiplos de  $\omega_0$ , es

$$\Delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n = (n+1) \cdot \omega_0 - n \cdot \omega_0 = \omega_0 \quad \text{B22)}$$

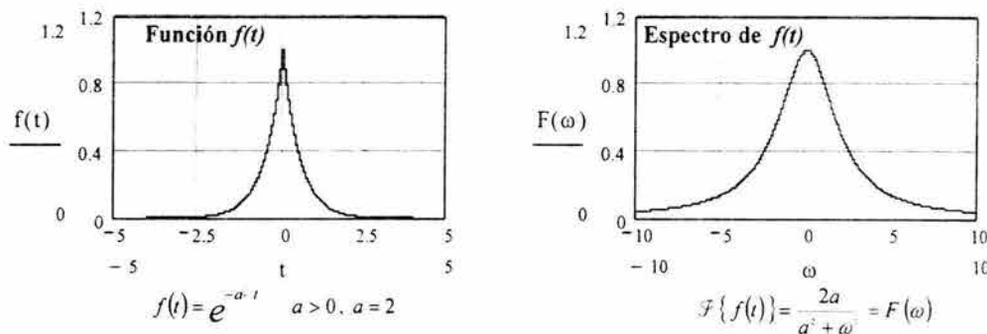
por tanto sustituyendo  $\omega_0$  por  $\Delta\omega$  en B21.1

$$f_p(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) \cdot e^{-i \cdot n \cdot \omega_0 \cdot \tau} \cdot d\tau \right] \cdot \Delta\omega \cdot e^{i \cdot n \cdot \omega_0 \cdot t} \quad \text{B21.2)}$$

Cuando  $T \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} (\omega_0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left( \frac{2\pi}{T} \right) = 0$$

entonces, de la ecuación B22,  $\Delta\omega \rightarrow 0$ , y como la sumatoria de la ecuación B19 establece una infinidad de armónicos  $\omega_n$ , que son múltiplos de  $\omega_0$ , entonces  $n \rightarrow \infty$ . De este modo a medida que  $T$  aumenta  $\omega_0$  disminuye y las líneas del espectro de la función se acercan unas a otras hasta que  $\Delta\omega \approx d\omega$ . En consecuencia la variación de las amplitudes o fases del espectro son infinitesimales y entonces el espectro discreto se vuelve continuo (ver figura B4). La variable discreta independiente se vuelve continua, esto es  $n \cdot \omega_0 \rightarrow \omega$ .



**Figura B4 Espectro de una función no periódica**

<sup>A6</sup> La demostración formal de esto requiere de la llamada Teoría de Distribución.

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

---

Tomando en cuenta lo anterior, cuando  $T \rightarrow \infty$ , se sustituye  $n \cdot \Delta\omega$  y  $n \cdot \omega_0$  por  $\omega$  y  $\Delta\omega$  por  $d\omega$  en la ecuación B21.2, se tiene

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) \cdot e^{-i\omega\tau} \cdot d\tau \right] \cdot e^{i\omega t} \cdot d\omega \quad \text{B23}$$

nótese de la ecuación anterior que ahora  $f_p(t) = f(t)$  por las razones expuestas anteriormente. Se observa también que la sumatoria pasa a ser la integral sobre  $\omega$ , por lo que

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot e^{-i\omega\tau} \cdot d\tau \right] \cdot e^{i\omega t} \cdot d\omega \quad \text{B24}$$

si se define la integral entre paréntesis de la ecuación anterior como  $F(\omega)$  y regresando la variable  $\tau$  en vez de  $t$ :

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} \cdot dt \quad \text{B25}$$

entonces la ecuación B24 se puede escribir

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{i\omega t} \cdot d\omega \quad \text{B26}$$

La justificación formal del proceso en el cual se obtuvieron las ecuaciones B25 y B26 es más complicado de lo que se desarrolló aquí. El lector interesado en una deducción formal puede consultar, por ejemplo, a Gray M. R. y Goodman W. J. (1995) en las referencias.

A la ecuación B24 se le conoce como la identidad de Fourier. La función  $F(\omega)$  definida por B25 se le llama la integral o transformada de Fourier (TF) y la operación de integración del producto de la exponencial y la función en cuestión se simboliza por el operador  $\mathcal{F}$ , es decir,  $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$ . En forma análoga el operador  $\mathcal{F}^{-1}$  se emplea para indicar la operación inversa y se llama transformada inversa de Fourier (TIF) a la ecuación B26, con ello se obtiene  $f(t)$  cuando  $F(\omega)$  está dado, así  $f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]$ . A las dos ecuaciones anteriores (B25 y B26) se les conoce como par de transformadas de Fourier. Las condiciones (suficientes) para que exista  $F(\omega)$  de una función  $f(t)$  son las condiciones de Dirichlet y la ecuación B18.

La TF  $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$  es, en general, una función compleja de  $\omega$ , por lo que tiene componentes real e imaginaria:

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

---

forma cartesiana:  $F(\omega) = A(\omega) + iB(\omega)$   
forma polar:  $F(\omega) = |F(\omega)| \cdot [\cos \phi(\omega) + i \cdot \text{sen } \phi(\omega)]$   
forma exponencial:  $F(\omega) = |F(\omega)| \cdot e^{i\phi(\omega)}$

donde  $|F(\omega)| = \sqrt{A(\omega)^2 + B(\omega)^2}$  y  $\phi(\omega) = \tan^{-1}(B(\omega)/A(\omega))$

Las gráficas de  $|F(\omega)| - \omega$  y  $\phi(\omega) - \omega$  tienen los mismos nombres dados en las series de Fourier. Así también, el significado fundamental persiste: la integral de Fourier es la representación de  $f(t)$  como la combinación lineal de exponenciales complejos cuya variable independiente  $\omega$  es continua.

La existencia del par de transformadas de una función  $f(t)$  están dadas si ésta tiene su integral cuadrada (ic)<sup>A7</sup> o de segunda potencia, es decir

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \cdot dt < \infty \quad \text{B27}$$

entonces se puede obtener  $F(\omega)$ . Además la diferencia

$$e(t) = \Phi(t) - f(t) \quad \text{B28}$$

puede diferir significativamente de cero para algunos valores aislados de  $t$ , pero

$$\int_{-\infty}^{\infty} |e(t)|^2 \cdot dt = 0 \quad \text{B29}$$

Como la ecuación B27 define a  $f(t)$  como un pulso de energía, se puede decir que cualquier pulso de energía posee el par de transformadas de Fourier. Las funciones que cumplen con las condiciones de Dirichlet son un conjunto de las funciones integrables cuadradas.

### B.4 La Transformada Discreta de Fourier

La transformada discreta de Fourier (TDF), es un concepto matemático que actualmente ha tenido un uso extendido en diversas disciplinas técnicas y científicas gracias al empleo de las computadoras. Para emplear la TDF en una computadora se emplea un ingenioso algoritmo desarrollado por Cooley y Tuckey<sup>A8</sup> conocido como la Transformada

---

<sup>A7</sup> Esta es solo una condición suficiente.

<sup>A8</sup> Ver referencia : Cooley, J.W. and Tukey, J.W. (1965).

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

---

Rápida de Fourier o FFT, por sus siglas en inglés, que es una implementación altamente eficiente de la TDF.

En este apartado se mencionan brevemente algunas de las características y propiedades de la TDF, mismas que establecen las características y variantes de la FFT. Posteriormente se describe la FFT para potencias de dos, el cual es un caso particular de la FFT.

Con los conceptos mencionados anteriormente, se puede decir sintéticamente que la TDF, al igual que las series y la transformada de Fourier, es la representación<sup>A9</sup> de un vector que pertenece a un espacio dado mediante la combinación lineal de vectores de una base ortogonal  $S$  de otro espacio, el cual cuenta con un producto interno. En efecto, el conjunto de vectores base  $S$  son funciones, ahora discretas, del tipo

$$S = \left\{ e^{i \cdot 2 \cdot \pi \cdot m / N} \mid m \in I, N \in I^+ \right\} \quad \text{B30}$$

A dicha serie se le conoce como exponenciales discretas complejas (EDC) de orden  $N$ , donde la variable independiente  $m$  es discreta.

El producto interno entre funciones discretas  $f_1(k)$  y  $f_2(k) \in \mathbb{C}$  se define ahora en términos de una sumatoria en vez de una integral (como la ecuación B3), es decir

$$(f_1(k) \mid f_2(k)) = \sum_{k=0}^{N-1} f_1(k) \cdot f_2(k)^* \quad \text{B31}$$

donde  $f_2(k)^*$  es la función conjugada de  $f_2(k)$ . La condición de ortogonalidad para la TDF está dada por:

Sean  $q, r \in I$ ,  $0 < q, r < N - 1$ ; un conjunto de funciones exponenciales discretas complejas de orden  $N$ , estas son ortogonales si

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{i \cdot 2 \cdot \pi \cdot q \cdot k / N} \cdot e^{i \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot k / N^*} = \begin{cases} 0 & \text{si } q \neq r \\ N & \text{si } q = r \end{cases} \quad \text{B32}$$

La base  $S$  dada en B30 cumple con B32, por lo que es ortogonal<sup>A10</sup>. Esta definición difiere ligeramente de la presentada en B4, debido al término de orden  $N$ , pero el significado general se conserva.

---

<sup>A9</sup> Que es un tipo de transformación lineal.

<sup>A10</sup> Como propiedad adicional, esta base también es ortonormal, característica que, junto con la ortogonalidad, generalmente facilita las transformaciones en un espacio vectorial.

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

---

### B.4.1 Transformada Discreta de Fourier. Definición

Si  $f(k) = f_k$  es una función definida para  $0 \leq k \leq N-1$ , que bien puede estar definida como una ecuación analítica o como un vector de  $N$  valores, entonces, gracias a la propiedad de ortogonalidad,  $f(k)$  puede expresarse como una combinación lineal de la base  $S$  (ecuación B30), esto es

$$f_k = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} F_n \cdot e^{i2\pi \cdot n \cdot k / N} \quad (0 \leq k \leq N-1) \quad \text{B33)}$$

De la ecuación anterior se observa que  $F_n$  son los coeficientes o escalares y que se determinan posteriormente. El valor de  $n$  define términos en la sumatoria,  $N$  términos por cada valor de  $k$ . Hay  $N$  coeficientes involucrados. Además aparece la constante  $1/N$  que resulta de determinar los coeficientes  $F_n$  y factorizarlo de la sumatoria.

Ahora se determina los valores de  $F_n$ . Si se multiplica ambos miembros de B33 por  $e^{-i2\pi \cdot m \cdot k / N}$  se tiene

$$f_k \cdot e^{-i2\pi \cdot m \cdot k / N} = \left[ \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} F_n \cdot e^{i2\pi \cdot n \cdot k / N} \right] \cdot e^{-i2\pi \cdot m \cdot k / N} \quad \text{B33.1)}$$

estableciendo la sumatoria en  $k$  en la ecuación anterior

$$\sum_{k=0}^{N-1} f_k \cdot e^{-i2\pi \cdot m \cdot k / N} = \sum_{k=0}^{N-1} \left[ \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} F_n \cdot e^{i2\pi \cdot n \cdot k / N} \right] \cdot e^{-i2\pi \cdot m \cdot k / N} \quad \text{B33.2)}$$

Como las sumatorias del segundo miembro de la ecuación anterior son finitas, entonces se puede intercambiar el orden de las sumatorias, resultando

$$\sum_{k=0}^{N-1} f_k \cdot e^{-i2\pi \cdot m \cdot k / N} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_n \sum_{k=0}^{N-1} e^{i2\pi \cdot n \cdot k / N} \cdot e^{-i2\pi \cdot m \cdot k / N} \quad \text{B.33.3)}$$

Entonces, debido a la propiedad de ortogonalidad (ecuación B32) el segundo miembro de B33.3 se reduce a un simple término  $F_m$ , dando

$$\sum_{k=0}^{N-1} f_k \cdot e^{-i2\pi \cdot m \cdot k / N} = F_m \quad \text{B33.4)}$$

reemplazando el subíndice  $m$  por  $n$  se obtiene

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

$$F_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k \cdot e^{-i \cdot 2 \cdot \pi \cdot m \cdot k / N} \quad (0 \leq n \leq N - 1) \quad \text{B34)..}$$

La ecuación B33 se le llama la transformada discreta inversa de Fourier (TDIF) (de síntesis), mientras que la ecuación contraparte B34 (de análisis), es la transformada discreta de Fourier (TDF). Se puede demostrar, pero aquí no se hace, que la ecuación B33 es la inversa exacta de B34 y viceversa.

Cabe mencionar que si  $n$  adquiere valores fuera del rango  $0 \leq n \leq N - 1$  en B34 los exponenciales en la sumatoria se reciclan, es decir, se repetirán en ciclos de periodo  $N$ . Así, los valores de  $F_n$  generados fuera del rango, serían repeticiones periódicas de la serie original, por ello se dice que las exponenciales empleadas son inherentemente periódicas de la variable  $n$  con periodo  $N^{A11}$  y lo mismo ocurre con la ecuación B33.

A medida que se incrementa  $N$ , las exponenciales discretas complejas (EDC) permiten que los cálculos efectuados con el par de transformadas discretas de Fourier (PTDF) (ecuaciones B33 y B34) se parezcan cada vez más a los valores calculados con la serie de Fourier (ecuación B7) o el par de transformadas de Fourier (ecuaciones B25 y B26), por ello la TDF se emplea como un estimador de las transformadas mencionadas. Lo anterior implica una cantidad de cálculos enorme, pero este problema es resuelto por el método de la FFT que se presenta a continuación.

### B.5 La transformada rápida de Fourier o FFT

Si se define una variable

$$W = e^{-i \cdot 2 \pi / N} \quad \text{B35)}$$

entonces la TDF (ecuación B34) queda

$$F_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k \cdot W^{nk} \quad (0 \leq n \leq N - 1) \quad \text{B36)}$$

o también

$$F(n) = \sum_{k=0}^{N-1} f_0(k) \cdot W^{nk} \quad (0 \leq n \leq N - 1) \quad \text{B36.1)}$$

donde en lugar de los subíndices  $n$  y  $k$ , estos aparecen ahora como argumentos de  $F$  y  $f$  respectivamente, ya que son variables discretas. El subíndice 0 en  $f$  en B36.1 se emplea para denominar lo que se llamará vector de la etapa 0; más adelante se explica el porqué.

<sup>A11</sup> Esto es consecuencia de la llamada propiedad de circularidad de los números complejos.

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

Así por ejemplo, si  $N=4$  en B36.1, se obtiene un sistema de ecuaciones, que en forma matricial queda

$$\begin{bmatrix} F(0) \\ F(1) \\ F(2) \\ F(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 \\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6 \\ W^0 & W^3 & W^6 & W^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0(0) \\ f_0(1) \\ f_0(2) \\ f_0(3) \end{bmatrix} \quad \text{B37)}$$

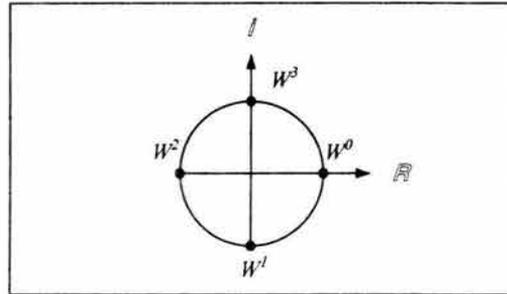
como las EDC poseen la propiedad de circularidad, entonces  $W^4 = W^0$ ,  $W^6 = W^2$  y  $W^9 = W^1$ , lo cual equivale a sumar  $\pi$  rad en el diagrama de Argand (ver figura FB-4), por ello se acostumbra escribir

$$e^{-i2\pi k/N} = e^{-i2\pi |n-k|_N / N} \quad \text{B38)}$$

o en términos de  $W$

$$W^{n-k} = W^{n-k \pmod N} \quad \text{B38.1)}$$

Donde el modulo es el número de términos  $W$  contenidos en un ciclo ( $2\pi$  en el diagrama de Argand).



**Figura B5 Diagrama de Argand**

Además sólo si  $N$  es un número par, cada valor  $W^{nk}$  obtenido de B36.1, es igual al negativo del opuesto a este, es decir, para este caso con  $N=4$ ,  $W^2 = -W^0$  y  $W^3 = -W^1$  (ver figura B4), con lo cual el sistema queda

$$\begin{bmatrix} F(0) \\ F(1) \\ F(2) \\ F(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & -W^0 & -W^1 \\ W^0 & -W^0 & W^0 & -W^0 \\ W^0 & -W^1 & -W^0 & W^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0(0) \\ f_0(1) \\ f_0(2) \\ f_0(3) \end{bmatrix} \quad \text{B37.1)}$$

Y como se sabe que  $W^0 = I$ , entonces solo es necesario evaluar  $W^1$ .

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

---

### B.5.1 La transformada rápida de Fourier base 2

El algoritmo general de la FFT hace uso de los anteriores resultados y con ello se reduce en forma considerable las operaciones aritméticas. En particular, si el número de datos  $N$  es potencia de dos, es decir,  $N = 2^v$ , donde  $v \in \mathbb{I}^+$ , el método de la FFT permite factorizar la matriz  $[W]$  de B37 en dos matrices (también de  $4 \times 4$ ), esto es

$$\begin{bmatrix} F(0) \\ F(2) \\ F(1) \\ F(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & W^0 & 0 & 0 \\ W^0 & -W^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W^1 \\ 0 & 0 & 1 & -W^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^0 \\ 1 & 0 & -W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -W^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0(0) \\ f_0(1) \\ f_0(2) \\ f_0(3) \end{bmatrix} \quad \text{B39)}$$

Entonces el producto matricial a realizar para obtener  $\overline{F}(n)$  se convierte en un procedimiento de tres etapas, o sea

#### etapa 1

$$\begin{bmatrix} f_1(0) \\ f_1(1) \\ f_1(2) \\ f_1(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & W^0 \\ 1 & 0 & -W^0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -W^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0(0) \\ f_0(1) \\ f_0(2) \\ f_0(3) \end{bmatrix} \quad \text{B40)}$$

#### etapa 2

$$\begin{bmatrix} f_2(0) \\ f_2(1) \\ f_2(2) \\ f_2(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & W^0 & 0 & 0 \\ W^0 & -W^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & W^1 \\ 0 & 0 & 1 & -W^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(0) \\ f_1(1) \\ f_1(2) \\ f_1(3) \end{bmatrix} \quad \text{B41)}$$

De lo anterior se observa que con el vector de inicio  $\overline{F}_0(k)$ , (de ahí el porqué del subíndice 0) se realizan los productos de las matrices factores, dando  $\overline{F}_1(k)$  en la primera etapa y  $\overline{F}_2(k)$  en la segunda etapa.

Finalmente, si se mueven de posición algunos elementos del vector  $\overline{F}_2(k)$  se obtiene  $\overline{F}(n)$  que es la etapa llamada de inversión de bits, es decir

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

---

**inversión de bits**

$$\begin{bmatrix} F(0) \\ F(1) \\ F(2) \\ F(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_2(0) \\ f_2(2) \\ f_2(1) \\ f_2(3) \end{bmatrix} \quad \text{B42)}$$

Analizando el porque de este nombre se tiene que si la variable independiente de los vectores B42 se expresan en forma binaria se tiene

$$\begin{bmatrix} F(0 \ 0) \\ F(0 \ 1) \\ F(1 \ 0) \\ F(1 \ 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_2(0 \ 0) \\ f_2(1 \ 0) \\ f_2(0 \ 1) \\ f_2(1 \ 1) \end{bmatrix} \quad \text{B42.1)}$$

se observa que la variable o índice de un elemento dado es el inverso del otro, por lo tanto, para obtener  $\overline{F}(n)$ , se debe cambiar el orden de los elementos del último vector de la etapa, en este caso  $\overline{F}_2(i \ j)$  en  $\overline{F}(j \ i)$ .

El proceso de factorización y demás operaciones de este algoritmo se entienden tal vez mejor con las llamadas gráficas de flujo de señales. Una explicación detallada de todo ello se pueden encontrar en E. Brigham, (1988) y Bracewell N. R., (1999) de las referencias.

Esta operación de inversión de bits es proporcional a  $N$ , y aún con esta, el número de operaciones de la FFT base 2 es todavía bastante inferior a las correspondientes con el método directo, esto es, la definición de la transformada discreta de Fourier TDF.

En efecto, de la ecuación B34 se observa que el número de operaciones requeridas por la TDF son, para el ejemplo mostrado:

multiplicaciones complejas :  $4^2=16$  , generalizando:  $N^2$   
 adiciones complejas :  $4(4-1)=12$  , generalizando:  $N(N-1)$

Mientras que para la FFT base 2, potencias de dos ó  $N=2^v$  , se realiza el producto de dos matrices de  $4 \times 4$ , en cada una de las cuales se efectúan dos multiplicaciones y cuatro adiciones, como se puede observar al desarrollar las operaciones indicadas en las ecuaciones B40 y B41. Se puede generalizar a lo siguiente: el método de la FFT permite factorizar la matriz  $[W]$  en el producto de  $v$  matrices de tamaño  $N \times N$  , en cada una de las cuales se calculan  $N$  valores intermedios realizando  $N/2$  multiplicaciones complejas y  $N$  adiciones (sustracciones), por lo que el número total de operaciones es:

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

Número de multiplicaciones complejas:  $1/2N \cdot \nu$

Número de adiciones (sustracciones) complejas:  $N \cdot \nu$

De la relación  $\nu = \log_2 N$  se pueden establecer comparaciones acerca del número de operaciones entre la TDF y la FFT base 2, lo que pronto resulta en una gran diferencia, como se puede observar en la grafica de la figura FB-6, donde se muestra la cantidad de multiplicaciones realizadas en la TDF y la FFT. La gráfica de comparación de la cantidad de adiciones (sustracciones) es muy similar a la anterior. Además de la velocidad, la FFT tiene la ventaja de ser más exacta debido al menor número de operaciones que con ella se realizan, teniéndose así un error menor por truncamiento.

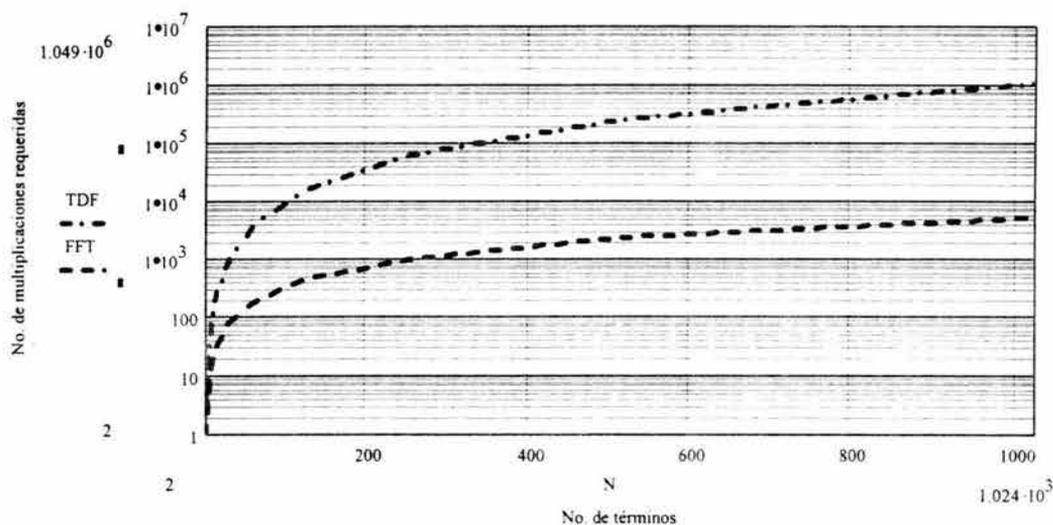


Figura B.6 Comparación entre la TDF y la FFT en el número de operaciones realizadas

### B.5.2 La transformada rápida de Fourier general

Si  $N$  no es potencia de 2, entonces el método anterior no es aplicable. Sin embargo, gran parte de la teoría aquí aplicada es válida ya que Cooley y Tukey, en su trabajo original<sup>A15</sup>, consideran a  $N$  un número compuesto, esto es, que puede ser obtenido como el producto de números enteros no necesariamente pares, es decir, haciendo  $N = r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_m$ , donde  $r_i$  es un entero. Por ello, el método visto es un caso particular de este. Aunque la FFT para  $N$  compuesto es menos rápida que la FFT base 2, este método aún es significativamente más rápido que el calculo directo de la TDF. El lector interesado en la FFT para  $N$  compuesto puede consultar, por ejemplo, E. Brigham, (1988), en las referencias.

<sup>A15</sup> Véase en referencias: Cooley, J.W. and Tukey, J.W. (1965).

# Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

---



*No es posible decidir cómo morir, ni cuando.  
Solamente se puede decidir cómo vivir ... ahora.*

*Joan Báez*



En este apéndice se muestran algunos programas realizados en este trabajo.

Programa: **freqvort.pl**. Programa en Perl que calcula la frecuencia acumulada en que aparece un vortice.

```
#!/bin/perl -w

#Programa:freqvort.pl ver. 1.2
#Funcion: calcula la frecuencia acumulada en que aparece un vortice
#de un cierto tipo (clasificacion del Worcester Polytechnic Institute)
#Autor: Fidel Sanchez C.
#Fecha: 02-03-2003
#Ejec: ./nombre del prog.pl y dar archivo de texto de 2 cols.:
#(tiempos tipo de vortice).
#Res: entrega un archivo.txt :%je de apariciones acum. tipo de vort.
#-----
print "archivo a procesar .:";
$file = <STDIN>; chomp($file);
open(ABREFILE, "$file") || die "can not open file $file";
@edovortices = <ABREFILE>;
close ABREFILE;

@total=();
#match line ended with $j;
```

Programa: **freqvort\_t.pl**. Programa en Perl que calcula la frecuencia acumulada en tiempo que aparece un vórtice

```
#!/bin/perl -w

#Programa:freqvort_t.pl ver. 1.2
#Funcion: calcula la frecuencia acumulada en tiempo que aparece un vortice
#de un cierto tipo (clasificacion del Worcester Polytechnic Institute)
#Autor: Fidel Sanchez C.
#Fecha: 16-04-2003
#Ejec: ./nombre del prog.pl y dar archivo de texto de 2 cols.(numeros);
#(tiempos tipo de vortice).
#Res: entrega un archivo.txt :%je de apariciones acum.en tiempo de
#un tipo de vort.
#vorticesct:vortices de cada tipo
#tiemposvct: tiempos de vortices de cada tipo
#tiempoacumvct: tiempo acumulado de vortices de cada tipo
#-----
print "archivo a procesar .:";
$file = <STDIN>; chomp($file);
open(MYARCHIVO, "$file") || die "can not open file $file";
```

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

```
#continuación
#Programa:freqvort.pl ver. 1.2
foreach($i=0; $i<@edosvortices; $i++)
{
  for($j=0; $j<9; $j++)
  {
    if($edosvortices[$i]==s/.*$j$/ )
    { $total[$j]++; }
  }
}
$scorta=index($file, '.'); #output file=input file+res.txt
$file=substr($file, 0, $scorta);
open(WRTFILE, ">$file".*res.txt") || die "can not write
$file".*res.txt";
$sum1=0, $sum2=0;
for($k=0; $k<@total; $k++)
{ $sum1 += $total[$k]; }

print WRTFILE "0\t0\n";
for($k=0; $k<@total; $k++)
{
  $sum2 += $total[$k]*100/$sum1;
  print WRTFILE "$sum2\t$k\n";
}
close
```

Archivo: **FDDP.mcd** Programa en mathcad que realiza el cálculo de la función de distribución de densidad de probabilidad de una señal.

### Funcion FDDP

```
FDDP(varindep, vardep, n) :=
max ← max(vardep)
min ← min(vardep)
δvardep ← (max - min) / n
j ← 0
for i ∈ min - δvardep, min.. max + δvardep
  j ← j + 1
  FDDPj,1 ← i
δvarindep ← varindep2 - varindep1
factortiempo ← (δvarindep) / (δvarindep - length(varindep))
FDDP(2) ← hist(FDDP(1), vardep) · factortiempo
```

funcion que dermina la suma de los elementos de un vector columna

```
#continuacion
#Programa:freqvort_1.pl ver. 1.2
while ( $line = <MYARCHIVO> ) {
  #print "$line";
  @fields = split(/\s+/, $line);
  push(@tiemposvct, $fields[0]);
  push(@vorticesct, $fields[1]);
}

close MYARCHIVO;

#match line ended with $j:
foreach($i=0; $i<@tiemposvct-1; $i++) {
  for($j=0; $j<9; $j++) {
    if($vorticesct[$i]==m/$j/) {
      #tacum = tfin - inicio
      $tiempoacumvct[$j] += $tiemposvct[$i+1]-$tiemposvct[$i];
    }
  }
}

$scorta=index($file, '.'); #output file=input file+res.txt
$file=substr($file, 0, $scorta);

open(WRTFILE, ">$file".*_t_res.txt") || die "can not write
$file".*res.txt";
#factor para obtener el porcentaje de tiempo respecto al tttotal
#$#tiemposvct da el indice del ultimo elemento (el tiempo total de
registro)
$factor = 100/$tiemposvct[$#tiemposvct];

for($i=0; $i<@tiempoacumvct; $i++) {
  #se obt. el %je en t. de un vct.
  $p100tvct = $tiempoacumvct[$i]*$factor;
  print WRTFILE "$p100tvct\t$i\n";
  print "$p100tvct\t$i\n";
}

close WRTFILE;
```

continuación

```
SumElemVect(VectCol) :=
n ← length(VectCol)
sum ← 0
for i ∈ 1..n
  sum ← sum + VectColi,1
```

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

Programa: **correlacion\_normal.c**  
 Programa en C para el cálculo de la función de correlación cruzada normalizada entre dos señales.

```
#include<iostream.h>
#include<math.h>
/*Programa:correlacion_normal.c ver. 1.4
calcula la correlación cruzada normalizada
Autor: Fidel Sanchez C.
Fecha: 23-10-2003 */

int main()
{
    int i,j;
    double mx,my,sx,sy,sxy,denom,r;

    /* calculo de la media de las dos series x[], y[] */
    mx = 0;
    my = 0;
    for (i=0;i<n;i++){
        mx += x[i];
        my += y[i];
    }
    mx /= n;
    my /= n;

    /* Cálculo del denominador */
    sx = 0;
    sy = 0;
    for (i=0;i<n;i++){
        sx += (x[i] - mx) * (x[i] - mx);
        sy += (y[i] - my) * (y[i] - my);
    }
    denom = sqrt(sx*sy);

    /* Caclulo de la correlacion de series */
    for (delay=-maxdelay;delay<maxdelay;delay++){
        sxy = 0;
        for (i=0;i<n;i++){
            j = i + delay;
            if (j < 0 || j >= n)
                continue;
            else
                sxy += (x[i] - mx) * (y[j] - my);
            /* Or should it be (?)
            if (j < 0 || j >= n)
                sxy += (x[i] - mx) * (-my);
            else
                sxy += (x[i] - mx) * (y[j] - my);
            */
        }
        r = sxy / denom;
    }
}
```

Archivo: **FDPE.mcd** Programa en mathcad que realiza el cálculo de la función de densidad de potencia espectral en términos de la r.m.s.

### Funcion DPE variante RMS

```
FDPE(señales) :=
    sfpsup ← señales(1) - mean(señales(1))
    sfpinf ← señales(2) - mean(señales(2))
    N ← last(señales(0))
    Ttot ← (señales(0))N
    Δf ← 1 / Ttot
    TF1 ← CFFT(sfpsup)
    TF2 ← CFFT(sfpinf)
    for j ∈ 0.. N/2
        freqj ← j · Δf
        espectro1j ← 2 / √2 · |TF1j|
        espectro2j ← 2 / √2 · |TF2j|
    FDPE(0) ← freq
    FDPE(1) ← espectro1
    FDPE(2) ← espectro2
    FDPE
```

/\* r = coef. de correlación en el retraso \*/

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

Programa: **correlacion\_normal.c**  
(continuación), consideración de periodicidad en las señales.

/\* Si las series se consideran circulares entonces el prog. fuente con las mismas declaraciones de arriba deben ser \*/

```

/* calculo de la media de las dos series x[], y[] */
mx = 0;
my = 0;
for (i=0;i<n;i++) {
    mx += x[i];
    my += y[i];
}
mx /= n;
my /= n;

/* Calculo del denominador*/
sx = 0;
sy = 0;
for (i=0;i<n;i++) {
    sx += (x[i] - mx) * (x[i] - mx);
    sy += (y[i] - my) * (y[i] - my);
}
denom = sqrt(sx*sy);

/* Calculo de las series de correlacion */
for (delay=-maxdelay;delay<maxdelay;delay++) {
    sxy = 0;
    for (i=0;i<n;i++) {
        j = i + delay;
        while (j < 0)
            j += n;
        j %= n;
        sxy += (x[i] - mx) * (y[j] - my);
    }
    r = sxy / denom;
}
}

```

Archivo: **FDPE.mcd** Programa en mathcad que realiza el cálculo de la función de densidad de potencia autoespectral.

*Funcion de Densidad de potencia autoespectral*

```

FDPE(señales) :=
  sfpsup ← señales(1) - mean(señales(1))
  sfpinf ← señales(2) - mean(señales(2))
  N ← last(señales(0))
  Ttot ← (señales(0))N
  Δf ← 1/Ttot
  TF1 ← CFFT(sfpsup)
  TF2 ← CFFT(sfpinf)
  for j ∈ 0.. N/2
    freqj ← j·Δf
    espectro1j ← 2·(|TF1j|)2
    espectro2j ← 2·(|TF2j|)2
  FDPE(0) ← freq
  FDPE(1) ← espectro1
  FDPE(2) ← espectro2
  FDPE

```

calculo de parametros de freq  
Ab: ancho de banda e Δω: incremento de freq

```

PFreq(señales) :=
  N ← length(señales(0))
  Tm ← (señales(0))N-1
  Ab ← N / (2·Tm)
  Δω ← 2·Ab / N
  PFreq0 ← Ab
  PFreq1 ← Δω
  PFreq

```

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

Archivo: **correlacion\_cruz.mcd** Programa en mathcad que realiza el cálculo de la correlación cruzada. Considera periodicidad de las funciones involucradas.

### Funcion de Correlacion Cruzada FCC

$$R_{xy}(x,y,\Delta t) :=$$

tamaño1	←	length(x)	
tamaño2	←	length(y)	
N	←	tamaño1 if tamaño1 < tamaño2	
		tamaño2 otherwise	se fuerza al menor tamaño del arregloY
for i	∈	0..N-1	
	X <sub>i</sub>	←	x <sub>i</sub>
	Y <sub>i</sub>	←	y <sub>i</sub>
	Y <sub>i+N</sub>	←	Y <sub>i</sub> se asume periodicidad de la funcionY
for k	∈	0..N	la Σ es por bucle, ya que de forma directa no la acepta
	Σ	←	0
	for i	∈	0..N-1
	Σ	←	Σ + X <sub>i</sub> ·Y <sub>i+k</sub>
	T <sub>k</sub>	←	k·Δt
	CXY <sub>k</sub>	←	Σ
XY <sup>(0)</sup>	←	T	
XY <sup>(1)</sup>	←	CXY	

Archivo: **ordenareg.cpp** Programa en C++ que realiza el procesamiento de registros de la secuencia de estados de la fuerza de un vórtice en el tiempo.

```
#include <fstream.h>
#include <iostream.h>
#include <stdlib.h>
#include <stdio.h>
#include <string.h>
/* programa para el procesamiento de
registros de la secuencia de estados
de su fuerza en el tiempo */

ifstream input;
ofstream output[9];
char name[20];
```

```
void save(float);
void fileSaver(float, int, int);

int main(int argc, char **argv)
{
    float time;
    if(argc != 2)
    {
        cerr << "uso: " << argv[0]
        << " archivo \n";
        exit(0);
    }
    input.open(argv[1]);
    if(!input)
    {
        cerr << "No se puede abrir "
        << argv[0] << '\n';
        exit(0);
    }
    strcpy(name, argv[1]);
    while(input >> time)
        save(time);
}

void save(float time)
{
    static int lastType = 0;
    int type;

    input >> type;
    fileSaver(time, lastType, type);
    lastType = type;
}

void fileSaver(float time, int lType, int
type)
{
    static int exists[4] = {0, 0, 0,
0};

    if(type != 0)
    {
        if(!exists[type-1])
        {
            exists[type-1] = 1;
            char num[5];
            sprintf(num,"%d",type);
            output[type-
1].open(strcat(num, name));
            output[type-1] << "0
0\n";
        }
        output[type-1] << time << '
' << type << '\n';
    }

    if(lType != 0) output[lType-1] <<
time << " 0\n";
}
```

# Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

---

## Apéndice D

~~~~~

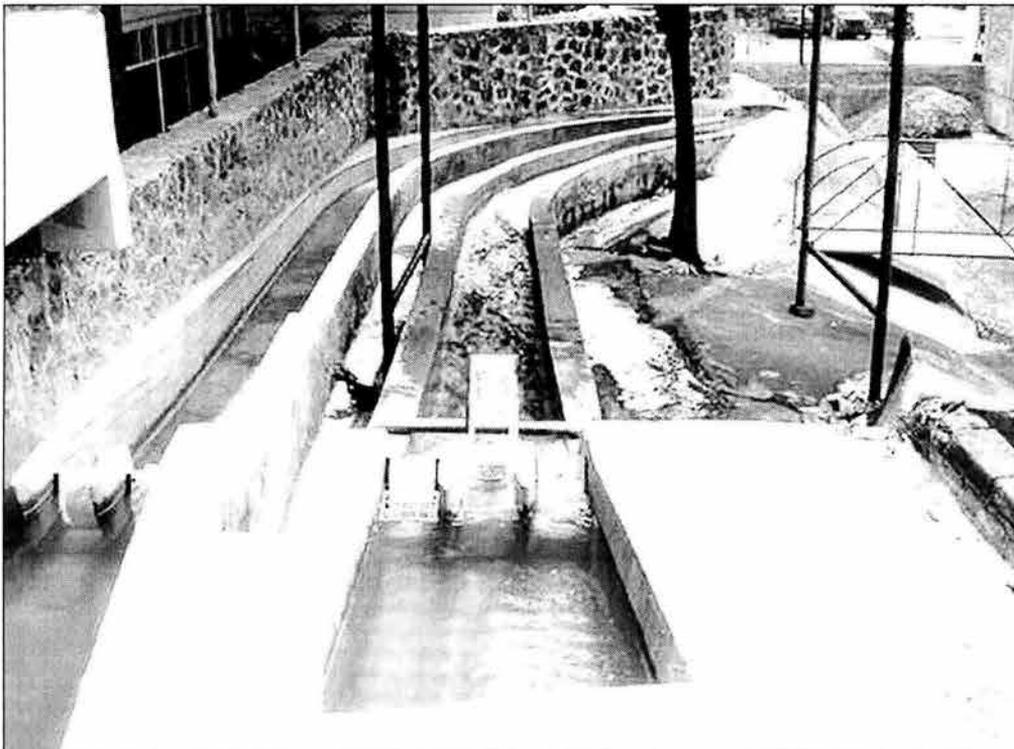
*Ser natural es una pose demasiado difícil.*

*Oscar Wilde*

~~~~~

## Fotos

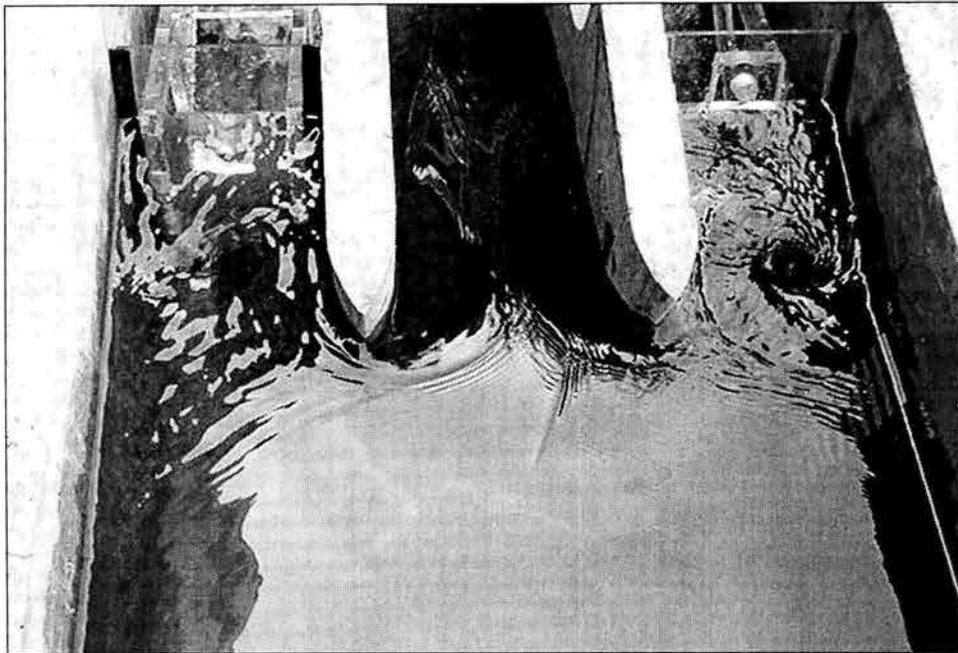
En este apéndice (D) se muestran diversas estructuras del modelo experimental de la P.H. La Angostura, empleado en el muestreo experimental así como los vórtices que en él ocurrieron.



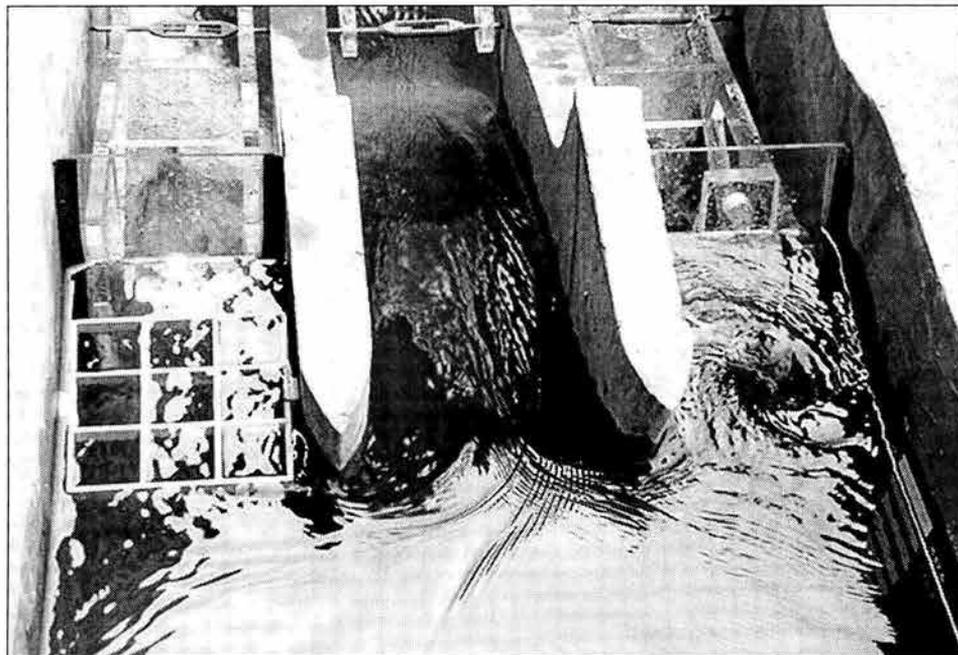
*Foto 1 Estructura de control (compuertas) y canales de descarga (rápidas).*

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

---



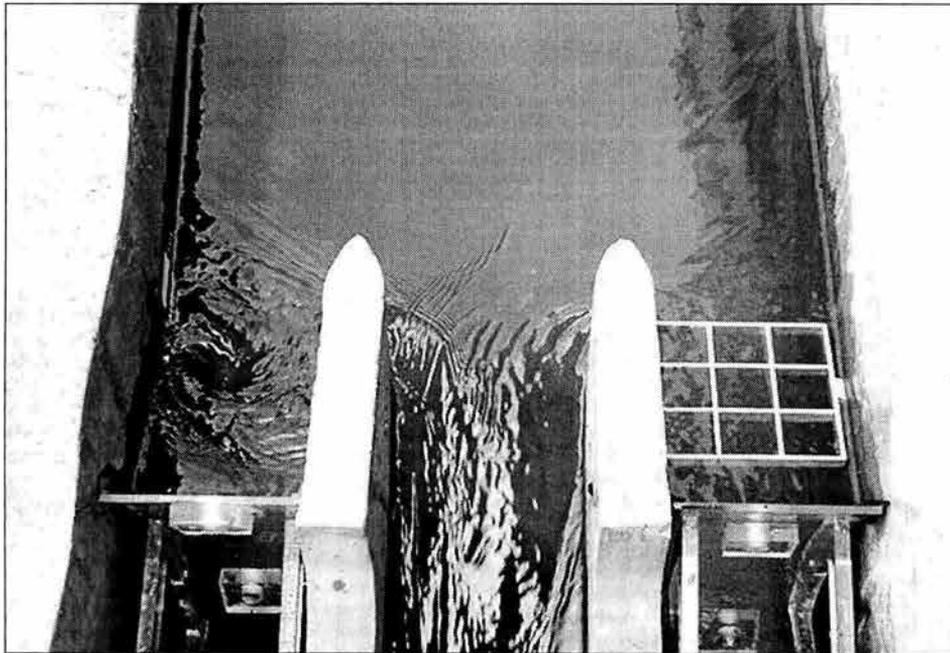
*Foto 2 Vórtices aguas arriba de las compuertas derecha (c1) e izquierda (c3)*



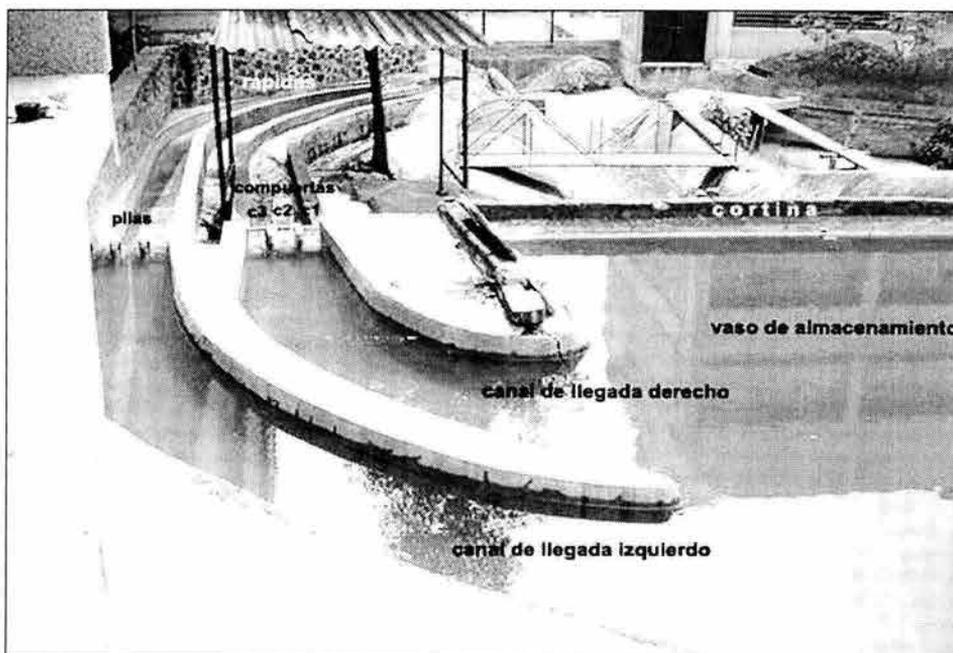
*Foto 3 Dispositivo de rejilla frente a la compuerta izquierda (c3) y vórtice en compuerta derecha (c1). Vista de aguas arriba hacia aguas abajo.*

## Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

---

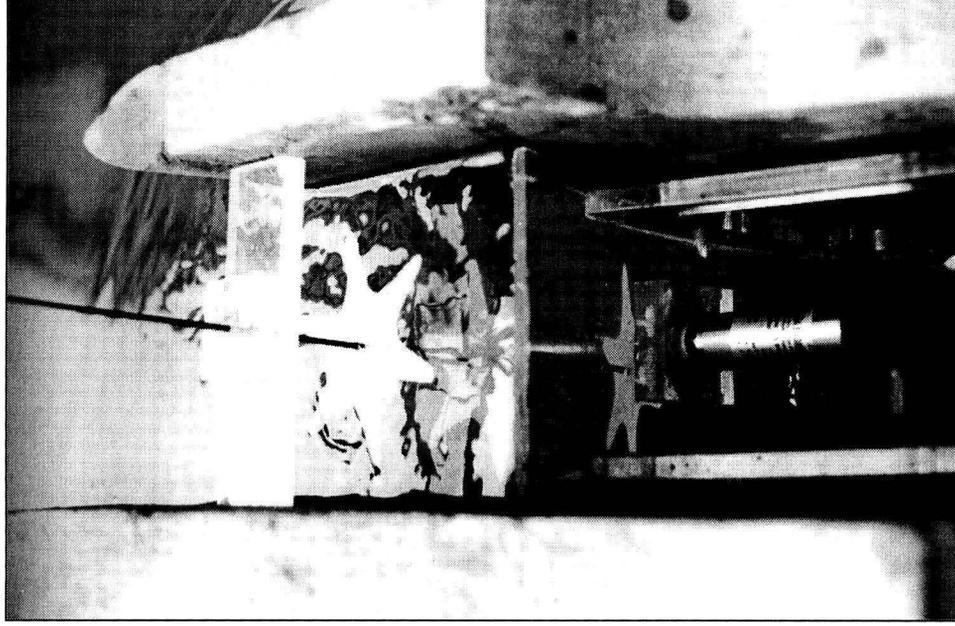


*Foto 4 Dispositivo de rejilla frente a la compuerta izquierda (c3) y vórtice en compuerta derecha (c1). Vista de aguas abajo hacia aguas arriba.*

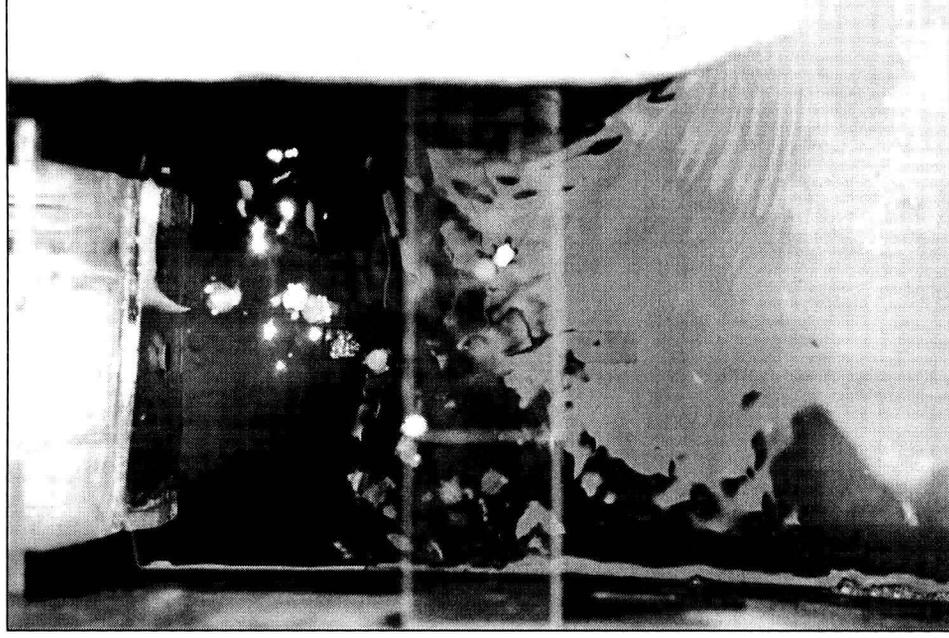


*Foto 5 Vista de conjunto del modelo experimental.*

**Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor**

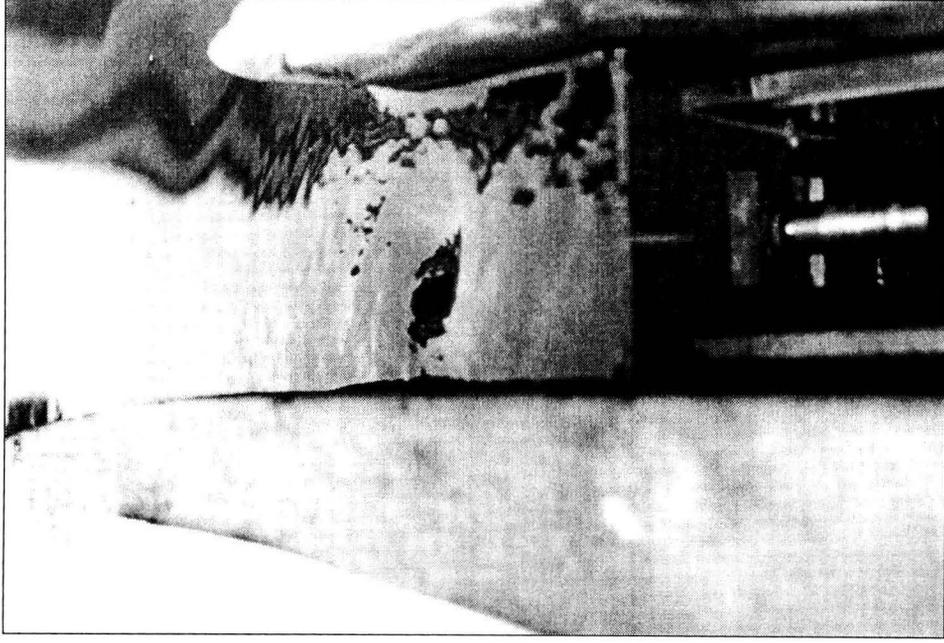


*Foto 6 Dispositivo propelas redondeadas con transductor de presión.*

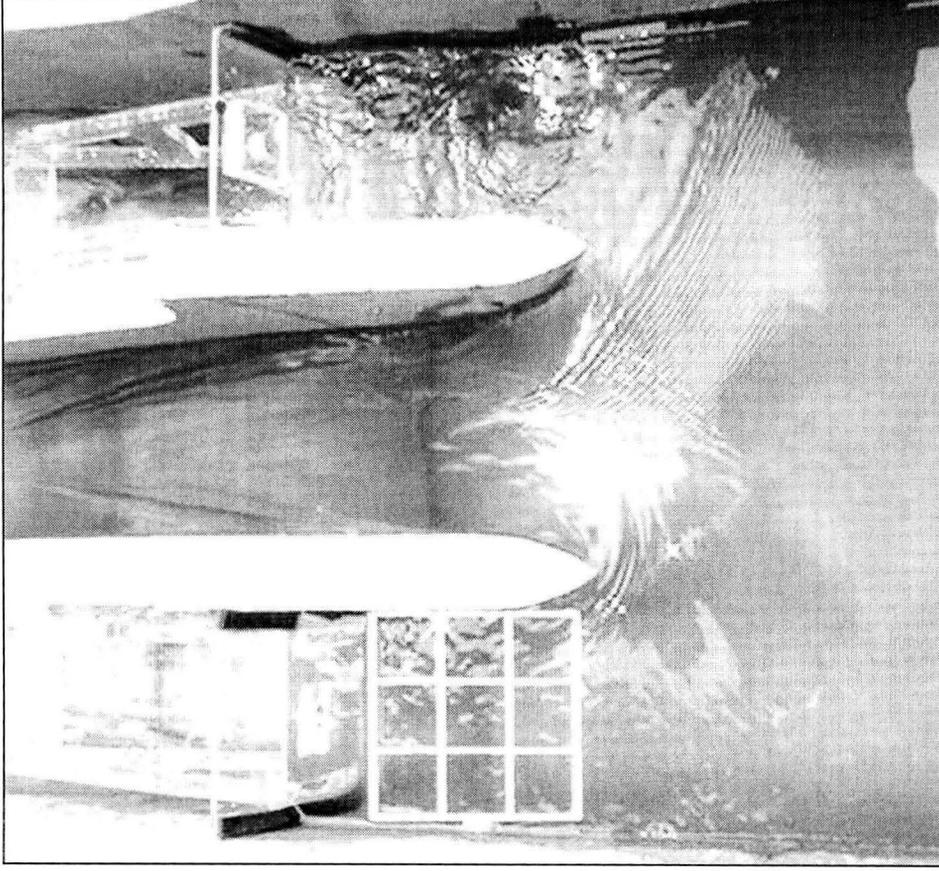


*Foto7 Vista de planta del dispositivo propelas rectas aguas arriba de la compuerta derecha.*

**Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor**



*Foto 8 Vórtice aguas arriba de una compuerta con transductor de presión*



*Foto 9 Vista en planta de un vórtice ocurrido aguas arriba de la compuerta derecha (c1) y rejilla instalada en la compuerta izquierda (c3).*

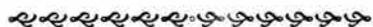
# Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

---

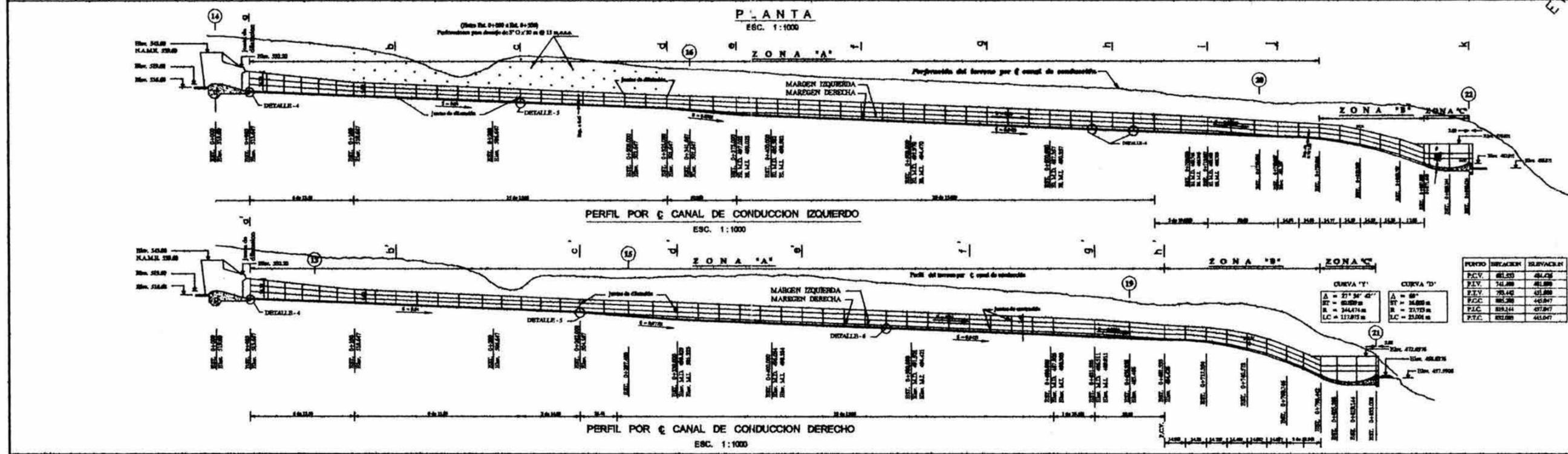
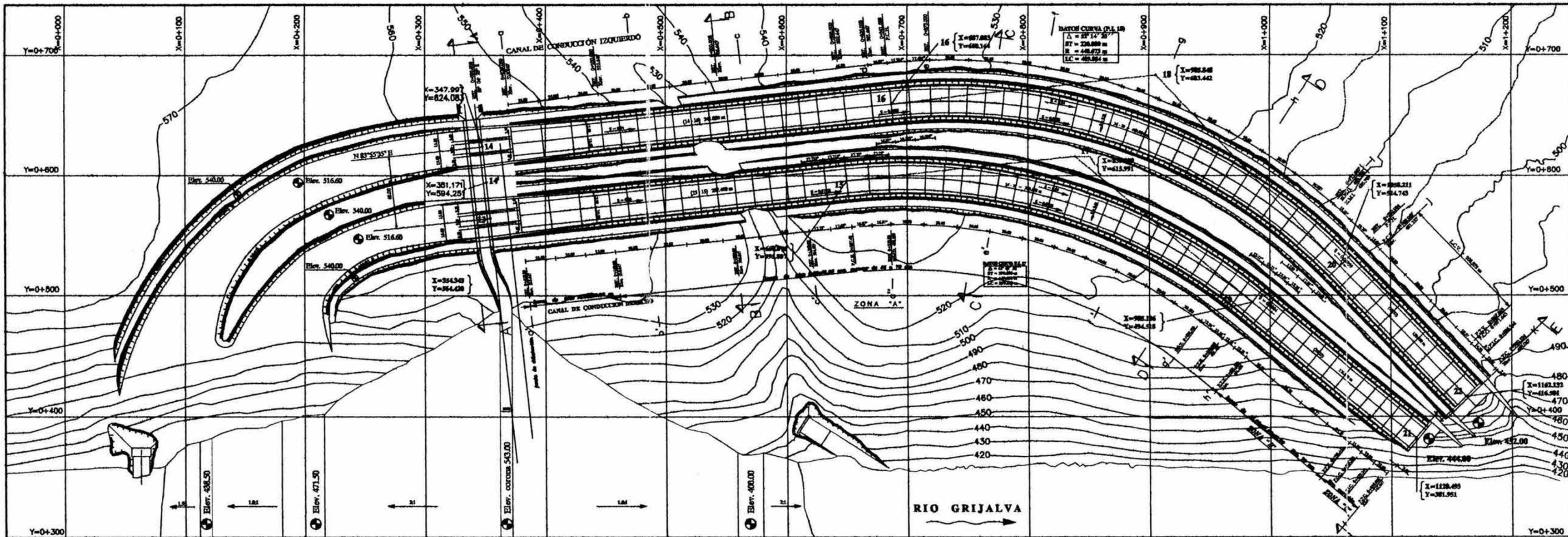


*Sé como el sol y la pradera, a los que tiene sin  
cuidado la inminente llegada del invierno.*

*George Bernard Shaw*



En éste apéndice se muestra el plano de conjunto del vertedor de excedencias de la P.H. La Angostura, así como un plano de detalle de la estructura de control de dicho vertedor



**NOTAS:**

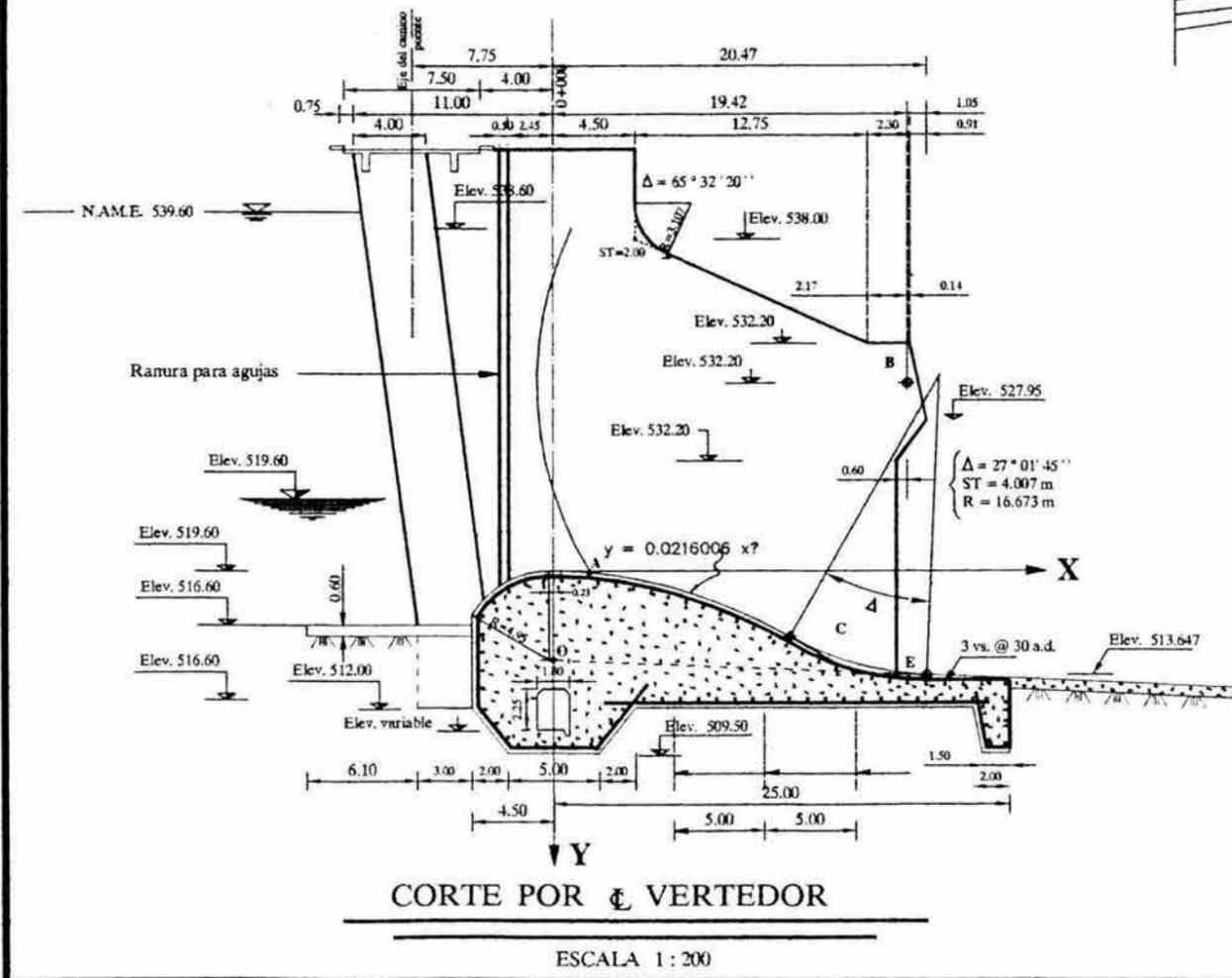
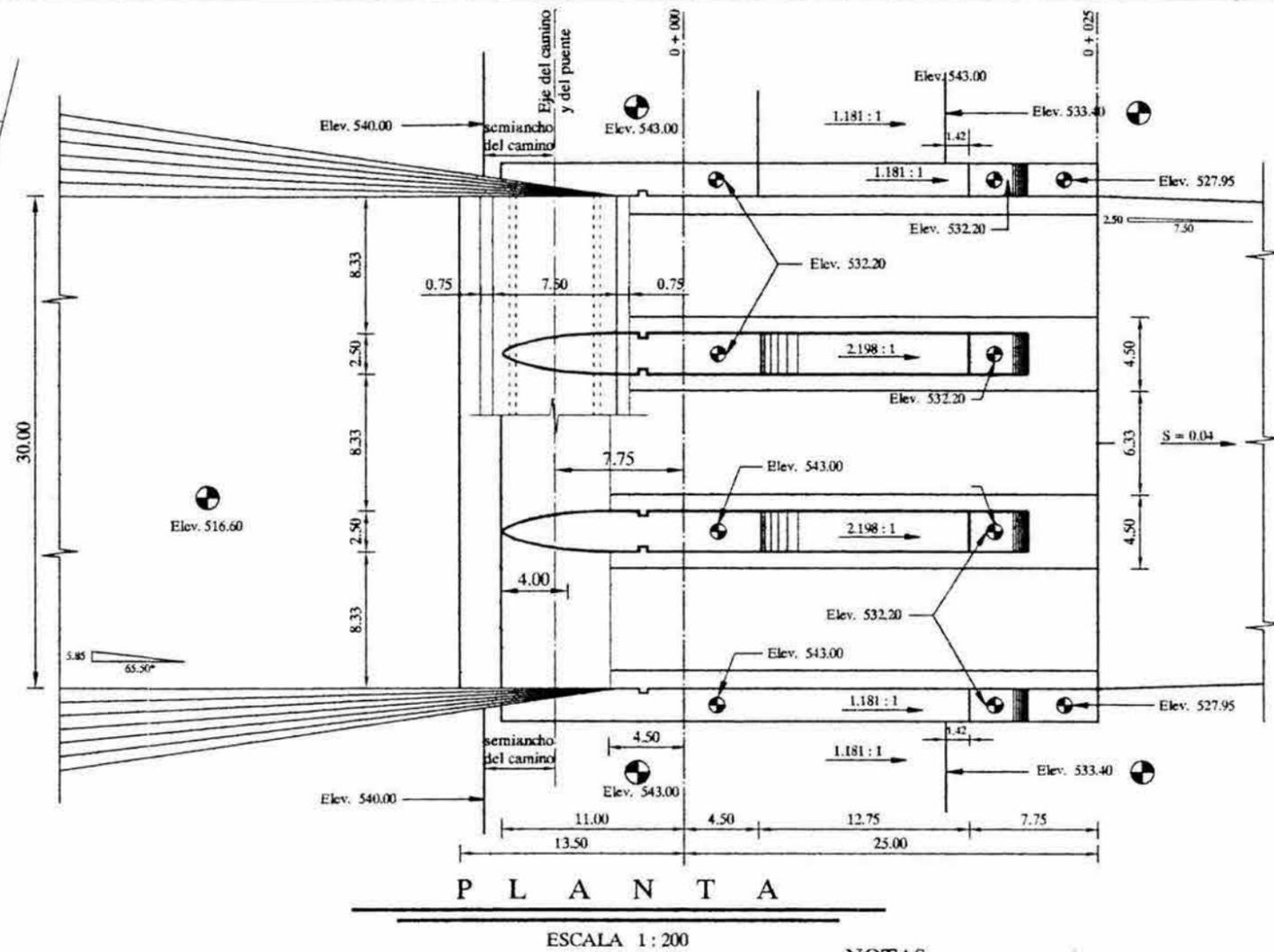
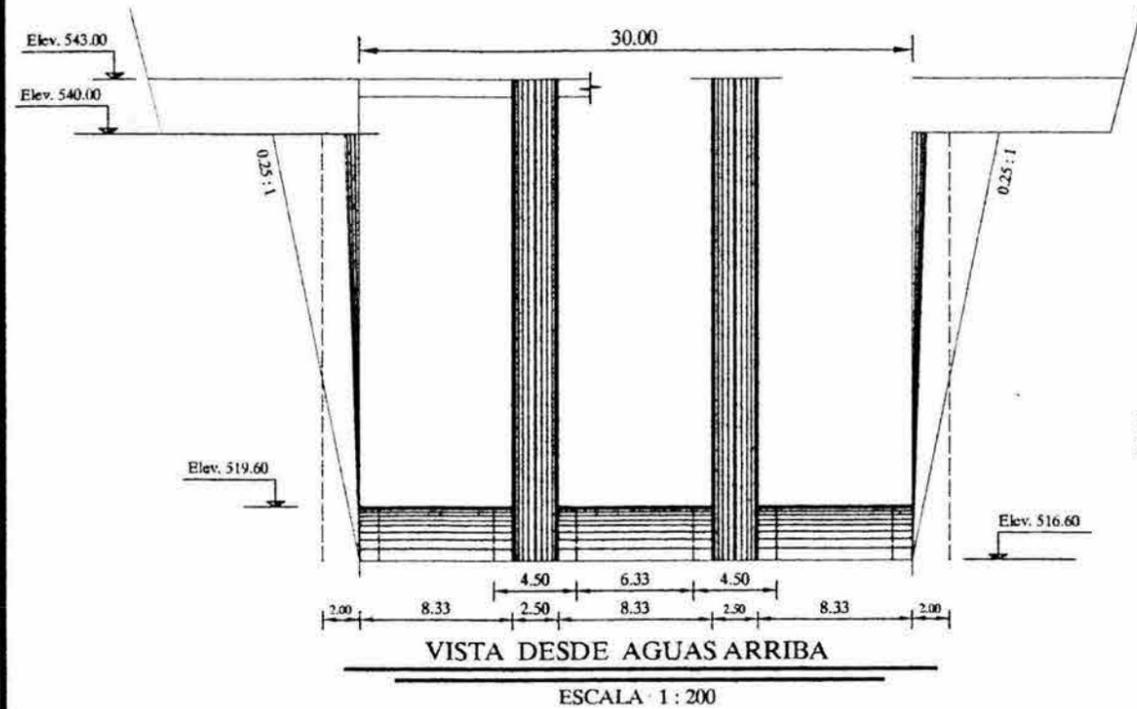
Anotaciones en metros.  
 Elevaciones y cadeneramientos en metros.  
 Las anotaciones con \* son reglas.  
 Se recomienda ver las especificaciones para los acabados y acabados de los muros laterales y los asos de piso de los canales de conducción debido a que se usará en zona "A" un concreto normal armado ( $f_c=300 \text{ kg/cm}^2 \text{ ACI-214}$ ) y en zona "B" y "C" un concreto especial armado clase única ( $f_c=500 \text{ kg/cm}^2 \text{ ACI-318}$ ) y de acuerdo con la distribución de las mostradas donde expandirán dos tipos de juntas de dilatación y contracción, así como los tipos de anclas que se requieren.

Las diferencias en los espesores de las lasas en zonas "A", 45-70 y zona "B", 70-100 se considerará de acuerdo con la sobreelevación existente.

PUNTO	DELAGER	ELEVACION
P.C.V.	881.33	481.26
P.E.V.	741.88	481.88
P.T.V.	751.42	451.88
P.C.C.	881.34	451.87
P.L.C.	818.14	457.87
P.T.C.	821.88	451.87

CURVA "Y"	CURVA "D"
$\Delta = 27^\circ 34' 42''$	$\Delta = 60^\circ$
$ST = 61.82 \text{ m}$	$ST = 16.88 \text{ m}$
$R = 244.71 \text{ m}$	$R = 21.73 \text{ m}$
$LC = 117.87 \text{ m}$	$LC = 23.06 \text{ m}$

VERTEDOR REVESTIMIENTOS	
01 T	71-11-08
P.H. LA ANGOSTURA CHS.	1 DE 3
404	ING. GONZALEZ M.
341	ING. A. BARRERA G.
207	ING. L. AMORO Y.
	ING. F. SANCHEZ C.



COORDENADAS AGUAS ABAJO EN METROS

X	Y
0.5	0.005
1.0	0.022
1.5	0.049
2.0	0.086
2.5	0.135
3.0	0.194
4.0	0.346
5.0	0.540
6.0	0.778
7.0	1.058
8.0	1.382
9.0	1.749
10.0	2.160
11.0	2.614
12.0	3.110
13.0	3.650
14.0	4.234
15.0	4.860
16.0	5.529
17.0	6.243

NOTA IMPORTANTE:  
Ver cuadro de cantidades estimadas de obra en planos de pilas y muros extremos

COORDENADAS EN METROS

PUNTO	X	Y
O	0.000	4.953
A	1.980	0.085
B	19.417	10.400
C	13.000	3.650
D	16.490	5.613
E	20.453	5.770

DATOS PARA TRAZO

NOTAS

Acotaciones en centímetros  
Elevaciones en metros  
Los niveles y acotaciones en la cimentación son a la línea A

PLANOS DE REFERENCIA

- 298.8/4 - C - 52
- 298.8/4 - C - 53
- 298.8/4 - C - 60

MOD. N°	FECHA	DESCRIPCION	MODIF.	REVISO	APROBO
3	2-II-72	Se modificó acotación indicada con *	L.A.T.	J.B.O.	
2	15-XII-71	Revisión general	J.B.O.	L.A.T.	
1	3-IX-71	Revisión general	H.G.M.		

**COMISIÓN FEDERAL DE ELECTRICIDAD**  
DEPARTAMENTO DE PROYECTOS OFNA. DE PROYECTOS CIVILES

Sistema Hidroeléctrico del Río Grijalva, Chis.  
**PLANTA LA ANGOSTURA**  
**VERTEDOR - ZONA COMPUERTAS**  
**PLANO DE CONJUNTO**

Proyecto: Ing. A. Ramos G. Conforme: \_\_\_\_\_  
Dibujó: F. Cabello G. y F. Sánchez C. El jefe de la Ofna.  
Aprobó: \_\_\_\_\_  
Revisó: \_\_\_\_\_ El jefe del Depto.

HOJA 1 DE 1 MEXICO D.F. ABRIL 1971 298.8.4-C-75-61508

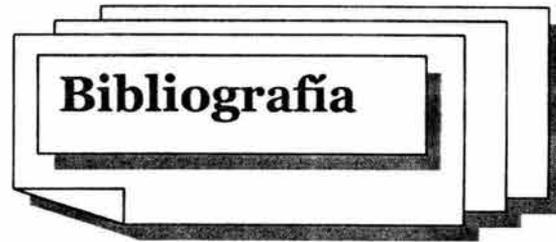
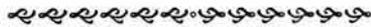
# Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

---



Los libros son las alfombras mágicas de la imaginación

*Jorge Luis Borges*



- 1 Bendat S. J., (1993), Engineering applications of correlation and spectral analysis, John Wiley & Sons, N.Y., USA.
- 2 Bendat S. J., Bendat G. A., (2000), Random data : Analysis and measurement procedures, 3th. Ed. John Wiley & Sons, N.Y., USA.
- 3 Dailly W. J., Harleman R. F. D., (1981), Dinámica de los fluidos con Aplicaciones en Ingeniería, Trillas, México.
- 4 F.Dietel, J. Dietel, (2000), How to Program in C++, Prentice Hall, USA
- 6 Ferziger H. J., Peric M., (2002), Computational methods for Fluid Dynamics, Springer, Berlin, Germany.
- 8 Hirsch Ch., (1988), Numerical computation of internal and external flows John Wiley & Sons, Chichester Great Britain.
- 9 Knauss J., (1987), Swirling flow problems at intakes, A. A. Balkema, Rotterdam Hol.
- 10 Landweber L., Laursen E. M., Mc Nown J.S., Rouse H., Siao T. T., Toch A., Yih S., (1960), Advanced Mechanic of Fluids, John Wiley & Sons, USA.
- 11 Levi L. E., (1989), El agua según la ciencia, CONACyT, Castell, México, 677 p.
- 12 Moritsugu S., (2001), UNIX, DTR Business System, Inc., Prentice Hall, USA
- 13 Morrison N., (1994), Introduction to Fourier analysis, John Wiley & Sons, USA.
- 14 Naudascher E., (2001) Hidráulica de canales , Limusa México
- 15 Peralta F. R., (1993), Fluidos: apellido de líquidos y gases. La ciencia desde México. SEP, FCE, CONACyT, México.
- 16 Pozrikidis C., (2001), Fluids Dynamics. Theory, Computation, and Numerical Simulation, Kluwer Academic Publishers, USA.
- 17 Ramírez W. R., (1985), The fft : Fundamentals and concepts, Englewood Cliffs, Printice-Hall N.J. USA.
- 18 Sánchez B. J. L., (1972), Mecánica del medio continuo, textos universitarios, UNAM, México.

## **Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor**

---

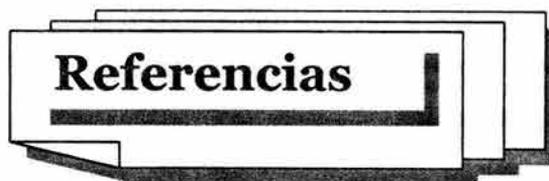
- 19 Sánchez B. J. L., Carmona P. R., (1992), Fundamentos de mecánica de fluidos para ingenieros hidráulicos, Instituto de Ingeniería, UNAM, México.
- 20 Santamaría C., Fratta D. (1998), Introduction to discrete signals and inverse problems in civil engineering, Georgia Institute of Technology, ASCE Press, Reston, Vi, USA.
- 21 Solar G. E., Speziale L., (1989), Apuntes de Álgebra Lineal, Departamento de Matemáticas Básicas, Facultad de Ingeniería, UNAM, México.
- 22 Sotelo, G. (1974), Hidráulica General Vol. I. Fundamentos, Limusa, México.
- 23 United States Department of the Interior, (1985), Design of small dams, Bureau of Reclamation, Washington U.S.A.
- 24 Virginia Suárez Bueno, (1998), Análisis de Fourier (apuntes), IPN, México.
- 25 Wendt J. (1996), Computational Fluid Dynamics, Springer Verlag, Germany

# Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

---

*Un libro, como un viaje, comienza con inquietud y se termina con melancolía.*

*José Vasconcelos*



- 1 Amphlett M. B., (1966), Air-entraining vortices at a horizontal intake, Report No. OD/7, Hydraulic Research Station, Wallingford, Oxfordshire, England.
- 2 Anwar H. O., Weller J. A. (1968), Prevention of vortices at intakes, Water Power, no. 10.
- 3 Anwar H. O., Weller J. A. (1978), Similarity of free vortex at horizontal intake, International Association of Hydraulic Research, J. of Hydraulics Research, vol. 16, No. 2, pp. 95-105
- 4 Anwar H. O., Amphlett M. B., (1980), Vortices at vertically inverted intake, IAHR no. 2.
- 5 Baker D. W. and Sayre C. L. (1974), Decay of swirling turbulent flow of incompressible fluids in long pipes, Flow- its measurement and control in science and industry, Instrument Society of America, N.Y., Vol. 2, pp 301-312.
- 6 Bayazit M., Avci I., (1990), Model test of the Urfa tunnel system in Turkey, Water power & Dam Construction, pp. 39-44.
- 7 Bizaz E. Taubmann K.C., Fischer P. (1976), Improvement in transport of floating debris, Water Power & Dam Construction, pp. 41-45, November.
- 8 Bracewell N. R., (1999), The Fourier Transform & Its Applications, McGraw-Hill, 3rd ed. 640 pp.
- 9 E. Brigham, (1988), Fast Fourier Transform and Its Applications, Prentice Hall, 1st ed, 448 pp.
- 10 Brochard D. N. Beauchamp C. H. (1983), Analytic predictions of circulation and vortices at intakes, Report EM-2891, Electric Power Research Institute, Palo Alto, Ca., USA.
- 11 Bui, H.P. (1994) Inverse problems in the mechanics of an introduction, Boca Raton, FL, CRS Press.
- 12 Chang E., (1979), Experimental data on the hydraulic design of intakes and rectangular pump sumps, BHRA Report RR1518.
- 13 Chang E., (1979a), Scaling laws for air-entraining vortices, BHRA Report RR1519.
- 14 Chang T. K. S., Larock E.B., Herrmann R. L., (1973), Free-surface ideal fluid flows by finite elements, J Hydraulic Eng, ASCE, vol 99, HY6, pp 959-974.
- 15 Cooley, J.W. and Tukey, J.W. (1965). An algorithm for the machine computation., Math. Comput. Vol 19, pp. 297-301
- 16 Cominellis E. (1973), Ludington Pumped Storage Project, J. of the Power Division, Proceedings, ASCE, Vol. 99, No. PO1, pp. 69-80.
- 17 Constantinescu G. S., Patel V. C., (1998), Numerical model for simulation of pump-intake flow and vortices, J. Hydraulic Eng, ASCE, Vol. 124, No. 2, pp 123-132.
- 18 Daggett L. L., Keulegan H. G., Hon M., (1974), Similitude in free-surface vortex formations, J Hydraulic Eng, ASCE, vol 100, HY11, pp 1565-1581.

## **Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor**

---

- 19 Denny D. F. (1956), An experimental study of air-entraining vortices at pump sumps, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, London, England.
- 20 Denny D. F., Young G. H. (1957), The prevention of vortices and swirl at intakes, IAHR Congress, Lisbon, paper C1.
- 21 Dexter R. B., Zeigler E. R., (1978), Penstock vortex and related turbine operation of fluid machinery CSU Fort Collins, Vol. I, III.
- 22 Dillon G. S. (1979), Vortex formation at pipe intakes and its prediction, Report No. HY/R/4/79, Irrigation and Power Research Institute, Punjab, India.
- 23 Durgin W. W., Hecker G. E., (1978), The modelling of vortices at intake structures, Proc IAHR-ASME-ASCE Joint symposium on Design and operation of fluid machinery, CSU Fort Collins, Vol. I, III.
- 24 Echávez A. G., (1996), Introducción a los modelos hidráulicos y a la ingeniería experimental, UNAM, CONACYT, Asociación Mexicana de Hidráulica.
- 25 Florajancic, D., (1970), Influence on gas and air admission on the Behavior of Single and Multi-stage pumps, Sulzer research.
- 26 Franco V., Pérez C. P., Chávez M. E., Fernández G. S. (1995), Funcionamiento Hidráulico del vertedor del P.H. La Angostura, Chiapas., informe interno, II, UNAM, México, D.F.
- 27 Frías V. A., Moreno C. G., (1986), Ingeniería de Costas, Asociación Mexicana de Ingeniería Portuaria.
- 28 Gordon J. L. (1970), Vórtices at intakes, Water Power, Vol 22, No. 4, pp 137-138.
- 29 Granger R., (1966), Steady tridimensional vortex flow, J. Fluid Mech. 25(3), pp 557-576.
- 30 Gray R. M, Goodman W. J, 1995, Fourier Transforms: An Introduction for Engineers, Kluwer International Series in Engineering, 384 pp.
- 31 Guarga F. R. Sánchez H. A. Gracia S. J. Cafaggi F. A. (1985), Oscillatory characteristics of swirling, confined, turbulent and non cavitating-flows, Work group on the behaviour of hydraulic machinery under steady oscillatory conditions, IAHR, Mexico City, México.
- 32 Guarga R., Torres J. J., Solorio A., Rodal E. (1985a), Comparative study of La Angostura draft tube vortex oscillatory behaviour, Work group on the behaviour of hydraulic machinery under steady oscillatory conditions. IAHR, Mexico City, México.
- 33 Gulliver J. S., Rindels A. J. (1987), Weak vortices at vertical intakes J Hydraulic Eng, ASCE, vol 113, HY9, pp 1101-1116.
- 34 Hager W.H. (1985), Head-discharge relation for vortex shaft, J. Hydraulic Eng, ASCE, Vol. 111, No. 6, pp 1015-1020.
- 35 Hardwick David J. (1974), Flow-induced vibration of vertical-lift gate, J Hydraulic Eng., ASCE, HY5, pp 631-643.
- 36 Hebaus G. G. (1979). Discussion vortex formation at vertical pipe intakes, J Hydraulic Eng, ASCE, vol 105, HY10, pp 1330-1333.
- 37 Hecker G., David E. J. (1981), Model-prototype comparison of free surface vortices, J Hydraulic Eng., ASCE, HY10, pp 1243-1259.

## **Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor**

---

- 38 Hecker G. E. and Larson J. (1983), Turbine reaction to free surface vortices, Report EM-3017, Electric power Research Institute, Palo Alto Ca., USA.
- 39 Herstrom A.C. , Polivka L.A., Russell R.B. (1982), A fourth unit for the Mayfield hydro project, Water Power & Dam Construction, July.
- 40 Hewlett Packard (1990), HP 48SX Scientific Expandable Calculator”, handbook, U.S.A., pp. 224, 481.
- 41 Holtorff G., (1964), La surface libre et les conditions de similitude du vortex, La Houille Blanche.
- 42 Hinze, J. O., (1960), Turbulence, an introduction to its mechanism and theory, Mc Graw-Hill, USA.
- 43 Hydraulic Institute Standars for Centrifugal (1975), rotary and reciprocating pumps, 13<sup>th</sup> ed. Hydraulic Institute, Cleveland, Ohio, USA.
- 44 Instituto Geológico Minero y Meteorológico (1980), Boletines meteorológicos, México.
- 45 Isaacs T. L., (1977), Numerical Solution for Flow under Sluice Gates, J Hydraulic Eng, ASCE, vol 103, HY5, pp 473-481.
- 46 Jain A. K., Ranga Raju K. G., Garde R. J. (1978), Vortex formation in vertical pipe intakes, J Hydraulic Eng, ASCE, vol 104, HY10, pp 1429-1448.
- 47 Jain A. K., (1984), Tangential vortex inlet, , J Hydraulic Eng, ASCE, vol 110, HY12.
- 48 Jevdjevich V. Levin L. (1953), Entrainment of air in flowing water and technical problems related whith it, Proceedings, Minesota International Hydraulic Convention, International Association for Hydraulic Research.
- 49 Knauss J., (1972), Vortices and swirling flow at low head intakes in pumped storage schemes, Symposium on Hydro-electric pumped storage schemes, Athens, paper C2.
- 50 Levi E. (1981), Agitador de vórtice libre, Series del Instituto de Ingeniería UNAM, No. 443.
- 51 Levi E. L. (1990), Vortices in hydraulics, J. Hydraulic Eng, ASCE, 117, no.4, pp 398-413.
- 52 Lewellen W. S., (1962), A solution for three-dimensional vortex flows with strong circulation, J. Fluid Mech. 14(3), 420.
- 53 Linford A. (1965), The applications of models to hydraulic engineering, part 2: air entraining vortices, Water and Water Engineering, pp. 105-110.
- 54 Marengo M. H., Salinas U. O., (2003), Eventos extremos de 1999 en el sureste mexicano. Actualización del análisis hidrológico del complejo hidroeléctrico Grijalva, en Chiapas, México., Ingeniería Hidráulica en México, Vol. XVIII, núm. 4, pp. 87-118.
- 55 Masliyah H. J., Nandakumar K., Hemphill F., Fung L., (1985), Body-Fitted Coordinates for Flow under Sluice Gates, J Hydraulic Eng, ASCE, vol 111, No. 6, pp 922-933.
- 56 Mathcad 2001 Professional (2001), User’s Guide with reference manual. Mathsoft Inc. Cambridge MA. USA.
- 57 Mathieu J., Scott J., (2000), An Introduction to turbulent flow, Cambridge University Press
- 58 Maza A. J., Sánchez B., J. L., (1966), Consideraciones sobre el cálculo del libre bordo en las presas, Revista Ingeniería Hidráulica en M

## **Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor**

---

- 59 Montes J.S., (1997), Irrotational Flow and Real Fluid Effects under Planar Sluice Gates, J Hydraulic Eng, ASCE, vol 123, No. 3, pp 219-232.
- 60 Moritsugu D, (2001), UNIX, Prentice Hal, USA
- 61 Murakami, M., et al, (1969) "Flow of entrained air in centrifugal pumps", Proceedings of the 13th Congress, IAHR, Japan, Aug. 31-sept, 1969, Vol. 2, pp. 71-80.
- 62 Nakamura S., (1986), Computational Methods in Engineering and science., Krieger.
- 63 Naudascher, E. (1961), Vibration of gates during overflow and underflow, J. Hydraulic Eng, ASCE, Vol. 87, HY5, pp 63-86.
- 64 Nishi M., Kubota T. Matsunaga S. Senoo Y., (1980), Study of Swirl flow an surge in an elbow type draft tube, IAHR, Tokio Symposium, Proceedings, Vol 1.
- 65 Odgaard A. J. (1986), Free surface air core vortex, J Hydraulic Eng, ASCE, vol 112, HY7, pp 610-620
- 66 Padmanabhan M., (1984), Air ingestion due to free-surface vortices, J. Hydraulic Eng, ASCE, Vol. 110, HY12, pp 1693-1699.
- 67 Pennino B. J. and Hecker G. E. (1979), A synthesis of model data for pumped storage intakes, Webb D. and Papadakis C., eds. Pump turbine schemes, Proceedings of the joint ASME/CSME Applied mechanics, fluids engineering and bioengineering conference.
- 68 Prosser M. J. (1977), The hydraulic design of pump sumps and intakes, report No. ISBN 0-86017-027-6, British Hydromechanics Research Association .
- 69 Quick M. C. (1972), Efficiency of air-entraining vortex formation at water intakes, J. Hydraulic Eng, ASCE, Vol. 96, HY7 no.12, pp 1403-1416.
- 70 Reddy Y.R. and Pickford J. B. (1972), Vortices at intakes in conventional sumps, Water power, Vol. 24, No. 3, pp. 108-109.
- 71 Reddy Y.R. and Pickford J. B. (1974), Vortex supression in stilling pond overflow, J. Hydraulic Eng, ASCE, Vol. 100, HY11,
- 72 Sánchez B. J. L., Gracia S. J. Franco V. (2000), Estudio de diferentes aspectos sobre el funcionamiento de la obra de excedencias del P.H. La Angostura, Chiapas, y actualización de la hidrología para el sistema de presas del río Grijalva (2000), informe interno, II, UNAM, México, D.F.
- 73 Sánchez B. J. L., Gracia S. J. Fuentes M. O., Fuentes M. G. (2000), Revisión del funcionamiento y operación de las presas Angostura, Chicoasén, Malpaso y Peñitas sobre el río Grijalva., informe interno, II, UNAM, México, D.F.
- 74 Sánchez B. J. L., Gracia S. J., Fuentes M. O. A., (2003), Experimental study of the presence and elimination of vortices during the discharge of the spillway gates of a dam, Dam Engineering, Vol. XIV, Issue 2, pp 89-104, Willmington Publishing., Kent U.K.
- 75 Saville T., (1954), The effect of fetch width on wave generation, Technical Report 70, Beach Erosion Board, Corps of Engineers, US. Department of the army.
- 76 Schmidgall T. (1972), Spillway gate vibrations on Arkansas river dams, J. Hydraulic Eng, ASCE, Vol. 98, HY1, pp 219-238.

## **Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor**

---

- 77 Simmons W.P. (1965), Experiences with flow-induced vibrations, J. Hydraulic Eng, ASCE, vol 91, HY4, pp 185-204.
- 78 Slissky S.M., Kuznetsova E.V. (1979), Multi Storeyed vortex Shaft Outlets, International Commission on Large Dams, XIII Congress, New Delhi, India.
- 79 Spectrum Analyzer HP 3582A, (1981), Operating Manual, Hewlett Packard Inc., CA, USA.
- 78 Sweeney C. E., Elder R. A. and Duncan H. (1982), Pump sump design experience: summary, J. Hydraulic Eng, ASCE, Vol. 108(3), pp 361-378.
- 81 Subhash C., Jain M.,(1984), Tangential vortex-inlet, J. Hydraulic Eng, ASCE,110, no.12, pp 1693-1699.
- 82 Thompson J. F., (1982), Numerical Grid Generation, North-Holland.
- 83 Vermeyen T. B. (1999), Glen Canyon dam multi-level intake structure hydraulic model study, U.S. Department of the interior, Bureau of Reclamation, Technical Service Center , Water Resources Services, Water Resources Research Laboratory, Report R-99-02, Denver, Co. USA.
- 84 Weller, J. A., (1975), Discussion of "Similitude conditions in free surface vortex formation" by Degget L. L., Keulegan G. H., J. Hydraulic Eng, ASCE, vol 101, HY11, Proc. Paper 1435, pp 1449-1451.
- 85 Yildirim N., Jain S. C. , (1981), Surface tension effect on profile of a free vortex, J. Hydraulic Eng, ASCE, Vol. 107, No. NY1, pp 132-136.
- 86 Yildirim N., Kocabaş F., (1995), Critical Sumergence for aproximation channels, J. Hydraulic Eng, ASCE,.
- 87 Yildirim N., Kocabaş F., (1998), Critical Sumergence for Intakes in Still-Water reservoir, J. Hydraulic Eng, ASCE, Vol. 124, no.1, pp 103-104.
- 88 Zajdlik M., (1977), New checking mode of model parameters for vortex formation in pump tanks, International Association of Hydraulics Research, 17 th Congress, Baden-Baden, West Germany, Vol. 5, pp. 379-386.

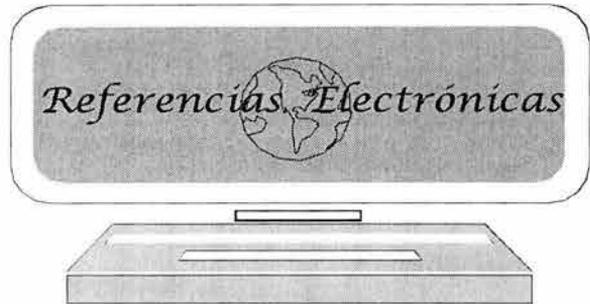
# Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor

---



*Hay un libro abierto siempre para todos los ojos: la naturaleza.*

*Jacobo Rousseau*



- 89 ARL, Alden Research Laboratory (2000), <http://www.aldenlab.com/index.htm>
- 90 Astrojan Astronomical Picture Collection, (2004).  
<http://bioch.szote.u-szeged.hu/astrojan/>
- 91 Borghei S. M., (2000), Partial Reduction of Vortex in the vertical Intake Pipe, 4<sup>th</sup> International Conference on Hydro-Science and Engineering, Korea Water Resources Association, Seul Korea.  
<http://kfki.baw.de/conferences/ICHE/2000-Seoul/html/auth.html>
- 92 Bourke P. (1996), **Autocorrelation – 2D Pattern identification**. Centre for astrophysics and supercomputing. <http://astronomy.swin.edu.au/~pbourke/analysis/correlate/>
- 93 Higgs A. J., (1997), Folsom Dam Spillway Vortices Computational Fluid Dynamic Model Study, Water Resources Research Laboratory, Denver Technical Center, Bureau of Reclamation United States Department of the Interior, Denver, Co.  
<http://www.usbr.gov/mp/mpco/showcase/folsom.html>
- 94 Información de prensa: Prioritario asegurar la preservación de vida y bienes en Tabasco., fecha: 14 de octubre de 1999. Num. 56.  
<http://presidencia.gob.mx/llovias/otras/conagua56.htm>
- 95 Lewis J. P. (1995), **Fast Normalized Cross-Correlation**, Industrial Light & Magic.  
<http://www.idiom.com/~zilla/Work/nvisionInterface/nip.pdf>
- 96 Linux Online, <http://www.linux.org>
- 97 MathCad. Mathsoft Engineering & Education Inc.  
<http://www.mathsoft.com/>
- 98 Mathematica. Wolfram Research Inc.  
<http://www.wolfram.com/>
- 99 Rhoden G., Rhoden K. (2003), Northern Texas Panhandle tornadoes of May 15th, 2003, Weatherpix, a source about tornadoes education. <http://www.weatherpix.com/Stratford.htm>
- 100 Secretaría de Agricultura, Ganadería y Desarrollo Rural, SAGARPA (2000)  
[www.sagarpa.gob.mx/Dgg/FTP/chisl.pdf](http://www.sagarpa.gob.mx/Dgg/FTP/chisl.pdf).
- 101 U.S. Department of the Interior. Bureau of Reclamation. <http://www.usbr.gov/>

## **Estudio sobre la presencia y eliminación de vórtices durante la descarga en las compuertas de un vertedor**

---

- 102 Vermeyen, Tracy B. (1999). **Glen Canyon Dam Multi-Level Intake Structure Hydraulic Model Study**. <http://www.nau.edu/~envsci/sisk/courses/env440/SCBS/amweb.htm>  
<http://www.usbr.gov/research/activity/1998-2000/er/1999/er9922.pdf>
- 103 VAW, Laboratory of Hydraulics, Hidrology and Glaciology (2003). **Flow induced vibrations of the tainter gate at the Langkampfen power plant, Swiss Federal Institute of technology Zurich**. [http://www.vaw.ethz.ch/wb/pro/modpro\\_index.htm](http://www.vaw.ethz.ch/wb/pro/modpro_index.htm)