



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO**

FACULTAD DE QUIMICA

**INTERFASES EN SISTEMAS DEPENDIENTES
DE LA FRECUENCIA**

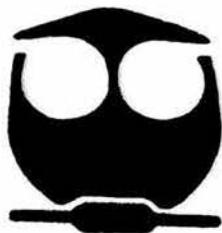
T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

I N G E N I E R O Q U I M I C O

P R E S E N T A :

RODRIGO ANDRES LEDESMA AGUILAR



MEXICO, D.F.



**EXAMENES PROFESIONALES
FACULTAD DE QUIMICA**

2004



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**ESTA TESIS NO SALE
DE LA BIBLIOTECA**

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES Y ENSEÑANZA

Integrantes del Jurado

Profesores

Presidente Miguel Antonio Costas Basín
Vocal Luis Ángel López Latorre
Secretario Eugenia Corvera Poiré
1er. Suplente Luis Emilio Orgaz Baqué
2do. Suplente Ángel Piñeiro Guillén

Esta tesis fué desarrollada en el Departamento de Física y Química Teórica,
Cubículo B-101, Facultad de Química, UNAM.

Asesor

Eugenia Corvera Poiré
Dra. Eugenia Corvera Poiré

Sustentante



Rodrigo Andrés Ledesma Aguilar

Interfases en Sistemas Dependientes de la Frecuencia.

Rodrigo Andrés Ledesma Aguilar
Departamento de Física y Química Teórica
Facultad de Química
Universidad Nacional Autónoma de México

Este trabajo fue desarrollado bajo la dirección de la
Dra. Eugenia Corvera Poiré
Departamento de Física y Química Teórica
Facultad de Química
Universidad Nacional Autónoma de México

Tesis presentada para obtener el grado de
INGENIERO QUÍMICO

Ciudad Universitaria
México, 2004

A mi mamá y a mi hermana.

A Nessim.

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer, en primer lugar, a la Dra. Eugenia Corvera Poiré, supervisora de esta tesis con quien he trabajado a lo largo de casi toda la licenciatura. Gracias por haber invertido tanto esfuerzo y tiempo en mi formación, por fomentar mi superación académica a través de nuestro seminario de grupo y de los valiosísimos cursos de *pattern formation* y variable compleja, pero sobretodo, por despertar mi interés por la ciencia al darme este excelente proyecto que ha determinado en gran medida mi deseo por hacer el doctorado. Quiero agradecerle también por tener tanta confianza en mi desempeño al enviarme de estancia a Barcelona, por darme oportunidades como la de presentar mi proyecto en un congreso nacional y en el seminario del departamento y por los congresos a los que he asistido. Gracias además por los consejos y el apoyo al momento de solicitar mi intercambio a UC Davis y sobretodo por todas las cosas que hizo por mí al momento de preparar mis solicitudes a los programas de doctorado. Eugenia, gracias por todos tus consejos, por tu ayuda y disposición de trabajo, por el gran interés que persiste en mí como alumno. Gracias también por los buenos ratos, por las discusiones amenas en tu casa, por las reuniones, comidas y cenas que fueron muy agradables.

Quiero agradecer también a la Dra. Aurora Hernández Machado, por su valiosa colaboración en la consolidación de este proyecto. Por su apoyo, tanto académico como monetario, durante mi estancia en Barcelona, que fue una experiencia de mucho valor formativo. Por sus discusiones y sus inteligentes consejos y por su excelente disposición de trabajo. Quiero agradecerle también por su apoyo en mis solicitudes a los programas de doctorado, por su tremenda disposición al momento de extenderme tantas cartas de remendación. Aurora, estoy muy agradecido por tu buena voluntad y por la forma excepcional en que procuraste mi estancia en Barcelona, por las valiosas discusiones y por la forma extraordinaria en que me has ayudado a lo largo de mi proceso de solicitud al doctorado.

Agradezco a la Dra. Ana Lacasta, por su gran apoyo en mi formación y sus invaluable comentarios durante mi estancia en Barcelona. Por su paciencia y buena disposición en enseñarme los detalles del código numérico, sin lo que me hubiera sido muy difícil desarrollar mi propio código. Además, quiero agradecerle las charlas amenas, los cafés y la forma eficiente y fluida en que trabajamos en Barcelona.

Agradezco al Dr. Jesús Antonio del Río Portilla, por las valiosas discusiones que llevaron en buena medida a la concepción de este trabajo.

Agradezco al Dr. Vincent Fleury, por sus valiosas observaciones acerca de nuestro método numérico.

Agradezco a los miembros del jurado, por sus observaciones y comentarios que ayudaron a mejorar este trabajo.

Agradezco a CONACyT, proyecto 38538, por la beca de tesis de licenciatura.

Agradezco a CONACyT, proyecto 33920-E, por haberme brindado apoyo económico para realizar una estancia de investigación en Barcelona, en el verano de 2002 y por financiar mi asistencia al *Winter Meeting on Statistical Physics*, celebrado en Taxco, Guerrero en 2003.

Agradezco al Subprograma 127 de la Facultad de Química, por su apoyo financiero en este proyecto.

Agradezco al programa de Movilidad de Estudiantes, de la Dirección General de Estudios de Posgrado y al *Education Abroad Program* de la Universidad de California, por hacer posible mi intercambio a UC Davis en 2002.

Agradezco a la Dirección General de Servicios de Cómputo Académico, por permitirme participar en el Plan de Becarios de Cómputo de Alto Rendimiento.

Agradezco a Martin Lacasse, por el formato que he usado para escribir esta tesis.

Gracias

A mi mamá, Sara, y a mi hermana, Julie, que significan tantas cosas para mí. A mi mamá, por ser una parte tan fundamental en mi vida. Por el gran amor que me ha dado siempre, por comprenderme y por apoyarme. Por ser una mujer tan atípica, tan independiente. Por transmitirme su fortaleza, su entereza y su rectitud. Por enseñarme el valor de la tolerancia, de la generosidad y de la gratitud. A Julie, por ser mi compañera de toda la vida, por su comprensión y su lealtad. Por todo su cariño, su ternura y su gran amistad.

A Nessim, por el gran amor que le tengo y por procurarme tanto. Por toda su ternura. Por hacerme comprender tantas cosas. Por ser mi cómplice incondicional. Por escucharme, por entenderme y por consolarme. Por la forma en que me hace recobrar la cordura cuando lo necesito. Por toda la admiración que le tengo y por todas las cosas buenas que lo hacen extraordinario. Por su gusto por la vida y por la música. Pero sobretodo, por compartir conmigo su vida; por tantas experiencias buenas que hemos vivido juntos y por todas las que nos quedan aún por vivir.

A mi familia. A mi abuelita Vicky, por su cariño y por estar tan al pendiente de mi vida. A mis tías, Isa, Lourdes y Lydia, por fungir, de una forma u otra, como segundas madres. A mis tíos, Miguel y Agustín por ser tan cuates. A mis otros tíos y tías, Rosy, Maca, Fer, Víctor y Charly, por estar siempre presentes. A mis muchos primas y primos, que han sido mis hermanos y que son tan importantes en mi vida: Pedro (Paola incluida, por supuesto), Malolo y Carluchos, por tantas cosas buenas que hemos vivido y por procurarme toda la vida, Lau, Cris, Julie y Susi, por el gran cariño que les tengo. A Juan, por todas sus convicciones, que son muchas y muy admirables, y a los peques, María, Tín, Miguel y Natalia.

A Rosana, por esta gran amistad que para mí es tan preciada. Por toda la complicidad, la solidaridad y la lealtad que hemos compartido en estos años. Por ser tan genuina y tan abierta. Por todas las convicciones que compartimos. Por nuestras experiencias; por los viajes, las borracheras y ¿por nuestros vanos intentos por consagrarnos como personas *integrales* y *sin prejuicios*?. Por ser la salvaguarda de todos mis secretos. Por su gusto por la cultura mexicana. Y sobretodo, por ser tan sorprendente y a la vez tan común.

Al Ale, por ser tan buen amigo siempre, por buscar todo lo que le gusta sin pretensiones. Por sus pláticas educativas, sus experiencias macabras y su manera tan atípica de concebir el mundo.

A Valn, por ser mi gran amiga. Por perseguir a toda costa la vida que ha querido tener. Por sus consejos y sus apapachos. Por hacerme reír siempre. Por contarme tantas cosas y hacerme entender tantas otras. Por mantener nuestro cariño aún en la lejanía, y por ser, en muchos sentidos, una mujer extraordinaria.

A Rasqui, por procurarme todos estos años. Por ser tan buen amigo siempre. Por contarme tantas cosas. Por sorprenderme siempre con sus comentarios y con sus acciones. Por ser tan diverso en todas sus cosas y tan claro en todas ellas.

A Jesn, por el cariño que le tengo. Por estar tan viva y por ser tan especial en todo lo que hace. Por hacer todo tan a lo grande. Por hacérmela pasar tan bien y por hacerme quererla tanto.

A Moca, por ser una mujer tan admirable en su eterna lucha en contra de la vida y de sí misma. Por ser precursora de muchas de las cosas que ahora pienso y siento. Por quererme tan a su manera y por aconsejarme siempre.

A Humberto y Arturo, mis grandes amigos de la UNAM. Por nuestras experiencias en Davis, por nuestras pláticas y por estar siempre cerca para aconsejarme y apoyarme.

A José Luis, por haberme sorprendido tanto con sus pláticas, por tenernos un cariño tan particular, por los buenos ratos y por la posibilidad de convivir de nuevo en el futuro.

A Marce, por ganarse a pulso mi cariño en tan poco tiempo y por ser una persona tan noble, tan generosa y tan admirable.

A Mariano, por ser tan distinto a todo el mundo. Por hacer mi vida más divertida y complicada. A Lau, por sus vivencias y por los buenos ratos.

A Erika Martin, por todos sus consejos y por estar dispuesta siempre a ayudarme en cualquier cosa.

A Alejandro Baeza, por todas sus pláticas, sus consejos y por hacerme reír como nadie.

A Carlos Amador, por su gran ayuda cuando fui a Davis, por las cartas de recomendación y sus buenos consejos.

A todos en Teórica: Rubén, Tomás, Jimena, Gabriel, José Juan, Marco, Emilio, Fer y Chucho, por sacarme de apuros, por aconsejarme y ayudarme.

A mis maestros de la UNAM, que han tenido mucho que ver con mis aspiraciones presentes: Vicente Talanquer, Adela Castillejos, Martín Rivera y Berenice Cepeda.

A Liz y José Luis de DGSCA, por su tolerancia, que ha sido mucha, y su ayuda. Al Bit y Erick, por sacarnos tantas veces de apuros con las máquinas.

DECLARACIÓN DE ORIGINALIDAD

Los resultados originales de este trabajo se enuncian a continuación:

- Adaptación del modelo mesoscópico de la referencia [1] para incluir gradientes de presión dinámicos.
- Estudio del comportamiento del dedo de Saffman-Taylor sujeto a un gradiente de presión oscilatorio y los consecuentes resultados presentados en los capítulos (4) y (5). El resultado más importante de la tesis es el hallazgo de una inestabilidad lateral en los dedos normales de Saffman-Taylor.
- Explicación de la aparente ausencia de la inestabilidad reportada en esta tesis, en la mayoría de los experimentos para dedos normales de Saffman-Taylor.
- Propuestas concretas para la observación de la inestabilidad en eventuales experimentos.

CONTENIDO

AGRADECIMIENTOS	v
DECLARACIÓN DE ORIGINALIDAD	IX
1. INTRODUCCIÓN	1
2. ANTECEDENTES	6
2.1. Dedos Viscosos	6
2.2. Ecuaciones de la Formulación Macroscópica	8
2.3. Análisis de Estabilidad Lineal	11
2.4. Problema de Fronteras Libres	21
2.5. Modelos Mesoscópicos. Una Alternativa al Problema de Fronteras Libres	24
3. MODELO MESOSCÓPICO	29
4. INESTABILIDAD LATERAL EN EL DEDO DE SAFFMAN-TAYLOR	34
4.1. Condición Dinámica de Frontera	35
4.2. Dedos Oscilatorios de Saffman Taylor	35
4.2.1. Selección de Modos en la Onda Lateral	37
5. RESULTADOS SECUNDARIOS	49
5.1. Efecto de la frecuencia incidente en la amplitud de la inestabilidad lateral.	49
5.2. Efecto de la velocidad de la punta del dedo en la amplitud de la inestabilidad lateral.	50
5.3. Efecto de la inestabilidad lateral en el ancho del dedo	52
6. CONCLUSIONES	58
A. ECUACIÓN DE MOVIMIENTO DEL MODELO B	61
B. DESARROLLO ASINTÓTICO DEL MODELO B	66
B.1. Desarrollo Asintótico del Modelo B	66
B.1.1. Ecuaciones de la Región Externa	69
B.1.2. Ecuaciones de la Región Interna	72
B.1.3. Solución para μ_0 y \mathcal{M}_0 , perfiles de interfase plana	74
B.1.4. Ecuaciones Macroscópicas	76
C. ALGORITMO DE INTEGRACIÓN NUMÉRICA	82
D. PRE-PRINT	107
REFERENCIAS	114

FIGURAS

2.1. Celda de Hele-Shaw rectangular.	6
2.2. Etapas de la formación de un dedo viscoso.	7
2.3. Perfil de velocidad de Poiseuille.	8
2.4. Perturbación inicial para un Análisis de Estabilidad Lineal.	13
2.5. Esquema de la posición de la interfase plana para un Análisis de Estabilidad Lineal.	15
2.6. Relación de dispersión para el problema de Saffman-Taylor en coordenadas rectangulares.	20
2.7. Inestabilidad de Mullins-Sekerka.	21
2.8. Forma paramétrica del dedo de Saffman-Taylor.	22
2.9. Comparación de la forma del dedo con las ecuaciones paramétricas.	23
2.10. Competencia de dedos.	27
2.11. Dedo de Saffman-Taylor.	27
2.12. Dependencia λ vs U	28
3.1. Perfil de Equilibrio del parámetro de orden.	30
3.2. Condición de Dinámica de Frontera.	33
4.1. Gradiente de presión oscilatorio.	35
4.2. Dedo oscilatorio de Saffman-Taylor.	36
4.3. Zonas de medición para las distancias L_1 y L_2	36
4.4. Señal incidente y señales de respuesta a las distancias L_1 y L_2	37
4.5. Frecuencias ω_{L_1} y ω_{L_2} vs la frecuencia incidente ω_0	38
4.6. Ampliación de la zona de transición de la gráfica ω_{L_2} vs ω_0	39
4.7. Señal incidente y señales de respuesta en el régimen lineal de la gráfica ω_{L_2} vs ω_0	40
4.8. Secuencia temporal.	41
4.9. Señal incidente y señales de respuesta en el régimen de selección de la gráfica ω_{L_2} vs ω_0	42
4.10. Dedos oscilatorios en escala 1:1 para tres frecuencias incidentes.	44
4.11. Amplitud de la inestabilidad lateral vs la frecuencia incidente.	46
4.12. Perfiles oscilatorios vs la amplitud incidente.	47
4.13. Distancia de saturación de la inestabilidad vs la amplitud incidente.	47
5.1. Amplitud de la inestabilidad lateral vs la frecuencia incidente.	51
5.2. Amplitud de la inestabilidad lateral vs la velocidad de la punta del dedo.	52
5.3. Perfiles oscilatorios vs la velocidad en la punta del dedo.	53
5.4. Ancho del dedo vs la frecuencia incidente.	55
5.5. Ancho del dedo vs la amplitud incidente.	56

5.6. Curvas del ancho del dedo para cinco frecuencias incidentes vs la velocidad de la punta del dedo.	57
A.1. Perfil de equilibrio del parámetro de orden.	65
B.1. Sistema de coordenadas curvilíneas.	67

INTRODUCCIÓN

La ocurrencia de patrones espaciales es un fenómeno común a muchos sistemas. Por ejemplo, los copos de nieve y las estrellas de mar poseen formas extraordinariamente simétricas. Otros sistemas, como los árboles y los corales, tienen una estructura ramificada similar a la de algunos fractales. Aunque los casos que hemos mencionado no tienen relación aparente, en todos estos ejemplos la forma de la estructura que percibimos está dada por una interfase cuyo crecimiento determina la aparición de un patrón. El crecimiento de la interfase es consecuencia de los diversos procesos físicos, químicos y biológicos que ocurren en el sistema. Por tanto, el estudio de un patrón espacial tiene que ver con el estudio de estos procesos.

El estudio de la simetría y la periodicidad en la forma de los sistemas constituye una rama de la ciencia llamada *morfogénesis* o formación de patrones. Ésta ha tenido un enorme desarrollo desde hace por lo menos tres décadas[2]. Los esfuerzos por comprender los principios de estos fenómenos responden a dos propósitos generales: científicos y tecnológicos. Por ejemplo, el mismo mecanismo que provoca la formación de los copos de nieve es responsable de la formación de nanoestructuras dendríticas en aleaciones fundidas que solidifican en presencia de su líquido subenfriado [3], cuyo crecimiento es necesario entender a fin de alcanzar algún estándar de calidad específico. En ambos casos, el fenómeno ocurre por efecto de una inestabilidad que afecta al frente sólido mientras éste crece a expensas del líquido. Esto hace que el crecimiento de la interfase sólido-líquido se favorezca en algunas regiones más que en otras dando lugar a la formación de dendritas.

En este trabajo estudiaremos un patrón cuyo origen es muy parecido al de los patrones que se observan en los copos de nieve. Como en el ejemplo anterior, el patrón se forma por efecto de la inestabilidad de una interfase. Esta interfase separa a dos fluidos inmiscibles de viscosidades distintas que fluyen en un medio confinado gracias a la acción de un gradiente de presión. La inestabilidad ocurre solamente cuando el fluido de baja viscosidad desplaza al fluido de alta viscosidad. Esto da lugar a la formación de una burbuja del fluido menos viscoso que penetra al fluido más viscoso. Las estructuras que se forman se conocen como dedos viscosos. Para una geometría particular, llamada celda de Hele-Shaw rectangular, los dedos viscosos compiten y en el caso de que la viscosidad del fluido desplazante sea muy pequeña, la competencia termina con la formación de un estado estacionario llamado dedo de Saffman-Taylor.

La celda de Hele-Shaw rectangular consiste en un par de placas paralelas rectangulares separadas por un espacio muy pequeño. Las placas están cerradas en dos de sus extremos opuestos de modo que se crea un canal cuasi-bidimensional. La formación de un dedo de Saffman-Taylor en una celda de Hele-Shaw puede observarse al inyectar el fluido menos viscoso por uno de los extremos abiertos para desplazar al fluido más viscoso con el que previamente se ha llenado la celda. El dedo estacionario que se forma ocupa siempre una fracción superior a la mitad del ancho de la celda. A este tipo de dedos estacionarios se les conoce como dedos *normales* de Saffman-Taylor. Existe un segundo tipo de dedos estacionarios. A éstos se les ha llamado dedos *anómalos* y se caracterizan por ocupar siempre menos de la mitad del ancho del canal. La formación de este tipo de dedos se consigue al introducir algún tipo de anisotropía en la celda [4, 5].

Existe una gran variedad de problemas que involucran el flujo de fluidos en sistemas dependientes de alguna frecuencia. En particular, muchos de estos problemas involucran dos fluidos y en algunos casos un fluido de baja viscosidad desplaza a un fluido

de alta viscosidad en un medio confinado. Esto último ocurre en el desplazamiento de fluidos viscosos atrapados en medios porosos, en donde se han desarrollado tecnologías que consisten en la inyección de un fluido poco viscoso con cierta frecuencia para desplazar al fluido más viscoso [6]. Este tipo de procesos tiene aplicaciones potenciales en la recuperación secundaria de petróleo. Otro ejemplo lo constituye una técnica llamada *high frequency jet ventilation* utilizada para aliviar las dificultades de respiración que experimentan los pacientes del síndrome de deficiencia respiratoria aguda. Esta enfermedad satura los bronquiolos con un fluido viscoso reduciendo significativamente el flujo de oxígeno a las venas. La técnica consiste en bombear aire a alta frecuencia (típicamente al ritmo de 10 respiraciones por segundo), con lo que se logra aliviar al paciente en alguna medida.

Por su relativa simplicidad, el dedo de Saffman-Taylor constituye un arquetipo tanto en el área de formación de patrones como en el área de flujo de dos fluidos en un medio confinado. Por esta razón, los resultados obtenidos al estudiar este fenómeno pueden aplicarse, en principio, a ejemplos tan variados como los mencionados en el párrafo anterior.

La idea consiste entonces en estudiar el comportamiento del dedo de Saffman-Taylor en un régimen de flujo periódico. Al respecto, se han realizado estudios experimentales para dedos anómalos sujetos a un gradiente de presión oscilatorio [7, 8]. En tal caso, se ha reportado que el dedo responde generando una inestabilidad lateral que da lugar al crecimiento de estructuras secundarias en los lados del dedo. Dichas estructuras presentan una longitud de onda característica que está determinada por la frecuencia incidente. Sin embargo, esta inestabilidad lateral no ha sido reportada para dedos normales de Saffman-Taylor.

El problema de Saffman-Taylor se describe mediante las ecuaciones clásicas de la hidrodinámica y ha sido estudiado ampliamente. Sin embargo, dicho planteamiento

macroscópico introduce limitaciones muy serias en el estudio de la dinámica de formación del dedo y en especial en el estudio de la respuesta del dedo estacionario ante gradientes de presión dinámicos, debido a la presencia de una frontera cuya posición cambia con el tiempo (la interfase fluido-fluido). De forma alternativa, desde hace algunos años se han utilizado modelos mesoscópicos, también llamados modelos de campo (en inglés *phase field models*), que son consistentes con la formulación macroscópica. El uso de tales herramientas es muy conveniente ya que elimina la necesidad de rastrear la posición de la interfase.

Motivados por este hecho, en esta tesis nos centramos en estudiar la respuesta de un dedo normal de Saffman-Taylor ante una perturbación periódica en la caída de presión utilizando un modelo mesoscópico. Primero, en el capítulo 2 establecemos el contexto de la formulación macroscópica escribiendo las ecuaciones y condiciones de frontera que definen el problema. A continuación reproducimos el análisis de estabilidad lineal de estas ecuaciones con el fin de presentar con claridad el origen físico de la inestabilidad. En la sección 2.4 presentamos un breve panorama de las dificultades que surgen de la formulación macroscópica así como los distintos resultados que han sido obtenidos en este marco. La sección 2.5 está destinada a la presentación de los modelos mesoscópicos que se han propuesto recientemente y en particular a los resultados que se han obtenido para dedos de Saffman-Taylor estacionarios en el régimen de alto contraste viscoso.

En el capítulo 3 presentamos el modelo de campo que utilizamos para estudiar la respuesta del dedo estacionario ante una perturbación periódica en la caída de presión. Dicho modelo consiste en una ecuación de movimiento que reproduce las ecuaciones macroscópicas más una condición de frontera que introduce la dinámica del sistema. La derivación de la ecuación de movimiento se presenta en el apéndice A. Con el fin de establecer la legitimidad del modelo, presentamos un resumen del desarrollo asintótico de la ecuación de movimiento que lleva a la identificación de los paráme-

tros entre las formulaciones macroscópica y mesoscópica. El desarrollo asintótico se presenta con todo detalle en el apéndice B.

En el capítulo 4, presentamos los resultados más importantes de este trabajo. Éstos surgen de la integración numérica del modelo de campo. Nuestros resultados indican que el dedo estacionario responde a la perturbación generando una onda que se propaga a los lados del dedo. La onda tiene una etapa de crecimiento que termina cuando su amplitud se satura y su longitud de onda alcanza un valor constante. Dicha amplitud de saturación es pequeña en comparación con el ancho del dedo mientras que la longitud de onda es muy grande, del orden del ancho de la celda de Hele-Shaw. A continuación, damos paso a la discusión de estos resultados y proponemos un mecanismo que explica cómo el dedo estacionario de Saffman-Taylor actúa como un amplificador selectivo de frecuencias. Además, discutimos las consideraciones experimentales que se deben tener en cuenta para observar la inestabilidad en el laboratorio.

En el capítulo 5, presentamos resultados secundarios que revelan la dependencia de la inestabilidad lateral con la amplitud de la perturbación y la velocidad del dedo estacionario.

Finalmente, en el capítulo 6 exponemos las conclusiones de este trabajo.

2.1. Dedos Viscosos

El fenómeno de formación de dedos viscosos involucra el estudio del movimiento de la interfase que separa a un par de fluidos inmiscibles de viscosidades distintas que fluyen en una celda de Hele-Shaw. Una celda de Hele-Shaw es un aparato cuasi-bidimensional formado por un par de placas paralelas rectangulares de dimensiones $L \times W$. Dichas placas están separadas por un pequeño espacio de longitud b que es mucho menor a las otras dimensiones del sistema (ver figura 2.1), *i.e.*, $b \ll L, W$.

Si la celda de Hele-Shaw se llena con el fluido de mayor viscosidad (fluido 1) y éste es desplazado por el fluido de menor viscosidad (fluido 2) la interfase fluido-fluido se vuelve inestable ante pequeñas perturbaciones. Cuando esto ocurre, los distintos modos que componen a la perturbación compiten entre sí, ya que unos crecen más rápido que otros. Después de cierto tiempo, el sistema pasa por una etapa en donde

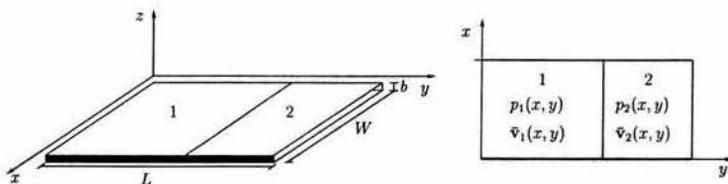
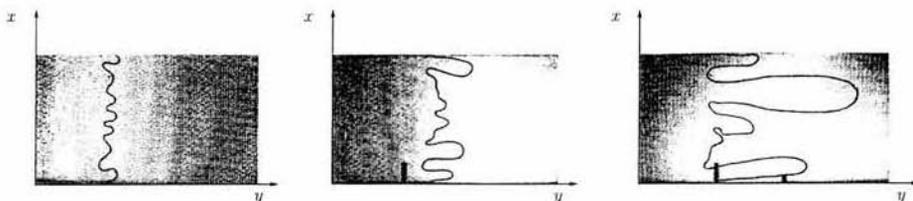
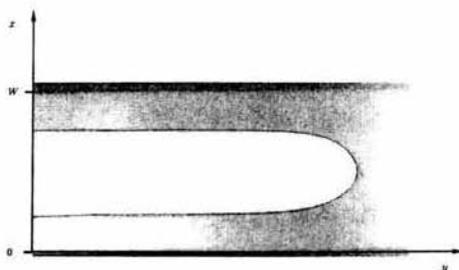


Figura 2.1: Esquema de una celda de Hele-Shaw. La representación de la derecha corresponde a la vista superior de la representación de la izquierda. Las paredes paralelas a la dirección y constituyen fronteras a través de las cuales no puede haber flujo y se indican con líneas más gruesas. En ambas representaciones se indica la interfase fluido 1-fluido 2 con una línea recta.



(a)



(b)

Figura 2.2: Etapas de la formación de un dedo viscoso. Tomado de la referencia [9].

se observan regiones del fluido 1 que penetran al fluido 2 y que también compiten entre sí. Estas estructuras se conocen como dedos viscosos. La competencia finaliza cuando se forma un solo dedo que eventualmente alcanza el estado estacionario y al que se le ha llamado dedo de Saffman-Taylor. En esta etapa la velocidad en la punta del dedo, U , y el ancho del dedo, λW , son constantes. λ es la fracción del canal ocupada por el dedo. En la figura 2.2 se muestran fotografías de la desestabilización de la interfase, la competencia de dedos y el estado estacionario.

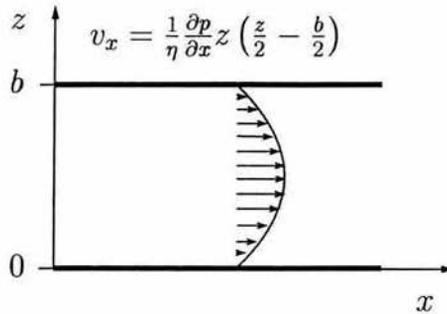


Figura 2.3: Perfil local de velocidades en la dirección z para un punto cualquiera $x = x_0$. El perfil obedece las siguientes condiciones, $v_x = 0$ si $z = 0$ y $z = b$, $\frac{dv_x}{dz} = 0$ si $z = \frac{b}{2}$. La velocidad promedio se obtiene como $\langle v_x \rangle = \frac{1}{b} \int_0^b v_x dz$.

2.2. Ecuaciones de la Formulación Macroscópica

La idea principal del problema de Saffman-Taylor es estudiar el movimiento de la interfase fluido-fluido en las distintas etapas que hemos mencionado. Desde el punto de vista macroscópico, dicha dinámica se puede estudiar por medio de las ecuaciones de Navier-Stokes (escritas para la geometría y condiciones de flujo de la celda), más un par de condiciones de frontera en la interfase fluido-fluido.

Dada la geometría bidimensional de la celda de Hele-Shaw, es frecuente promediar las ecuaciones de Navier-Stokes para cada uno de los fluidos en la dirección perpendicular al plano de la celda, z . Primero, como la celda descansa en el plano xy y la dimensión b es muy pequeña, la velocidad en la dirección z debe ser despreciable. De esta suposición se sigue que la presión, p , no es una función de z . Escogemos la dirección del flujo como la dirección del eje x . Esto lleva a que la presión dependa solamente de x . Si además suponemos que la velocidad es pequeña, podemos despreciar los términos de segundo orden en la velocidad frente a los términos lineales en la misma. Finalmente, como la dimensión b es pequeña, podemos despreciar las derivadas de la velocidad en la dirección x frente a las derivadas en la dirección z [10]. Esta suposición es razonable ya que en las placas se pide que la velocidad sea cero y en el centro del espacio de flujo se pide que ésta sea finita. Esto hace que la

variación de la velocidad en z sea mucho mayor que las variaciones de la misma en la dirección x . Así, las ecuaciones de Navier-Stokes se reducen a la siguiente ecuación diferencial:

$$\eta \frac{d^2 v_x}{dz^2} = \frac{dp}{dx},$$

donde η es la viscosidad, v_x es la velocidad del fluido en la dirección x y p es la presión.

Imponemos las siguientes condiciones de frontera para $v_x(z)$:

$$v_x(0) = v_x(b) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{dv_x}{dz}(b/2) = 0.$$

Obtenemos el siguiente perfil de Poiseuille,

$$v_x = \frac{1}{\eta} \frac{dp}{dx} \left(\frac{z^2}{2} - \frac{bz}{2} \right).$$

En la figura 2.3 se muestra una imagen de este perfil. Luego, la velocidad se promedia en la dirección z , *i.e.*,

$$\langle v_x \rangle = \frac{1}{b} \int_0^b v_x(z) dz = -\frac{b^2}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Este resultado debe ser el mismo independientemente de la dirección de flujo. Entonces para un flujo de dirección arbitraria en el plano xy obtenemos la siguiente expresión para la velocidad promedio¹,

$$\langle \bar{v} \rangle = -\frac{b^2}{12\eta} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \hat{j} \right),$$

o bien,

$$\langle \bar{v} \rangle = -K \nabla p, \tag{2.1}$$

donde $K \equiv \frac{b^2}{12\eta}$, se conoce como la permeabilidad del sistema. La ecuación (2.1) se conoce comúnmente como la Ley de Darcy. Ésta nos dice que la velocidad del fluido es proporcional a un gradiente de presión. Si además suponemos que los fluidos son incompresibles, la ecuación de continuidad es,

$$\nabla \cdot \bar{v} = 0.$$

¹ Este resultado puede obtenerse fácilmente si fijamos la dirección del flujo arbitrariamente de forma que la velocidad tenga componentes en x y y , con lo que las ecuaciones de Navier-Stokes se reducen a dos ecuaciones diferenciales independientes, una para v_x y otra para v_y .

Donde,

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}.$$

Ahora promediamos esta expresión en la dirección z ,

$$\frac{1}{b} \int_0^b \nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} dz = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{b} \int_0^b v_x dz \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{b} \int_0^b v_y dz \right),$$

o bien, en términos de la velocidad promedio,

$$\frac{1}{b} \int_0^b \nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} dz = \frac{\partial \langle v_x \rangle}{\partial x} + \frac{\partial \langle v_y \rangle}{\partial y}.$$

Finalmente, esta expresión se reduce a la siguiente forma,

$$\frac{1}{b} \int_0^b \nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} dz = \nabla \cdot \langle \bar{\mathbf{v}} \rangle.$$

De esta forma, la ecuación de continuidad se puede escribir en términos de la velocidad promedio, *i.e.*,

$$\nabla \cdot \langle \bar{\mathbf{v}} \rangle = 0. \quad (2.2)$$

En lo sucesivo omitiremos el uso de los paréntesis triangulares y denotaremos a la velocidad en el plano xy simplemente como $\bar{\mathbf{v}}$.

Las ecuaciones (2.1) y (2.2) pueden escribirse como la ecuación de Laplace para la presión, *i.e.*,

$$\nabla^2 p = 0. \quad (2.3)$$

Esta ecuación gobierna la dinámica de bulto de ambos fluidos.

Las condiciones en la interfase fluido-fluido se fijan usando un argumento de equilibrio termodinámico local y otro de continuidad. A decir, la primera condición de frontera, conocida como condición de Gibbs-Thompson o de Laplace es,

$$\Delta p = -\gamma \kappa, \quad (2.4)$$

donde $\Delta p = p_2 - p_1$ es la caída de presión en la interfase, γ es la tensión interfacial y κ es la curvatura local de la interfase. La segunda condición de frontera establece

la impenetrabilidad de los fluidos y garantiza la continuidad de la velocidad normal de la interfase, *i.e.*,

$$\bar{\mathbf{v}}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}|_{\text{int}} = \bar{\mathbf{v}}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}|_{\text{int}} = v_n,$$

donde v_n y $\hat{\mathbf{n}}$ son la velocidad normal de la interfase y el vector unitario normal a la interfase respectivamente. Como hemos visto, la formación de dedos estacionarios ocurre en el límite de alto contraste de viscosidades, esto es, cuando la viscosidad del fluido menos viscoso, η_1 , es pequeña frente a la viscosidad del fluido más viscoso, η_2 . El caso límite es llamado límite de contraste infinito y corresponde a cuando la viscosidad del fluido desplazante es despreciable frente a la viscosidad del fluido desplazado. En tal caso, la ecuación (2.1) para el fluido 1 se reduce a la forma

$$\nabla p_1 = 0.$$

Lo que quiere decir que la presión es la misma en toda la región ocupada por el fluido 1. En este límite, las ecuaciones del sistema están dadas por la ecuación (2.3) para el fluido 2, la condición de frontera

$$v_n = \bar{\mathbf{v}}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}|_{\text{int}}, \quad (2.5)$$

y la ecuación (2.4) con $p_1 = \text{constante}$.

2.3. *Análisis de Estabilidad Lineal*

La primera etapa de formación de un dedo viscoso es la desestabilización de la interfase. Esta desestabilización ocurre debido a una inestabilidad que Mullins y Sekerka [11] estudiaron por primera vez en el contexto de la solidificación. La inestabilidad de Mullins-Sekerka es fundamental en el estudio de formación de patrones fuera de equilibrio ya que revela el origen físico del problema. En el caso del problema de Saffman-Taylor, el estudio analítico de la desestabilización de la interfase es posible mediante un análisis de estabilidad lineal de las ecuaciones (2.3), (2.4) y (2.5) cuando se introduce una perturbación.

Evolución Temporal en un Análisis de Estabilidad Lineal

El concepto de estabilidad está relacionado con la respuesta de un sistema ante una perturbación. Por ejemplo, supongamos que la interfase que separa a los fluidos en nuestro problema se encuentra en una posición inicial

$$y = y_0,$$

y que se introduce una perturbación $f(x, t)$ que deforma la interfase,

$$y = y_0 + f(x, t).$$

En el nuevo estado perturbado, la interfase puede reaccionar de tres formas distintas. La primera es que la perturbación decaiga conforme pasa el tiempo y la posición de la interfase regrese al estado original, *i. e.*,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(x, t) = 0.$$

En tal caso se dice que la interfase es estable ante la perturbación $f(x, t)$. La segunda posibilidad es que la perturbación crezca con el tiempo haciendo que la interfase se deforme aún más y que no regrese al estado original. En tal caso se dice que la interfase es inestable ante la perturbación. La tercera posibilidad corresponde al caso en donde $f(x, t)$ permanece constante, es decir, al caso de estabilidad neutral de la interfase.

La perturbación $f(x, t)$ puede ser escrita como el producto de una parte espacial por una parte temporal, esto es,

$$f(x, t) = h(x)\delta(t).$$

En principio, la dependencia espacial se puede escribir desarrollando la función $h(x)$ en una serie de Fourier. Sin embargo, para un análisis de estabilidad lineal, que es válido a tiempos cortos, los modos que la componen se desacoplan de forma que es posible estudiar solamente la estabilidad de un modo a la vez. Por lo tanto, hacemos que la perturbación consista de un solo modo, *i. e.*,

$$h(x) = \cos(kx),$$

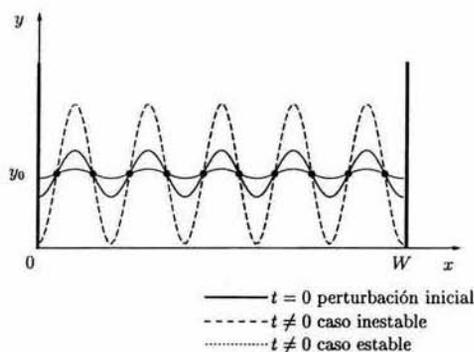


Figura 2.4: Diagrama de la evolución temporal de la perturbación en un análisis de estabilidad lineal. La línea sólida corresponde al estado inicial. A tiempos cortos, la perturbación puede aumentar o disminuir su amplitud. La línea punteada, de menor amplitud, corresponde a una perturbación que no desestabiliza a la interfase. La línea rayada de mayor amplitud, corresponde a una perturbación que desestabiliza a la interfase. Los puntos fijos $y = y_0$ (círculos negros), permanecen estáticos independientemente de si la amplitud crece o decrece.

donde $k = 2\pi/\Lambda$ es el modo de la perturbación dada por la longitud de onda Λ . Sustituimos en la ecuación para la posición de la interfase y obtenemos la siguiente expresión,

$$y = y_0 + \cos(kx)\delta(t).$$

Esto quiere decir que la parte temporal de la perturbación es una amplitud. En esta ecuación, los puntos $y = y_0$ son puntos que permanecen fijos independientemente del valor de la amplitud $\delta(t)$ (ver figura 2.4). Si derivamos esta ecuación con respecto al tiempo obtenemos la siguiente expresión para la velocidad en cada punto de la interfase,

$$\dot{y} = \cos(kx)\dot{\delta}.$$

Sabemos que la velocidad en el punto fijo es cero, *i.e.*, $\dot{y} = 0$ si $y = y_0$. Desarrollamos \dot{y} alrededor de $y = y_0$, *i.e.*,

$$\dot{y}(y) = \dot{y}(y_0) + \frac{d\dot{y}}{dy}(y_0)(y - y_0) + O((y - y_0)^2).$$

Como hemos visto, el primer término de esta expresión es cero. Además, sabemos que $y - y_0 = \cos(kx)\delta$. Sustituimos esta expresión y obtenemos

$$\dot{y}(y) = \frac{d\dot{y}}{dy}(y_0) \cos(kx)\delta + O((\cos(kx)\delta)^2),$$

donde la velocidad puede expresarse como $\dot{y} = \cos(kx)\dot{\delta}$. Como la amplitud de la perturbación es pequeña podemos despreciar los términos de segundo orden en la misma, *i.e.*,

$$\cos(kx)\dot{\delta} = \frac{d\dot{y}}{dy}(y_0) \cos(kx)\delta,$$

y llegar a la siguiente ecuación diferencial para la amplitud de la perturbación,

$$\dot{\delta} = \omega\delta,$$

donde $\omega \equiv \frac{d\dot{y}}{dy}(y_0)$. Integramos esta ecuación en el tiempo con la condición inicial $\delta(0) = \delta_0$ y obtenemos la siguiente ecuación,

$$\delta(t) = \delta_0 e^{\omega t}.$$

En esta ecuación δ_0 es el valor inicial de la perturbación y ω es su factor de crecimiento, el cual determina si la amplitud de la perturbación crece o decrece en el tiempo. Cuando ω es positiva esta amplitud crece, mientras que cuando es negativa la amplitud decrece.

De esta forma hemos llegado a la siguiente expresión para la posición de la interfase perturbada, *i.e.*,

$$y = y_0 + \delta_0 \cos(kx) e^{\omega t}. \quad (2.6)$$

Al introducir este tipo de perturbación en las ecuaciones de movimiento del sistema, se busca obtener una expresión $\omega = \omega(k)$ llamada relación de dispersión. La relación de dispersión determina los valores de k para los cuales la interfase es estable o inestable, es decir, determina qué valores de k hacen que ω sea positiva o negativa.

Para obtener la relación de dispersión, primero se resuelven las ecuaciones de movimiento en el caso de la interfase plana. Después se introduce la perturbación y se escriben las condiciones de frontera. Al hacer esto se obtiene un sistema de ecuaciones que al resolverse da como resultado la relación de dispersión. En cada paso de este procedimiento se desprecian los términos de orden cuadrático en la amplitud δ_0 . Por tanto, cualquier término se desarrolla en potencias de δ_0 hasta primer orden.

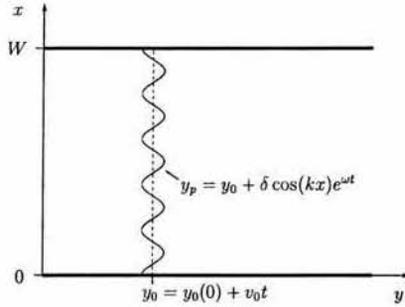


Figura 2.5: Esquema de la posición de la interfase plana, $\bar{r} = x\hat{i} + y_0\hat{j}$ y de la interfase perturbada, $\bar{r} = x\hat{i} + y_p\hat{j}$.

Análisis de Estabilidad para el problema de Saffman-Taylor en una celda de Hele-Shaw rectangular

En esta sección reproducimos el análisis de estabilidad lineal del problema de Saffman-Taylor para un par de fluidos en una celda de Hele-Shaw rectangular. Primero resolveremos la ecuación (2.3) para una interfase plana, $y = y_0$. La solución será el perfil de presión del fluido 2, $p_0(y)$. Después introduciremos la perturbación (2.6) en la interfase y una perturbación consistente con (2.3) para el perfil de presión p_0 . Usaremos las expresiones resultantes para evaluar las condiciones de frontera (2.4) y (2.5). Finalmente reduciremos estas expresiones a la relación de dispersión despreciando términos de segundo orden en la amplitud δ_0 .

Ecuaciones para la Interfase Plana

Consideremos un sistema como el de la figura 2.5 donde el fluido 1 desplaza al fluido 2 en una celda de Hele-Shaw. La interfase que separa a ambos fluidos es plana, esto es, $y = y_0$. La cantidad constante de masa que se inyecta en la celda por unidad de tiempo es \dot{m}_0 . Por tanto, la velocidad de la interfase plana, v_0 , está dada por la siguiente expresión,

$$v_0 = \frac{\dot{m}_0}{\rho_1 b W},$$

de forma que la posición de la interfase plana es,

$$y_0(t) = y_0(0) + v_0 t,$$

donde $y_0(0)$ es la posición de la interfase plana al tiempo $t = 0$.

Como la presión del fluido 1 es constante, es conveniente redefinir la presión en el fluido 2 como $p = p_2 - p_1$. Denotaremos la presión del fluido 2 para la interfase plana como p_0 . Para obtener la presión p_0 debemos resolver la ecuación (2.3) en el bulto del fluido 2. Como la interfase es plana, no hay flujo en la dirección x y la presión debe ser constante en esa dirección. Entonces la ecuación de movimiento se reduce a la siguiente forma,

$$\frac{d^2 p_0}{dy^2} = 0.$$

Integramos una vez y tenemos que

$$\frac{dp_0}{dy} = A.$$

Esta ecuación se puede integrar de forma definida desde la interfase hasta el bulto del fluido 2. Para ello utilizamos la condición de frontera (2.4), esto es, $p_0 = -\gamma\kappa_0$ si $y = y_0$,

$$A \int_{y_0}^y dy = \int_{-\gamma\kappa_0}^{p_0} dp_0,$$

donde $\kappa_0 = 0$ porque la interfase es plana. El perfil de presión es entonces,

$$p_0 = A(y - y_0).$$

Para evaluar la constante de integración, utilizamos la Ley de Darcy, $v_0 = -\frac{b^2}{12\eta_2} \frac{dp_0}{dy}$, de donde,

$$A = -\frac{12\eta_2}{b^2} v_0.$$

Por tanto, el perfil de presión del fluido 2 para una interfase plana es,

$$p_0(y) = -v_0 \frac{12\eta_2}{b^2} (y - y_0). \quad (2.7)$$

Ecuaciones para la Interfase Perturbada

La posición de la interfase perturbada se puede escribir de forma vectorial como

$$\bar{\mathbf{r}} = x\hat{\mathbf{i}} + y_p(x)\hat{\mathbf{j}},$$

donde $y_p(x)$ está dada por la ecuación (2.6), esto es,

$$y_p = y_0 + \delta_0 \cos(kx)e^{\omega t}. \quad (2.8)$$

Como la interfase ha sido perturbada, el campo p debe sufrir también una perturbación en la vecindad de la interfase. Pedimos que la perturbación satisfaga la ecuación (2.3) y que decaiga lejos de la interfase a fin de conservar el efecto local de la perturbación. Una función que cumple con estas condiciones es

$$p = p_0 + a_k \cos(kx)e^{\omega t - ky}, \quad (2.9)$$

donde la amplitud a_k es proporcional a δ_0 . Ahora podemos evaluar las condiciones de frontera (2.4) y (2.5) utilizando las cantidades perturbadas y_p y p .

La condición de frontera (2.4) es

$$p = -\gamma\kappa \quad \text{si} \quad y = y_p. \quad (2.10)$$

La curvatura de la interfase perturbada, $\kappa(y_p)$, se calcula a partir de la posición $\bar{\mathbf{r}}$ y tiene la forma²,

$$\kappa = k^2 \delta_0 \cos(kx)e^{\omega t} (1 + k^2 \delta_0^2 \sin^2(kx)e^{2\omega t})^{-\frac{3}{2}}.$$

Sustituimos esta expresión en la ecuación (2.10) junto con la expresión para la presión $p(y)$ dada por (2.9) en donde $p_0(y_p)$ está dada por (2.7),

$$v_0 \frac{12\eta_2}{b^2} (y_0 - y_p) + a_k \cos(kx)e^{\omega t - ky_p} = -\gamma (k^2 \delta_0 \cos(kx)e^{\omega t} (1 + k^2 \delta_0^2 \sin^2(kx)e^{2\omega t})^{-\frac{3}{2}}).$$

Despreciando términos en δ_0^2 , a_k^2 y $\delta_0 a_k$, esta expresión se reduce a

$$-\delta_0 v_0 \frac{12\eta_2}{b^2} + a_k e^{-ky_0} = -\delta_0 \gamma k^2. \quad (2.11)$$

²La curvatura de una curva $\bar{\mathbf{r}}(x) = x\hat{i} + y_p\hat{j}$ se puede calcular como

$$\kappa = \frac{|\bar{\mathbf{r}}' \times \bar{\mathbf{r}}''|}{|\bar{\mathbf{r}}'|^3},$$

donde las primas indican derivadas con respecto a x .

La condición de frontera (2.5) es,

$$v_n = -\frac{b^2}{12\eta_2}(\nabla p \cdot \hat{\mathbf{n}}) \quad \text{si} \quad y = y_p, \quad (2.12)$$

donde el vector normal a la interfase, a primer orden en δ_0 , está dado por³,

$$\hat{\mathbf{n}} = k\delta_0 \sin(kx)e^{\omega t} \hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}.$$

Primero evaluamos el lado derecho de la ecuación (2.12). El gradiente de presión es,

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial p}{\partial y} \hat{\mathbf{j}},$$

donde

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -ka_k \sin(kx)e^{\omega t} e^{-ky}$$

y

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{12\eta_2}{b^2}v_0 - ka_k \cos(kx)e^{\omega t} e^{-ky}. \quad (2.13)$$

Entonces, el lado derecho de la ecuación (2.12) es

$$-\frac{b^2}{12\eta_2}(\nabla p \cdot \hat{\mathbf{n}}) = -\frac{b^2}{12\eta_2} \left(-k^2\delta_0 a_k \sin^2(kx)e^{2\omega t} e^{-ky_p} - \frac{12\eta_2}{b^2}v_0 - ka_k \cos(kx)e^{-ky_p} \right),$$

³El vector $\hat{\mathbf{n}}$ es el vector normal externo, esto es, el que apunta en dirección al fluido 2. Para obtener este vector, primero escribimos el diferencial del vector posición, esto es,

$$d\vec{r} = dx\hat{\mathbf{i}} + \frac{dy_p}{dx}dx\hat{\mathbf{j}}.$$

El vector normal unitario debe cumplir con dos condiciones, la primera, que su producto punto con el vector $d\vec{r}$ sea cero, esto es,

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot d\vec{r} = n_x dx + n_y \frac{dy_p}{dx} dx = 0,$$

de donde

$$n_x = -n_y \frac{dy_p}{dx}.$$

La segunda condición es que el vector debe ser unitario, por tanto,

$$n_x^2 + n_y^2 = 1.$$

Al resolver estas dos ecuaciones para n_x y n_y tenemos que

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{-\frac{dy_p}{dx} \hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy_p}{dx}\right)^2}}.$$

que a orden lineal es,

$$-\frac{b^2}{12\eta_2}(\nabla p \cdot \hat{\mathbf{n}}) = -\frac{b^2}{12\eta_2} \left(-\frac{12\eta_2}{b^2}v_0 - ka_k \cos(kx)e^{-ky_0} \right).$$

Este resultado indica que a orden lineal en δ_0 y a_k , la componente normal del gradiente de presión se puede aproximar como la componente en y dada por la ecuación (2.13), esto es, $\nabla p \cdot \hat{\mathbf{n}} \simeq \frac{\partial p}{\partial y}$.

El lado izquierdo de la ecuación (2.12) se calcula a partir de la velocidad de la interfase, esto es,

$$v_n = \frac{dy_p}{dt} \hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{n}},$$

o bien,

$$v_n = \frac{dy_p}{dt}.$$

Aquí es importante recordar que la interfase es una sinusoidal que varía solamente en su amplitud, por lo que su velocidad en x es cero. Por tanto, la ecuación (2.12) se reduce a

$$\frac{dy_p}{dt} = v_0 + \omega\delta_0 \cos(kx)e^{\omega t}.$$

Sustituimos ambos lados de la ecuación (2.12) y llegamos a la siguiente expresión,

$$\omega\delta_0 = \frac{b^2}{12\eta_2}ka_k e^{-ky_0}. \quad (2.14)$$

Relación de Dispersión

Las ecuaciones (2.11) y (2.14) son un sistema lineal de ecuaciones con dos incógnitas, a_k y ω . Al resolver este sistema obtenemos la relación de dispersión,

$$\omega = v_0 k - \frac{b^2}{12\eta_2} \gamma k^3. \quad (2.15)$$

Como hemos mencionado antes, si ω es positiva la interfase es inestable ante la perturbación, mientras que si ω es negativa la interfase es estable. El término lineal en k de la ecuación (2.15), que es proporcional a la velocidad de la interfase plana, tiene un efecto desestabilizador en la interfase. Por otro lado, el término cúbico en k , que

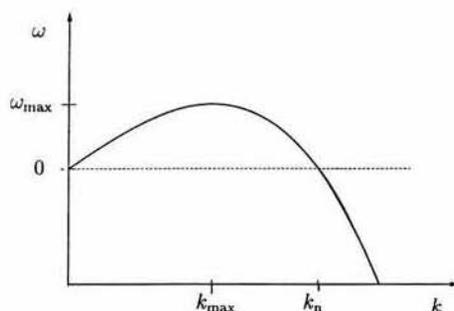


Figura 2.6: Relación de dispersión para el problema de Saffman-Taylor en coordenadas rectangulares.

es proporcional a la tensión superficial tiene un efecto estabilizador. En la figura 2.6 se muestra una gráfica de la relación de dispersión en donde ambos efectos entran en juego. El modo más inestable, k_{\max} , corresponde al factor de crecimiento más grande, esto es, el máximo de la función $\omega(k)$. k_{\max} está dado por

$$k_{\max} = \sqrt{\frac{4\eta_2 v_0}{b^2 \gamma}}.$$

En la misma figura se muestra el modo de estabilidad neutral, k_n , que corresponde al valor de cero del factor de crecimiento de la perturbación, esto es, el modo para el cual $\omega = 0$,

$$k_n = \sqrt{\frac{12\eta_2 v_0}{b^2 \gamma}}.$$

En estas expresiones, un aumento en la velocidad de la interfase plana hace que los dos modos, k_{\max} y k_n se hagan más grandes. Esto, por un lado, hace que el modo más inestable corresponda a una longitud de onda más pequeña. Por otra parte, el aumento en el modo de estabilidad neutral hace que el rango de modos inestables se amplíe. El efecto contrario puede observarse al aumentar la tensión superficial. En tal caso, ambos modos decrecen haciendo que el modo más inestable corresponda a una longitud de onda más grande y que el rango de modos inestables se haga más pequeño. En general, la interfase es estable ante perturbaciones de modo grande e inestable ante perturbaciones de modo pequeño.

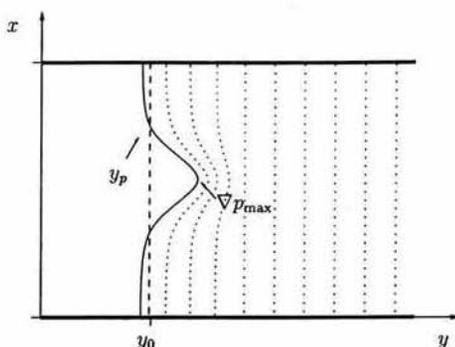


Figura 2.7: Esquema de la compresión de las líneas de presión constante (líneas punteadas) ante una perturbación en la interfase fluido-fluido. La figura muestra cómo para la región perturbada el gradiente de presión local es máximo.

La inestabilidad de Mullins-Sekerka ocurre de la siguiente manera. Al introducir la perturbación en la interfase, las líneas de presión constante en el bulto del fluido 2 se deforman. Como la viscosidad en esta fase es finita, estas líneas no se relajan instantáneamente. Por lo tanto, el gradiente de presión se hace más grande en las regiones perturbadas. Como resultado, la velocidad en esas regiones aumenta y el crecimiento del frente es favorecido dando lugar a la desestabilización de la interfase (ver figura 2.7).

2.4. Problema de Fronteras Libres

La formulación macroscópica del problema de Saffman-Taylor contempla una interfase bien definida de ancho infinitamente pequeño. Como consecuencia, los campos, o sus derivadas, son discontinuos en la interfase dando lugar a la necesidad de condiciones de frontera explícitas para los mismos. En particular, para el caso de alto contraste viscoso, nos interesa obtener la dinámica de la interfase utilizando la ecuación de bulto del fluido viscoso (2.3) sujeta a las condiciones de frontera (2.4) y (2.5). Sin embargo, la condición de frontera (2.4) está escrita en términos de la curvatura de la interfase. Esto quiere decir que la forma de la interfase es necesaria para poder evaluar la condición de frontera que a su vez es necesaria para determinar la posición de la interfase que es la solución del problema. Por esta razón, las ecuaciones no pueden

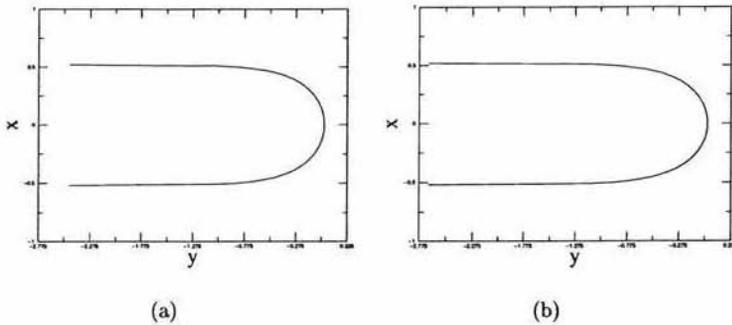


Figura 2.8: Forma paramétrica de un dedo viscoso estacionario según (a) Saffman y Taylor, y (b) Pitts.

resolverse analíticamente para cualquier tiempo. A este tipo de problema se le conoce comúnmente como *problema de fronteras libres*.

Para resolver el problema de fronteras libres, se han llevado a cabo distintas aproximaciones para las etapas que llevan a la formación del dedo estacionario. Los resultados pueden separarse en aquellos que tienen que ver con las etapas tempranas de desestabilización, el estado estacionario y la etapa intermedia de competencia.

La dinámica a tiempos cortos puede ser estudiada de forma analítica por medio del análisis de estabilidad lineal que hemos reproducido en la sección 2.3 y que fue reportado por Saffman y Taylor [12]. En este caso, la curvatura de la interfase se conoce en todo momento porque la posición de la interfase está determinada por una curva sinusoidal conocida.

Con respecto al estado estacionario, Saffman y Taylor obtuvieron una solución analítica de la forma de la interfase en el límite de tensión superficial nula. En tal límite no es necesario conocer la forma de la interfase para evaluar la condición termodinámica de frontera. La forma de la interfase estacionaria queda dada por la curva

$$x(y) = \frac{1 - \lambda}{\pi} \ln \left(\frac{1 + \cos(\pi y / \lambda)}{2} \right), \quad (2.16)$$

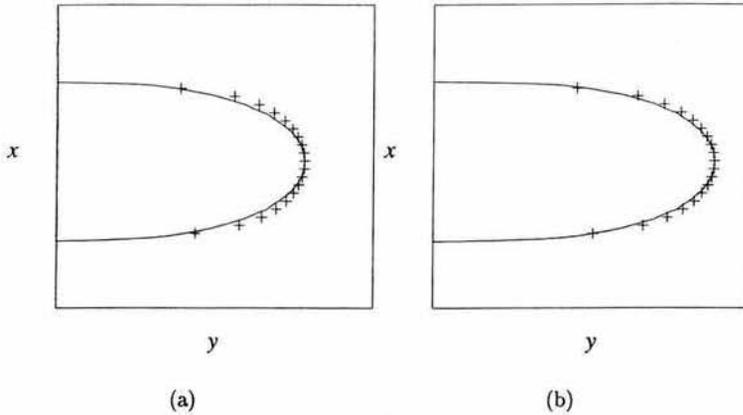


Figura 2.9: Soluciones numéricas del modelo mesoscópico de la referencia[1] (líneas sólidas) y formas paramétricas de (a)Saffman y Taylor, y (b) Pitts. El ancho del dedo es cercano a la mitad del ancho del canal.

que está parametrizada por el ancho del dedo λ y cuya imagen se presenta en la figura 2.8(a). Este resultado está solamente en acuerdo con las observaciones experimentales para dedos cuyo ancho se aproxima a la mitad del ancho de la celda de Hele-Shaw, *i.e.*, $\lambda W \rightarrow \frac{1}{2}W$. Para dedos más anchos Pitts [13] propuso una relación modificada empíricamente dada por

$$x(y) = \frac{\lambda}{\pi} \ln \left(\frac{1 + \cos(\pi y/\lambda)}{2} \right). \quad (2.17)$$

La forma del dedo según la relación de Pitts se muestra en la figura 2.8(b).

El efecto de tensión superficial constante fue incluido más tarde por McLean y Saffman [14]. Ellos obtuvieron la forma de la interfase del estado estacionario valiéndose de un mapeo conforme con el que lograron reducir las ecuaciones macroscópicas a un par de ecuaciones integrodiferenciales acopladas con condiciones de frontera fijas. La resolución de dicho sistema de ecuaciones se puede hacer solamente de forma numérica. Como resultado se obtienen las coordenadas de la interfase estacionaria. Estos resultados concuerdan con las observaciones experimentales para dedos cuyo ancho está en el rango $\lambda = [0.5, 0.88]$.

La etapa intermedia de competencia, usando las ecuaciones de la formulación macroscópica, ha sido estudiada mediante simulaciones numéricas muy sofisticadas. En particular, un método llamado *boundary integral* [15] ha sido utilizado con éxito. La idea del método es encontrar una ecuación para la velocidad normal de la interfase, v_n , en términos de la forma de la interfase. Esto se logra al escribir la ecuación de bulto junto con las condiciones de frontera en la interfase usando una función de Green. Esta expresión para la velocidad normal hace posible rastrear la posición de la interfase en el tiempo. Esto se hace partiendo de una interfase casi plana que determina la velocidad normal en cada punto. Luego, el conjunto de velocidades se usa para avanzar la posición de la interfase en un pequeño intervalo. Finalmente la velocidad se vuelve a calcular y el proceso se repite una y otra vez hasta alcanzar el estado estacionario [16].

Las limitaciones impuestas por el problema de fronteras libres para regímenes de flujo sofisticados resultan todavía más grandes. En particular, el estudio de un gradiente de presión dependiente del tiempo o de sistemas con desorden espacial implica que los métodos numéricos necesarios para integrar las ecuaciones macroscópicas se vuelvan aún más complicados, y requieran de herramientas de cómputo muy poderosas. Esto da lugar a la entrada de modelos más simples en los que tales condiciones de flujo resulten fácilmente implementables y los métodos de simulación numérica sean mucho más sencillos y directos.

2.5. Modelos Mesoscópicos. Una Alternativa al Problema de Fronteras Libres

Como una alternativa a las ecuaciones clásicas, desde hace algunos años se han usado modelos en los que la interfase constituye una región difusa cuya anchura es proporcional a un parámetro ϵ . En dichos modelos no existe el problema de rastrear la posición de la interfase. La idea es que en una región interfacial difusa no existen dis-

continuidades y por lo tanto en la formulación mesoscópica no existe una condición de frontera que dependa de la posición de la interfase. Dicha continuidad se consigue mediante una ecuación de movimiento escrita para una cantidad llamada *parámetro de orden*, ϕ . Este parámetro determina la ubicación de las fases que componen al sistema y varía de forma suave en el espacio entre dos valores de bulto bien definidos. En general, esta ecuación de movimiento se conoce como ecuación de Ginzburg-Landau dependiente del tiempo.

En general, la ecuación de Ginzburg-Landau se escribe a partir de una configuración de energía libre escrita a través de un funcional. Dicha configuración define los valores de equilibrio del parámetro de orden. Ésta se acopla a algún campo de potencial dinámico propio del sistema (temperatura, concentración, presión). Como resultado, se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales parciales que se puede integrar numéricamente sin que la ubicación explícita de la interfase sea necesaria para realizar el siguiente paso en la integración. De hecho, la interfase se ubica de forma completamente arbitraria a partir de la solución $\phi(x, y, t)$. Para hacer esto, se escoge alguna curva de nivel $\phi(x, y, t) = \phi_{\text{int}}$. Los modelos que se construyen a partir de este tipo de argumentos se conocen comúnmente como modelos de campo (del inglés *phase field models*).

Usualmente, para que el modelo de campo pueda usarse para estudiar un fenómeno, se debe probar que éste es consistente con las ecuaciones macroscópicas del sistema. Para lograr esto, se estudia el comportamiento del modelo en el límite donde el parámetro ϵ es muy pequeño, lo que equivale a un régimen de interfase bien definida. En estas condiciones, si las ecuaciones del modelo mesoscópico se reducen a las ecuaciones del modelo macroscópico, se dice que el modelo es consistente con el tratamiento macroscópico y su uso para estudiar el fenómeno es legítimo.

Los primeros modelos de campo se hicieron para describir sistemas de solidificación.

En este marco, existen modelos para una sustancia pura y modelos para sustancias binarias que solidifican en una o dos fases. Para estos casos, la ecuación de movimiento se puede obtener minimizando un funcional de energía libre. Otros estudios se han hecho usando modelos que se construyen explícitamente para recuperar el comportamiento macroscópico sin que la definición estricta del funcional de energía libre sea necesaria.

El primer modelo de campo para el problema de Saffman-Taylor fue propuesto por Folch, Casademunt y Hernández-Machado [17, 18]. Éste fue escrito para el caso de viscosidades arbitrarias. El modelo utiliza una ecuación de movimiento para el parámetro de orden acoplada a una segunda ecuación para la función corriente del sistema. La ecuación para la función corriente introduce la dinámica del problema. El modelo ha sido utilizado para obtener la relación de dispersión del sistema, tanto analíticamente como numéricamente. Además, la simulación de la competencia de dedos ha sido llevada a cabo exitosamente. Sin embargo, el modelo no describe adecuadamente el límite de contraste infinito de viscosidades, que es justamente el límite del dedo de Saffman-Taylor.

Recientemente Hernández-Machado, Lacasta, Mayoral y Corvera Poiré [1] propusieron un modelo para el límite de contraste infinito de viscosidades. El modelo consiste en una ecuación de movimiento para el parámetro de orden más una condición de frontera que mantiene al sistema fuera de equilibrio. El uso de este modelo resulta muy conveniente ya que reduce el problema numérico a la integración de una sola ecuación diferencial parcial. Al utilizar este modelo, se puede simular la desestabilización de la interfase, la competencia de modos y de dedos y la formación del estado estacionario.

A fin de corroborar el correcto funcionamiento del código que utilizaremos más adelante, hemos reproducido los principales resultados de la referencia [1]. La competencia de dedos se muestra en la figura 2.10. La forma paramétrica de la punta del dedo según las ecuaciones (2.16) y (2.17) se muestra en la figura 2.9 superpuesta a la punta

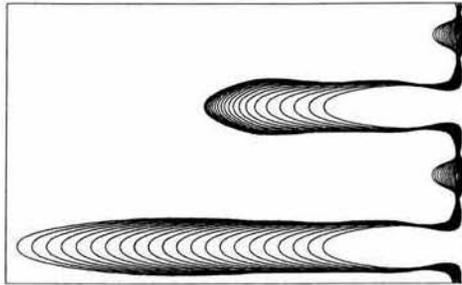


Figura 2.10: Secuencia temporal de la competencia de dedos. El efecto se consigue partiendo de una configuración inicial de dos dedos idénticos más un pequeñísimo ruido en el campo del parámetro de orden.

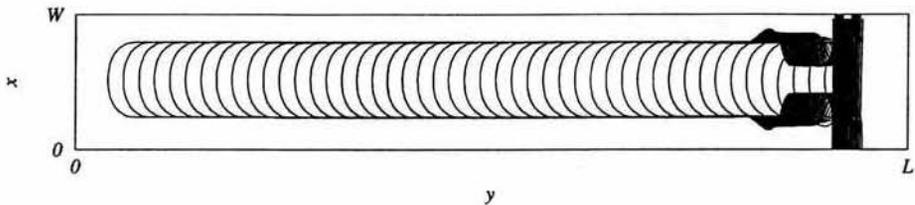


Figura 2.11: Etapas de formación de un dedo viscoso estacionario obtenidas mediante la integración numérica del modelo mesoscópico. Cada interfase corresponde a un tiempo de simulación.

correspondiente a un dedo estacionario cuyo ancho es cercano a la mitad del ancho del canal. La formación de un dedo estacionario se puede observar en la figura 2.11. En esta figura se muestra la interfase a distintos tiempos y se observa que el ancho del dedo, λ , permanece constante. La punta del dedo aparece distorsionada debido a la escala utilizada para hacer la gráfica. Finalmente, en la figura 2.12 se muestra una gráfica del ancho del dedo estacionario contra la velocidad en la punta del dedo. En esta gráfica se observa que a velocidades altas el ancho del dedo tiende a un valor límite igual a la mitad del ancho del canal.

En el capítulo siguiente presentaremos el modelo de campo que utilizaremos en este trabajo. Al igual que en la referencia [1], éste consiste en una ecuación de movimiento para el parámetro de orden más una condición de frontera. En nuestro caso, la condición de frontera introduce la dinámica del sistema, eliminando la necesidad de una segunda ecuación diferencial.

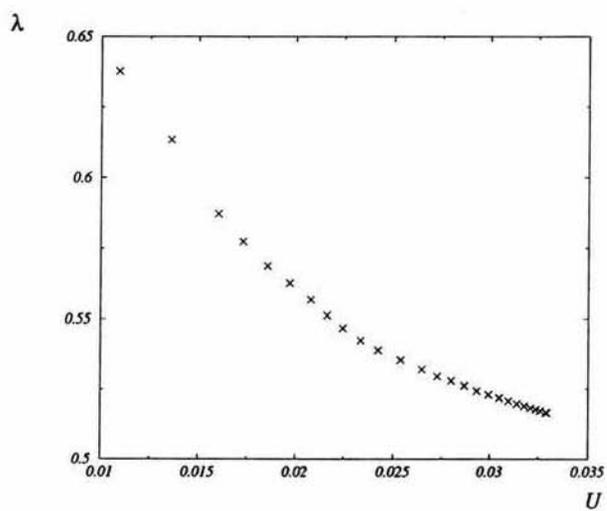


Figura 2.12: Ancho del dedo estacionario, λ , contra la velocidad en la punta del dedo, U .

3

MODELO MESOSCÓPICO

El modelo de campo que utilizaremos en este trabajo se compone de una ecuación de movimiento para un parámetro de orden, ϕ , más una condición de frontera dinámica que mantiene al sistema, no solo fuera de equilibrio, sino en un estado no estacionario.

La ecuación de movimiento para el parámetro ϕ se conoce como ecuación del Modelo B, según la clasificación de modelos de dinámica de fenómenos críticos hecha por Halperin y Hohenberg [19]. La ecuación de movimiento en cuestión es,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \nabla \cdot M \nabla \mu(\phi), \quad (3.1)$$

donde M es un parámetro relacionado con la permeabilidad del sistema, $\mu(\phi)$ es el potencial químico del sistema que tiene la forma,

$$\mu(\phi) = \mu_B(\phi) - \epsilon^2 \nabla^2 \phi \quad (3.2)$$

y

$$\mu_B(\phi) = \frac{\phi^3}{\phi_{\text{eq}}^2} - \phi. \quad (3.3)$$

En la ecuación (3.2), ϵ es un parámetro proporcional al ancho de la interfase y $\mu_B(\phi)$ es el potencial químico en el bulto de las fases. ϕ_{eq} es el valor de equilibrio del parámetro de orden.

La condición de frontera introduce la dinámica del sistema al fijar el valor del parámetro de orden en el bulto del fluido 2, esto es,

$$\phi = \phi_B(t) \quad \text{si} \quad (x, y) \in B, \quad (3.4)$$

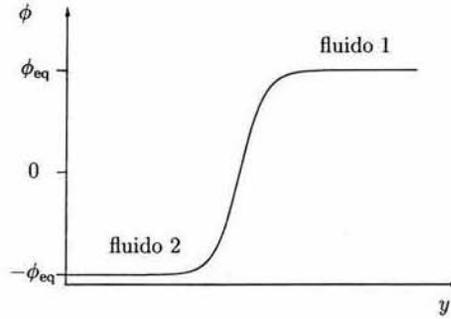


Figura 3.1: Perfil de equilibrio del parámetro de orden en la ecuación de movimiento (3.1).

donde la región B corresponde al bulto del fluido 2 lejos de la interfase. Más adelante definiremos con precisión la ubicación de esta región.

En equilibrio, una solución de la ecuación (3.1) es el siguiente perfil para el parámetro de orden,

$$\phi = \phi_{\text{eq}} \tanh\left(\frac{y}{\sqrt{2}\epsilon}\right). \quad (3.5)$$

En esta ecuación, los límites $y \rightarrow \pm\infty$ corresponden a los valores constantes $\phi = \pm\phi_{\text{eq}}$. El parámetro de orden varía de forma suave y continua entre dos valores de bulto constantes. Dichos valores satisfacen la condición de equilibrio del potencial químico, *i.e.*,

$$\mu(\pm\phi_{\text{eq}}) = 0$$

Además, en la ecuación (3.5) es claro cómo el parámetro ϵ da una medida del ancho de la interfase. En dos dimensiones, el perfil de equilibrio corresponde a una interfase plana.

Fijamos todo $\phi > 0$ como el fluido 1 y todo $\phi < 0$ como el fluido 2. Además, designamos la posición de la interfase con la curva de nivel arbitraria $\phi_{\text{int}}(x, y) = 0$. En la figura 3.1 se muestra el perfil de equilibrio del parámetro de orden. En la misma gráfica, se indican las regiones que corresponden a cada fluido: el fluido 1 ocupa la región derecha de la celda de Hele-Shaw mientras que el fluido 2 ocupa la región

izquierda de la celda.

La legitimidad del modelo se establece al reducir la ecuación (3.1) a las ecuaciones (2.3), (2.4), y (2.5). Este resultado se consigue mediante un desarrollo asintótico de la ecuación (3.1) en el límite $\epsilon \rightarrow 0$ que fue reportado en la referencia [1]. La idea de este procedimiento es que en dicho límite, el perfil del parámetro de orden se hace discontinuo. En tal caso, la región de transición corresponde a una interfase bien definida y por lo tanto la ecuación de movimiento en dicha región se reduce a las condiciones de frontera (2.4) y (2.5). Por otro lado, en este límite la ecuación de movimiento en las regiones de bulto (donde $\phi \rightarrow \pm\phi_{\text{eq}}$) se reduce a la ecuación (2.3). Como resultado, se obtienen las siguientes identificaciones entre los parámetros macroscópicos y mesoscópicos, *i.e.*,

$$p = \phi_{\text{eq}}\mu_1, \quad (3.6)$$

$$K = -\frac{M_2}{2\phi_{\text{eq}}^2} \quad (3.7)$$

y

$$\gamma = \frac{\gamma'}{2\phi_{\text{eq}}}, \quad (3.8)$$

en donde μ_1 es el potencial químico a primer orden en ϵ , M_2 es el parámetro proporcional a la permeabilidad del fluido 2 y γ' es un parámetro relacionado con el ancho de la interfase. Es importante señalar que para obtener estos resultados, es necesario imponer el régimen de alto contraste viscoso, *i.e.*,

$$\begin{aligned} M &= 0 & \text{si } \phi > 0 \\ M &= M_2 & \text{si } \phi < 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

En el apéndice B se reproduce el desarrollo asintótico completo para referencia del lector.

La ecuación (3.6) indica que el potencial químico a primer orden en ϵ , $\mu_1(\phi)$, es proporcional a la presión. De este resultado se puede concluir que al imponer una condición de frontera en el parámetro de orden, se fija un cierto gradiente en el potencial químico, $\mu(\phi)$, que en el límite $\epsilon \rightarrow 0$ equivale a imponer un gradiente en la

presión. De este modo se introduce la dinámica del modelo.

Lo que sigue es integrar numéricamente la ecuación (3.1) sujeta a la condición de frontera (3.4). Las simulaciones se llevan a cabo partiendo de configuraciones del parámetro de orden con una interfase perturbada, $y_p(x)$, en un sistema de dimensiones $nx \times ny$ donde $nx = W$, es el ancho de la celda y ny es el largo del canal. Además, se impone la condición de frontera mediante las siguientes ecuaciones,

$$\begin{aligned}
 \phi &= \phi_{eq} & \text{si} & \begin{cases} 1 \leq x \leq nx \\ y \\ y_p \leq y \leq ny \end{cases} \\
 \phi &= \frac{\phi_B + \phi_{eq}}{y_p^* - y_p - \Delta y} (y - y_p + 1) - \phi_{eq} & \text{si} & \begin{cases} 1 \leq x \leq nx \\ y \\ y_p^* - \Delta y - 1 \leq y \leq y_p - 1 \end{cases} \\
 \phi &= \phi_B & \text{si} & \begin{cases} 1 \leq x \leq nx \\ y \\ 1 \leq y < y_p^* - \Delta y - 1, \end{cases}
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

donde y_p^* es la posición más avanzada de la interfase perturbada, ϕ_B es el valor de bulto del parámetro de orden en el fluido 2, y Δy es una distancia arbitraria a partir de la posición y_p^* que fija la frontera en donde se impone el valor ϕ_B . De esta forma, la región B queda definida por el rectángulo, $1 \leq x \leq W$, y $1 \leq y \leq y_p^* - \Delta y$. Esta configuración inicial llena el espacio con dos fases, una positiva que corresponde al fluido 1 y otra negativa que corresponde al fluido 2. La condición de frontera establece un perfil lineal en ϕ de pendiente $m = -\frac{\phi_B + \phi_{eq}}{y_p^* - y_p - \Delta y}$ enfrente del fluido 1. Dicho perfil mantiene al sistema fuera de equilibrio y provoca el desplazamiento de la interfase de derecha a izquierda en la celda de Hele-Shaw. En las figuras 3.2(a) y 3.2(b) se muestra un diagrama de la configuración inicial.

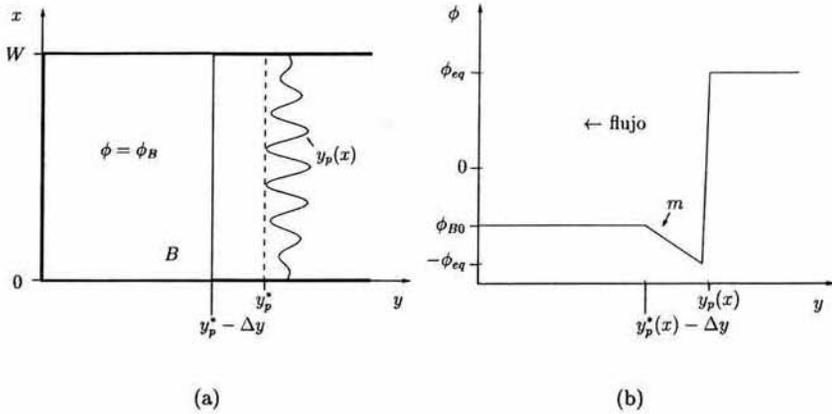


Figura 3.2: (a) Configuración inicial del parámetro de orden, $\phi(x, y)$. La sinusoidal representa la interfase perturbada, $y_p(x)$. La región gris corresponde a la región del fluido 2 donde el parámetro de orden toma el valor $\phi = \phi_B$. (b) Perfil inicial del parámetro de orden, $\phi(y)$, para un valor cualquiera de x . La región derecha, donde $\phi = \phi_{eq}$, corresponde al fluido 1. En la posición $y = y_p(x)$ se halla la interfase fluido-fluido. Luego, se impone un valor $\phi = \phi_B$ para todo el bulto del fluido 2 que fija el perfil lineal de pendiente m .

Durante las simulaciones, determinamos la posición de la interfase y encontramos el punto y_p^* . Luego, redefinimos la región B usando esta posición, para la cual fijamos ϕ como el valor de bulto del parámetro de orden. Después, avanzamos un paso de tiempo en la integración, volvemos a calcular la posición y_p^* y así sucesivamente. Esto quiere decir que conforme la interfase avanza, la región B se desplaza junto con ella manteniendo al sistema fuera de equilibrio en todo momento.

Como veremos en el capítulo siguiente, para introducir el efecto de un gradiente dinámico en el modelo, basta con proponer una forma explícita en el tiempo para el valor $\phi_B(t)$ en la ecuación (3.4).

 INESTABILIDAD LATERAL EN EL DEDO DE SAFFMAN-TAYLOR

En este capítulo presentamos los principales resultados de este trabajo. Estos resultados consisten en el hallazgo de una inestabilidad lateral en el dedo de Saffman-Taylor que ocurre al imponer una perturbación periódica en la caída de presión. Como hemos propuesto en el capítulo 3, dicha perturbación se introduce en la condición de frontera (3.4) cuya dependencia en el tiempo explicaremos más adelante. En particular, en este capítulo estudiamos el comportamiento de la inestabilidad lateral en función de la frecuencia de la señal incidente y discutimos cómo el dedo de Saffman-Taylor actúa como un amplificador selectivo de frecuencias.

Es conveniente hacer notar, que para el dedo del estado estacionario existen dos frecuencias características. Éstas son, la frecuencia dada por la velocidad del dedo, U , entre su ancho, λ ,

$$\omega_{\text{dedo}} = 2\pi\nu_{\text{dedo}} = 2\pi\frac{U}{\lambda W}, \quad (4.1)$$

y la frecuencia dada por la velocidad muy lejos del dedo, V_{∞} , entre el ancho de la celda, W ,

$$\omega_{\infty} = 2\pi\nu_{\infty} = 2\pi\frac{V_{\infty}}{W} = 2\pi\frac{\lambda U}{W} = \lambda^2\omega_{\text{dedo}}, \quad (4.2)$$

donde las velocidades de la punta del dedo, U , y del fluido 2 lejos de la interfase, V_{∞} , están relacionadas por conservación de la materia, *i.e.*,

$$\lambda U = V_{\infty}.$$

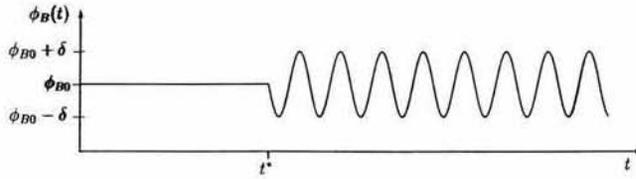


Figura 4.1: Dependencia temporal del valor de bulto del parámetro de orden $\phi_B(t)$. A tiempos cortos ($t \leq t^*$) el valor se mantiene constante e igual a ϕ_{B0} favoreciendo la formación de un dedo estacionario. A $t > t^*$ se superpone la señal sinusoidal de forma que ahora $\phi_B(t)$ oscila entre las cotas $\phi_{B0} \pm \delta$.

4.1. Condición Dinámica de Frontera

Para introducir el régimen periódico de flujo, el gradiente de presión debe contener un término constante que mantenga la inestabilidad de la interfase y que por tanto logre la formación de un dedo estacionario. A este término se superpone la perturbación oscilatoria. Para asegurar que la solución de un solo dedo exista, la amplitud de la perturbación debe ser pequeña comparada con el término constante. Hacemos la simulación de modo de formar inicialmente un dedo en estado estacionario. Después superponemos el término oscilatorio. En nuestro modelo, esto se logra imponiendo el valor de bulto del parámetro de orden como sigue:

$$\begin{aligned} \phi_B &= \phi_{B0} \quad \text{si } t \leq t^* \\ \phi_B &= \phi_{B0} + \delta \cos(\omega_0 t) \quad \text{si } t > t^*. \end{aligned} \quad (4.3)$$

En donde δ es la amplitud de la perturbación, ω_0 es la frecuencia angular incidente y el tiempo t^* debe ser suficientemente grande para alcanzar la formación de un dedo estacionario cuyo ancho, λ , y velocidad, U , sean constantes. En la figura 4.1 se muestra una gráfica del valor de bulto del parámetro de orden, $\phi_B(t)$.

4.2. Dedos Oscilatorios de Saffman Taylor

Resolvemos la ecuación (3.1) sujeta a la condición de frontera (4.3) para un sistema de $nx = 32$, $ny = 3200$, $\phi_{B0} = -0.60$ y $\delta = 0.09$, para distintos valores de frecuencia incidente ω_0 .

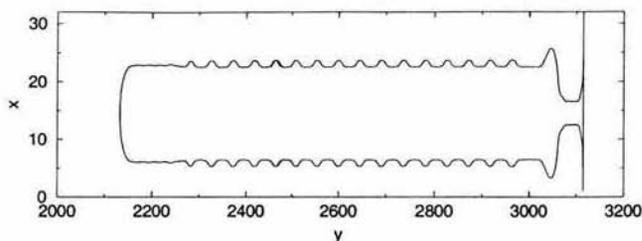


Figura 4.2: Perfil de un dedo sometido a la condición dinámica de frontera (4.3). Se observa que en la punta se genera una onda que se propaga hacia los lados del dedo adquiriendo una amplitud, A , y longitud de onda, Λ , constantes.

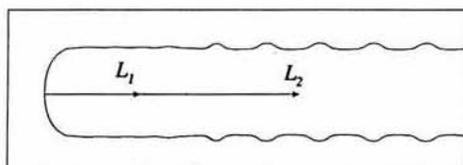


Figura 4.3: Regiones del dedo oscilatorio donde se fijan las distancias de medición L_1 y L_2 . L_1 se fija dentro de la región donde la amplitud no ha alcanzado su valor de saturación, mientras que la distancia L_2 se fija en la región donde la amplitud se ha saturado.

Conforme el valor de bulto ϕ_B oscila, en la punta del dedo se genera una onda que viaja lejos de la punta hacia los lados del dedo y aparece una inestabilidad lateral en la interfase cuya amplitud, A , crece hasta saturarse. En la figura 4.2 se muestra un dedo en donde la inestabilidad lateral se ha desarrollado. Es importante mencionar que la amplitud de saturación es pequeña comparada con el ancho del dedo, de forma que el efecto visual no es dramático. En la figura 4.2, x y y están en escalas distintas con el fin de que se aprecie claramente la inestabilidad.

Para cuantificar el proceso de crecimiento de la perturbación, escogemos dos puntos a distancias L_1 y L_2 de la punta del dedo para medir el ancho, $\lambda(t)$, del mismo. La distancia L_1 se fija dentro de la región donde la amplitud no ha alcanzado su valor de saturación, mientras que la distancia L_2 se fija en la región donde la amplitud se ha saturado. En este sentido, la distancia L_1 es cercana a la punta y la distancia L_2 es lejana a la punta. En la figura 4.3 se muestra una ampliación de la punta de un dedo

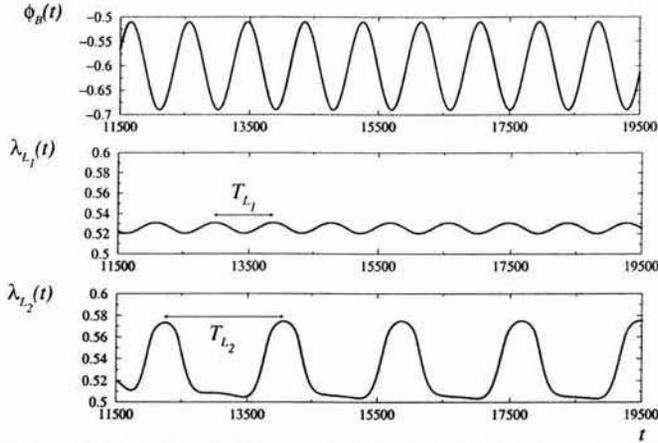


Figura 4.4: Señal incidente $\phi_B(t)$ y señales de respuesta $\lambda_{L_1}(t)$ y $\lambda_{L_2}(t)$ para $\omega_0 = 0.007$. Se puede ver que la señal $\lambda_{L_1}(t)$ tiene la misma frecuencia que $\phi_B(t)$, mientras que la señal $\lambda_{L_2}(t)$ tiene una frecuencia distinta.

oscilatorio en donde se distinguen claramente las regiones en donde se fijan L_1 y L_2 . Debido al crecimiento de la perturbación, la amplitud de la onda medida a la distancia L_1 , es menor que cuando es medida a la distancia L_2 . Una vez que hemos obtenido estas señales, que llamaremos $\lambda_{L_1}(t)$ y $\lambda_{L_2}(t)$, medimos su frecuencia angular. Para hacer esto, medimos el periodo correspondiente T_{L_i} y usamos la siguiente relación,

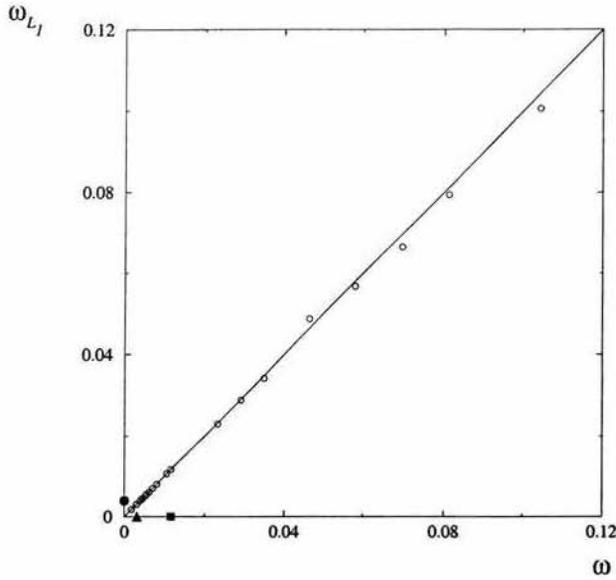
$$\omega_{L_i} = \frac{2\pi}{T_{L_i}} \quad i = 1, 2.$$

4.2.1. Selección de Modos en la Onda Lateral

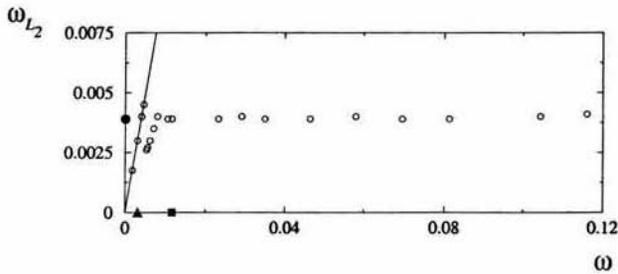
En la figura 4.4 se muestra una gráfica del ancho del dedo, $\lambda(t)$, medido a las distancias L_1 y L_2 de la punta. Además, se muestra una gráfica de la señal $\phi_B(t)$. Como puede observarse al comparar las gráficas para $\phi_B(t)$ y $\lambda_{L_1}(t)$, cerca de la punta la inestabilidad responde linealmente a la frecuencia incidente, esto es,

$$\omega_{L_1} = \omega_0.$$

Esto quiere decir que en esta zona la longitud de onda de la perturbación está estrictamente regulada por la frecuencia incidente. No ocurre lo mismo en la zona lejana a la



(a)



(b)

Figura 4.5: (a) Frecuencia del ancho del dedo en la zona cercana a la punta del dedo, ω_{L1} , vs la frecuencia incidente, ω . Se observa que para todo el rango de frecuencias estudiado estas cantidades son iguales. (b) Frecuencia del ancho del dedo en la zona lejana a la punta del dedo, ω_{L2} , vs la frecuencia incidente, ω . Se observa una zona de transición donde la respuesta es distinta a aquella de la señal incidente y una zona de selección en donde se amplifica una sola frecuencia. La frecuencia de selección, ω^* , se indica sobre el eje de las ordenadas por un círculo. Las frecuencias características ω_∞ y ω_{dedo} se indican sobre el eje de las abscisas por un triángulo y un cuadrado respectivamente. En cada una de estas simulaciones, $t^* = 4500$ y el tiempo total de simulación fue de 44500.

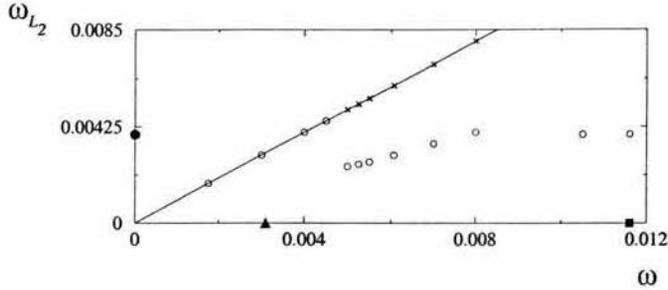


Figura 4.6: Zonas de régimen lineal y de transición de la curva ω_{L_2} vs ω_0 . Las frecuencias de respuesta en la zona de transición corresponden a la mitad de la frecuencia incidente. Para ilustrarlo, hemos graficado con cruces el doble de las frecuencias de respuesta y vemos que en todos los casos caen sobre la línea de respuesta lineal.

punta donde la frecuencia de la señal $\lambda_{L_2}(t)$ tiene un valor distinto al de la frecuencia incidente, *i.e.*, $\omega_{L_2} \neq \omega_0$.

En la figura 4.5(a) se muestra una gráfica de la frecuencia ω_{L_1} vs la frecuencia incidente, ω_0 . Como puede observarse en esta gráfica, el comportamiento lineal cerca de la punta del dedo se conserva para todo el rango de frecuencias estudiado.

El comportamiento de la zona lejana a la punta resulta mucho más interesante. En la figura 4.5(b) se muestra una gráfica ω_{L_2} vs ω_0 en donde pueden distinguirse claramente tres regímenes distintos. En esta gráfica, la línea sólida corresponde a la tendencia lineal observada en la zona cercana a la punta.

Primero, a frecuencias bajas, la respuesta permanece modulada por la señal incidente y sigue un comportamiento lineal, esto es,

$$\omega_{L_2} = \omega_0.$$

Después, en un intervalo comprendido entre las frecuencias del flujo en el infinito, ω_∞ , y del dedo estacionario, ω_{dedo} , la onda suprime uno de cada dos picos dando lugar a la selección de una frecuencia igual a la mitad del valor de la frecuencia incidente, es

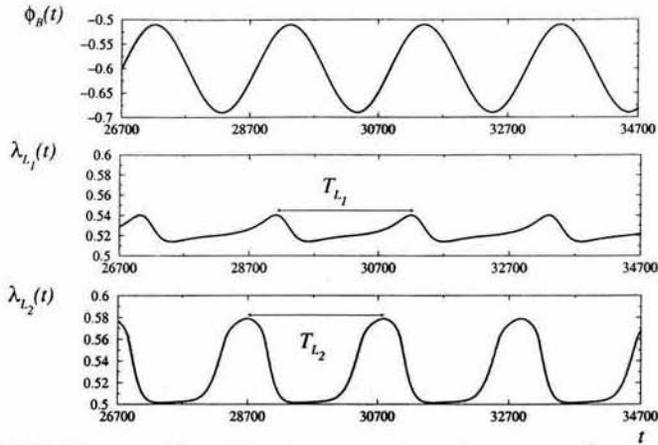


Figura 4.7: Señal incidente, $\phi_B(t)$ y señales de respuesta λ_{L_1} y λ_{L_2} para una frecuencia incidente de la zona lineal de la gráfica 4.5(b). Puede observarse cómo las señales de respuesta están moduladas por la frecuencia incidente.

decir,

$$\omega_{L_2} = \frac{1}{2}\omega_0.$$

En la gráfica 4.5(b) este comportamiento se observa en la zona de transición que sigue inmediatamente de la zona que cae sobre la diagonal y que hemos ampliado en la figura 4.6.

Finalmente, a frecuencias incidentes más altas que la frecuencia ω_{dedo} , la onda selecciona una sola frecuencia, de forma que independientemente del valor incidente se cumple que

$$\omega_{L_2} = \omega^*.$$

La frecuencia de selección, ω^* , corresponde a *grosso modo* a la frecuencia característica del flujo en el infinito, *i.e.*,

$$\omega^* \simeq \omega_\infty.$$

Este comportamiento puede ser explicado, al menos de forma cualitativa, mediante los mismos argumentos de estabilidad que fueron presentados en la sección 2.3. En

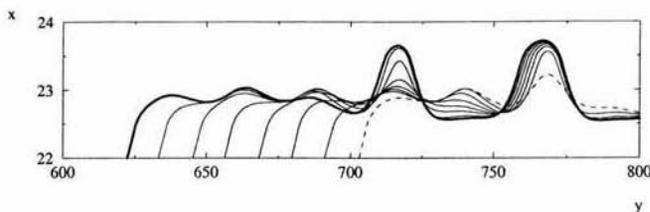


Figura 4.8: Secuencia temporal del dedo para una frecuencia incidente que cae en la zona de transición que hemos ampliado en la figura 4.6. La línea punteada corresponde al primer paso de tiempo incluido en la secuencia. La línea más ancha indica el último tiempo de la secuencia y evidencia la supresión de uno de cada dos picos en la onda.

todos los sistemas de crecimiento de interfases las etapas tempranas de crecimiento están reguladas por efectos desestabilizadores o estabilizadores. Por lo general, la competencia entre estos efectos hace que las perturbaciones de longitud de onda grande crezcan y las perturbaciones de longitud de onda pequeña decaigan. Además, dentro del rango de longitudes de onda inestables, es común encontrar una longitud de onda más inestable que todas las demás, es decir, una longitud de onda que crece más rápido que las otras.

En nuestro caso, al introducir un gradiente de presión oscilatorio, el dedo responde generando una inestabilidad lateral cuya longitud de onda inicial está estrictamente regulada por la frecuencia incidente (comportamiento lineal de la gráfica 4.5(a)). Como hemos visto, en nuestro sistema el efecto estabilizador es introducido por la tensión superficial.

Bajo estos argumentos de estabilidad, podemos pensar que a frecuencias incidentes muy pequeñas, que corresponden al régimen lineal de la gráfica 4.5(b), la tensión superficial no es capaz de suprimir la inestabilidad lateral cuya longitud de onda es muy grande. Por esta razón la amplitud de la inestabilidad crece y se satura. En la figura 4.7 se muestra una gráfica de la señal incidente y de las señales de respuesta para un frecuencia que cae en la zona lineal.

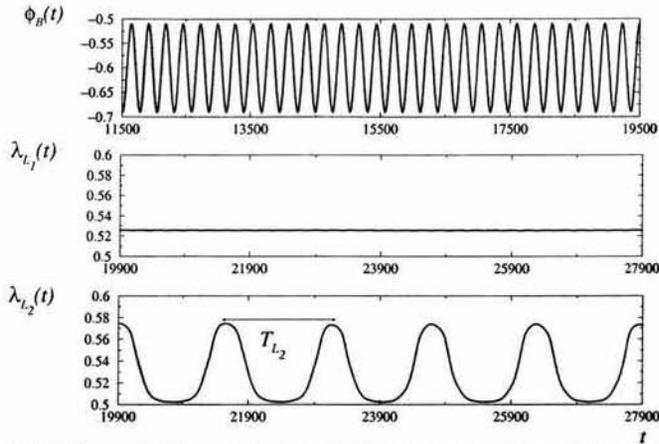


Figura 4.9: Señal incidente, $\phi_B(t)$ y señales de respuesta λ_{L_1} y λ_{L_2} para una frecuencia incidente de la zona de selección de la gráfica 4.5(b). Puede observarse cómo la señal λ_{L_2} selecciona una frecuencia distinta a la de la señal incidente.

A frecuencias más altas (zona de transición de la figura 4.5(b)), la tensión superficial es suficientemente grande para suprimir la inestabilidad lateral cuya longitud de onda es Λ , pero no suficientemente grande para suprimir el primer armónico de ésta, cuya longitud de onda es 2Λ . Esto explica porqué en esta zona la frecuencia de la inestabilidad en la zona de saturación es siempre igual a la mitad del valor de la frecuencia incidente. Este efecto se puede observar en la figura 4.4. De hecho, el proceso en el que la onda cambia su frecuencia a la mitad puede observarse durante las simulaciones, como se muestra en la secuencia temporal de la figura 4.8.

Finalmente, a frecuencias más altas el número de armónicos de la inestabilidad se hace más grande. Por tanto, la tensión superficial suprime la frecuencia incidente y se selecciona la frecuencia del armónico más inestable, que para frecuencias incidentes altas es, a *grosso modo*, la misma. En la figura 4.9 se muestra una gráfica de la señal incidente y de las señales de respuesta para un frecuencia que cae en la zona de selección.

En el marco de referencia del laboratorio, la posición de la interfase lejos de la punta

del dedo permanece estática una vez que la amplitud de la perturbación se satura. Además, hemos dicho que la frecuencia de selección corresponde a *grosso modo* a la frecuencia del flujo en el infinito, ω_∞ . Por tanto, la longitud de onda de la inestabilidad en la zona de selección puede aproximarse como

$$\Lambda = \frac{U}{\nu^*} \simeq \frac{U}{\nu_\infty} = \frac{W}{\lambda},$$

en donde ν_∞ está dada por la ecuación (4.2). Esta relación nos permite, para un experimento dado, calcular de forma aproximada la longitud de onda de la inestabilidad lateral en términos del ancho de la celda y del ancho del dedo estacionario. Para un dedo rápido el ancho es aproximadamente la mitad del ancho del canal [9]. Por lo tanto la longitud de onda esperada es

$$\Lambda \simeq 2W.$$

Esto quiere decir que la inestabilidad lateral tiene una longitud de onda grande ya que es del orden del ancho de la celda. Además, de las simulaciones, hemos encontrado que para la zona de selección la distancia de saturación de la inestabilidad, d_s , medida desde la punta del dedo es aproximadamente cinco veces la longitud de onda o diez veces el ancho del canal. Esto implica que para observar la inestabilidad en un canal de, por ejemplo, 10 cm de ancho, haría falta que la celda tuviera una longitud mayor a 1 m. Además, la longitud de onda esperada en tal caso sería de 20 cm. Por lo tanto, si se quisieran observar cinco longitudes de onda completas, la celda tendría que tener aproximadamente 2 m de largo. Esto quiere decir que la celda necesitaría una relación de aspecto L/W de aproximadamente 20.

En la zona lineal y en la zona de transición la inestabilidad aparece más cerca de la punta del dedo. En la zona lineal esto ocurre a distancias típicas del orden de la longitud de onda de la inestabilidad, *i.e.*, $d_s \simeq \Lambda$, mientras que en la zona de transición la distancia de saturación es típicamente del doble de la longitud de onda, $d_s \simeq 2\Lambda$. En la figura 4.10 se muestran dedos típicos de cada uno de los casos.

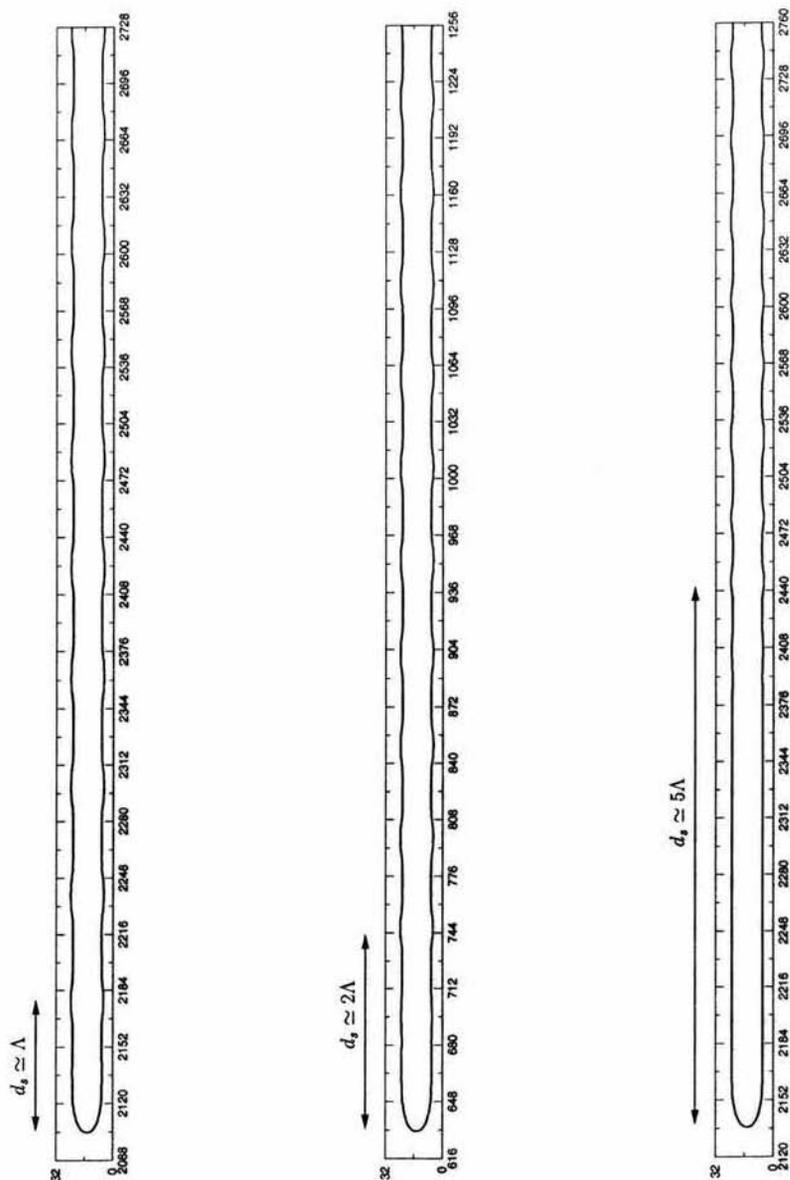


Figura 4.10: Dedos oscilatorios en escala 1:1 para tres frecuencias incidentes, que caen, de izquierda a derecha, en la zona lineal, la zona de transición y la zona de selección de la figura 4.5(b). La distancia de saturación de la perturbación, d_s , es de aproximadamente Λ , 2Λ y 5Λ respectivamente. Para el dedo en la zona de selección (extrema derecha), $\Lambda \approx 2W$.

Nuestros resultados indican que el dedo normal de Saffman-Taylor tiene una inestabilidad lateral para todo el rango de frecuencias estudiado. Como sabemos, todos los sistemas experimentales tienen, inevitablemente, algún tipo de ruido, y en particular, el ruido blanco se compone de todas las frecuencias. En este sentido, uno podría preguntarse por qué la gran mayoría de los experimentos para dedos de Saffman-Taylor normales no observan ninguna inestabilidad lateral.

Una posible respuesta sería que la intensidad del ruido no es suficiente para causar la inestabilidad. Por esto, decidimos estudiar el efecto de la intensidad de la señal incidente en la inestabilidad. Hemos elegido estudiar el caso de una señal incidente en la zona de comportamiento lineal, esto es, cuando la amplitud de la inestabilidad se satura cerca de la punta. En particular hemos elegido usar una frecuencia incidente igual a la frecuencia de selección, *i. e.*, $\omega_0 = \omega^*$.

Como la frecuencia de selección cae dentro del régimen lineal de la figura 4.5(b), la frecuencia de respuesta a las distancias L_1 y L_2 , será igual a la frecuencia incidente, esto es,

$$\omega_{L_1} = \omega_{L_2} = \omega_0.$$

Como puede verse en la la figura 4.11, la amplitud en la zona cercana a la punta, A_{L_1} crece monótonamente con la amplitud incidente, δ^1 . Es importante hacer notar que la amplitud ha sido medida a la misma distancia L_1 en todos los casos. En la misma figura se observa que la amplitud A_{L_2} alcanza un valor de saturación para todo el rango de amplitudes incidentes probado. Esto quiere decir que sin importar la amplitud de la señal incidente, el dedo responde dando lugar siempre al crecimiento de una inestabilidad que, muy lejos de la punta, es indistinguible para las diferentes amplitudes de la señal incidente.

¹Para calcular la amplitud en cada una de estas regiones restamos el valor promedio del ancho del dedo en el tiempo al ancho del dedo, esto es, $\lambda(t) - \langle \lambda \rangle$, y medimos la amplitud máxima de esta señal.

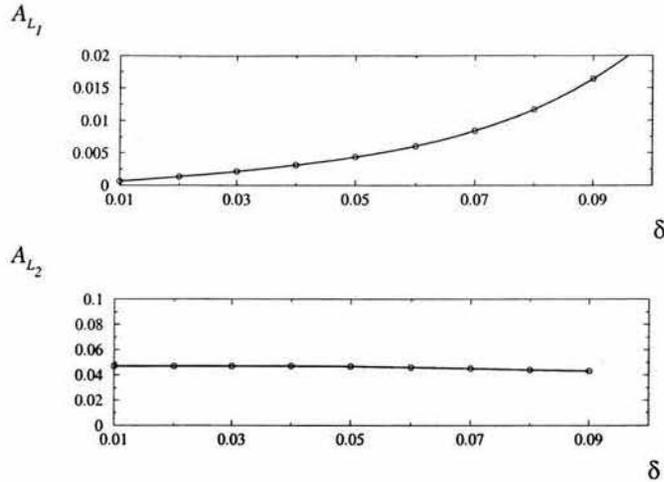


Figura 4.11: Amplitudes de la onda lateral cerca y lejos de la punta, A_{L_1} y A_{L_2} , vs la amplitud de la señal incidente δ . En el caso de A_{L_1} , se observa una tendencia monótona creciente con la amplitud incidente mientras que A_{L_2} alcanza el mismo valor de saturación independientemente de la amplitud incidente..

En la figura 4.12 se muestra una serie de perfiles para distintos valores de la amplitud de la señal incidente. En esta figura, δ crece de izquierda a derecha, es decir, el primer perfil tiene el valor más pequeño de la amplitud incidente. Como podemos ver, la distancia de saturación d_s tiene una clara dependencia con la amplitud de la señal incidente. A valores bajos de δ , la distancia de saturación, d_s , es grande, mientras que a valores altos de δ , d_s es pequeña. Esta tendencia puede observarse claramente en la figura 4.13. En esta figura se observa que la distancia de saturación para la amplitud más baja es aproximadamente $d_s \simeq 10W$. La amplitud incidente en este caso es $\delta = 0.01$.

Estos resultados indican que la inestabilidad lateral existe para cualquier valor de la amplitud incidente. Sin embargo, es claro que mientras más pequeña sea ésta, más lejos de la punta del dedo se satura la amplitud de la inestabilidad lateral. En este capítulo vimos que la distancia de saturación también es una función de la frecuencia incidente. Por tanto, al introducir una señal de amplitud pequeñísima, ambos efectos

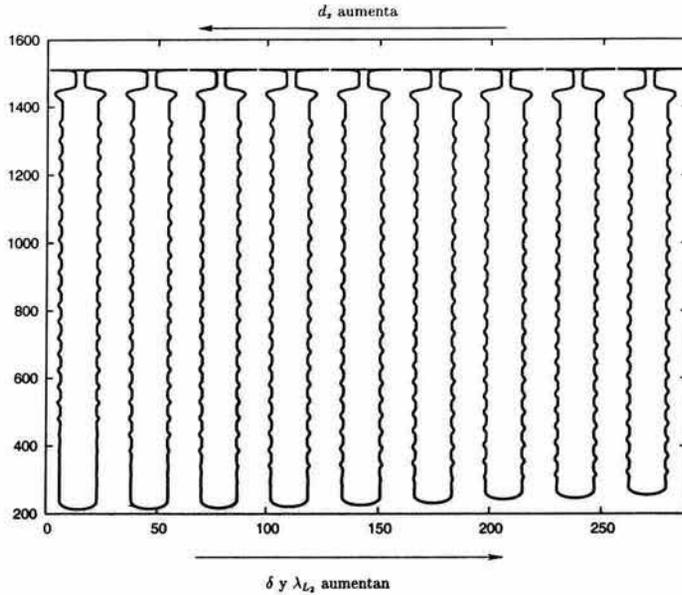


Figura 4.12: Perfiles de dedos oscilatorios de Saffman-Taylor para una frecuencia incidente igual a la frecuencia de selección a distintas amplitudes incidentes. En la gráfica, la amplitud crece de izquierda a derecha, de un valor $\delta = 0.01$ a un valor $\delta = 0.09$. Se puede observar claramente cómo la distancia de saturación se hace más pequeña conforme la amplitud de la señal incidente aumenta. En este caso, $nx = 32$ y $ny = 1600$. En estas simulaciones, el tiempo para alcanzar el estado estacionario es $t^* = 4500$ y el tiempo total de simulación es de 44500.

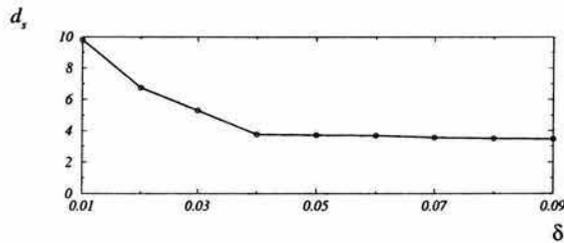


Figura 4.13: Distancia de saturación de la inestabilidad lateral (en unidades del ancho del canal) vs la amplitud incidente. Se observa que la distancia de saturación es mayor a valores bajos de la amplitud incidente.

entrarían en juego y se necesitarían celdas aún más largas para poder observar la inestabilidad lateral. Esto se agravaría aún más si se quisiera ver un dedo con selección de modos, ya que en este caso, la inestabilidad aparece lejos de la punta incluso al usar una señal incidente de amplitud grande. Los estudios experimentales reportan celdas cuya razón de aspecto, L/W , va desde $L/W = 3.17$ en los experimentos de Saffman y Taylor, hasta $L/W = 12$, en los experimentos de Swinney [20]. En todos los casos, excepto en esta última referencia, se observan dedos cuyos lados son estables. En la referencia [20], se reportan dedos con fluctuaciones laterales. Desde nuestro punto de vista, la ocurrencia de estas fluctuaciones podría estar relacionada con la inestabilidad que aquí reportamos.

RESULTADOS SECUNDARIOS

En este capítulo presentamos las tendencias más significativas que hemos encontrado al variar la frecuencia, la amplitud y el valor promedio de la señal incidente en la ecuación (4.3). Además, discutimos brevemente el efecto de la inestabilidad lateral sobre el ancho del dedo.

5.1. *Efecto de la frecuencia incidente en la amplitud de la inestabilidad lateral.*

En estas pruebas, hemos variado la frecuencia en un amplio rango alrededor de las frecuencias del estado estacionario, ω_∞ y ω_{dedo} . Para ello hemos fijado la amplitud incidente con un valor de $\delta = 0.09$.

La amplitud en la zona cercana a la punta de dedo, A_{L_1} presenta un comportamiento monótono decreciente con la frecuencia incidente. Esto puede observarse en la figura 5.1(a). Este resultado indica que a frecuencias altas la inestabilidad no es apreciable en la zona cercana a la punta del dedo.

Con respecto a la amplitud de la inestabilidad en la zona lejana a la punta del dedo, A_{L_2} , hemos encontrado que para un amplio rango de frecuencias incidentes, ésta alcanza el mismo valor de saturación. Este comportamiento puede observarse en la figura 5.1(b). A frecuencias bajas, aproximadamente $\omega_0 < \omega_{\text{dedo}}$, tenemos una zona

donde la amplitud no sigue un comportamiento monótono y que no hemos estudiado con mayor detalle.

El comportamiento de la amplitud A_{L_1} es consistente con predicciones teóricas llevadas a cabo por Corvera Poiré y del Río [21], quienes obtuvieron una expresión para la cota inferior del ancho del dedo cuando éste es sujeto a un gradiente de presión oscilatorio de la forma

$$\Delta p(t) = \Delta p_0 + \Delta p_a \cos(\omega_0 t),$$

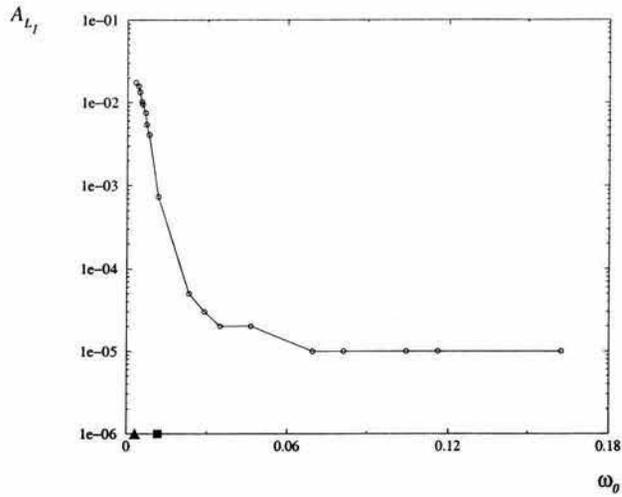
donde Δp es el gradiente de presión, Δp_0 es un gradiente de presión constante, Δp_a es una amplitud y ω_0 es la frecuencia angular incidente. La expresión que obtuvieron para el ancho del dedo es,

$$\lambda^2(t) = \lambda_S^2 \left[1 + \frac{p_a}{p_0} \frac{K(\omega_0)}{K(0)} e^{i\omega_0 t} \right], \quad (5.1)$$

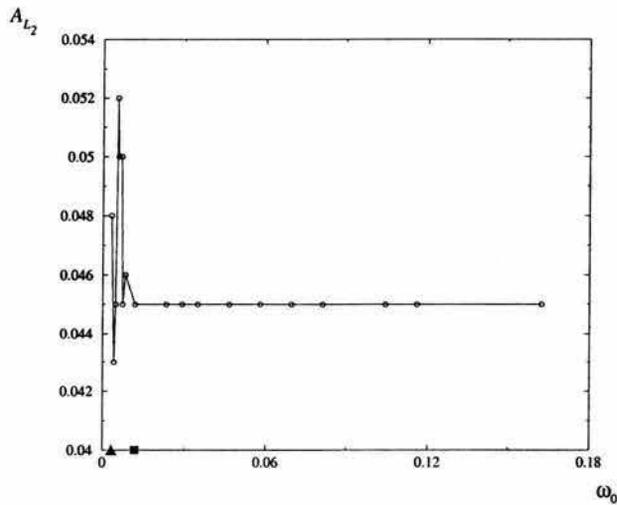
donde $K(\omega_0)$ es la permeabilidad dinámica del sistema. Como puede verse en esta ecuación, la amplitud de onda es proporcional a la permeabilidad dinámica, $K(\omega_0)$ que a su vez decrece monótonamente con la frecuencia. Como vemos, estos resultados son consistentes con nuestras simulaciones solamente en la zona cercana a la punta del dedo, donde el fenómeno de selección aún no entra en juego. Esto puede deberse a que para los cálculos de la cota inferior, se linealizan las ecuaciones de movimiento, y el proceso de selección parece ser un fenómeno no lineal.

5.2. Efecto de la velocidad de la punta del dedo en la amplitud de la inestabilidad lateral.

En estas pruebas hemos fijado la frecuencia incidente, ω_0 y la amplitud incidente, δ , y hemos variado el valor de bulto del parámetro de orden que es equivalente a variar la velocidad de la punta del dedo. Hemos fijado la frecuencia incidente a un valor igual al de la frecuencia de selección, $\omega_0 = \omega^*$, y hemos impuesto un valor de la amplitud



(a)



(b)

Figura 5.1: (a) Amplitud de la inestabilidad lateral cerca de la punta vs la frecuencia incidente ω_0 . (b) Amplitud de la inestabilidad lateral lejos de la punta vs la frecuencia incidente ω_0 . Se indican los puntos correspondientes a las frecuencias características del sistema y del dedo con un triángulo y un cuadrado respectivamente.

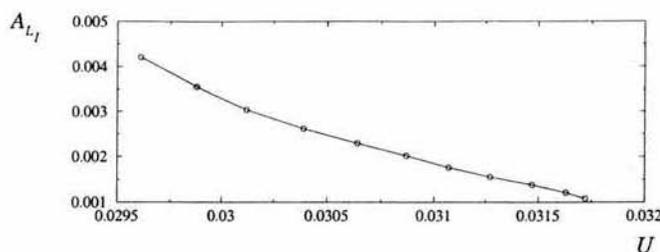


Figura 5.2: Amplitud de la inestabilidad A_{L_1} vs la velocidad media de la punta del dedo, U . La amplitud de la onda decrece con la velocidad media U .

$$\delta = 0.05.$$

Para una frecuencia incidente igual a la frecuencia de selección, se conserva el comportamiento lineal de la respuesta e independientemente del valor de la velocidad en la punta del dedo se cumple que

$$\omega_{L_1} = \omega_{L_2} = \omega_0.$$

Con respecto a la amplitud de la onda, hemos encontrado que en la zona cercana a la punta del dedo, ésta decrece monótonamente con la velocidad (ver figura 5.2). En la zona lejana a la punta del dedo hemos encontrado que la amplitud crece hasta saturarse con el mismo valor para todas las velocidades estudiadas. Además, la distancia de saturación de la amplitud, d_s , aumenta con la velocidad (ver figura 5.3). Hemos encontrado que esta distancia es del orden de $d_s \simeq 6W$ para los dedos más rápidos estudiados.

5.3. Efecto de la inestabilidad lateral en el ancho del dedo

Debido a que la inestabilidad lateral que aquí hemos reportado, puede tener importancia en el mejoramiento de procesos tecnológicos como la recuperación secundaria de petróleo, hemos incluido los siguientes resultados en donde explicamos la dependencia del ancho del dedo con la frecuencia y amplitud incidentes, así como con la

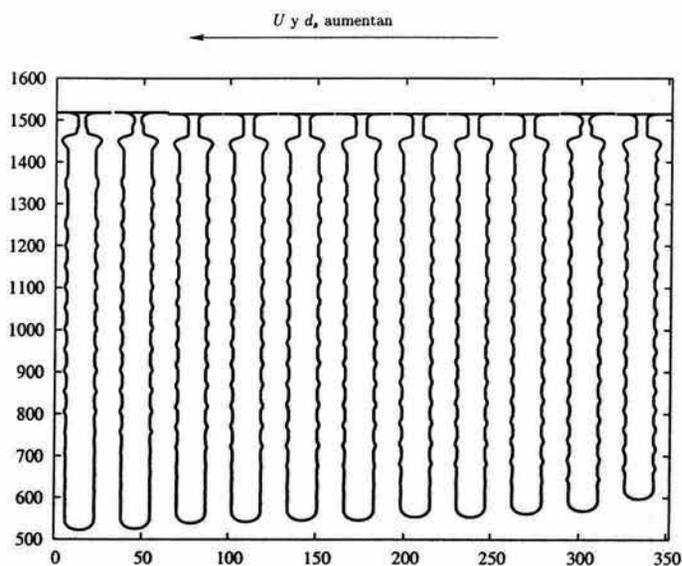


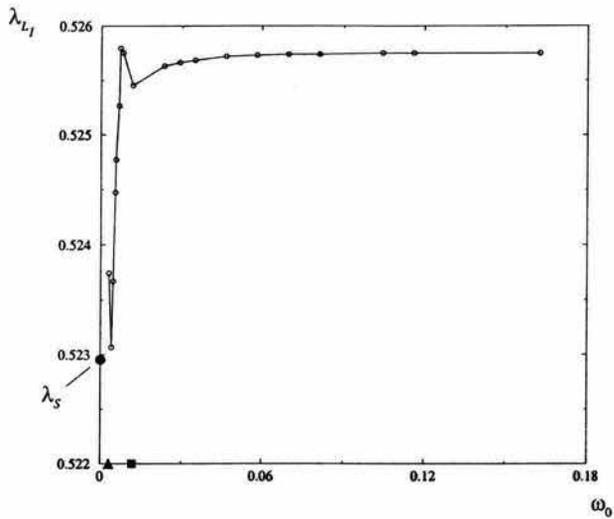
Figura 5.3: Perfiles de dedos oscilatorios de Saffman-Taylor para una frecuencia incidente igual a la frecuencia de selección a distintas velocidades. En la gráfica, la velocidad crece de derecha a izquierda. Se puede observar claramente cómo la distancia de saturación crece con la velocidad. En estas simulaciones, $n_x = 32$ y $n_y = 1600$, el tiempo para alcanzar el estado estacionario es $t^* = 4500$ y el tiempo total de simulación es 44500.

velocidad de la punta del dedo. Sin embargo, estos resultados podrían no ser significativos debido a que los efectos observados son pequeños y podrían deberse a la precisión del método numérico.

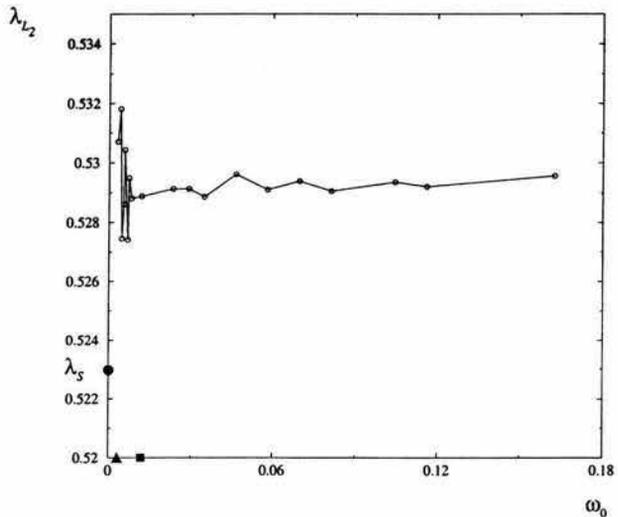
Con respecto a la dependencia con la frecuencia incidente, hemos encontrado que tanto en la zona dada por L_1 como en la zona dada por L_2 , el ancho del dedo varía en una pequeña escala ante variaciones de la frecuencia incidente. En la figura 5.4 se muestran gráficas de estas tendencias. En la zona cercana a la punta, hemos encontrado un máximo entre las frecuencias características del estado estacionario seguido por un rango de frecuencias altas donde el ancho se satura. Para la zona lejana a la punta del dedo, se observa que para frecuencias altas el ancho del dedo permanece más o menos constante. Para frecuencias bajas el ancho del dedo presenta un comportamiento no monótono con la frecuencia. Para todas las frecuencias incidentes, el ancho del dedo es mayor que el ancho del estado estacionario por un factor no mayor al 0.5% en la zona cercana a la punta del dedo, y por un factor no mayor al 1.5% en la zona lejana a la punta del dedo.

La dependencia del ancho del dedo en la zona lejana a la punta del dedo, λ_{L_2} , con la amplitud incidente, δ , se muestra en la figura 5.5. En esta gráfica se observa una tendencia creciente del ancho del dedo con la amplitud incidente. En el caso estudiado donde el ancho es más grande, encontramos que es mayor al ancho del estado estacionario por un factor de 2%.

Como se ha explicado anteriormente, los resultados del estado estacionario indican que el ancho del dedo disminuye conforme aumenta la velocidad. Este comportamiento se observa también en el régimen dinámico que hemos estudiado. En la figura 5.6 se muestra una gráfica λ_{L_1} vs U a distintas frecuencias incidentes. En dicha figura se muestran las curvas correspondientes a cinco frecuencias incidentes y la curva correspondiente al gradiente de presión constante. Se observa que las diferencias entre las



(a)



(b)

Figura 5.4: Efecto de la frecuencia sobre el ancho del dedo medido a las distancias L_1 y L_2 . En ambas gráficas se indica el valor del ancho del dedo en el estado estacionario, λ_S . Las frecuencias características del estado estacionario, ω_{dedo} y ω_∞ se indican con un triángulo y un cuadrado respectivamente.

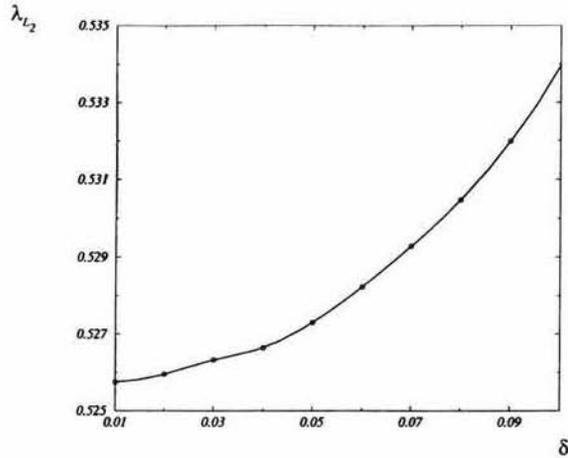


Figura 5.5: Ancho del dedo en la zona lejana a la punta vs la amplitud incidente. Se observa que el ancho del dedo crece conforme la amplitud incidente crece.

curvas no son apreciables y que el efecto del gradiente de presión oscilante es despreciable al menos en la zona cercana a la punta del dedo. Para la zona lejana a la punta del dedo, el ancho del dedo, λ_{L_2} es ligeramente mayor que en el caso estacionario, aunque por un factor del orden del 1%.

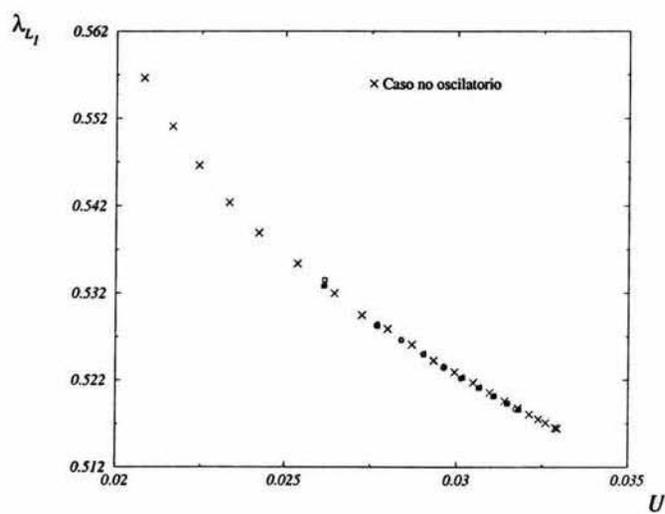


Figura 5.6: Curvas λ_{L_1} vs U para cinco frecuencias incidentes. Todas las curvas caen sobre la curva del estado estacionario.

CONCLUSIONES

Hemos visto que el modelo de campo conformado por las ecuaciones (3.1) y (4.3) simula la desestabilización de un dedo estacionario de Saffman-Taylor. Dicha desestabilización ocurre por efecto de una perturbación lateral de la interfase que se genera en la punta del dedo por la imposición de una caída de presión oscilatoria. En un principio, la onda lateral está estrictamente modulada por la frecuencia incidente. Sin embargo, dependiendo del valor de esta frecuencia, la onda puede sufrir un proceso de selección. Esto es, la onda cambia su frecuencia. En todos los casos, sin importar si el proceso de selección ocurre o no, la interfase se desestabiliza y da lugar al crecimiento de estructuras laterales de muy pequeña amplitud y longitud de onda grande.

El proceso de selección que sufre la onda lateral puede explicarse por medio de argumentos de estabilidad en los que la tensión superficial tiene un efecto estabilizador ante perturbaciones que aparecen en la interfase fluido-fluido. La tensión superficial suprime perturbaciones de longitud de onda pequeña mientras que no puede suprimir perturbaciones de longitud de onda grande. Además, es común que en un sistema exista un rango de longitudes de onda inestables de las cuales una en particular es más inestable que las otras y que por tanto crece más rápido. Esta es justamente una generalidad de los sistemas en donde se presenta el crecimiento de interfases. En nuestro sistema existen tres regímenes en la respuesta de la interfase ante un flujo controlado por la frecuencia. Primero, hemos observado que para un amplio rango de frecuencias existe un régimen de selección en el que sin importar el valor de la frecuencia incidente, la interfase selecciona una misma frecuencia de respuesta. Esto

ocurre debido a que la tensión superficial suprime el modo inicial de la inestabilidad pero no el armónico de selección. Por tanto, la longitud de onda se hace más grande y la inestabilidad crece hasta que su amplitud se satura. Para frecuencias más bajas existe un régimen de transición donde la tensión superficial suprime el modo inicial pero no su primer armónico. Esto hace que la frecuencia de respuesta sea igual a la mitad de la frecuencia incidente. A frecuencias bajas el modo de la inestabilidad es muy pequeño y por tanto la tensión superficial no puede suprimirlo. Esto hace que la respuesta a la frecuencia en este régimen sea lineal.

Estos resultados evidencian cómo el dedo de Saffman-Taylor es en realidad un amplificador selectivo de ruido. En todos los sistemas existe un ruido natural que puede pensarse como una señal de amplitud muy pequeña que está compuesta por todos los modos. En este sentido, uno podría preguntarse porqué esta inestabilidad no ha sido observada en la gran mayoría de los experimentos para dedos normales de Saffman-Taylor. Desde nuestro punto de vista, la razón está en que la inestabilidad aparece muy lejos de la punta del dedo. Nuestros resultados para una señal incidente estrictamente periódica y de amplitud grande, indican que la inestabilidad comienza a ser perceptible a distancias típicas de diez veces el ancho del canal medidas a partir de la punta del dedo. Esto hace necesario el uso de celdas grandes. Además, esta distancia aumenta si la amplitud de la perturbación disminuye, de forma que la distancia de saturación esperada para una señal de amplitud pequeña, como el ruido natural de los sistemas, es muy grande. En los estudios experimentales la relación de aspecto ancho/longitud de la celda va desde 3.17 hasta 12 [12, 20], y solamente en el caso donde la relación de aspecto es de 12, se han reportado fluctuaciones en el ancho del dedo.

La línea principal que se desprende de este estudio es la corroboración experimental de esta inestabilidad lateral y del proceso de selección que ocurre en el dedo de Saffman-Taylor. Desde este punto de vista, nuestro trabajo es valioso no solamente

por el reporte mismo de la inestabilidad sino porque da indicios de las consideraciones experimentales que pueden llevar a su observación en el laboratorio. Como hemos discutido, la inestabilidad lateral es apreciable a escalas que implican el uso de celdas muy largas. Una segunda línea es el estudio del efecto de ruido sobre los dedos normales de Saffman-Taylor.

A

ECUACIÓN DE MOVIMIENTO DEL MODELO B

Consideremos un sistema en donde se puede identificar un parámetro de orden cuya distribución en el espacio es $\phi(\bar{r})$. La energía libre del sistema puede escribirse en potencias de ϕ como sigue,

$$F(p, T, \phi) = F_0 + \alpha\phi + A\phi^2 + C\phi^3 + B\phi^4 + \dots$$

Cuyas derivadas son

$$\frac{\partial F}{\partial \phi} = \alpha + 2A\phi + 3C\phi^2 + 4B\phi^3,$$

y

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} = 2A + 6C\phi + 12B\phi^2.$$

Aquí, los coeficientes F_0 , α , A , C y B son funciones de la presión p y la temperatura T . Escogemos formas de la energía libre que cumplan con la condición de simetría

$$F(\phi) = F(-\phi).$$

De donde los términos de primer y tercer orden deben hacerse cero,

$$\alpha(p, T) = 0$$

y

$$C(p, T) = 0.$$

Así la energía libre se reduce a la forma

$$F(p, T, \phi) = F_0 + A\phi^2 + B\phi^4.$$

Ahora supongamos que el coeficiente $A(p, T)$ es negativo y que el coeficiente $B(p, T)$ es positivo de forma que existen dos valores de equilibrio $\pm\phi_{eq}$ para el parámetro de orden dados por las condiciones

$$\frac{\partial F}{\partial \phi}(\pm\phi_{eq}) = 0$$

y

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2}(\pm\phi_{eq}) > 0.$$

Este par de expresiones nos dicen que los valores de equilibrio $\phi = \pm\phi_{eq}$ generan configuraciones energéticas de equilibrio iguales, *i. e.*, $F_{eq} = F(\phi_{eq}) = F(-\phi_{eq})$. Esto quiere decir que ambas fases se encuentran igualmente favorecidas en términos de estabilidad termodinámica lo cual hace evidente el uso de la condición de simetría escrita anteriormente. Finalmente, para tomar en cuenta que el medio no es homogéneo, introducimos un término que tome en cuenta las variaciones espaciales del parámetro de orden y que permita la presencia de una interfase. Así introducimos una forma de gradiente cuadrado [22] proporcional a $|\nabla\phi|^2$. La energía libre de la configuración $\phi(\bar{r})$ es entonces

$$F(p, T, \phi) = F_0 + K_\phi |\nabla\phi|^2 + A\phi^2 + B\phi^4 \quad (\text{A.1})$$

Para escribir la ecuación de movimiento para el parámetro de orden se utiliza el siguiente argumento. Definimos el funcional de energía libre del sistema como

$$\mathcal{F}\{\phi\} = \int F(\phi) d\bar{r},$$

y tomamos la derivada funcional de $\mathcal{F}\{\phi\}$ ¹

¹La derivada funcional puede definirse de la siguiente manera,

$$d\mathcal{F}\{\phi\} = \int dx \frac{\delta\mathcal{F}\{\phi\}}{\delta\phi(x)} \delta\phi(x),$$

donde $\mathcal{F}\{\phi\}$ es un funcional de la función $\phi(x)$. Una forma sencilla de evaluar la derivada funcional, $\frac{\delta\mathcal{F}\{\phi\}}{\delta\phi(x)}$, es evaluar el lado izquierdo de la ecuación anterior para después comparar con el lado derecho.

Por ejemplo, para un funcional

$$\mathcal{F}\{\phi\} = \int \left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 dx,$$

$$\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \phi} = -2K_\phi \nabla^2 \phi + 2A\phi + 4B\phi^3 \quad (\text{A.2})$$

y definimos el potencial químico del sistema a través de esta derivada,

$$\mu(\phi) \equiv \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \phi} = -2K_\phi \nabla^2 \phi + 2A\phi + B\phi^3 \quad (\text{A.3})$$

Ahora definimos el flujo $\mathbf{j}(\phi)$ en términos del gradiente del potencial químico, *i.e.*,

$$\mathbf{j}(\phi) = M \nabla \mu(\phi),$$

donde M es una constante de proporcionalidad. Finalmente, escribimos la ecuación de movimiento como una relación constitutiva donde la variación del parámetro de orden es proporcional al gradiente del flujo,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{j}(\phi)$$

o bien,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \nabla \cdot M \nabla \mu(\phi) \quad (\text{A.4})$$

La ecuación (3.1) es una ecuación de Ginzburg-Landau dependiente del tiempo y se conoce también como la ecuación del Modelo B bajo la clasificación de dinámica de el término $d\mathcal{F}$ es

$$d\mathcal{F} = \mathcal{F}\{\phi + \delta\phi\} - \mathcal{F}\{\phi\} = \int \left[\left(\frac{d\phi^2}{dx} + 2 \frac{d\phi}{dx} \frac{d\delta\phi}{dx} + \frac{d\delta\phi^2}{dx} \right) - \frac{d\phi^2}{dx} \right] dx.$$

Como $\delta\phi$ es un cambio infinitesimal de la función ϕ , entonces el término cuadrático puede despreciarse. Por tanto, la ecuación es

$$d\mathcal{F} = \mathcal{F}\{\phi + \delta\phi\} - \mathcal{F}\{\phi\} = \int 2 \frac{d\phi}{dx} \frac{d\delta\phi}{dx} dx.$$

Esta integral puede resolverse por partes para dar

$$d\mathcal{F} = -2 \int \delta\phi \frac{d^2\phi}{dx^2} dx.$$

Al comparar esta expresión con nuestra definición de derivada funcional encontramos que

$$\frac{\delta \mathcal{F}\{\phi\}}{\delta \phi} = -2 \frac{d^2\phi}{dx^2}.$$

fenómenos críticos de Halperin y Hohenberg [19].

Ahora supongamos que tenemos un sistema donde existe una interfase plana y estática en la posición $y = 0$ que separa a dos fases que coexisten en equilibrio. Como la interfase es plana, la ecuación diferencial se reduce a su forma unidimensional. Además, como el sistema se encuentra en equilibrio, la solución debe satisfacer la condición $\mu(\phi) = 0$, de forma que la ecuación diferencial que debe satisfacer la solución es simplemente

$$-\epsilon^2 \frac{d^2\phi}{dy^2} - \phi + \frac{1}{\phi_{eq}^2} \phi^3 = 0,$$

donde hemos fijado de forma arbitraria los coeficientes K_ϕ , A y B . La ecuación está sujeta a las condiciones de frontera

$$\phi(\pm\infty) = \pm\phi_{eq}$$

y

$$\phi(0) = 0.$$

La primera condición de frontera establece que en los bulbos de las fases el parámetro de orden se hace constante e igual a los valores de equilibrio. La segunda condición de frontera fija el valor del parámetro de orden en la interfase. La solución de la ecuación diferencial es,

$$\phi = \phi_{eq} \tanh\left(\frac{y}{\sqrt{2}\epsilon}\right) \quad (\text{A.5})$$

Es claro que el parámetro ϵ es una medida del ancho de la región interfacial. En la figura (A.1) se muestran dos perfiles de equilibrio correspondientes a dos valores del parámetro ϵ . Se observa que conforme el valor de este parámetro aumenta, la zona de transición del bulto de una a otra fase se hace más ancha.

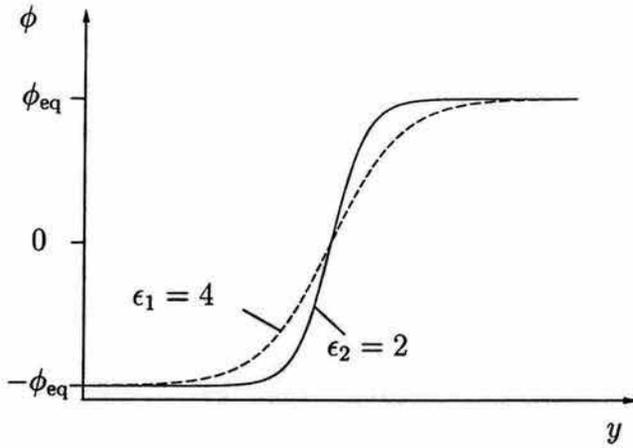


Figura A.1: Perfil unidimensional de equilibrio del parámetro de orden $\phi(y)$. El parámetro de orden varía de uno a otro valor de equilibrio en una escala proporcional a ϵ . Se muestran los perfiles correspondientes a dos valores arbitrarios $\epsilon_1 = 4$ y $\epsilon_2 = 2$.

B

DESARROLLO ASINTÓTICO DEL MODELO B

B.1. Desarrollo Asintótico del Modelo B

La reducción de la ecuación (3.1) a las ecuaciones (2.3), (2.4) y (2.5) puede ser hecha mediante un desarrollo asintótico de la ecuación (3.1) en el límite $\epsilon \rightarrow 0$. En esta sección reproducimos este procedimiento a fin de establecer con claridad la relación entre los campos y parámetros en ambas formulaciones.

La idea principal del desarrollo asintótico es la siguiente. En la figura (3.1) se observa que los bultos de las fases se encuentran separados por una región interfacial difusa cuyo ancho es proporcional al parámetro ϵ . Ahora pensemos en una ϵ infinitamente pequeña, de forma que la región interfacial se reduce a una línea y el perfil del parámetro de orden se hace discontinuo en ese punto. Esto equivale al régimen de interfase bien definida, es decir, al régimen macroscópico. Al tomar este límite, la ecuación (2.3) se recupera a partir de la región de bulto de la ecuación (3.1). Por otro lado, las condiciones de frontera (2.4) y (2.5) se obtienen a partir de la región interfacial difusa. Para poder hacer esto, escribiremos la ecuación de movimiento utilizando dos sistemas de coordenadas distintos. El primero, corresponderá a la región de la interfase y se llamará región interna y el segundo corresponderá a la región de bulto y se llamará región externa. En cada región escribiremos todos los campos y variables de la ecuación de movimiento como desarrollos alrededor de $\epsilon = 0$. Después, escribiremos esta ecuación usando estos desarrollos y obtendremos expresiones para cada orden en ϵ . Finalmente, integraremos estas expresiones y escribiremos los resul-

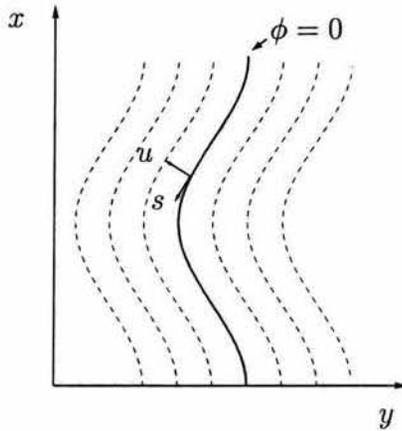


Figura B.1: Sistema de coordenadas curvilíneas, u y s , referidas a la curva $\phi = \phi_{\text{int}} = 0$ (línea continua). Las líneas punteadas representan los puntos donde u es constante.

tados en términos de los campos de bulto. Para ello utilizaremos las condiciones de continuidad pertinentes.

Como primer paso, escogemos trabajar en el marco de referencia de la curva $\phi = \phi_{\text{int}} = 0$. Utilizamos las coordenadas curvilíneas generales $u(\bar{r}, t)$ y $s(\bar{r}, t)$, para la región externa, y $U(\bar{r}, t)$ y $S(\bar{r}, t)$ para la región interna. Tanto u como U miden la distancia normal a la curva. Por otro lado, s y S miden la longitud de arco sobre la misma. Supondremos que si la coordenada normal es positiva, el campo del parámetro de orden también lo será, mientras que si la misma coordenada es negativa el campo del parámetro de orden será negativo. Además, para distinguir las variables de la zona interna y de la zona externa, denotaremos a las primeras con mayúsculas y las segundas con minúsculas. En la figura B.1 se muestra un diagrama que ilustra el marco de referencia y el sistema de coordenadas para la región externa.

En la región interna se reescala la coordenada espacial normal a la interfase, *i.e.*,

$$\omega = \frac{U}{\epsilon}, \quad (\text{B.1})$$

de forma que en el límite $\epsilon \rightarrow 0$ la coordenada ω de la región interna toma valores en

el rango

$$-\infty < \omega < \infty.$$

En la región externa cuando ϵ se hace cero tenemos que

$$+0 \leq u < \infty$$

para el fluido 1, y

$$-\infty < u \leq -0$$

para el fluido 2.

Con respecto al parámetro M , establecemos el siguiente perfil de escalón,

$$M = \begin{cases} M_1 & \text{si } \phi > 0 \\ M_2 & \text{si } \phi < 0. \end{cases}$$

Más tarde haremos $M_1 = 0$ para introducir el régimen de alto contraste viscoso.

Ahora escribiremos los desarrollos en potencias de ϵ para nuestras variables, *i.e.*,

$$a(u, s, t) = a_0 + \epsilon a_1 + \epsilon^2 a_2 + \dots.$$

y

$$A(\omega, S, t) = A_0 + \epsilon A_1 + \epsilon^2 A_2 + \dots,$$

donde a designa cualquier variable de la región externa y A designa cualquier variable de la región interna.

Ahora escribiremos las condiciones de continuidad.

$$\lim_{u \rightarrow \pm 0} a_i = \lim_{\omega \rightarrow \pm \infty} A_i, \quad (\text{B.2})$$

$$\lim_{u \rightarrow \pm 0} \frac{\partial a_i}{\partial u} = \lim_{\omega \rightarrow \pm \infty} \frac{\partial A_{i+1}}{\partial \omega} \quad \text{para } i \geq 0 \quad (\text{B.3})$$

y

$$\lim_{\omega \rightarrow \pm \infty} \frac{\partial A_0}{\partial \omega} = 0, \quad (\text{B.4})$$

donde el índice i se refiere a algún coeficiente de la serie de potencias. En las ecuaciones (B.3) y (B.4), el índice está defasado por efecto de la transformación de coordenadas (B.1).

Finalmente, como estamos interesados en el comportamiento a tiempos largos de la ecuación de movimiento, en ambas regiones reescalaremos el tiempo de la siguiente manera,

$$\tau = \epsilon t$$

B.1.1. Ecuaciones de la Región Externa

La ecuación de movimiento es

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = M \nabla^2 \mu. \quad (\text{B.5})$$

Donde el laplaciano en coordenadas curvilíneas¹es,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial u^2} - \kappa \frac{\partial}{\partial u} + |\nabla s|^2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \nabla^2 s \frac{\partial}{\partial s},$$

¹Esta forma del laplaciano se puede calcular a partir de la definición de gradiente y laplaciano en coordenadas curvilíneas generales u y s . Primero, el gradiente de una función f es,

$$\nabla f = \frac{1}{h_u} \frac{\partial f}{\partial u} \hat{u} + \frac{1}{h_s} \frac{\partial f}{\partial s} \hat{s},$$

mientras que el laplaciano es,

$$\nabla^2 f = \frac{1}{h_u h_s} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{h_s}{h_u} \right) \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{h_u^2} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{1}{h_u h_s} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{h_u}{h_s} \right) \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{1}{h_s^2} \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}.$$

Si tomamos como funciones a u y s y calculamos sus gradientes cuadrados y laplacianos tenemos,

$$|\nabla u|^2 = \frac{1}{h_u^2} \quad |\nabla s|^2 = \frac{1}{h_s^2}$$

y

$$\nabla^2 u = \frac{1}{h_u h_s} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{h_s}{h_u} \right) \quad \nabla^2 s = \frac{1}{h_u h_s} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{h_u}{h_s} \right).$$

De forma que el laplaciano se puede escribir como

$$\nabla^2 f = |\nabla u|^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \nabla^2 u \frac{\partial f}{\partial u} + |\nabla s|^2 \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} + \nabla^2 s \frac{\partial f}{\partial s}.$$

con $\kappa = -\nabla^2 u$. Los desarrollos correspondientes son los siguientes

$$\phi = \phi_0 + \epsilon\phi_1 + \epsilon^2\phi_2, \quad (\text{B.6})$$

$$\mu = \mu_0 + \epsilon\mu_1 + \epsilon^2\mu_2,$$

$$u = u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2,$$

y

$$s = s_0 + \epsilon s_1 + \epsilon^2 s_2.$$

El lado izquierdo de la ecuación (B.5) es

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{\partial\phi}{\partial\tau} \frac{d\tau}{dt} = \epsilon \frac{\partial}{\partial\tau} (\phi_0 + \epsilon\phi_1 + \epsilon^2\phi_2).$$

i.e., Donde hemos considerado que u y s son independientes del tiempo. A segundo orden en ϵ la expresión anterior es,

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial\phi_0}{\partial\tau} + \epsilon^2 \frac{\partial\phi_1}{\partial\tau}.$$

El lado derecho de la ecuación (B.5) es,

$$M\nabla^2\mu = M\nabla^2\mu_0 + \epsilon M\nabla^2\mu_1 + \epsilon^2 M\nabla^2\mu_2.$$

De forma que se pueden escribir las siguientes ecuaciones comparando términos del mismo orden en ϵ ,

$$\epsilon^0 : \quad M\nabla^2\mu_0 = 0 \quad (\text{B.7})$$

$$\epsilon^1 : \quad M\nabla^2\mu_1 = \frac{\partial\phi_0}{\partial\tau} \quad (\text{B.8})$$

$$\epsilon^2 : \quad M\nabla^2\mu_2 = \frac{\partial\phi_1}{\partial\tau}. \quad (\text{B.9})$$

Además, sabemos que el potencial químico tiene la forma

$$\mu(\phi) = \mu_B(\phi) - \epsilon^2 \nabla^2 \phi,$$

y sabemos que $\phi(\epsilon = 0) = \phi_0$. Esto quiere decir que podemos desarrollar el potencial químico alrededor de ϕ_0 lo cual nos dará ecuaciones adicionales que utilizaremos posteriormente.

Primero desarrollamos el potencial de bulto, μ_B alrededor de ϕ_0 , i.e.,

$$\mu_B = \mu_{B0} + \mu'_{B0}(\phi - \phi_0) + \frac{1}{2}\mu''_{B0}(\phi - \phi_0)^2.$$

Ahora introducimos el desarrollo de ϕ_0 en ϵ ,

$$\mu_B = \mu_{B0} + \mu'_{B0}(\epsilon\phi_1 + \epsilon^2\phi_2) + \frac{1}{2}\mu''_{B0}(\epsilon\phi_1 + \epsilon^2\phi_2)^2.$$

Ignoramos los términos de orden superior a ϵ^2 y obtenemos

$$\mu_B = \mu_{B0} + \mu'_{B0}(\epsilon\phi_1 + \epsilon^2\phi_2) + \frac{1}{2}\mu''_{B0}\epsilon^2\phi_1^2.$$

Entonces, el potencial químico en la región externa puede escribirse como

$$\begin{aligned} \mu = & \mu_{B0} + \mu'_{B0}(\epsilon\phi_1 + \epsilon^2\phi_2) + \frac{1}{2}\mu''_{B0}\epsilon^2\phi_1^2 \\ & - \epsilon^2 \left\{ \frac{\partial^2\phi_0}{\partial u^2} - \kappa \frac{\partial\phi_0}{\partial u} + |\nabla s|^2 \frac{\partial^2\phi_0}{\partial s^2} + \nabla^2 s \frac{\partial\phi_0}{\partial s} \right. \\ & + \epsilon \frac{\partial^2\phi_1}{\partial u^2} - \epsilon\kappa \frac{\partial\phi_1}{\partial u} + \epsilon |\nabla s|^2 \frac{\partial^2\phi_1}{\partial s^2} + \epsilon \nabla^2 s \frac{\partial\phi_1}{\partial s} \\ & \left. + \epsilon^2 \frac{\partial^2\phi_2}{\partial u^2} - \epsilon^2\kappa \frac{\partial\phi_2}{\partial u} + \epsilon^2 |\nabla s|^2 \frac{\partial^2\phi_2}{\partial s^2} + \epsilon^2 \nabla^2 s \frac{\partial\phi_2}{\partial s} \right\}. \end{aligned}$$

A segundo orden en ϵ esta expresión es,

$$\begin{aligned} \mu = & \mu_{B0} + \mu'_{B0}(\epsilon\phi_1 + \epsilon^2\phi_2) + \frac{1}{2}\mu''_{B0}\epsilon^2\phi_1^2 \\ & - \epsilon^2 \left(\frac{\partial^2\phi_0}{\partial u^2} - \kappa \frac{\partial\phi_0}{\partial u} + |\nabla s|^2 \frac{\partial^2\phi_0}{\partial s^2} + \nabla^2 s \frac{\partial\phi_0}{\partial s} \right), \end{aligned}$$

reescribiendo, tenemos que

$$\begin{aligned} \mu = & \epsilon^0 \mu_{B0} + \epsilon^1 \mu'_{B0} \phi_1 \\ & + \epsilon^2 \left(\mu'_{B0} \phi_2 + \frac{1}{2} \mu''_{B0} \phi_1^2 - \nabla^2 \phi_0 \right). \end{aligned}$$

Ahora igualamos esta expresión con el desarrollo para μ en términos de ϵ ,

$$\mu = \mu_0 + \epsilon\mu_1 + \epsilon^2\mu_2$$

y comparamos los términos del mismo orden en ϵ . Esto nos lleva a las siguientes expresiones,

$$\epsilon^0 : \quad \mu_0 = \mu_{B0} \quad (\text{B.10})$$

$$\epsilon^1 : \quad \mu_1 = \mu'_{B0} \phi_1, \quad (\text{B.11})$$

y

$$\epsilon^2 : \quad \mu_2 = \mu'_{B0} \phi_2 + \frac{1}{2} \mu''_{B0} \phi_1^2 - \nabla^2 \phi_0. \quad (\text{B.12})$$

B.1.2. Ecuaciones de la Región Interna

La ecuación de movimiento en la región interna tiene la siguiente forma,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = M \nabla^2 \mathcal{M}, \quad (\text{B.13})$$

donde el laplaciano en las coordenadas ω y S es,

$$\nabla^2 = \frac{1}{\epsilon^2} \frac{\partial^2}{\partial \omega^2} - \frac{\kappa}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial \omega} + |\nabla S|^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2} + \nabla^2 S \frac{\partial}{\partial S}.$$

Además, los desarrollos de las variables son los siguientes,

$$\Phi = \Phi_0 + \epsilon \Phi_1 + \epsilon^2 \Phi_2,$$

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 + \epsilon \mathcal{M}_1 + \epsilon^2 \mathcal{M}_2,$$

$$U = U_0 + \epsilon U_1 + \epsilon^2 U_2,$$

$$S = S_0 + \epsilon S_1 + \epsilon^2 S_2$$

y

$$v \equiv -\frac{\partial U}{\partial t} = v_0 + \epsilon v_1 + \epsilon^2 v_2.$$

Donde v es la velocidad de la curva. El lado izquierdo de la ecuación (B.13) es

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} \frac{d\tau}{dt} + \frac{\partial \Phi}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial t},$$

o bien,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} - \frac{v}{\epsilon} \frac{\partial \Phi}{\partial \omega},$$

donde $\frac{\partial S}{\partial t} = 0$ porque la curva está en reposo con respecto a la longitud de arco.

Sustituyendo los desarrollos correspondientes tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = & \epsilon \frac{\partial}{\partial \tau} (\Phi_0 + \epsilon \Phi_1 + \epsilon^2 \Phi_2) \\ & - \frac{1}{\epsilon} (v_0 + \epsilon v_1 + \epsilon^2 v_2) \frac{\partial}{\partial \omega} (\Phi_0 + \epsilon \Phi_1 + \epsilon^2 \Phi_2). \end{aligned}$$

Ordenando en ϵ la expresión es

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = & -\epsilon^{-1} v_0 \frac{\partial \Phi_0}{\partial \omega} - \epsilon^0 \left(v_0 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \omega} + v_1 \frac{\partial \Phi_0}{\partial \omega} \right) \\ & + \epsilon \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial \tau} - v_0 \frac{\partial \Phi_2}{\partial \omega} - v_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \omega} - v_2 \frac{\partial \Phi_0}{\partial \omega} \right) \\ & + \epsilon^2 \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \tau} - v_1 \frac{\partial \Phi_2}{\partial \omega} - v_2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \omega} \right). \end{aligned}$$

Ahora escribimos el lado derecho de la ecuación (B.13), esto es,

$$M\nabla^2\mathcal{M} = M\nabla^2(\mathcal{M}_0 + \epsilon\mathcal{M}_1 + \epsilon^2\mathcal{M}_2).$$

A diferencia de la región externa, esta expresión contiene términos en ϵ dentro del laplaciano. Por ello debemos escribirla de forma explícita, *i.e.*,

$$\begin{aligned} M\nabla^2\mathcal{M} = & M \left\{ \epsilon^{-2} \frac{\partial^2 \mathcal{M}_0}{\partial \omega^2} - \epsilon^{-1} \kappa \frac{\partial \mathcal{M}_0}{\partial \omega} + |\nabla S|^2 \frac{\partial^2 \mathcal{M}_0}{\partial S^2} + \nabla^2 S \frac{\partial \mathcal{M}_0}{\partial S} \right. \\ & + \epsilon^{-1} \frac{\partial^2 \mathcal{M}_1}{\partial \omega^2} - \kappa \frac{\partial \mathcal{M}_1}{\partial \omega} + \epsilon |\nabla S|^2 \frac{\partial^2 \mathcal{M}_1}{\partial S^2} + \epsilon \nabla^2 S \frac{\partial \mathcal{M}_1}{\partial S} \\ & \left. + \frac{\partial^2 \mathcal{M}_2}{\partial \omega^2} - \epsilon \kappa \frac{\partial \mathcal{M}_2}{\partial \omega} + \epsilon^2 |\nabla S|^2 \frac{\partial^2 \mathcal{M}_2}{\partial S^2} + \epsilon^2 \nabla^2 S \frac{\partial \mathcal{M}_2}{\partial S} \right\}. \end{aligned}$$

Ahora ordenamos los términos en ϵ ,

$$\begin{aligned} M\nabla^2\mathcal{M} = & M \left\{ \epsilon^{-2} \frac{\partial^2 \mathcal{M}_0}{\partial \omega^2} + \epsilon^{-1} \left(-\kappa \frac{\partial \mathcal{M}_0}{\partial \omega} + \frac{\partial^2 \mathcal{M}_1}{\partial \omega^2} \right) \right. \\ & + \epsilon^0 \left(|\nabla S|^2 \frac{\partial^2 \mathcal{M}_0}{\partial S^2} + \nabla^2 S \frac{\partial \mathcal{M}_0}{\partial S} - \kappa \frac{\partial \mathcal{M}_1}{\partial \omega} + \frac{\partial^2 \mathcal{M}_2}{\partial \omega^2} \right) \\ & + \epsilon^1 \left((|\nabla S|^2 \frac{\partial^2 \mathcal{M}_1}{\partial S^2} + \nabla^2 S \frac{\partial \mathcal{M}_1}{\partial S} - \kappa \frac{\partial \mathcal{M}_2}{\partial \omega}) \right) \\ & \left. + \epsilon^2 \left((|\nabla S|^2 \frac{\partial^2 \mathcal{M}_2}{\partial S^2} + \nabla^2 S \frac{\partial \mathcal{M}_2}{\partial S}) \right) \right\}. \end{aligned}$$

Al igualar ambos lados de la ecuación se pueden escribir las siguientes expresiones para los tres primeros órdenes en ϵ :

$$\epsilon^{-2} : \quad M \frac{\partial^2 \mathcal{M}_0}{\partial \omega^2} = 0, \quad (\text{B.14})$$

$$\epsilon^{-1} : \quad -v_0 \frac{\partial \Phi_0}{\partial \omega} = M \left(\frac{\partial^2 \mathcal{M}_1}{\partial \omega^2} - \kappa \frac{\partial \mathcal{M}_0}{\partial \omega} \right) \quad (\text{B.15})$$

y

$$\epsilon^0 : \quad -v_0 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \omega} - v_1 \frac{\partial \Phi_0}{\partial \omega} = M \left(|\nabla S|^2 \frac{\partial^2 \mathcal{M}_0}{\partial S^2} + \nabla^2 S \frac{\partial \mathcal{M}_0}{\partial S} - \kappa \frac{\partial \mathcal{M}_1}{\partial \omega} + \frac{\partial^2 \mathcal{M}_2}{\partial \omega^2} \right). \quad (\text{B.16})$$

Al igual que en el caso de la región externa, escribiremos las ecuaciones que resultan de desarrollar el potencial de bulto \mathcal{M}_B alrededor de Φ_0 . Primero, el potencial de bulto en la región externa es,

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_B - \epsilon^2 \nabla^2 \Phi.$$

Desarrollamos \mathcal{M}_B alrededor de Φ_0 , *i.e.*,

$$\mathcal{M}_B = \mathcal{M}_{B0} + \mathcal{M}'_{B0}(\Phi - \Phi_0) + \frac{1}{2} \mathcal{M}''_{B0}(\Phi - \Phi_0)^2.$$

Sustituimos $\bar{\Phi}$ por su desarrollo en ϵ , *i.e.*,

$$\mathcal{M}_B = \mathcal{M}_{B0} + \mathcal{M}'_{B0}(\epsilon\bar{\Phi}_1 + \epsilon^2\bar{\Phi}_2) + \frac{1}{2}\mathcal{M}''_{B0}(\epsilon\bar{\Phi}_1 + \epsilon^2\bar{\Phi}_2)^2,$$

que a segundo orden en ϵ es,

$$\mathcal{M}_B = \mathcal{M}_{B0} + \mathcal{M}'_{B0}(\epsilon\bar{\Phi}_1 + \epsilon^2\bar{\Phi}_2) + \frac{1}{2}\mathcal{M}''_{B0}\epsilon^2\bar{\Phi}_1^2,$$

de donde obtenemos la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = & \mathcal{M}_{B0} + \mathcal{M}'_{B0}(\epsilon\bar{\Phi}_1 + \epsilon^2\bar{\Phi}_2) + \frac{1}{2}\mathcal{M}''_{B0}\epsilon^2\bar{\Phi}_1^2 \\ & - \epsilon^2 \left\{ \epsilon^{-2} \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_0}{\partial \omega^2} - \epsilon^{-1} \kappa \frac{\partial \bar{\Phi}_0}{\partial \omega} + |\nabla S|^2 \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_0}{\partial S^2} + \nabla^2 S \frac{\partial \bar{\Phi}_0}{\partial S} \right. \\ & + \epsilon^{-1} \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_1}{\partial \omega^2} - \kappa \frac{\partial \bar{\Phi}_1}{\partial \omega} + \epsilon |\nabla S|^2 \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_1}{\partial S^2} + \epsilon \nabla^2 S \frac{\partial \bar{\Phi}_1}{\partial S} \\ & \left. + \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_2}{\partial \omega^2} - \epsilon \kappa \frac{\partial \bar{\Phi}_2}{\partial \omega} + \epsilon^2 |\nabla S|^2 \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_2}{\partial S^2} + \epsilon^2 \nabla^2 S \frac{\partial \bar{\Phi}_2}{\partial S} \right\}. \end{aligned}$$

Ahora eliminamos los términos de orden superior a ϵ^2 y ordenamos,

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = & \epsilon^0 \left(\mathcal{M}_{B0} - \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_0}{\partial \omega^2} \right) + \epsilon^1 \left(\mathcal{M}'_{B0} \bar{\Phi}_1 + \kappa \frac{\partial \bar{\Phi}_0}{\partial \omega} - \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_1}{\partial \omega^2} \right) \\ & + \epsilon^2 \left(\mathcal{M}'_{B0} \bar{\Phi}_2 + \frac{1}{2} \mathcal{M}''_{B0} \bar{\Phi}_1^2 - |\nabla S|^2 \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_0}{\partial S^2} \right. \\ & \left. - \nabla^2 S \frac{\partial \bar{\Phi}_0}{\partial S} + \kappa \frac{\partial \bar{\Phi}_1}{\partial \omega} - \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_2}{\partial \omega^2} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Igualamos la expresión anterior con el desarrollo $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 + \epsilon \mathcal{M}_1 + \epsilon^2 \mathcal{M}_2$ y comparamos términos del mismo orden en ϵ para obtener las siguientes expresiones:

$$\epsilon^0 : \quad \mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_{B0} - \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_0}{\partial \omega^2}, \quad (\text{B.18})$$

$$\epsilon^1 : \quad \mathcal{M}_1 = \mathcal{M}'_{B0} \bar{\Phi}_1 + \kappa \frac{\partial \bar{\Phi}_0}{\partial \omega} - \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_1}{\partial \omega^2} \quad (\text{B.19})$$

y

$$\begin{aligned} \epsilon^2 : \quad \mathcal{M}_2 = & \mathcal{M}'_{B0} \bar{\Phi}_2 + \frac{1}{2} \mathcal{M}''_{B0} \bar{\Phi}_1^2 \\ & - |\nabla S|^2 \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_0}{\partial S^2} - \nabla^2 S \frac{\partial \bar{\Phi}_0}{\partial S} \\ & + \kappa \frac{\partial \bar{\Phi}_1}{\partial \omega} - \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_2}{\partial \omega^2}. \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

B.1.3. Solución para μ_0 y \mathcal{M}_0 , perfiles de interfase plana

Las ecuaciones (B.14) y (B.18) son

$$M \frac{\partial^2 \mathcal{M}_0}{\partial \omega^2} = M \frac{\partial^2}{\partial \omega^2} \left(\mathcal{M}_{B0} - \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_0}{\partial \omega^2} \right) = 0.$$

Integramos esta ecuación dos veces en ω y obtenemos el siguiente perfil para \mathcal{M}_0 ,

$$\mathcal{M}_0 = a_0 + b_0\omega,$$

y $b_0 = 0$ de forma que \mathcal{M}_0 sea finito en el límite $\omega \rightarrow \pm\infty$. Para determinar el valor de la constante a_0 usamos el desarrollo (B.18),

$$\frac{\partial^2}{\partial\omega^2} \left(\mathcal{M}_{B0} - \frac{\partial^2\Phi_0}{\partial\omega^2} \right) = 0, \quad (\text{B.21})$$

donde

$$\mathcal{M}_{B0} = \frac{\Phi_0^3}{\Phi_{eq}^2} - \Phi_0.$$

Una solución que satisface la ecuación (B.21) es

$$\Phi_0(\omega) = \Phi_{eq} \tanh \left(\frac{\omega}{\sqrt{2}} \right). \quad (\text{B.22})$$

El potencial asociado a este perfil de Φ_0 es

$$\mathcal{M}_0(\omega) = \left(\frac{\Phi_0(\omega)^3}{\Phi_{eq}^2} - \Phi_0(\omega) - \frac{\partial^2\Phi_0(\omega)}{\partial\omega^2} \right) = 0, \quad (\text{B.23})$$

de forma que $a_0 = 0$. Por otro lado, el perfil de tangente hiperbólica, $\Phi_0(\omega)$, tiene los siguientes límites en las fronteras de la región interna,

$$\Phi_0(\omega \rightarrow \pm\infty) = \pm\Phi_{eq}, \quad (\text{B.24})$$

de forma que podemos escribir las siguientes condiciones de continuidad entre las regiones interna y externa en cada fase utilizando la condición de continuidad (B.2) y las ecuaciones (B.22) y (B.23),

$$\phi_0(u \rightarrow \pm 0) = \Phi_0(\omega \rightarrow \pm\infty) = \pm\Phi_{eq}$$

y

$$\mu_0(u \rightarrow \pm 0) = \mathcal{M}_0(\omega \rightarrow \pm\infty) = 0. \quad (\text{B.25})$$

Para la región externa, tenemos las ecuaciones (B.7) y (B.10),

$$M\nabla^2\mu_0 = M\nabla^2\mu_{B0} = 0.$$

Una solución que satisface esta ecuación diferencial junto con las condiciones de frontera fijadas por (B.25) y que no diverge lejos de la interfase es,

$$\mu_0(u) = 0,$$

de forma que el parámetro de orden en la región externa satisface la siguiente ecuación,

$$\frac{\phi_0^3}{\phi_{\text{eq}}^2} - \phi_0 = 0. \quad (\text{B.26})$$

Como hemos visto, en las fronteras se cumple que

$$\phi_0(u \rightarrow \pm\infty) = \pm\Phi_{\text{eq}}.$$

Las únicas soluciones que satisfacen la ecuación (B.26) y estas condiciones de continuidad son

$$\phi_0(u) = \Phi_{\text{eq}} \quad \text{si} \quad u > 0$$

para el fluido 1, y

$$\phi_0(u) = -\Phi_{\text{eq}} \quad \text{si} \quad u < 0,$$

para el fluido 2.

B.1.4. Ecuaciones Macroscópicas

En lo que resta de esta sección obtendremos las ecuaciones macroscópicas. Para esto, primero resolveremos las ecuaciones de movimiento en los distintos órdenes de ϵ . Después escribiremos las relaciones que identifican los parámetros mesoscópicos con los macroscópicos.

Condición de Frontera de Equilibrio Local.

A continuación obtendremos la condición de frontera de equilibrio local (2.4). Primero, escribimos la ecuación de movimiento a orden ϵ^{-1} en la región interna (ecuación (B.15)), i.e.,

$$-v_0 \frac{\partial \Phi_0}{\partial \omega} = M \left(\frac{\partial^2 \mathcal{M}_1}{\partial \omega^2} - \kappa \frac{\partial \mathcal{M}_0}{\partial \omega} \right).$$

Pero sabemos que $\mathcal{M}_0(\omega) = 0$, entonces la ecuación se reduce a

$$-v_0 \frac{\partial \Phi_0}{\partial \omega} = M \frac{\partial^2 \mathcal{M}_1}{\partial \omega^2}. \quad (\text{B.27})$$

Integramos en ω ,

$$-v_0 \Phi_0 = M \frac{\partial \mathcal{M}_1}{\partial \omega} + a_1,$$

y evaluamos a cada lado de la frontera,

$$-v_0 \Phi_{eq} = M_2 \frac{\partial \mathcal{M}_1}{\partial \omega} (\omega \rightarrow +\infty) + a_1$$

y

$$v_0 \Phi_{eq} = M_1 \frac{\partial \mathcal{M}_1}{\partial \omega} (\omega \rightarrow -\infty) + a_1.$$

Restamos estas ecuaciones y tenemos

$$v_0 2\Phi_{eq} = M_1 \frac{\partial \mathcal{M}_1}{\partial \omega} (\omega \rightarrow -\infty) - M_2 \frac{\partial \mathcal{M}_1}{\partial \omega} (\omega \rightarrow +\infty).$$

Como $\mu_0(u)$ es cero en ambas regiones externas podemos usar la condición de continuidad (B.3) para escribir

$$\frac{\partial \mathcal{M}_1}{\partial \omega} (\omega \rightarrow \pm\infty) = \frac{\partial \mu_0}{\partial u} (u \rightarrow \pm 0) = 0,$$

y por lo tanto $v_0 = 0$. Entonces, la ecuación (B.27) se reduce a la siguiente forma, *i.e.*,

$$\frac{\partial^2 \mathcal{M}_1}{\partial \omega^2} = 0.$$

Integramos dos veces y encontramos la siguiente solución para \mathcal{M}_1 ,

$$\mathcal{M}_1 = a_1 \omega + b_1,$$

y a_1 debe ser cero para que \mathcal{M}_1 sea finito en las fronteras. Luego, $\mathcal{M}_1(\omega) = b_1$. De la ecuación (B.19),

$$b_1 = \left(\mathcal{M}'_{B0} - \frac{\partial^2}{\partial \omega^2} \right) \Phi_1 + \kappa \frac{\partial \Phi_0}{\partial \omega}.$$

Multiplicamos esta ecuación por $\frac{\partial \Phi_0}{\partial \omega}$ e integramos en ω en toda la región interna,

$$b_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \omega} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \omega} \left(\mathcal{M}'_{B0} - \frac{\partial^2}{\partial \omega^2} \right) \Phi_1 d\omega + \kappa \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial \omega} \right)^2 d\omega. \quad (\text{B.28})$$

Ahora integraremos por partes el primer término del lado derecho. Primero lo separamos en dos integrales,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \omega} \left(\mathcal{M}'_{B0} - \frac{\partial^2}{\partial \omega^2} \right) \Phi_1 d\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial \omega} \mathcal{M}'_{B0} \Phi_1 - \frac{\partial \Phi_0}{\partial \omega} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \omega^2} \right) d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \omega} \mathcal{M}'_{B0} \Phi_1 d\omega - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \omega} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \omega^2} d\omega. \end{aligned}$$

El primer término del lado derecho de la expresión anterior puede integrarse por partes, *i.e.*,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \omega} \mathcal{M}'_{B0} \Phi_1 d\omega = [\mathcal{M}_{B0} \Phi_1]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{M}_{B0} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \omega} d\omega,$$

donde

$$\begin{aligned} u &= \Phi_1 & dv &= \frac{\partial \Phi_0}{\partial \omega} \mathcal{M}'_{B0} d\omega = \frac{\partial \mathcal{M}_{B0}}{\partial \Phi_0} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \omega} d\omega \\ du &= \frac{\partial \Phi_1}{\partial \omega} d\omega & v &= \mathcal{M}_{B0}. \end{aligned}$$

El segundo término de la misma expresión también puede integrarse por partes,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \omega} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \omega^2} d\omega = \left[\frac{\partial \Phi_0}{\partial \omega} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \omega} \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \omega} \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \omega^2} d\omega,$$

donde

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \Phi_0}{\partial \omega} & dv &= \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \omega^2} d\omega \\ du &= \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \omega^2} d\omega & v &= \frac{\partial \Phi_1}{\partial \omega}. \end{aligned}$$

Finalmente escribimos la integral completa

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \omega} \left(\mathcal{M}'_{B0} - \frac{\partial^2}{\partial \omega^2} \right) \Phi_1 d\omega = \left[\mathcal{M}_{B0} \Phi_1 - \frac{\partial \Phi_0}{\partial \omega} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \omega} \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \omega} \left(\mathcal{M}_{B0} - \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \omega^2} \right) d\omega$$

y conocemos las siguientes condiciones,

$$\mathcal{M}_{B0}(\omega \rightarrow \pm\infty) = 0$$

y

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial \omega}(\omega \rightarrow \pm\infty) = 0.$$

De la ecuación (B.18) sabemos que

$$\mathcal{M}_{B0} - \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \omega^2} = 0.$$

Entonces la integral completa se hace cero. Sustituyendo en la ecuación (B.28),

$$b_1 2\Phi_{eq} = \kappa \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial \omega} \right)^2 d\omega, \quad (\text{B.29})$$

podemos escribir

$$\mathcal{M}_1 = b_1 = \frac{\kappa}{2\Phi_{eq}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial \omega} \right)^2 d\omega \quad (\text{B.30})$$

y utilizando la condición de continuidad (B.2) encontramos que

$$\mu_1(u \rightarrow -0) = \left(\frac{\gamma'}{2\Phi_{eq}} \right) \kappa. \quad (\text{B.31})$$

con $\gamma' \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial \omega} \right)^2 d\omega$. Así hemos obtenido la condición termodinámica de frontera.

Condición de Frontera de Continuidad para la Velocidad Normal.

Ahora escribimos la ecuación (B.16),

$$-v_0 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \omega} - v_1 \frac{\partial \Phi_0}{\partial \omega} = M \left(|\nabla S|^2 \frac{\partial^2 \mathcal{M}_0}{\partial S^2} + \nabla^2 S \frac{\partial \mathcal{M}_0}{\partial S} - \kappa \frac{\partial \mathcal{M}_1}{\partial \omega} + \frac{\partial^2 \mathcal{M}_2}{\partial \omega^2} \right)$$

Utilizando (B.23) y (B.30) tenemos

$$-v_1 \frac{\partial \Phi_0}{\partial \omega} = M \frac{\partial^2 \mathcal{M}_2}{\partial \omega^2}.$$

Integrando en ω tenemos

$$-v_1 \Phi_0 = M \frac{\partial \mathcal{M}_2}{\partial \omega} + a_2$$

Fijamos $a_2 = 0$ de forma que \mathcal{M}_2 sea finito en las fronteras. Evaluando en los extremos de la zona interna tenemos

$$v_1 \Phi_{eq} = M_1 \frac{\partial \mathcal{M}_2}{\partial \omega} (\omega \rightarrow +\infty)$$

$$-v_1 \Phi_{eq} = M_2 \frac{\partial \mathcal{M}_2}{\partial \omega} (\omega \rightarrow -\infty).$$

Restamos estas ecuaciones y fijamos $M_1 = 0$ para obtener una expresión de la velocidad normal en términos de la componente normal del campo \mathcal{M}_2 , *i.e.*,

$$2v_1\Phi_{eq} = M_2 \frac{\partial \mathcal{M}_2}{\partial \omega} (\omega \rightarrow -\infty),$$

y utilizando la condición de continuidad (B.3),

$$2v_1\Phi_{eq} = -M_2 \frac{\partial \mu_1}{\partial u} (u \rightarrow -0),$$

de donde

$$2v_1 = -\frac{M_2}{\Phi_{eq}} \frac{\partial \mu_1}{\partial u} (u \rightarrow -0). \quad (\text{B.32})$$

Ecuación de bulto.

Finalmente, la ecuación (B.8) es

$$M\nabla^2\mu_1 = \frac{\partial \phi_0}{\partial \tau}.$$

Como hemos escogido que el marco referencia sea la interfase y el campo ϕ_0 se mueve con ella, entonces la derivada temporal del lado derecho de la ecuación anterior debe ser cero. Por tanto, tenemos que

$$M\nabla^2\mu_1 = 0$$

que en ambos fluidos es,

$$\nabla^2\mu_1 = 0. \quad (\text{B.33})$$

Identificación de Parámetros.

Las ecuaciones (B.33), (B.31) y (B.32) pueden ser escritas como las ecuaciones (2.3), (2.4) y (2.5) mediante la siguiente identificación de parámetros,

$$p = \phi_{eq}\mu_1,$$

$$\gamma = \frac{\gamma'}{2\phi_{eq}}$$

y

$$K = -\frac{M_2}{2\phi_{eq}^2}.$$

En donde μ_1 tiene el efecto de la presión, M_2 tiene el papel de la permeabilidad y γ' es proporcional a la tensión superficial y está directamente relacionado con el ancho de la interfase.

C

ALGORITMO DE INTEGRACIÓN NUMÉRICA

El método numérico que hemos utilizado para integrar la ecuación (3.1) es un método simple de Euler. Para utilizar dicho método, planteamos una malla cuadrada de espaciamiento $\Delta x = \Delta y$ y paso temporal Δt . Para asegurar la estabilidad del método numérico utilizamos un paso de tiempo pequeño en comparación con el paso espacial, *i.e.*, $\Delta t \leq 0.01\Delta x$, y $\Delta x = 1.0$. El tamaño de la malla es $n_x \times n_y$ y se usan índices enteros espaciales tales que

$$1 \leq i \leq n_x$$

y

$$1 \leq j \leq n_y.$$

El índice temporal es k . De esta forma, la ecuación (3.1) en su forma discreta es

$$\phi_{i,j}^{k+1} = \phi_{i,j}^k + \Delta t (\nabla \cdot (M\nabla\mu))_{i,j}^k. \quad (\text{C.1})$$

En esta ecuación, los operadores se evalúan por el método de diferencias finitas considerando contribuciones de primeros vecinos. De esta forma, el potencial químico se calcula como

$$\mu_{i,j}^k = \phi_{i,j}^k{}^3 - \phi_{i,j}^k - \epsilon^2 \nabla^2 \phi_{i,j}^k,$$

y el Laplaciano se calcula como

$$\nabla^2 \phi_{i,j}^k = \frac{1}{\Delta x^2} (\phi_{i+1,j}^k - 2\phi_{i,j}^k + \phi_{i-1,j}^k) + \frac{1}{\Delta x^2} (\phi_{i,j+1}^k - 2\phi_{i,j}^k + \phi_{i,j-1}^k).$$

Como el parámetro M varía de forma abrupta de una a otra fase (ecuación (3.9)), es necesario introducir una forma ponderada para el segundo término del lado derecho

en la ecuación (C.1), i.e.,

$$\nabla \cdot (M \nabla \mu)_{i,j}^k = \frac{1}{2} (\nabla \cdot M \nabla \mu)_{i,j}^{k I} + \frac{1}{2} (\nabla \cdot M \nabla \mu)_{i,j}^{k D},$$

donde los superíndices D e I indican que el gradiente se evalúa por la derecha o por la izquierda respectivamente, esto es,

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot M \nabla \mu)_{i,j}^{k I} &= \frac{1}{\Delta x} \left(M_{i,j}^k \left(\frac{\mu_{i+1,j}^k - \mu_{i,j}^k}{\Delta x} \right) - M_{i-1,j}^k \left(\frac{\mu_{i,j}^k - \mu_{i-1,j}^k}{\Delta x} \right) \right) \\ &+ \frac{1}{\Delta x} \left(M_{i,j}^k \left(\frac{\mu_{i,j+1}^k - \mu_{i,j}^k}{\Delta x} \right) - M_{i,j-1}^k \left(\frac{\mu_{i,j}^k - \mu_{i,j-1}^k}{\Delta x} \right) \right) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot M \nabla \mu)_{i,j}^{k D} &= \frac{1}{\Delta x} \left(M_{i+1,j}^k \left(\frac{\mu_{i+1,j}^k - \mu_{i,j}^k}{\Delta x} \right) - M_{i,j}^k \left(\frac{\mu_{i,j}^k - \mu_{i-1,j}^k}{\Delta x} \right) \right) \\ &+ \frac{1}{\Delta x} \left(M_{i,j+1}^k \left(\frac{\mu_{i,j+1}^k - \mu_{i,j}^k}{\Delta x} \right) - M_{i,j}^k \left(\frac{\mu_{i,j}^k - \mu_{i,j-1}^k}{\Delta x} \right) \right). \end{aligned}$$

El código que integra la ecuación (C.1) tiene una estructura de tres ciclos anidados. El ciclo más interno se ejecuta **nevol** veces integrando la ecuación de movimiento. En cada iteración de este ciclo se impone la condición de frontera (3.4) que fija el valor de bulto del parámetro de orden en todo el bulto del fluido 2. Una vez fuera de este ciclo se determina la posición de la interfase mediante una subrutina de interpolación que encuentra la curva $\phi = 0$. Después, se determina la posición de la punta del dedo y se mide el ancho del dedo en cada distancia, L_1 y L_2 . Estas cantidades se escriben en un archivo de salida junto con el tiempo de simulación y el valor de bulto $\phi_B(t)$. Estas operaciones corresponden a una iteración del segundo ciclo más interno. Éste se ejecuta **nanchos** veces. Una vez que el programa sale de este ciclo, se escribe la configuración $\phi(x, y)$ a ese tiempo en un archivo de salida. Además, se escribe la posición de la interfase y un perfil $\phi(y)$ para la x correspondiente a la punta del dedo. Estas operaciones corresponden a una iteración del ciclo más externo que se ejecuta **ninterfases** veces (por limitaciones del lenguaje de programación, el valor de esta variable no puede ser mayor a 80). Al finalizar este ciclo el programa concluye y se escribe un archivo de reporte. El tiempo de simulación se calcula de la siguiente manera,

$$t = \text{ninterfases} \times \text{nanchos} \times \text{nevol} \times \Delta t.$$

Para una corrida en una celda de dimensiones 32×1600 , se usan valores típicos $ninterfases=80$, $nanchos=100$ y $nevol=500$ lo que da un tiempo de simulación $t = 40000$ al fijar $\Delta t = 0.01$.

Para correr el programa se debe preparar un archivo de datos llamado `dedo.in`. En este archivo se especifican los valores de `ninterfases`, `nanchos` y `nevol`, y el valor promedio, la amplitud y frecuencia de la señal incidente. Además se deben indicar las distancias de medición L_1 y L_2 , los valores del parámetro M en cada fase, el valor del parámetro ϵ , la distancia Δy y los pasos espaciales y temporales. Un archivo típico se muestra a continuación,

```
32 100 500 -0.60 10
0.09d0 0.0290025 40.0d0 350.0d0 0.01 1.0d0 1.0d0 0.0d0 1.0d0 0
```

```
ninterfases nanchos nevol bult0 ngrady
delta frec distan distan2 dt dx epsilon M1 M2 mcam
```

Después, se debe compilar el código mediante la siguiente instrucción, *i.e.*,

```
g77 dedo3.f -o dedo3
```

El programa se puede correr en dos formas, partiendo de una interfase perturbada, en cuyo caso el valor de la variable `mcam` en el archivo de datos debe ser 1, o partiendo de una configuración del parámetro de orden anterior, en cuyo caso `mcam` debe ser 0 y además se debe tener dicha configuración guardada en un archivo llamado `cond.in`. El comando de ejecución del programa es

```
./dedo3 &.
```

Código

```
PROGRAM dedo

implicit none
integer nx,ny,nn,npinterfase
parameter (nx=32,ny=800,nn=nx*ny)
parameter(npinterfase=100000)

*   nx, ny: dimensiones lineales de la malla.
*   nn: numero total de sitios de la malla.
*   npinterfase: maximo numero puntos esperados en la interfase.

double precision phi(nn),phim(nx,ny),umov(nn)
double precision coordx(npinterfase),coordy(npinterfase)
double precision cx(npinterfase),cy(npinterfase)
double precision dt,dx,epsilon,uMa,uMb
double precision delta,frec,bult0,bulto
double precision tiempo,ymin,distan,distan2

*   phi: parametro de orden (forma vectorial).

*   phim: parametro de orden (forma matricial). Esta forma se
*   necesita para utilizar la subrutina de interpolacion
*   'coordenadas'.

*   umov: factor del parametro M intrinseco de la malla (para
*   introducir ruido, islas etc.). Este factor es la
*   parte estatica del parametro M.

*   coordx, coordy: coordenadas de la interfase.
*   cx, cy: coordenadas de la interfase trasladadas de forma que el
*   punto mas avanzado de la interfase se encuentre en el centro de
*   la celda.

*   dt,dx,epsilon: delta x, delta t y epsilon de la ecuacion del
*   Modelo B

*   uMa,uMb: Parametro M del aire y del fluido viscoso.

*   delta, frec, bult0, bulto: Parametros de la senal incidente para
*   el valor de bulto del parametro de orden.
*       delta = amplitud de la señal incidente.
*       frec = frecuencia de la señal incidente.
*       bult0 = valor promedio de la señal incidente (phi_B0)
*       bulto = valor de bulto del parametro de orden que depende
*       del tiempo (phi_B(t)).
```

```
* tiempo: tiempo total de simulacion.
* ymin: posicion en "y" del punto mas avanzado de la interfase.
* distan: distancia a partir de la punta del dedo en que se mide
* el ancho del dedo (L_1).

* distan2: distancia a partir de la punta del dedo en que se mide
* el ancho del dedo (L_2).

integer n1(nn),n2(nn),n3(nn),n4(nn)
integer ninterfases,nanchos,nevol
integer ngrady,ncoord
integer ijmin,mcam,nyinic
integer i,j,nu,nphi,iminy

* n1,n2,n3,n4: vectores que guardan las posiciones de los primeros
* cuatro vecinos de cualquier punto de la malla
* tomando en cuenta las condiciones de frontera. n1:
* vecino derecha, n2: vecino de arriba, n3: vecino de
* la izquierda, n4: vecino de abajo.
*
* El programa se compone de tres ciclos anidados. El ciclo
* mas externo
* va desde i hasta el valor de ninterfases (este parametro fija el
* numero de veces que se escriben las coordenadas de la
* interfase.).
*
* El ciclo de en medio va desde i hasta nanchos que es el numero de
* de veces que se mide el ancho del dedo por cada vez que se
* escriben las coordenadas de la interfase.

* El ciclo mas interno va desde i hasta nevol.

* *\\\\\\\\ PARA CALCULAR EL TIEMPO TOTAL DE SIMULACION \\\\\\\*

* tiempo=ninterfases*nanchos*nevol*dt

* ngrady: distancia por enfrente de la punto mas avanzado de la
* interfase a partir de la que se fija el valor de bulto
* del parametro de orden "bulto" (Delta y)

* ncoord: numero de puntos de la interfase.

* ijmin: distancia por enfrente del punto mas avanzado de la
* interfase a partir del cual el valor del parametro de
* orden permanece constante. Esto esta hecho para ahorrar
* tiempo de computo.
```

```

*      mcam: Si mcam es 0, se leen las condiciones iniciales del campo
*             phi del archivo cond.in Si vale cualquier otra cosa, las
*             condiciones iniciales se fijan dentro de la ejecucion del
*             programa.

*      nyinic: Posicion inicial de la interfase plana alrededor de la
*             que se introduce una perturbacion.

*      i,j,nu,nphi: contadores. i e j cuentan sobre la malla. nu=18
*             se usa para escribir el archivo fort.18 que guarda las
*             condiciones iniciales del parametro de orden en la forma
*             "x y phi" de la corrida. nphi va de 19 a 19 + (ninterfases
*             - 1) y se usa para crear los archivos fort.19, fort.20,
*             etc. que guardan la configuracion del parametro de orden
*             para los tiempos en que se escriben las coordenadas de la
*             interfase. Esto sirve para tener configuraciones
*             disponibles para futuras pruebas, para hacer peliculas, etc.

```

```

common/campos/phi,umov
common/vec/n1,n2,n3,n4

```

```

equivalence (phi(1),phim(1,1))

```

```

*      hace que los elementos entre el vector phi y la matriz phim se
*      se guarden en el mismo espacio de la memoria. El vector phi
*      guarda el campo en bloques de nx elementos cada uno y
*      se guardan ny bloques en total. Por otro lado, fortran almacena
*      las matrices en memoria por columnas contiguas. Al ejecutarse la
*      instruccion de equivalence, el campo se puede acceder por medio
*      phi y phim indistintamente (uno con notacion vectorial y otro
*      con notacion matricial).

```

```

open(unit=10,file='dedo.in',status='old')
open(unit=12,file='interfases.out',status='unknown')
open(unit=13,file="perfiles.out",status="unknown")
open(unit=14,file='temporales.out',status='unknown')
read(10,*)ninterfases,nanchos,nevol,bult0,ngrady
read(10,*)delta,frec,distan,distan2,dt,dx,epsilon,uMa,uMb,mcam
close(10)

```

```

*****
*                               PROGRAMA PRINCIPAL
*****

```

```

tiempo=0.
nyinic=nint(0.95*real(ny))

```

- * La posición de la interfase plana se fija a una distancia de
- * 0.95 veces el tamaño del sistema en la dirección y.

```

nu=18
nphi=19
ijmin=1
iminy=nint(0.5*dfloat(nx))

call vecinos()

if(mcam.eq.0)then
  call lectura(tiempo)
else
  call condinic(bulto,ngrady,nyinic)
endif

call campoout(phi,nu,tiempo)
call perfilout(phi,tiempo,dfloat(iminy))

do 1 i=1,ninterfases
  do 2 j=1,nanchos
    call modelob(tiempo,nevol,bulto,
&      frec,delta,bulto,ngrady,dt,dx,epsilon,uMa,uMb
&      ,ijmin)

    call coordenadas(phim,coordx,coordy,ncoord)

*   La subrutina coordendas fue hecha por la Prof. Ana Lacasta del
*   Politecnico de Cataluña. Esta subrutina recibe la matriz del
*   parametro de orden y devuelve los vectores coordx y coordy que
*   guardan las ncoord coordenadas de la interfase.

    call perfilout1(phi,tiempo,coordx(iminy))

*   La subrutina perfilout1 escribe la curva phi vs y para la x
*   correspondiente a la punta del dedo en el archivo
*   perfilinst.out. Esto se hace para revisar la evolucion del
*   parametro de orden durante la simulacion.

    call anchoout(ncoord,coordx,coordy,cx,cy,tiempo,bulto,
&      nyinic,distan,distan2,ymin,iminy)
  2  enddo
*****
    call interfout(ncoord,coordx,coordy,tiempo)
    call perfilout(phi,tiempo,coordx(iminy))
    call campoout(phi,nphi,tiempo)
    nphi=nphi+1
  1  enddo

```

```

*****
      close(12)
      close(13)
      close(14)

      call reporte(tiempo,frec,delta,bult0,ymin,epsilon,uMa,uMb,
&                dt,dx,mcam)
      stop
      end
*****
*                FIN DEL PROGRAMA PRINCIPAL
*****

*****
*                SUBROUTINA VECINOS
*****
*      Esta subrutina crea cuatro vectores del mismo tamaño que
*      el vector phi y que guardan la posición de los vecinos para
*      cada sitio (i,j). Cada sitio (i,j) se mapea en el vector phi
*      (no de forma explicita) segun la transformacion  $ij=(j-1)*nx+i$ 
*      que guarda las columnas de la matriz (i,j) de forma contigua y
*      en orden creciente en i.

*      Los cuatro vectores guardan las posiciones siguientes segun el
*      mapeo que se ha explicado arriba:

*      n1: para cada ij guarda la posición dada por (i+1,j) tomando
*      condiciones de espejo en la frontera.
*      n2: para cada ij guarda la posición dada por (i,j+1) tomando
*      condiciones periodicas en la frontera.
*      n3: para cada ij guarda la posición dada por (i-1,j) tomando
*      condiciones de espejo en la frontera.
*      n4: para cada ij guarda la posición dada por (i,j-1) tomando
*      condiciones periodicas en la frontera.

      subroutine vecinos()
      implicit none
      integer nx,ny,nn
      parameter (nx=32,ny=800,nn=nx*ny)
      integer n1(nn),n2(nn),n3(nn),n4(nn)

      integer i,j,i1,j1,i2,j2,ij

      common/vec/n1,n2,n3,n4

      do i=1,nx

```

```

        i1=i+1
        i2=i-1
        if (i1.gt.nx)then
            i1=1
        endif
        if (i2.lt.1)then
            i2=nx
        endif
    do j=1,ny
        ij=(j-1)*nx+i
        j1=j+1
        if (j1.gt.ny)then
            j1=ny
        endif
        j2=j-1
        if (j2.lt.1)then
            j2=1
        endif
        n1(ij)=(j-1)*nx+i1
        n2(ij)=(j1-1)*nx+i
        n3(ij)=(j-1)*nx+i2
        n4(ij)=(j2-1)*nx+i
    enddo
enddo
continue
return
end
*****
c          FIN DE LA SUBROUTINA VECINOS
*****

*****
c          SUBROUTINA LECTURA
*****
subroutine lectura(tiempo)
implicit none
integer nx,ny,nn
parameter (nx=32,ny=80,nn=nx*ny)
double precision phi(nn),umov(nn)
double precision tiempo

character*20 cad
integer i,j,x,y

common/campos/phi,umov

do i=1,nn
    umov(i)=1.

```

```

        enddo

*   El parametro M estatico es por default 1.0 (lo que quiere decir
*   que no hay islas, burbujas, ruido, etc.)

        open(unit=90,file="cond.in",status="old")
        read(90,*)cad,cad,cad,tiempo

*   El archivo cond.in tiene tres cadenas de caracteres en el primer
*   renglon que dicen "El tiempo es". Despues viene el tiempo de
*   simulacion al que fue escrito ese archivo en particular. Las
*   lineas siguientes del archivo guardan la configuracion del
*   parametro de orden en el formato x, y, phi(i(x,y)).

        do i=1,nx
            do j=1,ny
                read(90,*)x,y,phi((y-1)*nx+x)
            enddo
            read(90,*)
        enddo
        close(90)

        return
    end

```

```

*****
c               SUBROUTINA LECTURA
*****

```

```

*****
c               SUBROUTINA CONDINIC
*****

```

```

        subroutine condinic(bult0,ngrady,nyinic)
        implicit none
        integer nx,ny,nn
        parameter (nx=32,ny=800,nn=nx*ny)
        double precision phi(nn), umov(nn), bult0
        double precision amp(5), pmod(5), pi, sem
        double precision suma, pend, pert(nx)
        integer nyint(nx),ngrady,nyinic
        integer nsem,nyaux
        integer i,j,ij,nymin1

*   amp, pmod: amp es un vector que contiene las cinco amplitudes
*   de los cinco modos que contiene pmod. Estas amplitudes y modos
*   se usan para fijar la perturbacion inicial que da lugar a la

```

```
*   formacion del dedo.

*   nsem: semilla para el generador de numeros aleatorios
*   sem: variable muda que se usa para iniciar el generador de
*   numeros aleatorios.

common/campos/phi,umov

pi=4.*atan(1.)
nymin1=ny

do i=1,nn
    umov(i)=1.
    phi(i)=-1.
enddo

*   umov se fija igual a 1 en toda la malla.

*   Aqui se fijan los modos que se usan en la perturbacion inicial
*   usando el tamaño del sistema.

pmod(1)=2.*pi*5./real(nx)
pmod(2)=2.*pi*4./real(nx)
pmod(3)=2.*pi*3./real(nx)
pmod(4)=2.*pi*2./real(nx)
pmod(5)=2.*pi/real(nx)

nsem=int(100.*bult0*bult0)*nn
sem=rand(nsem)

do i=1,nx
    pert(i)=0.0
enddo

do i=1,5
    amp(i)=2.*(2.*rand()-1.)
    do j=1,nx
        suma=amp(i)*dcos(pmod(i)*dfloat(j))
        pert(j)=pert(j)+suma
    enddo
enddo
do j=1,nx
    nyint(j)=nyinic+nint(pert(j))
enddo

do i=1, nx
    do j=nyint(i), ny
        ij=(j-1)*nx+i
```

```

        phi(ij)=1.
    enddo
enddo

do i=1,nx
    nymin1=min(nymin1,nyint(i))
enddo

do i=1,nx
    nyaux=nymin1-ngrady
    do j=1,nyaux
        ij=(j-1)*nx+i
        phi(ij)=bult0
    enddo
enddo
continue

do i=1,nx
    do j=nyaux,nyint(i)-2
        pend=(bult0+1.)/(dfloat(nyaux-nyint(i)+1))
        ij=(j-1)*nx+i
        phi(ij)=bult0+pend*(dfloat(j-nyaux))
    enddo
enddo
continue

return
end
*****
c          FIN DE LA SUBROUTINA CONDINIC
*****

*****
c          SUBROUTINA MODELOB
*****
subroutine modelob(tiempo,nevol,bult0,frec,delta,bulto,ngrady,dt,
&    dx,epsilon,uMa,uMb,ijmin)

implicit none
integer nx,ny,nn
parameter (nx=32,ny=800,nn=nx*ny)
double precision phi(nn),umov(nn)
integer n1(nn),n2(nn),n3(nn),n4(nn)
double precision bult0,frec,delta,bulto
double precision dt,dx,epsilon,uMa,uMb,tiempo
integer ngrady, ijmin

```

```

integer nsgn

double precision uM(nn),pot(nn)
double precision espxd(nn),espxi(nn),espyd(nn),espyi(nn)
double precision x0,dist
double precision dx2,dx22
integer nypunta,nevol
integer ncond,nyauxi,nliminf
integer i,j,k,ij,ij1

common/campos/phi,umov
common/vec/n1,n2,n3,n4

dx2=epsilon/(dx*dx)
dx22=1./(dx*dx)

do 33 k=1, nevol
*   Aquí comienza el ciclo que itera en el tiempo e integra el Modelo B.

        tiempo=tiempo+dt
        bulto=bult0+delta*dcos(frec*tiempo)

        do i=ijmin,nn
            uM(i)=uMa*umov(i)
            if(phi(i).LT.0)then
                uM(i)=uMb*umov(i)
            endif
        enddo

*   uMa es la parte del parametro M asociada al aire, de forma que
*   el parametro M total (uM) sea cero cuando el parametro de orden
*   corresponda al aire y no importe la contribucion de la parte
*   estatica (umov).

        do i=ijmin,nn
            pot(i)=phi(i)*phi(i)*phi(i)-phi(i)
&            -dx2*(phi(n1(i))+phi(n3(i))-2.*phi(i))
&            -dx2*(phi(n2(i))+phi(n4(i))-2.*phi(i))
        enddo

*   Arriba, pot es el potencial quimico en cada punto de la malla

        do i=ijmin,nn
            espxd(i)=uM(i)*(pot(n1(i))-pot(i))
            espyd(i)=uM(i)*(pot(n2(i))-pot(i))

```

```

        espxi(i)=uM(i)*(pot(i)-pot(n3(i)))
        espyi(i)=uM(i)*(pot(i)-pot(n4(i)))
    enddo

    do i=ijmin,nn
        pot(i) = 0.5*(espxd(i)-espxd(n3(i))+espyd(i)-espyd(n4(i)))
&         +espxi(n1(i))-espxi(i)+espyi(n2(i))-espyi(i))*dx22
    enddo

*   Arriba, pot actua como variable muda para calcular el lado
*   derecho de la ecuacion del Modelo B, donde se toman promedios de
*   los operadores calculados por la derecha y por la izquierda.

        do i=ijmin,nn
            phi(i)=phi(i)+pot(i)*dt
        enddo

*   Arriba se reasignan los valores del parametro de orden en
*   toda la malla segun el metodo de Euler.

        nypunta=ny

*   En el siguiente ciclo se encuentra la posicion en y del punto
*   mas avanzado de la interfase y se guarda en la variable nypunta.

        do j=1,ny
            do i=1,nx-1
                ij=(j-1)*nx+i
                ij1=(j-1)*nx+i+1
                ncond=int(abs(nsgn(phi(ij))+nsgn(phi(ij1))))
                nyauxi=j+100000*ncond
                nypunta=min(nypunta,nyauxi)
            enddo
        enddo

*   El siguiente ciclo fija la condicion de frontera que mantiene al
*   sistema fuera de equilibrio. Usando la posicion de la punta, se
*   calcula una distancia de ngrady espacios por enfrente de la
*   punta. A partir de esta posicion y hasta el final de la malla
*   (que corresponde al infinito en el problema analitico), se
*   reasigna el valor del parametro de orden usando el valor "bulto"
*   que depende del tiempo.

        do j=1, nypunta-ngrady-1
            do i=1,nx
                ij=(j-1)*nx+i

```

```

        phi(ij)=bulto
      enddo
    enddo

*   Las siguientes dos lineas calculan los parametros nliminf y
*   ijmin. Como durante la simulacion el valor del parametro de
*   orden se reasigna en cada iteracion y se fija el mismo valor en
*   todo el bulto del fluido viscoso la variacion temporal en esta
*   region es estrictamente cero. Esto hace que se pueda fijar un
*   cierto limite al hacer la integracion del modelo que ignore esta
*   region. El parametro nliminf guarda la posicion en y de la
*   malla que corresponde a la posicion de la punta disminuida en 2
*   veces la distancia ngrady. Este valor se mapea en la notacion
*   vectorial y el resultado del mapeo se guarda en el parametro
*   ijmin. Luego, cuando se reanuda el ciclo, todos los ciclos de
*   integracion numerica se hacen solamente para la region "activa"
*   de la malla, i.e., la linea que fija ijmin.

        nliminf=max(1,nypunta-1-2*ngrady)
        ijmin=(nliminf-1)*nx+1

33      enddo

      return
    end

*****
c          FIN DE LA SUBROUTINA MODELOB
*****

*****
c          SUBROUTINA PERFILOUT
*****
c   Esta subrutina escribe la curva phi(y) para
c   la x que corresponde a la punta del dedo.

      subroutine perfilout(phi,tiempo,cx)
      implicit none
      integer nx,ny,nn
      parameter (nx=32,ny=800,nn=nx*ny)
      double precision phi(nn),tiempo,cx

      integer ncorte
      integer i,j,ij

      ncorte=nint(cx)

```

```
write(13,*)"# tiempo ",tiempo
do j=1,ny
  ij=(j-1)*nx+ncorte
  write(13,*)j,phi(ij)
enddo
continue
write(13,*)" "

return
end

*****
c          FIN DE LA SUBROUTINA PERFILOUT
*****

*****
c          SUBROUTINA INTERFOUT
*****
c  Esta subrutina escribe las coordenadas de la interfase
c  en el archivo "interf.out"
c  En este archivo se acaban guardando todas las curvas
c  interfaciales que se hayan pedido por medio del
c  parametro ninterfases.

subroutine interfout(ncoord,cx,cy,tiempo)
implicit none
integer ninterfase
integer ic, ncoord
parameter (ninterfase=10000)
double precision cx(ninterfase),cy(ninterfase), tiempo

write(12,*)"# tiempo ",tiempo

do ic=1, ncoord
  write(12,*)cx(ic),cy(ic)
enddo
write(12,*)" "
continue
return
end

*****
c          FIN DE LA SUBROUTINA INTERFOUT
*****

*****
```

```

c                               FUNCION NSGN
*****
c   Esta funcion determina el signo de un argumento
c   real y devuelve un +1 si el argumento es positivo
c   y un -1 si el argumento es negativo

integer function nsgn(arg)
implicit none
double precision arg

nsgn=nint(arg/abs(arg))

return
end
*****
c                               FIN DE LA FUNCION NSGN
*****

*****
c                               SUBROUTINA CAMPOOUT
*****
c   Esta subrutina escribe el valor de un campo para cada
c   punto de la malla (el campo que sea) usando un contador
c   nr para escribir un archivo "fort.nr" de formato:
c
c                               x | y | campo(x,y)

subroutine campoout(campo,nr,tiempo)
implicit none
integer nx,ny,nn
parameter (nx=32,ny=800,nn=nx*ny)
double precision campo(nn),tiempo
integer nr

integer i,j,ij

write(nr,*)"#El tiempo es: ",tiempo
do i=1,nx
  do j=1,ny
    ij=(j-1)*nx+i
    write(nr,*)i,j,campo(ij)
  enddo
  write(nr,*)" "
enddo
close(nr)
return

```

```

end
*****
c          FIN DE LA SUBROUTINA CAMPOOUT
*****

*****
c          SUBROUTINA ANCHOOUT
*****
subroutine anchoout(ncoord,coordx,coordy,cx,cy,tiempo,bulto,
&                  nyinic,distan,distan2,ymin,iminy)
  implicit none
  integer nx,ny,nn,npinterfase
  parameter (nx=32,ny=800,nn=nx*ny)
  parameter(npinterfase=100000)
  double precision coordx(npinterfase),coordy(npinterfase)
  double precision cx(npinterfase),cy(npinterfase)
c  double precision ancho(50)
  double precision ancho,ancho2
  double precision tiempo,bulto,distan,distan2,ymin
  integer nyinic,ncoord

  double precision cxaux(npinterfase),cyaux(npinterfase)
  double precision acerc,dist2,dist3
  double precision ymax,pend1,pend2,x1,x2
  integer i,iminy,iminy1,imin,ian,ix1,ix2,k

  open(unit=99,file='coord.out',status='unknown')
  do i=1,ncoord
    write(99,*)coordx(i),coordy(i)
  enddo
  close(99)

  *  Aquí se busca la coordenada y de la punta del dedo, que es la
  *  que tiene el valor mas pequeño.

  ancho=0.0
  ancho2=0.0

  ymin=dfloat(ny)

  do i=1,ncoord
    cxaux(i)=coordx(i)
    cyaux(i)=coordy(i)
    if(coordy(i).LT.ymin)then
      ymin=coordy(i)
      iminy=i
    endif
  enddo

```

```
        endif
    enddo
    continue

*   En los siguientes ciclos se traslada la interfase de forma que
*   la punta del dedo quede en la mitad del ancho del canal (en la
*   direccion x).

    do i=1,ncoord
        coordx(i)=cxaux(i)+1.5*dfloat(nx)-cxaux(iminy)
        coordx(i)=mod(coordx(i),dfloat(nx))
    enddo

*   imin contiene el indice en el vector coordx que guarda el punto
*   con la menor x de toda la interfase (estos vectores, coordx y
*   coordy que vienen de la subrutina de interpolacion no
*   necesariamente tienen sus entradas en orden de x creciente)

    imin=1

    do i=1, ncoord
        if(coordx(i).lt.coordx(imin))then
            imin=i
        endif
    enddo

*   El siguiente ciclo reasigna los valores de los vectores coordx y
*   coordy de forma que el valor coordx(imin) se mapea en cx(1).
*   Todas las entradas restantes se mapean a partir de esta
*   reasignacion.

    do i=1,ncoord
        k=mod(i+ncoord-imin,ncoord)+1
        cx(k)=coordx(i)
        cy(k)=coordy(i)
    enddo

*****
* Medicion del ancho del dedo

*   Ahora se encuentra el indice que corresponde a la punta del del
*   dedo y se guarda en iminy1. Las coordenadas de la punta son
*   entonces cx(iminy1) y cy(iminy1).

    iminy1=mod(iminy+ncoord-imin,ncoord)+1
    ymin=cy(iminy1)
```

* Ahora se calcula la posición a la que se mide el ancho del dedo
* (dist2) usando el marco de referencia de la punta del dedo y una
* distancia arbitraria distan.

```
dist2=ymin+distan
```

* El siguiente ciclo encuentra los dos puntos de la interfase mas
* cercanos a la posición dada por dist2 en la región izquierda a
* la punta del dedo. acerc es una variable de control que cambia
* de negativa a positiva cuando el ciclo llega a la posición donde
* la coordenada y cy(i) es mas grande que dist2. Para guardar la
* entrada de este vector se usa ix1=i+1.

```
do i=iminy1,1,-1
  acerc=dist2-cy(i)
  if(acerc.lt.0.)then
    ix1=i+1
    goto 998
  endif
enddo
goto 995
```

* El ciclo siguiente encuentra los dos puntos de la interfase mas
* cercanos a la posición dada por dist2 en la región derecha a la
* punta del dedo. acerc es una variable de control que cambia de
* negativa a positiva cuando el ciclo llega a la posición donde la
* coordenada y cy(i) es mas grande que dist2. Para guardar la
* entrada de este vector se usa ix2=i-1.

```
998 do i=iminy1+1,ncoord
  acerc=dist2-cy(i)
  if(acerc.lt.0.)then
    ix2=i-1
    goto 999
  endif
enddo
goto 996
```

```
999 continue
```

* Si se han encontrado todos los puntos interfaciales (que son 4) por
* medio de los dos ciclos anteriores, se hace una interpolación lineal
* para obtener las abscisas que corresponderían a la posición y=dist2.
* Esto se hace en las siguientes cuatro líneas. Las variables pend1 y
* pend2 guardan las pendientes de las líneas rectas que unen a los puntos
* interfaciales vecinos a la línea y=dist2. Las abscisas correspondientes
* son x1 y x2.

```
pend1=(cy(ix1)-cy(ix1-1))/(cx(ix1)-cx(ix1-1))
x1=(dist2-cy(ix1))/pend1+cx(ix1)
pend2=(cy(ix2)-cy(ix2+1))/(cx(ix2)-cx(ix2+1))
x2=(dist2-cy(ix2))/pend2+cx(ix2)

*   En la siguiente linea se calcula el ancho del dedo usando este
*   par de abcisas y se convierte en fraccion dividiendo entre el
*   tamaño del sistema.

ancho=(x2-x1)/dfloat(nx)

995 continue
996 continue

*****
*   En el siguiente bloque se hace exactamente lo mismo pero usando
*   una posicion distinta dada por dist3 = ymin + distan2

dist3=ymin+distan2

do i=iminy1,1,-1
  acerc=dist3-cy(i)
  if(acerc.lt.0.)then
    ix1=i+1
    goto 898
  endif
enddo
goto 895

898 do i=iminy1+1,ncoord
  acerc=dist3-cy(i)
  if(acerc.lt.0.)then
    ix2=i-1
    goto 899
  endif
enddo
goto 896

899 continue

pend1=(cy(ix1)-cy(ix1-1))/(cx(ix1)-cx(ix1-1))
x1=(dist3-cy(ix1))/pend1+cx(ix1)
pend2=(cy(ix2)-cy(ix2+1))/(cx(ix2)-cx(ix2+1))
x2=(dist3-cy(ix2))/pend2+cx(ix2)
```

```

        ancho2=(x2-x1)/dfloat(nx)

895  continue
896  continue

*****

*   En las siguiente linea se escriben las variables dependientes
*   del tiempo en el archivo "temporales.out"
*   El formato es :

*   tiempo | ancho(1) | ancho(2) | posicion de la punta | bulto

        write(14,*)tiempo,ancho,ancho2,ymin,bulto

*   Ahora se escriben las coordenadas de la interfase trasladada en
*   el archivo "coordtras1.out".

        open(unit=95,file='coordtras1.out',status='unknown')
        do i=1,ncoord
            write(95,*)cx(i),cy(i)
        enddo
        close(95)

*   Se reasignan los valores de los vectores de entrada para
*   conservar las coordenadas sin trasladar.

        do i=1,ncoord
            coordx(i)=cxaux(i)
            coordy(i)=cyaux(i)
        enddo

        return
        end

*****
c           FIN DE LA SUBROUTINA ANCHOOUT
*****

*****
c           SUBROUTINA PERFILOUT1
*****
c   En esta subrutina se escribe la curva phi(y) para la
c   x que corresponde a la punta del dedo. Esto se hace
c   en el archivo "perfilinst.out"

        subroutine perfilout1(phi,tiempo,cx)

```

```

implicit none
integer nx,ny,nn
parameter (nx=32,ny=800,nn=nx*ny)
double precision phi(nn),tiempo,cx

integer ncorte,j,ij

ncorte=nint(cx)

open(unit=16,file='perfilinst.out',status='unknown')
write(16,*)"# tiempo ",tiempo
do j=1,ny
  ij=(j-1)*nx+ncorte
  write(16,*)j,phi(ij)
enddo
  continue
  write(16,*)" "
close(16)
return
end

*****
c          FIN DE LA SUBROUTINA PERFILOUT1
*****

*****
c          SUBROUTINA REPORTE
*****
c  En esta subrutina se escriben los parametros usados en
c  la simulacion, el tiempo y tamaño del sistema, en el
c  archivo "reporte.out"

subroutine reporte(tiempo,frec,delta,bult0,ymin,epsilon,uMa,uMb,
& dt,dx,mcam)
implicit none
integer nx,ny,nn
parameter (nx=32,ny=800)
double precision bult0,frec,delta
double precision epsilon,uMa,uMb,dt,dx,tiempo
double precision ymin
integer mcam

open(unit=15,file='reporte.out',status='unknown')

write(15,*)'*****'
write(15,*)'Reporte'
write(15,*)'*****'

```

```

write(15,*)' '
write(15,*)'Señal de entrada'
write(15,*)'phi(t)= ',bult0,'+',delta,'cos(',frec,'t)'
write(15,*)'*****'
write(15,*)
if(mcam.eq.0)then
  write(15,*)'la condicion inicial fue leida del archivo condin'
else
  write(15,*)'Perturbacion compuesta de cosenos de modo '
  write(15,*)'arbitrario con amplitud aleatoria'
endif

write(15,*)'Tiempo de simulación: ',tiempo
write(15,*)'Tamaño del sistema: ',nx,' X ',ny
write(15,*)'Posición final de la punta (ymin): ',ymin
write(15,*)'Ancho de la interfase: ',epsilon
write(15,*)'Parametro M del aire: ',uMa
write(15,*)'Parametro M del aceite: ',uMb
write(15,*)'Paso temporal (dt): ',dt
write(15,*)'Paso espacial (dx): ',dx
close(15)

return
end

```

```

*****
c          FIN DE LA SUBROUTINA REPORTE
*****

```

```

*****
c          SUBROUTINA COORDENADAS
*****

```

```

c  En esta parte va la subrutina de interpolacion que
c  calcula la posicion de la interfase. Esta subrutina
c  toma la matriz phim y calcula la posicion de la curva de
c  nivel donde el parametro de orden es igual a cero.

```

```

c  La subrutina regresa dos vectores, uno contiene las
c  coordenadas en x de la curva de nivel. El otro vector
c  contiene las coordenadas en y de la misma curva. Ademas,
c  la subrutina regresa el numero total de puntos de la curva
c  que ha encontrado.

```

```

*****
c          FIN DE LA SUBROUTINA COORDENADAS
*****

```


D
PRE-PRINT

Lateral instability in normal viscous fingers

R. Ledesma-Aguilar, M. Quevedo-Reyes, and E. Corvera Poiré
*Departamento de Física y Química Teórica, Facultad de Química, UNAM
Ciudad Universitaria, México D.F. 04510, México*

A. Hernández-Machado
*Departament ECM, Facultat de Física,
Universitat de Barcelona
Diagonal 647, E-08028 Barcelona, Spain*

We study a low amplitude, long wavelength lateral instability of the Saffman-Taylor finger by means of a phase field model. We observe such an instability in two situations in which small dynamic perturbations are overimposed to a constant pressure drop. We first study the case in which the perturbation consists of a single oscillatory mode and then a case in which the perturbation consists of temporal noise. In both cases the instability undergoes a process of selection.

I. INTRODUCTION

Branching is an ubiquitous process in nature [1-4]. From plants, rivers, blood vessels, bacterial colonies to dendritic growth, the universality of branching has been put forward. In crystal growth, when an undercooled melt solidifies, the solid front has a parabolic shape and lateral protrusions, called sidebranches, form on the main structure and grow in amplitude as they are advected away from the parabolic tip. This phenomenon has been widely investigated in solidification. It has been proposed, both experimentally [5, 6] and theoretically [7-9] that side branching results from selective amplification of natural noise.

Natural noise, that is, noise unintentionally present in the system, is not enough to create side branching in normal Saffman-Taylor fingers. Normal Saffman-Taylor fingers appear when an inviscid fluid displaces a viscous fluid in a Hele-Shaw cell, a pair of glass plates parallel to each other that form an almost two dimensional channel in which the flow takes place. In the absence of perturbations, Saffman-Taylor fingers are always greater than half of the channel width. We refer to this steady-state fingers as normal Saffman-Taylor fingers, to be able to differentiate them from anomalous fingers, whose width is less than half of the channel width and that are observed when anisotropy is imposed on the system. In anomalous Saffman-Taylor fingers, dendrites have been observed using localized disturbances such as a bubble placed at the finger tip or a thread placed along the channel [10, 11]. In both, dendritic crystals and anomalous fingers, it has been shown that periodic forcing induces periodic side branches [12-14]. Experimentally, side branches have been observed in viscous fingers for miscible fluids in a radial cell when anisotropy is imposed on the system by engraving a grid on one of the plates [15, 16]. For immiscible fluids, side branches are strongly suppressed by surface tension, and a low amplitude lateral instability can be observed [17]. Theoretically, viscous fingers in the radial cell with four-fold anisotropy have been studied in reference [18]. In agreement with experiments,

regimes for which fingers have lateral instabilities whose amplitude is strongly suppressed by surface tension are found. Localized non-linear instabilities of the normal Saffman-Taylor finger have also been reported [19]. Recently, fluctuations along the finger sides have been reported in normal fingers for low capillary numbers and very wide and long channels [20].

A wide variety of problems which include bio rheology and oil recovery involve the dynamics of confined fluids in frequency dependent flow regimes. Due to its relative simplicity, the Saffman-Taylor finger is an archetype of both, pattern forming systems and two phase flow in confined systems [21]. We are therefore interested on the response of the Saffman-Taylor finger to a controlled frequency dependent flow.

Here we report a lateral instability of the normal Saffman-Taylor finger induced dynamically in a controlled manner. We also propose for which frequencies and cell dimensions this instability can be more easily experimentally observed. By means of a phase field model, we study two cases. The first one, in which an oscillatory signal is overimposed to a constant pressure gradient, leads to a strictly periodic lateral instability that undergoes a process of selection. We then study the effect that dynamic noise has on the finger shape and observe a similar lateral instability. This one, despite its non periodicity, undergoes a process of selection as in the first case.

II. PHASE-FIELD MODEL AND MACROSCOPIC MODEL

Recent studies indicate that the Saffman-Taylor problem for Newtonian fluids can be successfully studied by means of phase-field models [22-24]. The main advantage of such mesoscopic approaches is that they avoid complicated methods for tracking the interface. In particular, it has been found that a single order-parameter equation suffices to reproduce the macroscopic equations of the Saffman-Taylor problem in the infinite-viscosity-contrast

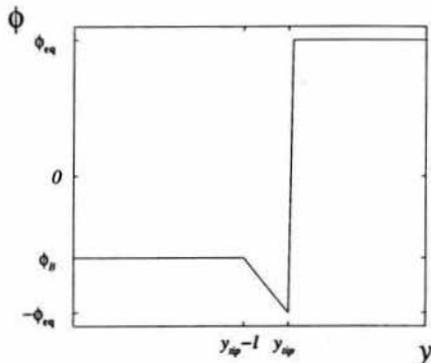


FIG. 1: Profile for the order parameter along the flow direction for the initial boundary condition. In the figure, the flow takes place from the right to the left.

limit [24]. Moreover, numerical simulations of this model have reproduced the behavior of the fluid-fluid interface, from destabilization and mode competition to the formation of the steady state. We therefore decide to use the phase-field model of reference [24] with a boundary condition modified to allow for dynamic pressure drops.

The mesoscopic equation to be solved for the infinite-viscosity-contrast Saffman-Taylor problem is the equation of Model B

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \nabla \cdot (M \nabla \mu(\phi)) \quad (1)$$

where ϕ is an order parameter and $\mu(\phi)$ is a chemical potential that has the explicit form

$$\mu(\phi) = -\phi + \phi^3 - \epsilon^2 \nabla^2 \phi \quad (2)$$

where ϵ is a parameter proportional to the interface width. The parameter M has a constant value in the viscous fluid and is zero in air. The following boundary condition is imposed at the bulk of the displaced fluid,

$$\phi(x, y \leq y_{tip} - l, t) = \phi_B(t) \quad (3)$$

Equation (3) fixes the bulk value $\phi_B(t)$ at an arbitrary distance l from the fingertip. y_{tip} corresponds to the most advanced point of the interface. This creates a ramp that represents the driving force of the system. The initial boundary condition to generate a steady-state finger is shown in figure 1. Despite their simplicity, these equations describe the hydrodynamic equations of the macroscopic problem in the sharp interface limit.

The macroscopic equations of the problem are Laplace's equation for the pressure, p , i.e.,

$$\nabla^2 p = 0 \quad (4)$$

which is written from Darcy's Law plus the incompressibility of fluids, and the boundary conditions at the fluid-fluid interface, that is, the continuity boundary condition

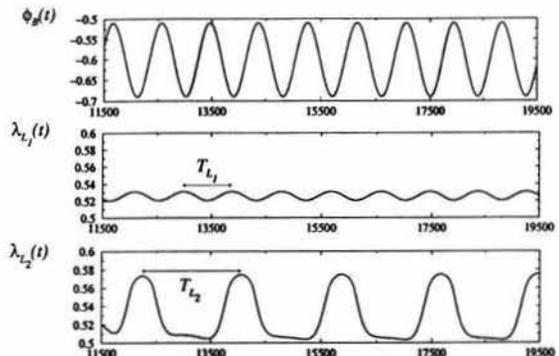


FIG. 2: Bulk value ϕ_B and finger widths measured at distances L_1 and L_2 from the fingertip plotted versus time. The mode selection process has taken place in between the second and third plots. The output signal frequencies ω_{L_1} and ω_{L_2} are determined from the periods T_{L_1} and T_{L_2} indicated in the figure. The incident frequency is $\omega = 0.007$.

and the local thermodynamic equilibrium condition i.e.,

$$v_n = -\frac{b^2}{12\eta} \nabla p \cdot \hat{n} \quad (5)$$

$$\Delta p = -\gamma \kappa \quad (6)$$

where v_n is the normal velocity of the interface, η is the viscosity of the viscous fluid, b is the gap between the cell plates and \hat{n} is a vector normal to the interface, Δp is the pressure drop at the interface, γ is the surface tension and κ is the local curvature of the interface. $K \equiv \frac{b^2}{12\eta}$ is commonly known as the permeability of the system.

In order to recover the macroscopic equations from the mesoscopic equations, a matched asymptotic expansion is necessary and the following identification of parameters has to be made: $p = \phi_{eq} \mu_1$, $K = \frac{M}{2\phi_{eq}^2}$ and $\gamma = \phi_{eq} \frac{\gamma'}{\Delta \phi}$ where μ_1 is the first order in ϵ term of the chemical potential, ϕ_0 is the zero order in ϵ term of the order parameter, $\Delta \phi = 2\phi_{eq}$, ϕ_{eq} is the bulk value for the order parameter in equilibrium and $\gamma' = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \phi_0}{\partial w} dw$. The variable w is an inner coordinate of the interface, that is introduced in the expansion, and that is, at any point, perpendicular to it.

It is worth to notice that in order to study the effect of a dynamic pressure drop on the Saffman finger shape, the pressure gradient should contain a constant term responsible of the finger formation. That is, the pressure gradient should be at any time negative so the fluid-fluid interface remains unstable. Moreover, the time dependent term of the pressure gradient should be small compared to the constant term of the pressure gradient since we are interested in studying situations in which the single-finger solution exists. In our model, the above considerations are implemented by taking the boundary

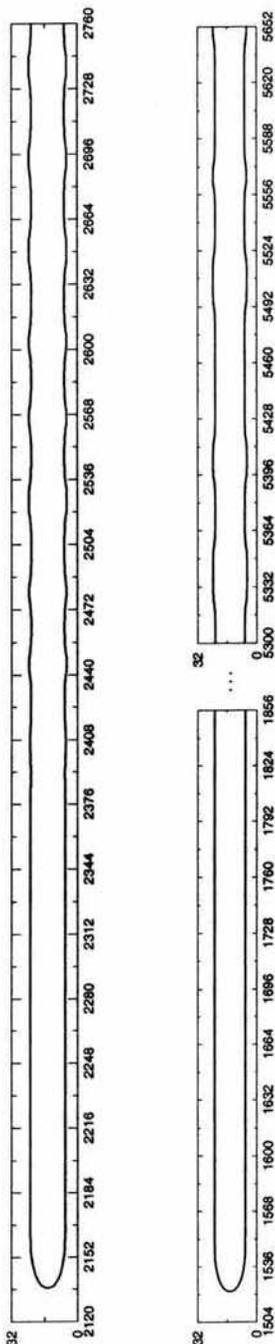


FIG. 3: Finger profiles with lateral instabilities. (a) The profile on the left is obtained when introducing an oscillatory perturbation in the pressure drop. In this case, the instability remains strictly periodic. For this simulation, $n_y = 3200$. (b) The profile on the right corresponds to a pressure drop with superimposed noise in time. As a result a non-periodic instability develops. For this simulation, $n_y = 7000$.

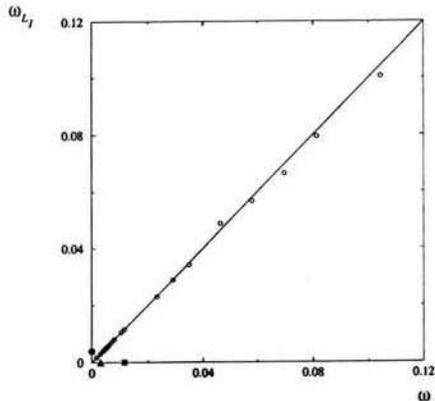


FIG. 4: Response frequency measured close to the fingertip plotted against incident frequency. For reference, the selected frequency is indicated in the coordinate axis as a circle. The natural frequencies of the flow, ω_∞ (triangle) and ω_{finger} (square), are indicated in the abscissa axis.

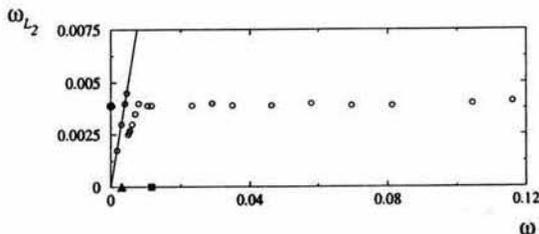


FIG. 5: Response frequency measured far from the fingertip plotted against incident frequency. For a wide range of frequencies mode selection occurs. The symbols on the axis are as in figure 4.

condition (3) for the order parameter in front of the finger as a constant plus a dynamic term of the form:

$$\phi_B(t) = \phi_{B0} + \delta g(t) \quad (7)$$

where $g(t)$ is a time-dependent dimensionless function which varies between -1 and 1 , and that will be considered in two different ways as explained below, and δ is an amplitude which is small compared with ϕ_{B0} . In the two cases described below, we have carried on the numerical integration of equation (1) subject to the proper dynamic boundary condition (7). We have used an Euler method for a discrete square lattice of size $n_x \times n_y$ with mesh size $\Delta x = 1$ and time step $\Delta t = 0.01$. n_x has been chosen to be $n_x = 32$ in all cases, and n_y , which is the dimension along which the finger propagates, has been chosen in such a way that the lateral instability is well developed. It will be specified in each case.

III. NATURAL FREQUENCIES

Before describing the dynamic signals considered in the present paper, it is convenient to remember that there are two natural frequencies of the steady-state problem. The first characteristic frequency of the steady-state problem is the finger velocity divided by the finger width, which gives an angular frequency equal to

$$\omega_{finger} = 2\pi \frac{U}{\lambda W} \quad (8)$$

The other frequency characteristic of the steady-state problem is the one determined by the flow very far from the finger tip, that is, the flow velocity at infinity divided by the channel width, which gives an angular frequency equal to

$$\omega_{\infty} = 2\pi \frac{V_{\infty}}{W} \quad (9)$$

These two frequencies are related to each other since conservation of matter implies that the finger velocity times the finger width is equal to the velocity at infinity, that is $U\lambda = V_{\infty}$.

IV. NUMERICAL RESULTS

A. Oscillatory pressure drop

The dynamic part of the incident signal consists of a single mode oscillatory term. That is $g(t)$ of the boundary condition (7) is

$$g(t) = \cos(\omega t) \quad (10)$$

The initial condition consists of a $\phi(x, y)$ profile that corresponds to a steady-state finger. The parameters ϕ_{B0} and δ in equation (7) have been set equal to $\phi_{B0} = -0.6$ and $\delta = 0.09$.

As the bulk value of $\phi_B(t)$ oscillates, the finger responds by generating a wave on its tip. This wave is advected far from the fingertip in such a way that the sides of the finger are no longer flat as in the steady state case, but develop an instability. In order to quantify the process of growth, the finger width is measured simultaneously at two different distances from the fingertip L_1 and L_2 . Due to the growth process, variations on the finger width measured at distance L_1 , close to the finger tip, have a much smaller amplitude than the ones measured at distance L_2 , far from the finger tip. Figure 2 illustrates the behavior of the finger width at distances L_1 and L_2 as a function of time. The incident signal on the boundary condition of the bulk order parameter has also been plotted in order to show that the incident frequency and the response frequency close to the fingertip are the same, that is, the wave generated at the finger tip, responds linearly to the incident signal. It can also be observed that at a distance far from the tip, the

frequency of the lateral instability no longer follows the incident signal, in fact, it undergoes a dynamic process as will be discussed below. Just as the frequency close to the fingertip, the wavelength of the lateral instability has a linear behavior. That is, it corresponds to the average finger velocity divided by the incident frequency. However, as the wave travels away from the tip toward the sides of the finger, the wavelength of the instability coarsens and reaches a value which is independent of the incident frequency. This happens for a very wide range of incident frequencies. That is, the lateral instability undergoes a mode selection process.

In our problem, the frequency selected for the lateral instability, is roughly the characteristic frequency of the flow far from the finger tip, ω_{∞} , given by equation (9). The amplitude of the selected mode saturates and is small compared to the finger width. Also it is a longwavelength instability as will be discussed. Therefore, the lateral instability does not have a dramatic visual effect on the finger like the instability that causes side branching in solidification, but it causes the finger to have small perturbations on its width. The instability is shown in figure 3(a) on a 1 : 1 scale in order to realize the actual size of the width variations that would be observable in an experiment.

Figure 4 shows how the frequency of the lateral instability close to the fingertip, ω_{L_1} , is the same as the incident frequency, ω , that is, $\omega_{L_1} = \omega$. This frequency is measured from the signal period T_{L_1} , with the relation $\omega_{L_1} = 2\pi/T_{L_1}$. This linear response close to the finger tip, has been observed for all of the incident frequencies studied. L_1 has been set equal to $L_1 = 40\Delta x$.

The process of frequency selection far from the finger tip is shown in figure 5. The frequency of the lateral instability, ω_{L_2} has the same value for a wide range of incident frequencies. This frequency is slightly larger than the characteristic frequency of the flow at infinity, given in equation (9). The frequency is measured from the signal period T_{L_2} using $\omega_{L_2} = 2\pi/T_{L_2}$. The continuous line is shown for reference and is the line that would correspond to linear response. We can clearly see that there are three regimes for the response frequency. First, at very low incident frequencies, the response frequency is always equal to the incident frequency. In this region, surface tension is not enough to suppress the modes that cause a perturbation to the sides of the finger. Secondly, there is a range of frequencies for which there is a behavior between linear response and selection. In this range of transition, the response frequency corresponds in all cases to half the incident frequency. This is shown in figure 6. We can understand this behavior if we think that in this region, surface tension is large enough to suppress the incident frequency, but not large enough to suppress its first harmonic. Finally, we see that for incident frequencies larger than the characteristic frequency of the finger, ω_{finger} given by equation (8), the response frequency is independent of the incident frequency, that is, there is a mode that is selected because it grows faster

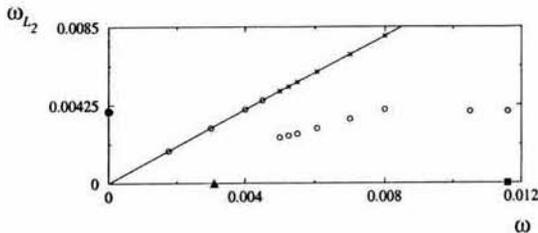


FIG. 6: Linear and transition zones of the ω_{L_2} vs ω curve. Circles correspond to simulation results, crosses represent the double of the observed frequency, $2\omega_{L_2}$, which fall on the diagonal and make evident that the first harmonic of the incident signal has grown. In this figure, the symbols on the axes correspond to the same frequencies as in figure 4.

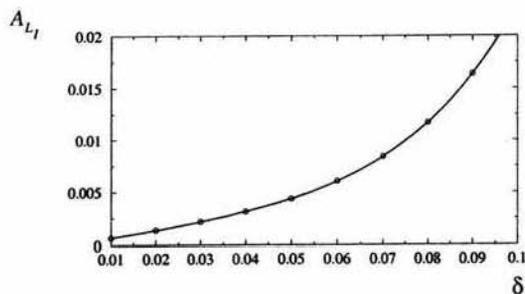


FIG. 7: Amplitude of the lateral instability measured at a fixed distance $L_1 = 40\Delta x$ as a function of the amplitude of the incident signal.

than the others. The selected frequency determines the wavelength of the lateral instability.

It is important to note that the lateral instability appears, in many cases, far from the finger tip. For instance, in the region of incident frequencies where selection is observed, the amplitude of the lateral instability saturates at a distance of the order of ten times the cell width and is very small close to the finger tip. See figure 3(a). For the linear and the transition zones (figure 8), the distance from the tip at which the lateral instability is observed is much smaller as will be discussed later. The distance L_2 has been chosen in each case as to measure the instability once the amplitude has saturated.

One might wonder how does the amplitude of this instability depends on the amplitude of the incident signal. Our results indicate that close to the finger tip, the larger the amplitude of the incident signal, the larger the amplitude of the instability. This can be seen in figure 7. However, far from the finger tip, we find that the saturation value for the amplitude of the instability is independent of the amplitude of the incident signal. Moreover, the

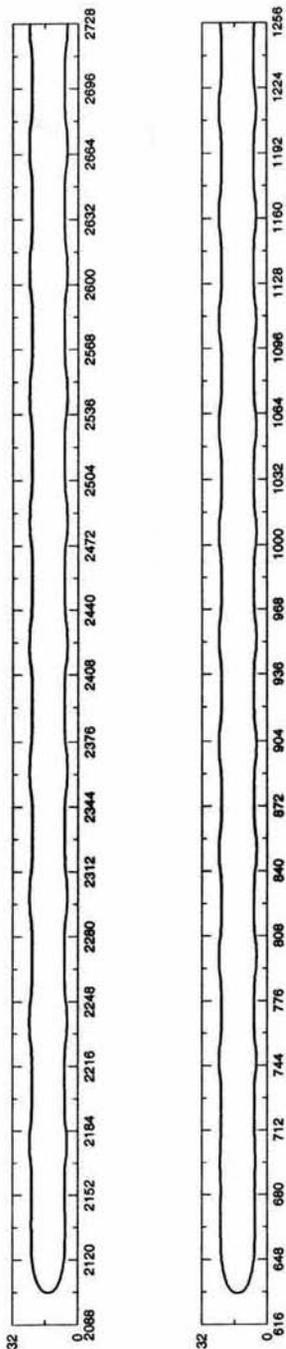


FIG. 8: The profile of the left corresponds to an incident frequency that falls in the linear region of the ω_{L_2} vs ω curve, whereas the profile on the right corresponds to a frequency that falls in the transition region of the same curve. The distance, d_s , at which the amplitude saturates is of the order of $d_s \approx \lambda$ and $d_s \approx 2\lambda$ respectively. These are regimes that would be easier to observe experimentally.

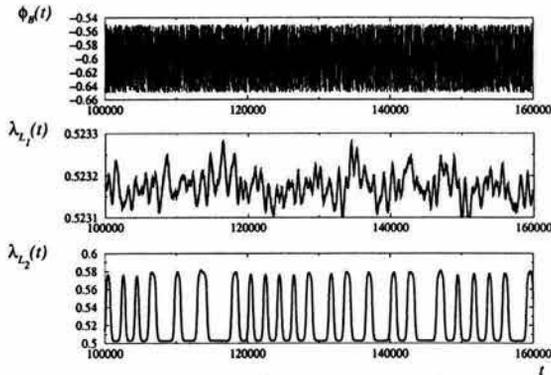


FIG. 9: Time dependence for the bulk value of the order parameter and of the finger width at distances L_1 and L_2 for the temporal noise case. For the simulation, $\delta = 0.05$.

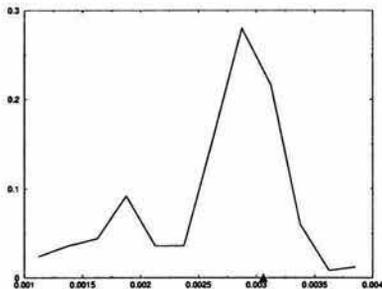


FIG. 10: Normalized distribution of response frequencies for an incident signal consisting of temporal noise. For the simulation, $\delta = 0.05$. For reference, the characteristic frequency of the flow, ω_∞ , is indicated in the coordinate axis with a triangle.

smaller the amplitude of the incident signal, the larger the distance from the tip at which the amplitude saturates and therefore, we believe, the harder it becomes to observe it experimentally.

B. Temporal noise

Results of the previous section indicate that the system selects a frequency for a wide range of incident frequencies. For linear equations, this would indicate that the system acts as a selective noise amplifier. Nevertheless, our phase-field equations contain the full non-linear behavior of the hydrodynamic equations. We therefore decided to study the effect of a dynamic signal consisting of white noise, which contains a combination of several modes.

We perturb the system by adding a random signal to a constant pressure gradient at each time step. In our

model, this is implemented by choosing $g(t)$ in equation (7) to be a random number between -1 and 1 at each time step. The value of δ in equation (7) is chosen to be $\delta = 0.05$.

Just as in the oscillatory case, the finger develops a lateral instability which is born close to the finger tip and propagates toward the sides of the finger. The amplitude of the lateral instability grows as the perturbation propagates away from the tip and it reaches an almost constant value. From the initial random perturbation, some modes grow and some modes decay as the perturbation propagates far from the tip. In figure 9, we show the driving signal consisting of white noise overlaid to a constant value of the bulk order parameter. We then show the oscillations of the finger width close to the tip in which some of the modes have already decayed. Finally, we see the oscillations of the finger width far from the tip in which some of the modes have grown and the amplitude of the oscillations has reached an almost constant value. The final state has a distribution of frequencies with a peak at a value close to the characteristic frequency of the flow at infinity, that is, close to the value of the frequency selected in the oscillatory case. This can be seen in figure 10. This indicates that, despite the non periodicity of the lateral instability, it undergoes a process of mode selection. Figure 3(b) shows the non periodic lateral instability for a finger with temporal noise.

V. DISCUSSION

In the laboratory frame of reference, once the amplitude of the instability saturates, the shape remains stationary. From the tip frame of reference, the instability propagates far from the tip with a velocity equal to the average finger velocity U . Therefore, the expected wavelength of the instability is given by

$$\Lambda = \frac{U}{\nu_{\text{selected}}} \approx \frac{U}{\nu_\infty} = \frac{W}{\lambda} \quad (11)$$

For fast normal fingers the finger width is close to $1/2$ of the channel width, so $\lambda \approx 0.5$. This means that the expected wavelength for the lateral instability is close to twice the cell width, $\Lambda \approx 2W$. The instability that we are reporting is a long wavelength instability. This fact by itself implies the need of long channels. But there is another element to be considered. From simulations, we observe that for fingers driven by an oscillatory signal in the selection zone, with an incident amplitude of $\delta = 0.09$, the distance, d_s , at which the amplitude saturates is $d_s \approx 10W$. This means that, not only the wavelength of the instability will be large, but it will take long for the instability to appear. For example, in an experiment with a cell 10 cm wide, the distance from the finger tip in which the lateral instability would be observable would be of the order of 1 m and the wavelength of the lateral instability of the order of 20 cm.

This fact becomes worse for the studied case of temporal noise, since in this case, the amplitude of the incident signal used was $\delta = 0.05$. See figure 3(b). In this case the distance, d_s , at which the amplitude saturates is $d_s \approx 20W$, which in our previous example of cell dimensions, would imply that the distance from the finger tip in which the lateral instability would be observable would be of the order of 2 m. This is why this lateral instability has not been observed for most of experimental situations reported in literature, even when natural noise is always present on the system. The channels needed to see selection, are extremely long. The frequency selected for this long wavelength lateral instability is roughly the characteristic frequency of the system at infinity, that is, $\nu_\infty = \frac{V_\infty}{W}$. On the other hand, for oscillatory fingers, selection is observed for incident frequencies larger than the characteristic frequency of the finger $\nu_{finger} = \frac{U}{\lambda W}$. Therefore, in order to experimentally observe selection, it would be necessary to apply frequencies larger than ν_{finger} .

On the other hand, the linear regime and the transition regime of the oscillatory fingers are not as hard to observe. For instance, for the oscillatory case with $\delta = 0.09$, the distance d_s at which the amplitude saturates, in terms of the wavelength for the instability, is of the order of $d_s \approx \Lambda$ for the linear regime and of the order of $d_s \approx 2\Lambda$ for the transition zone. This can be seen in figure 8.

In order to observe the linear regime of the lateral instability, it would be enough to apply an incident frequency close to the frequency characteristic of infinity. On the other hand, the transition zone should be observed for incident frequencies between the two characteristic frequencies of the system, that is, between ν_∞ and ν_{finger} .

VI. CONCLUSIONS

An oscillatory signal overimposed to a constant pressure gradient produces a low amplitude, long wavelength

lateral instability on normal Saffman-Taylor fingers. The instability undergoes a selection process and reaches a final state with a shape of a single finger whose sides have low amplitude strictly periodic undulations. The selected frequency corresponds roughly to the characteristic frequency of the system at infinity. This implies that the selected wavelength of the lateral instability for fast fingers will be close to twice the channel width. Also, the distance from the tip for the lateral instability to appear is of several times the expected wavelength. So in order to observe it, very long channels are necessary. For low frequencies, there is a linear regime in which the response frequency is the same as the incident frequency and a transition zone for which the response frequency is half of the incident frequency. For these cases, it should be easier to observe the instability, since the distance from the tip for the instability to be observable is of the order of one or twice the expected wavelength. When temporal noise is added to the system, the same lateral instability is observed. The distribution of frequencies has a peak at a frequency close to the frequency selected in the oscillatory case. We believe that the lateral fluctuations along the finger sides reported on reference [20] are related to the instability reported on section IV B of the present paper. This discussion will be the subject of a future publication.

VII. ACKNOWLEDGEMENTS

This work was partially supported by DGAPA through Grant PAPIIT IN117802-2 and by CONACYT through a fellowship of project 38538. AHM acknowledges financial support of the Dirección General de Investigación under project BFM2003-07749-C05-04. The authors thank Ana Lacasta and Antonio del Río for very useful discussions.

-
- [1] V. Fleury, J.-F. Gouyet, and M. Léonetti, eds., *Branching in Nature* (Springer-Verlag, 2001).
 - [2] E. Ben-Jacob and H. Levine, *Adv. Phys.* **49**, 395 (2000).
 - [3] J. Gollub and J. Langer, *Rev. Mod. Phys.* **71**, S396 (1999).
 - [4] C. Godrèche, ed., *Solids far from Equilibrium* (Cambridge University Press, 1992).
 - [5] A. Dougherty, P. Kaplan, and J. Gollub, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 1652 (1987).
 - [6] A. Dougherty and J. Gollub, *Phys. Rev. A* **38**, 3043 (1988).
 - [7] M. Barber, A. Barbieri, and J. Langer, *Phys. Rev. A* **36**, 3340 (1987).
 - [8] R. Pieters, *Phys. Rev. A* **37**, 3126 (1988).
 - [9] R. Pieters and J. Langer, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 1948 (1986).
 - [10] Y. Couder, N. Gérard, and M. Rabaud, *Phys. Rev. A* **34**, 5175 (1986).
 - [11] M. Rabaud, Y. Couder, and N. Gerard, *Phys. Rev. A* **37**, 935 (1988).
 - [12] P. Bouissou, A. Chiffaudel, B. Perrin, and P. Tabeling, *Europhys. Lett.* **13**, 89 (1990).
 - [13] X. Qian and H. Cummins, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 3038 (1990).
 - [14] G. K. Batchelor, H. K. Moffat, and M. G. Worster, eds., *Perspectives in Fluid Dynamics* (Cambridge University Press, 2000).
 - [15] E. Ben-Jacob, R. Godbey, N. Goldenfeld, J. Koplik,

- H. Levine, T. Mueller, and L. Sander, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 1315 (1985).
- [16] E. Decker, J. Ignés-Mullol, A. Baratt, and J. Maher, *Phys. Rev. E* **60**, 1767 (1999).
- [17] K. McCloud and J. Maher, *Phys. Rep.* **260**, 139 (1995).
- [18] S. Sarkar and D. Jasnow, *Phys. Rev. A* **39**, 5299 (1989).
- [19] D. Bensimon, *Phys. Rev. A* **33**, 1302 (1986).
- [20] M. Moore, A. Juel, J. Burgess, W. McCormick, and H. Swinney, *Phys. Rev. E* **65**, 030601 (2002).
- [21] P. Pelcé, *Dynamics of Curved Fronts* (Academic Press, Inc., San Diego, CA, 1988).
- [22] R. Folch, J. Casademunt, A. Hernández-Machado, and J. Ramírez-Piscina, *Phys. Rev. E* **60**, 1724 (1999).
- [23] R. Folch, J. Casademunt, A. Hernández-Machado, and J. Ramírez-Piscina, *Phys. Rev. E* **60**, 1734 (1999).
- [24] A. Hernández-Machado, A. M. Lacasta, E. Mayoral, and E. Corvera-Poiré, *Phys. Rev. E* **68**, 046310 (2003).

BIBLIOGRAFÍA

- [1] A. Hernández-Machado, A. M. Lacasta, E. Mayoral, and E. Corvera Poiré, *Phys. Rev. E* **68**, 046310 (2003).
- [2] D. W. Thompson, *On Growth and Form* (Cambridge University Press, Cambridge, R.U., 1961).
- [3] J. S. Langer, *Rev. Mod. Phys.* **52**, 1 (1980).
- [4] A. T. Dorsey, H. Guo, and O. Martin, *Phys. Rev. A* **35**, 3989 (1987).
- [5] E. Corvera Poiré, H. Guo, and D. Jasnow, *Phys. Rev. E* **52**, 4063 (1995).
- [6] T. J. T. Spanos, B. C. Davidson, and M. B. Dusseault, Proc 50th Annual Technical Meeting, Petroleum Society of CIM (1999).
- [7] Y. Couder, N. Gererad, and M. Rabaud, *Phys. Rev. A* **34**, 5175 (1986).
- [8] M. Rabaud, Y. Couder, and N. Gererad, *Phys. Rev. A* **37**, 935 (1988).
- [9] P. Pelcé, *Dynamics of Curved Fronts* (Academic Press Inc., San Diego, EE.UU., 1988).
- [10] G. K. Batchelor, H. K. Moffat, and M. G. Worster, *Perspectives in Fluid Dynamics* (Cambridge University Press, Cambridge, R.U., 2000).
- [11] W. W. Mullins and R. F. Sekerka, *J. Appl. Phys.* **34**, 323 (1963).
- [12] P. G. Saffman and G. I. Taylor, *Phys. Rev. Lett.* **245**, 312 (1958).
- [13] E. Pitts, *J. Fluid Mech.* **97**, 53 (1980).
- [14] J. W. McLean and P. G. Saffman, *J. Fluid Mech.* **102**, 455 (1981).
- [15] T. Y. Hou, J. S. Lowengrub, and M. J. Shelley, *J. Comp. Phys.* **169**, 302 (2002).
- [16] D. Jasnow and J. V. nals, *Phys. Rev. A* **41**, 6910 (1990).
- [17] R. Folch, J. Casademunt, A. Hernández-Machado, and L. Ramírez-Piscina, *Phys. Rev. E* **60**, 1724 (1999).
- [18] R. Folch, J. Casademunt, A. Hernández-Machado, and L. Ramírez-Piscina, *Phys. Rev. E* **60**, 1734 (1999).
- [19] P. C. Halperin and B. I. Hohenberg, *Rev. Mod. Phys.* **49**, 435 (1977).

-
- [20] M. G. Moore, A. Juel, J. M. Burgess, W. D. McCormick, and H. L. Swinney, *Phys. Rev. E* **65**, 030601 (2002).
- [21] E. Corvera Poiré and J. A. del Río, *J. Phys.: Condensed Matter*. **16**, S2055 (2004).
- [22] E. M. Lifshitz and L. P. Pitaevskii, *Statistical Physics*, vol. 5 of *Landau and Lifshitz - Course of Theoretical Physics* (Pergamon Press, Oxford, R.U., 1980), 3rd ed.
- [23] M. R. Spiegel and J. Liu, *Mathematical Handbook of Formulas and Tables* (McGraw-Hill, EE.UU., 1999).