UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"CONICAS UN ENFOQUE VECTORIAL (Ejercicios)"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

A C T U A R I A

P R E S E N T A :

TERESA ROMERO SILVA

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

DIRECTOR DE TESIS: MAT. ESTEBAN RUBEN HURTADO CRUZ

2004

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

" CONICAS UN ENFOQUE VECTORIAL (Ejercicios) "

realizado por Teresa Romero Silva

con número de cuenta 8338672-7 , quien cubrió los créditos de la carrera de:

Actuaria

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario Mat. Esteban Rubén Hurtado Cruz.

Propietario M. en C. Jaqueline Rafaela Dolores Cañetas Ortega.

Propietario Mat. Mario Delgadillo Torres.

Suplente Act. Lucía Ivonne Hernández Martínez. Lucía

Suplente Mat. Jesús Barbosa Reyes. Jesús Barbosa Reyes.

Consejo Departamental de

M.en C. Jose Antonio Flores Díaz.

AGRADECIMIENTOS

Gracias dios padre por tu infinito amor.

A mi familia dedico mi presente trabajo
Gracias a mi esposo Hilario Manjarréz, por su apoyo y comprensión que me han alentado a seguir adelante.
A mis hijas Bere y Eli que siempre están conmigo.

Gracias a mis padres Anselmo Romero y Salud Silva, por darme la vida y enseñarme a valorarla.
A mis hermanos Juan Cruz, Cecilia, Ascención y Anselmo.

A mi suegro Asunción Manjarréz, por su apoyo.
Y porque podemos lograrlo si nos lo proponemos, gracias Dra. Edna.

A mi director de tesis Rubén, le doy las gracias por todo lo que he aprendido con él durante mi trabajo y por la sincera amistad que me brinda.
A la maestra Jaqueline por la aportación teórica al presente trabajo, su paciencia y sobre todo por su amistad, gracias.
Gracias a los profesores Mario, Ivonne y Jesús, por regalarme un poco de su tiempo al aceptar mi trabajo y revisarlo.

A los compañeros que me han apoyado durante mi carrera gracias.

CÓNICAS UN ENFOQUE VECTORIAL

(*Ejercicios*)

Índice general

INTRODUCCIÓN

El propósito principal de éste trabajo es que sirva como material de apoyo en el capítulo de secciones cónicas desde un punto de vista vectorial en un curso de Geometría Analítica.
En el primer capítulo se proporciona el marco teórico, en el que nos apoyaremos para llevar a cabo la solución de los ejercicios que se desarrollan en los capítulos posteriores.
En los capítulos 2, 3 y 4 se expone el desarrollo de ejercicios referentes a la elipse, la hipérbola y la parábola respectivamente.
Cada capítulo consta de tres secciones, en la primera sección se inicia proporcionando algunos de los datos y se pide encontrar los restantes, asi como su representación en los cuatro sistemas de referencias, y finalmente su gráfica en el sistema $\{0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$.
En la segunda sección se proporciona la ecuación general de segundo grado y se pide determinar el lugar geométrico, proporcionando sus datos y gráfica en el sistema $\{0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$, así como su representación en los restantes sistemas de referencia.
Por último en la tercera sección se presentan, ejemplificados, cada uno de los posibles casos degenerados asociados a la cónica en estudio.
El capítulo 5, es un capítulo anexo que incluye una serie de ejercicios en $\Re^3$ de la ecuación general de segundo grado que extiende el último tratamiento para encontrar el lugar geométrico representado.

Capítulo 1

Preliminares

El estudio de las cónicas se remonta a la época de los antiguos matemáticos griegos, que fueron los primeros que las estudiaron y les dieron nombre, basandose en las características de los lugares geométricos que se generan al intersectar un cono circular recto y un plano con diferentes ángulos de inclinación. El cono circular recto se genera con base a una recta fija ℓ que es el centro del cono y una segunda recta ℓ' que gira alrrededor de la primera con un ángulo constante. Por su construcción el cono está formado por dos mantos que tienen en común el punto V, que es su vértice. Toda recta que pasa por V y pertenece al cono recibe el nombre de generatriz del mismo.
Los diferentes lugares geométricos.

- Si el plano no es paralelo a alguna generatriz del cono y corta sólo un manto enteramente, el lugar geométrico representa una elipse. En caso de que el plano sea perpendicular al eje del cono la intersección es una circunferencia o un punto, que llamamos casos degenerados de la elipse

- Si el plano que intersecta el cono no contiene al vértice, no es paralelo a alguna generatriz del mismo y corta ambos mantos del cono se obtiene el lugar geométrico que representa una hipérbola, pero si el plano contiene a V se generan dos rectas que se cruzan y a esto se le llama caso degenerado de la hipérbola

- Si el plano que corta al cono es paralelo a una generatriz del mismo, el lugar geométrico obtenido es una parábola, aunque puede darse el caso de que la intersección sea un par de rectas paralelas, ó que sea una recta generatríz si el plano es tangente al cono, ó el conjunto vacío; a éstos tres casos se les conoce como casos degenerados de la parábola.

Las cónicas son curvas planas contenidas en el espacio de dimensión 2.
Recordemos que el plano cartesiano se genera en base a un punto fijo F_0 con dos direcciones definidas que denotaremos como $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$ que deben ser linealmente independientes, así el plano cartesiano se representa por el siguiente conjunto:

$$\Pi = \{P | P = F_0 + a\hat{\imath} + b\hat{\jmath}\} \qquad a, b \epsilon \Re$$

haciendo una analogía con el espacio vectorial tenemos que los vectores se definen por su sentido, dirección y magnitud, representados por medio de flechas que conllevan un punto inicial $P_0 = (x_1, y_1)$ y un punto final $P_2 = (x_2, y_2)$
Cada vector $[x, y]$ lo podemos expresar como el vector resultante de la suma de dos vectores perpendiculares de la siguiente forma, trazamos una recta horizontal que pase por el punto P_0 del vector $[x, y]$ con dirección $\hat{u}$ y una segunda recta vertical perpendicular a la anterior que pase por P_2 y los vectores que generan éstas rectas son los vectores buscados.

Graficamente

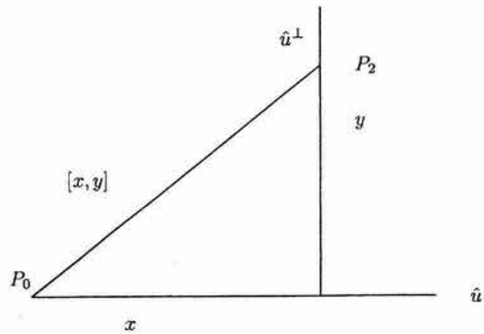


Figura 1

así mismo podemos pedir que los vectores $\hat{u}$ y $\hat{u}^{\perp}$ sean vectores ortonormales (perpendiculares entre sí y de magnitud 1).
El vector $[x, y]$ se puede representar en forma única como una combinación lineal de vectores ortonormales.
Y el espacio vectorial V se representa en la forma siguiente

$$V = \{\overline{P_0P} = P - P_0 = x\hat{u} + y\hat{u}^{\perp}\} \qquad x, y \epsilon \Re$$

veamos como se relacionan los sistemas anteriores.

Gráficamente

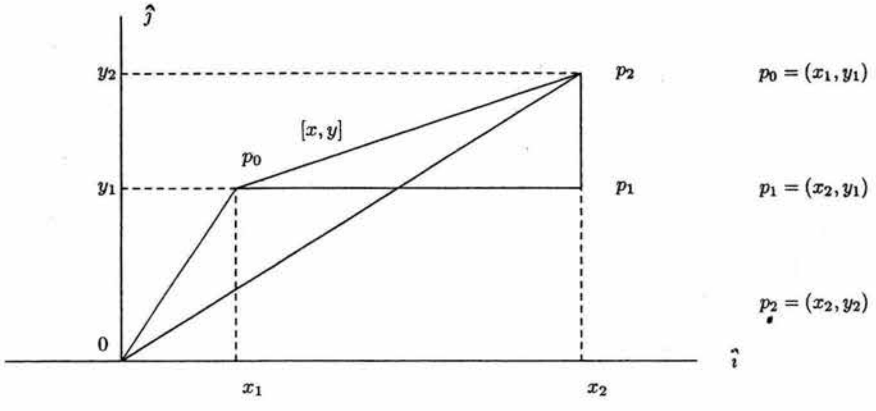


Figura 2

en el plano cartesiano, por el Teorema de Pitágoras tenemos:

$$\overline{P_0P_2}^2 = \overline{P_0P_1}^2 + \overline{P_1P_2}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

en forma vectorial

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{P_0P_2} &= \overrightarrow{P_0P_1} + \overrightarrow{P_1P_2} \\
\overrightarrow{P_0P_2} &= (x_2 - x_1)\hat{u} + (y_2 - y_1)\hat{u}^{\perp} \\
\overrightarrow{P_0P_2} &= (x_2 - x_1, y_2 - y_1) \\
\overrightarrow{P_0P_2} &= (x_2, y_2) - (x_1, y_1) \\
\overrightarrow{P_0P_2} &= P_2 - P_0
\end{aligned}$$

expresada la relación anterior obtenemos las diferentes representaciones de las cónicas dadas las características de su lugar geométrico.

La Elipse.

Dados dos puntos fijos f_1 y f_2 llamados focos, que se encuentran a una distancia $2c$ entre si, el punto P que se mueve en el plano de tal manera que la suma de sus distancias a f_1 y f_2 es igual a $2a$ genera el lugar geométrico denominado elipse.
Notemos que la elipse es una cónica centrada que posee dos ejes de simetría, el eje focal o eje mayor que posee la dirección principal dada por un vector director unitario denotado como $\hat{u}$.
La recta que atravieza por el eje focal contiene los vértices v_1 y v_2 de la elipse, así como sus focos y su centro de simetría v_0.
El eje menor o eje transverso es el otro eje de simetría de la elipse, éste tiene como generador al vector ortogonal a $\hat{u}$ que denotaremos como $\hat{u}^{\perp}$ y su recta contiene a los extremos de la elipse B_1 y B_2 y pasa por su centro de simetría v_0.
Damos a continuación las coordenadas de sus elementos en cualquier sistema de referencias, conociendo sus correspondientes coordenadas de $\hat{u}, \hat{u}^{\perp}$ y v_0

$v_1 = v_0 - a\hat{u}$, $\quad v_2 = v_0 + a\hat{u}$, $\quad f_1 = v_0 - c\hat{u}$,

$f_2 = v_0 + c\hat{u}$, $\quad B_1 = v_0 - b\hat{u}^{\perp}$, $\quad B_2 = v_0 + b\hat{u}^{\perp}$

Los parámetros:
a: representa la distancia del centro de simetría a cualquiera de los vértices
c: representa la distancia del centro de simetría a f_1 ó f_2 y
b: representa la distancia del centro de simetría al extremo B_1 ó B_2
Los parámetros a, b y c cumplen con el Teorema de Pitágoras en la relación $a^2 = b^2 + c^2$.
La ecuación de la recta que contiene
al eje mayor

$$E_{M_a} = \{P | P = v_0 + s\hat{u} \qquad s \epsilon \Re\}$$

al eje menor

$$E_{m_e} = \{P | P = v_0 + s'\hat{u}^{\perp} \qquad s' \epsilon \Re\}$$

al lado recto que pasa por f_1

$$L_{R_1} = \{P | P = f_1 + t\hat{u}^{\perp} \qquad t \epsilon \Re\}$$

al lado recto que pasa por f_2

$$L_{R_2} = \{P | P = f_2 + t'\hat{u}^{\perp} \qquad t' \epsilon \Re\}$$

la longitud del eje mayor es $||E_M|| = 2a$
la longitud del eje menor es $||E_m|| = 2b$
la longitud del lado recto es $||L_{R_i}|| = \frac{2b^2}{a}$ $i \epsilon \{1, 2\}$

Graficamente

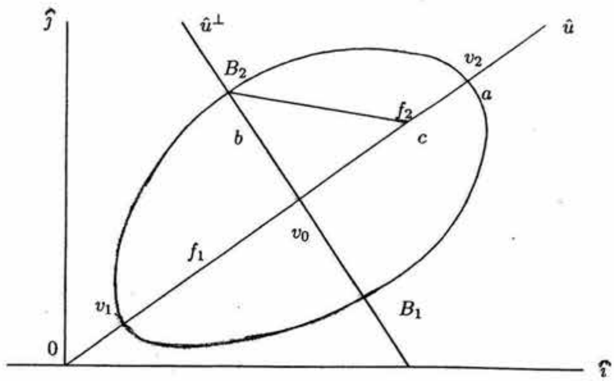


Figura 3

Decimos que el punto $P = v_0 + x'''\hat{u} + y'''\hat{u}^{\perp}$ está en la elipse

$$\iff \qquad |P - f_1| + |P - f_2| = 2a$$

$$P - f_1 = v_0 + x'''\hat{u} + y'''\hat{u}^{\perp} - (v_0 - c\hat{u}) = x'''\hat{u} + y'''\hat{u}^{\perp} + c\hat{u} = (x''' + c)\hat{u} + y'''\hat{u}^{\perp}$$

$$P - f_2 = v_0 + x'''\hat{u} + y'''\hat{u}^{\perp} - (v_0 + c\hat{u}) = x'''\hat{u} + y'''\hat{u}^{\perp} - c\hat{u} = (x''' - c)\hat{u} + y'''\hat{u}^{\perp}$$

$$\begin{aligned}
|P - f_1| + |P - f_2| &= \sqrt{(x''' + c)^2 + y'''^2} + \sqrt{(x''' - c)^2 + y'''^2} = 2a \\
&\Rightarrow \left(\sqrt{(x''' + c)^2 + y'''^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x''' - c)^2 + y'''^2}\right)^2 \\
&\Rightarrow a^2(a^2 - c^2) = (a^2 - c^2)x'''^2 + a^2 y'''^2 \\
a > c, a^2 - c^2 > 0, \ \ sea \ \ & b^2 = a^2 - c^2 \\
&\Rightarrow a^2 b^2 = b^2 x'''^2 + a^2 y'''^2 \\
&\therefore \frac{x'''^2}{a^2} + \frac{y'''^2}{b^2} = 1
\end{aligned}$$

Esta ecuación representa la ecuación canónica de la elipse en el sistema óptimo, que se conoce como elipse horizontal.
Si la dirección principal de la cónica es paralela el eje $\hat{\jmath}$ su representación es:

$$\frac{x'''^2}{b^2} + \frac{y'''^2}{a^2} = 1$$

que recibe el nombre de elipse vertical.
Estas son las ecuaciones que representan a la elipse en el sistema óptimo [1] $\{v_0, \{\hat{u}, \hat{u}^{\perp}\}\}$.
El valor de los parámetros y el lado recto son independientes del sistema de referencia en el que se encuentre la cónica en cuestión.

[1] Se denomina óptima debido a la facilidad que presenta para localizar los datos de la cónica y su representación gráfica.

La Hipérbola.

Es el lugar geométrico generado por el punto P con la propiedad de que el valor absoluto de la diferencia de la distancia de P a f_1 y a f_2 (puntos fijos llamados focos) es un valor positivo constante $2a$.
La hipérbola es una cónica centrada que posee dos ejes de simetría, el eje mayor se genera con base al vector director unitario $\hat{u}$ cuya recta contiene a f_1, f_2 y el centro de simetria v_0, así como los vértices v_1 y v_2 y el eje menor que es generado por el vector $\hat{u}^{\perp}$ y pasa por el centro de simetría v_0.
Conociendo las coordenadas de v_0, $\hat{u}$ y $\hat{u}^{\perp}$ en cada sistema de referencias expresamos sus elementos como

$v_1 = v_0 - a\hat{u}$, $\quad v_2 = v_0 + a\hat{u}$, $\quad f_1 = v_0 - c\hat{u}$,

$f_2 = v_0 + c\hat{u}$, $\quad B_1 = v_0 - b\hat{u}^{\perp}$, $\quad B_2 = v_0 + b\hat{u}^{\perp}$

La hipérbola cuenta con un par de asíntotas que se obtienen construyendo el rectángulo con lados de longitud $2a$ y $2b$ paralelos a sus direcciones principales respectivamente y con centro en el centro de simetría de la cónica y se expresan como las rectas:

$$L_1 = \{P|P = v_0+t(a\hat{u}+b\hat{u}^{\perp}), t\epsilon\Re\} \quad , \quad L_2 = \{P|P = v_0+t(-a\hat{u}+b\hat{u}^{\perp}), t\epsilon\Re\}$$

Graficamente

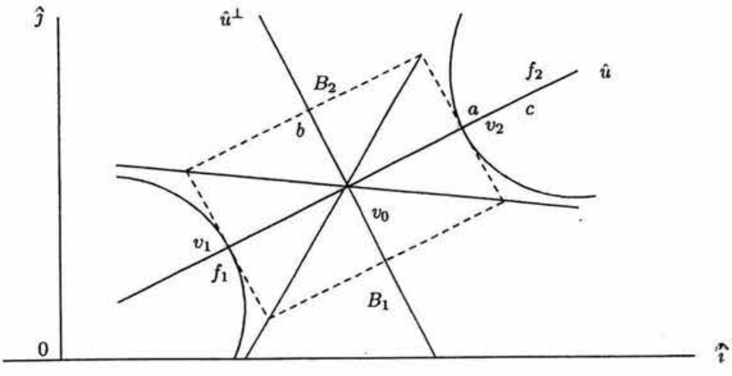


Figura 4

Haciendo un análisis semejante al de la elipse tenemos que todo punto $P = v_0 + x'''\hat{u} + y'''\hat{u}^{\perp}$ en el sistema $\{v_0, \{\hat{u}, \hat{u}^{\perp}\}\}$ pertenece a la hipérbola

$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
||P - f_1| - |P - f_2|| &= |\sqrt{(x''' + c)^2 + y'''^2} - \sqrt{(x''' - c)^2 + y'''^2}| = 2a \\
a^2(a^2 - c^2) &= (a^2 - c^2)x'''^2 + a^2 y'''^2 \\
a < c, a^2 - c^2 < 0, b > 0, \ sea &\ -b^2 = a^2 - c^2 \\
&\Rightarrow \ a^2(-b^2) = (-b^2)x'''^2 + a^2 y'''^2 \\
&\therefore \ \frac{x'''^2}{a^2} - \frac{y'''^2}{b^2} = 1
\end{aligned}$$

Esta es la ecuación canónica de la hipérbola en el sistema óptimo, con dirección principal $\hat{u}$. A éta cónica se le conoce como hipérbola horizontal.
La hipérbola vertical tiene su dirección principal $\hat{u}$ paralela al eje $\hat{\jmath}$ y su representación es

$$\frac{y'''^2}{b^2} - \frac{x'''^2}{a^2} = 1$$

La Parábola

La parábola es el lugar geométrico de los puntos P que equidistan de una recta fija D del plano y un punto fijo f que no pertenece a D.
Esta no es una cónica centrada, sólo tiene un eje de simetría que se va a generar con base al vector director $\hat{u}$, que es la dirección principal de la cónica.
Los elementos de la parábola en cualquier sistema de referencias conociendo las coordenadas de v_0, $\hat{u}$ y $\hat{u}^{\perp}$ son

$f = v_0 + p\hat{u}$, $\quad D = \{P | P = v - p\hat{u} + y\hat{u}^{\perp}, y\epsilon\Re\}$, $\quad E_f = \{P | P = v_0 + r\hat{u}, r\epsilon\Re\}$, $||L_R|| = 4p$

Graficamente

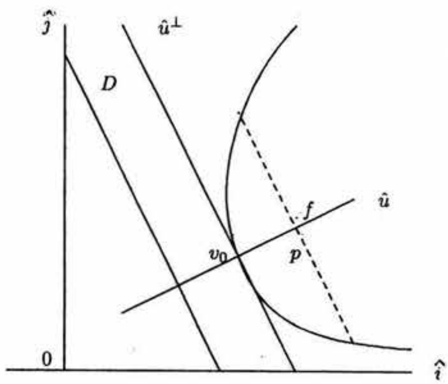


Figura 5

El punto $P = v_0 + x'''\hat{u} + y'''\hat{u}^{\perp}$ en el sistema $\{v_0, \{\hat{u}, \hat{u}^{\perp}\}\}$ pertenece a la parábola $\Longleftrightarrow$

$$\begin{aligned} d(P, D) &= |P - f| \\ |P + x'''| &= |v - p\hat{u} + y'''\hat{u}^{\perp} - (v + p\hat{u})| = |(x''' - p)\hat{u} + y'''\hat{u}^{\perp}| \\ |x''' + p| &= \sqrt{(x''' - p) + y'''^2} \end{aligned}$$

elevando ambos miembros al cuadrado y simplificando tenemos

$$y'''^2 = 4px'''$$

ésta es la ecuación de la parábola con dirección principal $\hat{u}$ y notemos que sí $p > 0$, el foco se encuentra a la derecha del vértice y la parábola abre hacia la derecha, sí $p < 0$ el foco se encuentra a la izquierda del vértice y la parábola abre hacia la izquierda.

De igual forma obtenemos la ecuación de la parábola con dirección principal $\hat{u}$ paralela al eje $\hat{\jmath}$ que es

$$x'''^2 = 4py'''$$

en éste caso sí $p > 0$ la parábola abre hacia arriba, y si $p < 0$ abre hacia abajo. Una forma general de escribir la ecuación óptima de las cónicas en el sistema $\{v_0, \{\hat{u}, \hat{u}^{\perp}\}\}$ es
para las centradas

$$Ax'''^2 + Cy'''^2 + F = 0$$

para las no centradas

$$Cy'''^2 + 2Dx''' = 0 \qquad , \qquad Ax'''^2 + 2Ey''' = 0$$

Veamos a continuación la relación que existe entre los diferentes sistemas de referencias.

Relación entre los sistemas $\{v_0, \{\hat{u}, \hat{u}^{\perp}\}\}$, $\{0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$, $\{v_0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$ y $\{v_0, \{\hat{u}, \hat{u}^{\perp}\}\}$.

Sistemas $\{v_0, \{\hat{u}, \hat{u}^{\perp}\}\}$ y $\{0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$

Sea P un punto en ambos sistemas de referencia

Graficamente

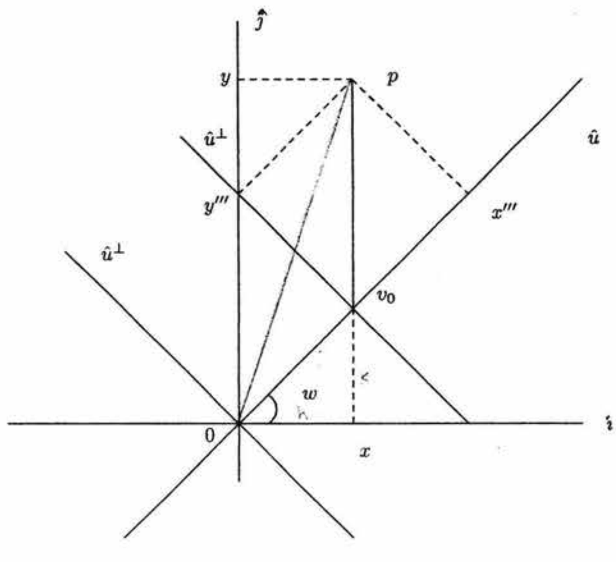


Figura 6

el punto P se representa en el sistema $\{0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$ como $P = 0 + x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$ con x,y ϵ $\Re$ y en el sistema $\{v_0, \{\hat{u}, \hat{u}^{\perp}\}\}$ como $P = v_o + x'''\hat{u} + y'''\hat{u}^{\perp}$, podemos pedir que los vectores sean ortonormales en cada uno de los dos sistemas

$\overrightarrow{v_0P} = x'''\hat{u} + y'''\hat{u}^{\perp}$
$\overrightarrow{0P} = \overrightarrow{0v_0} + \overrightarrow{v_0P} = \overrightarrow{0v_0} + x'''\hat{u} + y'''\hat{u}^{\perp}$
En el sistema $\{0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$ el punto P se representa como

$$\overline{0v_0} = h\hat{\imath} + k\hat{\jmath} \qquad y \qquad \overline{0P} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$$

obtenemos la relación entre los dos sistemas tomando en cuenta que sus vectores base son ortonormales y podemos relacionarlos con base al círculo unitario, de tal forma que un punto en ella se puede escribir como $P = (x, y) = (cos\omega, sen\omega)$, así la relación que cumplen los sistemas de referencia está dada por

$$\hat{u} = cos\omega\hat{\imath} + sen\omega\hat{\jmath} \qquad \hat{u}^{\perp} = -sen\omega\hat{\imath} + cos\omega\hat{\jmath}$$

regresando
$\overrightarrow{0P} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} = h\hat{\imath} + k\hat{\jmath} + x'''\hat{u} + y'''\hat{u}^{\perp}$
$\overline{0P} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} = h\hat{\imath} + k\hat{\jmath} + x'''(cos\omega\hat{\imath} + sen\omega\hat{\jmath}) + y'''(-sen\omega\hat{\imath} + cos\omega\hat{\jmath})$
$\overline{0P} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} = h\hat{\imath} + k\hat{\jmath} + x'''cos\omega\hat{\imath} + x'''sen\omega\hat{\jmath} - y'''sen\omega\hat{\imath} + y'''cos\omega\hat{\jmath}$
$\overline{0P} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} = h\hat{\imath} + k\hat{\jmath} + (x'''cos\omega - y'''sen\omega)\hat{\imath} + (x'''sen\omega + y'''cos\omega)\hat{\jmath}$
de tal forma que la relación entre los dos sistemas se expresa como
$x = h + x'''cos\omega - y'''sen\omega$
$y = k + x'''sen\omega + y'''cos\omega$
El punto P queda expresado en el sistema $\{v_0, \{\hat{u}, \hat{u}^{\perp}\}\}$ como $P = v_o + x'''\hat{u} + y'''\hat{u}^{\perp}$, y despejando x''' y y''' en términos de x y y obtenemos las coordenadas del punto en el sistema $\{0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$, que al ser sustituído en la ecuación óptima de la cónica correspondiente nos va a dar como resultado la "Ecuación General de Segundo grado" asociada a dicha cónica ó un caso degenerado de ella que es:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \tag{1.1}$$

Cuando analizamos la ecuación de segundo grado nos basamos en el indicador I de la ecuación, dada por el determinante

$$I = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$$

para averiguar qué lugar geométrico representa nos basamos en lo siguiente:

Si $I > 0$ el lugar geométrico es una elipse ó un caso degenerado de ella
Si $I < 0$ el lugar geométrico es una hipérbola ó un caso degenerado de ella
Si $I = 0$ el lugar geométrico es una parábola ó un caso degenerado de ella

Relación entre los sistemas $\{0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$ y $\{v_0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$

Sea P un punto en ambos sistemas de referencias como se muestra a continuación

Gráficamente

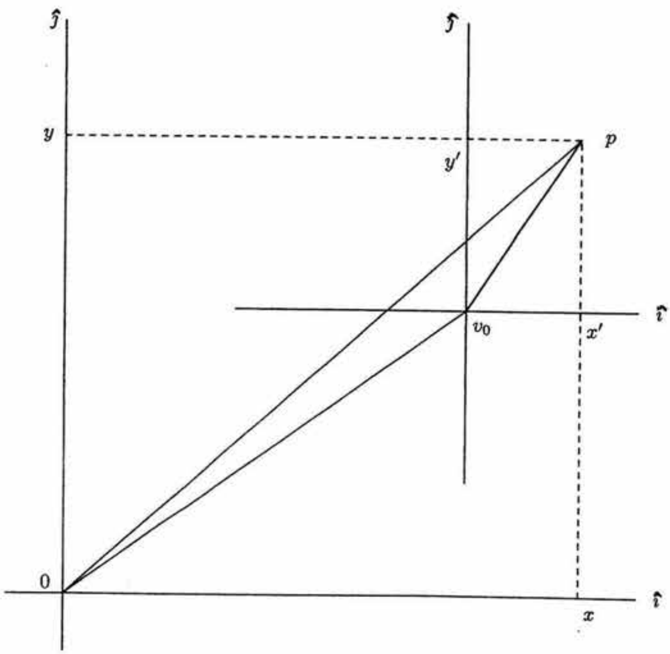


Figura 7

$\overline{0P} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} = \overrightarrow{0v_0} + \overrightarrow{v_0P}$
$\overline{0P} = h\hat{\imath} + k\hat{\jmath} + x'''\hat{u} + y'''\hat{u}^{\perp} = h\hat{\imath} + k\hat{\jmath} + x'\hat{\imath} + y'\hat{\jmath} = (h + x')\hat{\imath} + (k + y')\hat{\jmath}$
de aquí

$$x = x' + h \qquad y \qquad y = y' + k$$

estas son las ecuaciones que relacionan ambos sistemas y reciben el nombre de ecuaciones de traslación.
En el caso de las cónicas centradas, si conocemos su centro de simetría v_0 podemos obtener los valores correspondientes de las ecuaciones anteriores y al sustituirlos en la ecuación (1.1) nos da como resultado una ecuación de la forma:

$$A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2 + F' = 0$$

que es la ecuación general de las cónicas centradas en el sistema $\{v_0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$.
Si no se conocen las coordenadas de v_0, una forma de hacerlo es sustituir directamente las ecuaciones de traslación en la ecuación (1.1) e igualar los coeficientes de x' y y' a cero, ya que al trasladar los ejes del sistema de referencia, lo que hacemos es eliminar los términos lineales de la ecuación (1.1), al llegar al centro de simetría
Las ecuaciones de los coeficientes son:

$$2Ah + 2Bk + 2D = 0 \qquad y \qquad 2Bh + 2Ck + 2E = 0$$

que por la regla de Cramer tiene una solución única sí

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \neq 0$$

y la solución del sistema de ecuaciones son los valores buscados.
Otra forma de encontrar los valores de h y k es con base a los siguientes determinantes (por la regla de Cramer).

$$\delta s = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}, \delta h = \begin{vmatrix} -D & B \\ -E & C \end{vmatrix}, \delta k = \begin{vmatrix} A & -D \\ B & -E \end{vmatrix}$$

donde

$$(h, k) \qquad = \left(\frac{\delta h}{\delta s}, \frac{\delta k}{\delta s}\right)$$

de igual forma podemos obtener el término independiente F

$$\delta f = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}, f' = \frac{\delta f}{\delta s}$$

Si la cónica es no centrada resulta difícil obtener los valores de h y k por lo que se recomienda efectuar primero la rotación de los ejes del sistema y después la traslación de los mismos.

Relación entre los sitemas $\{0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$ y $\{0, \{\hat{u}, \hat{u}^{\perp}\}\}$.

Sea P un punto en ambos sistemas de referencia, graficamente tenemos

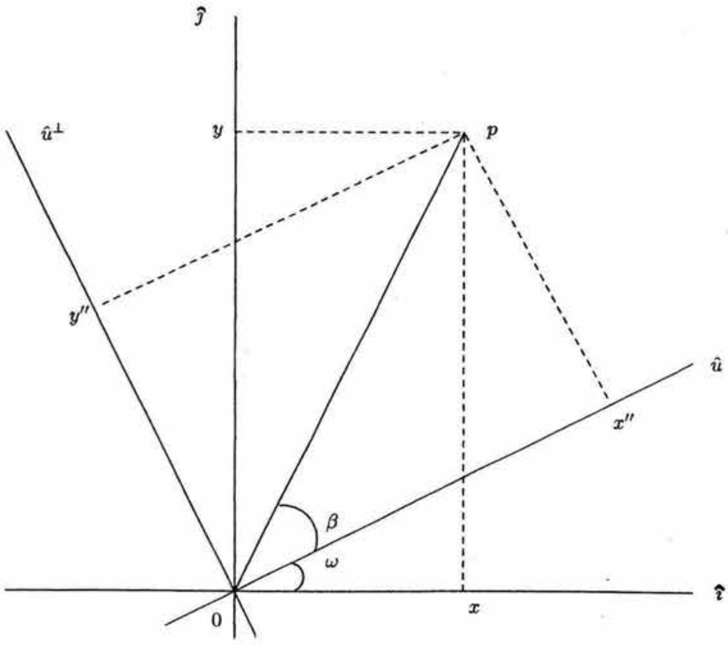


Figura 8

Y basándonos en la relación expresada anteriormente

$$\hat{u} = cos\omega\hat{\imath} + sen\omega\hat{\jmath} \qquad \hat{u}^{\perp} = -sen\omega\hat{\imath} + cos\omega\hat{\jmath}$$

tenemos que
$\overline{0P} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} = x''\hat{u} + y''\hat{u}^{\perp}$
$\overline{0P} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} = x''(cos\omega\hat{\imath} + sen\omega\hat{\jmath}) + y''(-sen\omega\hat{\imath} + cos\omega\hat{\jmath})$
$\overline{0P} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} = x''cos\omega\hat{\imath} + x''sen\omega\hat{\jmath} - y''sen\omega\hat{\imath} + y''cos\omega\hat{\jmath}$
$\overline{0P} = (x''cos\omega - y''sen\omega)\hat{\imath} + (x''sen\omega + y''cos\omega)\hat{\jmath}$

$$x = x''cos\omega - y''sen\omega \qquad y = x''sen\omega + y''cos\omega$$

estas son las ecuaciones que relacionan ambos sistemas.
Conociendo el ángulo de rotación, llamémosle α, dados por el vector $\hat{u} = [cos\alpha, sen\alpha]$ podemos sustituir las ecuaciones anteriores en la ecuación (1.1) obteniendo la nueva ecuación que va a carecer del término cruzado.
Para las cónicas centradas es:

$$A'x''^2 + C'y''^2 + 2D'x'' + 2E'y'' + F' = 0$$

para las no centradas

$$A'x''^2 + 2D'x'' + 2E'y'' = 0 \qquad , \qquad C'y''^2 + 2D'x'' + 2E'y'' = 0$$

una forma de obtener el ángulo α es sustituír directamente las ecuaciones de rotación en la ecuación (1.1) y obtenemos así los nuevos coeficientes

$$\begin{aligned}
A' &= Acos^2\alpha + 2Bcos\alpha sen\alpha + Csen^2\alpha \\
2B' &= 2Bcos2\alpha - (A - C)sen2\alpha \\
C' &= Asen^2\alpha - 2Bcos\alpha sen\alpha + Ccos^2\alpha \\
D' &= Dcos\alpha + Esen\alpha \\
E' &= -Dsen\alpha + Ecos\alpha \\
F' &= F
\end{aligned}$$

hacemos $2B' = 2Bcos2\alpha - (A - C)sen2\alpha = 0$
1.– Si $A = C \Rightarrow 2Bcos2\alpha = 0 \therefore \alpha = 45°$
2.– si $A \neq C \Rightarrow tan2\alpha = \frac{2B}{A-C}$, y el vector de dirección principal correspondiente es $\hat{u} = [cos\alpha, sen\alpha]$, cuyas coordenadas estan dadas por las fórmulas trigonométricas

$$cos\alpha = \sqrt{\frac{1 + cos2\alpha}{2}} \quad , \quad sen\alpha = \sqrt{\frac{1 - cos2\alpha}{2}}$$

donde el $cos2\alpha$ es el correspondiente al $tan2\alpha$.
Otra forma de efectuar la rotación es en base a la "Ecuación característica" asociada a la ecuación (1.1)
Como mencionamos anteriormente al sustituir las ecuaciones de rotación en la ecuación (1.1) obtenemos la nueva ecuación en las variables x'' y y''

$$A'x''^2 + 2B'x''y'' + C'y''^2 + 2D'x'' + 2E'y'' + F' = 0$$

y se define

$$\begin{aligned} L(x, y) &= (xA + yB, xB + yC) \\ &= (xA, xB) + (yB, yC) \\ &= x(A, B) + y(B, C) \end{aligned}$$

en forma equivalente

$$\begin{aligned} L[u] &= u_1[A, B] + u_2[B, C] = \lambda[u_1, u_2] \\ &\Rightarrow [u_1A, u_1B] + [u_2B, u_2C] - \lambda[u_1, u_2] = 0 \\ &= u_1[A - \lambda, B] + u_2[B, C - \lambda] = 0 \end{aligned}$$

de aquí

$$\begin{aligned} u_1(A - \lambda) + u_2B &= u\bullet[A - \lambda, B] = 0 \\ u_1B + u_2(C - \lambda) &= u\bullet[B, C - \lambda] = 0 \end{aligned}$$

que tiene soluciones no triviales $\Longleftrightarrow$ $[A-\lambda, B]$ y $[B, C-\lambda]$ son paralelos, y ésto pasa sólo sí:

$$\begin{aligned}
[A-\lambda, B]^{\perp} \bullet [B, C-\lambda] &= \lambda^2 - (A+C)\lambda - (B^2 - AC) = 0 \\
&= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = 0
\end{aligned}$$

ésta es la ecuación característica asociada a la ecuación general de segundo grado donde λ_1 y λ_2 son llamadas las raíces características de dicha ecuación.
Si tomamos $\lambda = \lambda_1$ el vector $\hat{u}$ solución, es el vector unitario ortogonal a alguno de los siguientes vectores

$$[A-\lambda_1, B] \qquad , \qquad [B, C-\lambda_1]$$

De igual forma podemos obtener la ecuación general de la cónica en el sistema $\{0, \{\hat{u}, \hat{u}^{\perp}\}\}$ por medio de la siguiente ecuación matricial

$$\epsilon = \{x' | x'^t Q' x' + S' R x' + F = 0\}$$

donde

$$x' = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}, x'^t = \begin{pmatrix} x'' & y'' \end{pmatrix}, Q' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, S' = \begin{pmatrix} 2D & 2E \end{pmatrix} y R = \begin{pmatrix} \hat{u} & \hat{u}^{\perp} \end{pmatrix}$$

Aparte, en la sección de casos degenerados se emplearon diversos métodos de solución que serán desarrollados en el mismo.

Como una extensión del último método descrito anteriormente tenemos lo siguiente:
La ecuación general de segundo grado en $\Re^3$ es:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

cuya representación matricial es

$$X'^t Q' X' + S' X' + J = 0$$

de donde

$$Q' = \begin{pmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{pmatrix} y S' = \begin{pmatrix} G, & H, & I \end{pmatrix}$$

para obtener la matriz de rotación necesitamos los vectores unitarios, que resultan de resolver el siguiente determinante

$$|Q' - \lambda_i I| = 0$$

que nos va a proporcionar las raices λ_1, λ_2 y λ_3.
sustituyendo en la expresión $(Q' - \lambda_i I)\hat{e}_i = 0$ el valor de λ_1, obtenemos las coordenadas de $\hat{e}_1$ y así sucesivamente para $\hat{e}_2$ y $\hat{e}_3$, la matriz de rotación se representa por $R = (\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$
y la nueva matríz $Q = R^t Q' R$ y de aquí la ecuación que buscamos es, en su forma matricial

$$X'^t Q X' + S' R X' + J = 0$$

y con ésto concluímos la parte teórica del presente trabajo.

Capítulo 2

La elipse

2.1. datos

En cada uno de los siguientes ejercicios encuentre la representación de la elipse en los diferentes sistemas de referencias.
Obtenga sus elementos y proporcione su gráfica en el sistema $\{0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$.

Ejemplo 2.1.1. Los vértices $v_1 = (1, 4)$, $v_2 = (9, 4)$ y semieje menor igual a 2.

Primero hallaremos el punto medio entre v_1 y v_2 que es el centro de simetría de la elipse.

$$v_0 = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{(1,4) + (9,4)}{2} = \frac{(10,8)}{2} = (5,4)$$

$\therefore \boxed{v_0 = (5,4)}$

nótese que el eje focal de la elipse es paralelo al eje x.
Por hipótesis el semieje menor es igual a dos $\therefore \boxed{b = 2}$ y $2b$ es la longitud del eje menor para cualquier elipse y lo denotamos como $\|E_m\|$ así $\boxed{\|E_m\| = 4}$
ahora buscamos el valor de a con bade en el vector $\overrightarrow{v_0 v_1}$

$$a = d(v_0, v_1) = \|(v_1 - v_0)\| = \|(1,4) - (5,4)\| = \|(-4,0)\| = 4$$

$\therefore \boxed{a = 4}$ y $2a$ es el valor del eje mayor que denotamos como $\|E_M\|$ así $\boxed{\|E_M\| = 8}$

Recordemos que la elipse cumple la siguiente relación $a^2 = b^2+c^2$, despejando $c^2 = a^2 - b^2$ y sustituyendo los valores de a y b obtenemos $c^2 = 16 - 4$ entonces $c^2 = 12$
$\therefore \boxed{c = 2\sqrt{3}}$
por otro lado denotaremos como $\hat{u}$ al vector unitario de $\overrightarrow{v_0v_2} = |\overrightarrow{v_0v_2}|\hat{u}$

$$\hat{u} = \frac{v_2 - v_0}{\|v_2 - v_0\|} = \frac{(9,4)-(5,4)}{\|(9,4)-(5,4)\|} = \frac{(4,0)}{\|(4,0)\|} = [1,0]$$

$\therefore \boxed{\hat{u} = [1,0]}$ y $\boxed{\hat{u}^{\perp} = [0,1]}$
de tal forma que $\hat{u} \parallel \hat{\imath}$ y $\hat{u}^{\perp} \parallel \hat{\jmath}$.
los focos f_1 y f_2 están a distancia c de v_0 sobre el eje mayor, así

$$f_1 = v_0 - c\hat{u} \quad y \quad f_2 = v_0 + c\hat{u}$$

$$f_1 = (5,4) - 2\sqrt{3}[1,0] \quad y \quad f_2 = (5,4) + 2\sqrt{3}[1,0]$$

$$\boxed{f_1 = (5 - 2\sqrt{3}, 4)} \quad y \quad \boxed{f_2 = (5 + 2\sqrt{3}, 4)}$$

la longitud del lado recto, denotado como L_R, lo encontramos sustituyendo los valores de a y b en la siguiente igualdad

$$\begin{aligned} \|L_R\| &= \frac{2b^2}{a} = \frac{2(2^2)}{4} \\ &= \frac{2(4)}{4} = 2 \end{aligned}$$

De aquí los datos encontrados en el sistema $\{0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$ son:

$a = 4$, $b = 2$, $c = 2\sqrt{3}$, $\hat{u} = [1,0]$, $\hat{u}^{\perp} = [0,1]$, $v_0 = (5,4)$,

$v_1 = (1,4)$, $v_2 = (9,4)$, $f_1 = (5 - 2\sqrt{3}, 4)$, $f_2 = (5 + 2\sqrt{3}, 4)$, $\|E_M\| = 8$,

$\|E_m\| = 4$, $\|L_R\| = 2$

La ecuación de la elipse en éste sistema es:

$$\frac{(x-5)^2}{16}+\frac{(y-4)^2}{4}=1 \tag{2.1}$$

desarrollando

$$\begin{aligned}
4(x-5)^2+16(y-4)^2 &= 16(4)\\
4(x^2-10x+25)+16(y^2-8y+16) &= 64\\
4x^2-40x+100+16y^2-128y+256 &= 64\\
4x^2+16y^2-40x-128y+292 &= 0\\
x^2+4y^2-10x-32y+73 &= 0
\end{aligned}$$

la ecuación en el sistema $\{v_0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$ es

$$\frac{x'^2}{16}+\frac{y'^2}{4}=1 \tag{2.2}$$

desarrollando la ecuación

$$\begin{aligned}
4x'^2+16y'^2 &= 64\\
x'^2+4y'^2 &= 16
\end{aligned}$$

Estas son las ecuaciones obtenidas para los sistemas $\{0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$ y $\{v_0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$, para los sistemas $\{0, \{\hat{u}, \hat{u}^{\perp}\}\}$ y $\{v_0, \{\hat{u}, \hat{u}^{\perp}\}\}$ las ecuaciones, en éste caso en particular, resultan ser las mismas ya que $\hat{u} \parallel \hat{\imath}$ y $\hat{u}^{\perp} \parallel \hat{\jmath}$ como se mencionó anteriormente.

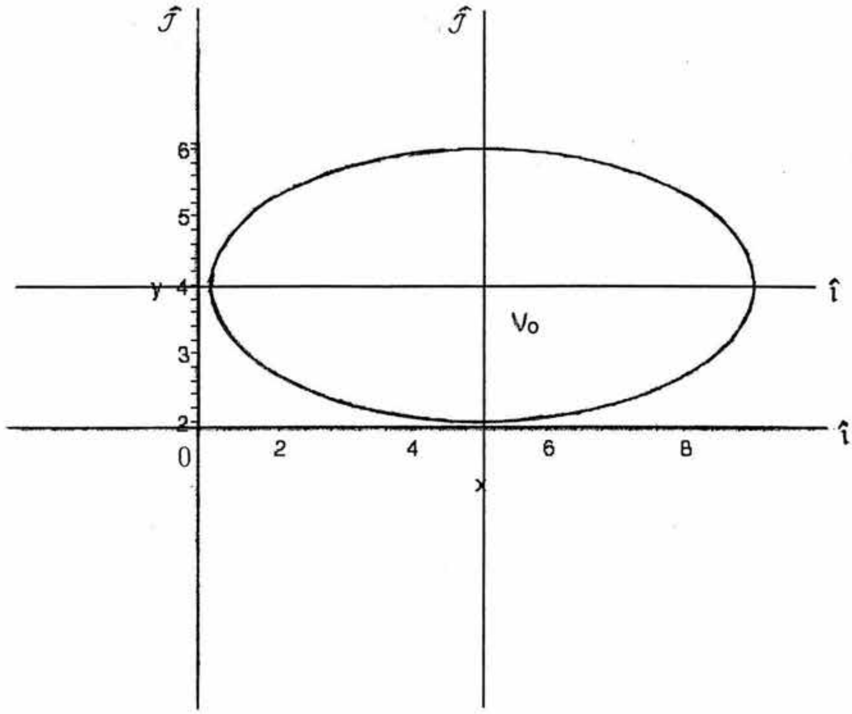


Figura 1:Solución gráfica

Ejemplo 2.1.2. Dado $v_0 = (1, -4)$, $v_2 = (1, 1)$ y el punto $P = (2, -1)$ que pertenece a la elipse.

Primero encontramos el vector director $\hat{u}$

$$\hat{u} = \frac{(v_2 - v_0)}{\|(v_2 - v_0)\|} = \frac{(1,1)-(1,-4)}{\|(1,1)-(1,-4)\|} = \frac{(0,5)}{\|(0,5)\|} = [0,1]$$

$\therefore \boxed{\hat{u} = [0,1]} \Rightarrow \boxed{\hat{u}^{\perp} = [-1,0]}$
notemos que el eje mayor de la elipse es paralelo al eje $\hat{\jmath}$.
v_1 se localiza a la misma distancia a de v_0 que v_2 así:

$$a = d(v_0, v_2) = \|(1,1)-(1,-4)\| = \|(0,5)\| = 5$$

$$\boxed{a = 5} \therefore \boxed{\|E_M\| = 10}$$

obtenemos el vértice v_1:

$$v_1 = v_0 - a\hat{u} = (1,-4) - 5[0,1] = (1,-4) - (0,5) \Rightarrow \boxed{v_1 = (1,-9)}$$

con v_0, $\hat{u} \parallel \hat{\jmath}$ y $\hat{u}^{\perp} \parallel \hat{\imath}$ podemos construir la ecuación de la elipse en el sistema $\{0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$ que es:

$$\frac{(x-1)^2}{b^2} + \frac{(y+4)^2}{25} = 1 \tag{2.3}$$

sustituyendo el punto $P = (2, -1)$ que pertenece a la elipse y desarrollando para b tenemos:

$$\begin{aligned}
25(x-1)^2 + b^2(y+4)^2 &= 25b^2 \\
25(2-1)^2 + b^2(-1+4)^2 &= 25b^2 \\
25 + 9b^2 &= 25b^2 \\
9b^2 - 25b^2 &= -25 \\
-16b^2 &= -25 \\
b^2 &= \frac{25}{16}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \boxed{b = \frac{5}{4}} \therefore \boxed{\|E_m\| = \frac{5}{2}}$

sustituyendo a y b en $a^2 = b^2 + c^2$ se obtiene $\boxed{c = \frac{5\sqrt{15}}{4}}$

los focos están a una distancia c de v_0, sobre el eje mayor y su representación es la siguiente:

$f_1 = v_0 - c\hat{u} = (1, -4) - \left(\frac{\sqrt{375}}{4}\right)[0, 1] = (1, -4) - \left(0, \frac{\sqrt{375}}{4}\right)$

$$\therefore \qquad \boxed{f_1 = \left(1, -4 - \frac{\sqrt{375}}{4}\right)}$$

$f_2 = v_0 + c\hat{u} = (1, -4) + \left(\frac{\sqrt{375}}{4}\right)[0, 1] = (1, -4) + \left(0, \frac{\sqrt{375}}{4}\right)$

$$\therefore \qquad \boxed{f_2 = \left(1, -4 + \frac{\sqrt{375}}{4}\right)}$$

el lado recto tiene longitud:

$$\begin{aligned}\|L_R\| &= \frac{2b^2}{a} = \frac{2\left(\frac{5}{4}\right)^2}{5} \\ &= \frac{2\left(\frac{25}{16}\right)}{5} = \frac{\frac{25}{8}}{5} \\ &= \frac{5(5)}{8(5)} = \frac{5}{8}\end{aligned}$$

Los datos obtenidos de la elipse en el sistema $\{0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$ son:

$a = 5$, $\quad b = \frac{5}{4}$, $\quad c = \frac{5\sqrt{15}}{4}$, $\quad \hat{u} = [0, 1]$, $\quad \hat{u}^{\perp} = [-1, 0]$,

$v_0 = (1, -4)$, $\quad v_1 = (1, -9)$, $\quad v_2 = (1, 1)$, $\quad f_1 = \left(1, -4 - \frac{5\sqrt{15}}{4}\right)$,

$f_2 = \left(1, -4 + \frac{5\sqrt{15}}{4}\right)$, $\quad \|E_M\| = 10$, $\quad \|E_m\| = \frac{5}{2}$, $\quad \|L_R\| = \frac{5}{8}$.

La ecuación de la elipse en este sistema es:

$$\frac{(x-1)^2}{\frac{25}{16}} + \frac{(y+4)^2}{25} = 1 \tag{2.4}$$

desarrollando la ecuación

$$\begin{aligned} 16(x-1)^2+(y+4)^2 &= 25 \\ 16(x^2-2x+1)+(y^2+8y+16) &= 25 \\ 16x^2-32x+16+y^2+8y+16 &= 25 \\ 16x^2+y^2-32x+8y+7 &= 0 \end{aligned}$$

En el sistema $\{v_0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$ la ecuación es

$$\frac{x'^2}{\frac{25}{16}} + \frac{y'^2}{25} = 1 \tag{2.5}$$

desarrollando

$$\begin{aligned} \frac{x'^2}{\frac{25}{16}} + \frac{y'^2}{25} &= 1 \\ 16x'^2 + y'^2 &= 25 \\ 16x'^2 + y'^2 - 25 &= 0 \end{aligned}$$

La ecuación en el sistema de referencias $\{0, \{\hat{u}, \hat{u}^{\perp}\}\}$ podemos obtenerla ya que la dirección horizontal $\hat{u}$ se encuentra sobre el eje $\hat{\imath}$ y la dirección vertical $\hat{u}^{\perp}$ se encuentra sobre el eje $\hat{\jmath}$ por tanto la ecuación obtenida es:

$$\frac{(x''-4)^2}{25} + \frac{(y''-1)^2}{\frac{25}{16}} = 1 \tag{2.6}$$

desarrollando la ecuación

$$\begin{aligned} (x''-4)^2+16(y''-1)^2 &= 25 \\ x''^2-8x''+16+16(y''^2-2y''+1) &= 25 \\ x''^2-8x''+32-25+16y''^2-32y'' &= 0 \\ x''^2+16y''^2-8x''-32y''+7 &= 0 \end{aligned}$$

De la misma forma en el sistema $\{v_0, \{\hat{u}, \hat{u}^{\perp}\}\}$ la ecuación resulta:

$$\frac{x'''^2}{25} + \frac{y'''^2}{\frac{25}{16}} = 1 \tag{2.7}$$

su expresión desarrollada es

$$x'''^2 + 16y'''^2 - 25 = 0$$

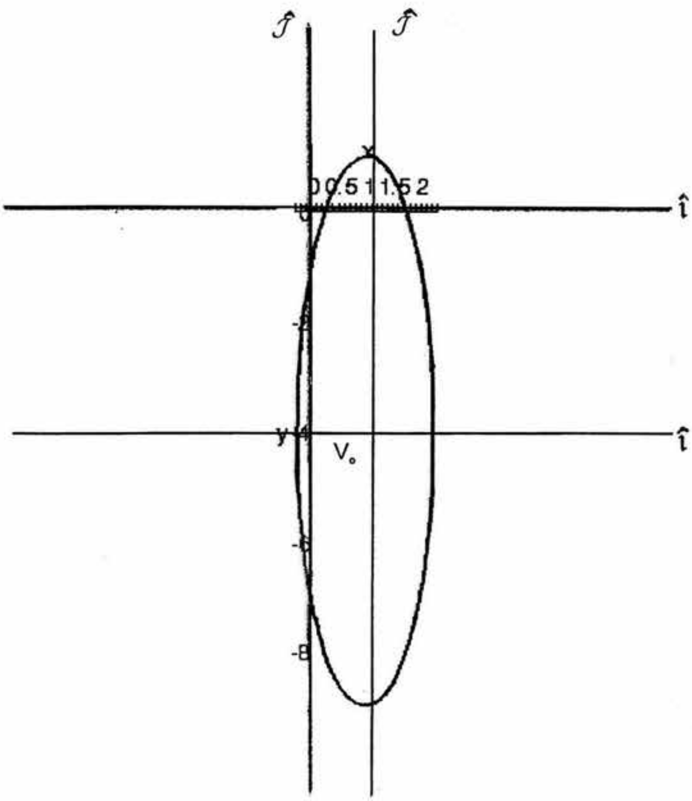


Figura 2:Solución gráfica

Ejemplo 2.1.3. Se dan los siguientes datos $f_2 = (5,0)$, $v_0 = (2,0)$ y $v_1(-3,0)$.

Hallamos el vector director unitario $\bar{u}' = \overrightarrow{v_0v_1} = |\overrightarrow{v_0v_1}|\hat{u}'$ que resulta ser de la misma longitud que el vector $\bar{u} = \overrightarrow{v_0v_2} = |\overrightarrow{v_0v_2}|\hat{u}$ pero de sentido contrario.

$$\bar{u}' = \frac{v_1 - v_0}{\|(v_1 - v_0)\|} = \frac{(-3,0)-(2,0)}{\|(-3,0)-(2,0)\|} = \frac{(-5,0)}{\|(-5,0)\|} = [-1,0] = -[1,0]$$

$\therefore \boxed{\hat{u} = [1,0]} \Rightarrow \boxed{\hat{u}^{\perp} = [0,1]}$
obtenemos el valor de a
$a = d(v_1, v_0) = \|(2,0)-(-3,0)\| = \|(5,0)\| = 5 \therefore \boxed{a = 5}$
encontramos v_2 como la siguiente suma de vectores en dirección $\hat{u}$
$v_2 = v_0 + 5\hat{u} = (2,0) + 5[1,0] = (7,0) \therefore \boxed{v_2 = (7,0)}$
calculamos el valor de c
$c = d(v_0, f_2) = \|(5,0)-(2,0)\| = \|(3,0)\| = 3 \therefore \boxed{c = 3}$
a f_1 y f_2 los encontramos como:
$f_1 = v_0 - c\hat{u} = (2,0) - 3[1,0] = (2,0) - (3,0) = (-1,0) \Rightarrow \boxed{f_1 = (-1,0)}$
$f_2 = v_0 + c\hat{u} = (2,0) + 3[1,0] = (2,0) + (3,0) = (5,0) \Rightarrow \boxed{f_2 = (5,0)}$
calculamos el valor de $\|E_M\|$:

$$2a = d(v_1, v_2) \quad = \|v_2 - v_1\| \quad = \|(7,0)-(-3,0)\| \quad = \|(10,0)\| = 10$$

$\therefore \boxed{\|E_M\| = 10}$
y se cumple que

$$a^2 = b^2 + c^2, \;\; b^2 = a^2 - c^2, \;\; b^2 = 25 - 9, \;\; b^2 = 16 \;\Rightarrow\; \boxed{b = 4} \;\therefore\; \boxed{\|Em\| = 8}$$

encontramos el valor del lado recto

$$\|L_R\| = \frac{2b^2}{a} \quad = \frac{2(16)}{5} \quad = \frac{32}{5} \quad \therefore \quad \boxed{\|L_R\| = \tfrac{32}{5}}$$

Los datos encontrados en el sistema $\{0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$ son los siguientes:

$a = 5$, $b = 4$, $c = 3$, $\hat{u} = [1,0]$, $\hat{u}^{\perp} = [0,1]$,

$v_0 = (2,0)$, $v_1(-3,0)$, $v_2 = (7,0)$, $f_1 = (-1,0)$,

$f_2 = (5,0)$, $\|E_M\| = 10$, $\|Em\| = 8$, $\|L_R\| = \frac{32}{5}$

y su ecuación correspondiente en este sistema es:

$$\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \tag{2.8}$$

desarrollando la ecuación anterior

$$\begin{aligned} 16(x-2)^2 + 25y^2 &= 25(16) \\ 16(x^2 - 4x + 4) + 25y^2 &= 400 \\ 16x^2 - 64x + 64 + 25y^2 - 400 &= 0 \\ 16x^2 + 25y^2 - 64x - 336 &= 0 \end{aligned}$$

su ecuación en el sistema $\{v_0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$ es:

$$\frac{x'^2}{25} + \frac{y'^2}{16} = 1 \tag{2.9}$$

desarrollando

$$\begin{aligned} 16x'^2 + 25y'^2 &= 400 \\ 16x'^2 + 25y'^2 - 400 &= 0 \end{aligned}$$

Para hallar las ecuaciones correspondientes a los sistema $\{v_0, \{\hat{u}, \hat{u}^\perp\}\}$ y $\{0, \{\hat{u}, \hat{u}^\perp\}\}$ notamos que la dirección horizontal $\hat{u}$ se encuentra sobre la direccón $\hat{\imath}$ así como la dirección vertical $\hat{u}^\perp$ se encuentra sobre la dirección $\hat{\jmath}$ por lo tanto, la ecuación en el sistema $\{0, \{\hat{u}, \hat{u}^\perp\}\}$ resulta ser la misma que para el sistema $\{0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$ y lo mismo ocurre con los sistema $\{v_0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$ y $\{v_0, \{\hat{u}, \hat{u}^\perp\}\}$.

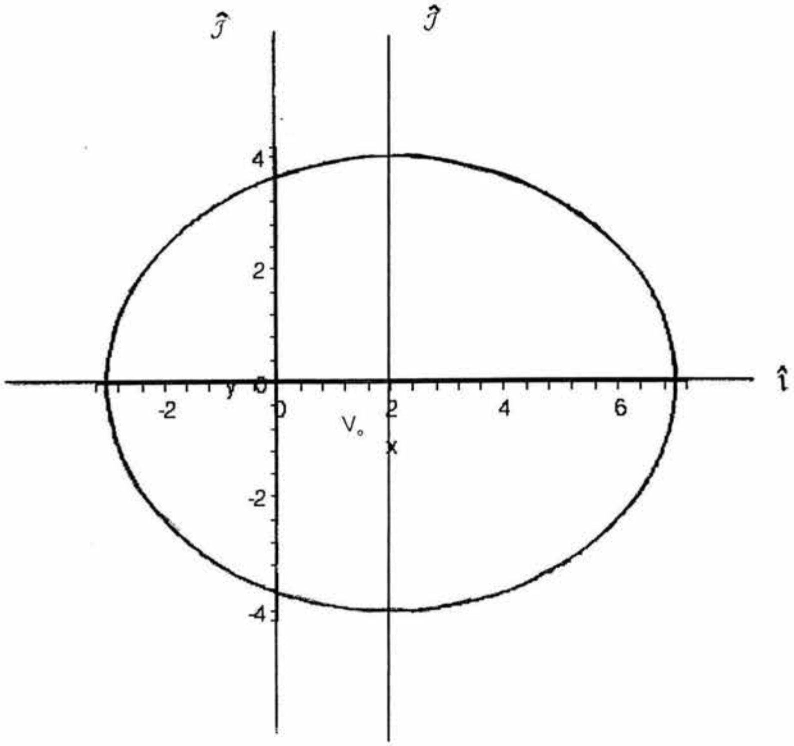


Figura 3:Solución gráfica

Ejemplo 2.1.4. Se dan $v_0 = (0,0)$, $v_2 = (1,2)$ y $b = 1$.

Primero encontramos el vector unitario $\hat{u}$

$$\hat{u} = \frac{v_2 - v_0}{\|v_2 - v_0\|} = \frac{(1,2) - (0,0)}{\|(1,2) - (0,0)\|} = \frac{(1,2)}{\|(1,2)\|} = \left[\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right]$$

$\therefore \boxed{\hat{u} = \left[\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right]}$ y $\boxed{\hat{u}^{\perp} = \left[\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right]}$
ahora el valor de a

$$a = d(v_0, v_2) = \|(v_2 - v_0)\| = \|(1,2)\| = \sqrt{5}$$

$\therefore \boxed{a = \sqrt{5}}$
como la elipse cumple con la igualdad $a^2 = b^2 + c^2$ de aquí que $c^2 = a^2 - b^2$, $c^2 = 5 - 1 \Rightarrow c^2 = 4 \therefore \boxed{c = 2}$
las coordenadas del vértice v_1 son

$$v_1 = v_0 - a\hat{u} = (0,0) - \sqrt{5}\left[\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right] = (-1,-2)$$

las coordenadas de los focos son

$$f_1 = v_0 - c\hat{u} \quad y \quad f_2 = v_0 + c\hat{u}$$

$$f_1 = (0,0) - 2\left[\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right] \quad y \quad f_2 = (0,0) + 2\left[\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right]$$

$$\boxed{f_1 = \left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{-4}{\sqrt{5}}\right)} \quad y \quad \boxed{f_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{4}{\sqrt{5}}\right)}$$

A continuación y en cada ejercicio que lo requiera vamos a obtener la ecuación de segundo grado con base a la relación que guardan los sistemas $\{0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$ y $\{v_0, \{\hat{u}, \hat{u}^{\perp}\}\}$ como se mencionó en el capítulo 1
Para éste ejercicio, todo punto que pertenezca a la elipse cumple con la siguiente relación

$$0 + x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} = P(x,y) = v_0 + x'''\hat{u} + y'''\hat{u}^{\perp}$$

$$P(x,y) = (0,0) + x''' \left[\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right] + y''' \left[\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right]$$

$$x = \frac{x'''}{\sqrt{5}} - \frac{2y'''}{\sqrt{5}}$$

$$y = \frac{2x'''}{\sqrt{5}} + \frac{y'''}{\sqrt{5}}$$

despejando x''' y y''' en términos de x y y obtenemos lo siguiente

$$x''' = \frac{x}{\sqrt{5}} + \frac{2y}{\sqrt{5}}$$

$$y''' = \frac{-2x}{\sqrt{5}} + \frac{y}{\sqrt{5}}$$

sustituyendo en la ecuación canónica de la elipse que es

$$\frac{x'''^2}{5} + \frac{y'''^2}{1} = 1$$

tenemos

$$\frac{\left(\frac{x}{\sqrt{5}} + \frac{2y}{\sqrt{5}}\right)^2}{5} + \frac{\left(\frac{-2x}{\sqrt{5}} + \frac{y}{\sqrt{5}}\right)^2}{1} = 1$$

desarrollando y simplificando llegamos a la ecuación correspondiente en el sistema $\{0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$ en su forma desarrollada

$$21x^2 - 16xy + 9y^2 - 25 = 0 \tag{2.10}$$

para hallar la ecuación en el sistema de referencias $\{v_0, \{\hat{u}, \hat{u}^{\perp}\}\}$ necesitamos realizar la rotación correspondiente.

Localizamos los coeficientes de la ecuación dada $A = 21$, $2B = -16$, $C = 9$ y $F = -25$ y sustituímos en las ecuaciones de rotación que ya han sido expuestas en el primer capítulo.

Basándonos en el vector $\hat{u} = \left[\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right]$ cuyas coordenadas corresponden al vector $\hat{u} = [cos\alpha, sen\alpha]$, obtenemos los nuevos coeficientes

$$A' = 5, \qquad C' = 25, \qquad F' = -25$$

de esta forma la ecuación en el sistema $\{v_0, \{\hat{u}, \hat{u}^\perp\}\}$ es

$$5x'''^2 + 25y'''^2 - 25 = 0 \tag{2.11}$$

La ecuación en el sistema $\{0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$ es la misma para el sistema $\{v_0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$ ya que el centro de simetría de la elipse coincide con el origen de ambos sistemas de referencias, que es el origen, al sistema $\{0, \{\hat{u}, \hat{u}^\perp\}\}$ le corresponde la misma ecuación que al sistema $\{v_0, \{\hat{u}, \hat{u}^\perp\}\}$ por la razón anterior.
Los datos en el sistema $\{0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$ son

$$a = \sqrt{5}, \qquad b = 1, \qquad c = 2, \qquad \hat{u} = \left[\tfrac{1}{\sqrt{5}}, \tfrac{2}{\sqrt{5}}\right], \qquad \hat{u}^\perp = \left[\tfrac{-2}{\sqrt{5}}, \tfrac{1}{\sqrt{5}}\right],$$

$$v_0 = (0,0), \qquad v_1 = (-1,-2), \qquad v_2 = (1,2), \qquad f_1 = \left(\tfrac{-2}{\sqrt{5}}, \tfrac{-4}{\sqrt{5}}\right),$$

$$f_2 = \left(\tfrac{2}{\sqrt{5}}, \tfrac{4}{\sqrt{5}}\right), \qquad \|E_M\| = 2\sqrt{5}, \qquad \|E_m\| = 2$$

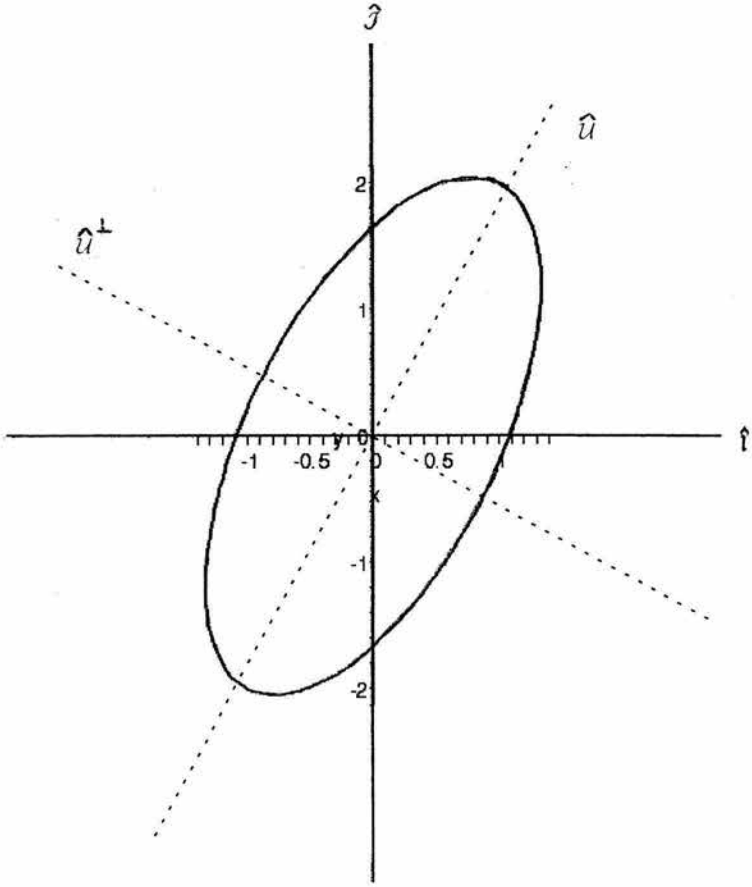


Figura 4:Solución gráfica

Ejemplo 2.1.5. Se dan los datos de la cónica centrada en el origen, $f_1 = \left(\frac{-\sqrt{7}}{2}, \frac{-\sqrt{7}}{2}\right)$, $\hat{u} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ y $a = 3$.

Como $\boxed{\hat{u} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]} \Rightarrow \boxed{\hat{u}^{\perp} = \left[\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]}$
obtenemos el valor de c con base a las coordenada de f_1

$$f_1 = v_0 - c\hat{u} = (0,0) - \left(\frac{-\sqrt{7}}{2}, \frac{-\sqrt{7}}{2}\right) = (0,0) + \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] = \frac{\sqrt{14}}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

$\therefore \boxed{c = \frac{\sqrt{14}}{2}}$

la elipse cumple con $a^2 = b^2 + c^2$ de aquí que $b^2 = a^2 - c^2 \therefore \boxed{b = \sqrt{\frac{11}{2}}}$
los vértices v_1 y v_2 son

$$v_1 = v_0 - a\hat{u} \qquad = (0,0) - 3\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{v_1 = \left(\frac{-3}{\sqrt{2}}, \frac{-3}{\sqrt{2}}\right)}$$

$$v_2 = v_0 + a\hat{u} \qquad = (0,0) + 3\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{v_2 = \left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right)}$$

$$y \qquad f_2 = v_0 + c\hat{u} \qquad (0,0) + \frac{\sqrt{14}}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \qquad = \left(\frac{\sqrt{7}}{2}, \frac{\sqrt{7}}{2}\right)$$

Los datos encontrados en el sistema $\{0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$ son

$a = 3$, $\quad b = \frac{\sqrt{22}}{2}$, $\quad c = \frac{\sqrt{14}}{2}$, $\quad \hat{u} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, $\quad \hat{u}^{\perp} = \left[\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, $\quad v_0 = (0,0)$,

$v_1 = \left(\frac{-3\sqrt{2}}{2}, \frac{-3\sqrt{2}}{2}\right)$, $\quad v_2 = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$, $\quad f_1 = \left(\frac{-\sqrt{7}}{2}, \frac{-\sqrt{7}}{2}\right)$, $\quad f_2 = \left(\frac{\sqrt{7}}{2}, \frac{\sqrt{7}}{2}\right)$,

$\|E_M\| = 6$, $\qquad \|Em\| = \sqrt{22}$

obtenemos la ecuación de segundo grado con base al método utilizado en el ejercicio anterior

$$0 + x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} = P(x,y) = v_0 + x'''\hat{u} + y'''\hat{u}^{\perp}$$

$$P(x,y) = (0,0) + x'''\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] + y'''\left[\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

$$x = \frac{x'''}{\sqrt{2}} - \frac{y'''}{\sqrt{2}}$$

$$y = \frac{x'''}{\sqrt{2}} + \frac{y'''}{\sqrt{2}}$$

despejando x''' y y''' en términos de x y y obtenemos lo siguiente

$$x''' = \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}}$$

$$y''' = \frac{-x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}}$$

sustituyendo en la ecuación óptima de la elipse

$$\frac{x'''^2}{9} + \frac{y'''^2}{2} = 1$$

tenemos

$$\frac{\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2}{9} + \frac{\left(\frac{-x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2}{2} = 1$$

que se define en forma general

$$11x^2 - 14xy + 11y^2 - 36 = 0 \tag{2.12}$$

para hallar la ecuación en el sistema de referencias $\{v_0, \{\hat{u}, \hat{u}^{\perp}\}\}$ realizamos la rotación correspondiente y encontramos los coeficientes de la nueva ecuación

$$A' = 4, \qquad C' = 18, \qquad F' = -36$$

asi la ecuación en el sistema $\{v_0, \{\hat{u}, \hat{u}^{\perp}\}\}$ es

$$4x'''^2 + 18y'''^2 - 36 = 0 \tag{2.13}$$

La ecuación en el sistema $\{0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$ coincide con la obtenida para el sistema $\{v_0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$ ya que el centro de simetría de la elipse coincide con el origen de ambos sistemas de referencias, al sistema $\{0, \{\hat{u}, \hat{u}^{\perp}\}\}$ y $\{v_0, \{\hat{u}, \hat{u}^{\perp}\}\}$ les corresponde la misma ecuación, por la razón anterior.

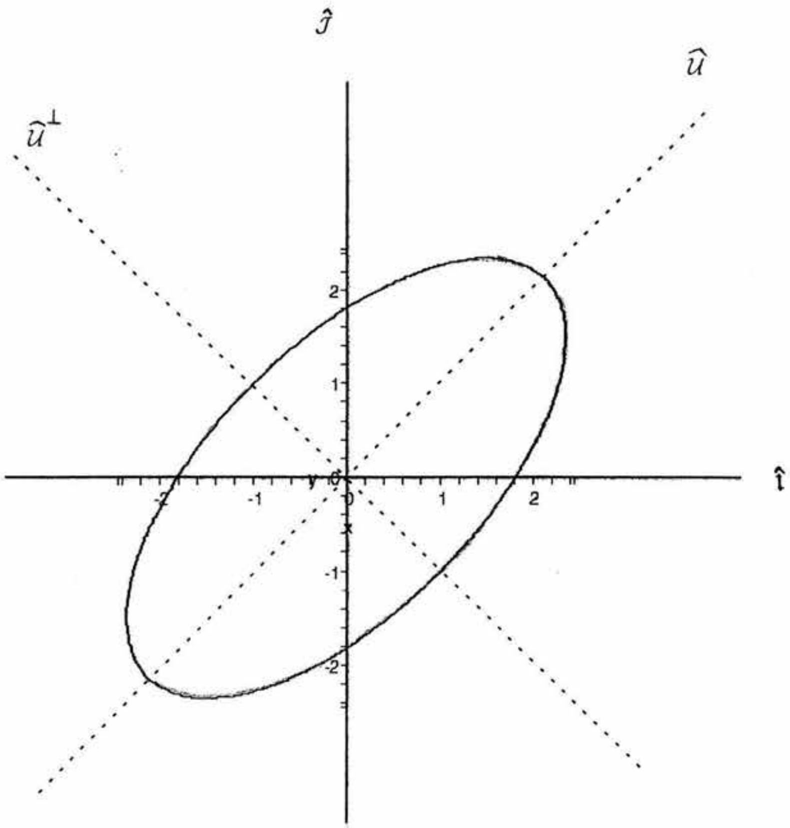


Figura 5:Solución gráfica

Ejemplo 2.1.6. Dados $f_1 = (1,1)$, $f_2 = (6,6)$ y $b = \frac{\sqrt{15}}{2}$.

Encontramos el vector unitario $\hat{u}$

$$\hat{u} = \frac{f_2 - f_1}{\|f_2 - f_1\|} = \frac{(6,6)-(1,1)}{\|(6,6)-(1,1)\|} = \frac{(5,5)}{\|(5,5)\|} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

$\Rightarrow \boxed{\hat{u} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]} \therefore \boxed{\hat{u}^{\perp} = \left[\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]}$

v_0 es el punto medio de f_1 y f_2, así

$$v_0 = \frac{f_1 + f_2}{2} = \frac{(1,1)+(6,6)}{2} = \frac{(7,7)}{2} = \left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right) \Rightarrow \boxed{v_0 = \left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)}$$

el valor de c es la distancia de v_0 a f_1 ó f_2.

$c = d(v_0, f_2) \; = \|(6,6) - \left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)\| \; = \| \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right) \| \; = \sqrt{\frac{50}{4}} \; = \frac{5\sqrt{2}}{2} \; \Rightarrow \; \boxed{c = \frac{5\sqrt{2}}{2}}$

calculamos el valor de a en base a b y c, $a^2 = b^2 + c^2$ así $\boxed{a = \frac{\sqrt{65}}{2}}$
ahora encontramos las coordenadas de los vértices usando las igualdades $\frac{7}{2} = \frac{14}{4}$ y $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$v_1 = v_0 - a\hat{u} \;=\; \left(\frac{14}{4}, \frac{14}{4}\right) - \left(\frac{\sqrt{65}}{2}\right)\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

$$\left(\frac{14}{4}, \frac{14}{4}\right) - \left(\frac{\sqrt{130}}{4}, \frac{\sqrt{130}}{4}\right) \Rightarrow \boxed{v_1 = \left(\frac{7}{2} - \frac{\sqrt{130}}{4}, \frac{7}{2} - \frac{\sqrt{130}}{4}\right)}$$

ahora el vértice v_2

$$v_2 = v_0 + a\hat{u} \;=\; \left(\frac{14}{4}, \frac{14}{4}\right) + \left(\frac{\sqrt{65}}{2}\right)\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

$$\left(\frac{14}{4}, \frac{14}{4}\right) + \left(\frac{\sqrt{130}}{4}, \frac{\sqrt{130}}{4}\right) \Rightarrow \boxed{v_2 = \left(\frac{7}{2} + \frac{\sqrt{130}}{4}, \frac{7}{2} + \frac{\sqrt{130}}{4}\right)}$$

la recta L_{R1} es la recta en la dirección $\hat{u}^{\perp}$ que pasa por f_1, de la misma forma la recta L_{R2} pasa por f_2 paralela a L_{R1}

$$\begin{aligned}
L_{R1} &= \{P|P = f_1 + t\hat{u}^{\perp}, t\epsilon\Re\} \\
&\Rightarrow \boxed{L_{R1} = \{P|P = (1,1) + t\left[\tfrac{-1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right], t\epsilon\Re\}} \\
L_{R2} &= \{P|P = f_2 + t'\hat{u}^{\perp}, t'\epsilon\Re\} \\
&\Rightarrow \boxed{L_{R2} = \{P|P = (6,6) + t'\left[\tfrac{-1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right], t'\epsilon\Re\}}
\end{aligned}$$

La ecuación de la recta que contiene al eje mayor en la dirección principal $\hat{u}$ que se denota como E_{M_a} y la recta que pasa por el eje menor con dirección $\hat{u}^{\perp}$ que denotaremos como E_{m_e} se definen como

$$E_{M_a} = \{P|P = v_0 + s\hat{u}, s\epsilon\Re\} = \{P|P = \left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right) + s\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right], s\epsilon\Re\}$$

$$E_{m_e} = \{P|P = v_0 + s'\hat{u}^{\perp}, s'\epsilon\Re\} = \{P|P = \left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right) + s'\left[\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right], s'\epsilon\Re\}$$

Los datos encontrados en el sistema de referencias $\{0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$ son:

$a = \frac{\sqrt{65}}{2}$, $b = \frac{\sqrt{15}}{2}$, $c = \frac{5\sqrt{2}}{2}$, $\hat{u} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, $\hat{u}^{\perp} = \left[\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, $v_0 = \left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$,

$v_1 = \left(\frac{7}{2} - \frac{\sqrt{130}}{4}, \frac{7}{2} - \frac{\sqrt{130}}{4}\right)$, $v_2 = \left(\frac{7}{2} + \frac{\sqrt{130}}{4}, \frac{7}{2} + \frac{\sqrt{130}}{4}\right)$, $f_1 = (1,1)$, $f_2 = (6,6)$,

$L_{R1} = \{P|P = (1,1) + t\left[\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right], t\epsilon\Re\}$, $L_{R2} = \{P|P = (6,6) + t'\left[\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right], t'\epsilon\Re\}$,

$E_{M_a} = \{P|P = \left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right) + s\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right], s\epsilon\Re\}$, $E_{m_e} = \{P|P = \left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right) + s'\left[\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right], s'\epsilon\Re\}$

En éste ejercicio iniciamos con la ecuación en el sistema $\{v_0, \{\hat{u}, \hat{u}^{\perp}\}\}$

$$\frac{x'''^2}{\frac{65}{4}} + \frac{y'''^2}{\frac{15}{4}} = 1 \tag{2.14}$$

desarrollando

$$\begin{aligned}
\frac{4x'''^2}{65} + \frac{4y'''^2}{15} &= 1 \\
\frac{4(65)(15)x'''^2}{65} + \frac{4(65)(15)y'''^2}{15} &= (65)(15) \\
4(15)x'''^2 + 4(65)y'''^2 &= 975 \\
60x'''^2 + 260y'''^2 &= 975 \\
12x'''^2 + 52y'''^2 - 195 &= 0
\end{aligned}$$

ahora obtenemos la ecuación en el sistema $\{0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$ con la relación mencionada anteriormente

$$0 + x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} = P(x, y) = v_0 + x'''\hat{u} + y'''\hat{u}^{\perp}$$

$$\begin{aligned}
P(x, y) &= \left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right) + x'''\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] + y'''\left[\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \\
x &= \frac{x'''}{\sqrt{2}} - \frac{y'''}{\sqrt{2}} + \frac{7}{2} \\
y &= \frac{x'''}{\sqrt{2}} + \frac{y'''}{\sqrt{2}} + \frac{7}{2}
\end{aligned}$$

despejando x''' y y''' en términos de x y y resulta:

$$\begin{aligned}
x'''. &= \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} - \frac{7}{\sqrt{2}} \\
y''' &= \frac{y}{\sqrt{2}} - \frac{x}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

ahora sustituimos estos valores en la ecuación óptima obtenida anteriormente

$$\frac{x'''^2}{\frac{65}{4}} + \frac{y'''^2}{\frac{15}{4}} = 1$$

así

$$\frac{\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} - \frac{7}{\sqrt{2}}\right)^2}{\frac{65}{4}} + \frac{\left(\frac{y}{\sqrt{2}} - \frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}{\frac{15}{4}} = 1$$

desarrollando y realizando las operaciones correspondientes obtenemos

$$32x^2 + 32y^2 - 40xy - 84x - 84y + 99 = 0 \tag{2.15}$$

La ecuación de la elipse en el sistema $\{v_0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$ resulta de trasladarnos al centro de simetría de la cónica y ésta relación se lleva a cabo mediante las ecuaciones de traslación que hemos expresado en el capítulo 1 y en los siguientes ejercicios sólo diremos que aplicamos las ecuaciones de traslación ya conocidas y corespondientes a cada ejemplo.
Dichas ecuaciones son

$$x = x' + h \qquad\qquad y = y' + k$$

correspondientemente

$$x = x' + \tfrac{7}{2} \qquad\qquad y = y' + \tfrac{7}{2}$$

sustituyendo en la ecuación anterior

$$32\left(x' + \frac{7}{2}\right)^2 + 32\left(y' + \frac{7}{2}\right)^2 - 40\left(x' + \frac{7}{2}\right)\left(y' + \frac{7}{2}\right) - 84\left(x' + \frac{7}{2}\right) - 84\left(y' + \frac{7}{2}\right) + 99 = 0$$

desarrollando y simplificando tenemos el siguiente resultado:

$$32x'^2 - 40x'y' + 32y'^2 - 195 = 0 \tag{2.16}$$

Efectuamos la rotación con base al vector $\hat{u}$ para encontrar la ecuación de la cónica en el sistema $\{0, \{\hat{u}, \hat{u}^{\perp}\}\}$ empleando las ecuaciones correspondientes, mencionadas ya en el capítulo 1.
el vector $\hat{u}$ nos proporciona el $sen\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y $cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ así, obtenemos los siguientes valores para los coeficientes

$$A' = 12, \qquad C' = 52, \qquad D' = -42\sqrt{2}, \qquad E' = 0 \quad y \quad F' = 99$$

y la ecuación obtenida para este sistema de coordenadas es:

$$12x''^2 + 52y''^2 - 84\sqrt{2}x'' + 99 = 0 \tag{2.17}$$

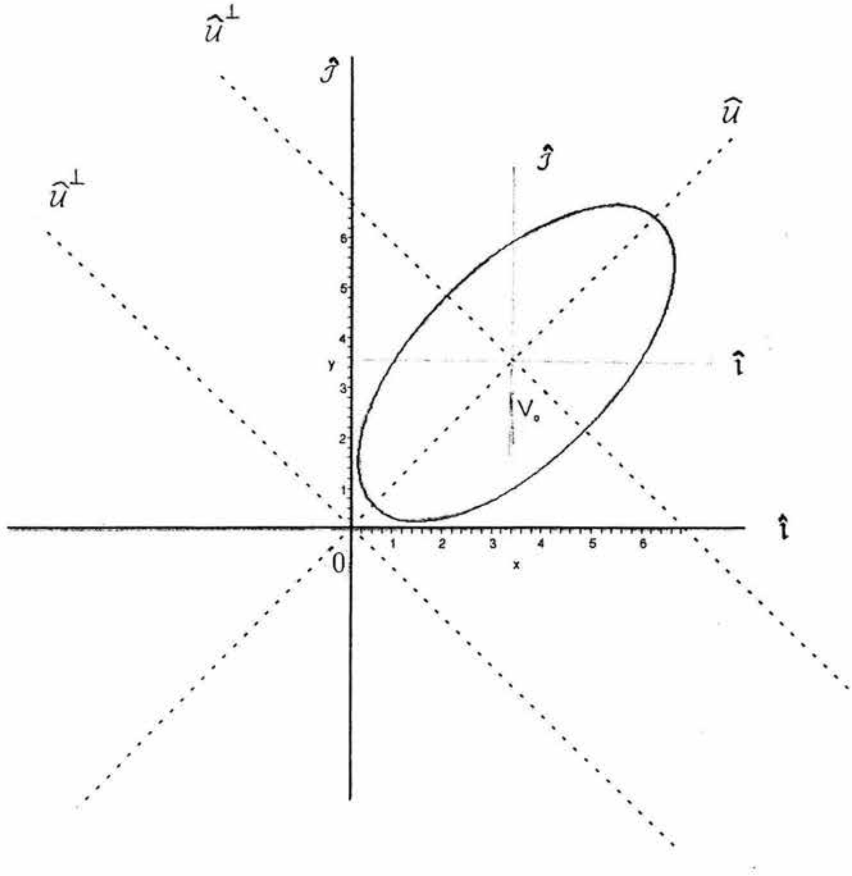


Figura 6:Solución gráfica

Ejemplo 2.1.7. Se da $f_1 = (1,1)$,$f_2 = (7,5)$ y $b = \sqrt{7}$.

Primero calculamos las coordenadas de v_0

$$v_0 = \frac{f_1+f_2}{2} = \frac{(1,1)+(7,5)}{2} = \frac{(8,6)}{2} \Rightarrow \boxed{v_0 = (4,3)}$$

hallamos el valor de c

$$c = d(f_1, v_0) = \|(4,3) - (1,1)\| = \|(3,2)\| = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13} \Rightarrow \boxed{c = \sqrt{13}}$$

encontramos el valor de a, $a^2 = b^2 + c^2$ así $a^2 = 20 \Rightarrow \boxed{a = 2\sqrt{5}}$
ahora el vector unitario

$$\hat{u} = \frac{f_2 - f_1}{\|f_2 - f_1} = \frac{(7,5)-(1,1)}{\|(7,5)-(1,1)\|} = \frac{(6,4)}{\sqrt{36+16}} = \frac{(6,4)}{\sqrt{52}} = \left[\frac{3\sqrt{13}}{13}, \frac{2\sqrt{13}}{13}\right]$$

$$\therefore \boxed{\hat{u} = \left[\frac{3\sqrt{13}}{13}, \frac{2\sqrt{13}}{13}\right]} \Rightarrow \boxed{\hat{u}^{\perp} = \left[\frac{-2\sqrt{13}}{13}, \frac{3\sqrt{13}}{13}\right]}$$

calculamos v_1 y v_2

$$v_1 = v_0 - a\hat{u} = (4,3) - 2\sqrt{5}\left[\frac{3\sqrt{13}}{13}, \frac{2\sqrt{13}}{13}\right] \Rightarrow \boxed{v_1 = \left(4 - \frac{6\sqrt{65}}{13}, 3 - \frac{4\sqrt{65}}{13}\right)}$$

$$v_2 = v_0 + a\hat{u} = (4,3) + \sqrt{20}\left[\frac{3\sqrt{13}}{13}, \frac{2\sqrt{13}}{13}\right] \Rightarrow \boxed{v_2 = \left(4 + \frac{6\sqrt{65}}{13}, 3 + \frac{4\sqrt{65}}{13}\right)}$$

encontramos la expresión de las rectas que contienen a los lados rectos L_{R1} y L_{R2}

$$L_{R1} = \{P|P = f_1 + t\hat{u}^{\perp}, t\epsilon\Re\} \Rightarrow \boxed{L_{R1} = \{P|P = (1,1) + t\left[-\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right], t\epsilon\Re\}}$$

$$L_{R2} = \{P|P = f_2 + t'\hat{u}^{\perp}, t'\epsilon\Re\} \Rightarrow \boxed{L_{R2} = \{P|P = (7,5) + t'\left[-\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right], t'\epsilon\Re\}}$$

las ecuaciones de las rectas que contienen a los ejes son:

$$\boxed{E_{M_a} = \{P|P = (4,3) + s\left[\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right], s\epsilon\Re\}}$$

$$\boxed{E_{m_e} = \{P|P = (4,3) + s'\left[\frac{-2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right], s'\epsilon\Re\}}$$

los datos de la elipse en el sistema $\{0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$

$a = 2\sqrt{5}$, $b = \sqrt{7}$, $c = \sqrt{13}$, $\hat{u} = \left[\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right]$, $\hat{u}^{\perp} = \left[\frac{-2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right]$, $f_1 = (1,1)$,

$f_2 = (7,5)$, $v_0 = (4,3)$, $v_1 = \left(4 - \frac{6\sqrt{65}}{13}, 3 - \frac{4\sqrt{65}}{13}\right)$, $v_2 = \left(4 + \frac{6\sqrt{65}}{13}, 3 + \frac{4\sqrt{65}}{13}\right)$,

$L_{R1} = \{P|P = (1,1) + t\left[\frac{-2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right], t\epsilon\Re\}$, $L_{R2} = \{P|P = (7,5) + t'\left[\frac{-2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right], t'\epsilon\Re\}$,

$E_M = \{P|P = (4,3) + s\left[\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right], s\epsilon\Re\}$, $E_m = \{P|P = (4,3) + s'\left[-\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right], s'\epsilon\Re\}$

Iniciamos con la ecuación de la elipse en el sistema $\{v_0, \{\hat{u}, \hat{u}^{\perp}\}\}$

$$\frac{x'''^2}{20} + \frac{y'''^2}{7} = 1 \tag{2.18}$$

desarrollando:

$$\begin{aligned} \frac{7(20)x'''^2}{20} + \frac{7(20)y'''^2}{7} &= 7(20) \\ 7x'''^2 + 20y'''^2 &= 140 \\ 7x'''^2 + 20y'''^2 - 140 &= 0 \end{aligned}$$

A continuación encontramos la ecuación de la elipse en el sistema $\{0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$ como lo hemos venido haciendo

$$0 + x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} = P(x,y) = v_0 + x'''\hat{u} + y'''\hat{u}^{\perp}$$

$$P(x,y) = (4,3) + x'''\left[\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right] + y'''\left[\frac{-2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right]$$

$$\begin{aligned} x &= 4 + \frac{3}{\sqrt{13}}x''' - \frac{2}{\sqrt{13}}y''' \\ y &= 3 + \frac{2}{\sqrt{13}}x''' + \frac{3}{\sqrt{13}}y''' \end{aligned}$$

despejando x''' y y''' en términos de x y y resulta:

$$\begin{aligned} x''' &= \frac{\sqrt{13}(3x + 2y - 18)}{13} \\ y''' &= -\frac{\sqrt{13}(2x - 3y + 1)}{13} \end{aligned}$$

sustituímos en la ecuación óptima expresada anteriormente y encontramos la ecuación buscada.

$$\frac{\left(\frac{\sqrt{13}(3x+2y-18)}{13}\right)^2}{20} + \frac{\left(-\frac{\sqrt{13}(2x-3y+1)}{13}\right)^2}{7} = 1$$

desarollando tenemos

$$11x^2 + 16y^2 - 12xy - 52x - 48y + 36 = 0 \tag{2.19}$$

La ecuación de la elipse en el sistema $\{v_0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$ resulta de trasladarnos al centro de simetría de la elipse $v_0 = (4, 3)$
las ecuaciones que relacionan los puntos (x, y) con (x', y') son las siguientes:

$$x = x' + 4 \qquad\qquad y = y' + 3$$

sustituyendo en la ecuación anterior

$$11(x' + 4)^2 + 16(y' + 3)^2 - 12(x' + 4)(y' + 3) - 52(x' + 4) - 48(y' + 3) + 36 = 0$$

desarrollando y simplificando obtenemos el siguiente resultado

$$11x'^2 - 12x'y' + 16y'^2 - 140 = 0 \tag{2.20}$$

efectuamos la rotación correspondiente con base al vector $\hat{u}$ para obtener la ecuación de la cónica en el sistema $\{0, \{\hat{u}, \hat{u}^{\perp}\}\}$ y la aplicamos a la ecuación general, el vector $\hat{u}$ nos proporciona el $sen\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$ y $cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$, sustituyendo en las ecuaciones de rotación expresadas anteriormente, obtenemos los siguientes resultados:

$A' = 7, \qquad C' = 20, \qquad D' = -\frac{126\sqrt{13}}{13}, \qquad E' = -\frac{20\sqrt{13}}{13}, \qquad F' = -140$

así la ecuación obtenida para el sistema de coordenadas $\{0, \{\hat{u}, \hat{u}^{\perp}\}\}$ es:

$$7x''^2 + 20y''^2 - \frac{252\sqrt{13}}{13}x'' - \frac{40\sqrt{13}}{13}y'' + 36 = 0 \tag{2.21}$$

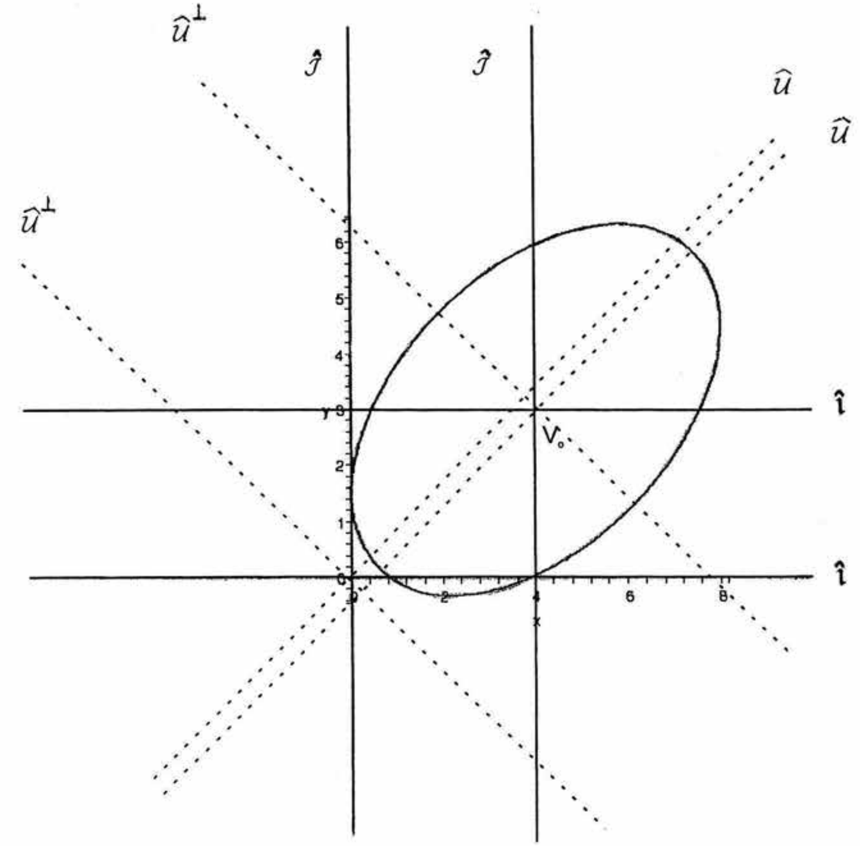


Figura 7:Solución gráfica

Ejemplo 2.1.8. Se dan $f_1 = (-8, 5)$, $f_2 = (0, -3)$ y un vértice en $v_1 = (-10, 7)$.

Hallamos v_0

$$v_0 = \frac{f_1 + f_2}{2} = \frac{(-8,5) + (0,-3)}{2} = \frac{(-8,2)}{2} = (-4,1)$$

$\therefore \boxed{v_0 = (-4,1)}$
obtenemos el valor de a

$$a = d(v_0, v_1) = \|(v_1 - v_0)\| = \|(-6,6)\| \therefore \boxed{a = 6\sqrt{2}}$$

el valor de c es

$$c = d(v_0, f_1) = \|(f_1 - v_0)\| = \|(-4,4)\| \therefore \boxed{c = 4\sqrt{2}}$$

y el valor de b lo obtenemos de la igualdad $a^2 = b^2 + c^2$ de aquí que $\boxed{b = 2\sqrt{10}}$
hallamos el vector $\hat{u}$ en base a f_1 y f_2

$$\hat{u} = \frac{f_2 - f_1}{\|f_2 - f_1\|} = \frac{(0,-3) - (-8,5)}{\|(0,-3) - (-8,5)\|} = \frac{(8,-8)}{\|(8,-8)\|} = \left[\frac{8}{8\sqrt{2}}, \frac{-8}{8\sqrt{2}}\right] = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right]$$

$\therefore \boxed{\hat{u} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right]}$ y $\boxed{\hat{u}^{\perp} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]}$
el vértice v_2 es

$$v_2 = v_0 + a\hat{u} \;=\; (-4,1) + 6\sqrt{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right]$$

$$(-4,1) + \left(\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, \frac{-6\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow \boxed{v_2 = (2,-5)}$$

obtenemos las representaciones de las rectas L_{R1} y L_{R2} definidas anteriormente

$$\Rightarrow \; L_{R1} = \{P | P = (-8,5) + t\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right], t \epsilon \Re\}$$

$$\Rightarrow \; L_{R2} = \{P | P = (0,-3) + t'\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right], t' \epsilon \Re\}$$

y las representaciones de las rectas E_{M_a} y E_{m_e}

$$E_{M_a} = \{P|P = (-4,1) + s\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right], s\epsilon\Re\}$$

$$E_{m_e} = \{P|P = (-4,1) + s'\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right], s'\epsilon\Re\}$$

Los datos encontrados en el sistema $\{v_0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$ son

$a = 6\sqrt{2}$, $b = 2\sqrt{10}$, $c = 4\sqrt{2}$, $\hat{u} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right]$, $\hat{u}^{\perp} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$,

$v_0 = (-4,1)$, $v_1 = (-10,7)$, $v_2 = (2,-5)$, $f_1 = (-8,5)$, $f_2 = (0,-3)$,

$L_{R1} = \{P|P = (-8,5) + t\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right], t\epsilon\Re\}$, $L_{R2} = (0,-3) + t'\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right], t'\epsilon\Re\}$,

$E_{M_a} = \{P|P = (-4,1) + s\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right], s\epsilon\Re\}$, $E_{m_e} = \{P|P = (-4,1) + s'\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right], s'\epsilon\Re\}$

la ecuación para el sistema $\{v_0, \{\hat{u}, \hat{u}^{\perp}\}\}$ es

$$\frac{x'''^2}{72} + \frac{y'''^2}{32} = 1 \tag{2.22}$$

la ecuación de la elipse en el sistema $\{0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$ se obtiene de la relación

$$0 + x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} = P(x,y) = v_0 + x'''\hat{u} + y'''\hat{u}^{\perp}$$

$$P(x,y) = (-4,1) + x'''\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right] + y'''\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

$$x = \frac{x'''}{\sqrt{2}} + \frac{y'''}{\sqrt{2}} - 4$$

$$y = \frac{-x'''}{\sqrt{2}} + \frac{y'''}{\sqrt{2}} + 1$$

despejando x''' y y''' en términos de x y y resulta:

$$x''' = \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{2}}$$

$$y''' = \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}}$$

sustituyendo en la ecuación óptima de la elipse correspondiente a éste ejercicio tenemos

$$\frac{\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2}{72} + \frac{\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2}{32} = 1$$

desarrollando y simplificando llegamos a la siguiente expresión

$$13x^2 + 10xy + 13y^2 + 94x + 14y - 395 = 0 \tag{2.23}$$

sustituyendo los correspondientes valores en las ecuaciones de rotación obtenemos los coeficientes

$A' = 8$, $C' = 18$, $D' = 20\sqrt{2}$ y $E' = 27\sqrt{2}$

que generan la siguiente ecuación de la cónica en el sistema $\{0, \{\hat{u}, \hat{u}^{\perp}\}\}$

$$8x''^2 + 18y''^2 + 40\sqrt{2}x'' + 54\sqrt{2}y'' - 395 = 0 \tag{2.24}$$

En el sistema $\{v_0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$ la correspondiente ecuación es

$$13x'^2 + 10x'y' + 13y'^2 - 576 = 0 \tag{2.25}$$

y finalmente para el sistema $\{v_0, \{\hat{u}, \hat{u}^{\perp}\}\}$

$$8x'''^2 + 18y'''^2 - 576 = 0$$

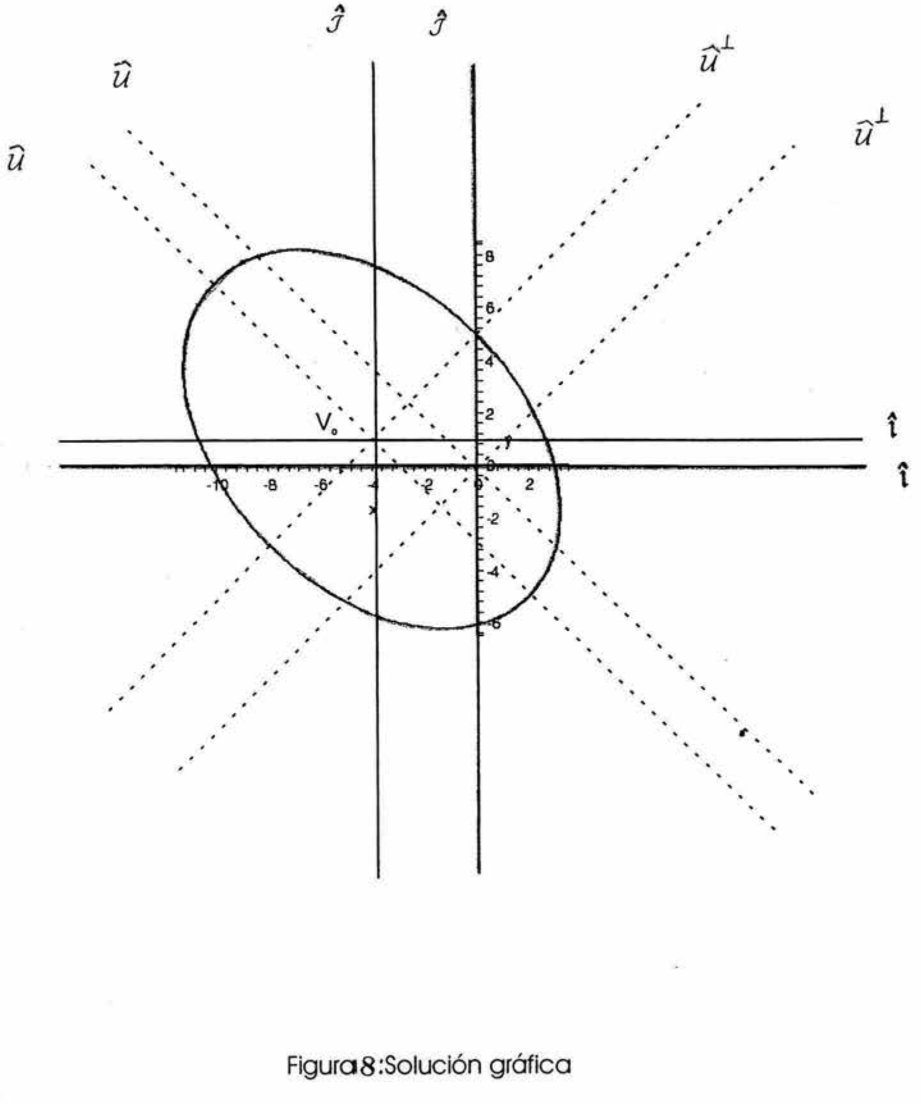


Figura 8: Solución gráfica

2.2. ecuación

En los siguientes ejercicios se proporciona la ecuación en el sistema $\{0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$ y se pide determinar el lugar geométrico (que no incluye casos degenerados ya que éstos serán tratados en la siguiente sección), las representaciones en los sistemas de referencias restantes y los datos y gráficas correspondientes al sistema $\{0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$

Ejemplo 2.2.1. Se da la siguiente ecuación

$$75x^2 - 70xy + 51y^2 + 180x - 188y - 464 = 0 \tag{2.26}$$

Identificamos los coeficientes de la ecuación dada, basándonos en el indicador I de la ecuación general de segundo grado que hemos definido en el capítulo 1. Los valores de los coeficientes son

$$A = 75, \qquad B = -35, \qquad C = 51, \qquad D = 90, \qquad E = -94, \qquad F = -464$$

calculamos el indicador para identificar el lugar geométrico que representa la ecuación

$$I = \delta s = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 75 & -35 \\ -35 & 51 \end{vmatrix} = 2600 > 0$$

ya que $I > 0$ sabemos que representa una elipse
Para encontrar la ecuación en el sistema $\{v_0, \{\hat{u}, \hat{u}^{\perp}\}\}$ necesitamos realizar la rotación correspondiente y para ello obtenemos el ángulo
$\tan 2\alpha = \frac{2B}{A-C} = \frac{-35}{12}$
y de aquí obtenemos $cos 2\alpha = \frac{12}{37}$ y lo sustituímos en las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} cos\alpha &= \sqrt{\frac{1 + cos2\alpha}{2}} &&= \sqrt{\frac{1 + \frac{12}{37}}{2}} &&= \sqrt{\frac{49}{74}} &&= \frac{7}{\sqrt{74}} \\ sen\alpha &= \sqrt{\frac{1 - cos2\alpha}{2}} &&= \sqrt{\frac{1 - \frac{12}{37}}{2}} &&= \sqrt{\frac{25}{74}} &&= \frac{5}{\sqrt{74}} \end{aligned}$$

$\therefore$ el vector $\hat{u} = \left[\frac{7}{\sqrt{74}}, \frac{5}{\sqrt{74}}\right]$ que sustituimos en las ecuaciones de rotación dadas en el capítulo 1 y obtenemos los valores de los nuevos coeficientes

$$A' = \frac{1250}{37}, \qquad C' = \frac{3412}{37}, \qquad D' = \frac{80\sqrt{74}}{37} \qquad y \qquad E' = \frac{-554\sqrt{74}}{37}$$

obtenemos el valor de F' mediante el determinante ya definido en el primer capítulo

$$\delta f = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 75 & -35 & 90 \\ -35 & 51 & -94 \\ 90 & -94 & -464 \end{vmatrix} = -1690000$$

$F' = \frac{\delta f}{\delta s}$, $F' = \frac{-1690000}{2600}$ $\therefore$ $F' = -650$
de aquí, la ecuación resultante en el sistema $\{v_0, \{\hat{u}, \hat{u}^{\perp}\}\}$ es:

$$\frac{1250}{37}x'''^2 + \frac{3412}{37}y'''^2 - 650 = 0 \tag{2.27}$$

desarrollando

$$\begin{aligned} 1250x'''^2 + 3412y'''^2 &= 24050 \\ 1250x'''^2 + 3412y'''^2 - 24050 &= 0 \end{aligned}$$

otra forma de expresarla es:

$$\begin{aligned} \frac{1250}{24050}x'''^2 + \frac{3412}{24050}y'''^2 &= 1 \\ \frac{25}{481}x'''^2 + \frac{1706}{12025}y'''^2 &= 1 \\ \frac{x'''^2}{\frac{481}{25}} + \frac{y'''^2}{\frac{12025}{1706}} &= 1 \end{aligned}$$

Para el sistema $\{v_0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$ encontramos los valor de h y k mediante los siguientes determinantes ya definidos en el capítulo 1

$$\delta h = \begin{vmatrix} -D & B \\ -E & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -90 & -35 \\ 94 & 51 \end{vmatrix} = -1300$$

$h = \frac{\delta h}{\delta s}$, $h = \frac{-1300}{2600} \therefore h = -\frac{1}{2}$

$$\delta k = \begin{vmatrix} A & -D \\ B & -E \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 75 & -90 \\ -35 & 94 \end{vmatrix} = 3900$$

$k = \frac{\delta k}{\delta s}$, $k = \frac{3900}{2600} \therefore k = \frac{3}{2}$
entonces el centro de simetría de la elipse se encuentra en $v_0 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ y las ecuaciónes de traslación son

$$x = x' - \frac{1}{2}, \qquad y = y' + \frac{3}{2}$$

y lo sustituímos en la ecuación inicial
$75(x' - \frac{1}{2})^2 - 70(x' - \frac{1}{2})(y' + \frac{3}{2}) + 51(y' + \frac{3}{2})^2 + 180(x' - \frac{1}{2})$
$-188(y' + \frac{3}{2}) - 464 = 0$
$75(x'^2 - x' + \frac{1}{4}) - 70x'y' + 105x' + 35y' + \frac{105}{2} + 51(y'^2 + 3y' + \frac{9}{4})$
$+180x' - 90 - 188y' - 746 = 0$

$$75x'^2 - 70x'y' + 51y'^2 - 650 = 0 \tag{2.28}$$

que es la ecuación en el sistema $\{v_0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$
solo falta la ecuación correspondiente al sistema $\{0, \{\hat{u}, \hat{u}^{\perp}\}\}$ que es

$$\frac{1250}{37}x''^2 + \frac{3412}{37}y''^2 + \frac{160\sqrt{74}}{37}x'' - \frac{1108\sqrt{74}}{37}y'' - 464 = 0 \tag{2.29}$$

Los datos de la elipse son:

$a = \frac{\sqrt{481}}{5}$, $\quad b = \sqrt{\frac{12025}{1706}}$, $\quad c = \sqrt{\frac{519961}{42650}}$, $\quad \hat{u} = \left[\frac{7}{\sqrt{74}}, \frac{5}{\sqrt{74}}\right]$, $\quad \hat{u}^{\perp} = \left[-\frac{5}{\sqrt{74}}, \frac{7}{\sqrt{74}}\right]$,

$v_0 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$, $\; v_1 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) - \frac{\sqrt{481}}{5}\left[\frac{7}{\sqrt{74}}, \frac{5}{\sqrt{74}}\right]$, $\; v_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) + \frac{\sqrt{481}}{5}\left[\frac{7}{\sqrt{74}}, \frac{5}{\sqrt{74}}\right]$,

$$f_1 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) - \sqrt{\frac{519961}{42650}}\left[\frac{7}{\sqrt{74}}, \frac{5}{\sqrt{74}}\right], \quad f_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) + \sqrt{\frac{519961}{42650}}\left[\frac{7}{\sqrt{74}}, \frac{5}{\sqrt{74}}\right],$$

$||E_M|| = 2\left(\frac{\sqrt{481}}{5}\right)$, $\qquad ||E_m|| = \frac{5\sqrt{481}}{853}$, $\qquad L_R = \left(\frac{125\sqrt{481}}{853}\right)$,

$$E_f = \{P|P = \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}\right) + t\left(\tfrac{7}{\sqrt{74}}, \tfrac{5}{\sqrt{74}}\right), t\epsilon\Re\ \}$$

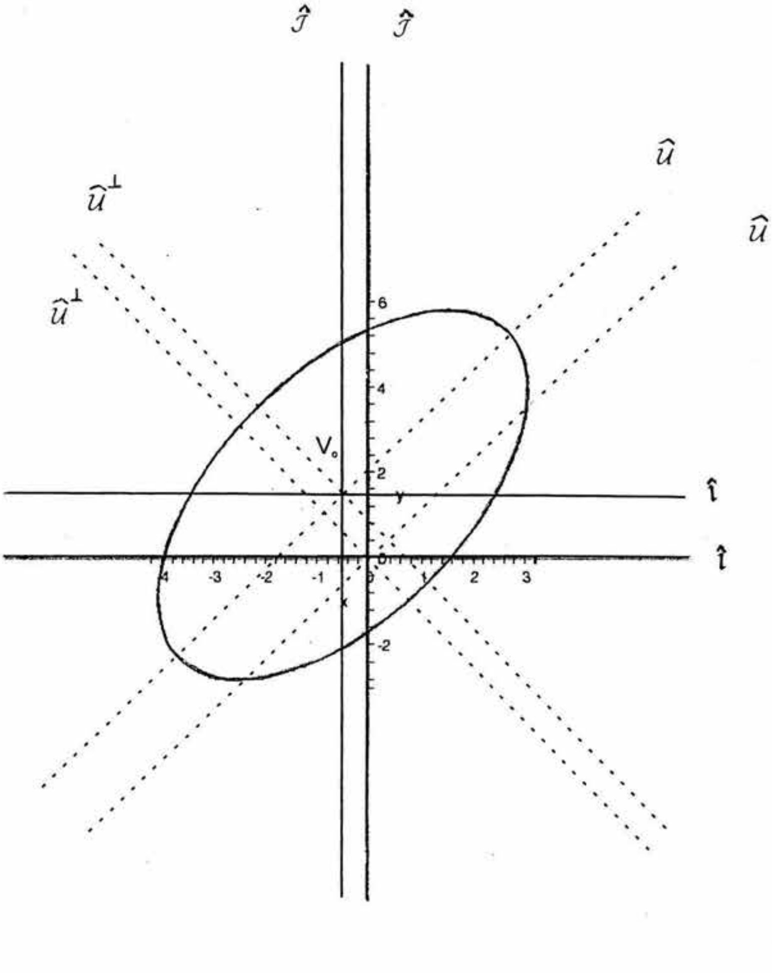


Figura 9:Solución gráfica

Ejemplo 2.2.2. Se tiene la siguiente ecuación

$$2x^2 + 4xy + 5y^2 + 4x + 16y + 2 = 0 \tag{2.30}$$

De aquí los coeficientes son

$$A = 2, \qquad B = 2, \qquad C = 5, \qquad D = 2, \qquad E = 8, \qquad F = 2$$

identificamos la cónica que representa la ecuación

$$I = \delta s = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 6 > 0$$

como $I > 0$ se trata de una elipse.
La ecuación en el sistema $\{v_0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$ la obtenemos trasladando el centro de simetría de la elipse al punto $v_0 = (h, k)$

$$\delta h = \begin{vmatrix} -D & B \\ -E & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -8 & 5 \end{vmatrix} = 6$$

$h = \frac{\delta h}{\delta s}$, $h = \frac{6}{6} \therefore h = 1$

$$\delta k = \begin{vmatrix} A & -D \\ B & -E \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -8 \end{vmatrix} = -12$$

$k = \frac{\delta k}{\delta s}$, $k = \frac{-12}{6} \therefore k = -2$
el centro de simetría de la elipse se encuentra en $v_0 = (1, -2)$.
Las ecuaciones de traslación son:

$$x = x' + 1, \qquad y = y' - 2$$

sustituyéndolas en la ecuación dada
$2(x'+1)^2 + 4(x'+1)(y'-2) + 5(y'-2)^2 + 4(x'+1) + 16(y'-2) + 2 = 0$
$2(x'^2+2x'+1)+4(x'y'-2x'+y'-2)+5(y'^2-4y'+4)+4x'+4+16y'-32+2 = 0$

$$2x'^2 + 4x'y' + 5y'^2 - 12 = 0 \tag{2.31}$$

ésta es la ecuación en el sistema $\{v_0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$.
Para obtener la ecuación en el sistema $\{v_0, \{\hat{u}, \hat{u}^{\perp}\}\}$ empleamos el método de la "Ecuación Característica" expuesta en el primer capítulo.
Las raices de la ecuación característica asociada que es $x^2-7x+6=0$, son $x_1=1$ y $x_2=6$, tomamos x_1 y lo sustituimos en el vector $[A-x_1, B]$ de aquí que el vector $\hat{u}$ que es el vector unitario ortogonal a éste sea $\hat{u}=\left[\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right]$ y sabemos que $cos\alpha = \frac{-2}{\sqrt{5}}$ y $sen\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, sustituyendo estos valores en las ecuaciónes de rotación obtenemos
$A'=1$, $C'=6$, $D'=\frac{4}{\sqrt{5}}$, $E'=\frac{-18}{\sqrt{5}}$ y calculamos F'

$$\delta f = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 8 \\ 2 & 8 & 2 \end{vmatrix} = -72$$

$F'=\frac{\delta f}{\delta s}$, $F'=\frac{-72}{6}$ $\therefore$ $F'=-12$
La ecuación en el sistema $\{v_0, \{\hat{u}, \hat{u}^{\perp}\}\}$ es

$$x'''^2 + 6y'''^2 - 12 = 0 \tag{2.32}$$

agrupando

$$\frac{x'''^2}{12} + \frac{y'''^2}{2} = 1$$

y la ecuación para el sistema $\{0, \{\hat{u}, \hat{u}^{\perp}\}\}$ es

$$x''^2 + 6y''^2 + \frac{8}{\sqrt{5}}x'' - \frac{36}{\sqrt{5}}y'' + 2 = 0 \tag{2.33}$$

Los datos de la elipse son:

$a=2\sqrt{3}$, $b=\sqrt{2}$, $c=\sqrt{10}$, $\hat{u}=\left[\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right]$, $\hat{u}^{\perp}=\left[\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right]$, $v_0=(1,-2)$,

$$v_1=(1,-2)-\sqrt{12}\left[\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right], \qquad v_2=(1,-2)+\sqrt{12}\left[\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right],$$

$$f_1=(1,-2)-\sqrt{10}\left[\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right], \qquad f_2=(1,-2)+\sqrt{10}\left[\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right],$$

$$||E_M|| = 4\sqrt{3}, \quad ||E_m|| = 2\sqrt{2}, \quad E_f = \{P|P = (1,-2) + t\left[\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right], t\epsilon\Re\}$$

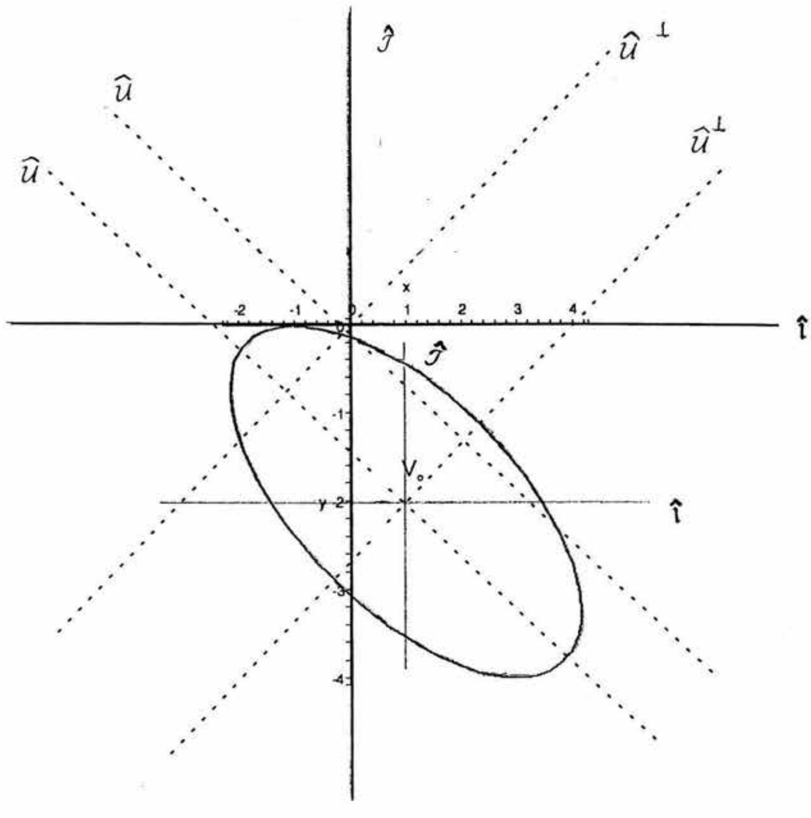


Figura 10 :Solución gráfica

Ejemplo 2.2.3. Se da la ecuación

$$17x^2 + 12xy + 8y^2 - 16x + 4y - 20 = 0 \tag{2.34}$$

Primero identificamos la cónica en base a sus coeficientes

$$A = 17, \qquad B = 6, \qquad C = 8, \qquad D = -8, \qquad E = 2, \qquad F = -20$$

obtenemos el valor de I

$$I = \delta s = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 100 > 0$$

ya que $I > 0$ la ecuación representa una elipse.
Para encontrar la ecuación en el sistema $\{0, \{\hat{u}, \hat{u}^{\perp}\}\}$ obtenemos la ecuación característica desarrollando el determinante ya definido en el capítulo 1

$$|Q - \lambda_i I| = \begin{vmatrix} A-\lambda & B \\ B & C-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 17-\lambda & 6 \\ 6 & 8-\lambda \end{vmatrix} = (17-\lambda)(8-\lambda) - 36 = 0$$

factorizando la ecuación resulta $(\lambda - 20)(\lambda - 5) = 0$, de aquí $\lambda_1 = 5$ y $\lambda_2 = 20$ y sustituyendo en el determinante tenemos

$$|Q - \lambda_1 I| = \begin{vmatrix} 17-5 & 6 \\ 6 & 8-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}$$

calculando en término de matrices tenemos

$$(Q - \lambda_1 I)(x') = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 12x' + 6y' \\ 6x' + 3y' \end{pmatrix} = 0$$

de aquí obtenemos el vector $\hat{u} = \left[\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right]$ y el vector $\hat{u}^{\perp} = \left[\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right]$
por tanto la matriz de rotación es

$$R = (\hat{u}, \hat{u}^{\perp}) = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

la ecuación general en el sistema $\{0,\{\hat{u},\hat{u}^{\perp}\}\}$ es de la forma:

$$\epsilon=\{x'|x^{\;T}Q'x'+s'x'+F=0\}$$

sustituyendo

$$x^{\;T}\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 20\end{pmatrix}x'+\begin{pmatrix}-16 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}}\\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}x'-20=0$$

desarrollando las correspondientes operaciones tenemos

$$5x''^2+20y''^2+\frac{24}{\sqrt{5}}x''+\frac{28}{\sqrt{5}}y''-20=0 \tag{2.35}$$

ésta es la ecuación de la elipse en el sistema $\{0,\{\hat{u},\hat{u}^{\perp}\}\}$
otra forma de presentar la ecuación es

$$\frac{\left(x''+\frac{12}{5\sqrt{5}}\right)^2}{\frac{693}{125}}+\frac{\left(y''+\frac{7}{10\sqrt{5}}\right)^2}{\frac{693}{500}}=1$$

Los datos de la cónica en el sistema $\{0,\{\hat{\imath},\hat{\jmath}\}\}$, son:

$a=2,\qquad b=1,\qquad c=\sqrt{3},\qquad \hat{u}=\left[\frac{-1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right],\qquad \hat{u}^{\perp}=\left[\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right],$

$v_0=\left(\frac{19}{25},\frac{-41}{50}\right),\qquad v_1=\left(\frac{19}{25},\frac{-41}{50}\right)-2\left[\frac{-1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right],\qquad v_2=\left(\frac{19}{25},\frac{-41}{50}\right)+2\left[\frac{-1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right],$

$f_1=\left(\frac{19}{25},\frac{-41}{50}\right)-\sqrt{3}\left[\frac{-1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right],\qquad f_2=\left(\frac{19}{25},\frac{-41}{50}\right)+\sqrt{3}\left[\frac{-1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right],$

$||E_M||=4,\qquad ||E_m||=2,\qquad E_f=\{P|P=\left(\frac{19}{25},\frac{-41}{50}\right)+t\left[\frac{-1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right],t\epsilon\Re\}$

para obtener la ecuación de la cónica en el sistema $\{v_0,\{\hat{\imath},\hat{\jmath}\}\}$ sabemos que el centro de simetría de la elipse se encuentra en $v_0=\left(\frac{19}{25},\frac{-41}{50}\right)$ y sustituímos las ecuaciones de traslación:

$$x=x'+\frac{19}{25},\qquad y=y'-\frac{41}{50}$$

y obtenemos la ecuación deseada

$$17x'^2 + 8y'^2 + 12x'y' - \frac{693}{25} = 0 \tag{2.36}$$

y por último la ecuación para el sistema $\{v_0, \{\hat{u}, \hat{u}^{\perp}\}\}$ resulta ser

$$5x'''^2 + 20y'''^2 - \frac{693}{25} = 0$$

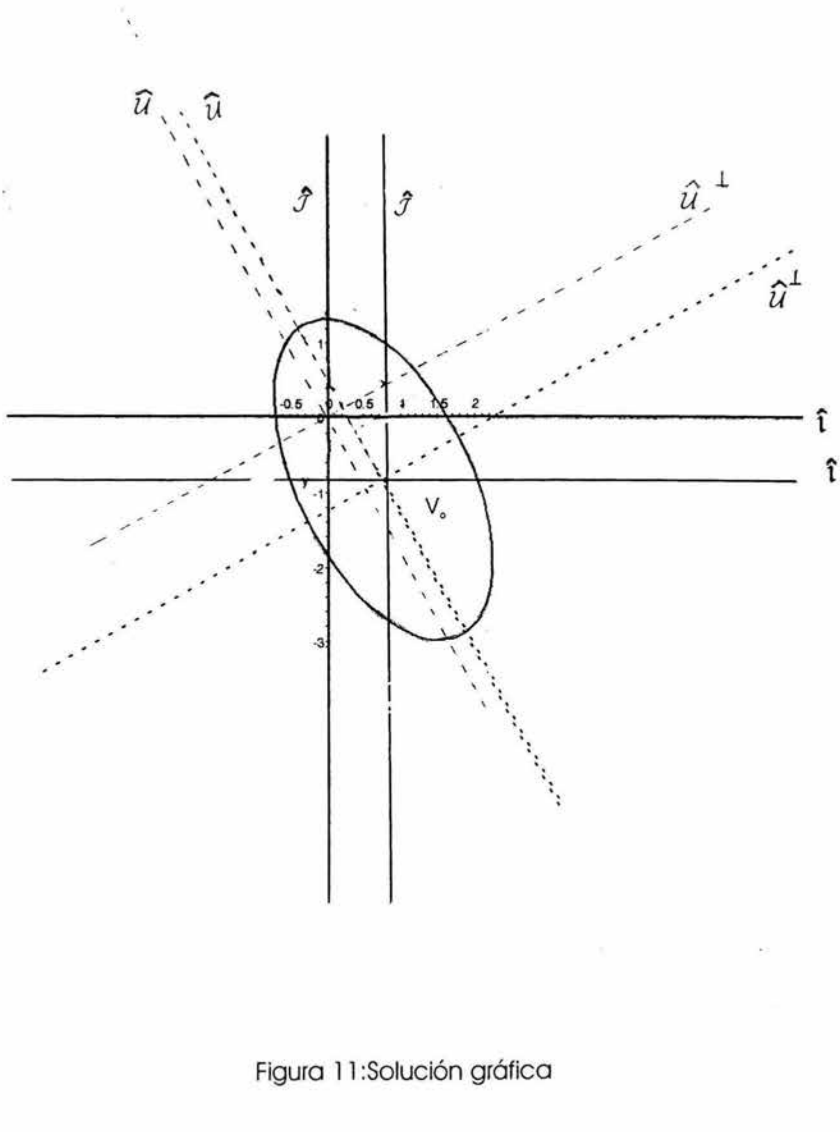


Figura 11:Solución gráfica

2.3. casos degenerados

En cada uno de los siguientes ejercicios averiguar el lugar geométrico que representa.

Ejemplo 2.3.1. Dada la ecuación

$$9x^2 + 4y^2 + 18x + 16y + 61 = 0 \tag{2.37}$$

Primero identificamos los coeficientes

$$A = 9, \qquad B = 0, \qquad C = 4, \qquad D = 9, \qquad E = 8, \qquad F = 61$$

sustituyendo los valores en el indicador

$$I = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 = 36 > 0$$

sabemos que se trata de una elipse ó un caso degenerado de ella.
Como podemos observar la ecuación se puede factorizar en la forma siguiente

$$\begin{aligned} 9(x+1)^2 + 4(y+2)^2 &= -36 \\ \frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{9} &= -1 \end{aligned}$$

notamos que la elipse es degenerada ya que no $\exists$ lugar geométrico que satisfaga la ecuación, ya que la suma de numeros positivos no puede dar como resultado un número negativo.

Ejemplo 2.3.2. Se proporciona la siguiente ecuación
$$x^2 + 3xy + 3y^2 - x + 1 = 0 \tag{2.38}$$

Identificamos los valores de los coeficientes
$$A = 1, \qquad B = \frac{3}{2}, \qquad C = 3, \qquad D = \frac{-1}{2}, \qquad E = 0, \qquad F = 1$$
sustituyendo los valores en el indicador I obtenemos $I = AC - B^2 = \frac{3}{4} > 0$ por lo tanto el lugar geométrico es una elipse ó un caso degenerado de ella.
Factorizando la ecuación tenemos lo siguiente
$$x^2 + (3y - 1)x + (3y^2 + 1) = 0$$
que representa una ecuación de segundo grado en x.
Obtenemos las raices de dicha ecuación

$$\begin{aligned}
x &= \frac{-(3y-1) \pm \sqrt{(3y-1)^2 - 4(1)(3y^2+1)}}{2(1)} \\
x &= \frac{1 - 3y \pm \sqrt{9y^2 - 6y + 1 - 12y^2 - 4}}{2} \\
x &= \frac{1 - 3y \pm \sqrt{-3y^2 - 6y - 3}}{2}
\end{aligned}$$
para obtener las raices de x necesitamos conocer las raices de la ecuación de segundo grado en y, que se presenta en el radical y resolviendo tenemos como solución la raíz única $y = -1$, sustituyendo tenemos

$$\begin{aligned}
x &= \frac{1 - 3(-1) \pm \sqrt{-3(-1)^2 - 6(-1) - 3}}{2} \\
x &= \frac{1 + 3 \pm \sqrt{-3 + 6 - 3}}{2} \\
x &= \frac{4}{2} = 2
\end{aligned}$$

así x sólo puede tomar el valor de $x = 2$
$\therefore$ la elipse degenera en un solo punto, el punto $(2, -1)$.

Ejemplo 2.3.3. Se da la ecuación

$$2x^2 + 2y^2 - 8x + 5y - 80 = 0$$

el valor del indicador es $I = AC - B^2 = 4 > 0$ por lo tanto el lugar geométrico es una elipse ó un caso degenerado de ella.
completando cuadrados en x y y tenemos

$$(x^2 - 4x + 4) + \left(y^2 + \frac{5}{2}y + \frac{25}{16}\right) = 40 + 4 + \frac{25}{16}$$

factorizamos la ecuación

$$(x-2)^2 + \left(y + \frac{5}{4}\right)^2 = \left(\frac{27}{4}\right)^2$$

que representa una elipse que degenera en un círculo, aquí los focos y el centro de simetría de la elipse coinciden en el mismo punto, el punto $v_0 = \left(2, \frac{-5}{4}\right)$ y el radio del círculo tiene longitud $r = \left(\frac{27}{4}\right)$

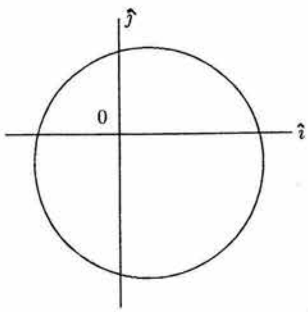


Figura 12: Solución gráfica

Capítulo 3

La hipérbola

Encuéntrense las ecuaciones de las siguientes hipérbolas en los diferentes sistemas de referencias, los datos se encuentran en el sistema $\{0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$.
Proporcione sus datos y gráficas en el sistema canónico

3.1. datos

Ejemplo 3.1.1. Dados los vértices $v_1 = (-4, 0)$, $v_2 = (4, 0)$ y el semieje conjugado igual a 3.

El centro de simetría de la hipérbola es el punto medio entre v_1 y v_2

$$v_0 = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{(-4,0) + (4,0)}{2} = (0,0)$$

$\therefore \boxed{v_0 = (0,0)}$
el valor de a es
$a = d(v_0, v_2) = \|(4,0) - (0,0)\| = 4 \Rightarrow \boxed{a = 4}$
encontramos el vector unitario $\hat{u}$

$$\hat{u} = \frac{v_2 - v_0}{\|v_2 - v_0\|} = \frac{(4,0) - (0,0)}{\|(4,0) - (0,0)\|} = [1, 0]$$

$\therefore \boxed{\hat{u} = [1,0]} \Rightarrow \boxed{\hat{u}^{\perp} = [0,1]}$
sabemos por el capítulo 1 que la hipérbola cumple la igualdad $c^2 = a^2 + b^2$,

conocemos el valor de a y de b por tanto podemos encontrar el valor de c:
$c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 9$, $c^2 = 25 \Rightarrow \boxed{c = 5}$
las coordenadas de los focos son:

$$\begin{aligned} f_1 = v_0 - c\hat{u} &= (0,0) - 5[1,0] = (-5,0) \Rightarrow \boxed{f_1 = (-5,0)} \\ f_2 = v_0 + c\hat{u} &= (0,0) + 5[1,0] = (5,0) \Rightarrow \boxed{f_2 = (5,0)} \end{aligned}$$

el eje focal esta representado por la recta $y = 0$ y el eje conjugado por la recta $x = 0$
en éste ejemplo las rectas asíntotas son de la forma $y = mx$, que en el sistema canónico pasan por el punto $(0,0)$ y sus ecuaciones son

$$\begin{array}{llll} y = \dfrac{-b}{a}x, & y = \dfrac{-3}{4}x & \Rightarrow & \dfrac{-3}{4}x - y = 0 \\ y = \dfrac{b}{a}x, & y = \dfrac{3}{4}x & \Rightarrow & \dfrac{3}{4}x - y = 0 \end{array}$$

Los datos obtenidos de la hipérbola en el sistema $\{0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$ son:

$a = 4$, $b = 3$, $c = 5$, $\hat{u} = [1,0]$, $\hat{u}^{\perp} = [0,1]$, $v_0 = (0,0)$,

$v_1 = (-4,0)$, $v_2 = (4,0)$, $f_1 = (-5,0)$, $f_2 = (5,0)$,

$\frac{-3}{4}x - y = 0$, $\frac{3}{4}x - y = 0$

La ecuación resultante en el sistema canónico $\{0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$ es:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \tag{3.1}$$

desarrollando la ecuación anterior

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} &= 1 \\ 9x^2 - 16y^2 &= 9(16) \\ 9x^2 - 16y^2 - 144 &= 0 \end{aligned}$$

la ecuación en el sistema $\{v_0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$ es la misma que en el sistema anterior ya que el centro de simetría de la hipérbola coincide con el origen del sistema de referencias y $\hat{u} = [1, 0]$. Para los sistemas $\{0, \{\hat{u}, \hat{u}^{\perp}\}\}$ y $\{v_0, \{\hat{u}, \hat{u}^{\perp}\}\}$ las ecuaciones son las mismas ya que el centro de simetría de la cónica se localiza en el punto $v_0 = (0, 0)$, $\hat{u} \parallel \hat{\imath}$ y $\hat{u}^{\perp} \parallel \hat{\jmath}$.

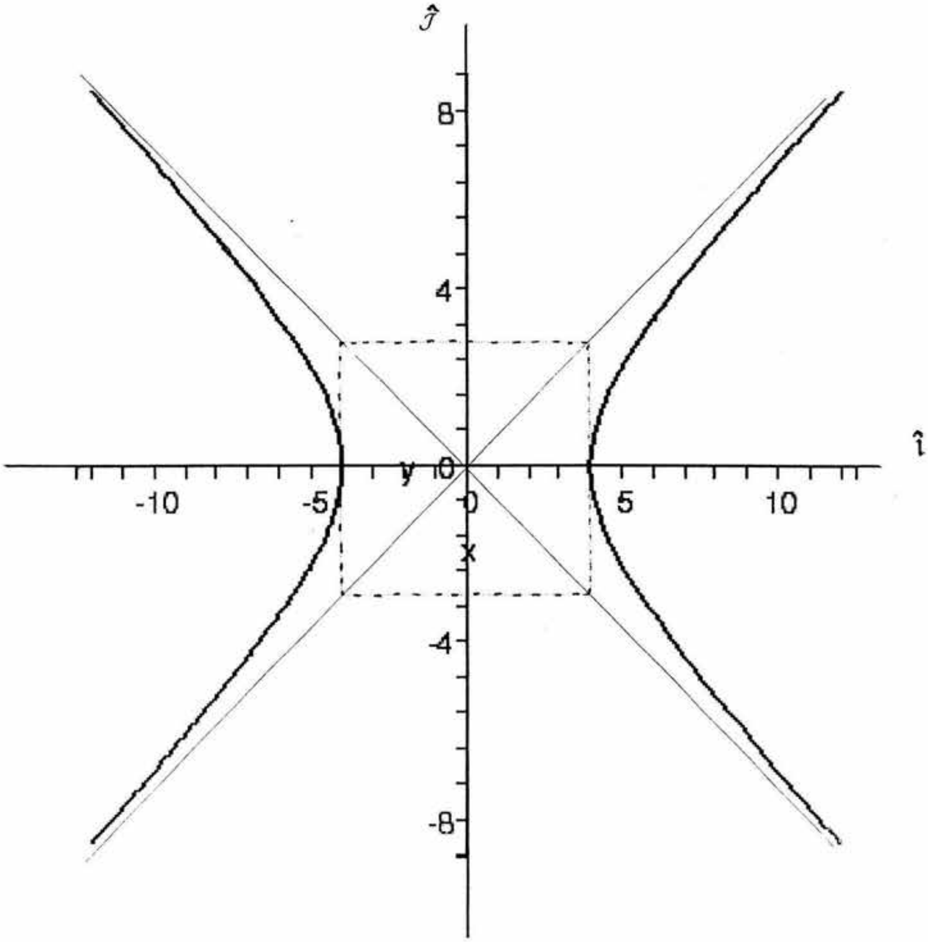


Figura 1:Solución gráfica

Ejemplo 3.1.2. Se dan los siguientes datos $f_1 = (0, -5)$, $f_2 = (0, 5)$ y $v_2 = (0, 3)$.

Primero encontramos el centro de simetría de la hipérbola como el punto medio de la distancia entre los focos

$$v_0 = \frac{f_1 + f_2}{2} = \frac{(0,-5) + (0,5)}{2} = (0,0)$$

$\therefore \boxed{v_0 = (0,0)}$
el vector unitario $\hat{u}$ es

$$\hat{u} = \frac{v_2 - v_0}{\|v_2 - v_0\|} = \frac{(0,3) - (0,0)}{\|(0,3) - (0,0)\|} = [0,1]$$

$\therefore \boxed{\hat{u} = [0,1]} \Rightarrow \boxed{\hat{u}^{\perp} = [-1,0]}$
sabemos que $a = d(v_0, v_1)$ ó $d(v_0, v_2)$ y $c = d(v_0, f_1)$ ó $d(v_0, f_2)$ de esta forma:

$$\begin{aligned} a = d(v_0, v_2) &= \|v_2 - v_0\| = \|(0,3) - (0,0)\| = 3 \Rightarrow \boxed{a = 3} \\ c = d(v_0, f_1) &= \|(f_1 - v_0)\| = \|(0,-5) - (0,0)\| = 5 \Rightarrow \boxed{c = 5} \end{aligned}$$

el valor de b lo encontramos sustituyendo en la igualdad siguiente los valores de a y c

$$c^2 = a^2 + b^2, \qquad b^2 = c^2 - a^2, \qquad b^2 = 25 - 9, \qquad b^2 = 16 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{b = 4}$$

hallamos la coordenada de v_1

$$v_1 = v_0 - a\hat{u}, \quad v_1 = (0,0) - 3[0,1], \quad v_1 = (0,0) - (0,3) \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_1 = (0,-3)}$$

la ecuación de las rectas asíntotas es de la forma

$$y = \frac{-a}{b}x, \qquad y = \frac{-3}{4}x \qquad \Rightarrow \qquad \frac{-3}{4}x - y = 0$$

$$y = \frac{a}{b}x, \qquad y = \frac{3}{4}x \qquad \Rightarrow \qquad \frac{3}{4}x - y = 0$$

Los datos encontrados en el sistema $\{0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$ son

$$a = 3, \qquad b = 4, \qquad c = 5, \qquad \hat{u} = [0,1], \qquad \hat{u}^{\perp} = [-1,0], \qquad v_0 = (0,0),$$

$v_1 = (0, -3)$, $v_2 = (0, 3)$, $f_1 = (0, -5)$, $f_2 = (0, 5)$,

$\frac{-3}{4}x - y = 0$, $\frac{3}{4}x - y = 0$

la ecuación de la hipérbola en éste sistema es

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1 \tag{3.2}$$

y en la forma general

$$\begin{aligned} 16y^2 - 9x^2 &= 16(9) \\ 16y^2 - 9x^2 &= 144 \\ 16y^2 - 9x^2 - 144 &= 0 \end{aligned}$$

la ecuación de la hipérbola en el sistema $\{v_0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$ es la misma que la ecuación del sistema $\{0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$, ya que el centro de simetría de la hipérbola coincide con el centro del sistema de referencias, en los sistemas restantes $\{0, \{\hat{u}, \hat{u}^{\perp}\}\}$ y $\{v_0, \{\hat{u}, \hat{u}^{\perp}\}\}$ se cumple lo siguiente $\hat{u} \parallel \hat{\jmath}$ y $\hat{u}^{\perp} \parallel \hat{\imath}$ además el origen de ambos sistemas coincide con el centro de simetría de la cónica $v_0 = (0, 0)$ por lo tanto la ecuación que corresponde a ambos sistemas es

$$\frac{x''^2}{9} - \frac{y''^2}{16} = 1 \tag{3.3}$$

y en la forma general

$$\begin{aligned} 16x''^2 - 9y''^2 &= 16(9) \\ 16x''^2 - 9y''^2 &= 144 \\ 16x''^2 - 9y''^2 - 144 &= 0 \end{aligned}$$

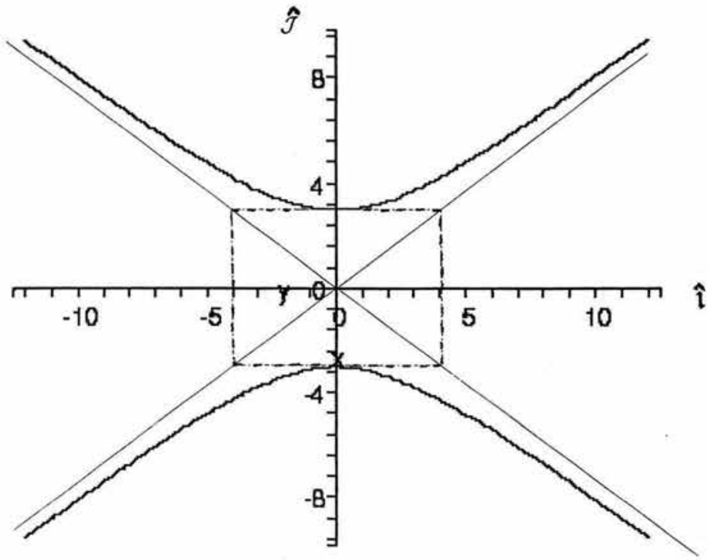


Figura 2:Solución gráfica

Ejemplo 3.1.3. Dados los siguientes datos $f_2 = (0,13)$, $v_2 = (0,5)$ y semieje conjugado igual a 12.

Encontramos el vector unitario $\hat{u}$ con base a v_2 y f_2

$$\hat{u} = \frac{f_2 - v_2}{\|f_2 - v_2\|} = \frac{(0,13)-(0,5)}{\|(0,13)-(0,5)\|} = \frac{(0,8)}{\|(0,8)\|} = [0,1]$$

$\therefore \boxed{\hat{u} = [0,1]} \Rightarrow \boxed{\hat{u}^{\perp} = [-1,0]}$
sabemos que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{v_2 f_2} &= f_2 - v_2 = c\hat{u} - a\hat{u} \\ &= (c-a)\hat{u} = [0, c-a] \end{aligned}$$

de igual forma

$$\begin{aligned} \overrightarrow{v_2 f_2} &= f_2 - v_2 = (0,13) - (0,5) \\ &= [0,8] \end{aligned}$$

$\therefore c - a = 8$, de aquí $c = a + 8$ elevando al cuadrado tenemos

$$c^2 = (a+8)^2 \qquad \Rightarrow c^2 = a^2 + 16a + 64$$

por otra parte la hipérbola cumple la siguiente igualdad

$$c^2 = a^2 + b^2 \qquad \Rightarrow c^2 = a^2 + 144$$

igualando las dos ecuaciones

$$a^2 + 16a + 64 = a^2 + 144 \ \Rightarrow \ a^2 + 16a + 64 - a^2 - 144 = 0$$

$$16a + 64 - 144 = 0 \ \Rightarrow \ a = \frac{80}{16}$$

$$\boxed{a = 5} \ \Rightarrow \ \boxed{c = 13}$$

ahora hallaremos las coordenadas de v_0 con base a las coordenadas de v_2
$v_2 = v_0 + a\hat{u}$ despejando v_0

$$v_0 = v_2 - a\hat{u} = (0,5) - 5[0,1]$$

$$v_0 = (0,5) - (0,5) = (0,0)$$

$\therefore \boxed{v_0 = (0,0)}$ y $v_1 = v_0 - a\hat{u} = (0,0) - 5[0,1] = (0,-5) \therefore \boxed{v_1 = (0,-5)}$
de la misma forma encontramos las coordenadas de f_1
$f_1 = v_0 - c\hat{u} = (0,0) - 13[0,1] = (0,0) + (0,-13) = (0,-13) \Rightarrow \boxed{f_1 = (0,-13)}$
para encontrar la ecuación de las rectas asíntotas, notamos que el eje focal de la hipérbola se encuentra sobre el eje $\hat{\jmath}$, y el eje conjugado sobre el eje $\hat{\imath}$, por lo tanto son de la forma:

$$y = \frac{-a}{b}x, \qquad y = \frac{-5}{12}x \qquad \Rightarrow \qquad \frac{-5}{12}x - y = 0$$

$$y = \frac{a}{b}x, \qquad y = \frac{5}{12}x \qquad \Rightarrow \qquad \frac{5}{12}x - y = 0$$

Los datos encontrados en el sistema $\{0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$ son:

$a = 5, \quad b = 12, \quad c = 13, \quad \hat{u} = [0,1], \quad \hat{u}^{\perp} = [1,0], \quad v_0 = (0,0),$

$v_1 = (0,-5), \quad v_2 = (0,5), \quad f_1 = (0,-13), \quad f_2 = (0,13),$

$\frac{-5}{12}x - y = 0, \qquad \frac{5}{12}x - y = 0$

y su ecuación correspondiente:

$$\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{144} = 1 \tag{3.4}$$

desarrollando:

$$\begin{aligned} 144y^2 - 25x^2 &= 3600 \\ 144y^2 - 25x^2 - 3600 &= 0 \end{aligned}$$

la ecuación para el sistema $\{v_0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$ es la misma ya que el centro de simetría de la hipérbola coincide con el origen del sistema de referencias $v_0 = (0,0)$, así mismo, para los sistemas $\{0, \{\hat{u}, \hat{u}^{\perp}\}\}$ y $\{v_0, \{\hat{u}, \hat{u}^{\perp}\}\}$ tenemos que se $\hat{u} \parallel \hat{\jmath}$ y $\hat{u}^{\perp} \parallel \hat{\imath}$ además el origen de ambos sistemas de referencias coincide con el centro de simetría de la hipérbola $v_0 = (0,0)$ así la ecuación correspondiente a ambos sistemas es

$$\frac{x''^2}{25} - \frac{y''^2}{144} = 1 \tag{3.5}$$

desarrollando:

$$\begin{aligned} 144x''^2 - 25y''^2 &= 3600 \\ 144x''^2 - 25y''^2 - 3600 &= 0 \end{aligned}$$

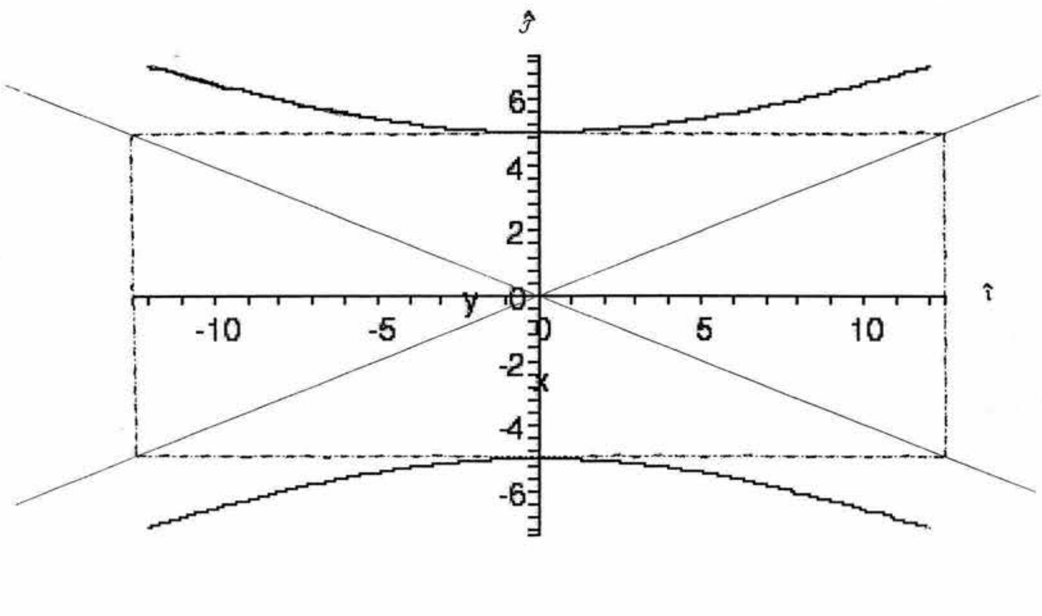


Figura 3:Solución gráfica

Ejemplo 3.1.4. Se dan los datos $\hat{u} = \left[\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{1}{\sqrt{13}}\right]$, $v_2 = (3,1)$, $b = 4$ y el centro de simetría de la cónica se encuentra en el origen del sistema de referencias.

Sabemos que $\boxed{v_0 = (0,0)}$ y $v_2 = (3,1)$, de aquí obtenemos el valor de a

$$\begin{aligned} v_2 &= v_0 + a\hat{u} \\ &= (0,0) + a\left[\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{1}{\sqrt{13}}\right] \\ &= \left(\frac{3a}{\sqrt{13}}, \frac{a}{\sqrt{13}}\right) \\ &= \left(3\frac{a}{\sqrt{13}}, 1\frac{a}{\sqrt{13}}\right) \end{aligned}$$

y $v_2 = (3,1)$ $\therefore$ $\boxed{a = \sqrt{13}}$
las coordenadas del vértice v_1

$$v_1 = v_0 - a\hat{u} = (0,0) - \sqrt{13}\left[\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{1}{\sqrt{13}}\right] = (-3,-1) \therefore \boxed{v_1 = (-3,-1)}$$

el valor de b lo obtenemos de la igualdad $c^2 = b^2 + a^2$, $c^2 = 16 + 13$ $\therefore$ $\boxed{c = \sqrt{29}}$
las coordenadas de los focos son

$$f_1 = v_0 - c\hat{u} \;=\; (0,0) - \sqrt{29}\left[\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{1}{\sqrt{13}}\right] \Rightarrow \boxed{f_1 = \left(\frac{-3\sqrt{377}}{13}, \frac{-\sqrt{377}}{13}\right)}$$

$$f_2 = v_0 + c\hat{u} \;=\; (0,0) + \sqrt{29}\left[\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{1}{\sqrt{13}}\right] \Rightarrow \boxed{f_2 = \left(\frac{3\sqrt{377}}{13}, \frac{\sqrt{377}}{13}\right)}$$

hallamos la ecuación general de segundo grado de la hipérbola con el método que ya conocemos

$$0 + x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} = P(x,y) = v_0 + x'''\hat{u} + y'''\hat{u}^{\perp}$$

$$P(x,y) \;=\; x'''\left[\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{1}{\sqrt{13}}\right] + y'''\left[\frac{-1}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right]$$

$$x = \frac{3x'''}{\sqrt{13}} - \frac{y'''}{\sqrt{13}}$$

$$y = \frac{x'''}{\sqrt{13}} + \frac{3y'''}{\sqrt{13}}$$

despejando x''' y y''' en términos de x y y resulta:

$$x''' = \frac{3\sqrt{13}x}{10} + \frac{\sqrt{13}y}{10}$$

$$y''' = \frac{3\sqrt{13}y}{10} - \frac{\sqrt{13}x}{10}$$

sustituyendo en la ecuación óptima correspondiente

$$\frac{x'''^2}{13} - \frac{y'''^2}{16} = 1$$

tenemos

$$\frac{\left(\frac{3\sqrt{13}x}{10} + \frac{y\sqrt{13}}{10}\right)^2}{13} - \frac{\left(\frac{3\sqrt{13}y}{10} - \frac{\sqrt{13}x}{10}\right)^2}{16} = 1$$

Desarrollando llegamos a la ecuación correspondiente al sistema $\{0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$

$$131x^2 + 174xy - 101y^2 - 1600 = 0 \tag{3.6}$$

los datos son

$a = \sqrt{13}$, $\quad b = 4$, $\quad c = \sqrt{29}$, $\quad \hat{u} = \left[\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{1}{\sqrt{13}}\right]$, $\quad \hat{u}^{\perp} = \left[\frac{-1}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right]$,

$v_0 = (0,0)$, $\quad v_1 = (-3,-1)$, $\quad v_2 = (3,1)$,

$$f_1 = \left(\frac{-3\sqrt{377}}{13}, \frac{-\sqrt{377}}{13}\right), \qquad f_2 = \left(\frac{3\sqrt{377}}{13}, \frac{\sqrt{377}}{13}\right)$$

y la misma ecuación le corresponde al sistema $\{v_0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$ ya que el centro de simetría de la cónica coincide con el origen del sistema de referencias.

Realizando la rotación indicada con base al vector $\hat{u}$ y empleando el método expresado ya anteriormente, obtenemos la ecuación en el sistema $\{0, \{\hat{u}, \hat{u}^{\perp}\}\}$

$$\frac{1600}{13}x''^2 - 100y''^2 - 1600 = 0 \tag{3.7}$$

que representa la ecuación en el sistema $\{v_0, \{\hat{u}, \hat{u}^{\perp}\}\}$ por la misma razón que en el caso anterior.

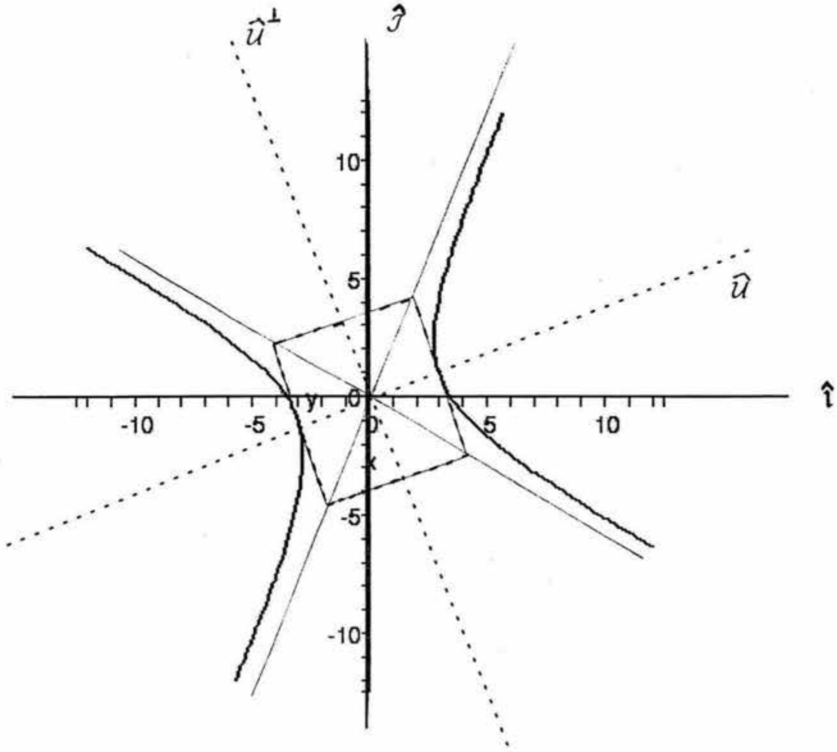


Figura 4 :Solución gráfica

Ejemplo 3.1.5. Se dan los datos de la hipérbola equilátera $v_1 = (-2,-2)$ y $v_2 = (2,2)$.

Hallamos el vector $\hat{u}$

$$\hat{u} = \frac{v_2 - v_1}{\|v_2 - v_1\|} = \frac{(2,2)-(-2,-2)}{\|(2,2)-(-2,-2)\|} = \frac{(4,4)}{\|(4,4)\|} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

$\therefore \boxed{\hat{u} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]}$ y $\boxed{\hat{u}^{\perp} = \left[\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]}$
localizamos el centro de simetría de la cónica

$$v_0 = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{(-2,-2)+(2,2)}{2} = \frac{(0,0)}{2} \quad \therefore \boxed{v_0 = (0,0)}$$

el valor de a
$a = d(v_0, v_1) = ||v_1 - v_0|| = ||(-2,-2)|| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} \therefore \boxed{a = 2\sqrt{2}}$
obtenemos la ecuación en el sistema $\{0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$ mediante la relación conocida

$$0 + x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} = P(x,y) = v_0 + x'''\hat{u} + y'''\hat{u}^{\perp}$$

$$P(x,y) = x'''\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] + y'''\left[\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

$$x = \frac{x'''}{\sqrt{2}} - \frac{y'''}{\sqrt{2}}$$

$$y = \frac{x'''}{\sqrt{2}} + \frac{y'''}{\sqrt{2}}$$

despejando x''' y y''' en términos de x y y resulta:

$$x''' = \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}}$$

$$y''' = \frac{y}{\sqrt{2}} - \frac{x}{\sqrt{2}}$$

sustituyendo los valores en la ecuación óptima de la hipérbola, obtenemos su ecuación en el sistema $\{0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$ y $\{v_0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$ ya que el centro de simetría de la cónica se encuentra en el punto $v_0 = (0, 0)$.

$$\frac{xy}{4} = 1 \tag{3.8}$$

aplicando la rotación de $\angle$ 45° resulta

$$\frac{x'''^2}{8} - \frac{y'''^2}{8} = 1 \tag{3.9}$$

que es la ecuación en el sistema $\{0, \{\hat{u}, \hat{u}^{\perp}\}\}$ y $\{v_0, \{\hat{u}, \hat{u}^{\perp}\}\}$ por la razón anterior.

Los datos en el sistema $\{0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$ son

$a = 2\sqrt{2}$, $\quad b = 2\sqrt{2}$, $\quad c = 4$, $\quad \hat{u} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, $\quad \hat{u}^{\perp} = \left[\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$,

$v_0 = (0, 0)$, $\quad v_1 = (-2, -2)$, $\quad v_2 = (2, 2)$,

$f_1 = (-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$, $\quad f_2 = (2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$

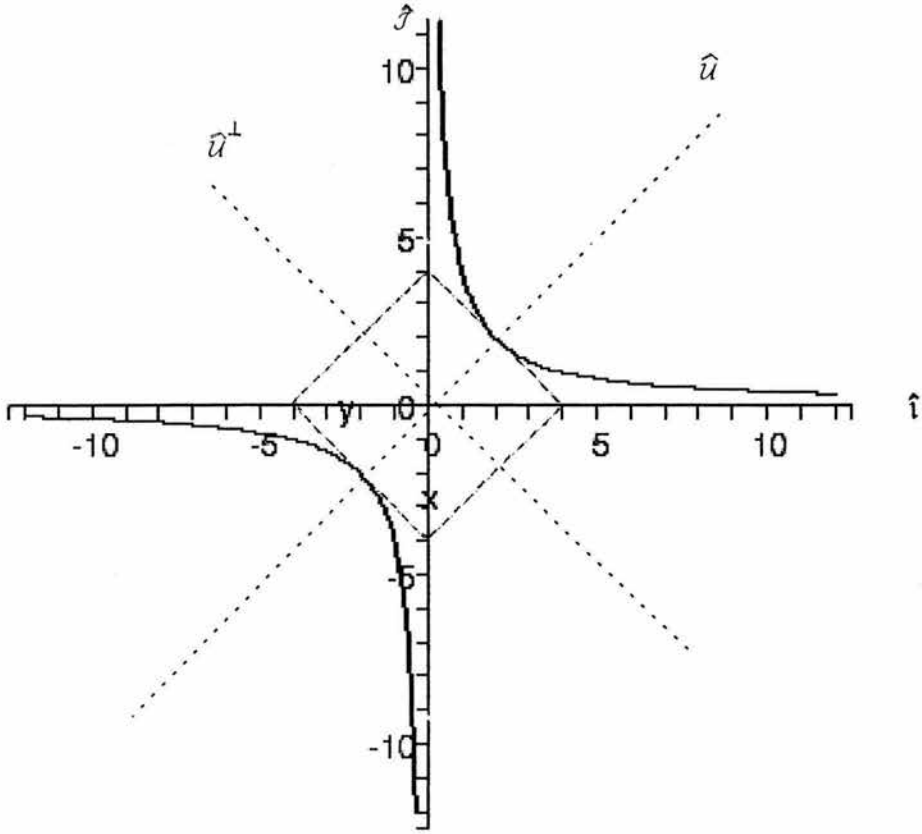


Figura 5 :Solución gráfica

Ejemplo 3.1.6. Se tienen los vértices en $v_1 = (-4,4)$ y $v_2 = (7,7)$ y semieje conjugado igual a 3.

Hallamos el centro de simetría de la cónica

$$v_0 = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{(-4,4)+(7,7)}{2} = \frac{(3,11)}{2} = \left(\frac{3}{2}, \frac{11}{2}\right)$$

$\therefore \boxed{v_0 = \left(\frac{3}{2}, \frac{11}{2}\right)}$
obtenemos el valor de a

$$a = d(v_0, v_1) = \|(v_1 - v_0)\| = \left\|(-4,4) - \left(\frac{3}{2}, \frac{11}{2}\right)\right\| = \frac{\sqrt{130}}{2}$$

$\therefore \boxed{a = \frac{\sqrt{130}}{2}}$
sabemos que la hipérbola cumple la igualdad $a^2 + b^2 = c^2$ de aquí que
$c^2 = \frac{130}{4} + 9 \Rightarrow \boxed{c = \frac{\sqrt{166}}{2}}$
hallamos el vector unitario $\hat{u}$

$$\hat{u} = \frac{v_2 - v_1}{\|v_2 - v_1\|} = \frac{(7,7)-(-4,4)}{\|(7,7)-(-4,4)\|} = \frac{(11,3)}{\|(11,3)\|} = \left[\frac{11}{\sqrt{130}}, \frac{3}{\sqrt{130}}\right]$$

$\therefore \boxed{\hat{u} = \left[\frac{11\sqrt{130}}{130}, \frac{3\sqrt{130}}{130}\right]}$ y $\boxed{\hat{u}^{\perp} = \left[\frac{-3\sqrt{130}}{130}, \frac{11\sqrt{130}}{130}\right]}$
los focos f_1 y f_2 tienen coordenadas

$$f_1 = v_0 - c\hat{u} \quad y \quad f_2 = v_0 + c\hat{u}$$

$$f_1 = \left(\frac{3}{2}, \frac{11}{2}\right) - \frac{\sqrt{166}}{2}\left[\frac{11\sqrt{130}}{130}, \frac{3\sqrt{130}}{130}\right] \quad y \quad f_2 = \left(\frac{3}{2}, \frac{11}{2}\right) + \frac{\sqrt{166}}{2}\left[\frac{11\sqrt{130}}{130}, \frac{3\sqrt{130}}{130}\right]$$

$$\boxed{f_1 = \left(\frac{3}{2} - \frac{11\sqrt{5395}}{130}, \frac{11}{2} - \frac{3\sqrt{5395}}{130}\right)} \quad y \quad \boxed{f_2 = \left(\frac{3}{2} + \frac{11\sqrt{5395}}{130}, \frac{11}{2} + \frac{3\sqrt{5395}}{130}\right)}$$

Los datos hallados en el sistema $\{0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$ son
$a = \frac{\sqrt{130}}{2}$, $b = 3$, $c = \frac{\sqrt{166}}{2}$, $\hat{u} = \left[\frac{11\sqrt{130}}{130}, \frac{3\sqrt{130}}{130}\right]$, $\hat{u}^{\perp} = \left[\frac{-3\sqrt{130}}{130}, \frac{11\sqrt{130}}{130}\right]$,

$v_0 = \left(\frac{3}{2}, \frac{11}{2}\right), \qquad v_1 = (-4, 4), \qquad v_2 = (7, 7),$

$$f_1 = \left(\tfrac{3}{2} - \tfrac{11\sqrt{5395}}{130}, \tfrac{11}{2} - \tfrac{3\sqrt{5395}}{130}\right), \qquad f_2 = \left(\tfrac{3}{2} + \tfrac{11\sqrt{5395}}{130}, \tfrac{11}{2} + \tfrac{3\sqrt{5395}}{130}\right)$$

La ecuación en $\{v_0, \{\hat{u}, \hat{u}^{\perp}\}\}$

$$\frac{x'''^2}{\frac{65}{2}} - \frac{y'''^2}{9} = 1 \tag{3.10}$$

en su forma desarrollada es

$$18x'''^2 - 65y'''^2 - 585 = 0$$

La ecuación general de segundo grado según la relación entre los sistemas $\{0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$ y $\{v_0, \{\hat{u}, \hat{u}^{\perp}\}\}$ del capítulo 1 es:

$$0 + x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} = P(x, y) = v_0 + x'''\hat{u} + y'''\hat{u}^{\perp}$$

$$P(x,y) = \left(\frac{3}{2}, \frac{11}{2}\right) + x'''\left[\frac{11\sqrt{130}}{130}, \frac{3\sqrt{130}}{130}\right] + y'''\left[\frac{-3\sqrt{130}}{130}, \frac{11\sqrt{130}}{130}\right]$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{11x'''\sqrt{130}}{130} - \frac{3\sqrt{130}y'''}{130} + \frac{3}{2} \\ y &= \frac{3\sqrt{130}x'''}{130} + \frac{11\sqrt{130}y'''}{130} + \frac{11}{2} \end{aligned}$$

despejando x''' y y''' en términos de x y y resulta:

$$\begin{aligned} x''' &= \frac{11\sqrt{130}x}{130} + \frac{3\sqrt{130}y}{130} - \frac{33\sqrt{130}}{130} \\ y''' &= \frac{-3\sqrt{130}x}{130} + \frac{11\sqrt{130}y}{130} - \frac{28\sqrt{130}}{65} \end{aligned}$$

ahora sustituímos las variables en la ecuación óptima correspondiente a éste ejercicio

$$\frac{\left(\frac{11\sqrt{130}x}{130}+\frac{3\sqrt{130}y}{130}-\frac{33\sqrt{130}}{130}\right)^2}{\frac{65}{2}}-\frac{\left(\frac{-3\sqrt{130}x}{130}+\frac{11\sqrt{130}y}{130}-\frac{28\sqrt{130}}{65}\right)^2}{9}=1 \qquad (3.11)$$

desarrollando y realizando las operaciones correspondientes llegamos a la ecuación en el sistema $\{0,\{\hat{\imath},\hat{\jmath}\}\}$

$$1593x^2-7703y^2+5478xy-34908x+76516y-260288=0$$

para obtener la ecuación de la hipérbola en el sistema $\{v_0,\{\hat{\imath},\hat{\jmath}\}\}$ nos trasladamos al centro de simetría de la cónica
las ecuaciones de traslación son :

$$x=x'+\frac{3}{2} \qquad y \qquad y=y'+\frac{11}{2}$$

sustituyendo

$$1593\left(x'+\frac{3}{2}\right)^2-7703\left(y'+\frac{11}{2}\right)^2+5478\left(x'+\frac{3}{2}\right)\left(y'+\frac{11}{2}\right)-34908\left(x'+\frac{3}{2}\right)$$
$$+76516\left(y'+\frac{11}{2}\right)-260288=0$$

desarrollando y simplificando obtenemos la ecuación en el sistema $\{v_0,\{\hat{\imath},\hat{\jmath}\}\}$

$$1593x'^2+5478x'y'-7703y'^2-76050=0 \qquad (3.12)$$

la ecuación en el sistema $\{0,\{\hat{u},\hat{u}^{\perp}\}\}$ la encontramos aplicando la rotación correspondiente con base al vector $\hat{u}$ en las ecuaciónes de rotación ya conocidas y obtenemos los siguientes valores de los coeficientes

$$A'=2340, \qquad C'=-8450, \qquad D'=-594\sqrt{130}, \qquad y \qquad E'=3640\sqrt{130}$$

así la ecuación es

$$2340x''^2-8450y''^2-1188\sqrt{130}x''+7280\sqrt{130}y''-260288=0 \qquad (3.13)$$

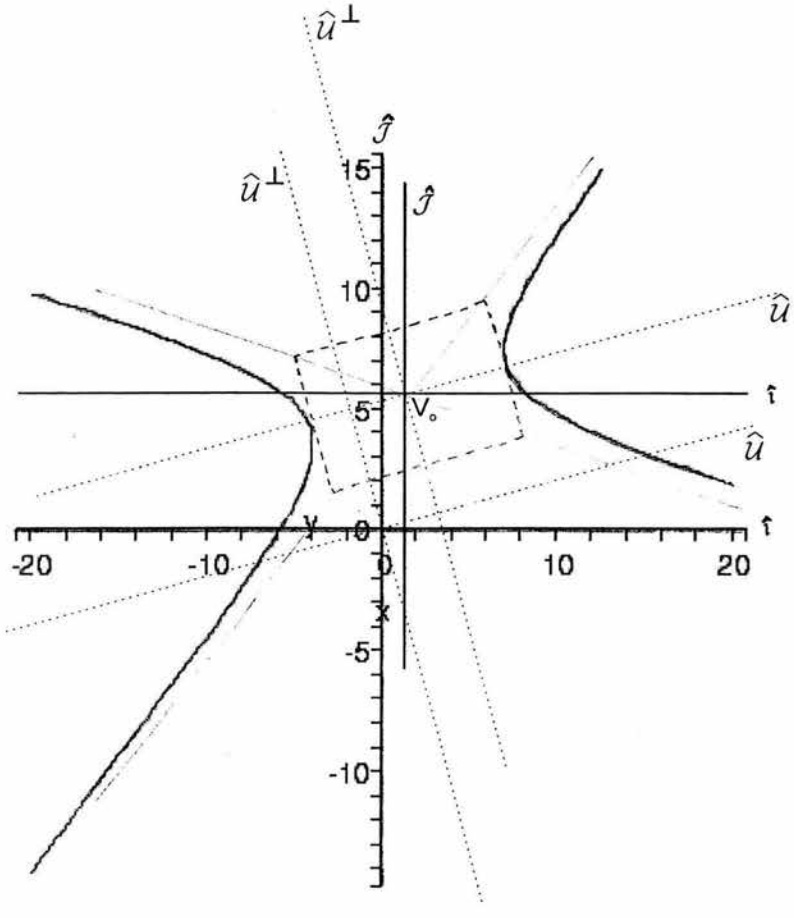


Figura 6:Solución gráfica

Ejemplo 3.1.7. Se dan los siguientes datos $v_0 = (-2,-2)$, $v_2 = (2,-1)$ y $f_2 = \frac{1}{\sqrt{17}}(-2\sqrt{17}-20, -2\sqrt{17}-5)$.

Calculamos las coordenadas del vector unitario

$$\hat{u} = \frac{v_2 - v_0}{\|v_2 - v_0\|} = \frac{(2,-1)-(-2,-2)}{\|(2,-1)-(-2,-2)\|} = \frac{(4,1)}{\|(4,1)\|} = \left[\frac{4\sqrt{17}}{17}, \frac{\sqrt{17}}{17}\right]$$

$\therefore \boxed{\hat{u} = \left[\frac{4\sqrt{17}}{17}, \frac{\sqrt{17}}{17}\right]}$ y $\boxed{\hat{u}^{\perp} = \left[\frac{-\sqrt{17}}{17}, \frac{4\sqrt{17}}{17}\right]}$
el valor de a es el siguiente

$$a = d(v_0, v_2) = ||(2,-1)-(-2,-2)|| = ||(4,1)|| = \sqrt{17}$$

$\therefore \boxed{a = \sqrt{17}}$
encontrando el valor de c en base a las coordenadas de f_1 tenemos

$$\begin{aligned}
f_1 &= \frac{1}{\sqrt{17}}(-2\sqrt{17}-20, -2\sqrt{17}-5) \\
&= \left(\frac{-2\sqrt{17}-20}{\sqrt{17}}, \frac{-2\sqrt{17}-5}{\sqrt{17}}\right) \\
&= \left(-2 - \frac{20}{\sqrt{17}}, -2 - \frac{5}{\sqrt{17}}\right) \\
&= (-2,-2) - 5\left[\frac{4\sqrt{17}}{17}, \frac{\sqrt{17}}{17}\right]
\end{aligned}$$

$\therefore \boxed{c = 5}$

las coordenadas de f_2 son

$$\begin{aligned} f_2 &= v_0 + c\hat{u} \\ &= (-2,-2) + 5\left[\frac{4\sqrt{17}}{17}, \frac{\sqrt{17}}{17}\right] \\ &= \left(-2 + \frac{20}{\sqrt{17}}, -2 + \frac{5}{\sqrt{17}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{17}}(-2\sqrt{17} + 20, -2\sqrt{17} + 5) \end{aligned}$$

las coordenadas del vértice v_1

$$v_1 = v_0 - a\hat{u} \qquad = (-2,-2) - \sqrt{17}\left[\frac{4\sqrt{17}}{17}, \frac{\sqrt{17}}{17}\right] \qquad = (-6,-3)$$

los datos del sistema $\{0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$ son

$a = \sqrt{17}$, $\quad b = \sqrt{8}$, $\quad c = 5$, $\quad \hat{u} = \left[\frac{4\sqrt{17}}{17}, \frac{\sqrt{17}}{17}\right]$, $\quad \hat{u}^{\perp} = \left[\frac{-\sqrt{17}}{17}, \frac{4\sqrt{17}}{17}\right]$,

$v_0 = (-2,-2)$, $\qquad v_1 = (-6,-3)$, $\qquad v_2 = (2,-1)$,

$$f_1 = \left(-2 - \tfrac{20\sqrt{17}}{17}, -2 - \tfrac{5\sqrt{17}}{17}\right), \qquad f_2 = \left(-2 + \tfrac{20\sqrt{17}}{17}, -2 + \tfrac{5\sqrt{17}}{17}\right)$$

la ecuación en el sistema $\{0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$ de la hipérbola es

$$0 + x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} = P(x,y) = v_0 + x'''\hat{u} + y'''\hat{u}^{\perp}$$

$$\begin{aligned} P(x,y) &= (-2,-2) + x'''\left[\frac{4\sqrt{17}}{17}, \frac{\sqrt{17}}{17}\right] + y'''\left[\frac{-\sqrt{17}}{17}, \frac{4\sqrt{17}}{17}\right] \\ x &= -2 + \frac{4\sqrt{17}x'''}{17} - \frac{\sqrt{17}y'''}{17} \\ y &= -2 + \frac{\sqrt{17}x'''}{17} + \frac{4\sqrt{17}y'''}{17} \end{aligned}$$

despejando x''' y y''' en términos de x y y resulta:

$$\begin{aligned} x''' &= \frac{4\sqrt{17}x}{17} + \frac{\sqrt{17}y}{17} + \frac{10\sqrt{17}}{17} \\ y''' &= \frac{-\sqrt{17}x}{17} + \frac{4\sqrt{17}y}{17} + \frac{6\sqrt{17}}{17} \end{aligned}$$

sustituyendo los valores en la ecuación óptima de la hipérbola que en éste ejercicio es

$$\frac{x'''^2}{17} - \frac{y'''^2}{8} = 1$$

obtenemos su ecuación en el sistema $\{0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$

$$111x^2 + 200xy - 264y^2 + 844x - 656y - 2124 = 0 \qquad (3.14)$$

aplicamos la rotación correspondiente como lo hemos hecho anteriormente y obtenemos los nuevos coeficientes

$$A' = 136, \qquad C' = -289, \qquad D' = 80\sqrt{17}, \qquad E' = -102\sqrt{17} \qquad y \qquad F' = -2124$$

así la ecuación que representa a la cónica en el sistema $\{0, \{\hat{u}, \hat{u}^{\perp}\}\}$ es

$$136x''^2 - 289y''^2 + 160\sqrt{17}x'' - 204\sqrt{17}y'' - 2124 = 0 \qquad (3.15)$$

con base a las siguientes ecuaciones de traslación

$$x = x' - 2 \qquad\qquad y = y' - 2$$

obtenemos la ecuación en el sistema $\{v_0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$

$$111x'^2 + 200x'y' - 264y'^2 - 2312 = 0 \qquad (3.16)$$

para obtener la ecuación en el sistema $\{v_0, \{\hat{u}, \hat{u}^{\perp}\}\}$ aplicamos la rotación adecuada en base al vector $\hat{u}$ y resulta ser

$$136x'''^2 - 289y'''^2 - 2312 = 0 \qquad (3.17)$$

agrupando, la ecuación resultante es

$$\frac{x'''^2}{17} - \frac{y'''^2}{8} = 1$$

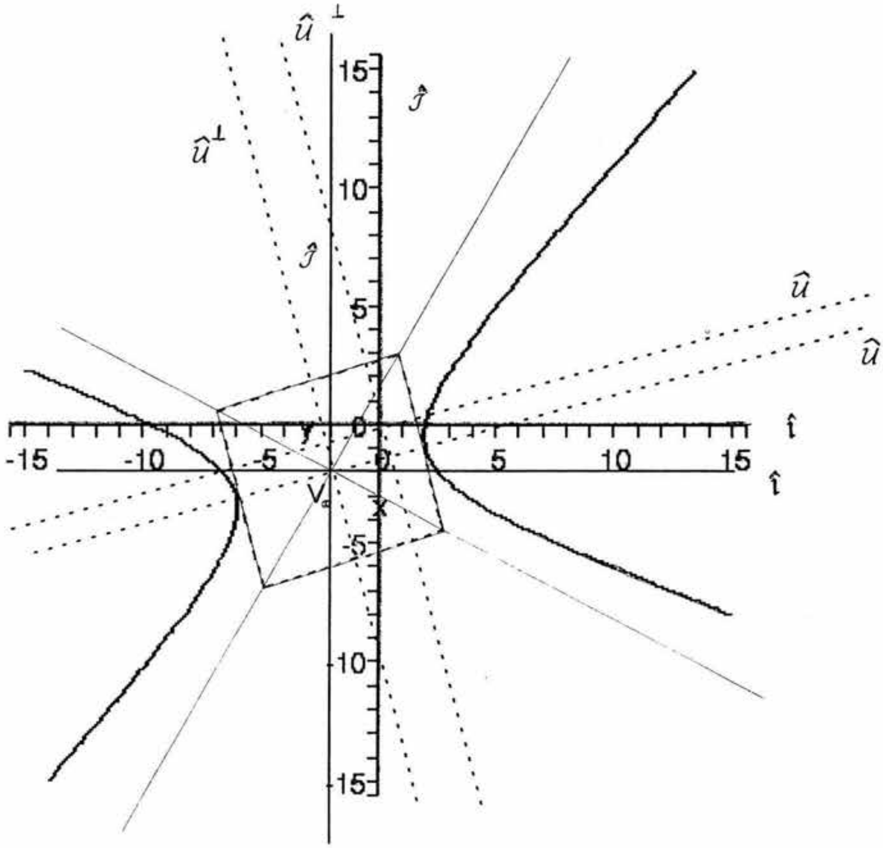


Figura 7 :Solución gráfica

3.2. ecuación

En cada uno de los siguientes ejercicios se proporciona la ecuación del lugar geométrico en el sistema $\{0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$ y se pide hallar la ecuación correspondiente a los demás sistemas de referencias, así como sus datos y gráficas en el sistema $\{0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$.

Ejemplo 3.2.1. Dada la ecuación

$$3x^2 + 12xy + 8y^2 - 24x - 40y + 60 = 0 \tag{3.18}$$

Identificamos sus coeficientes

$$A = 3, \qquad B = 6, \qquad C = 8, \qquad D = -12, \qquad E = -20, \qquad F = 60$$

obtenemos primero el indicador para averiguar de que cónica se trata

$$I = \delta s = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = -12 < 0$$

como sabemos por el capítulo 1, si $I < 0$ se trata de la ecuación de una hipérbola. Para encontrar su ecuación en el sistema $\{0, \{\hat{u}, \hat{u}^{\perp}\}\}$ lo que haremos será eliminar de la ecuación canónica el término cruzado con base a la rotación apropiada y el método usado en ejercicios anteriores.
Primero encontramos el vector $\hat{u}$ en base a la ecuación característica que es $x^2 - 11x - 12 = 0$, y sus raíces son $x_1 = -1$ y $x_2 = 12$, de aquí que el vector sea $[4, 6]$ por tanto $\hat{u} = \left[-\frac{3\sqrt{13}}{13}, \frac{2\sqrt{13}}{13}\right]$
aplicamos las ecuaciones de rotación conocidas y obtenemos

$$A' = -1, \qquad C' = 12, \qquad D' = -\frac{4\sqrt{13}}{13}, \qquad E' = \frac{84\sqrt{13}}{13}, \qquad F' = 60$$

de esta forma la ecuación en el sistema $\{0, \{\hat{u}, \hat{u}^{\perp}\}\}$ es

$$12y''^2 - x''^2 - \frac{8\sqrt{13}}{13}x'' + \frac{168\sqrt{13}}{13}y'' + 60 = 0 \tag{3.19}$$

La ecuación en el sistema $\{v_0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$ la vamos a encontrar trasladándonos al centro de simetría de lo cónica $v_0 = (h, k)$ y así se eliminan los términos lineales de la ecuación de segundo grado.
Obtenemos el centro de simetría v_0 con base a los determinantes definidos en el capítulo 1

$$\delta h = \begin{vmatrix} -D & B \\ -E & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12 & 6 \\ 20 & 8 \end{vmatrix} = -24$$

$h = \frac{\delta h}{\delta s}$, $h = \frac{-24}{-12} \therefore h = 2$

$$\delta k = \begin{vmatrix} A & -D \\ B & -E \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 6 & 20 \end{vmatrix} = -12$$

$k = \frac{\delta k}{\delta s}$, $k = \frac{-12}{-12} \therefore k = 1$
de aquí $v_0 = (2, 1)$, las ecuaciones de traslación son

$$x = x' + 2 \qquad y \qquad y = y' + 1$$

y las sustituímos en la ecuación dada para obtener la ecuación en el sistema $\{v_0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$
$3(x' + 2)^2 + 12(x' + 2)(y' + 1) + 8(y' + 1)^2 - 24(x' + 2) - 40(y' + 1) + 60 = 0$
$3(x'^2 - 4x' + 4) + 12(x'y' + x' + 2y' + 2) + 8(y'^2 + 2y' + 1) - 24x' - 48 - 40y' - 40 + 60 = 0$

$$3x'^2 + 12x'y' + 8y'^2 + 16 = 0 \tag{3.20}$$

por último damos la ecuación de la hipérbola en el sistema $\{v_0, \{\hat{u}. \hat{u}^{\perp}\}\}$

$$\begin{aligned} 12y'''^2 - x'''^2 + 16 &= 0 \\ 12y'''^2 - x'''^2 &= -16 \\ \frac{x'''^2}{16} - \frac{y'''^2}{\frac{16}{12}} &= 1 \end{aligned} \tag{3.21}$$

otra forma de obtener el valor de F' es por medio de el siguiente determinante:

$$\delta f = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 6 & -12 \\ 6 & 8 & -20 \\ -12 & -20 & 60 \end{vmatrix} = -192$$

$F' = \frac{\delta f}{\delta s}$, $F' = \frac{-192}{-12} \therefore F' = 16$
Sus datos en el sistema $\{0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$ son:

$a = 4,\ b = \frac{2\sqrt{3}}{3},\ c = \frac{2\sqrt{39}}{3},\ \hat{u} = \left[-\frac{3\sqrt{13}}{13}, \frac{2\sqrt{13}}{13}\right],\ \hat{u}^{\perp} = \left[\frac{2\sqrt{13}}{13}, \frac{3\sqrt{13}}{13}\right],\ v_0 = (2, 1),$

$$v_1 = (2,1) - 4\left[\frac{-3\sqrt{13}}{13}, \frac{2\sqrt{13}}{13}\right], \qquad v_2 = (2,1) + 4\left[\frac{-3\sqrt{13}}{13}, \frac{2\sqrt{13}}{13}\right],$$

$$f_1 = (2,1) - \frac{2\sqrt{39}}{3}\left[\frac{-3\sqrt{13}}{13}, \frac{2\sqrt{13}}{13}\right], \qquad f_2 = (2,1) + \frac{2\sqrt{39}}{3}\left[\frac{-3\sqrt{13}}{13}, \frac{2\sqrt{13}}{13}\right],$$

$$E_f = \{P | P = (2,1) + t\left[-\frac{3\sqrt{13}}{13}, \frac{2\sqrt{13}}{13}\right], t\epsilon\Re\}$$

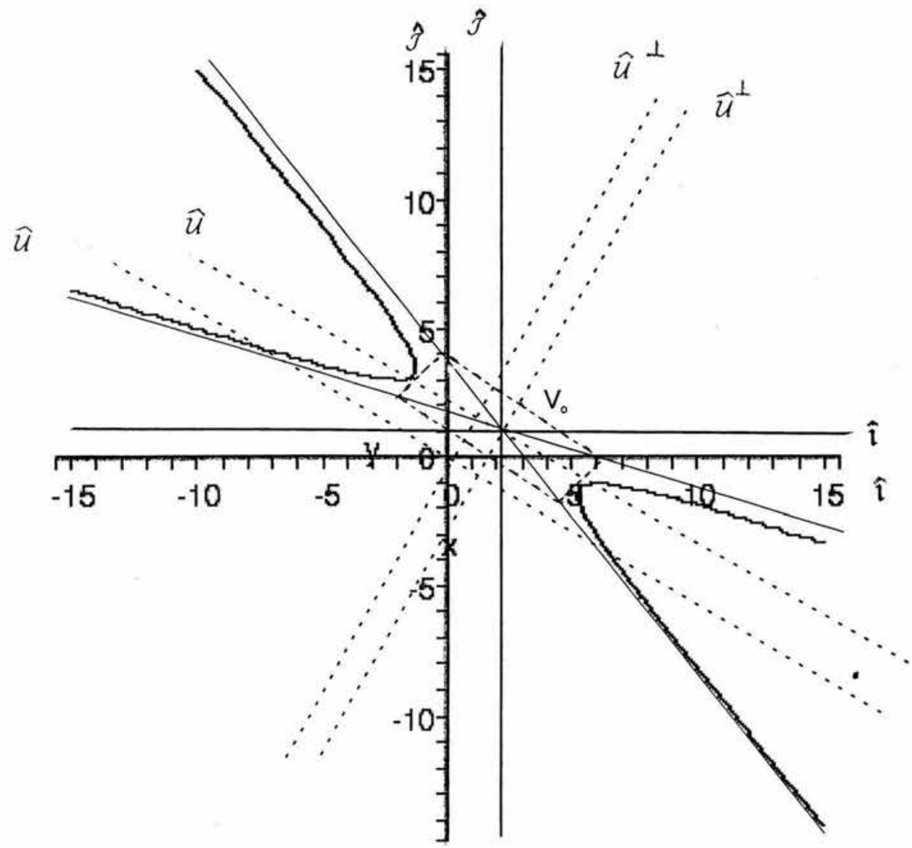


Figura 8:Solución gráfica

Ejemplo 3.2.2. Se tiene la ecuación

$$11x^2 - 24xy + 4y^2 + 6x + 8y - 10 = 0 \tag{3.22}$$

Los coeficientes son

$$A = 11, \qquad B = -12, \qquad C = 4, \qquad D = 3, \qquad E = 4 \qquad y \qquad F = -10$$

calculamos el indicador para identificar el lugar geométrico que representa la ecuación

$$\delta s = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & -12 \\ -12 & 4 \end{vmatrix} = -100 < 0$$

$\therefore$ se trata de una hipérbola
para obtener la ecuación en el sistema de referencias $\{v_0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$, obtenemos primero el centro de simetría de la hipérbola, $v_0 = (h, k)$

$$\delta h = \begin{vmatrix} -D & B \\ -E & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -12 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} = -60$$

$h = \frac{\delta h}{\delta s}$, $h = \frac{-60}{-100}$ $\therefore$ $h = -\frac{3}{5}$

$$\delta k = \begin{vmatrix} A & -D \\ B & -E \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & -3 \\ -12 & -4 \end{vmatrix} = -80$$

$k = \frac{\delta k}{\delta s}$, $k = \frac{-80}{-100}$ $\therefore$ $k = \frac{4}{5}$
el $\therefore$ $v_0 = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.
Las ecuaciones de traslación son:

$$x = x' + \frac{3}{5}y \qquad y = y' + \frac{4}{5}$$

sustituyendolas en la ecuación de segundo grado dada, tenemos
$11\left(x' + \frac{3}{5}\right)^2 - 24\left(x' + \frac{3}{5}\right)\left(y' + \frac{4}{5}\right) + 4\left(y' + \frac{4}{5}\right) + 6\left(x' + \frac{3}{5}\right) + 8\left(y' + \frac{4}{5}\right) - 10 = 0$
$= 11x'^2 + \frac{66}{5}x' + \frac{99}{25} - 24x'y' - \frac{96}{5}x' - \frac{72}{5}y' - \frac{288}{25} + 4y'^2 + \frac{32}{5}y' + \frac{64}{25} + 6x' + \frac{18}{5}$
$+8y'^2 + \frac{32}{5} - 10 = 0$
simplicando tenemos

$$11x'^2 - 24x'y' + 4y'^2 - 5 = 0 \tag{3.23}$$

ésta es la ecuación en el sistema $\{v_0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$.
Encontramos la ecuación en el sistema $\{v_0, \{\hat{u}, \hat{u}^{\perp}\}\}$ mediante el método de la ecuación característica. Obtenemos las raíces del polinomio característico asociado a la ecuación de la hipérbola que es $x^2 - 5x - 100 = 0$ y sus raíces son $x_1 = -5$ y $x_2 = 20$ tomamos x_1 y lo sustituímos en el vector $[B, C - x_1]$ así $\hat{u} = \left[\frac{-4}{5}, \frac{3}{5}\right]$ sustituyendo en las ecuaciones de rotación correspondientes obtenemos
$A' = -5$, $C' = 20$, $D' = 5$, $E' = 0$
Calculamos F' por medio del siguiente determinante

$$\delta f = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & -12 & 3 \\ -12 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & -10 \end{vmatrix} = 500$$

$F' = \frac{\delta f}{\delta s}$, $F' = \frac{500}{-100}$ $\therefore F' = -5$
así la ecuación en el sistema $\{v_0, \{\hat{u}, \hat{u}^{\perp}\}\}$ es

$$20y'''^2 - 5x'''^2 - 5 = 0 \tag{3.24}$$

otra forma de expresar la ecuación es

$$\frac{y'''^2}{\frac{1}{4}} - x'''^2 = 1$$

la ecuación en el sistema $\{0, \{\hat{u}, \hat{u}^{\perp}\}\}$ es

$$20y''^2 - 5x''^2 + 10x'' - 10 = 0 \tag{3.25}$$

los datos de la hipérbola en el sistema $\{0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$ son:

$a = \frac{1}{2}$, $\quad b = 1$, $\quad c = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $\quad \hat{u} = \left[\frac{-4}{5}, \frac{3}{5}\right]$, $\quad \hat{u}^{\perp} = \left[\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right]$, $\quad v_0 = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$,

$$v_1 = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) - \frac{1}{2}\left[\frac{-4}{5}, \frac{3}{5}\right], \qquad v_2 = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) + \frac{1}{2}\left[\frac{-4}{5}, \frac{3}{5}\right],$$

$$f_1 = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) - \frac{\sqrt{5}}{2}\left[\frac{-4}{5}, \frac{3}{5}\right], \qquad f_2 = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) + \frac{\sqrt{5}}{2}\left[\frac{-4}{5}, \frac{3}{5}\right],$$

$$E_f = \{P | P = \left(\tfrac{3}{5}, \tfrac{4}{5}\right) + t\left[\tfrac{-4}{5}, \tfrac{3}{5}\right], t \epsilon \Re\}$$

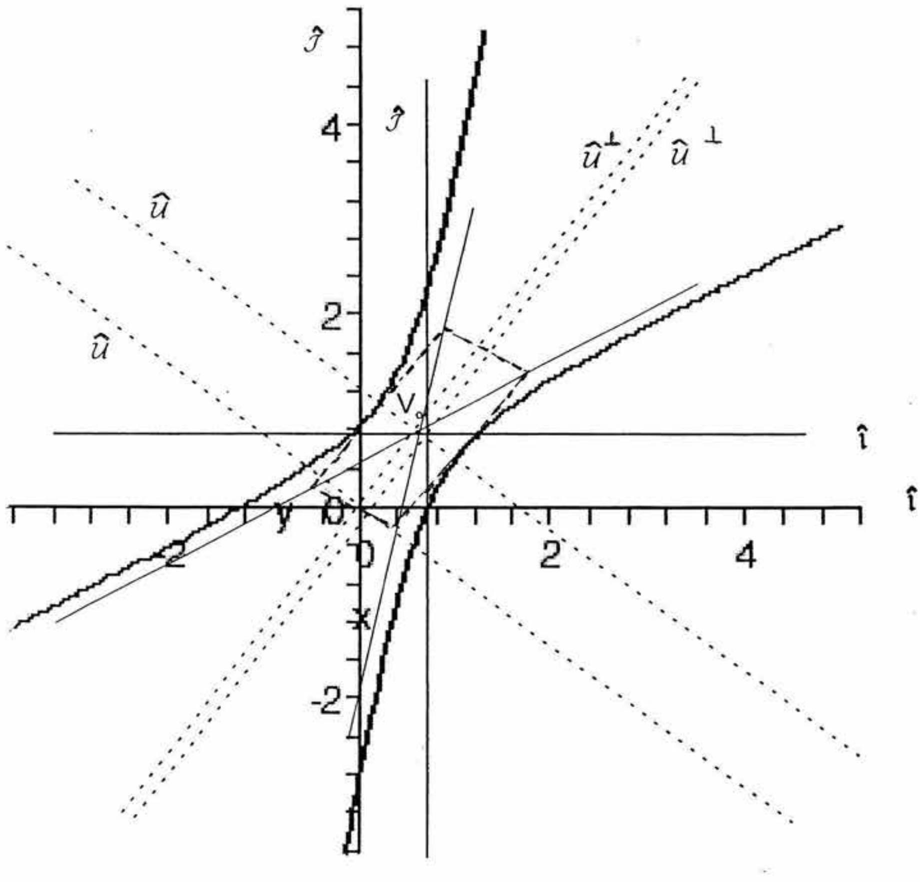


Figura 9:Solución gráfica

3.3. Casos degenerados

En el siguiente ejercicio identifica el lugar geométrico que representa la ecuación dada

Ejemplo 3.3.1. Se da la siguiente ecuación

$$6x^2 - xy - 2y^2 + 2x + y = 0 \tag{3.26}$$

Primero identificamos la cónica, los valores de sus coeficientes son

$$A = 6, \qquad B = \frac{-1}{2}, \qquad C = -2, \qquad D = 1, \qquad E = \frac{1}{2} \qquad y \qquad F = 0$$

sustituyendo en el indicador

$$I = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & -2 \end{vmatrix} = \frac{-49}{4} < 0$$

por tanto se trata de una hipérbola ó un caso degenerado de ella, nótese que la ecuación puede factorizarse de la siguiente forma

$$(2x + y)(3x - 2y + 1) = 0$$

de aquí que

$$(2x + y) = 0 \qquad y \qquad (3x - 2y + 1) = 0$$

por tanto la representación del lugar geométrico es una hipérbola que degenera en un par de rectas que se cruzan.

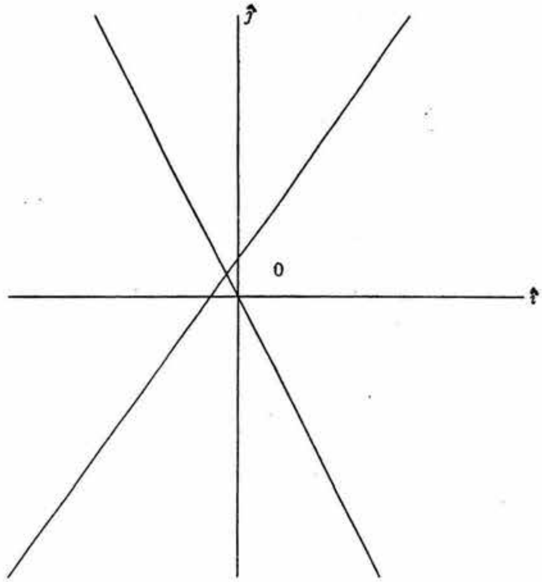


Figura 10 : Solución gráfica

Capítulo 4

La parábola

4.1. datos

Dados los datos en el sistema de referencias $\{0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$ encuéntrense las ecuaciones de las siguientes parábolas en los cuatro sistemas de referencia, además proporcione sus datos y gráficas en el sistema canónico

Ejemplo 4.1.1. Los datos son $v_0 = (2, 3)$ y $f = (2, -5)$.

Encontramos el valor de p que es la distancia del vértice al foco

$p = d(v_0, f) = d(v_0, D), \quad p = \|(2, -5) - (2, 3)\| \ = \|(0, -8)\| \ = 8 \ \Rightarrow \ \boxed{p = 8}$

obtenemos el vector unitario $\hat{u}$

$$\hat{u} = \frac{f - v_0}{\|f - v_0\|} = \frac{(2, -5) - (2, 3)}{\|(2, -5) - (2, 3)\|} = \frac{(0, -8)}{\|(0, -8)\|} = [0, -1]$$

$\therefore \boxed{\hat{u} = [0, -1]} \Rightarrow \boxed{\hat{u}^{\perp} = [1, 0]}$

basándonos en el capítulo 1, sabemos que por las coordenadas del foco y el vértice la parábola abre hacia abajo.

La recta directríz es la siguiente

$$D = \{P | P = v_0 - p\hat{u} + s\hat{u}^{\perp} s\epsilon\Re\} \ = \ \{P | P = (2, 3) - 8[0, -1] + s[1, 0], s\epsilon\Re\}$$

$$D \ = \ \{P | P = (2, 11) + s[1, 0], s\epsilon\Re\}$$

el lado recto lo obtenemos como el doble de la longitud de la directriz al foco
$||L_R|| = 2(D, f) = 2(2p) = 4p = 4(8) = 32$
Los datos encontrados en el sistema $\{0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$ son:

$p = 8$, $\hat{u} = [0, -1]$, $\hat{u}^{\perp} = [1, 0]$, $v_0 = (2, 3)$, $f = (2, -5)$,

$||L_R|| = 32$, $D = \{P | P = (2, 11) + s[1, 0], s \epsilon \Re\}$

La ecuación general de la parábola en el sistema $\{0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$ esta dada por $(y - h)^2 = -4p(x - k)$, como se vió en el capítulo 1 y que en éste ejercicio es

$$(x - 2)^2 = -4(8)(y - 3) \tag{4.1}$$

desarrollando la ecuación anterior tenemos :

$$\begin{aligned}
(x - 2)^2 &= -4(8)(y - 3) \\
x^2 - 4x + 4 &= -32(y - 3) \\
x^2 - 4x + 4 &= -32y + 96 \\
x^2 - 4x + 4 + 32y - 96 &= 0 \\
x^2 - 4x + 32y - 92 &= 0
\end{aligned}$$

la ecuación en el sistema $\{v_0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$ la obtenemos trasladandonos al punto $v_0 = (2, 3)$ que es el vértice de la parábola, ya que sabemos por el primer capítulo que ésta cónica no tiene centro de simetría.
Por tanto la ecuación es

$$\begin{aligned}
x'^2 &= -32y' \\
x'^2 + 32y' &= 0
\end{aligned} \tag{4.2}$$

nótese que $\hat{u} \parallel \hat{\jmath}$ y $\hat{u}^{\perp} \parallel \hat{\imath}$ por tanto la ecuación en el sistema $\{0, \{\hat{u}, \hat{u}^{\perp}\}\}$ apoyándonos en el capítulo 1 es

$$(y'' - 2)^2 = 4(8)(x'' - 3) \tag{4.3}$$

en su forma desarrollada es

$$y''^2 - 4y'' - 32x'' - 92 = 0$$

en el sistema $\{v_0, \{\hat{u}, \hat{u}^\perp\}\}$ la ecuación correspondiente es

$$y'''^2 = 32x''' \tag{4.4}$$

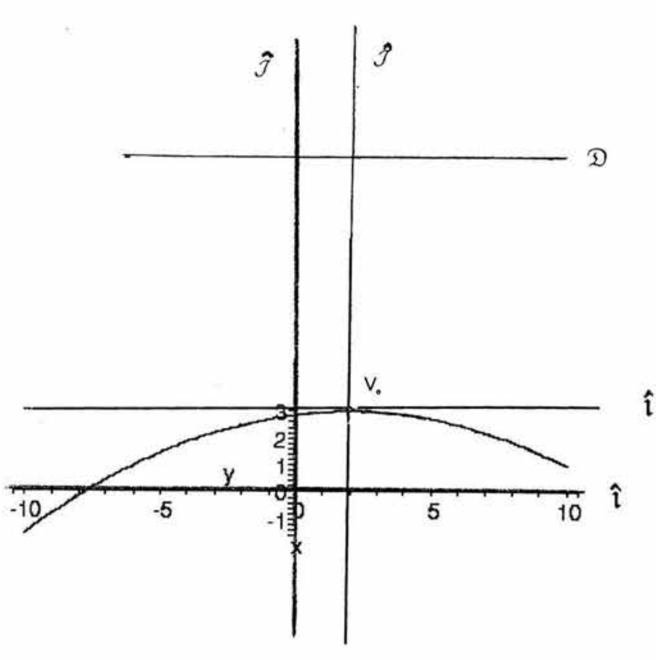


Figura 1 :Solución gráfica

Ejemplo 4.1.2. Se dan los datos $v_0 = (5, 2)$ y $f = (7, 2)$.

Hallamos el vector unitario $\hat{u}$

$$\hat{u} = \frac{(7,2) - (5,2)}{\|(7,2) - (5,2)\|} = \frac{(2,0)}{\|(2,0)\|} = [1, 0]$$

$\therefore \boxed{\hat{u} = [1, 0]} \Rightarrow \boxed{\hat{u}^{\perp} = [0, 1]}$
encontramos el valor de p.

$$p = d(v_0, f) \qquad = \|(7,2) - (5,2)\| \qquad = \|(2,0)\| = 2, \qquad \Rightarrow \boxed{p = 2}$$

la ecuacion de la directriz

$$\begin{aligned} D = \{P|P = v_0 - p\hat{u} + s\hat{u}^{\perp}, s\epsilon\Re\} &= \{P|P = (5,2) - 2[1,0] + s[0,1], s\epsilon\Re\} \\ D &= \{P|P = (3,2) + s[0,1], s\epsilon\Re\} \end{aligned}$$

$||L_R|| = 4p \Rightarrow ||L_R|| = 8$
Los datos en el sistema de referencias $\{0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$ son:

$p = 2, \quad \hat{u} = [1, 0], \quad \hat{u}^{\perp} = [0, 1], \quad v_0 = (5, 2), \quad f = (7, 2),$

$||L_R|| = 8, \quad D = \{P|P = (3, 2) + s[0, 1], s\epsilon\Re\}$

y su ecuación correspondiente basándonos en el capítulo 1 es

$$\begin{aligned} (y-2)^2 &= 4(2)(x-5) \\ (y-2)^2 &= 8(x-5) \end{aligned} \tag{4.5}$$

desarrollando

$$\begin{aligned} (y-2)^2 &= 8(x-5) \\ y^2 - 4y + 4 &= 8x - 40 \\ y^2 - 4y + 4 - 8x + 40 &= 0 \\ y^2 - 4y - 8x + 44 &= 0 \end{aligned}$$

en el sistema $\{v_0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$ su ecuación es:

$$y'^2 = 8x' \tag{4.6}$$

el eje $\hat{u} \parallel \hat{\imath}$ y $\hat{u}^\perp \parallel \hat{\jmath}$, por lo tanto, en el sistema $\{v_0, \{\hat{u}, \hat{u}^\perp\}\}$ la cónica queda representada por la misma ecuación y lo mismo ocurre para los sistemas $\{0, \{\hat{u}, \hat{u}^\perp\}\}$ y $\{0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$.

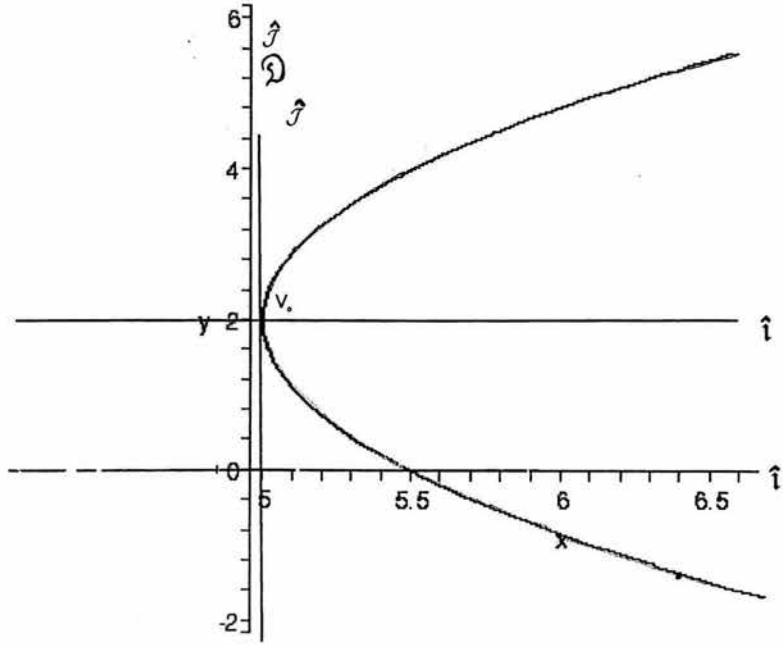


Figura 2:Solución gráfica

Ejemplo 4.1.3. Se dan los siguientes datos $D = \{P|y = 5\}$ y $f = (7, -2)$.

Nótese que el eje de la parábola es perpendicular a la directríz, por tanto en este ejercicio el eje de la parábola es paralelo al eje $\hat{\jmath}$
$\Rightarrow \boxed{\hat{u} = [0, 1]} \therefore \boxed{\hat{u}^{\perp} = [-1, 0]}$
el eje focal denotado como E_f es la recta que pasa por el foco y su ecuación es:
$E_f = \{P|P = f + t\hat{u}, t\epsilon\Re\} = \{P|P = (7, -2) + t[0, 1], t\epsilon\Re\}$
el punto donde se intersectan la directríz y el eje focal es el punto que nos va a servir de referencia para encontrar el vértice de la parábola y el valor de p.
$D = \{P|y = 5\}$ y $E_f = \{P|P = (7, -2) + t[0, 1], t\epsilon\Re\} \Rightarrow -2 + t = 5 \Rightarrow t = 7$
$\therefore$ el punto de intersección es $(7, 5)$
ahora encontramos el vértice de la parábola v_0

$$v_0 = \frac{(7, 5) + (7, -2)}{2} = \frac{(14, 3)}{2} = \left(7, \frac{3}{2}\right) \Rightarrow \boxed{v_0 = \left(7, \tfrac{3}{2}\right)}$$

la longitud p

$$p = \frac{\|(7, 5) - (7, -2)\|}{2} \qquad = \frac{\|(0, 7)\|}{2} \qquad = \frac{7}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{p = \tfrac{7}{2}}$$

la longitud del lado recto $||L_R|| = 4p \Rightarrow \boxed{||L_R|| = 14}$
Los datos encontrados en el sistema $\{0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$

$p = \frac{7}{2}$, $\qquad \hat{u} = [0, 1]$, $\qquad \hat{u}^{\perp} = [-1, 0]$, $\qquad v_0 = \left(7, \frac{3}{2}\right)$, $\qquad f = (7, -2)$,

$||L_R|| = 14$, $\qquad D = \{P|y = 5\}$

y su ecuación en éste sistema es:

$$(x - 7)^2 = -4\left(\frac{7}{2}\right)\left(y - \frac{3}{2}\right) \tag{4.7}$$

en la forma general:

$$\begin{aligned}(x-7)^2 &= -4\left(\frac{7}{2}\right)\left(y-\frac{3}{2}\right)\\ x^2-14x+49 &= -14\left(y-\frac{3}{2}\right)\\ x^2-14x+49 &= -14y+21\\ x^2-14x+14y+28 &= 0\end{aligned}$$

basandonos en el capítulo 1, para el sistema $\{v_0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$ la ecuación es

$$\begin{aligned}x'^2 &= -14y'\\ x'^2+14y' &= 0\end{aligned} \tag{4.8}$$

observamos que el vector $\hat{u} \parallel \hat{\jmath}$ y $\hat{u}^{\perp} \parallel \hat{\imath}$ así su correspondiente ecuación en el sistema $\{0, \{\hat{u}, \hat{u}^{\perp}\}\}$ es

$$(y''-7)^2 = 14\left(x''+\frac{3}{2}\right) \tag{4.9}$$

desarrollando es

$$y''^2 - 14y'' - 14x'' + 28 = 0$$

y para el sistema $\{v_0, \{\hat{u}, \hat{u}^{\perp}\}\}$ la ecuación de la parábola con base al capítulo 1 es

$$y'''^2 = 14x''' \tag{4.10}$$

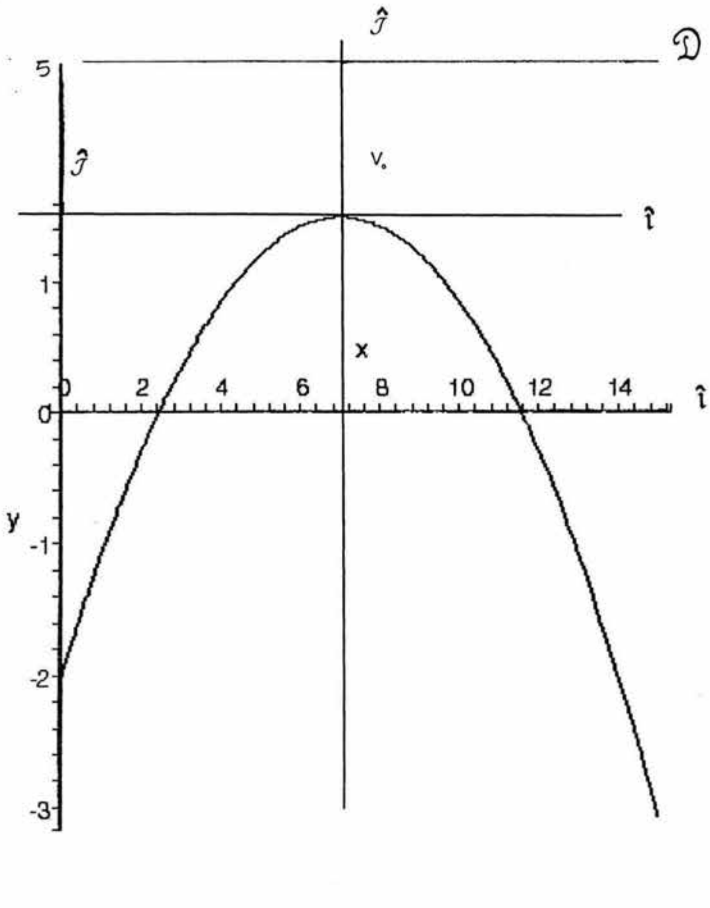


Figura 3:Solución gráfica

Ejemplo 4.1.4. Se dan los datos $p = \frac{5}{2}$ y $\hat{u} = \left[\frac{1}{\sqrt{17}}, \frac{4}{\sqrt{17}}\right]$, de la cónica con vértice en el origen.

Dado el vector $\boxed{\hat{u} = \left[\frac{1}{\sqrt{17}}, \frac{4}{\sqrt{17}}\right]} \Rightarrow \boxed{\hat{u}^{\perp} = \left[\frac{-4}{\sqrt{17}}, \frac{1}{\sqrt{17}}\right]}$
las coordenadas del foco son

$$f = v_0 + p\hat{u} = (0,0) + \frac{5}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{17}}, \frac{4}{\sqrt{17}}\right]$$

el lado recto y la directriz
$||L_R|| = 4\left(\frac{5}{2}\right)$ y $D = \{P|P = (0,0) - \frac{5}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{17}}, \frac{4}{\sqrt{17}}\right] + s\left[\frac{-4}{\sqrt{17}}, \frac{1}{\sqrt{17}}\right], s\epsilon\Re\}$
los datos en el sistema $\{0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$ son
$p = \frac{5}{2}$, $\quad \hat{u} = \left[\frac{1}{\sqrt{17}}, \frac{4}{\sqrt{17}}\right]$, $\quad \hat{u}^{\perp} = \left[\frac{-4}{\sqrt{17}}, \frac{1}{\sqrt{17}}\right]$, $\quad v_0 = (0,0)$, $\quad f = \left(\frac{5}{2\sqrt{17}}, \frac{10}{\sqrt{17}}\right)$,

$||L_R|| = 10$, $\qquad D = \{P|P = (\frac{-5}{2\sqrt{17}}, \frac{-10}{\sqrt{17}}) + s\left[\frac{-4}{\sqrt{17}}, \frac{1}{\sqrt{17}}\right], s\epsilon\Re\}$
empleando el método usado en ejercicios anteriores encontramos la ecuación general de segundo grado de la parábola en el sistema $\{0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$.

$$0 + x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} = P(x,y) = v_0 + x'''\hat{u} + y'''\hat{u}^{\perp}$$

$$\begin{aligned}
P(x,y) &= x'''\left[\frac{1}{\sqrt{17}}, \frac{4}{\sqrt{17}}\right] + y'''\left[\frac{-4}{\sqrt{17}}, \frac{1}{\sqrt{17}}\right] \\
x &= \frac{1}{\sqrt{17}}x''' - \frac{4}{\sqrt{17}}y''' \\
y &= \frac{4}{\sqrt{17}}x''' + \frac{1}{\sqrt{17}}y'''
\end{aligned}$$

despejando x''' y y''' en términos de x y y resulta:

$$\begin{aligned}
x''' &= \frac{x}{\sqrt{17}} + \frac{4y}{\sqrt{17}} \\
y''' &= \frac{y}{\sqrt{17}} - \frac{4x}{\sqrt{17}}
\end{aligned}$$

sustituímos los valores en la ecuación óptima de la parábola que en éste ejercicio es

$$y'''^2 = 10x'''$$

y encontramos la ecuación buscada.

$$16x^2 - 8xy + y^2 - 10\sqrt{17}x - 40\sqrt{17}y = 0 \qquad (4.11)$$

la misma ecuación representa a la parábola en el sistema $\{v_0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$por coincidir el origen del sistema de referencias con el vértice de la cónica.
Los valores de los coeficientes son:

$$A = 16, \qquad B = -4, \qquad C = 1, \qquad D = -5\sqrt{17}, \qquad E = -20\sqrt{17} \qquad y \qquad F = 0$$

la ecuación en el sistema $\{0, \{\hat{u}, \hat{u}^{\perp}\}\}$ se obtiene al efectuar la rotación adecuada con base al vector $\hat{u}$, apoyándonos en las ecuaciones de rotación expresadas en el capítulo 1, así obtenemos los nuevos coeficientes

$$A' = 0, \qquad C' = 17, \qquad D' = -85, \qquad E' = 0 \qquad y \qquad F' = 0$$

por tanto la ecuación es

$$17y''^2 - 170x'' = 0 \qquad (4.12)$$

en el sistema $\{v_0, \{\hat{u}, \hat{u}^{\perp}\}\}$ la cónica queda representada por la ecuación anterior ya que el origen del sistema de referencias coincide con el vértice de la cónica.

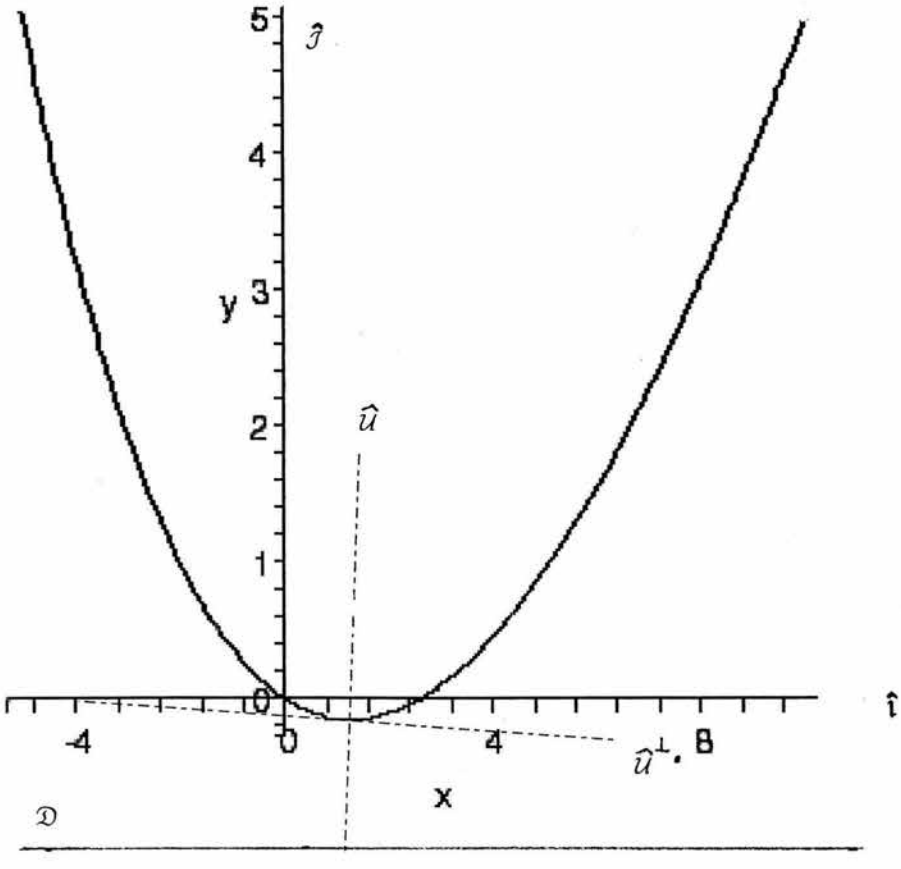


Figura 4:Solución gráfica

Ejemplo 4.1.5. Se dan los siguientes valores $p = 2$ y la pendiente de la recta del eje focal $m = \frac{1}{2}$, la cónica abre hacia abajo y su vértice se encuentra en el origen del sistema de referencias.

Obtenemos los vectores $\hat{u}$ y $\hat{u}^{\perp}$
La pendiente dada se representa por el vector $[2, 1]$ y su representación unitaria es

$$\Rightarrow \quad \boxed{\hat{u} = \left[\tfrac{2}{\sqrt{5}}, \tfrac{1}{\sqrt{5}}\right]} \qquad \therefore \qquad \boxed{\hat{u}^{\perp} = \left[\tfrac{-1}{\sqrt{5}}, \tfrac{2}{\sqrt{5}}\right]}$$

como la cónica abre hacia abajo el valor de p es precedido por un signo menos, como ya se mencionó en el capítulo 1

$$f = v_0 + p\hat{u} \qquad = (0,0) + (-2)\left[\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right] \qquad = \left(\frac{-4}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right)$$

la directríz es la siguiente

$$D = \{P|P = v_0 - p\hat{u} + t\hat{u}^{\perp}, t\epsilon\Re\} \qquad = \{P|P = (0,0) - (-2)\left[\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right] + t\left[\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right], t\epsilon\Re\}$$

$$D = \{P|P = \left(\frac{4\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right) + t\left[\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right], t\epsilon\Re\}$$

La ecuación general basándonos en la relación que guardan los sitemas de referencias $\{0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$ y $\{v_0, \{\hat{u}, \hat{u}^{\perp}\}\}$ es la siguiente

$$0 + x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} = P(x, y) = v_0 + x'''\hat{u} + y'''\hat{u}^{\perp}$$

$$P(x, y) \;=\; x'''\left[\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right] + y'''\left[\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right]$$

$$x \;=\; \frac{2}{\sqrt{5}}x''' - \frac{y'''}{\sqrt{5}}$$

$$y \;=\; \frac{x'''}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}}y'''$$

despejando x''' y y''' en términos de x y y resulta:

$$x''' = \frac{2x}{\sqrt{5}} + \frac{y}{\sqrt{5}}$$

$$y''' = \frac{2y}{\sqrt{5}} - \frac{x}{\sqrt{5}}$$

sustituímos en la ecuación óptima de la parábola que en éste ejercicio es

$$y'''^2 = 8x'''$$

y encontramos la ecuación general en el sistema $\{0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$

$$x^2 - 4xy + 4y^2 - 16\sqrt{5}x - 8\sqrt{5}y = 0 \tag{4.13}$$

la misma ecuación representa a la parábola en el sistema $\{v_0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$ por coincidir el origen de el sistema de referencias con el vértice de la parábola.
Los datos en el sistema $\{v_0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$ son

$$p = -2, \quad \hat{u} = \left[\tfrac{2}{\sqrt{5}}, \tfrac{1}{\sqrt{5}}\right], \quad \hat{u}^{\perp} = \left[\tfrac{-1}{\sqrt{5}}, \tfrac{2}{\sqrt{5}}\right], \quad v_0 = (0,0), \quad f = \left(\tfrac{-4}{\sqrt{5}}, \tfrac{-2}{\sqrt{5}}\right),$$

$$||L_R|| = 8, \qquad D = \{P|P = \left(\tfrac{4}{\sqrt{5}}, \tfrac{2}{\sqrt{5}}\right) + t\left[\tfrac{-1}{\sqrt{5}}, \tfrac{2}{\sqrt{5}}\right], t\epsilon\Re\}$$

los valores de los coeficientes de la ecuación de segundo grado son

$$A = 1, \quad B = -2, \quad C = 4, \quad D = -8\sqrt{5}, \quad E = -4\sqrt{5} \quad y \quad F = 0$$

ahora obtenemos la ecuación en el sistema $\{0, \{\hat{u}, \hat{u}^{\perp}\}\}$ mediante la rotación adecuada por el método empleado en ejercicios anteriores, y los nuevos coeficientes son:

$$A' = 0, \quad C' = 5, \quad D' = -20, \quad E' = 0 \quad y \quad F' = 0$$

$$5y''^2 - 40x'' = 0 \tag{4.14}$$

en el sistema $\{v_0, \{\hat{u}, \hat{u}^{\perp}\}\}$ la cónica queda representada por ésta ecuación por la razón anterior.

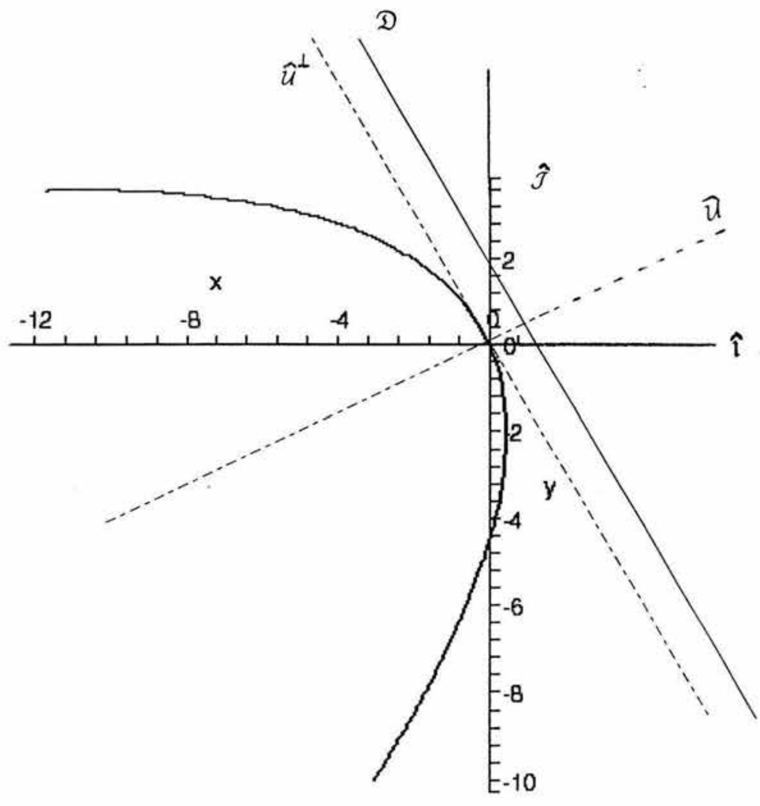


Figura 5:Solución gráfica

Ejemplo 4.1.6. Los datos dados son $v_0 = (1,2)$, $p = 3$ y $\hat{u} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.

Dado $\boxed{\hat{u} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]} \Rightarrow \boxed{\hat{u}^{\perp} = \left[\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]}$
hallamos el foco

$$f = v_0 + p\hat{u} = (1,2) + 3\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] = \left(1 + \frac{3}{\sqrt{2}}, 2 + \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$$

$\therefore \boxed{f = \left(1 + \frac{3}{\sqrt{2}}, 2 + \frac{3}{\sqrt{2}}\right)}$
la directrIz es

$$D = \{P|P = (1,2) - 3\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] + t\left[\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right], t\epsilon\Re\}$$

la ecuación de la recta que contiene al eje focal es

$$E_f = \{P|P = (1,2) + r\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right], r\epsilon\Re\}$$

los datos en el sistema $\{0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$
$p = 3, \quad \hat{u} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right], \quad \hat{u}^{\perp} = \left[\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right], \quad v_0 = (1,2), \quad f = \left(1 + \frac{3}{\sqrt{2}}, 2 + \frac{3}{\sqrt{2}}\right),$

$||L_R|| = 12, \qquad D = \{P|P = \left(1 - \frac{3}{\sqrt{2}}, 2 - \frac{3}{\sqrt{2}}\right) + t\left[\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right], t\epsilon\Re\}$
$E_f = \{P|P = (1,2) + r\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right], r\epsilon\Re\}$
En el sistema $\{v_0, \{\hat{u}, \hat{u}^{\perp}\}\}$ la ecuación es

$$x'''^2 = 12y''' \tag{4.15}$$

con base al vector director $\hat{u}$ hallamos la ecuación en el sistema $\{0, \{\hat{u}, \hat{u}^{\perp}\}\}$,
las ecuaciones de rotación son

$$x = \frac{x''}{\sqrt{2}} + \frac{y''}{\sqrt{2}} \qquad\qquad y = \frac{-x''}{\sqrt{2}} + \frac{y''}{\sqrt{2}}$$

sustituyendo y desarrollando obtenemos

$$x''^2 + 2x''y'' + 12\sqrt{2}x'' + y^2 - 12\sqrt{2}y = 0 \tag{4.16}$$

En el sistema $\{v_0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$ la correspondiente ecuación la obtenemos de trasladarnos al vértice de la parábola v_0, y las ecuaciones de traslación son:

$$x = x' - 1 \qquad\qquad y = y' - 2$$

sustituyendo en la ecuación del sistema $\{v_0, \{\hat{u}, \hat{u}^{\perp}\}\}$ obtenemos la ecuación deseada

$$x'^2 - 2x' - 12y + 25 = 0 \tag{4.17}$$

y finalmente para el sistema $\{0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$ la ecuación es

$$x^2 + 2xy + x(12\sqrt{2} - 6) + y^2 - y(12\sqrt{2} + 6) + 12\sqrt{2} + 9 = 0 \tag{4.18}$$

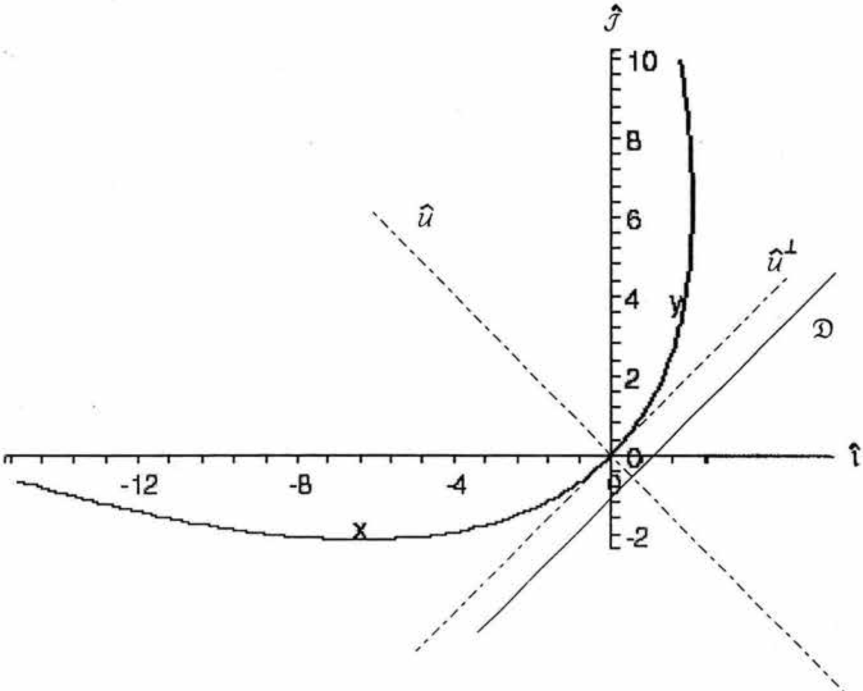


Figura 6:Solución gráfica

4.2. ecuación

Dada la ecuación en cada ejercicio, proporcionar las ecuaciones en los restantes sistemas de referencias así como sus datos y gráficas en el sistema de referencias $\{0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$ (en esta sección no se contemplan los casos degenerados).

Ejemplo 4.2.1. Se proporciona la siguiente ecuación

$$x^2 + 4xy + 4y^2 + 12x - 6y = 0 \tag{4.19}$$

De aquí obtenemos los coeficientes de la ecuación de segundo grado

$$A = 1, \qquad B = 2, \qquad C = 4, \qquad D = 6, \qquad E = -3 \qquad y \qquad F = 0$$

identificamos la cónica que representa la ecuación

$$I = \delta s = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$\therefore$ se trata de una parábola cuyo vértice se encuentra en el origen del sistema de referencias, por lo tanto la ecuación en el sistema $\{v_0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$ queda representada por la misma ecuación.

Para encontrar la ecuación en el sistema $\{v_0, \{\hat{u}, \hat{u}^{\perp}\}\}$ por medio del método de la ecuación característica, necesitamos conocer la raíz x_1 de la ecuación característica asociada a la ecuación dada que es $x^2 - 5x = 0$ de aquí $x_1 = 0$ y por tanto el vector $\hat{u}$ resulta ser $\hat{u} = \left[\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right]$, sustituyendo en las ecuaciones de rotación dadas en ejercicios anteriores los correspondientes valores de los nuevos coeficientes son

$$A' = 0, \qquad C' = 5, \qquad D' = -3\sqrt{5}, \qquad y \qquad E' = 0$$

su ecuación es

$$5y'''^2 - 6\sqrt{5}x''' = 0 \tag{4.20}$$

La ecuación en el sistema $\{0, \{\hat{u}, \hat{u}^{\perp}\}\}$ es la misma, ya que el vértice de la cónica se encuentra en el origen del sistema de referencias.

Los datos de la parábola en el sistema $\{0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$ son:

$$p = \left(\frac{3\sqrt{5}}{10}\right), \quad \hat{u} = \left[\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right], \quad \hat{u}^{\perp} = \left[\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right], \quad v_0 = (0,0), \quad f = \left(\frac{-3}{5}, \frac{3}{10}\right),$$

$$||L_R|| = \left(\frac{6}{\sqrt{5}}\right), \qquad D = \{P|P = \left(\frac{3}{5}, \frac{-3}{10}\right) + s\left[\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right], s\epsilon\Re\}$$

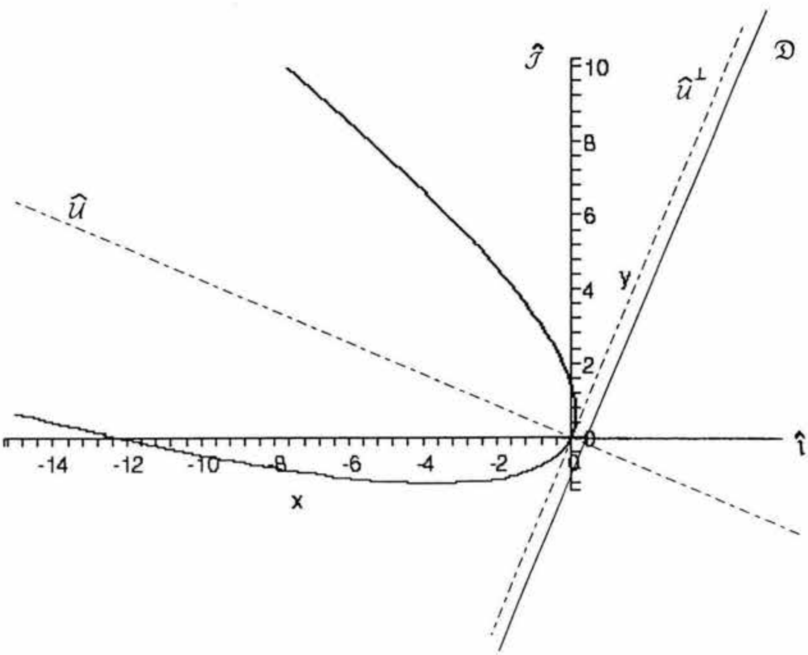


Figura 7:Solución gráfica

Ejemplo 4.2.2. Dada la ecuación

$$x^2 + 4xy + 4y^2 - 2\sqrt{5}x - \sqrt{5}y = 0 \tag{4.21}$$

Identificamos sus coeficientes

$$A = 1, \qquad B = 2, \qquad C = 4, \qquad D = -\sqrt{5}, \qquad E = -\frac{\sqrt{5}}{2}, \qquad F = 0$$

averiguamos de que cónica se trata

$$I = \delta s = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

como $I = 0$ se trata de una parábola
La ecuación correspondiente al sistema de referencias $\{v_0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$ es la siguiente, el vértice de la cónica es $v_0 = \left(\frac{-\sqrt{5}}{24}, \frac{7\sqrt{5}}{48}\right)$, por lo tanto las ecuaciones de traslación son

$$x = x' - \frac{\sqrt{5}}{24} \qquad\qquad y = y' + \frac{7\sqrt{5}}{48}$$

sustituyéndolas en la ecuación de segundo grado dada obtenemos la ecuación

$$x'^2 + 4x'y' - \frac{3\sqrt{5}}{2}x' + 4y'^2 = 0 \tag{4.22}$$

Hallamos la ecuación correspondiente en el sistema $\{0, \{\hat{u}, \hat{u}^{\perp}\}\}$ aplicando la rotación correspondiente en base a la ecuación característica asociada que es $x^2 - 5x = 0$, cuyas raices son $x = 0$ y $x = 5$ y así obtenemos los vectores unitarios

$$\boxed{\hat{u} = \left[\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right]} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\hat{u}^{\perp} = \left[\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right]}$$

los nuevos coeficientes son:

$$A' = 0, \qquad C' = 5, \qquad D' = \frac{3}{2}, \qquad E' = 2, \qquad F' = 0$$

y así la ecuación es

$$5y''^2 + 3x'' + 4y'' = 0 \tag{4.23}$$

la ecuación en el sistema $\{v_0, \{\hat{u}, \hat{u}^{\perp}\}\}$ la obtenemos al trasladarnos. al vértice de la cónica. En éste ejercicio hallamos el vértice de la parábola de la siguiente forma, encontramos las raices de la ecuación anterior en terminos de y

$$y = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4(5)(3x)}}{2(5)}$$

resolviendo la ecuación $60x = 16$, obtenemos el valor de x que es $x = \frac{16}{60}$ y de aquí tenemos el valor correspondiente de y que es $y = -\frac{2}{5}$
las ecuaciones de traslación son

$$x = x''' + \frac{4}{15} \qquad\qquad y = y''' - \frac{2}{5}$$

la ecuación en el sistema $\{v_0, \{\hat{u}, \hat{u}^{\perp}\}\}$ es

$$5y'''^2 + 3x'''' = 0 \tag{4.24}$$

los datos en el sistema $\{0, \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}\}\}$ son

$p = \frac{-3}{20}$, $\qquad \hat{u} = \left[\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right]$, $\qquad \hat{u}^{\perp} = \left[\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right]$, $\qquad v_0 = \left(\frac{-\sqrt{5}}{24}, \frac{7\sqrt{5}}{48}\right)$,

$f = \left(\frac{-\sqrt{5}}{24}, \frac{7\sqrt{5}}{48}\right) - \frac{3}{20}\left[\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right]$, $\qquad ||L_R|| = \frac{-3}{5}$,

$D = \left(\frac{-\sqrt{5}}{24}, \frac{7\sqrt{5}}{48}\right) + \frac{3}{20}\left[\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right] + s\left[\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right], s\epsilon\Re\}$

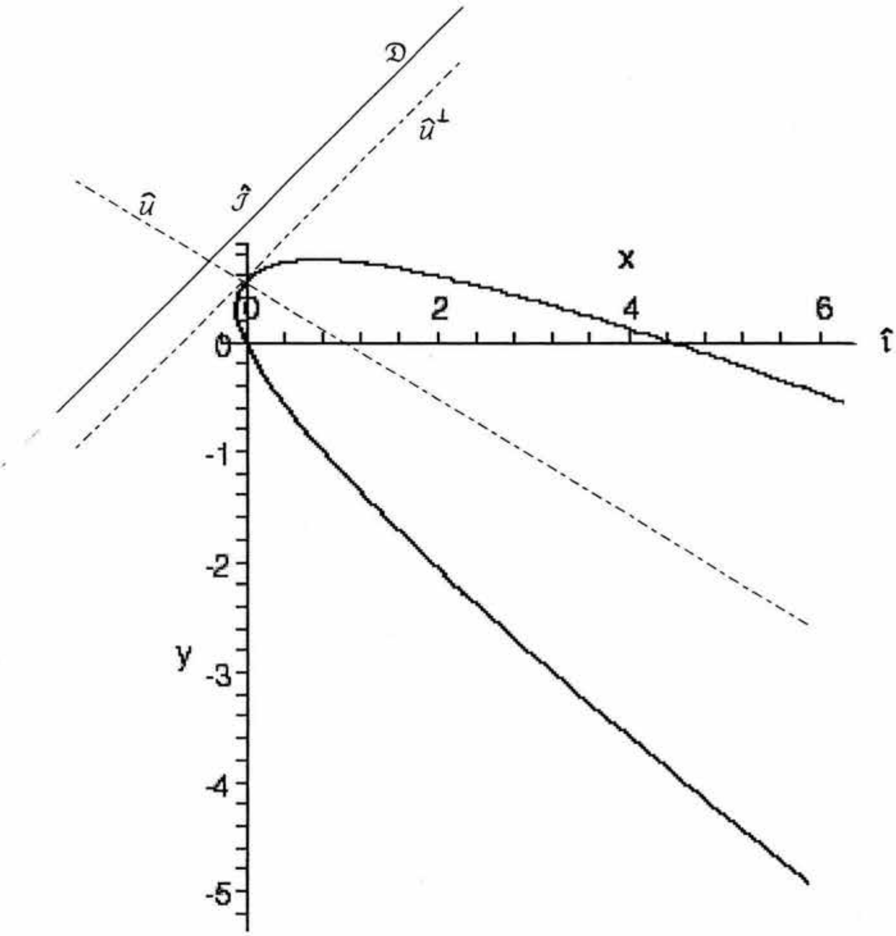


Figura 8:Solución gráfica

4.3. casos degenerados

Analice cada una de las siguientes ecuaciones

Ejemplo 4.3.1. Se proporciona la siguiente ecuación

$$x^2 - 6xy + 9y^2 + 4x - 12y + 4 = 0 \tag{4.25}$$

Identificamos el lugar geométrico que representa

$$I = \delta s = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

$\therefore$ se trata de una parábola ó un caso degenerado de ella.
Esta ecuación puede factorizarse de la siguiente forma

$$(x - 3y + 2)(x - 3y + 2) = 0$$

de donde $(x - 3y + 2) = 0$
que representa una parábola que degenera en una recta autocontenida.

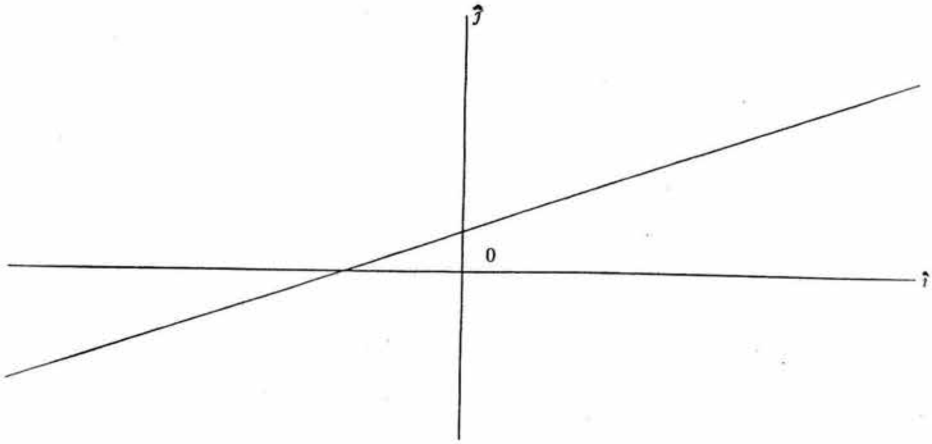


Figura 9: Solución gráfica

Ejemplo 4.3.2. Se da la siguiente ecuación

$$x^2 - 4xy + 4y^2 + 3x - 6y - 28 = 0 \tag{4.26}$$

Verificamos primero el indicador

$$I = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

podemos notar que se trata de una parábola ó un caso degenerado de ella. La ecuación puede factorizarse así

$$(x - 2y - 4)(x - 2y + 7) = 0$$

que representa una parábola que degenera en un par de rectas paralelas.

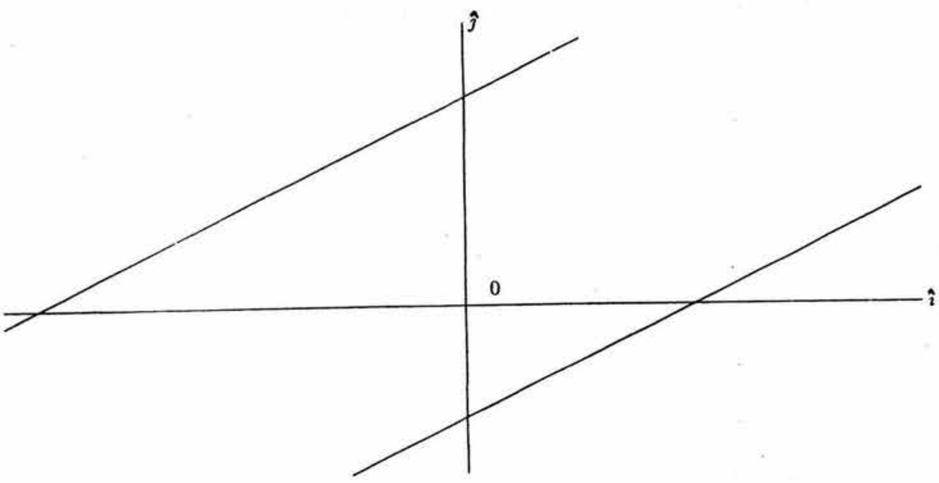


Figura 10: Solución gráfica

Ejemplo 4.3.3. Se proporciona la siguiente ecuación

$$9x^2 - 24xy + 16y^2 + 3x - 4y + 6 = 0 \tag{4.27}$$

Verificamos que se trate de una parábola

$$I = \begin{vmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 16 \end{vmatrix} = 0$$

por tanto la ecuación representa una parábola ó uno de sus casos degenerados. La ecuación puede factorizarse asi

$$(3x - 4y)^2 + (3x - 4y) + 6 = 0$$

que representa una ecuación de segundo grado cuyas raices se obtienen como

$$\frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(6)}}{2(1)} = \frac{-1 \pm \sqrt{-23}}{2}$$

las raices de dicha ecuación no son reales, por lo cual la cónica degenera en ningún lugar geométrico.

Capítulo 5

anexo

5.1. ejemplos en $\Re^3$

En el presente capítulo se desarrollan varios ejercicios que extienden a $\Re^3$ el último método de solución.
Por el capítulo 1 sabemos que la forma general de la ecuación de segundo grado en $\Re^3$ es la siguiente

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

En los ejercicios que se presentan a continuación se pide reducir la ecuación general de segundo grado hasta obtener la ecuación óptima de la superficie

Ejemplo 5.1.1. Se tiene la siguiente ecuación

$$5x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 4xz - 2x - 4y - 3z + 2 = 0 \qquad (5.1)$$

Identificamos los valores de sus coeficientes

$$A = 5, \qquad B = 1, \qquad C = 1, \qquad D = -1, \qquad E = 2,$$

$$F = 0, \qquad G = -2, \qquad H = -4, \qquad I = -3 \qquad y \qquad J = 2$$

su representación matricial es de la forma

$$X'^t Q' X' + S' X' + J = 0$$

de donde Q' y S' son de la siguiente forma, según el capítulo 1

$$Q' = \begin{pmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{pmatrix}, S' = (G, \ H, \ I)$$

sustituyendo los correspondientes valores, la ecuación general en su forma matricial es la siguiente

$$(x \ \ y \ \ z) \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + (-2 \ \ -4 \ \ -3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 2 = 0$$

primero hallaremos la matriz de rotación que al ser aplicada a la ecuación va a eliminar los términos cruzados. Dicha matriz se compone de los vectores unitarios que dependeran de las raices del polinomio característico que es de la forma siguiente

$$|Q' - \lambda_i I| = 0$$

sustituyendo

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda_i & -1 & 2 \\ -1 & 1-\lambda_i & 0 \\ 2 & 0 & 1-\lambda_i \end{vmatrix} = 0$$

resolviendo el determinante

$$(5-\lambda_i)(1-\lambda_i)(1-\lambda_i) - [4(1-\lambda_i) + (1-\lambda_i)] = 0$$

de aqui obtenemos las raices $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ y $\lambda_3 = 6$
sustituyendo cada una de las raices en la matriz anterior hallaremos los vectores unitarios.
Con λ_1 obtenemos el vector unitario $\hat{e}_1$

$$(Q' - \lambda_1 I)X_1 = \begin{pmatrix} 5-0 & -1 & 2 \\ -1 & 1-0 & 0 \\ 2 & 0 & 1-0 \end{pmatrix} X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

resolviendo el sistema se obtiene el vector solución

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

de donde el vector unitario $\hat{e}_1$ resulta ser

$$\hat{e}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

realizamos el mismo procedimiento para el vector unitario $\hat{e}_2$

$$(Q' - \lambda_2 I)X_2 = \begin{pmatrix} 5-1 & -1 & 2 \\ -1 & 1-1 & 0 \\ 2 & 0 & 1-1 \end{pmatrix} X_2$$

reduciendo se obtiene el vector solución

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

así el vector unitario es

$$\hat{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

hasta aquí hemos obtenido los vectores unitarios $\hat{e}_1$ y $\hat{e}_2$, ahora obtenemos el vector unitario $\hat{e}_3$ de la siguiente forma

$$\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{vmatrix} = \hat{\imath}\left(\frac{-3}{\sqrt{30}}\right) - \hat{\jmath}\left(\frac{1}{\sqrt{30}}\right) + k\left(\frac{2}{\sqrt{30}}\right)$$

por lo tanto la matriz de rotación es

$$R = \begin{pmatrix} \hat{e}_1, & \hat{e}_2, & \hat{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{-3}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{30}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}$$

encontramos la nueva matriz Q haciendo $Q = R^tQ'R$

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-3}{\sqrt{30}} & \frac{-1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{30}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{-3}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{30}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

tenemos así la nueva ecuación que representamos en forma matricial

$$X'^tQX' + S'RX' + J = 0$$

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{-3}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{30}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 2 = 0$$

la ecuación que se obtiene es

$$y^2 + 6z^2 - \frac{11}{\sqrt{5}}y - \frac{2\sqrt{30}}{5}z + 2 = 0$$

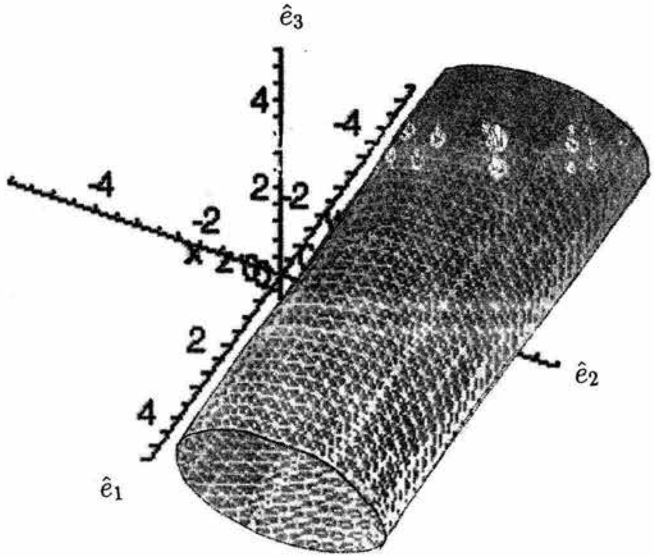
completando cuadrados en y y z

$$\left(y - \frac{11\sqrt{5}}{10}\right)^2 + 6\left(z - \frac{1}{\sqrt{30}}\right)^2 = \frac{17}{4}$$

multiplicando por la fracción $\frac{4}{17}$ en ambos miembros de la igualdad tenemos

$$\frac{\left(y - \frac{11\sqrt{5}}{10}\right)^2}{\frac{17}{4}} + \frac{\left(z - \frac{1}{\sqrt{30}}\right)^2}{\frac{24}{17}} = 1$$

Podemos observar que se trata de un cilindro eliptico.



Cilindro Ellíptico

Ejemplo 5.1.2. Se da la siguiente ecuación

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - xy + xz - yz - 6 = 0 \tag{5.2}$$

Identificamos sus coeficientes

$$A = 2, \qquad B = 2, \qquad C = 2, \qquad D = \frac{-1}{2}, \qquad E = \frac{1}{2},$$

$$F = \frac{-1}{2}, \qquad G = 0, \qquad H = 0, \qquad I = 0, \qquad J = -6$$

su representación matricial basandonos en el capítulo 1 es

$$X''^t Q' X' + S' X' + J = 0$$

donde el valor de Q' y de S' son

$$Q' = \begin{pmatrix} 2 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & 2 & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 2 \end{pmatrix}, S' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hallamos a continuación la matriz de rotación

$$|Q' - \lambda_i I| = 0$$

sustituyendo

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda_i & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & 2-\lambda_i & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 2-\lambda_i \end{vmatrix} = (2-\lambda_i)^3 + \frac{3}{4}\lambda - \frac{5}{4}$$

que se factoriza como

$$(3-\lambda)\left(\frac{3}{2} - \lambda\right)^2 = 0$$

de aquí las raíces son $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{3}{2}$ y $\lambda_3 = 3$
mediante del procedimiento del ejercicio anterior hallamos las coordenadas de los vectores unitarios $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$ y $\hat{e}_3$

primero calculamos el vector unitario $\hat{e}_1$ en base a λ_1 y el vector unitario $\hat{e}_2$ con base a λ_2, etc. así obtenemos la matriz de rotación

$$R = \begin{pmatrix}\hat{e}_1, & \hat{e}_2, & \hat{e}_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{3}{\sqrt{18}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-3}{\sqrt{18}} \end{pmatrix} R^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{3}{\sqrt{18}} & 0 & \frac{-3}{\sqrt{18}} \end{pmatrix}.$$

el valor de Q es

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{3}{\sqrt{18}} & 0 & \frac{-3}{\sqrt{18}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & 2 & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{3}{\sqrt{18}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-3}{\sqrt{18}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

la ecuación resultante es representada en forma matricial por

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 6 = 0$$

desarrollando

$$\frac{3}{2}x^2 + 3y^2 + \frac{3}{2}z^2 - 6 = 0$$

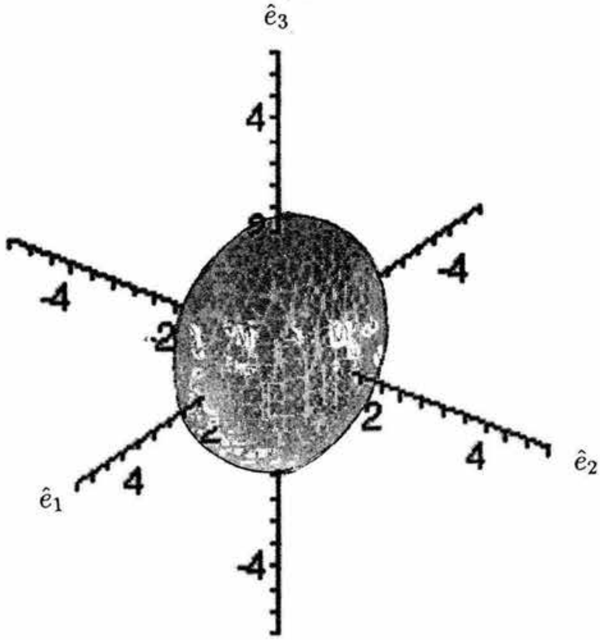
multiplicando por $\left(\frac{2}{3}\right)$ y reduciendo tenemos

$$x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$$

multiplicando por $\left(\frac{1}{4}\right)$ ambos miembros de la igualdad tenemos la siguiente ecuación

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{4} = 1$$

que representa un elipsoide de revolución.



Elipsoide de Revolucion

Ejemplo 5.1.3. Dada la siguiente ecuación

$$2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy - 4x + y - 12z + 7 = 0 \tag{5.3}$$

Identificamos los valores de sus coeficientes

$$A = 2, \qquad B = 2, \qquad C = 3, \qquad D = 1, \qquad E = 0,$$

$$F = 0, \qquad G = -4, \qquad H = 1, \qquad I = -12, \qquad J = 7$$

su representación matricial es

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 1 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 7 = 0$$

el determinante asociado al polinomio característico es

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda_i & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda_i & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda_i \end{vmatrix} = -x^3 + 7x^2 - 15x + 9$$

que se factoriza como $(1-x)(x-3)^2 = 0$ y las raíces son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$. Empleando el procedimiento del ejercicio anterior, obtenemos las coordenadas de los vectores unitarios $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$ y $\hat{e}_3$

$$R = \begin{pmatrix} \hat{e}_1, & \hat{e}_2, & \hat{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; R^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ahora obtenemos la matriz Q

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

la nueva ecuación en forma matricial es

$$(x \quad y \quad z)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} + (-4 \quad 1 \quad -12)\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} + 7 = 0$$

desarrollando resulta

$$x^2 + 3y^2 + 3z^2 - \frac{5x}{\sqrt{2}} - \frac{3y}{\sqrt{2}} - 12z + 7 = 0$$

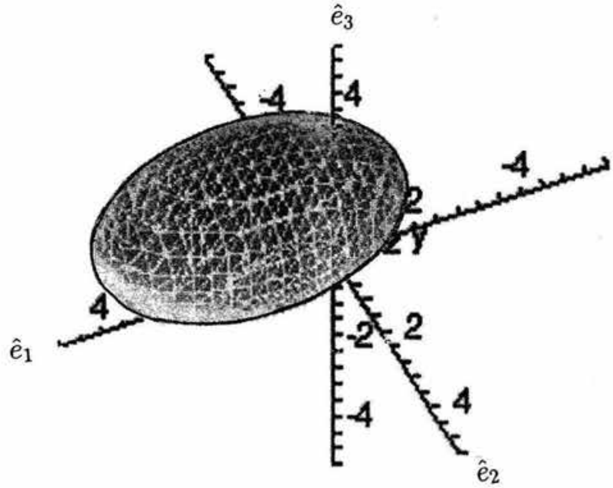
completando cuadrados obtenemos la ecuación óptima

$$\left(x - \frac{5}{2\sqrt{2}}\right)^2 + 3\left(y - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + 3(z-2)^2 = \frac{17}{2}$$

multiplicando ambos lados de la igualdad por $\left(\frac{2}{17}\right)$

$$\frac{\left(x - \frac{5}{2\sqrt{2}}\right)^2}{\frac{17}{2}} + \frac{\left(y - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2}{\frac{17}{6}} + \frac{(z-2)^2}{\frac{17}{6}} = 1$$

que representa un elipsoide de revolución.



Elipsoide de Revolucion

Ejemplo 5.1.4. Se tiene la ecuación

$$2x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xy - 2yz - 4 = 0 \tag{5.4}$$

Identificamos sus coeficientes

$$A = 2, \qquad B = 1, \qquad C = 2, \qquad D = 1, \qquad E = 0,$$

$$F = -1, \qquad G = 0, \qquad H = 0, \qquad I = 0 \qquad y \qquad J = -4$$

su representación matricial según el capítulo 1 es la siguiente

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 4 = 0$$

La ecuación característica asociada a la ecuación de segundo grado es

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda_i & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda_i & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda_i \end{vmatrix} = 0$$

resolviendo el determinante obtenemos la ecuación $-\lambda_i^3 + 5\lambda_i^2 - 6\lambda_i = 0$, que se factoriza como

$$(\lambda_i)(\lambda_i - 2)(\lambda_i - 3) = 0$$

de aquí obtenemos las raíces $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = 3$
sustituyendo cada una de las raíces en la matriz anterior hallaremos los vectores unitarios correspondientes.
Con λ_1 obtenemos $\hat{e}_1$

$$|Q' - \lambda_1 I| = \begin{vmatrix} 2-0 & 1 & 0 \\ 1 & 1-0 & -1 \\ 0 & -1 & 2-0 \end{vmatrix}$$

resolviendo el sistema se obtiene el vector solución $[1, -2, -1]$ así el vector unitario es

$$\hat{e}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

realizamos el mismo procedimiento para el vector unitario $\hat{e}_2$ y el determinante a resolver es

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

el vector unitario es

$$\hat{e}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

con base a los vectores unitarios $\hat{e}_1$ y $\hat{e}_2$, obtenemos el tercer vector unitario $\hat{e}_3$

$$\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = \hat{\imath}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) - \hat{\jmath}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + k\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

así las matrices R y R^t son

$$R = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \; R^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

obtenemos la matriz Q haciendo $Q = R^tQ'R$

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

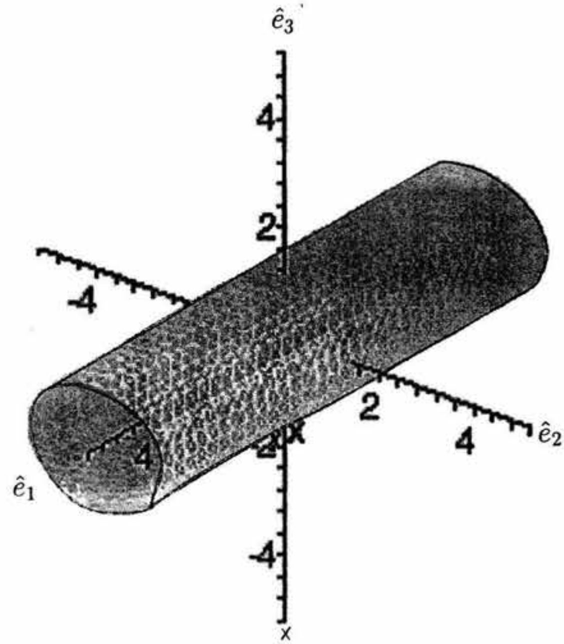
La nueva ecuación es, en su forma matricial

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 4 = 0$$

que desarrollando resulta ser

$$2y^2 + 3z^2 - 4 = 0$$

que representa un cilindro elíptico.



Cilindro Elíptico

Ejemplo 5.1.5. Se tiene la ecuación

$$2x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xy - 2yz + 2y + 2z + 1 = 0 \tag{5.5}$$

Identificamos los coeficientes

$$A = 2, \qquad B = 1, \qquad C = 2, \qquad D = 1, \qquad E = 0,$$
$$F = -1, \qquad G = 0, \qquad H = 2, \qquad I = 2 \qquad y \qquad J = 1$$

su representación matricial es la siguiente

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 1 = 0$$

notemos que la ecuación característica es la misma que en el ejercicio anterior por tanto la forma matricial de la ecuación es la siguiente

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 1 = 0$$

La ecuación resultante es

$$2y^2 + 3z^2 - \sqrt{6}x + \sqrt{2}y + 1 = 0$$

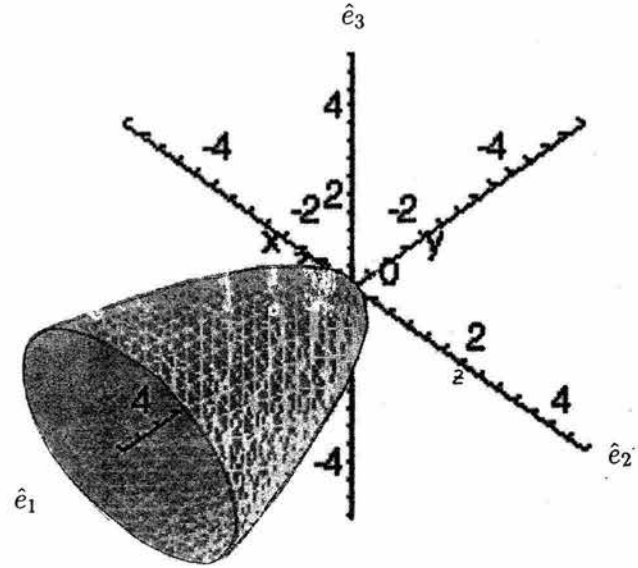
completando cuadrados

$$3z^2 + 2\left(y + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 - \sqrt{6}x + \frac{3}{4} = 0$$

trasladandonos al punto $v_0 = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{3}{4\sqrt{6}}\right)$, la ecuación que representa el lugar geométrico es la siguiente

$$3z^2 + 2y^2 - \sqrt{6}x = 0$$

que representa un paraboloide elíptico.



Paraboloide Elíptico

Conclusiones

El presente trabajo consta de una serie de ejercicios resueltos en forma vectorial para el capítulo de secciones cónicas y fué realizado con el fin de proporcionar material de apoyo a los alumnos que cursan la materia de Geometría Analítica en la Facultad de Ciencias. Esto debido a la carencia de dicho material, y a que la mayoría de las veces un ejemplo resuelto nos aclara la visión respecto a la teoría en estudio.
Los ejercicios se desarrollaron en la forma mas sencilla para su mayor comprensión y cada ejercicio muestra la gráfica de la cónica con lo cual queda mejor ejemplificado.
La teoría que se presenta en el primer capítulo es la herramienta que nos permite realizar cada uno de los ejercicios y con ella sabemos con que elementos contamos para el desarrollo de este trabajo.
También podemos tomar el presente trabajo como base para generar un programa de computación tal que al ingresar los datos que se dan en cada ejercicio, nos proporcione la solución como resultado.
Espero que sea de ayuda para los companeros de la Facultad de Ciencias.

Bibliografía

Haaser/ LaSalle/ Sullivan
Análisis Matemático I
Trillas 1976

Fuller Gordon
Geometría Analítica
continental 1985

Kindle
Geometría Analítica
Serie Schaum Mc Graw Hill 1986

Ramírez Galarza
Geometría Analítica
Las prensas de ciencias 1998

Wexler
Geometría Analítica
Montaner y Simon Barcelona 1977

Wooton/Beckenbach/Fleming
Geometría Analítica Moderna
Publicaciones cultural 1977

Preston/Lovaglia

Modern Analytic Geometry

Publicaciones del departamento de matemáticas $N^0 154$ 1997